



UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL

**TRADUCCIÓN ENTRE LOS SISTEMAS DE
REPRESENTACIÓN SIMBÓLICO Y VERBAL:
UN ESTUDIO CON ALUMNADO QUE INICIA
SU FORMACIÓN ALGEBRAICA EN SECUNDARIA**

SUSANA RODRÍGUEZ DOMINGO

GRANADA, 2015

Editorial: Universidad de Granada. Tesis Doctorales

Autora: Susana Rodríguez Domingo

ISBN: 978-84-9125-297-9

URI: <http://hdl.handle.net/10481/41014>



UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TESIS DOCTORAL

**TRADUCCIÓN ENTRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
SIMBÓLICO Y VERBAL: UN ESTUDIO CON ALUMNADO QUE
INICIA SU FORMACIÓN ALGEBRAICA EN SECUNDARIA**

Presentada por
D^a. Susana Rodríguez Domingo

Directoras:
D^a. Marta Molina
D^a. María C. Cañadas
D^a. Encarnación Castro

GRANADA, 2015

La doctoranda Susana Rodríguez Domingo y los directores de la tesis D^a. Marta Molina, D^a María C. Cañadas y D^a Encarnación Castro garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.


Granada, 9 de septiembre de 2015

Directoras de la Tesis



Fdo.: Marta Molina González

Doctoranda



Fdo.: Susana Rodríguez Domingo



Fdo.: María C. Cañadas Santiago



Fdo.: Encarnación Castro Martínez

El trabajo que se presenta en este documento pretende cumplir con el requisito de la elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctora dentro del programa de doctorado “Didáctica de la Matemática” impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España, y en el seno del grupo de investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico”.

*Para quienes me hacéis ver que,
a pesar de los errores,
o gracias a ellos,
el día a día vale la pena
y conseguís hacerme sonreír.*

AGRADECIMIENTOS

A las doctoras D^a. Encarnación Castro, D^a. Marta Molina y D^a. María C. Cañadas, quiero expresar mi más sincero agradecimiento, por ofrecerme su orientación con buena voluntad y dedicación para realizar satisfactoriamente este trabajo, por su gran paciencia y confianza ofrecida. Por sus consejos y buen trabajo en equipo. Por hacer que me sintiera una compañera más. Por esas charlas de trabajo y, por las de no trabajo, por esas reuniones en despachos y algunas fuera de los despachos. Porque sin todo ello este trabajo probablemente se habría quedado atascado y no se habría realizado. Gracias por esos paseos en coche con Encarna.

A mi familia, que de alguna manera han colaborado conmigo en todo este trabajo, mi más sincero agradecimiento. Gracias por su paciencia y comprensión en mis momentos de ausencia. En especial a mis sobrinas Natalia y Paula, que con sus risas son capaces de sacarme una sonrisa en el momento más difícil.

A Raúl y a Noelia, por estar conmigo en la recta final de este trabajo. Gracias Raúl por ser como eres, ayudarme en el día a día, por todo.

A mis amigos más cercanos: Silvia, Javier, María, Ana Belén, Benito y Miguel Ángel, gracias por entender mis aislamientos. Gracias a Encarni y Mercedes por anclarme los pies en la tierra.

Gracias también a Rodolfo, Pedro y Álvaro J. por ser mis “conejiillos de indias”.

Gracias a Álvaro J. por ayudarme a construir las piezas del dominó, por su estrés compartido, por estar ahí aun sin estar. “Beep”.

Gracias al alumnado que forma parte de este estudio y, en definitiva, a todos los que comparten mi día a día como docente y como persona. A ti, Cristina Igartua Gutiérrez, esa estrella llena de alegría que ilumina el cielo desde el 1 de marzo de 2014, que se despidió diciéndonos “no te rindas” pero siempre nos acompañará con su sonrisa eterna.

Y sobre todo a José Luis, sin su empujón no me habría embarcado en esta aventura, sin su apoyo y ánimo constante probablemente no habría llegado a completarla. Gracias, infinito.

INDICE DE CONTENIDOS

Presentación.....	1
Capítulo I. Planteamiento y justificación del problema de investigación	11
I.1. Planteamiento del problema.....	11
I.2. Objetivos de investigación	12
I.3. Motivación personal.....	13
I.4. Justificación curricular	15
I.5. Interés para la Didáctica de la Matemática	17
I.6. Contextualización en el grupo de investigación FQM-193.....	18
Capítulo II. Marco teórico	21
II.1. Álgebra	21
II.1.1. Concepción del álgebra escolar en Educación Matemática	22
II.1.2. Enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar	26
II.2. Representaciones y sistemas de representación.....	32
II.2.1. Representaciones.....	32
II.2.2. Sistemas de representación	35
II.2.3. Sistema de representación verbal.....	37
II.2.4. Sistema de representación simbólico	38
II.2.5. Traducciones entre los sistemas de representación simbólico y verbal ...	41
II.3. Errores.....	43
II.3.1. Perspectivas de los errores	43
II.3.2. Clasificaciones de errores	46
II.3.3. Clasificaciones de errores vinculados al uso del simbolismo algebraico	52
II.4. El juego en Didáctica de la Matemática	57
II.4.1. El juego como ente didáctico	57
II.4.2. Juego y matemáticas	59
II.4.3. El juego en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas	60
Capítulo III. Estudios previos.....	67
III.1. Conocimiento del simbolismo algebraico	67
II.1.1. Experiencia aritmética previa.....	68

III.1.2. Interpretación del simbolismo algebraico por el alumnado.....	70
III.1.3. Uso del simbolismo algebraico: paréntesis y signo igual.....	74
III.2. Traducción de enunciados algebraicos entre distintos sistemas de representación.....	76
III.2.1. Del sistema de representación verbal al simbolismo algebraico	77
III.2.2. Del simbolismo algebraico al sistema de representación verbal.....	82
III.3. Errores en el estudio y aprendizaje del álgebra escolar.....	83
Capítulo IV. Marco metodológico.....	89
IV.1. Tipo de investigación	90
IV.2. Sujetos.....	92
IV.2.1. Características académicas de los sujetos.....	93
IV.2.2. Organización e inclusión del trabajo de clase de los sujetos.....	94
IV.3. Diseño y desarrollo de la recogida de datos.....	97
IV.3.1. El dominó algebraico.....	98
IV.3.2. Fase 1: construcción de enunciados algebraicos no contextualizados (Ficha I)	103
IV.3.3. Fase 2: construcción de enunciados algebraicos contextualizados y relación entre distintas representaciones (torneo).....	104
IV.3.4. Fase 3: elección de enunciados algebraicos (Ficha II)	107
IV.3.5. Fase 4: entrevistas personalizadas	114
Capítulo V. Análisis de datos grupal.....	121
V.1. Análisis de errores en la construcción de enunciados algebraicos no contextualizados (Ficha I)	123
V.1.1. Balance de respuestas en la construcción de enunciados algebraicos no contextualizados	125
V.1.2. Análisis de errores en la construcción de enunciados algebraicos no contextualizados	127
V.1.3. Comparación de errores en ambos sentidos de traducción.....	136
V.1.4. Análisis de errores según las características de los enunciados algebraicos no contextualizados	137
V.1.5. Comparación de resultados en la construcción de enunciados algebraicos no contextualizados con el estudio previo	140

V.2. Análisis de errores en la construcción de enunciados algebraicos contextualizados (Torneo).....	151
V.2.1. Enunciados contruidos para el E2	154
V.2.2. Enunciados contruidos para el E3	157
V.2.3. Enunciados contruidos para el E8	160
V.2.4. Enunciados contruidos para el E12	162
V.2.5. Conclusión del análisis de la construcción de enunciados algebraicos contextualizados	167
V.3. Análisis de errores en la elección de traducciones de enunciados algebraicos (Ficha II).....	171
V.3.1. Balance de respuestas en la elección de traducciones de enunciados algebraicos (Ficha II).....	172
V.3.2. Análisis de los errores en la elección de traducciones de enunciados algebraicos	174
V.3.3. Comparación de errores en ambos sentidos de traducción en la elección de traducciones de enunciados algebraicos	191
V.4. Análisis de la lectura de las enunciados algebraicos	192
V.4.1. Lectura de enunciados algebraicos (torneo)	192
V.4.2. Lectura en la explicación de la elección de traducciones de enunciados algebraicos (Ficha II).....	195
V.5. Síntesis de resultados.....	199
V.5.1. Comparación de errores entre la construcción de enunciados no contextualizados y contextualizados (Ficha I y torneo)	201
V.5.2. Comparación de errores entre la construcción de enunciados no contextualizados y la elección de enunciados (Fichas I y II)	204
V.5.3. Comparación de errores entre la elección y la construcción de enunciados contextualizados (Ficha II y torneo).....	208
V.5.4. Desempeño general de los estudiantes en las tareas propuestas de traducción de enunciados algebraicos.....	210
Capítulo VI. Análisis de datos individual.....	219
VI.1. Sujeto S01	219
VI.2. Sujeto S02	224
VI.3. Sujeto S03	228

VI.4. Sujeto S04	229
VI.5. Sujeto S05	234
VI.6. Sujeto S06	238
VI.7. Sujeto S07	244
VI.8. Sujeto S08	249
VI.9. Sujeto S09	254
VI.10. Sujeto S10	258
VI.11. Sujeto S11	262
VI.12. Sujeto S12	265
VI.13. Sujeto S13	270
VI.14. Sujeto S14	275
VI.15. Sujeto S15	280
VI.16. Sujeto S16	285
VI.17. Síntesis del análisis realizado	291
Capítulo VII. Conclusiones y aportaciones de esta investigación.....	297
VII.1. Conclusiones respecto a los objetivos de esta investigación	298
VII.1.1. En relación al primer objetivo específico.....	298
VII.1.2. En relación al segundo objetivo específico	302
VII.1.3. En relación al tercer objetivo específico	306
VII.1.4. En relación al cuarto objetivo específico	308
VII.1.5. En relación al quinto objetivo específico	312
VII.1.6. En relación al sexto objetivo específico.....	313
VII.2. Aportes de esta investigación.....	315
VII.3. Limitaciones de esta investigación	318
VII.4. Líneas abiertas de investigación	319
Referencias	323

INDICE DE TABLAS

Tabla II.1. Contenidos actuales de álgebra en educación secundaria.....	30
Tabla II.2. Ejemplos de errores derivados de la aritmética	56
Tabla III.1. Estudios previos sobre errores.....	83
Tabla IV.1. Sujetos participantes en cada una de las fases de recogida de información	93
Tabla IV.2. Sujetos con materia pendiente de aprobar y repetición de cursos.....	93
Tabla IV.3. Diario de clase.....	95
Tabla IV.4. Relaciones entre los enunciados algebraicos	98
Tabla IV.5. Características de los enunciados incluidos en el dominó	99
Tabla IV.6. Enunciados en representación verbal para traducir a simbolismo algebraico	100
Tabla IV.7. Enunciados en simbolismo algebraico para traducir a representación verbal	101
Tabla IV.8. Organización del torneo	106
Tabla IV.9. Características de los enunciados de la Situación 1	109
Tabla IV.10. Enunciados y opciones de respuesta en la Situación 1.....	110
Tabla IV.11. Características de los enunciados de la Situación 2	111
Tabla IV.12. Enunciados y opciones de respuesta en la Situación 2.....	112
Tabla IV.13. Errores presentes en la elección de traducciones	112
Tabla IV.14. Organización de las entrevistas personalizadas	118
Tabla V.1.1. Enunciados que aparecen en las piezas de dominó	125
Tabla V.1.2. Presencia de errores por enunciado en la construcción de enunciados no contextualizados	127
Tabla V.1.3. Clasificación de errores	128
Tabla V.1.4. Frecuencia de tipos de errores en traducción de $S \rightarrow V$	130
Tabla V.1.5. Frecuencia de tipos de errores en traducción de $V \rightarrow S$	134
Tabla V.1.6. Errores según la relación numérica del enunciado en ambos sentidos....	137
Tabla V.1.7. Errores según si el enunciado es abierto o cerrado en ambos sentidos ...	138
Tabla V.1.8. Errores según el número de letras en ambos sentidos	138
Tabla V.1.9. Errores según si el enunciado es secuencial o no secuencial de $V \rightarrow S$	139
Tabla V.1.10. Errores según todas las variables de tarea de $S \rightarrow V$	139

Tabla V.1.11. Errores según todas las variables de tarea de $V \rightarrow S$	140
Tabla V.1.12. Comparación de resultados de la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados con el estudio previo	141
Tabla V.1.13. Errores según la relación numérica del enunciado de $S \rightarrow V$	144
Tabla V.1.14. Errores según si el enunciado es abierto o cerrado de $S \rightarrow V$	145
Tabla V.1.15. Errores según el número de letras de $S \rightarrow V$	145
Tabla V.1.16. Errores según todas las variables de tarea de $S \rightarrow V$ comparando con el estudio previo	145
Tabla V.1.17. Errores según la relación numérica del enunciado de $V \rightarrow S$ comparando con el estudio previo	148
Tabla V.1.18. Errores según si el enunciado es abierto o cerrado de $V \rightarrow S$ comparando con el estudio previo	149
Tabla V.1.19. Errores según el número de letras de $V \rightarrow S$ comparando con el estudio previo	149
Tabla V.1.20. Errores según si el enunciado es secuencial o no secuencial de $V \rightarrow S$ comparando con el estudio previo	149
Tabla V.1.21. Errores según todas las variables de tarea de $V \rightarrow S$ comparando con el estudio previo	150
Tabla V.2.1. Enunciados contextualizados construidos por cada sujeto	151
Tabla V.2.2. Enunciados de las piezas con punto rojo	153
Tabla V.2.3. Análisis de los enunciados construidos para E2	154
Tabla V.2.4. Análisis de los enunciados construidos para E3	157
Tabla V.2.5. Análisis de los enunciados construidos para E8	160
Tabla V.2.6. Análisis de los enunciados construidos para E12	162
Tabla V.2.7. Análisis de errores de los enunciados contextualizados construidos	167
Tabla V.2.8. Número de sujetos según el significado que dan a la parte literal y a las operaciones de los enunciados contextualizados construidos	168
Tabla V.3.1. Elecciones de los sujetos en la Situación 1 de la Ficha II	172
Tabla V.3.2. Elecciones de los sujetos en la Situación 2 de la Ficha II	173
Tabla V.3.3. Enunciados contextualizados para E1.1	176
Tabla V.3.4. Respuestas al enunciado E1.1	176
Tabla V.3.5. Enunciados contextualizados para E2.1	177
Tabla V.3.6. Respuestas al enunciado E2.1	178

Tabla V.3.7. Enunciados contextualizados para E3.1	179
Tabla V.3.8. Respuestas al enunciado E3.1	180
Tabla V.3.9. Enunciados contextualizados para E4.1	182
Tabla V.3.10. Respuestas al enunciado E4.1	182
Tabla V.3.11. Enunciados contextualizados para E1.2	185
Tabla V.3.12. Respuestas al enunciado E1.2	186
Tabla V.3.13. Enunciados contextualizados para E2.2	187
Tabla V.3.14. Respuestas al enunciado E2.2	187
Tabla V.3.15. Enunciados contextualizados para E3.2	188
Tabla V.3.16. Respuestas al enunciado E3.2	188
Tabla V.3.17. Enunciados contextualizados para E4.2	189
Tabla V.3.18. Respuestas al enunciado E4.2	190
Tabla V.3.20. Frecuencia del tipo de error por enunciado en la 1ª parte de la Ficha II	191
Tabla V.4.1. Lectura lineal o relacional de enunciados durante el torneo	192
Tabla V.4.2. Enunciados para la elección de traducciones (Ficha II)	195
Tabla V.5.1. Errores según la tarea realizada y el sentido de traducción	200
Tabla V.5.2. Errores según la tarea realizada y el tipo de error	200
Tabla V.5.3. Errores en la construcción de traducciones	202
Tabla V.5.4. Comparación de errores en la construcción y elección de enunciados....	205
Tabla V.5.5. Errores en la elección de traducciones y en la construcción de traducciones contextualizadas.....	210
Tabla V.5.6. Frecuencias generales de los errores de los estudiantes	211
Tabla V.5.7. Número de errores según la tarea realizada durante la investigación.....	213
Tabla V.5.8. Condición de los estudiantes al ser entrevistados sobre las traducciones construidas	215
Tabla V.5.9. Condición de los estudiantes ante la elección de traducciones (Ficha II)	216
Tabla VI.1. Desempeño de S01	220
Tabla VI.2. Desempeño de S02	224
Tabla VI.3. Desempeño de S03	228
Tabla VI.4. Desempeño de S04	230
Tabla VI.5. Desempeño de S05	235
Tabla VI.6. Desempeño de S06	238
Tabla VI.7. Desempeño de S07	245

Tabla VI.8. Desempeño de S08	249
Tabla VI.9. Desempeño de S09	254
Tabla VI.10. Desempeño de S10	258
Tabla VI.11. Desempeño de S11	262
Tabla VI.12. Desempeño de S12	265
Tabla VI.13. Desempeño de S13	270
Tabla VI.14. Desempeño de S14	276
Tabla VI.15. Desempeño de S15	281
Tabla VI.16. Desempeño de S16	285
Tabla VI.17. Dificultades que manifiestan los estudiantes	293

INDICE DE FIGURAS

Figura 0.1. Diseño general del proceso de recogida de datos y su análisis.....	4
Figura 0.2. Estructura general de la memoria.....	6
Figura II.1. Esquema del marco teórico	21
Figura IV.1. Esquema del marco metodológico	89
Figura IV.2. Esquema de la recogida de datos	91
Figura IV.3. Esquema de las fases de aplicación de los instrumentos	97
Figura IV.4. Piezas simples del juego	102
Figura IV.5. Piezas dobles del juego	102
Figura IV.6. Ficha I	103
Figura IV.7. Piezas de dominó marcadas	105
Figura V.1. Esquema del análisis de datos realizado	122
Figura V.1.1. Documento a completar por los sujetos (Ficha I)	124
Figura V.1.2. Tipo de respuestas en la construcción de enunciados no contextualizados	126
Figura V.1.3. Presencia del tipo de error en la construcción de enunciados no contextualizados	129
Figura V.1.4. Frecuencia de tipos de errores en traducción de simbólico a verbal.....	130
Figura V.1.5. Manifestación de errores en los enunciados simbólicos	132
Figura V.1.6. Frecuencia de tipos de errores en traducción de verbal a simbólico.....	133
Figura V.1.7. Manifestación de errores en los enunciados verbales	135
Figura V.1.8. Presencia de diferentes errores según sentido de traducción en la construcción de enunciados no contextualizados	136
Figura V.1.9. Presencia del tipo de error en la traducción de $S \rightarrow V$ en ambos grupos	142
Figura V.1.10. Presencia del tipo de error en la traducción de $V \rightarrow S$ en ambos grupos	142
Figura V.1.11. Comparación de resultados con estudio previo de $S \rightarrow V$	143
Figura V.1.12. Comparación de resultados con estudio previo de $V \rightarrow S$	147
Figura V.3.1. Elección de la opción que es traducción del enunciado dado	174
Figura V.3.2. Presencia del tipo de error de $S \rightarrow V$ (Situación 1)	175

Figura V.3.3. Presencia del tipo de error de $V \rightarrow S$ (Situación 2)	185
Figura V.5.1. Esquema de la síntesis de resultados.....	199
Figura V.5.2. Frecuencia de tipo de error en la construcción de enunciados contextualizados y no contextualizados	202
Figura V.5.3. Errores en la construcción de traducciones	204
Figura V.5.4. Errores de $S \rightarrow V$ en la construcción y elección de enunciados	206
Figura V.5.5. Errores de $V \rightarrow S$ en la construcción y elección de traducciones.....	207
Figura V.5.6. Frecuencia de tipo de error en la elección de traducciones y en la construcción de enunciados contextualizados	209
Figura VI.1. Dibujo realizado por el sujeto S12.....	269

PRESENTACIÓN

PRESENTACIÓN

Esta memoria recoge la investigación realizada por su autora, Susana Rodríguez Domingo, para obtener el título de Doctora por la Universidad de Granada, en el Programa Oficial de Doctorado en Ciencias de la Educación.

Con la elaboración de esta memoria y la defensa del trabajo de investigación que aquí presentamos, cerramos una etapa del proceso de formación investigadora de la doctoranda, iniciado en el curso académico 2010-2011 con la realización del Máster en Didáctica de la Matemática y del Trabajo Fin de Máster de título “Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria” (Rodríguez-Domingo, 2011). Dicho Trabajo de Fin de Máster constituye una primera indagación sobre el tema de investigación que abordamos en esta tesis doctoral. La investigación que se describe en esta memoria se ha desarrollado a partir de ese estudio previo, durante los cursos académicos 2011-2012 a 2014-2015, en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, bajo la dirección de las doctoras D^a Marta Molina, D^a. María C. Cañadas y D^a. Encarnación Castro.

En el estudio previo (Rodríguez-Domingo, 2011), nos planteamos indagar sobre los errores en que incurrían un grupo de estudiantes de educación secundaria, al traducir enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal (en ambos sentidos). Los resultados de dicha investigación constituyen un primer avance en el estudio de la capacidad de estos estudiantes para realizar dicha traducción y en la comprensión de enunciados que manifiestan.

Dado que los estudiantes con los que trabajamos estaban poco motivados por el aprendizaje de las matemáticas, para que la recogida de datos se hiciese atractiva diseñamos un juego, un “dominó algebraico”. El juego lo denominamos de este modo porque consta de piezas divididas en dos apartados, similares a las del dominó, y en un lado de la pieza incluye una expresión algebraica verbal y en el otro una expresión

algebraica simbólica. Ambas expresiones no están contextualizadas. Las reglas del juego son análogas a las del dominó tradicional.

En una primera fase de aplicación, donde los estudiantes debían completar las piezas para que una disposición dada de una partida de dominó fuese posible, este instrumento actuó como un test, enmascarado en el juego, y nos permitió recoger datos de forma individual del desempeño de los estudiantes al hacer traducciones entre los dos sistemas de representación indicados. El análisis de dichos datos permitió detectar y clasificar los errores en los que incurren los estudiantes participantes en dicho estudio, al realizar por escrito traducciones de enunciados entre los sistemas de representación simbólico y verbal.

En una segunda fase, consistente en un torneo con el citado dominó algebraico, en el que los estudiantes hablan entre ellos para justificar lo que hacen y pueden corregir errores de sus compañeros, se recogieron datos sobre las relaciones que los sujetos establecen entre enunciados equivalentes expresados en sistemas de representación diferentes (verbal y simbólico). El torneo con el dominó algebraico actúa en este caso como una entrevista semiestructurada. Entre las conclusiones obtenidas en este estudio previo detallamos el hallazgo observado de que estos estudiantes incurren en menos errores al reconocer la equivalencia de representaciones diferentes de un mismo enunciado, que al realizar de forma escrita las correspondientes traducciones. Suponemos que el resultado puede ser debido, por una parte, a un proceso de aprendizaje de los sujetos resultante de la realización de la primera fase del juego y del propio desarrollo de la segunda fase en grupo con los demás sujetos. Por otra parte, entendemos que dicha reducción de errores puede considerarse producto de la observación, en las piezas, de expresiones equivalentes de un mismo enunciado; en otras palabras a que el emparejamiento de expresiones dadas es una tarea más accesible que la traducción de enunciados.

Como hemos indicado, los enunciados considerados en este primer trabajo no eran contextualizados. Nos surge la inquietud por indagar sobre la actuación de los estudiantes en actividades similares donde exista un contexto para los enunciados a trabajar. Esta inquietud conecta con la investigación sobre resolución de problemas. Extraer las relaciones numéricas generales del enunciado de un problema es un heurístico previo al planteamiento simbólico de las mismas. Utilizando este heurístico,

la resolución de un problema exige traducir un enunciado contextualizado a una expresión simbólica que contiene la información necesaria para su resolución.

Partiendo de la inquietud indicada y de nuestro interés por seguir avanzando en la misma línea de investigación iniciada con el Trabajo Fin de Máster, surge el trabajo que presentamos, que avanza sobre el anteriormente realizado al incluir enunciados contextualizados en el instrumento de recogida de información con la intención de analizar, entre otros aspectos, cómo afecta la presencia de contexto en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación considerados. La primera parte de este nuevo estudio replica al anterior considerando en este caso sujetos que inician su formación algebraica, permitiéndonos así obtener información complementaria a la del Trabajo Fin de Máster.

Delimitado el tema de investigación y determinados los objetivos de la misma, procedimos al encuadre y contextualización del estudio aprovechando la experiencia del trabajo previo realizado en la misma temática, comentado con anterioridad, y ampliando la consulta de literatura relacionada con el tema de estudio. La revisión bibliográfica nos ha permitido conocer el estado de la cuestión al analizar los estudios relacionados con nuestro problema de investigación, realizados hasta la fecha. De las lecturas surgen, así mismo, preguntas e interrogantes que han conducido a precisar el problema de investigación y establecer objetivos específicos para este trabajo. A partir de ahí diseñamos la recogida de datos que hemos realizado utilizando, de forma alternativa, dos tipos de instrumentos: pruebas escritas (Ficha I y Ficha II) y entrevistas semiestructuradas (torneo y entrevistas individuales o personalizadas). Estos instrumentos requieren del estudiante la realización de tres acciones que implican la traducción de enunciados algebraicos: construir enunciados algebraicos no contextualizados, construir enunciados algebraicos contextualizados y elegir traducciones de enunciados algebraicos.

En el análisis de la información recogida con estos instrumentos distinguimos cuatro componentes:

- (a) análisis de los errores en los que incurren los estudiantes al construir traducciones de enunciados algebraicos cuando éstos son no contextualizados y expresados en representación verbal y en simbolismo algebraico, así como una comparación de los resultados obtenidos en este análisis y en el realizado en el estudio previo (Rodríguez-Domingo, 2011);

- (b) análisis de errores en la construcción de enunciados verbales contextualizados al proporcionar un enunciado representado mediante simbolismo algebraico;
- (c) análisis de errores en la elección de traducciones de enunciados algebraicos cuando éstos son contextualizados y expresados en representación verbal y en simbolismo algebraico; y
- (d) un análisis individual, de la actuación de los estudiantes a lo largo de la realización de todas las fases de recogida de información, centrado en las posibles dificultades que pueden ser la base de los errores detectados.

Estos cuatro análisis conjugan información de las pruebas escritas y de las entrevistas individuales realizadas a los estudiantes sobre sus actuaciones en cada una de las fases de la recogida de datos.

La figura 1 esquematiza el proceso de recogida de datos y su posterior análisis. Esta representación puede dar la impresión de un proceso que ha discurrido por caminos lineales, sin retrocesos, cuando en realidad ha sido más un proceso de ida y vuelta entre las diferentes partes.

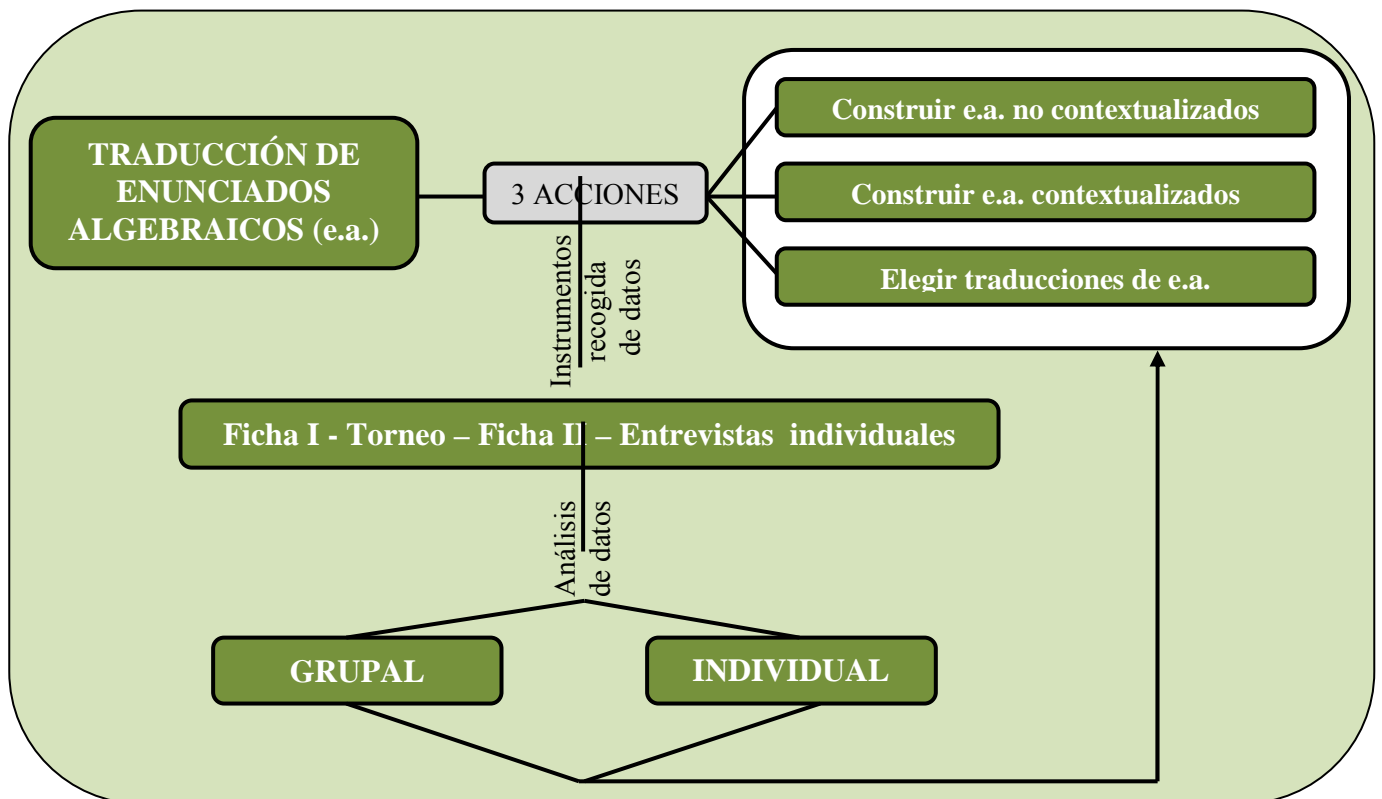


Figura 0.1. Diseño general del proceso de recogida de datos y su análisis

Esta memoria, que recoge la investigación realizada en esta tesis doctoral, está estructurada en siete capítulos cuyo contenido describimos a continuación (Figura 0.2).

Capítulo I. Planteamiento y justificación del problema de investigación. Presentamos tanto el problema de investigación como los objetivos que lo concretan y que guían la investigación. Justificamos el interés de la realización de este estudio en el área de Didáctica de la Matemática desde tres dimensiones: la experiencia personal de la autora de esta memoria, la consideración curricular del álgebra escolar y los trabajos realizados por el grupo de investigación en el que se ha desarrollado esta tesis y al que pertenecen las directoras de la misma.

Capítulo II. Marco teórico. Describimos el marco teórico que sustenta este trabajo, precisando el significado de los términos clave empleados. Se estructura en cuatro apartados: (a) el álgebra escolar en Educación Matemática, (b) representaciones y sistemas de representación, (c) errores en el estudio del álgebra escolar y (d) uso de juegos en Didáctica de la Matemática.

Capítulo III. Estudios previos. Sintetizamos los estudios previos relacionados con el tema de esta investigación, describiendo así el estado actual de la cuestión que ha centrado nuestro interés investigador.

Capítulo IV. Marco metodológico. Describimos el tipo de investigación realizada y los sujetos participantes, detallamos los dos tipos de instrumentos utilizados para la recogida de datos y definimos su proceso de elaboración y de aplicación.

Capítulo V. Análisis de datos grupal. Presentamos los resultados obtenidos tras analizar los datos provenientes de las tareas propuestas a los estudiantes en las fases de recogida de información. Se trata de un análisis cuantitativo pues realizamos un recuento y una estadística básica de estos resultados.

Capítulo VI. Análisis de datos individual. Realizamos un análisis cualitativo individual del desempeño de los estudiantes a lo largo de todo el proceso de recogida de información.

Estos dos capítulos, V y VI, aunque se presentan de manera lineal, se han realizado de manera conjunta.

Capítulo VII. Conclusiones y aportaciones de esta investigación. Exponemos las conclusiones y las aportaciones de esta investigación, así como las limitaciones que hemos encontrado y las líneas abiertas que hemos detectado para poder ampliar con otras investigaciones futuras.

Finalizamos esta memoria recogiendo las referencias citadas en la misma.

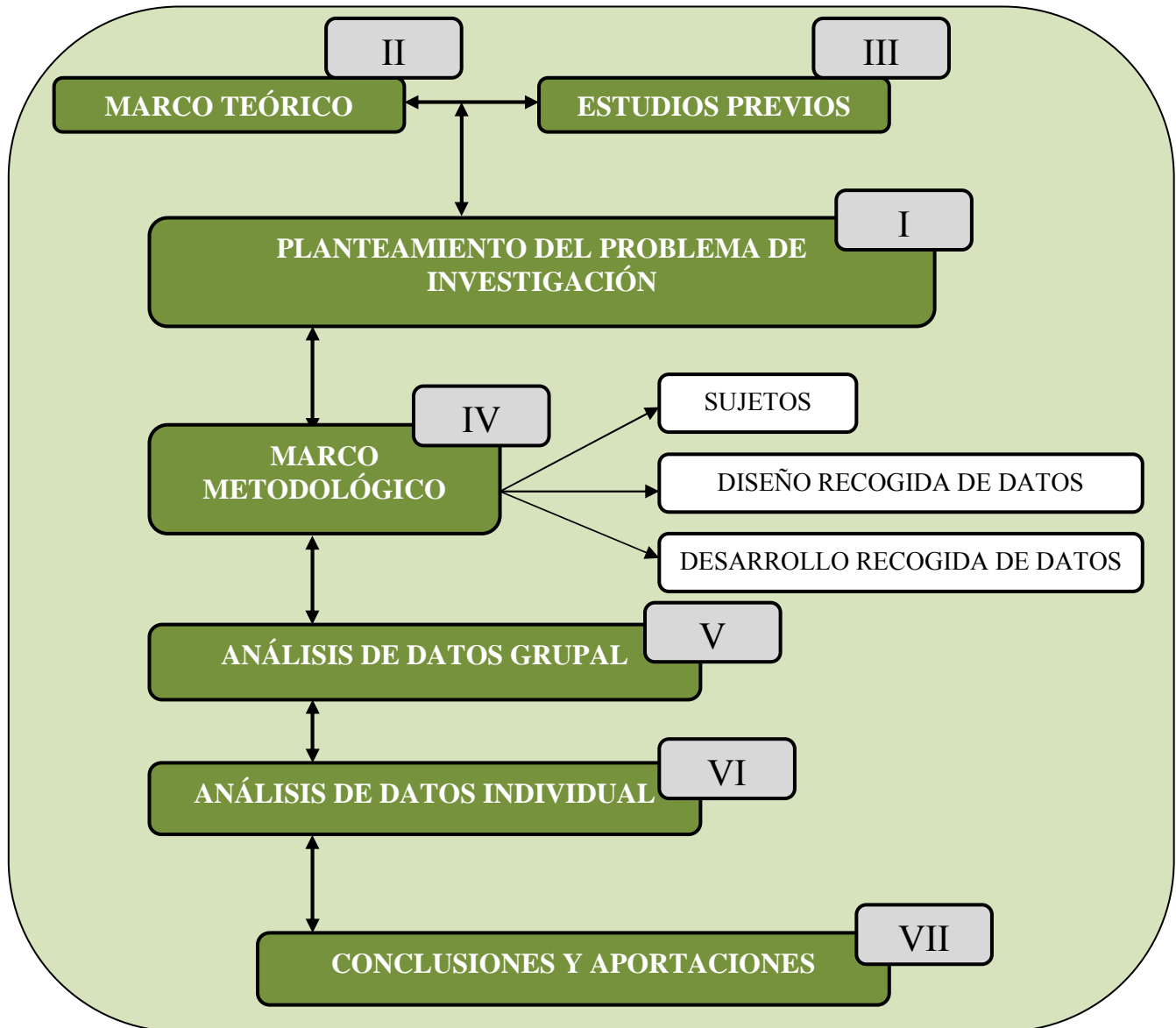


Figura 0.2. Estructura general de la memoria

Acompañando a esta memoria presentamos varios Anexos¹:

Anexo A: Instrumentos utilizados para la recogida de datos: Ficha I, dominó algebraico, Ficha II y guiones para las entrevistas personalizadas.

¹ Los Anexos se incluyen en un CD junto con la memoria de esta Tesis Doctoral.

Anexo B: Producciones de los estudiantes en la Ficha I, correspondientes a la primera fase de la recogida de datos.

Anexo C: Transcripciones de las grabaciones de audio realizadas durante la segunda fase de la recogida de datos, el torneo.

Anexo D: Producciones de los sujetos en la Ficha II, correspondientes a la tercera fase de la recogida de datos.

Anexo E: Transcripciones de las entrevistas individuales realizadas en la última fase de recogida de información.

DIFUSIÓN DE ESTA INVESTIGACIÓN

Resultados de esta investigación han sido presentados previamente en distintas comunicaciones o artículos. Los presentamos a continuación:

- *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Trabajo Fin de Máster realizado en 2011. Granada, España: Universidad de Granada.
- *Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico*. Comunicación presentada en XV SEIEM (Septiembre de 2011). Ciudad Real.
- *Errors in translations between verbal and symbolic representations of algebraic statements. A work in progress*. Comunicación presentada en Seminars of the Institute of Education-Professional Studies-2011. Londres, Reino Unido.
- *Errors in algebraic statements translation during the creation of an algebraic domino*. Comunicación presentada en ICME 12 (12th International Congress on Mathematical Education). Del 8 al 15 de Julio de 2012, Seúl, Korea.
- *Traducción de enunciados algebraicos en un torneo con un dominó algebraico*. Comunicación presentada en XVI SEIEM (20-21-22 septiembre 2012). Baeza, Jaén.
- *Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico*. En Sagula, Jorge E. (Ed.), Memorias del SEM 2012. Simposio de Educación Matemática (pp. 1214-1234). Argentina: Edumat.

- Rodríguez-Domingo, S. y Molina, M. (2013). De lo verbal a lo simbólico: un paso clave en el uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas y la modelización matemática. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 111-118). Granada, España: Comares.
- Seminario titulado *Translations between verbal and symbolic representations of algebraic statements. A work in progress*. Presentado en Department of Education of Tufts University en 2013. Boston (Estados Unidos).
- *Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal*. Artículo publicado en 2015. *PNA*, 9(4), 273-293.

CAPÍTULO I

CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo detallamos el problema de investigación abordado en esta tesis doctoral, el cual se concreta por medio de objetivos de investigación. Posteriormente, describimos la motivación y justificación de este estudio desde una perspectiva curricular y desde la investigación en Didáctica de la Matemática. Finalmente enmarcamos esta investigación en el marco de los trabajos que se vienen realizando en el grupo de investigación FQM-193 “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico”.

I.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este trabajo nos proponemos indagar en la capacidad para traducir enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico que ponen de manifiesto estudiantes de educación secundaria al inicio de su formación obligatoria en álgebra. Con este interés, centramos nuestra atención en la clasificación y análisis de los errores en los que incurren los estudiantes al abordar dichas traducciones para enunciados algebraicos contextualizados y no contextualizados.

Dadas las numerosas dificultades que evidencian los estudiantes en el aprendizaje del álgebra y los errores en los que incurren, este campo es de gran interés para la investigación en Educación Matemática y así lo ponen de manifiesto diferentes investigaciones, tanto a nivel internacional como nacional. Estudios previos como los realizados por Arcavi (1994), Bednarz, Kieran y Lee (1996), Kaput (1998, 2000), Küchemann (1981) o MacGregor y Stacey (1997), entre otros, plantean la problemática existente en la adquisición de dominio y comprensión del simbolismo algebraico. La importancia de analizar las dificultades y los errores en que incurren los estudiantes en el álgebra es destacada por investigadores como Palarea (1998) quien determina que

“estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático, pero los profesores tienen que conocerlas y reflexionar sobre ellas para facilitar su explicitación por parte de los alumnos” (p. 74).

Los estudios anteriormente mencionados son una pequeña muestra de los realizados en este campo del aprendizaje del álgebra escolar. Si bien es cierto que en este campo se ha indagado mucho, en la literatura de Educación Matemática encontramos un escaso número de trabajos que exploran los procesos de traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. El paso del lenguaje verbal al simbólico es abordado en algunas investigaciones centradas en la resolución de problemas (e.g., Clement, 1982; Clement, Lochhead y Monk, 1981; Duval, 2006; Gagatsis y Shiakilla, 2004; Gagatsis, Elia y Mousoulides, 2006), como uno de los pasos iniciales al abordar un problema resoluble algebraicamente. Menor atención ha recibido la traducción del sistema de representación simbólico al verbal, habiendo sido abordada desde estudios que exploran el papel de la escritura verbal en el aprendizaje del álgebra (e.g., MacGregor, 1990; Wollman, 1983).

Las conclusiones de las investigaciones consultadas nos llevan a plantearnos cuestiones como si existen diferencias en el tipo de errores en los que incurren los estudiantes al traducir enunciados algebraicos según el sistema de representación en que estos vengán expresados, qué influencia tienen las características de los enunciados en estos procesos de traducción o si existen diferencias cuando los enunciados algebraicos que tienen que traducir los estudiantes están o no explícitamente relacionados con situaciones de la vida real, esto es, están o no contextualizados.

I.2. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

El **objetivo general** de este estudio es analizar el proceso de traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal que realizan estudiantes de secundaria que están iniciándose en el estudio del álgebra escolar. Abordamos este análisis atendiendo a: (a) los errores en los que incurren estos estudiantes; (b) la persistencia de estos errores al término de la Educación Secundaria Obligatoria; (c) el efecto de la presencia o ausencia de contexto en la representación

verbal en dicho proceso; (d) las relaciones que establecen entre representaciones equivalentes de un mismo enunciado; y (e) el significado que dan a las letras y signos operacionales contenidos en enunciados expresados mediante simbolismo algebraico.

Concretamos este objetivo general en los siguientes **objetivos específicos**:

- **OE₁**: Identificar y clasificar los errores en que incurren estudiantes, al inicio de su formación en álgebra, al construir traducciones de enunciados algebraicos no contextualizados entre los sistemas de representación simbólico y verbal.
- **OE₂**: Comparar los errores identificados y sus frecuencias (OE₁) con los identificados en nuestro estudio previo realizado con estudiantes que habían concluido el estudio del álgebra escolar correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria.
- **OE₃**: Analizar los errores en los que incurren estudiantes, al inicio de su formación en álgebra, al construir traducciones de enunciados algebraicos contextualizados entre los sistemas de representación simbólico y verbal.
- **OE₄**: Analizar los errores en los que incurren estudiantes, al inicio de su formación en álgebra, al elegir traducciones de enunciados algebraicos cuando estos vienen expresados mediante simbolismo algebraico y representación verbal.
- **OE₅**: Describir cómo estudiantes, al inicio de su formación en álgebra, establecen relaciones entre representaciones verbales y simbólicas equivalentes de enunciados algebraicos.
- **OE₆**: Identificar el significado que estudiantes, al inicio de su formación en álgebra, dan a las letras y a los signos operacionales al construir traducciones contextualizadas, expresadas verbalmente, de enunciados dados simbólicamente.

I.3. MOTIVACIÓN PERSONAL

La experiencia profesional de la profesora investigadora de este estudio, funcionaria del cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria de la Junta de Andalucía desde el año 2006, es variada. Desde dicha fecha imparte docencia en tres Institutos de

Enseñanza Secundaria (IES) diferentes: IES Blas Infante (Ogíjares, Granada), durante los cursos 2006-2007 y 2007-2008; IES Pablo de Olavide (La Carolina, Jaén), durante los cursos 2008-2009 y 2009-2010; e IES Francisco Javier de Burgos (Motril, Granada), desde el curso escolar 2010-2011 hasta el momento. Una de las razones que motivaron a la profesora investigadora para realizar el Doctorado en Didáctica de la Matemática fue profundizar en la comprensión del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para enriquecer su formación como docente e iniciarse en la actividad investigadora.

En sus años como docente, la autora de esta memoria observó que se dedica un amplio período de tiempo, en Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato, a la práctica de traducciones de enunciados algebraicos del sistema verbal al simbólico, en diferentes contextos. A pesar de ello, los estudiantes siguen teniendo dificultades e incurrir en errores en el trabajo de este tipo de traducciones y de técnicas algebraicas básicas.

A raíz de estas observaciones, creció en ella el interés por conocer e indagar sobre este tema. En el trabajo previo realizado (Rodríguez-Domingo, 2011), uno de los objetivos fue indagar en los errores en que incurrían los estudiantes al traducir enunciados algebraicos del sistema de representación verbal al simbólico, y viceversa. El estudio comenzado en dicho trabajo, del que es continuación esta tesis doctoral, va en la línea de buscar la mejora de la enseñanza del álgebra, principalmente en lo que refiere a los procesos de traducción entre los sistemas de representación mencionados. El foco de este estudio es un paso clave en la resolución de problemas, ya que para resolver problemas contextualizados mediante el uso del álgebra, el primer paso es traducir un enunciado verbal a su representación simbólica para, a partir de ahí, manipular la expresión algebraica mediante las normas de operaciones que establece el propio simbolismo algebraico y llegar a un resultado.

La motivación del trabajo de investigación que presentamos en esta tesis doctoral radica en el interés por indagar sobre las dificultades y los errores detectados en el alumnado de ESO al manejar el simbolismo algebraico. El alumnado comienza el estudio de álgebra en los cursos del primer ciclo de secundaria. Sin embargo, en los últimos cursos de los estudios obligatorios, sigue manifestando dificultades para relacionar enunciados equivalentes en lenguaje verbal y simbolismo algebraico. Esta

dificultad condiciona la capacidad del citado alumnado para resolver problemas en los que es necesario traducir la expresión del problema, dado normalmente en lenguaje verbal, a simbolismo algebraico. Es preocupación de los docentes la cantidad y variedad de errores que encuentra en su alumnado, observando que gran parte de los estudiantes incurre en los mismos errores de forma reiterada (Castro, 2012). Este hecho nos lleva a pensar que los estudiantes tienen serias dificultades en la comprensión de los procesos de transformación entre estos sistemas de representación algebraicos.

I.4. JUSTIFICACIÓN CURRICULAR

Los documentos curriculares vigentes para la educación secundaria en España en el momento de la recogida de datos de esta tesis doctoral (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006) y Andalucía (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a), comunidad autónoma a la que pertenece el centro donde cursan sus estudios los sujetos participantes en esta investigación, destacan entre las expectativas de aprendizaje de esta etapa lo siguiente: que el alumnado sea capaz de utilizar adecuadamente el simbolismo algebraico y traducir entre los sistemas de representación simbólico y verbal, enfatizando la importancia del simbolismo algebraico para la comunicación en contextos matemáticos o científicos e incluso de otros ámbitos de la actividad humana.

Se indica que todos los bloques de contenidos deben estar orientados a “aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática, y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas adecuadas” (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006, p. 687).

La adecuada utilización progresiva de símbolos y expresiones contribuirá al desarrollo natural de las destrezas algebraicas, que se facilitará con la lectura e interpretación simbólica de las situaciones problemáticas que se planteen y, en sentido inverso, con la traducción al lenguaje verbal de expresiones y resultados algebraicos. De esta manera, las Matemáticas deberán concebirse, entre otras muchas cosas, como un vehículo de comunicación y expresión de ideas, que contribuirá a la comprensión de otras materias. (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b, pp. 53-54)

Los criterios de evaluación que se proponen en ambos documentos pretenden comprobar si el alumnado puede manipular expresiones algebraicas así como hacer uso de estas manipulaciones para enfrentarse a problemas de la vida cotidiana, señalando la importancia de saber traducir situaciones reales al simbolismo algebraico.

En 2º de ESO, curso al que pertenecen los sujetos de este estudio y donde los estudiantes se inician en el estudio del álgebra escolar, dentro del bloque de álgebra de la materia de matemáticas, se establece que se debe trabajar:

El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Obtención del valor numérico de una expresión algebraica. Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación. Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución. Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido. (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a, p. 754)

Las distintas formas de comunicación oral y escrita de los resultados obtenidos en un proceso algebraico, así como la formulación clara y precisa del planteamiento y los procesos a seguir en la resolución de problemas constituyen, por tanto, una parte esencial de la asignatura de matemáticas en educación secundaria.

Desde un punto de vista internacional, en relación con el simbolismo algebraico, el NCTM (2000) además de proponer que la enseñanza y el aprendizaje del álgebra se integre con otros tópicos del currículo, también determina que los programas de enseñanza de todas las etapas educativas, en concreto para la etapa 6-8 correspondiente en nuestro sistema educativo al primer y segundo curso de secundaria (12-14 años), deberían capacitar a los estudiantes para:

- (a) comprender patrones, relaciones y funciones usando, cuando sea posible, reglas simbólicas, relacionando y comparando distintas formas de representación de una relación;*
- (b) representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos;*
- (c) utilizar modelos matemáticos y*

(d) *analizar el cambio en contextos diversos.*

(p. 226)

De cara al ámbito escolar, además de mantener los ejes relacionados con la resolución de problemas, comunicación, razonamiento y demostración y conexiones, los estándares curriculares (NCTM, 2000), añaden la representación. Uno de los objetivos de las matemáticas es la flexibilidad en el uso de las representaciones. En concreto, el Estándar número 10 señala:

Los programas de instrucción en matemáticas desde educación infantil hasta bachillerato deben permitir a todos los estudiantes:

- *Crear y usar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas.*
- *Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas en la resolución de problemas.*
- *Usar representaciones para modelar e interpretar fenómenos físicos sociales y matemáticos* (NCTM, 2000, pp. 67, 136, 206, 280 y 360).

I.5. INTERÉS PARA LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

La investigación realizada permite enlazar las dimensiones teórica y práctica de la investigación en Didáctica de la Matemática, en el ámbito del álgebra escolar. Los aportes científicos de esta investigación podemos considerarlos desde dos puntos de vista: investigador e implicaciones para la docencia.

Desde el punto de vista de la investigación en Didáctica de la Matemática, creemos que el estudio realizado con esta investigación, dentro de los estudios llevados a cabo sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar, aporta información sobre los procesos de traducción de enunciados algebraicos entre distintos sistemas de representación, en concreto cuando los estudiantes han de expresar mediante representación verbal, enunciados dados expresados mediante simbolismo algebraico, aspecto que se ha estudiado relativamente poco hasta ahora. Otros investigadores pueden tomar como punto de partida tanto el aporte teórico como los resultados del

experimento para impulsar nuevas investigaciones dentro del campo de la Didáctica de la Matemática.

El paso del lenguaje verbal al simbolismo algebraico ha sido abordado en investigaciones centradas en la resolución de problemas (Clement, 1982; Clement, Lochhead y Monk, 1981; Duval, 2006; Gagatsis y Shiakilla, 2004; Gagatsis, Elia y Mousoulides, 2006), como uno de los pasos iniciales al abordar un problema resoluble algebraicamente. Menor atención ha recibido la traducción del sistema de representación simbólico al verbal, habiendo sido abordada desde estudios que exploran el papel de la escritura verbal en el aprendizaje del álgebra (Wollman, 1983; MacGregor, 1990). Consideramos que el análisis de los procesos de traducción en los dos sentidos pueden ser de utilidad para: (a) profundizar en la comprensión que poseen los estudiantes del simbolismo algebraico y ayudar en la exploración de estrategias de enseñanza en el aprendizaje del álgebra y (b) indagar sobre las dificultades que tienen para escribir simbólicamente aquello que pueden encontrar enunciado de forma verbal.

Con el análisis realizado en el estudio previo (Rodríguez-Domingo, 2011) dimos un primer paso en la indagación sobre la capacidad que ponen de manifiesto estudiantes de secundaria para realizar dicha traducción y sobre su comprensión de los enunciados en cada uno de los sistemas de representación mencionados. Este análisis ha sido ampliado con el estudio recogido en esta tesis doctoral. Consideramos que la investigación realizada aporta información útil para el desarrollo de investigaciones centradas en la resolución de problemas dados verbalmente, donde es necesario realizar, previamente a su resolución, una traducción del enunciado entre distintos sistemas de representación. Desde el punto de vista de la docencia, puede ser interesante elaborar propuestas didácticas considerando, por ejemplo, la metodología empleada para la recogida de información o los errores en que los estudiantes incurren, planteando determinadas tareas que constituyan oportunidades de aprendizaje para los estudiantes.

I.6. CONTEXTUALIZACIÓN EN EL GRUPO DE INVESTIGACIÓN FQM-193

El trabajo que presentamos se ha realizado en el seno del grupo de investigación FQM-193 “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico”, en la Universidad de

Granada. Este grupo está interesado, entre otros aspectos, en el estudio de las dificultades que los jóvenes encuentran en el manejo de las estructuras numéricas cuando se enfrentan a nociones de matemática avanzada. Se ocupa del aprendizaje de conceptos numéricos en el sistema escolar y de la utilidad que tiene la noción de representación para analizar e interpretar la comprensión de tales conceptos por parte de los escolares.

Una de las líneas de trabajo del mencionado grupo está centrada en el álgebra escolar, habiéndose realizado en el seno de la misma una serie de trabajos de investigación los cuales permiten enmarcar esta tesis. Esta investigación, por tanto, no responde a un trabajo puntual y aislado sino que forma parte de una línea de investigación centrada en la problemática de la enseñanza/aprendizaje del álgebra.

Entre los trabajos que anteceden a esta tesis, desarrollados en el seno del grupo, encontramos algunos centrados en estudio de patrones (Castro, 1994), razonamiento inductivo (Cañadas, 2002, 2007), álgebra escolar (Bedoya, 2002; Espinosa, 2005; Fernández, 1997; Fernández-Millán, 2013; González, 2010; Martínez, 2011; Molina, 2004, 2006; Ortiz, 2002; Rodríguez-Domingo, 2011; Vega-Castro, 2010, 2013), generalización (Merino, 2012; Trujillo, 2008), y errores y dificultades (García, 2010).

CAPÍTULO II

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

En este capítulo describimos el marco teórico que sustenta este trabajo, precisando el significado de los términos clave empleados. En la figura II.1 recogemos los apartados en los que se estructura este capítulo, correspondiéndose cada región de la figura con un apartado del capítulo, visualizando la intersección en la que se enmarca nuestro trabajo. Separado aparece un apartado dedicado al juego, que ha formado parte de forma colateral en esta investigación.

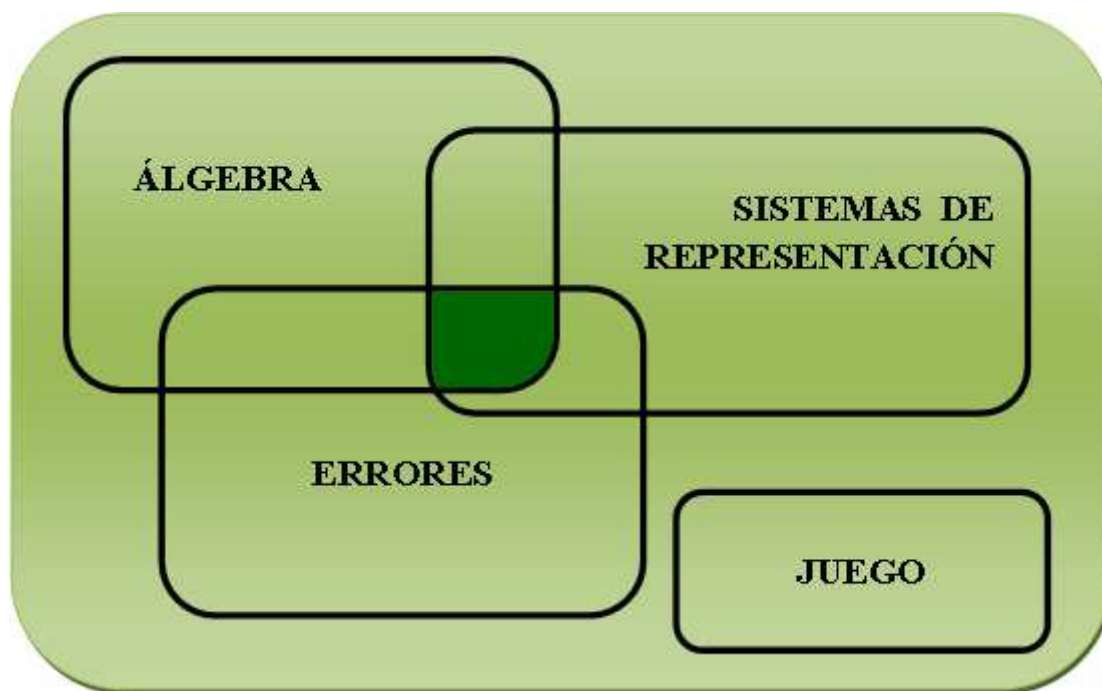


Figura II.1. Esquema del marco teórico

Los ejes temáticos considerados son los siguientes: álgebra, sistemas de representación, errores, y juego en Educación Matemática.

II.1. ÁLGEBRA

En este primer apartado hacemos un análisis de la concepción del álgebra escolar en Educación Matemática, destacando los aspectos más relevantes para nuestra

investigación: el álgebra como medio para resolver problemas y su concepción como lenguaje o sistema de representación.

II.1.1. CONCEPCIÓN DEL ÁLGEBRA ESCOLAR EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Empleamos el término álgebra escolar, en adelante álgebra, para centrar la atención en el álgebra propia de la educación no universitaria que en nuestro actual sistema educativo es objeto de enseñanza durante la etapa de educación secundaria obligatoria y bachillerato donde los estudiantes tienen una edad comprendida entre doce y dieciocho años.

El álgebra es considerada como el estudio de conjuntos de elementos, cuya naturaleza puede no estar especificada, y de las propiedades formales de sus leyes de composición (Bouvier y George, 2000). Es, entre otras cosas, una herramienta para la comprensión, expresión y comunicación de generalizaciones, para revelar estructura, para establecer conexiones y para formalizar los argumentos matemáticos (Arcavi, 1994; Gómez, 1995).

La concepción del álgebra escolar ha ido cambiando a lo largo de la historia de la Educación Matemática. Usiskin (1988) propone una categorización de las percepciones del álgebra: aritmética generalizada, el estudio de procedimientos para resolver problemas, el estudio de relaciones entre cantidades (incluyendo la modelización y las funciones) y el estudio de estructuras. Bednarz et al. (1996) distinguen las siguientes concepciones diferentes: la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y el estudio de las funciones.

Otra visión del álgebra es la del NCTM (2000), donde se distinguen como componentes: la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio.

Por otra parte, Drijvers y Hendrikus (2003) distinguen en la literatura existente, cuatro enfoques del álgebra que entienden como una categorización fenomenológica. El

primer enfoque se centra en el álgebra como un medio para resolver problemas; el segundo, en el estudio de las funciones, es decir, de relaciones entre variables. En tercer lugar hacen referencia a un enfoque centrado en la generalización de relaciones y el estudio de patrones y estructuras. El último enfoque se centra en el lenguaje, considerando el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, en otras palabras, como un sistema de representación.

Los diferentes enfoques son señalados para abordar la introducción y enseñanza del álgebra escolar desde perspectivas muy diferentes, como son la resolución de problemas, el estudio de estructuras algebraicas, las reglas para la transformación y resolución de ecuaciones, la generalización de leyes de los conjuntos numéricos o la introducción del concepto de variable y de función (Bednarz et al., 1996).

No obstante, como señalan Drijvers y Hendrikus (2003), en la práctica educativa dichos enfoques no pueden ser separados radicalmente debido a que una situación o contexto a menudo provoca actividades algebraicas de diferentes enfoques.

Autores como Bednarz et al. (1996), Bell (1988) y Molina (2012) insisten en que solo un equilibrio entre las diferentes concepciones del álgebra, y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, puede permitir al alumnado comprender en profundidad la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico.

En la actualidad la concepción del álgebra es, por tanto, multidimensional, distinguiéndose varios componentes o enfoques en la literatura existente: (C1) el estudio de la generalización de relaciones y el estudio de patrones; (C2) el estudio de relaciones funcionales, es decir, de relaciones entre variables; (C3) el álgebra como un medio para resolver problemas; (C4) el estudio de estructuras; y (C5) el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, es decir, como un lenguaje (Blanton y Kaput, 2005; Bednarz, Kieran y Lee., 1996; Drijvers y Hendrikus, 2003; Kaput, 1998, 2000; Molina, 2006). A continuación, describimos con cierto detalle dos de estas componentes: el álgebra como medio para resolver problemas y su concepción como lenguaje, por ser con las que más relación tiene este trabajo.

C3. El álgebra como un medio para resolver problemas

Esta concepción del álgebra es la más próxima a los orígenes del álgebra como herramienta privilegiada para la expresión de métodos generales que resuelven clases de problemas (Kieran, 2007). En caso de utilizarse simbolismo algebraico las letras tienen el significado de incógnitas y parámetros.

Parece normal considerar que los problemas no tienen por qué provenir de las matemáticas en sí mismas; a menudo proceden de otras áreas como la física, economía, vida profesional, por lo que incluimos dentro de esta concepción la modelización de fenómenos físicos (Molina, 2012).

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la resolución de problemas no solo constituye un objetivo del aprendizaje sino que también es una metodología para alcanzarlo, según determina el NCTM (2000), pues utilizar la resolución de problemas para ayudar a los estudiantes a desarrollar con fluidez destrezas específicas les beneficia también a la hora de abordar sus problemas cotidianos. Además, el Ministerio de Educación y Ciencia (2006) define los contenidos y objetivos de aprendizaje para la ESO en España, donde especifica que en todos los cursos se considera un eje transversal que hace referencia a un tema básico del currículo, la resolución de problemas, indicando que

la resolución de problemas es capaz de activar las capacidades básicas del individuo, como son leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo, revisarlo, adaptarlo, generar hipótesis, verificar el ámbito de validez de la solución, etc., pues no en vano es el centro sobre el que gravita la actividad matemática en general. (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006, p. 750)

Se entiende por tanto que la resolución de problemas al ser un eje transversal en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar su uso fomenta la autonomía e iniciativa personal de los estudiantes (Martínez, 2011). Existen diferentes consideraciones curriculares sobre el uso de la resolución de problemas. Schroeder y Lester (1989) distinguen entre enseñar *sobre* resolución de problemas, *para* resolver problemas o *vía* resolución de problemas” (p. 58). De Guzmán (1984) argumenta sobre la importancia de proporcionar al alumnado la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos.

Lo que importa no es obtener la solución, sino el camino que lleva hacia ella, y la habilidad para resolver problemas es una de las capacidades básicas que los estudiantes deben tener a lo largo de sus vidas. Según Duval (2006) “resolver problemas ‘de la vida real’ demanda que los estudiantes utilicen su experiencia física o diaria y sus representaciones mentales” (p. 163).

Los problemas algebraicos poseen un enunciado verbal en el que se muestran las relaciones entre los datos del problema. Dichas relaciones es necesario expresarlas en simbolismo algebraico para resolver el problema lo que produce errores debido a la dificultad que encuentran los estudiantes para hacer esta traducción entre los dos sistemas de representación (Castro, 2012).

En este trabajo de investigación consideramos la traducción de enunciados algebraicos entre el sistema de representación verbal y el simbolismo algebraico, paso que consideramos esencial a la hora de abordar la resolución de problemas mediante el uso del álgebra, pues para poner un problema en ecuaciones “hay que traducir el enunciado del problema, que está escrito en lenguaje natural, al lenguaje algebraico” (Puig, 1998, p.5), para lo que hay que comprender primero el enunciado del problema.

C5. El álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas

Considerar el álgebra como un medio de expresar ideas matemáticas, en otras palabras o sistema de representación, es otra de sus concepciones. En este caso se está centrando la atención en la componente del álgebra denominada simbolismo algebraico.

Bell (1995) determina que el álgebra es de los únicos lenguajes formales que tiene reglas de formación basadas en la manipulación de símbolos. Ésta es una idea extendida en Educación Matemática. Es un lenguaje compacto e inequívoco lo que hace que sea altamente aplicable en otras áreas. Se utiliza para representar ideas algebraicas separadas del contexto inicial y concreto del que surgen, esta es una de sus fortalezas: nos permiten separarnos e incluso olvidar los referentes para producir resultados de forma más eficiente (Arcavi, 1994). Autores como Caspi y Sfard (2011) profundizan en ella y, tras realizar un análisis de estudios de otros autores como Lee (1996), destacan que se trata de un “discurso, esto es, una forma de comunicación” (p. 1). Considerar el álgebra como un lenguaje con su propia gramática, realizando un acercamiento estructural al álgebra, donde el significado de los símbolos literales viene determinado

por la estructura sintáctica del lenguaje, y poniendo énfasis en la correcta manipulación de los signos son algunas de las propuestas de investigadores como Boero, Douek y Ferrari (2008) y Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005) para mejorar el aprendizaje del álgebra.

II.1.2. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

A nivel internacional, se hacen críticas en la enseñanza tradicional del álgebra, basadas principalmente en la gran cantidad de jóvenes “que fracasan en este área y dejan de estudiar matemáticas, la falta de conexión entre el álgebra y las demás áreas de las matemáticas y la ausencia de significado en el aprendizaje algebraico adquirido por los estudiantes” (Molina y Castro, 2006, p. 1). Estas críticas han motivado un creciente interés en la investigación de la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Ake, 2013; Butto y Rojano, 2010; Castro, 2012; Kaput, 1998; Kieran, 1992; Van Ameron, 2003).

a) Introducción del álgebra en la escuela

Tradicionalmente el álgebra se sitúa en el currículo escolar después que la aritmética, al ser el álgebra como generalización de la aritmética una de las concepciones más frecuentemente consideradas. Entre los argumentos que justifican esta organización encontramos que la aritmética es considerada concreta, y, por tanto, más fácil que el álgebra, que es más abstracta. Esta visión es defendida alegando que el álgebra requiere de pensamiento formal mientras que la aritmética no, y que al corresponder el pensamiento formal con una etapa de desarrollo posterior, el álgebra debe abordarse después de la aritmética (Lins y Kaput, 2004). Tenemos ejemplos de investigaciones (Wagner y Kieran, 1989, Bednarz et al, 1996; Filloy, Puig y Rojano, 2008) que han reportado las dificultades del alumnado en el paso desde la aritmética hasta el álgebra en secundaria, dificultades que están centradas en la manipulación de letras y en dotar a esta actividad de significado (Kieran, 1992).

El inicio de la enseñanza del álgebra escolar se caracteriza por la introducción de los símbolos literales, comúnmente llamados variables, para representar números (Ursini et al., 2005). A pesar de que los estudiantes tienen acceso al uso de letras en primaria, principalmente con el estudio de fórmulas geométricas, no suele darse a las letras una interpretación algebraica hasta el estudio del álgebra en secundaria.

Tradicionalmente la enseñanza y el aprendizaje del álgebra han sido pospuestos hasta que los estudiantes han adquirido los conocimientos adecuados de aritmética, tal y como destaca Radford (2010, 2011). Sin embargo, en la actualidad, se considera la idea de que el aprendizaje de la aritmética no tiene que ser un requisito previo para el aprendizaje del álgebra. En el estudio que realiza este investigador, determina que el pensamiento algebraico no aparece por casualidad ni como consecuencia de la maduración cognitiva, sino que es necesario que se den una serie de condiciones pedagógicas; asegurando también que hay ciertos límites en lo que puede lograrse. En su trabajo, Radford (2010) y Stephens y Wang (2008) establecen que las primeras formas de pensamiento algebraico pueden aparecer en los estudiantes de siete u ocho años de edad, y nos invitan a revisar la relación entre la aritmética y pensamiento algebraico.

La propuesta de introducir el álgebra desde los primeros cursos de la escolarización, es conocida como *early-algebra* (Carpenter y Levi, 2000), y va acompañada de una amplia concepción del álgebra que engloba aspectos como el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas (incluyendo la aritmética generalizada), el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, desarrollo y la manipulación del simbolismo y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Kaput, 1998). El objetivo del *early-algebra* “no es solo facilitar el posterior estudio del álgebra, sino promover en el alumnado un aprendizaje, con comprensión, más profundo y complejo de las matemáticas escolares” (Molina, 2011, p. 28). Este objetivo del *early-algebra* se considera múltiple pues pretende: (a) añadir coherencia, profundidad y poder al currículo de la educación básica; (b) facilitar el acceso del alumnado al pensamiento y actividad algebraica favoreciendo el desarrollo de una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de educación secundaria; (c) dar tiempo para el desarrollo progresivo y prolongado de los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica, así como de los significados nuevos o más amplios para los símbolos presentes en la aritmética y el álgebra escolar; y (d) eliminar la costosa introducción del álgebra en los niveles de educación secundaria. (Kaput, Carraher y Blanton, 2009; Molina, 2009; NCTM, 2000).

Molina (2011) destaca la importancia de no confundir la propuesta del *early-algebra* con otro enfoque relacionado con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas antes

de la enseñanza formal del álgebra conocido como pre-álgebra. Sus finalidades son diferentes ya que la pre-álgebra solo persigue suavizar la transición de la aritmética al álgebra y así mitigar las dificultades que típicamente encuentra el alumnado en el aprendizaje del álgebra, supuestamente debidas a la diferente naturaleza de ambas sub-áreas (Carraher y Schliemann, 2007). La propuesta de aprendizaje de early-algebra defiende el hecho de que distintos modos de pensamiento algebraico surgen de manera natural entre el alumnado de educación primaria lo que favorece el aprendizaje de la aritmética, de modo que “se considera que unas matemáticas elementales ‘algebrizadas’ darán poder a los estudiantes, promoviendo un mayor grado de generalidad en su pensamiento y aumentando su capacidad de expresar generalidad” (Molina, 2009, p. 136). Otros puntos de vista, destacan la amplia relación existente entre la aritmética y el álgebra pues la aritmética se centra en la obtención del resultado, siendo el álgebra lo que permite encontrar una forma estructurada de obtener dicho resultado (Hewitt, 1998).

Por tanto, desde hace casi dos décadas, desde la propuesta early-algebra se han abordado investigaciones dirigidas a mejorar las propuestas didácticas existentes, tratando de incorporar el álgebra desde edades más tempranas a las habituales (Ake, 2013; Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput et al., 2009; Molina, 2009; Van den Heuvel-Panhuizen, Kolovou y Robitzsch, 2013).

b) Visión actual de la enseñanza del álgebra escolar

El contenido del álgebra escolar ha cambiado poco con los años, especialmente durante el siglo XX donde está marcado por una orientación simbólica y estructural que incluye la simplificación de expresiones, resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones con métodos formales y la factorización de polinomios y expresiones racionales, los cuales se aplican a la resolución de problemas (algebraicos) verbales (Kieran, 1992, 2007). Es en el siglo XXI cuando otros enfoques más reformistas dan mayor peso al estudio del cambio así como al uso de sus múltiples representaciones y a la modelización de problemas “reales” con el uso de tecnología (Kieran, 2007).

Garriga (2011) realiza un detallado estudio en su tesis doctoral sobre cómo ha evolucionado la enseñanza del álgebra debido a los cambios del sistema educativo español a lo largo de los últimos años. Analiza una serie de libros de texto y descubre

que el significado de las letras no se detalla claramente en dichos textos, no se distingue en ellos variables, ni incógnitas, ni abreviaturas. Una de sus conclusiones es que las letras como variables no son trabajadas de forma adecuada en el álgebra escolar. También destaca la poca importancia que se da en el álgebra escolar a la comprobación de soluciones en los problemas y en las ecuaciones, y que las conexiones entre el lenguaje natural y el simbolismo algebraico solo se abordan en una única dirección en el álgebra escolar, esto es “se trabaja el planteamiento de problemas reales con ecuaciones algebraicas, pero no se enseña el proceso contrario de la inversión de enunciados de problemas reales a partir de unas ecuaciones algebraicas dadas” (p. 121). Considera como base del álgebra que se imparte en educación secundaria, la generalización de las relaciones aritméticas y su expresión simbólica.

Otra idea que se considera como aspecto importante a tener en cuenta en la enseñanza de las matemáticas, y por tanto del álgebra, es la necesidad de vincular el aprendizaje con contextos familiares y la experiencia social, además de respetar el uso de simbolizaciones propias para que el alumnado sea capaz de dotar de significación concreta a cualquier expresión matemática (Gómez-Granell, 1989). Así mismo, es esencial, para el avance en el conocimiento de las matemáticas que componen el currículo de enseñanzas post-obligatorias, el dominio del simbolismo algebraico, así como la traducción entre los sistemas de representación verbal y simbólico, mediante el planteamiento de enunciados usando el simbolismo algebraico y la invención de enunciados verbales (Garriga, 2011).

El sistema educativo español es de carácter cíclico pues en cada curso se trabajan los mismos contenidos que en el anterior pero ampliados. Así, en lo referido a álgebra, como vemos en la tabla II.1, en 1º ESO se estudian las ecuaciones lineales y los problemas de álgebra de ecuaciones lineales y después en 2º ESO se estudian, de nuevo, las ecuaciones lineales y los problemas de álgebra de ecuaciones lineales pero se añaden los sistemas de ecuaciones lineales, las ecuaciones cuadráticas y los problemas de sistemas de ecuaciones lineales y de ecuaciones cuadráticas. En el 3º curso los únicos contenidos que se añaden son la regla de Ruffini y la resolución de sistemas compuestos por una ecuación lineal y una cuadrática. En el 4º curso la materia se divide en dos opciones conocidas como opción A y opción B. En la llamada opción A, se añaden las inecuaciones lineales, los sistemas de inecuaciones, y los sistemas de ecuaciones no

lineales. Y en la opción B se añaden las fracciones algebraicas, otros tipos de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de inecuaciones y de ecuaciones no lineales.

Tabla II.1. Contenidos actuales de álgebra en educación secundaria

Contenido	Curso de ESO en el que se trabaja				
	1º	2º	3º	4º-A	4º-B
Ecuaciones lineales y problemas	×	×	×	×	×
Sistemas de ecuaciones y problemas		×	×	×	×
Ecuaciones cuadráticas y problemas		×	×	×	×
Regla de Ruffini			×	×	×
Sistemas compuestos			×	×	×
Inecuaciones lineales				×	×
Sistemas de inecuaciones				×	×
Sistemas de ecuaciones no lineales				×	×
Fracciones algebraicas					×
Otros tipos de ecuaciones					×

Como referente internacional, mencionamos las expectativas para el aprendizaje del álgebra que señala el NCTM (2000), que determina para el alumnado de la etapa 6-8 (edades comprendidas entre los 11 y los 13 años), que deberían trabajar con símbolos algebraicos de manera más frecuente que en edades más tempranas. Establece que el alumnado de esta etapa educativa debería “aprender el álgebra como un conjunto de conceptos y habilidades referentes a la representación de relaciones cuantitativas, y como una forma de pensamiento matemático para formalizar patrones, funciones y generalizaciones” (p. 227). La comprensión del concepto de variable debería ir más allá de reconocer que las letras pueden ser usadas para representar números desconocidos en las ecuaciones (Schoenfeld y Arcavi, 1988).

Entre las capacidades relacionadas con el estudio del álgebra que los estándares determinan que debe alcanzar el alumnado, destacamos: (a) representar, analizar y generalizar una variedad de patrones mediante tablas, gráficas, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas; (b) relacionar y comparar distintas formas de representación de una relación; (c) iniciar la comprensión conceptual de los diferentes usos de las variables; (d) usar el álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas; (e) reconocer y generar formas equivalente de expresiones algebraicas

sencillas; (f) modelizar y resolver problemas contextualizados usando representaciones diversas, como gráficas, tablas y ecuaciones (NCTM, 2000, p. 226).

Kieran (1992) destaca que hay tres tipos de actividades a considerar en el ámbito del álgebra escolar que comprenden: (a) actividades de generalización: generalización de patrones geométricos o secuencias numéricas y expresiones de las normas que rigen las relaciones numéricas; (b) actividades de transformación: actividades basadas en reglas, incluyendo la recolección de términos semejantes, la factorización, la sustitución, la simplificación de expresiones y resolver ecuaciones; y (c) actividades globales: resolución de problemas, modelización, búsqueda de la estructura (justificando, probando y prediciendo).

Arcavi (1994, 2007) resume las siguientes componentes para dar un sentido al simbolismo algebraico:

- Familiaridad con los símbolos: cuándo y cómo los símbolos pueden y deben ser usados con el objeto de exhibir relaciones, generalidades y demostraciones que de otra manera permanecerían ocultas e invisibles.
- Capacidad para manipular y leer a través de expresiones simbólicas, como dos aspectos complementarios en la resolución de problemas algebraicos. Esto permite: (a) separarse de los significados y al mismo tiempo adoptar una visión global de las expresiones simbólicas; (b) captar niveles de conexión y razonabilidad en los resultados.
- Conciencia de que uno puede diseñar exitosamente relaciones simbólicas que expresen cierta información dada.
- Capacidad de seleccionar una posible representación simbólica (elegir la variable a la cual asignar un símbolo), y en ciertos casos, reconocer nuestra propia insatisfacción con esa selección, prestarle atención e ingeniarse para buscar una mejor. Por ejemplo: en el proceso de resolución de un problema, hacer una pausa para considerar si sería más conveniente representar tres números consecutivos como $n, n+1, n+2$ ó $n-1, n, n+1$ o quizás como $n-2, n-1, n$.
- Conciencia de la necesidad de revisar los significados de los símbolos durante la aplicación de un procedimiento, durante la resolución de un problema o

durante la inspección de un resultado, y comparar esos significados con las intuiciones acerca de los resultados esperados y con la situación misma del problema.

- Conciencia de que los símbolos pueden desempeñar roles distintos en diferentes contextos y desarrollar un sentido intuitivo de esas diferencias. Considérese los distintos roles que pueden desempeñar las variables y los parámetros, y los distintos “tiempos de sustitución”.

El debate actual se sitúa en qué es lo esencial en el aprendizaje del álgebra, y en la relación entre las habilidades procedimentales y la comprensión conceptual en la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Dijvers et al., 2011).

II.2. REPRESENTACIONES Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

En este apartado indagamos en la idea de representación y sistema de representación utilizada con frecuencia en el área de Didáctica de la Matemática. Nos basamos fundamentalmente en los trabajos previos que se han venido desarrollando en el grupo de investigación en el que se enmarca este estudio.

II.2.1. REPRESENTACIONES

El conocimiento en general y el matemático, en particular, requiere de representaciones, sin embargo, la idea de representación no es clara ni fácil de describir. Muestra de esto es que encontramos diferentes definiciones al hacer una búsqueda en la literatura especializada de Educación Matemática. Como establece Rico (2009), en la historia de la filosofía, grandes filósofos como Platón, Descartes o Kant, ya analizaron el significado de la representación. Más adelante, en la década de 1980, se detectó el uso de la noción de representación en Educación Matemática, destacando autores como Skemp, Kieran, Filloy, Kaput o Duval (Rico, 2009, p. 3). Goldin (1993) puso de manifiesto el interés que tiene la noción de representación en la investigación en Educación Matemática.

Se conoce que existe una estrecha conexión entre las representaciones externas e internas, pudiendo llegar a ser las internas una asimilación de las representaciones

externas (Castro y Castro, 1997); el trabajo con distintos tipos de representaciones externas permite que nos aproximemos mejor a los objetos matemáticos (Kaput, 1992, Castro, 1994; Goldin, 1998). Para pensar sobre ideas matemáticas, razonar sobre ellas y organizar el conocimiento que proporcionan, es necesaria la formación de una representación interna de las mismas (Goldin, 2002). Para expresar y comunicar ideas matemáticas son necesarias las representaciones externas, mediante las cuales se materializan los conceptos matemáticos (Castro, 1994; Hiebert y Carpenter, 1992; Izsák, 2011). Desde la Educación Matemática y de acuerdo con Rico (2000, 2009), representaciones externas son todas aquellas herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas.

En las líneas de trabajo del grupo de “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” bajo el que se enmarca esta investigación, encontramos que uno de sus intereses es estudiar cómo los estudiantes representan los conceptos matemáticos (interna y externamente), los significados que les asocian, las relaciones estructurales que desarrollan, las representaciones a las que dan prioridad, cómo conectan las diferentes representaciones externas de un mismo campo conceptual entre sí y las interacciones que se producen entre las representaciones internas y externas.

En este trabajo nos centramos en las representaciones externas, a las que nos referiremos de forma genérica como representaciones, pues es lo que se puede observar en la manipulación y los procesos de comunicación de los estudiantes. Adoptamos la definición utilizada por Castro y Castro (1997) donde definen las representaciones externas como “notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes” (p. 96).

En la filosofía se utiliza el término representación para referirse a cualquier ‘cosa’ que puede evaluarse semánticamente (Dancing y Sosa, 1993). Desde este planteamiento son representaciones externas las expresiones simbólicas, los enunciados, los diagramas, los gráficos y otras notaciones usuales de las matemáticas. Todos ellos son objeto de estudio en matemáticas. Como afirman Castro, Rico y Romero (1997), el concepto de representación “da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero

funcionalmente separadas. Uno de estos entes se denomina el objeto representante (o representación), el otro es el objeto representado” (p. 362). De forma análoga, lo considera Godino (2003) al expresar que la representación es una relación de correspondencia entre los objetos al poner uno de ellos en lugar de otro. Por tanto, en una representación matemática, como determina Castro (2005) hay que distinguir dos elementos, que son

el contenido de la misma que es la idea, el concepto, lo descrito o representado y el medio [...]. No debe de confundirse la representación con la idea y la denominación representación debe darse únicamente al medio, nunca al contenido. (p. 4)

Según Rico (2009), se dice de un enunciado que tiene como contenido una proposición o condición de verdad; de un término que tiene un concepto como contenido; de una gráfica que expresa una relación adecuada entre sus componentes; por lo que, refiriéndose a las representaciones externas determina que “son representaciones las expresiones simbólicas, enunciados, diagramas, gráficos y otras notaciones usuales de las matemáticas ya que cada una tiene un contenido cuyo significado se puede establecer y evaluar; estos contenidos son objeto de estudio en matemáticas” (p. 9). Además,

Usando las representaciones, las personas organizan la información de un concepto u operación para poder pensar sobre ellos, expresar su comprensión, y utilizarla en situaciones y problemas prácticos o en situaciones de un determinado concepto. (Rico, 1997b, p. 53)

Las representaciones externas desempeñan un papel destacado para los procesos de construcción de conceptos y, por ello, son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático, de ahí el interés que tienen para la investigación en Educación Matemática (Hitt, 1997). Como afirman Castro y Castro (1997), cada modo distinto de representar un concepto matemático, proporciona una caracterización del mismo y puede ayudar a su mejor comprensión y asimilación.

Las representaciones externas actúan como estímulo para los sentidos y permiten la expresión de los conceptos e ideas a los sujetos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales (Duval, 1993; Pape y Tchoshanov, 2001). Las

representaciones externas “como son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el cual los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales, haciéndolas accesibles a los demás” (Rico, 1997b, p. 101).

Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. ... Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas. (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 66)

Las representaciones externas constituyen un tema de relevante actualidad tanto en el ámbito curricular como en el investigador. Son las representaciones herramientas para pensar, explicar y justificar, y los estudiantes deben tener la oportunidad de practicar la representación, la producción de representaciones externas y la internalización de ideas matemáticas a través de la actividad social que implica diversas representaciones externas (Pape y Tchoshanov, 2001).

Es necesario no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones (Castro y Castro, 1997; Duval, 2006), ya que los conceptos y propiedades matemáticas se construyen mediante las relaciones entre objetos, fenómenos o conceptos previos. Por todo esto, se habla de sistemas de representación y no de representaciones simplemente. Por otro lado, tenemos que tener en cuenta que una representación no cobra sentido de manera aislada por lo debemos considerarla dentro de un sistema de significados y relaciones (Rico, 2009) y definir qué son los sistemas de representación, algo que desarrollamos en el siguiente apartado.

II.2.2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Las distintas formas de representación de un mismo concepto matemático permiten hablar de estructuras más generales que contienen a las representaciones. Castro et al. (1997) ponen de manifiesto que el conjunto de signos, símbolos y reglas para expresar o representar una estructura matemática ha de responder a su carácter sistémico, por ello se habla de *sistemas matemáticos de signos* (Kieran y Filloy, 1989), *sistemas de notación* (Kaput, 1992) o *sistemas semióticos* (Duval, 1993).

Guiadas por el trabajo llevado a cabo por el grupo de investigación “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico”, llamamos sistemas de representación al conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura matemática y que sigue cierta sistematización (Castro y Castro, 1997; Rico, 1997b).

En relación con los sistemas de representación encontramos una terminología variada como símbolos, sistemas matemáticos de signos, sistemas de notación, sistemas de registros semióticos, objetos ostensivos o sistemas de representación (Cañadas, 2007). Pero en general, como hemos mencionado anteriormente, son considerados un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que permiten expresar conceptos, propiedades del mismo y conexiones con otros conceptos (Janvier, Girardon y Morand, 1993; Rico, 2009).

No hay sistema de representación que agote en su totalidad la complejidad que encierra cada concepto matemático. En relación con esta afirmación, Gairín (1998) acusa a la comunidad matemática de identificar cada concepto con una de sus representaciones prioritarias y simplificar las conexiones entre los diversos sistemas de representación, dificultando así la comprensión de los aprendices. Por lo general, los conceptos matemáticos disponen de más de un sistema de representación. Cada uno de estos sistemas de representación, destaca y pone de manifiesto algunas propiedades importantes del concepto, a la vez que oculta o dificulta la expresión de otras propiedades (Rico, 1997b; Gómez, 2007; Janvier, 1987a, 1987b). Cada concepto matemático viene establecido por sus diferentes significados y usos y, por tanto, por diversas representaciones. Son los usos de cada concepto los que establecen por extensión su campo semántico y “cada modo significativamente distinto de entender un concepto necesita de un sistema de simbolización propio, de algún modo de representación para ser distinguible” (Rico, 2009, p. 10).

Además algunos investigadores consideran que pasar de un sistema de representación a otro con facilidad es parte del proceso de aprendizaje (Dreyfus, 1991). La comprensión de cualquier concepto matemático se potencia con la utilización de más de un sistema de representación del mismo y la facilidad para realizar traducciones de uno a otro de dichos sistemas. La importancia de utilizar diferentes sistemas de representación es destacada también por investigadores como Duval (1996) y Penalva y

Torregosa (2001), quienes resaltan la importancia tanto de emplear diferentes sistemas de representación como de coordinarlos.

A partir de los trabajos en este campo de Lesh, Post y Behr (1987), Castro (2005) identifica distintos sistemas de representación utilizados en el aprendizaje matemático y en la resolución de problemas, entre ellos los siguientes:

- (a) Modelos manipulativos (números en color, bloques lógicos, bloques multibase...) elaborados con una estructura o relación matemática determinada sirviendo de ayuda en la construcción de las mismas estructuras.
- (b) Dibujos o diagramas, como figuras estáticas, que pueden ser interiorizadas como imágenes.
- (c) Lenguaje hablado, se pueden considerar aquí lenguajes específicos relativos a un dominio concreto, como por ejemplo, el lenguaje de la Lógica.
- (d) Símbolos escritos (semejantes al lenguaje hablado) puede entrañar sentencias especiales como $x + 3 = 7$, sentencias en lenguaje natural y frases.

A continuación centramos la atención en los dos sistemas de representación clave en este trabajo, el verbal y el simbólico, los cuales pasamos a definir.

II.2.3. SISTEMA DE REPRESENTACIÓN VERBAL

El sistema de representación verbal está determinado por el uso del lenguaje cotidiano, incluyendo, en ocasiones, terminología específica del lenguaje matemático académico (Cañadas, 2007). Gómez-Granell (1989) destaca que el simbolismo algebraico está “vinculado con el lenguaje específico de carácter formal” (p. 6) resaltando que “la potencia del lenguaje formal radica en su autonomía de lo real, que le permite la manipulación de conceptos” (p. 7). Como hipótesis de su trabajo establece que el lenguaje matemático no está desprovisto de significado ni es una “simple expresión notacional del significado de los conceptos matemáticos construidos mediante un proceso de reflexión y abstracción interna del sujeto” (p. 7).

Dentro del sistema de representación verbal, consideramos el lenguaje oral y el escrito. Freudenthal (1983) argumenta que el lenguaje oral es más complejo que el escrito pues “se usa para estructurar dispositivos tales como pausa y entonación,

mientras que en la versión escrita la estructura se indica de forma más o menos adecuada por la puntuación” (p. 13). De este modo, debemos basarnos en la comprensión del contenido para entender la estructura sintáctica, pues no es lo mismo decir “cinco por equis, más siete” que “cinco por, equis más siete” al traducir enunciados algebraicos. Dicho investigador determina que esto se consigue mediante indicaciones estrictas de cómo han de colocarse los paréntesis en una expresión y de cómo ha de leerse una expresión. En lo que se denomina *lenguaje de las matemáticas* se hace uso de paréntesis para distinguir las expresiones anteriores, donde la primera se escribe $5x + 7$ y la segunda expresión $5 \cdot (x + 7)$. Rojano (1994) destaca cómo

en el lenguaje de las matemáticas, el criterio del contenido o significado no es confiable, pues por ejemplo: 5 veces . . . 3 más 7 tiene tanto significado como 5 veces 3 . . . más 7, y, si se ha de usar esta expresión, debe estar perfectamente claro lo que ella significa, lo cual se consigue solamente con estrictas reglas de puntuación y de cómo leer una expresión y colocarla entre paréntesis (p. 47).

Otros autores (e.g., Mitchell, 2001, Molina, 2014) coincide en señalar la ambigüedad de este sistema de representación, mayor en la comunicación verbal, ante el uso de elementos complementarios a una frase, como factores situacionales, las creencias y cultura del emisor y del receptor, la entonación o los gestos, entre otros, para la adecuada interpretación del mensaje.

II.2.4. SISTEMA DE REPRESENTACIÓN SIMBÓLICO

El sistema de representación simbólico está presente en distintas ramas de las matemáticas (álgebra, análisis, geometría...). En esta investigación, nos centramos en el álgebra, por lo que dedicamos este apartado al estudio del sistema de representación simbólico algebraico.

Hacemos notar que utilizamos la expresión sistema de representación simbólico o simbolismo algebraico, indistintamente, para referirnos al sistema de representación que se caracteriza por el empleo de numerales, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra de forma escrita.

El simbolismo algebraico es un sistema de representación destacado en el álgebra, llegando a ser una concepción específica de esta rama de las matemáticas (Molina,

2012). Molina (2012) recoge que Drouhard y Teppo (2004), se refieren a una parte del lenguaje matemático al que denominan lenguaje algebraico, formado por: simbolismo algebraico, lenguaje natural y representaciones algebraicas compuestas (e.g., tablas, diagramas, gráficos); y que desde esta perspectiva, Drouhard (2001) y Kirshner (1987) muestran que cumple los requisitos que desde la lingüística se le imponen a un lenguaje.

Una de las fortalezas del simbolismo algebraico es que permite representar ideas algebraicas separadas del contexto inicial y concreto del que surgen, posibilitando olvidar temporalmente los referentes para producir resultados de forma más eficiente (Arcavi, 1994). Según esto, el comportamiento experto en el manejo del simbolismo algebraico está asociado a la capacidad de “alcanzar el significado de los símbolos a demanda” (Drouhard y Teppo, 2004, p. 251).

Investigadores como Drouhard y Teppo (2004) hacen referencia a una de las características del simbolismo algebraico, en concreto, la ambigüedad, destacando que

El simbolismo algebraico permite moverse con fluidez a través de capas de abstracción y comprimir complejos pensamientos matemáticos en eficientes cadenas de símbolos. Al mismo tiempo, sin embargo, estas características hacen a la escritura simbólica muy opaca para el estudiante. Hay profundas ambigüedades en el uso de los símbolos que son ventajosas para el experto pero difíciles para el novato. (Drouhard y Teppo, 2004, p. 240)

Muchos de los errores sintácticos se explican por el hecho de que el uso del simbolismo algebraico está restringido al aula, en desventaja con el uso de la lengua vernácula. A esto hay que añadir el carácter formal del simbolismo algebraico. Algunos investigadores destacan que matemáticamente hablando, el simbolismo algebraico puede ser considerado como un sistema formal diseñado para cumplir con el propósito de poder realizar cálculos correctamente y con eficacia (Boero et al., 2008, p. 266). El uso de la representación verbal en el ámbito escolar, favorece la interpretación de los signos utilizados en el simbolismo algebraico, pero el lenguaje matemático en general, y el simbolismo algebraico en particular, es más preciso que el lenguaje natural pues está sometido a reglas exactas y es necesario interpretar de manera correcta los signos utilizados (Socas , 1997).

Como características del simbolismo algebraico también cabe destacar la alta presencia de información no explícita u omitida y una baja presencia de información irrelevante o confusa, en comparación con otros sistemas de representación como el verbal, el tabular o el gráfico (Bossé, Adu-Gyamfi, y Cheetham, 2011a). Castro (2012) menciona que tanto en su sintaxis como en su semántica, el simbolismo algebraico se aleja del lenguaje natural y también del lenguaje aritmético (Rojano, 1994), lo cual no facilita darle significado.

El álgebra utiliza su propio sistema de signos, símbolos y reglas estandarizadas sobre cómo se puede escribir algo (Drijvers, Goddijn y Kindt, 2011). Los signos y símbolos pueden ser manipulados mediante reglas bien establecidas que no se refieren a un contexto específico. En aritmética los elementos básicos se componen de varias cifras a partir de los únicos diez dígitos que existen y el orden es estricto, además de que siempre se escriben ceros en las posiciones en las que no haya unidades de los órdenes correspondientes a las posiciones. Si nos referimos a los signos, el signo igual representa que hay una relación de igualdad entre dos cantidades que están expresadas de forma diferente a la izquierda y a la derecha de dicho signo de igualdad, mientras que en aritmética es frecuente su uso para representar que hay que efectuar una serie de operaciones con las cantidades expresadas a la izquierda de dicho signo. En aritmética los signos $+$ y $-$ llevan siempre el cálculo de un resultados nuevo, mientras que en álgebra estos signos llevan a una expresión similar si los términos son semejantes o a una formulación más simple. Mientras que en aritmética el punto o el signo \times se utiliza para indicar el producto entre dos números, en álgebra nunca se utiliza el signo \times para indicar la operación de multiplicación. La ausencia de símbolos operacionales entre dos números significa que son cifras de un mismo número expresado en base diez, mientras que en álgebra indica el producto de varias letras o de un número por una letra. Por otro lado, en aritmética la propiedad distributiva del producto respecto de la suma no suele aplicarse mientras que en álgebra es esencial para manipular las expresiones algebraicas. En el álgebra una potencia afecta a cada uno de los elementos de la expresión algebraica que estén colocados dentro de un paréntesis, mientras que en aritmética este hecho no ocurre, afecta únicamente al número. En aritmética una fracción puede representar distintos aspectos, por ejemplo como parte de un todo o relación de proporcionalidad,

mientras que en álgebra únicamente puede representar la división de dos expresiones algebraicas.

II.2.5. TRADUCCIONES ENTRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN SIMBÓLICO Y VERBAL

El procedimiento mediante el cual un objeto matemático representado mediante un sistema de representación pasa a ser representado en otro sistema, se conoce como traducción entre esos dos sistemas de representación (Gómez, 2007; Janvier, 1987a, 1987b). Este procedimiento consiste en transformar la forma de expresar los conceptos y sus atributos. Así, elementos expresados en un sistema de representación pasan a expresarse en otro sistema de representación. Las traducciones entre sistemas de representación se consideran útiles para la adquisición de conceptos y afectan al rendimiento en la resolución de problemas (Villegas, 2002). En palabras de Freudenthal (1983), “reproducir el mismo contenido en otro lenguaje se llama traducir” (p. 1). Este proceso, definido por Duval (1999, 2006) como el cambio de registro de representación sin variar los objetos matemáticos, es también llamado *conversión*.

En el aula, los docentes observan con frecuencia que “la adquisición del conocimiento matemático no introduce a la mayoría de estudiantes en las formas del pensamiento matemático, como por ejemplo en la habilidad para cambiar el registro de representación” (Duval, 2006, p. 144), destacándose que lo importante no es la elección del sistema de representación sino el hecho de que los estudiantes sean capaces de relacionar diversos modos de representar los contenidos matemáticos, esto es, de relacionar distintas representaciones de un mismo objeto (Duval, 2006, p. 159). Las traducciones entre sistemas de representación se consideran valiosas para la adquisición de conceptos y afectan, entre otros aspectos, al rendimiento en la resolución de problemas (Cifarelli, 1998; Duval, 2006; Gagatsis y Shiakilla, 2004; Gagatsis, Elia y Mousoulides, 2006; García, 2000; Lesh et al., 1987; Schultz y Waters, 2000; Villegas, 2002). Además el empleo de diferentes sistemas de representación en la resolución de problemas puede dar lugar a distintas estrategias (Cañadas, Castro y Castro, 2008; Cañadas y Figueiras, 2011) y los estudiantes pueden ser mejores resolutores de problemas si se mueven fácilmente de un sistema de representación a otro, desde

temprana edad (Friedlander y Tabach, 2001). Así mismo las traducciones ayudan a identificar dificultades y oportunidades de aprendizaje en el alumnado (Lesh et al., 1987).

Los argumentos anteriores avalan la necesidad de que en la enseñanza de las matemáticas se traten diferentes sistemas de representación que permiten expresar cada concepto y procedimiento matemático, y la traducción entre ellos.

En este trabajo nos centramos en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal llevada a cabo por estudiantes de secundaria. A las proposiciones susceptibles de ser expresadas mediante el simbolismo algebraico las denominamos *enunciados algebraicos*. Un ejemplo de enunciado algebraico representado de forma verbal es “un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos”, siendo $x + (x + 1) = y - 2$ una representación simbólica algebraica del enunciado anterior. Consideramos que ambas expresiones (verbal y simbólica) son equivalentes.

Freudenthal (1983) habla de traducción algebraica para hacer referencia a “llamar x a la incógnita para describir un problema en su contexto algebraico, datos, incógnitas, parámetros o relaciones entre ellos se rastrean y se traducen mediante variables, ecuaciones e inecuaciones” (Freudenthal, 1983, p. 36). Para traducir o transformar una expresión verbal en una expresión simbólica, son necesarios dos requisitos específicos (Duval, 2006): (1) usar menos símbolos que objetos referidos a ellos, para lo cual es necesario usar la operación aritmética y detallar la relación que permita traducir el significado de la expresión verbal; (2) tener en cuenta que “los símbolos de operaciones prevalecen sobre los símbolos que representan a los números” (p. 147). Este investigador establece dos requisitos para traducir un enunciado a una ecuación: (a) elección de la incógnita, que se corresponde con el hecho de reducir el léxico utilizable y el renombramiento funcional de los objetos; y (b) formular la ecuación, es decir, explicitar la relación entre las diferentes expresiones (Duval, 2006, p. 154).

Para realizar de forma exitosa traducciones, los estudiantes requieren comprender tanto las variables y las relaciones de dependencia mutua entre ellas descritas en el enunciado verbal, como las características sintácticas de la representación simbólica (Kaput, Sims-Knight y Clement, 1985), alternando entre formas sintácticas y semánticas

de analizar las representaciones implicadas (Kaput, 1998). MacGregor y Stacey (1993) llaman la atención sobre la necesidad de que los estudiantes sean conscientes de que algunas relaciones fáciles de expresar mediante una representación verbal precisan de cierta reorganización antes de ser traducidas al simbolismo algebraico. En esta misma línea, Socas (1997) advierte de la mayor precisión del simbolismo algebraico frente al lenguaje verbal y de la posibilidad de lecturas secuenciales y no secuenciales de expresiones simbólicas. Del mismo modo, destaca que es necesario cuidar el uso de ciertas palabras que, según el contexto en el que se utilicen, pueden ocasionar confusiones de conceptos. Así mismo, hay que tener en cuenta el orden en que se enuncia una expresión algebraica pues es necesario entender si se está haciendo de manera secuencial o no.

II.3. ERRORES

Desde la Educación Matemática, el estudio de los errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tiene gran relevancia. Los errores dan información sobre las dificultades que presentan contenidos específicos de matemáticas y a las que es necesario prestar atención en la enseñanza (Socas, 1997). Esto justifica que numerosos trabajos traten de forma conjunta errores y dificultades. Estudios que han indagado sobre errores aportan diferentes clasificaciones de los mismos, informan de dificultades asociadas y sugieren propuestas didácticas que parten del error para la construcción del conocimiento matemático (Rico, 1995).

En este apartado nos dedicamos a analizar las investigaciones realizadas en Educación Matemática relacionadas con los errores en los que incurren los estudiantes. Analizamos también las distintas categorizaciones de errores que han realizado diversos investigadores para centrarnos posteriormente en las categorizaciones de errores vinculadas al uso del simbolismo algebraico, que son las que están relacionadas con nuestro problema de investigación.

II.3.1. PERSPECTIVAS DE LOS ERRORES

Diversos autores se han centrado en la definición y el estudio de errores. Matz (1980) y Socas (1997) establecen que los errores son esquemas cognitivos inapropiados y

perjudiciales para una determinada situación; son intentos no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación y no son solamente consecuencia de una falta específica de conocimiento o un despiste.

Pese a que todos incurrimos en errores, estos suelen tener connotaciones negativas en la escuela, más aún en matemáticas, quizás porque las matemáticas son consideradas las ciencias exactas, no se acepta la equivocación. Pero si se supone que la escuela sirve para aprender para la vida, es necesario reivindicar en ella el derecho al error (Corbalán, 1994). Rico (1995, 1997c) argumenta que el error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento. Los errores del alumnado en matemáticas “forman parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje y están normalmente asociados a la existencia de las dificultades y obstáculos, se producen cuando el alumno proporciona una respuesta incorrecta a una tarea matemática” (Palarea y Socas, 2003, p. 242).

En Rico (1995) encontramos una revisión de estudios realizados hasta principio de 1990, sobre errores en el aprendizaje de las matemáticas, destacando que este tipo de estudios es un foco de investigación constante en el campo de Didáctica de la Matemática. Rico clasifica dichos estudios en cuatro líneas: (a) estudios sobre análisis, causas, elementos, taxonomías de clasificación de los errores, (b) trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores, (c) estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus estudiantes, (d) trabajos de carácter técnico que incluyen técnicas estadísticas, como contrastar hipótesis para el análisis de los errores.

Partiendo del análisis de Rico (1995), Socas (2007) determina que los estudios sobre errores realizados hasta los años ochenta consistían sobre todo en hacer recuentos del números de soluciones incorrectas a una variedad de situaciones problemáticas y proponer clasificaciones de los errores detectados. La intención era examinar cómo surgen los errores a partir de la solución correcta y, a continuación, hacer inferencias sobre los factores que pueden haber conducido al error. Este mismo autor señala que aproximadamente en 1980 se comienza a tomar consciencia de que el error es algo normal en los procesos de enseñanza y aprendizaje, conduciendo el interés de la investigación a profundizar en el proceso de construcción de los objetos matemáticos por parte del alumnado. Estos estudios posteriores se caracterizan por reconocer que los

errores son también producto de otras variables del proceso educativo, como el profesorado, el currículo, el contexto sociocultural, y las interacciones; poniendo de manifiesto la necesidad de tener marcos teóricos para el análisis de los errores. Así mismo, Huitrado y Climent (2013) señalan la necesidad de investigaciones que informen sobre cómo ir más allá de la identificación y clasificación de errores ante la falta de estudios sobre el conocimiento de los profesores sobre el análisis de los errores y su capacidad de interpretación de los mismos.

Tras sus investigaciones sobre los errores producidos por el alumnado, Mulhern (1989) destaca que:

- los errores que surgen en la clase son espontáneos y, generalmente, resultan sorprendentes para el profesorado;
- son persistentes, resistentes a cambiar por sí mismos y difíciles de corregir porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumnado;
- son más frecuentes los errores sistemáticos (revelan los procesos mentales que han llevado al alumnado a una comprensión equivocada) con respecto a los errores por azar u ocasionales;
- el alumnado en el momento no toma conciencia del error; y
- el alumnado recrea o inventa su propio método en base al método descrito por el profesor.

Para realizar un análisis de los producidos por el alumnado en la construcción del conocimiento matemático debemos tener en cuenta que, normalmente, no pueden evitarse porque forman parte del proceso de construcción del conocimiento matemático (Palarea, 1998). El profesorado debe conocerlos y reflexionar sobre ellos para conducir mejor la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, conocer los errores básicos del alumnado es clave para el aprendizaje de cuestiones más complejas (Socas, 1997). Palarea (1998) determina que probablemente es necesario que los docentes enseñen “menos directamente y dedicar más tiempo a conocer lo que piensan los alumnos, discutiendo con ellos a nivel intuitivo acerca de sus concepciones erróneas y presentarles luego situaciones matemáticas para seguir pensando en aquello que les permite reajustar sus ideas” (p. 78). Los errores dan información sobre las dificultades que presentan contenidos específicos de matemáticas y a las que es necesario prestar

atención en la enseñanza. Debemos preparar al alumnado para que no tomen el error como un fracaso, sino como un elemento importante del aprendizaje del concepto (Ruano, Socas y Palarea, 2003). Esta necesidad del profesorado por conocer los errores y dificultades propios de un tema son los que llevan a Rico (1997a, 1997c) a considerar los errores y dificultades como un organizador del currículo.

II.3.2. CLASIFICACIONES DE ERRORES

Diversas investigaciones se han centrado en el estudio de errores en los que incurren los estudiantes y han propuesto clasificaciones para facilitar el análisis de los mismos. Las categorizaciones de errores permiten una evaluación y diagnóstico para hacer posible ayudar al alumnado a superar sus dificultades cognitivas y sus carencias de sentido de los objetos matemáticos y en el desarrollo de una actitud racional hacia la matemática. Presentamos en este apartado una síntesis de algunas de estas clasificaciones.

La clasificación de los errores de Newman (1977), descrita por Watson (1980), atiende a una serie de preguntas, como presentamos a continuación:

- (1) Capacidad de la lectura. ¿Puede el estudiante leer la pregunta?
Reconocimiento de palabras y reconocimiento de símbolos;
- (2) Comprensión. ¿Puede el estudiante entender la pregunta? Comprensión general y comprensión de términos y símbolos;
- (3) Transformación. ¿Puede el estudiante seleccionar los procesos matemáticos que se requieren para obtener una solución?;
- (4) Habilidades de proceso. ¿Puede el estudiante realizar las operaciones matemáticas necesarias para la tarea?
- (5) Codificación. ¿Puede el estudiante escribir la respuesta de forma aceptable?

A esta clasificación, Dickson, Brown y Gibson (1988) añaden más categorías:

- (6) Motivación. El estudiante podría haber resuelto correctamente el problema que había intentado;
- (7) Descuido o falta de atención. El estudiante puede hacer todos los pasos, pero cometió un error por descuido que es improbable que se repita;

- (8) Cuestión de forma. El estudiante comete un error debido a la manera como se ha presentado el problema, que puede ser ambigua.

El interés por la investigación en los errores que incurre el alumnado en la resolución de problemas matemáticos y en investigar errores no meramente aritméticos se refleja en los trabajos de Radatz (1979, 1980) quien, desde el punto de vista del procesamiento de la información, hizo uso de la siguiente clasificación:

- (a) Errores debidos a dificultades de lenguaje. El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos estudiantes un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera; se producen por tanto errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.
- (b) Errores debidos a dificultades para obtener la información espacial. Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades y de errores en la realización de tareas matemáticas.
- (c) Errores debidos a un aprendizaje deficiente de destrezas, hechos y conceptos previos. Se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática; son errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.
- (d) Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. La experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información, el alumnado continúa empleando operaciones cognitivas aún cuando las condiciones originales se hayan modificado pues están inhibidos para el procesamiento de nueva información. Estos errores en general son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. Dentro de estos errores interesan cinco subtipos:
 - (i) errores de perseverancia, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema,

- (ii) errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares,
 - (iii) errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros,
 - (iv) errores de asimilación, en los que la información es mal procesada debido a fallas de percepción, y
 - (v) errores de transferencia negativa a partir de tareas previas.
- (e) Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. Surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

En 1984, varios investigadores realizaron categorizaciones de errores, entre ellos Davis y Booth. El primero de ellos, Davis (1984), elaboró una teoría de esquemas o constructos personales que le permitió tipificar e interpretar algunos de los errores más usuales de los alumnos en el aprendizaje de matemática, entre los que destacamos:

- (a) Errores inducidos por el lenguaje o la notación.
- (b) Errores por recuperación de un esquema previo.
- (c) Errores producidos por una representación inadecuada.

Booth (1984) describe errores comunes en los que incurren los alumnos atribuidos a:

- (a) La naturaleza y el significado de los símbolos y las letras. Cómo operan con ellos e interpretan los resultados les permitirá la transferencia de la aritmética al álgebra,
- (b) El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra. Muchos estudiantes no se dan cuenta y suponen que en las cuestiones algebraicas se les exige siempre una solución única y numérica.
- (c) La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes. Las dificultades que los estudiantes presentan en el álgebra muchas veces no son tanto dificultades en el álgebra como problemas que se quedan sin corregir en la aritmética. En la mayoría de los errores cometidos en aritmética, los alumnos reflejan dificultades de interiorización del concepto o falta de percepción.

- (d) El uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento. Algunos errores se deben a que el alumnado usa inadecuadamente una fórmula o regla conocida que han extraído de un prototipo o libro de texto y que usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números. Algunos ejemplos son el mal uso de la propiedad distributiva, al uso de recíprocos, cancelación, falsas generalizaciones sobre números y el uso de métodos informales por parte de los estudiantes.

Brousseau, Davis y Werner (1986) señalan cuatro vías por las que los errores pueden presentarse:

- (a) Como resultado de concepciones incorrectas acerca de principios básicos de las matemáticas.
- (b) Cuando los estudiantes recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el profesorado.
- (c) Por la aplicación correcta y sistematizada de procedimientos imperfectos fácilmente reconocidos por el profesorado.
- (d) Al aplicarse por parte del alumnado procedimientos imperfectos y concepciones inadecuadas no reconocidas por el profesorado.

Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), citados en Rico (1995) realizan una clasificación empírica de errores sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones del alumnado realizadas por expertos donde distinguen seis categorías descriptivas:

- (a) Datos mal utilizados: errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el estudiante. Por ejemplo se añaden datos extraños, se olvida algún dato necesario para la solución, se contesta a algo que no es necesario, se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado, se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta, o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

- (b) Interpretación incorrecta del lenguaje: debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.
- (c) Inferencias no válidas lógicamente: tienen que ver con anomalías en el razonamiento y no se deben al contenido específico.
- (d) Teoremas o definiciones deformadas: se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable.
- (e) Falta de verificación en la solución: se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.
- (f) Errores técnicos: incluyendo en esta categoría los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

En la misma época Esteley y Villarreal (1990, 1996) establecieron las siguientes categorías:

- (a) Errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones.
- (b) No empleo o uso parcial de la información.
- (c) No verificación de resultados parciales o totales que se manifiesta en: desconexión entre lo analítico y lo gráfico, respuestas consecutivas incoherentes entre sí y no comprobación de que los resultados obtenidos satisfacen la o las ecuaciones originales.
- (d) Empleo incorrecto de propiedades y definiciones (de números o funciones).
- (e) No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas o definiciones, en un caso particular.
- (f) Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada.
- (g) Errores de lógica: justificaciones inadecuadas de proposiciones y uso inadecuado del lenguaje.
- (h) Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.

En Azcárate, Casadevall y Casellas (1996) se cita una investigación realizada por Orton (1990) basada en un trabajo acerca del concepto de derivada con estudiantes de entre 16 y 22 años y de la que surge la siguiente clasificación:

- (a) Errores estructurales: relacionados con los conceptos esenciales implicados.
- (b) Errores arbitrarios: el estudiante se comporta arbitrariamente sin tener en cuenta los datos del problema.
- (c) Errores ejecutivos: errores en la manipulación, si bien los conceptos implicados pueden ser comprendidos.

En la misma época Astolfi (1999) propone la siguiente tipología de los errores:

- (a) Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones.
- (b) Errores como resultado de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas.
- (c) Errores como resultado de las concepciones alternativas de los estudiantes.
- (d) Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas.
- (e) Errores en los procesos adoptados.
- (f) Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad.
- (g) Errores que tienen su origen en otra disciplina.
- (h) Errores causados por la complejidad propia del contenido.

Recientemente, Adu-Gyamfi, Stiff y Bosse (2012) han determinado tres tipos de errores que se presentan al realizar traducciones entre cualesquiera sistemas de representación:

- (a) De implementación, por lo general ocurre cuando un paso en un algoritmo se ejecuta incorrectamente.
- (b) De interpretación, donde el estudiante atribuye incorrectamente, caracteriza o ejemplifica atributos o propiedades de origen o de destino representación.
- (c) De preservación, donde el estudiante mantiene correctamente congruencia semántica entre la fuente y las representaciones de destino para los atributos o propiedades auto-identificados, pero no consigue confirmar que otros atributos o propiedades relevantes también se traducen correctamente.

En general, observamos que las diferentes clasificaciones presentadas atienden a criterios que se relacionan con aspectos tan variados como el planteamiento de la tarea, la comprensión de la información presentada, el uso de la información dada, los procesos o conceptos matemáticos implicados, los razonamientos empleados, la forma de responder, los aspectos afectivos o las dificultades a las que se asocian los errores.

Centrándonos en el estudio del álgebra como contenido matemático, describimos a continuación clasificaciones de errores de investigaciones sobre el uso del simbolismo algebraico.

II.3.3. CLASIFICACIONES DE ERRORES VINCULADOS AL USO DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO

Socas (1997) clasifica los errores en los que incurren los estudiantes en contextos algebraicos en tres tipos según su origen:

- Errores que tienen su origen en un obstáculo. El alumnado, al comenzar con sus estudios de álgebra, suele ver las expresiones algebraicas como enunciados incompletos. Por ejemplo, al encontrar situaciones donde la operación de adición ya no significa lo mismo que en aritmética. Dentro de este eje también tiene cabida la yuxtaposición de símbolos en el lenguaje algebraico, donde $5x$ suele notar “5 veces x ” el alumnado tiende a sustituir un valor por x y convertirlo en un número de dos cifras, por ejemplo 53.
- Errores que tienen su origen en ausencia de sentido: la mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente, por falta de linealidad de estos operadores (p. 146). En esta tipología tienen cabida errores que derivan de la aritmética como es el uso de fracciones, de paréntesis o de potencias, y los errores en los procedimientos. También se encuentran los errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, de las reglas de potencias como el desarrollo de las identidades notables o errores de cancelación. Este tipo de errores indican que los estudiantes tienden a generalizar procedimientos que se verifican en determinadas ocasiones. Dentro de este segundo eje, se recogen también los errores causados por las características propias del simbolismo algebraico, que

se manifiesta “en diferentes procesos matemáticos, tales como: generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural y particularización” (p. 148).

- Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales: errores que se deben a la falta de actitud racional hacia las matemáticas, que se pueden llamar “casuales o de descuido [...] que van desde una excesiva confianza en la tarea matemática hasta un bloqueo que le incapacita para la citada tarea” (Socas, 1997, p. 152).

Palarea (1998) realiza una clasificación a partir de de Socas (1997) donde distingue dos grandes grupos:

- Errores del álgebra que están en la aritmética: El álgebra no está separada de la aritmética por lo que a veces las dificultades que los estudiantes encuentran en álgebra son problemas que se quedan sin corregir en la aritmética. Por ejemplo, errores en la confusión con las operaciones con fracciones, el signo “-” delante de un paréntesis, el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente por falta de linealidad de estos operadores. Entre estos errores se distinguen: (a) errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva; (b) errores relativos al uso de recíprocos; y (c) errores de cancelación.
- Errores de álgebra debidos a las características propias del simbolismo algebraico: son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la aritmética, algunos ejemplos son el sentido del signo “=” en su paso de la aritmética al álgebra y la sustitución formal.

Cerdán (2008a, 2010) elabora un catálogo con los errores más comunes producidos por estudiantes de bachillerato unificado polivalente (BUP) (14-16 años) al realizar un proceso de traducción algebraico. Analiza los errores desde el punto de vista del uso de letras y la construcción de la expresión algebraica. En este estudio, detecta que los estudiantes incurren en errores al intentar traducir directamente de las palabras clave a

los símbolos matemáticos, de izquierda a derecha, sin prestar atención al significado. Clasifica los errores para la traducción de problemas a ecuaciones en tres categorías:

- Errores en el uso de letras: distingue entre designación múltiple (cuando un número o cantidad es designado por más de una literal), significado múltiple (cuando la parte literal se utiliza para designar a más de un número o cantidad) y significado cambiado (cuando una literal se usa para designar a otra cantidad diferente de la que le fue expresamente atribuida a tal literal).
- Errores en la construcción de expresiones aritméticas o algebraicas: pueden ser error de operación, error de inversión (confusión de operaciones inversas) y error de arbitrariedad (cuando no tiene ningún referente en el diccionario teórico de cantidades y es leída de forma que los errores mencionados anteriormente no juegan un papel relevante).
- Error de igualdad: se produce si las cantidades referidas por las expresiones de un lado y otro de la igualdad son diferentes.

En nuestro estudio previo realizado, Rodríguez-Domingo (2011), mediante un proceso inductivo de elaboración de categorías a partir de los datos, siguiendo el método propio de la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990), elaboramos una clasificación de errores en el proceso de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. Esta clasificación distingue tres grandes bloques:

- Errores según la completitud del enunciado (tipo I).
- Errores derivados de la aritmética (tipo II).
- Errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico (tipo III).

Para la denominación de los tipos de errores identificados, adoptamos la distinción que hace Socas (1997) entre errores que tienen su origen en la aritmética y aquellos debidos a características propias del simbolismo algebraico, ambos considerados errores causados por la ausencia de sentido. A continuación, definimos y ejemplificamos esta clasificación.

Los errores según la completitud del enunciado hacen referencia a la falta o sobra de algún símbolo o palabra para que la expresión, simbólica o verbal, pueda ser considerada correcta. En esta categoría diferenciamos dos tipos de errores:

I.1. Incompleto, si falta algún elemento. Distinguimos si los elementos que faltan en la expresión son una letra o un número (coeficiente o término independiente). Por ejemplo, expresar verbalmente la traducción del enunciado $x \cdot (x+1) = 7x$ como “un número por su consecutivo es igual a siete” corresponde a un error del tipo incompleto, ya que le falta una letra para que la traducción sea correcta. En este tipo de errores incluimos el hecho de que un enunciado no sea traducido en su totalidad leyéndose parte del mismo. Por ejemplo, expresar verbalmente el enunciado anterior diciendo “un número por su consecutivo es igual a siete equis” es considerado que en la parte de la izquierda se realiza una traducción y en la derecha se realiza una lectura y que la traducción es incompleta.

I.2. Desmedido, si sobra algún elemento. Distinguimos también si los elementos que sobran en la expresión son una letra o un número (coeficiente o término independiente). Por ejemplo, expresar el enunciado verbal “el producto de la mitad de un número por el triple de otro número” como $x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot 3y$ en simbolismo algebraico, corresponde a un error del tipo desmedido, pues le sobra la primera letra para considerar que la traducción dada es correcta.

Los errores derivados de la aritmética son los que provienen del incorrecto uso o interpretación de los signos u operaciones. Distinguimos cinco tipos de errores o subcategorías:

II.1. Paréntesis, corresponde a errores debidos a la mala posición de un paréntesis o a la falta del mismo, que hacen que la expresión algebraica no sea correcta. Las otras cuatro subcategorías hacen referencia a errores en los que las operaciones indicadas son intercambiadas al realizar la traducción. Distinguimos cuatro subcategorías de este tipo: II.2 División–multiplicación, II.3 Potenciación–multiplicación, II.4 Suma–multiplicación y II.5 División–potenciación. Presentamos en la tabla II.2 ejemplos de errores de tipo II.

Tabla II.2. Ejemplos de errores derivados de la aritmética

Subcategorías	Enunciado propuesto	Ejemplos de traducciones erróneas
II.1 Paréntesis	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	$(x + (x + 1))^2$
II.2 División–multiplicación	$(x \cdot y)^3$	“Un número entre otro número elevado a tres”
II.3 Potenciación–multiplicación	$(\sqrt{x})^y$	“La raíz cuadrada de un número por otro número distinto”,
II.4 Suma–multiplicación	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	$x \cdot (x + 1) = y - 2$
II.5 División–potenciación	Un número par menos la cuarta parte de otro número	$2x - y^4$

Los errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico son específicos y asociados al uso del sistema de representación simbólico. En esta categoría diferenciamos cuatro tipos de errores:

III.1. Errores en los que se generaliza un elemento o parte del enunciado que es un caso concreto. Por ejemplo, un sujeto que, en vez de especificar que -4 equivale a “se resta el número cuatro”, expresa “se resta un número par”.

III.2. Particularización de números o relaciones concretas de una expresión general. En este caso al traducir simbólicamente el enunciado “un número par”, lo expresan particularizando el número “par” a un número concreto, por ejemplo 2.

III.3. Uso de letra. Cuando los sujetos no diferencian, de manera correcta, el uso de distintas letras en el enunciado. Distinguimos en esta subcategoría el expresar con distintas letras una misma incógnita, del uso de la misma letra para representar varias incógnitas. Un ejemplo lo encontramos cuando al representar de forma simbólica el enunciado “un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos”, el estudiante representa con el mismo símbolo ambas incógnitas pese a corresponder a números diferentes.

III.4. Complicación estructural. Es aquel en el que los sujetos no interpretan apropiadamente la estructura del enunciado algebraico o parte del mismo. Por ejemplo,

un sujeto que representa simbólicamente el enunciado “un número par menos la cuarta parte de otro número” como $2x - \frac{4}{y}$.

Las distintas categorizaciones de errores mencionadas en este apartado ponen de manifiesto distintos tipos de errores en los que incurren los estudiantes de secundaria en el estudio del álgebra en la escuela. Esto nos lleva a poder realizar una síntesis de los mismos y concretar que, hasta el momento, los estudios precedentes revelan que los errores que más se manifiestan entre el alumnado son:

- Debidos a dificultades de lenguaje, de reconocimiento de palabras y de símbolos, comprensión de términos y símbolos.
- Asociaciones incorrectas, de interpretación, debidas a dificultades para obtener toda la información.
- Complicación estructural, error de inversión, derivados de las características propias del simbolismo algebraico.
- Habilidades de proceso, de implementación, aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, derivados de la aritmética, transformación para obtener una solución.
- Cuestión de forma, error en la presentación, descuido o falta de atención.

II.4. EL JUEGO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

En este último apartado del marco teórico centramos nuestra atención en el uso del juego como material didáctico para la Educación Matemática. Reflexionamos sobre la utilización de los juegos en la enseñanza de las matemáticas escolares y las ventajas de su uso para el aprendizaje. Por último, analizamos el juego del dominó y su utilización en el ámbito escolar. Nos centramos en dicho juego dado su papel destacado en la recogida de datos de esta investigación.

II.4.1. EL JUEGO COMO ENTE DIDÁCTICO

El juego es considerado una actividad humana lúdica por excelencia, presente en todas las culturas, desde las más primitivas a las más avanzadas. Se manifiesta de forma

natural, aparece en época muy temprana de la infancia y continúa a lo largo de toda la vida (Castro, Olmo y Castro, 2002).

A continuación presentamos diferentes definiciones del juego consultadas.

- Ocupación voluntaria que cumple un conjunto de reglas bien definidas y que termina tras un número finito de movimientos (Corbalán, 1994).
- *Acción u ocupación voluntaria, que se desarrolla dentro de límites temporales y espaciales determinados, según reglas absolutamente obligatorias, aunque libremente aceptadas; acción que tiene un fin en sí mismo y está acompañada de un sentimiento de tensión y alegría* (Huizinga, 1943; citado por Villagran y Olfos , 2002, p.1).
- *Actividad colectiva basada en reglas fijas, sencillas, comprensibles y asumidas por todos los participantes. Las reglas establecerán no solo los objetivos para el conjunto de jugadores, sino también los objetivos específicos de cada uno de los participantes que deberán buscar las estrategias para bloquear y/o ganar al resto de los participantes* (Edo, Deulofeu y Badillo, 2007, p. 62).

En las definiciones presentadas, los autores indican que consiste en un conjunto de actividades que al realizarlas producen placer.

Al juego se le reconocen principios pedagógicos. En Castro et al. (2002, p.13) se recogen algunos de dichos principios que Moyles (1990) otorga al juego:

- Debe aceptarse como un proceso, no necesariamente como un producto pero con capacidad de tener alguno si lo desea el participante.
- Es necesario para niños y adultos.
- No es la antítesis de trabajo: ambos son parte de la totalidad de nuestras vidas.
- Siempre está estructurado por el entorno, los materiales y el contexto en el que se produce.
- Adecuadamente dirigido, asegura al niño un aprendizaje a partir de su estado actual de conocimientos y destrezas.
- Es potencialmente un excelente medio de aprendizaje.

La experiencia de los docentes y algunas investigaciones tanto teóricas como empíricas establecen que “jugar puede ser una parte integrante del aprendizaje” (Bishop, 1998, p. 21). Por su parte, algunos juegos son considerados material didáctico estructurado, adecuado para la enseñanza de diferentes contenidos (Contreras, 2004).

Los juegos poseen gran atractivo que puede ser canalizado en la enseñanza. Presentar una materia a través de un juego puede aprovechar el impulso hacia la diversión de los niños y jóvenes, consiguiendo un aprendizaje más eficaz de dicha materia. En la intervención en el aula, el profesorado no debe olvidar que los estudiantes necesitan motivación, tiempo de consolidación de los conocimientos y experimentación en contextos diferentes (Tamayo, 2008).

Sin embargo, disponemos de pocos datos que permitan establecer conclusiones sobre la relación entre la construcción del conocimiento matemático y situaciones didácticas donde se usen juegos. Destaca Bishop (1998) que quedan puntos de investigación por explorar y desarrollar antes de que los juegos sean aceptados y aprovechados en el aula para su utilización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

II.4.2. JUEGO Y MATEMÁTICAS

Se consideran que el juego y las matemáticas están relacionados (Edo y Deulofeu, 2006). Las razones dadas para dichas relaciones son de tipo realista y otras de tipo idealista. Dentro del posicionamiento realista, aparecen dos posturas: (a) la que considera la relación es debida a la utilización de elementos matemáticos en la propia organización y desarrollo del juego (números, elementos geométricos) y (b) la que se basa en el tipo de pensamiento requerido para la ejecución del juego: estrategias a desarrollar y reto intelectual que plantea su práctica. Bishop (1998) indica que lo que hace que un juego se pueda considerar matemático son sus reglas, los procedimientos, las estrategias y los modelos a utilizar en el mismo. Ascher (1991) sostiene que “los juegos que consideramos de uno u otro modo matemáticos son los que dependen de la suerte o aquellos en los que las estrategias dependen de la lógica” (p. 85).

Entre el posicionamiento idealista están los que toman como argumentos para tal relación la idea de que el juego tiene gran similitud con las matemáticas “puesto que hacer matemáticas puede convertirse en una actividad realmente lúdica y, sobre todo, intelectualmente estimulante” (Deulofeu, 2002, p. 3). En esta misma línea, De Guzmán

(1984) asegura que “el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático” (p. 3). Más adelante señala “la matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse, mediante instrumentos matemáticos” (p. 7).

Las diferentes clasificaciones que se hacen de los juegos considerados matemáticos se deben al criterio tomado para establecerlas. Así, se pueden clasificar los juegos según la temática (e.g., numéricos, geométricos, algebraicos), según el número de jugadores (individuales o colectivos), según los materiales utilizados (e.g., dados, cartas) o según el medio en el que se realicen (e.g., de mesa, motricidad al aire libre). Aunque las clasificaciones más utilizadas por investigadores son: (a) juegos de conocimiento, donde la finalidad es introducir y trabajar un concepto matemático y (b) juegos de estrategia, también llamados juegos de pensar (Gairín, 2001), donde se requieren habilidades usadas en la resolución de problemas (Martín, Muñoz y Oller, 2009).

Deulofeu (2011) utiliza el número de sujetos participantes en el juego y el objetivo del mismo para distinguir entre *recreaciones matemáticas* y *juegos matemáticos*. Así, según este investigador, las recreaciones matemáticas “son problemas de carácter lúdico que una persona debe tratar de resolver y el juego es una actividad en la que participan por lo menos dos personas, siendo el primer objetivo de los jugadores ganar a sus adversarios” (p. 16).

II.4.3. EL JUEGO EN LA ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En la literatura del área de Didáctica de la Matemática se aconseja que los profesores en sus aulas propongan y realicen juegos como mediadores en el aprendizaje de las matemáticas por los estudiantes. Esta recomendación está basada en diferentes argumentos, entre los que encontramos: (a) el contenido matemático que encierran, (b) cambiar en algunos estudiantes su visión negativa de las matemáticas, (c) proporcionar motivación y estímulo en el aprendizaje de las matemáticas, (d) infundir dinamismo a la enseñanza y (e) detectar y corregir errores.

Los juegos con materiales estructurados ayudan al aprendizaje de los conceptos que subyacen a dicha estructura (Contreras, 2004). Como muchos juegos utilizan la matemática en su desarrollo, el uso de juegos en el marco escolar puede tomar como finalidad la comprensión de conceptos o la mejora de técnicas, o bien la adquisición de métodos de resolución de problemas (Edo y Deulofeu, 2006). De Guzmán (1984) asegura que el interés de los matemáticos de todos los tiempos por los juegos respalda el hecho de que son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente, y que, además, parte de la matemática tiene un sabor lúdico. Aconseja a los profesores para que usen juegos en sus aulas. El juego

debe consistir en el estímulo de su propia acción, colocándole en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que mejor pueden conducir a la adquisición de las actitudes básicas más características que se pretende transmitir con el cultivo de cada materia. (p. 10)

La organización de actividades de juego en la enseñanza de las matemáticas puede incidir en la visión que de ellas se forman los estudiantes, puede ayudar a que las consideren como una ciencia divertida (De Guzmán, 1984; Deulofeu, 2002). Esta idea puede hacer cambiar en algunos estudiantes su visión negativa de las matemáticas.

La importancia del uso de los juegos educativos en el aula se puede justificar por el agrado que puede producir en el aprendiz. Corbalán (1994) recogiendo ideas de Alsina (1991) escribe:

enseñar y aprender matemáticas puede y debe ser una experiencia feliz. Curiosamente casi nunca se cita a la felicidad dentro de los objetivos educativos pero es bastante evidente que solo podremos hablar de una labor docente bien hecha cuando todos alcancemos un grado de felicidad satisfactorio. (Corbalán, 1994, p. 14)

Entre las ventajas que proporciona el uso de juegos en la enseñanza destaca el romper “con la rutina de los ejercicios mecánicos [...] proporcionando al alumno una mayor motivación y estímulo” (Gómez, 1992, p. 14).

El juego ofrece a los estudiantes la oportunidad de ganar o perder, esto les sirve para estimular cualidades personales y sociales como la auto-estima-autovaloración, la confianza, la cooperación, el reconocimiento de los éxitos de los compañeros y

compañeras, etc. El juego va a requerir también del alumnado una participación más activa en el proceso de aprendizaje. Ayuda a desarrollar hábitos y actitudes positivas frente al trabajo escolar. (pp. 16-17)

Autores, como Tamayo y Ramírez (2009), destacan el hecho de que la enseñanza de las matemáticas está evolucionando hacia formas más dinámicas y participativas, pues los estudiantes están aprendiendo a razonar con actividades interesantes. Destacan también que a la vez son divertidas y de aplicación en la vida diaria, por lo que los juegos tienen un gran papel pues los estudiantes pueden aprender los conceptos e ideas que actividades bien diseñadas incluyan, al mismo tiempo que se están divirtiendo y están sintiendo placer en la ejecución de tales juegos.

A los juegos colectivos se les reconocen mayores ventajas que a los individuales en tanto que “los niños asimilan el lenguaje de la comunicación y aprenden a coordinar sus acciones con las de los demás” (Castro et al. 2002, p. 13). Así mismo estos autores consideran los juegos colectivos más idóneos para la construcción del conocimiento lógico-matemático² porque:

- *Fomenta la interacción social entre los participantes.*
- *Proporcionando un feed-back entre los niños que constituye una fuente de respuestas correctas.*
- *Se negocian reglas y se toman decisiones conjuntamente observando las consecuencias que pueden producir dichas reglas.*
- *Los niños son más activos mentalmente cuando los juegos que realizan han sido escogidos y propuestos por ellos mismos. (Castro et al., 2002, p.14)*

Parece claro que el uso de juegos en el aula de matemáticas puede proporcionar a nuestro alumnado la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos. Con el juego, el alumnado se encuentra más activo mentalmente que cuando trabaja con otra metodología, lo que confirma el potencial motivador de los juegos como instrumento metodológico de enseñanza. De acuerdo con las nuevas tendencias educativas, el estudiante debe

² El conocimiento lógico-matemático es producto de una actividad interna del sujeto, de una abstracción reflexiva realizada a partir de las relaciones entre los objetos (Castro et al. 2002)

participar activamente en su propio aprendizaje y el uso de juegos en el aula ayuda a estar activo y a estimular el razonamiento (Van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013).

Corbalán (1994) destaca la importancia de la utilización de juegos educativos en el aula para la detección de errores y señala que la práctica sistemática de juegos matemáticos es una excelente forma de autocorrección de errores, pues al cometer errores se pierde la partida. Según este autor, la detección y el tratamiento de errores y dificultades en el aprendizaje es una de las funciones del empleo del juego en la enseñanza. Esta ventaja es la que pretendemos aprovechar en nuestra investigación con el uso de un dominó algebraico en el aula con estudiantes de secundaria para detectar errores y provocar el uso de la autocorrección de los mismos para avanzar en el aprendizaje del álgebra.

Algunas ventajas más, no recogidas anteriormente, las presenta Deulofeu (2002) quien señala que el uso de juegos en el aula ayuda a:

- superar las restricciones que se autoimpone el alumnado ante planteamientos matemáticos,
- superar las falsas intuiciones, el juego ayuda a desarrollar la intuición a través de la anticipación de resultados y la experimentación,
- asimilar cambios de enunciado, de lenguaje o de contexto, ayudando al alumnado a ver la relación entre los problemas reales y los problemas matemáticos escolares, y
- realizar conjeturas y aprender a probarlas o refutarlas, descubrir patrones, propiedades y leyes, y en general pasar de lo particular a lo general.

Se recomienda el juego matemático desde los primeros niveles educativos. Por ejemplo, el Informe Cockcroft (1985) recomienda, a cualquier edad y en cualquier nivel de conocimientos del alumnado, la utilización bien planificada de puzzles y juegos matemáticos para contribuir a clarificar ideas de programa y para desarrollar el pensamiento lógico. También De Guzmán (1984) señala ese hecho “en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante” (p. 7) destacando que el juego no es únicamente un

elemento que se utilice para motivar a los estudiantes frente a un determinado tema, sino que es un componente esencial para el desarrollo de todo niño.

Para concluir este apartado queremos hacer una llamada de atención sobre una idea tomada de Cockcroft (1985). No todos los juegos son válidos y pueden llegar a dar los “frutos” deseados, es necesario seleccionar y/o diseñar los juegos necesarios y adecuados para cada momento de la enseñanza y debe hacerse con sumo cuidado, considerando la edad y situación intelectual de los estudiantes, entre otros factores.

CAPÍTULO III

CAPÍTULO III. ESTUDIOS PREVIOS

En este apartado resaltamos los principales trabajos de investigación relacionados con nuestro tema de estudio y que constituyen los antecedentes del mismo. Sintetizamos los resultados mostrados para dar una idea del estado de la cuestión en relación con nuestro problema de investigación. Estructuramos el apartado de la siguiente manera: (1) estudios sobre el conocimiento del simbolismo algebraico: experiencia aritmética previa y formas de pensamiento del alumnado, interpretación del simbolismo algebraico por el alumnado, y comprensión de la notación con signos específicos (como paréntesis o signo igual); (2) traducción de enunciados algebraicos entre distintos sistemas de representación: del sistema de representación verbal al simbolismo algebraico y viceversa; y (3) errores en el estudio y aprendizaje del álgebra escolar.

III.1. CONOCIMIENTO DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO

La enseñanza y aprendizaje del álgebra ha sido objeto de intensa y continuada atención por la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática (Molina, 2012). Considerando como referencia los trabajos presentados en los congresos anuales de la comunidad internacional de investigadores y educadores matemáticos, conocida como *Psychology of Mathematics Education* (PME), iniciados en 1977, Kieran (2006) realiza una aportación sobre cómo ha ido evolucionando a nivel internacional la investigación sobre este tema. Algunas de aspectos relativos al álgebra que Kieran (2006) identifica en el seno de los congresos anuales del PME son:

- Temáticas de interés: interpretación de símbolos y signos, uso de procedimientos algebraicos y resolución de ecuaciones, resolución de problemas algebraicos, análisis y detección de errores, transición de la aritmética al álgebra, uso de múltiples relaciones, desarrollo de comprensión de los conceptos algebraicos.

- Concepciones del álgebra: lenguaje algebraico, resolución de problemas, estudio de estructuras, estudio de patrones y generalización, modelización.
- Marcos teóricos: piagetianos, desarrollo histórico del álgebra, constructivismo, perspectivas socioculturales.

Al hacer una revisión de las investigaciones realizadas sobre la comprensión del simbolismo algebraico, las más antiguas relacionadas con el significado que los estudiantes atribuyen a variables, expresiones y ecuaciones, llevadas a cabo con alumnado de edades comprendidas entre los 11 y los 15 años, Kieran (2007) identifica los siguientes focos de interés:

- (a) análisis de la experiencia aritmética previa y las formas de pensamiento,
- (b) cómo el alumnado interpreta el simbolismo algebraicos, y
- (c) comprensión de la notación con signos específicos, como paréntesis o el signo igual.

Utilizamos esta clasificación para estructurar los estudios previos consultados.

II.1.1. EXPERIENCIA ARITMÉTICA PREVIA

En relación al análisis de la experiencia aritmética previa y las formas de pensamiento, la investigación llevada a cabo por Booth (1984) con estudiantes con edades comprendidas entre los 13 y los 17 años, establece que todo el alumnado participante incurre en errores relacionados con el uso de la notación y convenciones específicas del álgebra, el significado de las letras y variables, y el tipo de relaciones y métodos utilizados en aritmética. Esta investigación señala que muchas de las dificultades que los estudiantes muestran en álgebra se deben a una falta de comprensión en aritmética.

Conforme el alumnado evoluciona de un pensamiento aritmético a un pensamiento algebraico, necesita considerar las relaciones numéricas de una situación, discutir las explícitamente en lenguaje cotidiano y, finalmente, representarlas mediante lenguaje simbólico (Herscovics y Linchevski, 1994).

Gallardo y Rojano (1988) indagan en los fenómenos de transición del pensamiento aritmético al algebraico dentro de una línea de investigación centrada en la adquisición del lenguaje algebraico. Estas investigadoras presentan como resultados la tendencia del

alumnado a la generalización en los métodos de resolución de ecuaciones así como la utilización de diversos lenguajes en la resolución e invención de problemas. Stephens y Wang (2008) centran sus estudios también en este campo, en cómo hacen los estudiantes la transición de la aritmética al álgebra y la identificación de vínculos en este proceso. Estos últimos estudios determinan que es necesario ayudar a los estudiantes a desarrollar un lenguaje matemático que soporte un pensamiento funcional sobre las variables, que se les ayude a identificar las cantidades que varían y describir la relación pues desvían su atención a una parte o una característica única de la relación en lugar de un todo más amplio.

Palarea y Socas (1999) realizan un estudio cuyo objetivo principal es determinar las dificultades, obstáculos y errores que tienen estudiantes de secundaria para comprender y trabajar con objetos matemáticos relativos al pensamiento algebraico (p.146) con la intención final de elaborar una propuesta curricular para el estudio del lenguaje algebraico. Se centran en la búsqueda de las causas que originan las dificultades al iniciar a los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, estudiando las “operaciones, procesos y estrategias que realiza un sujeto cuando aprende, o sea, cuando adquiere, organiza, elabora y recupera conocimientos del lenguaje algebraico” (p.147). La propuesta que realizan para la enseñanza del álgebra parte, entre otros aspectos, de la aceptación de la tesis de Duval (1993) de que es difícil que un objeto algebraico se interiorice sin reunir diversas representaciones del mismo, proponiendo además instruir al alumnado en la conversión entre cuatro sistemas de representación, que llaman verbal, aritmético, algebraico y geométrico (p. 166). Una de las principales conclusiones que plantea esta investigación es el hecho de que en el aprendizaje del álgebra los sistemas de representación semióticos ocupan una posición central pues la destreza de cambiar de registro constituye una destreza matemática fundamental. La falta de coordinación de este cambio de registros posiblemente sea el origen de muchas dificultades que encuentra el alunando en el estudio del álgebra y que pone de manifiesto en los errores en los que incurre.

Las capacidades de razonamiento y simbolización se desarrollan de forma independiente, según afirma Van Amerom (2003), pues a pesar de que en su estudio había estudiantes (grados 6-7), que eran capaces de escribir ecuaciones para representar problemas, no usaban estas ecuaciones para encontrar la solución y preferían utilizar

otros métodos. Koedinger y Nathan (2004) también detectan que los estudiantes tienen más éxito resolviendo problemas matemáticos de álgebra simples, que resolviendo ecuaciones matemáticas equivalentes, y argumentan que esto se debe a las dificultades del alumnado para comprender las representaciones simbólicas de relaciones cuantitativas. Según los autores “el lenguaje simbólico del álgebra presenta nuevas demandas que no son comunes en el lenguaje natural o en la pasada experiencia de los alumnos con el lenguaje simbólico aritmético” (Koedinger y Nathan, 2004, p. 149). El estudio por la comprensión de la aparición y el desarrollo del pensamiento algebraico es por tanto tema de investigación que han llevado a cabo diversos autores, como por ejemplo Radford (2006, 2010, 2011, 2014).

III.1.2. INTERPRETACIÓN DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO POR EL ALUMNADO

En cuanto a cómo interpreta el alumnado el simbolismo algebraico, Castro (2012) identifica una serie de componentes del simbolismo algebraico y resume una serie de trabajos relacionados con la interpretación que dan los estudiantes a los mismos:

- Variables: símbolos que son utilizados para representar incógnitas, números generalizados y señalar relaciones funcionales (Kieran, 1992; Usiskin, 1987). MacGregor y Stancey (1997) determinan que las investigaciones realizadas muestran que los estudiantes al realizar las primeras aproximaciones al álgebra no entienden el significado de las letras y comúnmente las interpretan como sustitución de objetos o palabras, lo que puede obstaculizar la construcción del concepto de variable. Se considera un impedimento el asignar una letra como nombre de una persona, pudiendo así asumir que las letras son abreviaturas. Además, hay estudiantes que adquieren cierta facilidad en la rutina de manipular variables y pueden trabajar con ellas aunque no tengan plena comprensión de las mismas (Wagner, 1983). Por ejemplo cuando las variables representan incógnitas en ocasiones no entienden que las letras tienen un valor específico.
- Signos: símbolos que pueden denotar operaciones, relaciones de igualdad u orden. Algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra están asociadas al

uso de los símbolos (Wagner y Parker, 1999), en particular la correcta interpretación del signo de igualdad es esencial para el aprendizaje del álgebra (Carpenter, Franke y Levi, 2003; Molina, Castro y Castro, 2009). Conocer los signos es importante a la hora de transformar una expresión en otra, en la simplificación de expresiones o en los procedimientos de solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Arcavi (1994) introduce la noción de sentido del símbolo como una meta deseada en la enseñanza de las matemáticas, señalando que una definición explícita del sentido del símbolo no es viable debido a la complejidad y variación en todo lo que se necesita para utilizar con eficacia y razonar con diferentes formas simbólicas del álgebra.

- Expresiones: siendo una expresión algebraica una descripción de unas operaciones que contienen signos y emplean dos sistemas de símbolos distintos, letras y números. Su uso conlleva economía en la notación pero al ajustarse las letras y los números a diferentes reglas, causa dificultades para los estudiantes (Wagner y Parker, 1999).

Entre las componentes del simbolismo algebraico tenemos la parte literal, o letras. En la literatura encontramos investigaciones centradas en las dificultades vinculadas a los diferentes usos de las letras en la aritmética y el álgebra (Küchemann, 1978, 1981) o las dificultades para operar con lo desconocido (Filloy y Rojano, 1989; Filloy et al., 2008). Haciendo uso de un test realizado a mil estudiantes de 14 años de edad, Küchemann (1981) analizó los diferentes significados que atribuían a las letras, clasificando las interpretaciones correctas de los estudiantes en seis grupos (los ejemplos dados son algunos de los que utiliza este investigador en su estudio):

- (a) Letra evaluada, aplican el valor numérico de la expresión algebraica. Por ejemplo, si $a+5=8$ entonces dan como resultado $a=3$.
- (b) Letra no utilizada, ignoran la letra del enunciado. Por ejemplo, si $a+b=43$, entonces $a+b+2=...$, dan como resultado 45.
- (c) Letra usada como un objeto, usando en simplificación de expresiones. Por ejemplo, si $2m+5p+m$ son “dos manzanas más cinco peras más una manzana” entonces el resultado es $3m+5p$, “tres manzanas más cinco peras.

- (d) Letra usada como un desconocido específico. Por ejemplo, añadir 4 a $3n$, da como resultado $3n+4$.
- (e) Letra usada como un número generalizado. Por ejemplo, al determinar si la expresión $L+M+N=L+P+N$ es cierta siempre, a veces (di cuando) o nunca, dan como resultado que a veces cuando $M=P$.
- (f) Letra usada como una variable. Por ejemplo, para explicar qué es más grande $2n$ o $n+2$, explican que $2n$ si $n>2$.

Este investigador concluye que la mayoría de los estudiantes participantes en su estudio eran incapaces de considerar las letras en álgebra como cantidades desconocidas o como números generalizados.

En nuestra investigación nos interesamos por los puntos (c) y (f) anteriores, esto es, según si ignoran la letra dándole un valor arbitrario o usándola como el nombre de un objeto, y cuando la usan como un número desconocido específico o generalizado.

Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens (2005), basándose en un estudio realizado con estudiantes (grados 6-8) coinciden en algunos puntos sobre la clasificación del uso de las letras realizada por Küchemann (1978, 1981). Estos autores identificaron y clasificaron las respuestas de los estudiantes sobre la interpretación del símbolo literal en cinco categorías: (a) literales que toman varios valores, (b) como número específico, (c) como objeto, (d) otros, o (e) falta de respuesta / no lo sé.

Las letras deben ser tratadas como instrumentos para expresar relaciones y la investigación sugiere que puede ser útil para los estudiantes expresar verbalmente una generalización antes de intentar representarla mediante símbolos (Philipp, 1992).

Algunas investigaciones centran su atención en el concepto de variable, considerándolo fundamental para que el alumnado progrese en el aprendizaje del álgebra, e incorporan a su trabajo en el aula el uso de la calculadora u hojas de cálculo. Entre estas investigaciones tenemos los trabajos de Arnau y Puig (2006) y Graham y Thomas (2000). Los primeros trabajan con alumnado del primer curso de secundaria que no recibe previamente instrucción en la resolución de problemas utilizando el álgebra y se le enseña a resolverlos en el entorno de la hoja de cálculo. Estos investigadores concluyen que los estudiantes de este estudio suelen evitar asignar nombres a las cantidades no presentes en el anunciado del problema. Esta situación

provoca que “hagan la operación de cabeza”, usen más de una operación aritmética en una fórmula o asignen una etiqueta “extra” a la cantidad creada. Los últimos, Graham y Thomas (2000), realizan un estudio utilizando un módulo de trabajo basado en calculadoras gráficas, empleándolas como instrumento para que los estudiantes puedan experimentar algunos aspectos de las variables y comenzar a construir la comprensión de las mismas.

MacGregor y Stacey (1997) realizan un estudio con dos mil estudiantes australianos de edades comprendidas entre los 11 y los 15 años, donde ponen de manifiesto que los orígenes de las interpretaciones incorrectas de las letras en álgebra, que pueden estar o no estar asociados con el nivel cognitivo, son: (a) supuestos intuitivos y de razonamiento pragmático de una nueva notación, (b) analogías con sistemas de símbolos familiares, (c) interferencia del nuevo aprendizaje en matemáticas, y (d) el efecto del mal uso de los materiales de enseñanza.

Más recientemente, Fernández (2013) realiza un trabajo de investigación, con un grupo de 20 estudiantes de 4º de ESO, en el que la invención de problemas le proporciona una herramienta para indagar en el significado que los estudiantes dan al simbolismo algebraico. En este estudio, la autora define una serie de categorías de análisis de tipo sintáctico que le permiten obtener resultados sobre parte de las características de las ecuaciones que dificultan a los estudiantes el inventar un problema que se resuelva con dicha ecuación y, por lo tanto, el dotar del significado apropiado al simbolismo algebraico; y una serie de categorías de tipo semántico que le permiten determinar si los estudiantes dan o no significado a las incógnitas, las operaciones aditivas y las operaciones multiplicativas. La investigadora citada analiza, entre otros aspectos, la estructura sintáctica de los problemas que inventan los estudiantes y la compara con el tipo de ecuación o sistema de ecuaciones al que corresponden; también analiza la capacidad para dotar de significado a expresiones simbólicas que ponen de manifiesto un grupo de estudiantes a través de la tarea de invención de problemas.

III.1.3. USO DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO: PARÉNTESIS Y SIGNO IGUAL

En cuanto al tercer aspecto, la notación del simbolismo algebraico, Kieran (1979) muestra que los estudiantes normalmente no utilizan paréntesis porque consideran que la secuencia escrita de operaciones determina el orden en que deben ser operadas, además muchos de ellos piensan que el valor de una expresión permanece invariable si el orden de cálculo cambia.

Otros investigadores como Behr, Erlwanger y Nicolas (1976) muestran que estudiantes con edades entre 12 y 14 años normalmente ven el signo igual de una forma unidireccional que precede a una respuesta numérica y no como una relación de equivalencia. Es conocido el desequilibrio del signo igual en la transición de la aritmética al álgebra (Hewitt, 2003).

Otras investigaciones destacan la dificultad que encuentran los estudiantes para dar significado correcto al signo igual, ya sea interpretando este signo como una señal de “hacer algo” (Kieran, 1981) o como una asociación entre cantidades (Clement, Lochhead y Monk, 1981).

En cuanto al signo igual y su relación con la competencia en la resolución de ecuaciones algebraicas, Knuth, Stephens, McNeil y Alibali (2006) realizaron un estudio con alumnado de secundaria donde obtienen resultados coincidentes con los de Behr et al. (1976) pues el número de estudiantes que dan un carácter relacional al signo igual es relativamente bajo y no aprecian una mejora a lo largo de los cursos estudiados. Además, los resultados de Knuth et al. (2006) indican que una interpretación relacional del signo igual es necesaria tanto para generar ecuaciones como para interpretarlas y resolverlas. Esta interpretación relacional no es exclusiva del álgebra al ser necesaria para dar significado a identidades aritméticas, como por ejemplo $2+3=3+2$.

En relación al signo igual, existen investigaciones que reportan diversos significados para éste. Por ejemplo, Molina, Castro y Castro (2009) identifican once diferentes significados con los que este signo es utilizado en libros de texto de matemáticas o por el alumnado: (1) propuesta de una actividad: uso del signo igual en las expresiones incompletas que contengan una cadena de símbolos que están a la izquierda del signo igual; (2) operador: uso del signo igual para indicar la respuesta a un cálculo o la

simplificación de una expresión; solo se puede leer de izquierda a derecha; (3) expresión de una acción: un sentido bidireccional que amplía el significado del operador mediante el reconocimiento de la propiedad simétrica de la igualdad; (4) "divisor" o separador: cuando se utiliza para separar los pasos de un ejercicio; (5) expresión de la equivalencia: cuando el signo igual se utiliza para relacionar dos representaciones de un mismo objeto matemático. Se distinguen tres tipos de equivalencias: (a) equivalencia numérica ($4+5=3+6$, $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$); (b) equivalencia simbólica ($a+b=b+a$); y (c) equivalencia por definición o notación ($\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$, $100\text{cm}=1\text{m}$); (6) expresión de una condición de equivalencia (ecuación): uso del signo igual para expresar una equivalencia que es verdad para algunos valores, o incluso para ninguna de las variables que figuran en él; (7) expresión de una relación funcional o dependencia: uso del signo igual para expresar una relación de dependencia entre las variables o parámetros; (8) indicador de una conexión o correspondencia: uso del signo igual entre los objetos no matemáticos o entre las expresiones matemáticas y no matemáticas; (9) indicador de una estimación: uso de este símbolo para relacionar una expresión a una estimación de su valor numérico; (10) definición de un objeto matemático: uso del signo igual para definir un objeto matemático o atribuir un nombre; y (11) la asignación de valor numérico: uso del signo igual para asignar un valor numérico a un símbolo.

En su tesis doctoral, Molina (2006) analiza, entre otros aspectos, la tendencia de los estudiantes de educación primaria a interpretar el signo igual de forma operacional. El alumnado con el que trabaja identifica distintos significados para el signo igual: operador, expresión de una acción, equivalencia numérica y lo que llama similitud numérica (refiriéndose a relacionar expresiones en las que se repiten varios términos o tienen una estructura similar). Identifica además que los estudiantes adaptaron el uso e interpretación de este símbolo al trabajar con igualdades que contenían expresiones a ambos lados del signo igual.

Como señala Ake (2013), otras investigaciones destacan la importancia de distinguir solamente entre dos significados de la igualdad, como son el operacional y el relacional (Kieran, 1981; Filloy, Rojano y Solares, 2003). Al considerar al signo igual como operador, esperamos respuesta, pero al concebirlo como relacional, consideramos una

relación estática entre dos expresiones que son iguales en valor (Jones y Pratt, 2005). Estas investigaciones explican parte de las dificultades que tienen los estudiantes durante el periodo de transición de la aritmética al álgebra ya que “en álgebra, los estudiantes deben ver el signo igual como un símbolo de relación (es decir, “lo mismo que”) en lugar de cómo un símbolo de operación (es decir, “hacer algo”)”.

III.2. TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS ENTRE DISTINTOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Los estudios que atienden a los procesos de traducción en contextos algebraicos consideran en su mayoría los sistemas de representación tabular, gráfico y simbólico (Kieran, 2007). Dichos estudios evidencian que los estudiantes tienen dificultades para mantener la congruencia semántica que caracteriza estos procesos, aunque muestren comprensión de las representaciones inicial y final. Son escasas las investigaciones que centran su atención en la traducción entre el sistema de representación verbal y el simbolismo algebraico. La mayoría de ellas se localizan en el contexto de la resolución de problemas dado que una de las acciones a realizar al abordar un problema algebraico es pasar del enunciado verbal a su modelización con símbolos.

Autores como Kaput, Sims-Knight y Clement (1985) y Kaput (1989) destacan que para realizar de forma exitosa dichas traducciones, los estudiantes requieren comprender tanto las variables y las relaciones de dependencia mutua entre ellas descritas en el enunciado verbal, como las características sintácticas de la representación simbólica. Así mismo se hace necesario que alternen formas sintácticas y semánticas de analizar ambas representaciones durante el proceso de traducción.

Se recomienda que los estudiantes: (a) tomen conciencia de que relaciones fáciles de expresar mediante una representación verbal precisan de cierta reorganización antes de ser traducidas al simbolismo algebraico (MacGregor y Stacey, 1993) y (b) reconozcan la mayor precisión del simbolismo algebraico frente al lenguaje verbal y la posibilidad de lecturas secuenciales y no secuenciales de expresiones simbólicas (Socas, 1997).

La investigación de Galvin y Bell (1977) establece que escribir una ecuación para representar un problema y luego trabajar con la ecuación en lugar de con el problema original, es un obstáculo importante. Tal vez esta es la diferencia más importante entre

la aritmética y el álgebra. Friedlander y Tabach (2001) señalan que el estudiante será mejor solucionando problemas algebraicos si desde temprana edad se mueve fácilmente de una representación a otra.

Entre las escasas investigaciones que encontramos centradas en la traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal, en ambos sentidos, encontramos los trabajos de Filloy y Rojano (1991). En su investigación estudian lo que llaman traslación entre el lenguaje natural y el sistema matemático de signos, en ambos sentidos, con estudiantes que están recibiendo una formación en aritmética y en pre-álgebra como base para la resolución de problemas, este trabajo forma parte de la investigación que llevan a cabo sobre la adquisición del lenguaje algebraico. En este contexto, los estudiantes muestran resistencia a hacer uso del simbolismo algebraico prefiriendo utilizar razonamientos de tipo aritmético (Kieran, 2007; Koedinger y Nathan, 2004).

A continuación atendemos de forma separada a ambos sentidos de traducción: del sistema de representación verbal al simbólico y viceversa.

III.2.1. DEL SISTEMA DE REPRESENTACIÓN VERBAL AL SIMBOLISMO ALGEBRAICO

A partir del análisis de resultados de estudios previos sobre procesos de traducción de enunciados algebraicos verbales a su expresión simbólica, MacGregor y Stacey (1993) identifican dos formas en que los estudiantes abordan esta tarea: (a) realizando una *traducción sintáctica*, es decir, procediendo de izquierda a derecha y traduciendo palabra por palabra o buscando palabras clave, sin atender al significado del enunciado verbal, o (b) realizando una *traducción semántica*, es decir, mediante una comparación estática, tratando de expresar el significado de la expresión a partir de la construcción de un modelo cognitivo de las relaciones matemáticas descritas en el enunciado dado.

Estos investigadores concluyen que se producen errores con mayor frecuencia mediante la primera forma y explican la importancia de la interacción del lenguaje y el aprendizaje de las matemáticas, pues las características del lenguaje natural pueden, en ocasiones, actuar como un obstáculo e inducir al error al traducir enunciados algebraicos. Las conclusiones de estos trabajos advierten de la incidencia del lenguaje

natural sobre la comprensión matemática y que, a veces, no es sencillo representar las ideas en el lenguaje formal que las matemáticas requieren. Destacan que los estudiantes deben ser conscientes de que ciertas relaciones fáciles de expresar en el lenguaje natural precisan de alguna reorganización o reinterpretación antes de ser traducidas al lenguaje algebraico.

En relación a las fuentes de error en la traducción de enunciados algebraicos verbales a su expresión mediante simbolismo algebraico, Wollman (1983) menciona cómo en los libros de texto de álgebra escolar, se suele poner énfasis en que los estudiantes aprendan una habilidad mecánica, de modo que el problema consiste en trabajar con una ecuación dada. Como conclusión a su estudio obtiene que la inclusión de contexto no influye en la traducción de enunciados. Además considera que habitualmente las explicaciones se concentran en aprender esa habilidad mecánica, y no en la comprensión de los conceptos en sí mismos. Este autor cita trabajos de otros investigadores como Clement et al. (1981), quienes estudian los errores generalizados de estudiantes de educación postobligatoria (mayores de 16 años) al traducir enunciados verbales a su representación simbólica. Estos estudios se realizaron mediante pruebas escritas y, en algunos casos, se complementaron posteriormente con una entrevista individual. Los resultados sugieren que los estudiantes no se benefician del contexto en el proceso de traducción.

Matz (1982) y Sleeman (1984) estudian los errores en los que incurren los estudiantes en el aprendizaje del simbolismo matemático, en concreto en la traducción de enunciados verbales, resaltando que el alumnado se limita a manipular los símbolos sin relacionarlos con sus referentes conceptuales. Gómez-Granell (1989) destaca como conclusión a su trabajo que es necesario tener en cuenta en la enseñanza del lenguaje matemático la vinculación con contextos familiares del estudiante y usar “simbolizaciones propias en las que intervenga el dibujo, los esquemas, el lenguaje natural, etc., de manera que el estudiante pueda ser siempre capaz de dotar de significación concreta a cualquier expresión matemática” (p. 14).

Boero (1994) realiza un estudio con estudiantes universitarios de química y biología sobre cómo la transformación de enunciados algebraicos, entra en acción en diferentes actividades matemáticas. Entre las conclusiones el autor destaca que, en la actualidad, los estudiantes se ven obligados principalmente al desarrollo de patrones estándar de

transformación de expresiones algebraicas y que es necesario desarrollar en la escuela una gestión consciente del proceso de transformación.

Wilson, Aintley y Bills (2003) argumentan que las pruebas escolares están normalmente centradas en las actividades de transformación (e.g., sustitución, simplificación o resolución de ecuaciones) de modo que realmente ocultan dificultades de los estudiantes en la construcción del significado del álgebra.

Algunos investigadores sugieren alternativas a la enseñanza del álgebra que permitan al alumnado construir y reflexionar sobre el significado de expresiones y ecuaciones. Por ejemplo, Swan (2000) centra su trabajo en “representar expresiones algebraicas dándoles significado mediante el lenguaje verbal, las tablas y las representaciones gráficas de áreas, con el objetivo de hacer las representaciones más significativas”.

En el trabajo de Pope y Sharma (2001) se plantea como premisa que una persona con sentido numérico es menos probable que cometa errores comunes cuando trabaja con el álgebra. Utilizan como instrumento de recogida de datos un cuestionario de diez ítems mediante el que recogen información sobre la comprensión algebraica en áreas específicas. Entre las cuestiones que utilizan, destaca la información que proporcionan dos de los ítems del instrumento dedicados a estudiar la transcripción de enunciados verbales. Los resultados obtenidos tienen implicaciones importantes para la enseñanza del álgebra que podrían ayudar a desarrollar el sentido simbólico de estudiantes y profesores, así mismo, a comprender la naturaleza de los símbolos, las funciones y variables y las relaciones entre las representaciones.

Mitchell (2001) se refiere a las sustituciones que hacen los estudiantes de palabras en el enunciado original de un problema algebraico, pues tiene importantes consecuencias matemáticas al afectar a la estructura matemática del enunciado del problema. A esta repetición de información cambiando algunas palabras la llama *wordwalking* y determina que es inherente a las interacciones entre el lenguaje natural y las representaciones matemáticas.

Estudios de Cerdán (2008a, 2008b, 2010) aportan detalles sobre las características de las traducciones de enunciados verbales realizadas por estudiantes de bachillerato. Se observa que: (a) proponen diversidad de traducciones, (b) el número de cantidades contenidas en el enunciado verbal no coincide con el número de símbolos diferentes utilizados, (c) tienden a utilizar más letras del mínimo necesario, una de las cuales

corresponde a la incógnita del enunciado, y (d) muestran preferencias comunes en la elección de las cantidades a ser representadas con una letra.

La presencia de información no explícita y de información irrelevante o confusa en los enunciados son otros condicionantes de la dificultad de las traducciones (Bossé et al., 2011a, 2011b), siendo mayor cuando la presencia de estos condicionantes es alta en la representación origen de la traducción y baja en la representación destino. Por tanto, las características de los sistemas de representación de origen y destino en los procesos de traducción que estamos considerando, justifican una dificultad alta. Una propuesta educativa planteada por Bernal (2011) propone la aplicación de recursos visuales y objetos físicos para desarrollar las habilidades cognitivas y mejorar la interpretación matemática de las diversas situaciones encontradas en ejercicios y problemas escolares.

La dificultad de este tipo de traducciones también puede estar influenciada por la presencia y el tipo de contexto implicado en la representación verbal dada. Hasta el momento no existen evidencias claras sobre la naturaleza de esta influencia, pues si bien algunos trabajos la descartan (Wollman, 1983), la familiaridad del contexto es un factor reconocido en los procesos de resolución de problemas (Ambrose y Molina, 2014) e incluso recomendado para dotar de significación concreta al lenguaje matemático (Gómez-Granell, 1989).

Las investigaciones que han indagado en la traducción del sistema de representación verbal al simbólico por estudiantes de secundaria y bachillerato (Cerdán, 2008b, 2010; MacGregor y Stacey, 1993; Rodríguez-Domingo, 2011; Weinberg, 2007), han reportado un alto porcentaje de fracaso en el desarrollo de esta tarea (variable entre 30% y 60% según el estudio). Uno de los errores más referidos, es el denominado *error de inversión*, consiste en representar la relación opuesta a la indicada. Dicho error conduce, por ejemplo, a traducir como $6S = P$ el enunciado verbal “hay seis estudiantes por cada profesor”, utilizando la variable S para referir a los estudiantes y P para los profesores. Este error presenta una gran persistencia, siendo más frecuente cuando las variables implicadas tienen coeficientes diferentes a uno y cuando las letras utilizadas corresponden a las iniciales de las cantidades referidas en el enunciado verbal (Clement, 1982; Davis, 1984; Crowley, Thomas y Tall, 1994; Weinberg, 2007). También se ha identificado en enunciados con estructura aditiva (MacGregor y Stacey, 1993). Los

estudios de Cohen y Kanim (2005) y Wollman (1983) se centraron en investigar el error de inversión. Concluyeron que el éxito en la aparición del error de inversión no se ve influido por la posibilidad de determinar a partir del contexto qué cantidad es mayor.

Sánchez (2012) realiza una investigación utilizando un juego de tarjetas con ecuaciones expresadas simbólicamente, con funciones asociadas a una ecuación, con ecuaciones representadas gráficamente,... En esta investigación, tras observar las dificultades de los estudiantes al trabajar con enunciados de problemas, llegan a la conclusión de que deberían poder reforzarse también con el juego, diseñando para ellos un nuevo tipo de tarjeta, que llaman de enunciados inversa, donde aparezca una ecuación representada de la forma habitual, y se pediría la construcción de un enunciado que se pueda modelizar mediante esa ecuación. Permitiendo así con esa tarjeta mejorar la relación entre ambas representaciones mediante la traducción desde el sistema de representación simbólico al sistema de representación verbal.

Recientemente, González-Calero, Arnau y Puig (2013) y González-Calero (2014) destacan en su trabajo la importancia de expresar correctamente las abreviaturas en el uso del simbolismo algebraico pues es necesario que los estudiantes reconozcan que no se debe de usar “P = profesores” cuando en realidad significa “P = número de profesores”. Un mal uso de los nombres de las cantidades puede impedir al resolutor identificar unívocamente la cantidad a la que hace referencia (Bloedy-Vinner 1996; citado en Boero et al., 2008; Rosnick, 1981). Se hace referencia a esta situación como un *etiquetado impreciso* a la hora de construir nombres apropiados para las cantidades involucradas en el problema (Neuman y Schwarz, 2000). Concluyen en este trabajo que “el hecho de que esta dificultad se traduzca en un incremento de las relaciones incorrectas, parece indicar que debiera dedicarse atención a la construcción de nombres para las cantidades en la enseñanza de la resolución de problemas verbales” (p. 309). Se considera importante desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar símbolos con entendimiento, la cual aumenta con la madurez y la experiencia de los estudiantes (Pope y Sharma, 2001).

Los estudios previos determinan que la traducción del sistema de representación verbal al simbólico es un proceso en el que los estudiantes de educación secundaria presentan numerosas dificultades (Cerdán, 2010; MacGregor y Stacey 1993; Rodríguez-Domingo, 2011; Rodríguez-Domingo y Molina, 2013; Wagner y Parker, 1993;

Weinberg, 2007), a pesar de que ampliamente trabajada en la escuela. Esto ha motivado el interés de investigadores centrados en la didáctica del álgebra. La mayoría de los estudios realizados atienden a los errores habituales puestos de manifiesto por los estudiantes. Por medio de estos errores, se intenta inferir el modo en que abordan la tarea de traducción del sistema de representación verbal al simbolismo.

Además de estos factores, los trabajos de Bossé et al. (2011a, 2011b), centrados en la identificación de elementos que dificultan los procesos de traducción según los tipos de sistemas de representación implicados, destacan la influencia de dos factores personales: la inclusión de traducciones intermedias (es decir, la traducción a otros sistemas de representación como paso intermedio) y la experiencia previa del estudiante en el tipo de traducciones en cuestión. En este sentido, estos autores destacan que la traducción del sistema de representación verbal al simbólico recibe una atención intermedia por los docentes, pues dedican la mayor atención a las traducciones de lo simbólico a lo gráfico y tabular, así como entre los sistemas de representación gráfico y tabular.

II.2.2. DEL SIMBOLISMO ALGEBRAICO AL SISTEMA DE REPRESENTACIÓN VERBAL

La traducción del sistema de representación simbólico al verbal es un proceso en el se ha realizado un menor número de estudios. En este sentido, la invención de problemas resolubles mediante una ecuación o sistema de ecuaciones dado se ha empleado como metodología en diversos estudios (Fernández-Millán y Molina, en revisión; Isik y Kar, 2012; Resnick, Cauxinille-Marmeche y Mathieu, 1987).

Resnick et al. (1987) realiza un estudio con estudiantes de entre 11 y 14 años, sobre traducción de enunciados dados en simbolismo algebraico. En su trabajo analiza las dificultades que tienen para construir un problema a partir de una expresión matemática sencilla.

Según Fernández-Millán y Molina (en revisión), los estudiantes encuentran más dificultades para proponer un problema cuando la ecuación dada incluye multiplicación de incógnitas o coeficientes diferentes de uno y dos. Además, tienden a asignar diferente valor a una misma incógnita cuando esta aparece en miembros diferentes.

Isik y Kar (2012) identifican errores relacionados con el lenguaje, con el realismo del problema y con la falta de relación entre ecuaciones de los sistemas de ecuaciones planteados. Para las ecuaciones de primer grado, los errores identificados se deben a la traducción incorrecta de la notación matemática, la asignación de valores no realistas a las incógnitas de los problemas inventados, el cambio de la estructura de la ecuación en el problema inventado, el uso de simbolismo algebraico en el enunciado del problema y fallo al establecer una relación parte-todo. Esta investigación se lleva a cabo con profesores en formación. Entre las conclusiones a las que se llegan es que estos sujetos muestran incapacidad para traducir operaciones y paréntesis en ecuaciones en expresión verbal. También destacan la importancia de darle contexto a los enunciados algebraicos, facilitando así el trabajo de los estudiantes con la resolución de problemas.

III.3. ERRORES EN EL ESTUDIO Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

Nuestro foco de interés son los errores en que los estudiantes de educación secundaria incurren al abordar procesos de traducción de enunciados algebraicos. Analizamos y clasificamos estos errores al abordar la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal con el objetivo de indagar en su comprensión de enunciados algebraicos. A continuación analizamos cronológicamente, estudios previos consultados relacionados con los errores en los que incurre el alumnado en el estudio del álgebra escolar.

La tabla III.1 sintetiza los estudios previos consultados sobre esta temática los cuales nos dan una idea del estado de la cuestión que es centro de nuestra investigación

Tabla III.1. Estudios previos sobre errores

Foco de interés en el estudio sobre errores	Investigaciones
Naturaleza de los errores en los que incurren al abordar actividades algebraicas	Proyecto SESM (1980-1983)
Tipo de expresiones algebraicas que consideran equivalentes	Booth (1982)
Simplificar/Transformar expresiones algebraicas	Demby (1997)

Foco de interés en el estudio sobre errores	Investigaciones
	Kirshner (1989)
Resolver ecuaciones algebraicas	Carry, Lewis y Bernard (1980)
Tres procesos específicos del lenguaje algebraico: sustitución formal, generalización y modelización	Ruano et al. (2003, 2008)
Manipulaciones algebraicas, uso de un puzle algebraico	Domínguez et al. (2006)
Uso e interpretación de paréntesis	Castellanos y Obando (2009)
Categorizaciones de errores en el estudio del álgebra escolar	McGregor y Stacey (1993) Socas (1997) Palarea (1998), Rodríguez-Domingo (2011), Rodríguez-Domingo, Molina, Cañadas y Castro (2015) Adu-Gyamfi, Stiff y Bosse (2012)
Traducción de enunciados algebraicos verbales a su representación simbólica	Clement et al. (1981) Matz (1982) Wollman (1983) Sleeman (1984) MacGregor y Stacey (1993) Weinberg (2007) Ruano, Socas y Palarea (2008) Cerdán (2008b, 2010) Rodríguez-Domingo (2011), Rodríguez-Domingo y Molina (2013), Rodríguez-Domingo et al. (2015) González-Calero (2014)
Traducción de enunciados algebraicos de simbolismo algebraico a representación verbal	Resnick, Cauxinille-Marmeche y Mathieu (1987) Rodríguez-Domingo (2011), Rodríguez-Domingo et al. (2015)

Dentro de los estudios sobre simbolismo algebraico, Demby (1997) realiza un estudio sobre el tipo de procedimientos empleados por estudiantes de grado 7 en la realización de un test donde tienen que simplificar expresiones algebraicas y analiza, mediante una entrevista personal, las explicaciones que dan a esas actuaciones. Los estudiantes al finalizar el grado 8 pasan el mismo test y también una entrevista personal.

Entre las conclusiones de esta investigación, se determina que algunos tipos de errores, como por ejemplo interpretar la expresión algebraica $2n$ como *dos naranjas*, son comunes entre los estudiantes de diferentes edades, independientemente de su nivel de formación en álgebra. Este resultado también se obtiene en investigaciones previas como las de Booth (1982, 1983, 1984) y Küchemann (1981).

En la revisión de las investigaciones sobre la didáctica del álgebra que realiza Kieran (2007) se recogen estudios relacionados con los tipos de errores en los que incurren los estudiantes en actividades de transformación de expresiones algebraicas. Es el caso de Carry, Lewis y Bernard (1980) sobre los tipos de errores al resolver ecuaciones algebraicas y de Kirshner (1989) quien señala que los errores cometidos no son debidos a una ausencia de control teórico, sino de una percepción errónea de la estructura de la expresión.

McGregor y Stacey (1993) indican que es aceptado que los estudiantes incurran en errores a causa de factores como el uso de letras como abreviaturas de palabras, el intento de traducir directamente de las palabras clave a los símbolos matemáticos, de izquierda a derecha, sin prestar atención al significado, el uso del signo igual para indicar que lo que está en la izquierda está asociado con lo que está en la derecha y la influencia perniciosa de los dibujos mentales. Estos investigadores determinan que en los problemas de teoría de números no tenemos la dificultad de que los estudiantes interpreten las letras como etiquetas, algo que sin embargo sí puede ocurrir en otros contextos y que algunos autores (Booth, 1984; Clement, 1982; Kuchemann, 1981; Davis, 1984) aluden como causa de algunos de los errores que se producen en los procesos de traducción.

Ruano et al. (2003, 2008) presentan un estudio con estudiantes de educación secundaria sobre tres procesos específicos del lenguaje algebraico (sustitución formal, generalización y modelización). Realizan un análisis de errores y las consecuencias didácticas que se derivan de estos. Mencionan la importancia que tiene para el profesor conocer los errores que comete su alumnado, pues le servirá para arbitrar procedimientos y remedios efectivos de ayuda para corregir dicho errores y poder evitarlos. Identifican algunos errores recurrentes relacionados con la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia. Otros de los errores detectados tienen su

origen en una ausencia de sentido, destacando la importancia de “identificarlos para tratar de corregirlos en el ámbito aritmético y que no sean un problema añadido a la hora de introducir el álgebra” (p. 72). Concluyen con algunas consecuencias didácticas tras el estudio realizado y destacando la utilidad de realizar entrevistas individuales a los estudiantes con el propósito de analizar mejor el origen de los errores en los que incurrían.

Domínguez et al. (2006) utilizan la clasificación de errores realizada por Socas (1997) para analizar los orígenes de los errores cometidos por un grupo de estudiantes de secundaria y bachillerato, utilizando como instrumento un puzle algebraico. Los errores que identifican tienen su origen en: (a) actitudes afectivas; (b) ausencia de sentido, aritméticos (ej. omisión de paréntesis) o de procedimiento (ej. cambiar multiplicación por suma); y (c) obstáculo, didáctico (ej. quitar los sumandos que ya han aparecido) o cognitivo (ej. no aceptar enunciados abiertos). A partir de su estudio elaboran una propuesta curricular y destacan el interés de que los estudiantes manipulen varias representaciones para llegar al estudio autónomo de la representación de un objeto. La propuesta curricular que proponen consta de unidades elementales, que llaman fichas, estructuradas en torno a: (a) números enteros; (b) expresiones algebraicas; (c) ecuaciones de primer grado; y (d) ecuaciones de segundo grado. En estas fichas, los investigadores utilizan distintas representaciones para un mismo objeto, en concreto, lenguaje habitual, lenguaje algebraico y representación gráfica.

La investigación de Castellanos y Obando (2009) indaga sobre los errores y dificultades de los estudiantes en la construcción de pensamiento algebraico con la intención de construir un nuevo modelo didáctico para la enseñanza de las matemáticas. Los resultados de estas investigaciones destacan las dificultades de los estudiantes para usar e interpretar los paréntesis, tanto en contextos aditivos como multiplicativos.

Para finalizar este apartado Cerdán (2008b, 2010), Ruano et al. (2008) y Rodríguez-Domingo (2011) identifican otros errores partiendo de enunciados algebraicos representados verbalmente. En el caso de Cerdán y de Ruano et al., los enunciados están contextualizados. En el caso de Rodríguez-Domingo, no lo están. Los errores detectados por estos autores son similares, variando su frecuencia de presentación según el tipo de problema o la presencia o no de contexto. Se identifican errores de carácter aritmético como la confusión de operaciones o el uso inadecuado de paréntesis, errores en la

completitud del enunciado construido (incompleto vs desmedido), y errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico entre los que destacan errores en el uso de las letras (ej., utilizan un símbolo para designar a más de una cantidad, designan con más de un símbolo a la misma cantidad), errores de particularización o generalización de alguno de los términos, y errores en la construcción de las expresiones debidos a la complejidad estructural de las mismas. Entre los errores más frecuentes destacan la confusión de las operaciones potenciación y producto, una interpretación incorrecta de la estructura del enunciado algebraico y la particularización de alguno de los términos del enunciado.

Nuestro estudio previo, Rodríguez-Domingo (2011), permite identificar que al pasar de representación verbal a simbolismo algebraico, el error más cometido por los estudiantes participantes (4º ESO) es debido al mal uso de la interpretación de potencias y producto. En el cambio de simbolismo algebraico a representación verbal, el error más frecuente es el de complicación estructural. Algunos de los errores detectados en el paso de la representación verbal al simbolismo algebraico, en concreto la particularización de expresiones y la confusión de la multiplicación y la potencia, coinciden con los detectados por Ruano et al. (2008) en el estudio ya mencionado.

Las investigaciones referidas referidos permiten identificar algunas posibles causas de los errores señalados: (a) se utiliza un procedimiento puramente sintáctico al abordar la traducción; (b) el estudiante elabora un modelo cognitivo basado en relaciones de comparación entre las variables en lugar de un modelo basado en relaciones de igualdad; (c) el signo igual es considerado como indicador de una correspondencia o asociación; (d) los numerales son interpretados como adjetivos; (e) el estudiante no comprende el enunciado verbal debido a la compleja sintaxis del lenguaje verbal; y (f) el estudiante posee una limitada comprensión del concepto de variable y de las características sintácticas de los enunciados simbólicos.

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO IV. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo describimos la metodología empleada para abordar el problema de investigación planteado en este estudio. Iniciamos caracterizando el tipo de investigación desarrollada y describiendo a los sujetos participantes. Seguidamente, detallamos el diseño e implementación de la recogida de datos, compuesta de cuatro fases en las que hemos aplicado dos cuestionarios (Ficha I y Ficha II) y hemos realizado dos tipos de entrevistas semiestructuradas (torneo y entrevistas individuales). En la figura IV.1 mostramos un esquema con el resumen de la estructura general de este capítulo.

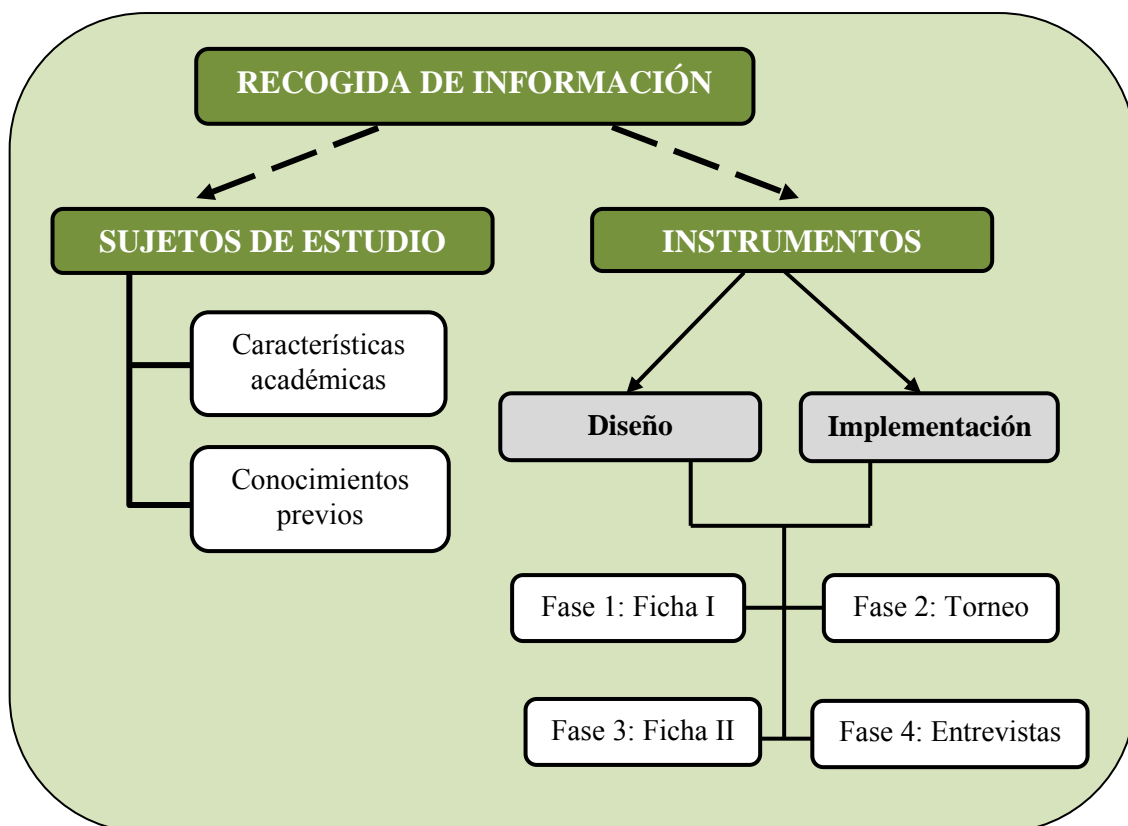


Figura IV.1. Esquema del marco metodológico

IV.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Planteamos una investigación de naturaleza exploratoria de tipo descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2003) ante la escasez de estudios previos que aportan información sobre el problema de investigación considerado, en especial con estudiantes que están iniciando su formación en álgebra. Se trata de una investigación transversal. Presenta elementos tanto de carácter cualitativo como cuantitativo de acuerdo con los objetivos planteados y el tipo de análisis que llevamos a cabo.

En la recogida de datos utilizamos, de forma alternativa, dos tipos de instrumentos: pruebas escritas (Ficha I y Ficha II) y entrevistas semiestructuradas (torneo y entrevistas individuales). Estos instrumentos son aplicados en cuatro fases.

Podemos considerar ambas pruebas escritas como cuestionarios, pues estos se definen como un “conjunto de preguntas respecto a una o más variables a medir” (Hernández et al. , 2003, p. 391). En la Ficha I (fase 1) las preguntas son abiertas pues las alternativas de respuesta no vienen delimitadas de antemano. En cambio, en la Ficha II (fase 3), las preguntas son cerradas con respuesta múltiple. Esta ficha también contiene un apartado de respuesta abierta en el que los estudiantes han de justificar la respuesta previamente seleccionada.

Las entrevistas, de tipo clínico, buscan que el estudiante tenga la oportunidad de expresarse libremente, sin limitaciones para, de esta manera, conocer su razonamiento (Ginsburg, 1997). En palabras de Piaget (1984): “el arte clínico no consiste en conseguir que haya una respuesta, sino en hacer hablar libremente y en descubrir las tendencias espontáneas, en vez de canalizarlas y ponerles diques” (p. 14). En la segunda fase realizamos una entrevista clínica no estructurada, en tanto que planteamos a los estudiantes una situación (torneo con un juego, con un dominó algebraico³) en la que deben actuar bajo unas reglas establecidas a priori, y observamos las acciones de los estudiantes, estando las intervenciones de la profesora investigadora limitadas a llamar la atención por la falta de cumplimiento de alguna regla del torneo o pedir la repetición de alguna idea que podía no haber quedado clara. Para finalizar realizamos entrevistas

³ El juego diseñado, un dominó algebraico, no cumple la definición de dominó pero optamos por llamarlo de este modo porque lo hemos utilizado basándonos en las reglas del juego del dominó clásico y, además, esta terminología resulta más cercana a los estudiantes.

individuales personalizadas para cada estudiante (fase 4), semiestructuradas, con la intención de obtener más información sobre el proceso de recogida de datos.

En la figura IV.2 recogemos un esquema con los instrumentos empleados y las distintas fases de aplicación.

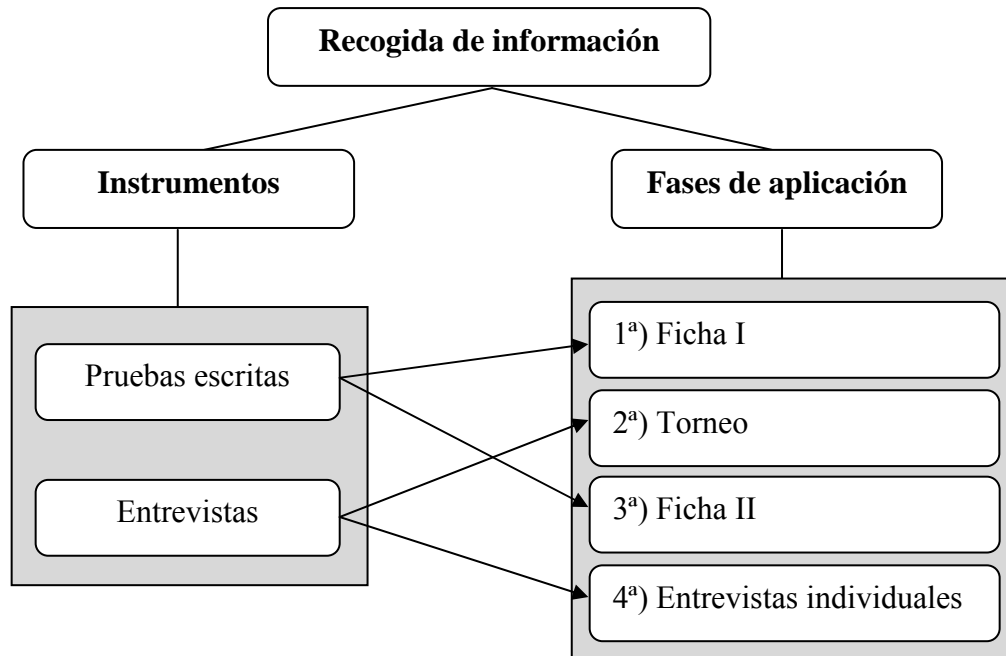


Figura IV.2. Esquema de la recogida de datos

Las dos primeras fases de la recogida de datos son una réplica de la recogida de datos implementada en el Trabajo de Fin de Máster (Rodríguez-Domingo, 2011), antecedente principal de esta investigación. En este y en dicho estudio previo, las características del alumnado hacían aconsejable organizar la recogida de datos de forma que despertara interés en los estudiantes y motivara su implicación. Por este motivo, diseñamos un dominó algebraico compuesto por enunciados algebraicos expresados simbólicamente y verbalmente. Este dominó sirvió de base para el diseño de los instrumentos utilizados en las dos primeras fases de la recogida de datos: Ficha I (primera fase) y torneo con las piezas de dominó creadas (segunda fase). Las otras dos fases consisten en trabajo individual y escrito en la Ficha II (tercera fase) y entrevistas individuales (cuarta fase).

IV.2. SUJETOS

La población considerada para realizar la investigación la constituyen estudiantes de 2º curso de ESO. Consideramos una muestra intencional de 16 estudiantes matriculados en el curso académico 2012-2013 en el IES Francisco Javier de Burgos, en la localidad de Motril, Granada.

Este centro educativo, en el momento de la recogida de datos, constaba de seis grupos para los dos primeros cursos de ESO y tres para los dos últimos cursos. En este IES se imparten los cuatro cursos de ESO, la modalidad de Bachillerato de Ciencias Naturales y de la Salud y la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, el Programa de Cualificación Profesional y un Ciclo Formativo de Grado Medio y de Grado Superior de Informática. Se trata de un centro de compensación educativa y uno de los proyectos educativos que en él se llevan a cabo es el programa de bilingüismo que, en el momento de realización de la recogida de datos, se estaba implantado en los dos primeros cursos de ESO.

El poder adquisitivo de los habitantes de la zona donde se encuentra este centro educativo es bajo así como las condiciones socio-culturales. Todo ello condiciona la situación escolar del alumnado del centro. En general, el absentismo es alto y existe poca motivación e interés por el aprendizaje y el estudio.

Realizamos la selección de los estudiantes atendiendo a su disponibilidad para llevar a cabo esta investigación. Durante el curso escolar 2012-2013, los 16 estudiantes de la muestra eran alumnos de la autora de este trabajo con la que cursaban la asignatura de matemáticas. Estos sujetos formaban parte de un grupo de 27 estudiantes, donde los 11 que no participaron en esta investigación forman un subgrupo de bilingüismo a los que se les imparten las clases de matemáticas en inglés.

Entre los 16 estudiantes de este estudio, hay 7 chicas y 9 chicos. Para referirnos a ellos, protegiendo su identidad, utilizamos una notación compuesta por una letra (S) y un número, donde el número asignado se corresponde con el orden alfabético. Por tanto, la denominación de los sujetos varía de S01 hasta S16⁴.

⁴ Para referirnos a los estudiantes participantes en este estudio, no hacemos distinción de género, utilizamos la expresión “el estudiante” o “el sujeto”.

No todos los estudiantes participaron en todas las fases de aplicación de los instrumentos de recogida de información. En la tabla IV.1 indicamos los sujetos que no participaron y el motivo de la ausencia.

Tabla IV.1. Sujetos participantes en cada una de las fases de recogida de información

Momento recogida información	Sujetos participantes	Total sujetos	Motivo de la ausencia
Fase 1: Ficha I	Todos	16	
Fase 2: Torneo	Todos menos S13	15	Enfermedad en el momento de realización
Fase 3: Ficha II	Todos	16	
Fase 4: Entrevistas	Todos menos S02 y S03	14	S02 ausente durante semanas y S03 se negó a realizar la entrevista

IV.2.1. CARACTERÍSTICAS ACADÉMICAS DE LOS SUJETOS

En cuanto a la situación académica de los estudiantes de la muestra en el momento de la recogida de datos, en la tabla IV.2 indicamos los sujetos que habían repetido alguno de los cursos de ESO así como los que tenían suspensas las matemáticas del primer curso y/o la primera evaluación de matemáticas del 2º curso.

Tabla IV.2. Sujetos con materia pendiente de aprobar y repetición de cursos

Sujeto	Repitió 1º ESO	Está repitiendo 2º ESO	Matemáticas 1ºESO pendiente	1ª evaluación no aprobada
S02				×
S03	×			×
S05	×	×		
S06		×	×	
S07	×			
S12		×		
S13	×			×
Total	4	3	1	3

Nota. Marcamos con × los sujetos que cumplen las características indicadas.

Como observamos en la tabla IV.2, uno de los estudiantes tenía la asignatura de matemáticas de cursos anteriores sin aprobar, tres estaban repitiendo 2º curso y cuatro habían repetido 1º curso de ESO. El resto no presentaban dificultades para alcanzar los objetivos mínimos curriculares de las matemáticas.

A continuación, describimos la situación particular de algunos estudiantes de la muestra con motivo de su seguimiento irregular de las clases. El sujeto S03 presenta un índice alto de faltas injustificadas de asistencia a clase, que hace que en el centro sea considerado absentista. Al comienzo del segundo trimestre, faltó a clase las dos primeras semanas. Como consecuencia, académicamente presentaba un desfase respecto al resto de sus compañeros.

El sujeto S06 es el único estudiante que aún tenía pendiente las matemáticas de 1º de ESO, además de otras materias y, paralelamente a cursar segundo curso, realizaba el trabajo indicado por el departamento correspondiente para superar las materias pendientes. Este estudiante presentaba un desfase académico respecto a los demás compañeros de su grupo y perjudicaba con su comportamiento el desarrollo de las clases. Aunque a principio de curso superó las pruebas escritas de la materia, posteriormente no atendía a lo que se trabajaba en clase. Nos consta que recibía apoyo extraescolar. Al comienzo del segundo trimestre, este sujeto faltó a clase las dos primeras semanas por motivos de salud y, cuando se incorporó a clase, no tenía interés en trabajar y mantenía un comportamiento que dificultaba el desarrollo de las clases.

Del sujeto S13 destacamos que participaba activamente en clase, consultando dudas y realizando actividades, pero cuando se enfrenta de manera individual a una situación como es realizar pruebas escritas, se bloquea y no es capaz de terminar las tareas.

IV.2.2. ORGANIZACIÓN E INCLUSIÓN DEL TRABAJO DE CLASE DE LOS SUJETOS

En el curso académico 2012-2013, con anterioridad a la recogida de datos, los estudiantes habían trabajado los temas del bloque de contenidos de aritmética: (1) divisibilidad de números enteros, (2) sistemas de numeración decimal y sistema sexagesimal, (3) fracciones y (4) proporcionalidad y porcentajes. Realizamos la recogida de datos de esta investigación durante el desarrollo de los siguientes temas del bloque de álgebra: (5) expresiones algebraicas, (6) ecuaciones y (7) sistemas de ecuaciones. Posteriormente, se trabajaron el resto de bloques de contenidos (geometría, funciones y estadística).

La tabla IV.3 sintetiza el cronograma seguido durante las sesiones de clase dedicadas al bloque de álgebra, dentro de las cuales se integra la recogida de datos de esta

investigación. Las clases de matemáticas para 2º de ESO son tres horas a la semana, impartidas para este grupo los lunes, martes y viernes.

Tabla IV.3. Diario de clase

Fecha	Contenido de la sesión
Enero 2013	
Martes 8	Introducción al simbolismo algebraico. Enunciados verbales y simbólicos.
Viernes 18	Enunciados verbales y simbólicos.
Lunes 21	Definiciones: monomios, coeficiente, parte literal, grado.
Martes 22	Realización de la Ficha I en clase (fase 1)
Viernes 25	Suma y resta de monomios.
Lunes 28	Multiplicación y división de monomios.
Martes 29	Polinomios. Definiciones. Operaciones.
Febrero 2013	
Viernes 1	Operaciones con monomios.
Lunes 4	Operaciones con monomios.
Martes 5	Productos notables.
Viernes 8	Productos notables.
Lunes 11	Recreo: Juego del grupo 1 (fase 2). Ecuaciones: definiciones. Traducción de enunciados.
Martes 12	Recreo: Juego del grupo 2 (fase 2). Elementos de una ecuación. Transposición de términos.
Miércoles 13	Recreo: Juego del grupo 3 (fase 2).
Jueves 14	Recreo: Juego del grupo 4 (fase 2).
Viernes 15	Resolución de ecuaciones de primer grado.
Lunes 18	Recreo: Partida final (fase 2). Resolución de ecuaciones de primer grado.
Martes 19	Problemas de ecuaciones de primer grado.
Viernes 22	Problemas de ecuaciones de primer grado.
Lunes 25	Problemas de ecuaciones de primer grado.
Martes 26	Prueba escrita de ecuaciones de primer grado.
Marzo 2013	
Lunes 4	Ecuaciones de segundo grado.
Viernes 8	Realización de la Ficha II en clase (fase 3).
Lunes 11	Entrevistas a los sujetos S16, S14 y S08 (fase 4). Problemas de ecuaciones de segundo grado.
Martes 12	Entrevista al sujeto S12 (fase 4). Problemas de ecuaciones de segundo grado.
Miércoles 13	Entrevista al sujeto S01 (fase 4).
Jueves 14	Entrevista a los sujetos S10 y S05 (fase 4).
Viernes 15	Entrevista a los sujetos S06 y S13 (fase 4).
Lunes 18	Entrevista a los sujetos S11, S09, S07, S15 y S04 (fase 4).

Nota. Sombreamos las fechas y actividades que corresponden a la recogida de datos de esta investigación.

A partir de la revisión de los enunciados algebraicos incluidos en el libro de texto utilizado para el desarrollo de la asignatura de matemáticas (Colera y Gaztelu, 2012b), tanto contextualizados como no contextualizados, identificamos el tipo de relaciones numéricas a trabajar en el aula en el contexto de enunciados algebraicos. A continuación, presentamos las relaciones numéricas identificadas, donde nos referimos como número a una cantidad desconocida (ya sean letras o incógnitas) y como cantidad, a una cantidad conocida. En general, todas las relaciones encontradas hacen referencia a una o a más combinaciones de las siguientes relaciones:

- suma y diferencia de dos números;
- un número más/menos cierta cantidad;
- producto/cociente de dos números;
- cociente y resto de dos números;
- múltiplos de un número;
- divisibilidad de un número;
- cuadrado o el cubo de un número;
- raíz cuadrada de un número;
- números consecutivos; y
- números pares e impares.

En el libro de texto identificamos enunciados verbales sin contexto para los que se les pide a los estudiantes su traducción a simbolismo algebraico. Únicamente aparece un ejemplo de ejercicio que podría considerarse de traducción en el otro sentido, donde se requiere que los estudiantes unan con flechas las representaciones equivalentes de un enunciado algebraico escrito mediante simbolismo algebraico y verbalmente, donde ya aparecen enunciados contextualizados.

Aunque en el libro no aparecen ejercicios para que los estudiantes se familiaricen con la traducción de enunciados simbólicos a su expresión verbal, la profesora investigadora trabajó este tipo de traducción con ellos en clase, pidiendo a los estudiantes que realizaran la traducción a enunciados sin contexto expresados verbalmente de enunciados algebraicos representados simbólicamente.

IV.3. DISEÑO Y DESARROLLO DE LA RECOGIDA DE DATOS

En este apartado, detallamos el diseño y la construcción de los instrumentos utilizados para la recogida de datos de esta investigación así como la planificación de cada una de las fases de la recogida de datos y la manera en que se desarrolló cada una de estas fases.

En las dos primeras fases utilizamos el dominó algebraico diseñado para el trabajo fin de máster Rodríguez-Domingo (2011). Este dominó contiene enunciados algebraicos no contextualizados. En las siguientes dos fases de la recogida de datos se consideran enunciados contextualizados. La figura IV.3 sintetiza las relaciones que existen entre los diferentes instrumentos.

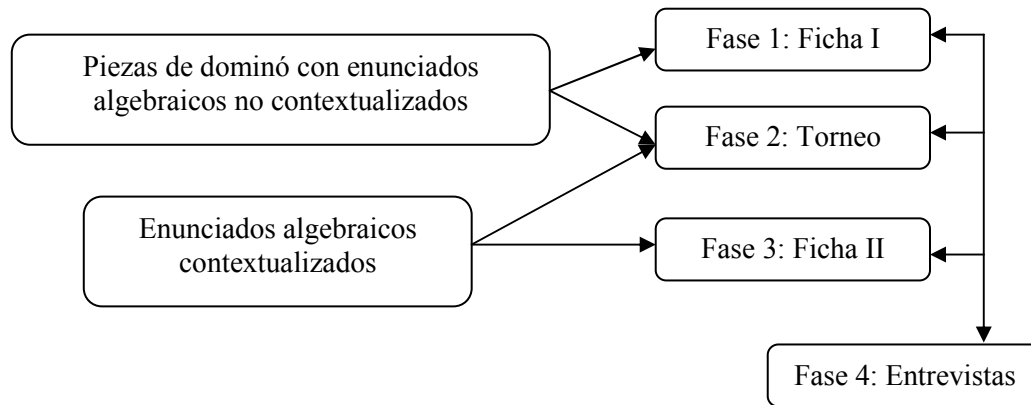


Figura IV.3. Esquema de las fases de aplicación de los instrumentos

Antes de la aplicación de la primera fase, informamos a los estudiantes de la intención de trabajar los temas de álgebra del curso académico de forma distinta a como estaban acostumbrados en clase. En vez de realizar las clásicas pruebas escritas que conocemos habitualmente como examen, su calificación del trimestre consistiría en una acumulación de puntos que irían sumando a través de una serie de pruebas escritas, del trabajo diario y de su participación en clase. La profesora investigadora informó a los estudiantes que se trataba de una serie de pruebas individuales y otras por grupos. Este planteamiento consiguió que se motivaran y pusieran interés en las actividades de clase y estuvieran atentos al trabajo diario propio y de sus compañeros desde el comienzo del trimestre.

IV.3.1. EL DOMINÓ ALGEBRAICO

En la investigación previa (Rodríguez-Domingo, 2011), diseñamos una adaptación del juego del dominó para poner a los estudiantes en situaciones en las que han de realizar o reconocer traducciones de enunciados algebraicos entre representaciones verbales y simbólicas. Aunque no cumple fielmente la definición de dominó, optamos por llamarlo así pues lo usamos basándonos en las reglas del juego del dominó clásico y, además, esta terminología resulta más cercana a los estudiantes.

Para la construcción de los enunciados que incluimos en las piezas del juego, tras una revisión del libro de texto (Colera y Gaztelu, 2012b) del curso en que se encontraban (2º de ESO) y del curso anterior (1º de ESO) (Colera y Gaztelu, 2012a), decidimos usar para el diseño de los enunciados las relaciones numéricas siguientes:

- Aditivas: (a) suma y diferencia de números, (b) suma y diferencia de números y cantidades, (c) números consecutivos.
- Multiplicativas: (a) divisibilidad (múltiplos y divisores de un número), (b) producto y cociente de un número y una cantidad, (c) división entera y (d) paridad.
- Potencias: (a) potencia de un número y (b) raíz cuadrada de un número.

Partiendo de estas relaciones numéricas, elaboramos doce enunciados, la mitad en representación verbal y la otra mitad usando el simbolismo algebraico. Además, en cada uno de estos seis, consideramos un enunciado aditivo, uno multiplicativo, uno de potencia, y un enunciado para cada combinación de dos en dos de estos tres tipos de relaciones: (a) aditivo y multiplicativo, (b) aditivo y potencia, y (c) multiplicativo y potencia. Reflejamos esto en la tabla IV.4 donde solo tenemos en cuenta las celdas marcadas por **×** pues el orden en el que se combinan las relaciones es irrelevante.

Tabla IV.4. Relaciones entre los enunciados algebraicos

	Aditivo	Multiplicativo	Potencia
Aditivo	×	×	×
Multiplicativo		×	×
Potencia			×

Otras tres variables de tarea consideradas en el diseño de estos enunciados son:

- Enunciados abiertos o cerrados. Entendemos por enunciados cerrados aquellos que establecen una igualdad entre dos enunciados algebraicos, es decir, aquellos que equivalen a una ecuación. Y por enunciados abiertos aquellos que no establecen igualdad.
- Número de letras involucradas. Consideramos una o dos letras.
- Enunciados expresados verbalmente secuenciales o no secuenciales. La distinción que establecemos radica en si para proceder a la traducción del enunciado del sistema de representación verbal al simbólico se se puede proceder, o no, siguiendo estrictamente el orden del mismo de izquierda a derecha. Por ejemplo, la expresión en simbolismo algebraico dada por $x + (x + 1) - 4$ representada verbalmente de forma secuencial correspondería a “un número más su consecutivo menos cuatro”, pero de forma no secuencial podría ser “la suma de dos números consecutivos menos cuatro” o “la diferencia de la suma de dos números consecutivos y cuatro”.

Construimos los enunciados de forma que la mitad son abiertos y la otra mitad cerrados, alternándose esta variable de tarea en el caso de los enunciados verbales con ser o no secuenciales. De este modo, en ambos conjuntos de seis enunciados correspondientes a cada tipo de representación, hay tres enunciados abiertos y otros tres cerrados y en los enunciados verbales hay tres secuenciales y otros tres no secuenciales. Además, la mitad de los enunciados incluyen dos letras y la otra mitad una sola.

La tabla IV.5 sintetiza las características de los enunciados incluidos en el dominó, contruidos a partir de la combinación de variables consideradas.

Tabla IV.5. Características de los enunciados incluidos en el dominó

	Abierto	Cerrado
	Enunciados verbales	
Ad		2 letras, secuencial
Mu	2 letras, no secuencial	
Po		1 letra, no secuencial
AdMu	2 letras, secuencial	
AdPo	1 letra, no secuencial	
MuPo		1 letra, secuencial

	Abierto	Cerrado
	Enunciados expresados simbólicamente	
Ad		1 letra
Mu	1 letra	
Po		2 letras
AdMu	1 letra	
AdPo	2 letras	
MuPo		2 letras

Nota. Ad=aditivo; Mu=multiplicativo; Po=potencia; AdMu=aditivo y multiplicativo; AdPo=aditivo y potencia; MuPo=multiplicativo y potencia.

Finalmente, recogemos en la tabla IV.6 los enunciados verbales considerados junto con las características de cada uno de ellos.

Tabla IV.6. Enunciados en representación verbal para traducir a simbolismo algebraico

Relación numérica	Características del enunciado	Representación verbal
Ad	Cerrado Dos letras Secuencial	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
Mu	Abierto Dos letras No secuencial	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número
Po	Cerrado Una letra No secuencial	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número
AdMu	Abierto Dos letras Secuencial	Un número par menos la cuarta parte de otro número
AdPo	Abierto Una letra No secuencial	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
MuPo	Cerrado Una letra Secuencial	Un número por su cuadrado es igual a su cubo

Nota. Ad=aditivo; Mu=multiplicativo; Po=potencia; AdMu=aditivo y multiplicativo; AdPo=aditivo y potencia; MuPo=multiplicativo y potencia.

Igualmente en la tabla IV.7 se recogen los enunciados expresados mediante simbolismo algebraico que proponemos, junto con las características de cada uno de ellos.

Tabla IV.7. Enunciados en simbolismo algebraico para traducir a representación verbal

Relación numérica	Características del enunciado	Representación simbólica
Ad	Abierto Una letra	$x + (x + 1) - 4$
Mu	Cerrado Una letra	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Po	Abierto Dos letras	$(\sqrt{x})^y$
AdMu	Cerrado Una letra	$x \cdot (x + 1) = 7x$
AdPo	Cerrado Dos letras	$x^2 - y^2 = 11$
MuPo	Abierto Dos letras	$(x \cdot y)^3$

Nota. Ad=aditivo; Mu=multiplicativo; Po=potencia; AdMu=aditivo y multiplicativo; AdPo=aditivo y potencia; MuPo=multiplicativo y potencia.

Una vez construidos estos doce enunciados, los incluimos en las piezas del dominó, considerando la representación simbólica y verbal de cada uno de ellos. Por tanto, teniendo en cuenta que no incluimos piezas blancas, el dominó consta de doce piezas simples (figura IV.4) y doce piezas dobles (figura IV.5). Las piezas que diseñamos para el torneo tienen unas dimensiones de 7cm x 14cm y las plastificamos para su uso.

$x + (x + 1) - 4$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	$x \cdot x^2 = x^3$	El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número
$\frac{x}{2} \cdot 3y$	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$	$x + (x + 1) = y - 2$	Un número por su cuadrado es igual a su cubo	$x \cdot (x + 1) = 7x$	El cubo del producto de dos números
$(x \cdot y)^3$	$(x + (x + 1))^2$	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número	$(\sqrt{x})^y$	$(\sqrt{x})^2 = x$	La suma de dos números consecutivos menos cuatro
El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	Un número par menos la cuarta parte de otro número	$2x - \frac{y}{4}$	El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once	$x^2 - y^2 = 11$	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número

Figura IV.4. Piezas simples del juego

Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número	$(x \cdot y)^3$	Un número por su cuadrado es igual a su cubo	$\frac{x}{2} \cdot 3y$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	$(x + (x + 1))^2$
$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$	El cubo del producto de dos números	$x \cdot x^2 = x^3$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$x + (x + 1) = y - 2$	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once	$x + (x + 1) - 4$	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número	$2x - \frac{y}{4}$	El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número	$(\sqrt{x})^2 = x$
$x^2 - y^2 = 11$	La suma de dos números consecutivos menos cuatro	$(\sqrt{x})^y$	Un número par menos la cuarta parte de otro número	$x \cdot (x + 1) = 7x$	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número

Figura IV.5. Piezas dobles del juego

IV.3.2. FASE 1: CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS NO CONTEXTUALIZADOS (FICHA I)

En la primera fase, pedimos a los estudiantes que completaran una plantilla, que describimos a continuación y que llamamos Ficha I, de manera individual y por escrito. Se trata de una plantilla que simula una partida de dominó ya jugada (ver figura IV.6), donde aparecen a medio construir las piezas simples del dominó descrito en el apartado previo. Los estudiantes deben completar las partes en blanco de las piezas escribiendo la traducción del enunciado dado en la pieza anexa. Si el enunciado está expresado en su representación verbal, deben construir la representación del enunciado con simbolismo algebraico, y viceversa.

El trabajo que realizan los estudiantes en esta ficha permite identificar los errores en que incurren estudiantes, al inicio de su formación en álgebra, al construir traducciones de enunciados algebraicos no contextualizados entre los sistemas de representación simbólico y verbal (OE₁).

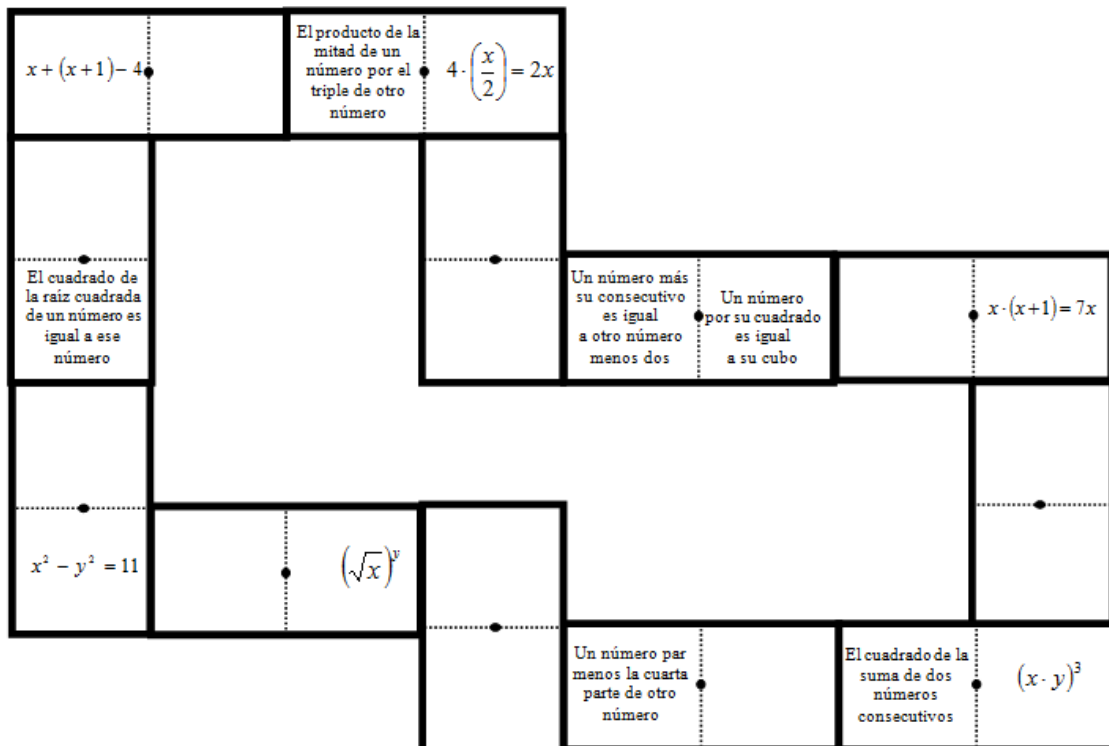


Figura IV.6. Ficha I

Los estudiantes realizaron este trabajo como una actividad inmersa en el contexto de clase. La duración de esta fase fue de 55 minutos y tuvo lugar en el aula habitual de clase⁵. Una vez situados en asientos independientes, la profesora investigadora entregó las hojas de esta tarea y una hoja con las indicaciones a tener en cuenta para rellenar esta Ficha I, que fueron leídas en voz alta por la profesora investigadora antes de comenzar la tarea⁶. Las instrucciones dadas fueron las siguientes:

- cada alumno/a debe poner su nombre y apellidos en la parte superior del folio,
- el trabajo debe realizarse de manera individual,
- se deben rellenar los huecos en blanco de modo que se unan expresiones “que significan lo mismo pero escritas de distinta manera”. Por ejemplo, si en una ficha hay un extremo donde aparece la expresión “ $x + 2$ ”, en la otra ficha que se uniera a ella puede aparecer la expresión “un número más dos”,
- no hay piezas en blanco ni piezas dobles, como ocurre en un dominó tradicional.

Durante esta primera fase, la profesora investigadora actuó como observadora, limitando su participación a resolver cuestiones prácticas o aclaraciones de las instrucciones dadas a los estudiantes. Cuando formulaban alguna cuestión relacionada con los intereses investigadores de la recogida de datos, la profesora investigadora únicamente les indicó que escribieran lo que considerasen más adecuado. Por ejemplo, consultaron cómo representar un número par y ella les indicó que no podía revelarles la forma correcta, que escribieran lo que considerasen que correspondía.

IV.3.3. FASE 2: CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS CONTEXTUALIZADOS Y RELACIÓN ENTRE DISTINTAS REPRESENTACIONES (TORNEO)

En la segunda fase de la recogida de datos se les propone a los estudiantes jugar un torneo con el dominó formado por las piezas construidas en la primera fase (correctamente cumplimentadas) más otras piezas añadidas (piezas dobles, ver figura IV.5). Esta segunda fase nos permite analizar los errores en los que incurren estudiantes,

⁵ Entregamos a los estudiantes la Ficha I en un folio tamaño A3 (ver Anexo A.1.2).

⁶ La hoja dada a los estudiantes con las explicaciones puede consultarse en el Anexo A.1.1.

al inicio de su formación en álgebra, al construir traducciones de enunciados algebraicos contextualizados entre los sistemas de representación simbólico y verbal (OE₃) y conocer cómo establecen relaciones entre representaciones verbales y simbólicas equivalentes de enunciados algebraicos (OE₅), así como identificar el significado que los estudiantes dan a las letras y a los signos operacionales al construir traducciones contextualizadas, expresadas verbalmente, de enunciados dados simbólicamente (OE₆).

Los estudiantes participaron en esta fase en grupos de cuatro, con una primera ronda donde se clasificó el jugador con mayor puntuación de cada grupo. Posteriormente, los cuatro estudiantes clasificados, uno de cada grupo, jugaron una nueva ronda donde finalmente, el jugador con mayor puntuación, resultó el ganador del torneo.

En este dominó introducimos una variante respecto de su uso en Rodríguez-Domingo (2011): destacamos cuatro piezas mediante un punto rojo (ver figura IV.7). Cuando un estudiante pone en juego una de estas piezas, debe dar un enunciado verbal en una situación relacionada con la vida real que corresponda con la expresión simbólica de la pieza. Si el estudiante que tiene la pieza con el punto rojo no es capaz de proponer un enunciado, se le da la oportunidad a otro estudiante que voluntariamente se ofrece para proponer un enunciado.

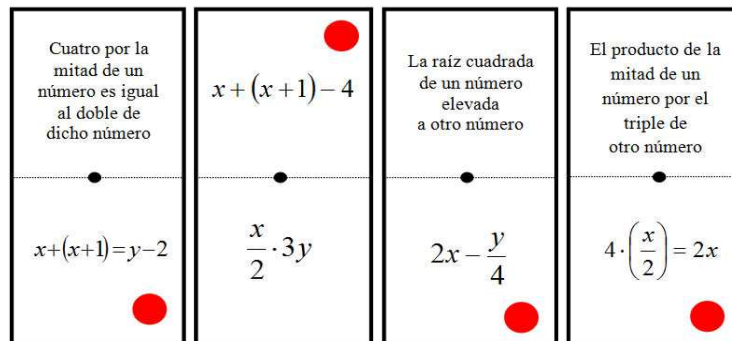


Figura IV.7. Piezas de dominó marcadas

Introducimos esta variante en el juego con la intención de indagar en la capacidad de los estudiantes de traducir enunciados algebraicos expresados en simbolismo algebraico a representación verbal mediante la introducción del contexto, esto es, la construcción de traducciones de enunciados algebraicos contextualizados.

Para la selección de las piezas destacadas con punto rojo, tenemos en cuenta los siguientes criterios: dos son cerradas y las otras dos no, y dos tienen una sola letra y las otras dos tienen dos letras.

El torneo se llevó a cabo en el aula habitual de clase y en presencia de la profesora investigadora, con cada uno de los grupos formados, por separado. De este modo, ningún grupo sabía qué habían hecho sus compañeros previamente (los propios estudiantes se encargaban de mantener el secreto al resto de compañeros, para que esto no les ayudase a obtener más puntos que ellos mismos).

Durante la realización de esta fase, la profesora investigadora realizaba grabaciones de audio que junto con la correspondiente transcripción, sirven posteriormente para analizar la actuación de los estudiantes en esta fase⁷.

Atendiendo a la disponibilidad de los estudiantes, así como a sus características tanto académicas como actitudinales, organizamos a los estudiantes en cuatro grupos heterogéneos para la realización del torneo.

En la tabla IV.8 recogemos la organización general del torneo. Aunque estaba previsto que el sujeto S13 formara parte del grupo 4, finalmente no pudo participar por no asistir a clase por enfermedad el día del torneo.

Tabla IV.8. Organización del torneo

	Participantes	Tiempo de juego	Ganador
Primera ronda	Grupo 1: S01, S05, S07, S12	14min 04seg	S12
	Grupo 2: S02, S06, S09, S14	25min 19seg	S09
	Grupo 3: S03, S10, S11, S15	18min 47seg	S10
	Grupo 4: S04, S08, S16	11min 30seg	S16
Final	Clasificados: S09, S10, S12, S16	22min 58seg	S10

Una vez situados en el aula los cuatro miembros del grupo, la profesora investigadora entregó una hoja con las normas del juego que leyeron en voz alta antes de comenzar; además, informó a los estudiantes que a diferencia de la realización de la Ficha I, en este caso existían piezas dobles aunque no piezas en blanco. También informó de la existencia de cuatro piezas con una marca, un punto rojo, donde los estudiantes debían actuar de una manera distinta. Al poner en juego dichas piezas

⁷ Las transcripciones de las sesiones del torneo se encuentran en el Anexo C.

marcadas, debían proponer un enunciado verbal en una situación relacionada con la vida real. Al inicio de cada partida, la profesora investigadora hizo que se repartieran estas piezas marcadas, de modo que cada jugador tuviera una en su poder durante el juego.

Además de grabar en audio las explicaciones de los estudiantes al colocar una ficha en el juego e ir anotando los puntos correspondientes, como hemos mencionado previamente, la profesora investigadora realizó algunas intervenciones con el objetivo de que los estudiantes se explicaran con mayor claridad, pues en ocasiones se limitaban a leer los enunciados verbales de las piezas o no precisaban la relación entre el simbolismo y parte de la expresión verbal (por ejemplo no indican cómo se representa un número cualquiera o su consecutivo). Otras intervenciones puntuales estaban dirigidas a explicar cómo se unen las piezas, dado que no estaba permitido unir dos enunciados expresados en el mismo sistema de representación, y a dar indicaciones para que observaran cuando una partida estaba terminada por no poder colocarse ninguna pieza más.

Una vez realizada la primera ronda de los grupos, reunimos a los cuatro jugadores con mayor puntuación en cada una de ellas, para realizar un juego final, donde se selecciona un único ganador del torneo. En la realización de la primera ronda, únicamente juega una partida cada grupo. Sin embargo, en la final, los estudiantes realizan una primera partida con mayor velocidad y realizan una segunda partida para obtener más puntuación.

IV.3.4. FASE 3: ELECCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS (FICHA II)

La tercera fase de la recogida de datos consiste en la resolución individual de una tarea escrita, que llamamos Ficha II. Con la realización de esta tarea, identificamos los errores en lo que incurren estudiantes, al inicio de su formación en álgebra, al elegir traducciones de enunciados algebraicos cuando estos vienen expresados mediante simbolismo algebraico y representación verbal (OE₄). Esta tarea consiste en una prueba de respuesta única.

La Ficha II consta de dos partes, que llamamos Situación 1 y Situación 2. En ambas situaciones proponemos cuatro enunciados algebraicos expresados en uno de los dos sistemas de representación (simbólico o verbal) y, para cada uno de ellos, proponemos cuatro posibles traducciones donde solo hay una opción correcta. Los estudiantes deben

elegir una opción que consideren que no es correcta, otra que sí consideren correcta y justificar su elección para cada caso. Diseñamos las opciones de respuesta incorrectas que proporcionamos a los estudiantes, tanto en la Situación 1 como en la Situación 2, teniendo en cuenta los errores detectados en el estudio previo realizado (Rodríguez-Domingo, 2011) y en las dos primeras fases⁸ de la recogida de datos.

Para cada enunciado propuesto se plantea, por tanto, una cuestión cerrada, pues las opciones de respuesta están determinadas de antemano; y una cuestión abierta, al pedirle al estudiante que justifique su respuesta.

Para el diseño de los enunciados utilizados en esta tercera fase, tenemos en cuenta las mismas variables de tarea que en la primera fase, introduciendo la contextualización en los enunciados verbales. Consideramos los siguientes contextos, con los que los estudiantes están familiarizados pues aparecen en su libro de texto y los han trabajado en cursos previos en clase: (a) geométrico, que hace referencia a longitudes, áreas o volúmenes; y (b) numérico, que hace referencia a edades, números y cantidades de objetos.

Teniendo en cuenta la revisión del libro de texto utilizado por los estudiantes en clase y su presencia en la vida cotidiana, decidimos que los enunciados relativos a potencias se encuentren únicamente dentro del contexto geométrico pues es la situación en la que los libros de textos muestran a los estudiantes estos enunciados algebraicos.

Ayudados de esta revisión de los libros de texto construimos los enunciados de esta Ficha II. Destacamos el hecho de que hacemos uso de la palabra “edad” como sinónimo de “número de años” del mismo modo que aparece en los libros de texto y es empleado por el alumnado. Por ejemplo, en el libro de texto del alumnado (Colera y Gaztelu, 2008, p. 126) aparece el siguiente enunciado en representación verbal “La edad de Paula coincide con la quinta parte de la que tendrá dentro de 28 años”. Para este enunciado, la expresión simbólica que propone el libro consiste en considerar x como la edad de Paula, considerar que $x+28$ es la edad de Paula dentro de 28 años y que por tanto la traducción del enunciado es $x = \frac{x+28}{5}$.

Para consolidar el diseño de esta fase, realizamos una prueba piloto en la que participaron dos estudiantes del Máster de Didáctica de la Matemática de la Universidad

⁸ El análisis de errores se encuentra detallado en los apartados V.1 y V.2 de esta memoria.

de Granada. Les propusimos la realización de la Ficha I y de la Ficha II. Posteriormente los entrevistamos para obtener más información sobre cómo habían realizado estas tareas y las posibles dificultades que hubieran encontrado, tanto en la realización de las tareas como en los enunciados que componen las mismas. La mayoría de los enunciados se mantuvieron tras la realización de la prueba piloto, tan solo uno se modificó para que no hubiera confusiones debido a las propiedades. En cuanto a la metodología nos ayudó a preparar las preguntas de las entrevistas individuales para que el alumnado tuviera más tiempo para pensar las respuestas de las mismas y que al ser entrevistados no se sientan cohibidos al expresar sus opiniones, crear un clima de confianza en la entrevista, pudiendo precisar la forma de preguntar a los sujetos sobre las traducciones que habían realizado en las tareas y sobre las explicaciones que habían dado por escrito o de manera oral a sus acciones.

Finalmente, las situaciones quedan como presentamos a continuación.

a) De simbolismo algebraico a sistema de representación verbal (Situación 1)

En la Situación 1 proponemos a los estudiantes cuatro enunciados simbólicos y, para cada uno de ellos, cuatro enunciados verbales contextualizados, uno de ellos traducción del enunciado simbólico correspondiente y los otros tres no.

Las características de los cuatro enunciados simbólicos son las siguientes: dos de ellos son numéricos y dos geométricos, dos abiertos y dos cerrados, dos con una letra y otros dos con dos letras. Así mismo las relaciones que incluyen los enunciados son una aditiva, otra aditiva-multiplicativa, uno aditivo-potencia y una de potencia.

Atendiendo a las características mencionadas, los enunciados que finalmente proponemos en la Situación 1 son los que presentamos en la tabla IV.9.

Tabla IV.9. Características de los enunciados de la Situación 1

Estructura	Características			Enunciados propuestos	
	Contexto	Nº letras	Tipo	Código	Enunciado
Ad	numérico	2	Abierto	E1.1	$5 + x + y$
AdMu	numérico	1	Cerrado	E2.1	$x + 60 = 5x$
AdPo	geométrico	2	Cerrado	E3.1	$x^2 - y^2 = 9$
Po	geométrico	1	Abierto	E4.1	x^3

Nota. Ei.1 = enunciado i de la Situación 1. Ad=aditivo, Mu=multiplicativo, Po=potencia, AdMu=aditivo y multiplicativo, AdPo=aditivo y potencia, MuPo=multiplicativo y potencia

Para determinar las opciones de respuesta de traducción de estos cuatro enunciados expresados en simbolismo algebraico, utilizamos el estudio de errores realizado en Rodríguez-Domingo (2011) y el análisis de los errores en los que incurren estos estudiantes en las dos primeras fases de esta investigación, teniendo en cuenta aquellos errores que se presentan con mayor frecuencia en ambos estudios.

En la tabla IV.10 presentamos los enunciados simbólicos propuestos y las opciones de respuesta en cada caso. Incluimos la opción correcta y las tres opciones incorrectas, precisando el tipo de error considerado en el diseño de dicha respuesta.

Tabla IV.10. Enunciados y opciones de respuesta en la Situación 1

Enunciado propuesto	Opciones de respuesta	Tipo de error
E1.1: $5 + x + y$	Cinco años más la edad de mi hermana más mi edad más la de mi hermana.	I.2
	Cinco veces mi edad y la de mi hermana.	III.4
	Cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo.	✓
	Un número impar más una edad más otra edad.	III.1
E2.1: $x + 60 = 5x$	La suma de un número más sesenta es igual a cinco.	I.1
	Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco.	I.2
	Al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco.	✓
	Sesenta más un número es igual a cinco veces otro número.	III.3
E3.1: $x^2 - y^2 = 9$	El área del suelo de mi habitación cuadrada menos el área del suelo de tu habitación cuadrada.	I.1
	La diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es un número impar.	III.1
	El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo lado de tu habitación también cuadrada es igual a nueve.	III.4
	La diferencia entre el área de dos habitaciones cuadradas es nueve.	✓
E4.1: x^3	El área de un cubo.	III.4
	El triple del lado de un cubo.	II.3
	El volumen de un cubo.	✓
	La tercera potencia de tres.	III.2

Nota. Marcamos con ✓ los errores que no contienen ningún error.

b) De sistema de representación verbal a simbolismo algebraico (Situación 2)

En la Situación 2 proponemos cuatro enunciados verbales contextualizados y, para cada uno de ellos, cuatro enunciados simbólicos. Los estudiantes deben elegir dos expresiones simbólicas: una que sea traducción del enunciado dado y otra que no lo sea. De los cuatro enunciados verbales que proponemos en la Situación 2, dos son numéricos y dos geométricos, dos abiertos y dos cerrados, dos con una letra y otros dos con dos letras, y además dos secuenciales y dos no secuenciales. Proponemos un enunciado aditivo, otro aditivo-multiplicativo, el tercero multiplicativo y, por último, uno de multiplicativo-potencia. La tabla IV.11 recoge los enunciados propuestos y las características de los mismos ya mencionadas.

Tabla IV.11. Características de los enunciados de la Situación 2

Características					Enunciados propuestos	
Estructura	Contexto respuestas	Nº Let	Tipo	Secuencial	Código	Enunciado verbal
Ad	Geométrico	1	Cerrado	no	E1.2	El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros.
AdMu	Numérico	2	Abierto	sí	E2.2	El doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés.
Mu	Numérico	1	Cerrado	no	E3.2	El número de ruedas de dos coches es ocho.
MuPo	Geométrico	2	Abierto	sí	E4.2	El área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina.

Nota. Ei.2 = enunciado i de la Situación 2. Ad=aditivo, Mu=multiplicativo, Po=potencia, AdMu=aditivo y multiplicativo, AdPo=aditivo y potencia, MuPo=multiplicativo y potencia

Para determinar las opciones de respuesta de traducción de los enunciados de la Situación 2, de nuevo utilizamos el estudio de errores mencionado anteriormente, teniendo en cuenta aquellos errores que se presentan con mayor frecuencia en ambos estudios. En la tabla IV.12 presentamos los enunciados verbales que proponemos a los estudiantes y las opciones de respuesta.

Tabla IV.12. Enunciados y opciones de respuesta en la Situación 2

Enunciado Propuesto	Opciones de respuesta	Tipo de error
E1.2: El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, mide noventa y dos metros.	$x + x + (x + 6) + (x + 6) = 92$	✓
	$x + (x + 6) = 92$	I.1
	$2x \cdot 2(x + 6) = 92$	II.4
	$x + x + y + y = 92$	III.3
E2.2: El doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés.	$4 + \frac{x}{4}$	III.2
	$2x + \frac{x}{4}$	III.3
	$2x + \frac{y}{4}$	✓
	$2x + \frac{4}{y}$	III.4
E3.2: El número de ruedas de dos coches es ocho.	$x^2 = 8$	II.3
	$2x = 8y$	III.3
	$x = 8$	I.1
	$2x = 8$	✓
E4.2: El área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina.	x^2	I.1
	$x^2 \cdot y$	✓
	$2x \cdot y$	II.3
	$2x^2 \cdot y$	III.4

Nota. Marcamos con ✓ los errores que no contienen ningún error.

La tabla IV.13 muestra un resumen de los errores presentes en las opciones de respuesta de cada uno de los enunciados que componen la Ficha II.

Tabla IV.13. Errores presentes en la elección de traducciones

Enunciado	Tipos de error									
	I.1	I.2	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
E1.1		×					×			×
E2.1	×	×							×	
E3.1	×						×			×
E4.1					×			×		×
E1.2	×					×			×	
E2.2								×	×	×

Enunciado	Tipos de error									
	I.1	I.2	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
E3.2	×				×				×	
E4.2	×				×					×

Nota. Ei,j = Enunciado i de la Situación j. Marcamos con **×** los errores presentes en los enunciados.

Desarrollamos la tercera fase de manera individual y por escrito. Para realizar este trabajo de la Ficha II contamos con un tiempo de dos horas seguidas en el aula habitual.

En primer lugar, la profesora investigadora proporcionó a los estudiantes una hoja con unas consideraciones a tener en cuenta para realizar esta tarea⁹. Leyó la información de la hoja, explicando cómo se deben marcar las opciones y donde tienen que dar las correspondientes explicaciones de sus elecciones. Las instrucciones fueron las siguientes:

- Cada estudiante pone su nombre y apellidos en la parte superior del folio.
- El trabajo se realiza de manera individual.
- Debes explicar todo por escrito.
- Tenemos dos situaciones. En la Situación 1, tienes unos enunciados verbales para los que queremos encontrar su representación simbólica. En la Situación 2, tienes enunciados simbólicos para los que queremos encontrar su representación verbal. Cada enunciado tiene varias opciones de respuesta. Debes elegir dos de ellas:
 - una opción que consideres correcta y explicar por qué la considera así, y,
 - una opción que consideras incorrecta y explicar por qué crees que es así.

Junto a las instrucciones, la profesora entregó a los estudiantes las hojas con los enunciados de la Situación 1. Cada enunciado, junto con sus correspondientes opciones de respuesta, se presentó en un folio distinto¹⁰.

La profesora explicó que en cada folio de la Situación 1 tenían un enunciado simbólico y cuatro opciones de traducción a su representación verbal. Les explicó que debían marcar en la zona que es de color verde, lo que es correcto, y en la zona marcada en color rojo la opción que es incorrecta (les dio de ejemplo un semáforo, donde verde significa paso y rojo paro).

⁹ Esta hoja explicativa se encuentra en el Anexo A.3.1.

¹⁰ La Ficha II, tal y como la presentamos a los estudiantes, se encuentra en el Anexo A.3.2.

Cuando cada estudiante terminó con las tareas de la Situación 1, comenzó con el trabajo de los enunciados de la Situación 2, sin necesidad de esperar a que el resto de compañeros terminase y evitando así que hablasen entre ellos mientras esperaban.

Durante la realización de esta prueba, los estudiantes se encontraban en silencio trabajando individualmente y, en algunas ocasiones, planteaban cuestiones a la profesora investigadora. Fue necesario aclarar que si pensaban que había más de una opción correcta debían elegir solo una y explicarla, y si pensaban que había más de una incorrecta, igualmente debían elegir solo una y explicarla.

IV.3.5. FASE 4: ENTREVISTAS PERSONALIZADAS

La cuarta fase de la recogida de datos consiste en una entrevista personalizada realizada a los estudiantes de manera individual por la profesora investigadora. Las cuestiones que planteamos a cada uno de los estudiantes vienen determinadas por el análisis realizado de su trabajo en cada una de las tres primeras fases de la recogida de datos.

De este modo, en esta fase los estudiantes tienen la oportunidad de reflexionar y exponer sus razonamientos sobre el trabajo realizado en las fases previas. Así mismo, permite a la profesora investigadora aclarar ideas que, de manera escrita, algunos estudiantes no han expresado con claridad o no han justificado.

Para cada estudiante, realizamos un análisis previo de las respuestas en las fases anteriores. Entrevistamos a todos los estudiantes menos a dos (S02 se negó y S03 se encontraba ausente). Para establecer el orden de realización de las entrevistas individuales tuvimos en cuenta los siguientes criterios:

1. Estudiantes que habían dejado en blanco mayor número de justificaciones de elección de respuesta en la Ficha II.
2. Estudiantes que habían incurrido en errores en la elección de respuesta en la Ficha II.
3. Estudiantes que habían realizado correctamente la elección de respuesta en la Ficha II pero las justificaciones no se entienden o no tienen relación con la elección realizada.
4. Estudiantes que habían dejado enunciados en blanco en la Ficha I.

5. Según las respuestas dadas en la aparición de las piezas con punto rojo en la segunda fase, el juego.

La secuencia de realización de las entrevistas individuales se determinó por la mayor frecuencia en cada uno de los criterios anteriores siguiendo el orden en que han sido presentados y considerados de forma independiente. Por ejemplo, elegimos como primeros sujetos a S16 por ser el que incurre en más errores en la elección de traducciones de enunciados (Ficha II) y al S14 porque sus explicaciones en esta tarea no se entienden con claridad.

Se trata de una entrevista semiestructurada. Partimos del mismo tipo de preguntas para todos los estudiantes. Para cada estudiante, en el transcurso de la entrevista y según el tipo de respuestas que iban dando a las tareas realizadas en las fases previas, surgieron preguntas concretas para indagar en los motivos que les llevaron a elegir o proponer determinadas opciones de respuesta. La profesora entrevistadora planteó preguntas abiertas con el objetivo de obtener más información sobre sus razonamientos.

A continuación, mostramos las cuestiones generales que planteamos a todos los estudiantes en la entrevista¹¹.

a) Cuestiones sobre la construcción de enunciados algebraicos no contextualizados (Fase 1, Ficha I)

Identificamos los enunciados que los estudiantes habían dejado en blanco al realizar el trabajo de la Ficha I, con el objetivo de indagar sobre el motivo de la ausencia de respuesta y darles una nueva oportunidad de completar la tarea. Teniendo delante su propia producción de esta tarea escrita, les planteamos las siguientes cuestiones:

- ¿Por qué dejaste estos espacios sin rellenar?
- ¿Sabrías rellenarlos ahora?
- Di cómo los rellenarías.
- ¿Puedes explicarme por qué te surgen dudas? ¿En qué piensas?
- Vamos a intentarlo ahora juntos, ¿cómo lo harías en este caso?

¹¹ Los guiones de las entrevistas individuales se encuentran en el Anexo A.4.

b) Cuestiones sobre la construcción de enunciados algebraicos contextualizados (Fase 2, torneo)

Durante el desarrollo del torneo, al aparecer las piezas marcadas con punto rojo, 13 de los 15 estudiantes que participan en la segunda fase, realizaron aportación construyendo enunciados contextualizados como traducción de los enunciados en simbolismo algebraico señalados. En las entrevistas individuales, les preguntamos por estos enunciados a aquellos estudiantes cuyos enunciados construidos no son traducción del dado o cuyo razonamiento no quedó claro en el momento de desarrollo del torneo. En primer lugar, la profesora investigadora les leyó el enunciado en representación verbal que ellos mismos habían construido durante el torneo y les pidió que indicaran qué representación simbólica sería traducción de ese enunciado contextualizado construido para que posteriormente ellos mismos comprobaran si correspondía con el que le dábamos en la pieza de dominó.

En la entrevista planteamos cuestiones como las siguientes:

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
- Tu respuesta a una ficha con punto rojo fue: “...” ¿Cómo lo escribirías simbólicamente? ¿Por qué?
- ¿Crees que corresponde con el enunciado simbólico que se te daba? ¿por qué? Si crees que es incorrecto, construye uno nuevo que creas que es correcto.

c) Cuestiones sobre la elección de enunciados algebraicos (Ficha II)

A cada estudiante le dimos sus producciones en la Ficha II y les preguntamos sobre las opciones seleccionadas y las explicaciones dadas a sus elecciones. Preguntamos a los estudiantes sobre enunciados que dejaron en blanco, elecciones erróneas o elecciones correctas cuya explicación no entendemos o no es correcta. Algunos ejemplos de las cuestiones planteadas son:

- ¿Consideras que este enunciado es el que más se ajusta al enunciado simbólico dado?
- Sin mirar la expresión simbólica que te proporciono, ¿Puedes leer de nuevo la expresión verbal que has seleccionado y escribirla simbólicamente?

- ¿Por qué consideraste que este enunciado era el correcto? ¿Qué hizo que lo eligieras?
- ¿Por qué consideras que el enunciado está mal? ¿cómo representarías ese enunciado verbal de manera simbólica?

Posteriormente, para cerrar la entrevista, realizamos preguntas sobre el proceso general de realización de la Ficha II:

- Cuando has elegido la respuesta correcta o incorrecta, ¿has seguido alguna estrategia para identificar una traducción correcta o incorrecta del enunciado dado? ¿Qué criterio has usado para hacer tu elección? ¿Te ha influido el tener que justificar tu respuesta?
- ¿Qué te ha resultado más fácil, elegir la opción correcta o explicar la opción incorrecta? ¿Por qué?
- ¿Qué te ha resultado más fácil, explicar la opción correcta o explicar la opción incorrecta? ¿Por qué?
- ¿Qué te ha sido más fácil, la Situación 1 donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la Situación 2 donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico? ¿Por qué?

d) Implementación de estas entrevistas individuales

Elaboramos esta última fase de recogida de información las dos últimas semanas del trimestre, haciendo uso de los recreos y de algunas horas en las que los estudiantes no tienen clase por falta de algún docente. La duración de las entrevistas individuales varía entre 10 y 25 minutos. Para poder realizar un análisis posterior de estas entrevistas individuales, realizamos grabaciones de audio cuyas transcripciones¹² nos permiten posteriormente realizar el estudio propuesto en esta investigación.

Como ya se ha indicado, realizamos entrevistas individuales a catorce de los dieciséis estudiantes que participan en el estudio. Los dos estudiantes no entrevistados son el sujeto S02, quien se negó a realizarla, y el sujeto S03 que es considerado absentista por su gran cantidad de faltas de asistencia y durante las dos semanas de realización de estas entrevistas personalizadas, que coinciden con la finalización del segundo trimestre del

¹² Las transcripciones de las entrevistas individuales se encuentran en el Anexo E (desde E.1 hasta E.14).

curso, no acudió a clase. La profesora investigadora estableció un orden de actuación, colorando un cartel con dicho orden en la puerta del aula para que todos tuvieran conocimiento de cuándo les correspondía realizar la entrevista. Posteriormente, algunos estudiantes intercambiaron su puesto con otro compañero en función de la disponibilidad de las horas. Finalmente, realizamos las entrevistas individuales en el orden que se indica en la tabla IV.14.

Tabla IV.14. Organización de las entrevistas personalizadas

Nº entrevista	Momento de la entrevista	Sujeto entrevistado
1	Lunes 11-03-2013, 09:15h	S16
2	Lunes 11-03-2013, 09:45h	S14
3	Lunes 11-03-2013, 11:15h	S08
4	Martes 12-03-2013, 11:15h	S12
5	Miércoles 13-03-2013, 11:15h	S01
6	Jueves 14-03-2013, 10:15h	S10
7	Jueves 14-03-2013, 10:45h	S05
8	Viernes 15-03-2013, 13:45h	S06
9	Viernes 15-03-2013, 14:15h	S13
10	Lunes 18-03-2013, 10:15h	S11
11	Lunes 18-03-2013, 10:40h	S09
12	Lunes 18-03-2013, 11:00h	S07
13	Lunes 18-03-2013, 11:30h	S15
14	Lunes 18-03-2013, 12:00h	S04

CAPÍTULO V

CAPÍTULO V. ANÁLISIS DE DATOS GRUPAL

En este quinto capítulo presentamos el análisis cuantitativo de los datos obtenidos en la investigación mirándolos de forma conjunta, es decir, considerando de forma grupal a todos los estudiantes.

Como ya hemos mencionado con anterioridad, pretendemos estudiar los errores en los que incurren los estudiantes al hacer traducciones de expresiones algebraicas entre los sistemas de representación simbólico y verbal (en los dos sentidos)¹³ en tres actuaciones diferentes:

- i) construyendo enunciados no contextualizados que sean traducción de otros dados pero presentados en diferente sistema de representación;
- ii) construyendo un enunciado contextualizado que sea traducción de otro dado mediante simbolismo algebraico;
- iii) eligiendo uno, de entre varios enunciados contextualizados dados, que sea traducción de uno dado, en diferente sistema de representación, y eligiendo otro que no lo sea.

Llevamos a cabo estas actuaciones en distintas fases (ver figura V.1). En ellas utilizamos los instrumentos descritos anteriormente en el apartado IV.3 de esta memoria, que permitieron recoger los datos que aquí analizamos junto a la información complementaria aportada por las entrevistas individuales.

En la figura V.1 mostramos concretamente en qué fase podemos observar cada una de las actuaciones que queremos analizar en los estudiantes.

¹³ A lo largo del análisis de datos emplearemos la notación $S \rightarrow V$ para referirnos a la traducción de enunciados dados mediante simbolismo algebraico a sistema de representación verbal, así como $V \rightarrow S$ para referirnos a la traducción de enunciados dados en representación verbal a simbolismo algebraico.

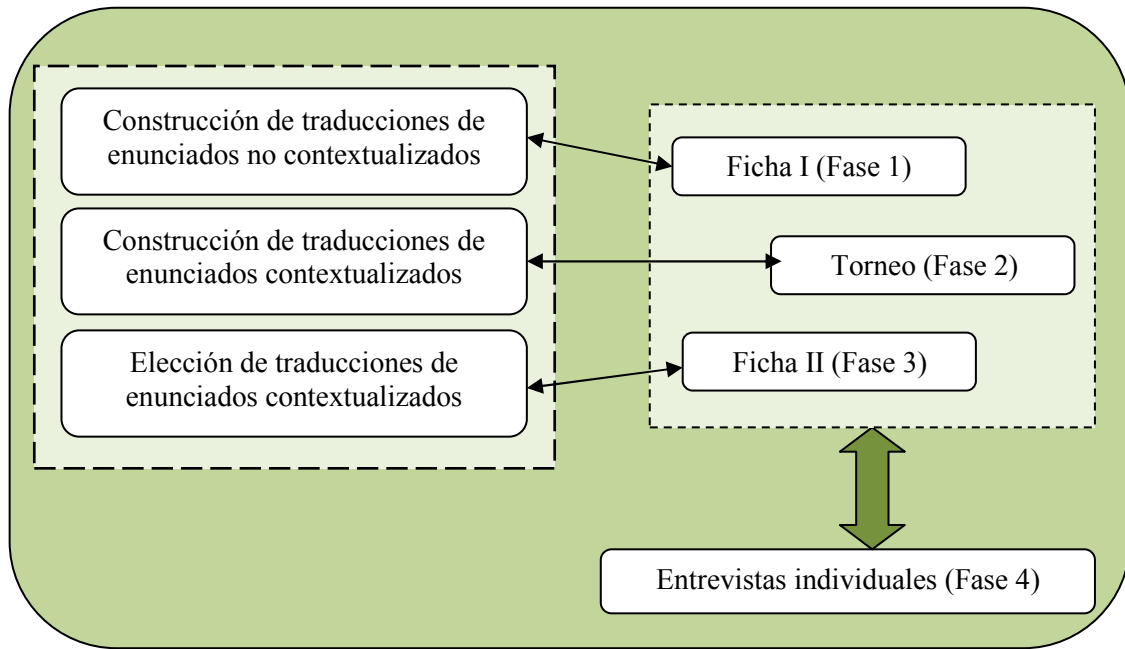


Figura V.1. Esquema del análisis de datos realizado

Antes de comenzar el análisis de datos, recordamos que, tal y como hemos mencionado a lo largo de esta memoria, en el estudio previo realizado (Rodríguez-Domingo, 2011) y en la primera parte de este estudio, la actuación de los estudiantes consistía en construir traducciones de enunciados, utilizando enunciados algebraicos no contextualizados. Para conectar con la resolución de problemas, en los que por lo general aparecen expresiones algebraicas contextualizadas, introducimos elegir y construir enunciados algebraicos contextualizados (segunda y tercera fase de aplicación de los instrumentos de recogida de información) en las fases siguientes.

Este capítulo V se estructura de la siguiente manera:

- (a) Análisis de los errores en los que incurren los estudiantes al construir traducciones de enunciados algebraicos dados, no contextualizados, expresados en los sistemas de representación simbólico y verbal.
- (b) Comparación de los resultados con los obtenidos en nuestro estudio previo (Rodríguez-Domingo, 2011). Los datos de este análisis provienen de la primera fase de aplicación de los instrumentos de recogida de información, mediante lo que hemos llamado en esta investigación Ficha I.

- (c) Análisis de los errores en los que incurren al construir enunciados verbales contextualizados al proporcionar un enunciado representado mediante simbolismo algebraico. En este caso, los datos de este análisis derivan una parte de la segunda fase, del torneo.
- (d) Análisis de los errores en los que incurren los estudiantes al elegir entre expresiones contextualizadas dadas, las que son traducción de enunciados algebraicos. Los datos de este análisis proceden de la tercera fase de aplicación de los instrumentos de recogida de información, mediante lo que hemos llamado en esta investigación Ficha II.
- (e) Análisis de la realización de la lectura, lineal o relacional, de las representaciones consideradas (simbólica o verbal) del enunciado dado. Distinguimos entre una lectura lineal o relacional de los enunciados. Entendemos por lectura lineal aquellas en las que leen en primer lugar el enunciado en representación verbal y después el enunciado expresado en simbolismo algebraico sin llegar a establecer la equivalencia entre ambas expresiones. Consideramos que un estudiante realiza una lectura relacional del enunciado cuando relaciona la representación simbólica del mismo con su representación verbal. En este caso, los datos de este análisis derivan de la segunda fase (torneo) y de la tercera fase (Ficha II).
- (f) Análisis conjunto de los errores al realizar las tres tareas propuestas.

V.1. ANÁLISIS DE ERRORES EN LA CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS NO CONTEXTUALIZADOS (FICHA I)

En este apartado, realizamos una clasificación y análisis de los errores en los que incurren los estudiantes al construir traducciones de enunciados algebraicos no contextualizados utilizando los sistemas de representación simbólico y verbal¹⁴.

En primer lugar efectuamos una clasificación de dichos errores, atendiendo al sentido de la traducción realizada. Seguidamente realizamos una comparación de los mismos en

¹⁴ Las producciones de cada uno de los estudiantes a la Ficha I pueden consultarse en el Anexo B.2.

ambos sentidos y, finalmente, comparamos estos resultados con los obtenidos en nuestro estudio previo (Rodríguez-Domingo, 2011).

Enumeramos los enunciados correspondientes a los espacios que han de rellenar los estudiantes para formar las piezas de dominó en la Ficha I. Como son doce espacios, los hemos numerado desde 1 hasta 12, en el sentido de las agujas del reloj (figura V.1.1). Nuestro propósito es hacer más rápida la referencia a las mismas. Utilizaremos esta numeración para citarlos en adelante en esta memoria como E1 hasta E12.

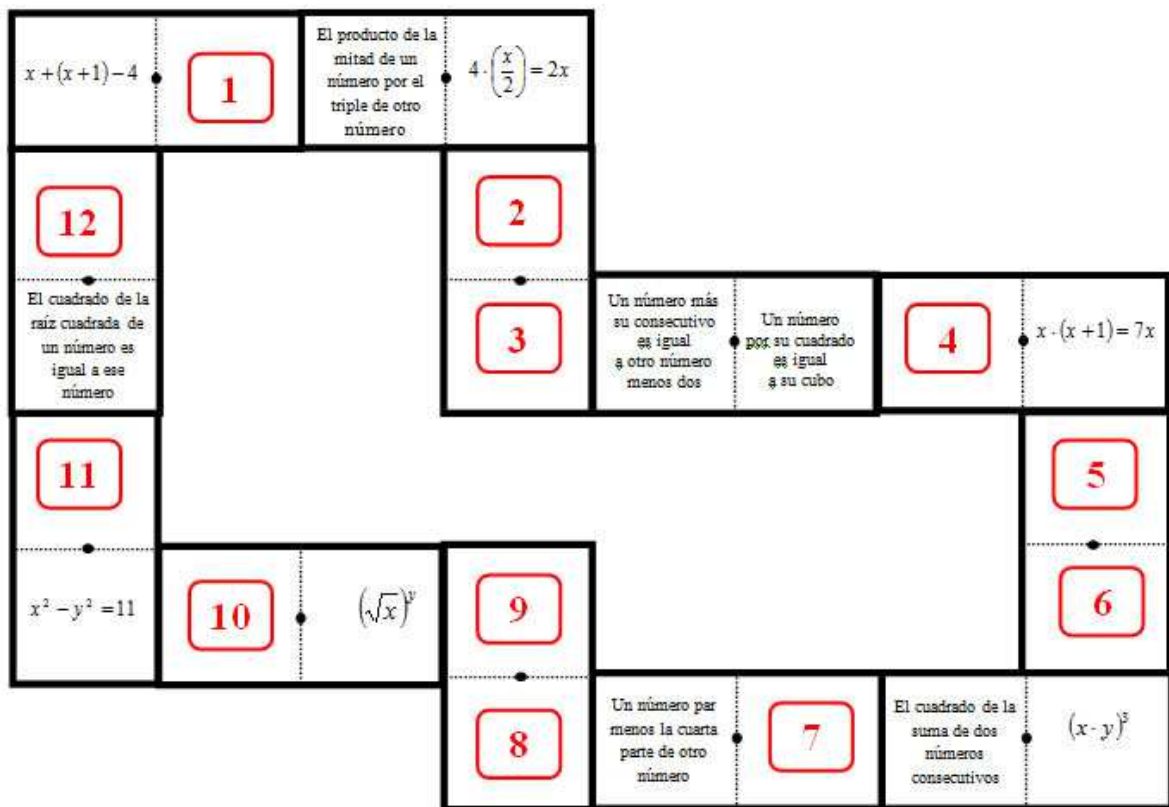


Figura V.1.1. Documento a completar por los sujetos (Ficha I)

Recordamos que los estudiantes debían completar las doce casillas en blanco, colocando en cada una de ellas la traducción de un enunciado de modo que se correspondiera, cada uno de ellos, con la expresión ya escrita en la parte de la pieza del dominó anexa a ella.

Tabla V.1.1. Enunciados que aparecen en las piezas de dominó

Notación	Enunciado
E1	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número.
E2	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
E3	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos.
E4	Un número por su cuadrado es igual a su cubo.
E5	$x \cdot (x + 1) = 7x$
E6	$(x \cdot y)^3$
E7	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos.
E8	Un número par menos la cuarta parte de otro número.
E9	$(\sqrt{x})^y$
E10	$x^2 - y^2 = 11$
E11	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número.
E12	$x + (x + 1) - 4$

Nota. Desde E1 hasta E12 representan los enunciados que se ubican en el recuadro 1 hasta el 12.

V.1.1. BALANCE DE RESPUESTAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS NO CONTEXTUALIZADOS

En total hay 192 posibles respuestas de los estudiantes (16 estudiantes, 12 enunciados cada uno). De estas respuestas, en el 16% de los casos no hay respuesta, el 32% de las respuestas son correctas y en el 52% de estas se manifiesta algún error.

Según el enunciado, el número de construcciones de traducciones correctas presenta una alta variabilidad: varía de 0 (E8) a 10 (E10), con un promedio de 5. Como puede observarse en la figura V.1.2, todos los enunciados presentan algunas traducciones con errores, variando su frecuencia entre 5 (E6, E10 y E12) y 14 (E8). El número máximo de respuestas en blanco es 6 en el caso de E1 y 5 en E4, fluctuando entre 0 y 3 en el resto de casos.

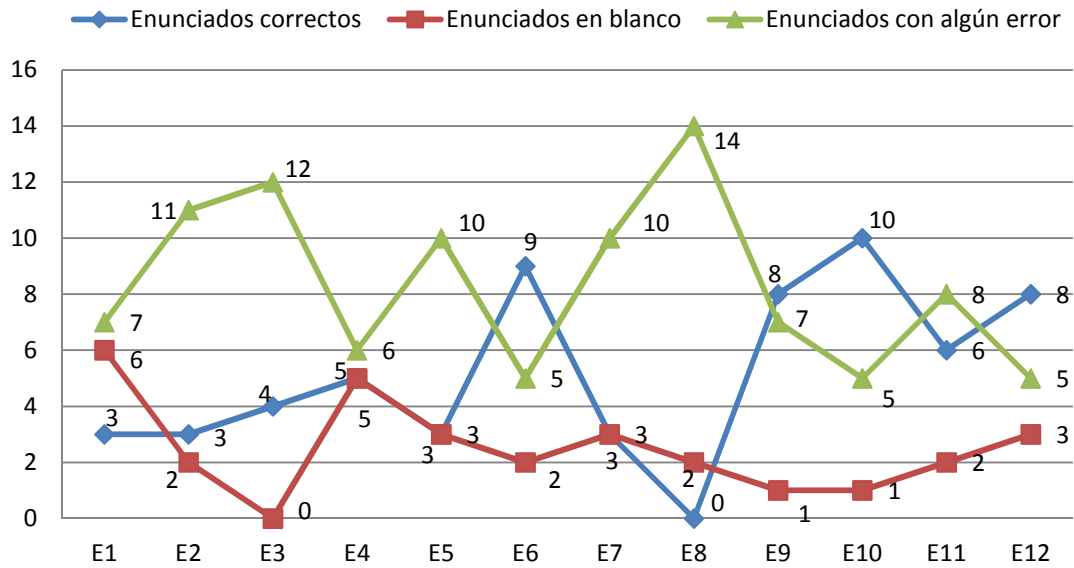


Figura V.1.2. Tipo de respuestas en la construcción de enunciados no contextualizados

Dos enunciados presentan mayor frecuencia de traducción correcta por los estudiantes, E6 y E10. Estos enunciados tienen como característica común que se presentan en simbolismo algebraico y tienen dos letras. Se diferencian en que uno es abierto y el otro cerrado.

Comparando el enunciado en el que se producen más errores (E8) con el que más respuestas en blanco ha proporcionado (E1), las características de E8 son distintas a las del enunciado E1: E8 es aditivo, secuencial, abierto y con dos letras; y E1 es multiplicativo, no secuencial, abierto y con dos letras.

Al menos 10 de los 16 estudiantes construyen traducciones correctas en el caso de los enunciados E6, E10 y E12, siendo estos enunciados los que presentan menor número de respuestas erróneas. La mayoría incurre en errores en mayor porcentaje en los enunciados E8, E3, E7 y E5 (14/16, 12/16, 10/16 y 10/16 respectivamente). En el enunciado E8 se detectan mayor número de errores, concretamente ningún estudiante lo traduce correctamente y dos lo dejan en blanco.

Teniendo en cuenta el sentido de la traducción percibimos que los enunciados presentados en su representación verbal (E1, E3, E4, E7, E8 y E11) provocan mayor cantidad de errores (aproximadamente, representan el 60% de las producciones en las que se manifiestan errores) que los presentados mediante el simbolismo algebraico (E2,

E5, E6, E9, E10 y E12) (aproximadamente, representan el 40% de los mismos). Del mismo modo, los estudiantes dejan en blanco más enunciados correspondientes a los primeros que a los segundos.

V.1.2. ANÁLISIS DE ERRORES EN LA CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS NO CONTEXTUALIZADOS

Los diversos tipos de respuesta en el trabajo realizado por los estudiantes, en esta primera fase, ponen de manifiesto errores al realizar la tarea. En ocasiones, como hemos mencionado previamente, encontramos varios errores en el mismo enunciado.

En la tabla V.1.2 presentamos el número de errores identificados en las producciones de los estudiantes para cada enunciado, distinguiendo el sentido en el que se hace la traducción.

Tabla V.1.2. Presencia de errores por enunciado en la construcción de enunciados no contextualizados

Enunciado	Nº de errores
De simbólico a verbal	
E2	16 (26%)
E5	15 (25%)
E6	7 (11%)
E9	9 (15%)
E10	8 (12%)
E12	7 (11%)
Total	62 (100%)
De verbal a simbólico	
E1	12 (13%)
E3	21 (22%)
E4	7 (7%)
E7	17 (18%)
E8	26 (28%)
E11	11 (12%)
Total	94 (100%)

Para analizar estos errores, utilizamos las categorías y subcategorías que recogemos en la tabla V.1.3. Se trata de la clasificación utilizada en el estudio previo Rodríguez-Domingo (2011) que hemos presentado en el apartado II.3.3 de esta memoria.

Tabla V.1.3. Clasificación de errores

Categoría	Subcategoría o tipo	Código
I. Según la completitud del enunciado	Incompleto	I.1
	Desmedido	I.2
II. Derivados de la aritmética	Paréntesis	II.1
	División – Multiplicación	II.2
	Potenciación – Multiplicación	II.3
	Suma – Multiplicación	II.4
	División – Potenciación	II.5
III. Derivados de las características propias del simbolismo algebraico	Generalización	III.1
	Particularización	III.2
	Letras	III.3
	Complicación estructural	III.4

Antes de comenzar con el análisis, dados los enunciados de nuestro estudio y las categorías utilizadas para el análisis de errores, queremos destacar lo siguiente. Hemos considerado que traducir el enunciado en representación verbal “un número par” como “ x ” es una traducción incompleta (I.1) pues le falta expresar la paridad. En el caso de traducirla como un número concreto (e.g. 2, 6 u 8), lo clasificamos como un error de particularización (III.2). Del mismo modo, consideramos una traducción incompleta (I.1) traducir la expresión simbólica $2x$ como “un número” pues igualmente le falta indicar la paridad y traducirla como “dos” es considerada un error de particularización (III.2).

En la figura V.1.3 organizamos la información según las categorías de la tabla V.1.3. Percibimos que los errores derivados de la aritmética (categoría II) son los menos frecuentes, teniendo presencia nula el error de división-multiplicación (II.2).

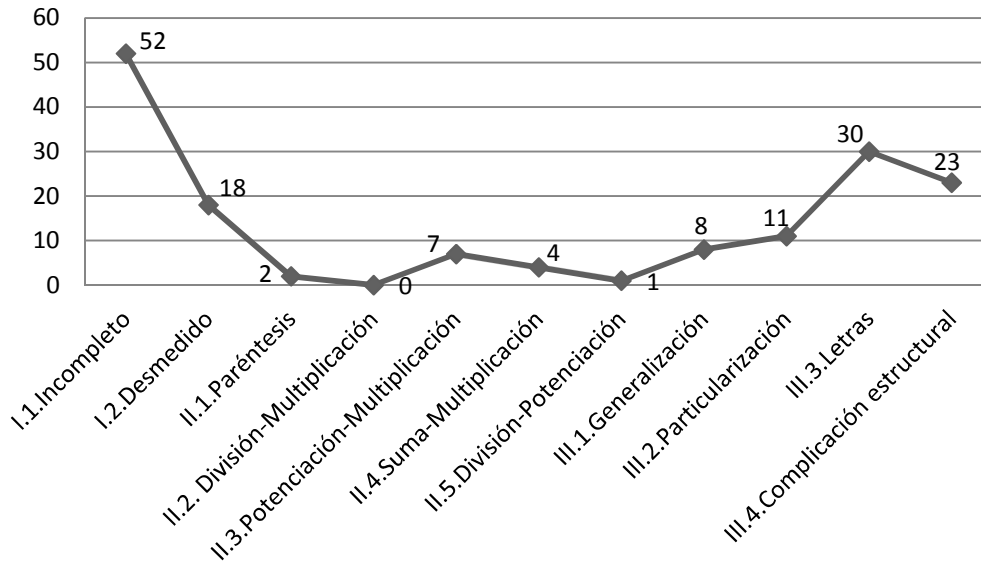


Figura V.1.3. Presencia del tipo de error en la construcción de enunciados no contextualizados

En general, sin tener en cuenta el sentido de traducción, el error debido a enunciado incompleto (I.1) es el que se manifiesta con mayor frecuencia (52/156, 33%), seguido de los errores de letras (III.3, 30/156, 19%), complicación estructural (III.4, 23/156, 15%), desmedido (I.2, 18/156, 12%) y particularización (III.2, 11/156, 7%). Dentro de los errores de letras (III.3), encontramos que el 32% de estos errores corresponde al hecho de que los estudiantes asignan más de un significado a una misma letra (utilizan dos letras con un mismo significado), mientras que el 68% restante corresponde a que asignan un mismo significado a distintas letras (utilizan una misma letra con distintos significados).

A continuación, profundizamos en el análisis de los errores, distinguiendo según el sentido de traducción de los enunciados propuestos.

a) De simbolismo algebraico a sistema de representación verbal

En la figura V.1.4 mostramos la frecuencia, por tipo de error, al realizar traducciones de enunciados simbólicos a su expresión verbal.

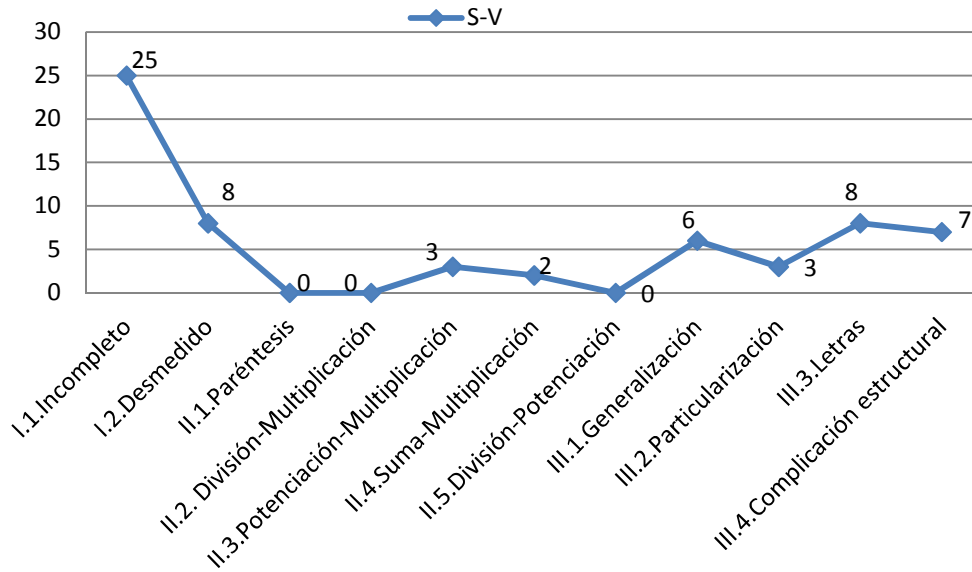


Figura V.1.4. Frecuencia de tipos de errores en traducción de simbólico a verbal

Los errores de enunciado incompleto (I.1, 25/62, 40%), desmedido (I.2, 8/62, 13%), letras (III.3, 8/62, 13%), complicación estructural (III.4, 7/62, 11%) y generalización (III.1, 6/62, 10%) son los más frecuentes en la traducción de enunciados de sistema de representación simbólico a verbal, sumando los cinco tipos aproximadamente el 87% de los errores que se producen en este sentido de traducción. Por otro lado, hay presencia nula de los errores de paréntesis (II.1, 0/62, 0%), división-multiplicación (II.2, 0/62, 0%) y división-potenciación (II.5, 0/62, 0%).

Considerando el tipo de error, en la tabla V.1.4 presentamos la frecuencia con que aparecen al traducir enunciados de forma simbólica a verbal, así como el enunciado donde se han producido estos errores y los estudiantes que han incurrido en ellos.

Tabla V.1.4. Frecuencia de tipos de errores en traducción de S → V

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado	Sujetos
I.1	25 (40%)	E2	S02,S04,S06,S07,S11,S13,S15,S16
		E5	S04,S06,S07,S08,S11,S14,S15,S16
		E6	S13,S15
		E9	S01,S13,S14,S15
		E10	S13,S15
		E12	S15
		I.2	8 (13%)
E6	S02		

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado	Sujetos
		E10	S01,S02
		E12	S04,S05,S06
II.1	0 (0%)		
II.2	0 (0%)		
II.3	3 (5%)	E6	S12
		E9	S06
		E10	S12
II.4	2 (3%)	E2	S08
		E5	S15
II.5	0 (0%)		
III.1	6 (10%)	E2	S02,S04,S05
		E6	S11
		E10	S02
		E12	S05
III.2	3 (5%)	E2	S06
		E9	S07,S12
III.3	8 (13%)	E2	S01,S05
		E5	S01,S05,S08
		E6	S02
		E10	S02
		E12	S08
III.4	7 (11%)	E2	S13
		E5	S15
		E6	S13
		E9	S01,S06
		E10	S05
		E12	S08

En la tabla V.1.4 observamos que el error que más se manifiesta, el de enunciado incompleto (I.1, 25/62, 40%), se muestra en todos los enunciados propuestos para este sentido de traducción. En 2 de estos 6 enunciados (E2 y E5), son 8 de los 16 estudiantes los que incurren en errores.

El error de desmedido (I.2, 8/62, 13%) se concentra en 4 de los 6 enunciados (E5, E6, E10 y E12). El de letras (III.3, 8/62, 13%) en 5 de los 6 enunciados (E2, E5, E6, E10 y E12).

En el error de mal uso de las letras (III.3) distinguimos dos situaciones: (a) en 6 de los 8 casos (75%), los estudiantes utilizan dos letras con el mismo significado y (b) en

los otros 2 casos de esos 8 (25%) el error se debe a que utilizan una misma letra con distintos significados.

El de complicación estructural (III.4, 7/62, 11%), se muestra también en todos los enunciados propuestos para este sentido de traducción. En 4 de estos 6 enunciados (E2, E5, E6 y E12) un estudiante incurre en error mientras que en los otros dos (E9 y E10) son dos estudiantes los que incurren en error.

El error de generalización (III.1, 6/62, 10%) se concentra en cuatro enunciados (E2, E6, E10 y E12). En 3 de esos 4 enunciados un estudiante incurre en error, mientras que en el otro enunciado (E2) cinco estudiantes incurren en este tipo de error.

En la figura V.1.5 mostramos la presencia de los distintos tipos de errores en cada uno de los enunciados.

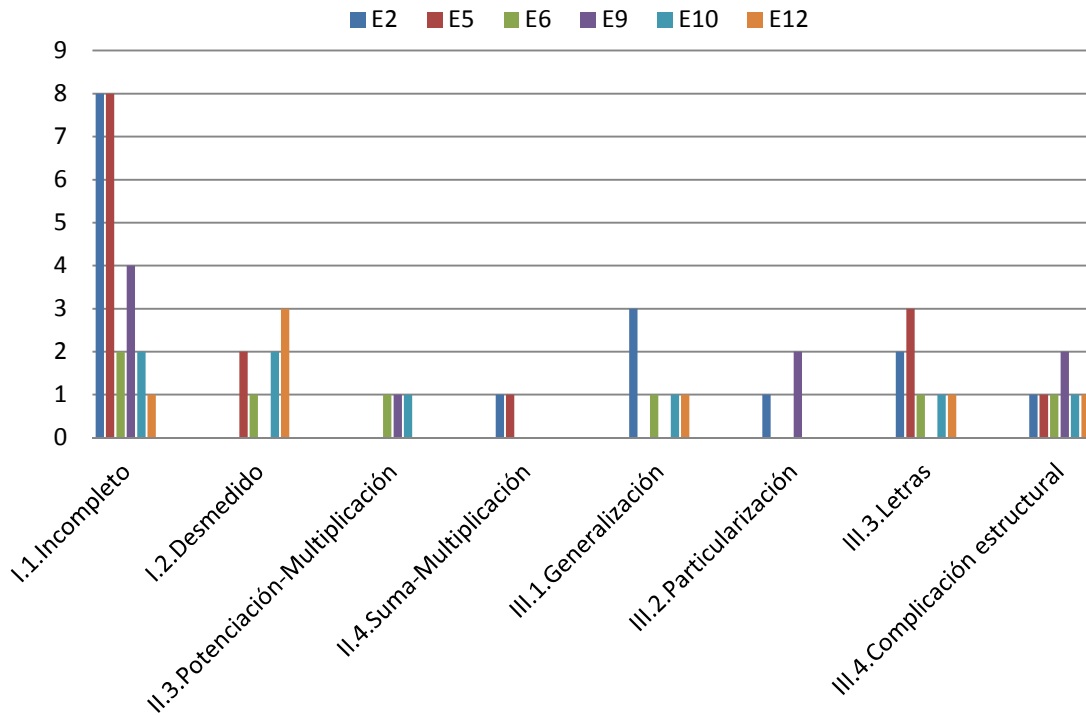


Figura V.1.5. Manifestación de errores en los enunciados simbólicos

Aunque el error de incompleto (I.1) se presenta con mayor frecuencia, tienden a concentrarse en el enunciado E2 y E5. Estos enunciados tienen en común las características de ser multiplicativos, cerrados y con una sola letra.

b) De sistema de representación verbal a simbolismo algebraico

En la figura V.1.6 mostramos la frecuencia de errores, según la clasificación utilizada, al realizar traducciones de enunciados representados verbalmente a su expresión simbólica.

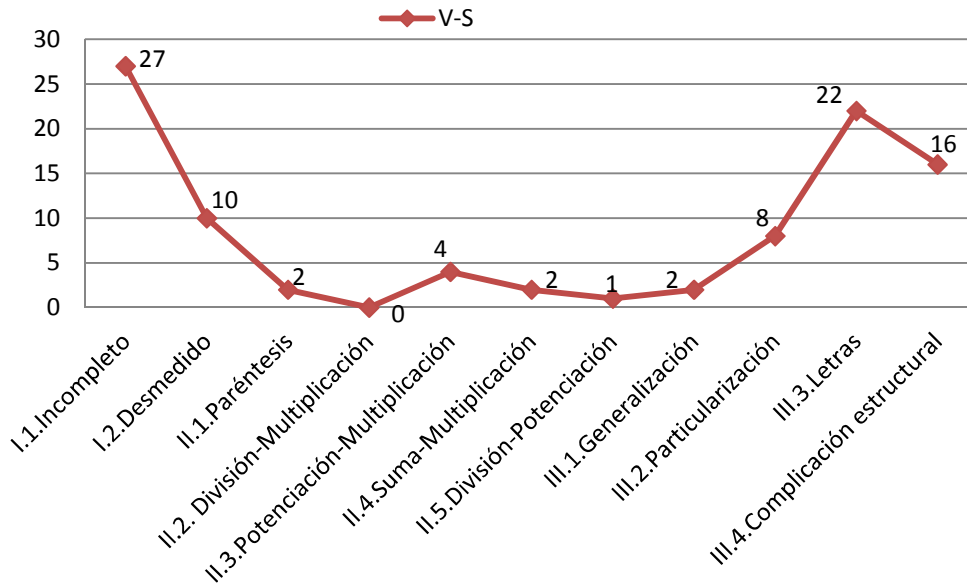


Figura V.1.6. Frecuencia de tipos de errores en traducción de verbal a simbólico

En este sentido de traducción, los tipos de errores en los que incurren los estudiantes con mayor frecuencia son los de las subcategorías de incompleto (I.1, 27/94, 29%), letras (III.3, 22/94, 23%), complicación estructural (III.4, 16/94, 17%), y desmedido (I.2, 10/94, 11%) y particularización (III.2, 8/94, 9%). Estos cinco tipos suman aproximadamente el 88% de los errores que se producen en este sentido de traducción. En el error de mal uso de las letras (III.3) distinguimos dos situaciones: (a) en 4 de los 22 casos (18%), los estudiantes utilizan dos letras con el mismo significado y (b) en los otros 18 casos de esos 22 (82%) el error se debe a que utilizan una misma letra con distintos significados.

En la tabla V.1.5 presentamos el tipo de errores y la frecuencia con que se presentan al traducir enunciados del sistema de representación verbal al simbólico, análogamente a lo realizado para el caso de la traducción de sistema de representación simbólico al verbal.

Tabla V.1.5. Frecuencia de tipos de errores en traducción de V → S

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado	Sujetos
I.1	27 (29%)	E1	S13
		E3	S01,S03,S04,S05,S08,S11,S13,S16
		E4	S01,S16
		E7	S02,S04,S06,S08,S09,S13,S16
		E8	S04,S05,S09,S10,S11,S12,S16
		E11	S05,S13
I.2	10 (11%)	E1	S12,S15
		E3	S14
		E7	S06,S08
		E8	S02,S05,S16
		E11	S04,S06
II.1	2 (2%)	E7	S02,S16
II.2	0 (0%)		
II.3	4 (4%)	E1	S13
		E4	S11,S12
		E8	S14
II.4	2 (2%)	E1	S14
		E3	S01
II.5	1 (1%)	E8	S13
III.1	2 (2%)	E11	S01,S05
III.2	8 (9%)	E8	S02,S06,S07,S08,S12,S13,S14
		E11	S13
III.3	22 (23%)	E1	S06,S07,S13,S14,S15,S16
		E3	S01,S02,S03,S04,S05,S06,S08,S13,S14,S15,S16
		E4	S04
		E7	S04
		E8	S11,S15,S16
III.4	16 (17%)	E1	S16
		E4	S04,S14
		E7	S06,S07,S10,S13,S14
		E8	S02,S08,S12,S16
		E11	S07,S12,S13,S14

Observamos que el error que más se manifiesta es el de enunciado incompleto (I.1, 27/94, 29%), mostrándose en todos los enunciados. Los otros dos tipos de errores que

también tienen una amplia presencia, mal uso de las letras (III.3, 22/94, 23%) y complicación estructural (III.4, 16/94, 17%), se presentan en una gran variedad de enunciados (E1, E3, E4, E7 y E8 el tipo III.3 y E1, E4, E7, E8 y E11 el tipo III.4). El error de enunciado desmedido (I.2, 10/94, 11%) se concentra en cinco enunciados (E1, E3, E7, E8 y E11). En 1 de estos 5 enunciados (E3) un estudiante incurre en error, en 3 (E1, E7 y E11) dos estudiantes incurren en error, y en el otro (E8) son tres estudiantes los que incurren en error. Hay presencia nula del error de división-multiplicación (II.2) y los demás errores tienen una escasa presencia, como hemos visto en la tabla V.1.5.

En la figura V.1.7 mostramos la frecuencia de los distintos tipos de errores por cada uno de los enunciados.

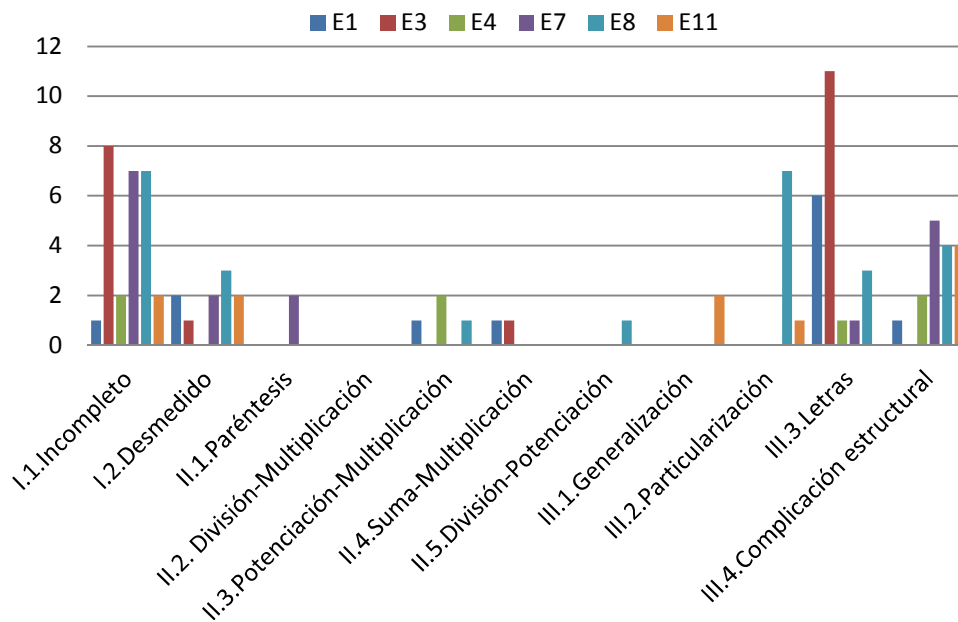


Figura V.1.7. Manifestación de errores en los enunciados verbales

Observamos que los errores de enunciado incompleto (I.1) se manifiestan en los seis enunciados verbales y los errores de desmedido (I.2), letras (III.3) y de complicación estructural (III.4) en cinco de ellos. Errores de división-potenciación (II.5) se presentan una vez en el enunciado E8 (aditivo y multiplicativo, secuencial, abierto y de una letra). El error de particularización (III.2) se presenta en los enunciados E8 (aditivo, secuencial, abierto y de dos letras) y E11 (de potencia, no secuencial, cerrado y de una letra), siendo

ambos de características totalmente distintas. El error de paréntesis (II.1) se manifiesta solo en el enunciado E7 (aditivo y potencia, no secuencial, abierto y de dos letras).

V.1.3. COMPARACIÓN DE ERRORES EN AMBOS SENTIDOS DE TRADUCCIÓN

Continuando con el análisis de errores que estamos realizando, comparamos los resultados obtenidos en los dos sentidos de traducción, a través de la figura V.1.8.

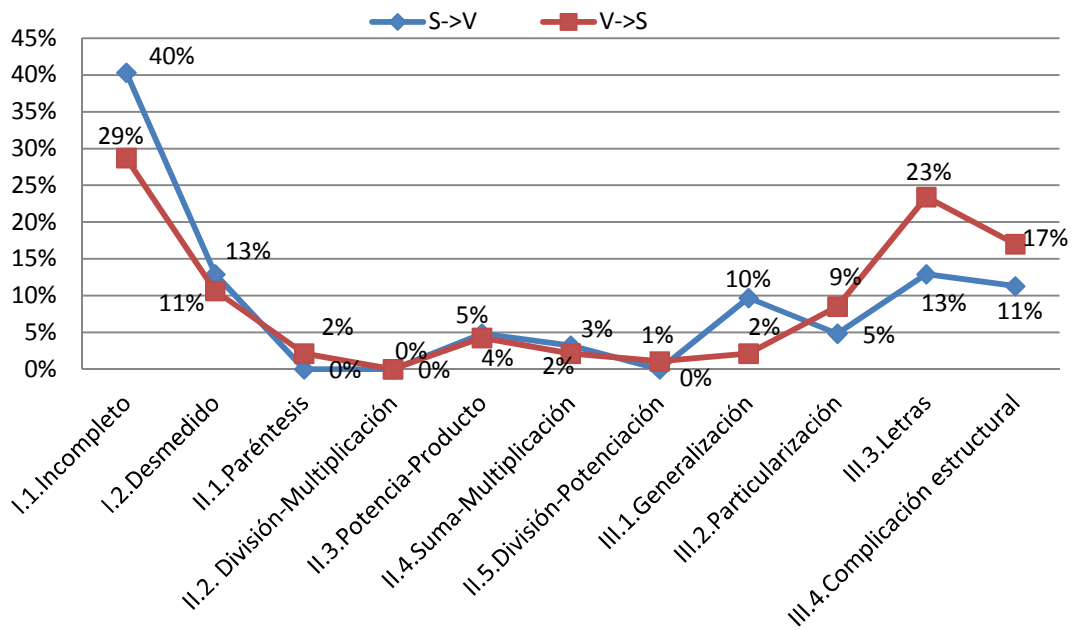


Figura V.1.8. Presencia de diferentes errores según sentido de traducción en la construcción de enunciados no contextualizados

Aunque se producen más errores al traducir del simbolismo algebraico al sistema de representación verbal, observamos un patrón similar en la frecuencia que presentan los diferentes tipos de errores identificados en ambos sentidos. En la mayoría de los casos se manifiestan los errores tipo incompleto (I.1), letras (III.3), desmedido (I.2) y complicación estructural (III.4). Igualmente, los errores menos manifestados son los de paréntesis (II.1), división-multiplicación (II.2) y división-potenciación (II.5).

En el error de letras (III.3) distinguimos dos situaciones: (a) los estudiantes asignan más de un significado a una misma letra y (b) los estudiantes asignan un mismo significado a distintas letras. Cuando el enunciado es dado mediante simbolismo

algebraico, se pone de manifiesto en mayor medida la primera situación (75% frente al 25% de la segunda situación). Por el contrario, cuando el enunciado está dado en el sistema de representación verbal, se pone de manifiesto, en mayor medida, la segunda situación (80% frente al 20%).

V.1.4. ANÁLISIS DE ERRORES SEGÚN LAS CARACTERÍSTICAS DE LOS ENUNCIADOS ALGEBRAICOS NO CONTEXTUALIZADOS

En este apartado analizamos la influencia de las variables de tarea consideradas¹⁵ en el diseño de los enunciados algebraicos no contextualizados, en el tipo de errores que se presentan en los mismos. Los resultados de este análisis deben interpretarse con producencia dado el bajo número de enunciados propuestos a los estudiantes, no obstante son de interés para elaborar conjeturas a testar en futuras investigaciones.

Los datos recogidos en la tabla V.1.6 permiten observar que al traducir enunciados dados en representación verbal, los estudiantes incurren en más errores cuando la relación numérica es aditiva y multiplicativa (26/94, 28%) o solamente aditiva (21/94, 22%), mientras que en el otro sentido se producen con mayor frecuencia cuando la relación es multiplicativa (16/62, 26%).

Tabla V.1.6. Errores según la relación numérica del enunciado en ambos sentidos

Relación numérica	V → S		S → V	
	Enunciado	Nº Errores	Enunciado	Nº Errores
Ad	E3	21 (22%)	E12	7 (11%)
Mu	E1	12 (13%)	E2	16 (26%)
Po	E11	11 (12%)	E9	9 (15%)
AdMu	E8	26 (28%)	E5	15 (24%)
AdPo	E7	17 (18%)	E10	8 (13%)
MuPo	E4	7 (7%)	E6	7 (11%)
Total		94 (100%)		62 (100%)

Nota. V = verbal; S = simbólico; Ad = aditivo; Mu = multiplicativo; Po = potencia; AdMu = aditivo y multiplicativo; AdPo = aditivo y potencia; MuPo = multiplicativo y potencia. V = verbal; S = simbólico.

A partir de los datos de la tabla V.1.7, obtenemos que cuando se traducen enunciados representados verbalmente a simbolismo algebraico, los estudiantes incurren en más

¹⁵ Las variables de tarea consideradas para los enunciados son: relación numérica (aditivo, multiplicativo, potencia y combinaciones de estas), abierto o cerrado, número de letras (1 o 2), secuencialidad o no secuencialidad (apartado IV.3)

errores si estos son abiertos (55/94, 59%) que si son cerrados (39/94, 41%), mientras que al realizar la traducción en el otro sentido, incurren en más errores si estos son cerrados (39/62, 63%) que si son abiertos (23/62, 37%).

Tabla V.1.7. Errores según si el enunciado es abierto o cerrado en ambos sentidos

Característica	V → S		S → V	
	Enunciados	Nº Errores	Enunciados	Nº Errores
Abiertos	E1, E7, E8	55 (59%)	E6, E9, E12	23 (37%)
Cerrados	E3, E4, E11	39 (41%)	E2, E5, E10	39 (63%)
Total		94 (100%)		62 (100%)

Nota. V = verbal; S = simbólico.

Si atendemos al número de letras que aparecen en el enunciado (ver tabla V.1.8), los errores en los que incurren los estudiantes no se muestran afectados por el número de letras incluidas al traducir enunciados verbales a simbolismo algebraico, mientras que en el otro sentido se producen más errores si la expresión tiene una sola letra que si presenta dos (ver tabla V.1.8).

Tabla V.1.8. Errores según el número de letras en ambos sentidos

Característica	V → S		S → V	
	Enunciados	Nº Errores	Enunciados	Nº Errores
1 letra	E4, E8, E11	44 (47%)	E2, E5, E12	38 (61%)
2 letras	E1, E3, E7	50 (53%)	E6, E9, E10	24 (39%)
Total		94 (100%)		62 (100%)

Nota. V = verbal; S = simbólico.

La última variable de tarea tenida en cuenta al proporcionar los enunciados en representación verbal se refiere a la secuencialidad de los mismos. En la tabla V.1.9 vemos la distribución de los errores según esta variable de tarea. Observamos que cuando un enunciado algebraico expresado verbalmente es secuencial provoca más errores que si no lo es.

Tabla V.1.9. Errores según si el enunciado es secuencial o no secuencial de $V \rightarrow S$

Característica	$V \rightarrow S$	
	Enunciados	Nº Errores
Secuencial	E3, E8, E4	54 (57%)
No secuencial	E1, E11, E7	40 (43%)
Total		94 (100%)

Nota. V = verbal; S = simbólico.

Finalmente en la tabla V.1.10 mostramos los enunciados según todas las variables de tarea consideradas. Hacemos algunas observaciones sobre las relaciones que percibimos cuando consideramos de forma conjunta varias variables de tarea.

Tabla V.1.10. Errores según todas las variables de tarea de $S \rightarrow V$

Enunciado	Características del enunciado			Nº de errores
E12	Ad	Cerrado	2 letras	7 (11%)
E2	Mu	Abierto	2 letras	16 (26%)
E9	Po	Cerrado	1 letra	9 (15%)
E5	AdMu	Abierto	1 letra	15 (24%)
E10	AdPo	Abierto	2 letras	8 (13%)
E6	MuPo	Cerrado	1 letra	7 (11%)
Total				62 (100%)

Nota. V = verbal; S = simbólico; Ad = aditivo; Mu = multiplicativo; Po = potencia; AdMu = aditivo y multiplicativo; AdPo = aditivo y potencia; MuPo = multiplicativo y potencia.

Analizando conjuntamente las respuestas de los estudiantes según las variables de tarea de los enunciados, observamos que la frecuencia de errores cuando los enunciados tienen dos letras no es la misma cuando los enunciados son abiertos que cuando son cerrados. Se presentan menos errores cuando el enunciado tiene dos letras y son cerrados (7/62, 11%) que cuando tienen dos letras y son abiertos (24/62, 39%).

Cuando los enunciados tienen únicamente una letra, encontramos un mayor número de errores cuando los enunciados tienen una letra y son cerrados (16/62, 26%) que cuando son abiertos (15/62, 24%).

Además, cuando los enunciados son abiertos y tienen una única letra, la frecuencia de errores es menor (15/62, 24%) que cuando tienen dos letras (24/62, 39%). Sin embargo, cuando los enunciados son cerrados, encontramos que hay mayor frecuencia

de errores si estos tienen solamente una letra (16/62, 26%) que cuanto tienen dos letras (7/62, 11%).

De forma análoga y para finalizar, en la tabla V.1.11 mostramos los enunciados según cada una de las variables de tarea analizadas anteriormente en el otro sentido de traducción, esto es, de representación verbal a simbolismo algebraico.

Tabla V.1.11. Errores según todas las variables de tarea de $V \rightarrow S$

Enunciado	Características del enunciado				Nº de errores
E3	Ad	Cerrado	2 letras	Secuencial	21 (22%)
E1	Mu	Abierto	2 letras	No-secuencial	12 (13%)
E11	Po	Cerrado	1 letra	No-secuencial	11 (12%)
E8	AdMu	Abierto	1 letra	Secuencial	26 (28%)
E7	AdPo	Abierto	2 letras	No-secuencial	17 (18%)
E4	MuPo	Cerrado	1 letra	Secuencial	7 (7%)
Total					94 (100%)

Nota. V = verbal; S = simbólico; Ad = aditivo; Mu = multiplicativo; Po = potencia; AdMu = aditivo y multiplicativo; AdPo = aditivo y potencia; MuPo = multiplicativo y potencia.

El análisis conjunto de las variables de tarea de los enunciados muestra diferencias en la frecuencia de errores cuando los enunciados tienen dos letras o una letra.

Si los enunciados tienen dos letras, la presencia de errores cuando los enunciados son abiertos y no secuenciales es escasamente mayor (29/94, 31%) que si son cerrados y secuenciales (21/94, 22%).

Cuando los enunciados únicamente tienen una letra, encontramos mayor diferencia de frecuencia de errores. Si el enunciado es abierto y secuencial hay mayor presencia de errores (26/94, 28%) que si es cerrado y secuencial (7/94, 7%) o si es cerrado y no secuencial (11/94, 12%).

V.1.5. COMPARACIÓN DE RESULTADOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS NO CONTEXTUALIZADOS CON EL ESTUDIO PREVIO

Los estudiantes que participan en nuestro estudio cursan 2º de ESO y están iniciándose en el estudio del álgebra escolar, como hemos indicado a lo largo de este documento. En el estudio previo realizado (Rodríguez-Domingo, 2011), analizamos el tipo de errores en los que incurren un grupo de 26 estudiantes de 4º de ESO, usando el

mismo instrumento de recogida de datos, la Ficha I. A continuación, comparamos los resultados obtenidos en ambos estudios (ver tabla V.1.12) en la construcción de enunciados no contextualizados (Ficha I).

Tabla V.1.12. Comparación de resultados de la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados con el estudio previo

Tipo de error	S → V		V → S	
	4º ESO	2º ESO	4º ESO	2º ESO
I.1	3 (18%)	25 (40%)	5 (9%)	27 (29%)
I.2	1 (6%)	8 (13%)	4 (7%)	10 (11%)
II.1	0 (0%)	0 (0%)	2 (4%)	2 (2%)
II.2	0 (0%)	0 (0%)	2 (4%)	0 (0%)
II.3	7 (41%)	3 (5%)	4 (7%)	4 (4%)
II.4	0 (0%)	2 (3%)	1 (2%)	2 (2%)
II.5	0 (0%)	0 (0%)	1 (2%)	1 (1%)
III.1	4 (24%)	6 (10%)	0 (0%)	2 (2%)
III.2	0 (0%)	3 (5%)	7 (13%)	8 (9%)
III.3	0 (0%)	8 (13%)	13 (24%)	22 (23%)
III.4	2 (11%)	7 (11%)	15 (28%)	16 (17%)
Total	17 (100%)	62 (100%)	54 (100%)	94 (100%)

Nota. V = verbal; S = simbólico.

El análisis de datos realizado nos muestra que hay un mayor número de errores en el caso del grupo de 2º de ESO. En ambos casos es menor el porcentaje de errores en los que incurren los estudiantes al traducir a lenguaje verbal enunciados presentados en simbolismo algebraico que al realizar traducciones en sentido contrario.

En el grupo de 4º de ESO, la tendencia en el tipo de errores presentados no coincide en ambos sentidos de la traducción. Sin embargo, en el grupo de 2º de ESO, el comportamiento es similar en los dos sentidos.

En el grupo de 2º, ya sea al traducir del sistema de representación verbal al simbólico o viceversa, más de la mitad de los errores corresponden a los clasificados como derivados de las características propias del simbolismo algebraico y un tercio a errores en la completitud del enunciado (ver figuras V.1.9 y V.1.10).

En el grupo de 4º de ESO, al construir traducciones de expresiones pasando del sistema de representación simbólico al verbal, los errores en los que incurren los estudiantes se distribuyen de forma casi equitativa entre los tres tipos de errores (ver figura V.1.9).

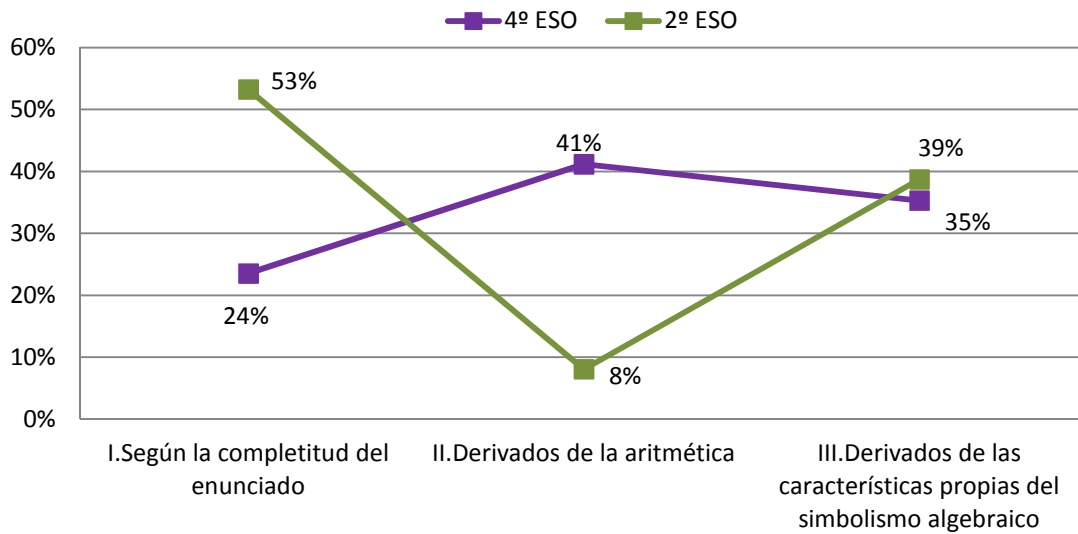


Figura V.1.9. Presencia del tipo de error en la traducción de $S \rightarrow V$ en ambos grupos

Sin embargo, al construir la representación simbólica de enunciados verbales, los errores más frecuentes son los derivados de las características del simbolismo algebraico. Estos errores constituyen casi dos tercios de los errores en que incurren. Los dos tipos de errores restantes presentan frecuencias similares (ver figura V.1.10).

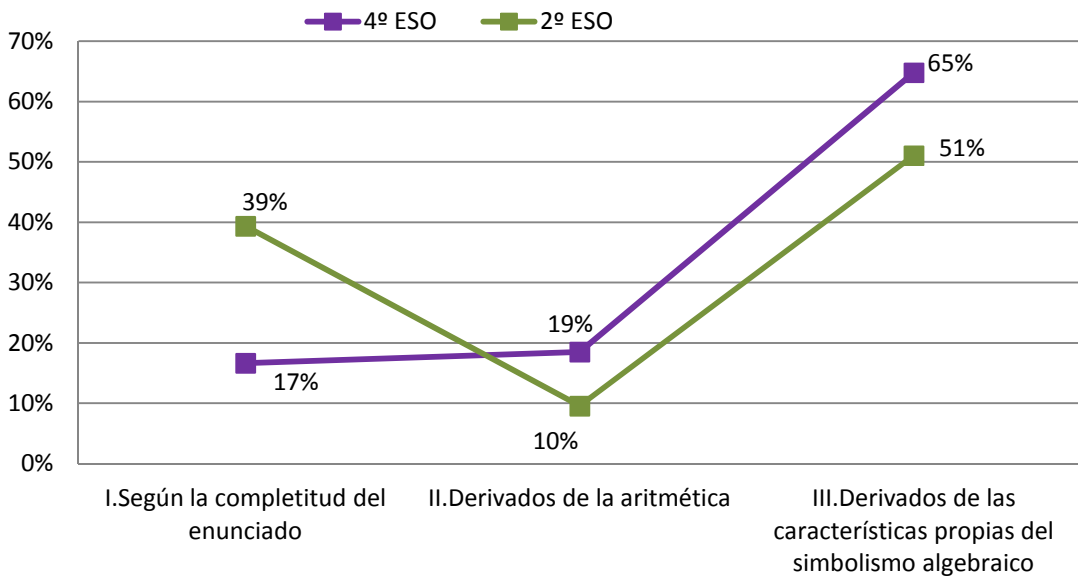


Figura V.1.10. Presencia del tipo de error en la traducción de $V \rightarrow S$ en ambos grupos

Para el grupo de 2º de ESO, al realizar las traducciones dados los enunciados en simbolismo algebraico, los errores que más se manifiestan son los debidos a la completitud del enunciado (categoría I) y derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III), presentándose escasamente los errores derivados de la aritmética (categoría II).

Para profundizar en este análisis, atendemos por separado a los dos sentidos de traducción.

a) De simbolismo algebraico a sistema de representación verbal

En la figura V.1.11 mostramos el tipo de errores en los que incurren los sujetos de ambos grupos al traducir enunciados algebraicos dados mediante simbolismo algebraico.

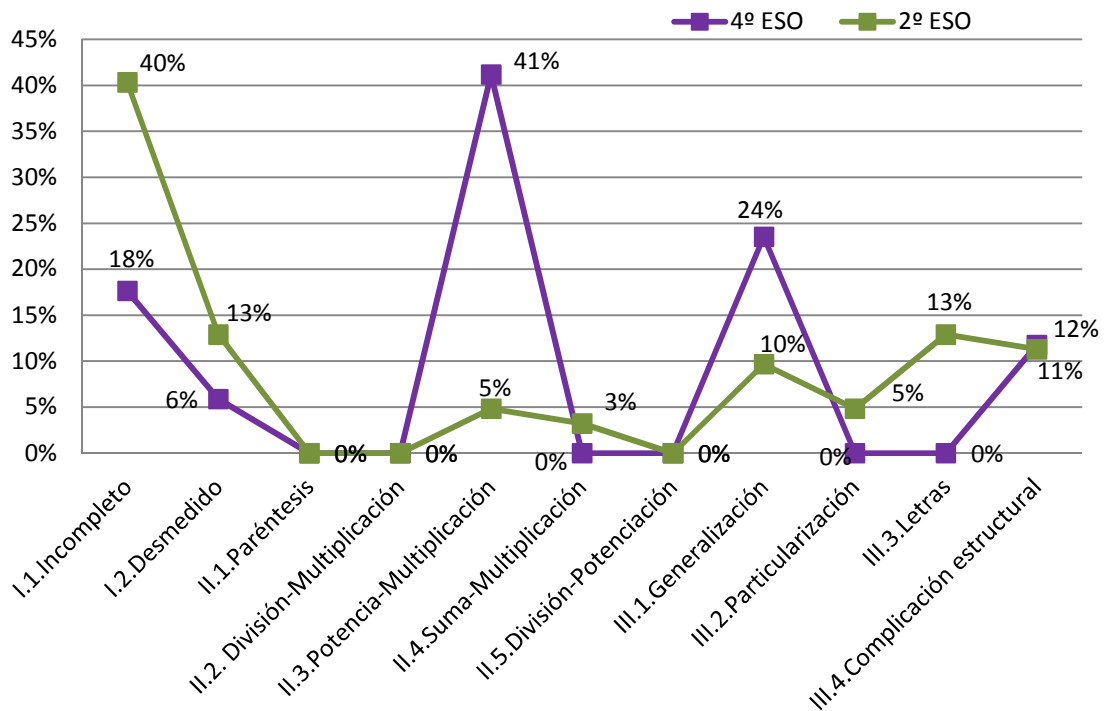


Figura V.1.11. Comparación de resultados con estudio previo de S→V

Al analizar los errores en que incurren los estudiantes en la traducción de enunciados expresados mediante simbolismo algebraico a su sistema de representación verbal (figura V.1.11), observamos que se distribuyen en su mayoría en los errores de tipo incompleto (I.1), desmedido (I.2), potenciación-multiplicación (II.3), generalización

(III.1), letras (III.3) y complicación estructural (III.4). En el grupo de 4º de ESO, hay seis categorías que tienen presencia nula (ver figura V.1.11). En este grupo, el error de potenciación-multiplicación (II.3) es el más frecuente (7/17). En cambio, en el grupo de 2º de ESO, los errores más frecuentes, por orden de mayor a menor, son los que se corresponden con los de incompleto (I.1, 25/62), desmedido (I.2, 8/62), letras (III.3, 8/62) y complicación estructural (III.4, 7/62).

Atendiendo a las variables de tarea de los enunciados verbales propuestos, comparamos los resultados obtenidos en ambos grupos. En la tabla V.1.13 mostramos el número de errores en los enunciados según la relación numérica implicada en los mismos.

Tabla V.1.13. Errores según la relación numérica del enunciado de $S \rightarrow V$

Relación numérica	Enunciado	Nº errores	
		4º ESO	2º ESO
Ad	E12	2 (12%)	7 (11%)
Mu	E2	1 (6%)	16 (26%)
Po	E9	4 (24%)	9 (15%)
AdMu	E5	5 (28%)	15 (24%)
AdPo	E10	3 (18%)	8 (13%)
MuPo	E6	2 (12%)	7 (11%)
Total		17 (100%)	62 (100%)

Nota. Ad = aditivo; Mu = multiplicativo; Po = potencia; AdMu = aditivo y multiplicativo; AdPo = aditivo y potencia; MuPo = multiplicativo y potencia.

El bajo número de errores en que incurren los alumnos de 4º de ESO en este tipo de traducciones se distribuyen en todos los tipos de enunciados considerados en cuanto a las operaciones implicadas. Por frecuencia, destacan ligeramente el enunciado que involucra potencias, y el enunciado aditivo y multiplicativo (24% y 28% respectivamente). En el grupo de 2º de ESO, la mayor presencia de errores se concentra en el enunciado multiplicativo (26%), seguido del aditivo y multiplicativo (24%).

Si atendemos a los errores distinguiendo si los enunciados verbales propuestos son abiertos o cerrados (ver tabla V.1.14), solo en el grupo de 2º de ESO detectamos influencia de esta variable de tarea, con menor presencia de errores en los abiertos.

Tabla V.1.14. Errores según si el enunciado es abierto o cerrado de $S \rightarrow V$

Característica	Enunciados	Nº de errores	
		4º ESO	2º ESO
Abiertos	E6, E9, E12	8 (47%)	23 (37%)
Cerrados	E2, E5, E10	9 (53%)	39 (63%)
Total		17 (100%)	62 (100%)

En la tabla V.1.15 presentamos los resultados considerando el número de letras implicadas en el enunciado. Los errores que dependen del número de letras (una o dos) es solo apreciable en el grupo de 2º de ESO, siendo casi el doble el número de errores que se detectan en los enunciados de una letra que en aquellos de dos.

Tabla V.1.15. Errores según el número de letras de $S \rightarrow V$

Característica	Enunciados	Nº de errores	
		4º ESO	2º ESO
1 letra	E2, E5, E12	8 (47%)	38 (78%)
2 letras	E6, E9, E10	9 (53%)	24 (49%)
Total		17 (100%)	62 (100%)

Finalmente en la tabla V.1.16 mostramos los enunciados según todas las variables de tarea analizadas anteriormente.

Tabla V.1.16. Errores según todas las variables de tarea de $S \rightarrow V$ comparando con el estudio previo

Enunciado	Características del enunciado			Nº de errores	
				4º ESO	2º ESO
E12	Ad	Cerrado	2 letras	2 (12%)	7 (11%)
E2	Mu	Abierto	2 letras	1 (6%)	16 (26%)
E9	Po	Cerrado	1 letra	4 (24%)	9 (15%)
E5	AdMu	Abierto	1 letra	5 (29%)	15 (24%)
E10	AdPo	Abierto	2 letras	3 (18%)	8 (13%)
E6	MuPo	Cerrado	1 letra	2 (11%)	7 (11%)
Total				17 (100%)	62 (100%)

Nota. V = verbal; S = simbólico; Ad = aditivo; Mu = multiplicativo; Po = potencia; AdMu = aditivo y multiplicativo; AdPo = aditivo y potencia; MuPo = multiplicativo y potencia.

Analizando conjuntamente las variables de tarea de los enunciados, observamos que la frecuencia de errores cuando los enunciados tienen dos letras no es la misma cuando los enunciados son abiertos que cuando son cerrados. En el caso del grupo de 4º de ESO, si los enunciados tienen dos letras y son cerrados, los errores se presentan en menor número (2/17, 12%) que si son abiertos (4/17, 24%). En el grupo de 2º de ESO, la diferencia que encontramos es mayor, presentándose igualmente menor número de errores cuando los enunciados tiene dos letras y es cerrado (7/62, 11%) que cuando son abiertos (24/49, 39%).

Cuando los enunciados tienen únicamente una letra, encontramos en ambos cursos que la frecuencia de errores es mayor cuando los enunciados son cerrados. Para el grupo de 4º de ESO, los errores se presentan en mayor número (6/17, 35%) si los enunciados tienen una letra y son cerrados, que si son abiertos (3/17, 29%). En el grupo de 2º de ESO, la diferencia que encontramos es mayor, presentándose un mayor número de errores cuando los enunciados tienen una letra y son cerrados (16/62, 26%), que cuando es abierto (15/62, 24%).

Analizando los errores cuando en los enunciados hay una o dos letras cuando estos son abiertos, encontramos que más diferencias en el grupo de 2º de ESO que en el de 4º de ESO. Para el grupo de 2º de ESO, cuando el enunciado es abierto y tiene una única letra, la frecuencia de errores es menor (15/62, 24%) que cuando tienen dos letras (24/62, 39%). Sin embargo, en el grupo de 4º de ESO apenas hay diferencias cuando el enunciado tiene una letra (5/17, 29%) o cuando tiene dos letras (4/17, 24%).

Sin embargo, cuando los enunciados son cerrados, encontramos en ambos grupos que hay mayor frecuencia de errores si estos tienen solamente una letra (6/17, 35% en el grupo de 4º, y 16/62, 26% en el de 2º) que cuando tiene dos letras (2/17, 12% en el grupo de 4º, y 7/62, 11% en el de 2º).

b) De sistema de representación verbal a simbolismo algebraico

En la figura V.1.12 presentamos el tipo de errores en los que incurren los sujetos de ambos grupos al traducir enunciados algebraicos dados mediante el sistema de representación verbal.

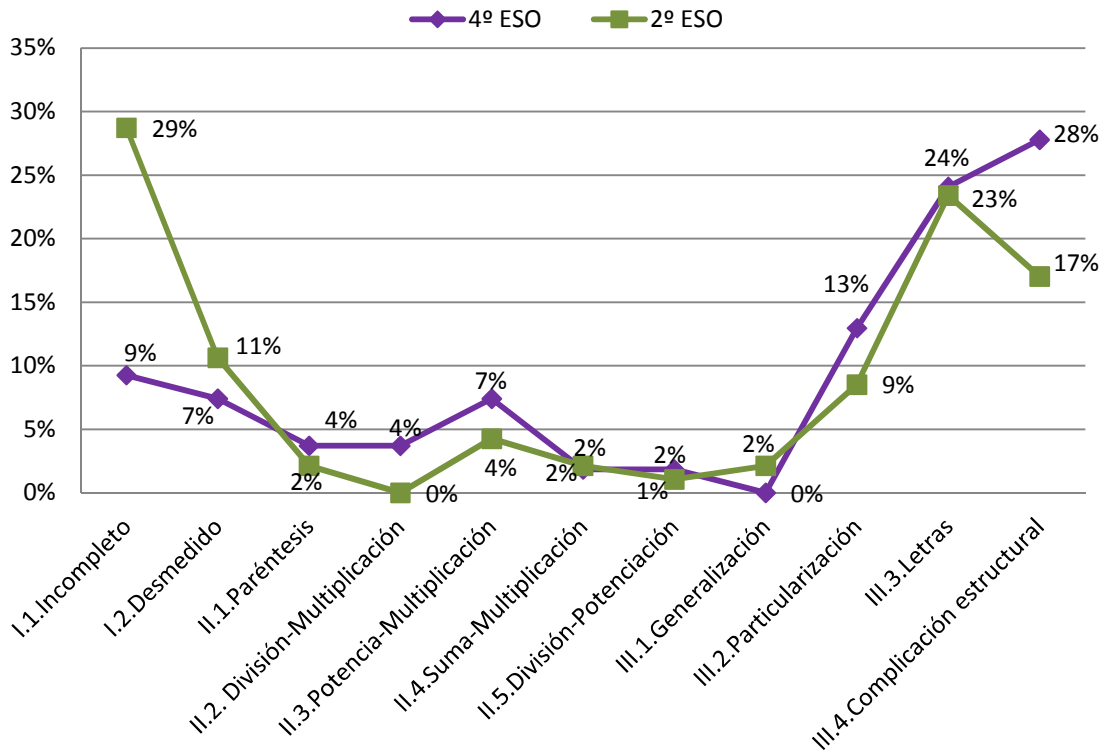


Figura V.1.12. Comparación de resultados con estudio previo de $V \rightarrow S$

Al considerar las diferentes subcategorías de errores anteriormente descritas, observamos en la figura V.1.12 que los errores más frecuentes en los estudiantes de 4º curso son los de letras (III.3) y complicación estructural (III.4), ambos derivados de las características propias del simbolismo algebraico, que conjuntamente constituyen la mitad de los errores de este grupo de estudiantes.

Para los estudiantes de 2º curso, en cambio, a pesar de ser los errores de letras (III.3) y complicación estructural (III.4) dos de los tipos de mayor frecuencia (aproximadamente el 18% en ambos casos), el tipo de error que más se presenta es de incompleto (I.1) al que corresponde uno de cada cuatro errores de este grupo de estudiantes.

En el grupo de 2º de ESO, los errores derivados de la aritmética presentan una frecuencia baja, entre el 1% y el 3%, con la salvedad del error potenciación-multiplicación (II.3), que supone el 4%. Este es también el tipo de error, derivado de la aritmética más frecuente en el grupo de 4º de ESO, presentando el resto de tipos frecuencias comprendidas entre 1% y 4%.

Atendiendo a las variables de tarea de los enunciados verbales, comparamos los resultados en ambos grupos. En la tabla V.1.17 observamos el número de errores en los enunciados según la relación numérica implicada en cada uno de ellos.

Tabla V.1.17. Errores según la relación numérica del enunciado de $V \rightarrow S$ comparando con el estudio previo

Relación numérica	Enunciado	Nº de errores	
		4º ESO	2º ESO
Ad	E3	7 (13%)	21 (22%)
Mu	E1	15 (28%)	12 (13%)
Po	E11	0 (0%)	11 (12%)
AdMu	E8	17 (31%)	26 (28%)
AdPo	E7	14 (26%)	17 (18%)
MuPo	E4	1 (2%)	7 (7%)
Total		54 (100%)	94 (100%)

Nota. Ad = aditivo; Mu = multiplicativo; Po = potencia; AdMu = aditivo y multiplicativo; AdPo = aditivo y potencia; MuPo = multiplicativo y potencia.

Como observamos en la tabla V.1.17, los estudiantes de ambos grupos incurrir en más errores cuando el enunciado es aditivo y multiplicativo, representando el 31% en el grupo de 4º de ESO y de 28% en el de 2º. Además, los enunciados que presentan mayor número de errores son el multiplicativo (28%), y el aditivo y de potencia (26%) en el grupo de 4º; y el enunciado aditivo y multiplicativo (28%), y el aditivo (22%) en el grupo de 2º.

Comparando ambos grupos, resaltamos la escasa o nula frecuencia de errores en el enunciado de potencia o el enunciado multiplicativo y de potencia en el grupo de 4º (0% y 2%, respectivamente), mientras que en el de 2º supone 12% y 7% respectivamente.

Si analizamos los resultados según si los enunciados verbales propuestos son abiertos o cerrados, detectamos una mayor presencia de errores en enunciados abiertos, tendencia que es especialmente marcada en el grupo de 4º de ESO (ver tabla V.1.18).

Tabla V.1.18. Errores según si el enunciado es abierto o cerrado de $V \rightarrow S$ comparando con el estudio previo

Característica	Enunciados	Nº de errores	
		4º ESO	2º ESO
Abiertos	E1, E7, E8	46 (85%)	55 (59%)
Cerrados	E3, E4, E11	8 (15%)	39 (41%)
Total		54 (100%)	94 (100%)

En la tabla V.1.19 atendemos a los resultados distinguiendo al número de letras contenidas en el enunciado. En esta tabla observamos que se detecta influencia de esta variable de tarea solo en el grupo de 4º curso, siendo más frecuentes los errores en los enunciados que presentan dos letras.

Tabla V.1.19. Errores según el número de letras de $V \rightarrow S$ comparando con el estudio previo

Característica	Enunciados	Nº de errores	
		4º ESO	2º ESO
1 letra	E4, E8, E11	18 (33%)	44 (47%)
2 letras	E1, E3, E7	36 (67%)	50 (53%)
Total		54 (100%)	94 (100%)

La última variable de tarea tenida en cuenta en el diseño de los enunciados en el sistema de representación verbal se refiere a la secuencialidad de los mismos. Como observamos en la tabla V.1.20, detectamos un menor número de errores en enunciados no secuenciales en el caso del grupo de 2º de ESO.

Tabla V.1.20. Errores según si el enunciado es secuencial o no secuencial de $V \rightarrow S$ comparando con el estudio previo

Característica	Enunciados	Nº de errores	
		4º ESO	2º ESO
Secuencial	E3, E8, E4	25 (46%)	54 (57%)
No secuencial	E1, E11, E7	29 (54%)	40 (43%)
Total		54 (100%)	94 (100%)

Tras el análisis realizado según las variables de tarea, observamos que el hecho de que un enunciado sea secuencial o no, es lo que menos altera el número de errores en los que incurren los estudiantes, según el grupo al que pertenecen. Sin embargo, al realizar el análisis respecto a otras variables de tarea observamos que se encuentran más diferencias de errores en los distintos grupos. En la tabla V.1.21 mostramos los enunciados según cada una de las variables de tarea analizadas anteriormente.

Tabla V.1.21. Errores según todas las variables de tarea de $V \rightarrow S$ comparando con el estudio previo

Enunciado	Características del enunciado				Nº de errores	
					4º ESO	2º ESO
E3	Ad	Cerrado	2 letras	Secuencial	7 (13%)	21 (22%)
E1	Mu	Abierto	2 letras	No-secuencial	15 (28%)	12 (13%)
E11	Po	Cerrado	1 letra	No-secuencial	0 (0%)	11 (12%)
E8	AdMu	Abierto	1 letra	Secuencial	17 (31%)	26 (28%)
E7	AdPo	Abierto	2 letras	No-secuencial	14 (26%)	17 (18%)
E4	MuPo	Cerrado	1 letra	Secuencial	1 (2%)	7 (7%)
Total					54 (100%)	94 (100%)

Nota. Ad = aditivo; Mu = multiplicativo; Po = potencia; AdMu = aditivo y multiplicativo; AdPo = aditivo y potencia; MuPo = multiplicativo y potencia.

El análisis conjunto de las variables de tarea de los enunciados muestra diferencias en la frecuencia de errores cuando los enunciados tienen dos letras o una letra.

En 4º de ESO, si los enunciados tienen dos letras, la presencia de errores cuando los enunciados son abiertos y no secuenciales es mayor (29/54, 54%) que si son cerrados y secuenciales (7/54, 13%). Esta diferencia es menor en el grupo de 2º de ESO en el caso de enunciados abiertos y no secuenciales (29/94, 31%) y de enunciados cerrados y secuenciales (21/94, 22%).

Cuando los enunciados únicamente tienen una letra, en el alumnado de 4º de ESO si el enunciado es abierto y secuencial hay mayor presencia de errores (17/54, 31%) que si es cerrado y secuencial (1/54, 2%). No hay errores si el enunciado es cerrado y no secuencial. Sin embargo, en el grupo del alumnado de 2º de ESO encontramos que si el enunciado es abierto y secuencial hay mayor presencia de errores (26/94, 28%) que si el enunciado es cerrado y si es cerrado y secuencial hay menor frecuencia de errores (7/94, 7%) que si es cerrado y no secuencial (11/94, 12%).

V.2. ANÁLISIS DE ERRORES EN LA CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS CONTEXTUALIZADOS (TORNEO)

En este apartado analizamos una parte del desarrollo de la segunda fase (torneo) donde los estudiantes construyen enunciados contextualizados para cuatro enunciados algebraicos presentados mediante simbolismo algebraico.

Antes de comenzar el torneo, entre las explicaciones que damos a los estudiantes (ver Anexo A.2.1), les informamos de la existencia de cuatro piezas marcadas con un punto rojo (ver figura IV.7) y de cómo debían actuar cuando aparecieran esas piezas en el juego¹⁶. Al ponerse cada una de estas piezas en juego, el estudiante tenía que construir un enunciado algebraico contextualizado en representación verbal que fuera traducción del enunciado que le dábamos mediante simbolismo algebraico.

Del total de 16 estudiantes con los que trabajamos en esta investigación, 15 participan en el desarrollo del torneo. De estos 15, 13 construyen enunciados contextualizados cuando se ponía en juego una pieza marcada con punto rojo.

Presentamos en la tabla V.2.1 los enunciados para los que cada estudiante construyó un enunciado verbal contextualizado.

Tabla V.2.1. Enunciados contextualizados construidos por cada sujeto

Sujeto	Enunciado
S01	E3
S02	E3, E8, E12
S04	E12
S06	E2, E3
S07	E3
S08	E3
S09	E2, E12
S10	E2, E3, E8, E12
S11	E2
S12	E2, E3, E8
S14	E3, E12
S15	E2, E3
S16	E2, E3, E8, E12

¹⁶ Cuando una pieza con punto rojo aparece en el juego, el jugador debe inventar un enunciado verbal contextualizado sobre una situación real que pueda ser expresada con el enunciado algebraico que aparece en esa pieza.

El número de enunciados contextualizados contruidos por cada estudiante fue diferente por el siguiente motivo: cada estudiante ponía en juego una pieza marcada con un punto rojo y podía construir un enunciado contextualizado, si no sabía o no quería, podía pasar turno y otro compañero podía construirlo en su lugar. Del mismo modo, en caso de que incurriera en algún error, otro compañero podía construir un enunciado contextualizado para esa pieza puesta en juego.

Por medio de la categorización de errores utilizada en el apartado anterior, clasificamos los errores en los que incurren los estudiantes en la construcción del enunciado verbal contextualizado. Para ello realizamos primeramente una traducción del enunciado verbal construido a representación simbólica. Se trata de una traducción sintáctica de lo que dice el estudiante y que presentamos en tablas posteriores (tablas V.2.3, V.2.4, V.2.5 y V.2.6) para justificar el error en el que consideramos que incurre.

Por la naturaleza de la acción que han de realizar los estudiantes, en su análisis atendemos, además, a las siguientes variables:

- La interpretación de la parte literal de la expresión simbólica dada, distinguiendo si las letras se interpretan como un objeto (por ejemplo, $x =$ un tomate) o como una cantidad desconocida ($x =$ edad de mi hermano).
- El significado atribuido a las operaciones del enunciado dado. Atendemos a si se realiza una traducción textual (por ejemplo, $x + 1$ es “mi edad más uno”) o por el contrario se le da un significado a la operación (por ejemplo, que $x + 1$ es “el siguiente de un número” o “mi edad dentro de un año”).
- El tratamiento dado a los coeficientes y a los términos independientes de las expresiones simbólicas dadas (por ejemplo, añadir una unidad a los coeficientes o al término independiente y traducir 2 como “dos coches”).

Antes de comenzar con el análisis de los enunciados, queremos destacar que en relación a los enunciados contextualizados contruidos por los estudiantes, ha sido necesario acudir a las entrevistas individuales¹⁷. Hemos observado que algunos estudiantes consideran que los términos independientes no llevan unidad, según ellos expresan, “no llevan apellido”. Es decir, estos estudiantes interpretan la expresión simbólica $y - 2$ como “mi edad menos dos” sin especificar que ese 2 también se refiere

¹⁷ Las transcripciones de las entrevistas individuales se encuentran en el Anexo E.

a número de años. Hemos aceptado este tipo de construcciones como correctas, aunque entendemos que supone un abuso del lenguaje. Del mismo modo, cuando tienen expresiones como $x + (x + 1)$ designan para x “mi edad”, donde entendemos que se refieren a “número de años” y por tanto se puede sumar un año. Los estudiantes construyen enunciados como “mi edad más mi edad más uno”.

También hemos observado que en contextos diferentes a la edad, consideran la letra como un objeto y le atribuyen dicho objeto al término independiente. Por ejemplo, para la expresión $y - 2$ construyen enunciados tales como “un tomate menos dos tomates”, que hemos considerado incorrectos. Ellos mismos en las entrevistas individuales han coincidido con esta interpretación, en sus palabras la justificación es que ese número 2 “no tiene apellido”.

A modo de recordatorio presentamos en la tabla V.2.2 los enunciados que corresponden a las piezas de dominó marcadas con punto rojo.

Tabla V.2.2. Enunciados de las piezas con punto rojo

Enunciado	Representación simbólica de las piezas con punto rojo	Representación verbal del enunciado dada en las piezas del dominó
E2	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$	Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número
E3	$x \cdot (x + 1) = y - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
E8	$2x - \frac{y}{4}$	Un número par menos la cuarta parte de otro número
E12	$x + (x + 1) - 4$	La suma de dos números consecutivos menos cuatro

A continuación, en los siguientes apartados, realizamos un análisis de los enunciados contextualizados que han construido los estudiantes para cada uno de los cuatro enunciados simbólicos dados. Para cada uno de los enunciados que construyen los estudiantes, hacemos una traducción a representación simbólica (Tablas V.2.3, V.2.4, V.2.5 y V.2.6). Al hacer esta interpretación, estamos considerando la letra como objeto, del mismo modo que hacen los estudiantes de esta investigación.

V.2.1. ENUNCIADOS CONSTRUIDOS PARA EL E2

En la tabla V.2.3 mostramos los enunciados contextualizados contruidos por los estudiantes para el enunciado simbólico E2 [$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$], la expresión simbólica que realizamos de estos y su análisis según las categorías de análisis precisadas anteriormente. De los 15 sujetos que participan en el torneo, 7 (S06, S09, S10, S11, S12, S15 y S16) propusieron enunciados contextualizados para el enunciado E2.

Tabla V.2.3. Análisis de los enunciados contruidos para E2

Código	Enunciado contextualizado construido	Traducción a representación simbólica del enunciado construido	Tipo de error	Interpretación de la parte literal	Significado dado a la operación
S06-1-E2	Cuatro coches [...] por la mitad de dos coches, es igual al doble de dichos coches.	$4x \cdot \frac{2x}{2} = 2x$	I.2	Objeto	Traducción textual
S06-2-E2	Cuatro bizcochos por la mitad es igual al doble de los bizcochos.	$\frac{4x}{2} = 2x$	✓	Objeto	Traducción textual
S09-1-E2	Cuatro coches por la mitad de una silla es igual al doble de dicha silla.	$4x \cdot \frac{y}{2} = 2y$	I.2, III.3	Objeto	Traducción textual
S10-1-E2	Cuatro [...] por...el doble del número que se han apuntado nuevos...es igual a...dos por ese número que se han apuntado.	$4 \cdot 2x = 2x$	II.2	Incógnita	Traducción textual
S11-1-E2	Cuatro por la mitad de la edad de mi hermano es igual [...] al doble de...la edad.	$4 \cdot \frac{x}{2} = 2x$	✓	Incógnita	Traducción textual
S12-1-E2	Cuatro por la mitad de mi edad es igual al doble de mi edad.	$4 \cdot \frac{x}{2} = 2x$	✓	Incógnita	Traducción textual
S12-2-E2	La mitad de mi edad por cuatro es igual al doble de mi edad.	$\frac{x}{2} \cdot 4 = 2x$	✓	Incógnita	Traducción textual

Código	Enunciado contextualizado construido	Traducción a representación simbólica del enunciado construido	Tipo de error	Interpretación de la parte literal	Significado dado a la operación
S15-1-E2	Cuatro por la mitad de la edad de Juan sería igual al doble de la edad de su hermano pequeño.	$4 \cdot \frac{x}{2} = 2y$	III.3	Incógnita	Traducción textual
S16-1-E2	Cuatro tomates, por la mitad de dos es igual [...] al doble de los tomates.	$4x \cdot \frac{2}{2} = 2x$	I.2	Objeto	Traducción textual

Nota. S_j-i-E2 enunciado i creado por el sujeto S_j para el enunciado E2. Marcamos con ✓ aquellos enunciados en los que no hay error de traducción.

Como vemos en la tabla V.2.3, los enunciados contextualizados construidos por los estudiantes para el enunciado E2, presentan una estructura similar a la expresión verbal no contextualizada que aparece en las piezas del dominó como traducción de este enunciado y que los estudiantes tienen delante durante la realización del torneo, esta es “Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número”. Así los enunciados que construyeron siguen el patrón “cuatro por...la mitad...el doble dicho...”, salvo en el enunciado S10-1-E2 donde en lugar de utilizar “el doble” el estudiante utilizó la expresión “dos por” y en el enunciado S12-2-E2 que no realizó una traducción secuencial del enunciado y comenzó el enunciado diciendo “la mitad de mi edad por cuatro”.

Al realizar la traducción a representación simbólica del enunciado que los estudiantes habían construido, observamos que de los 9 enunciados construidos, 4 se corresponden con la expresión dada (44%). En los 5 casos restantes (56%), los estudiantes incurren en algún error. En total identificamos 6 errores de 3 tipos diferentes correspondientes cada uno a una categoría diferente de las tres que consideramos en esta investigación: (a) desmedido (I.2) en tres enunciados (50%); (b) división-multiplicación (II.2) en un enunciado (17%); y (c) letras (III.3) en dos enunciados (33%) donde los estudiantes utilizan más letras que las referidas en el enunciado dado.

En el caso del error de tipo desmedido (I.2), presentado en los enunciados identificados con los códigos S06-1-E2 y S09-1-E2, aparecen más letras que las que

exige el enunciado simbólico dado; mientras que en el caso de S16-1-E2 aparece un coeficiente más que en el enunciado dado. En el enunciado S10-1-E2 el estudiante incurre en un error de tipo II.2 al confundir la mitad de un número con el doble de un número. En los enunciados en los que aparece el error de letras (III.3), S09-1-E2 y S15-1-E2, aparecen dos letras distintas cuando en el enunciado simbólico dado solo hay una.

En lo referido a la interpretación que hacen los estudiantes de la parte literal de la expresión simbólica dada, vemos que en casi la mitad de los enunciados construidos (4/9) los estudiantes utilizan la letra como un objeto: coches (S06-1-E2, S09-1-E2), bizcochos (S06-2-E2) o tomates (S16-1-E2); mientras que en el resto (5/9) los estudiantes utilizan la letra como una incógnita, un valor desconocido: es una edad (S11-1-E2, S12-1-E2, S12-2-E2 y S15-1-E2) o un número desconocido de niños que hay en una clase (S10-1-E2). Cuando los estudiantes interpretan la letra como una incógnita, la estructura del enunciado simbólico que han construido corresponde con el enunciado dado, salvo en un caso. La excepción corresponde al enunciado S15-1-E2 donde el estudiante asigna más de un significado a una misma letra.

En cuanto a las operaciones que aparecen en el enunciado dado en representación simbólica, consideramos que en todos los enunciados contextualizados construidos los estudiantes realizan una traducción textual de las operaciones.

Además, al analizar el tratamiento que dan los estudiantes a los coeficientes de la expresión simbólica dada, observamos que las expresiones que construyen se ajustan a la expresión verbal no contextualizada que aparece en las piezas del dominó y que tienen delante al construir las expresiones contextualizadas y utilizan las expresiones “la mitad de” o “el doble de” imitando a la expresión proporcionada. En algunos enunciados añaden una unidad a los coeficientes; es el caso de los enunciados en los que los estudiantes utilizan la letra como un objeto, por ejemplo cuando interpretan el coeficiente 4 como “cuatro coches” (S06-1-E2, S09-1-E2), “cuatro bizcochos” (S06-2-E2) o “cuatro tomates” (S16-1-E2).

Durante las entrevistas individuales, preguntamos a los estudiantes sobre el enunciado construido. Pedimos al sujeto S09, cuya construcción durante el torneo presenta errores de desmedido (I.2) y letras (III.3), que realice una traducción a representación simbólica del enunciado verbal contextualizado que ha construido y reconoce que no corresponde con el enunciado proporcionado. Al pedirle que

construya uno nuevo, el estudiante utiliza otra interpretación de la letra diciendo “no sé, así me lio, te lo digo con edad” y construye un nuevo enunciado: “cuatro por la mitad de mi edad es igual al doble de mi edad” (respuesta dada en la entrevista al sujeto S09), donde la interpretación simbólica que podemos hacer de ese enunciado contextualizado es $4 \cdot \frac{x}{2} = 2x$ de modo que ya no incurre en errores; interpreta la letra como una incógnita y realiza una traducción textual de las operaciones del enunciado.

V.2.2. ENUNCIADOS CONSTRUIDOS PARA EL E3

Mostramos en la tabla V.2.4 los enunciados contextualizados contruidos por los estudiantes para el enunciado simbólico E3 [$x + (x + 1) = y - 2$], la interpretación simbólica que hacemos de ese enunciado construido y esquematizamos el análisis realizado. De los 15 sujetos que participaron en el torneo, 10 propusieron enunciados contextualizados para el enunciado E3: S01, S02, S06, S07, S08, S10, S12, S14, S15 y S16.

Tabla V.2.4. Análisis de los enunciados contruidos para E3

Código	Enunciados contextualizados contruidos por los sujetos	Traducción a representación simbólica del enunciado construido	Tipo de error	Interpretación de la parte literal	Significado dado a la operación
S02-1-E3	Un limón, más otro limón [...] igual a [...] una naranja menos dos.	$x + x = y - 2$	I.1	Objeto	Traducción textual
S04-1-E3	Un tomate más un tomate más otro tomate igual a un tomate menos dos.	$x + x + x = x - 2$	I.1, I.2, III.3	Objeto	Traducción textual
S09-1-E3	Mi edad más mi edad más uno es igual a la edad de Elena menos dos.	$x + x + 1 = y - 2$	✓	Incógnita	Traducción textual
S10-1-E3	Pedro tiene equis años, y su hermano tiene uno más que él, la edad de Pedro más la	$x + (x + 1) = y - 2$	✓	Incógnita	Da significado

Código	Enunciados contextualizados construidos por los sujetos	Traducción a representación simbólica del enunciado construido	Tipo de error	Interpretación de la parte literal	Significado dado a la operación
	de su hermano es igual a la edad de su abuelo menos dos.				
S14-1-E3	Un limón, más otro limón, es igual a cuatro limones menos dos limones.	$x + x = 4x - 2x$	I.1, I.2, III.3	Objeto	Traducción textual
S16-1-E3	Un tomate más otro tomate igual a...un tomate menos dos...menos dos tomates.	$x + x = x - 2x$	I.1, III.3	Objeto	Traducción textual

Nota. S_j-i-E3 enunciado i creado por el sujeto S_j para el enunciado E3. Marcamos con ✓ aquellos enunciados en los que no hay error de traducción.

Al igual que para el caso anterior, los enunciados contextualizados construidos por los estudiantes para E3 se ajustan a la expresión verbal no contextualizada que aparece en las piezas del dominó como traducción verbal equivalente y que los estudiantes tienen delante cuando la pieza marcada con punto rojo se pone en juego, en este caso “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos”.

Tras realizar una traducción al sistema de representación simbólico del enunciado que los estudiantes han construido, vemos que 2 de los 6 enunciados construidos pueden traducirse en una expresión simbólica que corresponde con el enunciado dado mientras que en los 4 restantes los estudiantes incurren en algún error. Identificamos 7 errores de 4 tipos diferentes: dos según la completitud del enunciado (categoría I) y otros dos derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III). Estos errores son concretamente de los tipos: (a) incompleto (I.1) en cuatro enunciados (44%); (b) desmedido (I.2) en dos enunciados (22%); y (c) letras (III.3) en tres enunciados (34%) donde los estudiantes asignan un mismo significado a distintas letras.

En el caso del error de enunciado incompleto (I.1), que se presenta en cuatro enunciados (S02-1-E3, S04-1-E3, S14-1-E3 y S16-1-E3) no aparece el término independiente, 1, de la primera parte de la igualdad. En el enunciado S04-1-E3 ese término independiente aparece sustituido por la letra x ; el estudiante traduce como

un/otro tomate tanto la letra como el número 1 el valor de “otro tomate”; en consecuencia identificamos en su enunciado la inclusión de una letra de más lo que corresponde con el error de desmedido (I.2). Tres de los estudiantes incurren en errores de letras (III.3) al asignar un mismo significado a distintas letras, esto es, al traducir simbólicamente el enunciado verbal contextualizado que han construido, S04-1-E3, S14-1-E3 y S16-1-E3, aparece una única letra cuando el enunciado proporcionado, E3, realmente refiere a dos letras distintas.

Por último, en el enunciado S14-1-E3 interpretamos que a la letra y le ha dado el valor de “cuatro limones” y de ahí que la expresión simbólica que correspondería con su enunciado contextualizado construido sea $x + x = 4x - 2x$. Incurre en error del tipo incompleto (I.1), al faltarle el término independiente 1; en error de desmedido (I.2) pues le sobra el 4 y la x que acompaña al 2; y en error de letras (III.3) por aparecer únicamente la letra x cuando realmente en el enunciado dado hay dos letras.

En cuanto a la interpretación que hacen los estudiantes de la parte literal de la expresión simbólica dada, vemos que en el 67% de los enunciados construidos (4/6) los estudiantes utilizan la letra como un objeto concreto, mientras que en el 33% restante (2/6) los estudiantes utilizan la letra como una incógnita, como un valor desconocido: una edad (S09-1-E3 y S10-1-E3). En el primer caso consideramos que el error es debido a que el coeficiente que acompaña a la letra es uno: un limón (S02-1-E3 y S14-1-E3) o un tomate (S04-1-E3 y S16-1-E3). En los dos casos donde los estudiantes interpretan la letra como una incógnita, la estructura del enunciado simbólico que consideran traducción del enunciado verbal que han construido corresponde con el enunciado dado.

En lo referido a las operaciones que aparecen en el enunciado dado en representación simbólica, consideramos que en todos salvo uno de los enunciados contextualizados construidos, los estudiantes presentan una traducción textual de las operaciones. Solo en el caso del enunciado S10-1-E3 entendemos que el sujeto da significado a las operaciones que realiza pues antes de construir el enunciado verbal, realiza unas aclaraciones de qué valor le da a la letra x (años de Pedro) y a la expresión $x + 1$ (edad del hermano).

Finalmente, si analizamos el tratamiento que dan los estudiantes a los términos independientes de la expresión simbólica dada, consideramos que en un caso le asignan unidad al término independiente 1 (es el caso comentado anteriormente del enunciado

S02-1-E3) y en dos casos le asignan unidades al término independiente de la segunda parte de la igualdad, 2, donde lo interpretan como “dos limones” (S14-1-E3) o “dos tomates” (S16-1-E3).

Durante las entrevistas individuales, preguntamos a los estudiantes sobre los enunciados construidos durante el torneo. Al preguntar al sujeto S14 por el enunciado construido le pedimos que lo tradujera simbólicamente y reconoció que no correspondía con el enunciado proporcionado. Al pedirle que construyera uno nuevo, el enunciado que propuso fue “un limón más un limón más uno es igual a un plátano menos dos”, volviendo a interpretar las letras como un objeto concreto (x como un limón e y como un plátano). Cuando entrevistamos al sujeto S04, le pedimos que tradujera simbólicamente el enunciado que había construido y que, de nuevo, construyera un enunciado verbal contextualizado siendo el nuevo enunciado del mismo tipo que el anterior: “un tomate más el siguiente de su tomate es igual a un tomate menos dos”. Al preguntarle por la expresión “el siguiente de su tomate” su respuesta se refería al tomate que está al lado, algo que el propio estudiante reconoce que no tiene sentido pero que no sabe cómo construir un enunciado nuevo.

V.2.3. ENUNCIADOS CONSTRUIDOS PARA EL E8

En la tabla V.2.5 mostramos los enunciados contextualizados construidos por los estudiantes para el enunciado simbólico E8 $[2x - \frac{y}{4}]$, la expresión simbólica que hacemos de este enunciado y esquematizamos el análisis que realizamos. De los 15 sujetos que participaron en el torneo, 4 dan enunciados contextualizados para el E8 durante la realización del mismo: S02, S10, S12 y S16. .

Tabla V.2.5. Análisis de los enunciados construidos para E8

Código	Enunciados contextualizados construidos por los sujetos	Traducción a representación simbólica del enunciado construido	Tipo de error	Interpretación de la parte literal	Significado dado a la operación
S02-1-E8	Dos manzanas menos la cuarta parte de una pera.	$2x - \frac{y}{4}$	✓	Objeto	Traducción textual

Código	Enunciados contextualizados contruidos por los sujetos	Traducción a representación simbólica del enunciado construido	Tipo de error	Interpretación de la parte literal	Significado dado a la operación
S10-1-E8	Si multiplicamos dos por la edad de Juan menos la edad de Nicolás entre cuatro.	$2x - \frac{y}{4}$	✓	Incógnita	Traducción textual
S10-2-E8	Dos por mi edad menos la edad de Miguel entre cuatro.	$2x - \frac{y}{4}$	✓	Incógnita	Traducción textual
S12-1-E8	El doble de mi edad menos la cuarta parte de la edad de mi hermano.	$2x - \frac{y}{4}$	✓	Incógnita	Traducción textual
S16-1-E8	La cuarta parte de una tarta, menos su doble, menos el doble de esa tarta.	$\frac{x}{4} - 2x$	III.3	Objeto	Traducción textual

Nota. S*j*-i-E8 enunciado i creado por el sujeto S*j* para el enunciado E8. Marcamos con ✓ aquellos enunciados en los que no hay error de traducción.

Al contrario que para los dos enunciados anteriores, a pesar de que los estudiantes tenían delante la representación verbal del enunciado simbólico marcado con un punto rojo, los enunciados contextualizados contruidos no se ajustan a la expresión verbal no contextualizada que aparece en las piezas del dominó. Como puede verse en la tabla V.2.5 para el caso el enunciado E8, que corresponde con “Un número par menos la cuarta parte de otro número”.

Una vez realizada la traducción a representación simbólica del enunciado que los estudiantes han construido, observamos que de los cinco enunciados contruidos en total, únicamente el enunciado S16-1-E2 incurre en error. Se trata de un error de letras (III.3) al asignar un mismo significado a distintas letras. En las entrevistas individuales no les preguntamos a los estudiantes por estos enunciados contruidos.

En lo referido a la interpretación que hacen los estudiantes de la parte literal de la expresión simbólica dada, vemos que en el 40% de los enunciados contruidos (2/5) los estudiantes utilizan la letra como un objeto concreto: manzanas (valor para x en S02-1-E8), una pera (valor para y en S02-1-E8) o una tarta (valor para x en S16-1-E8); mientras que en el 60% restante (3/5) los estudiantes utilizan la letra como una incógnita,

un valor desconocido: edades para los valores de x e y (S10-1-E8, S10-2-E8 y S12-1-E8). En los tres casos en los que los estudiantes interpretan la letra como una incógnita (S10-1-E8, S10-2-E8 y S12-1-E8), la estructura del enunciado simbólico traducción del verbal que han construido corresponde con el enunciado dado (salvo para el enunciado S15-1-E2, donde el estudiante asigna más de un significado a una misma letra).

En cuanto a las operaciones que aparecen en el enunciado dado en representación simbólica, consideramos que los estudiantes hacen una traducción textual de las mismas en los enunciados que construyen.

Por último, analizando el tratamiento que dan los estudiantes a los coeficientes de la expresión simbólica dada, observamos que utilizan las expresiones “el doble de” o “la cuarta parte de” imitando a la representación verbal del enunciado proporcionada en las piezas de dominó.

V.2.4. ENUNCIADOS CONSTRUIDOS PARA EL E12

Mostramos en la tabla V.2.6 los enunciados contextualizados construidos por los estudiantes para el enunciado simbólico E12 [$x + (x + 1) - 4$], la expresión simbólica que realizamos de estos y su análisis según las categorías de análisis precisadas anteriormente. De los 15 sujetos que participaron en el torneo, 6 dan enunciados contextualizados para E12 durante la realización de dicho torneo: S02, S04, S09, S10, S14 y S16.

Tabla V.2.6. Análisis de los enunciados construidos para E12

Código	Enunciados contextualizados construidos por los sujetos	Traducción a representación simbólica del enunciado construido	Tipo de error	Interpretación de la parte literal	Significado dado a la operación
S01-1-E12	Mi edad más, otro año, menos cuatro.	$x + 1 - 4$	I.1	Incógnita	Traducción textual
S02-1-E12	Una pelota de futbol más...una pelota de futbol más una [...] menos cuatro pelotas de futbol.	$x + x + 1 - 4x$	I.2	Objeto	Traducción textual
S05-1-E12	Mi edad más otro	$x + 1 - 4$	I.1	Incógnita	Traducción

Código	Enunciados contextualizados construidos por los sujetos	Traducción a representación simbólica del enunciado construido	Tipo de error	Interpretación de la parte literal	Significado dado a la operación
	año menos cuatro				textual
S06-1-E12	Una pelota de futbol más [...] dos pelotas de futbol, menos cuatro pelotas de futbol.	$x + 2x - 4x$	I.1, I.2	Objeto	Traducción textual
S07-1-E12	Mi edad, más la edad mía dentro de un año, menos cuatro años que tiene mi hermano.	$x + x + 1 - 4$	✓	Incógnita	Da significado
S08-1-E12	Un melón más un melón más un melón menos cuatro melones.	$x + x + x - 4x$	I.1, I.2	Objeto	Traducción textual
S10-1-E12	Elena Derecha tiene un año más que Elena Izquierda [...] la edad de Elena Izquierda más Elena Derecha [...] menos cuatro...	$x + 1 + x - 4$	✓	Incógnita	Da significado
S10-2-E12	El hermano de Juan tiene un año más que él. La edad de Juan más la de su hermano menos cuatro es igual a la edad de su abuelo.	$x + (x + 1) - 4 = y$	I.2, III.3	Incógnita	Da significado
S12-1-E12	Mi edad [...] más la siguiente a mi edad [...] menos cuatro.	$x + x + 1 - 4$	✓	Incógnita	Da significado
S12-2-E12	La edad de mi hermana es el siguiente de mi edad menos cuatro.	$x = (y + 1) - 4$	I.1, I.2, III.3	Incógnita	Da significado
S12-3-E12	Mi edad más [...] el siguiente de mi edad menos cuatro.	$x + x + 1 - 4$	✓	Incógnita	Da significado
S14-1-E12	Dos pelotas de futbol más otra pelota de	$2x + x - 4x$	I.1, I.2	Objeto	Traducción textual

Código	Enunciados contextualizados construidos por los sujetos	Traducción a representación simbólica del enunciado construido	Tipo de error	Interpretación de la parte literal	Significado dado a la operación
	fútbol menos cuatro...pelotas de fútbol.				
S15-1-E12	La edad de Juan más la edad del abuelo más uno menos cuatro.	$x + y + 1 - 4$	III.3	Incógnita	Traducción textual
S16-1-E12	Un tomate más otro tomate menos cuatro.	$x + x - 4$	I.1	Objeto	Traducción textual

Nota. S_j-i-E12 enunciado i creado por el sujeto S_j para el enunciado E12. Marcamos con ✓ aquellos enunciados en los que no hay error de traducción.

Al igual que para el enunciado anterior, los enunciados contextualizados construidos por los estudiantes para el enunciado E12, no se ajustan a la expresión verbal no contextualizada que aparece en las piezas del dominó como sí ocurre en el caso de los enunciados E2 y E3. Para este E12 la representación verbal que damos en las piezas es “La suma de dos números consecutivos menos cuatro”.

En el análisis de errores realizado tras efectuar una traducción a representación simbólica del enunciado que los estudiantes han construido, vemos que de los 14 construidos en total durante las partidas, solo 4 de ellos (29%) tienen una expresión simbólica que corresponde con el dado. En los 10 restantes (71%), los estudiantes incurren en algún error.

Al analizar los errores de los enunciados construidos, los estudiantes incurren en 16 errores de 3 tipos diferentes: 13 según la completitud del enunciado (categoría I) y 3 derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III). En concreto, estos errores que se manifiestan son de los tipos: (a) incompleto (I.1) en 7 enunciados (44%); (b) desmedido (I.2) en 6 enunciados (38%); y (c) letras (III.3) en 3 enunciados (19%) donde los estudiantes asignan más de un significado a una misma letra.

El error de enunciado incompleto (I.1) se presenta en 7 enunciados dándose las siguientes situaciones: en tres de ellos los estudiantes obvian el término independiente 1 (S06-1-E12, S14-1-E12 y S16-1-E12); en tres se olvidan de una letra, x , (S01-1-E12,

S05-1-E12 y S08-1-E12); y en un caso falta la expresión $x+1$ (S12-2-E12). Los errores de desmedido (I.2) a veces se ponen de manifiesto en enunciados en los que también aparece el error incompleto (I.1) pues, como ocurre en el caso de S06-1-E12 y S14-1-E12 además de faltar el término independiente 1, sobran el 2 como coeficiente y sobra una letra que acompaña al término independiente 4 de la expresión original. En el caso de los enunciados S02-1-E12 y S08-1-E12 lo que sobra es una letra, y en el caso de los enunciados S10-2-E12 y S12-2-E12 sobra la expresión $= y$ o la expresión $=(y+1)$. Por último, observamos que el error de tipo III.3 presente en tres enunciados (S10-2-E12, S12-2-E12 y S15-1-E12) se manifiesta a causa de que al realizar la expresión simbólica del enunciado verbal contextualizado, los estudiantes han construido enunciados cuya traducción simbólica requiere el uso de dos letras diferentes cuando en realizad el enunciado simbólico dado solo tiene una letra.

En cuanto a la interpretación que hacen los estudiantes de parte literal de la expresión simbólica dada, vemos que en el 36% de los enunciados construidos (5/14) utilizan la letra como un objeto concreto. Consideramos que esto se debe a que el coeficiente que acompaña a la letra es uno: una pelota de fútbol (S02-1-E3, S06-1-E3, S14-1-E12), un melón (S08-1-E3) o un tomate (S16-1-E3). En el resto de casos, el 64% (9/14), interpretan la letra como una incógnita (S01-1-E12, S05-1-E12, S07-1-E12, S10-1-E12, S10-2-E12, S12-1-E12, S12-2-E12, S12-3-E12 y S15-1-E12) considerándose en todos los casos el valor de la letra referida a edades desconocidas.

Por último, en lo concerniente a las operaciones que aparecen en el enunciado dado en representación simbólica, consideramos que en casi la mitad de los enunciados contextualizados construidos los estudiantes realizan una traducción textual de las operaciones (en 8 de los 14 totales, 57%) mientras que los demás (en 6 de los 14 enunciados construidos, 43%) los estudiantes dan un significado a las operaciones del enunciado dado. En estos enunciados en los que los estudiantes dan significado a las operaciones los estudiantes utilizan para referirse a $x+1$ expresiones como “la edad mía dentro de un año” (S07-1- E12), “un años más” (S10-1- E12, S10-2- E12), “más la siguiente a mi edad” (S12-1 E12) o “el siguiente de mi edad” (S12-2- E12 y S12-3- E12).

Finalmente, si analizamos el tratamiento que dan los estudiantes a los términos independientes de la expresión simbólica dada, consideramos que en el caso del término independiente 4, en algunos casos le asignan unidad al referirse a este como “cuatro pelotas de fútbol” (S02-1-E12, S06-1-E12 y S14-1-E12), “cuatro años que tiene mi hermano” (S07-1-E12) o “cuatro melones” (S08-1-E12). En cuanto al término independiente 1, en algunos casos se refieren a él como “más uno” (S15-1-E12) o como “otro año” (S01-1-E12, S05-1-E12) pero en los demás casos o no se tiene en cuenta o se une a la letra para formar la expresión $x+1$ y es considerada como se ha mencionado anteriormente.

Este enunciado E12 es el que más producciones tiene. Durante las entrevistas individuales preguntamos a diez estudiantes sobre el enunciado construido durante el torneo. Cuando preguntamos al sujeto S14 por el enunciado construido le pedimos que lo tradujera simbólicamente y reconoció que no correspondía con el enunciado proporcionado. Al pedirle que construyera uno nuevo, comenzó cambiando el valor de la letra de pelotas de fútbol por manzanas pero finalmente se negó a terminar de construir un nuevo enunciado. Lo mismo sucede con el S08 quién, a pesar de reconocer que el enunciado verbal construido no tiene una interpretación simbólica coincidente con la expresión dada, se negó a dar otra propuesta. El sujeto S01, sin embargo, reconoció no haber construido durante el torneo un enunciado que fuera traducción verbal del enunciado simbólico dado y sí construyó uno al preguntarle en la entrevista: “mi edad más dentro de un año menos cuatro”. Del mismo modo, el sujeto S10 reconoció su error de desmedido (I.2) y determinó que “la primera parte está bien, pero yo puse lo de igual de más” no siendo por tanto necesario pedirle que construya uno nuevo. Preguntamos también al sujeto S15 por el enunciado que había construido durante el torneo y le pedimos que hiciera una traducción a representación simbólica del enunciado S15-1-E12. Él reconoció que no coincidía con la expresión dada, al intentar construir un enunciado nuevo determinó que “el menos cuatro nos sé dónde ponerlo” aunque finalmente realizó la traducción como “el hermano de Juan tiene un año más que él, pues la edad de Juan más la edad del hermano menos cuatro”.

V.2.5. CONCLUSIÓN DEL ANÁLISIS DE LA CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS CONTEXTUALIZADOS

El análisis que hemos realizado en los apartados anteriores, para cada uno de los enunciados contextualizados que los estudiantes habían construido durante el torneo, nos permite realizar ahora un análisis conjunto de todos esos enunciados.

El análisis de los errores identificados muestra que la mayoría son debidos a la completitud del enunciado (categoría I, 21/32), hay un caso de error derivados de la aritmética (categoría II, 1/32) y el resto son derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III, 10/32). Presentamos el análisis de errores de los enunciados construidos en la tabla V.2. 7.

Tabla V.2.7. Análisis de errores de los enunciados contextualizados construidos

Tipo de error	Enunciado				Total
	E2	E3	E8	E12	
I.1.Incompleto		4 (44%)		7 (44%)	11
I.2.Desmedido	3 (50%)	2 (22%)		6 (38%)	11
II.1.Paréntesis					
II.2. División-Multiplicación	1 (17%)				1
II.3.Potenciación-multiplicación					
II.4.Suma-Multiplicación					
II.5.División-Potencia					
III.1.Generalización					
III.2.Particularización					
III.3.Letras	2 (33%)	3 (33%)	1 (100%)	3 (18%)	9
III.4.Complicación estructural					
Total	6 (100%)	9 (100%)	1 (100%)	16 (100%)	32

Vemos en la tabla V.2.7 que dentro de los errores debidos a la completitud del enunciado (categoría I, 21/32, 66%), la presencia de errores de tipo incompleto (I.1, 11/22, 50%) y de desmedido (I.2, 10/22, 50%) se produce en igual cantidad. Se concentran en los enunciados contextualizados construidos para el enunciado E12 y E4 y no aparecen en los construidos para el enunciado E8 y E2. Encontramos entre los enunciados construidos para el E12 dos casos de construcción de enunciados cerrados a pesar de que el que le dábamos era abierto.

En cuanto a los errores derivados de la aritmética (categoría II, 1/32, 3%), el único caso que aparece se debe a un error de división-multiplicación (II.2) en un enunciado contextualizado construido para el E2 (S10-1-E2). Por último, observamos que en los errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III, 10/32, 31%), todos se concentran en los errores de letras (III.3, 9/10, 90%) y se presentan en los cuatro enunciados simbólicos dados. En tres ocasiones asignan más de un significado a una misma letra (S10-2-E12, S12-2-E12 y S15-2-E12) y en el resto asignan un mismo significado a distintas letras (S04-1-E3, S14-1-E3, S16-1-E3, S16-1-E8, S09-1-E2 y S15-1-E2).

Como hemos mencionado anteriormente, 13 de los 15 estudiantes que participaron en el torneo construyeron enunciados contextualizados al poner en juego una pieza marcada. Estos estudiantes realizaron una interpretación de las letras de la expresión algebraica de dos maneras distintas: (a) como un objeto, y (b) como una incógnita. La presencia de ambas interpretaciones de la letra es aproximadamente la misma: en un 44% de los casos como objeto (15/34) y en un 56% como incógnita (19/34). Recogemos en la tabla V.2.8, para los enunciados E2, E3, E8 y E12 que aparecen en las piezas marcadas, el número de enunciados construidos donde los estudiantes dan una u otra interpretación de la parte literal y el distinto significado que dan a las operaciones.

Tabla V.2.8. Número de sujetos según el significado que dan a la parte literal y a las operaciones de los enunciados contextualizados construidos

	Interpretación de la parte literal		Significado dado a la operación	
	Objeto	Incógnita	Traducción textual	Da significado
E2	4	5	9	-
E3	4	2	5	1
E8	2	3	5	6
E12	5	9	8	-
Total	15	19	27	7

En las transcripciones de las partidas de torneo realizadas¹⁸ observamos que en la mayoría de los casos los estudiantes tienden a copiar los unos de los otros la manera de

¹⁸ Las transcripciones del torneo pueden consultarse en el Anexo C.

construir los enunciados y, por tanto, la interpretación de las letras. Por ejemplo, cuando el primer estudiante que pone en juego una pieza marcada realizó una interpretación de la letra del enunciado simbólico dado como un objeto, los estudiantes que a continuación ponían en juego el resto de piezas de punto rojo, también realizaron la misma interpretación. Esta situación se observa en varias partidas.

Durante la partida del grupo 1, cuando el sujeto S12 estableció que la letra del enunciado simbólico dado x era “mi edad” (S12-1-E8), entendemos que queriéndose referir al número de años que tiene, para el resto de enunciados construidos los estudiantes también realizaron esa interpretación (S12-2-E2, S01-1-E12, S12-1-E12, S07-1-E12). En el caso del grupo 2 ocurrió lo mismo. En el primer enunciado construido el estudiante interpretó las letras como objetos ($x = \text{limones}$) (S14-1-E3) y el resto de los enunciados construidos durante la partida presentan el mismo tipo de interpretación de la letra ($x = \text{limones}$) (S02-1-E3, S06-1-E2, S06-2-E2, S09-1-E2, S14-1-E12, S02-1-E12, S06-1-E12 y S02-1-E8).

Ocurre también durante la partida del grupo 3, cuando el primer estudiante construyó un enunciado en el que la letra era interpretada como una incógnita (S15-1-E12), el resto de los enunciados presentaron la misma interpretación para las letras (S10-2-E12, S10-1-E3, S15-1-E2, S10-1-E2 y S11-1-E2).

Igualmente, en la partida del grupo 4, el primer estudiante que construyó un enunciado realizó una interpretación de la letra como un objeto ($x = \text{una tarta}$) (S16-1-E8) y el resto de enunciados construidos tenían una interpretación de la letra como objeto (S16-1-E3, S04-1-E3 y S08-1-E12).

Sin embargo la situación cambió en las dos partidas finales del torneo. En la primera de ellas, el primer sujeto construyó un enunciado contextualizado, realizando una interpretación de la letra como un objeto ($x = \text{un tomate}$) (S16-1-E12); pero el siguiente sujeto (S12-2-E12) y los restantes (S10-1-E12, S10-1-E8, S12-1-E2y S09-1-E3) realizaron una interpretación de la letra como una incógnita. En la segunda partida, la final del torneo, el primer estudiante que construyó un enunciado contextualizado interpretó la letra como una incógnita (S12-3-E12) pero el siguiente estudiante construyó un enunciado contextualizado donde la letra era interpretada como un objeto ($x = \text{tomates}$) (S16-1-E2) y en el resto de enunciados construidos interpretaron la letra como una incógnita (S12-2-E2 y S10-2-E8).

Al realizar este análisis de la interpretación que hacen los estudiantes de las letras, cuando las consideran como una incógnita, todos se refieren a edades, con la única excepción del sujeto S10 que construyó un enunciado donde se refería a la letra x como el “número de niños apuntados a una clase” (S10-1-E2).

En cuanto al tratamiento que hacen los estudiantes de los números que aparecen en los enunciados simbólicos marcados en las piezas con punto rojo, encontramos similitudes en los enunciados E2 y E8. En esos enunciados, los coeficientes son tratados de manera similar a la traducción verbal que les proporcionamos en las piezas de dominó. En el caso del enunciado E2, lo tradujeron como “cuatro por la mitad de...” y “el doble de...”, imitando al enunciado dado. En el caso del enunciado E8, lo tradujeron como “dos por/el doble de...menos un cuarto de...” donde en este caso no imitaron la traducción de la primera parte que es “un número par”. En los enunciados E3 y E12 los términos independientes son tratados también de manera similar, pues para el 1 que aparece en la expresión $x+1$ en ambos enunciados es considerado en algunos casos como “más uno” (S15-1-E12) o como “otro año” (S01-1-E12). En los demás casos o no se tiene en cuenta o se une a la letra para formar la expresión $x+1$ y es considerado de la siguiente manera: “la edad mía dentro de un año” (S07-1- E12), “un años más” (S10-1- E12, S10-2- E12), “más la siguiente a mi edad” (S12-1 E12) o “el siguiente de mi edad” (S12-2- E12 y S12-3- E12).

En cuanto a los términos independientes que aparecen al final de ambas expresiones simbólicas, observamos que en el enunciado E3, en algunas ocasiones, los estudiantes le asignan unidad al número, como es el caso de los enunciados S14-1-E3 donde el estudiante dice “dos limones” y S16-1-E3 dice “dos tomates”.

Análogamente, en el caso del enunciado E12 algunos estudiantes le dan unidad al término independiente determinando que se trata de “cuatro pelotas de fútbol” (S02-1-E12, S06-1-E12, S14-1-E12), “cuatro melones” (S08-1-E12) o “cuatro años que tiene mi hermano” (S07-1-E12). En los otros casos, en el enunciado verbal contextualizado que construyeron los estudiantes determinaron que se trataba de “menos cuatro” (S01-1-E12, S10-1-E12, S12-1-E12, S12-2-E12, S12-3-E12 y S16-1-E12).

Por último, encontramos que en 7 enunciados de los 34 construidos (21%), le dan significado a las operaciones (ver tabla V.2.8), en concreto a la expresión $x+1$ de los

enunciados E3 y E12. En todos estos casos lo hacen cuando construyen enunciados relacionados con edades. Interpretamos que dan significado a la operación pues tradujeron esa expresión simbólica como “si Pedro tiene equis años, su hermano tiene uno más que él” (S10-1-E3), “la edad mía dentro de un año” (S07-1-E12), “tiene un año más” (S10-1-E12 y S10-2-E12), “el siguiente de mi edad” (S12-1-E12, S12-2-E12 y S12-3-E12). En los 27 enunciados restantes construidos (79%), los estudiantes hacen una traducción textual de las operaciones del enunciado simbólico dado. Por ejemplo: “mi edad más mi edad más uno” (S04-1-E3), “mi edad más otro año menos cuatro” (S01-1-E12).

V.3. ANÁLISIS DE ERRORES EN LA ELECCIÓN DE TRADUCCIONES DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS (FICHA II)

En este apartado realizamos un análisis de los errores en los que incurren los estudiantes al realizar la elección de traducciones de enunciados algebraicos contextualizados. Como hemos comentado previamente, estos datos provienen de la primera parte de la Ficha II, dejamos el análisis de la segunda parte (explicaciones escritas de sus elecciones) para el apartado V.4 de este capítulo.

En el apartado IV.3.4 de esta memoria hemos presentado los enunciados propuestos a los estudiantes en esta tarea. Recordamos que en la primera parte de la Ficha II, les proponemos un enunciado y varias traducciones posibles, una que corresponde con el enunciado y otras que no corresponden. Han de realizar dos elecciones entre las opciones de traducción dadas, una que sea traducción del enunciado y otra que no lo sea.

En el análisis de las respuestas distinguimos: (a) Situación 1, donde les proporcionamos enunciados representados mediante simbolismo algebraico, y (b) Situación 2, donde les proporcionamos enunciados en representación verbal¹⁹. Dado que los errores que se ponen de manifiesto en las dos situaciones no son de la misma naturaleza, no podemos realizar una comparación de ambos sentidos de traducción.

¹⁹ La composición de la Ficha II puede verse en el Anexo A.3 y las producciones de los estudiantes de esta ficha en el Anexo D.

Completamos la información obtenida en las respuestas escritas de los estudiantes en la Ficha II con la información obtenida en las entrevistas individuales realizadas posteriormente.

V.3.1. BALANCE DE RESPUESTAS EN LA ELECCIÓN DE TRADUCCIONES DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS (FICHA II)

Clasificamos las elecciones hechas por los estudiantes en la tabla V.3.1. Presentamos las respuestas de los sujetos a las elecciones que debían realizar de las traducciones propuestas a la Situación 1, que forma parte de la Ficha II, indicando las opciones de respuesta que marcaron como traducción incorrectas o correctas.

Tabla V.3.1. Elecciones de los sujetos en la Situación 1 de la Ficha II

Sujetos	Enunciados															
	E1.1				E2.1				E3.1				E4.1			
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
S01		I		C	I	C			I			C	C			I
S02	I	I	I	C	I	I	I	C	I	I	C	I	I	C	I	
S03	I		C				I	C			C	I	C		I	
S04		I		C		I		C	I		C			C	I	
S05	I		C		I		C		I		C		I		C	
S06	I		C			I	C		I		C		C			I
S07	I		C			C		I	I			C	I	C		
S08	I		C		I		C		I			C		C		I
S09	I			C	I		C		I		C		C			I
S10	I			C	I		C		I	C			C	I		
S11	I		C				C	I	I			C			C	
S12		I		C	I		C		I		C		I	C		
S13	I			C	C		I				C	I		C		I
S14	I			C	I		C		I		C				C	I
S15		C		I	I		C		I		C			C	I	
S16	I			C	I			C		I	C		I	C		
Total correctos	0	1	6	9	1	2	9	4	0	1	11	4	5	8	3	0

Nota. a, b, c, d = opciones de respuesta; I = opción marcada por los estudiantes como "incorrecta"; C = opción marcada por los estudiantes como "correcta"; Ei.1 = Enunciado i de la Situación 1; Sombreamos la opción de respuesta que es la traducción que se ajusta al enunciado dado.

Del mismo modo, clasificamos las elecciones hechas por los estudiantes en la tabla V.3.2, mostrando las respuestas de los sujetos a las elecciones que debían realizar de las traducciones propuestas, en esta ocasión de la Situación 2, que forma parte de la Ficha II, indicando las opciones de respuesta que marcan como traducción incorrectas o correctas.

Tabla V.3.2. Elecciones de los sujetos en la Situación 2 de la Ficha II

Sujetos	Enunciados															
	E1.2				E2.2				E3.2				E4.2			
	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
S01			I	C	I	C				I		C	I	C		
S02			C	I		I	C		C	I	I		I	C		
S03		C		I	I			C			I	C	I	C		
S04		C		I		C		I		I		C	I	C		
S05	I		C		I		C		I		C			C		I
S06			C	I		C		I			I	C	I			C
S07	C	I					C	I		I		C	I			C
S08	I	C			I		C		C		I		I	C		
S09	C	I			I		C				I	C	I	C		
S10	C	I				I	C				I	C	I	C		
S11	C			I	I		C		I			C	I	C		
S12	C	I				I	C				I	C	I	C		
S13			I	C			C	I		I		C		C		I
S14	C	I			I	C			C		I		I			C
S15	C		I		I		C				I	C	I	C		
S16		C	I			I	C				I	C	C			I
Total correctos	7	4	3	2	0	4	11	1	3	0	1	12	1	12	2	1

Nota. a, b, c, d = opciones de respuesta; I = opción marcada por los estudiantes como “incorrecta”; C = opción marcada por los estudiantes como “correcta”; Ei.2 = Enunciado i de la Situación 2; Sombreamos la opción de respuesta que es la traducción que se ajusta al enunciado dado.

Como observamos en las tablas V.3.1 y V.3.2, la elección de la opción correcta, sombreada en cada caso, presenta una alta variabilidad según el enunciado, oscilando de 3 (E4.1) a 12 (E3.2, E4.2), con un promedio de 8. Hay un bajo número de errores en la elección como incorrecta de la opción que realmente es traducción exacta, destacando el caso del enunciado E4.1 (4/16). Llama la atención el número de sujetos que dejaron la opción que es traducción exacta sin marcar, ni como correcta ni como incorrecta, variando desde 4 (E2.1, E3.2, E4.2) hasta 9 (E1.1, E3.1, E4.1).

En la figura V.3.1 podemos observar la frecuencia en que los estudiantes realizan la elección de la traducción del enunciado dado. Percibimos que sobre la opción que es traducción, en el caso de los enunciados de la Situación 2 (de verbal a simbólico), es más común que los estudiantes la consideren correcta o no la tengan en cuenta, que el hecho de que la consideren incorrecta, teniendo más variedad de tipo de elección en los enunciados de la Situación 1 (de simbólico a verbal).

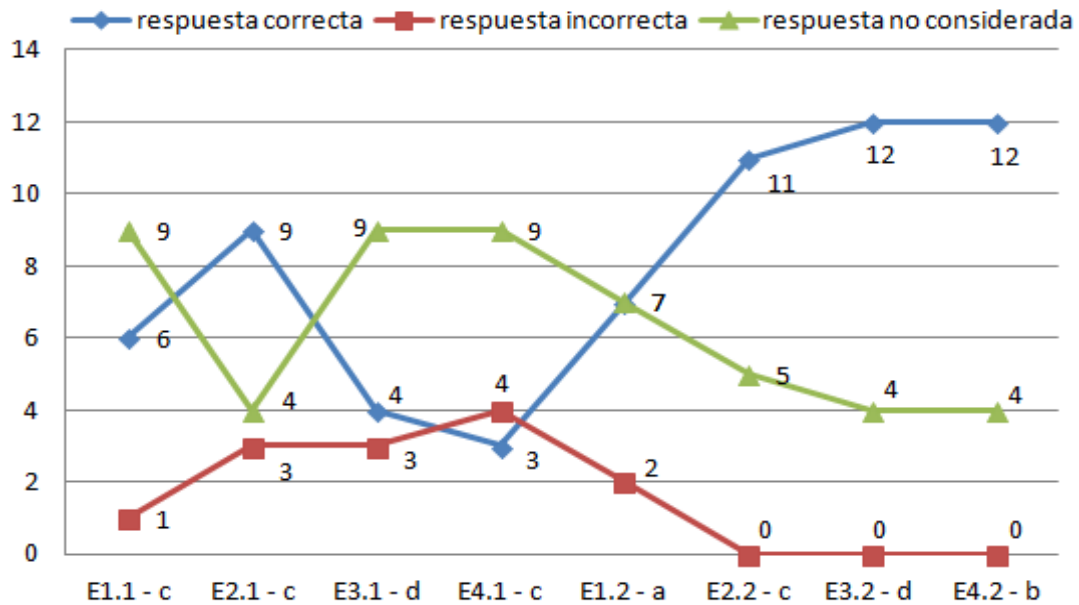


Figura V.3.1. Elección de la opción que es traducción del enunciado dado

V.3.2. ANÁLISIS DE LOS ERRORES EN LA ELECCIÓN DE TRADUCCIONES DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS

Realizamos el análisis de los errores en los que incurren los estudiantes para cada una de las dos situaciones planteadas: de simbolismo algebraico a sistema de representación verbal (Situación 1) y de sistema de representación verbal a simbolismo algebraico (Situación 2). Posteriormente, realizamos un análisis general de la elección de enunciados algebraicos, comparando ambos sentidos de traducción. Recordamos que no todos los errores se ponen de manifiesto en esta tarea que realizaron los estudiantes, tal y como hemos detallado en la parte IV.3.4 de esta memoria.

a) De simbolismo algebraico a sistema de representación verbal (Situación 1)

Realizamos un análisis de la elección de enunciados presentados mediante simbolismo algebraico a su representación verbal. Mostramos los tipos de error en los que incurre el alumnado en la figura V.3.2 de entre los posibles.

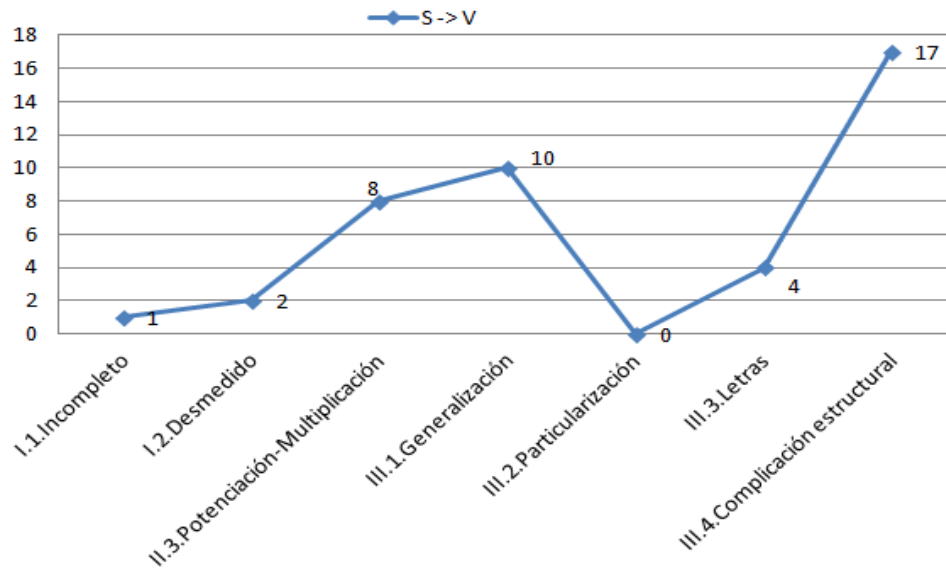


Figura V.3.2. Presencia del tipo de error de $S \rightarrow V$ (Situación 1)

En la figura V.3.2 vemos que los tipos de error que más se manifiestan en este sentido de la traducción, de entre los posibles, son complicación estructural (III.4, 17/42, 40%) y generalización (III.1, 10/42, 24%). Hay presencia nula del error de particularización (III.2). Encontramos escasa presencia de los errores debidos a la completitud del enunciado — incompleto (I.1, 1/42, 2%) y desmedido (I.2, 2/42, 5%)— y de letras (III.3, 4/42, 10%).

Para poder realizar un análisis más detallado, nos centramos de manera individual en cada enunciado propuesto para analizar las opciones de respuesta que dieron los estudiantes como correctas o incorrectas.

Enunciados contextualizados propuestos para E1.1

Para el enunciado E1.1 proporcionamos a los estudiantes cuatro enunciados verbales con contexto numérico referidos a edades, que mostramos en la tabla V.3.3.

Tabla V.3.3. Enunciados contextualizados para E1.1

Enunciado E1.1	Opciones de respuesta
$5 + x + y$	a) Cinco años más la edad de mi hermana más mi edad más la de mi hermana. b) Cinco veces mi edad y la de mi hermana. c) Cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo. d) Un número impar más una edad más otra edad.

Nota. Sombreamos la opción que en representación verbal es la traducción del enunciado dado; E1.1 = Enunciado 1 de la Situación 1.

En la tabla V.3.4 recogemos el número de estudiantes que seleccionaron cada opción como correcta o incorrecta, pudiendo determinar de este modo en qué tipo de error incurren cuando determinaron una opción como correcta.

Tabla V.3.4. Respuestas al enunciado E1.1

E1.1	Opción de respuesta y tipo de error			
	a - I.2	b - III.4	c - ✓	d - III.1
Correcta	0	1	6	9
Incorrecta	12	4	1	1

Nota. E1.1 = Enunciado 1 de la Situación 1; Marcamos con ✓ la opción correcta.

Para este primer enunciado, observamos que seis sujetos seleccionaron la traducción correcta (S03, S05, S06, S07, S08 y S11) como tal, uno la seleccionó como incorrecta (S02) y el resto no la seleccionaron. De los 16 sujetos del estudio, 9 seleccionaron como opción correcta la respuesta *d* (S01, S02, S04, S09, S10, S12, S13, S14 y S16), incurriendo en un error de generalización (III.1). Un sujeto seleccionó como opción correcta la respuesta *b* (S15), incurriendo en un error de complicación estructural (III.4). Al determinar la opción de enunciado erróneo, destaca que únicamente un alumno (S02) determinó que el enunciado correcto es erróneo, mientras que los demás sí seleccionaron adecuadamente enunciados incorrectos, en mayor medida el del error de enunciado desmedido (I.2).

El análisis de errores realizado muestra que la mayor parte de los estudiantes (10/16) no identifica como traducción la que se ajusta al enunciado E1.1, la opción *c*. De estos estudiantes, la mayoría eligió como correcta la opción *d*. En las entrevistas individuales, los estudiantes reconocieron que el enunciado *d* es una generalización del apartado *c*.

Los estudiantes afirmaron que a pesar de que el apartado *c* es la traducción del enunciado simbólico dado, una generalización del enunciado también debería considerarse correcta. Consideraron que “las dos están bien” (respuesta del sujeto S16), “pues es lo mismo, pero podría poner cinco o cualquier número impar” (respuesta del sujeto S12), “las veo iguales como yo las leo, porque un número impar sería el cinco...” (respuesta del sujeto S15).

El estudiante S02 reconoció como incorrecta la opción *c*, pero no disponemos de más información pues no realizó la entrevista personal. El sujeto S15 es el único que marcó como correcta la opción *b*, e indicó por escrito su justificación razonando que “porque sería $5x$, que es el quintuple de mi edad más y , que es la edad de mi hermana”. Al realizar la entrevista, este estudiante reconoció su error al confundir la suma con la multiplicación.

Enunciados contextualizados propuestos para E2.1

Para el enunciado E2.1, proporcionamos a los estudiantes los cuatro enunciados verbales con contexto numérico que presentamos en la tabla V.3.5.

Tabla V.3.5. Enunciados contextualizados para E2.1

Enunciado E2.1	Opciones de respuesta
$x + 60 = 5x$	a) La suma de un número más sesenta es igual a cinco. b) Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco. c) Al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco. d) Sesenta más un número es igual a cinco veces otro número.

Nota. Sombreamos la opción que en representación verbal es la traducción del enunciado dado. E2.1 = Enunciado 2 de la Situación 1.

Recogemos el resumen de respuestas al segundo enunciado en la tabla V.3.6. Observamos que nueve estudiantes (S05, S06, S08, S09, S10, S11, S12, S14 y S15) seleccionaron correctamente la opción *c* mientras que tres (S02, S03 y S13) la seleccionaron como traducción errónea.

Tabla V.3.6. Respuestas al enunciado E2.1

E2.1	Opción de respuesta y tipo de error			
	a - I.1	b - I.2	c - ✓	d - III.3
Correcta	1	2	9	4
Incorrecta	10	3	3	2

Nota. E2.1 = Enunciado 2 de la Situación 1; Marcamos con ✓ la opción correcta.

Al hacer la elección de respuesta correcta de manera errónea, 4 de los 7 estudiantes (S02, S03, S04 y S16), incurren en error de letras (III.3), los otros 3 incurren en un error de enunciado incompleto (I.1) (S13) o desmedido (I.2) (S01 y S07). Cuando han de elegir un enunciado erróneo como traducción, tres estudiantes (S02, S03 y S13) incurren en error al seleccionar el enunciado correcto como si se tratase del incorrecto, los restantes sí realizaron bien la elección de enunciado erróneo.

La mayor parte de los estudiantes (9/16) identificó la opción *c* como traducción al enunciado E2.1. Del resto de estudiantes, tres identificaron esta opción como incorrecta, los sujetos S02, S03 y S13. Los sujetos S02 y S03 no fueron entrevistados, por lo que no disponemos de más información sobre sus respuestas. El sujeto S13 marcó como correcta la opción *a*, y en la entrevista explicó que “si dice multiplicar por cinco yo pondría cinco por cinco, no pondría la equis”, mostrando dificultad para distinguir entre “igual a cinco” y “multiplicar por cinco”. El sujeto S01 es el único que marcó como correcta la opción *b*, aunque no expresó por escrito un razonamiento para esta elección. En la entrevista, le preguntamos al respecto. A continuación mostramos el fragmento correspondiente a esta conversación con el sujeto S01.

- *Profesora: Situación uno enunciado dos. Sin mirar la expresión simbólica que te he dado, ¿puedes leer de nuevo la expresión verbal que has seleccionado? Has marcado la b, que no me has explicado el por qué. ¿Por qué no me la has explicado?*
- *S01: Porque no sé, de esta yo no estaba muy segura.*
- *Profesora: Lee.*
- *S01: Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco.*
- *Profesora: ¿Cómo lo escribirías simbólicamente?*
- *S01: Pues un número, equis, más sesenta, igual a cinco equis por...equis...por cinco.*
- *Profesora: ¿Corresponde con la simbólica que yo te he dado?*
- *S01: No, falta el por cinco otra vez.*
- *Profesora: ¿Entonces?*

- S01: *Es verdad...*
- Profesora: *Vale.*
- S01: *¿Te digo cuál sería?*
- Profesora: *Sí, dímelo.*
- S01: *Pues este, sesenta más un número es igual a cinco veces otro número.*
- Profesora: *¿Cómo lo escribirías simbólicamente?*
- S01: *Equis más sesenta igual a cinco equis...es que... me dice lo de sesenta más un número pero...sería sesenta más equis...*
- Profesora: *Da igual el orden.*
- S01: *Entonces sí.*
- Profesora: *¿Pero igual a qué?*
- S01: *Cinco veces otro número, cinco equis.*
- Profesora: *Pero es como cuando estábamos hablando de la ficha uno, es igual a otro número.*
- S01: *Ah es verdad, sería y. Pues ésta no es. ¿Es la c? Al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco.*
- Profesora: *Míralo, al sumarle a un número sesenta, equis más sesenta...sigue leyendo...se obtiene el mismo número...*
- S01: *Que al multiplicarlo por cinco...cinco equis.*
- Profesora: *¿Es lo mismo?*
- S01: *Sí, es el c.*

Observamos en este fragmento de entrevista cómo el sujeto S01 realizó oralmente las traducciones de los enunciados verbales dados a representación simbólica para encontrar la traducción verbal que se ajusta al enunciado simbólico dado en el enunciado E2.1.

Enunciados contextualizados propuestos para E3.1

En el caso del enunciado E3.1, planteamos a los estudiantes cuatro enunciados verbales con contexto geométrico que mostramos en la tabla V.3.7.

Tabla V.3.7. Enunciados contextualizados para E3.1

Enunciado E3.1	Opciones de respuesta
$x^2 - y^2 = 9$	<ul style="list-style-type: none"> a) El área del suelo de mi habitación cuadrada menos el área del suelo de tu habitación cuadrada. b) La diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es un número impar. c) El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve. d) La diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es nueve.

Nota. Sombreamos la opción que en representación verbal es la traducción del enunciado dado; E3.1 = Enunciado 3 de la Situación 1.

En la tabla V.3.8 presentamos el resumen de las respuestas para este tercer enunciado, donde observamos que cuatro estudiantes (S01, S07, S08 y S11) seleccionaron correctamente la opción correcta *d* y tres (S02, S03 y S13) la seleccionaron como errónea. Destaca que 11 de los estudiantes consideraron correcta la opción *c* (S02, S03, S04, S05, S06, S09, S12, S13, S14, S15 y S16), incurriendo por tanto en un error de tipo III.4 (complicación estructural).

Tabla V.3.8. Respuestas al enunciado E3.1

E3.1	Opción de respuesta y tipo de error			
	a - I.1	b - III.1	c - III.4	d - ✓
Correcta	0	1	11	4
Incorrecta	13	2	0	3

Nota. E3.1 = Enunciado 3 de la Situación 1. Marcamos con ✓ la opción correcta.

Al realizar el análisis de errores vemos que 4 de los 16 estudiantes (S01, S07, S08 y S11) marcaron como opción correcta el apartado *d*, marcando los 11 estudiantes restantes la opción *c* como traducción a representación verbal que mejor se ajusta. El estudiante S10 marcó como opción correcta el apartado *b*, quien opinó en este caso al igual que en el enunciado E1.1 que, a pesar de que la opción *d* es correcta, su elección también lo era al ser una generalización del enunciado.

Únicamente tres estudiantes (S02, S03 y S13) marcaron como traducción incorrecta el apartado *d*. El sujeto S02 dejó en blanco sus razonamientos y el sujeto S03 expresó, por escrito, que su elección se debía a que “no indica que se eleve”. No disponemos de más información sobre la elección de los estudiantes en estos casos al no haber sido entrevistados.

El estudiante S13 aportó lo siguiente como justificación por escrito de que el enunciado *d* era incorrecto: “está mal expresada porque no es la diferencia”. Durante la entrevista, le preguntamos tanto por su elección de respuestas como por sus razonamientos, dando lugar a la conversación que presentamos en el siguiente fragmento de entrevista:

- *Profesora: Es que aquí, en la correcta, marcaste la a y la c, pero tachaste la a y te quedaste con la c, ¿por qué?*

- *S13: Porque el perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro de otra habitación... no veo bien explicado eso de que sea nueve.*
- *Profesora: Ah, ¿eso es lo que ves mal?*
- *S13: Que no lo veía yo...*
- *Profesora: ¿Por qué?*
- *S13: No sé.*
- *Profesora: Tú imagínate que uno vale veinticinco y el otro dieciséis, al restarlo da nueve.*
- *S13: Es verdad, sí. Es que no lo pienso al hacerlo.*
- *Profesora: Pero, ¿qué tiene este enunciado c que no tienen los demás?*
- *S13: No sé, que ahí lo dice diferente, dice mi habitación cuadrada...el perímetro...*
- *Profesora: Pero tú la has elegido como correcta. Fíjate, la a, la b y la d te hablan de áreas, y c habla de perímetros. ¿Qué es el perímetro de un cuadrado?*
- *S13: Lo mismo que te he dicho antes...no, eso era el área...es diferente...la suma de los lados.*
- *Profesora: Entonces si yo tengo un cuadrado de lado equis, la suma de sus cuatro lados, ¿cuánto es?*
- *S13: Cuatro equis.*
- *Profesora: ¿Y aquí qué pone?*
- *S13: Dos equis.*
- *Profesora: No, equis elevado a dos.*
- *S13: Equis elevado a dos, si. Es distinto.*
- *Profesora: Vale, entonces, ¿cuál consideras que es correcta?*
- *S13: La d, la que yo había puesto como incorrecta.*

En el anterior extracto de entrevista observamos que cuando el estudiante razonó oralmente sobre la traducción de los enunciados dados, incurre en un error de tipo II.3 (potenciación-multiplicación) y tras razonar sobre los enunciados proporcionados, encontró la traducción del enunciado simbólico dado en el E3.1.

Al expresar por escrito la justificación de su elección, los estudiantes que han marcado la opción *c* como correcta, no realizaron ninguna aclaración que permitiera entender su elección. Únicamente al realizar las entrevistas individuales constatamos que la mayoría de los estudiantes habían confundido el perímetro y el área de una figura cuadrada. Una vez que aclararon ellos mismos esta confusión de conceptos, identificaron la opción *d* como traducción a la representación verbal del enunciado simbólico que les dábamos.

Enunciados contextualizados propuestos para E4.1

Para el enunciado E4.1 dábamos a los estudiantes cuatro opciones de respuesta con enunciados verbales con contexto geométrico, que mostramos en la tabla V.3.9.

Tabla V.3.9. Enunciados contextualizados para E4.1

Enunciado E4.1	Opciones de respuesta
x^3	a) El área de un cubo. b) El triple del lado de un cubo. c) El volumen de un cubo. d) La tercera potencia de tres.

Nota. Sombreamos la opción que en representación verbal es la traducción del enunciado dado. E4.1 = Enunciado 4 de la Situación 1.

Para el cuarto y último enunciado propuesto en esta Situación 1 tenemos en la tabla V.3.10 las respuestas dadas por los estudiantes, donde vemos que tres (S05, S11 y S14) consideraron correcta la opción *c*; ocho la opción *b* (S02, S04, S07, S08, S12, S13, S15 y S16), incurriendo en un error de potenciación-multiplicación (II.3). Cinco incurrieron en error de complicación estructural (III.4) al elegir la opción *a* (S01, S03, S06, S09 y S10) y ninguno eligió la opción *d*.

Tabla V.3.10. Respuestas al enunciado E4.1

E4.1	Opción de respuesta y tipo de error			
	a - III.4	b - II.3	c - ✓	d - III.2
Correcta	5	8	3	0
Incorrecta	5	1	4	6

Nota. E4.1 = Enunciado 4 de la Situación 1. Marcamos con ✓ la opción correcta.

El análisis de las respuestas dadas por los estudiantes muestra que de 7 estudiantes que marcan la opción *c*, menos de la mitad la consideraron incorrecta (S05, S11 y S14) y los demás como correcta (S02, S03, S04 y S15). Hay 5 estudiantes que marcaron como traducción verbal del enunciado dado la opción *a* (S01, S03, S06, S09 y S10) y 8 la opción *b* (S02, S04, S07, S08, S12, S13, S15 y S16). Ningún estudiante marcó la opción *d* como correcta y los que la marcaron como incorrecta justificaron que ese enunciado no era traducción del enunciado dado por ser una particularización (error tipo

III.2) del que les proporcionábamos. Por ejemplo el sujeto S14 dijo que “no es la tercera potencia de tres sino un número elevado a tres”.

Entre las explicaciones escritas que dieron los estudiantes a su elección encontramos que la mayoría confunde conceptos geométricos como área y volumen. Además, llegan a expresar razonamientos como “porque la x representa al área y el elevado a 3 es el cubo” (sujeto S01) que “elevado a tres” es lo mismo que “el triple” (sujetos S02, S04, S07, S08, S12, S13, S15 y S16). Al realizar las entrevistas individuales a los estudiantes y preguntarles por las respuestas que habían dado en relación a este enunciado, recordaron que en clase se ha trabajado el área y el volumen de figuras y establecieron que se habían equivocado en el trabajo escrito pero razonaron oralmente la justificación de la opción correcta. Como ejemplo de cómo se enfrentan los estudiantes a este enunciado, mostramos a continuación una parte de la entrevista al sujeto S12.

- *Profesora: Enunciado cuatro de esta situación uno. Lo mismo, el enunciado simbólico dice, equis elevado a tres, y los enunciados verbales, tú me has marcado la opción b, ¿qué dice?*
- *S12: El triple del lado de un cubo.*
- *Profesora: Léeme tu explicación.*
- *S12: Porque equis es el lado de un cubo, y elevado a tres, el triple, es decir, el triple de un cubo.*
- *Profesora: ¿Qué significa hacer el triple de un número?*
- *S12: Pues yo creo...ahora yo pienso que debería ser tres equis.*
- *Profesora: ¿Eso el triple de un número?*
- *S12: Si.*
- *Profesora: ¿Y hacer el cubo?*
- *S12: Equis elevado a tres.*
- *Profesora: ¿Y es lo mismo?*
- *S12: No.*
- *Profesora: Dime un ejemplo.*
- *S12: Tres por tres, nueve. Tres elevado a tres...dieciocho...no...tres por tres nueve, nueve por tres....veintisiete.*
- *Profesora: Vale. Entonces, no es lo mismo.*
- *S12: Yo creo que sería el a...el área de un cubo...puede ser pero no sé. El triple del lado de un cubo, no. El volumen de un cubo, no creo. La tercera potencia de tres, no. Es que ésta no sabía yo muy bien....*
- *Profesora: En clase estuvimos viendo lo que significaba el área y el volumen. ¿Te acuerdas?*
- *S12: Si...*
- *Profesora: Para calcular el volumen de una figura, se hace el área de la base por la altura.*
- *S12: Ah sí, ya me acuerdo, que pusimos de ejemplo la habitación.*

- *Profesora: Vale. Ésta habitación cómo has dicho. Lado equis, lado equis y altura equis. El área de la base, ¿cuál sería?*
- *S12: Equis elevado a tres.*
- *Profesora: No, área de la base. Del suelo.*
- *S12: Ah, cuatro equis, ¿no?*
- *Profesora: No, el área. Antes me dijiste que cuatro equis era el perímetro, la suma de los lados.*
- *S12: Ah, entonces sería ¿equis elevado a dos?*
- *Profesora: Claro. Lado por lado sería el área del suelo. ¿Y por la altura?*
- *S12: Equis elevado a tres... entonces sería el área de un cubo.*
- *Profesora: No...te estoy diciendo que el volumen era área de la base por la altura.*
- *S12: Ah eso...el volumen de un cubo... si, que me he confundido.*

El sujeto S11, por ejemplo, razonó la opción correcta “porque x sería el lado del cubo y ese 3 es la unidad de medir el volumen así que $x^3 = \text{volumen del cubo}$ ” (respuesta escrita del sujeto S11). Este estudiante no marcó ninguna opción como incorrecta. Al pedirle en la entrevista que justificara por qué no había marcado ninguna opción como incorrecta, indicó que “no sabía cómo explicar las incorrectas”. Pero al pedirle durante la entrevista que eligiera una opción que considerara incorrecta y que la explicase, lo hizo sin dificultad.

b) De sistema de representación verbal a simbolismo algebraico (Situación 2)

En este apartado realizamos un análisis de las respuestas de los estudiantes a los ítems de la Ficha II incluidos en la Situación 2. En estos se les requiere que seleccionen la traducción de enunciados presentados mediante su representación verbal a simbolismo algebraico, entre una serie de enunciados simbólicos dados como opción de respuesta. Como ya se ha indicado, para cada enunciado dado hay cuatro opciones: una correcta y tres incorrectas. Mostramos en la figura V.1.15 el tipo de error en el que incurren los estudiantes en estas traducciones.

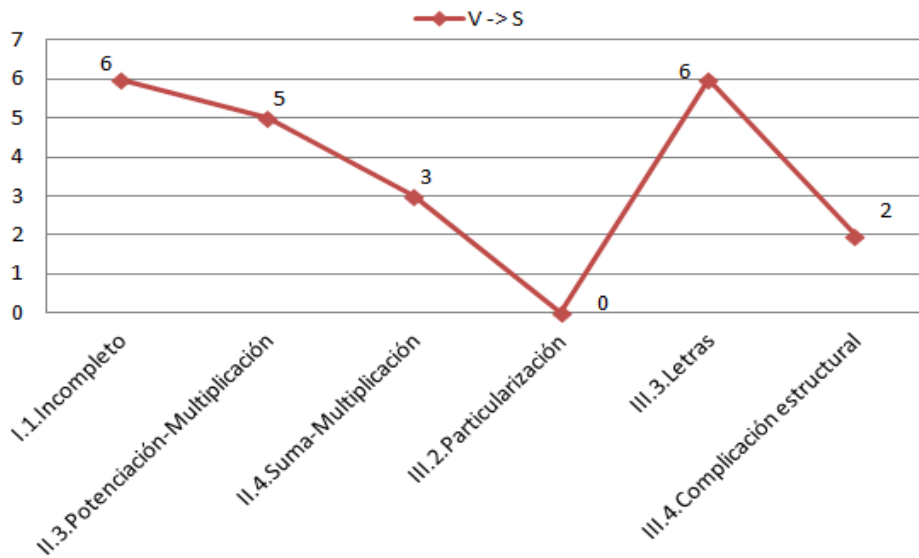


Figura V.3.3. Presencia del tipo de error de $V \rightarrow S$ (Situación 2)

En la figura V.3.3 vemos que los tipos de error que más se manifiestan en este sentido de la traducción son incompleto (I.1, 6/22; 27%), letras (III.3, 6/22, 27%) y potenciación-multiplicación (II.3, 5/22, 23%). Hay presencia nula del error de particularización (III.2), y escasa presencia de los errores de complicación estructural (III.4, 2/22, 9%) y suma-multiplicación (II.4, 3/22, 14%).

A continuación, nos centramos en los enunciados que componen la Situación 2, analizando las opciones de respuesta que dan los estudiantes como correctas o incorrectas y así determinar los errores en los que incurrían.

Enunciados contextualizados propuestos para E1.2

En el enunciado E1.2 proporcionamos a los estudiantes cuatro enunciados en representación simbólica que presentamos en la tabla V.3.11.

Tabla V.3.11. Enunciados contextualizados para E1.2

Enunciado E1.2	Opciones de respuesta
El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros	a) $x + x + (x + 6) + (x + 6) = 92$
	b) $x + (x + 6) = 92$
	c) $2x \cdot 2(x + 6) = 92$
	d) $x + x + y + y = 92$

Nota. Sombreamos la opción que en representación simbólica es la traducción del enunciado dado. E1.2 = Enunciado 1 de la Situación 2.

En la tabla V.3.12 indicamos el número de estudiantes que seleccionaron cada opción como correcta o incorrecta, pudiendo determinar de este modo en qué tipo de error incurren cuando tomaron una opción como correcta.

Tabla V.3.12. Respuestas al enunciado E1.2

E1.2	Opción de respuesta y tipo de error			
	a - ✓	b - I.1	c - II.4	d - III.3
Correcta	7	4	3	2
Incorrecta	2	5	4	5

Nota. E1.2 = Enunciado 1 de la Situación 2. Marcamos con ✓ la opción correcta.

Para este primer enunciado observamos que 7 estudiantes (S07, S09, S10, S11, S12, S14 y S15) seleccionaron de manera adecuada la traducción correcta, opción *a*, 2 la seleccionaron como incorrecta (S05 y S08), y el resto no la seleccionaron ni como correcta ni como incorrecta. De los 16 estudiantes del estudio, 4 (S03, S04, S08 y S16) seleccionaron como opción correcta la respuesta *b*, incurriendo en un error de incompleto (I.1). Los demás incurren en errores de suma-multiplicación (II.4) (S02, S05 y S06) y letras (III.3) (S01 y S13).

Al tener que determinar un enunciado que no fuera traducción del proporcionado, dos estudiantes (S05 y S08) establecieron que el enunciado *a*, que realmente era traducción, era incorrecto, los demás estudiantes determinaron bien las traducciones incorrectas del enunciado dado.

El análisis de errores realizado muestra que la mayor parte de los estudiantes (9/16) no identificaron la opción *a* como traducción correcta del enunciado E1.2. De estos estudiantes, cuatro eligieron la opción *b*, tres la opción *c* y dos la opción *d*.

Tenemos que 7 estudiantes seleccionan como opción del enunciado verbal la opción *a*, y 2 estudiantes (S05 y S08) la seleccionan como incorrecta. El sujeto S05 únicamente explicó por escrito que “porque no dice lo que es” y el sujeto S08 razonó por escrito que “porque el perímetro es un perímetro la suma de todos sus lados y empieza por *x*”, posteriormente en la entrevista reflexionaron sobre su explicación y el significado del enunciado verbal y concluyeron que la expresión que más se ajusta es la del apartado *a*. Muestran que ponen poca atención al realizar las tareas escritas.

Enunciados contextualizados propuestos para E2.2

En la tabla V.3.13 presentamos los cuatros enunciados en representación simbólica que proporcionamos a los estudiantes para el enunciado E2.2.

Tabla V.3.13. Enunciados contextualizados para E2.2

Enunciado E2.2	Opciones de respuesta
El doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés	a) $4 + \frac{x}{4}$ b) $2x + \frac{x}{4}$ c) $2x + \frac{y}{4}$ d) $2x + \frac{4}{y}$

Nota. Sombreamos la opción que en representación simbólica es la traducción del enunciado dado. E2.2 = Enunciado 2 de la Situación 2.

En el análisis del segundo enunciado vemos en la tabla V.3.14 que 11 estudiantes seleccionaron correctamente la opción *c* como traducción del enunciado verbal proporcionado, mientras que 4 (S01, S04, S06 y S14) incurren en un error de letras (III.3) y 1 (S03) en un error de complicación estructural (III.4) al seleccionar como correctas las expresiones *b* y *d* respectivamente. Al realizar la elección de traducciones incorrectas, ningún estudiante eligió la traducción correcta.

Tabla V.3.14. Respuestas al enunciado E2.2

E2.2	Opción de respuesta y tipo de error			
	a - III.2	b - III.3	c - ✓	d - III.4
Correcta	0	4	11	1
Incorrecta	8	4	0	4

Nota. E2.2 = Enunciado 2 de la Situación 2. Marcamos con ✓ la opción correcta.

La mayor parte de los estudiantes (11/16) identificó la opción *c* como traducción del enunciado E2.2 y ninguno de los dieciséis estudiantes la identificó como incorrecta. Un estudiante, S03, identificó como correcta la opción *d* y los cuatro estudiantes restantes (S01, S04, S06 y S14) identificaron como traducción la opción *b*. En la tarea escrita de

estos estudiantes que no identificaron la opción *c* como traducción del enunciado verbal dado, no aclararon su elección, únicamente observamos que incurren en el error tipificado como letras (III.3).

Durante la entrevista a estos estudiantes, aclararon que en el momento de realizar la tarea escrita no se fijaron con atención, tras pensarlo más detenidamente explican que al referirse a edades de personas distintas debían representarse con letras diferentes y, por tanto, el enunciado en representación simbólica que se ajusta era el dado en el apartado *c*.

Enunciados contextualizados propuestos para E3.2

En el enunciado E3.2 proporcionamos a los estudiantes cuatros enunciados en representación simbólica que presentamos en la tabla V.3.15.

Tabla V.3.15. Enunciados contextualizados para E3.2

Enunciado E3.2	Opciones de respuesta
El número de ruedas de dos coches es ocho	a) $x^2 = 8$ b) $2x = 8y$ c) $x = 8$ d) $2x = 8$

Nota. Sombreamos la opción que en representación simbólica es la traducción del enunciado dado. E3.2 = Enunciado 3 de la Situación 2.

En la tabla V.3.16 tenemos las respuestas para el tercer enunciado dado, donde observamos que 12 estudiantes seleccionaron correctamente la opción correcta *d*; 3 (S02, S08 y S14) incurren en error de potenciación-multiplicación (II.3) y uno (S05) de incompleto (I.1). Al elegir un enunciado traducción incorrecta del dado, ningún estudiante eligió el enunciado *d* como incorrecto.

Tabla V.3.16. Respuestas al enunciado E3.2

E3.2	Opción de respuesta y tipo de error			
	a - II.3	b - III.3	c - I.1	d - ✓
Correcta	3	0	1	12
Incorrecta	2	5	10	0

Nota. E3.2 = Enunciado 3 de la Situación 2. Marcamos con ✓ la opción correcta.

El análisis de las respuestas muestra que la mayor parte de los estudiantes (12/16) identificó como traducción del enunciado E3.2 la opción *d*. Un estudiante (S05) señaló como traducción la opción *c* y tres estudiantes (S02, S08 y S14) señalaron la opción *a*. A continuación mostramos el fragmento de la entrevista al sujeto S05.

- *Profesora: Vale. Vamos al enunciado tres de la situación dos. El enunciado dice “el número de ruedas de dos coches es ocho”. ¿Quién sería la incógnita?*
- *S05: El número de ruedas.*
- *Profesora: Has elegido como opción correcta la c, que dice equis igual a ocho. Si tenemos dos coches y dices que equis es el número de ruedas, ¿por qué es esta opción?*
- *S05: No, espera...no es, porque si tenemos dos coches...no, esta no es...*
- *Profesora: Entonces, ¿la c la descartas?*
- *S05: Si...um...*
- *Profesora: ¿Cuántas letras tenemos?*
- *S05: El número de ruedas, dos coches y ocho. Tenemos tres.*
- *Profesora: ¿Tres letras? No datos, ¿cuántas incógnitas tenemos?*
- *S05: Ah, una, el número de ruedas. Entonces no es la b.*
- *Profesora: ¿Cuál es entonces?*
- *S05: Pues lo mismo es la d, equis es el número de ruedas y tenemos dos coches.*

En este extracto de entrevista vemos el razonamiento del estudiante sobre el enunciado E3.2. Determina que su primera elección como traducción del enunciado dado no era correcta. En principio no identifica correctamente el número de letras que son necesarias para traducir simbólicamente el enunciado dado pero, posteriormente, guiado por las cuestiones de la investigadora sugiere como enunciado correcto el dado en el apartado *d*.

Enunciados contextualizados propuestos para E4.2

En la tabla V.3.17 presentamos los cuatro enunciados que proporcionamos a los estudiantes para el enunciado E4.2 en representación simbólica.

Tabla V.3.17. Enunciados contextualizados para E4.2

Enunciado E4.2	Opciones de respuesta
El área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina	a) x^2 b) $x^2 \cdot y$ c) $2x \cdot y$ d) $2x^2 \cdot y$

Nota. Sombreamos la opción que en representación simbólica es la traducción del

Enunciado E4.2	Opciones de respuesta
enunciado dado. E4.2 = Enunciado 4 de la Situación 2.	

Para el cuarto y último enunciado propuesto en esta Situación 2 presentamos en la tabla V.3.18 las respuestas dadas por los alumnos.

Tabla V.3.18. Respuestas al enunciado E4.2

E4.2	Opción de respuesta y tipo de error			
	a - I.1	b - ✓	c - II.3	d - III.4
Correcta	1	12	2	1
Incorrecta	13	0	1	2

Nota. E4.2 = Enunciado 4 de la Situación 2. Marcamos con ✓ la opción correcta.

Observamos que 12 estudiantes consideraron correcta la opción *b* mientras que 2 de ellos (S06 y S07) consideraron que la opción correcta es la *c*, incurriendo en un error de potenciación-multiplicación (II.3). Los 2 estudiantes restantes (S16 y S14) consideraron como correctas las opciones *a* y *d*, incurriendo, por tanto, en errores de incompleto (I.1) y complicación estructural (III.4), respectivamente.

Al realizar el análisis de errores vemos que la mayor parte de los estudiantes (12/16) identificaron adecuadamente como traducción del enunciado E4.2 la opción *b*. El estudiante S14 señaló la opción *d* indicando que “es dos veces el lado por dos y después por la profundidad”. El sujeto S16, a pesar de marcar como opción correcta el apartado *a*, dio un razonamiento por escrito que se ajustaba al enunciado *b*: “porque dice que el área del suelo de una piscina cuadrada que sería x^2 , por la profundidad de la piscina que sería la *y*. O sea, que coinciden el enunciado verbal con el enunciado simbólico.”

Los dos estudiantes restantes entrevistados (S06 y S07) eligieron la opción *c* como mejor expresión simbólica del enunciado verbal dado. Ambos, en su explicación por escrito, mostraron que confundieron multiplicar “lado por lado” con $2x$. En las entrevistas individuales, aclararon con ayuda de la profesora investigadora cómo se calcula el área de una figura cuadrada y reconocieron qué enunciado se ajustaba mejor al dado.

V.3.3. COMPARACIÓN DE ERRORES EN AMBOS SENTIDOS DE TRADUCCIÓN EN LA ELECCIÓN DE TRADUCCIONES DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS

En el apartado IV.5.3 de esta memoria hemos explicado la construcción de los enunciados que constituyen la Ficha II y el tipo de error a la que corresponde cada opción de respuesta. Dicha explicación justifica que no todos los tipos de error podían tener cabida en las respuestas de los estudiantes a la Ficha II.

Teniendo en cuenta esta consideración, en la tabla V.3.20 mostramos la frecuencia del tipo de error al que corresponde cada opción de respuesta de la Ficha II y el número de respuestas relacionada con cada una de las selecciones.

Tabla V.3.20. Frecuencia del tipo de error por enunciado en la 1ª parte de la Ficha II

Enunciado	Tipos de error								
	✓	I.1	I.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
E1.1	6		0			9			1
E2.1	9	1	2					4	
E3.1	4	0				1			11
E4.1	3			8			0		5
E1.2	7	4			3			2	
E2.2	11						0	4	1
E3.2	12	1		3				0	
E4.2	12	1		2					1
Total	64	7	2	13	3	10	0	10	19

Nota. Ei,j = Enunciado i de la Situación j; Marcamos con ✓ las respuestas correctas; Sombreamos aquellos tipos de errores que no están presentes en las opciones de respuesta de cada enunciado.

Observamos que de los 8 tipos de error considerados en la Ficha II, los de complicación estructural (III.4, 19/64, 30%) y potenciación-multiplicación (II.3, 13/64, 20%) son los que se presentan con más frecuencia en las respuestas de los estudiantes. Hay presencia nula del error de particularización (III.2, 0/64, 0%) en esta Ficha II y una escasa manifestación de los errores de desmedido (I.2, 2/64, 3%) y suma-multiplicación (II.4, 3/64, 5%).

V.4. ANÁLISIS DE LA LECTURA DE LAS ENUNCIADOS ALGEBRAICOS

Además del análisis de errores presentado previamente, en este estudio realizamos también un análisis atendiendo a cómo los estudiantes realizaron una lectura, lineal o relacional, de las representaciones consideradas (simbólica o verbal) del enunciado dado en dos momentos de la recogida de datos: (1) el torneo, donde aparecen enunciados algebraicos expresados mediante simbolismo algebraico y enunciados verbales no contextualizados en las piezas de dominó y (2) la segunda parte de la Ficha II, donde los estudiantes dieron una explicación escrita de la elección que habían realizado al elegir un enunciado que fuera la traducción que mejor se ajustaba al enunciado dado y uno que no lo fuera.

V.4.1. LECTURA DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS (TORNEO)

En este apartado realizamos un análisis del modo en que relacionaron los estudiantes las representaciones verbal y simbólica equivalentes de los enunciados algebraicos que aparecían en el torneo.

En general observamos que la mayoría de estos estudiantes asociaron la expresión simbólica con la forma verbal cuando la profesora investigadora les hacía alguna pregunta durante la lectura de las piezas. Resumimos en la tabla V.4.1 el modo en que realizaron la lectura los estudiantes durante el torneo.

Tabla V.4.1. Lectura lineal o relacional de enunciados durante el torneo

	Sujetos	Tipo de lectura	
		Lineal	Relacional
Grupo 1	S01, S05, S07	×	
	S12	×	×
Grupo 2	S02, S14	×	
	S06, S09	×	×
Grupo 3	S03, S15	×	
	S10, S11	×	×
Grupo 4	S04, S08, S16	×	
Final	S09, S10, S12, S16	×	×

Nota. Marcamos con × el tipo de lectura que realizan.

Como vemos en la tabla V.4.1, durante el desarrollo de las primeras partidas, cinco estudiantes realizaron la lectura de ambas formas, esto es, tanto lineal como de manera relacional. De estos cinco estudiantes, cuatro participaron en la partida final, realizando igualmente una lectura de ambas formas. El resto de estudiantes no relacionó las dos representaciones de los enunciados, al realizar una lectura de las piezas que aparecían en juego durante el torneo, siendo todas sus lecturas de tipo lineal. A continuación damos ejemplos de estas lecturas atendiendo por separado a cada grupo de alumnos.

Durante la partida que juega el grupo 1 (S01, S05, S07 y S12), los cuatro estudiantes realizaron una lectura lineal de los enunciados no contextualizados que forman las piezas del dominó. Por ejemplo, en el enunciado E4 el sujeto S01 expresó “un número por su cuadrado es igual a su cubo, [...] equis por equis elevado a dos es igual a equis al cubo” y en el enunciado E8 el sujeto S05 indicó “pues un número par menos la cuarta parte de otro número, dos equis menos y partido cuatro”. El sujeto S12 en una ocasión realizó una lectura relacional: “un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos [...] un número más su consecutivo que es equis más uno, que es igual a otro número y menos dos” (lectura del enunciado E3 del sujeto S12 durante la partida).

En la partida del grupo 2 (S02, S06, S09 y S14), los estudiantes también realizaron una lectura lineal de las dos representaciones del enunciado, siendo escasas las lecturas relacionales. Solo en una ocasión el sujeto S06 al final de la partida realizó una lectura relacional: “el cuadrado de la suma de dos números consecutivos, pues dos números consecutivos equis más equis más uno, y el cuadrado dos que está encima” (lectura del enunciado E7). El sujeto S09 sí realizó las lecturas relacionando ambas representaciones, como vemos en los siguientes ejemplos: “un número que es equis, más su siguiente, más su consecutivo, que es equis más uno, es igual a otro número, que es y, menos dos” (lectura del enunciado E3); “el producto de la mitad de un número, que es equis por la mitad, por el triple de otro número, que es tres y” (lectura del enunciado E1); “el cubo del producto de dos números [...] la multiplicación de dos números, que es equis por y, y el cubo que es elevado a tres” (lectura del enunciado E6); “el cuadrado de un número, que es equis elevado a dos, menos el cuadrado de otro número, que es y elevado a dos, es igual a once” (lectura del enunciado E10).

En el grupo 3 (S03, S10, S11 y S15) hay más variedad de formas de leer los enunciados, pues los sujetos utilizaron la lectura lineal o relacional con todos los

enunciados. El sujeto S03 hizo lecturas lineales, por ejemplo en “la suma de dos números consecutivos menos cuatro, pues equis más equis más uno menos cuatro” (lectura del enunciado E12). El sujeto S10 realizó lectura lineal en “un número par menos la cuarta parte de otro número [...] un número par, dos equis, menos la cuarta parte de otro, menos equis partido cuatro” (lectura del enunciado E8) y relacional en “producto de la mitad de un número por el triple de otro número; el producto es multiplicar y el doble de un número, equis partido dos es el doble, por el triple de otro número, que es tres por equis” (lectura del enunciado E1). El sujeto S11 realizó lectura lineal en “el cuadrado de la suma de dos números consecutivos; el número más su consecutivo elevado al cuadrado” (lectura del enunciado E7), y lectura relacional en “un número par menos la cuarta parte de otro número; dos equis sería el número par menos la cuarta parte de un número sería y, no, sería la cuarta parte de y” (lectura del enunciado E8). El sujeto S15 hizo lectura lineal en “la raíz cuadrada de un número elevada a otro número [...] la raíz cuadrada de equis elevada a y” (lectura del enunciado E9).

Todos los miembros del grupo 4 que participaron en el torneo (S04, S08 y S16) realizaron lectura lineal de las dos representaciones de los enunciados de las piezas de dominó, en ningún momento relacionaron ambas expresiones. A continuación recogemos algunos ejemplos:

- sujeto S04: “la raíz cuadrada de un número elevada a otro número [...] la raíz cuadrada de equis elevada a y” (lectura del enunciado E9),
- sujeto S08: “un número par menos la cuarta parte de otro número, dos equis menos y partido cuatro” (lectura del enunciado E8),
- sujeto S16: “el cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once; un número elevado al cuadrado menos otro número elevado al cuadrado, igual a once” (lectura del enunciado E10).

En las partidas finales, los sujetos S09, S10, S12 y S16 actuaron de las siguientes formas. Los sujetos S12 y S16 realizaron las lecturas de las dos representaciones de los enunciados de manera lineal, por ejemplo en “el producto de la mitad de un número por el triple de otro número; equis partido dos por tres y” (lectura del enunciado E1 del sujeto S12) o “la suma de dos números consecutivos menos cuatro; equis más equis más

uno menos cuatro” (lectura del enunciado E12 del sujeto S16) o “El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once; la equis elevada a dos, menos la y elevada a dos elevada a once” (lectura del enunciado E10 del sujeto S16). El sujeto S09 hizo las lecturas relacionando ambas representaciones. Por ejemplo en “el cuadrado de la suma de dos números consecutivos, pues tengo dos consecutivos que es equis más equis más uno, elevados al cuadrado” (lectura del enunciado E7) o en “el cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once; el cuadrado de un número es equis elevado a dos, menos el cuadrado de otro número es i elevado a dos, es igual a once” (lectura del enunciado E10). El sujeto S10 realizó, en esta parte únicamente, lecturas relacionando las dos representaciones de los enunciados de las piezas de dominó, por ejemplo en “la suma de dos números consecutivos menos cuatro; dos números consecutivos, pues equis y equis más uno, menos cuatro” (lectura del enunciado E12) y en “la raíz cuadrada de un número elevada a otro número; la raíz cuadrada de un número que es un número representado por una letra, elevado a otro número que está representado por otra letra diferente a la anterior letra” (lectura del enunciado E7).

V.4.2. LECTURA EN LA EXPLICACIÓN DE LA ELECCIÓN DE TRADUCCIONES DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS (FICHA II)

Analizamos aquí las explicaciones que dieron por escrito los estudiantes a las elecciones realizadas de las traducciones de los enunciados que componen la Ficha II. Recordamos que les pedimos que además de elegir una opción que consideran que era traducción correcta y otra que no lo fuera, dieran una explicación escrita de sus elecciones. Mostramos en la tabla V.4.2 los enunciados dados para la elección de traducciones (Ficha II).

Tabla V.4.2. Enunciados para la elección de traducciones (Ficha II)

Enunciado	Situación 1	Enunciado	Situación 2
E1.1	$5 + x + y$	E1.1	El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros
E2.1	$x + 60 = 5x$	E2.1	El doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés

Enunciado	Situación 1	Enunciado	Situación 2
E3.1	$x^2 - y^2 = 9$	E3.1	El número de ruedas de dos coches es ocho
E4.1	x^3	E4.1	El área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina

Al analizar las justificaciones que dieron los estudiantes ante la elección que hicieron de las traducciones de los enunciados, vemos que no todos los estudiantes relacionaron las representaciones consideradas para el enunciado dado. Algunos justificaron su elección indicando la representación simbólica y la representación verbal del enunciado que le dábamos. El resto o no dio justificación de su elección o la basaba en argumentaciones diferentes que no implicaban relacionar ambas representaciones del mismo enunciado dando así justificaciones incompletas (e.g., el sujeto S02 determina para su elección del enunciado E1.1 que “porque en el enunciado simbólico indica que todas las incógnitas y número se suman”).

a) Enunciados en simbolismo algebraico (Situación 1)

Hemos analizado, para cada uno de los enunciados considerados en la Situación 1, las respuestas de aquellos estudiantes que justificaron sus elecciones relacionando ambas representaciones, sin considerar si la elección es correcta o no.

Para el enunciado E1.1, 10 del total de 16 estudiantes (63%) (S01, S07, S08, S09, S10, S11, S12, S13, S14 y S16) dieron una justificación relacionando término a término las dos representaciones del enunciado, esto es, la simbólica que le dábamos y la verbal que ellos habían seleccionado. Por ejemplo, el sujeto S09 justificó su elección diciendo “porque un número impar se refiere al cinco y una edad (x) más otra edad (y)”. Otro caso es el del sujeto S11 quien determinó su elección diciendo “porque cinco es un número cualquiera, x es una incógnita que sería mi edad, e y es otra diferente que es la de mi hermana”²⁰.

Análogamente, para el enunciado E2.1 los estudiantes dieron una justificación relacionando término a término las dos representaciones del enunciado, lo hicieron 5 del total de 16 (31%) (S07, S09, S10, S11 y 16). Por ejemplo, el sujeto S10 explicó “porque al sumar a un número 60 ($x+60$) se obtiene el mismo resultado ($=$) que al

²⁰ Las demás justificaciones dadas por los estudiantes para el enunciado E1.1 pueden consultarse en la tabla D.1 del apartado D.17 del Anexo D.

multiplicarlo por cinco ($5x$)”, o el sujeto S07 quien dice que “porque un número que sería x más sesenta es igual a el mismo por cinco que sería $5x$ ”²¹.

Para el enunciado E3.1, 7 de los 16 estudiantes (44%) (S01, S08, S09, S10, S11, S12 y S16) dieron una justificación relacionando término a término las dos representaciones del enunciado. Por ejemplo, el sujeto S01 explicó su elección diciendo “porque la diferencia sería la $x^2 - y^2$ y la solución de esa diferencia el 9”, y el sujeto S16 expresó que “porque dice el perímetro del suelo de mi habitación cuadrada que sería el $x^2 - y^2 = 9$, menos el suelo de tu habitación cuadrada que sería el $x^2 - y^2 = 9$, es igual a nueve: $x^2 - y^2 = 9$, por eso está bien porque da el mismo enunciado simbólico”²².

Para el último enunciado de la Situación 1, enunciado E4.1, algunos estudiantes, 7 de 16 (44%) (S01, S08, S09, S10, S11, S12 y S16) dieron una justificación relacionando término a término las dos representaciones del enunciado. Por ejemplo, el sujeto S08 justificó su elección diciendo “porque un lado que sería x y su triple es x^3 ” y el sujeto S12 determinó que “porque x es el lado de un cubo y elevado a 3 es el triple, es decir el cubo de un número”²³.

b) Enunciados en sistema de representación verbal (Situación 2)

Análogamente a lo hecho con la Situación 1, presentamos a continuación, para cada uno de los enunciados considerados en la Situación 2, las respuestas de aquellos estudiantes que justificaron sus elecciones relacionando ambas representaciones. Como anteriormente, no tenemos en cuenta si la elección considerada era correcta o no, solo analizamos su justificación. Obviamos respuestas que no aportan información, como la dada por el sujeto S06 en el enunciado E1.2: “porque el enunciado indica exactamente lo mismo que la ecuación”; o en el enunciado E2.2: “está todo perfecto”.

Para el enunciado E1.2, los estudiantes dieron una justificación relacionando término a término las dos representaciones del enunciado, esto es, la simbólica que le dábamos y

²¹ Las demás justificaciones dadas por los estudiantes para el enunciado E2.1 pueden consultarse en la tabla D.2 del apartado D.17 del Anexo D.

²² Las demás justificaciones dadas por los estudiantes para el enunciado E3.1 pueden consultarse en la tabla D.3 del del apartado D.17 Anexo D.

²³ Las demás justificaciones dadas por los estudiantes para el enunciado E4.1 pueden consultarse en la tabla D.4 del del apartado D.17 Anexo D.

la verbal que ellos habían seleccionado. Lo hicieron estos 7 del total de 16 (44%) (S07, S08, S09, S10, S11, S15 y S16). Por ejemplo, el sujeto S11 dio como justificación a su elección que “ $x + x$ serían los dos lados anchos y $(x + 6) + (x + 6)$ son los largos porque x que es el ancho más seis es el largo y esto da como resultado 92 que es el perímetro”; y el sujeto S15 explicó su elección razonando “porque su ancho es x y su largo es su ancho más seis y como un rectángulo tiene cuatro lados se suman”²⁴.

Para el enunciado E2.2 los estudiantes dieron una justificación relacionando término a término las dos representaciones del enunciado, esto es, la simbólica que le dábamos y la verbal que ellos habían seleccionado, aunque igualmente no lo hacen todos los estudiantes, lo hicieron 7 del total de 16 (44%) (S07, S08, S09, S10, S11, S12 y S16). Por ejemplo, el sujeto S12 estableció que su elección se debía a “porque $2x$ es el doble de los años de Jesús y $\frac{y}{4}$ un cuarto de los años que tiene Inés”; y el sujeto S16 “porque dice que el doble que tiene Jesús que sería: $2x$; más un cuarto de los años que tiene Inés que sería: $\frac{y}{4}$, y = la edad de Inés”²⁵.

Análogamente, para el enunciado E3.2 los estudiantes dieron una justificación relacionando término a término las dos representaciones del enunciado. Lo hicieron 9 sujetos del total de 16 (56%) (S06, S07, S08, S09, S10, S11, S12, S13 y S16). Por ejemplo, el sujeto S06 justificó su elección en que “ $2x$ = al número de ruedas de los dos coches y 8 son los coches”; y el sujeto S13 en que “porque $2x$ son dos coches y son igual a ocho ruedas”²⁶.

Para el último enunciado de la Situación 2, enunciado E4.2, igualmente algunos estudiantes, 9 de 16 (56%) (S04, S06, S08, S09, S10, S11, S12, S15 y S16), dieron una justificación relacionando término a término las dos representaciones del enunciado. Por ejemplo, el sujeto S04 expresó su justificación diciendo que “porque un número que es

²⁴ Las demás justificaciones dadas por los estudiantes para el enunciado E1.2 pueden consultarse en la tabla D.5 del del apartado D.17 Anexo D.

²⁵ Las demás justificaciones dadas por los estudiantes para el enunciado E2.2 pueden consultarse en la tabla D.6 del del apartado D.17 Anexo D.

²⁶ Las demás justificaciones dadas por los estudiantes para el enunciado E3.2 pueden consultarse en la tabla D.7 del del apartado D.17 Anexo D.

el lado de la piscina elevado a su cuadrado por su profundidad que es el otro número”; y el sujeto S15 “porque es el área x^2 por la profundidad y ”²⁷.

V.5. SÍNTESIS DE RESULTADOS

En este último apartado realizamos una síntesis de los análisis realizados en los apartados previos. Comparamos, los resultados de las tareas propuestas, de dos en dos y conjuntamente. Por último, realizamos un análisis general del desempeño de los estudiantes en la realización de estas tareas. En la figura V.5.1 exponemos un esquema del análisis presentado en este apartado. Observamos las tres acciones que realizan los estudiantes en la traducción de enunciados algebraicos: construcción de enunciados no contextualizados, de enunciados contextualizados y elección de traducciones. Tratamos de conocer la persistencia de errores en el desempeño de los estudiantes en diferentes actuaciones o tareas.

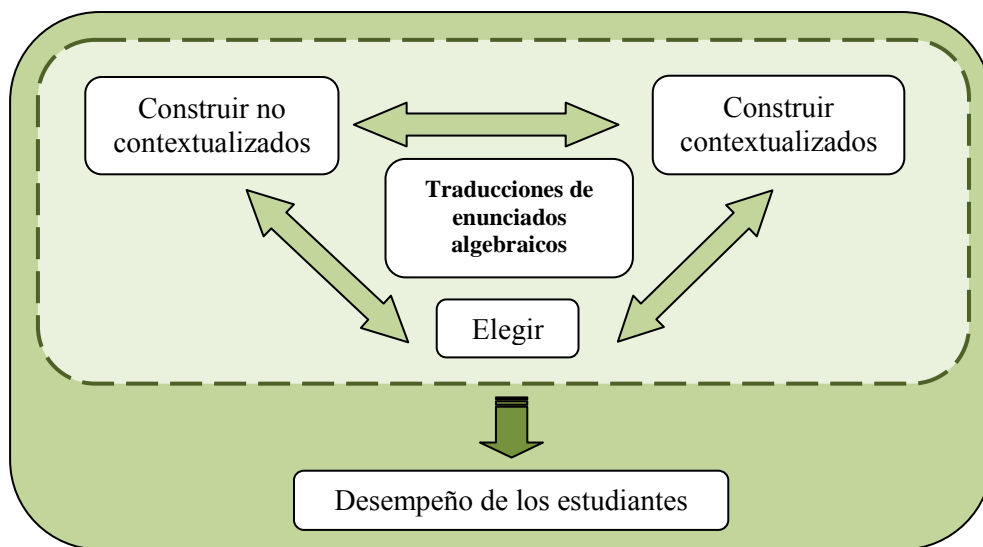


Figura V.5.1. Esquema de la síntesis de resultados

En primer lugar, presentamos en la tabla V.5.1 un resumen del número total de errores en los que incurren los estudiantes en cada una de estas tareas, y cada uno de los sentidos de traducción trabajados.

²⁷ Las demás justificaciones dadas por los estudiantes para el enunciado E4.2 pueden consultarse en la tabla D.8 del del apartado D.17 Anexo D.

Tabla V.5.1. Errores según la tarea realizada y el sentido de traducción

Sentido de traducción	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
$V \rightarrow S$	94 (60%)	-	22 (34%)
$S \rightarrow V$	62 (40%)	32 (100%)	42 (66%)
Total	156 (100%)	32 (100%)	64 (100%)

Nota. $S \rightarrow V$ = de simbolismo algebraico a representación verbal; $V \rightarrow S$ = de representación verbal a simbolismo algebraico.

Como podemos ver en la tabla V.5.1, cuando se trata de realizar la traducción de enunciados algebraicos expresados en el sistema de representación verbal, los estudiantes incurren en más errores si tienen que construir enunciados no contextualizados que si tienen que elegir la traducción de entre una serie de opciones dadas.

En cambio, en el otro sentido de la traducción analizado, de simbolismo algebraico a sistema de representación verbal, el número de errores en los que incurren los estudiantes es similar en ambas tareas.

A continuación desglosamos los datos teniendo en cuenta las tres grandes categorías de errores que hemos considerado en esta investigación (tabla V.5.2).

Tabla V.5.2. Errores según la tarea realizada y el tipo de error

Tipo de error	Construir no contextualizados	Construir contextualizados	Elegir
$S \rightarrow V$			
I	33 (53%)	22 (69%)	3 (7%)
II	5 (8%)	1 (3%)	8 (19%)
III	24 (39%)	9 (28%)	31 (74%)
Total	62 (100%)	32 (100%)	42 (100%)
$V \rightarrow S$			
I	37 (39%)		6 (27%)
II	9 (10%)		8 (36.5%)
III	48 (51%)		8 (36.5%)
Total	94 (100%)		22 (100%)

Nota. $S \rightarrow V$ = de simbolismo algebraico a representación verbal; $V \rightarrow S$ = de representación verbal a simbolismo algebraico; I, II y III son las tres grandes categorías de errores consideradas en este estudio.

Cuando la tarea consiste en construir la traducción en representación verbal de unos enunciados dados mediante simbolismo algebraico, los estudiantes incurren en más errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III)

tanto si tienen que escribir la traducción como si han de elegir entre unas opciones dadas. Sin embargo, si lo que tienen que hacer es construirla oralmente (contextualizada), incurren en más errores debidos a la completitud del enunciado (categoría I).

En la tabla V.5.2 podemos observar cómo al construir traducciones de enunciados no contextualizados, de representación simbólica a lenguaje verbal, los estudiantes incurren en más errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III) y según la completitud del enunciado (categoría I). Sin embargo, cuando tienen que elegir entre unas traducciones dadas, los errores se manifiestan en igual medida derivados de la aritmética (categoría II) y derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III).

Vemos a continuación la comparación de estas tareas de dos en dos en los tres apartados siguientes.

V.5.1. COMPARACIÓN DE ERRORES ENTRE LA CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS NO CONTEXTUALIZADOS Y CONTEXTUALIZADOS (FICHA I Y TORNEO)

Elaboramos en este apartado un análisis comparativo de los errores en los enunciados E2, E3, E8 y E12 cuando los estudiantes los construyen de manera no contextualizada (Ficha I) y cuando lo hacen de forma contextualizada durante el torneo.

En general, al construir traducciones de enunciados, tanto no contextualizados como contextualizados, para estos enunciados algebraicos (E2, E3, E8 y E12) los errores derivados de la aritmética (categoría II) son los que se presentan en menor medida: 6% para enunciados no contextualizados y 3% para enunciados contextualizados (ver Figura V.5.2).

La mayor diferencia la encontramos en los errores debidos a la completitud del enunciado (categoría I) y derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III). En la construcción de enunciados no contextualizados estos últimos son los que más se presentan (59%) mientras que en la construcción de enunciados contextualizados, los estudiantes incurren en más errores según la completitud del enunciado (categoría I, 66%).

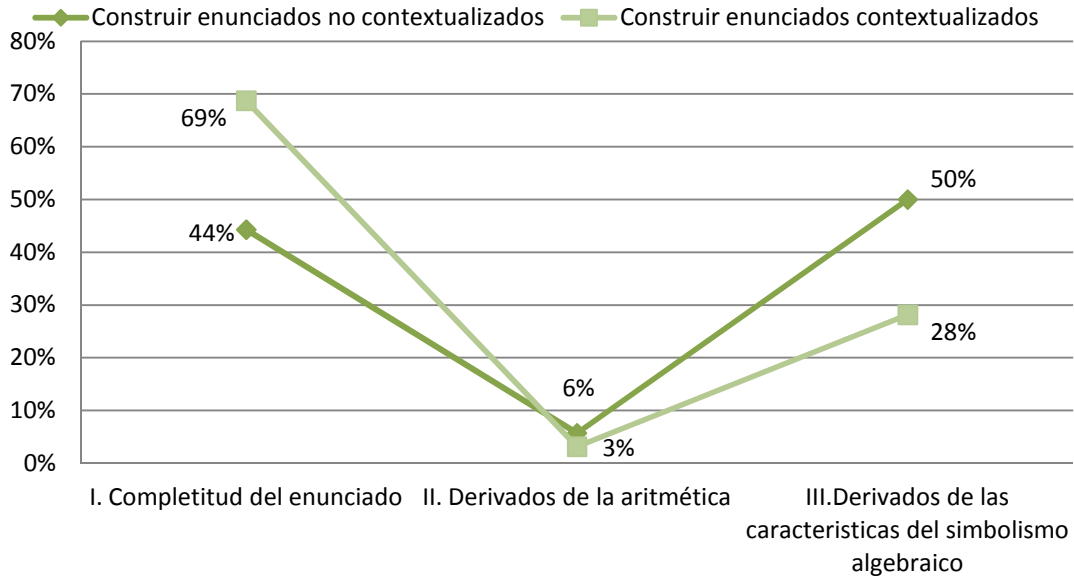


Figura V.5.2. Frecuencia de tipo de error en la construcción de enunciados contextualizados y no contextualizados

Para el caso de los cuatro enunciados empleados en la Ficha I y en el torneo, presentamos en la tabla V.5.3 la comparación de la presencia de errores al construir enunciados no contextualizados presentados en diferentes sistemas de representación y en la construcción de traducciones de enunciados contextualizados durante el torneo.

Tabla V.5.3. Errores en la construcción de traducciones

Tipo de error	Enunciado							
	E2		E3		E8		E12	
	NC	C	NC	C	NC	C	NC	C
I.1. Incompleto	8		8	4	7		1	7
I.2. Desmedido		3	1	2	3		3	6
II.2. División-Multiplicación						1		
II.3. Potenciación-multiplicación		1						
II.4. Suma-Multiplicación	1		1					
II.5. División-Potencia					1			
III.1. Generalización	3						1	
III.2. Particularización	1				7			
III.3. Letras	2	2	11	3	3	1	1	3
III.4. Complicación estructural	1		1		4		1	
Total	16	6	21	9	26	1	7	16

Nota. NC = enunciados no contextualizados de la construcción de traducciones (Ficha I); C = enunciados contextualizados de las piezas marcadas del torneo.

Para el enunciado E2, en el caso de la construcción de enunciados contextualizados se manifiestan tipos de error que no aparecen en la construcción de enunciados no contextualizados, desmedido (I.2) y potenciación-multiplicación (II.3). Mientras que en el caso de la construcción de enunciados no contextualizados, se manifiestan en mayor medida errores de incompleto (I.1) y complicación estructural (III.4) que al construir enunciados contextualizados. En ambos casos y con semejante frecuencia se presenta el error de letras (III.3), salvo para el enunciado E3.

Al construir enunciados contextualizados para el E3 los tipos de errores en los que más incurren los estudiantes coinciden con los obtenidos en la construcción de no contextualizados, esto es, errores de incompleto (I.1) y de letras (III.3). Coincidiendo también la escasa presencia de errores de desmedido (I.2). En la construcción de expresiones no contextualizadas los estudiantes, aunque en menor medida, manifestaron además errores de suma-multiplicación (II.4) ausentes en la construcción de enunciados contextualizados.

Para el enunciado E8 únicamente se pone de manifiesto un tipo de error al construir enunciados contextualizados, el de letras (III.3) mientras que en el caso de los enunciados no contextualizados se identifican todos los tipos de error salvo los errores de paréntesis (II.1) y suma-multiplicación (II.4).

Para el enunciado E12 en la construcción de traducciones no contextualizadas el tipo de error en el que más incurren los estudiante, desmedido (I.2), es también de los que más encontramos en la construcción de enunciados contextualizados, siendo en este caso el que más se presenta el de incompleto (I.1). En ambas tareas, los estudiantes incurren en errores de letras (III.3). Los tipos de error de generalización (III.1) y complicación estructural (III.4) se manifiestan en el caso de los enunciados no contextualizados y en los contextualizados no se presentan.

Finalmente, en la figura V.5.3 mostramos gráficamente la comparación de la presencia de errores al construir enunciados no contextualizados presentados en diferentes sistemas de representación y en la construcción de traducciones de enunciados contextualizados durante el torneo.

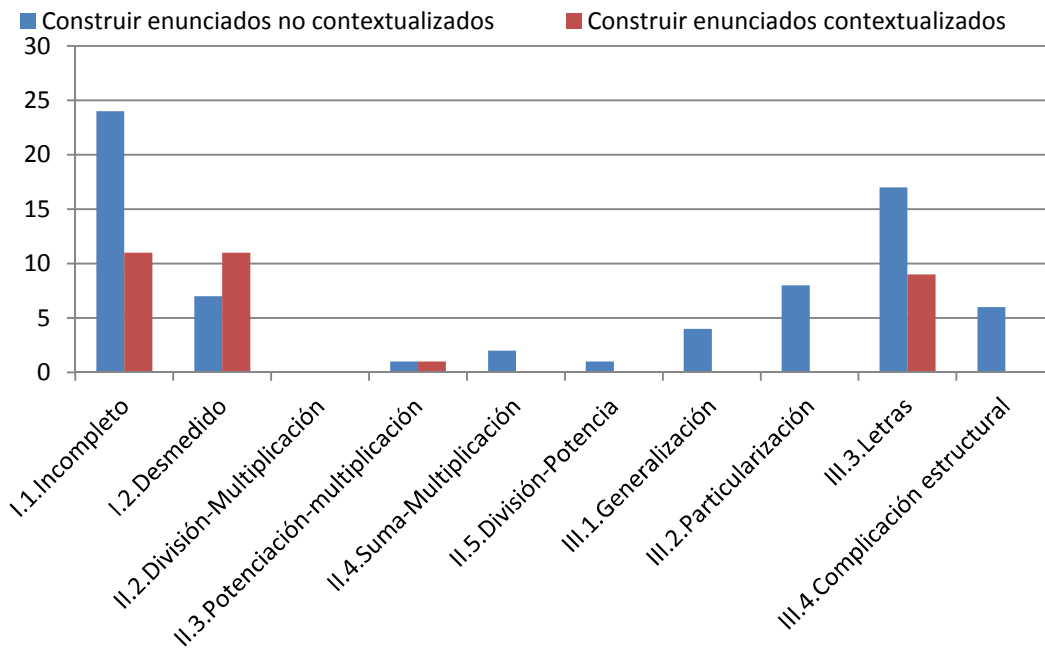


Figura V.5.3. Errores en la construcción de traducciones

Al observar la gráfica, vemos que hay una leve semejanza de comportamiento en cuanto a la incurrencia entre enunciados contextualizados y no contextualizados en los errores de incompleto (I.1), desmedido (I.2), potenciación-multiplicación (II.3) y letras (III.3). Los demás tipos de errores se presentan en los enunciados no contextualizados.

V.5.2. COMPARACIÓN DE ERRORES ENTRE LA CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS NO CONTEXTUALIZADOS Y LA ELECCIÓN DE ENUNCIADOS (FICHAS I Y II)

En este apartado realizamos un análisis comparativo de los errores en los que incurren los estudiantes en las tareas de construir y elegir enunciados algebraicos, atendiendo a los dos sentidos de traducción trabajados. Teniendo siempre en cuenta, como hemos dicho a lo largo de esta memoria y como hemos visto en la tabla IV.16, que no todos los errores están presentes en ambas fichas.

En la tabla V.5.4 vemos, de manera general, la manifestación de los errores en ambas tareas.

Tabla V.5.4. Comparación de errores en la construcción y elección de enunciados

Traducción	Nº Errores	
	Construcción no contextualizados	Elección
$V \rightarrow S$	94 (60%)	22 (34%)
$S \rightarrow V$	62 (40%)	42 (66%)
Total	156 (100%)	64 (100%)

Nota. $S \rightarrow V$ = de simbolismo algebraico a representación verbal; $V \rightarrow S$ = de representación verbal a simbolismo algebraico.

De manera general, en la construcción de enunciados algebraicos no contextualizados, los estudiantes incurren en más errores al traducir enunciados dados en representación verbal; suponen las dos terceras partes de los errores en los que incurren los sujetos. Sin embargo, cuando presentamos los enunciados para elegir una opción en simbolismo algebraico, se manifiestan más errores en sentido contrario, representando también las dos terceras partes de los errores en los que incurren los estudiantes.

Realizamos, a continuación, una comparación más detallada de resultados según los distintos sentidos de traducción, en la realización de la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados, la posibilidad de la aparición de errores está abierta a todos los tipos, pero al realizar la elección de traducción de enunciados hemos limitado los tipos de errores (como hemos explicado en el apartado IV.5.3 y a lo largo de esta memoria de trabajo). Por ello hacemos la comparación de errores de ambas fichas, centrándonos en los tipos de errores que se encuentran presentes en las dos fichas de trabajo.

a) De simbolismo algebraico a sistema de representación verbal

En la figura V.5.4 mostramos la comparación de la manifestación de los tipos de error en la realización de las tareas de construir enunciados algebraicos presentados en diferentes sistemas de representación y de elegir traducciones de enunciados algebraicos.

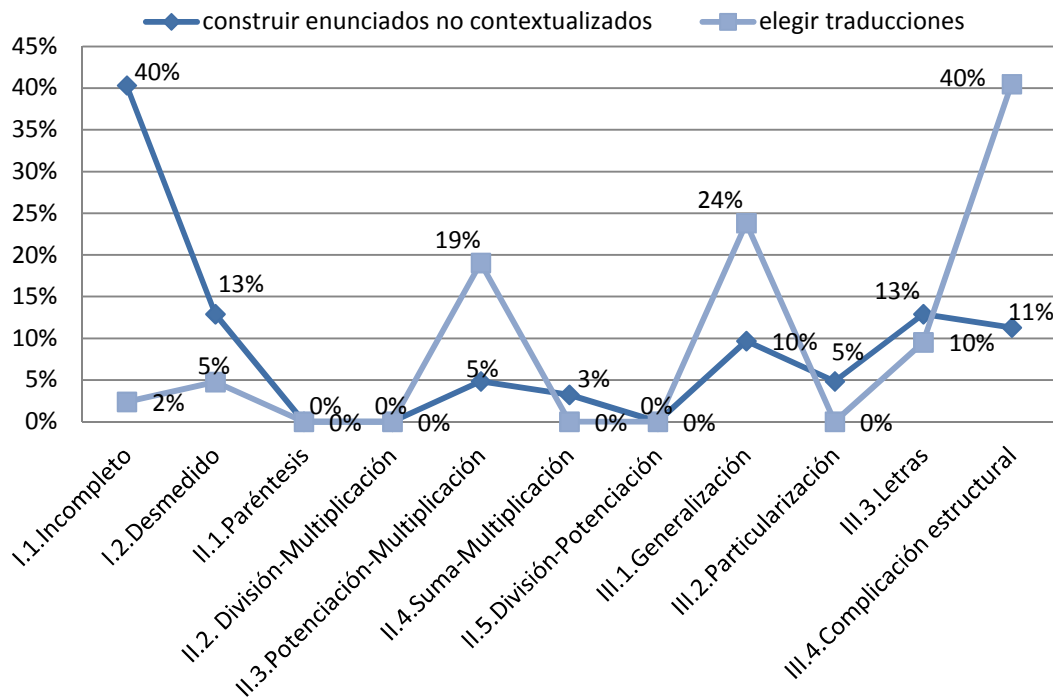


Figura V.5.4. Errores de $S \rightarrow V$ en la construcción y elección de enunciados

Los errores del tipo incompleto (I.1) y desmedido (I.2) tienen poca presencia en la tarea de elegir traducciones (1/42, 2% y 2/42, 5% respectivamente) en comparación con la tarea de construir enunciados no contextualizados. Para la construcción de enunciados no contextualizados encontramos que los errores del tipo desmedido (I.2) tienen una presencia elevada (8/62, 13%) y que los errores del tipo incompleto (I.1) son los más frecuentes (25/62, 40%). En la tarea de elección, los estudiantes incurren con mayor frecuencia (17/42, 40%) en errores de complicación estructural (III.4).

En ambos casos, destaca la ausencia o casi nula presencia de errores derivados de la aritmética (categoría II), con la salvedad de los errores de potenciación-multiplicación (II.3) que apenas se manifiestan en la construcción de enunciados no contextualizados (3/62, 5%), pero se manifiestan notablemente en la elección (8/42, 19%). Los errores de particularización (III.2) sí se manifiestan, aunque escasamente, en las construcciones de enunciados no contextualizados (3/62, 5%) y no se ponen de manifiesto en las elecciones.

b) De sistema de representación verbal a simbolismo algebraico

En la figura V.5.5 observamos la manifestación de errores en las tareas de construir traducciones de enunciados no contextualizados y elegir traducciones de enunciados algebraicos en sentido del sistema de representación verbal al simbólico algebraico. En este sentido observamos mayores diferencias en la presencia de errores según el tipo de tarea, principalmente en los errores derivados de la aritmética (categoría II) y derivados de las características propias del simbolismo algebraico (III).

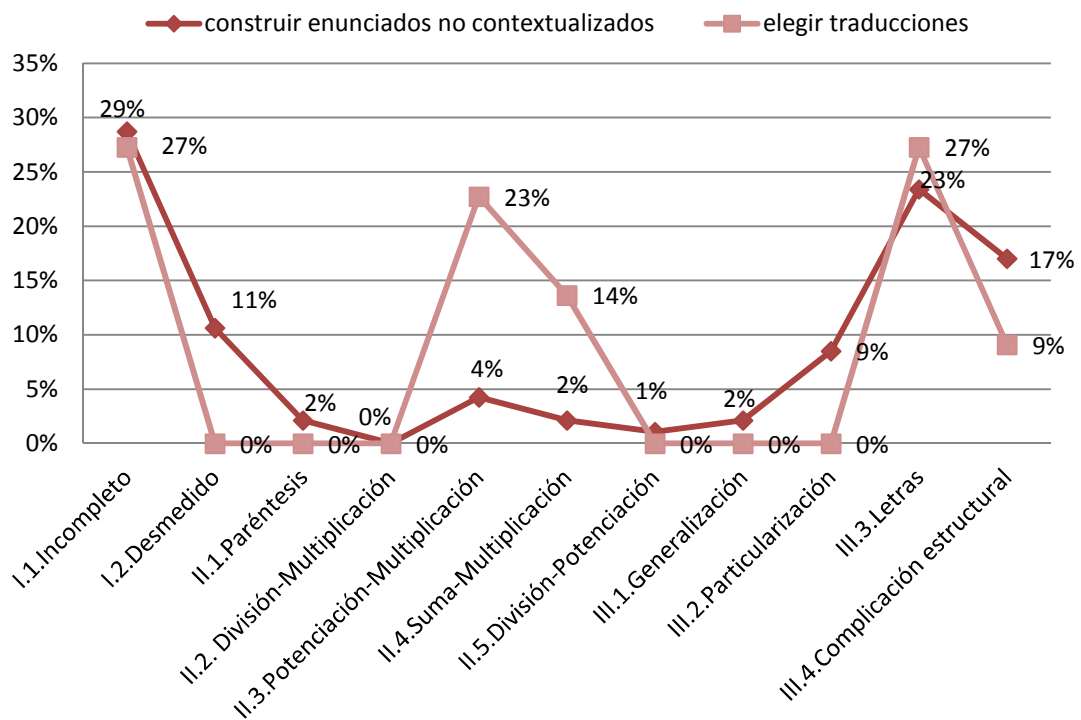


Figura V.5.5. Errores de $V \rightarrow S$ en la construcción y elección de traducciones

En ambas tareas los tipos de error que más se manifiestan son incompleto (I.1) (27/94, 29% en la construcción y 6/22, 27% en la elección) y letras (III.3) (22/94, 23% en la construcción y 6/22, 27%). En la realización de elecciones de traducciones uno de los errores que más se manifiesta es el de potenciación-multiplicación (II.3, 5/22, 23%), mientras que ese tipo de error es de los que se manifiestan en menor medida en la realización de la construcción de enunciados no contextualizados (4/94, 4%). El error de

generalización (III.1) no se presenta en las elecciones pero sí, aunque escasamente, en las construcciones (2/94, 2%).

Los errores de complicación estructural (III.4) que presenta una frecuencia elevada en la construcción (16/94, 17%), apenas se presenta en la elección de traducciones (2/22, 9%). Los errores de particularización (III.2) que se presentan en la primera tarea (8/94, 9%) no se presentan en la elección de traducciones de enunciados algebraicos.

V.5.3. COMPARACIÓN DE ERRORES ENTRE LA ELECCIÓN Y LA CONSTRUCCIÓN DE ENUNCIADOS CONTEXTUALIZADOS (FICHA II Y TORNEO)

Analizamos las respuestas a las tareas de elección y construcción de enunciados contextualizados.

Como hemos descrito anteriormente, durante la tarea de elegir traducciones de enunciados algebraicos, les damos a los estudiantes cuatro enunciados algebraicos mediante simbolismo algebraico y tienen que elegir, para cada uno de ellos, entre cuatro traducciones dadas en sistema de representación verbal y viceversa.

Para la tarea de construir, les damos cuatro enunciados expresados mediante simbolismo algebraico y tienen que construir, para cada uno de ellos, una traducción en el sistema de representación verbal.

En la figura V.5.6 observamos el comportamiento de la manifestación de errores, en cuanto a las tres grandes categorías que tenemos en cuenta en este estudio. Esta figura permite observar una mayor frecuencia de los errores según la completitud del enunciado (categoría I) en la tarea de construir traducciones versus mayor frecuencia de los errores derivados de la aritmética (II) y derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III) en la tarea de elegir traducciones. En la tarea de construir traducciones, la presencia de errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III) también es notoria, aunque están concentrados en un único subtipo (letras, III.3) (ver Tabla V.5.5).

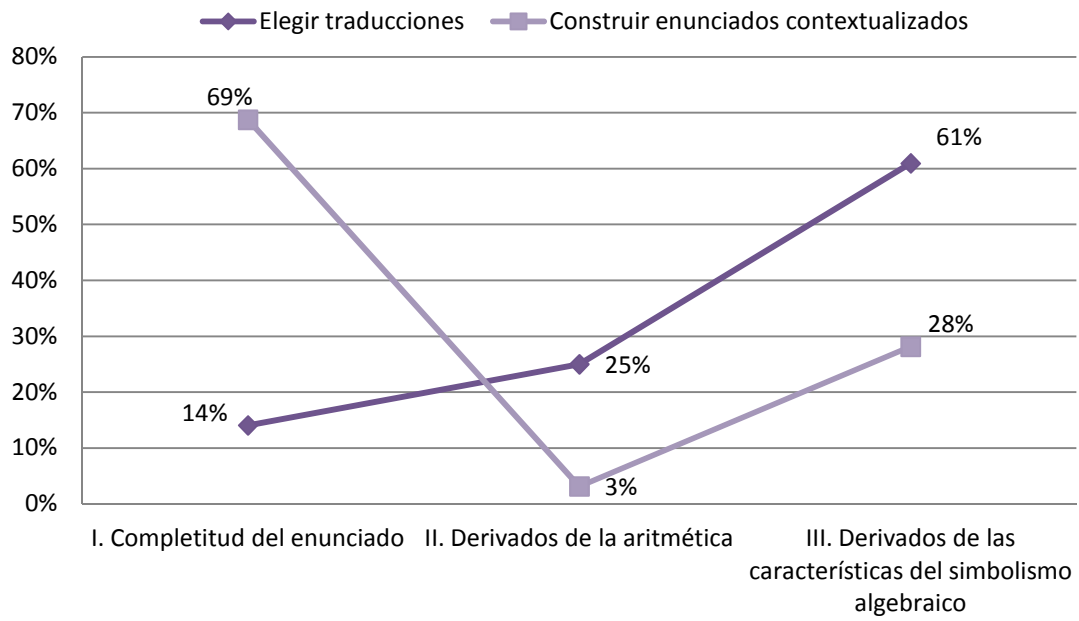


Figura V.5.6. Frecuencia de tipo de error en la elección de traducciones y en la construcción de enunciados contextualizados

La tabla V.5.5 recoge las frecuencias de cada uno de los tipos de errores considerados, en ambas tareas.

Tabla V.5.5. Errores en la elección de traducciones y en la construcción de traducciones contextualizadas

Enunciado	Tipo de error											Total
	I.1	I.2	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5	III.1	III.2	III.3	III.4	
Construcción de enunciados contextualizados												
E1.1		0						9			1	10
E2.1	1	2								4		7
E3.1	0							1			11	12
E4.1					8				0		5	13
E1.2	4					3				2		9
E2.2									0	4	1	5
E3.2	1				3					0		4
E4.2	1				2						1	4
Total	7	2			13	3		10	0	10	19	64
Elección de traducciones												
E2		3		1						2		6
E3	4	2								3		9
E8										1		1
E12	7	6								3		16
Total	11	11		1						9		32

Nota. Sombreamos los tipos de errores que no están presentes en las opciones de respuesta de la Ficha II; Ei.j = Enunciado i de la Situación j de la Ficha II; E2, E3, E8 y E12 enunciados del torneo.

En la tarea de elegir la diversidad de errores es mayor. Los tipos de errores detectados corresponden a los tipos de potenciación-multiplicación (II.3), suma-multiplicación (II.4), generalización (III.1) y complicación estructural (III.4). Los tipos de error que más se presentan en la tarea de construir enunciados contextualizados, corresponden a incompleto (I.1), desmedido (I.2) y letras (III.3).

V.5.4. DESEMPEÑO GENERAL DE LOS ESTUDIANTES EN LAS TAREAS PROPUESTAS DE TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS

En este apartado presentamos un análisis general del desempeño de los estudiantes en las tres tareas que les hemos propuesto a lo largo de la investigación [construcción de enunciados no contextualizados (fase 1: Ficha I), construcción de enunciados contextualizados (fase 2: aparición de piezas marcadas durante el torneo) y elección de traducciones de enunciados (fase 3: Ficha II)], estructurado en los siguientes apartados:

- (a) errores en las tres tareas: presentando una síntesis de los tipos de errores en los que incurren en el trabajo que han realizado en la realización de las tres tareas propuestas;
- (b) desempeño de los estudiantes en la construcción de traducciones contextualizadas: analizamos la construcción de traducciones de enunciados contextualizados y su actitud en la realización de dicha tarea; y
- (c) desempeño de los estudiantes en la elección de traducciones: analizamos la elección de traducciones de enunciados y su actitud ante tener que elegir y explicar una opción correcta o incorrecta.

a) Errores en las tres tareas

Presentamos en la tabla V.5.8 los errores en los que incurre cada estudiante en las tres tareas consideradas:

- construir traducciones de enunciados algebraicos no contextualizados;
- construir traducciones de enunciados algebraicos simbólicos y;
- elegir la traducción correcta entre unas opciones dadas.

Tabla V.5.6. Frecuencias generales de los errores de los estudiantes

Sujeto	Construir no contextualizados			Construir contextualizados			Elegir		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
S01	4	1	5	1			1		4
S02	5	1	7	2				3	3
S03	1		1				1		4
S04	8		5	2		1	1	1	4
S05	5		7	1			1	1	1
S06	7	1	6	3				2	3
S07	2		5				1	2	
S08	4	1	6	2			1	2	
S09	2			1		1			3
S10	1		1	1	1	1			3
S11	4	1	2						
S12	2	3	4	2		1		1	2
S13	8	2	8				1	1	3
S14	3	2	6	4		1		1	4
S15	7	1	4			2		1	2
S16	7	1	5	3		2	2	1	3
Total	70	14	72	22	1	9	9	16	39

Nota. I = errores debidos a la completitud del enunciado; II = errores derivados de la aritmética; III = errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico.

Vemos en la tabla V.5.6 que los errores según la completitud del enunciado (categoría I) y derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III) se encuentran presentes en las tres tareas. Mientras que los errores derivados de la aritmética (categoría II) apenas se manifiestan en la segunda (construir traducciones).

Los errores según la completitud del enunciado (categoría I) suponen un 33% del total. Los sujetos S11 y S15 incurren en este tipo de errores en la primera tarea (construir traducciones de enunciados no contextualizados). Cinco estudiantes (S01, S04, S05, S08 y S16) los manifiestan en las tres tareas. Seis estudiantes (S02, S06, S09, S10, S12 y S14) lo manifiestan en las dos primeras tareas (construir enunciados no contextualizados y contextualizados respectivamente). Y el resto (S03, S07 y S13) únicamente en la primera (construir no contextualizados) y tercera (elegir).

La presencia de los errores derivados de la aritmética (categoría II) supone el 13% del total. Dos estudiantes (S03 y S09) no incurren en este tipo de errores en ninguna de las tres tareas. Estos errores se manifiestan en un único caso en la segunda tarea (construir contextualizados), en el enunciado construido por el sujeto S10; en el resto de tareas, este estudiante no incurre en errores de este tipo. Tres estudiantes (S01, S11 y S15) incurren en este tipo de errores únicamente en la primera tarea (construir no contextualizados). Tres (S04, S05 y S07) incurren en este tipo de errores únicamente en la tercera (elegir). Y el resto (S02, S06, S08, S12, S13, S14 y S16) los ponen de manifiesto tanto en la primera (construir no contextualizados) como en la tercera (elegir traducciones).

En cuanto a los errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III), son los que se presentan en mayor número a lo largo de todo el proceso, suponen un 54% del total. Tres estudiantes (S07, S08 y S11) incurren en este tipo de errores únicamente en la primera tarea (construir no contextualizados). Dos estudiantes (S09 y S10) manifiestan este tipo de errores solo en la segunda (construir contextualizados) y tercera (elegir), seis estudiantes (S01, S02, S03, S05, S06 y S13) en la primera (construir no contextualizados) y tercera (elegir), y el resto (S04, S12, S14, S15 y S16) en las tres tareas

En la tabla V.5.6 observamos una reducción en el número de errores debidos a la completitud del enunciado (categoría I) según las fases de recogida de datos: 20% en la primera, 9% en la segunda y 3% en la tercera. Respecto de los errores derivados de la aritmética (categoría II), a pesar de no manifestarse en la segunda fase, en la primera sí los encontramos y en la tercera se mantiene su presencia (7%). Los errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico (categoría III) son menores en las dos últimas fases que en la primera: 32% en la primera, 4% en la segunda y 17% en la tercera.

A continuación, en la tabla V.5.7 mostramos los errores en los que incurre cada uno de los 16 sujetos del estudio según los tres tipos de tare realizada.

Tabla V.5.7. Número de errores según la tarea realizada durante la investigación

Sujeto	Nº Errores según la tarea realizada		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
S01	10	1	5
S02	13	2	6
S03	2		5
S04	13	3	6
S05	12	1	3
S06	14	3	5
S07	7	0	3
S08	11	2	3
S09	2	2	3
S10	2	3	3
S11	7	0	0
S12	9	3	3
S13	18		5
S14	11	5	5
S15	12	2	3
S16	13	5	6
Total	156	32	64

Nota. Sombreamos las tareas en las que los sujetos S03 y S13 no participan.

En la tarea en la que más estudiantes incurren en errores en la de construir traducciones de enunciados no contextualizados (59%). Las otras dos tareas propuestas en esta investigación, construir traducciones de enunciados contextualizados y elegir traducciones, representan conjuntamente el 41% del total de los errores. De estas tareas, la elección de traducciones, representa el 27% del total. Esta tarea conecta con la

resolución de problemas al plantearse enunciados algebraicos contextualizados. El segundo tipo de tarea, la construcción de traducciones contextualizadas, representa el 14% del total de errores. Esta tarea, que apenas es trabajada en el aula y que es donde los estudiantes presentan menor porcentaje de errores, es la que conecta con la invención de problemas.

b) Desempeño de los estudiantes en la construcción de traducciones contextualizadas

De los 16 estudiantes que participan en este estudio, 15 participan en el desarrollo del torneo (todos salvo el sujeto S13). En general, la actitud de los estudiantes es participativa y se muestran interesados por la realización del mismo y por el método de obtener las puntuaciones durante las partidas.

Durante la realización del torneo los estudiantes apenas corrigen a sus compañeros y no surgen situaciones de autocorrección en la lectura de enunciados algebraicos no contextualizados. Sin embargo, observamos autocorrecciones cuando los estudiantes construyen enunciados verbales contextualizados, esto es, durante la aparición de las piezas marcadas con punto rojo.

Por ejemplo, el sujeto S12 al aparecer en el juego el enunciado E12 marcado construye el enunciado siguiente: “Sería, mi edad más mi edad más un número... bueno, mi edad más la siguiente a mi edad, el número siguiente... Es que no sé cómo explicarme, pero sería por ejemplo, si yo tuviese catorce años pues el siguiente quince, menos cuatro” (enunciado S12-1-E12). Otro ejemplo lo tenemos en el sujeto S06: “Cuatro coches por la mitad de coches, bueno, de un coche, bueno por la mitad de dos coches, es igual al doble de dichos coches” (enunciado S06-1-E2).

Observamos un caso de corrección directa entre los estudiantes. Es el caso del sujeto S02 quien corrige a un compañero que ha construido un enunciado y determina que “sería un limón, más otro limón, está bien, pero ha puesto igual a cuatro limones menos dos, y eso estaría mal, y sería una naranja menos dos” (enunciado S02-1-E3).

En el resto de los casos, cuando los estudiantes detectan que sus compañeros han construido un enunciado que no es traducción exacta del simbólico que les damos, se limitan a construir uno nuevo en lugar de corregir el de su compañero.

Al realizar las entrevistas individuales²⁸, como última fase de la recogida de datos, los estudiantes muestran una actitud participativa y cooperativa ante nuestra necesidad de obtener más información sobre los trabajos que han realizado.

Entre las respuestas sobre los enunciados verbales contextualizados construidos durante la realización del torneo, encontramos tres situaciones distintas:

- (a) reconocen que el enunciado verbal contextualizado que han construido durante el torneo es erróneo pero no son capaces de dar uno nuevo;
- (b) reconocen que el enunciado verbal contextualizado que han construido durante el torneo es erróneo y aportan uno nuevo pero sigue siendo erróneo; y
- (c) el enunciado construido es correcto o reconocen que el enunciado verbal contextualizado que han construido es erróneo y aportan un nuevo enunciado que sí es correcto.

En la tabla V.5.8 presentamos el número de estudiantes que se encuentran en las condiciones descritas y quienes eran.

Tabla V.5.8. Condición de los estudiantes al ser entrevistados sobre las traducciones construidas

Condición	Nº sujetos	Sujetos
Reconocen enunciado incorrecto pero no cambian	3 (25%)	S05,S08,S14
Rectifican pero el enunciado sigue incorrecto	3 (25%)	S04,S06,S16
El enunciado construido es correcto o rectifican aportando un enunciado correcto	6 (50%)	S01,S07,S09,S10,S12,S15
Total	12 (100%)	

c) Desempeño de los estudiantes en la elección de traducciones

Hemos utilizado el final de las entrevistas individuales para conocer cómo se han enfrentado los estudiantes a la tarea de elegir la traducción de enunciados algebraicos, esto es, la propuesta en la Ficha II, y qué circunstancia determinan que les ha resultado más fácil en cada caso. En la tabla V.5.9 no aparecen los sujetos S02 ni S03 al no haber sido entrevistados.

²⁸ Las transcripciones de las entrevistas individuales están en el Anexo E.

Tabla V.5.9. Condición de los estudiantes ante la elección de traducciones (Ficha II)

Sujeto	Tarea a realizar		Opción a elegir		Opción a explicar	
	S→V (Situación 1)	V→S (Situación 2)	Correcta	Incorrecta	Correcta	Incorrecta
S01		×		×	×	
S04	×		×			×
S05		×	×		×	
S06	×		×		×	
S07	×			×	×	
S08		×	×		×	
S09		×		×	×	
S10	×			×	×	
S11	×		×	×	×	
S12	×		×		×	
S13		×				
S14	×			×		×
S15		×		×		×
S16		×		×		×

Nota. Marcamos con × las circunstancias que le han resultado más fáciles a los estudiantes; Notamos por S → V a la traducción de simbolismo algebraico a representación verbal y por V → S la traducción de representación verbal a simbolismo algebraico.

La mitad de los estudiantes entrevistados consideran más fácil la Situación 1 y la otra mitad la Situación 2. Sin embargo, en la segunda situación (elegir entre una serie de enunciados simbólicos) se ha producido un menor número de errores.

En cuanto a elegir y explicar tareas, encontramos comportamientos similares y diversas situaciones que describimos a continuación.

Algunos sujetos (S05, S06, S08 y S12) declaran que les es más fácil tanto elegir como explicar las opciones correctas. Sin embargo, las elecciones de opción que hacen no siempre es la acertada y las explicaciones dadas no son adecuadas para justificar este comportamiento de manera razonada.

Por otro lado, algunos sujetos (S01, S07, S09 y S10) reconocen que aunque les es más fácil elegir la opción incorrecta, a la hora de tener que explicar una opción, les ha resultado más fácil detallar por qué un enunciado es correcto.

Así mismo, S14, S15 y S16, determinan que tanto elegir como explicar la opción incorrecta les es más fácil pues para ellos es más llamativo encontrar el error en la expresión que no es correcta. Sin embargo, esto no significa que identifiquen la opción correcta sin equivocaciones.

El S11 reconoce que le parece igualmente fácil elegir una opción correcta o incorrecta, siendo el que realmente más veces ha elegido bien la como opción correcta el enunciado que es traducción del dado.

El sujeto S04 declara que le es más fácil elegir la opción correcta (aunque no lo hace adecuadamente salvo en dos situaciones) y explicar la opción incorrecta.

Finalmente, el sujeto S13 afirma que le resulta igualmente difícil elegir las distintas opciones y también tener que explicarlas por escrito.

En cuanto a la justificación que dan sobre por qué una opción les resulta más fácil que otra, no encontramos ninguna de tipo matemático. Los estudiantes se limitan a dar explicaciones como: “Porque ves el enunciado simbólico y ya solo es encajarlo con el verbal... el otro es más difícil porque es más largo y he tenido que leerlo más veces” (respuesta dada por el sujeto S06 en la entrevista para justificar que le resulta más fácil cuando le damos el enunciado simbólico y a elegir cuatro enunciados verbales, esto es, la Situación 1); “Pues porque el simbólico puede significar...no sé, no lo entiendo mucho, porque tú me pones el simbólicos y las cuatro frases, y pueden significar muchas cosas, y me lio, puede haber más que se parezcan. No sé, me lio menos con los símbolos” (respuesta dada por el sujeto S09 durante la entrevista para justificar que le resulta más fácil le damos el enunciado verbal y a elegir cuatro enunciados expresados mediante simbolismo algebraico, esto es, la Situación 2).

CAPÍTULO VI

CAPÍTULO VI. ANÁLISIS DE DATOS INDIVIDUAL

En el capítulo previo se ha presentado un análisis cuantitativo del desempeño de los estudiantes. En este capítulo se hace un análisis cualitativo del mismo desempeño considerando individualmente a cada estudiante. Como en el análisis conjunto presentado en el capítulo previo, analizamos:

- (a) la construcción de traducciones de enunciados algebraicos no contextualizados dados mediante los sistemas de representación simbólico o verbal;
- (b) la construcción de traducciones contextualizadas de enunciados algebraicos dados mediante simbolismo algebraico;
- (c) la elección de traducciones de enunciados algebraicos dados mediante los sistemas de representación simbólico y verbal²⁹.

Los datos utilizados en este análisis proceden de las producciones escritas (Ficha I y Ficha II), orales (torneo) de los estudiantes y de la información recogida por medio de las entrevistas personalizadas.

VI.1. SUJETO S01

En este apartado presentamos el desempeño del sujeto S01 en las tareas realizadas en esta investigación.

En las traducciones de enunciados no contextualizados, no dio respuesta a cuatro de los enunciados. Tres de ellos estaban dados en representación verbal (E1, E7 y E8) y uno mediante simbolismo algebraico (E12). Construyó correctamente la representación verbal de un enunciado (E6) dado mediante simbolismo algebraico. En la traducción de los siete enunciados restantes incurre en algún error, en total diez errores (ver Tabla

²⁹ En las opciones de respuesta de elección de enunciados no están presentes los errores de tipo II.1, II.2 y II.5 (como se puede ver en el apartado IV.3.4 de metodología).

VI.1). La mayoría de ellos (3/10) se deben a la incompletitud de los enunciados traducidos. Por ejemplo, para el enunciado E4, cuya representación verbal es “Un número por su cuadrado es igual a su cubo”, escribió $(x)^2 = (x)^3$. Parece que se olvidó de la parte de la expresión que dice “un número por...”. Otros errores (3/10) se deben a la incorrecta interpretación de las letras: en dos ocasiones asignó más de un significado a una misma letra, pues para el enunciado en simbolismo algebraico $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) hizo como traducción “Cuatro por la mitad de un número es igual a dos y otro número” y tradujo $x \cdot (x+1) = 7x$ (E5) como “Un número por un número más uno es igual a siete y otro número”. En los dos casos indicó producto al traducir el miembro izquierdo de la igualdad, cuando aparece el punto, signo del producto, y no indicó producto al traducir el miembro derecho de la igualdad donde hay un coeficiente que multiplica a la incógnita pero no aparece escrito el punto indicando “siete y otro número”. En otra ocasión, asignó más de un significado a una letra, es el caso del enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos” (E3), donde la representación en simbolismo algebraico que construyó es $x+1 = -2x$. Además apreciamos que obvió la expresión inicial “un número más...” y da a “menos dos” estatus de coeficiente en vez de operación.

Tabla VI.1. Desempeño de S01

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	NR		
E2	Inc (III.3)	NR	
E3	Inc (I.1, II.4, III.3)	NR	
E4	Inc (I.1)		
E5	Inc (III.3)		
E6	C		
E7	NR		
E8	NR	NR	
E9	Inc (I.1, III.4)		
E10	Inc (I.2)		
E11	Inc (III.1)		
E12	NR	Inc (I.1)	
E1.1			Inc (III.1)
E2.1			Inc (I.2)
E3.1			C

Enunciado	Tareas		Elección
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	
E4.1			Inc (III.4)
E1.2			Inc (III.3)
E2.2			Inc (III.3)
E3.2			C
E4.2			C

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la entrevista le pedimos que realizara las traducciones de los cuatro enunciados que dejó en blanco en la construcción de enunciados no contextualizados y las hizo de manera correcta. Explicó que “no sabía cómo ponerlo”, y que el motivo de dejarlo en blanco se debió a que estaba confuso con el orden de colocación de los enunciados en las piezas. De su explicación se desprende que pudo no entender cómo había que encajar las piezas del dominó.

En la construcción de los cuatro enunciados contextualizados posibles, construyó uno para el enunciado $x + (x + 1) - 4$ (E12) (S01-1-E12: “Mi edad, más otro año, menos cuatro”) incurriendo en un error de enunciado incompleto (I.1), pues su producción puede traducirse como $x + 1 - 4$. Entendemos que el error en que incurre se debe a la forma de expresarse oralmente, creyó que diciendo “más otro año” queda dicho que es su edad y un año más, o sea, $x + 1$ (como queda manifestado en la posterior entrevista realizada al estudiante). El estudiante no usó adecuadamente el vocabulario para expresar las relaciones matemáticas que manifiestan las expresiones algebraicas.

Durante la entrevista, le pedimos que mejorara el enunciado. La mejora que hizo fue como sigue “Mi edad más dentro de un año menos cuatro”. Entendemos que, aunque lo mejoró, no llegó a hacer una expresión correcta, ya que siguió manteniendo datos implícitos. En el enunciado S01-1-E12, arriba indicado, que construyó durante el torneo, el estudiante interpretó la letra de la representación simbólica como una incógnita. En el nuevo enunciado construido realizó la misma interpretación. En cuanto a las operaciones, realizó una traducción textual de las mismas.

En lo referido a la lectura de los enunciados algebraicos de las piezas del dominó, realizó una lectura lineal de los mismos, no relacionando las distintas representaciones (verbal y simbólica) de un mismo enunciado dado.

En la elección de traducciones, en los casos presentados, realizó correctamente la elección en el caso de un enunciado (E3.1) dado mediante simbolismo algebraico, donde tenía que elegir su representación verbal, y en dos enunciados (E2.3 y E4.2) dados por su representación verbal, donde tenía que elegir entre enunciados dados mediante simbolismo algebraico. Incurrió en errores en cinco enunciados (E1.1, E2.1, E4.1, E1.2 y E2.2). Para los enunciados dados mediante simbolismo algebraico tenemos que para el de expresión simbólica $5 + x + y$ (E1.1) eligió como traducción correcta la representación verbal “Un número impar más una edad más otra edad”, donde incurrió en un error de generalización (III.1) al considerar a 5 como un número impar cualquiera. Para el enunciado $x + 60 = 5x$ (E2.1) eligió como opción correcta “Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco” siendo un enunciado desmedido (I.2). En el caso de x^3 (E4.1), el estudiante tomó como traducción “El área de un cubo” donde muestra un error de complicación estructural (tipo III.4), donde la expresión se corresponde con la fórmula para hallar el volumen de un cubo y no el área.

En el caso de los enunciados dados en representación verbal, tenemos que para el enunciado “El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros” (E1.2) el sujeto eligió como traducción $x + x + y + y = 92$ donde el error es de letras (III.3) porque reprodujo la fórmula por la cual se obtiene el perímetro de un rectángulo cuyos lados son x e y pero no estableció la relación entre las longitudes de los lados como indica el enunciado, requiriendo por tanto dos incógnitas en vez de una. Para el enunciado “El doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés” (E2.2) tomó como traducción $2x + \frac{x}{4}$, incurriendo de nuevo en un error categorizado como de letras (III.3), considerando que la letra x son “los años”, independientemente de la persona a la que se refieran.

Al preguntarle por la elección de traducciones, el estudiante reflexionó en voz alta con la profesora investigadora sobre cada una de las opciones de respuesta, aportando justificación a sus elecciones para razonar cuál es la traducción correcta y por qué. Por ejemplo, explicó para su elección en el enunciado E1.2 (“El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros”), donde por escrito había elegido una opción incorrecta $x + x + y + y = 92$, que realmente

la opción que era traducción exacta del enunciado dado era $x + x + (x + 6) + (x + 6) = 92$ explicando: “porque te están dando el ancho, bueno, la altura, equis, más equis, más el largo que mide seis metros más. Más el otro largo que mide seis metros más”. Para el resto de los enunciados sobre los que se les cuestionó, este estudiante actúa de manera semejante: en voz alta lee la respuesta que seleccionó en primer lugar, relea las distintas opciones presentadas y razonando sobre cada uno de ellos en voz alta con la profesora investigadora, encuentra la opción que es traducción del enunciado dado.

El estudiante explicó que al elegir una opción correcta y una incorrecta, la estrategia seguida consistió en leer los enunciados e identificar elementos faltantes o sobrantes: “pues ahí sobra algo o falta algo...entonces es incorrecta; y en la correcta tenías que ponerte un poco más”. Opinó que le resultó más difícil elegir la opción incorrecta y reconoció que tuvo dificultad para justificar por qué un enunciado era incorrecto después de seleccionarlo. Expresó su dificultad para dar explicaciones que justifiquen su elección. En principio, reconoció que encontró más fácil la Situación 2, esto es, las traducciones de enunciados en representación verbal a simbolismo algebraico, y argumentó que esa dificultad “en realidad es porque no pienso”, y concluyó que ambas situaciones les resultaban de dificultad similar.

Resumen del análisis del Sujeto S01: Para este estudiante no podemos asegurar que le resulte más complicado encontrarse primero la expresión algebraica en representación verbal o en simbolismo algebraico, pues ha dado muestras de su dificultad en ambos sentidos. Pone de manifiesto alguna complicación con la interpretación de los signos, al menos de aquellos que por convenio no aparecen, como es el punto entre coeficiente y letra en una expresión simbólica, aunque da muestras de expresarlo correctamente en alguna ocasión. Es posible que en un primer momento no tuviese claras las reglas dadas para hacer las traducciones. Mostró dificultad para expresar oralmente y por escrito lo que pensaba y presentó un desempeño diferente dependiendo de que la tarea la realizara por escrito o de forma oral (respondiendo a la profesora), ya sea trabajando en un caso no contextualizado o contextualizado. La forma oral favoreció dicho desempeño. También tuvo dificultad para escribir la expresión simbólica que, en ocasiones, no llegó a completar. El estudiante explicó y razonó cuando le preguntábamos durante la entrevista. Percibimos que tenía dificultad en el uso de las letras tanto si se trataba de

construir expresiones no contextualizadas como contextualizadas, sobre el papel, por lo que no parece que sea influyente el hecho de la contextualización en los resultados a los que llegaba. Explicó la forma que tenía de reconocer una traducción incorrecta y de su explicación entendemos que sigue el proceso que requiere la justificación matemática: Para que una ley sea considerada falsa es suficiente con que sea falso un caso particular (en el caso de las expresiones una parte) para que sea correcta, han de serlo en todos los casos (la expresión no puede tener ninguna parte incorrecta).

VI.2. SUJETO S02

El desempeño del sujeto S02 ha sido el siguiente. En la construcción de traducciones de los doce enunciados no contextualizados, este estudiante dejó tres sin responder (E1, E4 y E5), los dos primeros presentados mediante representación verbal y el tercero dado mediante simbolismo algebraico. Construyó correctamente la traducción de otros tres (E9, E11 y E12), dos de ellos dados mediante simbolismo algebraico (E9 y E12) y el otro (E11) mediante representación verbal. Incurre en algún error en el resto de enunciados. Podemos interpretar que al construir traducciones encuentra dificultad tanto en enunciados dados mediante representación verbal como mediante simbolismo algebraico. La tabla VI.2 recoge el desempeño del sujeto S02 en las tareas de la investigación.

Tabla VI.2. Desempeño de S02

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	NR		
E2	Inc (I.1, III.1)	NR	
E3	Inc (III.3)	Inc (I.1)	
E4	NR		
E5	NR		
E6	Inc (I.2, III.3)		
E7	Inc (I.1, II.1)		
E8	Inc (I.2, III.2, III.4)	C	
E9	C		
E10	Inc (I.2, III.1, III.3)		
E11	C		
E12	C	Inc (I.2)	

Enunciado	Tareas	
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados
E1.1		Inc (III.1)
E2.1		Inc (III.3)
E3.1		Inc (III.4)
E4.1		Inc (II.3)
E1.2		Inc (II.4)
E2.2		C
E3.2		Inc (II.3)
E4.2		C

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

La mayoría de los errores que se detectan se deben a características propias del simbolismo algebraico (categoría III) y a la completitud de enunciados (categoría I). En concreto a errores de generalización (III.1, 2/13), letras (III.3, 3/13), complicación estructural (III.4, 1/13) y enunciado incompleto (I.1, 3/13) y desmedidos (I.2, 3/13).

Tradujo “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” (E7) como $a + b^2$, donde los errores se deben a que el enunciado es incompleto (I.1) pues la relación de ser consecutivos no se ha expresado y además le falta un paréntesis (II.1). En el caso del enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) construyó “La mitad de un número multiplicado por un número par (4) igual a dos x ” que consideramos incompleta (I.1) pues no traduce la parte izquierda y además incurre en un error de generalización (III.1). En el enunciado $(x \cdot y)^3$ (E6) construyó como representación verbal “Un número multiplicado por su consecutivo elevado al cubo”, donde consideró que las dos letras representan dos números consecutivos, construyó por tanto un enunciado desmedido (I.2) y además incurre en un error de letras (III.3) pues utilizó dos letras con un mismo significado. Construye la traducción “Un número elevado a dos menos su consecutivo elevado a dos menos es igual a un número primo” para el enunciado $x^2 - y^2 = 11$ (E10) donde vuelve a incurrir en estos dos errores, desmedido (I.2) (sobra la relación de consecutividad) y letras (III.3) (utiliza dos letras con un mismo significado), incurre además en un error de generalización (III.1) pues no especifica que se trata del número 11.

En el enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) construyó $2 - \frac{4}{2} = x$ donde sobra la igualdad y la parte de la derecha de la misma, error clasificado como desmedido (I.2), incurre en un error de particularización (III.2) pues consideró “un número par” como un número concreto (2) y en un error de complicación estructural (III.4) porque no identificó la idea de “otro número” sino que consideró ese mismo número (4).

Este estudiante es el único que utilizó más de dos letras diferentes en un enunciado de los trabajados durante el estudio: realizó una traducción del enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos” (E3) como $a + b = d - 2$, utilizando una letra diferente para cada elemento del enunciado, incurriendo en un error de letras (III.3). Interpretamos que el estudiante ha considerado la relación de consecutividad de los números con el orden de las letras a y b . Vemos que en las dos ocasiones procedió de este modo, poniendo de manifiesto que no conoce cómo se simboliza la relación de dos números cuando uno es consecutivo del otro.

En los tres enunciados contextualizados construidos, consideramos que uno es correcto (S02-1-E8), donde interpretó la letra x como “manzana” en lugar de “número de manzanas” y la letra y como “un pera”. Para la expresión simbólica $x + (x + 1) = y - 2$ (E3) construyó un enunciado incompleto (I.1), “Un limón, más otro limón [...] igual a [...] una naranja menos dos” olvidándose del uno que hay dentro del paréntesis o de una de las x . En el otro enunciado construido sobran elementos, siendo por tanto desmedido (I.2): para la expresión simbólica $x + (x + 1) - 4$ (E12) construyó la expresión verbal “Una pelota de futbol más...una pelota de futbol más una [...] menos cuatro pelotas de futbol” donde consideró que el número 4 también está expresando pelotas como la letra x . No hace distinción entre la letra y el término independiente. Creemos que para no operar objetos con números, a los valores numéricos también les asigna el mismo objeto.

En estos tres enunciados que construyó el estudiante durante el torneo, interpretó la parte literal del enunciado como un objeto: x es un limón, una manzana, una pelota de futbol. Además, en ellos efectuó una traducción textual de las operaciones que intervienen en los enunciados algebraicos dados. Durante el torneo, realizó una lectura lineal de los enunciados de las piezas del dominó.

En la elección de traducciones, en dos ocasiones (E2.2 y E4.2) hizo la selección correctamente, donde los enunciados estaban dados mediante representación verbal y las opciones a elegir mediante simbolismo algebraico.

Incorre en errores en los seis enunciados restantes (E1.1, E2.1, E3.1, E4.1, E1.2 y E3.2).

En los enunciados de la Situación 1 (E1.1, E2.1, E3.1 y E4.1), dados en representación verbal y las opciones de respuesta en simbolismo algebraico, incorre en los siguientes errores. Para la expresión simbólica $5 + x + y$ (E1.1) eligió como traducción “Un número impar más una edad más otra edad” incurriendo en un error de generalización (III.1). Para el enunciado $x + 60 = 5x$ (E2.1), tomó como traducción “Sesenta más un número es igual a cinco veces otro número” donde asignó más de un significado a una misma letra por lo que el error es debido a la incorrecta interpretación de las letras (III.3). En el caso del enunciado $x^2 - y^2 = 9$ (E3.1) eligió como traducción “El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve” incurriendo en un error tipificado como complicación estructural (III.4), confundiendo área con perímetro en una superficie cuadrada. En el caso del enunciado x^3 (E4.1), eligió “El triple del lado de un cubo” incurriendo en un error de potenciación-multiplicación (II.3).

En los enunciados de la situación 2 (E1.2 y E3.2), dados en simbolismo algebraico y las opciones de respuesta en representación verbal, encontramos los siguientes errores. En el enunciado “El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros” (E1.2) tomó como traducción $2x \cdot 2(x + 6) = 92$ incurriendo en un error de suma-multiplicación (II.4); apreciamos una confusión entre las nociones de área y perímetro del rectángulo. En el enunciado “El número de ruedas de dos coches es ocho” (E3.2) eligió como traducción $x^2 = 8$ donde incorre, al igual que en el E4.1, en un error de potenciación-multiplicación (II.3). Parece que presenta más dificultad al traducir expresiones donde aparecen la operación de potenciación y/o multiplicación.

El estudiantes se negó a realizar la entrevista por lo que no disponemos de más información sobre su desempeño en las tareas.

Resumen del análisis del Sujeto S02: Destacamos en primer lugar la dificultad que manifiesta para expresar la relación entre un número y su consecutivo al traducir, tanto si los enunciados están dados en representación verbal como si vienen dados mediante simbolismo algebraico. De la información recogida de este estudiante, se desprende que, a pesar de realizar correctamente algunas traducciones, su manejo del simbolismo algebraico es deficiente, presenta dificultad en factores ligados al mismo, como son la generalización, uso de letras y complicación estructural; además de construir expresiones en que aparecen sobreabundancia de datos y relaciones. Muestra dificultades relacionadas con las operaciones de potenciación y multiplicación, que consideramos relacionadas con la confusión entre los conceptos de perímetro y área. Al no realizar la entrevista personalizada no hemos podido profundizar en estas dificultades que manifiesta.

VI.3. SUJETO S03

En lo que respecta a la recogida de datos para este estudio, este sujeto, participó con poca motivación, dejando incompletas las tareas propuestas. En el desarrollo del torneo tuvo una participación escasa, no construyendo enunciados contextualizados. No participó en la última fase, las entrevistas individuales, por no asistir a clase durante semanas. En la tabla VI.3 recogemos su desempeño en las tareas.

Tabla VI.3. Desempeño de S03

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	NR		
E2	NR	NR	
E3	Inc (I.1, III.3)	NR	
E4	NR		
E5	NR		
E6	NR		
E7	NR		
E8	NR	NR	
E9	NR		
E10	NR		
E11	NR		
E12	NR	NR	

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1.1			C
E2.1			Inc (III.3)
E3.1			Inc (III.4)
E4.1			Inc (III.4)
E1.2			Inc (I.1)
E2.2			Inc (III.4)
E3.2			C
E4.2			C

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la primera tarea, construcción de traducciones de enunciados no contextualizados, dejó en blanco todos los enunciados salvo uno, E3: “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos”. En este enunciado incurre en dos errores al traducirlo como $x + x = x - 2$. Un error es del tipo incompleto (I.1) pues consideramos que le falta un número para expresar la relación que hay entre un número y su consecutivo. El otro error es de letras (III.3) al asignar más de un significado a una misma letra.

Comentó en clase que no realizó las traducciones sino que “las puso al azar y sin llegar a leer” los enunciados dados.

Durante el torneo no construyó ningún enunciado contextualizado, realizando una lectura lineal de los enunciados algebraicos.

En la elección de traducciones, no dio ningún razonamiento de sus elecciones, reconociendo a la profesora investigadora que las elecciones las hizo sin pensar, marcando las opciones “por señalar algo”.

A causa de las faltas de asistencia, no fue posible entrevistarle, por lo que no disponemos de más información sobre su desempeño en las tareas.

VI.4. SUJETO S04

El sujeto S04 tiene el siguiente desempeño. En la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados, dejó un enunciado sin proponer una traducción (E1). Este enunciado estaba presentado mediante representación verbal. Realizó correctamente la traducción de tres enunciados (E6, E9 y E10), los tres dados mediante simbolismo algebraico. Podemos pensar que los enunciados dados mediante simbolismo

algebraico le presentan menor dificultad. En los demás, incurre en algún error. En la tabla VI.4 expresamos su desempeño en las diferentes tareas propuestas.

Tabla VI.4. Desempeño de S04

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	NR		
E2	Inc (I.1, III.1)	NR	
E3	Inc (I.1, III.3)	Inc (I.1, I.2, III.3)	
E4	Inc (III.3, III.4)		
E5	Inc (I.1, I.2)		
E6	C		
E7	Inc (I.1, III.3)		
E8	Inc (I.1)	NR	
E9	C		
E10	C		
E11	Inc (I.2)		
E12	Inc (I.2)	NR	
E1.1			Inc (III.1)
E2.1			Inc (III.3)
E3.1			Inc (III.4)
E4.1			Inc (II.3)
E1.2			Inc (I.1)
E2.2			Inc (III.3)
E3.2			C
E4.2			C

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la entrevista le preguntamos, en primer lugar, por el enunciado que dejó en blanco (E1: “El producto de la mitad de un número por el triple de otro número”) en la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados. Nos explicó que se debió a que confundió el orden donde debía colocar algunos enunciados y le sobró un lugar. Le pedimos que realizara la traducción que le faltaba y la hizo correctamente, explicando que se trata de “x partido de dos por tres y”.

En cuanto a los enunciados dados mediante simbolismo algebraico traducidos erróneamente, encontramos las situaciones que describimos a continuación. Para el enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) construyó un enunciado incompleto (I.1) pues escribió “Un

número multiplicado por $\frac{x}{2} = 2x$ ”, además incurre en un error de generalización (III.1) al traducir 4 como “un número”. En el caso del enunciado $x \cdot (x+1) = 7x$ (E5) también construye un enunciado incompleto (I.1) pues realiza una lectura de la parte izquierda. Dio como traducción “Un número multiplicado por su número más su siguiente es igual a siete x ”. Además incurre en un error de tipo desmedido (I.2), entendemos que no consiguió indicar la relación de un número y su consecutivo lo que le llevó a escribir la frase incorrecta “su número más su siguiente”. El enunciado $x + (x+1) - 4$ (E12) lo tradujo como “Un número más la suma de su siguiente menos cuatro” donde consideramos que el error es de nuevo de tipo desmedido (I.2) pues sobra la expresión “la suma de” en la traducción. En esta traducción sí se pone de manifiesto la relación entre dos números consecutivos, la repetición de más y suma puede ser debida a falta de precisión y refinamiento en el lenguaje matemático. La mayoría de los errores manifestados en estos enunciados son debidos a la completitud de los enunciados, hecho que podríamos interpretar como una falta de atención por parte del estudiante.

En los enunciados expresados verbalmente traducidos erróneamente, encontramos las siguientes situaciones. En el enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos” (E3) tomó como traducción $x + 1 = x - 2$, donde la construcción es incompleta (error I.1) pues le falta un sumando para representar completamente la suma de un número y su siguiente y además hay un error tipificado como de letras (III.3) pues asignó más de un significado a una misma letra. Para el enunciado “Un número por su cuadrado es igual a su cubo” (E4) construyó como traducción $x \cdot y = 3$ donde los errores son debidos de nuevo a confusión de letras (III.3), en este caso por asignar a la letra y el significado del cuadrado de x , además, incurre en un error de complicación estructural (III.4) al confundir la expresión “igual a su cubo” con “igual a tres”. Estos mismos errores se ponen de manifiesto en el enunciado “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” (E7) al traducirlo como $(x + y)^2$, donde la relación de ser consecutivos no se ha expresado. Para el caso del enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) tomó como traducción $x - \frac{1}{4}y$ donde consideramos que es incompleto (I.1) pues le falta el coeficiente 2 a la x para expresar la paridad. Y en el

enunciado “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número” (E11) consideró que la traducción era $(\sqrt{x})^2 + x = x$ donde consideramos que este enunciado construido es desmedido (I.2) pues sobra una parte de la expresión, en concreto $+x$.

Durante la segunda tarea construyó para $x + (x+1) = y - 2$ (E3) un enunciado contextualizado (S04-1-E3) como “Un tomate más un tomate más otro tomate igual a un tomate menos dos”. Ayudándonos de la entrevista realizada, vemos que este estudiante tradujo x como “un tomate”, asignando a la letra el significado de objeto. Consideramos que para evitar la situación de operar objetos (tomates) con números, al valor numérico 1 también le asigna el objeto (tomate) como unidad. Si esto es así, en este enunciado incurre en tres errores: (a) omitió un término independiente, incompleto (I.1), al faltarle el 1 pues lo sustituyó por “otro tomate” y por tanto por otra letra x , incluyó una letra de más en el parte de la izquierda, (b) desmedido (I.2) (la letra x que sustituyó por el 1) y (c) asignó más de un significado a una misma letra (III.3). También podemos pensar que consideró que tanto las dos letras x e y como el 1 cumplen la misma misión, pero no pensó lo mismo del número 2. En esta traducción, consideró la parte literal como un objeto y tradujo textualmente las operaciones que intervienen en el mismo.

Le preguntamos durante la entrevista por este enunciado construido (S04-1-E3), le pedimos que hiciera la traducción del enunciado verbal que había traducido a simbolismo algebraico, para comprobar si lo hecho era correcto o no. Detectó el error en el que había incurrido pero volvió a construir un enunciado incorrecto y utilizó la misma estructura, insistiendo en que la expresión $x+1$ puede interpretarse como “el siguiente a un tomate”. Aquí percibimos una nueva confusión, expresa un orden pero no tiene sentido cuando n no es un número. Si n es un número las expresiones n y $n+1$, son números consecutivos, pero si n es un objeto, la suma de un objeto y un número no tiene significado alguno.

Durante el desarrollo del torneo, realizó una lectura lineal de los enunciados algebraicos que constituyen las piezas de dominó, no relacionando las distintas representaciones (verbal y simbólica) de los enunciados que proporcionamos.

Por último, en la elección de traducciones realizó correctamente la elección de dos casos (E3.2 y E4.2) dados en representación verbal. En los demás, dos en representación verbal y cuatro dados mediante simbolismo algebraico, incurrió en error. Esto

contradice nuestra conclusión inicial de que los enunciados dados mediante simbolismo algebraico le presentan menor dificultad.

En las elecciones de los demás enunciados (E1.1, E2.1, E3.1, E4.1, E2.2 y E3.2) incurre en errores. Para los enunciados dados mediante simbolismo algebraico, tenemos que para el de expresión simbólica $5 + x + y$ (E1.1) eligió como traducción correcta la representación verbal “Un número impar más una edad más otra edad” donde incurre en un error de generalización (III.1) al considerar 5 como un número cualquiera; para el enunciado $x + 60 = 5x$ (E2.1) eligió como opción correcta “Sesenta más un número es igual a cinco veces otro número” incurriendo en un error de letras (III.3) pues asignó un mismo significado a distintas letras. Para el enunciado $x^2 - y^2 = 9$ (E3.1) consideró como opción correcta la expresión “El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve” donde el error es de complicación estructural la cual puede estar vinculada a la confusión de los conceptos perímetro y área. En el caso de x^3 (E4.1) el estudiante tomó como traducción “El triple del lado de un cubo” donde muestra un error de potenciación–multiplicación (III.4). Por lo que nos explicó en la entrevista pensamos que el error puede deberse a querer dar la respuesta rápidamente y no pararse a pensar en ella.

En el caso de los enunciados dados en representación verbal tenemos que para el enunciado “El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros” (E1.2) el sujeto eligió como traducción $x + (x + 6) = 92$ donde el enunciado es incompleto (I.1), percibió la relación entre los lados del rectángulo pero no el hecho de que hay dos lados iguales con la misma longitud. Para el enunciado “El doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés” (E2.2) tomó como traducción $2x + \frac{x}{4}$ considerando que la letra x son “años” independientemente de la persona a la que se refieran, incurriendo de nuevo en un error categorizado como de letras (III.3).

Durante la entrevista, no explicó la estrategia utilizada al realizar la tarea de elección de traducciones de enunciados. Reconoció que le había resultado más fácil elegir la opción cuya traducción es la del enunciado dado, aunque le había sido más difícil justificar dichas elecciones. Al preguntarle si había encontrado más dificultad en una de

las dos situaciones que componen la tarea de elección de traducciones de enunciados, reconoció que le resultó más fácil la Situación 1, esto es, las traducciones de enunciados en simbolismo algebraico a representación verbal.

Resumen del análisis del Sujeto S04: Como en el caso del sujeto S01 cuando la profesora investigadora le interrogó, realizó la tarea que no hizo en el papel. También reconoció algún error en el que incurre en la expresión contextualizada aunque si bien lo intentó, no llegó a subsanarlo y construyó otro enunciado incorrecto incurriendo en el mismo error al mantener la misma estructura en el enunciado construido. Al igual que sujetos anteriores, muestra dificultad para expresar, tanto simbólica como verbalmente, la relación entre un número y su consecutivo, poniendo además de manifiesto que opera con objetos como si se tratase de números. Muestra dificultades entre las operaciones de potenciación y multiplicación, que consideramos relacionadas con la confusión entre los conceptos de perímetro y área. Este estudiante muestra a través de sus errores dificultad con varios elementos del álgebra; tanto en la completitud de los enunciados, que a veces los deja incompletos y otras veces los sobrepasa, como en los elementos propios del simbolismo algebraico. No percibe la precisión que exige el lenguaje verbal para expresar las relaciones algebraicas presentes en expresiones simbólicas y, recíprocamente, que la expresión verbal se representa simbólicamente de una manera concreta. Esta percepción escasa de la precisión le hace no prestar la suficiente atención al dar sus respuestas.

VI.5. SUJETO S05

Mostramos en este apartado el desempeño del sujeto S05 en las tareas realizadas en esta investigación.

En la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados, dejó cuatro enunciados sin traducir, tres de ellos dados mediante representación verbal (E1, E4 y E7) y el otro mediante simbolismo algebraico (E6). Efectuó correctamente la traducción de un enunciado (E9), dado mediante simbolismo algebraico e incurre en algún error en los demás, como podemos ver en la tabla VI.5.

Tabla VI.5. Desempeño de S05

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	NR		
E2	Inc (III.1, III.3)	NR	
E3	Inc (I.1, III.3)	NR	
E4	NR		
E5	Inc (III.3)		
E6	NR		
E7	NR		
E8	Inc (I.1, I.2)	NR	
E9	C		
E10	Inc (III.4)		
E11	Inc (I.1, III.3)		
E12	Inc (I.2, III.1)	Inc (I.1)	
E1.1			C
E2.1			C
E3.1			Inc (III.4)
E4.1			C
E1.2			Inc (II.4)
E2.2			C
E3.2			Inc (I.1)
E4.2			C

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la entrevista le preguntamos, en primer lugar, por los enunciados que dejó en blanco en la tarea de construcción de traducciones de enunciados no contextualizados. Le pedimos que realizara las traducciones y las hizo correctamente. Sobre los enunciados dados mediante simbolismo algebraico y en los que incurre en error, se dan las siguientes situaciones. Para el enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) hizo la traducción “Un número par multiplicado por la mitad de un número, es igual que un número par multiplicado por otro” donde realiza una generalización (III.1) al tomar los coeficientes 4 y 2 como incógnitas cuyos valores son los números pares y asigna más de un significado a una misma letra, error tipificado como de letras (III.3). En el enunciado $x \cdot (x+1) = 7x$ (E5) construyó como traducción “Un número multiplicado por otro número más uno, es igual a siete por un número”, donde de nuevo incurre en un error tipificado como de letras al asignar más de un significado a una misma letra (III.3) y no

percibir que si x es un número, $x+1$ es el número siguiente y no “otro número más uno”. Para $x^2 - y^2 = 11$ (E10) realizó como traducción “Un número elevado al cubo menos otro número elevado al cubo, es igual a once” donde consideramos que el error es de complicación estructural (III.4) al confundir los exponentes de las potencias cuadradas con las cubicas. Pensamos que este error puede ser debido a falta de atención en la lectura de la expresión. El enunciado $x + (x+1) - 4$ (E12) lo tradujo como “Un número más otro número más su siguiente, menos un número par” siendo en este caso los errores debidos a la completitud del enunciado, en concreto el enunciado es desmedido (I.2), ve que está expresada la relación de un número con su siguiente pero repite la expresión “mas otro número”, también incurre en un error de generalización (III.1) al considerar de nuevo a 4 como un número par (como ocurrió en el enunciado E2).

Respecto a los enunciados traducidos erróneamente que están dados en representación verbal, hallamos lo siguiente. Tradujo el enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos” (E3) como $x + 1 = x - 2$. Este enunciado construido es incompleto (I.1) pues en el miembro de la izquierda le falta un término que represente a “un número” y además asigna un mismo significado a distintas letras al representar con la misma letra los distintos números a los que se refiere el enunciado verbal (III.3). En “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) construyó como representación simbólica $2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)$. Consideramos que se trata de un enunciado desmedido (I.2) pues sobra el primer término independiente de la expresión y además es un enunciado incompleto (I.1) pues a la letra x le falta un coeficiente para expresar la paridad. En el caso del enunciado “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número” (E11) consideró la traducción $\sqrt{x} = y$, donde se trata de un enunciado incompleto (I.1) pues el estudiante ha obviado la parte de “el cuadrado de” y además asigna un mismo significado a distintas letras (III.3).

Durante la construcción de traducciones de enunciados contextualizados, construyó para el enunciado $x + (x+1) - 4$ (E12), como traducción contextualizada, “Mi edad más otro año menos cuatro” (S05-1-E12), donde incurre en un error de enunciado incompleto (I.1), al faltarle una letra. Parece que al escribir “más otro año” entiende que queda dicho que se trata de un año más de los que contempla la edad. En la entrevista le

preguntamos por este enunciado, negándose a construir uno nuevo o mejorar la redacción del había construido justificando que no sabía cómo hacerlo. En esta construcción, interpretó la parte literal como una incógnita y realizó una traducción textual de las operaciones que intervienen en el mismo.

Durante el desarrollo del torneo, realizó una lectura lineal, esto es, no relacionó las distintas representaciones (verbal y simbólica) de un mismo enunciado algebraico dado en las piezas del dominó.

En la elección de traducciones, realizó correctamente la selección de opciones correctas en cinco enunciados (E1.1, E2.1, E4.1 E2.1 y E4.2). Los tres primeros enunciados vienen dados mediante simbolismo algebraico, y es necesario elegir su representación verbal, y los dos segundos al contrario. En los demás enunciados (E3.1, E1.2 y E3.2) incurre en errores. En el caso del enunciado $x^2 - y^2 = 9$ (E3.1) tomó como elección el enunciado “El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve” donde incurre en un error de complicación estructural (III.4), vinculado a la foncusión de los conceptos perímetro y área. Para el enunciado “El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros” (E1.2) eligió como elección la representación simbólica $2x \cdot 2(x+6) = 92$ poniendo de manifiesto una confusión de las operaciones de suma y multiplicación (II.4). Los errores de estos dos enunciados sugieren confusión entre perímetro y área de un paralelogramo. Por último, en el enunciado “El número de ruedas de dos coches es ocho” (E3.2) optó por la expresión $x=8$ donde se trata de un enunciado incompleto (I.1) pues x es el “número de ruedas de un coche” y por tanto la expresión no recoge el hecho de que se trata de dos coches.

Este estudiante declaró, al finalizar la entrevista, que al elegir una opción correcta y una incorrecta, le resultó más fácil elegir una opción correcta, argumentando que “en las incorrectas es más fácil que te engañen en algo”, parece que quiere decir que hay que mirar más detenidamente ya que alguna información puede pasar inadvertida. Al preguntarle si había encontrado más dificultad en una de las situaciones que componen la tarea de elección de traducciones de enunciados, reconoció que le resultó más fácil la Situación 2, esto es, las traducciones de enunciados en representación verbal a

simbolismo algebraico, expresando que “para mí es más fácil si me dan un enunciado verbal y ya sacar el simbólico”. Esta percepción del estudiante no se corresponde con el resultado de su trabajo, pues en el desarrollo de todas las tareas incurre de manera reiterada en un mismo tipo de error, enunciado incompleto (I.1) además de que la mayoría de los enunciados erróneos o que no responde, son los que le presentamos mediante representación verbal. Apreciamos en los párrafos anteriores ciertas contradicciones en los razonamientos de este estudiante.

Resumen del análisis del Sujeto S05: Este sujeto, al realizar construcciones de enunciados no contextualizados manifiesta dificultades relacionadas con la generalización al considerar números pares particulares como incógnitas que pueden tomar como valores los números pares. Muestra dificultades para establecer la relación entre un número y su consecutivo. Su principal dificultad está en el uso de las letras al asignar más de un significado a una misma letra o asignar un mismo significado a distintas letras. Durante la entrevista, este estudiante mostró que cuando realiza la tarea a petición de la profesora investigadora, lo hace tranquilamente llegando a más resultados correctos que cuando la tarea la hace de forma escrita, parece que él solo le pone menos atención y no reflexiona lo suficiente por lo que produce menos soluciones correctas.

VI.6. SUJETO S06

El sujeto S06 manifiesta el desempeño que explicamos a continuación. En la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados no dejó ningún enunciado en blanco, realizó correctamente la traducción de tres enunciados (E4, E6 y E10), el primero dado mediante representación verbal y los otros dos mediante simbolismo algebraico. En los demás, incurre en algún error (ver tabla VI.6).

Tabla VI.6. Desempeño de S06

Enunciado	Tareas		Elección
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	
E1	Inc (III.3)		

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E2	Inc (I.1, III.2)	Inc (I.2) C	
E3	Inc (III.3)	NR	
E4	C		
E5	Inc (I.1, I.2)		
E6	C		
E7	Inc (I.1, I.2, III.4)		
E8	Inc (III.2)	NR	
E9	Inc (II.3, III.4)		
E10	C		
E11	Inc (I.2)		
E12	Inc (I.2)	Inc (I.1, I.2)	
E1.1			C
E2.1			C
E3.1			Inc (III.4)
E4.1			Inc (III.4)
E1.2			Inc (II.4)
E2.2			Inc (III.3)
E3.2			C
E4.2			Inc (II.3)

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la construcción de enunciados no contextualizados que vienen dados en simbolismo algebraico encontramos lo siguiente: para el enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2), el estudiante construyó la expresión verbal “Cuatro por su mitad es igual a un número” donde en la parte de la izquierda realiza una particularización (III.2), ha tomado x como 4, ha traducido “cuatro por su mitad” cuando en realidad se trata de “cuatro por la mitad de un número”; el enunciado es incompleto (I.1) pues la parte derecha de la igualdad, $2x$, la tradujo como “un número” sin especificar concretamente que se trata de “un número par”. En el caso del enunciado $x \cdot (x+1) = 7x$ (E5) construyó como traducción “Un número por un número y su siguiente es igual a un número”. En esta traducción entendemos que para el miembro izquierdo de la igualdad hay una expresión que consideramos desmedida (I.2) al sobrar la expresión “un número y”. Si en lugar de poner “y” en la frase, hubiese puesto “que es” dicha frase quedaría “Un número por un número que es su siguiente” la cual estaría correcta. Vemos que establece la relación entre dos números consecutivos cuando aparecen escritos mediante expresión simbólica

pero su manera de expresarlo no es correcta. En el miembro derecho de la igualdad la traducción que hizo es incompleta (I.1) ya que no expresa el coeficiente que tiene la letra y a todo el producto le llama un número, cuando en realidad se trata de los múltiplos de 7. Para el enunciado dado por $(\sqrt{x})^y$ (E9) tomó como traducción “La raíz cuadrada de un número por la multiplicación de sus exponentes”. En esta traducción vemos que percibe la raíz cuadrada del número, introduce la idea de un producto, que no aparece en la expresión, e indica “los exponentes” porque es probable que este estudiante no entienda que el exponente sea una letra y por tanto esté intentando interpretarlo como un producto pero al estar en superíndice habla de exponentes. Por todo ello entendemos que incurre en un error de confusión de las operaciones de potenciación y multiplicación (II.3) y de complicación estructural (III.4). Tradujo el enunciado $x + (x+1) - 4$ (E12) como “Un número más otro número más su siguiente menos cuatro” que es desmedido de nuevo (I.2) al sobrarle la expresión “más otro número”. Si se cambiara la frase “más su siguiente” por “que es su siguiente” sería correcta, ahondando en nuestra idea de que percibe la relación de dos números consecutivos pero no consigue expresar correctamente dicha relación de manera verbal.

Cuando los enunciados vienen dados por su representación verbal, hallamos errores en todos los enunciados menos en uno: “Un número por su cuadrado es igual a su cubo” (E4). Tradujo el enunciado “El producto de la mitad de un número por el triple de otro número” (E1) como $\frac{x}{2} \cdot 3x$ cuyo error es tipificado como de letras (III.3) al asignar más de un significado a una misma letra, considera que la palabra “número” es la que tiene asignada la letra x , no dando significado a la palabra “otro”; por lo que no distingue que “otro número” no puede ser representado también por x . En el enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos” (E3) construyó como representación simbólica la expresión $x + (x+1) = x - 2$ donde incurre de nuevo en un error de letras (III.3) al asignar más de un significado a una misma letra, nuestra explicación a esta respuesta coincide con la que hicimos para la traducción anterior. En el caso del enunciado “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” (E7) tomó como construcción la representación simbólica $(x+1) + (x+2) = x^2$ efectivamente escribe la suma de dos números consecutivos pero dicha suma no está elevada al

cuadrado, por lo que consideramos que el enunciado por esa parte está incompleto (I.1). A su vez, escribió una igualdad en la que el miembro derecho es x^2 por lo que lo consideramos desmedido (I.2) y presenta complicación estructural (III.4). Parece que pretendió escribir así el cuadrado que no puso a la expresión simbólica y que sí se decía en la verbal. Como traducción para el enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) consideró la expresión simbólica $2 - \frac{x}{4}$ donde realiza una particularización (III.2) al considerar “un número par” como un número concreto (2). En el caso del enunciado “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número” (E11) la traducción a simbolismo algebraico que hizo fue $x^2 \sqrt{x^2} = x^2$ donde se trata de un enunciado desmedido (I.2) pues sobra tanto el primer x^2 que multiplica a la raíz como la potencia de la segunda parte de la igualdad. Parece que hace una interpretación lineal del enunciado y escribe el cuadrado de un número por la raíz cuadrada. También parece que, a continuación, considera que está tomando x^2 como un número.

En la construcción de traducciones de enunciados contextualizados, este estudiante construyó tres, dos para el enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) y uno para la representación simbólica $x + (x+1) - 4$ (E12). Una de las construcciones contextualizadas de $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) fue “Cuatro bizcochos por la mitad es igual al doble de los bizcochos” (S06-2-E2) que consideramos correcta teniendo en cuenta que el producto es asociativo e interpretando bizcochos como “una cantidad de bizcochos”, si bien creemos que esto no ha sido tenido en cuenta por el sujeto y que su acierto se ha debido al azar. En las otras dos traducciones incurre en errores. El enunciado “Cuatro coches [...] por la mitad de dos coches, es igual al doble de dichos coches” (S06-1-E2) es desmedido (I.2), el coeficiente 4 lo supone acompañado de una letra (“cuatro coches”), considera además que la letra x está dividida entre 2 (“mitad de dos coches”) y su frase referida al miembro derecho de la igualdad da a entender que la x representa a todo lo que hay en el miembro izquierdo (“dichos coches”). En el caso de $x + (x+1) - 4$, el enunciado construido es “Una pelota de fútbol más [...] dos pelotas de fútbol, menos cuatro

pelotas de fútbol” (S06-1-E12), donde incurre en dos errores simultáneamente: el estudiante toma x como “una pelota de fútbol”, y considera que si le suma 1 entonces la expresión $x+1$ significa “dos pelotas de fútbol”, no percatándose que no es posible sumar un objeto y un número por ser entes de distinta naturaleza, y a la constante 4 le añade una letra pues interpreta que significa tener “cuatro pelotas de fútbol”. Haciendo una interpretación del enunciado que ha construido, teniendo en cuenta que considera que x es “una pelota de fútbol”, este enunciado por un lado es incompleto (I.1) pues le falta expresar la relación entre un número y su siguiente, y por otro lado es desmedido (I.2) pues a la constante 4 le añade una letra al considerar “cuatro pelotas de fútbol” y le sobraría por tanto esa letra que le acompaña. En estas construcciones el estudiante considera que x es un objeto concreto (bizcochos, coches o pelotas de fútbol), y que para evitar la situación de operar dichos objetos con números, a los valores numéricos también les asigna el objeto.

En los tres enunciados contextualizados construidos interpretó la parte literal del enunciado como un objeto y realizó una traducción textual de las operaciones que intervienen en el mismo. Durante el desarrollo del torneo, este sujeto realizó una lectura lineal de los enunciados en algunas ocasiones y, en otras, realizó las lecturas relacionando las dos representaciones (verbal y simbólica) de los enunciados proporcionados en las piezas del dominó.

En la entrevista realizada, le preguntamos por los enunciados contextualizados que construyó. Al reflexionar sobre la interpretación simbólica de sus construcciones, reconoció que no correspondían con las que le dábamos. Los nuevos enunciados que construyó seguían sin coincidir con las expresiones en simbolismo algebraico dadas, incurriendo además en el mismo tipo de errores. Esto muestra que aunque reconoce errores no tiene la capacidad de subsanarlos.

En la elección de traducciones, realizó correctamente la elección de dos enunciados dados mediante simbolismo algebraico [$5 + x + y$ (E1.1) y $x + 60 = 5x$ (E2.1)] y la de uno dado por su representación verbal [“El número de ruedas de dos coches es ocho” (E3.2)]. En el resto de las elecciones incurre en errores. Para el enunciado $x^2 - y^2 = 9$ (E3.1) tomó como traducción correcta la representación verbal “El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también

cuadrada es igual a nueve”, donde el error es debido a complicación estructural (III.4). Como ya ocurriera con otros sujetos, presenta confusión entre las nociones de perímetro y área de un cuadrado. En el caso del enunciado x^3 (E4.1), eligió como traducción “El área de un cubo” incurriendo de nuevo en un error de complicación estructural (III.4) al confundir el área con el volumen de un cubo. Eligió como traducción del enunciado “El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros” (E1.2) $2x \cdot 2(x+6) = 92$ donde el error se debe a la confusión de las operaciones del cálculo del perímetro por el cálculo del área de la figura (II.4). De nuevo muestra dificultades en las nociones de perímetro y el área de un rectángulo. En el enunciado “El doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés” (E2.2) eligió como traducción $2x + \frac{x}{4}$ donde el error es tipificado como de letras (III.3), al asignar más de un significado a una misma letra. Como ocurre también en la construcción de traducciones, asigna a “años” la letra x y no considera que al ser los sujetos diferentes, las letras también han de serlo. Como traducción del enunciado “El área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina” (E4.2) consideró la representación simbólica $2x \cdot y$ mostrando confusión de las operaciones de potenciación y multiplicación (II.3).

Al preguntarle por esta elección de traducciones de enunciados en la entrevista, reflexionó en voz alta con la profesora investigadora en cada enunciado por el que le preguntamos, sobre cada una de las opciones de respuesta, para razonar cuál es la opción correcta y por qué, para justificarnos sus elecciones. Por ejemplo, sobre el enunciado E2.2 (El doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés); para el que eligió la expresión $2x + \frac{x}{4}$ razonó: “porque es el doble de los años que tiene Jesús, que es dos equis, más un cuarto de equis sería los años que tiene Inés y cuatro es....equis ...el cuarto es...arriba en la fracción equis que es los años de Inés y abajo es el cuatro”; confirmando nuestra interpretación de que asigna x a los años, sin diferenciar dos sujetos.

Al finalizar la entrevista, en lo que se refiere a esta última tarea, reconoció que le había resultado más difícil tener que explicar cuando un enunciado era incorrecto porque para explicar cuándo es correcto “solo tienes que explicar cómo lo has hecho, y

en la incorrecta pues qué es lo que falla y todo eso, lo que está mal”. Al interrogarle si había encontrado más dificultad en una de las situaciones que componen la tarea de elección de traducciones de enunciados, reconoció que le resultó más fácil la Situación 1, esto es, las traducciones de enunciados en simbolismo algebraico a representación verbal pues, según explica, “ves el enunciado simbólico y ya solo es encajarlo con el verbal, el otro es más difícil porque es más largo y he tenido que leerlo más veces”.

Resumen del análisis del Sujeto S06: Este estudiante entiende, por lo que dice en la entrevista, que la explicación del procedimiento que lleva a hacer algo de forma correcta consiste en decir cómo se ha hecho. La mayoría de los errores en los que incurre este sujeto, en la construcción de enunciados no contextualizados, son debidos a las características propias del simbolismo algebraico (generalización, uso de las letras y complicación estructural) y a la completitud del enunciado (tanto incompleto como desmedido). Hace la asignación de la letra como un objeto o cosa despojada de otras palabras de la oración que indican que la misma palabra se refiere a situaciones diferentes y no pueden ser representadas por la misma letra. Muestra confusión en los conceptos de perímetro y área de un paralelogramo (cuadrado y rectángulo), así como del área y el volumen de un cubo y escaso dominio del vocabulario geométrico. Al igual que otros sujetos, este estudiante muestra que de manera oral es capaz de subsanar sus errores al ir realizando las tareas de manera más reflexionada en presencia de la profesora investigadora.

VI.7. SUJETO S07

El desempeño del sujeto S07 es como sigue. En la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados, no dejó ningún enunciado en blanco. Tradujo correctamente cinco de los doce enunciados (E3, E4, E6, E10 y E12) de los cuales, los dos primeros venían dados mediante su representación verbal y los tres restantes mediante simbolismo algebraico. En los otros siete enunciados incurre en algún error (ver tabla VI.7), donde cuatro venían dados por su representación verbal (E1, E7, E8 y E11) y los otros tres mediante simbolismo algebraico (E2, E5 y E9).

Tabla VI.7. Desempeño de S07

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	Inc (III.3)		
E2	Inc (I.1)	NR	
E3	C	NR	
E4	C		
E5	Inc (I.1)		
E6	C		
E7	Inc (III.4)		
E8	Inc (III.2)	NR	
E9	Inc (III.2)		
E10	C		
E11	Inc (III.4)		
E12	C	C	
E1.1			C
E2.1			Inc (I.2)
E3.1			C
E4.1			Inc (II.3)
E1.2			C
E2.2			C
E3.2			C
E4.2			Inc (II.3)

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

Incorre en errores en la construcción de tres de los enunciados que vienen dados mediante simbolismo algebraico. Parece que muestra menos dificultades con este tipo de enunciados. Para el enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) construyó como representación verbal “Cuatro por la mitad de un número es igual a dos por un número” donde consideramos que se trata de un enunciado incompleto (I.1), al traducir la segunda parte de la igualdad sin especificar que se trata del mismo número que tomamos al principio. En este caso entendemos que el error se debe a que el estudiante tradujo como x la expresión “un número”, en el miembro izquierdo es la mitad de “un número”, y en el miembro derecho es dos por “un número”. Realizó una traducción incompleta (I.1) del enunciado $x \cdot (x+1) = 7x$ (E5) pues escribió “un número por su siguiente es igual a siete x ”. En el caso del enunciado $(\sqrt{x})^y$ (E9) tomó como traducción “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número” donde realiza una particularización (III.2) al considerar que la

potenciación que se hace es elevar al cuadrado. Puede suceder que el estudiante haya confundido la y por 2, o entender que se expresa como cuadrado un exponente cuando este no es un número. En ambos enunciados considera las letras como etiquetas (x es “un número”).

En el caso de los enunciados dados por su representación verbal, encontramos las siguientes situaciones. En el enunciado “El producto de la mitad de un número por el triple de otro número” (E1), lo tradujo como $\left(x \cdot \frac{x}{2}\right) \cdot 3$. Un análisis de esta expresión muestra que tiene recogidos los elementos relevantes de la expresión oral, producto, triple y la introducción de la letra x en dos factores del producto, su error está en que en la expresión no se recoge la idea de que no se trata del mismo número por lo que consideramos que es un error que tipificamos como de letras (III.3). Tradujo el enunciado “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” (E7) como $(x + x + 1)^3$ donde a pesar de expresar correctamente la relación entre un número y su siguiente, incurre en un error de complicación estructural (III.4) al no expresar correctamente la forma realizar la operación de elevar al cuadrado una expresión, puede ser debido a una distracción al poner el exponente. Para el enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) construyó como representación simbólica $2 - \frac{x}{4}$ donde realiza una particularización (III.2) al considerar “un número par” como un número concreto (2). En el caso del enunciado “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número” (E11) construyó la expresión simbólica dada por $(\sqrt{x})^3 = x$. Consideramos que se trata de un error de complicación estructural (III.4) pues el exponente usado es 3 en lugar de 2. Este estudiante parece manifestar así dificultades para expresar simbólicamente una potenciación cuando se trata de elevar un término al cuadrado.

Durante el torneo, construyó un enunciado contextualizado para el enunciado dado mediante simbolismo algebraico $x + (x + 1) - 4$ (E12): “Mi edad, más la edad mía dentro de un año, menos cuatro años que tiene mi hermano” (S07-1-E12). En este enunciado, interpretó la parte literal como una incógnita dando significado a las operaciones que intervienen en el enunciado. En cuanto a la lectura de enunciados, durante el desarrollo

del torneo, en los enunciados de las piezas, este estudiante realizó una lectura lineal de los mismos, no llegando a relacionar las distintas representaciones (verbal y simbólica) de un mismo enunciado dado.

Eligió de manera acertada la opción de respuesta en dos enunciados dados por su representación verbal (E1.1 y E3.1) y de tres enunciados dados mediante simbolismo algebraico (E1.2, E2.2 y E3.2); en los demás incurre en error (ver tabla VI.7).

Para el enunciado $x + 60 = 5x$ (E2.1) consideró como traducción correcta la representación verbal “Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco” siendo una traducción desmedida (I.2) ya que sobran términos de la frase pues indica dos veces que hay que multiplicar el número (x) por cinco. Este error puede deberse a un afán por no olvidarse del coeficiente 5, de la expresión simbólica, o a una distracción, como se desprende de la siguiente conversación de la entrevista.

- *Profesora: Vamos a ver el enunciado dos de la situación uno. Sin mirar el enunciado simbólico dado, ¿puedes volver a leer el enunciado verbal que has marcado como correcto?*
- *S07: Sí....*
- *Profesora: ¿Cuál has marcado?*
- *S07: El b. Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco.*
- *Profesora: ¿Cómo lo escribirías simbólicamente? Léelo despacio y ve diciéndome cómo lo escribirías.*
- *S07: Pues un número, “equis”, más sesenta, “equis” más sesenta, es igual a cinco veces ese número, sería cinco “equis”...por cinco....cinco “equis” por cinco.*
- *Profesora: ¿Y eso corresponde con el simbólico que yo te he dado?*
- *S07: No, porque no multiplica otra vez por cinco.*
- *Profesora: Vale. Entonces, ¿estaría bien o estaría mal?*
- *S07: Estaría mal.*
- *Profesora: ¿Puedes decirme cuál estaría bien?*
- *S07: Pues el c. Al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco.*

Una vez más apreciamos la poca importancia que dan estos estudiantes a proponer una expresión verbal que sea fiel reflejo de las relaciones que se presenta en la expresión simbólica y es necesario hacer una llamada de atención para que se fijen y rectifiquen. En el caso del enunciado x^3 (E4.1), la traducción que eligió el sujeto es “El triple del lado de un cubo”, incurriendo en un error de confusión de operaciones de potenciación y multiplicación (II.3) En este caso aprecia, por el exponente 3, que se trata de un cubo, pero no aprecia que pueda ser del volumen de un cubo cuyo lado es x ,

la poca familiaridad con las nociones geométricas y métricas pueden estar en el origen de este error. Para el enunciado “El área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina” (E4.2) eligió la representación simbólica $2x \cdot y$. Como ocurre con el cubo de la expresión anterior, para el área de una superficie cuadrada escribió $2x$ incurriendo en un error tipificado como potenciación-multiplicación (II.3). En la entrevista, le preguntamos por la elección de traducciones de enunciados y, reflexionó en voz alta en cada enunciado con la profesora investigadora, explicando sus elecciones sobre las opciones correctas e incorrectas. En la entrevista puso de manifiesto que al traducir una expresión de lenguaje verbal a simbólico lo hace a veces de forma secuencial y otras de forma global, como se percibe en el extracto recogido anteriormente.

Reveló en la entrevista que para elegir una opción correcta y una incorrecta, intentaba fijarse primero en las incorrectas pues “las incorrectas se notan al verlas, porque dicen una cosa que no tiene nada que ver”. Entendemos que la elección la hace descartando las incorrectas. A pesar de que le había resultado más fácil elegir la opción incorrecta, determinó que la explicación de la opción correcta le había supuesto menos esfuerzo. Explicar que una expresión es incorrecta requiere solo decir algo que no se corresponda, explicar que algo es correcto requiere de una justificación formal, eso es más complicado y algunas de sus razonamientos no consiguen ser justificaciones adecuadas. Al preguntarle si había encontrado más dificultad en una de las situaciones que componen la tarea de elección de traducciones de enunciados, reconoció que le resultaba más fácil la Situación 1, esto es, las traducciones de enunciados en representación verbal a simbolismo algebraico, porque “ya te dan los verbales y solo hay que explicar el simbólico”.

Resumen del análisis del Sujeto S07: Al construir enunciados contextualizados, la mayoría de los errores en los que incurre este estudiante se deben a características propias del simbolismo algebraico (particularización y complicación estructural). Incurre en el error de particularizar cuando se habla de “un número par”, algo que se repite en varios estudiantes, consideran que “un número par” es 2 o 4 o cualquier otro concreto, sin percibir que el artículo indeterminado “un” no se refiere a un número par concreto. Entendemos que las mayores dificultades de este estudiante están asociadas a

los errores que hemos clasificado como derivados de las características propias del simbolismo algebraico (particularización, III.2; letras, III.3; y complicación estructural, III.4). Al construir enunciados contextualizados no incurre en errores. Y al elegir traducciones los errores en los que incurre se deben a la confusión de las operaciones de potenciación y multiplicación, problema que parece estar ligado a la confusión del perímetro y área de una figura por lo que hemos podido entender de la entrevista y esta confusión es ajena al álgebra. Una inspección de su desempeño con otra mirada nos muestra que da poca importancia a la fidelidad de las traducciones que proporciona y que algunos de sus errores pueden tener como origen una base escasa de conocimiento geométrico.

VI.8. SUJETO S08

El sujeto S08 tiene el siguiente desempeño en las tareas de esta investigación. En la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados, dejó tres enunciados sin realizar (E1, E4 y E11), los tres dados mediante su representación verbal. Realizó correctamente la traducción de tres enunciados (E6, E9 y E10), los tres dados mediante simbolismo algebraico. Incurre en algún error en los seis restantes (ver tabla VI.8). A partir de este desempeño, entendemos que tiene mayor facilidad para trabajar con el simbolismo algebraico, que con la expresión verbal.

Tabla VI.8. Desempeño de S08

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	NR		
E2	Inc (II.4)	NR	
E3	Inc (I.1, III.3)	NR	
E4	NR		
E5	Inc (I.1, III.3)		
E6	C		
E7	Inc (I.1, I.2)		
E8	Inc (III.2, III.4)	NR	
E9	C		
E10	C		
E11	NR		
E12	Inc (III.3, III.4)	Inc (I.1, I.2)	

Enunciado	Tareas	
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados
E1.1		
E2.1		
E3.1		
E4.1		
E1.2		
E2.2		
E3.2		
E4.2		

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la entrevista le proponemos la relación de las traducciones de enunciados no contextualizados que dejó sin hacer. Realizó correctamente las traducciones. Como ejemplo reproducimos en el siguiente extracto de entrevista.

- *Profesora: Mi pregunta es, ¿por qué te dejaste algunos huecos sin rellenar? Que corresponden a los enunciados uno, cuatro y once.*
- *S08: No sé.*
- *Profesora: ¿Por qué no te dio tiempo o porque no sabías?*
- *S08: Porque no sabía hacerlos.*
- *Profesora: ¿Sabrías hacerlo ahora?*
- *S08: No sé.*
- *Profesora: Por ejemplo éste, dice “el producto de la mitad de un número por el triple de otro número”. ¿Sabrías expresarlo simbólicamente?*
- *S08: No.*
- *Profesora: ¿Por qué no? ¿Cómo se escribe la mitad de un número?*
- *S08: Partido, ¿no?*
- *Profesora: Un número cualquiera, ¿cómo lo escribes?*
- *S08: Equis.*
- *Profesora: ¿Y si es su mitad?*
- *S08: Equis partido dos.*
- *Profesora: El triple de otro número, ¿cómo se escribe?*
- *S08: Pues equis por tres.*
- *Profesora: ¿Y si es de otro distinto?*
- *S08: Tengo que decir otra letra, ¿verdad? Sería, i griega por tres.*
- *Profesora: Entonces, si es el producto de la mitad de un número por el triple de otro, ¿cómo se escribiría?*
- *S08: El producto es multiplicar, ¿verdad?*
- *Profesora: Si.*
- *S08: Sería, equis partido dos por i griega partido dos.*
- *Profesora: No, por el triple de otro número.*
- *S08: I griega partido tres*
- *Profesora: Triple. ¿Es lo mismo triple que partido tres?*
- *S08: ¿Multiplicar?*

- Profesora: No me preguntes. ¿Qué es el triple?
- S08: Multiplicar.
- Profesora: Entonces si yo voy a hacer el triple de un número, ¿cómo lo expreso?
- S08: No lo sé maestra.
- Profesora: Si lo sabes, si lo estás diciendo bien, has dicho multiplicando, ¿qué multiplicas?
- S08: El tres por la i.

Se aprecia que el estudiante construye la traducción pero no está seguro de lo que dice, es necesario mucha insistencia y validación de la profesora investigadora sobre lo que dice para quedar convencido, hasta construir correctamente el enunciado.

En los tres enunciados no contextualizados presentados mediante simbolismo algebraico en los que este estudiante incurre en errores encontramos lo siguiente. En el

caso del enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) construyó la traducción “Cuatro multiplicado, un

número dividido entre dos es igual a dos y un número” donde consideramos que el error es tipificado como suma-multiplicación (II.4) pues en la segunda parte expresa “dos y

un número” sin contemplar la operación producto. La traducción que tomó para el

enunciado $x \cdot (x+1) = 7x$ (E5) es “Un número por otro más uno” donde consideramos que es incompleto (I.1) pues le falta la segunda parte de la igualdad y además utiliza dos

letras al considerar “un número por otro” y después “más uno”, error que consideramos

de letras (III.3). En esta traducción observamos que no hay precisión en el lenguaje al

expresar relaciones algebraicas, como son entre un número y su siguiente, tradujo x

como “un número” y también como “otro número”, entendemos que verbalmente no

expresa la presencia del paréntesis al no hace pausa. En el enunciado $x + (x+1) - 4$

(E12) construyó la representación verbal “Un número más otro, menos uno, menos

cuatro” donde incide en el mismo error de la expresión anterior y además ha leído

incorrectamente el signo más o al hacer la expresión lo ha olvidado, indicando menos

uno. En este enunciado incurre en un error de letras (III.3) y además de complicación

estructural (III.4) pues no se trata de una resta sino de una suma.

En los tres enunciados no contextualizados dados por su representación verbal en los que incurre en errores, hallamos lo siguiente. En el caso del enunciado “Un número más

su consecutivo es igual a otro número menos dos” (E3) construyó como expresión

simbólica $x + x = x - 2$ que consideramos incompleta (I.1) pues en el miembro izquierdo

de la igualdad no expresa el consecutivo de x , además incurre en un error tipificado como de letras (III.3) al utilizar una única letra para expresar distintos significados. Como traducción del enunciado “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” (E7) consideró la representación simbólica $x^2 + x^2 = x^2$, la hemos tipificado como incompleta (I.1) y desmedida (I.2). Los dos números consecutivos los representa como si fueran el mismo número, utilizando una falsa distributividad al elevar al cuadrado los sumandos y no toda la suma. Además introduce una igualdad que no aparece en la expresión dada. En el tercero de los enunciados, “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) construyó la expresión simbólica $8 - \frac{2}{x}$. Como sucede con otros sujetos, realiza una particularización (III.2) pues toma “un número par” como uno concreto (8). Además, no expresa de forma correcta la fracción dada, por lo que incurre en un error de complicación estructural (III.4). Al traducir un enunciado dado verbalmente, este estudiante muestra más dificultades en la completitud del mismo (incompleto, I.1; desmedido, I.2) y relacionadas con las características propias del simbolismo algebraico (particularización, III.2; letras, III.3; complicación estructural, III.4). Manifiesta las dificultades al traducir relaciones tales como la “cuarta parte”, “un número y su siguiente” o “suma de cuadrados”.

En la construcción de traducciones de enunciados contextualizados, construyó un enunciado contextualizado, “Un melón más un melón más un melón menos cuatro melones” (S08-1-E12) para la expresión $x + (x+1) - 4$ (E12). En esta expresión el estudiante considera que x es un objeto concreto (melón), suma número de melones, y para no caer en la situación de operar objetos (melones) con números, a los valores numéricos 1 y 4 también les asigna el objeto melón. Interpretó la letra como un objeto y realizó una traducción textual de las operaciones del enunciado. La lectura de enunciados que hizo este sujeto durante el desarrollo del torneo fue lineal, no relacionando las distintas representaciones (verbal y simbólica) de un mismo enunciado.

En la entrevista, para el enunciado que construyó durante las traducciones de enunciados contextualizados, reconoce que la traducción a simbolismo algebraico no coincidía con la expresión dada y se negó a construir una nueva.

En la elección de traducciones eligió correctamente tres de los cuatro enunciados dados mediante simbolismo algebraico (E1.1, E2.1 y E3.1) y dos de los dados por

representación verbal (E2.2 y E4.2), en los demás incurre en algún error (ver tabla VI.8). En el caso del enunciado dado por su representación simbólica x^3 (E4.1), tomó el enunciado “El triple del lado de un cubo” donde el error en el que incurre se debe a confundir las operaciones de potenciación y multiplicación (II.3). Como ocurre con otros sujetos percibe, por el exponente, que hay un cubo pero no se fija en que no hay dato alguno que dé lugar a la frase triple. Para el enunciado “El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros” (E1.2) consideró como traducción correcta la representación simbólica $x + (x + 6) = 92$ que consideramos incompleta (I.1) ya que recoge la relación entre los lados del rectángulo pero no incluye el hecho de hay dos lados iguales con la misma longitud. Para el tercero de los enunciados dados en representación verbal, “El número de ruedas de dos coches es ocho” (E3.2), eligió como expresión simbólica $x^2 = 8$ cuyo error es debido a confusión de nuevo de las operaciones de potenciación y multiplicación (II.3). En este tipo de traducciones, este sujeto muestra dificultades en las operaciones de potenciación y multiplicación, dificultades que consideramos derivadas de la aritmética.

Durante la entrevista, al preguntarle por esta tarea de elección de traducción de enunciados, reflexionó en voz alta en cada enunciado y cada una de las opciones de respuesta. Razonó cuál era la opción correcta y explicó sus elecciones, pues en el trabajo escrito realizó bien algunas de las elecciones pero las explicaciones que daba eran confusas. Por ejemplo, en el enunciado “El doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés” (E2.2) eligió correctamente una traducción incorrecta del enunciado dado (apartado a, $4 + \frac{x}{4}$) pero su justificación fue: “porque el doble es $2x$ no cuatro porque tú no sabes la edad que tenía al principio”. En el siguiente extracto de entrevista vemos la explicación que da a su elección en este enunciado E2.2:

- *Profesora: Pero, ¿qué está mal, tu elección o la explicación?*
- *S08: Los dos.*
- *Profesora: Piénsalo bien.*
- *S08: Yo creo que la explicación.*
- *Profesora: ¿Puedes explicármelo bien entonces?*
- *S08: Dos de “x” sería el doble de los años que tiene Jesús, más “y” que sería...no, como no sabemos cuántos años tiene Inés, pues “y”, la cuarta parte.*

Finalmente, expuso que cuando tuvo que elegir y explicar por qué un enunciado es correcto o incorrecto, le había resultado más fácil explicar por qué es incorrecto. Sobre si había encontrado más dificultad en una de las situaciones que componen la tarea de elección de traducciones de enunciados, reconoció que le resultaba más fácil cuando le damos un enunciado verbal y distintas opciones expresadas mediante simbolismo algebraico (la Situación 2) aunque no sabía explicar bien por qué.

Resumen del análisis del Sujeto S08: Para este estudiante, en la construcción de enunciados no contextualizados, muestra dificultades asociadas a características propias del simbolismo algebraico y a la completitud de los enunciados. En el enunciado construido no contextualizado, los errores en los que incurre se centran en la completitud del mismo. Al igual que el sujeto S07, al elegir traducciones confunde las operaciones de potenciación y multiplicación, problema que, por lo que hemos podido percibir de la entrevista, parece estar ligado a la no distinción entre perímetro y área de una figura. Hemos observado en este sujeto que no hay precisión en el lenguaje al expresar relaciones algebraicas, como por ejemplo al hablar de un número y su consecutivo. La traducción de letras como objetos es llamativa en este sujeto.

VI.9. SUJETO S09

El sujeto S09 sigue el desempeño que describimos a continuación. En la construcción de enunciados no contextualizados no dejó ningún enunciado en blanco, tradujo correctamente los seis dados mediante simbolismo algebraico y cuatro de los seis dados por su representación verbal, en los demás incurre en error. En la construcción de enunciados contextualizados realizó dos construcciones, una correcta y otra errónea. Y en la elección de traducciones realiza correctamente cinco de las ocho traducciones, incurriendo en error en las tres restantes (ver tabla VI.9).

Tabla VI.9. Desempeño de S09

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	C		

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E2	C	Inc (I.2, III.3)	
E3	C	C	
E4	C		
E5	C		
E6	C		
E7	Inc (I.1)		
E8	Inc (I.1)	NR	
E9	C		
E10	C		
E11	C		
E12	C	NR	
E1.1			Inc (III.1)
E2.1			C
E3.1			Inc (III.4)
E4.1			Inc (III.4)
E1.2			C
E2.2			C
E3.2			C
E4.2			C

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la construcción de enunciados no contextualizados incurre en errores en dos enunciados dados por su representación verbal. Ambos enunciados construidos resultados ser incompletos (I.1). En el caso del enunciado “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” (E7) construyó como expresión simbólica la expresión $(x + x + 1)$ que si bien expresa los dos números consecutivos y su suma, le falta la potencia para indicar que se trata del cuadrado. La expresión simbólica que toma para el enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) es $x - \frac{1}{4}$, no percibe que escribir solo x , sin el coeficiente 2, puede indicar un número tanto par como impar, por tanto le falta el coeficiente para indicar que el primer número es un número par. Podemos interpretar estos errores de incompletitud de enunciados como distracción del estudiante dado que no manifiesta dificultades en las otras traducciones realizadas.

Durante la construcción de traducciones de enunciados contextualizados, construyó dos enunciados. Para el enunciado $x + (x + 1) = y - 2$ (E3) realizó la siguiente traducción: “Mi edad más mi edad más uno es igual a la edad de Elena menos dos” (S09-1-E3). Traduce x como “mi edad”. Entendemos que por edad quiere decir el número de años,

en cuyo caso se le puede sumar uno. Debido a esta interpretación lo aceptamos como correcto. No obstante, pone de manifiesto la dificultad para utilizar el vocabulario matemático de manera correcta. Para el enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) el enunciado contextualizado que construyó fue “Cuatro coches por la mitad de una silla es igual al doble de dicha silla” (S09-1-E2). Este enunciado presenta algunos errores, uno de ellos es identificar las letras (variables) como objetos. Considera que el coeficiente 4 está acompañado de letra, esto es, para no caer en la situación de operar objetos (sillas) con números, a los valores numéricos también les asigna el objeto. El estudiante dice la “mitad de una silla”, a continuación señala el “doble de una silla”, por lo que entendemos que divide y multiplica un objeto por un número. Se trata de un enunciado desmedido (I.2) pues le sobraría esa letra que acompañaría al 4, además incurre en un error tipificado de letras (III.3) pues utiliza dos significados para una misma letra. En la entrevista le preguntamos por este enunciado contextualizado erróneo (S09-1-E2), reconoció que la interpretación simbólica de su enunciado no correspondía con el dado y construyó uno nuevo: “Cuatro por la mitad de mi edad es igual al doble de mi edad”. Para este enunciado consideró que x era su edad (su número de años) y, por tanto, entendemos que la traducción es correcta.

En los dos enunciados contextualizados construidos interpretó la parte literal como objetos e hizo una traducción textual de las operaciones del enunciado dado. En cuanto a la lectura de enunciados durante el torneo, este sujeto en unas ocasiones realizó una lectura lineal y en otras una lectura relacional, esto es, relacionando las dos representaciones dadas (verbal y simbólica) de los enunciados algebraicos que forman las piezas del dominó.

En la tarea de elección de traducciones, realizó correctamente la selección en los 4 enunciados dados mediante su representación verbal, donde tenía que elegir su representación simbólica (E1.2, E2.2, E3.2, E4.2). En los enunciados dados mediante simbolismo algebraico donde tenía que elegir su representación verbal realizó la selección correctamente para uno de ellos (E2.1), en los demás incurre en error. En el enunciado $5 + x + y$ (E1.1) consideró la traducción “Un número impar más una edad más otra edad”. Además de incidir en la reflexión hecha anteriormente en relación con

la edad, señalamos que hace una generalización (III.1) al indicar un número impar en lugar de especificar que se trata del número concreto 5. Como traducción del enunciado $x^2 - y^2 = 9$ (E3.1) tomó “El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve”. Del enunciado x^3 (E4.1) eligió “El área de un cubo”. En ambos casos consideramos que incurre en un error de complicación estructural (III.4). En estos dos últimos enunciados entendemos que la confusión puede ser debida a deficiencias en el conocimiento geométrico.

En la entrevista le preguntamos por algunos de las elecciones de traducciones y explicó cómo eligió sus opciones. En sus respuestas a los interrogantes finales de la entrevista, declaró que al elegir una opción correcta y una incorrecta, le había resultado más fácil elegir la opción incorrecta. Sin embargo, al justificar por qué un enunciado era incorrecto le había resultado menos complicado realizar estas explicaciones. Sobre la dificultad en las elección de traducciones, reconoció que le resultaba más fácil la Situación 2, esto es, las traducciones de enunciados en representación verbal a simbolismo algebraico comentando: “tú me pones el simbólico y las cuatro frases y pueden significar muchas cosas, puede haber más que se parezcan”. Muestra así menos dificultad cuando le damos distintas opciones expresadas mediante simbolismo algebraico y tiene que elegir la traducción entre distintas representaciones verbales dadas.

Resumen del análisis del Sujeto S09: Este estudiante realiza adecuadamente la mayor parte de las diferentes tareas. Los pocos errores que hace, en la construcción de enunciados no contextualizados corresponden a la completitud del enunciado. En la elección a las características propias del simbolismo algebraico y en la construcción de enunciados contextualizados, a las otras categorías (derivados de la aritmética y de las características propias del simbolismo algebraico). Este estudiante muestra facilidad para explicar y razonar sobre lo que hace y corregir sus errores. Parece que tiene más dificultad en los enunciados dados mediante representación verbal cuando estos no son contextualizados. Al dárselos en representación verbal muestra menor dificultad cuando tiene que elegir entre una variedad de traducciones dadas. Algunos de sus errores pueden ser achacables a escaso conocimiento de nociones geométricas. También se

percibe tendencia a expresar operaciones aritméticas entre entes no numéricos y entre números y entes no numéricos.

VI.10. SUJETO S10

El desempeño del sujeto S10 es el que mostramos a continuación. En la construcción de enunciados no contextualizados no dejó ningún enunciado en blanco, tradujo correctamente todos menos dos (E7 y E8) dados mediante su representación verbal. En la construcción de enunciados contextualizados realizó seis traducciones para los cuatro enunciados simbólicos dados (E2, E3, E8 y E12) siendo cuatro de ellas correctas. En la elección de traducciones de enunciados, realizó correctamente cinco de las ocho selecciones, incurriendo en errores en las tres restantes. Presentamos en la tabla VI.10 el desempeño de en las diferentes tareas de la investigación.

Destacamos que este estudiante, junto con el S12, es el que más enunciados contextualizados construyó. Además, en la primera ronda del torneo es el ganador de su grupo, pasando a la final, donde resulta ganador del torneo.

Tabla VI.10. Desempeño de S10

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	C		
E2	C	Inc (II.2)	
E3	C	C	
E4	C		
E5	C		
E6	C		
E7	Inc (III.4)		
E8	Inc (I.1)	C	
		C	
E9	C		
E10	C		
E11	C		
E12	C	C	
		Inc (I.2, III.3)	
E1.1			Inc (III.1)
E2.1			C
E3.1			Inc (III.1)
E4.1			Inc (III.4)
E1.2			C

Enunciado	Tareas		Elección
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	
E2.2			C
E3.2			C
E4.2			C

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados, consideramos que incurre en un error de complicación estructural (III.4) al no expresar correctamente un número y su consecutivo en el enunciado “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” (E7) pues lo tradujo como $((x+1)+(x+1))^2$. Para el enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) consideró como representación simbólica $x - \left(\frac{y}{4}\right)$ que se trata de un enunciado incompleto (I.1) pues le falta un coeficiente para expresar que el primer número es un número par. Dado que no manifiesta dificultades en las demás traducciones, podemos interpretar estos errores como un despiste del estudiante en la traducción ya que en la entrevista muestra bastante agilidad para explicar abiertamente lo que hace y relaciona las representaciones simbólica y verbal de los enunciados algebraicos autocorrigiendo sus errores.

Durante la tarea de construcción de enunciados contextualizados realizó seis construcciones. Para el enunciado $x + (x + 1) = y - 2$ (E3) realizó una construcción correcta: “Pedro tiene equis años, y su hermano tiene uno más que él, la edad de Pedro más la de su hermano es igual a la edad de su abuelo menos dos” (S10-1-E3). Interpretamos que por edad se refiere al número de años. En el caso del enunciado $2x - \frac{y}{4}$ (E8) construyó dos enunciados contextualizados correctos: “Si multiplicamos dos por la edad de Juan menos la edad de Nicolás entre cuatro” (S10-1-E8) y “Dos por mi edad menos la edad de Miguel entre cuatro” (S10-2-E8). En enunciados mencionados, consideró que x era su edad (su número de años) y, por tanto, entendemos que la traducción es correcta. Para el enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) construyó una traducción incorrecta “Cuatro [...] por...el doble del número que se han apuntado

nuevos...es igual a...dos por ese número que se han apuntado” cuyo error se debe a la confusión de las operaciones de división y multiplicación (II.2) al tratarse realmente de mitad de un número y no de doble de un número. Y para el enunciado $x+(x+1)-4$ (E12) hizo dos construcciones, una correcta y otra incorrecta. La construcción correcta es “Elena Derecha tiene un año más que Elena Izquierda [...] la edad de Elena Izquierda más Elena Derecha [...] menos cuatro...” (S10-1-E12), donde supone que la edad, es decir, el número de años que tiene Elena Izquierda es x , que el término independiente 1 de la expresión $x+1$ es “un año” y por tanto, el número de años que tiene Elena Derecha es $x+1$. Consideramos así que el enunciado es correcto. La construcción incorrecta es “El hermano de Juan tiene un año más que él. La edad de Juan (interpretamos por edad el número de años) más la de su hermano menos cuatro es igual a la edad de su abuelo” (S10-2-E12) que se trata de un enunciado desmedido (I.2) le sobra el signo igual y la segunda parte de la igualdad.

En la entrevista le preguntamos por este último enunciado erróneo que construyó (S10-2-E12) como traducción del enunciado contextualizado de $x+(x+1)-4$ (E12), reconoció los errores que tenía y los corrigió, como vemos en el siguiente extracto de entrevista:

- Profesora: Dijiste: “El hermano de Juan tiene un año más que él. La edad de Juan más la de su hermano menos cuatro es igual a la edad de su abuelo”
- S10: Es la edad de Juan más la de su hermano, ¿no?
- Profesora: El hermano de Juan tiene un año más que él. La edad de Juan más la de su hermano...
- S10: Pues, “ x ” más, entre paréntesis, “ x ” más uno...
- Profesora: Menos cuatro, es igual a la edad de su abuelo.
- S10: Menos cuatro es igual a “ y ”.
- Profesora: Vale. Se supone que ese enunciado que tú me dijiste, correspondería con este simbólico, que dice, “ x ” más “ x ” más uno menos cuatro. ¿Corresponde?
- S10: Sí pero no.
- Profesora: ¿Qué significa eso de sí pero no?
- S10: Pues que la primera parte está bien, pero que yo puse lo de igual de más.

En todos los enunciados que construyó interpretó la parte literal como una incógnita. En tres de ellos realizó una traducción textual de las operaciones (S10-1-E2, S10-1-E8 y S10-2-E8) y en los otros tres dio significado a las operaciones (S10-1-E3, S10-1-E12 y S10-2-E12). En lo que se refiere a la lectura de enunciados durante el torneo, este sujeto

en unas ocasiones realizó una lectura lineal y en otras una lectura relacional, esto es, relacionando las dos representaciones dadas (verbal y simbólica) de los enunciados algebraicos que forman las piezas del dominó.

En la elección de traducción de enunciados realizó correctamente la selección en los cuatro enunciados dados mediante su representación verbal donde tenía que elegir su representación simbólica (E1.2, E2.2, E3.2, E4.2). En los enunciados dados mediante simbolismo algebraico, donde tenía que elegir su representación verbal, realizó la selección correctamente para uno de ellos (E2.1), en los demás incurre en error. En el enunciado $5 + x + y$ (E1.1) consideró la traducción “Un número impar más una edad más otra edad”, considerada una generalización (III.1) pues tiene en cuenta un número impar en lugar de especificar que se trata del número concreto 5. Como traducción del enunciado $x^2 - y^2 = 9$ (E3.1) tomó “La diferencia entre el área de dos habitaciones cuadradas es un número impar”, incurriendo de nuevo en un error de generalización (III.1), al no especificar que se trata del número 9 en particular y no de un número impar cualquiera. En el caso del enunciado x^3 (E4.1) eligió “El área de un cubo”, donde consideramos que incurre en un error de complicación estructural (III.4). En el último enunciado el estudiante muestra dificultades al expresar simbólicamente relaciones entre lados de figuras geométricas (área y volumen). En la entrevista le preguntamos por los enunciados de la elección de traducciones de enunciados en los que incurre en errores y tras reflexionar en voz alta con la profesora investigadora sobre el enunciado dado y las opciones de respuesta, determinó correctamente cuál era la traducción del enunciado dado.

Este estudiante reconoció que al elegir una opción correcta y una incorrecta, le había resultado más fácil elegir las opciones incorrectas. Explicó que en lo primero que se fijó para descartar opciones fue en el número de letras necesarias y las empleadas. A pesar de que reconoce que le resultó más difícil elegir una opción incorrecta, establece que al tener que justificar una elección, le había resultado más fácil explicar la opción que era correcta. Al igual que otros estudiantes, este razonamiento parece contradictorio, puesto que si hay más posibilidad de engaño en las incorrectas, debería de ser más fácil su identificación. Sobre si había encontrado más dificultad en una de las situaciones que componen la tarea de elección de traducciones de enunciados, reconoció que le

resultaba más fácil la Situación 1, esto es, las traducciones de enunciados dados simbólicamente a representación verbal.

Resumen del análisis del Sujeto S10: Este estudiante muestra mayor facilidad en la construcción de enunciados no contextualizados. En la construcción de enunciados contextualizados, en la entrevista corrige los errores en los que incurre. Presenta más dificultad en la elección de enunciados mostrando errores relacionados con las características propias del simbolismo algebraico, relacionados con la estructura del enunciado y con la generalización del mismo. Este estudiante muestra percibir un error cuando se le pone en situación de reflexionar sobre el trabajo hecho y corregir el mismo. Este estudiante, precisa poco el lenguaje, considera que la edad es un valor numérico y afectivamente equivale a número de años, pero con el dato numérico se puede operar y con la edad no. También en la expresión x^3 presenta el error bastante frecuente de interpretar que el exponente 3 hace referencia a cubo, pero no lo relaciona con volumen, sino con área; como ya hemos comentado este error puede ser debido a deficiencias en su conocimiento geométrico.

VI.11. SUJETO S11

El desempeño del sujeto S11 es el siguiente. En la construcción de enunciados no contextualizados realizó todas las traducciones, tradujo correctamente seis de los doce enunciados, tres de ellos dados por su representación verbal (E1, E7 y E11) y tres mediante simbolismo algebraico (E9, E10 y E12), en los demás (E2, E3, E4, E5, E6 y E8) incurre en algún error (ver tabla VI.11). En la tarea de construcción de enunciados contextualizados hizo uno correctamente. Y en la de elección de traducciones de enunciados realizó correctamente la selección de todos ellos.

Tabla VI.11. Desempeño de S11

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	C		
E2	Inc (I.1)	C	
E3	Inc (I.1)	NR	

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E4	Inc (II.3)		
E5	Inc (I.1)		
E6	Inc (III.1)		
E7	C		
E8	Inc (I.1, III.3)	NR	
E9	C		
E10	C		
E11	C		
E12	C	NR	
E1.1			C
E2.1			C
E3.1			C
E4.1			C
E1.2			C
E2.2			C
E3.2			C
E4.2			C

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

Este estudiante muestra algunas dificultades en la tarea de construcción de enunciados no contextualizados, tanto dados por su representación verbal como mediante simbolismo algebraico.

En el caso de los enunciados dados mediante simbolismo algebraico, encontramos las siguientes situaciones. Para el enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) construyó como representación verbal “El producto de la mitad de un número por cuatro” siendo un enunciado incompleto (I.1) pues le falta representar verbalmente la parte derecha de la igualdad. Viendo que realiza correctamente el miembro izquierdo de la igualdad, interpretamos este error como un despiste o distracción más que como una dificultad. Realiza una traducción incompleta (I.1) del enunciado $x \cdot (x + 1) = 7x$ (E5) al construir la representación verbal “Un número por su consecutivo es igual a siete equis” y no traducir la parte izquierda del enunciado. Como traducción del enunciado $(x \cdot y)^3$ (E6) construyó la representación verbal “Un número por otro número elevado a otro” considerada una generalización (III.1) al tomar el exponente 3 como una variable.

Cuando los enunciados están expresados verbalmente, tenemos lo siguiente. El enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos” (E3) lo

tradujo simbólicamente como $x+1=y-2$, que se trata de un enunciado incompleto porque le falta una letra en el miembro izquierdo de la igualdad. Para establecer la relación entre la suma de un número y su consecutivo, la expresión “un número” o no la toma en consideración o piensa que ya queda expresado al poner $x+1$. Como traducción del enunciado “Un número por su cuadrado es igual a su cubo” (E4) consideró $x \cdot 2x = 3x$ donde incurre en un error de potenciación-multiplicación (II.3) al confundir las operaciones de elevar al cuadrado y al cubo con hacer el doble y el triple del número, respectivamente. Para el enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) construyó $x - \frac{x}{4}$, que se trata de un enunciado incompleto (I.1) pues no pone el coeficiente a la primera x para especificar que se trata de un número par y además incurre en un error de letras (III.3) al utilizar una misma letra para distintos significados.

En la tarea de construcción de enunciados contextualizados, durante el torneo no realizó ninguna construcción pues cuando puso en juego su pieza marcada ni él ni ninguno de sus compañeros se dieron cuenta del punto rojo de la misma. En la entrevista le pedimos que construyera un enunciado contextualizado para cualquiera de las cuatro piezas marcadas con punto rojo. Escogió el enunciado de representación simbólica $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) y construyó un enunciado contextualizado que consideramos correcto interpretando edad como número de años: “Cuatro por la mitad de la edad de mi hermano es igual [...] al doble de...la edad” (S11-1-E2). Para este enunciado contextualizado interpretó la parte literal como una incógnita y realizó una traducción textual de las operaciones del enunciado. En cuanto a la lectura de enunciados durante el torneo, este sujeto en unas ocasiones realizó una lectura lineal y en otras una lectura relacional, esto es, relacionando las dos representaciones dadas (verbal y simbólica) de los enunciados algebraicos de las piezas del dominó.

En la tarea de elección de traducciones de enunciados, como hemos mencionado anteriormente, este estudiante realiza todas las selecciones de manera correcta. Le preguntamos en la entrevista por el enunciado E4.1, donde seleccionó bien la opción que consideró traducción correcta pero no marcó ni explicó ninguna opción como

incorrecta. Reconoció que “no sabía cómo explicarla”. Le pedimos que eligiera e intentara explicar una, lo hizo y no presentó ninguna dificultad en ello.

Por último, explicó que al tener que elegir una opción correcta y una incorrecta, no había encontrado una más difícil que la otra. Al tener que explicarlas sí le había resultado más fácil explicar la opción correcta. Reconoció que le resultó más fácil la Situación 1, esto es, las traducciones de enunciados expresadas mediante simbolismo algebraico a representación verbal pues, según explica: “teniendo ya muchos enunciados es más fácil”.

Resumen del análisis del Sujeto S11: Este estudiante realiza correctamente las tareas de elección de traducciones y la construcción de enunciados contextualizados. En la tarea de construir enunciados no contextualizados es donde presenta algunas dificultades, la mayoría relacionadas con la completitud de los enunciados al dejarlos incompletos. En las tareas que no ha realizado correctamente, parece que el error se deba a despistes. Según sus palabras, tiene dificultad para explicar las cosas que hace.

VI.12. SUJETO S12

El sujeto S12 manifiesta el siguiente desempeño. En la construcción de enunciados no contextualizados los realizó todos, construyó correctamente cinco de los doce, tres de ellos dados mediante simbolismo algebraico (E2, E5 y E12) y los otros dos por su representación verbal (E3 y E7), e incurre en errores en los siete restantes (E1, E4, E5, E6, E8, E9, E10 y E11). Destacamos de este sujeto que, junto con el sujeto S10, es el que más enunciados contextualizados construyó (un total de seis), incurriendo en varios errores en un solo enunciado. En la tarea de elección de traducciones de enunciados, realizó correctamente la selección en cinco de los ocho casos, incurriendo en errores en los tres restantes (ver tabla VI.12).

Tabla VI.12. Desempeño de S12

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	Inc (I.2)		

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E2	C	C	
E3	C	C	
E4	Inc (II.3)	NR	
E5	C		
E6	Inc (II.3)		
E7	C		
E8	Inc (I.1, III.2, III.4)	C	
E9	Inc (III.2)		
E10	Inc (II.3)		
E11	Inc (III.4)		
E12	C	C	
		Inc (I.1, I.2, III.3)	
		C	
E1.1			Inc (III.1)
E2.1			C
E3.1			Inc (III.4)
E4.1			Inc (II.3)
E1.2			C
E2.2			C
E3.2			C
E4.2			C

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la primera tarea, construcción de traducciones de enunciados no contextualizados, para dos de los enunciados dados mediante simbolismo algebraico en los que incurre en errores. Los errores en los que incurre son del mismo tipo, tipificado como potenciación-multiplicación (II.3). El enunciado $(x \cdot y)^3$ (E6) lo tradujo como “El triple del producto de dos números diferentes” donde confunde la potencia con la operación de hacer el triple, y el enunciado $x^2 - y^2 = 11$ (E10) como “El doble de un número menos el doble de otro número es igual a once” donde confunde la potencia con hacer el doble del número. En estas traducciones, el estudiante manifiesta dificultades con dos operaciones aritméticas concretas: potenciación y multiplicación. En otro tipo de error en el que incurre en este tipo de enunciados (dados mediante simbolismo algebraico) es de particularización (III.2) al traducir el enunciado $(\sqrt{x})^y$ (E9) como “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número”, considerando que la letra y es una potencia concreta, “el cuadrado”.

En los tres enunciados no contextualizados presentados en representación verbal en los que incurre en errores hallamos lo siguiente. En el enunciado “El producto de la mitad de un número por el triple de otro número” (E1) construyó la representación simbólica $x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot (3y)$. Se trata de una traducción desmedida (I.2) ya que esta expresión tiene una letra más de lo debido. Para el enunciado “Un número por su cuadrado es igual a su cubo” (E4) construyó la expresión simbólica $x \cdot (x \cdot 3) = x \cdot 2$ donde incurre en un error de potenciación-multiplicación (II.3) al confundir de nuevo estas operaciones. Manifiesta de nuevo dificultades con este tipo de operaciones al expresarlas simbólicamente. Llama la atención el hecho de que considere el triple a la izquierda y el doble a la derecha, cambiando el lado en la igualdad. En el caso del enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) construyó una traducción imprecisa pues dio dos enunciados simbólicos diferentes, por una parte escribió 2 y por otro lado $x - \frac{y}{3}$. En la primera expresión que escribió, consideramos que el error se debe a una particularización (III.2) si tenemos en cuenta que indica ese 2 como un caso particular de “un número par”. En la segunda expresión que escribió, consideramos que el error se debe a que es una expresión incompleta (I.1) si interpretamos que le falta que ese 2 sea el coeficiente de la letra x para precisar que se trata de un número par, y además incurre en un error de complicación estructural (III.4) pues no expresa la cuarta parte sino la tercera parte. Incurre también en un error del tipo complicación estructural (III.4) en el enunciado “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número” (E11), al construir como traducción $(\sqrt{x})^y = x$ donde observamos que en lugar de expresar el 2 del cuadrado, eleva a una letra y .

En la tarea de construcción de enunciados contextualizados realizó seis traducciones. Para el enunciado $x + (x+1) - 4$ (E12) construyó dos enunciados contextualizados correctamente (S12-1-E12 y S12-3-E12) y uno en el que incurre en errores: “La edad de mi hermana es el siguiente de mi edad menos cuatro” (S12-2-E12). La interpretación que hacemos del enunciado construido, es $x = (y+1) - 4$ teniendo en cuenta que el estudiante considera que x es “la edad de mi hermana” e y “mi edad” se trata de un enunciado incompleto (I.1) pues le falta hacer mención a que las edades se están

sumando, no que es una igual a otra. Además, es desmedido (I.2) pues le sobra la relación de igualdad, y también incurre en un error de letras (III.3) al utilizar dos letras distintas, en la traducción verbal dos valores desconocidos diferentes “la edad de mi hermana” y “mi edad”.

En la tarea de construcción de enunciados contextualizados, en todos los enunciados construidos interpretó las letras como incógnitas. Consideró las letras como edades, tomamos correcto este hecho a pesar de que, al igual que otros estudiantes, no llegó a especificar que se trabaja de “número de años” de la persona. En tres de ellos (S12-1-E2, S12-2-E2 y S12-1-E8) realizó una traducción textual de las operaciones que intervienen en el enunciado y en los otros tres (S12-1-E12, S12-2-E12 y S12-3-E12) dio significado a las operaciones. En lo referido a la lectura de enunciados, este sujeto en unas ocasiones realizó una lectura lineal y en otras una lectura relacional, esto es, relacionando las dos representaciones dadas (verbal y simbólica) de los enunciados algebraicos que forman las piezas del dominó.

Le preguntamos en la entrevista por un enunciado contextualizado que construyó erróneamente (S12-2-E12, “La edad de mi hermana es el siguiente de mi edad menos cuatro”) y realizó una traducción a simbolismo algebraico de su propio enunciado, reconoció su error y lo corrigió explicando que cuando dice “el siguiente a mi edad” se refiere “al número siguiente, por ejemplo, si yo tengo trece pues catorce”.

En la elección de traducción de enunciados, realizó correctamente la selección en los cuatro enunciados dados mediante su representación verbal donde tenía que elegir su representación simbólica (E1.2, E2.2, E3.2, E4.2). En los enunciados dados mediante simbolismo algebraico, donde tenía que elegir su representación verbal, realizó la selección correctamente para uno de ellos (E2.1). En los demás incurre en error. En el enunciado $5 + x + y$ (E1.1) consideró la traducción “Un número impar más una edad más otra edad”, considerada una generalización (III.1) dado que en el enunciado dado aparece un número impar concreto (5). Como traducción del enunciado $x^2 - y^2 = 9$ (E3.1) seleccionó “El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve” incurriendo en un error de complicación estructural (III.4) al confundir las relaciones geométricas de perímetro y área. En el caso del enunciado x^3 (E4.1) eligió “El triple del lado de un cubo”, donde

consideramos que incurre en un error tipificado como potenciación-multiplicación (II.3), al confundir estas operaciones. En estos dos últimos enunciados muestra dificultades al expresar simbólicamente propiedades geométricas (área y volumen).

Al preguntarle por la elección de traducciones de enunciados, donde sus explicaciones habían sido algo confusas o presentaban errores, reflexionó en voz alta con la profesora investigadora razonando las opciones de respuesta y llegando a la opción correcta. Por ejemplo, sobre el enunciado E4.1 comentó “Yo creo que sería el a ...el área de un cubo...puede ser pero no sé. El triple del lado de un cubo, no. El volumen de un cubo, no creo. La tercera potencia de tres, no...[...] Ah...el volumen de un cubo...”. Esto muestra que para este enunciado, lo hizo por descarte de las que no son. Este comportamiento es el que siguió en casi todos los razonamientos.

En el momento de elección de traducciones, este estudiante le preguntó a la profesora investigadora si podía ayudarse de un dibujo para responder a la tarea del enunciado E1.2 (El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros), dibujando un rectángulo y poniéndole nombre a los lados (ver Figura VI.1). Durante la entrevista le preguntamos sobre este hecho:

- Profesora: [...] ¿Por qué me dijiste que necesitabas hacer el dibujo?
- S12: Porque para guiarme yo.
- Profesora: ¿Sí?
- S12: Sí, yo creía que así en mi cabeza sabría las cosas.
- Profesora: sin el dibujo, ¿no lo habrías sabido?
- S12: Yo creo que no.
- Profesora: ¿Por qué?
- S12: Porque me habría liado más, habría tardado el triple.

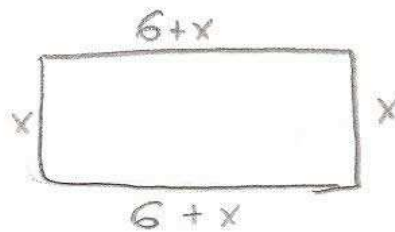


Figura VI.1. Dibujo realizado por el sujeto S12

Finalmente, expuso que al elegir una opción correcta y una incorrecta, la estrategia seguida consistió en fijarse en las letras de los enunciados para ver si sobran o faltan. Esta estrategia, sin embargo, no le funcionó al construir traducciones de enunciados no

contextualizados. Reconoció que le había resultado más difícil tener que justificar por qué un enunciado era incorrecto porque cuando eligió la correcta “supongo yo que como está correcta es solo decir lo que hay”. Al preguntarle si había encontrado más dificultad en una de las situaciones que componen la tarea de elección de traducciones de enunciados, reconoció que le resultó más fácil la Situación 1, esto es, las traducciones de enunciados en simbolismo algebraico a representación verbal.

Resumen del análisis del Sujeto S12: Los errores en los que incurre este estudiante son debidos tanto a la completitud de los enunciados (incompletos o desmedidos), como derivados de la aritmética (confusión de las operaciones de potenciación y multiplicación), como derivados de las características propias del simbolismo algebraico (particularización y complicación estructural). Confunde la operación de potenciación con la operación de multiplicación lo que consideramos relacionado con dificultades al expresar simbólicamente propiedades geométricas como el área y volumen, quizá por confusión entre ambas nociones geométricas. Este estudiante muestra capacidad para reconocer y corregir sus errores durante la entrevista. Se ayudó de las preguntas de la profesora investigadora y de un dibujo que realizó donde se visualiza el rectángulo y las medidas de sus lados (ver figura VI.1).

VI.13. SUJETO S13

El desempeño del sujeto S13 es como sigue. En la construcción de enunciados no contextualizados dejó tres enunciados sin traducir, y en los demás incurre en algún error (ver tabla VI.13). Este sujeto es el único que no participó en la realización de la construcción de traducciones de enunciados contextualizados, por encontrarse ausente por enfermedad la semana en que esta actividad tuvo lugar. En la tarea de elección de traducciones, realizó correctamente la selección en tres de los ocho enunciados, incurriendo en error en los cinco restantes.

Tabla VI.13. Desempeño de S13

Enunciado	Tareas	
	Construcción no contextualizados	Elección
E1	Inc (I.1, II.3, III.3)	

Enunciado	Tareas	
	Construcción no contextualizados	Elección
E2	Inc (I.1, III.4)	
E3	Inc (I.1, III.3)	
E4	NR	
E5	NR	
E6	Inc (I.1, III.4)	
E7	Inc (I.1, III.4)	
E8	Inc (II.5, III.2)	
E9	Inc (I.1)	
E10	Inc (I.1)	
E11	Inc (I.1, III.2, III.4)	
E12	NR	
E1.1		Inc (III.1)
E2.1		Inc (I.1)
E3.1		Inc (III.4)
E4.1		Inc (II.3)
E1.2		Inc (III.3)
E2.2		C
E3.2		C
E4.2		C

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados, como hemos mencionado, dejó tres enunciados en blanco (E4, E5 y E12), el primero dado en representación verbal y los otros dos mediante simbolismo algebraico. En la entrevista le preguntamos en primer lugar por estos enunciados. Al pedirle que intentara efectuar las traducciones, las realizó de manera correcta explicando que “no sé, que no tenía yo pensado en ese momento hacerlo así, las prisas y eso pues...”. Su respuesta sugiere que trabaja mejor cuando razona poco a poco con la profesora investigadora que por escrito en solitario.

Atendemos ahora a los enunciados no contextualizados dados mediante simbolismo algebraico en los que incurre en algún error. Realizó una traducción incompleta (I.1) del enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) al construir la representación verbal “Un producto partido de x medio”, ha expresado que en el miembro izquierdo de la igualdad hay un producto y equis medios, pero introduce la expresión “partido de” que es redundante y no menciona el coeficiente 4. No llega a realizar por completo una traducción pues no está traduciendo la x sino que se limita a realizar una lectura, tampoco hace mención al

miembro derecho de la igualdad. Por tanto, el enunciado es incompleto (I.1). Además incurre en un error de complicación estructural (III.4). Para el enunciado $(x \cdot y)^3$ (E6) realizó también una traducción incompleta (I.1). Consideró “ x por un producto, elevado a tres”. En este caso, habla de equis, la letra que aparece en la expresión, el producto que vuelve a tomarlo de forma redundante (como si no entendiera que las palabras “por” y “producto” son equivalentes), también recoge la potencia tres. Además incurre en un error de complicación estructural (III.4). Construyó para el enunciado $(\sqrt{x})^y$ (E9) la representación verbal “La raíz cuadrada de x elevada a y ”, considerada una traducción incompleta (I.1). Para el enunciado $x^2 - y^2 = 11$ (E10) consideró “ x elevado a dos menos y elevado a dos”. Se trata de un enunciado incompleto (I.1) pues además de realizar una lectura, no hace referencia a la segunda parte de la igualdad. En estas traducciones a simbolismo algebraico de enunciados dados por su representación verbal, el estudiante manifiesta dificultades en la completitud del enunciados (los deja incompletos) y dificultades relacionadas con las características propias del simbolismo algebraico, en concreto relacionadas con la estructura del enunciado. Realmente las traducciones que proponen no son tales, sino lecturas de las representaciones dadas mediante simbolismo algebraico, no dando significado al enunciado.

En lo referido a los enunciados dados por su representación verbal cuya construcción simbólica realiza de manera errónea, encontramos las siguientes traducciones. Para el enunciado “El producto de la mitad de un número por el triple de otro número” (E1) construyó la representación simbólica $x \cdot x^3$. La expresión recoge el producto de un número por sí mismo, elevado este al cubo, pero no recoge la mitad ni el triple, ni que los números son diferentes por lo que es incompleto (I.1) y presenta un error de potenciación-multiplicación (II.3, y otro error de letras (III.3). Como traducción del enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos” (E3) construyó $x = x - 2$. En este caso representa el miembro derecho de la igualdad “un número menos dos” correctamente, pero no el miembro izquierdo que habla de la suma de dos números consecutivos diferentes. Se trata de un enunciado incompleto (I.1) e incurre en un error de letras (III.3). En el caso del enunciado “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” (E7) construyó simbólicamente el enunciado $x^2 \cdot x^2$. Aplica

una falsa distributividad de la potencia respecto de la suma y no expresa la relación de ser dos números consecutivos. Por tanto, se trata de una traducción incompleta (I.1) y presenta un error de complicación estructural (III.4). Para el enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) tradujo al simbolismo algebraico como $6 - x^4$, donde realiza una particularización (III.2) al considerar “un número par” como un número concreto (6). Incurre además en un error tipificado como división-potenciación (II.5) pues en lugar de hacer la cuarta parte realiza la cuarta potencia. En el caso del enunciado “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número” (E11) construyó la expresión simbólica $\sqrt{4}^4$ en la que solo recoge la raíz cuadrada del enunciado, particularizando el número indicado en 4 y confundiendo la igualdad con poner el mismo número 4 también en el exponente. Aquí la palabra igual no se toma en el sentido de escribir una expresión con dos miembros separados por el signo = sino con el significado de utilizar dos elementos iguales. Clasificamos esta traducción como incompleta (I.1) con error de particularización (III.2) y error de complicación estructural (III.4). En estas traducciones, este estudiante muestra dificultades derivadas de la aritmética, esto es, al expresar simbólicamente operaciones aritméticas (potenciación, multiplicación, división, propiedad distributiva y dar a la igualdad un sentido que podemos denominar “estático”, esto es, objetos iguales).

En la tarea de elección de traducciones, como hemos mencionado al principio del apartado, hizo correctamente la selección en tres de los ocho enunciados (E2.2, E3.2 y E4.2), todos ellos dados por su representación verbal. En los cinco restantes incurre en errores.

En el enunciado dado por representación verbal en el que incurre en errores, “El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros” (E1.2). Consideró como expresión simbólica $x + x + y + y = 92$, donde incurre en un error de letras (III.3) al no percibir la relación entre las medidas de sus lados.

En los cuatro enunciados dados mediante simbolismo algebraico donde tiene que elegir su representación simbólica, incurre en error, y nos encontramos lo siguiente. Para el enunciado $5 + x + y$ (E1.1) eligió la traducción “Un número impar más una edad más otra edad”. Aceptando que por edad se refiere al número de años, incurre en

error de generalización (III.1) al considerar “un número impar” como traducción de 5. En el caso del enunciado $x + 60 = 5x$ (E2.1) tomó como traducción “La suma de un número más sesenta es igual a cinco”. Se trata de un enunciado incompleto (I.1) ya que no ha considerado la letra x que acompaña a 5. Como traducción del enunciado $x^2 - y^2 = 9$ (E3.1) eligió “El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve”. La confusión entre área y perímetro es la causa de este error de complicación estructural (III.4). Para el enunciado x^3 (E4.1) consideró la traducción “El triple del lado de un cubo” donde percibe que el cubo corresponde con el exponente, pero no percibe que el triple correspondería a un coeficiente 3, el error es clasificado como de potenciación-multiplicación (II.3). En estas traducciones da muestra de dificultades al expresar simbólicamente propiedades geométricas tales como área y perímetro de figuras.

Al igual que los demás estudiantes, reflexionó en voz alta con la profesora investigadora sobre cada enunciado de la elección de traducciones de enunciados, razonando sobre las elecciones realizadas y justificando sus elecciones en la entrevista. Por ejemplo, en el siguiente extracto de entrevista vemos cómo reflexiona sobre el enunciado E1.2:

- *Profesora: Vamos al enunciado uno de la situación dos. Lee de nuevo el enunciado y la expresión que tú has elegido como correcta.*
- *S13: El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metro más que su ancho es noventa y dos metros. Yo elegí la d, que sería un número más ese número más otro número más otro número igual a noventa y dos. Creo que también me he equivocado en ésta.*
- *Profesora: ¿Por qué?*
- *S13: Porque si dice que mide seis metros más que su ancho, yo creo que sería otra de ellas.*
- *Profesora: ¿Cuál?*
- *S13: No sé.*
- *Profesora: Tenemos un jardín rectangular, ¿cuál es su perímetro?*
- *S13: Su perímetro...seis metros.*
- *Profesora: ¿Qué es el perímetro?*
- *S13: No sé explicarlo. Sería...esto...*
- *Profesora: Eso que estas marcado con el dedo...*
- *S13: Todo entero, lo que mide entero el rectángulo.*
- *Profesora: Sumar los lados...*
- *S13: Eso.*
- *Profesora: Entonces, yo tengo un rectángulo, un lado mide “equis”, ¿y el otro?*

- S13: “Equis” más seis.
- Profesora: ¿Cuál sería el perímetro?
- S13: “Equis” más “equis”, y después “equis” más seis y “equis” más seis. Éste, el a.

Por último, reconoció que en la elección de traducciones, le había resultado igual de difícil elegir una opción correcta que elegir una incorrecta. Al preguntarle si había encontrado más dificultad en una de las situaciones que componen la tarea de elección de traducciones de enunciados, reconoció que le resultaba más fácil la Situación 2, esto es, las traducciones de enunciados en representación verbal a simbolismo algebraico pues “me gusta más que me den los resultados, los simbólicos, y yo elegir cuál es, me gustan más las letras que los números”. Es decir, prefiere partir del enunciado escrito en representación simbólica y elegir entre diversos enunciados dados mediante simbolismo algebraico en lugar de tener que construirlo.

Resumen del análisis del Sujeto S13: Aunque la variedad de tipos de errores en los que incurre este estudiante durante la tarea escrita es amplia (debidos a la completitud del enunciado y derivados de las características propias del lenguaje algebraico), como hemos visto en el extracto de entrevista, muestra una gran capacidad para describir y corregir sus errores cuando se le ayuda a reflexionar. Este sujeto trabaja mejor de manera oral que de manera escrita en las tareas propuestas, pues reflexiona sobre su trabajo, algo que manifiesta abiertamente a lo largo de la entrevista. Muestra poco conocimiento sobre las características de las figuras geométricas utilizadas en las expresiones, ha puesto de manifiesto la utilización de una generalización de la propiedad distributiva al aplicar una falsa distributividad de la potencia respecto a la suma y ha hecho un uso peculiar de la palabra “igual” que aparece en la expresión, al tratar la misma como la igualdad entre dos elementos de la expresión y no como una expresión con dos partes equivalentes separadas por el signo (=) correspondiente.

VI.14. SUJETO S14

El desempeño del sujeto S14 es el siguiente. En la construcción de enunciados no contextualizados dejó un enunciado sin construir (E2), dado mediante simbolismo algebraico. En el resto de los datos simbólicamente, en dos incurre en error (E5 y E9) y

los demás los construyó correctamente (E6, E10 y E12). En los demás enunciados, dados por su representación verbal, incurre en algún error (E1, E3, E4, E7, E8 y E11). Construyó dos enunciados contextualizados, en los cuales incurre en errores. En la tarea de elección de traducciones de enunciados realizó correctamente la selección en tres de los ocho casos y en los cinco restantes incurre en errores. En la tabla VI.14 vemos el desempeño en las distintas tareas.

Tabla VI.14. Desempeño de S14

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	Inc (II.4, III.3)		
E2	NR	NR	
E3	Inc (I.2, III.3)	Inc (I.1, I.2, III.3)	
E4	Inc (III.4)		
E5	Inc (I.1)		
E6	C		
E7	Inc (III.4)		
E8	Inc (I.1, II.3)	NR	
E9	Inc (I.1)		
E10	C		
E11	Inc (III.4)		
E12	C	Inc (I.1, I.2)	
E1.1			Inc (III.1)
E2.1			C
E3.1			Inc (III.4)
E4.1			C
E1.2			C
E2.2			Inc (III.3)
E3.2			Inc (II.3)
E4.2			Inc (III.4)

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

Como hemos dicho anteriormente, en la primera tarea, construcción de enunciados no contextualizados, dejó un enunciado sin traducir, $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) para el que tenía que construir su representación verbal. En la entrevista le preguntamos en primer lugar por este enunciado. Nos explicó que al principio no sabía cómo realizar la traducción del enunciado dado. Sin embargo, al pedirle que intentara realizar la traducción, la

realizó de manera correcta expresando “cuatro por la mitad de algo igual a dos veces eso”.

En la construcción de enunciados no contextualizados, la mayoría de los errores en los que incurre este estudiante están presentes en los dados mediante representación verbal, para los que tiene que construir su representación simbólica. Para el enunciado “El producto de la mitad de un número por el triple de otro número” (E1) construyó la representación simbólica $x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+3)$ donde incurre en un error clasificado como suma-multiplicación (II.4) al expresar “el triple de un número” como $x+3$, además utiliza una misma letra para distintos significados con lo que incurre en un error de letras (III.3). Como traducción del enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos” (E3), tomó $x+(x+1)=x-(x-2)$ que se trata de un enunciado desmedido (I.2) pues en la segunda parte sobra una letra y un signo menos. Además incurre en un error de letras (III.3) pues de nuevo utiliza una misma letra con distintos significados. En el caso del enunciado “Un número por su cuadrado es igual a su cubo” (E4) construyó la representación simbólica $x^4 = x^2$, donde expresa una igualdad, no expresa producto y en los dos miembros de la igualdad las potencias no son las correctas, por tanto incurre en un error de complicación estructural (III.4). Para el enunciado “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” (E7), hizo la representación simbólica $x^4 + (x+2)$, representando la suma de tres números (con un paréntesis innecesario), donde dos de ellos son el mismo número, si bien elevados a potencias diferentes. No representa dos números consecutivos, ni el cuadrado de la suma, ambos errores son del tipo complicación estructural (III.4). La traducción que hace del enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) es $x^2 - \frac{1}{4}$. Si interpretamos que para representar un número par ha tomado x^2 , podemos decir que incurre en un error del tipo potenciación-multiplicación (II.3). Como ha escrito solo un cuarto, sin estar acompañado de una letra, se trata de un enunciado incompleto (I.1). El enunciado “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número” (E11) lo traduce como $(\sqrt{x})^4 = x$. Vuelve a incurrir aquí en un error de

complicación estructural (III.4) al confundir el cuadrado con la potencia cuarta; puede tratarse de una distracción.

El tipo de error en el que incurre en la construcción de los dos enunciados dados mediante simbolismo algebraico (E5 y E9) es de la misma subcategoría, se trata de enunciado incompleto (I.1). El estudiante actúa de la misma manera en ambos casos, traduciendo únicamente una parte de la expresión. Para el enunciado $x \cdot (x + 1) = 7x$ (E5) construyó la representación verbal “Un número multiplicado por su siguiente igual a siete x ”. Para el enunciado $(\sqrt{x})^y$ (E9) construyó “La raíz cuadrada de un número elevada a y ”.

Durante el torneo, construyó dos enunciados contextualizados. Para el enunciado $x + (x + 1) = y - 2$ (E3) construyó la representación verbal “Un limón, más otro limón, es igual a cuatro limones menos dos limones” (S14-1-E3). Esta traducción nos parece extraña y tenemos dos interpretaciones para ella. Puede ser que el sujeto la haya hecho al azar; o puede ser que haya asignado a las letras, ya sean la misma o diferentes, cantidades concretas de un objeto. Interpretamos que el 1, del segundo sumando del miembro izquierdo de la igualdad, lo considera en la expresión “más otro limón”. Ha añadido un coeficiente 4 acompañando a la letra y , y para poder hacer la suma con objetos homogéneos considera que la constante 2 representa también dos de los objetos asignados a las letras. Lo hemos clasificado como tres tipos de errores. En primer lugar, se trata de un enunciado incompleto (I.1) pues no hace referencia en el miembro de la izquierda a dos números consecutivos. Además, es un enunciado desmedido pues sobran los dos coeficientes de la parte derecha de la igualdad. En la representación verbal, hace referencia a “cuatro limones” y a “dos limones”, por lo que consideramos que incurre en un error de letras (III.3) al utilizar un mismo significado (número de limones) para distintas letras.

La construcción contextualizada que hace para el enunciado $x + (x + 1) - 4$ (E12) también poner de manifiesto algunos errores. El enunciado construido es “Dos pelotas de futbol más otra pelota de futbol menos cuatro...pelotas de futbol” (S14-1-E12). Para este sujeto, todo son pelotas de fútbol, tanto las letras como las constantes (hace como en el enunciado anterior). Creemos que se ve obligado a hacer esto para obviar la

situación de sumar objetos con números. Se trata de un enunciado desmedido (I.2) pues añade letras. Además es un enunciado incompleto (I.1) pues le falta sumar un uno.

En estos dos enunciados que construyó, interpretó la parte literal como un objeto y realizó una traducción textual de las operaciones que intervienen en el enunciado. Durante el torneo, realizó una lectura lineal de los enunciados de las piezas del dominó, esto es, no relaciona las distintas representaciones (verbal y simbólica). Durante la entrevista, a pesar de reconocer sus errores en estos enunciados construidos, se negó a construir enunciados nuevos.

En los enunciados de la tarea de elección de traducciones en los que incurre en errores encontramos las siguientes situaciones. Para el enunciado $5 + x + y$ (E1.1) seleccionó el enunciado verbal “Un número impar más una edad más otra edad”. Aceptando que por edad se refiere al número de años, incurre en un error de generalización (III.1) al considerar “un número impar” como traducción de 5. En el caso del enunciado $x^2 - y^2 = 9$ (E3.1) eligió como traducción “El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve”. Aquí se pone de manifiesto que confunde perímetro y área, lo que da lugar a un error de complicación estructural (III.4). Como traducción del enunciado “El doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés” (E2.2), eligió la representación simbólica $2x + \frac{x}{4}$ donde se utiliza una misma letra con distintos significados, incurriendo así en un error de letras (III.3), no percibiendo que aunque se trate de años, al ser de diferente persona, la letra ha de cambiar. En el caso del enunciado “El número de ruedas de dos coches es ocho” (E3.2) la expresión simbólica que escoge es $x^2 = 8$ donde incurre en un error clasificado como potenciación-multiplicación (II.3). Por último, la elección que hace para el enunciado “El área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina” (E4.2) es $2x^2 \cdot y$, incurriendo, de nuevo, en un error de complicación estructural (III.4). Considera correctamente que x e y representan el lado del cuadrado del suelo y la profundidad respectivamente.

Durante la entrevista, reflexionando en voz alta con la profesora investigadora, explicó sus razonamientos sobre las opciones de repuesta a la elección de los

enunciados. Finalmente, expuso que de las situaciones que componen la tarea de elección de traducciones de enunciados, le resultó más fácil la Situación 1, esto es, las traducciones de enunciados de simbolismo algebraico a representación verbal. Además, reconoció que le había resultado más fácil elegir y explicar la opción incorrecta porque “es más fácil encontrar lo que está mal”. Este hecho coincide con su actuación en estas elecciones, pues las elecciones que realizó de opciones incorrectas las hizo bien.

Resumen del análisis del Sujeto S14: Este estudiante incurre en una amplia variedad de tipos de errores en todas las tareas. Estos, en el caso de la construcción de enunciados no contextualizados, se concentran en errores derivados de la aritmética (confusión de las operaciones suma y multiplicación) y de las características propias del simbolismo algebraico (mal uso de las letras y complicación estructural). Durante la construcción de enunciados contextualizados el error que más se manifiesta está relacionado con la completitud del mismo (tanto incompleto como desmedido). Y en la elección de traducciones, los errores más frecuentes están relacionados con las características propias del simbolismo algebraico (complicación estructural). Por tanto, concluimos que este estudiante muestra dificultades con esta tercera tipología, características propias del simbolismo algebraico.

VI.15. SUJETO S15

El desempeño del sujeto S15 lo detallamos a continuación. En la construcción de enunciados no contextualizados, no dejó ninguno sin realizar. Tradujo correctamente tres de los doce presentados, dados por su representación verbal. En los demás incurre en algún error. En la construcción de enunciados contextualizados construyó dos, con algunos errores. En la tarea de elección de enunciados realizó correctamente la selección de los cuatro que vienen dados por su representación verbal donde tiene que elegir su expresión simbólica y uno de los que vienen dados mediante simbolismo algebraico. En los demás incurre en error. Mostramos en la tabla VI.15 el desempeño del sujeto S15 en las distintas tareas de la investigación.

Tabla VI.15. Desempeño de S15

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	Inc (I.2, III.3)		
E2	Inc (I.1)	Inc (III.3)	
E3	Inc (III.3)	NR	
E4	C		
E5	Inc (I.1, II.4, III.4)		
E6	Inc (I.1)		
E7	C		
E8	Inc (III.3)	NR	
E9	Inc (I.1)		
E10	Inc (I.1)		
E11	C		
E12	Inc (I.1)	Inc (III.3)	
E1.1			Inc (III.4)
E2.1			C
E3.1			Inc (III.4)
E4.1			Inc (II.3)
E1.2			C
E2.2			C
E3.2			C
E4.2			C

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la tarea de construcción de enunciados algebraicos no contextualizados, realizó una traducción incompleta (I.1) de todos los enunciados dados mediante simbolismo algebraico. El enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) lo tradujo como “Cuatro por la mitad de un número es igual dos equis”. El miembro izquierdo de la igualdad lo tradujo correctamente, pero no tradujo el miembro derecho, se limitó a hacer una lectura. Lo mismo ocurre con el enunciado $x \cdot (x+1) = 7x$ (E5) donde construyó la representación verbal “Equis por uno equis es igual a siete equis, dos equis es igual a siete equis” que no consideramos que sea una traducción sino una lectura, los errores en los que incurre, además, son de suma-multiplicación (II.4) y de complicación estructural (III.4). Consideramos estos errores mencionados porque no identifica el producto de dos números consecutivos o de un número y ese mismo número más uno y lo expresa como es número por uno, indicando posteriormente “dos equis” como resultado de dicho

producto. Consideramos que también realizó una traducción incompleta (I.1) en el resto de los enunciados dados mediante simbolismo algebraico donde se limita a hacer una lectura de los mismos: para el enunciado $(x \cdot y)^3$ (E6) consideró “Equis elevado a tres por i griega elevado a tres”, para el enunciado $(\sqrt{x})^y$ (E9) escribió “Raíz de equis elevada a i griega”, para el enunciado $x^2 - y^2 = 11$ (E10) sugirió “Equis elevado a dos menos i griega elevada a dos es igual a once” y para el enunciado $x + (x+1) - 4$ (E12) anotó “Equis más equis más uno menos cuatro”.

En el caso de los tres enunciados dados por su representación verbal en los que incurre en errores, hallamos las siguientes situaciones. En el enunciado “El producto de la mitad de un número por el triple de otro número” (E1) construyó la representación simbólica $\frac{x}{2} \cdot 3x^3$, donde para representar el triple añade además el exponente tres y no considera que si se trata de dos números diferentes han de ser expresados con letras distintas. Por tanto, es un enunciado desmedido (I.2) pues sobra la potencia y, como además utiliza una misma letra para distintos significados incurre en un error de letras (III.3). En otros dos enunciados incurre en un error de letras (III.3) al utilizar una misma letra con varios significados. Este es el caso de la traducción del enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos” (E3) como $x + x + 1 = x - 2$, y del enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) como $2x - \frac{x}{4}$. En estas traducciones erróneas pone de manifiesto dificultades para asociar diferentes letras cuando se trata de diferentes números, entendemos que asocia la letra a la a la palabra “número”.

En la tarea de construcción de enunciados contextualizados hizo dos construcciones. En ambas incurre en el mismo tipo de error, de letras (III.3), pues utilizó dos significados para una misma letra x . Para el enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) construyó el enunciado “Cuatro por la mitad de la edad de Juan sería igual al doble de la edad de su hermano pequeño” (S15-1-E2), donde incurre en el error de considerar que en la parte izquierda de la igualdad x es la edad de Juan y en la parte izquierda es la edad de su hermano pequeño. En el caso del enunciado $x + (x+1) - 4$ (E12) la construcción que

hace es “La edad de Juan más la edad del abuelo más uno menos cuatro” (S15-1-E12), considera que la primera x es la edad de Juan y la segunda x es la edad del abuelo. En estos enunciados la confusión sigue siendo la misma que en la tarea anterior, considera a x “la edad” (número de años) siendo irrelevante de quién sea esa edad.

En los dos enunciados contextualizados que construyó, interpretó la parte literal como una incógnita y realizó una traducción textual de las operaciones que intervienen en el enunciado. La lectura de enunciados durante el torneo fue lineal, esto es, sin relacionar las distintas representaciones (verbal y simbólica) de los enunciados de las piezas del dominó.

En la entrevista le preguntamos por los enunciados contextualizados que construyó. Al reflexionar y analizarlos construyó uno nuevo correcto: “El hermano de Juan tiene un año más que él [...] la edad de Juan... más la edad del hermano...menos cuatro”. Consideramos aquí que interpreta x como “edad”, queriéndose referir a “número de años”.

En la tarea de elección de traducción de enunciados realizó correctamente la selección de la representación simbólica en los cuatro enunciados dados mediante su representación verbal (E1.2, E2.2, E3.2, E4.2). En los enunciados dados mediante simbolismo algebraico, donde tenía que elegir su representación verbal, realizó la selección correctamente para uno de ellos (E2.1) y en los demás incurre en error. En el enunciado $5 + x + y$ (E1.1) consideró la traducción “Cinco veces mi edad y la de mi hermana”, la interpretación de la constante 5 por “cinco veces”, incurre en un error de complicación estructural (III.4) pues las relaciones entre los elementos no son las establecidas por la expresión simbólica. Como traducción del enunciado $x^2 - y^2 = 9$ (E3.1) tomó “El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve” confundiendo el perímetro y el área, lo que da lugar a un error de complicación estructural (III.4). En el caso del enunciado x^3 (E4.1) eligió “El triple del lado de un cubo”, donde considera que el cubo corresponde con el exponente, pero no percibe que el triple correspondería a un coeficiente 3, el error es clasificado como de potenciación-multiplicación (II.3). En estos dos últimos enunciados muestra dificultades al expresar simbólicamente propiedades geométricas (área y volumen).

Sobre los enunciados de la elección de traducciones de enunciados, le preguntamos por los de la Situación 1 que es donde presenta más errores y explicaciones más confusas. Como los demás estudiantes, reflexionó en voz alta con la profesora investigadora en cada enunciado por el que le preguntamos justificando sus elecciones. Por ejemplo, en el siguiente extracto de entrevista razonó sobre el enunciado E2.1 y explicó por qué tachó varias opciones y luego se quedó con solo una de ellas:

- *Profesora: Vale, vamos a ir al enunciado dos de la situación uno, pasa la página. ¿Por qué cambiaste de opinión al seleccionar una opción incorrecta y elegiste la opción a en vez de la b que es la que primero habías marcado?*
- *S15: ¿En la incorrecta?*
- *Profesora: Sí.*
- *S15: Porque la b dice un número, que sería “equis”, más sesenta, sería igual a cinco veces, que sería cinco “equis”, por cinco veces ese número, que sería cinco “equis” por cinco.*
- *Profesora: ¿Es correcta o incorrecta?*
- *S15: Incorrecta.*
- *Profesora: Entonces, ¿las dos son incorrectas?*
- *S15: No, la b.*
- *Profesora: Pero es que tú me marcaste la a.*
- *S15: Bueno también.*
- *Profesora: Pero mi pregunta es curiosidad de saber por qué tachaste y cambiaste de opinión, ¿por qué no sabías explicarla?*
- *S15: Por eso y porque me convenció más la a de que estaba peor.*
- *Profesora: ¿Peor qué significa?*
- *S15: Me estoy haciendo un lio a ver...pues porque aquí le falta más cinco veces ese número en el a.*

Explicó que al elegir una opción correcta y una incorrecta para la Situación 1 la estrategia seguida consistía en leer los enunciados y hacer la traducción correspondiente a simbolismo algebraico y ver cuál de las opciones correspondía con su traducción. Reconoció que le había resultado más fácil elegir las opciones incorrectas en ambas situaciones pues “es más fácil hallar los errores, [...] algunos se notaba mucho que eran errores y era fácil explicarlos”. Expuso además que le resultaba más fácil la Situación 2, esto es, las traducciones de enunciados en representación verbal a simbolismo algebraico porque “puedes mirar las distintas opciones de respuesta expresadas simbólicamente” pues por ejemplo “si dices perímetro pues ya sabes que no es al cuadrado...”.

Resumen del análisis del Sujeto S15: La mayoría de los errores en lo que incurre este estudiante se deben a características propias del simbolismo algebraico. Manifiesta dificultades para expresar de manera contextualizada un enunciado dado simbólicamente incurriendo en el error de asignar dos significados para una misma letra, estos errores los subsanó en la entrevista. Este error lo pone de manifiesto también cuando los enunciados no son contextualizados, por lo que parece no influir el contexto en la aparición de este tipo de error. Al igual que otros compañeros, durante la entrevista parecía manifestar que el error en el que incurría al confundir las operaciones de potenciación y multiplicación se debían al confundir el perímetro y el área de una figura.

VI.16. SUJETO S16

El sujeto S16 presenta el siguiente desempeño. En la construcción de enunciados no contextualizados no dejó ninguno sin hacer, realizó correctamente la traducción de cinco de los doce presentados, donde cuatro estaban dados mediante simbolismo algebraico y uno por su representación verbal. En la construcción de enunciados contextualizados, construye uno para cada uno de los cuatro enunciados simbólicos posibles, incurriendo en errores en cada uno de ellos. En la tarea de elección de traducciones de enunciados realizó correctamente la selección en dos de ellos, dados verbalmente, e incurre en errores en los demás. Recogemos en la tabla VI.16 el desempeño del sujeto S16 en las distintas tareas.

Tabla VI.16. Desempeño de S16

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E1	Inc (III.3, III.4)		
E2	Inc (I.1)	Inc (I.2)	
E3	Inc (I.1, III.3)	Inc (I.1, III.3)	
E4	Inc (I.1)		
E5	Inc (I.1)		
E6	C		
E7	Inc (I.1, II.1)		
E8	Inc (I.1, I.2, III.3, III.4)	Inc (III.3)	
E9	C		

Enunciado	Tareas		
	Construcción no contextualizados	Construcción contextualizados	Elección
E10	C		
E11	C		
E12	C	Inc (I.1)	
E1.1			Inc (III.1)
E2.1			Inc (III.3)
E3.1			Inc (III.4)
E4.1			Inc (II.3)
E1.2			Inc (I.1)
E2.2			C
E3.2			C
E4.2			Inc (I.1)

Nota. Sombreamos aquellos enunciados que no aparecen como posibilidad de ser contextualizados; C = Enunciado correcto; Inc = Enunciado incorrecto; NR = no responde.

En la construcción de traducciones de enunciados no contextualizados, para dos los enunciados dados simbólicamente en los que incurre en errores, encontramos lo siguiente. Construyó como traducción del enunciado $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) la expresión verbal “Cuatro multiplicado por la mitad de un número es igual a dos”, que se trata de un enunciado incompleto (I.1) porque no considera la letra que acompaña al coeficiente en el miembro derecho de la igualdad. En el caso del enunciado $x \cdot (x+1) = 7x$ (E5) hizo la traducción “Un número multiplicado por el mismo más uno es igual a siete”. Le ocurre como en el caso anterior, que también es un enunciado incompleto, pues no tiene en cuenta la letra que está multiplicando al número después del signo igual.

Los errores en los que incurre en los cinco enunciados dados por su representación verbal son de diferente tipo. Como traducción del enunciado “El producto de la mitad de un número por el triple de otro número” (E1) hizo la representación simbólica $\frac{x}{x} \cdot 3x$ donde utilizó una misma letra con dos significados incurriendo en un error de letras (III.3) y además incurre en un error de complicación estructural (III.4) al expresar la mitad de un número como $\frac{x}{x}$. Poner x en el denominador de una fracción para indicar “medio” es algo que no tiene fácil explicación. Interpretamos que asigna x a la palabra número y que no entiende la necesidad de usar dos letras. Para el enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos” (E3) construyó el

enunciado simbólico $x + x = x - 2$ donde de nuevo utiliza una misma letra con distintos significados, por lo que nos ratificamos en la explicación anterior, error de letras (III.3) y además es incompleto (I.1) pues le falta un número para expresar la relación, en la primera parte de la igualdad, entre un número y su consecutivo. De nuevo se pone de manifiesto que x para este sujeto representa la palabra “número”. En el caso del enunciado “Un número por su cuadrado es igual a su cubo” (E4), construyó $x^2 = x^3$ que es incompleto (I.1) porque en la primera parte de la igualdad le falta multiplicar por “un número”. Realizó una traducción incompleta (I.1) del enunciado “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” (E7) pues construyó $x + (x+1)^2$, donde consideramos que le falta un paréntesis para que la traducción sea correcta, error de paréntesis (II.1). Entendemos que ha elevado al cuadrado el paréntesis que ha puesto, sin percibir que necesitaba que toda la expresión quedase dentro del paréntesis. Por último, para el enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” (E8) construyó la traducción $x = \frac{4}{x}$. Aquí manifiesta una gran confusión, no hay nada que indique la operación de resta y en la fracción ha cambiado numerador por denominador. Si ha tomado x para expresar “un número par”, no conoce que la paridad se expresa como múltiplo de 2, consideramos que el enunciado es incompleto (I.1) al faltarle un coeficiente a la primera x para determinar que se trata de un número par. Sobra la igualdad, con lo que es un enunciado desmedido (I.2). Además, utiliza una misma letra con distintos significados, error de letras (III.3), e incurre en un error de complicación estructural (III.4) pues expresa la cuarta parte de un número como $\frac{4}{x}$.

En la tarea de construcción de enunciados contextualizados construye uno para cada uno de los cuatro enunciados simbólicos dados. El enunciado contextualizado que construye para $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ (E2) es “Cuatro tomates, por la mitad de dos es igual [...] al doble de los tomates” (S16-1-E2). En este caso considera que x es “tomates” y que el coeficiente 4 está acompañado de letra, interpretamos que lo hace para poder operar números con objetos. Dice la “mitad de”, suponemos que se refiere a esos tomates y a continuación señala el “doble de los tomates”. Entendemos que divide y multiplica un objeto por un número. Consideramos que se trata de un enunciado desmedido (I.2) pues

le sobraría esa letra que acompañaría al 4. Para el enunciado $x + (x + 1) = y - 2$ (E3) construyó como enunciado verbal contextualizado “Un tomate más otro tomate igual a...un tomate menos dos...menos dos tomates” (S16-1-E3). Para este enunciado, consideró para las dos letras el mismo objeto concreto (interpreta x como “tomates”). Al indicar “otro tomate” está incluyendo otra letra, pero le falta el uno por lo que es un enunciado incompleto (I.1). En la parte de la izquierda, no hace referencia a que hay otra letra, con lo que incurre en un error de letras (III.3) y añade al término independiente 2 el objeto “tomate” para poder sumar números y objetos (“menos dos tomates”). La construcción que hace para el enunciado $2x - \frac{y}{4}$ (E8) es “La cuarta parte de una tarta, menos su doble, menos el doble de esa tarta” (S16-1-E8). Cambia minuyendo y substraendo de la diferencia presentada y asigna a las dos letras el mismo valor concreto posiblemente ante la necesidad de operar con esos objetos concretos. Utiliza una misma letra con distintos significados (III.3). Para el enunciado $x + (x + 1) - 4$ (E12) construyó el enunciado contextualizado “Un tomate más otro tomate menos cuatro” (S16-1-E12). En esta ocasión asigna a la letra un objeto concreto (tomate) y no le importa sumar objeto y número. Creemos que en la frase “más otro tomate” no tiene en cuenta el 1, por lo que esta traducción la hemos considerado incompleta (I.1). En estas construcciones contextualizadas pone de manifiesto que asigna a las letras el significado de un objeto concreto y que cuando encuentra dificultades para indicar lo que representan las operaciones que hay en las expresiones simbólicas, asigna el mismo objeto a las dos letras y a las constantes que aparecen.

En estos enunciados contruidos, interpretó la parte literal como objetos y realizó una traducción textual de las operaciones de los enunciados dados. En lo referido a la lectura de enunciados durante el torneo, este sujeto en unas ocasiones realiza una lectura lineal y en otras una lectura relacional, esto es, relacionando las dos representaciones dadas (verbal y simbólica) de los enunciados algebraicos que forman las piezas del dominó.

En la entrevista, le preguntamos por los enunciados contextualizados que construyó durante la segunda tarea. Tras reflexionar sobre sus errores, los nuevos enunciados que construyó siguen conteniendo los mismos errores. Como vemos en el siguiente extracto

de entrevista, construyó un nuevo enunciado para el E3 (“Un tomate más ese tomate más uno menos cuatro”) donde vuelve a interpretar la letra como un objeto:

- *Profesora: Hay uno en el que tú dijiste: “Un tomate más otro tomate igual a...un tomate menos dos...menos dos tomates”. ¿Eso cómo lo escribirías simbólicamente?*
- *S16: A ver...repítemelo.*
- *Profesora: Un tomate...*
- *S16: Equis, no, uno equis.*
- *Profesora: Más otro tomate...*
- *S16: Uno equis, más uno equis más equis.*
- *Profesora: Y luego dices “igual a un tomate menos dos tomates”.*
- *S16: Igual a equis menos dos.*
- *Profesora: Pero el enunciado realmente era equis más equis más uno menos cuatro. ¿Cómo lo dirías? ¿Crees que lo que has dicho ahora correspondería con esta expresión simbólica?*
- *S16: No. Sería, un tomate más ese tomate más uno menos cuatro.*

En la tarea de elección de traducciones de enunciados, incurre en errores en los cuatro dados mediante simbolismo algebraico y en dos de los cuatro dados por su representación verbal.

En los enunciados dados mediante simbolismo algebraico donde tenía que elegir su representación verbal encontramos las siguientes situaciones. Para el enunciado $5 + x + y$ (E1.1) seleccionó el enunciado “Un número impar más una edad más otra edad” incurriendo en un error de generalización (III.1). Como la gran mayoría de los sujetos, considera que 5 representa un número impar y entiende que edad equivale a número de años. Eligió para $x + 60 = 5x$ (E2.1) la representación simbólica “Sesenta más un número es igual a cinco veces otro número” donde da distintos significados a una misma letra, error de letras (III.3). En el caso del enunciado $x^2 - y^2 = 9$ (E3.1) consideró que la traducción era “El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve”, incurriendo en un error de complicación estructural (III.4) al confundir perímetro y área. Con el enunciado x^3 (E4.1) incurre en un error clasificado como potenciación-multiplicación (II.3) al seleccionar como traducción “El triple del lado de un cubo” pues interpreta que el cubo corresponde con el exponente, pero no percibe que el triple correspondería a un coeficiente 3. En las elecciones realizadas hay variabilidad de tipos de errores, cuesta identificar las dificultades a las que puede estar asociadas, si bien la

mayoría están relacionadas con características propias del simbolismo algebraico (uso de letras o generalización).

En los dos enunciados dados por su representación verbal en los que incurre en errores, tenemos las siguientes situaciones. Para el enunciado “El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros” (E1.2) eligió un enunciado incompleto (I.1) al seleccionar la expresión simbólica que aunque reconoce la relación que hay entre los lados del rectángulo (uno mide 60m más que otro) no establece que hay que sumar los cuatro lados de la figura, iguales dos a dos. En el caso del enunciado “El área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina” (E4.2) tomó como traducción x^2 que se trata de un enunciado incompleto (I.1) pues aunque es traducción de la primera parte (área del suelo de la piscina) le falta añadir la profundidad. En estas traducciones el estudiante manifiesta dificultades con la completitud del enunciado, dejando ambos incompletos.

Finalmente, explicó que al elegir una opción correcta y una incorrecta la estrategia seguida consistía en leer los enunciados expresados en representación verbal e ir escribiendo en un folio aparte la representación simbólica para ver cuál correspondía. Reconoció que le había resultado más fácil elegir y explicar la opción incorrecta. Así mismo, determinó que la Situación 2 le pareció más fácil, esto es, cuando se le presenta un enunciado verbal y varias opciones expresadas mediante simbolismo algebraico.

Resumen del análisis del Sujeto S16: En la construcción de enunciados no contextualizados este estudiante manifiesta menos dificultades al traducir enunciados cuando se los proporcionan simbólicamente. En esta primera tarea la mayoría de los errores son debidos a la incompletitud del enunciado construido. En la construcción de enunciados contextualizados manifiesta dificultades para expresar enunciados en los que intervienen varias letras. Preguntándole y reflexionando sobre la elección de traducciones de enunciados en la entrevista, encontramos que en los que más problemas halló eran aquellos cuyo contexto es geométrico

VI.17. SÍNTESIS DEL ANÁLISIS REALIZADO

En este último apartado realizamos una síntesis del análisis cualitativo que hemos realizado para cada uno de los estudiantes que participan en la investigación según la tarea realizada: construir enunciados no contextualizados, construir enunciados contextualizados o elegir traducciones de enunciados algebraicos.

La construcción de enunciados no contextualizados es la tarea donde más errores se manifiestan. Por un lado, una razón puede ser que la cantidad de enunciados a construir es mayor que en las otras tareas, hemos observado que aquellos estudiantes que dejan construcciones de traducciones en blanco, al realizar las entrevistas individuales y pedirles que las realicen detenidamente, lo hacen de manera correcta. Es el caso de S01, S03, S04, S05, S08, S13 y S14, por las respuestas que dan los estudiantes en las entrevistas individuales, esto parece deberse a que reflexionan mejor o prestan más atención cuando se expresan oralmente en presencia de la profesora investigadora.

En estas construcciones, cuando les damos a los estudiantes enunciados algebraicos mediante su representación simbólica y tienen que traducirlos a su representación verbal, hemos encontrado que algunos estudiantes se limitan a hacer una lectura del enunciado y no realizan una traducción. Es el caso de los sujetos S07, S13, S14 y S15 quienes, por ejemplo para el enunciado $x + (x + 1) - 4$ (E12) expresan “equis más equis más uno menos cuatro” mientras que los demás sujetos lo traducen como “un número más su consecutivo menos cuatro”.

En la construcción de enunciados contextualizados, tarea donde los estudiantes tienen la opción de construir traducciones para cuatro enunciados dados mediante simbolismo algebraico, hemos observado, gracias a las entrevistas individuales, distintos comportamientos que describimos a continuación:

- Seis estudiantes (S01, S09, S10, S12, S15 y S16) que habían construido enunciados contextualizados donde habían incurrido en algún error (S01-1-E12, S09-1-E2, S10-1-E3, S12-2-E12, S15-1-E2, S15-1-E12 y S16-1-E3) construyen un nuevo enunciado correcto en la entrevista.
- Un estudiante había construido un enunciado correcto en la realización de la tarea, es el caso del sujeto S07.

- Tres sujetos (S05, S08 y S14) que habían construido enunciados contextualizados erróneos (S05-1-E12, S08-1-E12, S14-1-E3 y S14-4-E12), durante las entrevistas individuales no supieron construir una traducción nueva o se negaron a intentarlo.
- Otros tres sujetos (S04, S06 y S16) que habían construido enunciados contextualizados con errores (S04-1-E3, S06-1-E2, S06-1-E12, S16-1-E2, S16-1-E8 y S16-1-E12), construyen enunciados nuevos en las entrevistas individuales pero de nuevo son erróneos al continuar interpretando las letras como objetos.
- Los sujetos S03, S11 y S13 no construyeron enunciados contextualizados durante la realización de la tarea. El sujeto S13 porque no participó en dicha tarea. S03 porque no quiso participar. S11 por despiste suyo y de sus compañeros cuando puso la pieza marcada con punto rojo en juego, así que le pedimos a lo largo de la entrevista que construyera uno y lo hizo de manera correcta.
- Otro estudiante, S02 construyó enunciados erróneos (S02-1-E3 y S02-1-E12) pero al no realizar la entrevista posterior, no pudimos pedirle que intentara construir enunciados nuevos.

Analizados los errores en los que incurren los estudiantes, hemos resumido las principales dificultades que estos manifiestan en sus tareas en la tabla VI.17. Se trata de dificultades encontradas, tanto en tareas no contextualizadas como contextualizadas, y tanto si los enunciados algebraicos están dados en representación verbal como mediante simbolismo algebraico. La tabla VI.17 recoge un recuento del tipo de dificultades que han manifestado los estudiantes de acuerdo con el análisis cualitativo llevado a cabo a lo largo de los apartados anteriores.

Tabla VI.17. Dificultades que manifiestan los estudiantes

Dificultades que manifiestan los sujetos en las tareas de construir y elegir traducciones de enunciados algebraicos contextualizados y no contextualizados				
Sujetos	Uso de letras	Expresar relación entre un número y su consecutivo	Traducir expresiones donde aparecen las operaciones de potenciación y/o multiplicación	Expresar relaciones geométricas (perímetro, área, volumen)
S01				✓
S02		✓	✓	✓
S04	✓	✓	✓	✓
S05		✓		✓
S06		✓	✓	✓
S07			✓	✓
S08	✓	✓	✓	✓
S09	✓		✓	
S10	✓			✓
S11		✓	✓	
S12	✓		✓	✓
S13	✓	✓	✓	✓
S14	✓		✓	✓
S15	✓		✓	✓
S16	✓	✓	✓	✓
Total	9	8	12	13

Nota: No hemos considerado al sujeto S03 por la poca información que aporta al dejar las tareas sin realizar; ✓ = dificultad manifestada por el sujeto correspondiente.

Observamos que la mayor parte de los estudiantes encuentran dificultades al expresar relaciones geométricas tales como perímetro, área o volumen. Encontramos estas dificultades en ambos sentidos de traducción, es decir, tanto en enunciados dados mediante simbolismo algebraico para dar su traducción en representación verbal como viceversa. Consideramos que asociada a esta dificultad está la encontrada también por la mayoría de los estudiantes para traducir expresiones donde aparecen las operaciones de potenciación y/o multiplicación.

Otra de las dificultades manifestadas por los estudiantes es la relacionada con el uso de las letras; suelen utilizar dos letras con un mismo significado cuando en realidad solo deben usar una o usan una misma letra con distintos significados en el caso de ser necesarias dos letras.

También se manifiesta entre los estudiantes la dificultad de expresar la relación entre un número y su consecutivo, no solo mediante simbolismo algebraico, sino también al

traducir un enunciado a su representación verbal, tanto de manera no contextualizada como contextualizada, llegando a construir enunciados del tipo “un número más un número más uno” o del tipo “el siguiente a una pelota de fútbol”.

Al realizar el análisis del desempeño realizado por los estudiantes, uno a uno, hemos podido observar actuaciones que consideramos que es necesario destacar. Al construir enunciados contextualizados no son precisos en el lenguaje algebraico utilizado.

Ayudados por las entrevistas individuales, hemos observado que al contextualizar los enunciados, toman las letras como etiquetas, esto hace que surjan enunciados erróneos. Por ejemplo, no pueden sumar “limones” con “tomates”, otra cosa sería sumar “precio del kg de limones” y “precio del kg de tomates”, pero al no ser precisos con el lenguaje que utilizan, los enunciados que construyen no son realmente correctos. Surgen así enunciados tan llamativos por lo imposibles que son de entender como “cuatro coches por la mitad de una silla...” (S09-1-E2).

Si tienen el enunciado en representación simbólica $x + (x + 1) - 4$ (E12) consideran que x es “edad” sin especificar que se trata de “número de años” y construyen enunciados que, a pesar de que los hemos considerados correctos, si fuésemos estrictos, los estudiantes deberían ser más precisos en el lenguaje. Por ejemplo, “mi edad [...] más la siguiente a mi edad [...] menos cuatro” (S12-1-E12).

Suelen asignar el objeto también a los valores numéricos, operando de esta manera con números y objetos sin distinción. Por ejemplo, para el enunciado $x + (x + 1) = y - 2$ (E3) construyen enunciados como “un tomate más otro tomate igual a [...] un tomate menos dos [...] menos dos tomates” (S16-1-E3) donde a la constante 2 le asigna la representación de “tomates” para poder realizar la suma. Debido a esto, por ejemplo para la expresión simbólica $x + 1$ construyen expresiones verbales como “una pelota más otra”.

La dificultad que manifiestan algunos estudiantes para expresar la relación entre un número y su consecutivo, es razonada como que $x + 1$ es “el siguiente a mi edad” y que se referirán “al número siguiente, por ejemplo, si yo tengo trece pues catorce” (respuesta dada por el sujeto S12 durante la entrevista).

Para finalizar, analizando las explicaciones que nos dan los estudiantes en las entrevistas individuales sobre la elección de traducciones de enunciados algebraicos

hemos realizado algunas observaciones. A la mitad de los estudiantes les resulta más fácil la tarea donde le damos enunciados mediante simbolismo algebraico y distintas opciones en sistema de representación verbal, a la otra mitad de los estudiantes la tarea donde le damos enunciados en sistema de representación verbal y distintas opciones en simbolismo algebraico. Las razones que dan los estudiantes para justificar esto son vagas y no fundamentadas.

En esta última tarea, de elección de traducciones, observamos un comportamiento común en los estudiantes por medio de las entrevistas individuales. Al elegir una opción que sea traducción correcta del enunciado que les damos, si no lo hicieron adecuadamente, han ido reflexionando durante las entrevistas individuales con ayuda de la profesora investigadora y han determinado de manera justificada qué opción es la correcta. Del mismo modo, en aquellas opciones donde debían elegir una traducción incorrecta y no lo hicieron de manera adecuada, durante las entrevistas individuales fueron reflexionando sobre sus razonamientos y llegaron a la conclusión de porqué las opciones seleccionadas no eran las apropiadas.

CAPÍTULO VII

CAPÍTULO VII. CONCLUSIONES Y APORTACIONES DE ESTA INVESTIGACIÓN

La experiencia profesional nos lleva a considerar que, en ocasiones, al llegar a cierta etapa educativa, gran parte del alumnado tiene sentimientos adversos hacia las matemáticas. Estos sentimientos negativos son más fuertes en aquellos estudiantes que han tenido dificultades en su aprendizaje, a lo largo de la escolarización. En estos casos es de especial importancia que el profesorado intente paliar estas actitudes negativas, utilizando todos los medios a su alcance y sobre todo aquellos recursos que sean familiares al alumnado, tratando de motivarle. Análogamente la realización de una investigación en el aula, necesita de un alumnado que, al menos, se interese por participar en el trabajo que exige la investigación.

En nuestro caso, habiéndonos planteado investigar la manera en que los estudiantes traducen expresiones algebraicas, no contextualizadas y en contexto, entre diferentes sistemas de representación; y disponiendo de una muestra intencional de sujetos desmotivados, tuvimos la necesidad de preparar un material, para realizar el trabajo de campo, que motivase al alumnado y nos permitiese recoger los datos necesarios para el estudio. Así para esta investigación, iniciada con el estudio previo (Rodríguez-Domingo, 2011) y continuada con esta tesis doctoral, el juego fue el contexto que adoptamos, por considerarlo un contexto motivador. Como recogemos en esta memoria (apartado I.5), el dominó fue el juego que nos pareció más adecuado por basarse en reglas básicas generalmente conocidas y permitir, a través del mismo, realizar tareas que conllevan realizar traducciones entre los dos sistemas de representación considerados.

La estrategia utilizada con los estudiantes para animarles a participar en el trabajo, ha hecho posible la recogida de los datos cuyo análisis ha permitido dar cumplimiento a los objetivos que nos planteamos para este estudio.

VII.1. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS DE ESTA INVESTIGACIÓN

Como hemos presentado en el capítulo I de esta memoria, el problema de investigación abordado en esta tesis doctoral procede de nuestro interés por estudiar la problemática del aprendizaje del álgebra escolar, centrándonos en una pequeña parcela de dicho aprendizaje.

Recordamos que el **objetivo general** de esta investigación es analizar el proceso de traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal que realizan estudiantes de secundaria que están iniciándose en el estudio del álgebra escolar. Como ya hemos detallado, afrontamos este análisis atendiendo a: (a) los errores en los que incurren estos estudiantes, (b) la persistencia de estos errores al término de la ESO, (c) el efecto de la presencia o ausencia de contexto en la representación verbal en dicho proceso, (d) las relaciones que establecen entre representaciones equivalentes de un mismo enunciado y (e) el significado que dan a las letras y signos operacionales. Estos aspectos se corresponden con los diferentes objetivos específicos que abordamos en este trabajo. A continuación, describimos las conclusiones obtenidas en relación a cada uno de estos objetivos específicos.

VII.1.1. EN RELACIÓN AL PRIMER OBJETIVO ESPECÍFICO

La primera tarea que han trabajado en la recogida de datos de esta investigación consiste en construir traducciones de enunciados algebraicos no contextualizados. El análisis del desempeño de los estudiantes en esta tarea nos ha permitido dar respuesta al primer objetivo específico, que recordamos, definimos como:

<p>OE₁: Identificar y clasificar los errores en que incurren estudiantes, al inicio de su formación en álgebra, al construir traducciones de enunciados algebraicos no contextualizados entre los sistemas de representación simbólico y verbal.</p>
--

La categorización de errores elaborada en el estudio previo, y utilizada³⁰ en esta investigación, nos ha sido de utilidad para analizar los errores³¹ en los que incurren los estudiantes al traducir enunciados de un sistema de representación a otro (de simbolismo algebraico a representación verbal y viceversa).

En los capítulos V y VI hemos dado respuesta a este primer objetivo por medio del análisis de los enunciados que los estudiantes dejan en blanco en la tarea de construcción de enunciados no contextualizados, los que traducen correctamente y en los que incurren en algún error. En el análisis, atendemos a las diferentes variables de tarea consideradas en el diseño de estos enunciados (relación numérica, abiertos/cerrados, una letra/dos letras y secuenciales/no secuenciales). Este análisis sugiere que no hay influencia de estas variables en las diferentes respuestas proporcionadas por los estudiantes.

En el apartado V.1.2 hemos presentado un análisis de los errores en los que incurren los estudiantes según el sentido de traducción, esto es, de simbolismo algebraico a representación verbal y viceversa. Dicho análisis pone de manifiesto que cuando los enunciados están en representación verbal, los estudiantes incurren en mayor cantidad de errores que al presentarlos mediante el simbolismo. Además, los estudiantes dejan en blanco más enunciados correspondientes a los primeros que a los segundos.

En la traducción de enunciados de simbolismo algebraico a representación verbal, observamos que los errores más comunes son debidos a la completitud del enunciado y a las características propias del simbolismo algebraico, representando más del 90% del total de los errores presentes. En concreto, los errores que aparecen son, por orden de mayor a menor cantidad, los tipos incompleto, desmedido, letras, y complicación estructural y generalización.

En relación a los errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico que más se manifiestan, nos encontramos lo siguiente. El error debido a la complicación estructural del enunciado se muestra en una amplia variedad de enunciados de esta tarea de traducir enunciados de simbolismo algebraico a representación verbal, con características muy variadas. Por tanto, interpretamos que este tipo de error no está asociado a un tipo concreto de enunciado algebraico de los

³⁰ La categorización está descrita en el apartado II.3.3 y en la tabla V.1.3.

³¹ El análisis de datos está desarrollado en los capítulos V y VI.

considerados. Los errores debidos a una generalización del enunciado se concentran en cuatro enunciados distintos. En tres de esos cuatro enunciados, un alumno incurre en error, mientras que en el cuarto enunciado cinco sujetos incurren en errores debidos a la generalización, lo que nos hace pensar que es un error extendido entre los estudiantes. De estos cuatro enunciados donde se manifiesta el error de generalización, aquel en el los estudiantes incurren mayormente en error es multiplicativo, cerrado, con una sola letra y se presenta mediante su representación simbólica.

En el otro sentido de traducción, de representación verbal a simbólica, se manifiesta una mayor cantidad de errores. Sin embargo, observamos que, aunque se producen más errores que en el otro sentido de la traducción, la tendencia en ambos sentidos es similar. Los errores más comunes son igualmente debidos a la completitud del enunciado y a las características propias del simbolismo algebraico representando en total el 90% de los errores presentes. En concreto, los errores por orden de mayor a menor cantidad son los tipos incompleto, letras, complicación estructural, desmedido y particularización.

Los errores menos manifestados fueron los errores debidos a un mal uso de paréntesis, a la confusión de las operaciones de división y multiplicación, y de división y potenciación.

Respecto al uso del paréntesis, hemos observado que se ignora el uso de paréntesis cuando la formación de ecuaciones responden a problemas verbales, esto es, cuando la traducción se hace de representación verbal a simbolismo algebraico. Este hecho ha sido observado previamente por investigadores como Booth (1984) o Küchemann (1981).

Algunos de los errores detectados en el paso de la representación verbal a la simbólica, en concreto, la particularización de expresiones y la confusión de la multiplicación y la potenciación, coinciden con los detectados por Ruano et al. (2008) en un estudio sobre los errores cometidos por estudiantes de educación secundaria en tres procesos específicos en los que se pone en juego el simbolismo algebraico: sustitución formal, generalización y modelización.

Comparando ambos sentidos de traducción, observamos que la mayor o menor presencia de un tipo de error no depende de la relación numérica considerada en el diseño del enunciado. Al traducir enunciados algebraicos dados en representación verbal, los estudiantes incurren en más errores cuando la relación numérica es aditiva y multiplicativa o solamente aditiva, mientras que en el otro sentido se producen con

mayor frecuencia cuando la relación es multiplicativa. En este sentido tampoco apreciamos diferencias en la traducción si el enunciado algebraico dado es secuencial o no lo es. También observamos que el que un enunciado sea abierto o cerrado no se evidencia que influya al traducir enunciados dados en representación verbal sin embargo sí se aprecia una leve diferencia en el sentido contrario. Algo análogo ocurre con el hecho de que el enunciado requiera de dos letras distintas para su representación simbólica o únicamente de una, pues al traducir enunciados dados en representación verbal apenas se aprecia diferencia y sí se aprecia una leve diferencia en el sentido contrario.

Si nos fijamos en todas las variables consideradas en el diseño de los enunciados de manera conjunta, observamos que al proporcionar los enunciados en simbolismo algebraico, los estudiantes presentan más errores si estos son abiertos y con dos letras que si son cerrados y con solo una letra. Esto parece relacionarse con el hecho de que los estudiantes están más familiarizados, al inicio del estudio del álgebra escolar, con expresiones simbólicas cerradas y con una sola letra, por su similitud con las ecuaciones de primer grado (unidad didáctica que se imparte para introducirles en el álgebra escolar). La inclusión de la secuencialidad al presentar los enunciados mediante representación verbal ocasiona que si los enunciados tienen dos letras haya más frecuencia de errores si son abiertos y no secuenciales (que si son cerrados y no secuenciales). Si el enunciado únicamente tiene una letra, la frecuencia de errores es mayor si el enunciado es abierto y secuencial que si es cerrado y secuencial o cerrado y no secuencial.

Concluimos, en relación al OE₁, que al construir traducciones de enunciados algebraicos no contextualizados:

- de representación verbal a simbolismo algebraico, los estudiantes incurren en más errores y dejan más traducciones sin realizar;
- de representación verbal a simbolismo algebraico, los tipos de errores que más se manifiestan en las traducciones de enunciados no contextualizados son debidos a la completitud del enunciado y a las características propias del simbolismo algebraico;

- de simbolismo algebraico a representación verbal, los tipos de error que más se manifiestan son debidos a la completitud del enunciado y a las características propias del simbolismo algebraico;
- en este tipo de traducciones, parece no influir de manera aislada las características del enunciado no contextualizado dado. Si se detecta cierta influencia de la confluencia de las variables número de letras implicadas y ser abierto o cerrado, así como de la secuencialidad y ser abierto o cerrado cuando se distingue según el número de letras.

VII.1.2. EN RELACIÓN AL SEGUNDO OBJETIVO ESPECÍFICO

Recordamos que el segundo objetivo específico lo definimos como,

OE₂: Comparar los errores identificados y sus frecuencias (OE₁) con los identificados en nuestro estudio previo realizado con estudiantes que habían concluido el estudio del álgebra escolar correspondiente a ESO.

Realizamos una comparación entre los resultados obtenidos con los estudiantes de 2º de ESO que participan en esta investigación y con los estudiantes de 4º de ESO que participaron en el estudio previo (Rodríguez-Domingo, 2011). El primero de estos grupos está comenzando el estudio del álgebra escolar (2º de ESO) y el otro está finalizando sus estudios obligatorios y, por tanto, su formación obligatoria en álgebra (4º de ESO).

Los resultados de esta comparación sugieren que la mayor experiencia algebraica y el mayor desarrollo cognitivo del alumnado de 4º de ESO incide positivamente en la reducción del número de errores en que incurren. Detectamos las mayores diferencias entre ambos grupos en los errores relativos a las características propias del simbolismo algebraico cuando se consideran traducciones del sistema de representación simbólica al verbal, y en los errores de completitud en las traducciones del sistema de representación verbal al simbólico.

Los errores derivados de la aritmética, sin embargo, si bien son escasos, están presentes con similares frecuencias en ambos grupos, lo que sugiere la necesidad de que sean explícitamente abordados en la enseñanza. En especial, se hace necesario abordar

la confusión que se produce en la interpretación de las operaciones potenciación, multiplicación, suma, multiplicación y división, para ayudar al alumnado a subsanar estos errores, al identificarse como un obstáculo en el progreso de su comprensión.

La menor presencia de errores de completitud en el caso del alumnado de 4º de ESO pone de manifiesto una mayor competencia para reconocer la estructura de expresiones simbólicas. Esto les facilita no incurrir en la omisión o inclusión excesiva de elementos en los enunciados algebraicos expresados de forma simbólica. Además les dota de una mayor capacidad para traducir enunciados algebraicos del sistema de representación simbólico al verbal.

En el caso de los procesos de traducción del sistema de representación verbal al simbólico, en el grupo de 4º de ESO se detecta un importante número de errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico. Estos errores, en la mayoría de los casos, están asociados a la complejidad estructural del simbolismo algebraico y al uso de las letras, con cierta presencia de errores debidos a la particularización de términos de las expresiones.

Como sugieren los estudios previos de Cerdán (2008a, 2008b, 2010), anteriormente referidos en esta memoria, los estudiantes tienen tendencia a incluir más letras de las necesarias al abordar este tipo de traducciones. Esta dificultad se muestra persistente aun cuando los estudiantes avanzan en su desarrollo cognitivo y en el aprendizaje del álgebra. En esta investigación también se detecta el caso contrario: el uso de una misma letra para representar cantidades desconocidas diferentes. Pedir al estudiante que precise qué representa cada letra puede ser clave para ayudarles a detectar y corregir este tipo de errores. En el contexto de la resolución de problemas, González-Calero, Arnau y Puig (2013) han observado que dicha precisión no es habitual en los procesos de traducción que realizan los estudiantes de secundaria y que la ambigüedad con la que definen las letras implicadas es la causa de algunas de las dificultades que encuentran en la resolución de problemas por medio de ecuaciones algebraicas.

Observamos en ambos grupos que los procesos de traducción donde se presenta una mayor frecuencia de errores son aquellos que más se trabajan en la práctica escolar: traducción del sistema de representación verbal al simbólico. Podemos interpretar esta situación como que los estudiantes, al ser un trabajo más conocido, se sienten más seguros y prestan menos atención a la tarea. Otra posible interpretación es que los

estudiantes aborden esta traducción de forma semántica (lo cual es coherente con la mayor presencia de errores en enunciados secuenciales en el grupo de 2º de ESO) y creen una estructura cognitiva de la situación diferente a la expresada por el enunciado verbal. Este fenómeno ha sido observado en los procesos de traducción implicados en la resolución de problemas manifestándose en la modificación del enunciado verbal, afectando a su significado, al realizar su interpretación del mismo (Mitchell, 2001). Se interpreta como resultado de la interacción entre la ambigüedad del lenguaje verbal y la precisión del lenguaje matemático. En esta parte de la investigación los enunciados considerados carecen de referencias a un contexto no matemático y, por tal motivo, presentan una menor ambigüedad en su significado. No obstante se hace necesario explorar estos procesos de traducción solicitando a los estudiantes la descripción en voz alta de sus procesos de pensamiento para identificar si el fenómeno descrito por Mitchell pueda ser la explicación de la alta presencia de errores relativos a las características propias del simbolismo algebraico.

La consideración de las variables de tarea implicadas en el diseño de los enunciados, nos permite constatar que los enunciados que combinan relaciones aditivas con otras, multiplicativa o de potencia, son los que presentan mayores dificultades a los estudiantes al traducir del sistema de representación verbal al simbólico. La mayor experiencia y desarrollo del alumnado de 4º parece incidir positivamente en la traducción de los enunciados: aditivo, de potencia y en el combinado aditivo y de potencia. También se detecta en el caso de este alumnado de 4º curso la ausencia de influencia de las variables de tarea número de incógnitas y enunciado cerrado/abierto, consideradas independientemente, al abordar la traducción del simbolismo algebraico al sistema de representación verbal.

Cuando se realiza la traducción de enunciados dados por su representación simbólica, en el grupo de 2º, los enunciados cerrados o con una variable son los que presentan más dificultades a los estudiantes. Esto puede ser debido a la menor experiencia de estos estudiantes con enunciados algebraicos cerrados (aún no han trabajado la unidad de ecuaciones) y la tendencia ya señalada de incorporar más variables de las necesarias. Sin embargo, en las traducciones del sistema de representación verbal al simbólico, los estudiantes de ambos grupos incurren en más errores cuando los enunciados son abiertos. Esto quizá se deba a que estos son menos frecuentemente trabajados en las

aulas, donde rápidamente se dirige la atención hacia la traducción de enunciados en el contexto de resolución de problemas. En este tipo de traducciones, de representación verbal a simbolismo algebraico, la secuencialidad del enunciado y la inclusión de dos variables son elementos que conducen a un mayor número de errores en los alumnado de 4º de ESO y 2º de ESO respectivamente.

En relación al OE₂, concluimos que:

- al presentar enunciados en simbolismo algebraico, se producen menor número de errores en el grupo de 4º según completitud del enunciado y derivados de las características propias del simbolismo algebraico;
- el alumnado de 4º parece estar más capacitado para realizar traducciones de enunciados algebraicos no contextualizados de simbolismo algebraico a sistema de representación verbal;
- es necesario trabajar en el aula para eliminar, en la medida de lo posible, la confusión que manifiesta el alumnado en la interpretación de las operaciones potenciación, multiplicación, suma, multiplicación y división;
- al presentarles enunciados en representación verbal, ocurre lo siguiente:
 - o ambos grupos incurren en mayor número de errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico, en concreto de complicación estructural y letras (tienen tendencia a incluir más letras de las necesarias al abordar este tipo de traducciones);
 - o ambos grupos manifiestan más errores cuando los enunciados son abiertos;
 - o ambos grupos presentan más dificultades ante enunciados secuenciales y con dos letras;
 - o el grupo de 2º parece mostrar más dificultad ante un enunciado no contextualizados cuando es aditivo y de potencia y el aditivo y multiplicativo, mientras que en el grupo de 4º mejoran los resultados ante los enunciados aditivos, de potencia y aditivo y de potencia.

VII.1.3. EN RELACIÓN AL TERCER OBJETIVO ESPECÍFICO

El análisis de la construcción de enunciados algebraicos contextualizados, durante la realización del torneo, nos ha permitido dar respuesta al tercer objetivo específico.

OE₃: Analizar los errores en los que incurren los estudiantes al construir traducciones de enunciados algebraicos contextualizados entre los sistemas de representación simbólico y verbal.

Consideramos la realización del torneo, segunda fase de la recogida de datos, como una entrevista clínica no estructurada³². La profesora investigadora observó las actuaciones de los estudiantes durante los episodios de juego. Anotó y grabó las conversaciones de los estudiantes mientras jugaban, atendiendo a sus expresiones orales y a las relaciones que establecen entre los enunciados algebraicos dados en ambos sistemas de representación. Las grabaciones de estas interacciones nos han permitido analizar la construcción de enunciados contextualizados al proporcionarles enunciados en representación simbólica.

Durante el torneo, los estudiantes de 2º de ESO se limitan a realizar una actuación individual y no interactúan con sus compañeros, por lo que no surgen situaciones de autocorrección en la lectura de enunciados algebraicos no contextualizados, a diferencia de lo ocurrido en el estudio previo con estudiantes de 4º de ESO (Rodríguez-Domingo, 2011).

El estudio de los errores en los que incurren los estudiantes de 2º de ESO en la construcción de enunciados contextualizados durante el torneo, presentado en el apartado V.2 de esta memoria, muestra que la mayoría de los errores en los que incurren estos estudiantes son debidos a la completitud de los enunciados, tanto por construir enunciados incompletos como por construirlos desmedidos. Entre los enunciados contruidos por estos estudiantes, 34 en total, encontramos dos casos en los que los estudiantes construyen un enunciado cuya interpretación simbólica corresponde a un enunciado cerrado a pesar de que el enunciado dado es abierto. Aunque en menor medida, en la construcción de estos enunciados los estudiantes también incurren en

³² Las características de tipo de investigación están descritas en el apartado IV.1

errores debidos a las características propias del simbolismo algebraico, en concreto errores debidos al mal uso de las letras de las expresiones dadas. En ocasiones, consideran más de un significado para una misma letra y en otras consideran un mismo significado para distintas letras, al igual que ocurría en el caso de la construcción de traducciones de enunciados verbales no contextualizados.

En el análisis cualitativo observamos que la falta de atención es lo que lleva a los estudiantes a no ser precisos en sus construcciones. Suelen aproximarse a una traducción del enunciado pero no llegan a conseguirlo correctamente, evidenciando que no dan importancia a la precisión de las expresiones. Algunos de los enunciados construidos, como hemos visto a lo largo de esta memoria, no tienen sentido en la vida real. Esto ha sido destacado por investigadores como Isik y Kar (2012) quienes identifican errores relacionados con el lenguaje utilizado por el alumnado y con el realismo del problema que construyen.

En la construcción de estos enunciados observamos que los estudiantes, al expresarse oralmente, tienen dificultad para recordar lo que van diciendo, lo que hace que construyan enunciados con demasiadas explicaciones, dando lugar finalmente a enunciados erróneos. Durante las entrevistas individuales posteriores, encontramos que, el explicar oralmente, los enunciados les ayudan a autocorregir sus errores. Esto coincide con investigaciones previas como la de Neuman y Schwarz (2000), quienes concluyen que las autoexplicaciones en la resolución de problemas algebraicos son buenas para el aprendizaje.

En los enunciados que construyeron los estudiantes en el torneo observamos que, en ocasiones, algunos de ellos imitan la estructura de la representación verbal del enunciado que le proporcionamos al tener delante estos enunciados en las otras piezas del dominó. Además, tienden a copiar los unos de los otros la manera de construir los enunciados, en particular, la interpretación de las letras durante el torneo (esta interpretación la analizamos más adelante en el apartado VII.1.6), no copiando la interpretación de los coeficientes o términos independientes.

Al realizar una comparación entre las traducciones realizadas cuando los enunciados considerados son no contextualizados y cuando sí son contextualizados descubrimos que: (a) cuando los enunciados son contextualizados los estudiantes incurren en más errores debidos a la completitud del enunciado; (b) cuando los enunciados no son

contextualizados un mayor número de errores son debidos a las características propias del simbolismo algebraico.

Así, en relación al OE₃, concluimos que:

- presentan mayor número de errores debidos a la completitud del enunciado y al número de letras: consideran más de un significado para una misma letra y un mismo significado para distintas letras;
- construyen enunciados con excesivas explicaciones dando lugar finalmente a enunciados erróneos;
- tienden a copiar los unos de los otros la manera de construir los enunciados y, en particular, la interpretación de las letras, pero no la interpretación de los coeficientes o términos independientes.

VII.1.4. EN RELACIÓN AL CUARTO OBJETIVO ESPECÍFICO

El análisis del trabajo realizado por los estudiantes en el instrumento denominado Ficha II nos ha permitido dar respuesta al cuarto objetivo específico.

OE₄: Analizar los errores en los que incurren los estudiantes al elegir traducciones de enunciados al proporcionales enunciados representados mediante simbolismo algebraico y representación verbal.

Para dar respuesta a este objetivo, en el diseño de los enunciados que componen la Ficha II, consideramos los ocho tipos de error más frecuentes detectados en el trabajo de los estudiantes en la Ficha I (tanto en el grupo de los estudiantes de 2º de ESO como en los de 4º de ESO)³³.

Al analizar estos errores detectamos que cuando presentamos los enunciados algebraicos mediante simbolismo algebraico, la manifestación de errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico son los más frecuentes. Particularmente los errores son debidos a la complicación estructural del enunciado y a la generalización. En cuanto a la generalización, como pudimos observar en las entrevistas individuales, los estudiantes de este estudio consideran que realmente no es

³³ En la tabla IV.16 vemos que no todos los errores están presentes en la Ficha II.

un error generalizar un enunciado, pero sí reconocen que un enunciado generalizado no es la traducción que mejor se ajusta al enunciado simbólico dado, habiendo otra opción entre las que tienen que elegir que sí es traducción exacta del enunciado dado. En estas elecciones observamos además, que, en ocasiones, los estudiantes incurren en errores con motivo de la confusión de conceptos tales como el área o el perímetro de una figura plana, a pesar de que estos conceptos son trabajados en el currículo escolar desde primaria (Dickson et al., 1991; Romero y Cañadas, 2014). Observamos dificultades con estos conceptos geométricos de área y perímetro, que consideramos relacionadas con dificultades para distinguir entre las operaciones de potenciación y multiplicación.

Al considerar enunciados algebraicos contextualizados dados en representación verbal y elegir la traducción a simbolismo algebraico que mejor se ajuste al dado, encontramos que los estudiantes incurren en más errores debidos a la completitud del enunciado, en concreto a errores del tipo incompleto. Errores debidos a la confusión de operaciones tales como potenciación-multiplicación o suma-multiplicación son frecuentes también en este tipo de acción. Uno de los errores en los que más incurre el alumnado de este estudio al realizar esta tarea está relacionado con las letras, hecho que puede deberse a lo poco habituados que están a manipularlas, antes del momento de hacerlo para esta investigación. Estos errores manifestados pueden deberse a que los estudiantes no prestan suficiente atención al realizar las tareas, pues durante las entrevistas individuales con la profesora investigadora, son capaces de reflexionar y subsanar algunos errores. Estudios previos relacionados con este error como los de Collis (1975) y Halford (1978) indican que la complejidad a la que se enfrentan los estudiantes puede deberse al número de letras que contiene la expresión algebraica. En concreto, los estudiantes de este estudio han trabajado con enunciados algebraicos, tanto representados simbólicamente como verbalmente, que únicamente requieren de una o dos letras. En estas traducciones en unas ocasiones consideran más de un significado para una misma letra y en otras consideran un mismo significado para distintas letras, lo que les lleva a un enunciado erróneo.

Comparando ambos sentidos de traducción, de simbolismo algebraico a representación verbal y viceversa, en estos enunciados algebraicos contextualizados observamos que la frecuencia de errores en los que incurren los estudiantes se produce independientemente de la relación numérica presente en el enunciado dado. Tampoco

podemos asegurar que esté relacionado con el hecho de que los enunciados sean abiertos o cerrados, o si tienen una o dos letras, pues la frecuencia de errores que se manifiesta en el estudio no tiene apenas diferencias. Destacamos además que dado que la cantidad de enunciados trabajados en este estudio no es muy numerosa, no podemos sacar conclusiones que generalicen la actuación de los estudiantes de secundaria respecto a las características de los enunciados.

En la construcción de enunciados algebraicos no contextualizados, los estudiantes incurren en más errores al traducir enunciados dados en representación verbal, suponiendo las dos terceras partes de los errores en los que incurren los sujetos. Sin embargo, cuando presentamos los enunciados para elegir una opción en simbolismo algebraico, se manifiestan más errores en sentido contrario, representando también las dos terceras partes de los errores.

Se puede pensar que la dificultad de las traducciones realizadas puede estar influenciada por la presencia y el tipo de contexto implicado en la representación verbal dada. Hasta el momento, no existen evidencias sobre la naturaleza de esta influencia, pues si bien algunos trabajos (e.g., Wollman, 1983) la descartan, otros la señalan como beneficiosa, siendo la familiaridad del contexto un factor reconocido en los procesos de resolución de problemas (Ambrose y Molina, 2014) e incluso recomendado para dotar de significación concreta al lenguaje matemático (Gómez-Granell, 1989). En esta investigación, observamos una escasa diferencia en las frecuencias de errores cuando los enunciados tienen un contexto numérico (hace referencia a edades y cantidades de objetos) o un contexto geométrico (hace referencia a longitudes, áreas o volúmenes).

Al entrevistar a los estudiantes y cuestionarles sobre la dificultad que han tenido en las dos situaciones que componen la tarea de elección de traducciones de enunciados, encontramos respuestas en los dos sentidos. Cuando se les presenta un enunciado algebraico mediante simbolismo algebraico y tienen que elegir entre distintas opciones expresadas mediante el sistema de representación verbal, le resulta más fácil encontrar su traducción, ya que de manera contraria tienen que ir leyendo demasiadas veces el enunciado dado para asegurarse de qué expresión verbal es la correcta.

En sentido contrario, casi el mismo número de estudiantes asegura encontrar mayor dificultad para elegir las opciones de respuesta correcta. En vista de las respuestas de los estudiantes en las entrevistas individuales, explicar que una expresión es incorrecta

requiere solo decir algo que no se corresponde con el enunciado presentado. Sin embargo, explicar que algo es correcto para ellos es más complicado y sus razonamientos no consiguen ser justificaciones adecuadas.

Para finalizar, concluimos en relación al OE₄ que:

- algunos estudiantes consideran que realizar una traducción de un enunciado algebraico como generalización no es incurrir en un error;
- la consideración de enunciados contextualizados nos ha permitido observar que el error que se manifiesta como potenciación-multiplicación concurre con confundir perímetro y área, no pudiendo determinar si estos errores se refuerzan entre sí;
- al elegir entre enunciados dados en representación verbal el que corresponde con su representación simbólica, presentan más errores debidos a la completitud del enunciado (construyen enunciados incompletos) y debidos al número de letras;
- la diferencia en las frecuencias de errores es escasa para los enunciados de este estudio cuyo contexto es numérico (edades, números y cantidades de objetos) o geométrico (longitudes, áreas o volúmenes);
- la frecuencia de errores en que incurren los estudiantes parece que se produce independientemente de la relación numérica del enunciado dado, tampoco podemos asegurar que esté relacionado con el hecho de que los enunciados sean abiertos o cerrados, ni con el número de letras (una o dos);
- la mayoría de los estudiantes encuentran mayor facilidad de traducción cuando le presentamos un enunciado algebraico dado mediante el sistema de representación verbal y distintas opciones expresadas mediante simbolismo algebraico;
- en la construcción de enunciados algebraicos no contextualizados, incurren en más errores cuando los enunciados vienen dados en representación verbal, y al elegir se manifiestan más errores cuando vienen dados mediante simbolismo algebraico.

VII.1.5. EN RELACIÓN AL QUINTO OBJETIVO ESPECÍFICO

El análisis del trabajo realizado por los estudiantes durante el torneo y en las explicaciones escritas dadas en la Ficha II, nos ha permitido dar respuesta al quinto objetivo específico.

OE₅: Describir cómo los estudiantes establecen relaciones entre representaciones verbales y simbólicas equivalentes de enunciados algebraicos.

En primer lugar, destacamos que consideramos la consecución de este objetivo limitada por la brevedad y falta de precisión de la información dada oralmente por los estudiantes en dos momentos del estudio de campo: (a) durante la fase de juego de la recogida de datos, cuando explican los emparejamientos realizados; y (b) las explicaciones escritas dadas en la segunda parte de la construcción de enunciados contextualizados.

Al expresar dichas relaciones algunos estudiantes solamente leían las dos representaciones, una a continuación de la otra. Otros estudiantes, en cambio, relacionaban ambas representaciones de un mismo enunciado. En este segundo caso, los estudiantes ponen en correspondencia los elementos de ambas representaciones. Sin embargo, en el primer caso, la relación que se establece entre ambas representaciones de un mismo enunciado es global y, por tanto, menos precisa.

En las explicaciones que dan a sus elecciones en la segunda parte de la elección de la traducción de enunciados, algunos de ellos relacionan la representación simbólica del enunciado con su representación verbal en casi todas sus explicaciones, lo que interpretamos como una lectura relacional del enunciado dado.

Al analizar las justificaciones que dan los estudiantes ante la elección que hacen de los enunciados, observamos que algunos justifican su elección indicando una relación entre la representación simbólica y la representación verbal del enunciado que le damos. Sin embargo, el resto o no da justificación de su elección, o la basa en argumentaciones diferentes que no implican relacionar ambas representaciones del mismo enunciado.

Así, en relación al OE₅, concluimos que, tanto en la tarea de construcción de enunciados contextualizados como en la de elección de enunciados algebraicos, con

mayor frecuencia en este segundo caso, algunos estudiantes realizan lecturas relacionales si bien no es una actuación predominante.

VII.1.6. EN RELACIÓN AL SEXTO OBJETIVO ESPECÍFICO

El análisis del trabajo realizado por los estudiantes durante la construcción de enunciados algebraicos contextualizados, nos ha permitido dar respuesta al sexto objetivo específico.

OE₆: Identificar el significado que los estudiantes dan a las letras y a los signos operacionales al construir traducciones al sistema de representación verbal de enunciados dados simbólicamente.

Como vimos al realizar el análisis de estos enunciados (apartado V.2), las interpretaciones que los estudiantes hacen de las letras se reparten casi en igual medida entre los significados de objeto e incógnita (ver tabla V.2.8). Cuando los estudiantes interpretan las letras como incógnitas, construyen enunciados en simbolismo algebraico incurriendo en menor número de errores que en el caso en el que interpretan la parte literal como un objeto.

Recordamos que los errores derivados de las características propias del simbolismo algebraico destacan por su frecuencia en ambos sentidos de traducción para el grupo de sujetos de este estudio. En el caso de este tipo de error, con menor frecuencia (32% de los casos) suelen utilizar dos letras con un mismo significado cuando en realidad solo deben usar una; y, en mayor medida, usan una misma letra con distintos significados en el caso de ser necesarias dos letras.

En el análisis realizado del desempeño de los estudiantes (capítulo VI) y ayudados por la información recopilada en las entrevistas individuales, hemos observado que al construir enunciados contextualizados los estudiantes no son precisos en el lenguaje utilizado. Al contextualizar los enunciados, toman las letras como etiquetas, por ejemplo, si a número le asignan la letra x , cada vez que aparece la palabra “número” ponen x , aunque se trate de otro número. Esto hace que surjan enunciados erróneos. Para evitar la situación de operar objetos con números, a los valores numéricos también les asignan objetos.

Observamos que los estudiantes que interpretan las letras como objetos parecen hacer distinción entre los coeficientes que acompañan a las letras: distinguen si se refieren a un objeto en concreto (un tomate) o si se refieren a objetos en general (tomates) sin especificar de cuantos objetos se trata. Los enunciados contruidos en estos casos, considerando las letras como objetos, no son traducción del que les proporcionamos. Esto nos lleva a pensar que los estudiantes, a menudo, no distinguen entre variables y nombres. Parece que simplemente ven las letras como nombres que expresan objetos en lugar de verlas como variables que representan una cantidad indeterminada.

Esta actuación de los estudiantes observada en nuestra investigación, es decir, el hecho de que utilicen las letras como objetos, “lo que significa reducir el significado de la letra de algo muy abstracto a algo mucho más concreto y real” (Küchemann, 1981, p. 107). Esto entra en conflicto con el uso de las letras para representar número de objetos. Surgen así enunciados llamativos por su sinsentido, por ejemplo “cuatro coches por la mitad de una silla...”. Este empleo de las letras pone de manifiesto entre los estudiantes la dificultad de expresar la relación entre un número y su consecutivo, no solo mediante simbolismo algebraico, sino también al traducir un enunciado a su representación verbal, tanto de manera no contextualizada como contextualizada, construyendo enunciados del tipo “el siguiente a una pelota de fútbol”.

El uso de las letras como objetos ha permitido a los estudiantes construir enunciados que únicamente serían válidos para ese objeto en concreto. Además, tal y como reconocen en las entrevistas individuales, cuando han usado este significado de las letras han dado una respuesta a la tarea sin seguridad sobre si lo hecho era o no correcto. Precisamente, al ser conscientes de este tipo de conflictos, los estudiantes perciben la necesidad de reorganizar su forma de pensar y avanzar hacia un nivel más alto. Recordamos que estos estudiantes, al comienzo de esta investigación, están iniciándose en el estudio del álgebra escolar.

Pedir al estudiante que precise qué representa cada letra puede ayudar a detectar y corregir este tipo de errores. En el contexto de la resolución de problemas, los errores detectados en estos estudiantes para definir con precisión las letras implicadas en los enunciados algebraicos, están relacionadas con las dificultades encontradas en la resolución de problemas que requieren ecuaciones algebraicas que han señalado otros investigadores como González-Calero, Arnau y Puig (2013).

En lo que se refiere al tratamiento de las operaciones de los enunciados, la mayor parte de los estudiantes realizan una traducción textual, únicamente dan significado a las operaciones cuando se trata de enunciados referidos a contextos de edades y para enunciados donde la estructura numérica de los enunciados es aditiva. Dan significado a las operaciones en 7 de los 34 enunciados, mientras que en 27 de estos realizan una traducción textual de las operaciones (ver tabla V.2.8).

En lo referido al tratamiento de las operaciones, destacamos, que la principal dificultad encontrada entre los estudiantes está en las operaciones de potenciación y multiplicación. Interpretamos que esta dificultad está relacionada con la confusión entre los conceptos de perímetro y área.

También hemos observado que algunos estudiantes muestran dificultades en la interpretación de signos, en concreto nos referimos a aquellos que por convenio no aparecen, como es el caso del punto entre el coeficiente y la letra en una expresión simbólica.

Así, en relación al OE₆, concluimos que:

- la mitad de los sujetos interpretan las letras de la expresión simbólica dada como un objeto y no como una cantidad desconocida;
- en la construcción de enunciados contextualizados la interpretación que hacen de las letras como objeto induce a enunciados sin sentido en la vida real;
- muestran dificultades con las operaciones de potenciación y multiplicación, asociadas a confusiones con los conceptos de perímetro y área.

VII.2. APORTES DE ESTA INVESTIGACIÓN

En esta investigación hemos realizado un estudio exhaustivo sobre los tipos de errores en los que incurren estudiantes de secundaria, al inicio en su formación en álgebra, en las tareas de construcción de enunciados algebraicos, elecciones de traducciones de enunciados algebraicos, contextualizados y no contextualizados, y las posibles dificultades que están en el origen de esos errores.

Consideramos que la información obtenida es de utilidad para profundizar en el conocimiento algebraico de estudiantes que inician su formación algebraica, tanto desde

el punto de vista de la investigación como de la docencia. Por un lado, la clasificación de errores utilizada en esta investigación puede ser utilizada para abordar la descripción de errores en la traducción de enunciados algebraicos en otros niveles educativos. En este estudio nos ha conducido a los resultados presentados en los capítulos V y VI, así como a extraer algunas conjeturas sobre el conocimiento algebraico de los estudiantes y su habilidad para abordar la traducción entre los sistemas de representación simbólica y verbal, algo que puede ser extensible al uso de otros sistemas de representación. Posteriores investigaciones pueden indagar en las conjeturas extraídas a partir del detallado análisis presentado de los errores en los que los estudiantes incurren en los procesos de traducción considerados en esta investigación, las cuales hacen referencia a las diversas variables de tarea consideradas. Esta investigación también aporta información útil para el desarrollo de investigaciones centradas en la resolución de problemas dados verbalmente, donde es necesario realizar, previamente a su resolución, una traducción del enunciado entre distintos sistemas de representación.

Desde el punto de vista de la docencia, este trabajo puede ser interesante para la elaboración de propuestas didácticas teniendo en cuenta, por ejemplo, la metodología empleada para la recogida de información y los errores en que los estudiantes incurren, con vistas al planteamiento de determinadas tareas que constituyan oportunidades de aprendizaje para dichos estudiantes.

El dominó algebraico construido resultó ser un material útil para trabajar con el alumnado de esta investigación, poco motivado y con poco interés por el estudio. Este material puede ser de utilidad para trabajar en el aula el álgebra. En el caso del alumnado de nuestra investigación, contamos con estudiantes que habitualmente en el aula no mostraban interés por estudiar y que gracias a esta herramienta han participado en el trabajo diario. Destacamos también el hecho de que esta herramienta les ha permitido trabajar en grupos, compitiendo entre ellos. Esta situación les ha ayudado a ser autocríticos con su aprendizaje y con el de sus compañeros, actitud que consideramos positiva en el aprendizaje.

El efecto que producen las variables de tarea consideradas puede ser de utilidad al profesorado y a los editores de libros de texto, atendiendo a aquellas que potencian la dificultad de los procesos de traducción e incrementando la práctica de traducciones en las que estén implicadas. El análisis de errores realizado en esta memoria, nos ha

permitido detectar aquellas tareas en las que los estudiantes incurren en menor número de errores y que, por tanto, podrían tenerse en cuenta en el ámbito escolar para apoyar al profesorado a graduar el aprendizaje del alumnado. El hecho de que los estudiantes traduzcan con más facilidad un enunciado algebraico dado en su representación simbólica a su representación verbal puede aprovecharse para iniciar a los estudiantes en el estudio del álgebra. Desde la perspectiva de la invención de problemas se puede aprovechar esta mayor facilidad para que sean los estudiantes los que propongan problemas a partir de enunciados algebraicos expresados simbólicamente y, a partir de dichos problemas, abordar la traducción del sistema de representación verbal al simbólico, que entraña más dificultades.

Así, actividades tan habituales en el aula como la construcción de traducciones de enunciados algebraicos no contextualizados, producen un mayor número de errores, que las que corresponden a la elección de traducciones de enunciados algebraicos contextualizados, o incluso aquellas en las que se hace la construcción de enunciados algebraicos contextualizados. Consideramos que trabajando este último aspecto, la traducción de enunciados algebraicos oralmente, debe tenerse especial cuidado pues como determina Freudenthal (1983), el lenguaje oral es más complejo. Para este investigador al trabajar con el lenguaje oral, debemos basarnos en la comprensión del contenido para entender la estructura sintáctica, pues no es lo mismo decir “cinco por equis, más siete” que “cinco por, equis más siete”. Estos aspectos deben tenerse en cuenta por tanto al trabajar estas situaciones con los estudiantes en el aula.

Por otra parte, entendemos que la confusión que se produce entre área y perímetro puede ser debida a que en el currículo escolar los temas de geometría se encuentran en los libros de texto, y en la mayoría de las temporalizaciones de las programaciones de los centros educativos, en las últimas semanas de curso. La experiencia docente muestra que el profesorado no imparte estos contenidos por falta de tiempo o se imparten con rapidez, no dándole demasiada importancia. También puede deberse a la manera en que estos temas son abordados en el aula, primándose el aspecto procedimental al conceptual, se requeriría un más manipulativo y mayor atención a los conceptos.

En definitiva, consideramos que la enseñanza podría hacer uso de la mayor facilidad que evidencian los estudiantes para traducir enunciados algebraicos, dados en simbolismo algebraico a su representación verbal, como apoyo para el desarrollo de su

comprensión del simbolismo algebraico y la mejora de los procesos de traducción inversos. Desde la perspectiva de la invención de problemas, se puede aprovechar esta mayor facilidad para que sean los estudiantes los que propongan problemas a partir de enunciados algebraicos expresados simbólicamente y, a partir de dichos problemas, abordar la traducción del sistema de representación verbal al simbólico. El trabajo integrado de invención y resolución de problemas puede ser de utilidad para ayudar a los estudiantes a tomar conciencia de la mayor precisión y capacidad sintética del simbolismo algebraico frente al lenguaje verbal, las cuales identificamos como dos de las características causantes de los errores más persistentes de entre los detectados (los errores debidos a la complejidad estructural del simbolismo algebraico) que se manifiestan especialmente en las traducciones del sistema de representación verbal a simbólico.

Para finalizar, concluimos que con los resultados obtenidos en esta investigación por medio de la clasificación, descripción y comparación de los errores en los que incurren estos estudiantes en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólica, hay información que puede considerarse para aportar recomendaciones específicas para orientar el desarrollo de la comprensión del simbolismo algebraico. Así mismo consideramos que aportamos información relevante sobre cómo esta comprensión se pone de manifiesto en los procesos de traducción aquí analizados y cómo va progresando con la experiencia y desarrollo cognitivo de los alumnado.

VII.3. LIMITACIONES DE ESTA INVESTIGACIÓN

Somos conscientes de que nuestra investigación presenta algunas limitaciones.

Queremos destacar que, a pesar de que hemos intentado controlar las variables que intervienen en este estudio, al tratarse de una investigación realizada en un contexto real de aula, es probable que algunas hayan escapado a nuestro control. Por ejemplo, es posible que en algunas de las tareas que los estudiantes deben desarrollar de manera individual, se hayan ayudado unos a otros. No obstante, consideramos que estas interacciones han podido favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Dado el reducido número de alumnado estudiado (16 estudiantes) y que la muestra elegida es intencionada, por ser los estudiantes de los que disponía la profesora investigadora, consideramos que no podemos generalizar los resultados.

La comparación realizada, entre un grupo de 2º de ESO que inicia su formación algebraica; y un grupo de 4º de ESO, que finaliza su formación algebraica en secundaria, se hizo con grupos distintos de estudiantes, lo cual ha limitado el alcance de las conclusiones.

Otra de las limitaciones encontradas en esta investigación, es que el alumnado del que disponemos, al igual que el del estudio previo, tiene muy poca motivación hacia el aprendizaje, no tiene hábitos para justificar por escrito su trabajo y, aunque oralmente intenta expresar sus razonamientos, sus explicaciones suelen ser muy limitadas, teniendo que escrutar siempre la profesora investigadora la información mediante preguntas en las entrevistas individuales.

Hemos restringido el estudio a dos sistemas de representación: el simbólico y el verbal. Con la limitación de que dentro del sistema de representación verbal, no hemos entrado en detalle de otras características que se podrían considerar dentro de cada uno de estos sistemas de representación. Por ejemplo, en el sistema de representación verbal se podría haber considerado lo técnico o coloquial de este lenguaje en la resolución de las tareas propuestas.

Para finalizar, destacamos que en las tareas algebraicas de esta investigación los enunciados estaban limitados a los contenidos trabajados previamente por el alumnado y a los contextos a los que estaban habituados (numéricos y geométricos). Se podrían haber tenido en cuenta una más amplia variedad de tareas.

VII.4. LÍNEAS ABIERTAS DE INVESTIGACIÓN

Gracias a las observaciones realizadas en la investigación nos podemos plantear ampliar la investigación en ciertos aspectos.

A lo largo de esta investigación hemos observado mejoras en el desempeño de los estudiantes. Consideramos interesante ampliar este tipo de investigación, usando la misma metodología, con un mayor número de estudiantes cuyas características sean diferentes.

Con objeto de que los estudiantes desarrollen su capacidad para realizar transformaciones de enunciados entre diferentes sistemas de representación, y profundizar en el estudio de dicho proceso y de su comprensión de los enunciados, se puede desarrollar un experimento de enseñanza contemplando estos dos (o más) sistemas de representación. El análisis de errores realizado en esta investigación puede servir de base para plantear una propuesta de innovación curricular orientada a la superación de los errores detectados en esta investigación, en la que el propio alumnado reflexione sobre sus ideas erróneas. Esto proporcionaría una situación de aprendizaje en el que el rol del profesorado jugaría un papel activo y coordinado con el alumnado.

Dado que en este estudio se han considerado los sistemas de representación algebraico y verbal, dependiendo de los objetivos de investigación particulares y del contenido matemático que interese, se pueden diseñar otros estudios en los que se explore el proceso de traducción de enunciados con otros sistemas de representación.

Otra cuestión abierta a explorar en futuras investigaciones, es contrastar las influencias de las variables de tarea que los resultados sugieren, por medio de una recogida de datos que implique un mayor número de alumnado así como una mayor cantidad de enunciados en los que estas variables se combinen.

Investigaciones que hagan uso de protocolos de respuesta en voz alta, en los que los estudiantes verbalicen la forma en que abordan las traducciones, o de otras metodologías complementarias a las empleadas en esta investigación también son de interés para corroborar y complementar los resultados obtenidos en esta tesis doctoral.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

- Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. y Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: examining translation errors associated with mathematics representations. *School Science and Mathematics*, 112(3), 159-170.
- Ake, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
- Alsina, C. (1991, septiembre). *Los 90 son nuestros. Ideas didácticas para una matemática feliz*. Trabajo presentado en Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sevilla, España.
- Ambrose, R. y Molina, M. (2014). Spanish/English bilingual students' comprehension of arithmetic story problem texts. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(6), 1469-1496. DOI: 10.1007/s10763-013-9472-2.
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.
- Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8(44), 59-75.
- Arnau, D. y Puig, L. (2006). Formas de construir nombres y referirse a las cantidades en las actuaciones de alumnos de secundaria al resolver problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 145-153). Huesca, España: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.
- Ascher, M. (1991). *Ethnomathematics: A multi-cultural view of mathematical ideas*. Nueva York, NY: Chapman and Hall.
- Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Sevilla, España: Diada.
- Azcárate, C., Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid, España: Síntesis.
- Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. En N. Bednarz et al. (Eds). *Approaches to algebra* (pp. 15-38). Netherlands, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas. Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

- Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1976). *How children view equality sentences, project for the mathematical development of children* (No. 3). Technical Report. Tallahassee, FL: Universidad de Florida.
- Bell, A. (1988). Algebra – Choices in curriculum design. En A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 147-153). Veszprém, Hungría: Ferenc Genzwein OOK.
- Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 41-73.
- Bernal, C. E. (2011). *Problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita*. Trabajo de Posgrado en Educación. Barcelona, España: Universidad Autónoma de Barcelona. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1790/>
- Bishop, A. J. (1998). El papel de los juegos en educación matemática. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 18, 9-19.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Bloedy-Vinner, H. (1996). The analgebraic mode of thinking and other errors in word problem solving. En A. Gutierrez y L. Puig (Eds.), *Proceeding of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol.2, 105-112). Valencia, España: PME.
- Boero, P. (1994). About the role of algebraic language in mathematics and related difficulties. *Rendiconti del Seminario Matematico*, 52(2), 161-194.
- Boero, P., Douek, N. y Ferrari, P.L. (2008). Developing mastery of natural language. En L. English (Ed.), *International handbook of research in mathematics education* (pp. 262-295). Nueva York, NY: Routledge.
- Booth, L. R. (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School*, 11(3), 5-6.
- Booth, L. R. (1983). *Misconceptions leading to errors in elementary algebra (generalised arithmetic)*. Tesis doctoral. Chelsea, WI: Chelsea College.
- Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson.
- Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. y Cheetham, M. R. (2011a). Assessing the difficulty of mathematical translations: synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6(3), 113-133.
- Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. y Cheetham, M. (2011b). Translations among mathematical representations: Teacher beliefs and practices. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, June 15th. p. 1-23. Disponible en <http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm>.

- Bouvier, A. y George, M. (2000). *Diccionario de matemáticas (2ª Edición)*. Madrid, España: Akal ediciones.
- Butto, C. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22(3), 55-86.
- Cohen, E. y Kanim, S. E. (2005). Factors influencing the algebra “reversal error”. *American Journal of Physics*, 73(11), 1072-1078.
- Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
- Cañadas, M. C. (2002). *Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por alumnos de secundaria*. Trabajo de investigación tutelada. Granada, España: Universidad de Granada.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
- Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Description of a procedure to identify strategies: the case of the tiles problem. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 2, pp. 257-264). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.
- Cañadas, M. C. y Figueiras, L. (2011). Uso de representaciones y generalización de la regla del producto. *Infancia y Aprendizaje*, 34(4), 409-425.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, Reino Unido: Heinemann.
- Carpenter, T. P. y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. (Res.Rep.00-2). Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA).
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. 2., pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Carry, L. R., Lewis, C. y Bernard, J. (1980). *Psychology of equation solving. An information processing study*. Departamento de Currículum e Instrucción. Austin, Texas: Universidad de Texas.
- Caspi, S. y Sfard, A. (2011). The entrance to algebraic discourse: Informal meta-arithmetic as the first step toward formal school algebra. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swodoba (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for*

- Research in Mathematics Education* (pp. 470-478). Rzeszow, Poland: University of Rzeszów.
- Castellanos, M. y Obando, J. (2009, octubre). *Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico*. Trabajo presentado en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia.
- Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Granada, España: Comares.
- Castro, E. (2005). Configuraciones puntuales: Sistema de representación idóneo para las sucesiones de números naturales. En H. M. Guimarães y L. Serrazina (Eds.), *V CIBEM: Conferências* (pp. 201-220). Lisboa, Portugal: APM.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del XVI Simposio de la SEIEM* (pp. 75-94). Baeza, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- Castro, E., Olmo, M^a. A. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Departamento. Didáctica de la Matemática. Granada, España: Universidad de Granada.
- Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(3), 361-371.
- Cerdán, F. (2008a). *Estudio sobre la familia de problemas aritméticos – algebraicos*. Tesis doctoral. Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Cerdán, F. (2008b). Las igualdades producidas en el proceso de traducción algebraico: estudio de las igualdades correctas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 257-272). Badajoz, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), 99-110.
- Cifarelli, V. (1998). The development of mental representations as a problem solving activity. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(2), 239-264.
- Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1, 16-30.

- Clement, J., Lochhead, J. y Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 88(4), 286-290.
- Colera, J. y Gaztelu, I. (2008). *Matemáticas 2. Educación Secundaria*. Madrid, España: Grupo Anaya.
- Colera, J. y Gaztelu, I. (2012a). *Matemáticas 1. Educación Secundaria*. Madrid, España: Grupo Anaya.
- Colera, J. y Gaztelu, I. (2012b). *Matemáticas 2. Educación Secundaria*. Madrid, España: Grupo Anaya.
- Contreras, M. (2004). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid, España: Síntesis.
- Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid, España: Síntesis.
- Crowley, L., Thomas, M. y Tall, D. (1994). Algebra, symbols, and translation of meaning. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceeding of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 240-247). Lisboa, Portugal: PME.
- Dancing, J. y Sosa, E. (1993). *A companion to epistemology*. Oxford, Reino Unido: Basil Blackwell.
- Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics. The cognitive science approach to mathematics education*. Londres, Reino Unido: Croom Helm.
- De Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. En Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton" (Ed.), *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)* (pp. 49-85). Tenerife, España: Editor.
- Demby, A. (1997). Algebraic procedures used by 13-to-Year-Olds. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 45-70.
- Deulofeu, J. (2002). *Juegos y recreaciones para la enseñanza de las matemáticas: Diversidad de opciones y de recursos*. Barcelona, España: Editorial Praxis.
- Deulofeu, J. (2011). *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes. Teoría de juegos*. Navarra, España: RBA.
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1988). *Children learning mathematics: A teacher's guide to recent research*. Oxford, Reino Unido: School Council Publications.
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, España: MEC.

- Domínguez, E., Hernández, J., Muñoz, M., Palarea, M^a. M., Ruano, R. y Socas, M. (2006). Investigación e innovación matemática. Un ejemplo: puzle algebraico. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación. Monografía IV*, 59-77.
- Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Drijvers, P., Goddijn, A. y Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. En P. Drijvers (Eds.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept or parameter*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Países Bajos: Universidad de Utrecht.
- Drouhard, J.-P. (2001). Research in language aspects of algebra: a turning point? En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 238-242). Melbourne, Australia: University of Melbourne.
- Drouhard, J.-P. y Teppo A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 227-264). Nueva York, NY: Kluwer.
- Duval, R. (1993). *Semiosis et noesis, lecturas en Didáctica de la Matemática: escuela francesa*. México, DF: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-382.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. México, DF: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Edo, M. y Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(2), 257-268.
- Edo, M., Deulofeu, J. y Badillo, E. (2007, julio). *Taller de juego y matemáticas: desarrollo de las estrategias en la escuela*. Actas XIII JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Granada.
- Espinosa, M. E. (2005). *Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

- Esteley, C. y Villarreal, M. (1990). *Categorización de errores en Matemática*. Trabajo presentado en la XIII Reunión de Educación Matemática, San Luis, Argentina.
- Esteley, C. y Villarreal, M. (1996). Análisis y categorización de errores en matemática. *Revista de Educación Matemática*, 11(1), 16-35.
- Fernández, E. (2013). *Invención de problemas por estudiantes de secundaria: evaluación de su conocimiento sobre simbolismo algebraico*. Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.
- Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
- Fernández-Millán, E. (2013). *Invención de problemas por estudiantes de secundaria: evaluación de su conocimiento sobre simbolismo algebraico*. Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.
- Fernández-Millán, E. y Molina, M. (en revisión). ¿Qué significa una expresión simbólica para un estudiante al término de la educación secundaria obligatoria? Una respuesta desde la invención de problemas.
- Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.
- Filloy, E. y Rojano, T. (1991). Translating from natural language to the mathematical system of algebraic signs and viceversa: a clinical study with children in the prealgebraic stage. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, (Vol. 1, pp. 29-35). Blacksburg, VA: PME-NA.
- Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(3), 327-342.
- Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2003). Two meanings of the “equal” sign and senses of comparison and substitution methods. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 4, pp. 223-230). Honolulu, Hi: Universidad de Hawaii.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. México, DF: CINVESTAV, 2001.
- Friedlander, A. y Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. En A. A. Cuoco (Ed.), *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics: The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VI: NCTM.

- Gagatsis, A. y Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 24(5), 645-657.
- Gagatsis, A., Elia I. y Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? *Revista Latinoamericana de Educación, número especial*, 197-224.
- Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral. Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.
- Gairín, J. M. (2001). *Hacer matemáticas: el juego como recurso*. En C. Alsina, M. A. Ortiz, J. M. Gairín, A. Pérez y J. L. Álvarez, *Aspectos didácticos de matemáticas 8. Educación abierta* (pp. 55-116). Zaragoza, España: ICE Universidad de Zaragoza.
- Gallardo, A. y Rojano, T. (1988). Difficulties areas in the acquisition of the arithmetics and algebraic language. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 9(2), 155-188.
- Galvin, W. y Bell, A.W. (1977). *Aspects of difficulties in the solution of problems involving the formulation of equations*. Nottingham, Reino Unido: University of Nottingham.
- García, J. (2010). *Análisis de errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer ingreso en nivel de licenciatura*. Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.
- Garriga, J. (2011). *El lenguaje algebraico: un estudio con alumnos de tercer curso de educación secundaria obligatoria*. Tesis doctoral. Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada, España: Universidad de Granada.
- Goldin, G. A. (1993). The IGPME working group on representations. En I. Hirabayahi, N. Nuluhiko, S. Keiichi y L. Fou-Lai (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 96). Tsukuba, Japón: Universidad de Tsukuba.
- Goldin, G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.
- Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

- Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo. Un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. *Suma*, 20, 61-68.
- Gómez, I. (1992). Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas. *Colección apuntes I.E.P.S*, 55. Madrid, España: Narcea ediciones.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez-Granell, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 3-4, 5-16.
- González, F. M. (2010). *Iniciación a la resolución de problemas de álgebra escolar a través de un método gráfico. Un estudio de casos*. Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.
- González-Calero, J. A. (2014). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales mediante un sistema tutorial inteligente*. Tesis doctoral. Valencia, España: Universidad de Valencia.
- González-Calero, J. A., Arnau, D. y Puig, L. (2013). Dificultades en la construcción de nombres de cantidades durante la resolución algebraica de problemas verbales por estudiantes de primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 301-310). Bilbao, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Graham, A. T. y Thomas, M. O. J. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 265-282.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación* (3ª edición). México, DF: Mac Graw Hill.
- Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.
- Hewitt, D. (1998). Approaching arithmetic algebraically. *Mathematics Teaching*, 163, 19-29.
- Hewitt, D. (2003). Notation issues: Visual effects and ordering operations. In N. Pateman, B. J., Dougherty y J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 3, pp. 63-69). Honolulu, H: Universidad de Hawaii.
- Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). Nueva York, NY: MacMillan.

- Hitt, F. (1997). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática*, 10, 23-45..
- Huitrado, J. L. y Climent, N. (2013). Conocimiento del profesor en la interpretación de errores de los alumnos en álgebra. *PNA*, 8(2), 75-86.
- Isik, C. y Kar, T. (2012). The analysis of the problems the pre-service teachers experience in posing problems about equations. *Australian Journal of Teacher Education*, 37(9), 93-113.
- Izsák, A. (2011). Representational competence and algebraic modeling. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 239-258). Nueva York, NY: Springer.
- Janvier, C. (1987a). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.
- Janvier, C. (1987b). Traslacion proceses in mathematics education. En Autor (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.
- Janvier, C, Girardon, C. y Morarnd, J. (1993). Mathematical symbols and representations. En P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 79-102). Reston, VA: NCTM.
- Jones, I. y Pratt, D. (2005). Three utilities for the equal sign. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, p. 185-192). Melbourne, Australia: PME.
- Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.
- Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). Nueva York, NY: MacMillan.
- Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Descargado el 12 de Noviembre de 2013 de <http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/KaputAlgUnd.pdf>.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

- Kaput, J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2009). *Algebra in the early grades*. Londres, Reino Unido: Routledge.
- Kaput, J., Sims-Knight, J. y Clement, J. (1985). Behavioral objections: A response to Wollman. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 56-63.
- Kieran, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. En D. Tall (Ed.), *Proceeding of the Third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 128-133). Coventry, Reino Unido: Warwick University, Mathematics Education Research Centre.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Reston, VA: NCTM.
- Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-49). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- Kirshner, D. (1985). *A linguistic model of algebraic symbol skill*. Vancouver, Canadá: University of British Columbia.
- Kirshner, D. (1987). *Linguistic analysis of symbolic elementary algebra*. Tesis doctoral. Vancouver, Canadá: University of British Columbia.
- Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 274-287.
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. y Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence and variable 1. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education*, 37(1), 68-76.
- Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. y Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312.

- Koedinger, K. R. y Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences*, 13(2), 129-164.
- Küchemann, D. E. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7(4), 23-26.
- Küchemann, D. E. (1981). Algebra. En K. M. Hart, M. L. Brown, D. E. Küchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney (Eds.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 102-119). Londres, Reino Unido: John Murray.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Londres, Reino Unido: Kluwer.
- Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987) Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.
- Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds). *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.
- MacGregor, M. (1990). Writing in natural language helps students construct algebraic equations. *Mathematics Education Research Journal*, 2(2), 1-11.
- MacGregor, M. y Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3). 217-232.
- MacGregor, M y Stacey, K., (1997). Students' understanding of algebraic notation. *Building foundations for algebra. Mathematics Teaching in the Middle School*, 2, 252-260.
- Martín, J., Muñoz, J. M^a y Oller, A. M. (2009). Empleo didáctico de juegos que se matematizan mediante grafos. Una experiencia. *Contextos Educativos*, 12, 137-164.
- Martínez, M. V. (2011). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166.
- Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En D. Sleemand y J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems* (p. 25-50). Nueva York, NY: Academic Press.

- Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización*. Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado*, 5, 677-773.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007a). Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 156, 15-25.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía*, 171, 23-65.
- Mitchell, J. M. (2001). Interactions between natural language and mathematical structures: The case of “wordwalking”. *Mathematical Thinking and Learning*, 3(1), 29-52.
- Molina, M. (2004). *Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado*. Trabajo de investigación tutelada. Granada, España: Universidad de Granada.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. En M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira y J. P. da Ponte (Eds.), *EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigacao em Educacao Matematica* (pp. 27-51). Póvoa do Varzim, Portugal: EIEM.
- Molina, M. (2012). *Proyecto investigador. Plaza de Profesor Titular de Universidad*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 17(3), 559-579.
- Molina, M y Castro, E. (2006). Uso y desarrollo de pensamiento relacional por alumnos de tercero de Primaria. En J. I. Navarro y M. Aguilar (Eds.), *Learning maths in childhood. Proceedings of the International Symposium on Early Mathematics* (pp. 263-281). Departamento de Psicología de la Universidad de Cádiz. Cádiz, España: Universidad de Cádiz.

- Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational*, 7(1), 341-368.
- Moyles, J. (1990). *El juego en la educación infantil y primaria*. Madrid, España: Morata
- Mulhern, G. (1989). Between the ears: Making inferences about internal processes. En B. Greer y G. Mulhern (Eds.), *New directions in mathematics education*. Londres, Reino Unido: Routledge.
- National Council of Teacher of Mathematics NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Trad.). Sevilla, España: Proyecto Sur.
- Neuman, Y. y Schwarz, B. (2000). Substituting one mystery for another: the role of self-explanations in solving algebra word-problems. *Learning and Instruction*, 10(3), 203-220.
- Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
- Orton, A. (1990). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid, España: MEC-Morata.
- Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Tenerife, España: Universidad de la Laguna.
- Palarea, M. M. y Socas M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico. Elementos organizadores de una investigación. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 145-171.
- Palarea, M. M. y Socas M. (2003). Del lenguaje numérico al algebraico. Propuesta de formación del profesorado de Primaria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 5, 231-259.
- Pape, S. J. y Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory Into Practice*, 40(2), 118-127.
- Penalva, M. C. y Torregrosa, G. (2001). Representación y aprendizaje de las Matemáticas. En Vicerrectorado de Extensión Universitaria de la Universidad de Alicante (Ed.), *Scripta in Memoriam. Homenaje al profesor Jesús Rafael de Vera Ferre* (pp. 650-658). Alicante, España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante.
- Philipp, R. A. (1992). The many uses algebraic variables. *The Mathematics Teacher*, 85(7), 557-561.

- Pope S. y Sharma, R. (2001). Symbol sense: Teachers' and students' understanding. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 21(3), 64-69.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Comares.
- Puig, L. (1998). *Poner un problema en ecuaciones*. Manuscrito no publicado.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 163-172.
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), 16-20.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, España: Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L. (2010). Elementary form of algebraic thinking in young students. En M. F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73-80). Belo Horizonte, Brasil: PME.
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Uzhur (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turquía: PME.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- Resnick, L., Cauxinille-Marmeche, E. y Mathieu, J. (1987). Understanding algebra. En J. Slodoba y D. Rogers (Eds.). *Cognitive processes in mathematics* (pp.169-203). Oxford, Reino Unido: Science Publications.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: una empresa docente.
- Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-59). Barcelona, España: Horsori.
- Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-60). Barcelona, España: Horsori.

- Rico, L. (1997c). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. *Epsilon*, 38, 185-198.
- Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 219-231). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Romero, I. y Cañadas, M. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la geometría. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 253-279). Madrid, España: Pirámide.
- Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.
- Rodríguez-Domingo, S. y Molina, M. (2013). De lo verbal a lo simbólico: un paso clave en el uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas y la modelización matemática. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 111-118). Granada, España: Comares.
- Rodríguez-Domingo, S., Molina, M., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2015). Errores en la traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación simbólico y verbal. *PNA*, 9(4), 273-293.
- Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, 12(1), 45-56.
- Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *Mathematics Teacher*, 74(6), 418-420.
- Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. M. (2003). Estudio sobre dificultades y errores en relación con el lenguaje algebraico. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática*, 5, 297-321.
- Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.
- Sánchez, D. (2012). *Tierra de incógnitas: un juego didáctico para afianzar los conocimientos sobre las ecuaciones de primer grado*. Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.

- Schoenfeld, A. y Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher* 81(6), 420-427.
- Schroeder, T. L. y Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. R. Trafton y A. P. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-42). Reston, VA: The Council.
- Schultz, J. E. y Waters, M. S. (2000). Why representation? *Mathematics Teacher*, 3(6), 448-453.
- Sleeman, D. (1984). An attempt to understand students' understanding of basic algebra. *Cognitive Science*, 8, 387-412.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). Tenerife, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Stephens, M. y Wang, X. (2008). Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and year 7 students from Australia and China. *Journal of Mathematics Education*, 1(1), 28-39.
- Swan, M. (2000). Making sense of algebra. *Mathematics Teaching*, 171, 16-19.
- Tamayo, C. (2008, octubre). *El juego: un pretexto para el aprendizaje de las matemáticas*. Taller realizado en 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Valledupar, Colombia.
- Tamayo, C. y Ramírez, A. (2009, octubre). *La enseñanza de los racionales y sus propiedades a través de juegos como el dominó y el bingo*. Taller realizado en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Pasto, Colombia.
- Trujillo, P. (2008). *Proceso de generalización que realizan futuros maestros*. Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México, DF: Trillas.
- Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should and must be an eighth-grade course for average students. *Mathematics Teacher*, 80, 428-438.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Van Ameron, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 319-351.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A. y Robitzsch, A. (2013). Primary school students' strategies in early algebra problem solving supported by an online game. *Educational Studies in Mathematics*, 84, 281-307.
- Vega-Castro, D. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables*. Trabajo Fin de Máster. Granada, España: Universidad de Granada.
- Vega-Castro, D. (2013). *Perfiles de alumnos de educación secundaria relacionados con el sentido estructural manifestad en experiencias con expresiones algebraicas*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.
- Villegas, J. L. (2002). *Representaciones en resolución de problemas: un marco de análisis de protocolos*. Trabajo de investigación tutelada. Granada, España: Universidad de Granada.
- Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher*, 76(7), 474-479.
- Wagner, S. y Kieran, C. (1989). *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Wagner, S. y Parker, S. (1993). Advancing algebra. En P. S. Wilson (Ed), *Research ideas for the classroom. High school mathematics* (pp. 119-139). Nueva York, NY: Macmillan.
- Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K-12. Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 328-340). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Watson, I. (1980) Investigating errors of beginning mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 319-329.
- Weinberg, A. (2007). New perspectives on the student-professor problem. En T. Lamberg, T. y L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the PME-NA* (pp. 164-170). Stateline, NV: University of Nevada.
- Wilson, K., Aintley, J. y Bills, L. (2003). Comparing competence in transformational and generational algebraic activities. En N. A. Paterman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference* (Vol 4, p. 427-434). Bergen, Noruega: Bergen University College.
- Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 169-181.

**DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE GRANADA**



ANEXOS DE LA TESIS DOCTORAL

**TRADUCCIÓN ENTRE LOS SISTEMAS DE
REPRESENTACIÓN SIMBÓLICO Y VERBAL:
UN ESTUDIO CON ALUMNADO QUE INICIA
SU FORMACIÓN ALGEBRAICA EN SECUNDARIA**

Tesis Doctoral que presenta
SUSANA RODRÍGUEZ DOMINGO

Dirigido por las doctoras

D^a. Marta Molina

D^a. María C. Cañadas

D^a. Encarnación Castro

ÍNDICE DE CONTENIDOS DE LOS ANEXOS

ANEXO A. Instrumentos de recogida de información.....	1
A.1. Ficha I.....	2
A.1.1. Instrucciones para rellenar la Ficha I.....	2
A.1.2. Ficha I.....	3
A.2. Dominó algebraico.....	4
A.2.1. Instrucciones para jugar con el dominó algebraico.....	4
A.2.2. Piezas del juego.....	5
A.3. Ficha II.....	7
A.3.1. Instrucciones para rellenar la Ficha II.....	7
A.3.2. Ficha II.....	8
A.4. Entrevistas personales.....	16
A.4.1. Guión de la entrevista al sujeto S01.....	16
A.4.2. Guión de la entrevista al sujeto S02.....	17
A.4.3. Guión de la entrevista al sujeto S04.....	18
A.4.4. Guión de la entrevista al sujeto S05.....	19
A.4.5. Guión de la entrevista al sujeto S06.....	20
A.4.6. Guión de la entrevista al sujeto S07.....	21
A.4.7. Guión de la entrevista al sujeto S08.....	21
A.4.8. Guión de la entrevista al sujeto S09.....	22
A.4.9. Guión de la entrevista al sujeto S10.....	23
A.4.10. Guión de la entrevista al sujeto S11.....	23
A.4.11. Guión de la entrevista al sujeto S12.....	24
A.4.12. Guión de la entrevista al sujeto S13.....	24
A.4.13. Guión de la entrevista al sujeto S14.....	25
A.4.14. Guión de la entrevista al sujeto S15.....	26
A.4.15. Guión de la entrevista al sujeto S16.....	27
ANEXO B. Primera fase de recogida de datos: producciones de la Ficha I.....	31
B.1. Ficha I resuelta.....	32
B.2. Producciones de los distintos sujetos.....	33
ANEXO C. Segunda fase de recogida de datos: Transcripciones de las grabaciones.....	51
C.1. Transcripciones Grupo 1.....	52

C.2. Transcripciones Grupo 2	56
C.3. Transcripciones Grupo 3	63
C.4. Transcripciones Grupo 4	69
C.5. Transcripciones partidas finales	72
ANEXO D. Tercera fase de recogida de datos: Producciones de la Ficha II	81
D.1. Producciones del sujeto S01	82
D.2. Producciones del sujeto S02	86
D.3. Producciones del sujeto S03	90
D.4. Producciones del sujeto S04	94
D.5. Producciones del sujeto S05	98
D.6. Producciones del sujeto S06	102
D.7. Producciones del sujeto S07	106
D.8. Producciones del sujeto S08	110
D.9. Producciones del sujeto S09	114
D.10. Producciones del sujeto S10	118
D.11. Producciones del sujeto S11	122
D.12. Producciones del sujeto S12	126
D.13. Producciones del sujeto S13	130
D.14. Producciones del sujeto S14	134
D.15. Producciones del sujeto S15	138
D.16. Producciones del sujeto S16	143
D.17. Tablas resúmenes	147
ANEXO E. Cuarta fase de recogida de datos: Transcripciones de las entrevistas.....	153
E.1. Transcripción de la entrevista al sujeto S16	154
E.2. Transcripción de la entrevista al sujeto S14	159
E.3. Transcripción de la entrevista al sujeto S08	166
E.4. Transcripción de la entrevista al sujeto S12	172
E.5. Transcripción de la entrevista al sujeto S01	176
E.6. Transcripción de la entrevista al sujeto S10	182
E.7. Transcripción de la entrevista al sujeto S05	185
E.8. Transcripción de la entrevista al sujeto S06	189
E.9. Transcripción de la entrevista al sujeto S13	194
E.10. Transcripción de la entrevista al sujeto S11	200
E.11. Transcripción de la entrevista al sujeto S09	202

E.12. Transcripción de la entrevista al sujeto S07	205
E.13. Transcripción de la entrevista al sujeto S15	208
E.14. Transcripción de la entrevista al sujeto S04	213

ANEXO A

ANEXO A. INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

En este primer anexo adjuntamos los instrumentos utilizados para la recogida de información, que como hemos descrito en apartados anteriores del trabajo, son dos instrumentos, pruebas escritas y entrevistas, aplicados en cuatro fases.

En la primera fase utilizamos una prueba escrita, que consiste en un documento que entregamos a los sujetos, para que lo rellenaran, en un folio tamaño A3. Incluimos aquí las instrucciones que damos a los estudiantes antes de empezar la prueba (apartado A.1.1) y el documento tal y como lo presentamos a los sujetos (apartado A.1.2).

En la segunda fase utilizamos una entrevista semiestructurada, que consiste en un torneo con las piezas de un dominó algebraico que más adelante adjuntamos en el apartado A.2.2 de este anexo. Adjuntamos también las instrucciones dadas a los sujetos antes de comenzar el torneo (apartado A.2.1).

Como tercera fase, los estudiantes rellanan la Ficha II. Como describimos en el marco metodológico de esta memoria, se trata de un documento estructurado en dos partes presentadas por separado a los estudiantes. La primera, llamada Situación 1, consiste en cuatro enunciados simbólicos con cuatro opciones de enunciados verbales cada uno de ellos, donde los estudiantes deben elegir una traducción correcta y otra incorrecta, de manera justificada. En la segunda parte, llamada Situación 2, hay cuatro enunciados verbales y las opciones que se presentan ahora son verbales. En el apartado A.3 de este anexo presentamos las instrucciones para completar esta ficha y la ficha en sí tal como fue entregada a los estudiantes.

En la última fase de recogida de información realizamos una entrevista personal a los sujetos. Adjuntamos en este anexo, en el apartado A.4, cada uno de los guiones preparados por la profesora-investigadora para realizar las entrevistas personalizadas para cada sujeto.

A.1. FICHA I

A continuación presentamos tanto las instrucciones dadas a los sujetos para rellenar la Ficha I (apartado A.1.1) como la propia Ficha I que les damos en blanco para que rellenen los huecos (apartado A.1.2).

A.1.1. Instrucciones para rellenar la Ficha I



**Instrucciones para
rellenar la plantilla
y formar un
dominó algebraico**

1. Cada alumno debe poner su nombre y apellidos en la parte superior del folio.
2. El trabajo debe realizarse de manera individual.
3. Se deben rellenar los huecos en blanco de modo que se unan expresiones “que significan lo mismo pero escritas de distinta manera”. Por ejemplo, si en una ficha hay un extremo donde aparece la expresión “ $x + 2$ ”, en la otra ficha que se uniera a ella puede aparecer la expresión “un número más dos”.

A.1.2. Ficha I

$x + (x + 1) - 4$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$				
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número por su cuadrado es igual a su cubo	$x \cdot (x + 1) = 7x$
$x^2 - y^2 = 11$	$(\sqrt{x})^y$				
		Un número par menos la cuarta parte de otro número	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	$(x \cdot y)^3$	

A.2. DOMINÓ ALGEBRAICO

En este apartado presentamos las instrucciones dadas a los sujetos para el torneo con el dominó algebraico construido (apartado A.2.1) y las distintas piezas del mismo (apartado A.2.2).

A.2.1. Instrucciones para jugar con el dominó algebraico

Instrucciones para jugar con el dominó algebraico



1. El número de jugadores será de 4 personas. El número total de piezas es 24. Se repartirán todas las piezas del dominó entre los jugadores.
2. Cada jugador deberá estar atento a sus piezas y a los movimientos de sus compañeros. En el caso de que un jugador se quede sin piezas durante el juego, debe seguir participando.
3. No se puede poner una ficha en juego hasta que el jugador anterior haya explicado su jugada.
4. Algunas piezas están marcadas con un punto rojo. Cuando una ficha con punto rojo sea puesta en juego, el jugador debe inventar un enunciado verbal sobre una situación real que pueda ser expresada con el enunciado algebraico que aparece en esa ficha. Si el jugador que pone la ficha en juego no consigue proponer un enunciado verbal, puede intentarlo otro jugador que pida la palabra.
5. Se ganan puntos de la siguiente manera:
 - Un punto por cada ficha bien colocada.
 - Un punto por cada explicación justificada de la colocación correcta de una ficha.
 - Dos puntos si se corrige de manera correcta y justificada a algún jugador que coloque de manera errónea una ficha. Si se corrige a otro jugador pero de forma incorrecta, no se sumará ningún punto
 - Un punto para el primer jugador que se quede sin piezas en una partida.
 - Dos puntos para el jugador que invente un enunciado verbal correcto.
6. Se pierden puntos de la siguiente manera:
 - Un punto si un compañero corrige de manera justificada.
7. Ganará el jugador que sume más puntos tras pasar 30 min de juego.

A.2.2. Piezas del juego

Las piezas del domingo algebraico son las siguientes:

$x + (x + 1) - 4$	<p>El producto de la mitad de un número por el triple de otro número</p>	<p>Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número</p>	<p>La raíz cuadrada de un número elevada a otro número</p>
$\frac{x}{2} \cdot 3y$	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$	$x + (x + 1) = y - 2$	$2x - \frac{y}{4}$
<p>Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos</p>	$x \cdot x^2 = x^3$	<p>El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número</p>	$(x \cdot y)^3$
<p>Un número por su cuadrado es igual a su cubo</p>	$x \cdot (x + 1) = 7x$	<p>El cubo del producto de dos números</p>	<p>El cuadrado de la suma de dos números consecutivos</p>
$(x + (x + 1))^2$	$(\sqrt{x})^y$	$(\sqrt{x})^2 = x$	<p>La suma de dos números consecutivos menos cuatro</p>
<p>Un número par menos la cuarta parte de otro número</p>	<p>El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once</p>	$x^2 - y^2 = 11$	<p>El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número</p>

<p>Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número</p> <p>•</p> $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$	$(x \cdot y)^3$ <p>•</p> <p>El cubo del producto de dos números</p>	<p>Un número por su cuadrado es igual a su cubo</p> <p>•</p> $x \cdot x^2 = x^3$	$\frac{x}{2} \cdot 3y$ <p>•</p> <p>El producto de la mitad de un número por el triple de otro número</p>
<p>Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos</p> <p>•</p> $x + (x + 1) = y - 2$	$(x + (x + 1))^2$ <p>•</p> <p>El cuadrado de la suma de dos números consecutivos</p>	<p>El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once</p> <p>•</p> $x^2 - y^2 = 11$	$x + (x + 1) - 4$ <p>•</p> <p>La suma de dos números consecutivos menos cuatro</p>
<p>La raíz cuadrada de un número elevada a otro número</p> <p>•</p> $(\sqrt{x})^y$	$2x - \frac{y}{4}$ <p>•</p> <p>Un número par menos la cuarta parte de otro número</p>	<p>El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número</p> <p>•</p> $x \cdot (x + 1) = 7x$	$(\sqrt{x})^2 = x$ <p>•</p> <p>El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número</p>

A.3. FICHA II

En este apartado presentamos las instrucciones dadas a los sujetos para rellenar la Ficha II (apartado A.3.1) y las ocho hojas que damos a los sujetos que constituyen la Ficha II (apartado A.3.2).

A.3.1. Instrucciones para rellenar la Ficha II



Instrucciones para rellenar la ficha de trabajo y reflexión

1. Cada estudiante pone su nombre y apellidos en la parte superior del folio.
2. El trabajo se realiza de manera individual.
3. Explica todo por escrito.
4. Tenemos dos situaciones. En la situación uno, tienes unos enunciados verbales para los que queremos encontrar su representación simbólica. En la situación dos, tienes enunciados simbólicos para los que queremos encontrar su representación verbal. Cada enunciado tiene varias opciones de respuesta. Debes ELEGIR DOS de ellas:
 - una opción que consideres correcta y explicar por qué la considera así, y,
 - una opción que consideras incorrecta y explicar por qué crees que es así.

A.3.2. Ficha II

SITUACIÓN 1

1. Para el siguiente enunciado simbólico, debes elegir DOS expresiones verbales, una que sea traducción correcta, dando tu justificación, y una que no sea traducción correcta, dando igualmente tu justificación.

Enunciado simbólico:

$$5 + x + y$$

Enunciados verbales:

- Cinco años más la edad de mi hermana más mi edad más la de mi hermana.
- Cinco veces mi edad y la de mi hermana.
- Cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo.
- Un número impar más una edad más otra edad.

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

SITUACIÓN 1

2. Para el siguiente enunciado simbólico, debes elegir DOS expresiones verbales, una que sea traducción correcta, dando tu justificación, y una que no sea traducción correcta, dando igualmente tu justificación.

Enunciado simbólico:

$$x + 60 = 5x$$

Enunciados verbales:

- La suma de un número más sesenta es igual a cinco.
- Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco.
- Al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco.
- Sesenta más un número es igual a cinco veces otro número.

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

SITUACIÓN 1

3. Para el siguiente enunciado simbólico, debes elegir DOS expresiones verbales, una que sea traducción correcta, dando tu justificación, y una que no sea traducción correcta, dando igualmente tu justificación.

Enunciado simbólico:

$$x^2 - y^2 = 9$$

Enunciados verbales:

- a) El área del suelo de mi habitación cuadrada menos el área del suelo de tu habitación cuadrada.
- b) La diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es un número impar.
- c) El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve.
- d) La diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es nueve.

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

SITUACIÓN 1

4. Para el siguiente enunciado simbólico, debes elegir DOS expresiones verbales, una que sea traducción correcta, dando tu justificación, y una que no sea traducción correcta, dando igualmente tu justificación.

Enunciado simbólico:

$$x^3$$

Enunciados verbales:

- a) El área de un cubo.
- b) El triple del lado de un cubo.
- c) El volumen de un cubo.
- d) La tercera potencia de tres.

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

SITUACIÓN 2

1. Para el siguiente enunciado verbal, debes elegir DOS expresiones simbólicas, una que sea traducción correcta, dando tu justificación, y una que no sea traducción correcta, dando igualmente tu justificación.

Enunciado verbal:

El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros.

Enunciados simbólicos:

- a) $x + x + (x + 6) + (x + 6) = 92$
- b) $x + (x + 6) = 92$
- c) $2x \cdot 2(x + 6) = 92$
- d) $x + x + y + y = 92$

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

SITUACIÓN 2

2. Para el siguiente enunciado verbal, debes elegir DOS expresiones simbólicas, una que sea traducción correcta, dando tu justificación, y una que no sea traducción correcta, dando igualmente tu justificación.

Enunciado verbal:

El doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés.

Enunciados simbólicos:

a) $4 + \frac{x}{4}$

c) $2x + \frac{y}{4}$

b) $2x + \frac{x}{4}$

d) $2x + \frac{4}{y}$

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

SITUACIÓN 2

3. Para el siguiente enunciado verbal, debes elegir DOS expresiones simbólicas, una que sea traducción correcta, dando tu justificación, y una que no sea traducción correcta, dando igualmente tu justificación.

Enunciado verbal:

El número de ruedas de dos coches es ocho.

Enunciados simbólicos:

a) $x^2 = 8$

c) $x = 8$

b) $2x = 8y$

d) $2x = 8$

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

SITUACIÓN 2

4. Para el siguiente enunciado verbal, debes elegir DOS expresiones simbólicas, una que sea traducción correcta, dando tu justificación, y una que no sea traducción correcta, dando igualmente tu justificación.

Enunciado verbal:

El área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina.

Enunciados simbólicos:

a) x^2

c) $2x \cdot y$

b) $x^2 \cdot y$

d) $2x^2 \cdot y$

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

A.4. ENTREVISTAS PERSONALES

En este apartado presentamos los guiones preparados por la profesora-investigadora para realizar las entrevistas individuales que constituyen la última fase de recogida de datos.

A.4.1. Guión de la entrevista al sujeto S01

FASE 1: CONSTRUIR LAS PIEZAS DE DOMINÓ
<ul style="list-style-type: none"> - ¿Por qué dejaste estos 3 espacios sin rellenar? (Corresponden a los enunciados E1, E7, E8 y E12) - ¿Sabrías rellenarlos ahora? Di cómo los rellenarías. - En caso de que dude a la hora de expresarlo, ¿puedes explicarme por qué te surgen dudas? ¿en qué piensas?
FASE 2: EL JUEGO
<ul style="list-style-type: none"> - ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo. - Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x + (x + 1) - 4$ fue: “<i>Mi edad más, otro año, menos cuatro</i>” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
FASE 3: FICHA II
<ul style="list-style-type: none"> - (EC.1.1) Situación 1, enunciado 1: (III.1-Generalización). ¿Consideras que este enunciado es el que más se ajusta al enunciado simbólico dado? ¿Qué opinas de los enunciados b) y c)? ¿Son correctos o incorrectos? ¿Por qué? ¿Qué diferencia hay entre los enunciados c) y d)? En la opción que has elegido como incorrecta, ¿Qué significa “<i>cinco veces la edad</i>”? ¿Cómo lo representarías simbólicamente? - (EC.1.2) Situación 1, enunciado 2: (I.2. Desmedido) Sin mirar la expresión simbólica que te proporcione, ¿Puedes leer de nuevo la expresión verbal que has seleccionado y escribirla simbólicamente? ¿Por qué no has explicado esta elección? - (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: (III.4. Complicación estructural). Lee de nuevo tu razonamiento, dime cómo expresas el cálculo del área de un cubo y su volumen. ¿Qué significa el triple de un número? ¿Cómo se presenta el triple de un número? ¿Qué significa el doble de un número? ¿Cómo se representa el doble de un número? - (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1: (III.1-Generalización). Lee de nuevo el enunciado y la expresión que tú has seleccionado, ¿consideras que has tenido en cuenta todos los datos que la expresión verbal? ¿quién es el valor representado por “equis” y el representado por “y”? ¿Hay alguna relación, según el enunciado verbal, entre las dimensiones del rectángulo? ¿se tienen en cuenta en el enunciado simbólico del apartado d)? - (EC.2.2) Situación 2, enunciado 2: (III.3. Variables) ¿Qué valor está representado por la letra “equis”? ¿Se especifica en algún momento si tienen Jesús e Inés la misma edad? ¿Las representarías con la misma letra entonces? - (EC.2.3) Situación 2, enunciado 3: Sobre el enunciado que has elegido como correcto, ¿qué valor está representado con la letra x? ¿el número de coches o el número de ruedas? - Y sobre el que has elegido como incorrecto, ¿Podrías explicarme mejor este razonamiento? (“<i>Porque en el 8 nos da un enunciado y en este caso no hace falta</i>”)

A.4.2. Guión de la entrevista al sujeto S02

FASE 1: CONSTRUIR LAS PIEZAS DE DOMINÓ

- ¿Por qué dejaste estos 3 espacios sin rellenar? (Corresponde a los enunciados E4, E5 y E11)
 - ¿Sabrías rellenarlos ahora? Di cómo los rellenarías.
-

FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
 - Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x + (x + 1) - 4$ fue: *“Un limón más otro limón igual a una naranja menos dos”*
¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
 - Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ fue: *“Cuatro coches por un coche partido de dos sería igual a dos. Cuatro coches, por la mitad de un coche sería igual al doble de cuatro coches”*
¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
 - Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $2x - \frac{y}{4}$ fue: *“Dos manzanas menos la cuarta parte de una pera”* ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
-

FASE 3: FICHA II

- (EC.1.1) Situación 1, enunciado 1: En tu razonamiento sobre la elección del enunciado verbal d) dice que se debe a que “en el enunciado simbólico indica que todas las incógnitas se suman”, ¿puedes leer los demás enunciados y explicarme qué operaciones indican que se debe realizar?
¿Por qué consideras que este enunciado d) que has señalado es el que más se ajusta al enunciado simbólico dado? ¿Qué diferencia hay entre los enunciados c) y d)?
 - (EC.1.2) Situación 1, enunciado 2: (III.3-VARIABLES) En la respuesta que tú has marcado, dices "porque indica que el resultado es igual a un número cinco veces", ¿sólo te has fijado en una parte de la ecuación? Lee de nuevo el enunciado que has marcado y di cómo lo expresarías simbólicamente. ¿Se ajusta exactamente al enunciado simbólico dado?
Marcas tres respuestas incorrectas, pero sólo explicas una, ¿cuál? ¿Por qué?
 - (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: (III.4-Complicación estructural) ¿Qué es el perímetro de una figura? Elige una figura, un cuadrado, un triángulo o un rectángulo, nombrando sus lados con distintas letras, exprésame cómo sería el perímetro de esas figuras. ¿Cómo representarías simbólicamente el perímetro (suma de todos los lados) del jardín rectangular del enunciado?
 - (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: (II.3-Potenciación-Producto) y (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1: (II.3-Potenciación-Producto).
¿Por qué consideraste que este enunciado era el correcto? ¿Qué hizo que lo eligieras?
¿Qué significa el triple de un número? ¿Cómo se presenta el triple de un número?
¿Qué significa el doble de un número? ¿Cómo se representa el doble de un número?
 - (EC.2.3) Situación 2, enunciado 3: (II.3. Potenciación-Producto). Marcas como opción correcta la a) y explicas que “indica el número de ruedas exacto y la solución”, ¿puedes explicarme este razonamiento? ¿cómo deduces eso de la
-

expresión simbólica $x^2 = 8$?

Marcas como incorrectas dos opciones, la b) y la c) y razones que “no se eleva bien”, ¿a cuál de las dos expresiones te refieres? ¿Por qué opinas eso?

- (EC.2.4) Situación 2, enunciado 4: (Explica correctamente el enunciado b) per marca el enunciado a) que tiene error I.1-Incompleto). Lee de nuevo tu razonamiento de la elección de la opción correcta. Tu explicación no coincide con el enunciado que has marcado, el a) ¿con qué enunciado corresponde esta explicación?
- GENERAL: A la hora de marcar las opciones, señalas una correcta y en algunas ocasiones marcas las otras tres como incorrectas, y en otros casos sólo marcas una o dos cómo incorrectas, ¿por qué? ¿Cómo has considerado que son esas opciones que no has clasificado?

A.4.3. Guión de la entrevista al sujeto S04

FASE 1: CONSTRUIR LAS PIEZAS DE DOMINÓ

- ¿Por qué dejaste éste espacio sin rellenar? (Corresponde al enunciado E1)
- ¿Sabrías rellenarlos ahora? Di cómo los rellenarías.
- En caso de que dude a la hora de expresarlo, ¿puedes explicarme por qué te surgen dudas? ¿en qué piensas?

FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
- Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x + (x + 1) = y - 2$ fue: “Un tomate más un tomate más otro tomate igual a un tomate menos dos” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
- Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ fue: “Cuatro patatas por una patata partida por la mitad es igual a dos patatas” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.

FASE 3: FICHA II

- (EC.1.1) Situación 1, enunciado 1: (III.1-Generalización). ¿Consideras que este enunciado es el que más se ajusta al enunciado simbólico dado? ¿Qué opinas de los enunciados b) y c)? (b) y d) para 1.3) ¿Son correctos o incorrectos? ¿Por qué? ¿Qué diferencia hay entre los enunciados c) y d)? (b) y d) para 1.3)
Lee de nuevo la expresión verbal del enunciado b) que has elegido como incorrecta, ¿cómo se escribe simbólicamente?
- (EC.1.2) Situación 1, enunciado 2: (I.2. Desmedido) Lee de nuevo la expresión verbal del enunciado b) ¿cómo se escribe simbólicamente? ¿corresponde con el enunciado simbólico dado?
- (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: (III.4-Complicación estructural) ¿Qué es el perímetro de una figura? Elige una figura, un cuadrado, un triángulo o un rectángulo, nombrando sus lados con distintas letras, exprésame cómo sería el perímetro de esas figuras. ¿Cómo representarías simbólicamente el perímetro (suma de todos los lados) del jardín rectangular del enunciado?
- (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4 (correcto): (II.3-Potenciación-Producto). ¿Puedes leer de nuevo esta justificación? ¿Consideras este razonamiento correcto? ¿por qué? ¿Puedes darme ejemplos para razonar que elevar un número al cubo es lo mismo que

multiplicarlo por tres?

¿Qué significa el triple de un número? ¿Cómo se presenta el triple de un número?

¿Qué significa el doble de un número? ¿Cómo se representa el doble de un número?

- (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4 (incorrecto): Has elegido como opción incorrecta la opción c) pero hemos visto en clase que esta definición de volumen es la que utilizáis en la asignatura de tecnología para hallar el volumen de cualquier cuerpo, pero matemáticamente, ¿cómo se calcula el volumen de un cubo?
 - (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1 (correcto): Me has escrito como razonamiento a tu elección de opción correcta lo mismo que dice en el enunciado verbal. ¿Por qué consideras que corresponde con el enunciado simbólico que has marcado?
 - (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1 (incorrecto): No entiendo muy bien esta justificación de la elección de una traducción incorrecta, dices que “*porque se suman seis más porque el largo es grande que el ancho*”, ¿puedes explicármela mejor? ¿Cómo escribes simbólicamente esto que me has razonado?
 - (EC.2.2) Situación 2, enunciado 2 (correcto): (III.3) ¿Qué valor está representado por la letra “equis”? ¿Se especifica en algún momento si tienen Jesús e Inés la misma edad? ¿Las representarías con la misma letra entonces?
 - (EC.2.2) Situación 2, enunciado 2 (incorrecto): ¿Por qué has tachado esta explicación? ¿Por qué no me has razonado nada después? ¿Podrías decirme por qué consideras que ese enunciado es incorrecto?
 - (EC.2.3) Situación 2, enunciado 3: ¿Qué valor está representado por la letra “equis”? ¿el número de coches? ¿el número de ruedas de un coche?
-

A.4.4. Guión de la entrevista al sujeto S05

FASE 1: CONSTRUIR LAS PIEZAS DE DOMINÓ

- ¿Por qué dejaste estos 4 espacios sin rellenar? (Corresponden a los enunciados E1, E4, E6 y E7)
 - ¿Sabrías rellenarlos ahora? Di cómo los rellenarías.
 - En caso de que dude a la hora de expresarlo, ¿puedes explicarme por qué te surgen dudas? ¿en qué piensas?
-

FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
 - Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x + (x + 1) - 4$ fue: “*Mi edad más, otro año, menos cuatro*” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
-

FASE 3: FICHA II

- (EC.1.1) Situación 1, enunciado 1: Lee este razonamiento en la elección de opción correcta (“*es correcta porque hay dos incógnitas diferentes*”) y después lee las distintas opciones de respuesta, ¿esa justificación es válida sólo en el apartado c)?
- (EC.1.2) Situación 1, enunciado 2: En tu justificación dices “al realizar la ecuación”, ¿por qué? ¿qué significa eso para ti?
Para encontrar la traducción correcta, ¿es necesario resolver la ecuación?
- (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: ¿Que quieres decir con “se refiere al enunciado simbólico”? ¿Qué es el perímetro de una figura? ¿Qué expresión utilizarías para representar su cálculo?
- (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: ¿En qué te has basado para elegir la opción correcta y la incorrecta? ¿Por qué no has sabido explicar tus elecciones?

-
- ¿Qué significa el triple de un número? ¿Cómo se presenta el triple de un número?
 - ¿Qué significa el doble de un número? ¿Cómo se representa el doble de un número?
 - (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1: (III.4-Complicación estructural) Para las dos opciones, ¿puedes explicarme cómo has realizado la elección en cada caso? ¿Cómo has deducido que la opción c) es la correcta y la a) incorrecta?
 - ¿Qué es el perímetro de una figura? Elige una figura, un cuadrado, un triángulo o un rectángulo, nombrando sus lados con distintas letras, exprésame cómo sería el perímetro de esas figuras. ¿Cómo representarías simbólicamente el perímetro (suma de todos los lados) del jardín rectangular del enunciado?
 - (EC.2.2) Situación 2, enunciado 2: Según tu razonamiento al elegir la opción c) como correcta, “*porque dice las dos incógnitas, la x y la y*”, también podría ser la opción d), ¿por qué elegiste la c) entonces?
 - (EC.2.3) Situación 2, enunciado 3: ¿Qué representa la letra “equis”? ¿El número de ruedas de quien, de un coche o de dos coches?
 - (EC.2.4) Situación 2, enunciado 4: ¿Por qué afirmas que “no puede ser”? ¿En qué te basas exactamente?
-

A.4.5. Guión de la entrevista al sujeto S06

FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
 - Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x + (x + 1) - 4$ fue: “*Una pelota de futbol más, como es su siguiente sería, dos pelotas de futbol, menos cuatro pelotas de futbol*” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto
 - Tus respuestas a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ fueron: “*Cuatro coches, por la mitad de dos coches, es igual al doble de dichos coches. Cuatro coches por la mitad de varios coches, es igual al doble de dichos coches. Cuatro coches por la mitad de coches, bueno, de un coche, bueno por la mitad de dos coches, es igual al doble de dichos coches. Cuatro bizcochos por la mitad es igual al doble de los dos bizcochos*” ¿Cuál de ellas crees que es correcta? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
-

FASE 3: FICHA II

- (EC.1.2) Situación 1, enunciado 2: En la opción que has elegido como incorrecta, ¿por qué piensas que no respeta la ecuación?
 - (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3 y (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1: Explícame a que te refieres con que “indica exactamente los pasos”
¿Qué es el perímetro de una figura? ¿Cómo lo representarías simbólicamente?
 - (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: ¿Por qué consideras que el enunciado está mal? ¿cómo representarías ese enunciado verbal de manera simbólica?
 - (EC.2.2) Situación 2, enunciado 2: (III.3. Variables) ¿Qué valor está representado por la letra “equis”? ¿Se especifica en algún momento si tienen Jesús e Inés la misma edad? ¿Las representarías con la misma letra entonces
 - (EC.2.3) Situación 2, enunciado 3: ¿Qué valor está representado por la letra “equis”? ¿El número de ruedas o el número de coches? En la explicación de la opción correcta indicas que “ocho son los coches” ¿por qué? ¿qué quieres decir con eso?
 - (EC.2.4) Situación 2, enunciado 4: (III.4. Complicación estructural) ¿Cómo se
-

calcula el área de un cuadrado? ¿qué expresión simbólica se utiliza para representar el área de un cuadrado?

A.4.6. Guión de la entrevista al sujeto S07

FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
- Tus respuestas a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x + (x + 1) - 4$ fueron: “*Mi edad, dentro de un año será menos cuatro de...menos cuatro de mi hermano...cuatro años menos que mi hermano*” y “*Mi edad, más la edad mía dentro de un año, será menos cuatro años que tiene mi hermano*” ¿Cuál de ellas crees que es correcta? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.

FASE 3: FICHA II

- (EC.1.2) Situación 1, enunciado 2: (I.2. Desmedido) Sin mirar el enunciado simbólico dado, ¿puedes volver a leer el enunciado verbal que has marcado? ¿cómo lo representarías simbólicamente? (“*un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco*”) ¿Corresponde con el enunciado simbólico dado? ¿por qué?
- (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: ¿Por qué habías marcado la opción c) y después la cambias por la opción d)?
- (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: (II.3-Potenciación-Producto). ¿Por qué consideraste que este enunciado era el correcto? ¿Qué hizo que lo eligieras? ¿Qué significa el triple de un número? ¿Cómo se presenta el triple de un número? ¿Qué significa el doble de un número? ¿Cómo se representa el doble de un número?
- (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1: ¿Por qué habías marcado la opción c) y después la cambias por la opción d)?
- (EC.2.3) Situación 2, enunciado 3: ¿Qué valor está representado por la letra “equis”, el número de coches o el número de ruedas?
- (EC.2.4) Situación 2, enunciado 4: (II.3. Potenciación-Producto) Explicas que es "lado por lado", si un lado está representado por la letra “equis”, ¿cómo expresas que esa letra se está multiplicando por sí misma?

A.4.7. Guión de la entrevista al sujeto S08

FASE 1: CONSTRUIR LAS PIEZAS DE DOMINÓ

- ¿Por qué dejaste estos 3 espacios sin rellenar? (Corresponden a los enunciados E1, E4 y E11)
- ¿Sabrías rellenarlos ahora? Di cómo los rellenarías.
- En caso de que dude a la hora de expresarlo, ¿puedes explicarme por qué te surgen dudas? ¿en qué piensas?

FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
- Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x + (x + 1) - 4$ fue: “*Un melón más un melón más un melón menos cuatro melones*” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.

 FASE 3: FICHA II

- (EC.1.2) Situación 1, enunciado 2: En la respuesta que has marcado como correcta, ¿Por qué cambiaste tu elección de la opción a) por la c)? ¿tiene algo que ver que has razonado la opción correcta basándote en el razonamiento de la opción incorrecta?
Según tu razonamiento a la elección de enunciado incorrecto, Según este razonamiento, ¿no es posible sumar -55 más 60? ¿Qué resultado se obtiene? ¿Por qué no se ajusta esta expresión verbal al enunciado simbólico dado?
Al no preguntarte por la existencia o no de un valor que cumpla la ecuación, sino por la traducción verbal del enunciado simbólico que te doy, ¿qué enunciado verbal consideras que se ajusta más al enunciado simbólico dado?
 - (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: ¿Por qué cambiaste la respuesta en este caso? ¿Qué te hizo cambiar de opinión?
 - (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: (II.3-Potenciación-Producto). ¿Qué significa el triple de un número? ¿Cómo se presenta el triple de un número?
¿Qué significa el doble de un número? ¿Cómo se representa el doble de un número?
 - (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1: (III.4-Complicación estructural). ¿Qué es el perímetro de una figura? Elige una figura, un cuadrado, un triángulo o un rectángulo, nombrando sus lados con distintas letras, exprésame cómo sería el perímetro de esas figuras. ¿Cómo representarías simbólicamente el perímetro (suma de todos los lados) del jardín rectangular del enunciado?
 - (EC.2.2) Situación 2, enunciado 2: (III.3. Variables) ¿Qué pone aquí? ("“equis” partido y") ¿qué significa? ¿Qué pone aquí? ("“equis” partido cuatro") ¿tienen Jesús e Inés la misma edad? ¿se representaría con la misma letra?
 - (EC.2.3) Situación 2, enunciado 3: (II.3. Potenciación-Producto) ¿Qué significa “elevar un número al cuadrado”? ¿Es lo mismo elevar un número al cuadrado que multiplicarlo por dos? Dime ejemplos. Si representamos por x el número de ruedas de un vehículo, para calcular el de dos vehículos, ¿qué operación debemos realizar? ¿Por qué?
-

A.4.8. Guión de la entrevista al sujeto S09

 FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
 - Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ fueron: “*Son, cuatro lo que sea...cuatro coches, por...un número, por ejemplo, cuatro coches por...una silla...cuatro coches por la mitad de una silla es igual al doble de dicha silla*” ¿Crees que es correcta? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto
 - Tus respuestas a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x + (x+1) - 4$ fueron: “*Una pelota de futbol más otra pelota de futbol menos cuatro pelotas de baloncesto*” y “*Una pelota de futbol más otra pelota de futbol más una pelota de baloncesto menos cuatro pelotas de beisbol*” ¿Cuál de ellas crees que es correcta? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
-

 FASE 3: FICHA II

- (EC.1.1) Situación 1, enunciado 1: (III.1-Generalización). ¿Consideras que este enunciado es el que más se ajusta al enunciado simbólico dado? ¿Qué opinas de los enunciados b) y c)? (b) y d) para 1.3) ¿Son correctos o incorrectos? ¿Por qué? ¿Qué

-
- diferencia hay entre los enunciados c) y d)? (b) y d) para 1.3)
- (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: (III.4-Complicación estructural) ¿Qué es el perímetro de una figura? Elige una figura, un cuadrado, un triángulo o un rectángulo, nombrando sus lados con distintas letras, exprésame cómo sería el perímetro de esas figuras. ¿Cómo representarías simbólicamente el perímetro (suma de todos los lados) del jardín rectangular del enunciado?
 - (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: Has seleccionado como incorrecta la opción d) “La tercera potencia de tres” ¿Por qué no has razonado esta elección? ¿Por qué consideras que la opción d) es incorrecta? ¿Cómo la escribirías simbólicamente?
 - (EC.2.3) Situación 2, enunciado 3: ¿Recuerdas porqué cambiaste de opinión y cambiaste las respuestas?
-

A.4.9. Guión de la entrevista al sujeto S10

FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
 - Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x + (x + 1) - 4$ fueron: “El hermano de Juan tiene un año más que él. La edad de Juan más la de su hermano menos cuatro es igual a la edad de su abuelo” ¿Crees que es correcta? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
-

FASE 3: FICHA II

- (EC.1.1) Situación 1, enunciado 1: (III.1-Generalización). y (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: (III.1-Generalización).
¿Consideras que este enunciado es el que más se ajusta al enunciado simbólico dado? ¿Qué opinas de los enunciados b) y c)? (b) y d) para 1.3) ¿Son correctos o incorrectos? ¿Por qué? ¿Qué diferencia hay entre los enunciados c) y d)? (b) y d) para 1.3)
 - (EC.2.2) Situación 2, enunciado 2: (III.3. Variables) Según tu explicación de enunciado incorrecto, dices que ““equis” partido cuatro” es también al edad de Jesús, pero en la explicación de opción correcta también has puesto ““equis” partido cuatro”, ¿es o no es la edad de Jesús?
-

A.4.10. Guión de la entrevista al sujeto S11

FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
 - En el juego, no diste un enunciado contextualizado al poner tu ficha con punto rojo en juego, ¿podrías dar ahora algún enunciado contextualizado para alguno de estos enunciados? $x + (x + 1) - 4$, $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$, $2x - \frac{y}{4}$, $x + (x + 1) = y - 2$.
-

FASE 3: FICHA II

- EC.1.3) Situación 1, enunciado 4: ¿Por qué no marcaste ninguna opción incorrecta? ¿Consideras que todas las dadas son correctas? Razóname cuál es la correspondencia entre en enunciado simbólico dado y las opciones de enunciado verbal que te propongo.
 - (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1: En primer lugar elegiste y explicaste la opción b), ¿recuerdas por qué cambiaste de opinión en la elección de la opción correcta?
-

- (EC.2.3) Situación 2, enunciado 3: ¿Qué valor está representado por la letra “equis”?
¿El número de coches o el número de ruedas?

A.4.11. Guión de la entrevista al sujeto S12

FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
- Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $2x - \frac{y}{4}$ fue: “*El doble de mi edad menos la cuarta parte de la edad de mi hermano*” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? ¿Qué valor está representado por la letra x? ¿Y por la letra y?
- Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$ fue: “*La mitad de mi edad por cuatro es igual al doble de mi edad*” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? ¿Qué valor está representado por la letra x?
- Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x + (x+1) - 4$ fue: “*Sería, mi edad más mi edad más un número... bueno, mi edad más la siguiente a mi edad, el número siguiente... Si yo tuviese catorce años pues el siguiente quince, menos cuatro*” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Después, en la partida final dijiste “*Mi edad más mi edad más uno menos cuatro, o el siguiente de mi edad menos cuatro*”. ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? ¿Qué significa “*el siguiente a mi edad*”?

FASE 3: FICHA II

- (EC.1.1) Situación 1, enunciado 1: (III.1-Generalización). ¿Consideras que este enunciado es el que más se ajusta al enunciado simbólico dado? ¿Qué opinas de los enunciados b) y c)? (*b) y d) para 1.3*) ¿Son correctos o incorrectos? ¿Por qué? ¿Qué diferencia hay entre los enunciados c) y d)? (*b) y d) para 1.3*)
- (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: (III.4-Complicación estructural) ¿Qué es el perímetro de una figura? Elige una figura, un cuadrado, un triángulo o un rectángulo, nombrando sus lados con distintas letras, exprésame cómo sería el perímetro de esas figuras. ¿Cómo representarías simbólicamente el perímetro (suma de todos los lados) del jardín rectangular del enunciado?
- (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: (II.3-Potenciación-Producto). ¿Qué significa el triple de un número? ¿Cómo se presenta el triple de un número? ¿Qué significa el doble de un número? ¿Cómo se representa el doble de un número?
- (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1: ¿Por qué me dijiste que necesitabas hacer el dibujo? ¿no sabes cuál es la opción correcta sin dibujarlo? ¿no sabrías explicarlo sin el dibujo?
- (EC.2.4) Situación 2, enunciado 4: ¿Por qué cambiaste de opinión y desmarcaste la opción d)? ¿por algo en especial?

A.4.12. Guión de la entrevista al sujeto S13

FASE 1: CONSTRUIR LAS PIEZAS DE DOMINÓ

- ¿Por qué dejaste estos 3 espacios sin rellenar? (corresponden a los enunciados E4,

E5 y E12)

- ¿Sabrías rellenarlos ahora? Di cómo los rellenarías.
 - En caso de que dude a la hora de expresarlo, ¿puedes explicarme por qué te surgen dudas? ¿en qué piensas?
-

FASE 3: FICHA II

- (EC.1.1) Situación 1, enunciado 1: (III.1-Generalización). ¿Consideras que este enunciado es el que más se ajusta al enunciado simbólico dado? ¿Qué opinas de los enunciados b) y c)? (b) y d) para 1.3) ¿Son correctos o incorrectos? ¿Por qué? ¿Qué diferencia hay entre los enunciados c) y d)? (b) y d) para 1.3)
 - (EC.1.2) Situación 1, enunciado 2: (I.2-Desmedido) ¿Puedes leer de nuevo el enunciado verbal que has seleccionado como correcto? Dice “*Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco*”, ¿Puedes decirme cómo escribirías su traducción a enunciado verbal? ¿A qué dice que es igual la expresión? ¿Cómo expresas simbólicamente “cinco veces un número por cinco”?
La opción que marcas como incorrecta es “*Al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco*” y tú dices como explicación que “*porque no se puede obtener cinco multiplicando por sesenta*”, ¿Dónde dice “cinco multiplicado por sesenta”? ¿Puedes explicarme por qué has dicho eso?
 - (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: (III.4-Complicación estructural). En la opción que marcas como incorrecta y explicas, mencionas que “está mal expresada porque no es la diferencia”, ¿a qué te refieres? ¿qué está mal expresado, el enunciado simbólico o el verbal?
 - (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: (III.4-Complicación estructural) ¿Qué es el perímetro de una figura? Elige una figura, un cuadrado, un triángulo o un rectángulo, nombrando sus lados con distintas letras, exprésame cómo sería el perímetro de esas figuras. ¿Cómo representarías simbólicamente el perímetro (suma de todos los lados) del jardín rectangular del enunciado?
 - (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: (II.3-Potenciación-Producto). Al darte el enunciado simbólico x^3 , dices que corresponde con el enunciado verbal “*El triple del lado de un cubo*” y basas tu razonamiento en que “*porque es el triple de tres son $x + x + x$* ”. ¿Cómo expresas simbólicamente esta operación de “*equis*” más “*equis*” más “*equis*”? ¿Qué resultado tendríamos? ¿Es lo mismo multiplicar un número por tres que hacer su tercera potencia? (ponerle ejemplos si no sabe contestar)
 - (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1: (III.1. Generalización) Lee de nuevo el enunciado y la expresión que tú has seleccionado, ¿consideras que has tenido en cuenta todos los datos que la expresión verbal? ¿quién es el valor representado por “*equis*” y el representado por “*y*”? ¿Hay alguna relación, según el enunciado verbal, entre las dimensiones del rectángulo? ¿se tienen en cuenta en el enunciado simbólico del apartado d)?
 - (EC.2.3) Situación 2, enunciado 3: ¿Qué valor está representado por la letra “*equis*”? ¿el número de coches? ¿el número de ruedas de un coche?
-

A.4.13. Guión de la entrevista al sujeto S14

FASE 1: CONSTRUIR LAS PIEZAS DE DOMINÓ

- ¿Por qué dejaste éste espacio sin rellenar? (corresponde con el E2)
 - ¿Sabrías rellenarlos ahora? Di cómo los rellenarías.
-

- En caso de que dude a la hora de expresarlo, ¿puedes explicarme por qué te surgen dudas? ¿en qué piensas?

FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
- Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x+(x+1)=y-2$ fue: “Un limón, más otro limón, es igual a cuatro limones menos dos limones” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
- Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x+(x+1)-4$ fue: “Dos pelotas de futbol más otra pelota de futbol menos cuatro pelotas de futbol” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.

FASE 3: FICHA II

- (EC.1.1) Situación 1, enunciado 1: (III.1-Generalización). ¿Consideras que este enunciado es el que más se ajusta al enunciado simbólico dado? ¿Qué opinas de los enunciados b) y c)? (b) y d) para 1.3) ¿Son correctos o incorrectos? ¿Por qué? ¿Qué diferencia hay entre los enunciados c) y d)? (b) y d) para 1.3)
- (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: (III.4-Complicación estructural) y (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: (III.4-Complicación estructural). ¿Qué es el perímetro de una figura? Elige una figura, un cuadrado, un triángulo o un rectángulo, nombrando sus lados con distintas letras, exprésame cómo sería el perímetro de esas figuras.
¿Qué tiene que ver el perímetro con el volumen? ¿Qué es el perímetro? ¿cómo expresarías el perímetro de un cubo de lado x? (hacerle el dibujo y nombrar los lados)
- (EC.2.2) Situación 2, enunciado 2: (III.3-Variables). ¿Qué valor está representado por la letra “equis”? ¿Se especifica en algún momento si tienen Jesús e Inés la misma edad? ¿Las representarías con la misma letra si no sabemos si son la misma edad?
- (EC.2.3) Situación 2, enunciado 3: (II.3-Potencia-producto) y (EC.2.4) Situación 2, enunciado 4. (II.3-Potencia-producto)
Has señalado la opción a), ¿qué operación se está realizando ahí? En tu razonamiento has dicho que “es multiplicada por dos”, ¿es la misma operación que se está realizando en la opción a)? Multiplicar por dos o elevar al cuadrado (multiplicar por sí mismo dos veces), ¿es lo mismo?
- (EC.2.4) Situación 2, enunciado 4: (...).en la explicación que das sobre tu elección de opción correcta dices “porque es dos veces el lado por dos y después por la profundidad” ¿qué significa dos veces el lado por dos? ¿Cómo se calcula el área de un cuadrado? ¿Lado por lado? ¿Lado por dos?

A.4.14. Guión de la entrevista al sujeto S15

FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
- Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x+(x+1)-4$ fue: “La edad de Juan más la edad del abuelo más uno menos cuatro” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.

 FASE 3: FICHA II

- (EC.1.1) Situación 1, enunciado 1: (II.4-Suma-Producto). Has marcado como traducción correcta el enunciado de la opción b) que dice “cinco veces mi edad y la de mi hermana” y justificas muy bien cómo se expresa simbólicamente este enunciado verbal, pero si tienes en cuenta esta explicación de que sería "cinco por “equis” que es el quintuple de mi edad", ¿corresponde con la expresión simbólica del enunciado dado? ¿Consideras que ese enunciado es el que más se ajusta al enunciado simbólico dado?
En el enunciado que has marcado como incorrecto, el c) has razonado bien cómo se escribiría simbólicamente el enunciado verbal que has seleccionado. La expresión que has escrito aquí, $5 + (x + y)$ ¿qué diferencia tiene con la que te he dado yo en el enunciado? ¿Por qué la elegiste como incorrecta?
 - (EC.1.2) Situación 1, enunciado 2: ¿Por qué cambiaste de opinión al seleccionar una opción incorrecta y elegiste la opción a) en vez de la b) que es la primera que marcaste? ¿No sabías explicarla? ¿Cómo es la opción b), correcta o incorrecta?
 - (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: (III.4-Complicación estructural). En la opción que marcas como correcta y explicas, habla del perímetro de una figura, pero tu razonamiento no justifica realmente tu elección, ¿por qué elegiste la opción c)? ¿Por qué marcaste la opción d) y después cambiaste a la opción c)?
Marcas como traducción incorrecta la opción a), ¿Cuál es el área de un cuadrado? ¿Cómo lo expresarías simbólicamente?
 - (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: (III.4-Complicación estructural) ¿Por qué cambiaste tu elección? ¿Cómo se calcula el volumen de un cubo? Explícame éste enunciado que has seleccionado y lo que significarían las otras expresiones verbales propuestas.
 - (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: (II.3-Potenciación-Producto). Has marcado como opción incorrecta el apartado c), si dices que el perímetro sería "cuatro por “equis”", ¿por qué has marcado como opción correcta la opción a)?
 - (EC.2.4) Situación 2, enunciado 4: (Explica correctamente el enunciado b) per marca el enunciado a) que tiene error I.1-Incompleto). Lee de nuevo tu razonamiento de la elección de la opción correcta. Tu explicación no coincide con el enunciado que has marcado, el a) ¿con qué enunciado corresponde esta explicación?
-

A.4.15. Guión de la entrevista al sujeto S16

 FASE 2: EL JUEGO

- ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícalo.
 - Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $x + (x + 1) - 4$ fue: “Un tomate más otro tomate igual a...un tomate menos dos...menos dos tomates” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
 - Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica $2x - \frac{y}{4}$ fue: “La cuarta parte de una tarta, menos su doble, menos el doble de esa tarta” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.
 - Tu respuesta a una ficha con punto rojo donde tenías la expresión simbólica
-

$4x \cdot \frac{x}{2} = 2x$ fue: “Cuatro tomates, por la mitad de dos es igual a su doble, al doble de los tomates” ¿Crees que ese enunciado es correcto? ¿Por qué? Modifícalo en caso de que creas que es incorrecto.

FASE 3: FICHA II

- (EC1.1) Situación 1, enunciado 1: (III.1-Generalización). ¿Consideras que este enunciado es el que más se ajusta al enunciado simbólico dado? ¿Qué opinas de los enunciados b) y c)? (b) y d) para 1.3) ¿Son correctos o incorrectos? ¿Por qué? ¿Qué diferencia hay entre los enunciados c) y d)? (b) y d) para 1.3)
 - (EC.1.2) Situación 1, enunciado 2: (III.3-Variables) En la respuesta que tú has marcado, dice "otro número", Lee de nuevo el enunciado que has marcado y di cómo lo expresarías simbólicamente. ¿Se ajusta al enunciado simbólico dado? (¿se representarían con la misma letra los dos números de los que habla el enunciado?)
 - (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: (III.4-Complicación estructural). En la opción que marcas como incorrecta y explicas, mencionas que nueve es un número par, ¿Cuál es la propiedad que cumplen todos los números pares? ¿es nueve un número par?
 - (EC.1.3) Situación 1, enunciado 3: (III.4-Complicación estructural) y (EC.2.1) Situación 2, enunciado 1: (III.4-Complicación estructural). ¿Qué es el perímetro de una figura? Elige una figura, un cuadrado, un triángulo o un rectángulo, nombrando sus lados con distintas letras, exprésame cómo sería el perímetro de esas figuras. ¿Cómo representarías simbólicamente el perímetro (suma de todos los lados) del jardín rectangular del enunciado?
 - (EC.1.4) Situación 1, enunciado 4: (II.3-Potenciación-Producto). ¿Por qué consideraste que este enunciado era el correcto? ¿Qué hizo que lo eligieras? ¿Qué significa el triple de un número? ¿Cómo se presenta el triple de un número? ¿Qué significa el doble de un número? ¿Cómo se representa el doble de un número?
 - (EC.2.4) Situación 2, enunciado 4: (Explica correctamente el enunciado b) pero marca el enunciado a) que tiene error I.1-Incompleto). Lee de nuevo tu razonamiento de la elección de la opción correcta. Tu explicación no coincide con el enunciado que has marcado, el a) ¿con qué enunciado corresponde esta explicación?
-

ANEXO B

ANEXO B. PRIMERA FASE DE RECOGIDA DE DATOS: PRODUCCIONES DE LA FICHA I

En este Anexo B presentamos en primer lugar la Ficha I resuelta (apartado B.1) y a continuación (apartado B.2) las producciones de los sujetos en la primera fase de la recogida de datos. Las respuestas de los estudiantes se presentan mecanografiadas y marcadas en rojo, marcándose también qué posiciones dejan en blanco.

B.1. FICHA I RESUELTA

$x + (x + 1) - 4$	$\frac{x}{2} \cdot 3y$	La mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
La suma de dos números consecutivos menos cuatro			Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
			Un número por su cuadrado es igual a su cubo
			$x \cdot x^2 = x^3$
			$x \cdot (x + 1) = 7x$
$(\sqrt{x})^2 = x$			El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número
			El cubo del producto de dos números
$x^2 - y^2 = 11$	La diferencia del cuadrado de dos números es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número
			Un número par menos la cuarta parte de otro número
			$(x + (x + 1))^2$
			El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
			$(x \cdot y)^3$

B.2. PRODUCCIONES DE LOS DISTINTOS SUJETOS

S01

$x + (x + 1) - 4$		El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
		Cuatro por la mitad de un número es igual a dos y otro número	
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número		Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número por su cuadrado es igual a su cubo
			$(x)^2 = (x)^3$
$(\sqrt{x})^x = x$			$x \cdot (x + 1) = 7x$
$x^2 - y^2 = 11$	Un número y su cuadrado menos otro número y su cuadrado es igual a once	La raíz cuadrada de un número y el número de su	Un número por un número más uno es igual a siete y otro número
			Un número por otro número elevado al cubo
		Un número par menos la cuarta parte de otro número	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
			$(x \cdot y)^3$

S02

$x + (x + 1) - 4$		El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
-------------------	--	---	---

Un número más su consecutivo menos cuatro

La mitad de un número multiplicado por un número par (4) igual a dos x

El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número

$a + b = d - 2$

Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos

	Un número por su cuadrado es igual a su cubo	$x \cdot (x + 1) = 7x$
--	--	------------------------

$(\sqrt{x})^2 = x$

$x^2 - y^2 = 11$	Un número elevado a dos menos su consecutivo elevado a dos es igual a un número primo	$(\sqrt{x})^y$
------------------	---	----------------

La raíz cuadrada de un número elevada a otro

Un número multiplicado por su consecutivo elevado al cubo

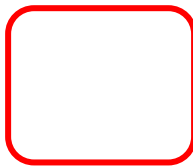
$2 - \frac{4}{2} = x$

Un número par menos la cuarta parte de otro número	$a + b^2$
--	-----------

El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	$(x \cdot y)^3$
--	-----------------

S03

$$x + (x + 1) - 4$$



El producto de la mitad de un número por el triple de otro número

$$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$$

El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número

$$x + x = x - 2$$

Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos

Un número por su cuadrado es igual a su cubo

$$x \cdot (x + 1) = 7x$$

$$x^2 - y^2 = 11$$

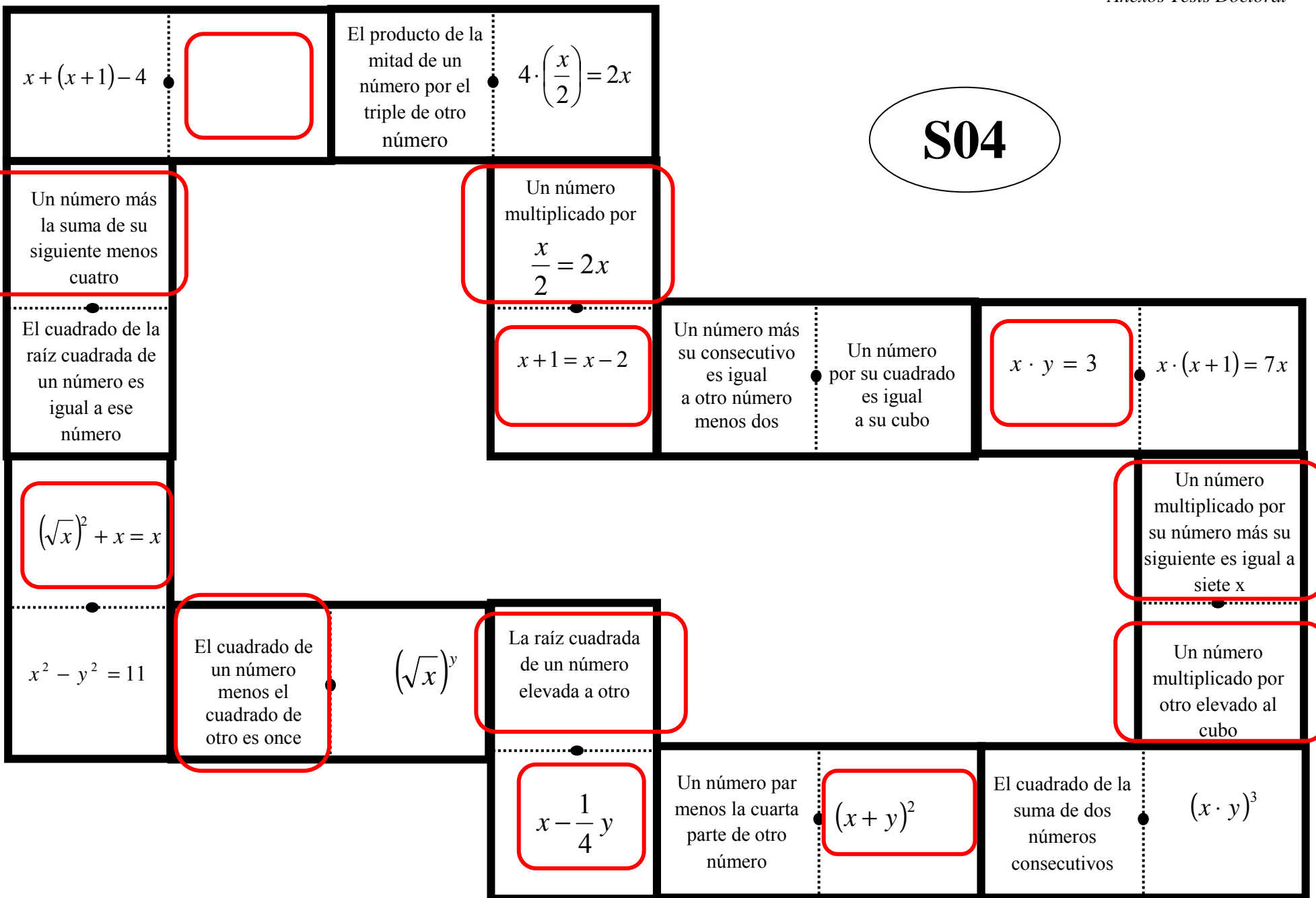
$$(\sqrt{x})^y$$

Un número par menos la cuarta parte de otro número

El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

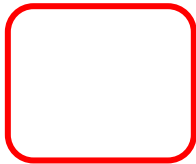
$$(x + y)^2$$

S04



S05

$$x + (x + 1) - 4$$



El producto de la mitad de un número por el triple de otro número

$$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$$

La suma de dos números consecutivos menos cuatro

Un número par multiplicado por la mitad de un número, es igual que un número par multiplicado por otro

El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número

$$x + 1 = x - 2$$

Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos

Un número por su cuadrado es igual a su cubo

$$x \cdot (x + 1) = 7x$$



$$\sqrt{x} = y$$

Un número multiplicado por otro número más uno, es igual a siete por un número

$$x^2 - y^2 = 11$$

Un número elevado al cubo menos otro número elevado al cubo, es igual a once

$$(\sqrt{x})^y$$

La raíz cuadrada de un número, elevada a y



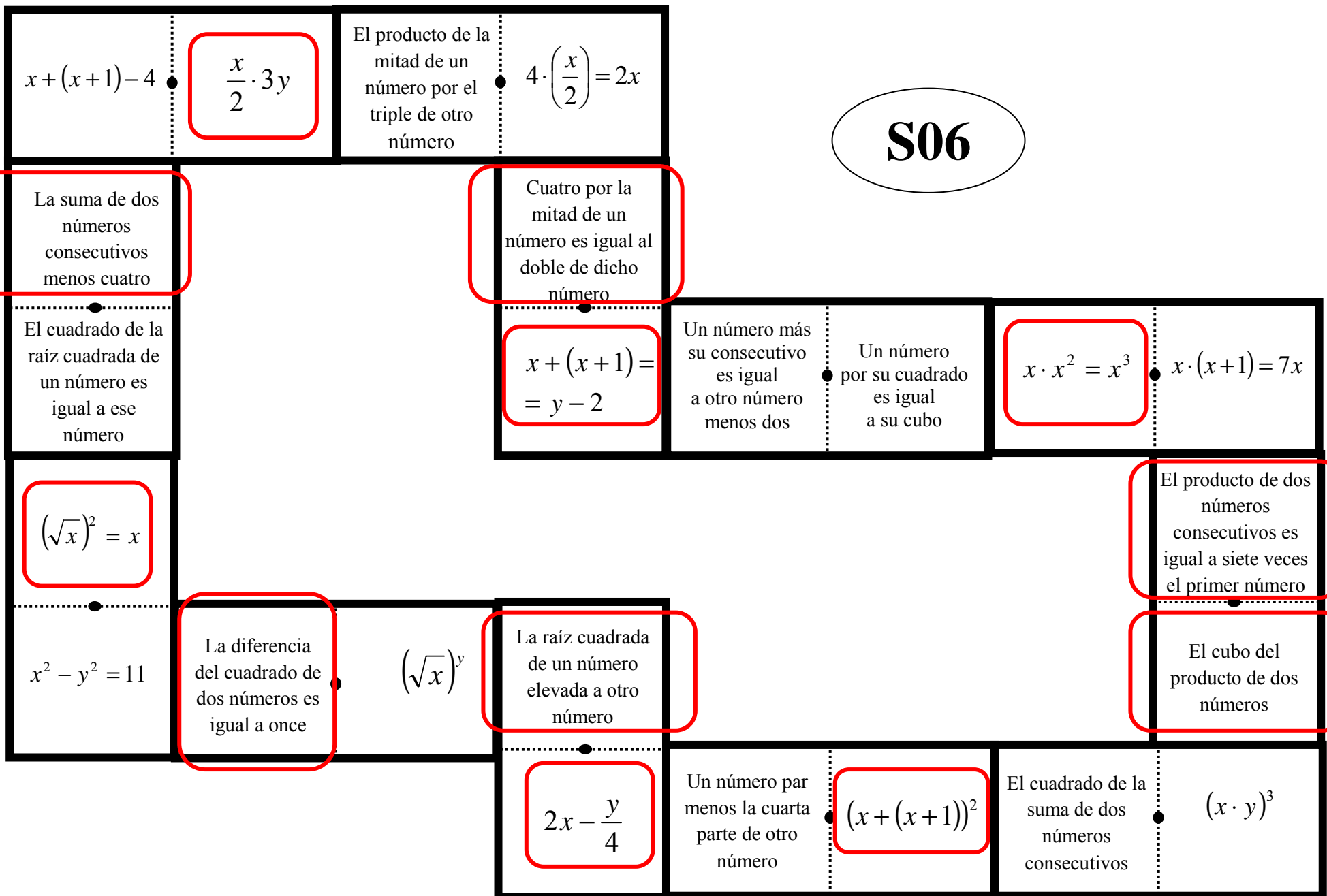
$$2 - \left(x - \frac{1}{4}\right)$$

Un número par menos la cuarta parte de otro número

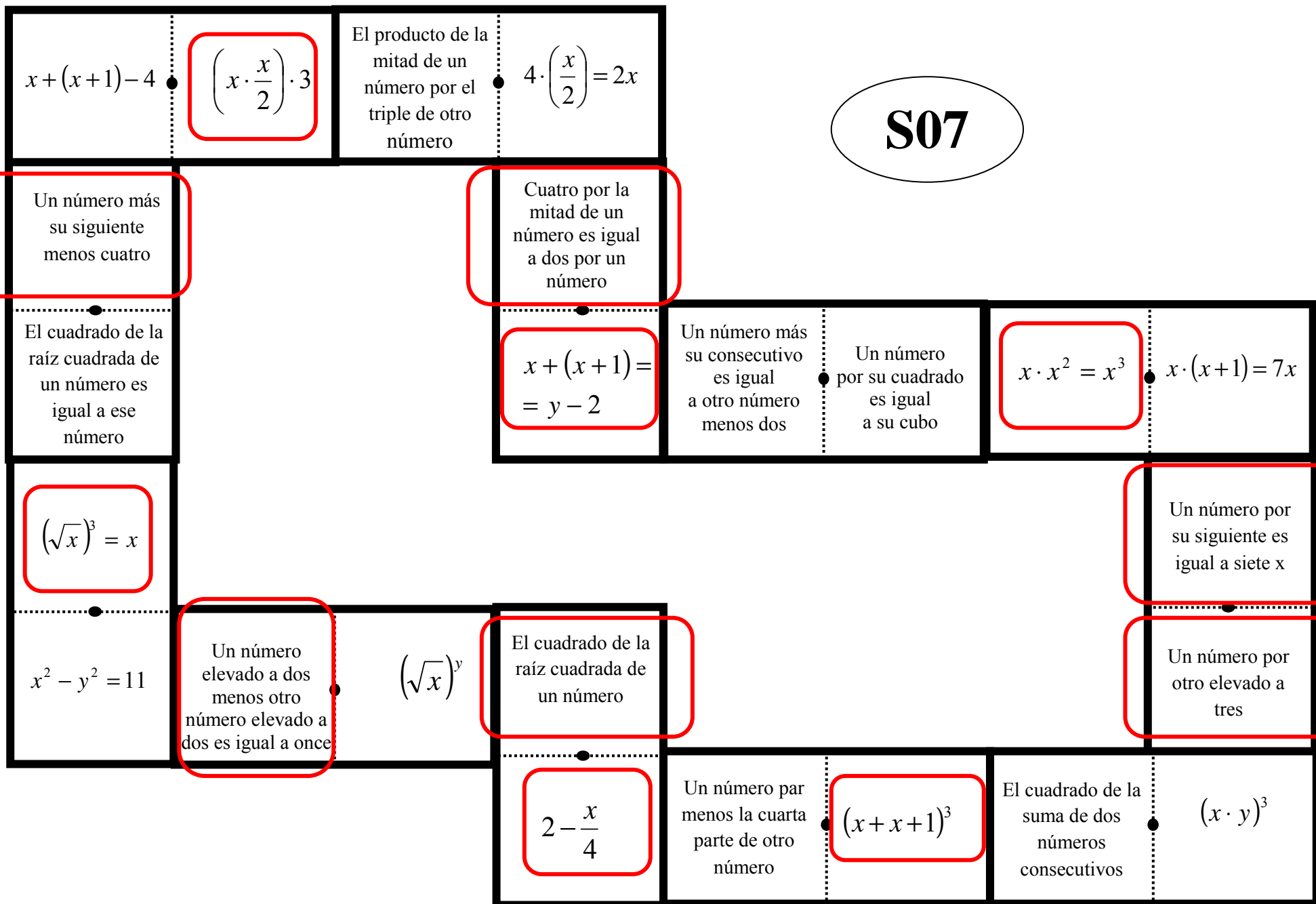


El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

$$(x \cdot y)^3$$



S07



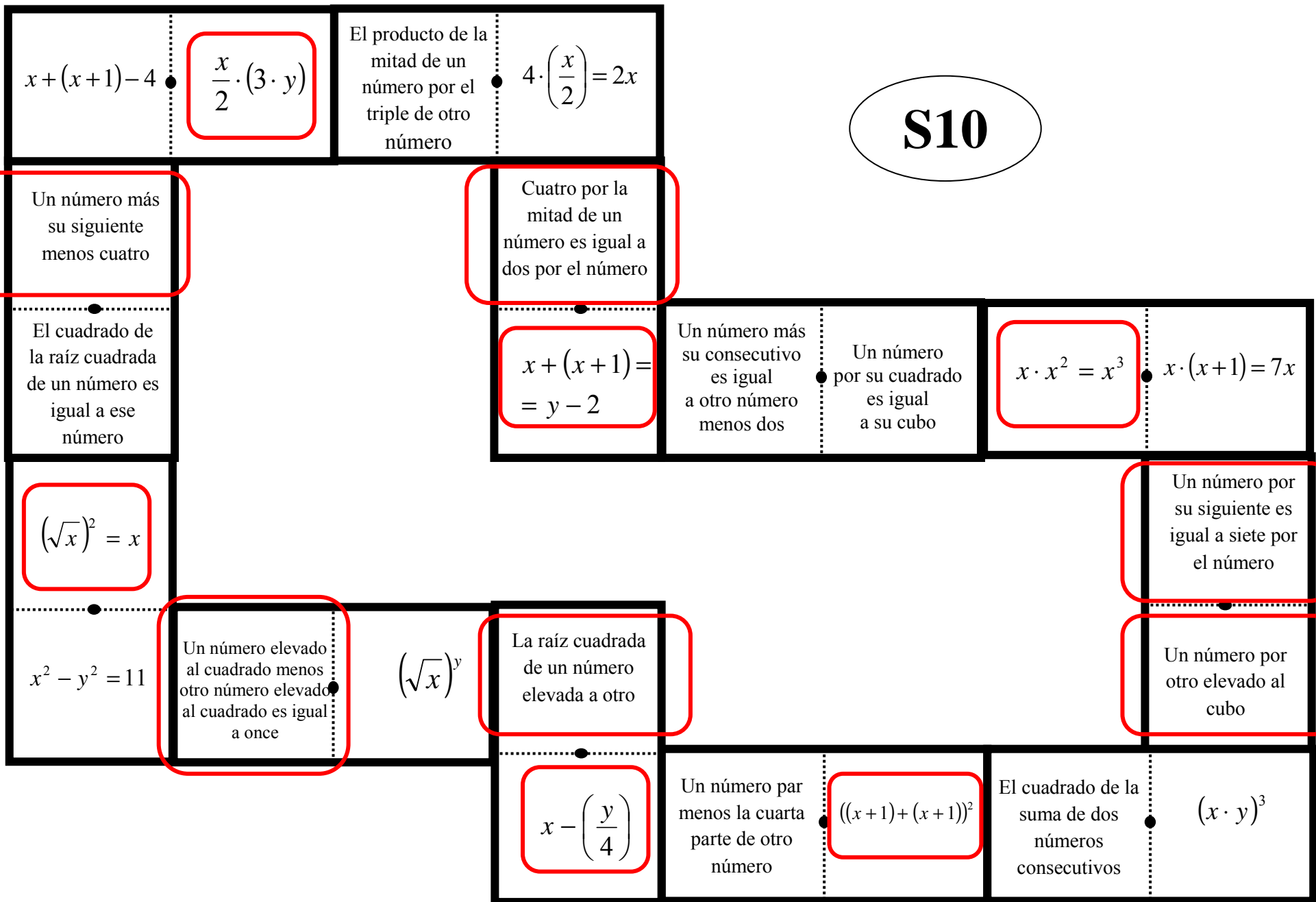
S08

$x + (x + 1) - 4$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$	<div style="border: 1px solid black; border-radius: 50%; width: 100px; height: 100px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin: 0 auto;"> S08 </div>					
Un número más otro, menos uno, menos cuatro	Cuatro multiplicado, un número dividido entre dos es igual a dos y un número			El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número	$x + x = x - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número por su cuadrado es igual a su cubo $x \cdot (x + 1) = 7x$
$x^2 - y^2 = 11$	Un número elevado al cuadrado menos otro número elevado al cuadrado es igual a once $(\sqrt{x})^y$	Raíz cuadrada de un número elevada a otro	Un número por otro, más uno	$x^2 - y^2 = 11$	Entre paréntesis un número multiplicado por otro elevado al cubo	Un número par menos la cuarta parte de otro número $8 - \frac{2}{x}$	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos $(x \cdot y)^3$

S09

$x + (x + 1) - 4$	$\frac{x}{2} \cdot (3y)$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su siguiente menos cuatro			Cuatro por la mitad de un número es igual a ese número multiplicado por dos
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
	$x + (x + 1) = y - 2$		Un número por su cuadrado es igual a su cubo
$(\sqrt{x})^2 = x$			$x \cdot (x)^2 = x^3$
			$x \cdot (x + 1) = 7x$
$x^2 - y^2 = 11$			Un número por su siguiente es igual a ese número multiplicado por siete
El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número	El cubo de un número multiplicado por otro número
	$x - \frac{1}{4}y$	Un número par menos la cuarta parte de otro número	
			El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
			$(x + x + 1)$
			$(x \cdot y)^3$

S10



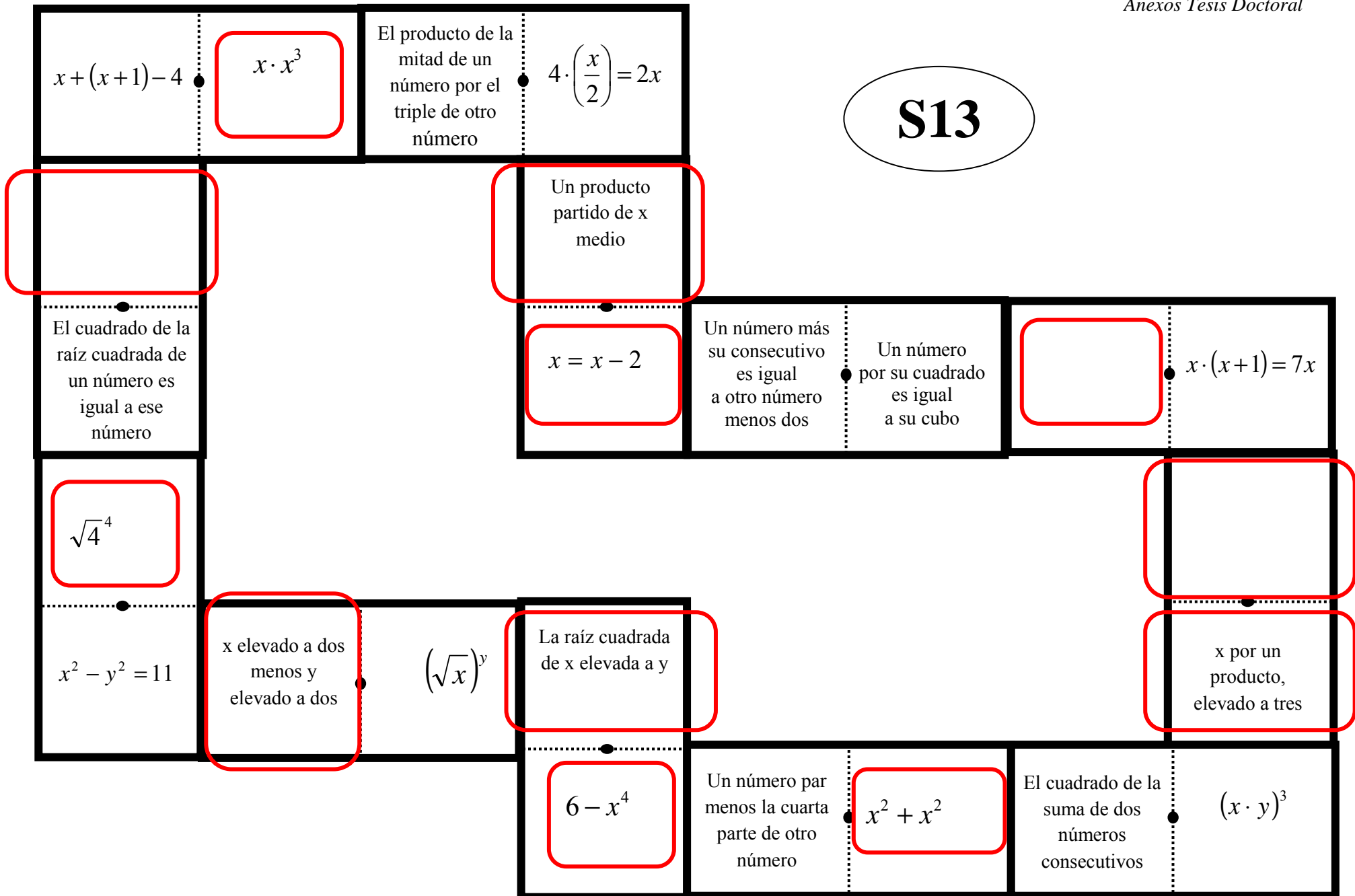
S11

$x + (x + 1) - 4$	$\frac{x}{2} \cdot 3y$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos cuatro		El producto de la mitad de un número por cuatro	
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número	$x + 1 = y - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número por su cuadrado es igual a su cubo
$(\sqrt{x})^2 = x$		$x \cdot 2x = 3x$	$x \cdot (x + 1) = 7x$
$x^2 - y^2 = 11$	Un número al cuadrado menos otro al cuadrado es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número
		Un número por su consecutivo es igual a siete equis	Un número por otro número elevado a otro
$x - \frac{x}{4}$		Un número par menos la cuarta parte de otro número	$(x + x + 1)^2$
		El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	$(x \cdot y)^3$

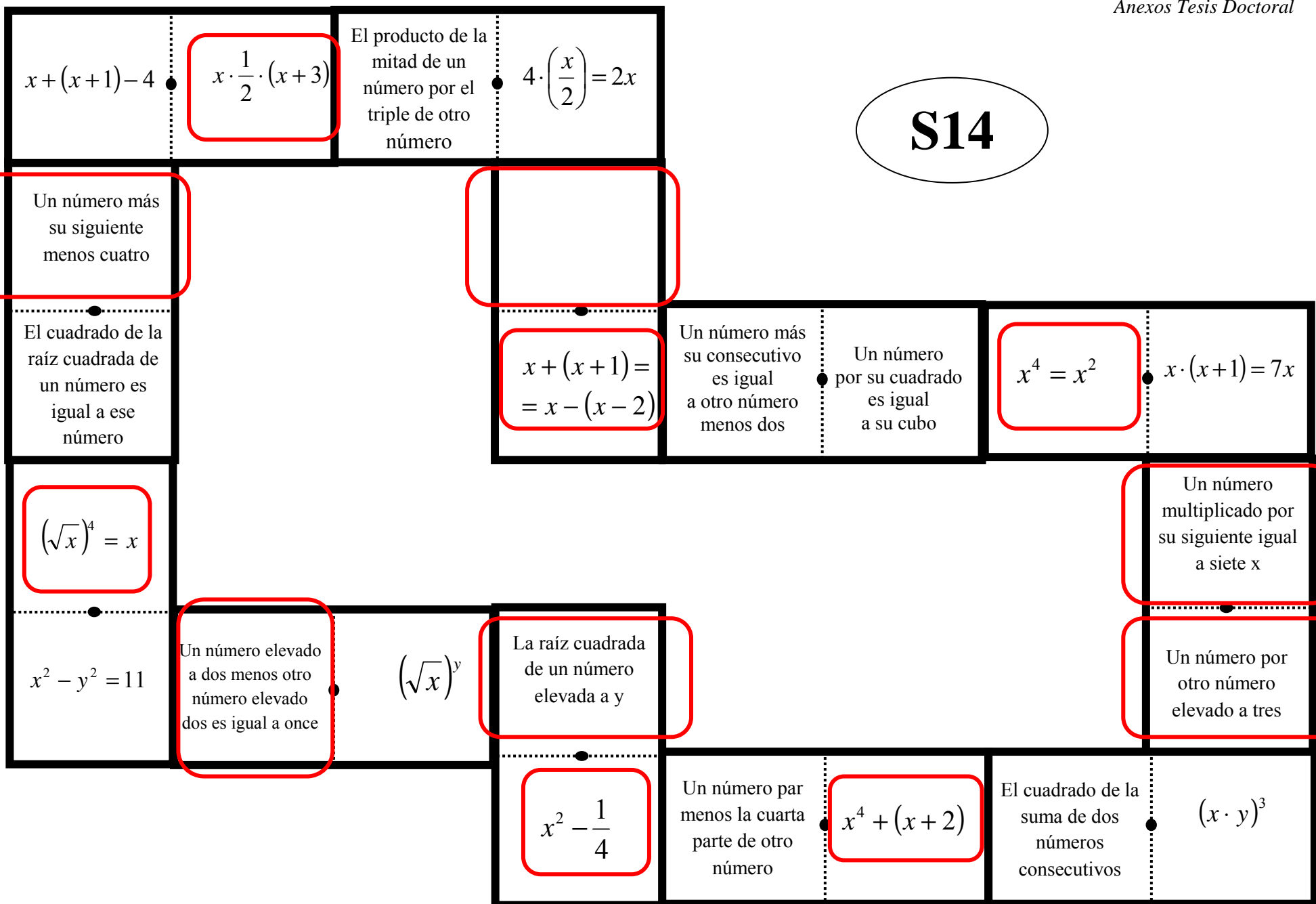
S12

$x + (x + 1) - 4$	$x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot (3y)$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$		
Un número más su consecutivo menos cuatro			Cuatro por la mitad de un número es igual a el doble de ese número		
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			$x + (x + 1) = y - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número por su cuadrado es igual a su cubo
$(\sqrt{x})^y = x$					$x \cdot (x \cdot 3) = x \cdot (x + 1) = 7x$
$x^2 - y^2 = 11$	El doble de un número menos el doble de otro número es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número		Un número por su consecutivo es igual a ese número por siete
					El triple del producto de dos números diferentes
	2 ó $x - \frac{y}{3}$			Un número par menos la cuarta parte de otro número	$[(x + 1) + (x + 2)]^2$
					El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
					$(x \cdot y)^3$

S13



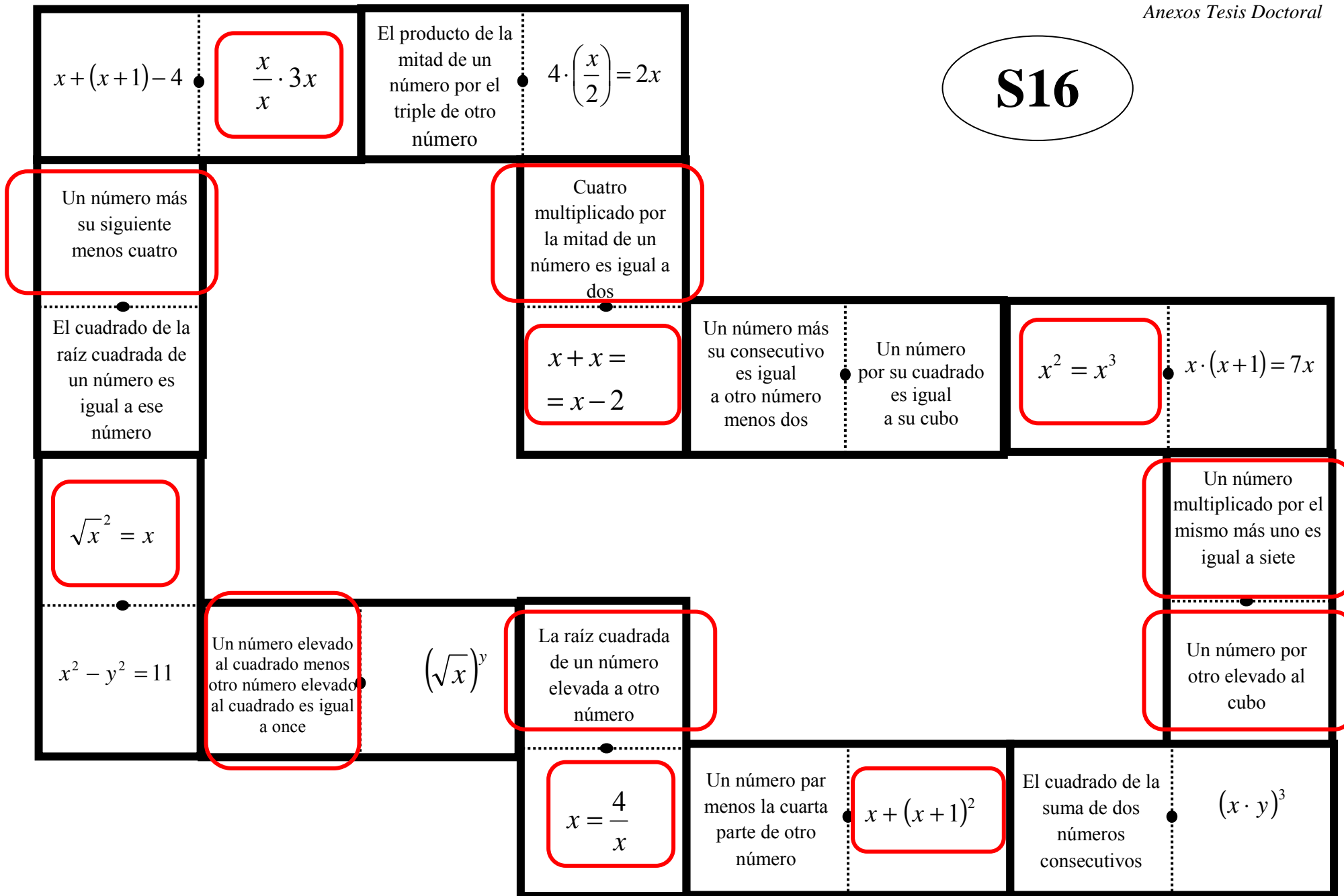
S14



S15

$x + (x + 1) - 4$	$\frac{x}{2} \cdot x^3$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$	
Equis más equis más uno menos cuatro			Cuatro por la mitad de un número es igual dos equis	
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			$x + x + 1 = x - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
			$x \cdot x^2 = x^3$	Un número por su cuadrado es igual a su cubo
$\sqrt{x^2} = x$				$x \cdot (x + 1) = 7x$
$x^2 - y^2 = 11$	Equis elevado a dos menos i griega elevada a dos es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	Raíz de equis elevada a i griega	Equis por uno equis es igual a siete equis dos equis es igual a siete equis
			$2x - \frac{x}{4}$	Equis elevado a tres por i griega elevado a tres
			$(x + x + 1)^2$	Un número par menos la cuarta parte de otro número
		El cuadrado de la suma de dos números consecutivos		$(x \cdot y)^3$

S16



ANEXO C

ANEXO C. SEGUNDA FASE DE RECOGIDA DE DATOS: TRANSCRIPCIONES DE LAS GRABACIONES

En este tercer anexo presentamos las transcripciones de las grabaciones realizadas a los estudiantes mientras jugaban con las piezas del dominó algebraico. Organizamos las transcripciones en cinco partes, en cada una de ellas se identifica el grupo de sujetos que participa, la fecha y la hora en la que se llevó a cabo.

Como hemos comentado en las reglas del juego descritas en el marco metodológico de este trabajo, de cada grupo sale un jugador ganador, quedando cuatro jugadores para posteriormente jugar una final. En esta final, hubo un único ganador entre todos los sujetos participantes. En todas las partidas, los sujetos realizaron una única ronda, mientras que en la partida final, los sujetos realizaron dos rondas en los minutos que duró el juego.

En las transcripciones los sujetos vienen identificados tal y como se ha explicado en el apartado III.2. de este trabajo, y la profesora está identificada con P. Debido a la disponibilidad de los sujetos y del horario de clases, la organización del torneo fue la que se describe en la Tabla A.1. Las transcripciones se presentan también en este orden.

Tabla A.1. Organización del torneo

	Sujetos	Tiempo de juego	Ganador
Primera ronda	Grupo 1: S01, S05, S07, S12	14min 04seg	S12
	Grupo 2: S02, S06, S09, S14	25min 19seg	S09
	Grupo 3: S03, S10, S11, S15	18min 47seg	S10
	Grupo 4: S04, S08, S16	11min 30seg	S16
Final	Clasificados: S09, S10, S12, S16	22min 58seg	S10

C.1. TRANSCRIPCIONES GRUPO 1

Grupo 1: S01, S05, S07, S12. Tiempo: 14min 04seg

Sujeto	Puntos	Total
S01	1,2,1,1,1,1,1	8
S05	1,1,1,1,1,1	6
S07	2,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2	16
S12	2,2,1,1,1,1,1,1,2,2,2,1,1,2,1,1,2	24

Sujeto	Transcripción Grupo 1 – Lunes 11 de febrero de 2013
P:	Empiezas tu S01.
S01:	Pongo la que quiera, ¿no?
P:	Sí. Léela.
S01:	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos. Y aquí, un número por otro número elevado a tres.
S12:	Ésa está mal.
P:	¿Por qué?
S12:	Porque el cuadrado de una suma sería “equis” partido cuatro, ¿no?
P:	Yo aquí estoy solo para observar.
S07:	Que no son consecutivos, no son consecutivos esos.
P:	¿Qué significa que no sean consecutivos?
S07:	Que es un número y el siguiente.
P:	¿Qué pone en esta expresión?
S12:	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos.
P:	¿Y coincide con esto?
S01:	¡Qué va! Porque esto es...cuatro por un número partido dos igual a...
P:	Pues S05, quítala y pon otra en todo caso.
S12:	También está mal. Porque no es el cuadrado de la suma.
S07:	No está elevado a dos.
P:	Retira la ficha.
S05:	Jo...
P:	A ver, sabes cómo funciona el dominó, ¿verdad? Yo tengo que poner aquí una que signifique esto, y aquí una expresión que signifique lo mismo que esta. Entonces busca una que sea el cuadrado de la suma de dos números consecutivos o una que sea lo que ha dicho S01 ahí.
S12:	Maestra, si ponemos a lo mejor esa...hay que explicarla, ¿no? Cuando la pones...
P:	Hay que explicarla y decir el enunciado.
S05:	Ahí va...
S12:	Esa está mal.
P:	¿Por qué?
S12:	Porque tampoco es el cuadrado...tampoco son consecutivos...
S05:	No se...no tengo...
P:	Pues entonces quítala y pasa turno.
S07:	“equis” más “equis” más uno, elevado a dos.
P:	¿Y la otra expresión?
S07:	Un número par menos la cuarta parte de otro número.
P:	Y ahora, de esta expresión simbólica, léeme su expresión verbal.
S07:	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos.

Sujeto	Transcripción Grupo 1 – Lunes 11 de febrero de 2013
S12:	Paso.
S01:	Paso.
P:	Léeme, la que está puesta ya, y la que tú estás poniendo.
S05:	Pues un número par menos la cuarta parte de otro número, dos “equis” menos “y” partido cuatro.
S07:	El cubo del producto de dos números; “equis” por “y” elevado a tres.
S12:	¿Cuál leo? ¿Ésta?
P:	No, léeme la que estaba puesta y la que tú pones.
S12:	El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número. ¿Y leo ésta o esa?
P:	Ésta, la que estabas poniendo.
S12:	Pues entonces, lo mismo...yo creo que está bien...
P:	Lo mismo no...léelo.
S12:	Pues el producto de dos números consecutivos es igual a siete veces...
P:	¿Quiénes son los números consecutivos aquí?
S12:	Pues “equis” más uno, ¿no? Ay, me estoy liando...
P:	No te lées. ¿Quiénes son los dos números consecutivos?
S12:	Uno es “equis”.
P:	¿Y su consecutivo?
S12:	“equis” más uno.
S05:	Eso está mal...
P:	Espera, deja que la explique...
S01:	Un número, por su cuadrado, es igual a su cubo.
P:	Vale, ten en cuenta que yo después voy a escuchar eso, no voy a verlo. Léelo. Un número, ¿quién es?
S01:	Un número, por...un número y su cuadrado...
P:	Lo has indicado bien, pero que me digas, ¿el número quién es?...y léemelo.
S01:	“equis”...por “equis” elevado a dos, es igual a “equis” al cubo.
P:	S05, ¿por qué dices que está mal?
S05:	No, ya no...
S07:	Yo paso...
S12:	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos. “equis”, abrimos paréntesis, “equis” más uno, igual a “equis” menos dos...No, lo he leído mal...
P:	Pues léelo bien.
S12:	Pues sería, un número más su consecutivo que es “equis” más uno, que es igual a otro número “y” menos dos.
S01:	Paso.
S05:	No tengo tampoco.
S07:	Paso..
S12:	Un número par menos la cuarta parte de otro número. Y, ¿te explico también ésta?
P:	Sí.
S12:	Pues, el doble de mi edad menos la cuarta parte de la edad de mi hermano.
S01:	Paso.
P:	Pero venga, léela y explicamela.
S05:	Ah...la raíz cuadrada de un número elevada a otro número pues es igual a la raíz cuadrada de un número pues elevada a otro número.
P:	Pues la de los símbolos...yo no voy a entender luego. Para mí, me has leído

Sujeto	Transcripción Grupo 1 – Lunes 11 de febrero de 2013
	dos veces la misma, ésta, la del texto.
S05:	Pues la raíz cuadrada de un número...
P:	¿Cómo está expresada ahí?
S05:	Pues que está elevada a otro número...
P:	Pero, ¿cómo está expresado ahí simbólicamente?
S05:	Pues la raíz cuadrada de “equis” elevada a “y”.
P:	Vale.
S07:	Yo paso.
S12:	Paso.
S01:	Paso.
S05:	Pues un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos pues quiere decir que “equis” más otra “equis” más uno es igual a “y” menos dos.
P:	¿Y el punto ese rojo? ¿Qué indica que hay que hacer según las instrucciones?
S05:	Pues un número más su...más el doble...es igual al triple.
S07:	Cuatro, por la mitad de un número es igual al doble de dicho número. Pero ahora tengo que hacer...[tiene ficha con punto rojo]
P:	Primero di qué significa esto de aquí.
S07:	Cuatro, por la mitad de un número es igual a su doble.
P:	Vale, ahora di un enunciado con contexto.
S07:	No sé...
P:	¿A nadie se le ocurre? No estáis atentos, ni a las fichas de los demás, ni a las explicaciones de los demás. Porque él ha dicho un enunciado mal y no habéis dicho nada. No se le ocurre un enunciado con contexto. Así que decidme alguno, si se os ocurre alguno.
S01:	Pues cuatro por...la...cuatro...
S12:	¿Lo puedo decir yo?
P:	Espera a ver si termina S01.
S01:	Es que no sé si lo voy a decir mal.
P:	Di algo, lo que se te ocurra...
S01:	Cuatro años por...No, no...
S12:	La mitad de mi edad por cuatro es igual al doble de mi edad.
P:	Venga, te toca poner.
S12:	No tengo, paso.
S01:	Yo también paso.
S05:	Paso.
S07:	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número. “equis” elevado a dos, “equis” partido dos, por tres “y”.
S12:	Sigo sin tener.
S01:	Igual que yo.
S05:	Pues el producto de la mitad de un número por el triple de otro número.
S12:	No.
P:	¿Por qué?
S12:	Porque además de que tiene que ser igual que ésta, no es el producto de un número sino la cuarta parte...cuatro por la mitad de un número...
S07:	Porque no es el triple de...
P:	Fíjate antes de colocar.
S05:	Paso.
S07:	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número. La raíz cuadrada de

Sujeto	Transcripción Grupo 1 – Lunes 11 de febrero de 2013
	“equis” elevada a “y”.
S12:	El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número elevado a once
P:	¿Y el otro?
S12:	¿Cómo te lo digo?
P:	Pues que lo leas simbólicamente.
S12:	Pues un número...elevado a dos...
P:	Pero ese número, ¿cómo se representa?
S12:	“equis”...menos otro número que es “y”, elevados a dos, es igual a once.
P:	Venga S01.
S01:	No tengo...
S05:	El cuadrado de un número más el cuadrado de otro número es igual a once.
S07:	Está mal.
S12:	Está mal.
P:	¿Por qué S07?
S07:	Porque no es menos el cuadrado otro número.
P:	¿Cómo es?
S07:	Pues que aquí no pone menos...
P:	¿Qué pone ahí? En la que él pretende juntar.
S07:	Pues pone la raíz cuadrada de un número elevada a dos...no pone menos otro número.
P:	Venga, quítala.
S07:	El cuadrado de un número...
P:	Vale, espérate... ¿Tú estás juntando ésta con ésta?
S07:	Sí.
P:	Vale, lee.
S07:	La raíz cuadrada de un número elevada a dos es igual a “equis”.
S12:	No puede ser porque habría que juntarla con letras.
P:	Exactamente, con un enunciado verbal, tengo que juntar un enunciado verbal con uno simbólico.
S12:	No tengo.
S01:	No tengo.
S05:	¿Cómo que no tenéis? Yo tampoco.
P:	A ver, qué queda ahí...
S12:	Ah ya... ¿puedo poner?
S05:	No, le toca a S07.
S07:	No, paso.
S12:	No, espera...A ver, la leo. El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número. Que sería, la raíz cuadrada de “equis”, elevada a dos, que es igual a “equis”.
S01:	Pues... la suma de dos números consecutivos menos cuatro. Un número más su consecutivo, menos cuatro.
P:	¿Quién es el número?
S01:	“equis”.
P:	¿Y su consecutivo?
S01:	“equis” más uno.
P:	Y ahora, ese punto rojo, ¿para qué es?
S01:	Mi edad más, otro año, menos cuatro.
S12:	Sería, mi edad más mi edad más un número...bueno, mi edad más la siguiente a mi edad, el número siguiente... Es que no sé cómo explicarme,

Sujeto Transcripción Grupo 1 – Lunes 11 de febrero de 2013

- pero sería por ejemplo, si yo tuviese catorce años pues el siguiente quince, menos cuatro.
- S07: Mi edad, dentro de un año será menos cuatro de...menos cuatro de mi hermano...cuatro años menos que mi hermano.
- P: Vale, piensa y dilo otra vez de nuevo, despacito y más tranquilo, que estás nervioso.
- S07: Mi edad, más la edad mía dentro de un año, será menos...
- P: Si lo estás diciendo bien, lo que pasa es que te pones nervioso. Venga, dilo...hasta ahí ibas bien... mi edad, más la edad mía dentro de un año...
- S07: ...menos cuatro años que tiene mi hermano.
- S05: Y paso.
- S07: Paso.
- S12: Paso, tiene que tenerla alguien.
- P: No, no la tiene nadie. Fijaros, ¿qué pone aquí?
- S12: El producto de la mitad de un número...
- S01: Ah, ¡la misma que está aquí!
- S05: Ya está cerrado.
- S12: ¿Y ahora quien gana?
- P: El que sume más puntos.

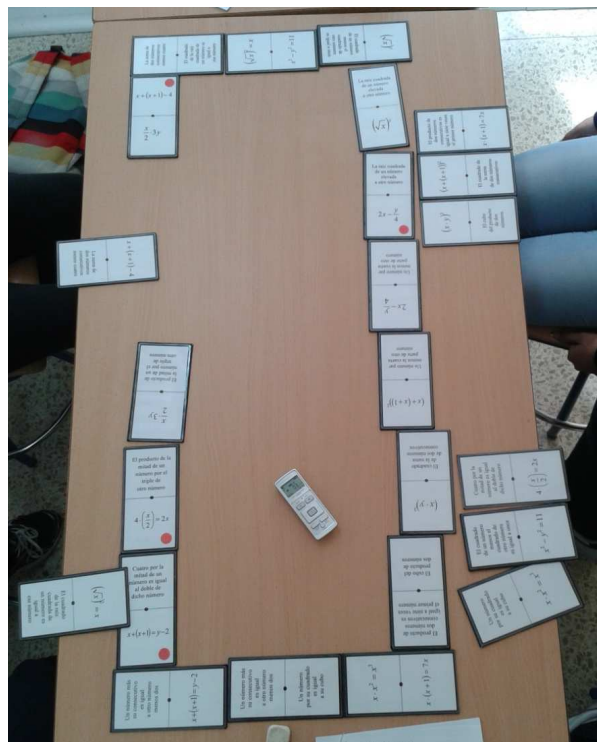


Figura A.1. Partida grupo 1

C.2. TRANSCRIPCIONES GRUPO 2

Grupo 2: S02, S06, S09, S14 Tiempo: 25min 19seg

Sujeto	Puntos	Total
S02	1,1,2,1,1,1,1,2	11
S06	1,1,1,1,1,1,1,1	9

Sujeto	Puntos	Total
S09	2,2,1,1,1,1,1,1,1,1	13
S14	1,1,1,1,1,1,1,1	8

Sujeto Transcripción Grupo 2 – Martes 12 de febrero de 2013

- P: Tenéis que coged las piezas. Tenéis que tener seis cada uno. Empieza S02.
- S02: ¿Cuál pongo?
- P: Tú tienes todas estas fichas, puedes poner en juego la que a ti te interese.
- S09: Y maestra, es que esto, pone aquí lo mismo...
- P: Claro, porque ésta es doble. Tiene que haber alguna que tenga ésta y otra que tenga la otra expresión.
- S02: Un número por un número elevado a dos...elevado al cuadrado es igual a un número elevado al cubo.
- S09: Creo que está mal...
- P: Pero si es la primera pieza, no puede estar mal.
- S09: ¿Cómo la primera?
- P: Es la primera pieza que está poniendo. Tú puedes decir que está mal cuando S06 ponga una...
- S09: Pero lo que ha dicho, es que como ha dicho un número por un número, yo creía que decía un número por sí mismo...No sé, por decir...
- P: Ah vale, ya te he entendido lo que quieres decir. S02, y en el otro lado de la ficha, ¿qué pone?
- S02: Un número por su siguiente sería igual a... siete...siete números.
- S09: Está mal...
- P: ¿Por qué?
- S09: Porque no sería siete números sino que es siete por ese número. ¡Eso es un punto para mí!
- S14: No tío...yo lo iba a decir...
- P: Tenéis que estar atentos y ser rápidos. Venga sigue S06.
- S06: Un número por su mitad es igual a...un número por otro número, bueno, a dos por un número.
- S14: ¡Está mal! Bueno, no sé.
- S09: Está mal porque esto no coincide.
- S06: Pero había que poner letras.
- S09: Pero tienen que coincidir, aquí tiene que poner lo mismo que aquí.
- S06: Pero la dejo o la quito.
- P: Quítala y busca otra.
- S02: No pongas por poner, je je.
- S09: Espera maestra, ¿esto sería así?
- S06: ¿Y si no me ha tocado a mí ninguna de esas?
- P: Pues pasas, puedes pasar.
- S09: Es que no tengo de esas...
- S14: Yo tampoco tengo más de esas...no lo sé, voy a mirar...
- S09: Tenemos que poner letras, ¿no?
- P: Claro, tienes que buscar el enunciado verbal que describa esto o que describa aquel.
- S14: ¿El cuadrado que es?
- P: Eso no te lo puedo contestar.
- S14: S02, dímelo.
- P: No, no puede.

Sujeto	Transcripción Grupo 2 – Martes 12 de febrero de 2013
S02:	Puedo enganchar...por aquí o por aquí, ¿no?
P:	Claro.
S14:	Creo que no tengo.
S02:	Un número por su cuadrado es igual a su cubo.
P:	Vale, pero no me lo digas señalando porque yo después voy a examinar lo que estoy grabando. Dime, un número, ¿quién es el número en esta?
S02:	“equis”.
P:	¿Quién es el cuadrado?
S02:	El cuadrado es “equis” elevado a dos, es igual a su cubo.
S09:	Maestra, ¿puedo enganchar por aquí? ¿O sólo por las esquinas?
S14:	El cuadrado es este y el cubo este...vale.
S06:	Paso.
P:	Míralas bien.
S06:	No, paso.
S14:	Su consecutivo es su siguiente...
P:	Venga, al que le toca...
S09:	Un número, que es “equis”, más su siguiente, más su consecutivo, que es “equis” más uno, es igual a otro número, que es “y”, menos dos.
S02:	¡Olé!
S09:	Illo, pero ¿ahí por qué pone lo mismo?
P:	Porque es doble.
S14:	¿Ahí qué cambia?
P:	Leed la expresión. Esta ficha es doble, esto es como si pusiese un <i>uno</i> con signos y un <i>uno</i> con letras.
S09:	Vale, por ejemplo aquí pone “equis” y aquí pone <i>un número</i> .
S14:	Entonces quien tenga ésta la puede poner aquí.
S09:	Claro.
S14:	La tengo...pero el rojo este ¿qué es?...ah ya... Cuatro por la mitad un número es igual al doble...
P:	No, lee lo que estás uniendo, estas uniendo esta parte con aquella parte.
S14:	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos.
S09:	Está mal. Porque tiene que decir un contexto.
P:	No, primero tiene que decir lo que está uniendo. ¿Por qué ésta va con ésta? ¿Quién es un número?
S14:	“equis”.
P:	¿Y quién es el consecutivo?
S14:	“equis” más uno.
P:	Sigue.
S14:	Es igual a otro número menos dos, “y” menos dos.
P:	Ahora, tiene el punto rojo, ¿qué hay que hacer?
S14:	Uf...
P:	Pensad los demás por si a alguno se os ocurre algo y a ella no.
S14:	No...
P:	Primero tienes el turno tú, que no se te ocurre nada, pues pasamos turno a alguno.
S09:	Yo yo yo!!
S14:	Pero, ¿esto lo tengo que decir en número?
P:	Tú tienes que decir un enunciado con contexto, como lo hemos estado viendo en clase, que corresponda con esa expresión.

Sujeto	Transcripción Grupo 2 – Martes 12 de febrero de 2013
S14:	A ver...un limón, más otro limón, ¿sería así?
P:	No sé, están tus compañeros para corregirte, yo solo estoy de observadora.
S14:	Un limón, más otro limón, es igual a cuatro limones menos dos limones.
S09:	Mal, mal, mal.
S02:	Yo!
S09:	Pues porque ha dicho, un limón, más otro limón...
S14:	Más su siguiente.
S09:	Pero has dicho igual a cuatro menos dos.
S02:	Sería un limón, más otro limón, está bien, pero ha puesto igual a cuatro limones menos dos, y eso estaría mal, y sería una naranja menos dos.
S06:	¿Me toca a mí ya?
P:	Si.
S14:	Maestra, ¿y a mí no me pones ningún punto?
P:	No has dicho bien el enunciado con contexto, te he puesto los de colocarla bien y explicarla.
S14:	Ah vale.
S06:	Cuatro, por la mitad de un número es igual al doble de dicho número.
P:	Vale, me has leído ésa, dime qué corresponde de ésta con aquella.
S06:	Pues cuatro, por la mitad...
P:	Te repito que yo no voy a mirar luego tu dedo.
S14:	Sería “equis” partido dos...
P:	Que lo diga él...
S06:	Vale...Cuatro por, “equis” partido dos, que es igual a dos “equis”, al doble de “equis”.
P:	Vale, tiene punto rojo.
S06:	Cuatro limones...
P:	Otra vez con los limones...
S06:	Pues cuatro coches, por la mitad de...de dos coches, es igual al doble de dichos coches.
S14:	Espérate, dílo de nuevo.
S06:	Cuatro coches por la mitad de varios coches, es igual al doble de dicho...de dichos coches...
S14:	Mal...porque ¿Cómo va a ser la mitad de dos coches? Uf, yo que sé...
P:	Yo que sé, no...piensa.
S09:	Yo creo que está mal porque ha dicho cuatro coches, eso está bien, ha dicho partido varios coches y tiene que ser...es uno nada más, porque no está tres “equis” ni nada de eso.
S02:	Sería cuatro coches por ...
S14:	Por dos coches...
S02:	Por un coche partido dos sería igual a dos...dos...sería igual a dos...
S09:	Te has liado.
S02:	Dos por...
S06:	¿Me puedo autocorregir yo?
P:	Claro.
S06:	Cuatro coches por...espérate...cuatro coches por la mitad de coches, bueno, de un coche, bueno por la mitad de dos coches, es igual al doble de dichos coches.
S14:	Yo lo quiero decir... Cuatro coches por...
P:	Pensad en lo que estáis diciendo, porque estáis repitiendo todos lo mismo.

Sujeto Transcripción Grupo 2 – Martes 12 de febrero de 2013

Pensad si lo que estáis diciendo vosotros lo escribiríais así [*señalándoles la expresión simbólica*].

- S14: Cuatro coches por cuatro entre dos coches...no, ¿verdad?
- S06: Cuatro limones por su mitad...cuatro bizcochos por la mitad es igual al doble de los dos bizcochos.
- S09: Yo ya lo sé, ya lo sé.
- P: Iba a hablar antes S14.
- S14: No, ya no.
- S09: Son, cuatro lo que sea...cuatro coches, por...un número, por ejemplo, cuatro coches por...una silla...cuatro coches por la mitad de una silla es igual al doble de dicha silla.
- P: Última oportunidad.
- S02: Sería un coche por...cuatro coches, por la mitad de un coche sería igual al doble de...de cuatro coches...
- P: Venga, pon otra ficha.
- S09: Sería el producto de la mitad...
- S02: ¿No me tocaría a mí maestra?
- P: No, ha puesto S06, y le toca a S09.
- S09: Yo es que no tengo nada...Bueno, va...puedo enganchar aquí, ¿no?
- P: Sí.
- S09: ¿Para abajo?
- P: Da igual.
- S02: Esto está guapo jugar a esto...
- S09: El producto de la mitad...
- S06: Si no tienes pasa...
- S09: Nada, paso.
- S14: Yo. El producto...
- P: ¿Os acordáis de qué es el producto? Lo vimos el otro día.
- S14: Sí...”equis”...
- P: No, el producto es multiplicar. Ahí por ejemplo pone el producto de cuatro por “equis” medios...
- S14: Sería “equis” por...
- S09: Vale...yo yo... ¡pasa si no tienes!
- S02: Sería, el producto de la mitad de un número por el triple de otro número.
- P: Vale, pero en aquella expresión simbólica dime quien es un número quien es otro número...
- S02: Ah vale. Esto es...
- S09: No señales porque no lo va a ver luego.
- S02: Sería, un número...es que, ¿cómo te lo digo sin señalar?
- P: ¿Quién es el número ahí?
- S02: Aquí el número es “equis”. Pues sería un número partido dos por el triple de otro número, “y”.
- S06: Pero si tenía aquí uno...venga paso.
- P: No, S06, piensa...
- S06: Es que me están presionando.
- S14: ¿Y si la pongo mal?
- P: Pues ponla y si algún compañero se da cuenta y te lo dice...pues ya está.
- S09: Pues punto para mí.
- S06: Paso.

Sujeto	Transcripción Grupo 2 – Martes 12 de febrero de 2013
S09:	Yo...pues el producto de la mitad, que es la multiplicación de “equis” partido dos...espera illo que no lo veo, el producto de la mitad de un número que es “equis” por la mitad por el triple de otro número, que es tres i.
P:	¿Qué le pasa a esa ficha?
S09:	Que es roja, ya lo sé...ya voy... Sería, la mitad de de...
P:	No, el punto rojo está en la otra expresión.
S09:	Ah! ¿De la otra?
P:	Claro, donde está el punto.
S09:	Pues un número, espérate, una pelota de futbol no...una pelota de futbol no...bueno sí, una pelota de futbol más otra pelota de futbol menos cuatro pelotas de baloncesto...está mal...es que ¿cómo decimos esto?
P:	Yo no puedo decirte nada.
S09:	Es que, ¿cómo decimos la siguiente de una pelota de futbol?
P:	No, sí sabes...venga.
S09:	Una pelota de futbol más dos pelotas de futbol menos...yo que sé maestra...
P:	Venga sí sabes....
S14:	Dos pelotas de futbol más otra pelota de futbol menos cuatro...pelotas de futbol.
S02:	Sería una pelota de futbol más...una pelota de futbol más una...más otra más... sería igual a menos cuatro pelotas de futbol.
S06:	Una pelota de futbol más...como es su siguiente sería, dos pelotas de futbol, menos cuatro pelotas de futbol.
S09:	Yo ya sé, ya sé...sería una pelota de futbol más otra pelota de futbol más una pelota de baloncesto menos cuatro pelotas de beisbol... Ah, di como sería maestra...
S14:	¿Puedo intentar dos?
P:	No, una aquí o una allí.
S14:	El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número.
P:	¿Quién es aquí un número?
S14:	“equis”.
P:	Y el consecutivo, ¿quién sería?
S14:	“equis” más uno.
P:	¿Igual a?
S14:	A siete veces el primer número.
P:	¿Es lo que pone ahí?
S14:	Sí.
S02:	¿Dónde puedo enganchar?
P:	O aquí o allí.
S02:	No tengo, paso
S06:	La suma de dos números consecutivos que sería “equis” más “equis” más uno, menos cuatro.
S14:	Mira, ¿ves? Esa la tengo yo y la iba a poner...
S09:	Otra vez...El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primero. El producto que es “equis” más...de dos números consecutivos, o sea, el producto, que es la multiplicación, de dos números consecutivos que son “equis” y “equis” más uno que es su siguiente, es igual a siete veces “equis”, ese número.
S14:	¡Me toca!

Sujeto Transcripción Grupo 2 – Martes 12 de febrero de 2013

- P: Lee.
- S14: Es lo mismo.
- P: Da igual, lee.
- S14: La suma de dos números consecutivos menos cuatro. La suma “equis” más...dos números consecutivos “equis” más uno, menos cuatro.
- S02: ¿Puedo enganchar aquí?
- S09: Claro, es que es aquí.
- S02: El cuadrado de la raíz de un número, esto es la raíz de un número que es “equis” y este es su cuadrado, es igual a ese número.
- S06: Paso. Si es que no tengo nada...me han tocado las peores...
- S09: El producto...el cubo...el cubo del producto de dos números.
- S14: No...
- S09: Espérate, que me he equivocado de carta. El cubo del producto de dos números. Pues es...los dos números...el producto de dos números, la multiplicación de dos números, que es “equis” por “y”, y el cubo que es elevado a tres.
- S14: Me toca... El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número. Raíz cuadrada de un número...el cuadrado de la raíz cuadrada...maestra es que no se explicarlo.
- P: Sí sabes, venga...
- S14: El cuadrado, eso, el dos, de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número.
- S02: ¿Yo puedo enganchar aquí?
- P: No, o aquí o aquí.
- S02: Paso.
- S06: El cuadrado de la suma de un número, bueno, son dos números consecutivos.
- P: ¿Quiénes son los números consecutivos?
- S06: Pues “equis” y “equis” más uno. Y es su cuadrado, el dos...
- S09: Eh, aquí habéis cambiado algo.
- P: Claro, ha puesto él.
- S09: No no...espérate...ah vale, ya... El cuadrado de un número, que es “equis” elevado a dos, menos el cuadrado de otro número que es “y” elevado a dos, es igual a once. Eh! Eso suma que está bien puesto más lo que he dicho.
- P: Ya ya...
- S14: Paso.
- P: Venga, S02, aquí, que dice el cuadrado de la suma de dos números consecutivos o en aquel sitio.
- S02: Paso.
- S06: Yo. Dos números consecutivos, “equis” más “equis” más uno, y el cuadrado dos, que está encima.
- S09: Dilo otra vez.
- S06: Es lo mismo que antes. Mira, un número consecutivo, más otro número consecutivo...a ver, un número par menos la cuarta parte...
- S09: ¡Que esa no es! Que es ésa...
- S06: La suma de “equis” más “equis” más uno, que son los dos números consecutivos, y éste es el cuadrado.
- S09: Paso.
- S14: Paso, yo no tengo nada...

Sujeto	Transcripción Grupo 2 – Martes 12 de febrero de 2013
S02:	Un número par, dos, menos la cuarta parte de otro número.
P:	¿Quién es el número par ahí?
S02:	Dos.
S09:	Es que tienes que explicarlo. Decir qué es esto...
S02:	Es verdad, dos manzanas menos cuatro peras...No, dos manzanas menos la cuarta parte de una pera.
S09:	Eso está bien, vamos, yo creo, vamos para mí...
S06:	Me toca, ¿no? Por fin... La raíz cuadrada, aquí, de un número, que sería "equis", elevada a otro número que sería
S14:	Jo, yo no tengo eso...paso.
S09:	No, es que...
S14:	¿Tú tenías eso?
P:	Vale, fijaros, nadie puede poner ya...
S09:	Jo, ya ha terminado la partida...

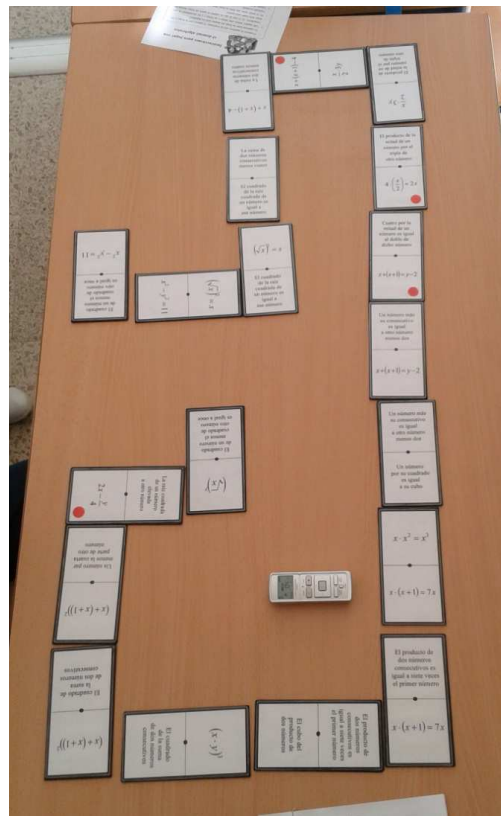


Figura A.2. Partida grupo 2.

C.3. TRANSCRIPCIONES GRUPO 3

Grupo 3: S03, S10, S11, S15. Tiempo: 18min 45seg

Sujeto	Puntos	Total
S03	1,1,1,1,1,1	6
S10	1,1,2,2,2,2,1,1,1,1,2	17
S11	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	12
S15	1,1,1,1,1,1,1	8

Sujeto	Transcripción Grupo 3 – Miércoles 13 de febrero de 2013
P:	Empieza S03.
S03:	Yo no sé.
P:	Como eres la primera, puedes poner la que quieras.
S03:	Maestra, tengo una con punto rojo.
P:	Claro, tenéis una cada con punto rojo. Venga, léela.
S03:	Un número par menos la cuarta parte de otro número.
P:	Y en la otra, ¿qué pone?
S03:	Un número más...
P:	Tú sigue.
S03:	Un número más un número más uno elevado a dos.
S10:	Un número par menos la cuarta parte de otro número.
P:	Eso es esto, pero simbólicamente, ¿qué es?
S10:	Un número par, dos “equis”, menos la cuarta parte de otro, menos “equis” partido cuatro.
P:	Ahí no pone eso.
S10:	“y”.
P:	Léelo otra vez.
S10:	Un número par, menos otro número, menos la cuarta parte de otro número.
S11:	Un número par, menos la cuarta parte de otro número. ¿Dónde pongo?
P:	Puedes poner un enunciado simbólico que corresponda con este verbal, o aquí el verbal que corresponda con el simbólico.
S11:	Yo no sé cuál es...
S15:	¿Y si no tenemos ninguno de los que ponen ahí, qué pasa?
S11:	Pues pasas. Yo paso.
S15:	Yo también paso.
S03:	Paso.
S10:	Paso.
S11:	Aquí.
P:	Léela.
S11:	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos. El número más su consecutivo elevado al cuadrado.
P:	Vale, ten en cuenta que yo luego voy a oír, no me señales. ¿Quién es el número?
S11:	¿El número? “equis”.
P:	Sigue, ¿y el otro número quién es?
S11:	Pues su consecutivos, “equis” más uno...elevado a dos.
S15:	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos. ¿Leo lo de arriba?
P:	Claro.
S11:	Pero éste va con éste.
S15:	¿Tengo que poner otra ficha ahí?
P:	No, a ver, tú has puesto una pieza, ¿qué pieza has puesto?
S15:	Ésta.
P:	¿Esto conecta con esto? Dime S10.
S10:	No, porque pone cuadrado y es...
S15:	Es verdad no...Paso.
S03:	¿Puedo poner ahí? Pues yo creo que es esta, ¿no?
P:	No sé, yo no puedo decir nada.
S10:	Mal, pone menos y aquí es por.
P:	Venga, ¿qué pone ahí y que pone allí?

Sujeto	Transcripción Grupo 3 – Miércoles 13 de febrero de 2013
S10:	Aquí pone la mitad de un número por tres por un número, por otro número. Y allí pone un número par menos la cuarta parte de otro.
S03:	Es que no pone por.
P:	Si no pone la palabra por pondrá el producto.
S03:	Yo creo que es esto...
P:	Venga, léele esto y léeme eso.
S03:	El cubo del producto de dos números.
P:	Y aquí que pone.
S03:	Pues eso.
P:	No, eso no, léelo.
S03:	El cubo del producto de dos números...maestra, un número por otro número...
S11:	El producto significa la multiplicación, y aquí hay dos números multiplicados y elevados a tres.
S10:	¿Qué pasaba con el punto rojo?
P:	Que tenéis que inventaros un enunciado contextualizado.
S11:	A ver...paso...no ésta. La raíz cuadrada de un número elevada a otro número.
P:	No, lee las dos piezas que estas uniendo.
S11:	Ah! Un número par menos la cuarta parte de otro número. Dos "equis" sería el número par menos la cuarta parte de un número sería "y", no, sería la cuarta parte de "y".
S15:	¿Lo leo?
P:	Sí.
S15:	El cuadrado de la raíz de un número es igual...
S11:	¿Pero no era las que estamos uniendo?
S15:	Ah vale. La raíz cuadrada de un número, no el cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese mismo número.
S10:	La raíz cuadrada de un número, eso está bien, pero pone elevada a otro número, y eso está elevado a dos.
S15:	Paso.
S03:	Pues maestra, yo tengo una pieza igual que la que ha puesto S15.
P:	Claro, si hay piezas dobles.
S10:	Maestra, estos dos son los mismos, pero ¿aquí hay que poner éste?
P:	Hay que poner esto, ésta verbalmente.
S10:	Pero tiene que ser igual que esa, ¿no?
S03:	Paso.
S10:	Paso.
S11:	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número. La raíz cuadrada de ahí sería "equis", y elevado a "y".
S15:	No tengo la misma que él... ¿Leo esto de abajo?
P:	No, tú tienes que leer, la que ya está puesta y la que tú estás enganando.
S15:	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número. ¿Lo de abajo leo ahora?
P:	No, me acaba de leer el enunciado verbal. Léeme el simbólico que tú has puesto con ese verbal.
S15:	La raíz cuadrada de "equis" elevada a "y".
S03:	El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número igual a once.
P:	¿Y ahí que pone?

Sujeto	Transcripción Grupo 3 – Miércoles 13 de febrero de 2013
S03:	¿Está mal?
P:	No sé, léelo.
S03:	Ah, sí está bien, me he confundido porque me he creído que era la raíz cuadrada.
P:	Venga lee.
S03:	El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número.
P:	Pero me estás leyendo lo mismo que pone ahí, léeme el simbólico. ¿Ahí que pone? ¿El cuadrado de quién?
S03:	De “equis”.
P:	Sigue.
S03:	Menos “y” elevado al cubo...
P:	Pero sigue... que no te dé miedo.
S03:	Igual a once...
P:	Habla... di las cosas, sin miedo.
S03:	Es que me he confundido porque creía que era la raíz cuadrada.
P:	Pero tienes que decirlo, si está mal pues que te lo digan tus compañeros.
S10:	Paso.
S11:	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número. Aquí hay la raíz cuadrada de “equis” elevada al cubo sería igual a ese “equis”.
S15:	Paso.
P:	¿Pasas?
S15:	Sí.
P:	No estáis atentos a las fichas y a lo que están diciendo los demás, él se ha equivocado y ha dicho cubo en vez de cuadrado...
S11:	La próxima vez digo elevado a dos, je je...
S03:	La suma de dos números consecutivos menos cuatro. Pues “equis” más “equis” más uno menos cuatro, o sea, un número, más otro número más uno, menos cuatro.
P:	Vale una pregunta, el punto rojo, ¿qué pasa?
S03:	¿Qué pasa?
P:	¿Qué había que hacer con el punto rojo?
S15:	Que tiene que inventar enunciado.
P:	¿Quién ha puesto esa ficha de punto rojo antes?
S15:	S11.
S11:	Se me ha olvidado.
P:	Has perdido la oportunidad.
S03:	¿Qué había que hacer?
P:	Inventarse un enunciado.
S03:	¿Con esto?
P:	Si no sabes, tus compañeros tus compañeros tienen la opción de poder inventárselo.
S03:	El enunciado de esto.
S15:	No, de éste.
S11:	Pues con esa cuenta...
S03:	¿Cómo que me lo invente?
P:	Pues inventándolo.
S03:	No sé...
S15:	La edad de Juan más la edad del abuelo más uno menos cuatro.
S10:	El hermano de Juan tiene un año más que él. La edad de Juan más la de su

Sujeto	Transcripción Grupo 3 – Miércoles 13 de febrero de 2013
	hermano menos cuatro es igual a la edad de su abuelo.
S11:	Y el abuelo tiene menos años...
S10:	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número. El producto es multiplicar y el doble de un número, “equis” partido dos es el doble, por el triple de otro número, que es tres por “equis”.
S11:	El cubo del producto de dos números. “equis” que es un número por “y” que es otro número, elevado al cubo.
S15:	Paso.
S03:	A ver...el producto de dos números consecutivos...No tengo. Ah, no, espera...Paso.
S10:	Paso.
P:	Venga, el siguiente.
S03:	Sí, ya, la tenía yo...Maestra mira...
P:	Ya no, ahora que se la has visto a él no vale.
S11:	“equis” sería un número, que multiplica a...No, “equis” por su consecutivo es igual a siete veces “equis”. Terminé.
P:	Pero tienes que quedarte atento a tus compañeros por si se equivoca alguno
S15:	¿Este rojo es que yo lo puedo poner donde quiera?
P:	No, no es que el rojo lo puedas poner donde tú quiera. Si el enunciado simbólico coincide con el verbal, entonces sí lo puede poner, otra cosa es que tenga un punto rojo, eso simplemente darle contexto.
S15:	Entonces éste no lo puedo poner aquí, ¿no?
P:	No, porque sería unir simbólico con simbólico.
S15:	Ya está, éste, éste...
S11:	Venga, equivócate...je je...
P:	Venga, léelo.
S15:	“equis” por “equis” elevado a dos igual a “equis” cubo.
P:	¿Y aquí?
S15:	Un número por su cuadrado es igual a su cubo.
S03:	No tengo.
S10:	Un número por su cuadrado es igual a su cubo. “equis”, que es un número, por su cuadrado, “equis” elevado a dos, es igual a su cubo, “equis” elevado a tres.
S15:	No, paso.
S03:	No tengo...a ver...
S15:	Maestra, yo tengo dos piezas iguales.
P:	¿Cuáles iguales? Serán dobles.
S03:	No, no tengo, paso.
S10:	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos. La edad de Pedro...a ver, Pedro tiene “equis” años, y su hermano tiene uno más que él, la edad de Pedro más la de su hermano es igual a la edad de su abuelo menos dos.
S15:	A ver...cuatro por la mitad de un número es igual a la mitad al doble de dicho número...la mitad... Cuatro por un número partido dos sería igual al doble de dicho número.
S03:	Paso.
S10:	Paso.
S11:	Por aquí se puede seguir...Y aquí también...
S15:	Ya está, ya está.

C.4. TRANSCRIPCIONES GRUPO 4

Grupo 4: S04, S08, S13, S16. Tiempo: 11min 30seg

Sujeto	Puntos	Total
S04	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	13
S08	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	12
S13	Falta por enfermedad	F
S16	2,1,1,1,1,2,1,1,1,1,1,2,1,1,1,1	20

Sujeto	Transcripción Grupo 4 – Jueves 14 de febrero de 2013
P:	Empieza S04.
S04:	¿Yo?
P:	Léelas.
S04:	Ah...un número par menos la cuarta parte de otro número.
P:	¿Y allí que tienes?
S04:	“equis”, dos “equis”, menos “y” partido cuatro.
S16:	Jo, que lio...
P:	Ah, se me ha olvidado decir, ahora sí hay fichas dobles. ¿Os acordáis de cómo eran, no? Por ejemplo que aquí ponga un uno y en otra un punto o un símbolo...
S08:	Ésta...
P:	Léela.
S08:	Un número par menos la cuarta parte de otro número. “equis” partido dos por tres...
S16:	¿Está bien?
P:	No sé, vosotros sabréis. Yo solamente observo.
S04:	No está bien.
S16:	No...
P:	¿Por qué?
S16:	Porque sería dos por “equis” menos un número partido cuatro.
P:	Pon otra, ésa estaba mal.
S04:	No tengo.
P:	Si no tenéis podéis pasar.
S08:	Un número par menos la cuarta parte de otro número. Dos “equis” menos “y” partido cuatro.
P:	Pero tenemos un punto rojo, ¿qué hay que hacer?
S16:	¿Qué había que hacer?
P:	¿Qué había que hacer con el punto rojo?
S04:	Que ahora tiene que decir por ejemplo, si te hubiese salido una “equis” pues decir un tomate...
P:	Es decir, un enunciado con contexto.
S08:	No se...
P:	Si no se te ocurre a ti puedes pasar y que algún compañero diga alguno.
S08:	Paso.
P:	¿Sí, directamente? Piensa primero.
S08:	No sé.
S16:	La cuarta parte de una tarta, menos su doble, menos el doble de esa tarta.
P:	Lee ésta y lee esa.
S16:	La raíz...está mal...la raíz cuadrada de un número elevada a otro número,

Sujeto	Transcripción Grupo 4 – Jueves 14 de febrero de 2013
	¿está mal, verdad?
P:	No sé, tú sabrás.
S16:	Es que no tengo otra.
P:	Pues si crees que no está bien no la pongas.
S16:	Pero corregidme...Paso.
S04:	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número.
P:	¿Y aquí?
S04:	La raíz cuadrada de “equis” elevada a “y”.
S08:	Paso.
S16:	El cubo del producto de dos números. Dos números...un número por otro número elevado al cubo.
S04:	Paso.
S08:	El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número. “equis” por “equis” más uno igual a siete “equis”.
S16:	El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once. Un número elevado al cuadrado menos otro número elevado al cuadrado, igual a once.
P:	¿Quién es ese número y quien es el otro número? ¿Cómo se llaman allí?
S16:	Ah, la “equis” y la “y”.
S04:	El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número. “equis” por “equis” más uno es igual a siete “equis”.
S08:	Un número por su cuadrado es igual a su cubo. “equis” por “equis” elevado a dos es igual a “equis” elevado a tres.
S16:	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos. La “equis” más su consecutivo, más “equis” más uno, es su consecutivo es igual a un número menos dos.
S04:	Paso.
S08:	Ésta mal.
S16:	Está mal.
S08:	Espera. Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos. “equis” más “equis” más uno menos cuatro.
S16:	Está mal.
P:	¿Por qué?
S16:	Porque aquí pone que es igual a un número menos dos, y aquí pone menos cuatro y no pone ni igual ni nada. ¿Pongo yo?
P:	Si él no tiene sí.
S16:	Un número más su consecutivo es igual otro número menos dos. “equis” más “equis” más uno menos dos.
P:	Punto rojo.
S16:	Un tomate más otro tomate igual a...un tomate menos dos...menos dos tomates.
S08:	No.
P:	¿Por qué?
S08:	No sé.
P:	Por algo habrás dicho que no.
S08:	Sé que no, pero no sé decirlo.
S04:	Yo creo que no está bien, el problema digo.
S16:	Un tomate más un tomate, igual a...que no, no sé.
S04:	Sería, un tomate más un tomate más otro tomate igual a un tomate menos

Sujeto	Transcripción Grupo 4 – Jueves 14 de febrero de 2013
	dos, ¿no?
P:	Yo no puedo deciros si está bien o mal, tenéis que autocorregiros.
S04:	Yo creo que es eso. Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número.
P:	Lee aquí lo que has puesto.
S04:	Cuatro por “equis” partido dos es igual a dos “equis”.
S08:	Paso.
S16:	El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once. Un número, “equis”, elevado a dos, menos otro número elevado a dos es igual a once.
S04:	Yo, leo primero esto...El cuadrado de la raíz cuadrada de “equis” elevada a dos es igual a “equis”. El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número.
S08:	Paso.
S16:	Yo no tengo.
S04:	Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número. Cuatro por “equis” partido dos, es igual a dos “equis”. Cuatro patatas por una patata partida por la mitad es igual a dos patatas.
S08:	El producto de dos números...por el triple de otro numero... “equis” partido dos por tres “y”.
P:	Tiene un punto rojo. Aunque no sea en la expresión que tú has unido, ésta de aquí que es de tu ficha tiene un punto rojo en esta expresión.
S08:	Un melón más un melón más un melón menos cuatro melones.
S16:	Me toca, pero aquí no se puede poner, ¿verdad?
P:	No.
S16:	Paso.
S04:	“equis” más “equis” más uno menos cuatro. La suma de dos número consecutivos menos cuatro.
S08:	Paso.
S16:	No tengo.
S04:	Paso.
S16:	No puede ser...
P:	Fijaos, sí puede ser...ésta expresión es igual que ésta. Ya está cerrado.
S04:	Vaya...

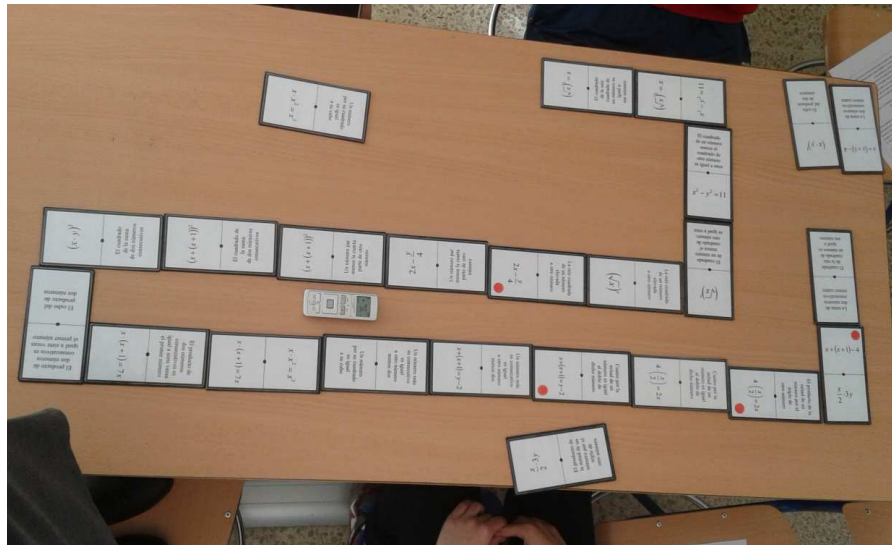


Figura A. 4. Partida grupo 4.

C.5. TRANSCRIPCIONES PARTIDAS FINALES

Partida Final: S09, S10, S12, S16. Tiempo: 11min 30seg

Sujeto	Puntos partida uno	Puntos partida dos	Total
S09	1,1,1,1,1,1,2	1,1,1,1,1,1,1,2,1,1	21
S10	1,1,2,1,1,1,1,2,1,1,1,1	2,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1,1	29
S12	1,1,2,1,1,1,1,1,1	1,1,2,2,1,1,1,1,1,1,1	24
S16	1,1,1,1,1,1,1,1	1,1,1,1,1,1,1,1,1	19

Sujeto	Transcripción Final – Partida Uno – Lunes 25 de febrero de 2013
S16:	Puedo poner la que quiera para empezar, ¿verdad?
P:	Sí. Léela.
S16:	¿Pero cuál?
S12:	Las dos.
S16:	La suma de dos números consecutivos menos cuatro. “equis” más “equis” más uno menos cuatro.
S10:	Paso...no, sí tengo... La suma de dos números consecutivos menos cuatro. Dos números consecutivos menos cuatro.
S12:	Hablas muy flojo.
P:	Yo así no me entero. Lee eso de nuevo.
S10:	Dos números consecutivos, pues “equis” y “equis” más uno, menos cuatro.
S12:	¿Y esa?
S10:	Esa pues, la suma de dos números consecutivos menos cuatro.
S09:	No tengo, paso.
S12:	No tengo
S16:	La suma de dos números consecutivos menos cuatro. Un tomate más otro tomate menos cuatro.
S12:	No.
P:	¿Por qué?
S12:	Porque sería un tomate más un... ah!
S16:	Ah, un tomate más ese tomate más uno menos cuatro.
S12:	Ya sé, por ejemplo, mi edad más...mi edad... la edad de mi hermana es el siguiente de mi edad menos cuatro.

Sujeto	Transcripción Final – Partida Uno – Lunes 25 de febrero de 2013
S16:	Pero lo mío estaba bien, ¿no?
S12:	Es que yo con un tomate, no me entra en la cabeza.
S16:	A ver, yo me estoy liando aquí...
S10:	Elena Izquierda tiene un año... A ver, Elena Derecha tiene un año más que Elena Izquierda (no sé si realmente es un año). Y la edad de Elena Izquierda más Elena Derecha es...menos cuatro, es igual a...
S12:	Igual no, porque no hay ningún igual.
S16:	Pero el mío estaba bien.
S12:	Bueno, vamos a pasar, que ya me he liado un montón.
P:	No, S09 no, porque esa ficha era de S16. Pero espera, te ha faltado leerme el simbólico.
S16:	“equis” más “equis” más uno menos cuatro.
S10:	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a otro número...a ese número. Pues la raíz cuadrada de ese número, que es al cuadrado, es igual a ese número, que es ese número.
P:	¿Cómo está representado “ese número”?
S10:	Por una letra...”equis”.
S09:	Paso.
S10:	Paso.
S09:	Es que no tengo nada...
S12:	Ni yo, las tienen todas ellas. ¡Ya llegaremos nosotros!
S16:	Yo no tengo...¡jo las tiene todas S10.
S09:	¡Pero si es la misma!
S10:	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número. Pues la raíz cuadrada de ese número, que ese número está representado con una letra, elevada al cuadrado, es igual a ese número, que es una letra.
S12:	Creo que seguimos sin tener los dos.
P:	Pero, ¿estáis mirando los dos extremos?
S12:	Si.
S09:	Paso.
S16:	S12, ¿tienes?
S12:	No ¡Está amañao! Paso.
S16:	El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once.
P:	Vale, pero ¿quién es un número y quién es otro número?
S16:	La “equis” elevada a dos, menos la “y” elevada a dos elevada a once.
S10:	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número. La raíz cuadrada de un número que es un número representado por una letra, elevado a otro número que está representado por otra letra diferente a la anterior letra.
P:	Esta ficha tiene punto rojo.
S10:	Si multiplicamos dos por la edad de Juan menos la edad de Nicolás entre cuatro.
S09:	No sé si estará bien. Un número par que es “equis”, menos la cuarta parte de otro número, que el otro número es “y” y está partido cuatro.
S12:	Sigo sin tener.
S16:	Paso.
S10:	Yo no tengo.
S09:	Pues yo sí. El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, pues tengo dos consecutivos que es “equis” más “equis” más uno, elevados al cuadrado.
S12:	Tío, ¡está amañao!

Sujeto	Transcripción Final – Partida Uno – Lunes 25 de febrero de 2013
S16:	No puede ser...
S09:	¡Yo tengo otro! ¡Dejadme a mí que tengo por una vez!
S12:	¡Ah! Sí tengo...El producto de la mitad de un número por el triple de otro número.
S09:	Podías haber puesto esa hace tres días.
S12:	“equis” partido dos por tres “y”. Ahora ésta (la del punto rojo), cuatro por la mitad de mi edad es igual al doble de mi edad. Yo siempre me entero mejor con la edad.
S10:	Yo también haciendo problemas de edad.
S16:	Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de...espérate... ¡ah sí! Cuatro por la mitad de un número es igual a su doble.
P:	Vale, lo que acabas de decir es el mismo que enunciado verbal, léeme el simbólico.
S16:	Cuatro por “equis” partido dos es igual a dos “equis”.
S10:	El cubo del producto de dos números. Dos números, “equis” e “y”, al cubo.
S09:	El producto es multiplicar, ¿verdad? ¿Leo esto?
P:	No, los dos enunciados que estás uniendo.
S09:	El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número. Pues un número que es “equis”, el producto que es multiplicar por su consecutivo, que es “equis” más uno, es igual a siete por “equis”.
S12:	No, espera, sí. El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número. “equis” por “equis” más uno igual a siete “equis”.
S16:	No tengo.
S10:	Yo tampoco. S12 como antes no tenía ninguna ahora las tiene todas.
S09:	Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número. Cuatro por “equis” partido dos que es la mitad de un número, es igual al doble de dicho número que es dos por “equis”. Y ahora, lo de abajo con punto rojo... Mi edad más mi edad más uno es igual a la edad de Elena menos dos.
S12:	Un número por su cuadrado es igual a su cubo. “equis” por “equis” elevado a dos es igual a “equis” elevado a tres.
S16:	No tengo.
S10:	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos. Pues ese número más su consecutivo es igual a otro menos dos.
S12:	Ha dicho lo mismo.
S10:	“equis” es ese número, su consecutivo es “equis” más uno, otro número es i, menos dos.
S09:	No tengo.
S12:	El cuadrado...no, un número por su cuadrado es igual a su cubo.
S09:	¿Otra vez?
S12:	Es que tenía las dos.
P:	Pero lee el simbólico.
S12:	Ah, es verdad. “equis” por “equis” elevado a dos es igual a “equis” elevado a tres.
S16:	No tengo.
S09:	Tienes que tener.
S12:	Que no tengo, en serio.
P:	Esperad, observar las fichas, ya no podéis poner más.
S16:	Vaya...
P:	¿Jugáis otra ronda?

Sujeto Transcripción Final – Partida Dos – Lunes 25 de febrero de 2013

- menos cuatro. Pues la suma de dos números, “equis” más su consecutivo que es “equis” más uno, menos cuatro. ¡Ya sólo me quedan tres!
- S12: La suma de dos números consecutivos menos cuatro. “equis” más “equis” más uno menos cuatro. Mi edad más mi edad más uno menos cuatro, o el siguiente de mi edad menos cuatro.
- S16: El producto de la mitad de un número por el triple de otro número.
- S09: Pero no ha dicho S12 lo del punto rojo.
- S12: Sí lo he dicho.
- S09: Ah, no me he dado cuenta.
- S16: Pues “equis” partido dos por el triple de otro. ¿Digo éste también?
- S09: Claro.
- S16: Cuatro tomates, por la mitad de dos es igual a su doble, al doble de los tomates.
- S09: Yo lo puedo decir mejor. Es que no me he enterado de lo que ha dicho, directamente.
- S12: ¡Yo, yo! Cuatro por la mitad de mi edad es igual al doble de mi edad.
- S09: Eso es lo que iba a decir yo.
- S16: Yo es que con edad no sé.
- S09: Pues es más fácil.
- S10: Antes ha dicho, la mitad de dos tomates, y sería la mitad de ese tomate. Yo no tengo para poner, no puedo.
- S09: Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número. Pues cuatro, por la mitad de un número, “equis” partido dos, igual al doble de “equis”, que es ese número. Y el punto rojo es... Mi edad, más mi edad más uno es igual a la edad de Elena menos dos.
- S12: Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos. “equis” más “equis” más uno igual a “y” menos dos.
- S16: No.
- S09: Alguien tiene que tener, porque yo no puedo.
- S10: Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos. Un número, “equis”, más su consecutivo, “equis” más uno, igual a “y” menos dos.
- S09: Un número... ¿cómo va a ser por su cuadrado?...no tengo...
- S12: Un número por su cuadrado es igual a su cubo. “equis”, por “equis” elevado a dos, igual a “equis” elevado a tres.
- S16: Pues no tengo.
- S10: Yo tampoco.
- S09: ¿Tú tienes S12?
- S12: ¡Sí! Un número por su cuadrado es igual a su número, digo a su cubo. “equis” por “equis” elevado a dos igual a “equis” elevado a tres.
- S16: El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número. “equis” más su siguiente, “equis” más uno, igual a siete “equis”.
- S10: El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número. Pues el producto de dos números...
- S12: Te lías tu sola... Sólo tienes que leer eso.
- S10: Ya, “equis” por “equis” más uno, igual a siete “equis”.
- S09: El cubo del producto de dos números. Pues el cubo es elevado a tres, del producto de dos números, es “equis” por i.
- S12: Paso.

Sujeto	Transcripción Final – Partida Dos – Lunes 25 de febrero de 2013
S16:	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos. “equis” más su siguiente, “equis” más uno, elevado a dos.
S10:	Un número...uy, me he equivocado. El cuadrado de la suma de dos números consecutivos. Pues “equis” más su siguiente, “equis” más uno, elevado al cuadrado.
S09:	Paso.
S12:	Paso.
S16:	Yo también.
S10:	Un número par menos la cuarta parte de otro número. Dos “equis”, es el número par, menos la cuarta parte de “y” que es el otro número. Dos por mi edad menos la edad de Miguel entre cuatro.
S12:	¿Puedo decir yo...? Yo creo que está bien, pero quiero decir la mía.
S09:	Pero, ¿por qué lo vas a decir?
S12:	Porque me apetece.
P:	Venga, dilo si quieres.
S12:	El doble de mi edad menos la cuarta parte de la edad de otro. Ya me quedo a gusto diciéndolo.
S09:	No puedo poner.
S12:	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número. La raíz cuadrada de “equis” elevada a i.
S16:	No tengo.
S10:	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número. La raíz cuadrada de “equis” elevada a “y”.
S09:	Nada.
S16:	Paso.
S09:	Ya no se puede poner, ¿verdad?
P:	Fijaos vosotros en las fichas.
S16:	No, ésta va con aquella y ya no hay más.

ANEXO D

ANEXO D. TERCERA FASE DE RECOGIDA DE DATOS: PRODUCCIONES DE LA FICHA II

En este cuarto anexo presentamos, escaneadas, las producciones de los estudiantes al trabajar de manera individual la Ficha II.

Presentamos para cada sujeto el trabajo realizado en las dos situaciones planteadas, donde en cada una de ellas hay cuatro enunciados, y cada enunciado tiene cuatro opciones de traducción entre los sistemas de representación que tenemos en cuenta en este estudio.

En la Situación 1 proponemos cuatro enunciados simbólicos y planteamos para cada uno de ellos, cuatro enunciados verbales, donde uno es traducción correcta del enunciado dado y los otros tres enunciados propuestos presentan algún error de los categorizados en este trabajo y en los que los sujetos de estudio han incurrido en las anteriores fases del proceso de recogida de datos. (Esto se detalla en el apartado IV.5.3 del trabajo).

En la Situación 2, igualmente proponemos cuatros enunciados verbales y planteamos para cada uno de ellos, cuatros enunciados simbólicos, donde al igual que en la situación 1, un enunciado es traducción correcta del enunciado dado y los otros tres enunciados propuestos presentan algún error de los categorizados en este trabajo y en los que los sujetos de estudio han incurrido en las anteriores fases del proceso de recogida de datos.

D.1. PRODUCCIONES DEL SUJETO S01

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque el enunciado simbólico nos da 5 que sería el número impar, más x que sería más una edad que desconocemos, más y, que sería la otra edad que desconocemos.	Porque en el enunciado simbólico no nos dice cinco veces la edad.

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
	Porque es imposible que un número más 60 de 5.

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque la diferencia sería la $x^2 - y^2$ y la solución de esa diferencia es 9.	Porque no nos dice que lo que sea es igual a (tre) nueve.

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque la x representa a el área y es elevado a 3 es el cubo.	Porque hay no se nos dice nada de la tercera potencia de 3 ni nada.

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque hay ya te dan el perímetro directamente de los 4 lados que es 12.</p>	<p>Porque no nos dice nada de el doble del perímetro o algo.</p>

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque hay nos dice el doble de los años de uno mas un cuarto de los años que tiene la otra.</p>	<p>Porque no nos dice nada de 4 años.</p>

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque nos dice eos 2 coches y el número de ruedas que son 8.	Porque en el 8 nos da un enunciado y en este caso no hace falta.

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Por que hay se nos da tanto el área cuadrada por la profundidad de la piscina.	Porque no se nos da lo de por la profundidad de la piscina.

D.2. PRODUCCIONES DEL SUJETO S02

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque en el enunciado simbólico indica que todos los incógnitas y números se suman.	Porque pone tres edades en el enunciado verbal. Porque no se está multiplicando. No se indica que sean años.

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque indica que el resultado es igual a un número cinco veces	Porque no indica que el resultado es cinco veces un número.

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque indica que es el perímetro no el área.	No indica que se eleven

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque indica el lado del cubo y indica que esta elevado a tres o el triple (que es lo mismo)	Porque no indica que es ni su área ni su volumen.

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque indica toda el enunciado simbólico.	Porque se repiten.

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Indica la edad de Jesús y Inés diferente.	Se repiten las x.

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Indica el número de vueltas exacto y su solución.	No se eleva bien. Indica otra letra.

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Indica todas las letras como el suelo (x) y eleva proximidad (y)	No indica la profundidad.

D.3. PRODUCCIONES DEL SUJETO S03

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?

D.4. PRODUCCIONES DEL SUJETO S04

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Por que si ta un número impar le sumas una edad más otra edad.	Por que dice que la edad de cinco años más otra. Pero falta otra edad.

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Si a un número le sumas sesenta es lo mismo que si multiplicas un número por cinco.	Por que si es igual a cinco veces es multiplicar ese número.

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Por que si ha un número al cuadrado se resta otro número al cuadrado el resultado es mayor.</p>	<p>Por que Si a un número al cuadrado se resta resta otro al cuadrado, ¿cuál es el resultado? falta el resultado.</p>

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Por que si ha un número (lo) (suma) elevado a su cubo es como (el triple) (de su) multiplicar un número tres veces.</p>	<p>El volumen es igual a masa por densidad pero no está elevado a su cubo.</p>

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
<p>¿Por qué?</p>	<p>¿Por qué?</p>
<p>Si a un número le sumas el mismo número más sus seis siguientes es igual a noventa y dos.</p>	<p>Por que se suman seis más porque el largo es (más ancho) (que sea) grande que el ancho.</p>

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
<p>¿Por qué?</p>	<p>¿Por qué?</p>
<p>Si es el doble de la edad más un cuarto de (x) la que tiene he's. (Por eso).</p>	<p>(Por que era un cuarto).</p>

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Es el ^{cuatro} doble como son (dos) ruedas, es igual a ocho. Por que es igual que cuatro más cuatro.</p>	<p>Por que es dos coches. Son cuatro cada uno pero dice que hay ocho ruedas por otro número.</p>

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque un número que es el lado de la piscina elevado a su cuadrado por su profundidad (*) que es el otro número.</p>	<p>Es un número elevado a dos por otro número.</p>

D.5. PRODUCCIONES DEL SUJETO S05

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
La respuesta correcta es la c, por que hay dos incógnitas diferentes.	La respuesta incorrecta es la a, por que dice tres edades, y nada más que hay dos incógnitas.

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
La respuesta correcta es la c, por que al realizar la ecuación si da.	La respuesta incorrecta es la a, por que el cinco esta multiplicando y hay no lo dice.

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
La respuesta correcta es la c, por que es la única que se refiere a el enunciado simbólico.	La respuesta incorrecta es la a, por que no se refiere al enunciado.

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
No lo se.	No lo se.

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Por que al realizar la ecuación da bien.	Por que no dice lo que es.

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Por que dice las dos incógnitas, la x y la y.	Por que pone el doble y en la a no lo pone.

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Por que el número de ruedas es x.	Por que lo pone elevado y no es así.

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Por que creo que saía elevado a 2, la incógnita x.	Por que no es $2x^2$, no puede ser.

D.6. PRODUCCIONES DEL SUJETO S06

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
por que es 5 mas 'x' mas 'y' se respeta la ecuación	Jitan numeros en la ecuación

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
por que se sumamos "x" mas 6 ^{es} es igual a ese numero por 5.	no respeta la ecuación.

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
porque el enunciado indica explícitamente los pasos.	se falta poner el nombre al enunciado

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
porque " x^3 " es el área de un cubo.	el enunciado está mal.

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque el enunciado indica exactamente lo mismo que la ecuación	ni se nombra el número más solo letras y el resultado.

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
esta todo perfecto.	El cuatro debería estar abajo.

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>$2x =$ el número de ruedas de los dos coches y 8 son los coches.</p>	<p>Solo se indica el de un coche.</p>

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>$2x =$ el área del suelo de una piscina cuadrada $y =$ la profundidad.</p>	<p>no se indica la profundidad de la piscina.</p>

D.7. PRODUCCIONES DEL SUJETO S07

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Por qué son cinco mas x que seria la hermana mas y que seria yo.	Por qué solo se suman dos veces $x+y$ y no como dice el enunciado que seria $5+x+y+x$

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
por qué un numero que seria x mas sesenta es igual a el mismo por cinco que seria $5x$	Esta mal por qué dice cinco veces otro numero y tiene que ser el mismo

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Por qué la diferencia que es la resta de dos áreas de dos habitaciones da nueve	Por qué no da las soluciones.

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Por qué un lado que sería x y su triple es x^3	Para que fuese el área tendría que ser x^4

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>(El largo son seis metros mas que el ancho que da ^{no} noventa y dos)</p> <p>El ancho que es x mas el largo que es $x+6$ se pone dos veces para hallar el perimetro que da noventa y dos</p>	<p>Por que no halla el perimetro</p>

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>El doble de Jesus que es $2x$ mas un cuarto de los años de Ines que es $\frac{x}{4}$</p>	<p>Por que seria cuatro partido un numero</p>

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Dos coches que son 2x es igual a ocho	Por que pone que es igual a ocho por otro numero

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
por qué es lado por lado por la altura que es y	por qué no multiplica la profundidad de la piscina

D.8. PRODUCCIONES DEL SUJETO S08

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque es cinco más x que es la ^{edad} de mi hermanita y "y" que es la mía	Porque estamos cinco lo sumamos a mi edad y a la de mi hermanita no sumamos mi edad y la de mi hermana

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
x es un número que no conocemos y si lo sumas Por que aun número si lo sumas se no sesenta no te puede dar cinco pero si lo multiplicas te puede dar.	Por que es imposible que un número más sesenta de de cinco.

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Por que el perimetro de cuadrada menos al perimetro de tu habitacion cuadrada es igual a nueve</p> <p>x elevado a dos y y^2 son el area y la resta es la diferencia, el resultado es nueve</p>	<p>Por que el resultado de las dos habitaciones cuadradas es nueve y no en el a^{no} dice el resultado</p>

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Por que x elevado a tres tres^o al triple.</p>	<p>Por que x elevado a tres no aparece tres elevado a tres.</p>

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Por que el perimetro de jardin rectangular es x. $x+6$ es largo mide más que ancho que es igual a noventa y dos</p>	<p>Por que el perimetro es un perimetro la sum' de todos sus lados y empieza por dos x</p>

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Por que dos x es el doble de años que tiene Jesus $\frac{x}{y}$ es la cuarta de la parte que los de Inés</p>	<p>Por que el el doble. es $2x$ no cuatro por que tu no sabes la edad que tenía al principio.</p>

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Por que un número de ruedas de dos coches es x elevado a dos y el resultado es ocho</p>	<p>Por que solo pone x no pone x elevado a dos que sería los dos coches el elevado</p>

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Por que x elevado a dos es el area de la piscina cuadrada y "y" es la profundidad de la piscina</p>	<p>Por que x elevado a dos sería solo el area</p>

D.9. PRODUCCIONES DEL SUJETO S09

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque un número impar se reduce al cinco y una edad (x) más otra edad (y).</p>	<p>Porque cinco años más la edad de su hermana, más la suya, estaría bien, pero le vuelve a sumar la de su hermana y eso es incorrecto.</p>

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque a un número (x) le suma sesenta y obtiene el mismo resultado que si el x lo multiplicas por cinco (5x).</p>	<p>Porque pone que la suma de sesenta es igual a cinco y es falso, porque no es igual a cinco sino que es igual a el quintuple de ese número.</p>

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque el perímetro de una habitación cuadrada (x^2) menos el perímetro de tu habitación cuadrada (y^2) es igual a nueve.</p>	<p>Porque solo dice la operación de el área del suelo de mi habitación cuadrada menos el área del suelo de tu habitación cuadrada ($x^2 - y^2$) pero no dice lo que sale.</p>

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque el área (x) de un cubo siempre da elevado a tres (x^3)</p>	

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque el ancho (x) es seis metros mas pequeño que el largo que sería (x+6) y como un rectángulo tiene cuatro lados y dos son iguales y los otros dos tambien, sería $(x+x+(x+6)+(x+6)=96)$</p>	<p>Porque solo suma el largo mas su ancho pero son cuatro lados no dos</p>

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque el doble de los años de Jesús (2x) mas un cuarto de los años de Inés $(\frac{x}{4})$</p>	<p>Porque dice el doble de los años de Jesús y pone cuatro y no nos indica la edad de Jesús y no sabemos si su doble es cuatro.</p>

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque el número de ruedas de dos coches (x) es ocho (x=8)</p>	<p>Porque solo dicen el número de ruedas de un coche no de dos</p>

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque el área del suelo de una piscina cuadrada (X^2) por la profundidad de la piscina (Y)</p>	<p>Porque (X^2) es el área del suelo pero dice por la profundidad y eso no lo indica.</p>

D.10. PRODUCCIONES DEL SUJETO S10

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque un número impar (5) + una edad (que no sabemos) + otra edad (que tampoco sabemos) $5 + x + y$ no y</p>	<p>Porque pone que se sumen 5 años + la edad de mi hermana (x) más la mía (y) más otra vez la de mi hermana así que quedaría $5 + x + y + x$</p>

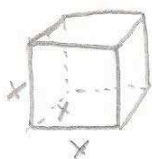
Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque al sumar a un número 60 ($x + 60$) se obtiene el mismo resultado (=) que al multiplicarlo por cinco ($5x$)</p>	<p>Porque la suma de un número (x) + sesenta ($x + 60$) es igual a cinco (=5) no $5x$ por eso está mal. Porque el correcto todo derecho es $5x$ pero aquí se dice que da 5, no $5x$.</p>

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
<p>¿Por qué?</p>	<p>¿Por qué?</p>
<p>Porque la diferencia (-) entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas $(x^2 - y^2)$ es un número impar (a) todo junto $(x^2 - y^2 = a)$</p>	<p>Porque no nombra la parte de techo al igual de ninguna manera</p>

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
<p>¿Por qué?</p>	<p>¿Por qué?</p>
<p>Porque un cubo tiene tres dimensiones así que un lado x elevado a esas 3 dimensiones</p> 	<p>Porque el triple del lado sería $3x$.</p>

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque el ancho es x y el largo $x+6$ así que $x+x+(x+6)+(x+6)=92$.</p>	<p>Porque de esa manera solo estarías sumando un lado + un ancho.</p>

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>El doble de los años de Jesús ($2x$) + un cuarto de los años de mes ($\frac{x}{4}$)</p>	<p>Porque $2x$ es la edad de Jesús pero $\frac{x}{4}$ también es de la edad de Jesús.</p>

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
El numero de ruedas de dos coches (2x) es 8	Es un numero cualquiero x es igual a ocho pero no nombra el numero de coches.

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
El area cuadrada (x ²) por la profundidad que no se sabe (y)	Solo esta nombrando El suelo de la piscina Cuadrada.

D.11. PRODUCCIONES DEL SUJETO S11

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque cinco es un número cualquiera, x es una incógnita que sería mitad, e $\frac{1}{2}$ "y" es otra diferente que es la de un hermano.</p>	<p>Es incorrecta porque el enunciado dice lo siguiente: $5 + y + x + y$ y no coincide con el enunciado simbólico.</p>

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>x sería el número y se le suma 60, o sea: $x + 60$ y eso es igual a el número (x) multiplicado por 5: $x + 60 = 5x$.</p>	<p>Sesenta más un número sería $x + 60$, pero es igual a cinco veces otro sería algo como: $x + 60 = 5y$. y por lo tanto no coincide.</p>

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Es correcta porque la diferencia significa restar y el área (x^2) de dos habitaciones $x^2 - y^2$ es igual a nueve, que todo sería $x^2 - y^2 = 9$ y coincide con el enunciado.	Indica que se restan las áreas cuadradas de dos habitaciones pero no indica que el resultado es nueve.

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque "x" sería el lado del cubo y 3 es la unidad de medir el volumen así que: $x^3 =$ volumen del cubo.	

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>x es el perímetro largo, que mide seis metros más que su ancho $x + (x + 6)$ que es igual a 92, por lo tanto $x + (x + 6) = 92$.</p> <p>$x + x$ serían los dos lados los anchos y $(x + 6) + (x + 6)$ son los largos porque x que es el ancho más seis es el largo y esto da como resultado 92 que es el perímetro.</p>	<p>Es incorrecta porque no se indica que el lado largo mide seis metros más que el ancho.</p>

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>el doble de Porque los años de Jesús que son $2x$ más un cuarto de los años de Inés que sería $\frac{y}{4}$ por lo tanto $2x + \frac{y}{4}$ es correcta.</p>	<p>El no tiene nada que ver con lo que indica el enunciado por lo tanto es incorrecta.</p>

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>2x son los dos coches, y 8 es la suma de las ruedas de los dos coches.</p> <p>2x los coches y 8 las ruedas = $2x = 8$</p>	<p>x^2 no es correcto porque no se multiplican los coches.</p>

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>x^2 = el área al cuadrado y e "y" es la profundidad. por lo tanto $x^2 \cdot y$</p>	<p>x^2 es solo el área del suelo de la piscina cuadrada.</p>

D.12. PRODUCCIONES DEL SUJETO S12

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque 5 es un número impar más X que es mi edad más Y que es la otra edad, es igual a 5 más un número más otro número.</p>	<p>No es cierta porque sería $5xy$, multiplicamos 5 por X por Y.</p>

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque a X si se le suma 60 se obtiene $5x$ que es un número más 60 igual a $5x$</p>	<p>Porque la suma de un número más 60 es igual a $5x$ no a 5.</p>

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque X^2 es el perímetro de una habitación ^{elevada a 2} menos ^{menos} de Y^2 que es el perímetro de otra habitación elevada a 2 es igual a 9, es como decir el cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número igual a 9.</p>	<p>Porque falta el igual a 9.</p>

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque X es el lado de un cubo y elevado a 3 es el triple, es decir el cubo de un número.</p>	<p>Porque le falta el triple.</p>

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque tenemos que sumar 2 largos más : 2 anchos y dan 92.	Porque sería un largo más un ancho (un lado más otro lado) igual a 92

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque 2x es es el doble de los años de Jesús y $\frac{9}{4}$ un cuarto de los años que tiene Inés.	Porque dice el doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años de Jesús

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque $2x$ es el número de 2 ruedas de dos coches y es lo que da, igual que el doble de un número igual a 8.	Porque hay diez que es el número de dos ruedas de un coche igual a 8.

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque x^2 es el cuadrado de el área del suelo de una piscina y es la profundidad de la piscina, igual que decir un número cuadrado por otro número	Porque es el cuadrado de un número, le falta multiplicar la profundidad de la piscina.

D.13. PRODUCCIONES DEL SUJETO S13

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>La D porque porque es un número impar y las letras son las edades que aún no se saben.</p>	<p>Porque cinco años más das edades esta más explicado</p>

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque la suma de un número más x es igual a $8x$</p>	<p>Porque no se puede obtener cinco multiplicando por sesenta</p>

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque es la que mejor está explicada.	Esta MAL expresada porque no es la diferencia.

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque es el triple de tres. Son $x+x+x$.	Porque no es una potencia

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque no se sabe el perímetro del Jardín. Yo escribo en letras y es igual a 92.</p>	<p>Porque no pone el perímetro</p>

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque es el que mejor este explicado.</p>	<p>porque dice un cuarto, no dos $x + 4$ y</p>

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque $2x$ son dos coches y son iguales a dos ocho ruedas.</p>	<p>Porque son ocho ruedas nada más no hace galleta ea y</p>

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Es el área del aveso por la profundidad</p>	<p>No son dos piezas es decir que $2x^2$ está MAL.</p>

D.14. PRODUCCIONES DEL SUJETO S14

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque es ^{cinco} es un número impar más un número más otro número</p>	<p>Porque no se suma dos veces la edad de mi hermana sino una.</p>

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque un número más sesenta es igual a cinco multiplicado por ese número</p>	<p>Porque no es igual a cinco, es igual a cinco multiplicado por un número.</p>

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque un pi perímetro del suelo elevado a dos menos otro elevado a dos es igual a nueve</p>	<p>Porque no es solo que se restan sino que al restarse da nueve.</p>

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque es la el perímetro por tres.</p>	<p>Porque no es la tercera potencia de tres sino un número elevado a tres.</p>

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque sumas sus dos anchos, y sus dos largos que miden 6 seis metros más que el ancho.</p>	<p>Porque no sumas solo una vez el ancho el largo, b tienes que sumar dos veces.</p>

Situación 1. Enunciado E2.2

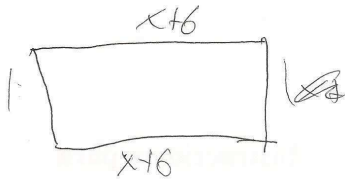
✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque es el doble de años más la cuarta parte de años.</p>	<p>Porque al no saber pora por cual número tienes que multiplicar no puedes multiplicarlo por 2.</p>

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>AA</p> <p>Porque es el número de dos ruedas de dos coches son multiplicados por dos y es igual a ocho</p>	<p>Porque no es un número igual a ocho.</p>

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque es dos veces el lado por dos y después por la profundidad.</p>	<p>Porque no es un lado por dos.</p>



$$x \cdot 2 + \frac{x}{4}$$

$$x + x = 8$$



D.15. PRODUCCIONES DEL SUJETO S15

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque sería $5x$, que es el quintuplo de mi edad mas y, que es la edad de mi hermana.</p>	<p>No, porque tendría que ir esa respuesta $5+(x+y)$ para que fuera correcta.</p>

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque por ejemplo la edad de Juan mas sesenta es igual al quintuple de la edad de Juan.</p>	<p>No, porque el resultado sería el quintuple de ese número.</p>

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque para que fuera cuadrado Porque un número elevado a dos menos otro número elevado a dos puede ser igual a nueve.</p>	<p>Porque para que fuera área tenía que estar elevado a tres.</p>

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque el lado puede un número elevado a tres</p>	<p>No, porque un cubo tiene más de tres lados</p>

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque ancho es x y su largo es ancho más seis y como un rectángulo tiene cuatro lados se suman.</p>	<p>Porque el perímetro sería $4x$.</p>

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque es el doble de los años de Jesús mas un número entre cuatro que sería la edad de Inés.	No, porque es el doble no cuatro

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque dos coches sin saber las ruedas es igual a ocho	No, porque sería 2x y no x porque son 2 coches.

Situación 1. Enunciado E4.2

<p>✓ Una respuesta correcta</p>	<p>✗ Una respuesta incorrecta</p>
<p><input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d</p>	<p><input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d</p>
<p>¿Por qué?</p>	<p>¿Por qué?</p>
<p>Porque es la ^{de} profundidad X^2 por la profundidad y</p>	<p>No, porque no cuenta con la profundidad</p>

D.16. PRODUCCIONES DEL SUJETO S16

Situación 1. Enunciado E1.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Por que un número impar sería el cinco, más una edad que sería la x más otra edad que sería la y	Porque ahí dice que cinco años más la edad de su hermana más su edad más la edad de su hermana otra vez si fuera así sería $5 + x + y + x$

Situación 1. Enunciado E2.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
Porque dice que sesenta más un número que sería el $x + 60$, es igual a otro número por cinco que sería $5x$ entonces daría el mismo enunciado simbólico.	Porque dice que un número más sesenta es igual a cinco y no es así, sería un número más sesenta es igual a un número multiplicado por 5 veces porque pone $x + 60 = 5x$ si fuera es igual a 5 sería $x + 60 = 5$

Situación 1. Enunciado E3.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque dice el perímetro del suelo de mi habitación cuadrada que sería el $x^2 - y^2 = 9$, menos el suelo de tu habitación también cuadrada que sería el $x^2 - y^2 = 9$, es igual a nueve = $x^2 - y^2 = 9$ por eso está bien porque da el mismo enunciado simbólico.</p>	<p>Porque en el enunciado simbólico está mal con el elongado menos en que el nueve es un número impar el nueve es par, un número par</p>

Situación 1. Enunciado E4.1

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque de cada es la x que se multiplica por 3 o sea su triple ^{del cubo}</p>	<p>Porque dice que el área de un cubo pero no porque la x sería el lo que mide pero dice que se multiplica por 3 pero sería por 4 porque un cubo tiene 4 lados</p>

Situación 1. Enunciado E1.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>porque dice el perimetro de un jardín que sería la x; rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho que sería: $(x+6)$ i es igual a 92 osea que el enunciado coincide con el enunciado simbólico</p>	<p>porque hay pone $2x \cdot 2$ y en el enunciado no pone eso no pone que el perimetro que es x se multiplique por dos y otra vez por dos osea que no coinciden.</p>

Situación 1. Enunciado E2.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input checked="" type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>porque dice que el doble que tiene Jesús que sería: $2x$; más un cuarto de los años que tiene Inés que sería: $\frac{1}{4}$ - la edad de Inés.</p> <p>Osea que coinciden los enunciados.</p>	<p>porque dice que el doble de los años de Jesús que es $2x$ - la edad de Jesús más un cuarto de la edad que tiene Inés y la edad de Inés sería la x y no la x porque la x es la edad de Jesús</p>

Situación 1. Enunciado E3.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input checked="" type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque sería $2x$ que es el doble de 4 porque como un coche tiene 4 ruedas si haces el doble es igual a ocho</p>	<p>Porque dice que $x=8$ pero no porque dice de dos coches y la x sería de un coche más y en el enunciado dice que dos. Por eso no coinciden el enunciado simbólico con el enunciado verbal</p>

Situación 1. Enunciado E4.2

✓ Una respuesta correcta	✗ Una respuesta incorrecta
<input checked="" type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d	<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input checked="" type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
¿Por qué?	¿Por qué?
<p>Porque dice que el área del suelo de una piscina cuadrada que sería x^2, por la profundidad de la piscina que sería $2x$ y el área que coinciden el enunciado verbal con el enunciado simbólico</p>	<p>Porque en el enunciado simbólico dice que sería el área del suelo de la piscina multiplicado por dos y elevado al cuadrado y en el enunciado verbal no dice eso dice que el área del suelo de una piscina cuadrada.</p>

D.17. TABLAS RESÚMENES

A continuación presentamos, agrupadas, las justificaciones que dan los estudiantes a las elecciones realizadas de los enunciados que constituyen la Ficha II.

En las tablas D.1, D.2, D.3 y D.4 mostramos las justificaciones que dan los estudiantes a sus elecciones de los enunciados de la Situación 1 (E1.1, E2.1, E3.1 y E4.1) durante la realización de la tarea.

Tabla D.1. Justificaciones de los estudiantes en el enunciado E1.1

Sujeto	Justificación dada por los sujetos
S01	“[...] nos da 5 que sería el número impar, más x que sería más una edad que desconocemos, más y , que sería la otra edad que desconocemos”
S07	“porque son cinco más x que sería la hermana más y sería yo”
S08	“porque es cinco más x que es la de mi hermana e y que es la mía”
S09	“porque un número impar se refiere al cinco y una edad (x) más otra edad (y)”
S10	“porque un número impar (5) más una edad (que no sabemos) más otra edad (que tampoco sabemos)”
S11	“porque cinco es un número cualquiera, x es una incógnita que sería mi edad, e y es otra diferente que es la de mi hermana”
S12	“porque 5 es un número impar mas x que es mi edad más y que es la otra edad, es igual a 5 más un número más otro número”
S13	“porque es un número impar y las letras son las edades que aún no se saben”
S14	“porque cinco es un número impar más un número más otro número”
S16	“porque un número impar sería el cinco, más una edad que sería la x más otra edad que sería la y ”

Tabla D.2. Justificaciones de los estudiantes en el enunciado E2.1

Sujeto	Justificación dada por los sujetos
S07	“porque un número que sería x más sesenta es igual a el mismo por cinco que sería $5x$ ”
S09	“porque a un número (x) le suma sesenta y obtiene el mismo resultado que si x lo multiplico por cinco ($5x$)”
S10	“porque al suma a un número 60 ($x+60$) se obtiene el mismo resultado ($=$) que al multiplicarlo por cinco ($5x$)”
S11	“ x sería ese número y se le suma 60, o sea: $x+60$, y eso es igual a el número (x) multiplicado por 5: $x+60=5x$ ”
S16	“porque dice que sesenta más un número que sería el $x+60$, es igual a otro número por cinco, que sería el $x+60$, entontes daría el mismo enunciados simbólico”

Tabla D.3. Justificaciones de los estudiantes en el enunciado E3.1

Sujeto	Justificación dada por los sujetos
S01	“porque la diferencia sería la $x^2 - y^2$ y la solución de esa diferencia el 9”
S08	“ x elevado a dos y y^2 son el área y la resta es la diferencia, el resultado es nueve”
S09	“porque el perímetro de una habitación cuadrada (x^2) menos el perímetro de tu habitación cuadrada (y^2) es igual a nueve”
S10	“porque la diferencia ($-$) entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas ($x^2 - y^2$) es un número impar (9), todo junto ($x^2 - y^2 = 9$)”
S11	“[...] porque la diferencia significa restar y el área (x^2) de dos habitaciones $x^2 - y^2$ es igual a nueve, que todo sería $x^2 - y^2 = 9$ y coincide con el enunciado”
S12	“porque x^2 es el perímetro de una habitación elevado a dos menos y^2 que es el perímetro de otra habitación elevada a 2 es igual a 9, es como decir el cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número igual a 90”
S16	“porque dice el perímetro del suelo de mi habitación cuadrada que sería el $x^2 - y^2 = 9$, menos el suelo de tu habitación cuadrada que sería el $x^2 - y^2 = 9$, es igual a nueve: $x^2 - y^2 = 9$, por eso está bien porque da el mimos enunciado simbólico”

Tabla D.4. Justificaciones de los estudiantes en el enunciado E4.1

Sujeto	Justificación dada por los sujetos
S01	“porque la x representa a el área y el elevado a 3 es el cubo”
S08	“porque un lado que sería x y su triple es x^3 ”
S09	“porque el área (x) de un cubo siempre da elevado a tres (x^3)”
S10	“porque un cubo tiene tres dimensiones así que un lado x elevado a 3 dimensiones”
S11	“porque x sería el lado del cubo y 3 es la unidad de medir el volumen así que $x^3 =$ volumen del cubo”
S12	“porque x es el lado de un cubo y elevado a 3 es el triple, es decir el cubo de un número”
S16	“porque el lado del cubo es la x que se multiplica por 3 o sea su triple”

Análogamente, en las tablas D.5, D.6, D.7 y D.8 presentamos las justificaciones que dan los estudiantes a sus elecciones de los enunciados de la Situación 2 (E1.2, E2.2, E3.2 y E4.2) durante la realización de la tarea.

Tabla D.5. Justificaciones de los estudiantes en el enunciado E1.2

Sujeto	Justificación dada por los sujetos
S07	“el ancho que es x más el largo que es $x + 6$ se pone dos veces para hallar el perímetro que da noventa y dos”
S08	“porque el perímetro del jardín rectangular es x . $x + 6$ es largo mide más que su ancho que es igual a noventa y dos”
S09	“porque el ancho (x) es seis metros más pequeño que el largo que sería ($x + 6$) y como un rectángulo tiene cuatro lados y dos son iguales y los otros dos también, sería $(x + x + (x + 6) + (x + 6) = 92)$ ”
S10	“porque el ancho es x y el largo es $x + 6$ así que $x + x + (x + 6) + (x + 6) = 92$ ”
S11	“ $x + x$ serían los dos lados anchos y $(x + 6) + (x + 6)$ son los largos porque x que es el ancho más seis es el largo y esto da como resultado 92 que es el perímetro”
S15	“porque su ancho es x y su largo es su ancho más seis y como un rectángulo tiene cuatro lados se suman”
S16	“porque dice el perímetro de un jardín que sería la x , rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho que sería: $(x + 6)$; que sería igual a 92 o sea que el enunciado coincide con el enunciado simbólico”

Tabla D.6. Justificaciones de los estudiantes en el enunciado E2.2

Sujeto	Justificación dada por los sujetos
S07	“el doble de Jesús que es $2x$ más un cuarto de los años de Inés que es $\frac{y}{4}$ ”
S08	“porque dos x es el doble de años que tiene Jesús $\frac{x}{4}$ es la cuarta parte que los que tiene Inés”
S09	“porque el doble de los años de Jesús ($2x$) más un cuarto de los años de Inés ($\frac{y}{4}$)”
S10	“el doble de los años de Jesús ($2x$) + un cuarto de los años de Inés ($\frac{x}{4}$)”
S11	“porque el doble de los años de Jesús que son $2x$ más un cuarto de los años de Inés que sería $\frac{y}{4}$ ”
S12	“porque $2x$ es el doble de los años de Jesús y $\frac{y}{4}$ un cuarto de los años que tiene Inés”
S16	“porque dice que el doble que tiene Jesús que sería: $2x$; más un cuarto de los años que tiene Inés que sería: $\frac{y}{4}$, $y =$ la edad de Inés”

Tabla D.7. Justificaciones de los estudiantes en el enunciado E3.2

Sujeto	Justificación dada por los sujetos
S06	“ $2x$ = al número de ruedas de los dos coches y 8 son los coches”
S07	“dos coches que son $2x$ es igual a ocho”
S08	“porque un número de ruedas de dos coches es x elevado a dos y el resultado es ocho”
S09	“porque el número de ruedas de dos coches ($2x$) es ocho ($2x = 8$)”
S10	“el número de ruedas de dos coches ($2x$) es ocho”
S11	“ $2x$ son los dos coches y 8 es la suma de las ruedas de los coches, $2x$ los coches y 8 las ruedas = $2x = 8$ ”
S12	“porque $2x$ es el número de 2 ruedas de dos coches y 8 es 1 que da, es igual que el doble de un número igual a 8”
S13	“porque $2x$ son dos coches y son igual a ocho ruedas”
S16	“porque sería $2x$ que es el doble de 4 porque como un coche si haces el doble es igual a ocho”

Tabla D.8. Justificaciones de los estudiantes en el enunciado E4.2

Sujeto	Justificación dada por los sujetos
S04	“porque un número que es el lado de la piscina elevado a su cuadrado por su profundidad que es el otro número”
S06	“ $2x$ = el área del suelo de una piscina cuadrada, y = la profundidad”
S08	“porque x elevado a dos es el área de la piscina cuadrada y ‘ y ’ es la profundidad de la piscina”
S09	“porque el área del suelo de una piscina cuadrada (x^2) por la profundidad de la piscina (y)”
S10	“el área cuadrada (x^2) por la profundidad que no se sabe (y)”
S11	“el área del suelo de una piscina cuadrada (x^2) por la profundidad de la piscina (y) = el área al cuadrado e ‘ y ’ es la profundidad por lo tanto $x^2 \cdot y$ ”
S12	“porque x^2 es el cuadrado del área del suelo de una piscina e y es la profundidad de la piscina, es igual que decir un número al cuadrado por otro número”
S15	“porque es el área x^2 por la profundidad y ”
S16	“porque dice que el área del suelo de una piscina cuadrada que sería x^2 , por la profundidad de la piscina que sería la y ”

ANEXO E

ANEXO E. CUARTA FASE DE RECOGIDA DE DATOS: TRANSCRIPCIONES DE LAS ENTREVISTAS

En este último anexo presentamos las transcripciones de las entrevistas realizadas a los sujetos. Forman la última fase de la recogida de información.

Se realizaron entrevistas a 14 de los 16 sujetos, en el orden que se recoge en la Tabla A.2.

Tabla A.2. Orden de realización de las entrevistas personales

Nº entrevista	Momento de la entrevista	Sujeto
1	Lunes 11-03-2013, 09:15h	S16
2	Lunes 11-03-2013, 09:45h	S14
3	Lunes 11-03-2013, 11:15h	S08
4	Martes 12-03-2013, 11:15h	S12
5	Miércoles 13-03-2013, 11:15h	S01
6	Jueves 14-03-2013, 10:15h	S10
7	Jueves 14-03-2013, 10:45h	S05
8	Viernes 15-03-2013, 13:45h	S06
9	Viernes 15-03-2013, 14:15h	S13
10	Lunes 18-03-2013, 10:15h	S11
11	Lunes 18-03-2013, 10:40h	S09
12	Lunes 18-03-2013, 11:00h	S07
13	Lunes 18-03-2013, 11:30h	S15
14	Lunes 18-03-2013, 12:00h	S04

E.1. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO

S16

Entrevista 1. Sujeto S16. Lunes 11 de marzo de 2013, 09:15h

- P: Primero te quiero hacer unas preguntas sobre el juego. ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explicame en qué consistía.
- S16: En que tú tenías un enunciado simbólico y tú tenías que decir un problema con esos números.
- P: Hay uno en el que tú dijiste: “Un tomate más otro tomate igual a...un tomate menos dos...menos dos tomates”. ¿Eso cómo lo escribirías simbólicamente?
- S16: A ver...repítemelo.
- P: Un tomate...
- S16: “Equis”, no, uno “equis”.
- P: Más otro tomate...
- S16: Uno “equis”, más uno “equis” más “equis”.
- P: Y luego dices “igual a un tomate menos dos tomates”.
- S16: Igual a “equis” menos dos.
- P: Pero el enunciado realmente era “equis” más “equis” más uno menos cuatro. ¿Cómo lo dirías? ¿Crees que lo que has dicho ahora correspondería con esta expresión simbólica?
- S16: No. Sería, un tomate más ese tomate más uno menos cuatro.
- P: Vale, ahora otra pregunta. En otro caso dijiste “Cuatro tomates, por la mitad de dos es igual a su doble, al doble de los tomates”. ¿Cómo lo expresarías simbólicamente?
- S16: Sería, cuatro “equis” por uno partido dos igual a dos “equis”
- P: Vale. Vamos a irnos ahora a la situación uno y a la situación dos de la ficha que hicisteis el otro día. Estamos en la situación uno enunciado uno, donde te doy el enunciado simbólico “cinco más “equis” más “y””. Me has razonado que como opción correcta es la opción d “un número impar más una edad más otra edad”. Mi pregunta es: ¿Consideras que este enunciado de verdad se ajusta al enunciado simbólico dado?
- S16: ¿Éste con este?
- P: No, el enunciado verbal que tú me has marcado que es la d que dice “un número impar más una edad más otra edad”, ¿corresponde con el enunciado simbólico que yo te he dado?
- S16: Sí.
- P: ¿Y consideras que es la que más se ajusta?
- S16: Yo creo que sí.
- P: Léelas todas de nuevo.
- S16: Uff...
- P: Léeme los enunciados c y d.
- S16: “Cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo” y “un número impar más una edad más otra edad”.
- P: ¿Qué diferencias encuentras entre esos dos enunciados?
- S16: Es que los dos están bien.
- P: Pero, ¿cuál se ajustaría más?
- S16: El c.
- P: ¿Por qué?
- S16: Porque cinco que sería éste, más las edades que serían “equis” más “y”.
- P: Vamos a ver ahora el enunciado 1 de la situación dos. Léeme la justificación que tú

me has dado. El enunciado uno es “el perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos”. Y tú me has marcado que la opción correcta es la b, ““equis” más “equis” más seis igual a noventa y dos”. ¿Por qué?

S16: Porque dice el perímetro de un jardín que sería la “equis”, rectangular, cuyo largo mide seis metros más que su ancho, que sería “equis” más seis, es igual a noventa y dos, o sea que el enunciado coincide con el enunciado simbólico.

P: ¿Cuál es el perímetro de ese jardín?

S16: “Equis”.

P: ¿Qué es el perímetro de una figura?

S16: El total.

P: ¿De qué?

S16: De la suma de los números.

P: Entonces, este jardín, ¿Qué lados tiene?

S16: Cuatro.

P: ¿Cómo son los lados?

S16: ¿Cómo que cómo son?

P: Te está diciendo que tengo un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que el ancho. ¿Cómo llamarías a esos lados? Si el jardín es rectangular, ¿cómo llamamos a un lado?

S16: Altura.

P: Si no sabemos cómo se llama.

S16: “Equis”.

P: Y cómo llamarías a la base.

S16: Seis metros.

P: Lee bien, dice “seis metros más su ancho”.

S16: Ah, no, “equis” más seis.

P: Vale, entonces, ¿cómo sería su perímetro?

S16: “Equis” más “equis” más seis, multiplicado por cuatro veces...por cuatro...

P: Y según esto, ¿cuál de estas cuatro opciones sería?

S16: La b.

P: ¿Seguro? Me estás diciendo que es la suma de todos los lados. Y me estás diciendo que un lado mide “equis”, y el otro igual mide “equis”, ¿cuántas veces tendré que sumarlo? ¿Y el otro lado?

S16: Dos.

P: ¿Entonces?

S16: Ah, el a.

P: ¿Seguro? ¿Ves la diferencia?

S16: Sí, yo lo puse como si tuvieses sólo dos lados.

P: Vale. Vamos a ver ahora de la situación uno el enunciado dos. Yo te doy el enunciado simbólico ““equis” más sesenta igual a cinco “equis””. Y tú me has marcado como correcta la opción d, “sesenta más un número es igual a cinco veces otro número”. Te pregunto, en la respuesta que tú me has dicho, que la explicas muy bien, me dices es “igual a otro número”, pero si hablamos de “otro número”, ¿con qué lo representarías?

S16: Con “equis”.

P: Si yo te digo, un número más sesenta es igual a cinco veces “otro número”, ¿al representarlo con la misma letra hablamos del mismo número o de otro número?

S16: A ver, repite.

P: Tengo la misma letra, ““equis” más sesenta igual a cinco “equis””, y aquí me dice

- “sesenta más un número es igual a cinco veces otro número”. Tú, si tienes que leerme este enunciado simbólico, ““equis” más sesenta igual a cinco “equis””, ¿cómo lo leerías?
- S16: Um...Un tomate más sesenta igual a un tomate por cinco veces.
- P: No te estoy pidiendo que le pongas un contexto, sólo que lo leas.
- S16: Ah!, “Equis” más sesenta igual a cinco “equis”.
- P: ¿Es el mismo número? Si lo escribimos con la misma letra, ¿representa el mismo número?
- S16: Sí.
- P: ¿Por qué me dice aquí entonces “otro número”?
- S16: Sería “y”, cinco “y”.
- P: Escríbeme simbólicamente este enunciado “sesenta más un número es igual a cinco veces otro número”.
- S16: Sesenta más “equis” es igual a cinco “y”.
- P: Entonces, ¿cuál crees que es el correcto?
- S16: El c.
- P: ¿Seguro? ¿Qué dice? Léemelo.
- S16: Al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco.
- P: Nos vamos ahora a la situación dos, al enunciado cuatro. Léeme tu razonamiento al elegir la opción correcta.
- S16: Esto...
- P: Espera. El enunciado verbal que te doy dice “el área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina”. Y tú has elegido la opción a que pone “equis” al cuadrado. Léeme tu razonamiento.
- S16: Porque dice que el área del suelo de una piscina cuadrada que sería “equis” elevado a dos, por la profundidad de la piscina que sería y, o sea que coinciden el enunciado verbal con el enunciado simbólico.
- P: Pero tú explicación dice que me estas multiplicando el “equis” elevado a dos por la “y”, pero en la opción que has elegido no. ¿Por qué?
- S16: Porque me equivoqué al marcarla.
- P: Pero ¿cuál crees que es correcta, la a o tu explicación?
- S16: Sería la b.
- P: O sea, ¿que tu explicación estaría bien?
- S16: Sí.
- P: Vale. Nos vamos de nuevo a la situación uno. Ahora al enunciado tres. En la opción que marcas como incorrecta, mencionas que nueve es un número par, ¿vale? Lee la justificación.
- S16: Porque en el enunciado simbólico coincide con el enunciado menos en que el nueve es un número impar y el nueve es impar...uy, no, he puesto un número par.
- P: ¿Y cómo es?
- S16: ¿El nueve? Es par.
- P: ¿Sí?
- S16: Sí.
- P: ¿Cómo son los números pares?
- S16: Ay...no se...
- P: Son dos, cuatro, seis...múltiplos de dos.
- S16: Ah, ¡es verdad!
- P: Ahora vamos a tu elección de opción correcta. Me has justificado la opción c. ¿Qué es el perímetro de una figura?

- S16: La suma del total de los lados.
P: Y si tengo un cuadrado, los lados iguales, de lado desconocido “equis” ¿cómo sería el perímetro?
S16: “Equis” más “equis”, “equis” elevado a cuatro.
P: ¿Elevado? Si dices que tengo que sumar los lados... ¿cuánto sale la suma?
S16: Cuatro “equis”.
P: Entonces, esta expresión que tengo aquí, “equis” al cuadrado menos “y” al cuadrado... ¿está hablando de perímetros?
S16: No.
P: Entonces, ¿cuál sería la expresión correcta?
S16: Ummm...
P: ¿De qué habla entonces si no habla de perímetros?
S16: De la a.
P: Léela.
S16: El área del suelo de mi habitación cuadrada menos el área del suelo de tu habitación cuadrada, pero es que...
P: ¿Qué? ¿En qué estás pensando?
S16: La diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es nueve, la d.
P: ¿Seguro? ¿Qué le pasaba a la a?
S16: Pues que no pone que es igual a nueve.
P: Entonces, la a dices que no, porque le falta el igual a nueve. La c la hemos descartado por qué dices que no habla del perímetro. ¿Qué diferencia hay entre el enunciado b y d?
S16: Que una dice que es un número impar y la otra que es nueve. Pero las dos están bien.
P: Pero si yo te pido la que se ajusta exactamente. Si es el enunciado de un problema y tienes que elegirme el que más se ajusta a esa expresión simbólica, ¿cuál elegirías?
S16: Pues esta se refiere a cualquier número impar.
P: Pero yo te estoy diciendo esta expresión simbólica y quiero su traducción exacta.
S16: Ah, entonces la d, porque dice que es igual a nueve.
P: Vamos al enunciado cuatro de la situación uno. Yo te doy la expresión simbólica “equis” elevado a tres, y tú me dices que la opción correcta es la b. Léeme tu explicación.
S16: Porque el lado del cubo es la “equis” que se multiplica por tres o sea su triple.
P: ¿Hacer su triple es lo mismo que elevar al cubo?
S16: No.
P: ¿Qué significa el triple de un número?
S16: Tres “equis”.
P: ¿Y el cubo qué sería?
S16: Tres.
P: Tres, es un número. Digo hacer el cubo.
S16: ¿Un cubo? [Dibuja con el dedo la figura de un cubo]
P: No, no digo una figura, sino hacer la operación de elevar al cubo.
S16: No sé, me he liado.
P: A ver, hacer el triple de un número ¿qué es?
S16: Tres “equis”.
P: ¿Corresponde con la expresión simbólica que te he dado?
S16: No.
P: Entonces, el triple del lado de un cubo es la expresión que te doy.
S16: No.
P: ¿Cuál sería?

- S16: El volumen de un cubo.
P: ¿Seguro?
S16: Sí.
P: Ahora, te voy a hacer unas preguntas generales. Cuando has elegido la respuesta correcta o incorrecta, ¿has seguido alguna estrategia?
S16: Um...
P: ¿Qué has hecho cuando te has encontrado con este tipo de enunciados?
S16: Escribirlos antes.
P: ¿Cómo?
S16: Si me venía un enunciado así.
P: ¿Cómo? ¿Simbólico o verbal?
S16: El verbal, si tenía el perímetro de un jardín rectangular... lo iba leyendo y lo iba escribiendo, “equis”...para saber después cuál era.
P: Entonces, ¿lo has escrito antes de leer las opciones de respuesta?
S16: No. Primero las veía y como no sabía cuál era pues lo escribía, y si ya me daba una igual que otra pues esa era.
P: ¿Te ha influido, a la hora de elegir la opción correcta o incorrecta, el hecho de tener que justificarla?
S16: No.
P: Para elegir la correcta, ¿te ha sido difícil?
S16: Sí, porque había dos que se ajustaban.
P: ¿Siempre?
S16: No, siempre no.
P: ¿Y para elegir la incorrecta?
S16: No.
P: ¿No te ha resultado difícil?
S16: No, yo creo que no.
P: Entonces, si había varias incorrectas, ¿cómo te has decidido?
S16: Cogía la que peor estaba.
P: ¿A qué te refieres con la peor?
S16: La que menos se ajustaba al enunciado.
P: ¿Qué parte te ha resultado más fácil, la situación uno, de simbólico a verbal, o la situación dos, de verbal a simbólico?
S16: La situación dos más fácil.
P: ¿Por qué?
S16: Porque lo podía escribir yo.
P: ¿Y en estos de la situación uno no podrías?
S16: Sí, pero era más difícil.
P: ¿Por qué?
S16: No sé, no los entiendo del todo.
P: ¿No entiendes cuando te doy el enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal?
S16: Es que me resulta más difícil, no sé porqué.
P: ¿No podías haber hecho exactamente lo mismo? ¿Si yo te doy como opción el verbal ir escribiendo el simbólico al lado?
S16: Sí, pero con un enunciado verbal no sé escribirlo simbólico.
P: Pero eso es lo que me has dicho que hiciste en la situación dos.
S16: Ya, no sé...Es que había algunas opciones que no sabía, como la del volumen, que no lo entendí.
P: Ah vale. Muchas gracias.

E.2. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO

S14

Entrevista 2. Sujeto S14. Lunes 11 de marzo de 2013, 09:45h

- P: Mira, ¿Te acuerdas de esto? La primera ficha que trabajamos, ¿te acuerdas de qué había que hacer?
- S14: Ir rellenando... ¿No los tengo todos bien?
- P: Algunos sí, otros nos, pero mi pregunta es, ¿por qué te dejaste en blanco este hueco de aquí? Tenías que escribir verbalmente esta expresión simbólica que corresponde al enunciado dos.
- S14: No se...
- P: ¿No sabías en ese momento? ¿Sabrías ahora?
- S14: No sé maestra...
- P: Dímelo. ¿Qué podrías aquí?
- S14: No se...
- P: ¿Qué pone aquí?
- S14: Cuatro por la mitad de algo...
- P: ¿Qué más?
- S14: Igual a dos veces eso...
- P: ¿Y por qué no lo escribiste en ese momento?
- S14: Um...no sé.
- P: ¿Por qué no sabías?
- S14: No sé...ahora sí.
- P: ¿Te acuerdas del juego?
- S14: ¿El que hicimos en el recreo?
- P: Sí, ese. ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explicame en qué consistía.
- S14: Que te nías que decir algo, ¿no?
- P: Ese algo, ¿qué era?
- S14: No sé...
- P: Era una ficha que tenía una expresión simbólica, y esa expresión simbólica tenía un puntito rojo.
- S14: Ah, que tenías que decirla...tenías que poner un ejemplo.
- P: Vale, uno de lo que tu llamas ejemplos fue: “Un limón, más otro limón, es igual a cuatro limones menos dos limones”. ¿Cómo escribirías esto simbólicamente?
- S14: Uy...uno “equis” más un “equis”...no se...
- P: A ver, un limón...
- S14: “Equis”...
- P: Más otro limón...
- S14: Más uno “equis”...
- P: Es igual a cuatro limones.
- S14: Es igual a cuatro “equis”...
- P: Menos dos limones.
- S14: Menos dos “equis”...
- P: ¿Se parece en algo a esta expresión que yo te di? “Equis” más “equis” más uno igual a “y” menos dos.
- S14: No, en nada.
- P: ¿Sabrías decirme uno ahora?
- S14: No.

- P: ¿No? ¿Por qué?
- S14: Un limón, más un limón, más uno, es igual a un plátano menos dos.
- P: Y en este de aquí me dijiste, “dos pelotas de futbol...”, ¿cómo escribirías eso simbólicamente, dos pelotas de futbol?
- S14: Dos “equis”.
- P: Más otra pelota de fútbol.
- S14: Más uno “equis”.
- P: Menos cuatro pelotas de fútbol...
- S14: Menos cuatro “equis”.
- P: ¿Se parece en algo a esto? [*Le muestro $x+(x+1)-4$*].
- S14: No. ¿Y por qué?
- P: Tú sabrás, esto me lo dijiste tú en el juego.
- S14: ¿Qué te dije esto?
- P: Yo te daba el simbólico y tú me dijiste lo de las pelotas de fútbol. Yo te di, “equis” más “equis” más uno menos cuatro y tú dijiste “Dos pelotas de futbol más otra pelota de futbol menos cuatro pelotas de futbol”.
- S14: Claro, dos pelotas de fútbol más otra...igual a cuatro, ¿no?
- P: Ah, no sé, tú sabrás.
- S14: No sé, yo te dije eso.
- P: ¿Te referías entonces a “equis” más “equis”, dos pelotas de fútbol, y ese uno otra pelota de fútbol?
- S14: Más uno...no sé
- P: Pero entonces, ¿tú estás representando por “equis” a la pelota de fútbol? ¿Y qué significa este uno?
- S14: No sé...
- P: No sé no me vale...Venga, habla...
- S14: Dos pelotas más otra...no sé cuántas pelotas son... ¿cómo sería?
- P: Te estoy preguntando yo a ti. Quiero saber cómo lo dirías. Dime un enunciado con esto [con la expresión simbólica].
- S14: Una pelota... ¿más otra pelota?
- P: Intenta decirlo con otra cosa que no sean pelotas...
- S14: Una manzana, más otra manzana, más uno...
- P: ¿Qué sería ese uno?
- S14: No sé maestra...no quiero...
- P: Vale. Vamos a hablar sobre la ficha II. El enunciado uno de la situación uno. Donde yo te di el enunciado simbólico, cinco más “equis” más “y”. Tú me has marcado que la opción correcta es la d, que dice “un número impar más una edad más otra edad”. ¿Consideras que corresponde el enunciado d con la expresión simbólica?
- S14: A este...
- P: Tu explicación es “porque cinco es un número impar más un número más otro número”.
- S14: ¿No está bien?
- P: Yo no te voy a estar diciendo si está bien o está mal, estamos hablando de cómo has razonado tú. Venga, lee estos enunciados, léeme las otras opciones.
- S14: A ver...te leo el de arriba, el c. Cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo. ¿Es el c?
- P: Dime, ¿cómo lo escribirías simbólicamente?
- S14: Eso...
- P: No, “eso” no... ¿cómo lo escribirías simbólicamente?
- S14: Sería cinco “equis”...

- P: ¿Por qué?
- S14: De cinco años...no sé...
- P: No sé, no me vale...Explícate por favor. Sabes las cosas, háblalas. ¿Qué piensas, qué te pasa por la cabeza?
- S14: Um...
- P: ¿Qué diferencia hay, por ejemplo, entre “cinco veces mi edad y la de mi hermana” y “cinco años más la edad de mi hermana y la mía”.
- S14: Um...
- P: ¿Cómo escribirías simbólicamente el b, “cinco veces mi edad y la de mi hermana”?
- S14: El b... “Equis” más cinco...No, cinco “equis”...
- P: Entonces, ¿el c cómo?
- S14: Cinco mas “equis” mas “y”.
- P: ¿Por qué?
- S14: Porque es, cinco más mi edad más la de mi hermana.
- P: ¿Y el otro?
- S14: Por ejemplo, tres más “equis” más “y”.
- P: No, por ejemplo no, te está diciendo “cinco veces mi edad y la de mi hermana”, ¿cómo sería eso simbólicamente?
- S14: Cinco “equis” más cinco.
- P: Repite.
- S14: Cinco “equis” “y”.
- P: ¿Por qué?
- S14: Porque es cinco veces...
- P: Entonces, ¿cuál de las dos se ajusta más a esta expresión simbólica?
- S14: La b.
- P: Y entre la c y la d, ¿cuál se ajusta mejor?
- S14: La c.
- P: ¿Por qué? ¿Qué diferencia hay entre la c y la d?
- S14: Porque un número impar puede ser cualquiera.
- P: Entonces, ¿por qué persiste la d? ¿No leíste todas las opciones?
- S14: No sé, no entendería la c.
- P: ¿Y ahora sí?
- S14: No sé...
- P: Vale, nos vamos a ir ahora a la situación dos. Vete al enunciado dos por favor.
- S14: ¿Son las que tengo mal?
- P: No, te estoy haciendo preguntas también sobre algunas que están bien, solamente quiero saber tus razonamientos. El enunciado dice: “el doble de años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés”. Y has marcado como opción correcta la b. ¿Por qué? Léeme tu razonamiento.
- S14: Porque es el doble de años más la cuarta parte de años.
- P: ¿Cuántos años tiene Jesús?
- S14: El doble de...más un cuarto de los de Inés.
- P: Vale... los años de Jesús, ¿los conocemos?
- S14: No.
- P: ¿Cómo los representarías?
- S14: Dos “equis”.
- P: Los años de Inés, ¿los conocemos? ¿Cómo los representarías?
- S14: Pues un cuarto.
- P: Pero un cuarto sin más es un cuarto.
- S14: Un cuarto...el doble más un cuarto.

- P: Pero y eso, ¿cómo se escribe?
- S14: Dos “equis” más un cuarto.
- P: Y, ¿Con qué expresión simbólica de las que te doy correspondería?
- S14: El b.
- P: ¿Sí? Es que ahí no pone un cuarto, ahí pone “equis” partido cuatro.
- S14: Pues no sé cuál sería.
- P: ¿Tienen Jesús e Inés la misma edad?
- S14: No.
- P: ¿Seguro?
- S14:
- P: Habla.
- S14: A ver, espera...
- P: Dice “el doble de años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés”.
¿Te especifica en algún momento si tienen la misma edad?
- S14: No.
- P: ¿Lo representarías con la misma letra?
- S14: No.
- P: Entonces, ¿qué expresión sería?
- S16: La c.
- P: ¿Qué pone en la expresión c?
- S14: Dos “equis” más “y” partido cuatro.
- P: Volvemos a la situación uno, al enunciado tres. El tres y el cuatro, es la misma pregunta para los dos. ¿Qué es el perímetro de una figura?
- S14: Todos sus lados.
- P: Todos sus lados, ¿qué significa? ¿Cómo calculas el perímetro de una figura?
- S14: Sumando todos sus lados.
- P: Vale. Según este enunciado, “equis” al cuadrado menos “y” al cuadrado es igual a nueve. Si te fijas, lee los enunciados verbales, te habla siempre de un cuadrado.
¿Cómo sería el perímetro de una figura cuadrada?
- S14: Pues cuatro lados.
- P: ¿Cómo?
- S14: La suma de sus cuatro lados.
- P: ¿Y cómo sería?
- S14: No sé.
- P: Tenemos un cuadrado, ¿vale? Y no conocemos el lado, ¿cómo lo llamamos?
- S14: Sería, ¿”equis” elevado a cuatro?
- P: ¿Eso es sumar?
- S14: No, cuatro más “equis”, o cuatro “equis”, ¿no?
- P: Tú sabrás...
- S14: Cuatro “equis”.
- P: ¿Seguro?
- S14: Yo creo que sí.
- P: Entonces, si yo quiero hacer el perímetro de una figura y me estás diciendo que es cuatro “equis”, ¿corresponde con la expresión que tengo simbólica?
- S14: No.
- P: ¿Cómo sería el área de ese cuadrado?
- S14: ¿”Equis” elevado a dos?
- P: ¿Cuál es el área de un cuadrado?
- S14: La suma de sus lados.
- P: ¿El área? Si me has dicho que eso era el perímetro.

- S14: Si el área es lo de dentro, pues serían los lados, pero multiplicados.
P: Entonces, si yo tengo un lado “equis”, y otro lado también se llama “equis”, ¿cómo sería el área?
S14: “Equis” elevado a dos.
P: ¿Corresponde con el enunciado simbólico?
S14: Sí.
P: Entonces, ahora que ya te has aclarado de lo que es el perímetro y el área de un cuadrado. ¿Cuál de esas expresiones corresponde? Léelos en voz alta.
S14: El área del suelo de mi habitación cuadrada menos el área del suelo de tu habitación cuadrada. La diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es un número impar. El perímetro del suelo mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve. La diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es nueve.
P: Vale, teniendo en cuenta que la del c, que es la del perímetro, me has dicho que no correspondía con el simbólico... ¿o no has dicho eso? ¿o sí corresponde?
S14: No sé.
P: Ay, no sé de nuevo. ¿Por qué dijiste antes que la c no correspondía con el simbólico?
S14: Porque no es el perímetro, es el área.
P: Entonces, las otras tres, hablan de áreas, la a, la b y la d. ¿Cuál de las tres opciones crees que es?
S14: El d.
P: ¿Por qué?
S14: Porque la diferencia es menos, es restar, y es de dos habitaciones, entonces, “equis” e “y”, y es igual a nueve.
P: ¿Seguro? ¿Qué le pasaría a la opción a y a la opción b? ¿Por qué las descartas?
S14: También sería la a...ah, no porque no pone igual a nueve.
P: ¿Y la opción b?
S14: Porque puede ser cualquier número impar.
P: Vale. Nos vamos a la situación dos, el enunciado tres. Dice: El número de ruedas de dos coches es ocho. Y tú me has dicho que es la opción a que dice “equis” elevado a dos igual a ocho. Y tu explicación, ¿cuál es? Léemela.
S14: Porque es el número de dos ruedas de dos coches son multiplicadas por dos y es igual a ocho.
P: Has dicho multiplicadas por dos y has marcado “equis” elevado a dos. ¿Es lo mismo? ¿Multiplicar por dos que hacer la potencia?
S14: Ah no, porque es multiplicar por sí mismo dos veces.
P: ¿Entonces?
S14: Es que está mal explicado, ¿no?
P: No sé, quiero que me aclares qué opinas. No sé si está mal explicado o está mal elegido. Dime tú.
S14: No sé.
P: Dice, el número de ruedas de dos coches es igual a ocho. ¿Qué es lo que no conocemos?
S14: Será dos “equis”...el d.
P: ¿Por qué?
S14: No sé.
P: ¿Quién es “equis”?
S14: El número de ruedas, y son dos...igual a ocho.
P: ¿Son dos qué?

- S14: Dos ruedas.
P: ¿Ruedas?
S14: Son dos coches.
P: Y cuando tú haces dos por el número de coches, ¿qué estás haciendo?
S14: Ocho. Dos por cuatro ocho.
P: En ningún momento te han dicho que sean cuatro ruedas.
S14: Pero es lo que tienen.
P: ¿Y la de recambio?
S14: Ay...
P: Venga, si como tú dices, el número de ruedas es “equis”, ¿qué opción es?
S14: La b.
P: ¿Por qué?
S14: Porque dos ruedas...dos coches con ruedas...dos coches...
P: Ay, ¿cuántas incógnitas hay? ¿Qué es lo que no conocemos?
S14: El número de ruedas.
P: Entonces, ¿cuántas incógnitas habría?
S14: No sé.
P: ¿Dos? ¿Si me estás diciendo que sólo hay una incógnita? ¿Por qué pones dos?
S14: Entonces es la a.
P: Empecemos de nuevo. Olvídate de la opción correcta o incorrecta. Me están diciendo que el número de ruedas de dos coches es ocho. ¿Cuál es la incógnita?
S14: ¿No es la c?
P: ¿Cuál es la incógnita?
S14: Las ruedas.
P: El número de ruedas. ¿Y cuántos coches hay?
S14: Dos.
P: Entonces, ¿cómo expresarías el número de ruedas de dos coches?
S14: “Equis” por dos...
P: Eso, igual a ocho. ¿Qué expresión es?
S14: La a o la d.
P: ¿No, o la a o la d? ¿Es lo mismo elevar a dos que multiplicar por dos?
S14: No sé.
P: Ay, no lo sé... ¿Tres al cuadrado qué es?
S14: Tres por tres.
P: ¿Qué es?
S14: Nueve.
P: ¿Y dos por tres?
S14: Seis.
P: ¿Es lo mismo entonces elevar al cuadrado que multiplicar por dos?
S14: No.
P: Entonces, ¿Es lo mismo hacer “equis” elevado a dos que dos por “equis”?
S14: No.
P: Entonces, no me puedes decir que es la opción a y la opción d. ¿Cuál de las dos es?
S14: La d.
P: ¿Por qué?
S14: Porque es el número de ruedas, “equis”, por dos, es igual a ocho.
P: ¿Seguro?
S14: Sí.
P: Ahora, unas preguntas en general. ¿Qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la

situación dos donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegir la simbólica?

S14: La uno.

P: ¿Por qué?

S14: Porque te lo dice.

P: ¿Por qué te lo dice? ¿Qué significa eso?

S14: Que te dice los números.

P: A ver...En la situación uno yo te estoy dando una expresión simbólica y te estoy dando de opciones las verbales. En la situación dos te doy la expresión verbal y varias simbólicas. ¿Qué significa eso de que te dice los números?

S14: Es más fácil ésa, la uno.

P: ¿Por qué?

S14: Porque te lo dice mejor.

P: ¿Qué significa porque te lo dice mejor? No te entiendo.

S14: Porque por ejemplo...no sé explicarlo.

P: Venga, sí sabes.

S14: ¿Porque es más fácil de encontrar la adecuada?

P: No sé, tú sabrás.

S14: Yo creo que sí.

P: ¿Para ti es más fácil si te doy el simbólico encontrar el verbal?

S14: Sí. Bueno, según cómo es.

P: ¿Entonces?

S14: Yo que sé. Son las dos iguales.

P: Cuando has tenido que elegir una opción correcta y una opción incorrecta, ¿qué estrategia has seguido?

S14: No sé.

P: ¿Qué has hecho cuando te has encontrado con estos enunciados?

S14: Pues buscar cuál es la correcta y cuál no.

P: Pero, ¿cómo?

S14: No sé.

P: ¿Qué has hecho? Yo te doy ese enunciado de primeras, te doy el simbólico y las distintas opciones verbales. ¿Qué haces?

S14: Ver cuál está mejor.

P: ¿Qué significa eso? ¿Qué lees primero?

S14: Leer los enunciados.

P: ¿Cuáles?

S14: Los verbales...ay no sé.

P: Vale. ¿Qué te ha sido más fácil elegir la opción correcta o la incorrecta?

S14: La incorrecta.

P: ¿Y explicarla? ¿Cuál más fácil?

S14: La incorrecta.

P: ¿Por qué?

S14: Porque es más fácil encontrar lo que están mal.

E.3. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO

S08

Entrevista 3. Sujeto S08. Lunes 11 de marzo de 2013, 11:15h

- P: Hola. ¿Te acuerdas de esta primera ficha que rellenamos?
- S08: Sí.
- P: Había que ir construyendo el tablero, ¿verdad?
- S08: Sí.
- P: Mi pregunta es, ¿por qué te dejaste algunos huecos sin rellenar? Que corresponden a los enunciados uno, cuatro y once.
- S08: No sé.
- P: ¿Por qué no te dio tiempo o porque no sabías?
- S08: Porque no sabía hacerlos.
- P: ¿Sabrías hacerlo ahora?
- S08: No sé.
- P: Por ejemplo éste, dice “el producto de la mitad de un número por el triple de otro número”. ¿Sabrías expresarlo simbólicamente?
- S08: No.
- P: ¿Por qué no? ¿Cómo se escribe la mitad de un número?
- S08: Partido, ¿no?
- P: Un número cualquiera, ¿cómo lo escribes?
- S08: “Equis”.
- P: ¿Y si es su mitad?
- S08: “Equis” partido dos.
- P: El triple de otro número, ¿cómo se escribe?
- S08: Pues “equis” por tres.
- P: ¿Y si es de otro distinto?
- S08: No sé.
- P: Si fuese el mismo número sí lo representaríamos por la misma letra, pero al ser otro número, ¿cómo lo representamos?
- S08: Tengo que decir otra letra, ¿verdad? Sería, “y” por tres.
- P: Entonces, si es el producto de la mitad de un número por el triple de otro, ¿cómo se escribiría?
- S08: El producto es multiplicar, ¿verdad?
- P: Sí.
- S08: Sería, “equis” partido dos por “y” partido dos.
- P: No, por el triple de otro número.
- S08: “Y” partido tres.
- P: Triple. ¿Es lo mismo triple que partido tres?
- S08: ¿Multiplicar?
- P: No me preguntes. ¿Qué es el triple?
- S08: Multiplicar.
- P: Entonces si yo voy a hacer el triple de un número, ¿cómo lo expreso?
- S08: No lo sé maestra.
- P: Si lo sabes, si lo estás diciendo bien, has dicho multiplicando, ¿qué multiplicas?
- S08: El tres por la “y”.
- P: ¿Ves? A ver, por ejemplo, el enunciado cuatro sería, un número por su cuadrado. ¿Cómo escribes un número cualquiera?
- S08: “Equis”.

- P: ¿Y su cuadrado?
- S08: Elevado a dos.
- P: Entonces, ¿cómo sería un número por su cuadrado?
- S08: “Equis” elevado a dos.
- P: No, eso sería el cuadrado de un número.
- S08: “Equis” por “equis” elevado a dos.
- P: Sí, ahora sí, me estás diciendo un número “equis” por su cuadrado “equis” elevado a dos. Venga, es igual a su cubo, ¿igual a quién?
- S08: “Equis” por “equis” elevado a dos, igual a “equis” elevado a tres.
- P: Vale, entonces sí sabías. Y ahora el último, el once. El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número.
- S08: Um...
- P: El cuadrado, ¿eso qué es?
- S08: “Equis” elevado a dos.
- P: De la raíz cuadrada. El cuadrado de la raíz cuadrada.
- S08: Raíz de “equis” elevado a dos.
- P: Es igual a ese número.
- S08: Es igual a “equis”.
- P: Vale, entonces ¡sí sabías perfectamente cómo rellenarlos!
Ahora nos vamos a ir... ¿te acuerdas de qué significaba el punto rojo, cuando estábamos jugando con las fichas?
- S08: Ah sí, que había que corregirlo, que valía más.
- P: ¿Pero por qué valía más? ¿Qué había que hacer cuando salía una ficha con punto rojo?
- S08: Decirlo con nuestras palabras.
- P: Vale, teníamos que hacer un ejemplo, dar un enunciado contextualizado.
- S08: Sí.
- P: Te recuerdo. El enunciado contextualizado que tú dijiste cuando salió el punto rojo fue: “Un melón más un melón más un melón menos cuatro melones”. ¿Cómo escribes simbólicamente esa expresión? Te repito... Un melón, ¿cómo lo escribes?
- S08: “Equis”.
- P: Más un melón.
- S08: “Equis” más “equis”.
- P: Más un melón.
- S08: Más “equis”.
- P: ¿Cuántas “equis” llevamos?
- S08: Tres.
- P: Menos cuatro melones.
- S08: Tres “equis” menos cuatro “equis”.
- P: Si la expresión simbólica que yo te di era “equis” más “equis” más uno menos cuatro, ¿sería lo mismo?
- S08: Sí.
- P: Me has dicho “equis” más “equis” más “equis” menos cuatro “equis”. ¿Es lo mismo que se escribe ahí?
- S08: No.
- P: ¿Sabrías decirme ahora uno para esta expresión simbólica?
- S08: No.
- P: Bueno, vale. Vámonos a la ficha que hicimos el otro día. Teníamos situación uno y situación dos. Te voy a hacer una pregunta sobre la situación uno, pero el enunciado dos, pasa la página. Yo te doy como expresión simbólica, “equis” más sesenta igual

- a cinco “equis”. Entonces, en la respuesta que has marcado como correcta, ¿Por qué cambiaste tu elección de la opción a por la c? porque marcaste primero la opción a, incluso me la razonaste, y lo tachaste y cambiaste a la opción c.
- S08: Porque un número más sesenta no te puede dar cinco.
- P: ¿No, nunca?
- S08: No.
- P: ¿Y si yo le sumo a sesenta el número menos cincuenta y cinco? ¿Sesenta más menos cincuenta y cinco, cuánto sale?
- S08: No sé.
- P: Piensa, [*escribiéndoselo en un papel*] si a 60 le sumamos el número -55, ¿qué resultado obtengo?
- S08: Cinco.
- P: Entonces sí tengo un número que al sumarle sesenta me da cinco, ¿no?
- S08: Sí.
- P: A ver, yo no te estoy preguntando por la existencia o no de un número, o sea, de si se cumple o no la ecuación. Simplemente quiero, si yo te doy un enunciado simbólico me digas con qué enunciado verbal corresponde.
- S08: Um...
- P: Léelos en voz alta.
- S08: ¿Todos?
- P: Sí, lo que estás haciendo, hazlo en voz alta.
- S08: El c, al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco.
- P: ¿Por qué?
- S08: No sé, los estoy leyendo.
- P: Vale.
- S08: Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco.
- P: Dime cómo escribirías eso simbólicamente.
- S08: “Equis” más sesenta igual a cinco “equis” por cinco.
- P: ¿Y correspondería?
- S08: No. porque es cinco, no cinco por cinco.
- P: Entonces, qué expresión verbal correspondería.
- S08: Al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco, ¿no?
- P: ¿Tú crees que sí?
- S08: ¿No?
- P: No lo sé, explícamelo. Vamos a ver si corresponde o no. El b me has dicho que no porque le sobraba el cinco último. La c que dice ahora, al sumarle a un número sesenta, ¿aquí que pone?
- S08: “Equis” más sesenta.
- P: ¿Es lo mismo?
- S08: No.
- P: Sumarle a un número sesenta, “equis” más sesenta, ¿no es la misma expresión?
- S08: Um...
- P: Al sumarle a un número que no conocemos, llamémoslo “equis”, sesenta...
- S08: Ah, sí si...
- P: Se obtiene, es igual, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco. Si yo multiplico un número por cinco, ¿cómo lo expreso simbólicamente?
- S08: Um...
- P: Un número que no conozco, “equis”, lo multiplico por cinco, ¿qué expresión

- simbólica es?
- S08: “Equis” por cinco.
- P: Entonces, ¿corresponde con ésta?
- S08: Sí.
- P: ¿Corresponde entonces el enunciado c con la expresión simbólica?
- S08: Sí.
- P: ¿Seguro?
- S08: Sí.
- P: Vale. Vámonos a la situación dos, enunciado uno. Dice, el perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros. ¿Qué es el perímetro de una figura?
- S08: La suma de todos sus lados.
- P: Si yo tengo un rectángulo, dime cómo llamaríamos a los lados.
- S08: Um...
- P: ¿Cómo son los lados de un rectángulo?
- S08: Um...
- P: Iguales dos a dos, ¿no?
- S08: Sí.
- P: Entonces, si no conocemos un lado, ¿cómo lo llamamos?
- S08: “Equis”.
- P: ¿Y si no conocemos el otro lado?
- S08: Um...
- P: Si un lado es “equis”, el que es igual que él, ¿cómo se llamará también?
- S08: “Equis”.
- P: ¿Y al otro lado, cómo se llamará?
- S08: Dos “equis”.
- P: ¿Por qué?
- S08: No sé.
- P: Es un rectángulo, una cosa es la base y otra la altura, miden distinto. Si no sabemos lo que miden, ¿cómo los llamas?
- S08: “Equis”.
- P: Nos dicen que es un rectángulo por lo que no puede medir “equis” también.
- S08: Dos “equis”.
- P: Lee el enunciado. ¿En el enunciado te dice que sea el doble?
- S08: No.
- P: ¿Cómo te dice el enunciado que es la base?
- S08: El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho.
- P: La base mide seis metros más que el ancho. ¿Cuánto mide la base?
- S08: Seis “equis”.
- P: Seis metros más que su ancho.
- S08: Um...
- P: Dibuja un rectángulo, vamos a llamar “equis” a la altura, y yo sé que la base mide seis metros más, ¿cómo se expresa eso?
- S08: No sé.
- P: Seis metros más que esto. Si por ejemplo la altura mide cinco, ¿cuánto mide la base?
- S08: ¿Seis más “equis”?
- P: ¿Por qué?
- S08: Porque se lo sumas.
- P: Vale, si tú me has dicho antes que el perímetro es la suma de todos los lados, ¿cuántos lados tengo que sumar?

- S08: Cuatro.
P: ¿Y cómo quedaría la expresión?
S08: ¿Lo que te dé?
P: Claro, ¿cómo expresas tú el perímetro de esa figura?
S08: Doce “equis”.
P: La expresión que quedaría. Si es este lado más este lado, ¿cómo queda?
S08: “Equis” más “equis”.
P: ¿Y si le tengo que sumar los otros lados?
S08: “Equis” más “equis” más seis más “equis” más seis más “equis”.
P: ¿Con qué expresión simbólica corresponde entonces?
S08: La a.
P: ¿Seguro?
S08: Sí.
P: Venga, vamos a la situación uno, enunciado tres. Aquí hiciste lo mismo. Marcaste la opción c y la explicaste, la tachaste y elegiste la opción d. ¿Por qué cambiaste la respuesta en este caso? ¿Qué te hizo cambiar de opinión?
S08: Pues que la diferencia es menos. Que sería restando.
P: ¿Ésa es tu explicación? Pero la que tú has tachado, que es la c, dice también, bla bla bla, menos bla bla bla...
S08: Pues no me acuerdo.
P: Léelo a ver si te acuerdas.
S08: No, no me acuerdo.
P: Vale, vámonos entonces al enunciado cuatro. Dices que la opción correcta es la b, que dice, el triple del lado de un cubo. ¿Qué es el triple de un número?
S08: Tres veces ese número.
P: ¿Y es lo mismo hacer el triple que elevar a tres?
S08: No sé.
P: ¿Qué es tres elevado a dos?
S08: Seis.
P: ¿Sí? ¿Qué es hacer una potencia?
S08: Hay que hacerlo dos veces, pues tres por tres.
P: ¿Qué es?
S08: Nueve.
P: Entonces, ¿es lo mismo hacer tres elevado a dos que tres por dos?
S08: No.
P: ¿Es lo mismo hacer el cuadrado que el doble?
S08: No.
P: ¿Por qué?
S08: Porque esto es tres por tres.
P: ¿Qué sale?
S08: Nueve.
P: ¿Y esto es?
S08: Tres por dos, seis.
P: ¿Coincide?
S08: No.
P: Entonces, ahora, hacer el triple. Dos elevado a tres, ¿es lo mismo que tres por dos?
S08: Um...
P: Tres por dos dices que es hacer el triple. ¿Tres por dos?
S08: Seis.
P: Hacer el cubo, sería dos elevado a tres, ¿qué sería eso?

- S08: Dos por dos por dos.
P: ¿Dos por dos?
S08: Cuatro.
P: ¿Por dos?
S08: Ocho.
P: ¿Es igual que seis?
S08: No.
P: Entonces, ¿es lo mismo hacer el triple que hacer el cubo?
S08: No.
P: ¿Es lo mismo hacer el triple de un número que hacer “equis” elevado a tres?
S08: No.
P: ¿Qué expresión correspondería entonces?
S08: La c, el volumen de un cubo.
P: Vale, vámonos a la situación dos, enunciado dos. Es que no entiendo muy bien tu letra aquí. Dice, el doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los que tiene Inés. Has elegido como correcta la opción c que es dos “equis” más y partido cuatro. En tu explicación, ¿Esto que pone aquí qué es?
S08: La cuarta parte de los años que tiene Inés.
P: ¿Quién es “equis”?
S08: Un número.
P: Pero los años de Jesús o los años de Inés.
S08: Los de Jesús.
P: Y al hacer “equis” partido y, ¿qué estás haciendo?
S08: La cuarta parte de los de Inés.
P: ¿Qué es hacer la cuarta parte?
S08: Partido cuatro, ¿no?
P: El caso es que tú has elegido una opción y en la explicación has puesto otra cosa. ¿Cuál sería tu explicación de por qué has elegido la c?
S08: ¿Y si está mal?
P: ¿Por qué está mal? Yo no he dicho que esté mal, yo lo único que he dicho es que no entiendo tu letra y no entiendo qué pone ahí.
S08: Lo que pone es “y” partido cuatro y “equis” partido “y”.
P: Pero, ¿qué está mal, tu elección o la explicación?
S08: Los dos.
P: Piénsalo bien.
S08: Yo creo que la explicación.
P: ¿Puedes explicármelo bien entonces?
S08: Dos de “equis” sería el doble de los años que tiene Jesús, más “y” que sería...no, como no sabemos cuántos años tiene Inés, pues “y”, la cuarta parte.
P: Pasa la página, al enunciado tres. El número de ruedas de dos coches es ocho. ¿Qué valor está representado por la “equis”?
S08: Um...
P: ¿Qué valor no conocemos?
S08: Cuántas ruedas tiene un coche.
P: ¿Cómo expresas entonces el número de ruedas de dos coches? Imagínate que en vez de dos coches son siete coches.
S08: La b. El dos “equis” serían los dos coches y ocho sería el resultado del número de ruedas en total de los dos coches.
P: ¿Quién es la “equis”?
S08: El número de ruedas.

- P: Y si nos fijamos en el enunciado b, ¿quién es la i?
- S08: ¿El número de ruedas?
- P: ¿Entonces la “equis”?
- S08: No, está mal... sabemos cuántos coches hay... dos...
- P: Tenemos dos vehículos, “equis” el número de ruedas que tiene. ¿Cómo expresamos eso?
- S08: Sería, dos “equis” igual a ocho.
- P: ¿Sí?
- S08: Si.
- P: Vale, últimas preguntas. Cuando has tenido que elegir la opción correcta y la opción incorrecta, ¿has seguido alguna estrategia?
- S08: Leerlas. Leerlas y ver si... si era la correcta o no.
- P: ¿Eso con todos?
- S08: Sí.
- P: ¿Qué te ha resultado más fácil, explicar la opción correcta o explicar la opción incorrecta?
- S08: La correcta.
- P: Te ha sido más fácil explicar la correcta, ¿por qué?
- S08: No sé.
- P: ¿Qué te ha sido más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?
- S08: La situación dos.
- P: ¿Por qué?
- S08: Porque ya me daban el enunciado.
- P: Pero, aquí también te lo doy.
- S08: Aquí ya me das los números y tengo que elegir las letras. Ya están los números, sólo tengo que elegir. No sé, no sé decírtelo....

E.4. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO

S12

Entrevista 4. Sujeto S12. Martes 12 de marzo de 2013, 11:15h

- P: ¿Recuerdas, en el juego, cuando había una ficha con el punto rojo, qué había que hacer?
- S12: Sí. Tenias que decir como una experiencia o algo así, para decir “equis” más “equis” más uno y todo eso.
- P: En una de las fichas rojas dijiste: “El doble de mi edad menos la cuarta parte de la edad de mi hermano”. ¿Cómo se escribiría simbólicamente?
- S12: Dos “equis” menos “equis” partido de cuatro.
- P: “El doble de mi edad menos la cuarta parte de la edad de mi hermano.” ¿Representas las dos edades con la misma letra?
- S12: ¡Ah, no! Dos “equis” menos “y” partido de cuatro.
- P: En otra ficha dijiste: “Sería, mi edad más mi edad más un número... bueno, mi edad más la siguiente a mi edad, el número siguiente”. ¿Qué significa lo de “la siguiente a mi edad”?
- S12: A ver, repite.
- P: Dijiste: “mi edad más la siguiente a mi edad, el número siguiente”.
- S12: “Equis” más “equis” más uno.

- P: Pero, al siguiente a tu edad, ¿a qué te refieres?
- S12: Pues al número siguiente, por ejemplo, si yo tengo trece pues catorce.
- P: Ahora, vamos a lo que hicimos el otro día. Situación uno, expresábamos de simbólico a verbal, y situación dos, de verbal a simbólico. Te voy a hacer preguntas de las dos situaciones. Por ejemplo, de la situación uno, el enunciado uno. A ver, tú has elegido como correcta la opción d, que dice “un número impar más una edad más otra edad”. Léeme el razonamiento que has escrito.
- S12: Porque cinco es un número impar más “equis” que es mi edad más “y” que es la otra edad, es igual a cinco más un número más otro número.
- P: Vale. Lee todos los enunciados.
- S12: Cinco años más la edad de mi hermana más mi edad más la de mi hermana.
- P: ¿Qué le pasa a ese enunciado?
- S12: Pues que cinco años, sería cinco, sí, más mi edad “equis”, más la de mi hermana “y”, pero más la de mi hermana otra vez no está.
- P: Vale, al siguiente qué le pasaría.
- S12: Cinco veces mi edad y la de mi hermana.
- P: Ésta es la que tú has marcado como incorrecta.
- S12: Sí, porque sería, cinco “equis” por “y”.
- P: ¿El siguiente?
- S12: Cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo. Sería, cinco, entre paréntesis “equis” más “y”, o cinco más “equis” más.
- P: ¿Y la siguiente?
- S12: Esa es la que te he dicho bien.
- P: Vale, ¿qué diferencia hay entre la opción c y la d.
- S12: Pues es que eso es lo que no sabía.
- P: ¿Qué me preguntaste?
- S12: Te pregunté que si podía haber dos correctas.
- P: Ah vale, pero ahora te digo, ¿qué diferencias encuentras entre esos dos enunciados verbales?
- S12: Es que no lo sé. Es que yo creo que más o menos son iguales.
- P: Dime la expresión simbólica del c.
- S12: A ver, cinco años más... pues yo creo que sería, cinco más, entre paréntesis, “equis” más “y”.
- P: ¿Y no es lo mismo que esto?
- S12: Sí, por eso.
- P: ¿Y éste de aquí, el d?
- S12: Pues es lo mismo, pero podría poner cinco o cualquier número impar.
- P: Pero según el enunciado del ejercicio, yo quiero la traducción exacta de este enunciado, entonces, ¿cuál sería?
- S12: Entonces, sería el c.
- P: ¿Estás segura?
- S12: Yo creo que sí.
- P: Vale, vamos al enunciado uno de la situación dos. Sólo una preguntilla. ¿Por qué me dijiste que necesitabas hacer el dibujo?
- S12: Porque para guiarme yo.
- P: ¿Sí?
- S12: Sí, yo creía que así en mi cabeza sabría las cosas.
- P: Sin el dibujo, ¿no lo habrías sabido?
- S12: Yo creo que no.
- P: ¿Por qué?

- S12: Porque me habría liado más, habría tardado el triple.
P: Vale. Volvemos a la situación uno, al enunciado tres. El enunciado dice, “equis” al cuadrado menos “y” al cuadrado igual a nueve. Y tú has marcado como correcta...
S12: La opción c.
P: Qué dice...
S12: El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve.
P: ¿Cuál es el perímetro de una figura?
S12: La suma de sus lados.
P: Y si yo tengo una habitación cuadrada, de lado desconocido, ¿cuál es su perímetro?
S12: Pues “equis” por cuatro.
P: ¿Y aquí qué pone?
S12: “Equis” elevado a dos. Sería el área, ¿no?
P: Entonces, ¿qué opción crees que sería? Vamos a hacer lo mismo de antes, léeme la primera y dime qué le pasaría y así...
S12: El área del suelo de mi habitación cuadrada menos el área del suelo de tu habitación cuadrada. Que aquí le faltaría el igual a nueve.
P: Vale, esa es la que me habías marcado como incorrecta.
S12: Sí. La diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es un número impar. Um...yo creo que estaría bien, pero como has dicho que tiene que ser justo...pues debería decir, en vez de un número impar, nueve. Después, ésta es la que he dicho. Y la d, la diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es nueve. La d estaría bien.
P: ¿Seguro?
S12: Sí.
P: Ahora, el enunciado cuatro de esta situación uno. Lo mismo, el enunciado simbólico dice, “equis” elevado a tres, y los enunciados verbales, tú me has marcado la opción b, ¿qué dice?
S12: El triple del lado de un cubo.
P: Léeme tu explicación.
S12: Porque “equis” es el lado de un cubo, y elevado a tres, el triple, es decir, el triple de un cubo.
P: ¿Qué significa hacer el triple de un número?
S12: Pues yo creo...ahora yo pienso que debería ser tres “equis”.
P: ¿Eso el triple de un número?
S12: Si.
P: ¿Y hacer el cubo?
S12: “Equis” elevado a tres.
P: ¿Y es lo mismo?
S12: No.
P: ¿Seguro?
S12: Si.
P: Dime un ejemplo.
S12: Tres por tres, nueve. Tres elevado a tres...dieciocho...no...tres por tres nueve, nueve por tres...veintisiete.
P: Vale. Entonces, no es lo mismo.
S12: Yo creo que sería el a...el área de un cubo...puede ser pero no sé. El triple del lado de un cubo, no. El volumen de un cubo, no creo. La tercera potencia de tres, no. Es que ésta no sabía yo muy bien...
P: En clase estuvimos viendo lo que significaba el área y el volumen. ¿Te acuerdas?

- S12: Si...
- P: Para calcular el volumen de una figura, se hace el área de la base por la altura.
- S12: Ah sí, ya me acuerdo, que pusimos de ejemplo la habitación.
- P: Vale. Esta habitación cómo has dicho. Lado “equis”, lado “equis” y altura “equis”. El área de la base, ¿cuál sería?
- S12: “Equis” elevado a tres.
- P: No, área de la base. Del suelo.
- S12: Ah, cuatro “equis”, ¿no?
- P: No, el área. Antes me dijiste que cuatro “equis” era el perímetro, la suma de los lados.
- S12: Ah, entonces sería ¿”equis” elevado a dos?
- P: Claro. Lado por lado sería el área del suelo. ¿Y por la altura?
- S12: “Equis” elevado a tres... entonces sería el área de un cubo.
- P: No...te estoy diciendo que el volumen era área de la base por la altura.
- S12: Ah eso...el volumen de un cubo... sí, que me he confundido.
- P: Pero ¿te acuerdas que lo vimos como tú dices, con la clase?
- S12: Sí, sí.
- P: Venga. Vamos a la situación dos enunciado cuatro. Dice, el área...
- S12: El área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina.
- P: Vale. ¿Por qué marcaste en la opción correcta el enunciado d, y luego lo cambiaste por el b?
- S12: Porque había leído q era...a ver... es que no me acuerdo ahora...
- P: Bueno, era por si te acordabas.
- S12: Porque creo que me había equivocado y donde ponía b era d. No sé.
- P: ¿Crees que ésta opción que has marcado como incorrecta, es correcta o incorrecta?
- S12: Incorrecta.
- P: ¿Por qué?
- S12: Porque tiene que ser por “y”, que es la profundidad de la piscina.
- P: Y la opción b, ¿consideras que es correcta o incorrecta?
- S12: Creo que está bien.
- P: La que has marcado como correcta. ¿Por qué aquí, que te habla del suelo de una piscina cuadrada, sí identificaste bien el área como “equis” cuadrado y en los anteriores no?
- S12: No sé
- P: ¿No pensaste en volver a los anteriores y revisarlos o algo?
- S12: No. Bueno lo pensé, lo miré, pero no se me ocurrió.
- P: Y ahora unas preguntas así, en modo general. Cuando has elegido la respuesta correcta o incorrecta, ¿has seguido alguna estrategia?
- S12: No. Lo leía y según mi cabeza lo decía, así hacía.
- P: Vaya manera de explicarte...
- S12: Pues yo que sé...por ejemplo, en éste, los veía y decía...”equis” elevado a dos tiene que estar mal porque no encaja en el enunciado....
- P: Es decir, ¿ibas cogiendo cada enunciado de cada opción e ibas comparándola?
- S12: Sí.
- P: Vale. ¿Qué te ha resultado más fácil escoger, la respuesta correcta o la incorrecta?
- S12: La incorrecta.
- P: Y explicarla, ¿cuál te ha resultado más fácil?
- S12: La correcta. O la incorrecta. No sé, en explicarla no he tenido mayor problema.
- P: Y ahora, ¿qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te

- doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?
- S12: La dos.
- P: ¿Por qué?
- S12: Porque me dicen el enunciado y yo pues me lo hago primero en mi cabeza, y según lo hiciese pues ya elegía.
- P: ¿Y no podías haber hecho lo mismo en esto?
- S12: Sí.
- P: Leer cada opción e ir pensando cómo ponerlo en tu cabeza.
- S12: Sí, también. No sé, no se me había ocurrió.
- P: A la hora de elegir una respuesta. ¿Qué pensabas que había, sólo una correcta o sólo una incorrecta?
- S12: Yo pensaba que había una correcta y tres incorrectas. Pero había veces, como por ejemplo en éste [*señala el enunciado cuatro de la situación uno*] en que tenía más dudas.
- P: Y cuando pensabas que había más de una incorrectas, a la hora de elegir, de decidirte por una, ¿cómo lo habías?
- S12: Lo volvía a leer.
- P: Pero, ¿te ha influido el hecho de tener que explicarlas?
- S12: No.
- P: Vale. ¿Y par a las opciones de las correctas, si pensabas que había dos o tres?
- S12: Pues cogía la primera que viese o la que más incorrecta creía que fuese.
- P: ¿Qué significa la más incorrecta?
- S12: Pues por ejemplo aquí, la que le faltan o algo...
- P: Vale. Muchas gracias.

E.5. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO

S01

Entrevista 5. Sujeto S01. Miércoles 13 de marzo de 2013, 11:15h

- P: ¿Te acuerdas de esta primera ficha que hicimos? Que había que completar las fichas de dominó.
- S01: Sí.
- P: ¿Te acuerdas de por qué dejaste varios huecos sin rellenar? Que corresponden a los enunciados uno, siete, ocho y doce.
- S01: Sí.
- P: ¿Por qué? ¿Por qué no sabías...?
- S01: Mira, aquí yo no sabía cómo ponerlo. No sabía si poner un número más... ese número más uno menos cuatro.
- P: ¿Y por qué no lo pusiste así?
- S01: Ah, ¿es que estaría bien?
- P: Sí, es una forma de decirlo.
- S01: Porque tú aquí ponías el producto, un número más su consecutivo... y yo no sabía si esto era su consecutivo o no...o qué es lo que era.
- P: Bueno, pero como lo has dicho está bien dicho. Un número más el número más uno menos cuatro.
- S01: Pues vaya...
- P: A ver, éste de aquí corresponde con este enunciado, para completar la ficha.
- S01: ¿No era éste?
- P: No, éste tiene que ir con esta ficha, ¿te acuerdas?

- S01: Ah sí. Pues...
- P: Lee en voz alta.
- S01: El producto de la mitad de un número por el triple de otro número. Ese no lo sé.
- P: La mitad de un número.
- S01: “Equis” partido de uno...de dos.
- P: Por el triple de otro número.
- S01: Pues...tres “equis”.
- P: Dice, un número...otro número.
- S01: Pues...esto sería multiplicar...el producto de “equis” partido uno... ¿sería partido uno?
- P: Me acabas de decir dos y ahora me dices uno...
- S01: Ah ya. “Equis” partido de dos por tres “equis”...no...por la mitad de un número por el triple de otro número...tres “equis”.
- P: Pero entonces estarías llamando a los dos números igual.
- S01: Es que no sé.
- P: Éste, el enunciado seis. ¿Cómo me lo has leído? Que es “equis” por “y” elevado a tres.
- S01: Un número por otro número elevado al cubo.
- P: ¿Por qué me distingues un número y otro número?
- S01: Porque son dos números, “equis” por “y”.
- P: Son dos números distintos representados por dos letras distintas. Entonces, ¿en éste que estamos, en el enunciado uno?
- S01: Ah vale...sería tres “y”. Vale, vale.
- P: Ahora, este de aquí, el enunciado siete, dice... El cuadrado de la suma de dos números consecutivos.
- S01: Pues...”equis” elevado a dos...es que, ¿cómo se ponía lo de los números consecutivos? ¿”Equis” más dos? No...
- P: En éste, el enunciado doce que tú me has dicho, un número más el número más uno, también se puede decir como “equis” y “equis” más uno su siguiente, un número más su consecutivo, y el consecutivo es ese “equis” más uno.
- S01: Ah vale, vale. Entonces, “equis” elevado a dos, ¿más “equis” más “equis” uno?...más “equis” más uno... No sé.
- P: Vamos a ver éste de aquí. Un número par menos la cuarta parte de otro número. El enunciado ocho, ¿cómo lo pondrías?
- S01: Pues... ¿puedo poner un número... cuatro por ejemplo o tiene que ser “equis”?... cómo me está diciendo ya un número par...”equis” menos cuatro partido de... No...”equis”...espérate...i partido de cuatro... No sé.
- P: Vale. ¿Te acuerdas del juego? Que había enunciados simbólicos marcados con un punto rojo. ¿Te acuerdas de qué significaba?
- S01: Sí, que tenías que explicarlo con otro enunciado, con un ejemplo. Por ejemplo la edad mía más la de mi hermano...
- P: Vale. Hay un enunciado que me dijiste: “Mi edad más, otro año, menos cuatro”. Eso, ¿cómo lo escribirías?
- S01: Pues “equis” más otro año, “y”, más... ¿qué?
- P: Mi edad más, otro año, menos cuatro.
- S01: “Equis” más “equis” menos cuatro.
- P: Corresponde con el enunciado simbólico que yo te di, que pone “equis” más “equis” más uno menos cuatro.
- S01: Que va...
- P: ¿Podrías decirme un enunciado ahora?

- S01: A ver...mi edad ¿dentro de dos años? De un año.... Sí, mi edad más dentro de un año menos cuatro.
- P: Ahora, nos vamos a ir a la situación uno y situación dos, ¿te acuerdas que las estuvimos haciendo el otro día? Situación uno que te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, y la situación dos donde te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegir el simbólico. ¿Te acuerdas?
- S01: Sí.
- P: Vale, te voy a hacer preguntas de las dos situaciones, alternando. Situación uno, enunciado uno. Donde yo te digo, cinco más “equis” más “y”. Tú marcaste como opción correcta la opción d. Léeme tu explicación.
- S01: Porque el enunciado simbólico nos da cinco que sería el número impar, más “equis” que sería más una edad que desconocemos, más “y” que sería la otra edad que desconocemos.
- P: Cuando contestaste, ¿leíste todas las opciones antes de elegir la verdadera?
- S01: Sí.
- P: ¿Y consideras que ésta es la que más se ajusta al enunciado dado?
- S01: Yo creo que sí. Es que yo me guié más por lo de número impar porque como dice cinco.
- P: Pero leíste todas, ¿no?
- S01: Sí.
- P: ¿Qué le pasa a la opción a?
- S01: Cinco años más la edad de mi hermana más mi edad más la de mi hermana. Pues es que aquí, me falta uno, ¿no? Porque te dice, la edad de mi hermana más mi edad más la de mi hermana...no serían tres.
- P: Al enunciado b, que es el que tú has marcado como incorrecto, ¿qué le pasa?
- S01: Cinco veces mi edad y la de mi hermana. Porque es que aquí no te dice...cinco veces la edad que tengo yo y la de mi hermana. Que no te pone cinco veces...
- P: ¿Cómo se pone cinco veces?
- S01: Cinco “equis”, ¿no?
- P: ¿Qué le pasa al enunciado c?
- S01: Cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo.
- P: ¿Cómo sería simbólicamente?
- S01: Así, ¿no?
- P: ¿Así cómo?
- S01: Cinco más “equis” más “y”.
- P: Entonces, ¿cuál se ajusta mejor, la c o la d?
- S01: La c. Pero, ¿este también estaría bien?
- P: Si yo te pido el que se ajusta más.
- S01: Si claro...la c.
- P: Vámonos a la situación dos, enunciado uno. Lee de nuevo el enunciado y la expresión que tú has seleccionado, por favor.
- S01: El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros. Pues yo he cogido la d, que es “equis” más “equis” más “y” más “y” igual a noventa y dos.
- P: ¿Y tu razonamiento?
- S01: Porque ahí ya te dan el perímetro directamente de los cuatro lados que es noventa y dos.
- P: ¿Consideras que has tenido en cuenta todos los datos de la expresión verbal?
- S01: Um...
- P: Cuando tú has marcado esta opción d, ¿has tenido en cuenta todo lo que te dice el

- enunciado verbal?
- S01: No he puesto lo de cuyo largo mide seis metros más.
- P: Y entonces, ¿cómo sería?
- S01: Pero es que...aquí....
- P: ¿Aquí donde?
- S01: En estas, que yo qué sé... en ésta es mucho...
- P: ¿Qué?
- S01: “Equis” más “equis” más seis más “equis” más seis igual a noventa y dos.
- P: ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo? El jardín te están diciendo que es rectangular, ¿cuál es el perímetro de ese rectángulo?
- S01: Pues el largo y el ancho...no, uno más grande y uno más chico.
- P: Pero, ¿hacer qué?
- S01: ¿Qué?
- P: ¿Qué hay que hacer con el uno más largo y el uno más chico?
- S01: Pues...
- P: ¿Cómo se calcula el perímetro?
- S01: A ver...el perímetro es todo, ¿no?
- P: Pero, ¿qué significa todo?
- S01: Pues todos los lados.
- P: Pero, ¿qué haces con todos los lados?
- S01: Los sumo.
- P: Vale, la suma de todos los lados.
- S01: Sí, eso.
- P: Entonces, yo tengo un rectángulo. Los lados te están diciendo que el largo mide seis metro más que el ancho. ¿Conocemos el ancho? ¿Cómo lo llamamos?
- S01: “Equis”.
- P: Vale. El otro de aquí, el que está enfrente, cómo se llama.
- S01: “Equis”.
- P: Ahora, te están diciendo que le otro lado mide seis metros más que el ancho.
- S01: Ah, ¡es este!
- P: ¿Cuál es este?
- S01: “Equis” más “equis” más seis más “equis” más seis igual a noventa y dos.
- P: ¿Seguro?
- S01: Sí.
- P: ¿Por qué?
- S01: Porque te están dando el ancho, bueno, la altura, “equis” más “equis”. Más el largo que mide seis metros más, más el otro largo que mide seis metros más.
- P: Pero lo entiendes, ¿no?
- S01: Sí sí.
- P: ¿Seguro?
- S01: Sí, es que en verdad te pones ahora y dices “es verdad”.
- P: Pero eso significa que no pensáis de primeras.
- S01: Ya.
- P: Situación uno enunciado dos. Sin mirar la expresión simbólica que te he dado, ¿puedes leer de nuevo la expresión verbal que has seleccionado? Has marcado la b, que no me has explicado el por qué. ¿Por qué no me la has explicado?
- S01: Porque no sé, de esta yo no estaba muy segura.
- P: Lee.
- S01: Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco.

- P: ¿Cómo lo escribirías simbólicamente?
- S01: Pues un número, “equis”, más sesenta, igual a cinco “equis” por...”equis”...por cinco.
- P: ¿Corresponde con la simbólica que yo te he dado?
- S01: No, falta el por cinco otra vez.
- P: ¿Entonces?
- S01: Es verdad...
- P: Vale.
- S01: ¿Te digo cuál sería?
- P: Sí, dímelo.
- S01: Pues este, sesenta más un número es igual a cinco veces otro número.
- P: ¿Cómo lo escribirías simbólicamente?
- S01: “Equis” más sesenta igual a cinco “equis”...es que... me dice lo de sesenta más un número pero....sería sesenta más “equis”...
- P: Da igual el orden.
- S01: Entonces sí.
- P: ¿Pero igual a qué?
- S01: Cinco veces otro número, cinco “equis”.
- P: Pero es como cuando estábamos hablando de la ficha uno, es igual a otro número.
- S01: Ah es verdad, sería “y”. Pues ésta no es. ¿Es la c? Al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco.
- P: Míralo, al sumarle a un número sesenta, “equis” más sesenta...sigue leyendo...se obtiene el mismo número...
- S01: Que al multiplicarlo por cinco...cinco “equis”.
- P: ¿Es lo mismo?
- S01: Sí, es el c.
- P: Aparte de por descarte porque es el que quedaba....
- S01: Sí, jeje.
- P: Venga, vámonos a la situación dos, al enunciado dos. Vale, tú me has marcado como incorrecto la a. ¿Me puedes leer por qué? Espera, el enunciado dos dice el doble de años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés. Venga, dime por qué me has marcado como incorrecta la a.
- S01: Pues porque no nos dice nada de cuatro años.
- P: Y como correcta, ¿cuál me has marcado?
- S01: La b. ¿Te digo por qué?
- P: Sí.
- S01: Porque ahí nos dice el doble de los años de uno más un cuarto de los años que tiene la otra. Bueno...una explicación un tanto extraña...
- P: Pues explícamela ahora.
- S01: Pues...aquí te dice el doble de los años, dos “equis”...
- P: ¿De quién son esos años?
- S01: Los que tiene Jesús. Más un cuarto de los años que tiene Inés, “equis” partido cuatro.
- P: ¿En algún momento te dice que Inés y Jesús tengan la misma edad?
- S01: Um....
- P: ¿Te suena de algo que llevamos hablando desde hace un ratillo?
- S01: Ay... ¡es verdad! Sería ésta...
- P: ¿Cuál es esta?
- S01: Dos “equis” más “y” partido cuatro. Es que es verdad lo de la i...porque es otro número.
- P: Vale, otra vez volvemos a la situación uno, enunciado cuatro. Lee de nuevo tus

- razonamientos.
- S01: ¿De cuál?
- P: Tanto de la correcta como de la incorrecta, te quiero preguntar de las dos.
- S01: Pues en la correcta...porque la “equis” representa el área y el elevado a tres es el cubo.
- P: ¿Y en la incorrecta qué me has puesto?
- S01: Porque ahí no se nos dice nada de la tercera potencia de tres ni nada.
- P: A ver...el enunciado dice, “equis” elevado a tres. Y el apartado d, que es el que tú has marcado como incorrecto dice, la tercera potencia de tres. ¿Esto sería la tercera potencia de tres?
- S01: No.
- P: En el enunciado a. ¿Cómo se calcula el área y el volumen de un cubo?
- S01: Um....
- P: A ver si te acuerdas, que lo vimos en clase.
- S01: Um....
- P: ¿Te acuerdas que dijimos que era como la clase? Área de la base por la altura.
- S01: No me acuerdo...
- P: Imagina que el suelo de la clase es cuadrado, de lado desconocido, ¿cómo lo llamamos?
- S01: Área.
- P: No, el lado, ¿cómo lo llamamos?
- S01: Ah, pues lado...o “equis”...
- P: Da igual, lo llamamos lado, no pasa nada...lado y lado. El área de la base, ¿cómo sería?
- S01: Lado por lado.
- P: O sea, lado por lado, lado al cuadrado. Ahora imagínate que como es el cubo, la altura es también lado. Entonces, el volumen.
- S01: Lado por lado más la altura.
- P: Por la altura.
- S01: Vale.
- P: Lado por lado, ya tenemos lado al cuadrado. Al multiplicarlo otra vez por el lado.
- S01: Nos sale elevado a tres.
- P: Entonces, ¿qué estamos calculando?
- S01: El área.
- P: No.
- S01: Ah, el volumen de un cubo. Porque es lo dos lados por otro...
- P: ¿No te acuerdas que lo hablamos? El área del suelo, y el volumen la capacidad de todo, por la altura.
- S01: Es que no me acuerdo... de verdad...
- P: Pero es que tampoco os ponéis a pensar.
- S01: Ya...te crees que lo tienes bien....
- P: Vale, vamos al enunciado tres de la situación dos. Como correcto has marcado la opción d. Lee tu razonamiento por favor.
- S01: Porque nos dice los dos coches y el numero de ruedas que son ocho.
- P: ¿Cuál es el valor que está representado por la “equis”?
- S01: El número de ruedas.
- P: Vale. Y sobre el que has elegido como incorrecto, dices “porque en el ocho nos da un enunciado y en este caso no hace falta”. No lo entiendo.
- S01: ¿Eso he puesto? A ver...porque aquí nos pone dos “equis” igual a ocho “y”. ¿Qué hace la “y” ahí?

- P: Vale. Ahora unas preguntas en general. Cuando has tenido que elegir entre la opción correcta e incorrecta, ¿has seguido alguna estrategia? ¿Cómo lo has hecho?
- S01: Pues en la incorrecta cogía a lo mejor...leía esto, el enunciado, pues ahí sobra algo o falta algo...entonces es incorrecta. Y en la correcta pues tenías que ponerte un poco más.
- P: ¿Te ha influido el hecho de que tuvieras que justificarlo?
- S01: ¿Cómo que si me ha influido?
- P: Cambio la pregunta...cuando has tenido que decidir...si a lo mejor veías que había varias correctas o incorrectas, y has tenido que decidirte por una, ¿te ha influido el hecho de que tuvieras que explicarla? Para decir...uy, esta sé explicarla y esta no sé explicarla.
- S01: No.
- P: ¿Qué te ha sido más fácil, explicar la correcta o la incorrecta?
- S01: La incorrecta.
- P: Y, ¿qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?
- S01: La dos.
- P: ¿Más fácil?
- S01: Sí.
- P: ¿Por qué?
- S01: Yo creo que sí, porque aquí te da, por ejemplo, el número de ruedas de dos coches es ocho. Tu coges el número de ruedas, y ya ves el enunciado que tienes aquí, igual a ocho, pues es este.
- P: Pero es que aquí también. Si te doy el simbólico, uno de los verbales tiene que coincidir.
- S01: No sé, a lo mejor me viene uno de estos y me resulta más fácil el otro. No sé. Depende.
- P: ¿Depende de qué?
- S01: Pues de cómo sea el enunciado.
- P: ¿Por qué?
- S01: Pues es que... Mira, en este...en el perímetro... ahora no lo encuentro...
- P: ¿El del jardín?
- S01: Sí, éste lo veo más difícil que éste.
- P: ¿Por qué?
- S01: Mira, porque dice, el perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros. Pues yo ahí me lio...el perímetro...me lié, creía que era "equis" más "equis" más "y" más i...después me ponía lo de seis metros más...pues yo ya no sabía si había que poner... Vamos en realidad es porque no piensas...porque es de lógica vamos...
- P: Vale. Muchas gracias.

E.6. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO

S10

Entrevista 6. Sujeto S10. Jueves 14 de marzo de 2013, 10:15h

- P: ¿Te acuerdas cuando estábamos con el juego, que había unas fichas marcadas con un punto rojo?
- S10: Hacer un problema con esa ecuación.

- P: Tú me hiciste este ejemplo. Te voy a leer lo que tú dijiste, y me dices cómo lo escribirías simbólicamente. Dijiste: “El hermano de Juan tiene un año más que él. La edad de Juan más la de su hermano menos cuatro es igual a la edad de su abuelo”.
- S10: Es la edad de Juan más la de su hermano, ¿no?
- P: El hermano de Juan tiene un año más que él. La edad de Juan más la de su hermano...
- S10: Pues, “equis” más, entre paréntesis, “equis” más uno...
- P: Menos cuatro, es igual a la edad de su abuelo.
- S10: Menos cuatro es igual a “y”.
- P: Vale. Se supone que ese enunciado que tú me dijiste, correspondería con este simbólico, que dice, “equis” más “equis” más uno menos cuatro. ¿Corresponde?
- S10: Sí pero no.
- P: ¿Qué significa eso de sí pero no?
- S10: Pues que la primera parte está bien, pero que yo puse lo de igual de más.
- P: Vale. Ahora te voy a hacer unas preguntillas sobre lo que estuvimos haciendo el otro día, la ficha dos. Una pregunta sobre la situación uno, que te daba enunciados simbólicos y te daba de opciones distintos enunciados verbales. Pues en la situación uno, en el enunciado uno, que yo te doy, cinco más “equis” más “y”, tú me has escogido como opción incorrecta la opción a, ¿por qué?
- S10: Porque pone cinco años más la edad de mi hermana más mi edad más la de mi hermana...que aquí pone cinco más “equis” más “y”, pero aquí está diciendo que haga cinco años más la de mi hermana, que vamos a poner que es “equis”, más mi edad, que sería “y”, pero aquí pone que suma otra vez la edad de mi hermana.
- P: Y como opción correcta me has marcado la d, ¿por qué?
- S10: Porque un número impar, que sería cinco, más una edad “equis”, más otra, que es “y”.
- P: ¿Qué pasa con los enunciados b y c? ¿Cómo serían?
- S10: La b...la b es falsa.
- P: ¿Por qué?
- S10: Porque dice cinco veces mi edad, eso sería cinco “equis”...y ya pues lo demás, está mal. Y la c, cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo, esta también estaría mal porque pone que cinco años más la edad que tenemos mi hermana y yo, eso sería como una suma, ¿no?
- P: ¿Cómo sería?
- S10: La suma de “equis” más “y”.
- P: ¿Más qué? ¿Sólo “equis” más “y”?
- S10: No, cinco más, entre paréntesis “equis” más “y”.
- P: ¿Y no es lo mismo que esto?
- S10: No, porque esto sería, cinco más “equis”, y después más “y”.
- P: Pero que tú le pongas a esto un paréntesis...que esta expresión, cinco más “equis” más “y” tenga un paréntesis aquí en medio es lo mismo, simplemente te diría que primero hicieras esto y después más cinco, pero da igual al orden en la suma. Tu puedes sumar primero “equis” más “y” y luego el cinco.
- S10: Ah, entonces sí está bien.
- P: ¿Seguro?
- S10: Es que no sé.
- P: Si yo estuviera con números, imagínate, dos más tres más cinco, ¿cuánto sale la suma?
- S10: Pues dos más tres, cinco, más cinco diez.
- P: Y si yo te pongo un paréntesis, y hago, dos más tres entre paréntesis y fuera más cinco, ¿cuánto sale?
- S10: Dos más tres seis, no, cinco...
- P: ¿Más el otro cinco?

- S10: Diez.
- P: Con sumas, no importa el paréntesis. Otra cosa es si tuviese, cinco por, y hubiera un paréntesis con “equis” más “y”, entonces sí haría primero la suma y luego por cinco. Entonces, el enunciado c, ¿cómo sería?
- S10: Está bien.
- P: Y entre el c y el d, ¿qué diferencia habría?
- S10: Pues aquí, porque en el c dice cinco años más la edad de mi hermana...y en el d dice que suma la edad de mi hermana más...buen, una edad más otra...
- P: ¿Por qué?
- S10: ¿No?
- P: No sé, pregunto.
- S10: Porque en el c dice que sume dos edades más cinco...no, cinco más dos edades, y en el d dice que sume un número impar, cinco más una edad, mas otra...
- P: Tú misma has dicho, un número impar.
- S10: Entonces el d estaría mal...porque un número impar puede ser otro. Entonces la verdadera sería el c.
- P: Pero, ¿ves la diferencia?
- S10: Sí.
- P: Vete al enunciado dos de la situación dos. A ver, yo te doy como enunciado verbal, el doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés. Tú me has marcado como opción correcta la d, ¿por qué?
- S10: Porque el doble de años que tiene Jesús sí estaría bien, que es dos “equis”, más un cuarto de los años de Inés, pero un cuarto de los años de Inés, pero no de mis años.
- P: Ahora en esta, la opción que has marcado como incorrecta.
- S10: El doble de los años de Jesús, dos “equis”, más un cuarto de los años de Inés, “equis” partido cuatro.
- P: Pero me has puesto la misma explicación en los dos casos. Me has dicho en los dos, “equis” partido cuatro.
- S10: Ah, porque me he confundido, porque “equis” partido cuatro sería también la edad de Jesús, porque está la “equis”.
- P: Pero, ¿en qué te has equivocado, en elegir o en explicar?
- S10: En explicar. He puesto “equis”, en vez de “equis” e “y”.
- P: ¿Seguro? ¿Pero está bien entonces la opción d?
- S10: Creo que sí.
- P: Vale, unas preguntas en modo general. Cuando has tenido que elegir una opción correcta o incorrecta, ¿has seguido alguna estrategia?
- S10: Lo he leído y después he elegido. No sé.
- P: ¿Pero cómo has hecho esa elección?
- S10: Primero, pues que tiene que tener dos letras distintas, por la edad de Jesús e Inés, vamos, que me quedarían estas dos. Y luego, entre el c y el d, he elegido el d, porque aquí sería cuatro partes...a ver...esto es... Ay, ya me he liado...
- P: No te estoy preguntando por ese enunciado solo, sino en general por cómo has actuado en todos.
- S10: Bueno, he mirado las letras, a ver si coinciden...a ver si salen bien...
- P: ¿Qué te ha resultado más fácil, elegir la opción correcta o la opción incorrecta?
- S10: La incorrecta, porque en este ejemplo, una incorrecta sería una de las que no tienen dos letras, elegir una de estas dos.
- P: Y en este mismo ejemplo que tú estás diciendo, el enunciado dos de la situación dos. Dices que descartarías la opción a y b porque no tienen dos letras.
- S10: Sí.

- P: ¿Por qué me has explicado la b y no la a?
- S10: Porque lo he hecho al azar.
- P: ¿Y qué te ha resultado más fácil, explicar la opción correcta o la opción incorrecta?
- S10: Pues la opción correcta.
- P: ¿Por qué?
- S10: Porque supongo yo que como ya está correcta, es solo decir lo que hay.
- P: ¿Qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?
- S10: Creo que la situación uno. Porque me resulta más difícil dado el enunciado verbal.

E.7. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO

S05

Entrevista 7. Sujeto S05. Jueves 14 de marzo de 2013, 10:45h

- P: ¿Te acuerdas de esta ficha? En la que había que rellenar huequitos...
- S05: Sí.
- P: Una pregunta, ¿por qué te dejaste estos espacios sin rellenar?
- S05: No sé.
- P: ¿No sabías? ¿Sabrías ahora?
- S05: A ver... un número, multiplicado por otro número más su siguiente, es igual a siete multiplicado por un número.
- P: A ver, vuelve a decirlo.
- S05: Un número...
- P: ¿Quién sería ese número?
- S05: “Equis”. Multiplicado por otro número, “equis”.
- P: Si me estás diciendo por otro número...
- S05: No, por el mismo número... más uno, es igual a siete por otro número... o el mismo número... el mismo, es el mismo...
- P: Éste, “equis” por “y” elevado a tres.
- S05: Pues un número por otro número elevado al cubo.
- P: Vale, ya me has hecho el enunciado cinco y el enunciado seis. Vamos al enunciado ocho.
- S05: Dos menos un cuarto... porque dice la cuarta parte de otro número... no sé
- P: ¿Y éste?
- S05: Pues la raíz cuadrada de un número, que es “equis”, elevada a otro número, que es “y”.
- P: Vale. ¿Te acuerdas cuando estuvimos jugando con las fichas del dominó?
- S05: Ah, sí.
- P: ¿Te acuerdas de lo que significaba cuando aparecía una ficha que tenía marcado un punto rojo?
- S05: Pues que tenía q hacer una pregunta, inventada por ti, y que valía más puntos.
- P: Mira, en una de esas fichas, tú me dijiste: “Mi edad más, otro año, menos cuatro”. ¿Cómo escribirías eso simbólicamente?
- S05: Pues quince más ¿otro número?
- P: Dijiste, mi edad más otro año menos cuatro.
- S05: Quince más uno... no... no sé.
- P: Tú querías expresar verbalmente un enunciado contextualizado para este enunciado simbólico, “equis” más “equis” más uno menos cuatro. ¿Correspondería?
- S05: No.

- P: ¿Cómo harías un enunciado contextualizado para este simbólico?
- S05: Una edad, más esa edad más uno...no sé...
- P: Bueno, ¿te acuerdas de esta última ficha que estuvimos haciendo? Teníamos dos situaciones...
- S05: Sí, sí...
- P: Te voy a hacer una pregunta sobre el enunciado uno de la situación uno. Donde el enunciado que yo te doy es cinco más “equis” más “y”, y tú tenías que elegir un enunciado verbal... ¿Te acuerdas?
- S05: Sí.
- P: Como razonamiento a la opción correcta, tú me dijiste “la respuesta correcta es la c porque hay dos incógnitas diferentes”. Léeme las distintas opciones.
- S05: Pues la a cinco años más la edad de mi hermana más mi edad más la de mi hermana. La b, cinco veces...
- P: Para para... ¿De cuántas letras estaríamos hablando aquí en la opción a?
- S05: Cinco más la edad de mi hermana...
- P: ¿Con qué designaríamos la edad de mi hermana?
- S05: Con “equis”. Más mi edad...
- P: ¿Con qué la designarías?
- S05: Con “y”. Más la de mi hermana...
- P: ¿Con qué designarías esa?
- S05: Con la “equis” también.
- P: ¿Cuántas letras tendríamos entonces?
- S05: Dos.
- P: ¿Y en la opción b?
- S05: Cinco veces mi edad y la de mi hermana.
- P: ¿Cuántas letras hay ahí?
- S05: Cinco de mi hermana, de mi edad y la de hermana
- P: No, dice cinco veces mi edad y la de mi hermana.
- S05: Cinco mi edad...
- P: Vale, cinco o tenemos, ahora, mi edad y la de mi hermana, ¿las conocemos?
- S05: Sí, no son incógnitas... la mía es la “equis” y la de mi hermana la “y”.
- P: ¿Hay dos letras?
- S05: Sí.
- P: Entonces, esta justificación, ¿no te serviría también para ésta?
- S05: No sé.
- P: ¿Qué te ha hecho diferenciar la opción b de la opción c por ejemplo?
- S05: Pone cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo...“y” más “equis”...
- P: ¿Cómo escribes cinco veces mi edad?
- S05: Cinco veces...cinco...
- P: Pero si tú escribes cinco veces mi edad, ¿ahí qué operación estás haciendo?
- S05: Multiplicar.
- P: Y en la expresión simbólica que yo te estoy dando, ¿qué operación hay?
- S05: Suma.
- P: Ahora, en el enunciado uno de la situación dos. Para las dos opciones, ¿puedes explicarme cómo has realizado la elección en cada caso?
- S05: Pues la correcta, la c, porque ponía el perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho... y eso es el perímetro.
- P: ¿Cuál es el perímetro de una figura, de un rectángulo, cuyos lados no conozco?
- S05: No se...
- P: El rectángulo del que está hablando, del jardín. ¿Cómo llamas a los lados?

- S05: “Equis” más dos, “equis” más dos...
- P: Lee el enunciado de nuevo. El perímetro de un jardín rectangular... léelo tú en voz alta.
- S05: El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho es noventa y dos metros. “Equis”...y el otro seis metros más, “equis” más seis.
- P: Y ahora, si me has dicho que el perímetro es la suma de los lados.
- S05: “Equis” más seis más “equis” más seis más “equis” más “equis”...
- P: ¿Qué enunciado es el correcto?
- S05: El a.
- P: Vale. Volvemos a la situación uno, al enunciado dos. Léeme tu justificación al elegir como respuesta correcta la c.
- S05: La respuesta correcta es la c porque al realizar la ecuación da correcto.
- P: ¿Qué significa para ti “al realizar la ecuación”?
- S05: Pues al realizar esto, al resolverlo.
- P: Pero, ¿qué tiene que ver resolver la ecuación?
- S05: Pues que si da, pues ya está.
- P: Pero mi pregunta es, si resolviste la ecuación, ¿cómo llegaste a deducir que el enunciado c es el correcto?
- S05: Pues que un número “equis” más sesenta, se obtiene el mismo resultado, o sea que es igual, que al multiplicarlo por cinco.
- P: ¿Pero eso es resolverlo?
- S05: No sé.
- P: Sólo quiero saber cómo llegaste a resolver deducir la opción correcta.
- S05: No sé.
- P: ¿Lo hiciste con todas, las resolviste todas, o solo ésta?
- S05: No sé.
- P: Cuando tú la resolviste, ¿qué te daba?
- S05: Umm...
- P: Un número, ¿no?
- S05: Si.
- P: Pues imagina que te da siete por ejemplo. ¿Cómo deduces de esa solución cuál es la respuesta correcta?
- S05: Jo, ya no lo sé...
- P: Vale, vámonos al enunciado dos de la situación dos. Según tu razonamiento al elegir como opción correcta la c, dices “porque dice las dos incógnitas, la “equis” y la “y””. ¿No podría ser entonces también la opción d?
- S05: Sí.
- P: ¿Por qué elegiste la c en vez de la d?
- S05: Porque pone, un cuarto, no pone cuatro partido de “y”.
- P: Vale. Vámonos ahora al enunciado tres de la situación uno. Tenemos “equis” al cuadrado menos “y” al cuadrado igual a nueve. En tu justificación de la elección de opción correcta dices “se refiere al enunciado simbólico”, ¿qué significa eso?
- S05: Porque de ahí, es la única que marca lo del enunciado. Es que eran casi todas iguales y no sabía cuál poner.
- P: Léeme la opción que has marcado como correcta, la c.
- S05: El perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve.
- P: ¿Qué es el perímetro de una figura?
- S05: ¿El perímetro?
- P: Si yo tengo un cuadrado de lado desconocido, ¿cuál es su perímetro?
- S05: ¿De un cuadrado? Pues la fórmula... “equis” más “equis”...

- P: ¿Y el área?
- S05: “Equis” por “equis”.
- P: ¿De qué está hablando este enunciado simbólico, de perímetros o de áreas?
- S05: De áreas... sería la diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es nueve.
- P: Vale. Vamos al enunciado tres de la situación dos. El enunciado dice “el número de ruedas de dos coches es ocho”. ¿Quién sería la incógnita?
- S05: El número de ruedas.
- P: Has elegido como opción correcta la c, que dice “equis” igual a ocho. Si tenemos dos coches y dices que “equis” es el número de ruedas, ¿por qué es esta opción?
- S05: No, espera...no es, porque si tenemos dos coches...no, esta no es...
- P: Entonces, ¿la c la descartas?
- S05: Si.
- P: ¿Cuántas letras tenemos?
- S05: El número de ruedas, dos coches y ocho. Tenemos tres.
- P: ¿Tres letras? No datos, ¿cuántas incógnitas tenemos?
- S05: Ah, una, el número de ruedas. Entonces no es la b.
- P: ¿Cuál es entonces?
- S05: Pues lo mismo es la d. “equis” el numero de ruedas y tenemos dos coches.
- P: Vale. Enunciado cuatro de la situación uno. Yo te doy “equis” elevado a tres, y tus explicaciones son “no lo sé”, ¿por qué?
- S05: Porque no sabía que poner.
- P: ¿Cómo has elegido como opciones correcta la c e incorrecta la a?
- S05: No sé, el volumen de un cubo, pues “equis” elevado a tres... y la otra, pues porque no es el área de un cubo...no sé.
- P: Mi pregunta es, si te decides por esas opciones será por algún motivo, ¿cómo no sabes decirme esos motivos?
- S05: Pues si el lado no lo conozco, “equis”, pues al cubo es ese tres.
- P: Según esa explicación, tu elección se debe a que al final de la frase pone “cubo”, pero no se está refiriendo a la potencia sino a la figura de un cubo.
- S05: Pues la a.
- P: No, si yo no te estoy diciendo si tu elección está bien o mal. Ahora que sabes que se está refiriendo a la figura de un cubo. ¿Qué opción crees que es?
- S05: El volumen de un cubo...sí, ese, lo tenía bien...
- P: Vale. Vamos al enunciado cuatro de la situación dos. A ver, tú das tus explicaciones y dices después “no puede ser”, ¿qué quieres decir con eso?
- S05: A ver... ¿qué decía?
- P: El enunciado verbal dice “el área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina”. Tú has elegido como opción correcta la b y como incorrecta la d, pero es que tus explicaciones son “pues porque no puede ser”.
- S05: El área del suelo de la piscina cuadrada, pues “equis” elevado a dos. Y la profundidad de la piscina pues por la “y”.
- P: Vale, eso la opción b que has elegido como correcta. Pero en la explicación de la opción que has elegido como incorrecta que es la d, me dices “pues porque es dos por “equis” elevado a dos, no puede ser”. ¿Qué no puede ser?
- S05: Pues porque pone dos y eso serian dos piscinas.
- P: Y estas cosas, ¿por qué no las explicaste por escrito? Porque si yo te pido una explicación, no me puedes decir “pues porque no puede ser”.
- S05: Bueno...
- P: Sí, imagínate que en clase me dices “¿por qué estás sumando?” y yo te digo “pues

- porque si”.
- S05: Vale...
- P: Ahora unas preguntas en modo general. Cuando tuviste que elegir entre una opción correcta o una opción incorrecta, ¿seguiste alguna estrategia? ¿Cómo lo hiciste?
- S05: Leer mucho las repuestas, y ver cuál es la mejor.
- P: ¿Qué te ha resultado más fácil, elegir una respuesta correcta o elegir una respuesta incorrecta?
- S05: Una correcta, porque en las incorrectas es más fácil que te engañen en algo...
- P: ¿Y qué te ha resultado más fácil explicar, la opción correcta o la opción incorrecta?
- S05: La correcta.
- P: ¿Por qué?
- S05: No sé.
- P: Por último, ¿qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?
- S05: La situación dos, porque para mí es más fácil si me dan un enunciado verbal y ya sacar el simbólico. Al revés creo que es más difícil. No sé. Se me da mejor éste, la situación dos.
- P: Vale. Muchas gracias.

E.8. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO

S06

Entrevista 8. Sujeto S06. Viernes 15 de marzo de 2013, 13:45h

- P: Primero te quiero hacer unas preguntas sobre el juego. ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explicame en qué consistía.
- S06: Tenías que inventarte tú...bueno, resolver primero el problema, decirlo, y luego tenias que inventarte tú uno.
- P: ¿Resolverlo?
- S06: No, primero decías lo que era, y después ya decías tú uno.
- P: Vale. Te voy a leer una de las respuestas que tú me diste, a ver cómo lo escribirías simbólicamente. Dijiste: “Una pelota de futbol más, como es su siguiente sería, dos pelotas de futbol, menos cuatro pelotas de futbol”.
- S06: Espera, dos pelotas de fútbol...
- P: Dijiste: “Una pelota de futbol más, como es su siguiente sería, dos pelotas de futbol, menos cuatro pelotas de futbol”
- S06: Una pelota de fútbol más “equis”... ¿era una pelota de futbol más dos?
- P: Tú dijiste: “Una pelota de futbol...”, ¿cómo lo escribirías?
- S06: Una pelota de fútbol más “equis” más uno...
- P: ¿Pero quién es la pelota de fútbol?
- S06: “Equis”.
- P: Entonces, ¿cómo lo escribirías?
- S06: “Equis” más “equis” más uno...bueno, “equis” más, entre paréntesis, “equis” más uno.
- P: ¿Tú crees que tiene sentido decir “el siguiente a una pelota de fútbol”?
- S06: No.
- P: ¿Entonces?
- S06: No sé.
- P: Se supone que ese enunciado correspondía con el enunciado simbólico “equis” más “equis” más uno menos cuatro. ¿Sabrías decirme ahora uno?

- S06: “Equis” balones más otros balones menos cuatro balones.
P: Pero, ¿se supone que “equis” es el número de balones?
S06: Sí. Una cantidad de balones más otra cantidad de balones más uno...
P: Pero si dices otra cantidad de balones ya no sería la misma letra, ¿o sí?
S06: Pues un balón, más otro balón más uno...más su siguiente... No sé...
P: Vale, aquí dijiste “Cuatro coches, por la mitad de dos coches, es igual al doble de dichos coches”. Venga, analicemos...cuatro coches...
S06: Um...
P: Por la mitad de dos coches, ¿cómo escribes la mitad de dos coches?
S06: Pues “equis” partido dos, o coches partido dos.
P: Pero tú me has dicho dos coches, ¿cómo escribes dos coches? ¿Qué es “equis”? ¿El número de coches?
S06: A ver...cuatro coches por... No, tampoco tiene sentido...tendría que haber dicho cuatro por dos partido dos...porque si hay dos coches...
P: ¿Por qué hay dos coches?
S06: Porque me inventé yo el enunciado.
P: Pero, ¿se corresponde con este enunciado simbólico que dice “cuatro por “equis” partido dos igual a dos “equis”?”
S06: No.
P: ¿Sabrías decirme ahora uno?
S06: Que va, esto yo no...
P: Dijiste también “Cuatro bizcochos por la mitad es igual al doble de los dos bizcochos”.
S06: Ese sí está bien.
P: ¿Quién es “equis”?
S06: El bizcocho.
P: ¿Sólo un bizcocho?
S06: No, por la mitad de un bizcocho...no, tampoco, no se me da bien a mí esto...
P: Venga, inténtalo...
S06: Cuatro bizcochos por su mitad es igual a dos...a dos bizcochos...Uff, no sé...
P: Vale, vamos a ver esto, ¿te acuerdas? Que lo hicimos el otro día, situación uno y situación dos...
S06: Sí.
P: Vamos a ver de la situación uno, el enunciado dos. Yo te di el enunciado simbólico “equis” más sesenta igual a cinco “equis” y tenías cuatro opciones. La opción que has elegido como incorrecta, tu explicación ha sido “no respeta la ecuación”. ¿En qué te basas para decir “no respeta la ecuación”?
S06: A ver, era...un número más sesenta se igual a cinco veces ese número por cinco. Porque dice cinco veces, y cinco veces sería cinco elevado a cinco...uff, no sé, me lio profesora...
P: No te líes, para eso estamos hablando, porque si yo me fijo solo en lo que has escrito no entiendo muchas cosas. A ver, dices, “no respeta la ecuación”.
S06: No sé, pensé eso y lo puse. Lo de cinco elevado a cinco, pero no creo que sea así.
P: A ver, ¿cómo escribiríais simbólicamente eso, un número más sesenta?
S06: Un número “equis”, más sesenta, “equis” igual a cinco por cinco...
P: ¿Cómo escribes cinco veces un número?
S06: Cinco “equis”.
P: Pero aquí está diciendo, cinco veces ese número por cinco, ¿cómo lo escribirías?
S06: Cinco “equis” por cinco.
P: Entonces, ¿esta opción es correcta o incorrecta?
S06: Correcta.

- P: ¿Sí? Has dicho que es cinco veces ese número por cinco es cinco “equis” por cinco, ¿es lo mismo?
- S06: Sí, es lo mismo.
- P: ¿Es lo mismo escribir cinco “equis” por cinco que cinco “equis”?
- S06: No, no es lo mismo.
- P: ¿Por qué no?
- S06: Porque lo separa un punto.
- P: ¿Qué significa “lo separa un punto”?
- S06: Pues que aquí...no, es lo mismo...es lo mismo...
- P: No, ¿es o no es?
- S06: Es lo mismo, ya esta...
- P: Después de haber trabajado en clase cómo se multiplican monomios, polinomios y demás, ¿sigues pensando que es lo mismo cinco “equis” que cinco “equis” por cinco?
- S06: Ah, no...eso no.
- P: Entonces, dime...
- S06: Ahora mismo no caigo....
- P: ¿No quieres pensar?
- S06: No, es que no me sale...
- P: Bueno, nos vamos a ir a la situación dos. En realidad a estos dos enunciados, en la situación uno el enunciado tres y en la situación dos el enunciado uno.
En el enunciado tres de la situación uno me has dicho una cosa que no entiendo, al elegir la opción correcta dices “porque el enunciado indica exactamente los pasos”, ¿a qué te refieres con eso?
- S06: A ver, el perímetro, “equis” elevado a dos, de mi habitación cuadrada... Porque dice que “equis” elevado a dos es el perímetro...porque es como si dijera...porque es correcto...porque el perímetro se calcula así...uff...
- P: ¿Qué es el perímetro de una figura?
- S06: Pues la figura entera...lo de dentro...ya no me acuerdo...
- P: Venga, estamos aquí para pensarlo. A ver, en el enunciado tres de la situación uno estamos hablando de un cuadrado, ¿verdad?
- S06: Sí.
- P: En el enunciado uno de la situación dos, estamos hablando de un jardín rectangular. Elige, un cuadrado o un rectángulo, ¿qué prefieres?
- S06: Un cuadrado.
- P: Vale, tenemos un cuadrado, no conocemos el lado, ¿cómo lo llamamos?
- S06: “Equis”.
- P: ¿Cuál es el perímetro de ese cuadrado?
- S06: “Equis” elevado a cuatro...si no sabemos el lado...
- P: ¿Qué es el perímetro?
- S06: No sé.
- P: Es la suma de los lados. Entonces, si yo tengo un cuadrado de lado desconocido, ¿cuánto es la suma de los cuatro lados?
- S06: “Equis” más “equis” más “equis” más “equis”.
- P: ¿Y eso cuánto es?
- S06: ¿”Equis” al cuadrado?
- P: Me estás diciendo la suma de los cuatro lados, ¿qué será?
- S06: No sé.
- P: Si yo tengo un cuadrado de lado uno, ¿cuál será su perímetro?
- S06: Cuatro.
- P: Uno más uno más uno más uno. Pero si yo hiciera eso que dices de lado por lado, uno

- por uno.
- S06: Uno.
- P: ¿Es lo mismo?
- S06: No.
- P: ¿Es lo mismo entonces la suma, el perímetro, que multiplicar que estoy calculando el área?
- S06: No.
- P: Entonces para calcular el perímetro sumo todos los lados, para calcular el área, multiplico lado por lado. En el caso del cuadrado, entonces aquí, ¿de qué estoy hablando?
- S06: Del área, entonces no está bien.
- P: ¿Sabrías decirme cuál es?
- S06: ¿De estos? ¿Cuál es la que está bien? La d.
- P: Léela por favor, en voz alta.
- S06: La diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es un número nueve.
- P: ¿Por qué?
- S06: Porque el área es lo hemos dicho, es la multiplicación de los lados. Y aquí sale elevado porque se multiplican los dos lados. “Equis” al cuadrado pues “equis” por “equis”, “y” al cuadrado pues “y” por “y”, y da nueve. Bueno, se resta y es nueve.
- P: Y ahora que parece que te ha quedado clara la diferencia entre perímetro y área, en este de aquí, el enunciado uno de la situación dos, dice “el perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho es noventa y dos”. ¿Cómo sería el rectángulo, el jardín rectangular?
- S06: Um...
- P: ¿Cómo llamaríamos a los lados?
- S06: “Equis”.
- P: ¿Y el otro lado?
- S06: “Y”.
- P: Per lee el enunciado, te dan datos sobre el otro lado.
- S06: El largo...sí, seis.
- P: No, dice seis metros más que su ancho.
- S06: No, no lo pillo...
- P: Piensa... tenemos un rectángulo, ¿vale? Un rectángulo, sabemos que un lado es seis metros más grande que otro lado...
- S06: “Equis” más seis.
- P: ¿Cuál sería el perímetro?
- S06: “Equis” más “equis”... más “equis” más seis más “equis” más seis.
- P: ¿A qué enunciado corresponde?
- S06: Al a.
- P: Vale. Nos vamos a ir a la situación uno, al enunciado cuatro. Cuando escribiste la explicación de la que habías elegido como incorrecta, el apartado d, me dices “el enunciado está mal”. ¿Qué enunciado está mal? ¿El simbólico que yo te doy o el verbal?
- S06: El verbal.
- P: ¿Por qué?
- S06: La tercera potencia de tres... porque, yo no sé qué es la tercera potencia de tres. Eso no lo hemos dado.
- P: ¿No? ¿Qué hacer la tercera potencia?
- S06: ¿El cubo, elevar a tres? Pero de tres...

- P: Pues tres elevado al cubo.
- S06: Ah...
- P: Entonces, al decirme que el enunciado está mal, ¿te refieres a que no corresponde?
- S06: Sí, porque aquí debería ir el tres, no la “equis”.
- P: Pues esa explicación que me estás diciendo es la que podías haberme escrito, explicar por qué consideras que está mal, ¿vale? Ya sé que si me la estas poniendo en el apartado de respuesta incorrecta consideras que está mal, pero quiero saber por qué opinas así.
- S06: Vale.
- P: Nos vamos a ir ahora al enunciado dos de la situación dos. Como verbal te digo “el doble de los años que tiene Jesús más un cuarto de los años que tiene Inés”. ¿Qué valor está representado por las letras?
- S06: ¿No es el b?
- P: No he dicho eso. Es que tus explicaciones son un poco extrañas, dices “está todo perfecto”. ¿Por qué consideras que en el apartado b está todo perfecto?
- S06: Porque es el doble de los años que tiene Jesús, que es dos “equis”, más un cuarto que “equis” sería los años que tiene Inés, y cuatro es...”equis”...el cuatro es...arriba en la fracción “equis” que es los años de Inés y abajo es el cuarto.
- P: ¿Quién es “equis” entonces?
- S06: “Equis” sola es Inés, y dos “equis” es Jesús.
- P: ¿Sí?
- S06: Sí.
- P: Si me estás diciendo que la edad de Jesús es dos “equis” y me están diciendo el doble, sería cuatro “equis”.
- S06: Espera, sería la c.
- P: ¿Por qué?
- S06: Porque aquí sí sería dos “equis” la edad de Jesús e “y” que es diferente, la edad de Inés.
- P: Pero ¿dos “equis” es la edad de Jesús?
- S06: El doble de la edad.
- P: Eso si...pero, ¿porqué ahora sabes que es la c y antes no?
- S06: Porque me he dado cuenta ahora.
- P: Pero, ¿por qué no las vistes? ¿o no pensaste?
- S06: Las vi, pero no caí en eso.
- P: Vale, nos vamos a ir al enunciado tres de esta situación dos. Dice “el número de ruedas de dos coches es ocho”. ¿Qué valor está representado por la letra “equis”?
- S06: El número de ruedas.
- P: Entonces, ¿por qué en tu explicación dijiste que dos “equis” es el número de ruedas?
- S06: No, he puesto que dos “equis” es igual al número de ruedas de los dos coches.
- P: Ah vale, es que como la letra tampoco se entiende muy bien.
- S06: Y ocho son los coches.
- P: ¿Cómo van a ser ocho los coches?
- S06: No, igual a ocho...que el número de las ruedas es ocho.
- P: Pero tú has escrito “ocho son los coches”.
- S06: Pero porque me he equivocado ahí.
- P: Al escribirlo o al señalar.
- S06: Al escribirlo.
- P: ¿Seguro?
- S06: Sí.
- P: Venga, por último, nos vamos al enunciado cuatro de esta situación dos. Estamos como antes, ¿cómo se calcula el área?

- S06: Multiplicando todos sus lados.
P: ¿Todos?
S06: Dos.
P: Entonces, vuelve a buscarme la traducción del enunciado verbal que dice “el área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina”.
S06: Ésta, la c... ah no, espera...el área... “equis” es el suelo, bueno, y como esta elevado a dos, es área del suelo de la piscina cuadrada e “y” es la profundidad de la piscina...
P: ¿Seguro?
S06: Sí.
P: Vale. Ahora unas preguntas en general. Cuando tuviste que elegir entre una opción correcta o una opción incorrecta, ¿seguiste alguna estrategia? ¿Cómo lo hiciste?
S06: La he hecho pues la que yo creía que estaba bien.
P: Pero, ¿cómo has considerado que estaba bien?
S06: Pues leyendo el enunciado simbólico y después los verbales y si eran igual pues ya lo ponía.
P: ¿Te ha influido el hecho de tener q justificar la respuesta?
S06: Sí, porque algunas las tenía bien y otras no. Porque hemos estado aquí hablando y ya sé cómo es para la próxima vez...
P: Pero quiero decir, cuando has tenido que decidir... imagina que tenías dudas entre dos respuestas, que pensabas que para un enunciado la respuesta podía ser la a o la b. ¿no te ha pasado eso en ninguno, que hayas estado dudando entre dos?
S06: Sí.
P: ¿Y cómo te has decidido?
S06: Pues no sé, una de las dos.
P: ¿Qué te ha resultado más fácil explicar, la opción correcta o la opción incorrecta?
S06: La correcta.
P: ¿Por qué?
S06: Porque solo tienes que explicar cómo lo has hecho, y en la incorrecta pues qué es lo que falla y todo eso, lo que está mal.
P: Por último, ¿qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?
S06: La situación uno.
P: ¿Por qué?
S06: Porque ves el enunciado simbólico y ya sólo es encajarlo con el verbal... el otro es más difícil porque es más largo, y he tenido que leerlo más veces...

E.9. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO

S13

Entrevista 9. Sujeto S13. Viernes 15 de marzo de 2013, 14:15h

- P: ¿Te acuerdas de esta primera ficha que hicimos? Tenias que rellenar los huecos para formar unas fichas de dominó. ¿Por qué te dejaste sin rellenar estos huecos? Que corresponden a los enunciados cuatro, cinco y doce.
S13: No los sabía.
P: ¿Y ahora sabrías?
S13: La verdad es que no.
P: ¿No?
S13: Seguiría igual...

- P: Vamos a probar con el enunciado cuatro. Dice “un número”, ¿cómo escribes un número?
- S13: “Equis”.
- P: Por su cuadrado.
- S13: “Equis” elevado a dos.
- P: Es igual a su cubo.
- S13: Igual...y pongo elevado a tres, ¿no? Pues sí lo sabía.
- P: Éste de aquí, “equis” por “equis” más uno igual a siete “equis”.
- S13: Un número, por otro número, más uno, es igual a siete...el mismo número.
- P: Repite.
- S13: Un número, por otro número...
- P: Pero si está escrito con la misma letra, ¿es otro número?
- S13: Un número...
- P: A ver, si estás tú y estás tú, eres la misma ¿no?
- S13: Sí. Un número por ese número más uno, es igual a siete por ese número.
- P: Vamos al último, al doce. El cuadrado... ¿qué es hacer el cuadrado?
- S13: Sería dos, ¿no?
- P: Pero qué vamos a elevar a dos.
- S13: La raíz cuadrada de un número. Sería la “equis” elevada a ...
- P: La raíz cuadrada de un número, sería...
- S13: La raíz de “equis”.
- P: Al cuadrado, ¿es igual a?
- S13: A “equis”.
- P: Mira, sabías hacerlo. ¿Es que no lo pensaste en su momento?
- S13: No sé, que no tenía pensado en ese momento hacerlo así, las prisas y eso pues...
- P: Bueno, tú no pudiste jugar con las fichas, consistía en ir uniéndolas y leyendo los enunciados. Pero no te puedo hacer preguntas al respecto.
Te voy a hacer unas preguntas sobre lo que estuvimos haciendo el otro día, ¿te acuerdas?, la situación uno y la situación dos. Vamos a ver el enunciado uno de la situación uno. Tú marcaste como opción correcta, ¿la c o la d?
- S13: La d.
- P: Es que marcaste las dos per una parece que está más tachada que otra.
- S13: Porque me lié.
- P: ¿Por qué te liaste?
- S13: Porque pensé que no era eso.
- P: ¿Qué te llevó a pensar eso? ¿qué te hizo decir es la d y no la c?
- S13: Porque cinco más un número más otro número, para mí no era cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo, directamente pensé que era un número impar más una edad más otra edad.
- P: ¿Cómo escribirías simbólicamente éste que has tachado?
- S13: Pues cinco años más “equis” más... En realidad lo hice mal, estaba bien la c. Me acabo de dar cuenta, es que leo demasiado rápido las cosas.
- P: ¿Qué le pasa al d?
- S13: Porque un número impar, sería un número impar por ejemplo un número impar sería tres, más una edad más otra edad.
- P: Vale. Vamos a hacer una cosa, te voy a ir preguntando cosas de la situación uno y de la situación dos alternando, ¿vale?
- S13: Vale.
- P: Vamos al enunciado uno de la situación dos. Lee de nuevo el enunciado y la expresión que tú has elegido como correcta.

- S13: El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metro más que su ancho es noventa y dos metros. Yo elegí la d, que sería un número más ese número más otro número más otro número igual a noventa y dos. Creo que también me he equivocado en ésta.
- P: ¿Por qué?
- S13: Porque si dice que mide seis metros más que su ancho, yo creo que sería otra de ellas.
- P: ¿Cuál?
- S13: No sé.
- P: Tenemos un jardín rectangular, ¿cuál es su perímetro?
- S13: Su perímetro...seis metros.
- P: ¿Qué es el perímetro?
- S13: No sé explicarlo. Sería...esto...
- P: Eso que estas marcado con el dedo...
- S13: Todo entero, lo que mide entero el rectángulo.
- P: Sumar los lados...
- S13: Eso.
- P: Entonces, yo tengo un rectángulo, un lado mide "equis", ¿y el otro?
- S13: "Equis" más seis.
- P: ¿Cuál sería el perímetro?
- S13: "Equis" más "equis" más "equis" más "equis" más seis.
- P: Dos lados iguales, "equis" y "equis", y los otros dos lados iguales, "equis" más seis y "equis" más seis. ¿Cómo es la suma?
- S13: Sería "equis" más seis elevado a dos, ¿no?
- P: Me lo estabas diciendo antes bien. Sumo dos lados iguales...
- S13: "Equis" más "equis", y después "equis" más seis y "equis" más seis. Éste, el a.
- P: ¿Seguro?
- S13: Sí.
- P: ¿Qué diferencia hay entre el a y el d, que es el que has elegido tú?
- S13: Pues que me decían que el largo es seis metros más que el ancho y yo he elegido el que no era porque no son letras sino que sabía el número.
- P: ¿La relación que había entre los lados te refieres?
- S13: Sí.
- P: Vale, vamos al enunciado dos de la situación uno. ¿Puedes leer de nuevo el enunciado verbal que has elegido como correcto?
- S13: He elegido el a.
- P: ¿Y tu explicación?
- S13: Porque la suma de un número más "equis" es igual a cinco "equis". En verdad es, "equis" más sesenta igual a cinco "equis". Debería haber elegido...la suma de un número más sesenta es igual a cinco... No, está bien, es el a...
- P: Vamos a leer de nuevo la opción a, tú piensa en cómo lo escribiríais simbólicamente. La suma de un número más sesenta, ¿eso cómo lo escribes?
- S13: Un número es "equis", más sesenta.
- P: Es igual a cinco.
- S13: No...en verdad no porque es igual a cinco "equis". Entonces sería...
- P: Seguimos, vamos a leer el b.
- S13: Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco.
- P: Un número más sesenta, ¿cómo lo escribes?
- S13: "Equis" más sesenta.
- P: Igual a cinco veces...
- S13: Cinco veces ese número por cinco...

- P: ¿Cómo sería?
- S13: Sería “equis” más sesenta igual a cinco veces cinco...no es.
- P: Vamos a leer el c.
- S13: Al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco. Si aun número que es “equis” le sumo sesenta...tampoco sería...se obtiene el mismo resultado que al multiplicar por cinco...
- P: ¿Por qué?
- S13: A ver, si aun número le sumamos sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco... ¿se obtiene el mismo resultado que si se multiplicar por cinco?
- P: No te están preguntando si tiene o no sentido la ecuación, sino si tú la escribirías así.
- S13: Yo no la escribiría así.
- P: ¿Cómo lo escribirías?
- S13: Si dice multiplicar por cinco yo pondría cinco por cinco, no pondría “equis”.
- P: “Al multiplicarlo”, se refiere a multiplicar el número por cinco.
- S13: Ah, entonces sí está bien, sería la c.
- P: ¿Y a la d qué le pasaría?
- S13: Sesenta más un número es igual a cinco veces otro número. Pues sesenta más un número estaría bien, pero no es igual a cinco veces otro número...no sé...
- P: Es lo que hemos hablado antes, si es un número y otro número, ¿lo representarías con la misma letra o con distinta?
- S13: La misma letra...
- P: Sería tú y otra...
- S13: Ah, yo y otra letra...”equis” e “y”, dos letras.
- P: Enunciado tres de la situación dos. Lee el enunciado verbal.
- S13: El número de ruedas de dos coches es ocho. Y yo he elegido la d.
- P: No, no te iba a preguntar por la opción correcta. Cuando tú dices “el número de ruedas de dos coches es ocho”, ¿cuál es la incógnita ahí?
- S13: Cuántas ruedas hay en total.
- P: El número de ruedas, bien. Léeme tu explicación de por qué dices que la incorrecta es la b.
- S13: La correcta...
- P: Eso es, la has marcado dos veces.
- S13: Me equivoque en la correcta y luego taché. Entonces qué te digo, ¿cuál es la incorrecta?
- P: Si.
- S13: Porque me dicen que...yo he elegido la b, dos “equis” igual a ocho “y”, y yo sé cuántos coches hay y cuántas ruedas hay... no, cuántos coches hay, per cuántas ruedas no, entonces pues la suma de las ruedas, supuestamente si los coches tienen cuatro ruedas, son ocho, y como hay otro número “y” pues ya...no sé seguir...
- P: Lo estás explicando muy bien. Vámonos de nuevo a la situación uno, al enunciado tres. En la opción que marcas como incorrecta, la d, explicas que “está mal expresada porque no es la diferencia”.
- S13: El enunciado simbólico dice “equis” elevado a dos menos “y” elevado a dos, es igual a nueve. “Equis” no se sabe qué número es, elevado a dos, y lo mismo digo de la “y”, y ¿cómo sé que es igual a nueve? Entonces dije que la d estaba mal porque dice la diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones puede no dar nueve, yo no sé cuánto mide el área de toda la habitación cuadrada..
- P: Vamos a aclararnos, porque no te estoy entendiendo muy bien. Tú has dicho que está mal expresado “porque no es la diferencia”.

- S13: Sí.
P: ¿Qué consideras que está mal expresado, el enunciado verbal o el simbólico?
S13: No sé...
P: ¿Y a qué te refieres con que “no es la diferencia”? ¿Qué es hacer la diferencia de algo?
S13: No sé cómo explicarte.
P: Es restar, ¿no?
S13: Sí.
P: Estamos hablando entonces de la resta entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas.
S13: Um...
P: Tengo dos habitaciones cuadradas distintas. ¿Cómo llamamos a sus lados?
S13: Si son distintas, sería “equis” y otra letra distinta.
P: ¿Y si estoy calculando el área?
S13: Um...
P: ¿Esta “equis” cuadrada será el área de una?
S13: Sí. Y el “y” elevado al cuadrado el de la otra habitación.
P: La diferencia de las dos áreas, ¿no es lo mismo que hacer la resta de las dos áreas?
S13: Sí. Entonces es la correcta.
P: Es que me extrañó, que tachases dos y después explicases otra...
S13: Es que a veces digo que una es la correcta, la tacho y luego me equivoco.
P: Es que aquí, en la correcta, marcaste la a y la c, pero tachaste la a y te quedaste con la c, ¿por qué?
S13: Porque el perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro de otra habitación... no veo bien explicado eso de que sea nueve.
P: Ah, ¿eso es lo que ves mal?
S13: Que no lo veía yo...
P: ¿Por qué?
S13: No sé.
P: Tu imagínate que uno vale veinticinco y el otro dieciséis, al restarlo da nueve.
S13: Es verdad, sí. Es que no lo pienso al hacerlo.
P: Pero, ¿qué tiene este enunciado c que no tienen los demás?
S13: No sé, que ahí lo dice diferente, dice mi habitación cuadrada...el perímetro...
P: Pero tú la has elegido como correcta. Fíjate, la a, la b y la d te hablan de áreas, y c habla de perímetros. ¿Qué es el perímetro de un cuadrado?
S13: Lo mismo que te he dicho antes...no, eso era el área...es diferentes...la suma de los lados.
P: Entonces si yo tengo un cuadrado de lado “equis”, la suma de sus cuatro lados, ¿cuánto es?
S13: Cuatro “equis”.
P: ¿Y aquí qué pone?
S13: Dos “equis”.
P: No, “equis” elevado a dos.
S13: “Equis” elevado a dos, si. Es distinto.
P: Vale, entonces, ¿cuál consideras que es correcta?
S13: La d, la que yo había puesto como incorrecta.
P: Vale, ¿entiendes la diferencia?
S13: Sí.
P: Y por último, el enunciado cuatro de la situación uno. Yo te doy como enunciado simbólico “equis” elevado a tres.
S13: Sí.

- P: Y tú me has dicho que la opción correcta es el enunciado verbal que dice “el triple del lado de un cubo”. Y en tu razonamiento dices “porque es el triple de tres son “equis” más “equis” más “equis””. Me pierdo con esto...
- S13: Yo también me perdí.
- P: Sin embargo lo dejaste.
- S13: Sí. Es que el último ya lo puse sin más.
- P: Pues piénsalo ahora, que tienes tiempo.
- S13: Pues yo creo que he elegido bien la b, pero no sabía explicarlo.
- P: ¿Qué es hacer el triple de un número?
- S13: Pues se multiplica...es decir, “equis” elevado a tres pues lo elevo a tres...
- P: No es lo mismo multiplicar que elevar.
- S13: Entonces...
- P: Vamos a hacer mentalmente, el triple de dos.
- S13: Pues sería dos elevado a tres.
- P: Tú me has dicho, el triple de dos, multiplicar por tres, ¿tres por dos?
- S13: Seis.
- P: Cubo, es elevar a tres, ¿dos elevado a tres? Que sería, dos por dos por dos.
- S13: Ah...
- P: ¿Dos por dos?
- S13: Cuatro.
- P: ¿Por dos?
- S13: Seis...no, ocho... es muy distinto.
- P: Vale, uno me indica las veces que lo sumo, y la potencia las veces que lo multiplico por sí mismo. Entonces, el triple de un lado que no conozco “equis”, ¿cómo sería?
- S13: Sería, tres por “equis”. Tres por tres por tres...
- P: No, tres por “equis” sería la “equis” más la “equis” más la “equis”. Lo que me extraña es que aquí sí has expresado bien lo que significa esto y aun habiendo expresado simbólicamente “equis” más “equis” más “equis”, no te has dado cuenta de que no es lo mismo que “equis” elevado al cubo.
- S13: Soy al revés del mundo... Entonces no he elegido bien. ¿Sería la tercera potencia de tres?
- P: La tercera potencia de tres, ¿de qué te está hablando? ¿Cómo lo expresas simbólicamente?
- S13: ¿Sería esa rayita rara y poner tres, “equis” elevado a tres?
- P: La “rayita esa rara” es la raíz cuadrada.
- S13: Ah, me he confundido.
- P: Tercera potencia de tres, tengo el tres y hago su potencia, elevado al cubo, sería tres elevado a tres.
- S13: Entonces esa estaría mal. Y el área de un cubo, no creo que sea... Yo creo que la que he puesto como incorrecta es la correcta...la tercera potencia...no, tampoco esa es la que hemos dicho antes. Entonces sería ¿el volumen de un cubo? ¿Por qué sería el volumen de un cubo?
- P: Lo hablamos un día en clase, algunos compañeros tuyos si se han acordado de que dimos de ejemplo la clase. Si yo quiero calcular el volumen, hago el área de la base y la multiplicamos por la altura. Si la clase tiene el suelo cuadrado, de lado “equis”, para calcular el área de la base, ¿qué hago?
- S13: “Equis” por “equis”.
- P: ¿Y si la multiplico por la base que también es “equis”?
- S13: “Equis” elevado a tres. Sería la c...que yo no la había elegido para nada.
- P: Ahora un par de preguntas a modo general. Cuando tuviste que elegir entre una opción

- correcta o una opción incorrecta, ¿seguiste alguna estrategia?
- S13: Ninguna.
- P: ¿Cómo te has decidido por unas o por otras?
- S13: Empezaba a leerlas hasta que veía cual se parecía más a la que me daban. Y si no sabía explicarla pues ya empezaba a pensar y venga vamos a explicar algo...
- P: ¿Qué te ha resultado más fácil, elegir una respuesta correcta o elegir una respuesta incorrecta?
- S13: Las dos.
- P: ¿Las dos fáciles?
- S13: No, me han resultado las dos difíciles.
- P: ¿Por qué?
- S13: Es que no sé expresarme en verdad, si me preguntan pues mira, hablando me puedo llegar a expresar, pero en escrito no.
- P: Si no te hubiera explicado el por qué, simplemente que me marcaras, ¿te hubiera resultado más fácil?
- S13: No mucho la verdad, me hubiera costado más la incorrecta, la correcta me hubiera resultado más fácil.
- P: Por último, ¿qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?
- S13: Más fácil la situación dos. Me gusta más que me den los resultados, los simbólicos, y yo elegir cuál es. Me guían más las letras que los números.
- P: ¿Un enunciado verbal te guía más que uno simbólico?
- S13: Sí.
- P: Pero, ¿qué diferencia hay en que yo te dé un enunciado verbal y distintos simbólicos, a que te dé distintos verbales y tú tengas que decir él que se corresponde al enunciado simbólico?
- S13: Porque me confundo más a la hora de elegir.

E.10. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO S11

Entrevista 10. Sujeto S11. Lunes 18 de marzo de 2013, 10:15h

- P: Primero te quiero hacer unas preguntas sobre el juego. ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explicame en qué consistía.
- S11: Hacer un enunciado.
- P: Cuando estuviste jugando, y salió tu ficha marcada con punto rojo, no diste un enunciado, elígeme ahora uno de estos cuatro, que son los que estaban marcados con punto rojo, y dime un enunciado contextualizado para alguno de ellos. [Los enunciados que le muestro son: $x+(x+1)-4$, $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$, $2x - \frac{y}{4}$, $x + (x+1) = y - 2$]
- S11: Éste, que dice...
- P: Primero léemelo, como hacíamos en el juego.
- S11: Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos. Pues la edad de Pedro es igual...no, a ver...La edad de Pedro más...su edad más uno es igual a la edad de su abuelo menos dos.
- P: Vale. Ahora te quiero hacer unas preguntas sobre lo que hicimos el otro día, la situación uno y la situación dos. En la uno te daba enunciados simbólicos y tú tenías

que elegir los verbales, y en el dos yo te daba un enunciado verbal y tú tenías que elegir los simbólicos. ¿Te acuerdas?

S11: Sí.

P: Pues te quiero hacer una pregunta sobre el enunciado cuatro de la situación uno. Me marcaste como opción correcta la c, pero como respuesta incorrecta no marcaste ninguna, ¿por qué?

S11: Pues es que no sabía.

P: Pero si sabías marcar la correcta.

S11: Ya, pero es que no sabía cómo explicar la otra.

P: ¿No sabías explicar cuál?

S11: Las incorrectas.

P: Dime una de las que consideras incorrectas.

S11: Ésta.

P: La última, que dice “la tercera potencia de tres”.

S11: Porque dice la tercera potencia de tres, pero aquí no sale el tres, sale “equis”.

P: Pues eso ya es una explicación.

S11: Ah, vale.

P: Ahora una pregunta sobre el enunciado uno de la situación dos. En primer lugar elegiste y explicaste la opción b), ¿recuerdas por qué cambiaste de opinión en la elección de la opción correcta?

S11: Sí, porque...

P: Léelas a ver si te acuerdas de por qué.

S11: Porque aquí esto sería el ancho y el largo, pero como es el perímetro sería dos veces, sería ancho ancho y largo largo, y me di cuenta después de que era el a, el primero.

P: Vale. Y ahora, de la situación dos también, el enunciado tres. Has elegido la opción d como correcta y has dicho “dos “equis” son los dos coches y ocho es la suma de las ruedas de los coches, dos “equis” los coches y ocho las ruedas”. ¿Qué es lo que está representado por la “equis”?

S11: Um...

P: Lee el enunciado verbal otra vez.

S11:

P: Léelo en voz alta.

S11: El número de ruedas de dos coches es ocho. Pues no conocemos...

P: ¿Quién es la incógnita?

S11: “Equis”.

P: Ya, pero ¿qué está representado por “equis”?

S11: ¿Los coches? ¿Las ruedas?

P: No sé, dímelo tú.

S11: Um...

P: Yo no te estoy diciendo si está bien o está mal, es por la explicación, porque luego en la incorrecta has puesto ““equis” al cuadrado no es correcto porque no se multiplican los coches”, pues quiero saber qué es lo que tú entiendes por la “equis”.

S11: Ah, el número de coches.

P: El número de coches te lo dice el enunciado, te dice “dos coches”.

S11: No sé.

P: Piénsalo bien, porque lo has dicho antes. Lee de nuevo la respuesta correcta a ver si te dice algo.

S11: Um...

P: ¿Cuántas ruedas tienen los coches? No en realidad, en el enunciado.

S11: Son dos coches y en total tienen ocho.

- P: Pero, ¿cuántas tiene cada coche?
S11: Cuatro.
P: Pero eso porque lo sabes tú.
S11: Espera, “equis” es el número de ruedas que tiene cada coche.
P: Vale. Y ahora en general, cuando tuviste que elegir entre una opción correcta o una opción incorrecta, ¿has seguido alguna estrategia?
S11: No.
P: ¿Qué has hecho?
S11: Lo leo, miro a ver qué es cada cosa y ya...
P: No te entiendo, ¿qué significa “qué es cada cosa”?
S11: Miro a ver qué es la “equis”, y ya...yo que sé.
P: Cuando te ha pasado lo de antes, que no me has puesto una opción incorrecta, me has dicho que es porque no sabías explicarla, ¿en todos te ha pasado eso, cuando has tenido que elegir una correcta o incorrecta?
S11: En algunas que son más fáciles dar la justificación no.
P: ¿Qué te ha resultado más fácil, elegir una respuesta correcta o elegir una respuesta incorrecta?
S11: Los dos igual en verdad.
P: ¿Y explicar?
S11: Explicar, la correcta.
P: ¿Por qué?
S11: No sé.
P: Por último, ¿qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?
S11: La situación uno.
P: ¿Por qué?
S11: Porque teniendo ya muchos enunciados es más fácil.
P: ¿Teniendo muchos enunciados verbales es más fácil?
S11: Sí.
P: Vale, gracias.

E.11. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO S09

Entrevista 11. Sujeto S09. Lunes 18 de marzo de 2013, 10:40h

- P: Primero te quiero hacer unas preguntas sobre el juego. ¿Recuerdas lo que había que hacer cuando aparecía una ficha marcada con punto rojo? Explícame en qué consistía.
S09: Pues emparejarla y al emparejarla la que tenía el punto rojo había que hacer una frase.
P: Una frase, ¿qué significa?
S09: Pues la que tenga punto rojo hay que hacerla con...estos como es...pues con una frase que no sea con números...
P: Vale, cuando apareció una ficha de esas, tú dijiste...bueno, te lo voy a leer y tú me dices cómo lo escribirías simbólicamente. Dijiste: “Son, cuatro lo que sea...cuatro coches, por...un número, por ejemplo, cuatro coches por...una silla...cuatro coches por la mitad de una silla es igual al doble de dicha silla”.
S09: ¿Cuatro coches por la mitad de una silla?
P: Sí, dijiste “cuatro coches por la mitad de una silla es igual al doble de dicha silla”.
S09: Pues cuatro coches es cuatro “equis”, ¿por el doble?

- P: Dijiste por la mitad de una silla.
- S09: Pues la mitad...pues “y” partido dos.
- P: Es igual al doble de dicha silla.
- S09: Pues igual a dos “y”.
- P: ¿Corresponde con este enunciado simbólico que yo te di? $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
- S09: Eso está bien.
- P: ¿Corresponde con lo que me acabas de decir? Tú me has dicho cuatro “equis” por “y” partido dos igual a dos “y”.
- S09: Ah, cuatro coches...ah, vale vale... Al decir cuatro coches, creía que era cuatro “equis”...
- P: Por eso, yo te he leído lo que tú dijiste, ¿entonces no me lo dijiste bien?
- S09: No.
- P: Dime uno.
- S09: ¿Uno de qué?
- P: Pues un enunciado con ese simbólico.
- S09: Pues cuatro por la mitad de mi edad es igual al doble de mi edad.
- P: Vale. Te voy a preguntar por esta también, que me llamó la atención. Dijiste “Una pelota de fútbol más otra pelota de fútbol menos cuatro pelotas de baloncesto”, ¿se corresponde con $x+(x+1)-4$?
- S09: No, porque una pelota de fútbol...no sé, así me lio, te lo digo con edad.
- P: Dímelo.
- S09: Mi edad más mi edad más un año, menos cuatro.
- P: Ahora, te voy a hacer unas preguntas sobre lo que hicimos el otro día, ¿te acuerdas? Que teníamos la situación uno donde yo te daba los enunciados simbólicos y distintas opciones de verbal, y en la dos te daba el verbal y tú elegías los simbólicos.
- S09: Sí.
- P: Mira, vamos a ver el enunciado uno de la situación uno. Tú me has puesto que la d es correcta y que la a es incorrecta. ¿Puedes leer en voz alta la explicación de la a?
- S09: ¿La a o el por qué he puesto que es incorrecto?
- P: Esto, lee el enunciado y después tu explicación.
- S09: La a dice cinco años más la edad de mi hermana más mi edad más la de mi hermana.
- P: Y tu explicación ha sido que es incorrecta porque...
- S09: Porque cinco años más la edad de mi hermana que es “equis”, más mi edad que es “y”, pero pone otra vez más la edad de mi hermana y aquí no pone otra vez más “equis”.
- P: Y ahora, tú me has elegido como correcta la opción d, ¿por qué?
- S09: Pues porque un número impar, cinco es impar, más una edad es “equis”, más otra edad es “y”.
- P: Vale, ¿leíste todos los enunciados o cómo lo hiciste?
- S09: Sí, los leí todos. Miro esto y miro la a, veo si es verdadera o falsa, la b miro si es verdadera o falsa y así...
- P: Vale, ¿la b cómo es?
- S09: Cinco veces mi edad...No, eso está mal.
- P: ¿Por qué?
- S09: Porque cinco veces mi edad...espérate...cinco veces mi edad...porque cinco veces mi edad no es cinco más mi edad sino mi edad, mi edad, mi edad...cinco veces.
- P: Vale, ¿y la c?
- S09: Cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo. Este está bien.
- P: ¿Por qué me pusiste que la d estaba bien entonces?
- S09: Porque la puedo explicar mejor que es verdadera.

- P: ¿Por qué no podrías explicar la c?
- S09: Sí podría, pero a lo mejor me sale más largo o algo.
- P: A ver, intenta explicarla ahora.
- S09: Cinco años, que es cinco, más las edades de mi hermana y mía son “equis” e “y”.
- P: Vale, está bien explicado. Pero, ¿cuál consideras que es mejor, la c o la d?
- S09: La c, porque un número impar puede ser cualquiera.
- P: Exactamente, según el enunciado del ejercicio, teníamos que elegir la que fuese traducción correcta, la más exacta.
- S09: Pues eso, sería la c.
- P: Vale, ahora nos vamos a ir al enunciado tres de la situación uno. A ver, me has elegido como opción incorrecta la opción a, ¿por qué?
- S09: El área del suelo de mi habitación cuadrada menos el área del suelo de tu habitación cuadrada.
- P: Pero, ¿por qué es incorrecta?
- S09: ¿Por qué? Pues porque el área del suelo de mi habitación cuadrada es “equis” elevado a dos, y el área de la tuya es “y” elevado a dos, pero no pone a qué es igual.
- P: Vale, y ahora, como opción correcta me has dado...
- S09: La c.
- P: ¿Por qué?
- S09: Porque pone que el perímetro del suelo...adiós...el perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve.
- P: ¿Por qué has dicho “adiós”?
- S09: Porque he leído el perímetro y me he bloqueado, pero no... ¿está bien?
- P: Me has dicho que de esta, lo único que falla es que no pone igual a nueve. ¿Lo demás está bien?
- S09: Espera...es la d.
- P: ¿Qué?
- S09: Que la que estaría bien sería la d.
- P: ¿Seguro?
- S09: La b y la d, pero es más correcta la d.
- P: ¿Por qué?
- S09: Porque la diferencia es resta, entre el área de los suelos de dos habitaciones, pues “equis” e “y” son elevadas a dos... y en la b pone lo mismo pero para cualquier número impar.
- P: Vale, nos vamos a ir al enunciado cuatro también de la situación uno. Tenemos como enunciado “equis” elevado a tres. ¿Por qué has seleccionado como incorrecto el enunciado d? Que dice “la tercera potencia de tres”. Porque la has elegido, pero no lo has explicado.
- S09: Pues porque la habré hecho al voleo, seguro... A ver, la tercera potencia... porque aquí no pone nada de tres y tres...
- P: ¿Y por qué no lo explicaste?
- S09: Pues porque no sabría si estaba bien la explicación, no sé.
- P: ¿Y ahora sí lo has explicado bien?
- S09: ¿Eso está bien explicado?
- P: Sí, es tu justificación, está bien justificado. Venga, nos vamos a ir al enunciado tres de la situación dos. En este, me marcaste primero como opción correcta la c y la explicaste, me marcaste la d como incorrecta y la explicaste, y luego cogiste, cambiaste de opinión y tachaste, ¿por qué?
- S09: Porque pone que el número de ruedas de dos coches es ocho, en la d que puse que

estaba bien, y en la c que pensé primero que era el número de ruedas de un coche es ocho, entonces el coche es “equis”, o sea, el número de ruedas es “equis” y es igual a ocho, pero me di cuenta de que ponía dos “equis” que son dos coches, las ruedas de esas dos.

- P: Vale, te quiero preguntar ahora, en general de las dos fichas. Cuando tuviste que elegir entre una opción correcta o una opción incorrecta, ¿seguiste alguna estrategia?
- S09: Pues miraba el simbólico y miraba la a, si estaba bien pues con la b, con la c y con la d.
- P: ¿Qué te ha resultado más fácil, elegir una respuesta correcta o elegir una respuesta incorrecta?
- S09: Incorrecta.
- P: ¿Más fácil?
- S09: Sí.
- P: ¿Por qué?
- S09: Porque hay cosas que...por ejemplo hay una correcta y una incorrecta que son parecidas pero hay otra incorrecta que es totalmente diferente, entonces se nota más.
- P: ¿Qué te ha resultado más fácil, explicar la respuesta correcta o la respuesta incorrecta?
- S09: De explicar...la correcta, porque básicamente es explicar lo que pone.
- P: Por último, ¿qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?
- S09: Donde me das el verbal y yo tengo que elegir el simbólico.
- P: ¿Por qué?
- S09: Pues porque el simbólico puede significar...no sé, no lo entiendo mucho, porque tú me pones el simbólicos y las cuatro frases, y pueden significar muchas cosas, y me lio, puede haber más que se parezcan. No sé, me lio menos con los símbolos.
- P: Y no pensaste, si yo te voy dando en la situación uno los enunciados verbales, escribir o pensar cómo se escriben...
- S09: Sí, yo lo iba pensando, pero en este yo diría “un número elevado al cubo”, y en los otros lo pone de otra manera.
- P: Porque son enunciados contextualizados como los de la ficha roja.
- S09: Claro...
- P: Ya está, muchas gracias.

E.12. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO S07

Entrevista 12. Sujeto S07. Lunes 18 de marzo de 2013, 11:00h

- P: ¿Te acuerdas cuando estábamos con el juego, que había unas fichas que estaban marcadas con un punto rojo?
- S07: Sí.
- P: ¿Te acuerdas de lo que había que hacer?
- S07: Explicar lo que significaban.
- P: ¿Cómo?
- S07: Pues si ponía “equis” elevado a dos, pues tenías que crear un enunciado para eso.
- P: Vale, te voy a leer un enunciado que tú dijiste y me vas a decir cómo lo escribirías simbólicamente. Dijiste: “Mi edad, más la edad mía dentro de un año, será menos cuatro años que tiene mi hermano”. ¿Cómo escribirías eso simbólicamente?
- S07: Sería mi edad que es “equis”, más la edad de mi hermana...
- P: Dijiste “Mi edad, más la edad mía dentro de un año”.

- S07: Sería “equis” más “equis” más uno.
P: “Será menos cuatro años que tiene mi hermano”.
- S07: Será menos cuatro...no, menos cuatro años de los que tiene mi hermano...igual a menos cuatro “equis”.
- P: ¿A qué has llamado “equis”, a tu edad?
- S07: Sí.
- P: La de tu hermano, ¿qué es?
- S07: Pues otra letra.
- P: Pero se corresponde con lo que yo te di: $x+(x+1)-4$
- S07: No.
- P: ¿Puedes decirme uno nuevo o cambiar ese para que sea traducción de este?
- S07: Mi edad más mi edad dentro de un año menos cuatro años.
- P: Ahora te quiero hacer unas preguntas sobre lo que hicimos el otro día, que teníamos situación uno y situación dos, ¿te acuerdas?
- S07: Sí.
- P: Vale, vamos a ver el enunciado dos de la situación uno. Sin mirar el enunciado simbólico dado, ¿puedes volver a leer el enunciado verbal que has marcado como correcto?
- S07: Sí...
- P: ¿Cuál has marcado?
- S07: El b. Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco.
- P: ¿Cómo lo escribirías simbólicamente? Léelo despacio y ve diciéndome cómo lo escribirías.
- S07: Pues un número, “equis”, más sesenta, “equis” más sesenta, es igual a cinco veces ese número, sería cinco “equis”...por cinco....cinco “equis” por cinco.
- P: ¿Y eso corresponde con el simbólico que yo te he dado?
- S07: No, porque no multiplica otra vez por cinco.
- P: Vale. Entonces, ¿estaría bien o estaría mal?
- S07: Estaría mal.
- P: ¿Puedes decirme cuál estaría bien?
- S07: Pues el c. Al sumarle a un número sesenta, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por cinco.
- P: Ahora, te quiero preguntar sobre el enunciado uno de la situación dos. Donde yo te digo “el perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho, es noventa y dos metros”. Me dijiste primero como opción correcta la b, y luego la tachaste, ¿por qué?
- S07: Porque la b no lo multiplica dos veces, que es el perímetro.
- P: ¿No lo multiplica?
- S07: Lado por lado, el perímetro de un rectángulo.
- P: ¿Ésa es la operación que te marcan esos enunciados?
- S07: Hallar el perímetro...
- P: Pero tú me estás señalando el a y el b. ¿En él a y en el b se están multiplicando?
- S07: Pero había que multiplicarlo dos veces, ¿no?
- P: Pero entonces habrías cogido otros enunciados, no esos, en los que no se están multiplicando. ¿Qué operación se está haciendo en estos dos enunciados?
- S07: Me estoy liando...
- P: No te líes...
- S07: Entonces sería el c...
- P: No, yo no te estoy diciendo ni que esté bien ni que esté mal. Es que me estás señalando y me estas explicando muy bien las cosas pero me estás diciendo multiplicar, ¿y en

- estos enunciados qué se está haciendo?
- S07: Se está sumando.
- P: ¿Y qué es el perímetro de una figura?
- S07: Pues multiplicar los lados.
- P: No, la suma de los lados. Y tú, de esta mesa por ejemplo, pues vas sumando lo que miden los lados. ¿Cuál sería el enunciado correcto?
- S07: Pues sería el a, porque se suman todos los lados.
- P: Vale, si es que la explicación que me has dado lo has hecho bien...pero mi pregunta era sólo por qué habías cogido la b y luego cambiaste a la a.
- S07: Porque en la b no suma todos los lados.
- P: Vale, nos vamos a ir al enunciado tres de la situación uno. Lo mismo, habías marcado primero la opción c pero luego cambiaste y marcaste la d, ¿por qué cambiaste de opinión? ¿Te acuerdas?
- S07: A ver, el c dice el perímetro del suelo de mi habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de tu habitación también cuadrada es igual a nueve. Y la d dice la diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es nueve. La diferencia es restar, ¿no? restar las dos áreas... En realidad están las dos bien, la c y la d.
- P: ¿Cómo van a estar las dos bien si una te habla de perímetros y la otra de áreas?
- S07: Entonces ésta hay que sumar los lados y no restarlos, en el c.
- P: ¿Esa es tu explicación?
- S07: La diferencia es que se restan...
- P: Tenemos una habitación con el suelo cuadrado, no conocemos el lado, ¿cómo lo llamamos?
- S07: "Equis".
- P: ¿Cómo se calcula el área?
- S07: El área sería lado por lado, ¿no?
- P: Es decir, "equis" por "equis", que es lo mismo que "equis" elevado a dos. ¿Cómo se calcula el perímetro?
- S07: Sumando todos sus lados.
- P: Que es...
- S07: "Equis" más "equis"...más "equis" más "equis"...
- P: Que son cuatro "equis". ¿Es lo mismo cuatro "equis" que "equis" al cuadrado?
- S07: No.
- P: Aquí en el enunciado c te dice menos, con lo cual está restando, y en el d te dice diferencia, que como tú has dicho antes muy bien, es restar. El que sea la c o la d, la diferencia no está en que se esté o no restando, sino en perímetro o área.
- S07: Um...
- P: ¿Y cuál es, perímetro o área, de lo que te están hablando?
- S07: Entonces sería el área, porque para el perímetro tendría que sumar todos los lados.
- P: Vale. Ahora nos vamos a ir al enunciado tres de la situación dos. Dice "el número de ruedas de dos coches es ocho". Una pregunta, ¿quién es el valor representado por la "equis"?
- S07: El valor de "equis" serían los coches, ¿no? Que hay dos coches, pues dos "equis", que es igual a ocho ruedas.
- P: ¿Quién es "equis"?
- S07: Los coches.
- P: Pero según el enunciado te dice el número de ruedas de dos coches, ya te dice cuantos coches hay.
- S07: Serían las ruedas la "equis".
- P: Nos vamos al enunciado cuatro de la situación uno. Has puesto como opción correcta

- b, que dice “el triple del lado de un cubo”. Y tu explicación es “porque un lado que sería “equis” y su triple es “equis” elevado a tres”. ¿Qué es el triple de un número?
- S07: Multiplicarlo por tres.
- P: ¿Y es lo mismo hacer el triple que elevarlo a tres?
- S07: No, porque sería... sería por tres y éste sería el mismo número multiplicado tres veces.
- P: Entonces, ¿tu explicación está bien o está mal?
- S07: Está mal. Porque no es el triple de “equis”.
- P: Vale. Vámonos por ultimo al enunciado cuatro de la situación dos. Dice “el área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina”, me has marcado como opción correcta la c y dices “porque es lado por lado por la altura que es i”. Si yo tengo una piscina cuadrada, ¿cómo llamamos al lado?
- S07: Llamo al lado “equis”.
- P: Y lado por lado, ¿qué será?
- S07: “Equis” por “equis”.
- P: ¿Y eso cómo será?
- S07: Dos “equis”.
- P: ¿Sí?
- S07: No...”equis” elevado a dos.
- P: ¿Entonces?
- S07: Sería éste, el c, “equis” elevado a dos por “y” que es la altura.
- P: Muy bien. Cuando tuviste que elegir entre una opción correcta o una opción incorrecta, ¿seguiste alguna estrategia?
- S07: Pues yo que sé, las incorrectas se notan al verlas, porque dicen una cosa que no tiene nada que ver.
- P: ¿Qué te ha resultado más fácil, elegir una respuesta correcta o elegir una respuesta incorrecta?
- S07: La incorrecta.
- P: ¿Y qué te ha resultado más fácil, explicar la respuesta correcta o la respuesta incorrecta?
- S07: Explicar la correcta, porque hay que explicar por qué está bien el enunciado.
- P: Por último, ¿qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?
- S07: Yo creo que este, la situación uno.
- P: ¿Por qué?
- S07: Porque te dan ya los enunciados verbales y sólo hay que explicar el simbólico, hay que explicar porque es eso.

E.13. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO S15

Entrevista 13. Sujeto S15. Lunes 18 de marzo de 2013, 11:30h

- P: ¿Te acuerdas cuando estuvimos jugando con las fichas, que había algunas fichas marcadas con un punto rojo?
- S15: Sí.
- P: ¿Qué había que hacer con ellas? ¿Te acuerdas?
- S15: Hacer un problema. Inventarte tú un problema con lo que ponía en la ficha.
- P: Vale. Te voy a leer un enunciado que tú me dijiste y me dices cómo lo escribirías simbólicamente.

- S15: Vale.
P: Me dijiste: “La edad de Juan más la edad del abuelo más uno menos cuatro”, ¿cómo escribirías eso?
S15: Um...
P: Te lo repito: “La edad de Juan más la edad del abuelo más uno menos cuatro”.
S15: “Equis” más “y” más uno menos cuatro.
P: ¿Corresponde con el enunciado que yo te di? $x + (x + 1) - 4$
S15: Ah...no, no es lo mismo.
P: ¿Puedes decirme uno, o corregir este que has dicho?
S15: Este está mal, “equis” más “equis” más uno...
P: No, el simbólico te lo doy yo, tienes que corregir el verbal que tu dijiste.
S15: Um...
P: Dilo en voz alta...
S15: La edad de Juan es “equis”...sería, “equis” más “y” más uno entre paréntesis menos cuatro.
P: Vale, no quiero que me corrijas el simbólico, para el simbólico que yo te estoy dando, dime uno verbal.
S15: Ah, vale...que me he liado yo ahora...
P: Pues no te líes, quiero que me digas uno verbal.
S15: Um...
P: A ver, vamos a seguir llamando a la edad de Juan “equis”. La edad de Juan más...
S15: El abuelo de Juan tiene un año más que él, ¿no?
P: ¿Sí? Que abuelo más raro...
S15: Ah, no no, jejeje...
P: Venga, el hermano...
S15: El hermano de Juan tiene un año más que él...
P: Vale, entonces si “equis” es la de Juan, ¿ésta de quién es?
S15: Esa es la del hermano.
P: Venga, léeme el enunciado.
S15: El hermano de Juan tiene...es que el menos cuatro no sé dónde ponerlo...
P: Da igual, tú empieza...ya me has dicho, el hermano de Juan tiene un año más...
S15: Entonces el “equis” más uno es la edad de Juan.
P: Venga, ¿qué pone aquí? ¿la edad de quién?
S15: La edad de Juan...más la edad del hermano...menos cuatro.
P: Ya está.
S15: Ah vale...
P: Ahora nos vamos a ir a lo que estuvimos haciendo el otro día, ¿te acuerdas?, que teníamos situación uno y situación dos.
S15: Sí.
P: En el enunciado uno yo te decía un simbólico y tú elegías entre los verbales, y en la situación dos te daba uno verbal y tú elegías los simbólicos, ¿verdad?
S15: Sí, me acuerdo.
P: Bien, te voy a hacer unas preguntas sobre el enunciado uno de la situación uno, ¿vale?
S15: Vale.
P: Tú me has marcado como opción correcta...
S15: ...la b.
P: Y me has dicho “porque sería cinco “equis”, que es el quintuple de mi edad más “y” que es la edad de mi hermana”...no entiendo nada...
S15: Sí...a ver...
P: “Porque sería cinco “equis””.

- S15: Sí...
- P: “Que es el quíntuple de mi edad”.
- S15: Si sería cinco más “equis” ya sería cinco “equis”.
- P: ¿Es lo mismo sumar que multiplicar?
- S15: No.
- P: ¿Entonces?
- S15: Um...
- P: Además es que luego me dices “el quíntuple de mi edad más i”.
- S15: Um...no, no...
- P: Vamos al enunciado c, que es el que me has marcado como incorrecto. Me has dicho que “no, porque tendría que ir esa respuesta cinco más “equis” más “y”, y me has puesto el “equis” más “y” entre paréntesis, para que fuera correcta”. Te pregunto yo, ¿qué diferencia hay entre este enunciado que tú me has escrito, cinco más, entre paréntesis “equis” más “y”, con el enunciado que yo te he dado?
- S15: No sé.
- P: ¿Hay alguna diferencia?
- S15: No.
- P: ¿Por qué?
- S15: No, sí, sí...sí hay diferencia.
- P: ¿Por qué?
- S15: Porque se multiplicaría todo lo que hay dentro, el de fuera por todo lo que hay dentro.
- P: Pero si pones un más delante...
- S15: Ay, es verdad, no hay diferencia, es cinco más “equis” más “y”.
- P: Entonces, ¿cuál es el correcto y cuál es el incorrecto?
- S15: El incorrecto es la c.
- P: ¿El incorrecto? Pero si me estás explicando que es lo mismo...cinco más, entre paréntesis “equis” más “y”, que esto...
- S15: Cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo...Un número impar...Cinco por... La a estaría mal.
- P: ¿Y bien cuál?
- S15: La b, porque cinco es un número impar más una edad que sería “equis” más otra edad distinta que sería “y”.
- P: Vale. Vamos a leer de nuevo el enunciado a.
- S15: Cinco años más la edad de mi hermana más mi edad más la de mi hermana.
- P: ¿Qué le pasa a ese enunciado?
- S15: Pues que sería cinco más “y” más “equis” más “y”, y ahí no pone eso.
- P: El enunciado b, “cinco veces mi edad y la de mi hermana”, ¿qué le pasa a ese enunciado?
- S15: Pues que tendría que multiplicar en vez de sumar.
- P: Vale. Enunciado c, “Cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo”, ¿qué le pasa a ese?
- S15: Pues para que fuera correcta...yo le pondría paréntesis a eso...cinco años más...
- P: Per que lleve un paréntesis o no al sumar, no afecta...
- S15: Ya ya...Cinco años más...
- P: Ésta expresión que tú me has escrito aquí, y ésta, es la misma.
- S15: Cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo... Cinco años...Sí está bien, porque sumariamos cinco a la “equis” y a la “y”.
- P: Vale, enunciado d, “un número impar más una edad más otra edad”, ¿qué le pasa a esa?
- S15: Ésta es la correcta.
- P: Pero, ¿no me estás diciendo que la c es la que está bien?

- S15: Espérate...
- P: ¿Cuál de las dos está bien, la c o la d?
- S15: No sé...
- P: ¿Cuál es exactamente este enunciado simbólico?
- S15: Exactamente...la d.
- P: ¿Por qué?
- S15: Porque un número impar que sería cinco, más una edad que sería “equis”, más otra edad que será “y”.
- P: ¿Qué le pasa a la c?
- S15: Porque cinco solo le suma a “y” no.
- P: Claro que sí, dice cinco años más las edades que tenemos mi hermana y yo.
- S15: No sé...
- P: A ver, ¿Cómo escribirías simbólicamente “cinco años más...”?
- S15: Cinco.
- P: “Más las edades que tenemos mi hermana y yo”
- S15: Cinco más “equis” más “y”.
- P: ¿No es lo mismo?
- S15: Sí.
- P: ¿Y qué se parece más éste que tú estás diciendo o este? ¿El c o el d?
- S15: El d.
- P: ¿Por qué?
- S15: Son iguales los dos.
- P: No son iguales, yo veo diferencias.
- S15: Uf...maestra, yo no encuentro la diferencia...
- P: El objetivo del ejercicio es que me digas la que es exactamente igual, ¿cuál es exactamente igual, la c o la d?
- S15: Para mi es la d.
- P: ¿Por qué la c no?
- S15: Las veo iguales como yo las leo. Porque un número impar sería el cinco...
- P: Pero es que un número impar puede ser cualquier número...
- S15: Ah...entonces sería la c, porque un número impar sería nueve u once...
- P: Entonces, ¿cuál es exactamente igual?
- S15: La c.
- P: ¿Seguro?
- S15: Sí...espera que revise... Sí, la c.
- P: Vale, vamos a ir al enunciado dos de la situación uno, pasa la página. ¿Por qué cambiaste de opinión al seleccionar una opción incorrecta y elegiste la opción a en vez de la b que es la que primero habías marcado?
- S15: ¿En la incorrecta?
- P: Sí.
- S15: Porque la b dice un número, que sería “equis”, más sesenta, sería igual a cinco veces, que sería cinco “equis”, por cinco veces ese número, que sería cinco “equis” por cinco.
- P: ¿Es correcta o incorrecta?
- S15: Incorrecta.
- P: Entonces, ¿las dos son incorrectas?
- S15: No, la b.
- P: Pero es que tú me marcaste la a.
- S15: Bueno también.
- P: Pero mi pregunta es curiosidad de saber porqué tachaste y cambiaste de opinión, ¿por qué no sabías explicarla?

- S15: Por eso y porque me convenció más la a de que estaba peor.
P: ¿Peor qué significa?
S15: Me estoy haciendo un lío a ver... pues porque aquí le falta más cinco veces ese número en el a.
P: Vale, vámonos al enunciado tres de la situación uno. En la opción que marcas como correcta y explicas, hablas del perímetro de una figura, pero tu razonamiento no justificas realmente tu elección, ¿Vale? Porque dices, “porque un número elevado a dos menos otro número elevado a dos puede ser igual a nueve”, o sea, lo que tú me has hecho es leerme realmente la expresión simbólica, pero no me has justificado qué enunciado contextualizado es el que corresponde.
S15: A ver... El perímetro del suelo...
P: Hazlo en voz alta... esos comentarios que estás haciendo, quiero oírlos...
S15: La diferencia... El área... Pues la correcta puede ser la c o la d.
P: ¿O la c o la d? Explicame por qué crees que es la c y por qué crees que es la d.
S15: El perímetro del suelo de mi habitación... menos... igual a nueve... Vale, porque en una dice el área pero no dice el perímetro.
P: ¿Qué es el área y qué es el perímetro?
S15: El perímetro es la suma de todos los lados.
P: ¿Y el área, si estamos hablando de un cuadrado?
S15: Lo que hay dentro.
P: Pero, ¿cómo se calcula?
S15: Um... el perímetro no se expresa en cuadrados y el área si...
P: ¿Cómo?
S15: El perímetro de lo que sea no se expresa en número cuadrados.
P: Pero no está hablando de números cuadrados.
S15: Um...
P: A ver, te pregunto... tenemos un cuadrado, no conocemos el lado...
S15: “Equis”.
P: ¿Cuál es su área?
S15: “Equis” al cuadrado.
P: Entonces, ¿por qué en la explicación de la incorrecta me dijiste que si fuese el área tendría que estar elevado a tres?
S15: Porque ya me equivoque con el cubo...
P: Entonces, si el área, como dices, es “equis” al cuadrado, ¿cuál es la opción correcta, la c o la d? Porque, ¿qué es el perímetro?
S15: La d es la correcta.
P: ¿Qué es el perímetro?
S15: La suma de todos los lados.
P: ¿Entonces?
S15: La d.
P: ¿Seguro?
S15: Sí.
P: Vale. Enunciado cuatro de la situación uno. Lo mismo, la pregunta es ¿por qué cambiaste tu elección? Elegiste la opción c, luego cogiste y la tachaste y elegiste la b.
S15: Vale, vamos a ver... la b dice el triple del lado de un cubo y la c el volumen de un cubo...
P: Que no te estoy diciendo que esté bien o mal, simplemente quiero saber por qué cambiaste de opinión.
S15: No, la b está mal, sería correcta la c. Porque pone el triple, que sería tres “equis”.
P: Vale. Ahora, aquí también, has marcado como opción incorrecta la c, y dices que es...

- S15: Es la correcta.
P: Sí, pero dices que es... ah vale, de esta opción c ya lo hemos hablado, vale. Vámonos entonces a la situación dos, al enunciado cuatro.
- S15: Vale.
P: Has marcado como correcta la opción b.
S15: Esto dice... “el área del suelo de una piscina cuadrada por la profundidad de la piscina”...
P: Lee tu razonamiento de la opción correcta, que has seleccionado la b, que pone “equis” al cuadrado por “y”.
S15: Porque es el área “equis” al cuadrado por la profundidad. Está bien...
P: Ah sí, es que me he confundido yo... Vale, te quiero hacer ahora unas preguntas en modo general. Cuando tuviste que elegir entre una opción correcta o una opción incorrecta, ¿seguiste alguna estrategia?
S15: Pues me lo he pensado yo y ya está, lo hice en mi cabeza yo a ver si me salía, lo escribí en la mesa así con lápiz a ver si...y luego mire a ver si me daba lo mismo...
P: En la mesa con lápiz...cosa que no se hace...
S15: Era el lápiz así flojillo...y luego lo borré...
P: Vale...lo podías haber escrito en estos folios... ¿Qué escribías?
S15: Primero leía el enunciado, y ponía lo que yo creía que era, luego miraba las a, b, c, d, y si alguna era lo que yo había puesto pues yo elegía esa que era la correcta, lo hacía varias veces a ver si me salía lo mismo...y la elegía...
P: Vale, ¿qué te ha resultado más fácil, elegir una respuesta correcta o elegir una respuesta incorrecta?
S15: Más fácil, la incorrecta.
P: ¿Por qué?
S15: Porque es más fácil hallar los errores.
P: ¿Y qué te ha resultado más fácil, explicar la respuesta correcta o la respuesta incorrecta?
S15: Incorrecta.
P: ¿Por qué?
S15: Porque los errores, algunos se notaban mucho que eran errores y era fácil explicarlos.
P: Vale, ¿y qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te doy un enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?
S15: Más fácil pues yo creo que la situación dos.
P: ¿Por qué?
S15: Porque los números son fácil de hallarlos...si dices perímetro pues ya sabes que no es al cuadrado...por ejemplo, lo de rectangular pues ya sabes que es la suma de los lados...y todo eso.
P: Vale, muchas gracias.

E.14. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA AL SUJETO S04

Entrevista 14. Sujeto S04. Lunes 18 de marzo de 2013, 12:00h

- P: ¿Te acuerdas de esta primera ficha que hicimos, en la que teníamos que rellenar unos huecos para formar unas fichas?
- S04: Sí.
- P: Te equivocaste un poco al rellenar el orden, pero al final, éste enunciado me lo dejaste

sin rellenar.

S04: ¿Cuál?

P: Este, que corresponde al enunciado uno, “el producto de la mitad de un número por el triple de otro número”, se supone que su correspondiente iría aquí. Es que aquí repetiste dos, y entonces ya arrastraste y dejaste este sin hacer. ¿Sabrías hacerlo ahora?

S04: “Equis”, “equis” partido dos...”equis” por tres...por tres i...

P: ¿Es igual?

S04: No, el producto de la mitad de un número por el triple de otro número, “equis” partido de dos por tres “y”.

P: Ahora. Una pregunta, ¿te acuerdas cuando estuvimos haciendo el juego, que había unas fichas marcadas con un punto rojo?

S04: Sí.

P: ¿Qué había que hacer?

S04: Pues si tenía un punto rojo, tenías que decir como un problema para decir la frase.

P: Vale. Te voy a leer uno de los enunciados que tú me dijiste. Dijiste: “Un tomate más un tomate más otro tomate igual a un tomate menos dos”, ¿podrías decirme cómo lo escribirías simbólicamente?

S04: Um...

P: ¿Te lo leo de nuevo?

S04: Sí porque...

P: Vale, “un tomate”, ¿cómo lo representas?

S04: “Equis”.

P: “Más un tomate”.

S04: I.

P: “Más otro tomate”.

S04: Pues a... a mismo...

P: Igual a un tomate menos dos.

S04: “Equis” menos dos “equis” o dos i...

P: ¿Tú crees que eso está bien?

S04: Yo que sé...

P: Vale, yo te estaba dando éste enunciado simbólico, “equis” más “equis” más uno igual a “y” menos dos. ¿Podrías decirme si eso que tú has dicho de “un tomate más un tomate más otro tomate igual a un tomate menos dos” corresponde?

S04: No.

P: ¿Puedes arreglarlo?

S04: Un tomate más el siguiente de su tomate es igual a un tomate menos dos.

P: Pero si me dices que la “equis” es un tomate no puedes decir que la “y” es un tomate.

S04: Pues una patata, una patata menos dos.

P: ¿Y qué significa...qué has dicho, el siguiente a un tomate?

S04: Claro, “equis” más uno es el siguiente a un tomate.

P: ¿Y qué es el siguiente a un tomate? ¿El tomate que está al lado?

S04: Claro...jejeje...

P: Anda, hazlo sin usar tomates...

S04: Una patata...

P: Tampoco patatas, dime otras cosas...

S04: Es que lo entiendo pero no sé cómo decirlo.

P: Es que yo no entiendo lo de “el siguiente a un tomate”, ¿el que está al lado?

S04: Que no, que era broma...

P: Bueno venga. ¿Probamos con otro que me dijiste?

S04: Sí.

- P: Me dijiste: “Cuatro patatas por una patata partida por la mitad es igual a dos patatas”.
- S04: Otra patata...
- P: Hacemos lo mismo, vamos a pensar cómo escribirlo simbólicamente. “Cuatro patatas por una patata partida por la mitad es igual a dos patatas”.
- S04: Pues cuatro...cuatro...por...”equis” partido dos es igual a dos...a dos “equis”...
- P: No corresponde entonces, ¿no? Quiero decir, me estás diciendo cuatro patatas...
- S04: Sí, cuatro.
- P: Cuatro es cuatro, cuatro patatas sería cuatro “equis”. ¿No hemos hablado de cuando lleva apellido o no lleva apellido?
- S04: Ah...
- P: ¿Sabrías arreglarlo?
- S04: Cuatro por una patata partida por la mitad es igual a dos patatas.
- P: Vale. Vamos a hablar ahora de la situación uno y de la situación dos, ¿te acuerdas?
- S04: Sí.
- P: Vale. Una pregunta sobre el enunciado uno de la situación uno, ¿vale?
- S04: Venga.
- P: Dice...yo te doy “cinco más “equis” más i”, y has elegido como opción correcta la d y dices como justificación que “porque si a un número impar le sumas una edad más otra edad”. ¿Leíste todos los enunciados?
- S04: Menos el c. Es el c...
- P: ¿Qué le pasa al c? ¿Por qué no lo leíste?
- S04: No sé.
- P: Pero, ¿por qué te lo saltaste?
- S04: No sé.
- P: ¿Y por qué dices ahora que es el c?
- S04: Porque son cinco años más la edad que tiene uno más la edad que tiene otra.
- P: Pero no entiendo porqué te lo saltaste. Bueno, pues ya está... ¿consideras que es correcto el que acabas de decir?
- S04: Sí.
- P: ¿Y por qué no el d que es el que habías marcado inicialmente?
- S04: También es correcto, pero es más correcto éste, porque dice que es un número impar pero no dice qué número.
- P: Vale. Vamos al enunciado dos de la situación uno. Lee de nuevo la expresión verbal del enunciado que tú has elegido, la b.
- S04: Un número más sesenta es igual a cinco veces ese número por cinco. Esa es incorrecta.
- P: ¿Por qué?
- S04: , no es correcta...
- P: ¿Pero por qué no es correcta?
- S04: Um...
- P: ¿Qué le pasa al enunciado? ¿Le falta, le sobra, por qué está mal...?
- S04: Porque dice que es igual a cinco veces ese número por cinco, no sé, pero yo creo que está mal...
- P: Vale, lee el d a ver qué le pasa a este.
- S04: Sesenta más un número es igual a cinco veces otro número. Vale...que está mal...ésta es la b y ésta es la d.
- P: Entonces la opción correcta ¿cuál es?
- S04: La b.
- P: Escríbemela simbólicamente.
- S04: I más sesenta es igual a cinco “y”.
- P: Un número, ¿cómo llamamos a ese número?

- S04: “Equis”.
P: Más sesenta...
S04: “Equis” más sesenta.
P: Es igual...
S04: Es igual a...
P: Cinco veces ese número por cinco.
S04: Claro, cinco “equis”.
P: ¿Cinco veces cómo es?
S04: Cinco “equis”.
P: Cinco veces ese número por cinco.
S04: Uy...ya sabía yo que había ahí una errata...
P: ¿Qué errata es?
S04: Por cinco.
P: Vale, búscame entonces el correcto por favor.
S04: El c.
P: ¿Seguro?
S04: Sí.
P: Nos vamos a ir, para alternar un poquito, a la situación dos, enunciado uno.
S04: Es el c la respuesta correcta.
P: ¿Por qué?
S04: Porque como en todos son el c.
P: Ah no...no tiene nada que ver, además no te iba a preguntar eso. Me has escrito como razonamiento a tu elección de opción correcta lo mismo que dice en el enunciado verbal. Lee lo que has dicho al elegir el apartado b, dices “Si a un número le sumas el mismo número más sus seis siguientes es igual a noventa y dos”, ¿qué significa “sus seis siguientes”?
S04: Pues vamos a ver...pues uno, más sus seis siguientes es siete...
P: Pero, ¿eso es lo que te estaba diciendo el enunciado?
S04: Um..
P: A ver, lee de nuevo el enunciado verbal.
S04: El perímetro de un jardín rectangular cuyo largo mide seis metros más que su ancho es noventa y dos.
P: ¿Ahí habla de seis siguientes?
S04: No.
P: ¿Entonces?
S04: No sé...
P: A ver, tenemos un jardín, ¿cómo es el jardín?
S04: Rectangular.
P: ¿Conocemos los lados?
S04: No.
P: ¿Cómo los llamamos?
S04: “Equis”.
P: Pero es rectangular, ¿son los cuatro lados iguales?
S04: No.
P: ¿Cómo los llamamos entonces?
S04: “Equis”.
P: ¿A los cuatro?
S04: No... “equis” y al otro “equis” más seis.
P: ¿Por qué?
S04: Porque es más grande el largo.

- P: Vale, ¿qué es el perímetro de una figura?
- S04: Pues cuanto miden todos sus lados, ¿no?
- P: ¿Todos sus lados?
- S04: Sí, todos sus lados.
- P: La suma...
- S04: Sí, la suma de todos sus lados.
- P: Entonces, ¿cómo calculo el perímetro de ese rectángulo que te estás imaginando que tiene de lados “equis” y “equis” más seis?
- S04: Ah ya... es el a...
- P: ¿Por qué?
- S04: “Equis” más “equis” que es el ancho, y “equis” más seis más “equis” más seis que es el largo.
- P: Vale...
- S04: Es que yo razono después de hacer los exámenes.
- P: Vale, y en la opción incorrecta me habías elegido la d, pero no entiendo muy bien la justificación, me dices “porque se suman seis más porque el largo es grande que el ancho”.
- S04: No sé, era por poner algo...
- P: ¿Eso de “largo es grande que el ancho”?
- S04: Vamos a ver... es que le falta el mas seis... es correcta, está bien...
- P: Si dices que esa opción es correcta, ¿cuáles son los lados del rectángulo?
- S04: “Equis” y los otros “y”.
- P: Pero eso sería un rectángulo en general, pero el rectángulo que nosotros tenemos tiene una característica particular.
- S04: “Equis” más seis.
- P: Entonces, ¿cuál es el enunciado exacto que nosotros buscamos?
- S04: La “y” sería “equis” más seis.
- P: Me has dicho, antes, que el rectángulo tiene de lados, “equis” y “equis” más seis.
- S04: Sí.
- P: Y ahora, si en vez de llamarlo “equis” más seis, lo llamo “y”, es como sería ese enunciado d. pero el enunciado te dice que se llama “equis” más seis. Entonces, ¿cuál es el correcto?
- S04: El a. Te lo he dicho antes...
- P: Ya, pero yo quiero hacer que penséis un poco. Vámonos al enunciado tres de la situación uno. Me has elegido como opción correcta la c, y como incorrecta la a. Vale, una pregunta sobre la opción correcta. Dices “si a un número al cuadrado le resto otro número al cuadrado el resultado es nueve”. ¿Qué tiene que ver esta explicación con el enunciado que dice que el perímetro del suelo de una habitación cuadrada menos el perímetro del suelo de otra habitación cuadrada es igual a nueve?
- S04: Um...
- P: ¿Qué es el perímetro de una figura?
- S04: La suma de todos sus lados.
- P: ¿Cómo se calcula el perímetro del suelo de una habitación cuadrada?
- S04: Um...
- P: Tenemos una habitación con el suelo cuadrado, no conocemos el lado, ¿cómo lo llamamos?
- S04: “Equis”.
- P: ¿Cómo se calcula el perímetro?
- S04: “Equis” más “equis” más “equis” más “equis”...o “equis” al cuadrado.
- P: ¿Cuántas “equis” hay?

- S04: Cuatro.
P: ¿Y eso cuánto es?
S04: “Equis” al cuadrado.
P: No...cuatro “equis”.
S04: ¿Cuatro “equis”?
P: “Equis” más “equis” más “equis” más “equis”...una, dos, tres y cuatro “equis”...
S04: Ah es verdad.
P: ¿Y el área?
S04: Multiplicando la base por la altura, “equis” por “equis”.
P: “Equis” elevado a dos... ¿De qué estamos hablando aquí, de perímetros o de áreas?
S04: Del perímetro.
P: Si me estás diciendo que el perímetro es cuatro “equis”.
S04: Ah...
P: La expresión simbólica dice “equis” elevado a dos menos “y” elevado a dos igual a nueve. ¿De qué estará hablando, de perímetros o de áreas?
S04: De áreas.
P: ¿Seguro?
S04: ¡Que sí!
P: Entonces, ¿cuál es la opción correcta?
S04: La d.
P: ¿Seguro?
S04: Sí.
P: ¿Por qué?
S04: Porque la diferencia entre el área de los suelos de dos habitaciones cuadradas es nueve.
P: Vale, me has leído lo mismo que pone ahí.
S04: Pues eso...
P: Pero, ¿por qué es eso?
S04: Ah...
S04: Ah...la diferencia que hay entre los suelos es nueve.
P: Pero me has vuelto a leer lo mismo, es que si me lees lo mismo que dice el enunciado verbal...
S04: Es que lo entiendo pero no sé cómo explicarlo.
P: Bueno, vámonos al enunciado dos de la situación dos. Dice “el doble de años que tiene Jesús más un cuarto de los que tiene Inés”. Tú me has elegido como opción correcta la b y explicas “si es el doble de la edad más un cuarto de “equis” la edad que tiene Inés”. ¿Qué valor me estás representado por “equis”? Tú has marcado la que dice “dos “equis” más “equis” partido cuatro”.
S04: Pues es Inés.
P: ¿Y no tienes en cuenta la de Jesús?
S04: Jesús es un caso aparte...jeje...
P: Venga...
S04: Que no lo sé. Es la que yo creía que era.
P: A ver, lee de nuevo el enunciado. El doble de los años que tiene Jesús, ¿conocemos la edad de Jesús?
S04: El doble, dos “equis”.
P: Entonces, ¿”equis” es la edad de Jesús?
S04: Ah ya, es dos “equis” más “y” partido cuatro.
P: ¿Por qué? En ese que me acabas de decir, ¿quién es la “equis” y quién es la i?
S04: “Equis” es Jesús e “y” es Inés.
P: La edad de...

- S04: Sí, la edad de Jesús y la edad de Inés.
P: ¿Seguro?
S04: ¡Que sí!
P: Ahora, en la opción incorrecta, me has marcado la d, has empezado a explicarla pero después has tachado la explicación, ¿por qué?
S04: Porque no sabía que poner...
P: Me habías empezado a poner “porque era un cuarto...”, ¿por qué dices que no es la d?
S04: Porque no dice que es un cuarto sino cuatro partido de un número.
P: ¿Y por qué eso no lo escribiste?
S04: Porque yo razono después.
P: Vale, vamos a la situación uno, al enunciado cuatro. Pone “equis” elevado al cubo, y tú me has marcado como correcta la opción b, ¿puedes leer de nuevo tu justificación?
S04: Porque si a un número elevado a su cubo es como multiplicar un número tres veces.
P: ¿Sí?
S04: No.
P: ¿Por qué no?
S04: Sí, sí... está bien.
P: Un ejemplo, dos. ¿Dos elevado a tres?
S04: Ocho.
P: Dos por tres, ¿cuánto es?
S04: Seis.
P: ¿Es lo mismo?
S04: No. Pero sí que multiplicar un número tres veces.
P: Ah, vale. Pero, ¿el triple qué es?
S04: Eso lo taché.
P: Pero, ¿el triple qué es de un número? Porque lo has tachado en la explicación, pero has marcado la opción que habla del triple del lado de un cubo. ¿Qué es el triple de un número?
S04: Pues multiplicar un número por tres.
P: ¿Y es lo mismo?
S04: No.
P: ¿Entonces?
S04: Um...
P: Búscame el enunciado correcto o explícame por qué ese no lo es.
S04: Es la c.
P: ¿Por qué?
S04: Porque es el volumen de un cubo y “equis” elevado a tres es lo mismo, ¿no?
P: No sé, soy yo la que te pregunta a ti. Vale, seguimos, vamos a irnos al enunciado tres de la situación dos. Te voy a hacer una pregunta. Lee de nuevo el enunciado verbal que te doy.
S04: ¿El enunciado? El número de ruedas de dos coches es ocho.
P: ¿Qué valor está representado por la letra “equis”?
S04: Los dos coches.
P: Vale, empezamos... te dice “el número de ruedas de dos coches”, tú me has marcado como opción correcta la d y como opción incorrecta la b. No entiendo las explicaciones de ninguna de las dos. Léelas y explícamelas por favor.
S04: Es que el doble... como son cuatro ruedas pues es igual a ocho, porque es como cuatro más cuatro... cuatro ruedas que tiene un coche más las del otro, pues cuatro más cuatro ocho.
P: ¿Qué tiene que ver eso con lo que tú me has marcado? Me has dicho que la incorrecta

- es dos “equis” igual a ocho “y”. ¿Por qué no es esa?
- S04: Porque dice ocho por otro...otro número...otro coche...
- P: ¿Entonces “equis” es el coche?
- S04: Dos “equis”...
- P: ¿Qué es “equis”?
- S04: Un coche.
- P: ¿“Equis” es un coche? Si el enunciado te dice que hay dos coches.
- S04: Dos “equis” son los dos coches.
- P: Entonces, ¿“equis” es el número de coches?
- S04: Claro.
- P: Pero si el enunciado te dice que hay dos coches.
- S04: Dos “equis” elevado a dos igual a ocho.
- P: Pero si yo no te estoy diciendo si está bien o mal, te estoy preguntando quién es “equis”.
- S04: Las ruedas.
- P: Ahora...el número de ruedas de los coches.
- S04: Eso...
- P: Si estaban bien elegidos, pero las explicaciones están dudosas.
- S04: Vale.
- P: Ahora unas preguntas en general. Cuando tuviste que elegir entre una opción correcta o una opción incorrecta, ¿seguiste alguna estrategia? ¿Cómo lo has hecho?
- S04: Pensando un poco.
- P: ¿Qué significa pensando un poco?
- S04: Pues lo que yo creía que era más conveniente.
- P: Vale, te di los folios en blanco y te dije que tenías que hacer esto, en el caso de la situación uno te di uno simbólico y varias opciones de verbal, en la situación dos te di uno verbal y varias situaciones de verbal, tenías que elegir una opción correcta y una incorrecta, te encuentras con eso, ¿qué haces?
- S04: Pues resolverlos.
- P: Pero, ¿cómo?
- S04: Con lógica. Por ejemplo cinco más “equis” más “y”, pues “equis” la edad de uno...
- P: Vale, mi pregunta es, yo te di enunciados y las distintas opciones...Por ejemplo, antes me dijiste que te saltaste la opción c en un enunciado, ¿por qué? ¿No los leíste todos?
- S04: Los leí todos pero no sé...
- P: Pero entonces, ¿por qué antes me has dicho que el c no lo leíste?
- S04: No es que no lo leyera...si lo leí pero...
- P: ¿No lo pensaste?
- S04: No...
- P: Vale, ¿qué te ha resultado más fácil, elegir una respuesta correcta o elegir una respuesta incorrecta?
- S04: Correcta.
- P: ¿Por qué?
- S04: No sé.
- P: No sabes nada... ¿Y qué te ha resultado más fácil, explicar la respuesta correcta o la respuesta incorrecta?
- S04: Incorrecta.
- P: ¿Por qué?
- S04: Porque no tienes que explicar cómo en la correcta, tienes que explicar qué está mal.
- P: Vale, ¿y qué te ha resultado más fácil, la situación uno donde yo te doy un enunciado simbólico y tú tienes que elegir el verbal, o la situación dos donde yo te doy un

enunciado verbal y tú tienes que elegirme el simbólico?

S04: La situación uno. Se me dan mejor los números.

P: Esa justificación no me vale...

S04: Porque si tú me das números yo sé resolverlo más fácil que si me das letras.

P: Yo no te he puesto números.

S04: ¿No son números?

P: No, te he dado una expresión simbólica te es más fácil que si te doy una expresión verbal.

S04: Sí, eso...

P: Eso sí, porque hay números y letras. ¿No sabes explicarme por qué?

S04: No...

P: Vale, muchas gracias.