Tesis doctoral

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Modelado de superficies polinomiales y su aplicación a la técnica

Ángel Humberto Delgado Olmos

Granada, 2006

Editor: Universidad de Granada
Autor: Ángel Humberto Delgado Olmos
ISBN: 84-338-3937-3
D.L.: GR 2790-2006
URI: http://hdl.handle.net/10481/40922

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE POR CAPÍTULOS

CAPÍTULO 1: ANTECEDENTES HISTÓRICOS

CAPÍTULO 2: CONCEPCIÓN TEÓRICA

CAPÍTULO 3: FORMULACIÓN MATEMÁTICA

CAPÍTULO 4: TRATAMIENTO INFORMÁTICO

CAPÍTULO 5: EJEMPLOS DE APLICACIÓN

CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES

CAPÍTULO 7: BIBLIOGRAFÍA

CAPÍTULO 1:

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

1.1.-MODELADO DE CURVAS PLANAS

Se entiende por modelado de curvas en el plano al proceso mediante el cual se hace la construcción matemática de una curva atendiendo a una serie de criterios o requisitos definidos "a priori". Estos pueden ser de diversa índole: matemáticos (interpolación o ajuste), estéticos (atención a la belleza de las formas), funcionales (búsqueda de utilidad), etc.

El proceso constructivo incorporará la posibilidad de actuar sobre el modelo a realizar para corregirlo o modificarlo de manera que se vaya ajustando progresivamente al objetivo deseado.

Los principales métodos para la construcción de curvas planas son la interpolación polinomial, el ajuste por mínimos cuadrados, las curvas Bezier, las funciones splines y las curvas racionales.

1.2.-CURVAS PLANAS. SU EXPRESIÓN ANALÍTICA

La expresión analítica de una curva plana se concreta en una o varias ecuaciones matemáticas que verifican todos los puntos que la forman y solamente ellos.

La geometría analítica distingue tres tipos de formulación: la forma explícita, la implícita y la paramétrica.

En la forma explícita la curva se expresa mediante una ecuación de la forma $y = f(x)$ donde f es una función uniforme. A cada valor de x corresponderá un único valor de y.

Si f es una función continua y se varía continuamente x en un intervalo (a, b) se obtiene un arco continuo de curva entre (f(a),f(b)).

Tiene el inconveniente esta forma, de no permitir el describir una curva cerrada o, más general aún, la imposibilidad de describir curvas de funciones multiformes.

Otra desventaja importante es que la forma explícita depende del sistema de coordenadas, en el sentido de que si f pertenece a una cierta clase de funciones (por ejemplo: polinomios) al hacer una transformación afín la nueva curva, en general, no pertenecerá a la misma clase de funciones.

Se puede comprobar con un sencillo ejemplo. Sea la curva $y = x^2$, si se hace una rotación de ejes de +90º que corresponde a la transformación:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1)$$

La nueva curva sería:

$$\begin{aligned} &x < 0 \\ &y = \sqrt{-x} \end{aligned} \qquad (2)$$

que tiene dos ramas y sólo está definida para x < 0.

En el caso de una formulación implícita de la curva, ésta se concreta en una ecuación de la forma f(x, y) = 0.

Esta representación admite curvas multiformes (es decir varias ordenadas para una misma abscisa) y por tanto es válida para describir curvas cerradas.

Esta forma presenta dificultades para determinar puntos de la curva a partir de una ecuación. Así si se pretende comprobar si hay algún punto de la curva que tenga de abscisa x = a habría que resolver la ecuación f(a, y) = 0, que en general puede ser un problema de difícil solución, también es un inconveniente para su uso el que la forma implícita , igual que la explícita , sea dependiente del sistema de coordenadas.

El caso de la representación en forma paramétrica de una curva es aquel en que ésta se describe mediante un par de ecuaciones, una por cada coordenada, quedando así la expresión:

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned} \qquad (3)$$

siendo *t* un parámetro que varía dentro de un cierto rango.

Este tipo de formulación permite fácilmente el describir curvas multiformes o cerradas.

La principal ventaja, no obstante, que presenta la representación paramétrica es su independencia del sistema de coordenadas. Así, la aplicación de una formación afín del tipo:

$$\begin{cases} x_1 = ax + by + m \\ y_1 = ex + dy + n \end{cases} \qquad (4)$$

a los puntos de una curva:

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned} \qquad (5)$$

dará:

$$\begin{cases} x_1 = af(t) + bg(t) + m = f_1(t) \\ y_1 = ef(t) + dg(t) + o = g_1(t) \end{cases} \qquad (6)$$

pero si f y g pertenecen a un subespacio vectorial que contiene a las constantes, entonces f_1 y g_1, también pertenecerán al mismo subespacio vectorial.

Siguiendo con el ejemplo antes usado: $y = x^2$, una representación paramétrica de esta curva sería :

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \end{aligned} \qquad (7)$$

Si se la somete a la rotación + 90º se tiene

$$\begin{aligned} x_1 &= -t^2 \\ y_1 &= t \end{aligned} \qquad (8)$$

y como se ve todas las funciones usadas en las descripciones inicial y final de la curva son polinomios de grado menor o igual que dos. Es decir, ambas curvas pertenecen a una misma clase, la de las curvas cuyas funciones paramétricas son polinomios de grado menor o igual que 2.

En contra de la representación paramétrica se puede argüir la dificultad que presenta la determinación de los valores del parámetro t correspondientes a un valor de *x* prefijado.

Como conclusión a las consideraciones que anteriormente se exponen es conveniente el uso, en la práctica, de la representación en forma paramétrica de las curvas.

1.3.-MODELADO DE ELEMENTOS ESPACIALES. CURVAS Y SUPERFICIES

1.3.1.-MODELADO DE CURVAS

La expresión analítica de una curva en el espacio en su forma paramétrica (las otras formas no se consideran por las razones antes expuestas) está formada por tres ecuaciones, una por coordenada:

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \qquad (1) \\ z &= h(t) \end{aligned}$$

donde *f, g* y *h* son funciones continuas del parámetro *t* el cual varía dentro de un cierto rango.

Hay que señalar que en la práctica no es frecuente el uso de curvas alabeadas sino que lo corriente es trabajar con curvas contenidas en algún plano de R^3**.**

En estos casos la curva se puede considerar contenida en R^2 (plano z = 0) y puesta después en otro lugar del espacio mediante el uso de transformaciones afines del tipo rotación y traslación.

Por ejemplo, si se quiere diseñar una curva en el plano vertical $x = t$ primero se diseña en el plano XY (z = 0) obteniendo sus ecuaciones paramétricas.

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \qquad (2) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

se rota después el plano XY (z = 0) hasta hacerlo coincidir con el plano x = 0 mediante la transformación afín:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (3)$$

y la curva transformada es :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \qquad (4)$$

luego sus ecuaciones paramétricas serían

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= f(t) \qquad (5) \\ z &= g(t) \end{aligned}$$

Ahora si se hace una traslación, a lo largo del eje x, de la curva, hasta colocarla en el lugar deseado (x = k) se tienen las ecuaciones paramétricas definitivas de la curva que serían :

$$\begin{aligned} x &= k \\ y &= f(t) \qquad (6) \\ z &= g(t) \end{aligned}$$

1.3.2.-MODELADO DE SUPERFICIES

Análogamente a las curvas, las superficies se pueden expresar analíticamente en forma explícita z = f(x, y), en forma implícita f(x, y, z) = 0 y en forma paramétrica como:

$$\begin{aligned} x &= g(u,v) \\ y &= g(u,v) \qquad (1) \\ z &= h(u,v) \end{aligned}$$

donde *u* y *v* son parámetros independientes que recorrerán determinados rangos numéricos y *f*, *g* y *h* son funciones continuas de estos parámetros.

En esta tesis se usa esta última forma de representación de superficies atendiendo a las motivaciones expresadas cuando se ha tratado el manejo de curvas.

El problema a tratar, para el modelado espacial de superficies, es el de determinar (calcular) una superficie que responda a unos criterios prefijados de índole matemático, estético, funcional....

También se tendría en cuenta, al elaborar un proceso para la construcción de superficies, el que éste permita actuaciones para corregirlo y modificarlo en orden a irlo ajustando progresivamente al objetivo buscado.

1.3.3.-TÉCNICAS DE CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES

Hay principalmente tres técnicas de construcción de superficies:

- El producto sensorial
- Las superficies definidas por secciones
- La representación transfinita .

1.3.3.1.-EL PRODUCTO TENSORIAL

Las superficies creadas mediante producto tensorial son de la forma:

$$
\begin{aligned}
f(u,v) &= f_1(u)\cdot f_2(v) \\
g(u,v) &= g_1(u)\cdot g_2(v) \qquad (1) \\
h(u,v) &= h_1(u)\cdot h_2(v)
\end{aligned}
$$

Para un valor constante de una de los parámetros v = k, se obtiene una curva situada sobre la superficie, ya que si se llama:

$$
\left.
\begin{aligned}
f_2(k) &= \alpha \\
g_2(k) &= \beta \\
h_2(k) &= \gamma
\end{aligned}
\right\}
\qquad \text{donde } \alpha, \beta, \gamma \text{ son constantes.} \qquad (2)
$$

se tiene, que la ecuación de la superficie queda en la forma:

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha \cdot f_1(u) \\
y &= \beta \cdot g_1(u) \qquad (3) \\
z &= \gamma \cdot h_1(u)
\end{aligned}
$$

Es decir, una curva que resulta de aplicar un escalado a la curva base:

$$
\begin{aligned}
x &= f_1(u) \\
y &= g_1(u) \qquad (4) \\
z &= h_1(u)
\end{aligned}
$$

Para valores constantes y distintos de v tales como $v_1, v_2, v_3, \ldots$ se obtendrían curvas que resultan de aplicar distintos escalados a la curva base. Todas estas curvas serán "parecidas" entre sí.

Análogamente se podría hacer el planteamiento anterior trabajando con valores del parámetro u y obtener otra serie de curvas correspondientes a distintos valores de u, todas ellas semejantes entre sí como resultado de una serie de escalados a la curva base:

$$
\begin{aligned}
x &= f_2(v) \\
y &= g_2(v) \qquad (5) \\
z &= h_2(v)
\end{aligned}
$$

1.3.3.2.-EL LOFTING

Otra técnica para generar superficies es la del Lofting o de superficies definidas por secciones. El método consiste en modelar una serie de secciones planas independientemente y buscar, posteriormente, una superficie que las englobe a todas.

El proceso de construcción de la superficie es el siguiente:

Sean $c_1, c_2, ..., c_n$ n curvas en el espacio, no necesariamente planas, aunque facilita la tarea el que lo sean.

Las ecuaciones de las curvas c_i serían:

$$\left.\begin{array}{l} x^i = f_i(u) \\ y^i = g_i(u) \\ z^i = h_i(u) \end{array}\right\} \quad \text{con } u_0 \leq u \leq u_1 \qquad (1)$$

Sea C, una curva, dependiente de un parámetro $v_0 < v < v_1$.

Se hace una partición arbitraria de *n* puntos del intervalo $[v_0, v_1]$ que sea $\{v^1, v^2, ..., v^n\}$.

Se presenta el problema de determinar la curva C de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x_c = f(v) \\ y_c = g(v) \\ z_c = h(v) \end{array}\right\} \quad \text{con } v_0 \leq v \leq v_1 \qquad (2)$$

tal que:

$$\left.\begin{array}{l} f(v^i) = f_i(u) \\ g(v^i) = g_i(u) \\ h(v^i) = h_i(u) \end{array}\right\} \quad \text{para } i = 1, 2, ..., n \qquad (3)$$

Está claro que *f*, *g* y *h* dependerán de *u* a través de las condiciones de interpolación.

Se considera ahora la superficie

$$\left.\begin{array}{l} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} u_0 \leq u \leq u_1 \\ v_0 \leq v \leq v_1 \end{array} \qquad (4)$$

donde *f*, *g* y *h* son las funciones obtenidas en (2) con las condiciones (3) pues dependen de los dos parámetros *u* y *v*.

Para los valores del parámetro $v = v^i$ se tendría:

$$\begin{aligned} x &= f(u,v^i) = f_i(u) \\ y &= g(u,v^i) = g_i(u) \\ y &= h(u,v^i) = h_i(u) \end{aligned} \qquad (5)$$

Queda patente, por tanto, que las curvas (o secciones) correspondientes a $v = \text{constante}$ son las curvas originales para los valores particulares $v^1, v^2, ..., v^n$.

1.3.3.3.-LA REPRESENTACIÓN TRANSFINITA

Queda, finalmente, hacer referencia al último de los métodos señalados anteriormente, es decir a la representación transinfinita.

Esta técnica consiste en dar dos familias de curvas en el espacio dependiendo de parámetros u y v distintos. Hay que tratar de construir una superficie que contenga a todas las curvas de ambas familias. Este problema es similar al anterior pero mucho más complejo y necesita de interpolantes especiales.

1.3.4.-MODELADO DE SUPERFICIES POLIÉDRICAS

Un caso particular de superficies es aquel en el que la superficie está constituida por la unión de polígonos planos.

En estas superficies, llamadas poliédricas, el conjunto de los vértices, junto con una descripción cíclica, indicando los que componen cada cara, determina la superficie**.**

Aunque matemáticamente ésta sea la forma más sencilla de generar una superficie poliédrica, no lo es así para el diseñador que tiene que suministrar esa información para casos de superficies poliédricas con miles de vértices, lo que hace insalvable en la práctica el manejo de ese cúmulo de datos.

Un método de generar una superficie poliédrica es hacerlo a partir de un modelo regular diseñado con las técnicas de modelado espacial antes enumeradas, para a continuación "cuadricularlo" ó "triangularlo" y convertirlo en un objeto con "facetas".

Así, si se tiene la superficie:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= f(u,v) \\ y &= g(u,v) \\ z &= h(u,v) \end{aligned} \right\} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} u_0 \le u \le u_1 \\ v_0 \le v \le v_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

bastará tomar un par de particiones de los rangos de los parámetros $\left(u_0, u_1, ..., u_n\right)$ $\left(v_0, v_1, ..., v_m\right)$ y considerar los puntos:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= f(u_i, v_j) \\ y_{ij} &= g(u_i, v_j) \\ z_{ij} &= h(u_i, v_j) \end{aligned} \qquad (2)$$

que determinan un poliedro con vértices en estos puntos y caras las compuestas por cuatro vértices tales como:

$$\boldsymbol{P}_{i,j}, \boldsymbol{P}_{i,j+1}, \boldsymbol{P}_{i+1,j+1}, \boldsymbol{P}_{i+1,j}$$

donde cada punto $\boldsymbol{P}_{qr}$ tiene de coordenadas:

$$\boldsymbol{P}_{qr} = \begin{pmatrix} x_{qr} \\ y_{qr} \\ z_{qr} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Estas caras, en general, no serán planas por lo que habrá que recurrir a un algoritmo que modifique los vértices de forma que los cuatro que acoten cada cara sean coplanarios o bien triangularizar la superficie.

Esto último se consigue conviniendo que los cuatro vértices $\boldsymbol{P}_{i,j}, \boldsymbol{P}_{i,j+1}, \boldsymbol{P}_{i+1,j+1}, \boldsymbol{P}_{i+1,j}$ determinan dos caras triangulares que serían:

La cara de vértices $\boldsymbol{P}_{i,j}, \boldsymbol{P}_{i,j+1}, \boldsymbol{P}_{i+1,j}$ y la cara de vértices $\boldsymbol{P}_{i,j+1}, \boldsymbol{P}_{i+1,j+1}, \boldsymbol{P}_{i+1,j}$ (Figura 1.3.4.1.)

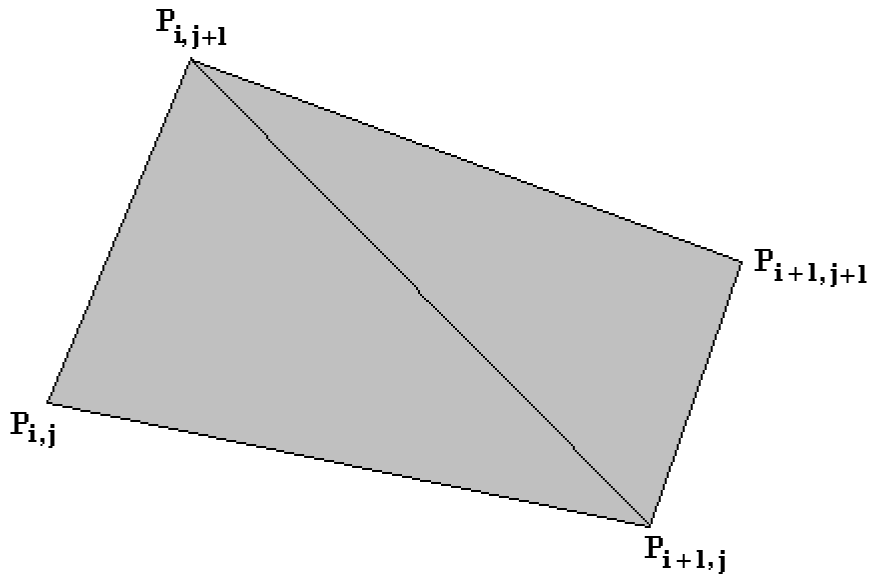
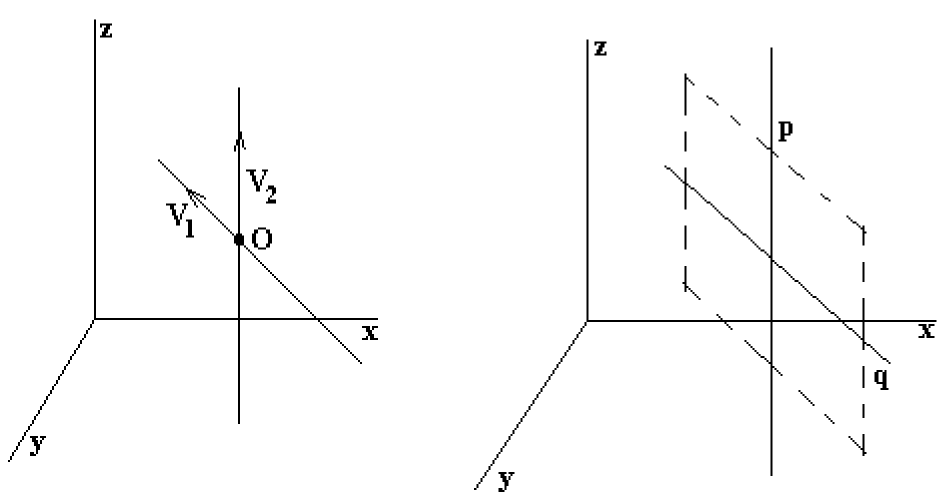


Figura 1.3.4.1.

Este proceso de construcción de superficies poliédricas sólo se usa para diseñar superficies regulares y para obtener superficies poliédricas a partir de otras regulares.

Otro método empleado para fabricar superficies poliédricas es de tipo constructivo. Aquí lo que se hace es disponer de unos modelos elementales tales como paralelepípedos, pirámides, prismas, con formas diversas U, L, etc. como punto de partida. Luego mediante una serie de rutinas que permiten aplicarles transformaciones afines para escalarlos, rotarlos y trasladarlos, logramos, mediante un ensamblado de estas piezas, llegar a obtener el modelo deseado.

Así, por ejemplo, un paralelepípedo en el espacio puede determinarse dando los datos siguientes (Figura 1.3.4.2).



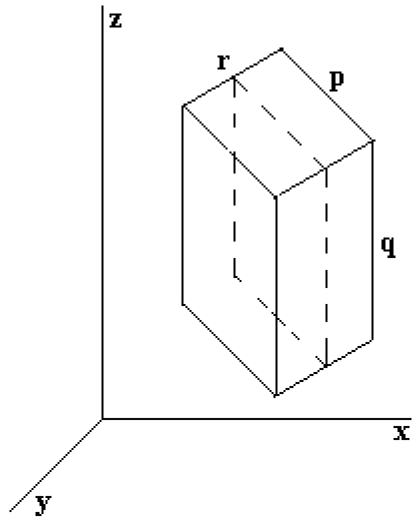


Figura 1.3.4.2.

- Un punto O y dos vectores V_1, V_2.
- Dos dimensiones que serán las del paralelepípedo *p* y *q*
- Una tercera dimensión que fijará el grosor *r*

El paralelepípedo podrá especificarse mediante una llamada a una rutina tal como:

$$CUBO(O, V_1, V_2, p, q, r)$$

Independientemente del tipo de método constructivo que se adopte para crear una superficie poliédrica, por la naturaleza de éstas y por las propiedades de las transformaciones afines y la transformación perspectiva (que aplican planos en planos y rectas en rectas) el manejo de estas superficies se simplifica.

Así para transformarlas bastará transformar los vértices y después unirlos con el mismo criterio que en la superficie original para obtener los lados y las caras de la superficie transformada.

Ante todo esto hay que añadir que la modificación de un vértice implica muy poca modificación de la estructura de la superficie y además si ésta ha sido ya transformada bastará con transformar el nuevo vértice.

1.4.-GENERALIDADES SOBRE EL PROCESO MATEMÁTICO-INFORMÁTICO DEL DISEÑO DE CURVAS Y SUPERFICIES

El proceso de diseño de una curva pasa por una serie de algoritmos cuyo esquema responde a los siguientes pasos.

En primer lugar el usuario introduce (por coordenadas o por pantalla) las coordenadas (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) de un conjunto de puntos por los que quiere que pase o a los que se aproxime la curva final.

Según el algoritmo escogido se logra una curva de interpolación que pasará por todos los puntos dados o una curva de ajuste que se aproximará a los puntos dados sin tener que pasar por todos ellos.

En una segunda etapa se introduce una nueva variable t de forma que el punto de coordenadas (x_i, y_i) es representado en dos gráficas. En la gráfica *x- t* tendremos el punto (x_i, t_i) y en la *y- t* tendremos el punto (y_i, t_i). El parámetro *t* ha de ser creciente $t_i > t_{i-1}$.

En los sistemas que usan parametrización uniforme y unitaria se adoptan los valores de $x_i = i$. En cambio otros sistemas calculan t_i de forma que tome el valor de la distancia recorrida a lo largo de la poligonal que une los puntos dados, desde el punto P_1 al punto P_{i+1}.

Es decir, parametrizamos según:

$$\begin{array}{lll} \text{P}ara \quad i = 1 & t_1 = 0 & \\ \text{P}ara \quad i = 2 & t_2 = t_1 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 & \quad (1) \\ En \quad general & t_i = t_{i-1} + (x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 & \end{array}$$

En tercer lugar se calculan, según el algoritmo particular escogido, las ecuaciones de las curvas *x(t)* e *y(t)* en función del parámetro *t*.

- Por último, como ya podemos calcular los valores de *x* e *y* para cualquier valor del parámetro t comprendido entre t_1 y t_2, podemos dibujar la curva completa.

El diseño de cualquier objeto queda resuelto en cuanto tengamos definidas las superficies que lo envuelven y delimitan.

El diseño de estas superficies se basa habitualmente en el diseño inicial de una o más curvas que servirán con posterioridad para modelar la forma de la superficie buscada.

Un esquema muy simple del proceso seguido en el diseño de una superficie sería el que corresponde a la figura 1.4- 1.

Como se ve en el esquema, el diseño inicial de las curvas es un proceso interactivo en el que se parte de la representación gráfica de las curvas generadores y si ésta no es satisfactoria para los objetivos se modifican los datos y se inicia un nuevo diseño.

En la figura 1.4-2. se ven dos ejemplos de obtención de superficies a partir de una curva. en el primer caso mediante una traslación de la curva y en el segundo mediante una rotación de 360' alrededor de un eje.

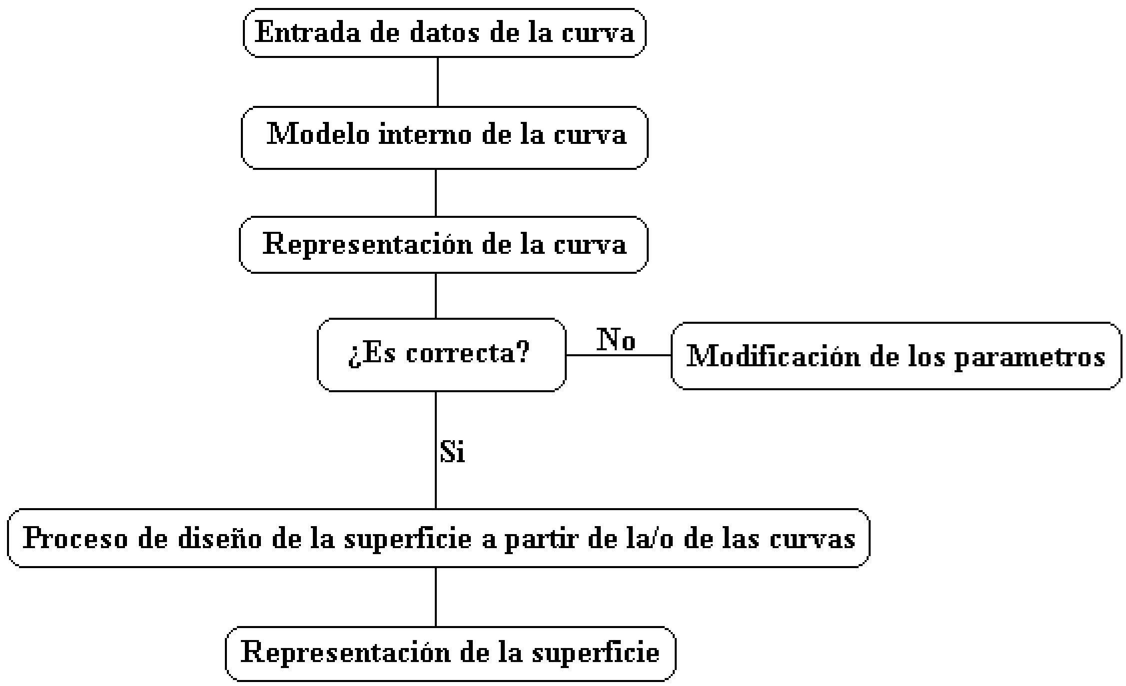
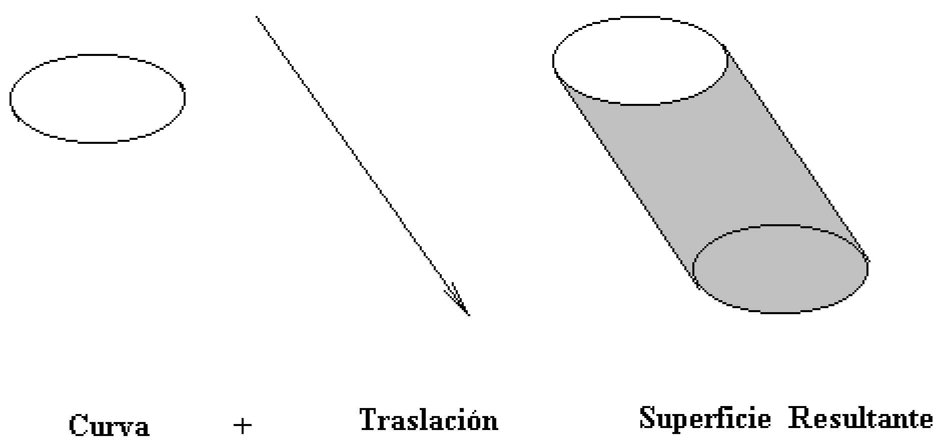


Figura 1.4.-1: Esquema del proceso de diseño de una superficie



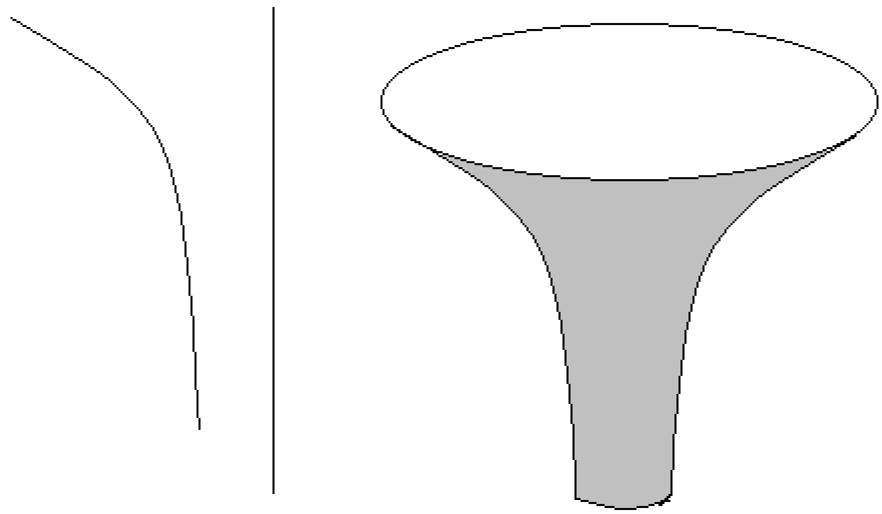


Fig. 1.4.-2: Ejemplos de creación de superficies a partir de unas curvas generadores

1.5.-ANTECEDENTES HISTÓRICOS DEL DESARROLLO DEL DISEÑO ASISTIDO POR ORDENADOR DE CURVAS Y SUPERFICIES.

1.5.1.- INTRODUCCIÓN

El proceso de creación de elementos espaciales ha involucrado una serie de técnicas que pasan por el manejo de modelos materiales y el uso de elementos matemáticos que permitan una definición analítica del modelo logrado.

La posibilidad de manipulación de ambas definiciones de la superficie material y analítica es imprescindible para el proceso de creación de ésta.

1.5.2.- EVOLUCIÓN DE LOS PROCESOS DE DISEÑO

El diseño de curvas y superficies juega un importante papel en la fabricación de diferentes productos como carrocerías de coches, cascos de barcos, alas de aviones, aletas de hélices, plantillas de zapatos, frascos, etc.

También tiene su utilidad en la descripción de fenómenos geológicos, físicos y médicos.

Antes de la irrupción de los ordenadores los problemas de diseño eran tratados por medio de la geometría descriptiva. Una superficie era definida por una serie de curvas, usualmente secciones planas de ella, y algunas líneas características.

Esta información era suficiente para fabricar plantillas y éstas se usaban para construir modelos. El cuño o troquel final se obtendría, a partir de los modelos, mediante una copia por fresado.

Al final de los años 50 fue posible manejar las fresadoras mediante control numérico, es decir las instrucciones a la máquina se generarían mediante programas de ordenador. Para ello era necesario almacenar la definición de la superficie en una forma computerizada por lo que había que diseñar un modelo matemático.

El paso inicial era digitalizar la superficie descomponiéndola en un gran número de puntos de coordenadas determinadas. Esta información se obtendría de un modelo físico o de los planos.

Se trabajó sobre diversos métodos para sacar un modelo matemático a partir de una información discreta de puntos.

Es en 1950 cuando empieza a disponerse de hardware útil para troquelar modelos espaciales en madera y acero. Estos modelos serían luego utilizados para fabricar carrocerías de coches.

En orden a mecanizar los modelos, usando ordenadores, había que hacer una adecuada descripción de aquellos que fuera apta para ser tratada por el ordenador. Pronto se vió que la mejor manera de trasmitir esa información era suministrar las diversas superficies que componen el modelo mediante sus ecuaciones paramétricas.

Los estudios sobre el uso de curvas y superficies paramétricas para estos fines pueden considerarse como el origen del Computer Aided Geometrie Design (CAGD).

Lo que hoy conocemos como CAGD toma entidad propia en 1974 en la conferencia de la Universidad de Utah.

Como antes mencionábamos el CAGD fue desarrollado por ingenieros mecánicos procedentes de la industria del automóvil.

Estos profesionales estaban familiarizados con el trabajo con superficies definidas por líneas rectas y curvas conocidas. El rellenado de los espacios entre curvas se hacía mediante superficies auxiliares escasamente definidas y por ultimo se dejaba a la habilidad de los modeladores el resto, hasta lograr construir la superficie final.

Este modelo final tenía una forma que no coincidía con las curvas trazadas en el tablero de dibujo del diseñador. Esta discordancia se traducía en discusiones, retoques, costos y retrasos.

Obviamente ningún desarrollo importante podía esperarse hasta que no se lograra un método que proporcionara una completa e indiscutible definición de formas libres.

La computación y el control numérico han hecho grandes progresos durante estos últimos tiempos permitiendo pasar toda la información necesaria desde el dibujo hecho por el diseñador a la máquina herramienta encargada de crear la forma diseñada.

La idea de UNISURF estuvo inicialmente orientada hacia la geometría más que al análisis pero teniendo "in mente" que cada dato sería expresado únicamente mediante números.

Por ejemplo, un arco de curva se ha representado por las coordenadas cartesianas de sus extremos A y B junto con su abscisa curvilínea, relacionada con una red trazada sobre los bordes (Fig. 1.5.2,-1).

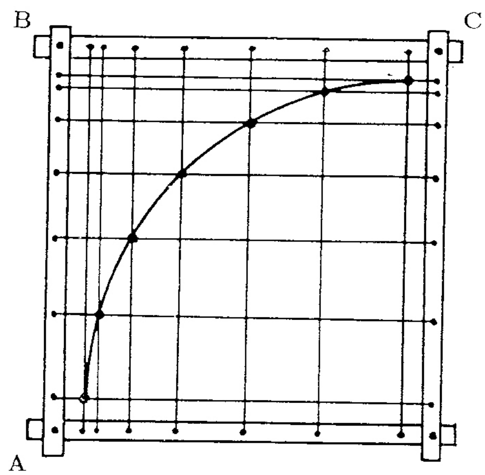


Figura 1.5.2.-1

Al girar los bordes de la red el cuadrado se transforma en un rombo y el arco de circunferencia en un arco de elipse, la cual quedaría totalmente definida tan pronto conozcamos las coordenadas de los puntos A, B y C (Figura 1.5.2- 2)

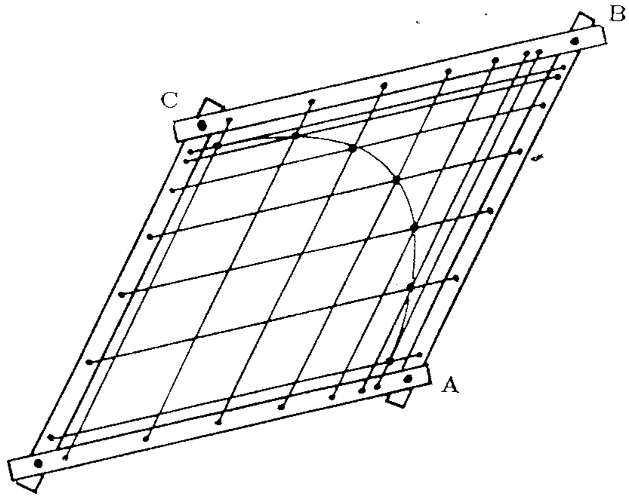


Figura 1.5.2.-2

Si los lados fueran reemplazados por pantógrafos el rombo se convertiría en paralelogramo y la definición del arco de elipse seguiría dependiendo de las coordenadas de los tres puntos A, B y C.(Fig. 1.5.2-3)

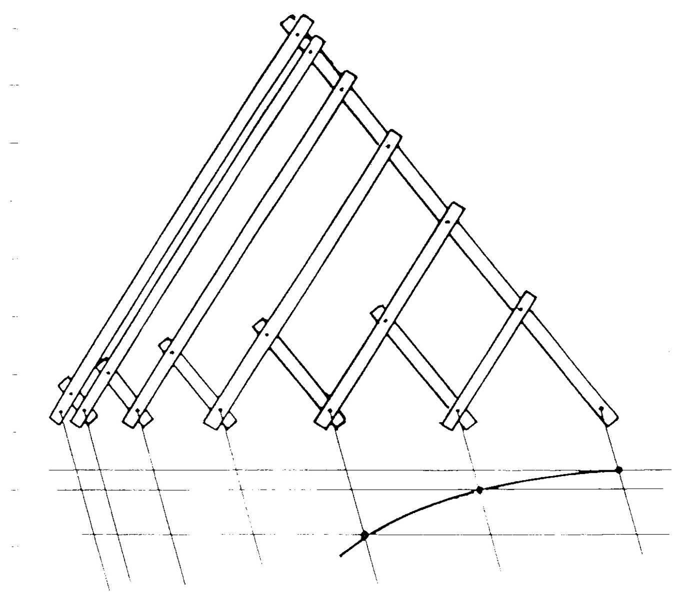


Figura 1.5.2.3.

Sin embargo el empleo únicamente de arcos de elipse era demasiado restrictivo y se requería una definición más flexible.

Otra idea fue proyectar con una lámpara una marca sobre una pantalla sobre la que se proyectaba a su vez una figura de una diapositiva. Reemplazando la marca por una curva **y** recogiendo la exacta localización y orientación de la lámpara definiríamos la imagen de la curva proyectada sobre la pantalla.

El método requería disponer de una serie de diapositivas con curvas específicas como circunferencias, parábolas, astroides, etc.

En este tiempo los diseñadores definieron la forma de una carrocería de coche por secciones transversales separadas entre si 10 cm. La ventaja era que a partir de un dibujo uno podría obtener plantillas para ajustarlas a un modelo de arcilla o a una máquina de estampado. El inconveniente era que los estilistas no definían la forma por secciones transversales sino por líneas características que raramente son curvas planas.

Teóricamente una curva alabeada podría definirse mediante un alambre guiado por muelles y contrapesos.(Fig. 1.5.2-4)

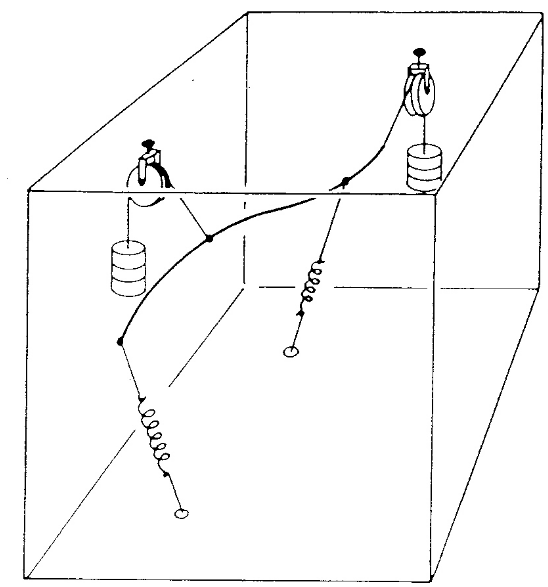


Figura 1.5.2.4.

Los polinomios se consideraban como funciones adecuadas por sus propiedades importantes en cuanto a tangencia, curvatura, etc. Más tarde se descubrió que podían ser considerados como suma de funciones de Bernstein.

Cuando se sugirió que estas curvas reemplazaran a las utilizadas en la industria *los estilistas se* resistieron a cambiar sus plantillas y a abandonar sus métodos. Se hizo necesario prometerles que sus "curvas secretas" serían trasladadas a secretos listados y almacenadas en la memoria de los ordenadores y controladas, mediante llave, su acceso. Sin embargo las nuevas curvas eran flexibles y las curvas secretas fueron pronto olvidadas.

Diseñadores y delineantes comprendieron las relaciones entre los polígonos y la forma de las correspondientes curvas.

Hacia 1960 casi nada había publicado sobre parches biparamétricos. La idea de partida de UNISURF provenía del proceso usado en las fundiciones para modelar. Este consistía en compactar arena dentro de una caja y obtener la forma de la parte superior raspando el sobrante mediante un listón que actúa como plantilla.

Las formas que se pueden obtener por este método son relativamente simples ya que la forma de la plantilla es constante y la forma de los bordes de la caja, sobre los que se desliza, también es sencilla.

Para hacer el sistema más flexible se podría cambiar la forma de la plantilla al mismo tiempo que nos movemos.

En realidad esta idea coincide con la de la definición de superficie como el lugar geométrico de una curva que se mueve a la vez que se desplaza.

Alrededor de 1970 un laboratorio esculpía un bloque de styrofoam con un listón flexible de acero calentado eléctricamente, cuya forma era controlada por la flexión de torsión impuesta sobre sus extremos.

Este proceso no produciría una gran variedad de formas pero sus principios serían trasladados a una solución matemática.

Los bordes de la caja, que actuaban como guías, eran similares a las curvas AB **y** CD de la figura (Fig. 1.5.2-5) y pueden considerarse corno directrices de la superficie, definidas por su polígono característico. Una curva tal como la EF, que es una generatriz definida por su propio polígono, tiene sus bordes deslizándose sobre las líneas AB **y** CD y los vértices intermedios del polígono recorriendo las curvas GH **y** JK.

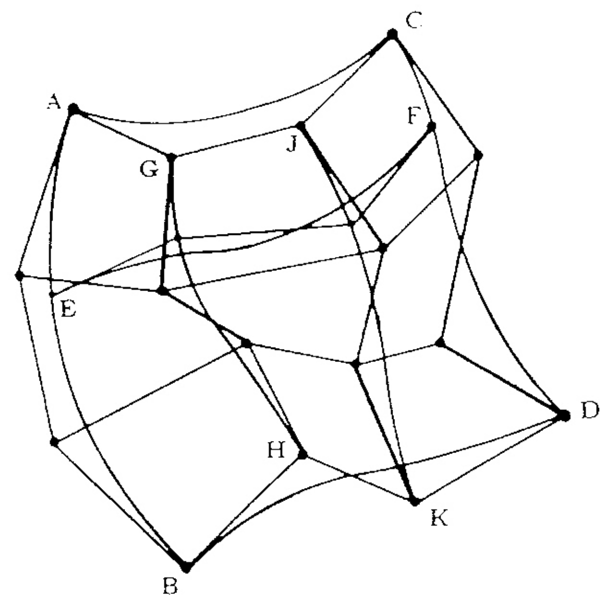


Figura 1.5.2.5.

La superficie ABCD es conocida en cuanto los cuatro polígonos están definidos.

Conectando los correspondientes vértices de los polígonos definimos la red característica del parche que juega el mismo papel que el polígono con respecto a la curva. Aquí las coordenadas cartesianas de los puntos del parche son computadas de acuerdo a los valores de los dos parámetros.

Un sistema había sido creado para la solución de los problemas de diseño.

Observemos que la primera solución (paralelogramo, pantógrafo) es el resultado de una formulación orientada hacia la cinemática es decir la concepción de los mecánicos.

Después, aparecen las soluciones que implican a la geometría y la óptica disciplinas que están íntimamente ligadas a las enseñanzas del ejército, donde la geometría, la topografía y la cosmografía juegan un papel importante.

Más tarde la reflexión se orientó hacia el análisis, los espacios paramétricos y finalmente el proceso de datos. Estas teorías no debían ser una pesada tarea para el computador y tenían que ser comprendidas en sus principios por los operadores.

Las curvas spline son la formulación matemática de algo cotidiano que aparece en los trabajos del diseñador.

Cuando un dibujante quiere pintar una curva larga y lisa usa un spline.

Un spline es una pieza larga y flexible de madera o plástico que tiene su sección transversal de forma rectangular.

El spline es fijado en la posición requerida u obligado a que pase por unos puntos prefijados mediante chinchetas.

La posición del spline está fijada donde las chinchetas lo sujetan al tablero de dibujo y es libre para adoptar su forma natural en los tramos que quedan entre cada dos chinchetas.

El diseñador ajusta la forma del spline moviendo las chinchetas. Cuando está satisfecho con la forma del spline, la curva es trazada usando el spline como guía.

Cuando analizamos matemáticamente la forma del spline encontramos que el problema no es lineal y no tiene solución única,

Se pueden encontrar soluciones particulares tales como aceptar que la curva es un polinomio cúbico entre cada dos chinchetas. Estos diversos polinomios, uno por cada tramo, coinciden en ordenadas y en primera y segunda derivadas en las posiciones de las chinchetas.

También ligados a la industria del automóvil, como los trabajos en Citroen y Renault, fueron los estudios sobre los parches Coons hechos en la casa Ford de Detroit y las superficies Gordon llevadas a cabo en la General Motors de Detroit por W. Gordon.

En el diseño de la carrocería de un nuevo modelo de coche el primer paso es la confección de un modelo de arcilla o madera. El proceso propiamente de CAD comienza con la labor de comunicar la forma de ese modelo a la base de datos del CD.

El modelo es digitalizado mediante un aparato que recoge los puntos en un sistema fijado de coordenadas donde un sensor toca la superficie del modelo. Este sensor se mueve sobre el modelo a lo largo de ciertas líneas preñadas o líneas características. Cada una de estas líneas es después descompuesta en una serie de puntos digitalizados.

Una vez almacenados los puntos de las curvas son unidos usando, por ejemplo, interpolación por splines.

1.5.3.- ELEMENTOS MATEMÁTICOS USADOS EN EL DISEÑO

El estudio matemático del problema de la interpolación hunde sus raíces en el tiempo. Sus primeros antecedentes hay que ubicarlos en la antigua Babilonia donde encontramos cálculos sobre el tiempo necesario para que un capital llegara a duplicarse estando prestado a un interés constante

Sin embargo hay que esperar hasta 1687 en que Newton y después Lagrange en 1775 aborden las fórmulas clásicas de interpolación.

La interpolación polinómica segmentaria es mucho más reciente, pudiéndose situar sus orígenes hacia 1900. Existen una serie de trabajos de diversos autores en los que se aborda este problema bajo la denominación de interpolantes osculadores.

En este campo hicieron aportaciones importantes estudiosos del tema como Runge (1901), Eagle (1928), Quade-Collatz (1938), Farad (1940), Sard (1949) y otros muchos.

A grandes rasgos, el desarrollo histórico de la gama de interpolantes que hoy se conocen como splines se puede desglosar en dos etapas.

Hay un primer periodo de desarrollo lento, que abarcaría hasta aproximadamente el año 1960 y una segunda fase que se extiende hasta nuestros días que coincide con el extraordinario avance que se ha operado en los computadores.

Esta última etapa se ha caracterizado por el vertiginoso desarrollo e implementación de estos estudios.

Dentro de la larga lista de autores que tratan estos temas, ya en los últimos tiempos , tenemos a Schoenberg, Ahlberg, Nilson, Walsh, Laurent, Bezier, Riesenfeld, Bambill, de Boor, Schumaker y un largo etcétera.

En cuanto a la elaboración de gráficos mediante el uso del ordenador hay que señalar la fecha de 1950 como la de su inicio. En dicho año se adapta el primer dispositivo gráfico, un tubo de rayos catódicos, al ordenador Whirlwind I.

También en estos trabajos cabe señalar dos etapas en su desarrollo.

Una primera que abarcaría hasta los años 60 durante la cual los avances son lentos debido a la escasa interactividad de los ordenadores.

Es a partir de estas fechas cuando comienza una segunda etapa de avance rápido y de introducción en la industria de estas técnicas.

Es un obligado referente de esta época la tesis doctoral de I. Shuterland (1962) y los trabajos realizados por empresas como General Motors, Bell, Lockheed Air Craf en EEUU y Citroen y Renault en Europa.

La mayor aportación al Computer Aided Geometric Design fueron indudablemente las teorías sobre superficies de Bezier y los parches de superficies estudiados por Coons combinados después con los métodos de B-splines.

Las curvas y superficies Bezier fueron desarrolladas independientemente por P. Casteljau en 1959 en la casa Citroen y por P. Bezier en 1962 en la casa Renault.

Los estudios de Casteljau no fueron publicados por lo que la teoría de curvas **y** superficies polinomiales en forma de Bemstein lleva el nombre de Bezier.

Estos trabajos sobre curvas y superficies Bezier fueron recogidos por este autor en la obra " Emploi des machines acommande Numerique" (1970).

La teoría matemática subyacente esta basada en el concepto de polinomios de Bemstein. Casteljau explotó directamente estas relaciones pero no fue antes de 1970 cuando R. Fon-est descubrió la conexión existente entre los trabajos de Bezier y los polinomios de Bernstein.

Bezier y Casteljau desarrollaron sus teorías como parte de los sistemas de CAD que estaban siendo costruidos por las empresas Renault y Citroen.

El sistema UNISURF de la Renault fue pronto recogido en varias publicaciones razón por la que estas teorías se las conoce hoy con el nombre de Bezier.

Las curvas y superficies Bezier aparecen hoy como la base matemática de muchos sistemas de CAD y se han convertido en una gran herramienta para el desarrollo de nuevos metodos de descripción de curvas y superficies.

El sistema de manejo exacto de las formas no pudo ser creado sin la ayuda de matemáticos ya que los diseñadores aún cuando tenían buenos conocimientos de geometría y en especial de geometría descriptiva no tenían una profunda formación en álgebra o análisis.

Cabe señalar que en Francia existía muy poco conocimiento durante esta época sobre los trabajos realizados en América por la industria de la aviación. Los estudios de James Ferguson no fueron publicados hasta 1964 y Citroen tenia bajo secreto los resultados obtenidos por Paul Casteljau y el famoso informe técnico MAC-IR-41 (de S.A. Coons) no apareció hasta 1967. Los trabajos de W. Gordon y Riesenfleld fueron publicados en 1974.

Los fundamentos de las curvas Bezier habría que buscarlos hacia 1926 en que S. Bernstein presentó una demostración constructiva del teorema de aproximación de Weierstrass. Dicha demostración hacía uso de funciones que posteriormente serían conocidas como polinomios de Berstein.

Philiph J. Davis en su libro "Interpolation and Approximation" (1963), hablando sobre el comportamiento como aproximante de los polinomios de Berstein y después de observar su lenta convergencia dice: "Quizás se les encontrarán aplicaciones cuando las propiedades del aproximante sean más importantes que la convergencia". Estas propiedades fueron las que aprovecharon las curvas de Bezier.

Cuando Casteljau creó las llamadas curvas Bezier en 1959, comprendió la necesidad de extender estas ideas sobre curvas al tratamiento de superficies. La primera superficie tipo que él consideró fue la que hoy conocemos como triángulo de Bezier en la forma de “surface a poles”. Esta superficie es recogida por los matemáticos como la más natural generalización de las curvas de Bezier, mas aún que los parches rectangulares creados mediante el producto tensorial.

Sobre la importancia de estas superficies triangulares, dentro del campo del CAGD, R. Barnhill desarrolla un apreciable artículo "Surfaces in computer aided geometric design: a survey with new results" en Computer Aided Gemetrie Design (1985).

Mientras los trabajos de Casteljau recogidos en dos informes técnicos internos de la empresa Citroen ("Corbes et surfaces a poles" 1963 y "Outillages methodes calcul") permanecieron desconocidos hasta su descubrimiento por W. Boehtn alrededor de 1975, otros investigadores intuyeron la necesidad de los parches triangulares.

M. Sabin trabajó sobre parches triangulares en términos de polinomios de Berstein para construir B-splínes sobre triangulaciones regulares por convolución en la obra "The use of piecewise forms for the numerical representation of shape" Ph.D. thesis 1976, al margen de los trabajos de Casteljau.

También ha contribuido al desarrollo de los parches triangulares P. J, Davis, L. Fmderikson, P. Sabloniere y D. Stanm.

Las superficies Bezier, resultantes del producto tensorial, fueron usadas con fines de diseño posiblemente por primera vez por Casteljau quien estaba investigando sobre ellas entre 1959 y 1963.

En un principio los parches Bezier fueron usados únicamente para aproximar una superficie dada.

Tendría que pasar un tiempo hasta que los estudiosos de estos temas comprendieran que toda superficie B-spline puede también ser escrita en forma de superficie Bezier a trozos.

Los parches Bezier, mediante producto tensorial tuvieron gran desarrollo en los primeros años 60 y durante estos mismos años se empezó a indagar sobre las superficies a trozos.

Los primeros en utilizar las superficies producto tensorial fueron Casteljau (1963) **y** Ferguson (1964) que lo hicieron partir de una red de puntos de control.

Los B-splines fueron investigados en el siglo XIX por N. Lobachevsky y fueron construidos como "convoluciones" de ciertas distribuciones de probabilidad aunque fueron definidos solamente sobre una serie de nodos muy especiales.

En 1946 I. J. Schoenberg usó los B-splines para lograr el alisamiento de una serie estadística de datos y con esta función comenzó la moderna teoría de aproximación mediante splines.

La descripción original de las curvas splines parte de los artículos de Schoenberg "Contributions to the problem of approximaton of equidistant data by analitie functions".

Estos artículos tratan gran cantidad de materias incluyendo la interpolación mediante splínes, alisamiento y B-splines. Fueron estos artículos los que introdujeron la palabra spline dentro del léxico matemático.

Schoenberg también usó la calificación de spline cardinal para los splines de nodos equiespaciados. Desgraciadamente este nombre ha sido aplicado a otras cosas y su uso, hoy, puede dar lugar a confusiones.

El descubrimiento de las relaciones de recurrencia de los B-spline por C. de Boor, M. Cox y L. Mansfield fue un importante paso para el desarrollo de esta teoría.

Estas relaciones de recurrencia fueron primeramente usadas por Gordon y Riesenfeld en el contexto de las curvas B-splínes paramétricas.

Los B-splines fueron generalizados al año de su aparición por Curry a nodos no equiespaciados. Este autor junto con Schoenherg aportaron conceptos tan importantes como el vector de multiplicidad, independencia lineal de los B-splines y un buen número de propiedades básicas.

Las fórmulas de recurrencía que posibilitan su implementación en ordenador son fruto de tres investigadores independientes la de Cox (1972) sobre nodos simples y la de Mansfield y de Boor en el mismo año.

Las curvas splíne o curvas polínomíales a trozos con ciertas restricciones de diferenciabilidad fueron introducidas en el CAGD por J. Ferguson de la Boeing Co. en 1963. Alrededor de estas mismas fechas C. de Boor y W. Gordon estudiaron estas curvas en la General Motors.

Una de las primeras publicaciones fue el trabajo de C. de Boor "Bicubic spline interpolation" de 1962.

Casi simultáneamente J. Ferguson ("Multivariable curve interpolaton" 1964) implementó los splines bicúbicos en Boeing. Este método fue muy usado aunque tenía el serio inconveniente de usar únicamente vectores " twist " cero en las esquinas.

Una excelente cantidad de ejemplos de uso industrial de los splines bicúbicos a trozos es el artículo de U. Peters "Interactive computer graphics application of the parametric bicubic surface to engineering design problems" in R. Barnhill and R. Riesenfeld editors, Computer Aided Geometric Design. Academic Press 1974.

En un principio las curvas spline fueron usadas para interpolar datos.

Los B-spline estuvieron también muy ligados a aspectos de la teoría de la aproximación.

Gordon y Riesenfeld conectaron la teoría de los B-spline con la de las curvas Bezier y mostraron que las curvas B-spline son una generalización de las curvas de Bezier.

Las curvas B-spline pueden ser consideradas como una fusión de las ideas incorporadas por las curvas spline y las curvas Bezier.

Para obtener propiedades similares a las de los splines, es decir, igualación de derivadas altas, cuando curvas similares a las de Bezier se juntan, se tendría que renunciar a algo. La propiedad que se abandona es la de la que la curva pase por su primer y ultimo punto de control. Por tanto una curva B-spline no estará obligada a pasar por cada uno de sus puntos de control.

La B que aparece en la denominación de B-spline no se debe a la inicial de Bezier sino que aparece refiriéndose a la palabra "basis".

Se han hecho extensiones a la formulación de los B-splines como la contenida en el artículo de Bearsky y Beatly " Local control of bias and tension in beta splines". Estos autores comienzan con B-splines cúbicos y reemplazan la continuidad en la primera y segunda derivadas con las restricciones menos fuertes de continuidad de la dirección del vector tangente y de la curvatura.

Aunque la representación de curvas mediante el uso de funciones polinomiales paramétricas es muy útil sin embargo en algunos casos puede tener serias restricciones. Así, la única cónica que puede ser representada exactamente es la parábola. Una representación exacta de la circunferencia es imposible. Un arco de circunferencia puede ser aproximado usando polinomios de alto grado o usando concatenaciones de polinomíos de bajo grado con un gran numero de puntos de control aunque ello nunca pueda dar una representación precisa.

Sin embargo estos inconvenientes se superan si se representa la cónica paramétricamente mediante el cociente de polinomios cuadráticos.

Las llamadas curvas racionales son aquellas cuyas coordenadas son especificadas como cocientes de polinomios.

Uno de los primeros artículos en discutir el uso de las curvas racionales es "Rational B-splines for curve and surface representation" de Wayne Tiller (1983). No obstante ya se recoge información sobre este tema en el libro de I. D. Faux y M. J.Pratt: "Computational geometry for design and manufacture" (1979).

Estas curvas racionales fueron introducidas en el CAGD por Coons y se han incorporado a algunos sistemas de CAD desarrollados por las fábricas de aeronaves.

Es importante señalar su invarianza bajo transformaciones afines proyectivas es decir: la imagen perspectiva de una curva racional es otra curva racional.

Hay que señalar también que en los años 60 la empresa Chrysler empezó a desarrollar curvas y superficies mediante esquemas basados en los polinomios de Chebychev.

Estos métodos tienen unas características diferentes de las superficies de Bezier y B-spline. En vez de ser descritas mediante redes de control, las suplantan por cadenas de curvas para generar superficies.

La red de curvas resultante debe ser completada para generar una superficie que describa el modelo. Este proceso de generar una superficie a partir de una red de curvas es resuelto mediante el uso de superficies Coons y Gordon.

Tal como sucedió con las superficies Bezier triangulares uno puede pensar, como una alternativa a las variedades rectangulares de superficies, en versiones triangulares de los parches Coons.

Varias soluciones han sido estudiadas a lo largo de los años, tales como las de Barnhill, Birkhoff y Gordon ("Smooth interpolation in triangles", J. Approx. T'heory 1973) y los de G. Nielson ("The side-vertex method for interpolation in triangles" J. of Approx. Theory).

La solución aportada por Bamhill, Birkhoff y Gordon parte de tres curvas dadas que son el contorno de la superficie a interpolar y a partir de ellas crea la superficie que la tiene por borde.

En cambio la aproximación debida a G. Nielson considera una serie de curvas radiales que conectan un vértice con un punto de la curva opuesta a él.

1.6.-COMPARACIÓN ENTRE LOS DISTINTOS MÉTODOS DE APROXIMACIÓN

Cada uno de los métodos de aproximación o de interpolación existentes tiene sus posibilidades y sus restricciones y por tanto una serie de ventajas e inconvenientes que se verán a su vez matizados por la experiencia personal del usuario que los utiliza.

Sobre la comparación entre el uso de curvas Bezier o curvas splines habría que decir que las primeras son un caso especial de curvas B-spline. Así, un sistema que contiene B-spline en su completa generalidad, permitiendo múltiples nodos es capaz de representar una curva Bezier o una curva Bezier a trozos.

Una curva puede ser almacenada como un B-spline y para su evaluación ser convertida a la forma de Bezier a trozos.

La comparación entre curvas spline y curvas B-spline no tiene mucho sentido. Los B-spline forman una base para todos los splines por lo que toda curva puede ser escrita como una curva de B-spline.

La cuestión que puede ser importante plantearse sería la siguiente: si queremos diseñar una curva ¿pasariamos un spline interpolante por todos los puntos dados o diseñaríamos una curva mediante la manipulación interactiva del polígono del B-splíne?. Es decir con las soluciones propuestas se ha pasado desde un método de representación de curvas a un método de generación de curvas.

En lo referente al uso de curvas en forma monomial o en la forma de Bezier habría que comentar que, según los trabajos de Farouki y Rajan, la primera forma es numéricamente menos estable que la segunda.

La principal ventaja de la forma monomial es la velocidad de trabajo con ella.

El método de Homer es mas rápido que el algoritmo de Casteljau.

Hay por tanto una oposición entre rapidez y estabilidad.

El análisis comparativo entre curvas en forma de B-spline o en la forma de Hermite nos lleva a constatar que las curvas B-spline cúbicas son numéricamente más estables que las cúbicas en forma de Hermite.

Como elementos a favor de las curvas a trozos en forma de Hermite hay que contabilizar el que almacena puntos de interpolación explícitamente mientras que en la forma de B-spline tienen que ser computados y ello puede dar lugar a redondeos. También juega a favor de esta forma el que las condiciones de contorno para los splines de interpolación C^2 son más fácilmente formulables.

En contra de la forma de Hermite esta su pérdida de invarianza bajo transformaciones afines paramétricas.

Una importante ventaja de la forma B-spline es el almacenamiento.

Cuando ambas formas son usadas para el producto tensorial de interpolación la forma de Hermite debe resolver tres sistemas de ecuaciones lineales mientras que la forma B-spline debe resolver solamente dos sistemas.

El tratamiento de la superficie mediante parches triangulares tiene sus razones históricas y computacionales. El CAD nace vinculado a la industria del automóvil y al diseño de las carrocerías de coches.

Las primeras aplicaciones del CAD fueron al diseño de techos, puertas, capo, partes que básicamente tenían forma rectangular por lo que resultaba natural descomponerlas en pequeños rectángulos. Estos rectángulos fueron luego representados mediante parches rectangulares.

Una vez que el CAD ha sido progresivamente usado en problemas de diseño es natural que se extienda su uso al diseño de otras estructuras cuyas formas no se asemejan a la rectangular. Esas formas hicieron que los parches rectangulares no fueran su modelo más adecuado aunque la experiencia acumulada con ellos hizo que hubiera una cierta rémora y se siguieron utilizando para resolver algunos problemas para los cuales no era adecuado su uso .

Para esas formas de geometría más complicadas son más adecuados los parches triangulares. Sin embargo su uso exige una nueva investigación teórica y computacional que ya existe, extensivamente, para el caso de los parches rectangulares.

CAPÍTULO 2:

CONCEPCIÓN TEÓRICA

2.1.- INTRODUCCIÓN.

El objetivo final que se propone esta tesis es la obtención de tres métodos que permitan, a partir de unos datos prefijados (puntos y tangentes en ellos) diseñar superficies que pasen por ellos y, en su caso, con tales tangentes.

Se recoge todo el proceso completo: creación de los algoritmos matemáticos pertinentes, tratamiento informática mediante ordenador de dichos algoritmos y ejemplos de aplicación.

Tanto por el proceso de creación de las superficies como por la estructura algebraica de las ecuaciones paramétricas que se obtienen se pueden deducir propiedades genéricas de las superficies que se presentan.

Los métodos aquí desarrollados son un buen instrumento de trabajo para el diseño de superficies al recoger dos de los datos más manejables para "dar forma" a una superficie como son: puntos de paso de la superficie y tangentes o plano tangente en ellos.

Los ejemplos que se han implementado han pretendido sugerir las posibilidades que ofrecen los métodos.

Se incluyen por tanto ejemplos de superficies que se han utilizado en algunas construcciones concretas y que aquí aparecen tratados según los métodos de diseño que se aportan en esta tesis.

También aparecen superficies cuya forma o datos de partida las hacen interesantes como ilustradoras de los métodos presentados o sugeridoras de formas novedosas que pudieran incorporarse al diseño de obras arquitectónicas o de ingeniería civil .

La estructura que se le ha dado al contenido de los capítulos 3, 4 y 5 responde a una intención de independizar el desarrollo matemático de los algoritmos y el tratamiento informática de los mismos. También se han incluido separadamente los ejemplos.

Con esta organización del trabajo de investigación queda patente el posible tratamiento matricial de los problemas aquí estudiados con otro tipo de funciones distintas de los polinomios de Lagrange y de Hermite.

Dentro de los capítulos 3 y 4 se ha estudiado separadamente cada método y en el capitulo 5 se recogen separadamente los ejemplos que se aportan.

2.2.- SUPERFICIES POLINOMIALES DEFINIDAS POR PUNTOS

2.2.1- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema que se aborda es el de diseñar una superficie que tiene que pasar por un conjunto de puntos dados por sus coordenadas cartesianas.

Aunque se ha trabajado fundamentalmente con redes rectangulares de puntos también se ha hecho el desarrollo adaptado para una red triangular de puntos.

El algoritmo elaborado para el desarrollo de superficies con estos datos de partida posibilita, con gran facilidad, el tratar superficies que pasen por un conjunto de puntos cualesquiera. Esto se conseguiría ampliando el conjunto de puntos dados con otros puntos elegidos hasta hacer que el conjunto total de puntos sea de tipo rectangular o considerando el conjunto de puntos dados como una "contracción" de un conjunto rectangular. Por ejemplo una red formada por 9 puntos se puede ampliar mediante otros 3 puntos hasta formar una red de 4x3 puntos (figuras: 2.2. 1.- 1 y 2.2.1.-2).

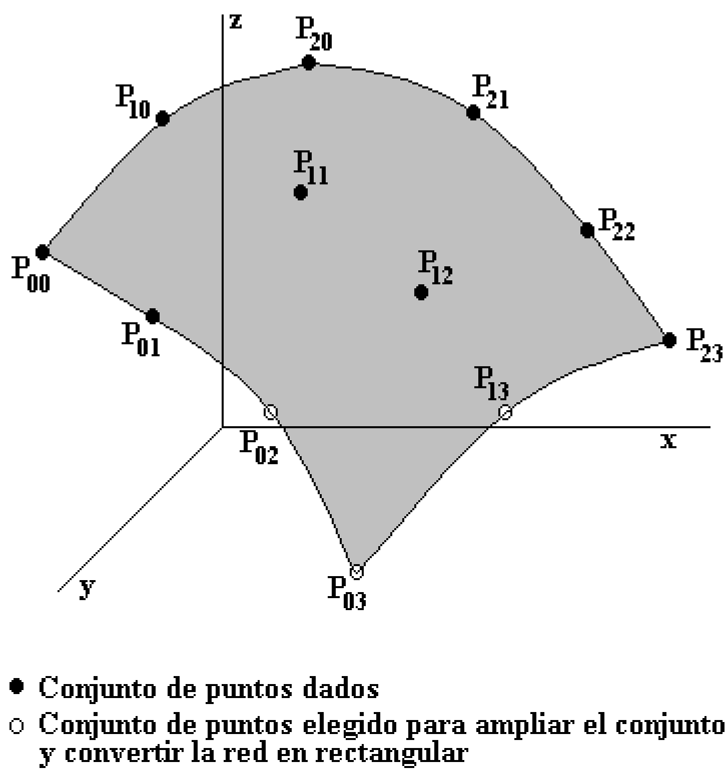


Figura 2.2.1.-1. Ampliación con puntos

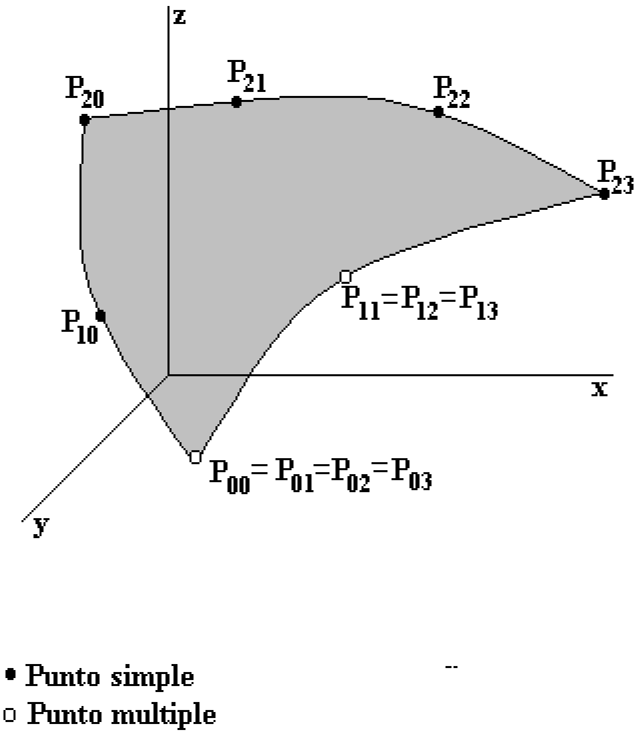


Figura 2.2.1.-2. Conjunto rectangular contraido para adaptarse al conjunto de puntos dados

2.2.2.- ELABORACIÓN DEL ALGORITMO

Se pretende elaborar un algoritmo que permita obtener las ecuaciones paramétricas de una superficie que tiene que pasar por una red de $(m+1)x(n+1)$ puntos dados del espacio.

$$\left.\begin{array}{llll} P_{00} & P_{01} & \ldots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & \ldots & P_{1n} \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ P_{i0} & P_{i1} & \ldots & P_{in} \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ P_{(m-1),0} & P_{(m-1),1} & \ldots & P_{(m-1)n} \\ P_{m0} & P_{m1} & \ldots & P_{mn} \end{array}\right\} P_{ij} \qquad \begin{array}{l} \forall\, i = 0,1,\ldots,m. \\ \forall\, j = 0,1,\ldots,n. \end{array}$$

de los que conocemos sus coordenadas cartesianas:

$$P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$$

Si se determina la ecuación vectorial de una curva que pasa por una serie de puntos

$$\boldsymbol{P_0}, \boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \ldots, \boldsymbol{P_i}, \ldots \boldsymbol{P_{m-2}}, \boldsymbol{P_{m-1}}, \boldsymbol{P_m}$$

esta curva sería:

$$\boldsymbol{P}(t) = f_0(t)\boldsymbol{P}_0 + f_1(t)\boldsymbol{P}_1 + \ldots + f_m(t)\boldsymbol{P}_m = \sum_{i=0}^{m} f_i(t)\boldsymbol{P}_i$$

donde las funciones $f_i(t)$ tendrían que cumplir las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} f_i(t_j) = 1 & si \quad i = j \\ f_i(t_j) = 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Siendo:

$$t_j = {}^{j}\!/_{m} \qquad j = 0,1,2,\ldots,m$$

para que la curva $\boldsymbol{P}(\mathrm{t})$ pase por todos los puntos $\boldsymbol{P}_i$ dados.

En esta tesis las funciones $f_i(t)$ que se han usado son polinomios de Lagrange que cumplen las restricciones antes apuntadas.

La ecuación de la curva puesta en forma matricial sería:

$$\boldsymbol{P}(t) = \left(\boldsymbol{P_0}, \boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \ldots, \boldsymbol{P_k}, \ldots \boldsymbol{P_{m-2}}, \boldsymbol{P_{m-1}}, \boldsymbol{P_m} \right) M \begin{pmatrix} t^m \\ t^{m-1} \\ t^{m-2} \\ \vdots \\ t^k \\ \vdots \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si se desarrolla, análogamente, la curva que pasa por (n+1) puntos dados:

$$\boldsymbol{P}_i \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

de los que conocemos sus coordenadas cartesianas:

$$\boldsymbol{P}_i = (x_i, y_i, z_i) \qquad \forall\, i = 0,1,\ldots,n.$$

La ecuación de dicha curva sería:

$$\boldsymbol{P}(t) = f_0(t)\boldsymbol{P}_0 + f_1(t)\boldsymbol{P}_1 + \ldots + f_n(t)\boldsymbol{P}_n = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\boldsymbol{P}_i$$

donde las funciones $f_i(t)$ tendrían que cumplir las restricciones:

$$\begin{cases} f_i(t_j) = 1 & si \quad i = j \\ f_i(t_j) = 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

siendo:

$$t_j = {}^{j}\!/_{n} \qquad\qquad j = 0,1,2,\ldots,n$$

para que la curva $\boldsymbol{P}(t)$ pase por todos los puntos $\boldsymbol{P}_i$ dados.

La ecuación de esta curva se puede poner en forma matricial como:

$$\boldsymbol{P}(t) = \left(\boldsymbol{P_0}, \boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \ldots, \boldsymbol{P_k}, \ldots \boldsymbol{P_{n-2}}, \boldsymbol{P_{n-1}}, \boldsymbol{P_n} \right) N \begin{pmatrix} t^n \\ t^{n-1} \\ t^{n-2} \\ \vdots \\ t^k \\ \vdots \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al efectuar el producto cartesiano de las dos ecuaciones matriciales anteriores se obtiene la ecuación vectorial de la superficie:

$$\boldsymbol{P}(t,u) = \left(t^{m}, t^{m-1}, t^{m-2}, \ldots, t^{k}, \ldots, t^{2}, t, 1\right) M^{T} \left(\boldsymbol{P_{ij}}\right) N \begin{pmatrix} u^{n} \\ u^{n-1} \\ u^{n-2} \\ \vdots \\ u^{k} \\ \vdots \\ u^{2} \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$$

Que es la ecuación de una superficie que pasa por la red de puntos $\mathbf{P_{ij}}$ dados

2.2.3.- POSIBILIDADES QUE OFRECE PARA DISEÑAR SUPERFICIES

- Permite determinar una superficie que pase por un conjunto de puntos del espacio dados por sus coordenadas cartesianas.

- Permite la creación de programas concretos para un conjunto de puntos dado. Con ello se simplifican mucho los cálculos del algoritmo y por tanto la programación y ejecución por ordenador ahorrando tiempo de trabajo.

- En el caso de la superficie que interpela una red de dimensión 2x2 se obtiene como superficie interpolante el paraboloide hiperbólico que rellena el cuadrilátero alabeado de bordes rectos que determinan los cuatro puntos de paso.

- El método permite , a partir de un conjunto de "puntos de paso de la superficie", elegir otros "puntos de manipulación" intermedios o de borde y obtener la superficie que pasa por todos ellos. Al ir variando los puntos de manipulación se tendrán una serie de superficies que pasarán todas por los puntos de paso obligatorio.

- Permite, el método, el diseño de superficies que pasen por un cogí unto de puntos que no sea rectangular ni cuadrado por contracción de una red rectangular adaptándola al conjunto de puntos dados o por expansión del conjunto de puntos hasta hacerlo rectangular.

- Se puede reproducir una superi7tcie poliédrica cualquiera mediante la reproducción de sus caras. Cada cara será un polígono formado por una serie de triángulos adosados (figura 2.2.3.-1).

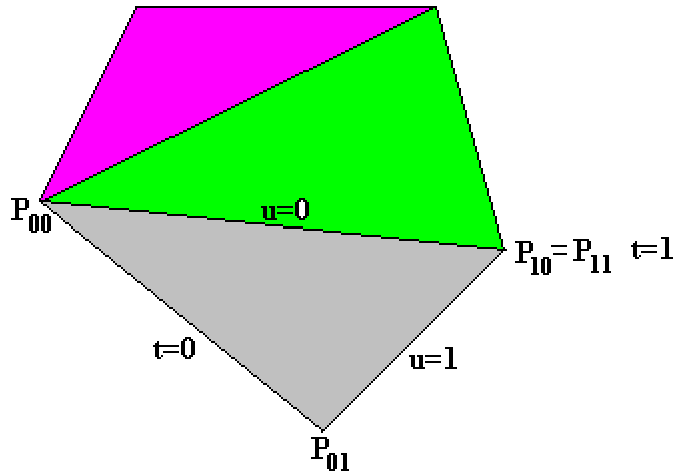


Figura 2.2.3.-1. Construcción de un poligono mediante triangulos adosados

2.2.4.-COMPARACIÓN CON LOS OTROS MÉTODOS PLANTEADOS EN ESTA TESIS

I.) Con respecto a las superficies obtenidas con puntos tangentes como datos

- El trabajar con puntos resulta más manuable que hacerlo con tangentes a la superficie pues el moldeo de la superficie sería más visualizable por el operador.

- Imponer valores de la tangente es muy restrictivo en polinomios de alto grado **y** por tanto da resultados en el diseño de las superficies "poco previsibles".

II.) Con respecto a las superficies mixtas

- En la mayoría de los casos las ecuaciones paramétricas de las superficies son funciones polinómicas de mayor grado que las que se deducen con las superficies mixtas.

- El proceso informática que desarrolla el algoritmo usado resulta más simple que el que se usa en las superficies mixtas.

2.2.5.- TRATAMIENTO INFORMÁTICO

Se han desarrollado una serie de programas haciendo uso del paquete informática Mathematica para una serie de redes de puntos de distintas dimensiones.

Cada programa parte de las coordenadas cartesianas de todos los puntos que componen la red por la que ha de pasar la superficie y determina las ecuaciones paramétricas de ésta. Por último dibuja la superficie así diseñada.

2.2.6.- PROPIEDADES DE ESTAS SUPERFICIES

La estructura de las ecuaciones paramétricas de estas superficies son:

$$x = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\substack{j=n \\ i=m}} f(t,u)x_{ij}$$

$$y = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\substack{j=n \\ i=m}} g(t,u)y_{ij}$$

$$z = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\substack{j=n \\ i=m}} h(t,u)z_{ij}$$

Luego son funciones lineales de las coordenadas homólogas de los puntos de la red. Por ello gozarán de todas las propiedades que tienen las funciones lineales.

2.2.7.- EJEMPLOS

Se han aplicado los algoritmos y programas que los desarrollan para una serie de redes rectangulares, cuadradas y triangulares de unas dimensiones dadas.

Se recoge también la generación de algunas superficies usadas en construcciones concretas mediante el uso de los programas que les resultan adecuados de entre todos los que esta tesis desarrolla.

2.3.-SUPERFICIES POLINOMIALES DEFINIDAS POR PUNTOS Y TANGENTES EN ELLOS

2.3.l.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este caso se pretende diseñar una superficie que tiene que pasar por una serie de puntos y además con unas tangentes a la superficie en ellos, que son también dadas.

De cada uno de los puntos por los que ha de pasar la superficie se conocen sus coordenadas cartesianas. También son datos las componentes de los vectores tangentes a la superficie en cada uno de estos puntos.

Aunque el desarrollo de] planteamiento se ha hecho con redes de puntos de tipo cuadrado el tratamiento de redes rectangulares se abordaría de igual forma.

El caso de conjuntos de puntos con una forma cualquiera se podría tratar partiendo de las redes anteriormente citadas haciendo ampliaciones o contracciones tal como se apunto en 2.2.1 (figura 2.2. 1.-I y 2.2.1.-2).

La superficie que pase por todos estos puntos con las tangentes $\mathbf{T_{ij}}$ y $\mathbf{U_{ij}}$ dadas cumplirá la necesidad de pasar por la red inicial de puntos y el tener las $\mathbf{T_{ij}}$ y $\mathbf{U_{ij}}$ en esos puntos que se requerían.

2.3.2.- ELABORACIÓN DEL ALGORITMO

La solución al problema planteado pasa por construir un algoritmo que permita deducir las ecuaciones paramétricas de una superficie que tendrá que pasar por todos los puntos del conjunto a "rellenar" es decir los $(m+1)x(n+1)$ puntos.

Además las tangentes a dos curvas que pasan por cada uno de los puntos tendrán que ser unos vectores de componentes prefijadas.

Aquí se podría acabar con lo que serían los datos de partida ya que las derivadas segundas cruzadas no son fácilmente manejables para usarlas para moldear la superficie. Por ello podría dárseles un valor cualquiera arbitrario.

Del conjunto de puntos dados:

$$\boldsymbol{P}_{ij}, \qquad \forall\, i = 0,1,\ldots,m \qquad \forall\, j = 0,1,\ldots,n$$

se conocen sus coordenadas cartesianas:

$$\boldsymbol{P}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$$

Si se determina la ecuación vectorial de una curva que pase por una serie de puntos:

$$\boldsymbol{P_0}, \boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \ldots., \boldsymbol{P_i}, \ldots..\boldsymbol{P_{n-2}}, \boldsymbol{P_{n-1}}, \boldsymbol{P_n}$$

con tangentes en cada uno de ellos:

$$\boldsymbol{T_0}, \boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}, \ldots., \boldsymbol{T_i}, \ldots., \boldsymbol{T_{n-2}}, \boldsymbol{T_{n-1}}, \boldsymbol{T_n}$$

esta sería:

$$\boldsymbol{P}(t) = \sum_{i=0}^{i=n} (f_i(t)\boldsymbol{P}_i + g_i(t)\boldsymbol{T}_i)$$

Donde las funciones $f_i(t)$ y $g_i(t)$ tendrían que cumplir las restricciones:

$$\begin{cases} f_i(t_j) = 1 & si \quad i = j \\ f_i(t_j) = 0 & si \quad i \neq j \\ f_i'(t_j) = 1 & \forall\, i = 0,1,\ldots,n \quad \forall\, j = 0,1,\ldots,n \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_i(t_j) = 0 & \forall\, i = 0,1,\ldots,n \quad \forall\, j = 0,1,\ldots,n \\ g_i'(t_j) = 1 & si \quad i = j \\ g_i'(t_j) = 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

siendo:

$$t_j = {}^{j}\!/_{n} \qquad \forall\, j = 0,1,\ldots,n$$

para que la curva $\boldsymbol{P}(t)$ pase por todos los puntos $\boldsymbol{P}_i, \quad \forall\, i = 0,1,\ldots,n$ dados y además en cada punto su tangente sea $\boldsymbol{T}_i, \quad \forall\, i = 0,1,\ldots,n$.

Aquí las funciones $f_i(t)$ que se han usado son polinomios de Lagrange y las $g_i(t)$ son polinomios de Hermite del menor grado posible.

La ecuación anterior se puede pasar a forma matricial quedando como:

$$\boldsymbol{P}(t) = \left(\boldsymbol{P_0}, \boldsymbol{P_1}, \boldsymbol{P_2}, \ldots, \boldsymbol{P_{n-2}}, \boldsymbol{P_{n-1}}, \boldsymbol{P_n}, \boldsymbol{T_0}, \boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}, \ldots, \boldsymbol{T_{n-2}}, \boldsymbol{T_{n-1}}, \boldsymbol{T_n} \right) \left(\boldsymbol{C_{ij}} \right) \begin{pmatrix} t^{2n+1} \\ t^{2n} \\ t^{2n-1} \\ \vdots \\ t^{n+3} \\ t^{n+2} \\ t^{n+1} \\ \vdots \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si se efectúa el producto cartesiano de esta ecuación matricial por ella misma se obtiene la ecuación de la superficie:

$$\boldsymbol{P}(t,u) = (t^{2n+1} \cdot t^{2n} \cdot t^{2n-1} \cdot ... \cdot t^{2n} \cdot t \cdot 1) \cdot C_{ij}^{T} \cdot (M_{ij}) \cdot C_{ij} \cdot \begin{pmatrix} u^{2n+1} \\ u^{2n} \\ u^{2n-1} \\ ... \\ u^{k} \\ ... \\ u^{2} \\ u \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{ij}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_{\mathrm{ij}} & \boldsymbol{U}_{\mathrm{ij}} \\ \boldsymbol{T}_{\mathrm{ij}} & \boldsymbol{E}_{\mathrm{ij}} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{ij}} = \boldsymbol{P}(\mathrm{t_i}, \mathrm{u_j})$$

$$\boldsymbol{U}_{ij} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}(t,u)}{\partial u} \right)_{t=t_i, u=u_j}$$

$$\boldsymbol{T}_{ij} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}(t,u)}{\partial u} \right)_{t=t_i, u=u_j}$$

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \left(\frac{\partial^{2} \boldsymbol{P}(t,u)}{\partial t \partial u} \right)_{t=t_i, u=u_j}$$

2.3.3.- POSIBILIDADES OUE OFRECE PARA DISEÑAR SUPERFICIES

- El método permite diseñar una superficie que pasa por un conjunto de puntos del espacio dados por sus coordenadas cartesianas **y** que lo haga de manera que las tangentes a la superficie en ellos también sean dadas.

- En el caso de redes de puntos de dimensión 2x2 y tangentes en cada punto de dirección la recta que los une con los contiguos, tendríamos el paraboloide hiperbólico de bordes rectos que "rellena" el cuadrilátero alabeado que determinan los cuatro puntos (figura 2.3.3.-1)

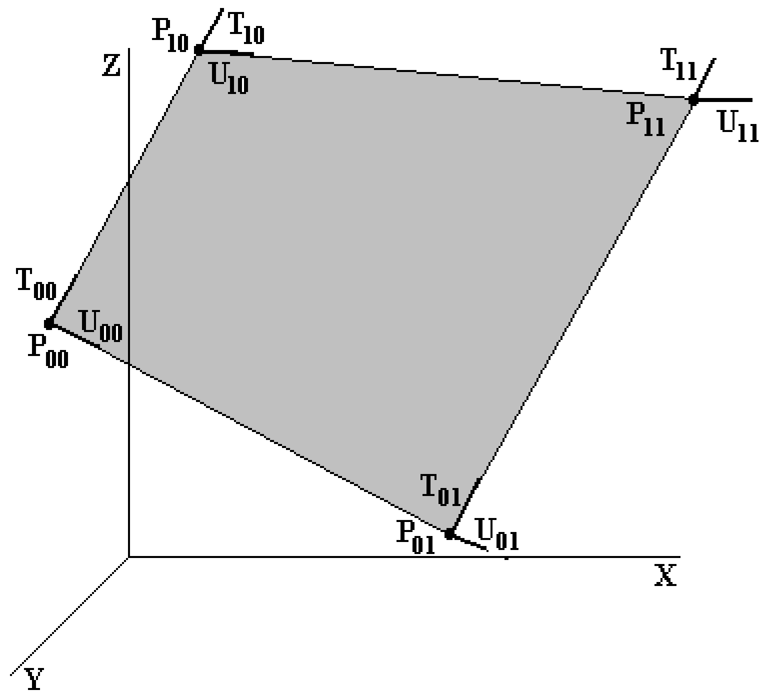


Figura 2.3.3.-1

- Permite, dado un conjunto de puntos y las tangentes según dos direcciones en cada uno de ellos, elegir otros puntos de manipulación, intermedios o de borde, deducir la superficie que pasa por todos ellos. Al ir variando los puntos de manipulación y las tangentes en ellos se modelaran distintas superficies que pasarán todas ellas por la red de puntos inicial con las tangentes que en estos puntos tenían (figura 2.3.3.-2).

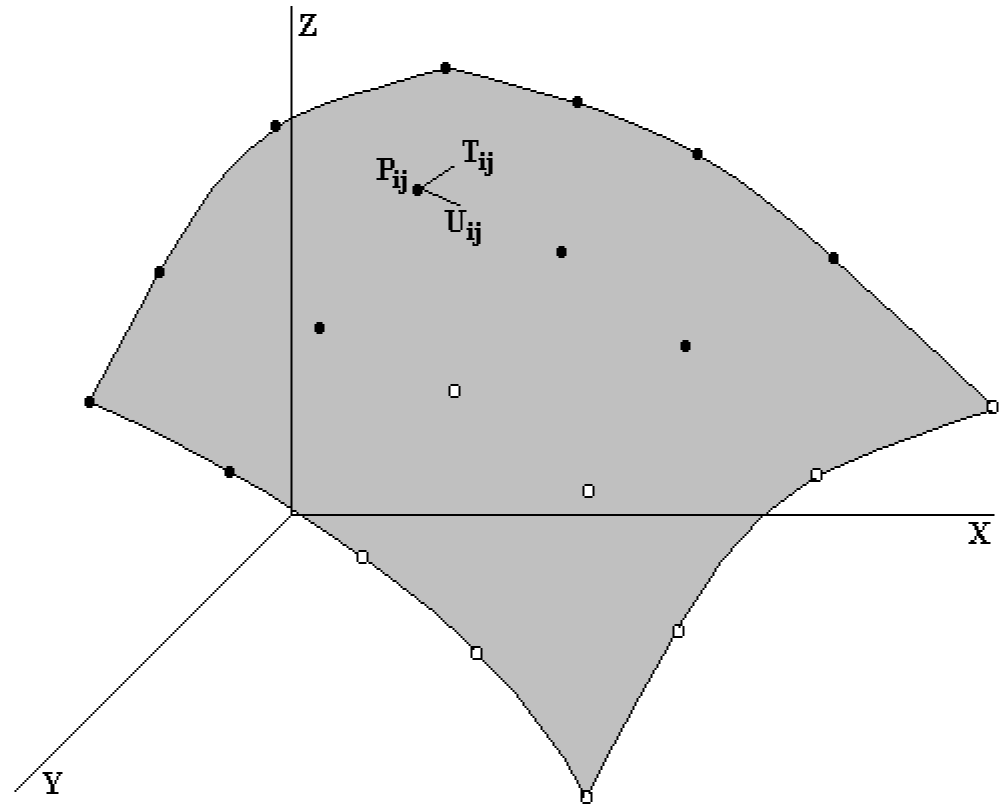


Figura 2.3.3.-2

- Se pueden diseñar superficies que pasen por un conjunto de puntos no rectangular mediante el uso de modelos rectangulares contraidos o por expansión del conjunto de puntos hasta hacerlo rectangular.

- En el caso de puntos coplanarios, con tangentes en ellos situadas en el mismo plano que los puntos, la superficie interpolante es plana siendo el plano que la contiene el mismo que el de los puntos (figura 2.3.3.-3).

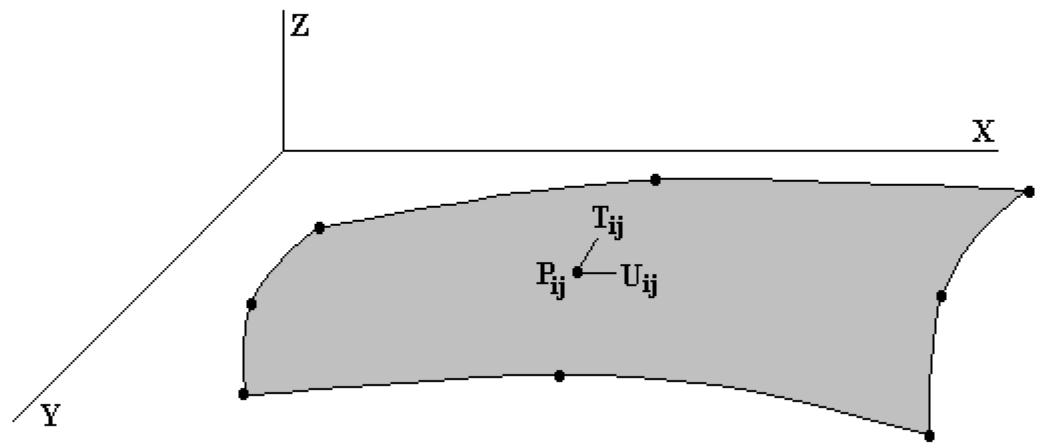


Figura 2.3.3.-3

♦ Cuando la red de puntos es de dimensiones apreciables entonces la superficie interpolante tiene oscilaciones importantes separándose significativamente de "la jaula" que forman los puntos.

2.3.4.- COMPARACIÓN CON LOS OTROS MÉTODOS PLANTEADOS EN ESTA TESIS

I.) Con respecto a las superficies obtenidas con puntos como datos

- Se trata, al tener como datos de partida, que tendrá que cumplir la superficie, los puntos por los que ha de pasar y las tangentes en ellos, de un problema con mayores restricciones iniciales.

- El moldeo de la superficie usando elementos de manipulación como son las tangentes a la superficie se hace algo más engorroso.

II.) Con respecto a las superficies obtenidas con el método

- Es un método para resolver un problema con mayores restricciones previas al intervenir puntos y tangentes en ellos.

- El proceso informática que desarrolla el algoritmo de obtención de la superficie es más simple.

2.3.5.- TRATAMIENTO INFORMÁTICO

Se han desarrollado los programas, haciendo uso del paquete informática Mathematica, correspondientes al diseño de superficies que engloban redes de puntos de distintas dimensiones.

Cada uno de estos programas parte de las coordenadas cartesianas de todos los puntos que componen la red por la que ha de pasar la superficie así como de las componentes de los vectores tangentes a la superficie, según dos direcciones, en dichos puntos.

- Los valores de los E_{ij} se toman arbitrarios .
- A partir de estos datos se determinan las ecuaciones paramétricas de la superficie y posteriormente se dibuja ésta.

2.3.6.- PROPIEDADES DE ESTAS SUPERFICIES

Las ecuaciones paramétricas de estas superficies son combinaciones lineales de las coordenadas cartesianas de los puntos, de las componentes de los vectores tangentes a la superficie en ellos y de las derivadas segundas cruzadas.

$$x = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^1(t,u)x_{ij} + \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^2(t,u)xt_{ij} + \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^3(t,u)xu_{ij} + \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^4(t,u)xe_{ij}$$

$$y = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^1(t,u)y_{ij} + \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^2(t,u)yt_{ij} + \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^3(t,u)yu_{ij} + \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^4(t,u)ye_{ij}$$

$$z = \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^1(t,u)z_{ij} + \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^2(t,u)zt_{ij} + \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^3(t,u)zu_{ij} + \sum_{\substack{i=0\\j=0}}^{\substack{j=n\\i=m}} f_{ij}^4(t,u)ze_{ij}$$

Por tanto estas funciones tendrán todas las propiedades de las funciones lineales.

2.3.7.- EJEMPLOS

Se recoge la aplicación de los algoritmos y programas creados a algunos casos de redes concretas de puntos con tangentes dadas en ellos.

Se han usado una serie de ejemplos en los que se ha ido ampliando la red de puntos a partir de la red de dimensiones 3x3.

2.4.- SUPERFICIES POLINOMIALES MIXTAS

2.4.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se plantea el problema de construir una superficie que pase por un conjunto de puntos dados de los que se conocen sus coordenadas cartesianas.

Se ha trabajado con redes de puntos de distintas dimensiones rectangulares y cuadradas.

Análogamente a lo que sucede con los métodos anteriores el algoritmo que resuelve el problema posibilita fácilmente el tratar superficies que tengan que pasar por un conjunto de puntos cualesquiera.

La ampliación del conjunto de puntos para hacerlo rectangular o bien la contracción del modelo para adaptarlo a la superficie resuelve esta inadaptación inicial entre modelo matemático y caso concreto de nube de puntos a interpolar (figuras 2.4.1.-1 y 2.4.1.-2)

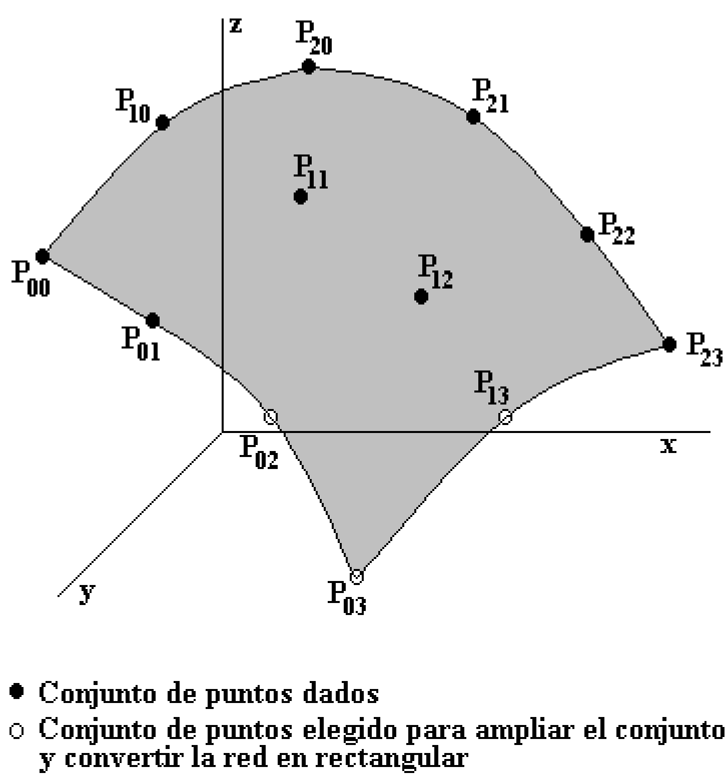


Figura 2.4.1.-1 . Ampliación con puntos exteriores

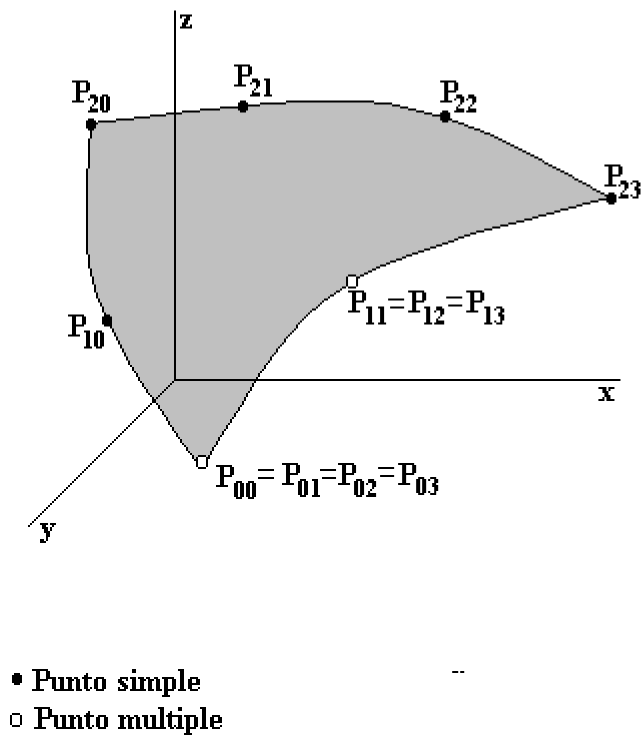


Figura 2.4.1.-2. Conjunto rectangular contraido para adaptarse al conjunto de puntos dado

La superficie que pase por todos estos puntos, iniciales y añadidos, cumple lo de pasar por la red de puntos inciales.

La superficie que pase por todos estos puntos es una superficie que pasa por la red de dimensión 4x3.

2.4.2.) ELABORACIÓN DEL ALGORITMO

La solución al problema antes planteado se inicia con la construcción de un algoritmo que aporte las ecuaciones paramétricas de la superficie que pase, en el caso general, por una red de puntos de dimensiones $(m+1)x(n+1)$.

$$\boldsymbol{P}_{ij} \qquad \forall\, i = 0,1,2,...,m \qquad \forall\, j = 0,1,2,...,n$$

de los que se conocen sus coordenadas cartesianas $\boldsymbol{P}_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$

Si se determina la ecuación vectorial de una curva que pase por una serie de puntos $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_{n-2}, \boldsymbol{P}_{n-1}, \boldsymbol{P}_n$ con tangentes $\boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \boldsymbol{T}_5, \boldsymbol{T}_6. \ldots, \boldsymbol{T}_{n-3}, \boldsymbol{T}_{n-2}$ en los puntos $\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_5, \boldsymbol{P}_5, \ldots, \boldsymbol{P}_{n-3}, \boldsymbol{P}_{n-2}$ siendo $(n+1)$ múltiplo de tres.

Dicha curva se puede descomponer en una serie de tramos:

$$C_{ij} \quad \begin{cases} i = 0,2,3,5,...,(n-3),(n-2) \\ j = 2,3,5,6,...,(n-2),n \end{cases}$$

cuyas ecuaciones se determinan.

Los tramos que contienen tres puntos $C_{i,(i+2)}$ tendrían ecuaciones del tipo:

$$\boldsymbol{P}_{i,(i+2)}(t) = f_i(t)\boldsymbol{P}_i + f_{i+1}(t)\boldsymbol{P}_{i+1} + f_{i+2}(t)\boldsymbol{P}_{i+2}$$

con las restricciones:

$$\begin{cases} f_i(t_j) = 1 \quad si \quad i = j \\ f_i(t_j) = 0 \quad si \quad i \neq j \end{cases}$$

Siendo:

$$t_j = j/n \qquad j = 0,1,2,...,n$$

Los otros tramos de curva quedarían definidos por dos puntos y las tangentes en ellos (tangentes que serían las derivadas de las curvas adyacentes al tramo). Dichos tramos tendrían ecuaciones del tipo:

$$\boldsymbol{P}_{r,(r+1)}(t) = F_r(t)\boldsymbol{P}_r + F_{r+1}(t)\boldsymbol{P}_{r+1} + G_r(t)\boldsymbol{T}_r + G_{r+1}(t)\boldsymbol{T}_{r+1}$$

Con las restricciones:

$$\begin{cases} F_r(t_j) = 1 \quad si \quad r = j \\ F_r(t_j) = 0 \quad si \quad r \neq j \\ F_r'(t_j) = 0 \quad \forall\, r = 2,5,...,(m-3) \quad \forall\, j = 0,1,...,n \end{cases}$$

Siendo:

$$t_j = {}^{j}\!/_{n} \qquad j = 0,1,2,...,n$$

$$\begin{cases} G_r(t_j) = 0 & \forall\, r = 0,1,...,m \quad \forall\, j = 0,1,...,n \\ G_r\,'(t_j) = 1 & r = j \\ G_r\,'(t_j) = 0 & r \neq j \end{cases}$$

Análogamente se podría operar con una serie de puntos de dimensión $(m+1)$.

Efectuando el producto cartesiano de ambas curvas obtenemos un conjunto de parches de dimensiones 3x3, 3x2, 2x3 y 2x2 que se unen lisamente entre sí y forman en conjunto una superficie que pasa por la red de puntos de dimensión

2.4.3.- POSIBILIDADES QUE OFRECE PARA DISEÑAR SUPERFICIES

Este método se puede considerar como una elaboración que aprovecha lo ya obtenido con los dos métodos anteriores.

Permite determinar una superficie que pase por un conjunto de puntos del espacio dados por sus coordenadas cartesianas.

La determinación de la superficie total se hace trabajando con polinomios de grado menor o igual que tres con la ventaja de simplificación que esto supone.

Aunque el método se formula para redes de dimensiones $(m+1)x(n+1)$ con $(m+1)$ y $(n+1)$ múltiples de tres, se podría resolver el caso en que así no fuera por ampliación de la red o por contracción del modelo.

2.4.4.- COMPARACIÓN CON LOS OTROS MÉTODOS PLANTEADOS EN ESTA TESIS

I.) Con respecto al método de superficies obtenidas por puntos como datos

- Ambos métodos permiten resolver el mismo problema, es decir determinar una superficie que pase por una nube de puntos cuyas coordenadas cartesianas se conocen.

- Esta metodología efectúa el cálculo de las ecuaciones paramétricas de la superficie utilizando polinomios de grado menor o igual a tres mientras que el otro método usa polinomios de grado mayor siempre que la red de puntos tenga dimensiones mayores a 4x4.

- El proceso informática necesario para obtener la superficie total que engloba la red de puntos dada es más laborioso que en el otro caso.

- Al utilizar polinomios de menor grado, en los casos de redes de dimensiones mayores que 4x4, las oscilaciones de los polinomios serán menores.

II.) Con respecto al método de superficies obtenidas por puntos y tangentes como datos

- Este método resulta más manejable al usar solo puntos para moldear las superficies.

- Tendrán, los polinomios usados, menores oscilaciones al tener estos menor grado.

- Resuelve un problema de menores restricciones previas al trabajar con datos de puntos de paso de la superficie solamente.

2.4.5.- TRATAMIENTO INFORMÁTICO

Se han desarrollado una serie de programas para tratar superficies que interpelen redes de puntos cuadradas y rectangulares.

Cada programa parte de las coordenadas cartesianas de todos los puntos que componen la red por la que ha de pasar la superficie. Luego determina las ecuaciones paramétricas de cada uno de los parches componentes de la superficie total y por último dibuja ésta.

2.4.6.- PROPIEDADES DE ESTAS SUPERFICIES

Las ecuaciones paramétricas de estas superficies son todas polinomios de grado menor o igual que tres.

Son todas ellas combinaciones lineales de las coordenadas cartesianas de los puntos que componen la red a interpolar.

2.4.7.- EJEMPLOS

Se han aplicado los algoritmos y los programas que los desarrollan para casos concretos de algunas redes rectangulares y cuadradas.

CAPITULO 3:

FORMULACIÓN MATEMÁTICA

3.1.1- SUPERFICIES OBTENIDAS MEDIANTE PRODUCTO CARTESIANO

Las curvas obtenidas mediante cualquiera de los algoritmos de interpelación pueden ser combinadas para formar superficies de interpelación.

Sea la curva en paramétricas $\boldsymbol{Q}(t)$ controlada por el polígono $\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2, ..., \boldsymbol{Q}_n$ que se formula (de acuerdo con el algoritmo que se use) según:

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{i=1}^{i=n} f_i(t)\mathbf{Q}_i \qquad (1)$$

o en forma matricial:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q_1} & \mathbf{Q_2} \cdots \mathbf{Q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_{n-1}(t) \\ f_{1n}(t) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Sea, análogamente, la curva $\boldsymbol{R}(u)$ controlada por el polígono $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, ..., \boldsymbol{R}_m$ cuya fórmula será :

$$\mathbf{R}(u) = \sum_{j=1}^{j=m} g_j(u)\mathbf{R}_i \qquad (3)$$

Que puesta en forma matricial sería:

$$\mathbf{R}(u) = \begin{pmatrix} \mathbf{R_1} & \mathbf{R_2} \cdots \mathbf{R_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \\ \vdots \\ g_{m-1}(u) \\ g_m(u) \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Se considera la expresión:

$$\mathbf{P}(t,u) = \sum_{j=1}^{j=m} \sum_{i=1}^{i=n} f_i(t) g_j(u) \mathbf{P}_{\mathrm{ij}} \qquad (5)$$

que representa una superficie controlada por los valores de los $\boldsymbol{P}_{ij}$. Esta superficie se la denomina como superficie producto cartesiano o superficie producto tensorial.

Aunque en las ecuaciones (1) y (3) solamente aparecen involucrados los puntos también pueden aparecer referencias a tangentes o a derivadas de más alto grado como se verá a lo largo de esta tesis.

La ecuación (5) también puede ser puesta en forma matricial quedando como sigue:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \cdots & f_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{11} & \cdots & \mathbf{P}_{1\mathrm{m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{\mathrm{n}1} & \cdots & \mathbf{P}_{\mathrm{nm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(u) \\ g_2(u) \\ \vdots \\ g_m(u) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

La matriz de componentes $\boldsymbol{P}_{ij}$ no es una matriz normal ya que sus componentes no son escalares sino vectores.

Sin embargo la ecuación (6) tomada simbólicamente puede ser muy útil.

La superficie definida por la ecuación (5) tiene un comportamiento isotrópico. Esta ecuación puede ser escrita en la forma:

$$\mathbf{P}(t,u) = \sum_{i,j} h_{ij}(t,u) \mathbf{P}_{\mathrm{ij}} \qquad (7)$$

Esta superficie será isotrópica y por tanto independiente de su sistema de coordenadas, si y solo si se cumple que:

$$\sum_{i,j} h_{ij}(t,u) = 1 \qquad (8)$$

Si suponemos que las curvas de las que hemos partido (1) y (3) son isotrópicas tendremos que:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t) = 1 \quad y \quad \sum_{j=1}^{m} g_j(u) = 1 \quad (9)$$

Por lo tanto, como (8) se puede poner en la forma:

$$\sum_{i,j} h_{ij}(t,u) = \sum_j \sum_i f_i(t)g_j(u) = \sum_j g_j(u)(\sum_i f_i(t)) = 1 \qquad (10)$$ c.q.d.

Por lo tanto, se puede afirmar que la superficie obtenida mediante producto cartesiano es isotrópica si las curvas, a partir de las que hemos construido, son isotrópicas.

3.1.2.- CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL MXN OUE PASA POR UNA RED DE (M+1)X(N+1) PUNTOS DADOS

3.1.2.1- CONSTRUCCIÓN DE LAS CURVAS GENERADORAS

Desarrollemos previamente la ecuación de la curva polinomial que pasa por los (m+1) puntos $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2...\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}...\mathbf{P}_{m-2}\mathbf{P}_{m-1}\mathbf{P}_m$ (véase figura 3.1.2.1.-1) que tendría la forma:

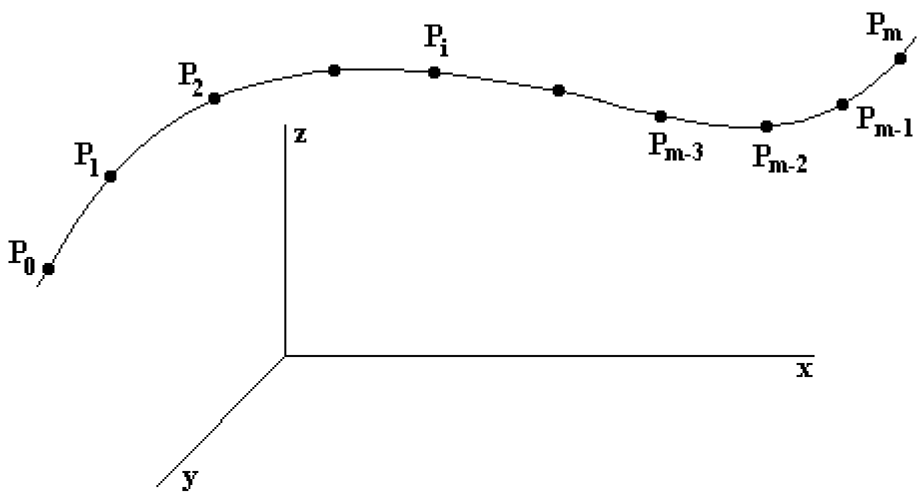


Figura 3.1.2.1.-1. Curva que pasa por m+1 puntos

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{i=m} f_i(t)\mathbf{P}_i \qquad (1)$$

Donde las $f_i(t)$ tendrán las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} f_i(t_j) = 1 & si \quad i = j \\ f_i(t_j) = 0 & si \quad i \neq j \end{cases} \qquad (2)$$

Siendo:

$$t_0 = 0$$
$$t_j = \sum_{j=0}^{j} d_{j-1} \qquad (3)$$

donde d_j es la distancia entre el punto *j-1* y el *j*.

Calculando los $f_i(t)$ llegamos:

$$f_i(t) = \frac{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m}(t-t_j)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{m}(t_i-t_j)} = \left\{ t^m - t^{m-1}\left(\sum_{\substack{i1=0\\ i1\neq i}}^{m} t_{i1}\right) + t^{m-2}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2\le m\\ i1,i2\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}\right) - t^{m-3}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<i3\le m\\ i1,i2,i3\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}t_{i3}\right) + \right.$$

$$t^{m-4}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<i3<i4\le m\\ i1,i2,i3,i4\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}t_{i3}t_{i4}\right) - \dots\dots\dots + (-1)^{m-(j-1)}t^{j-1}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\dots<im-(j-1)\le m\\ i1,i2,\dots,im-(j-1)\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}\dots t_{im-(j-1)}\right) +$$

$$(-1)^{m-j}t^{j}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\dots<im-j\le m\\ i1,i2,\dots,im-j\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}\dots t_{im-j}\right) + (-1)^{m-(j+1)}t^{j+1}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\dots<im-(j+1)\le m\\ i1,i2,\dots,im-(j+1)\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}\dots t_{im-(j+1)}\right) +$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + (-1)^{m-2}t^{2}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\dots<im-2\le m\\ i1,i2,\dots,im-2\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}\dots t_{im-2}\right) +$$

$$\left. + (-1)^{m-1}t\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\dots<im-1\le m\\ i1,i2,\dots,im-1\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}\dots t_{im-1}\right) + (-1)^{m}t_0t_1\dots t_{m-1}t_m \right\} \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq i}}^{m}(t_i-t_q) \qquad (4)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (1) tendríamos:

$$
\boldsymbol{P}(t) = \left\{ \begin{array}{l}
\left\{ t^{m} - t^{m-1} \left(\sum\limits_{\substack{i1=0 \\ i1\neq 0}}^{m} t_{i1} \right) + t^{m-2} \left(\sum\limits_{\substack{0\leq i1<i2\leq m \\ i1,i2\neq 0}}^{m} t_{i1} t_{i2} \right) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \right. \\
(-1)^{m-j} t^{j} \left(\sum\limits_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-j\leq m \\ i1,i2,\ldots,im-j\neq 0}}^{m} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{im-j} \right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ (-1)^{m-2} t^{2} \left(\sum\limits_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-2\leq m \\ i1,i2,\ldots,im-2\neq 0}}^{m} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{im-2} \right) + \\
\left. + (-1)^{m-1} t \left(\sum\limits_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-1\leq m \\ i1,i2,\ldots,im-1\neq 0}}^{m} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{im-1} \right) + (-1)^{m} t_{1} \ldots t_{m-1} t_{m} \right\} / \prod\limits_{\substack{q=0 \\ q\neq 0}}^{m} (t_{0} - t_{q})
\end{array} \right\} P_{0} +
$$

$$
\left\{ \begin{array}{l}
\left\{ t^{m} - t^{m-1} \left(\sum\limits_{\substack{i1=0 \\ i1\neq 1}}^{m} t_{i1} \right) + t^{m-2} \left(\sum\limits_{\substack{0\leq i1<i2\leq m \\ i1,i2\neq 1}}^{m} t_{i1} t_{i2} \right) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \right. \\
. \\
(-1)^{m-j} t^{j} \left(\sum\limits_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-j\leq m \\ i1,i2,\ldots,im-j\neq 1}}^{m} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{im-j} \right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ (-1)^{m-2} t^{2} \left(\sum\limits_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-2\leq m \\ i1,i2,\ldots,im-2\neq 1}}^{m} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{im-2} \right) + \\
\left. + (-1)^{m-1} t \left(\sum\limits_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-1\leq m \\ i1,i2,\ldots,im-1\neq 1}}^{m} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{im-1} \right) + (-1)^{m} t_{0} t_{2} \ldots t_{m-1} t_{m} \right\} / \prod\limits_{\substack{q=0 \\ q\neq 1}}^{m} (t_{1} - t_{q})
\end{array} \right\} P_{1} +
$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{ t^m - t^{m-1}\left(\sum_{\substack{i1=0\\ i1\neq 2}}^{m} t_{i1}\right) + t^{m-2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2\leq m\\ i1,i2\neq 2}}^{m} t_{i1}t_{i2}\right) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \right. \\ . \\ (-1)^{m-j}t^{j}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-j\leq m\\ i1,i2,\ldots,im-j\neq 2}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{im-j}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ +(-1)^{m-2}t^{2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-2\leq m\\ i1,i2,\ldots,im-2\neq 2}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{im-2}\right) + \\ \left. +(-1)^{m-1}t\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-1\leq m\\ i1,i2,\ldots,im-1\neq 2}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{im-1}\right) + (-1)^{m}t_0t_1\ldots t_{m-1}t_m \right\} / \prod_{\substack{q=0\\ q\neq 2}}^{m}(t_2 - t_q) \end{array}\right\} P_2 +$$

....

....

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ t^m - t^{m-1}\left(\sum_{\substack{i1=0 \\ i1\neq i}}^{m} t_{i1}\right) + t^{m-2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2\leq m \\ i1,i2\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}\right) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \right. \\ . \\ (-1)^{m-j}t^j\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-j\leq m \\ i1,i2,\ldots,im-j\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{im-j}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ +(-1)^{m-2}t^2\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-2\leq m \\ i1,i2,\ldots,im-2\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{im-2}\right) + \\ \left. +(-1)^{m-1}t\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-1\leq m \\ i1,i2,\ldots,im-1\neq i}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{im-1}\right) + (-1)^m t_0t_1\ldots t_{m-1}t_m \right\} \Big/ \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq i}}^{m}(t_i - t_q) \end{array} \right\} P_i +$$

....

....

$$
\left\{ \begin{array}{l}
\left\{ t^{m} - t^{m-1}\left(\sum_{\substack{i1=0 \\ i1\neq m-2}}^{m} t_{i1} \right) + t^{m-2}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2\le m \\ i1,i2\neq m-2}}^{m} t_{i1}t_{i2} \right) - \dots\dots\dots\dots + \right. \\
. \\
(-1)^{m-j}t^{j}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\dots<im-j\le m \\ i1,i2,\dots,im-j\neq m-2}}^{m} t_{i1}t_{i2}\dots t_{im-j} \right) + \dots\dots\dots\dots + \\
+(-1)^{m-2}t^{2}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\dots<im-2\le m \\ i1,i2,\dots,im-2\neq m-2}}^{m} t_{i1}t_{i2}\dots t_{im-2} \right) + \\
\left. +(-1)^{m-1}t\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\dots<im-1\le m \\ i1,i2,\dots,im-1\neq m-2}}^{m} t_{i1}t_{i2}\dots t_{im-1} \right) + (-1)^{m} t_{0}t_{1}\dots t_{m-1}t_{m} \right\} \Big/ \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq m-2}}^{m} (t_{m-2}-t_{q})
\end{array} \right\} P_{m-2} +
$$

$$
\left\{ \begin{array}{l}
\left\{ t^{m} - t^{m-1}\left(\sum_{\substack{i1=0 \\ i1\neq m-1}}^{m} t_{i1} \right) + t^{m-2}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2\le m \\ i1,i2\neq m-1}}^{m} t_{i1}t_{i2} \right) - \dots\dots\dots\dots + \right. \\
. \\
(-1)^{m-j}t^{j}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\dots<im-j\le m \\ i1,i2,\dots,im-j\neq m-1}}^{m} t_{i1}t_{i2}\dots t_{im-j} \right) + \dots\dots\dots\dots + \\
+(-1)^{m-2}t^{2}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\dots<im-2\le m \\ i1,i2,\dots,im-2\neq m-1}}^{m} t_{i1}t_{i2}\dots t_{im-2} \right) + \\
\left. +(-1)^{m-1}t\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\dots<im-1\le m \\ i1,i2,\dots,im-1\neq m-1}}^{m} t_{i1}t_{i2}\dots t_{im-1} \right) + (-1)^{m} t_{0}t_{1}\dots t_{m-2}t_{m} \right\} \Big/ \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq m-1}}^{m} (t_{m-1}-t_{q})
\end{array} \right\} P_{m-1} +
$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Bigl\{ t^m - t^{m-1}\left(\sum_{\substack{i1=0\\ i1\neq m}}^{m} t_{i1}\right) + t^{m-2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2\leq m\\ i1,i2\neq m}}^{m} t_{i1}t_{i2}\right) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ . \\ (-1)^{m-j}t^j\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-j\leq m\\ i1,i2,\ldots,im-j\neq m}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{im-j}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ +(-1)^{m-2}t^2\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-2\leq m\\ i1,i2,\ldots,im-2\neq m}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{im-2}\right) + \\ +(-1)^{m-1}t\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<im-1\leq m\\ i1,i2,\ldots,im-1\neq m}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{im-1}\right) + (-1)^m t_0 t_1\ldots t_{m-2}t_{m-1}\Bigr\} / \prod_{\substack{q=0\\ q\neq m}}^{m}(t_m - t_q) \end{array}\right\} P_m \qquad (5)$$

La expresión anterior se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{P}(t) = \left(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ldots\mathbf{P}_i\ldots\mathbf{P}_{m-2}\mathbf{P}_{m-1}\mathbf{P}_m\right)\cdot$$
$$\begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} & M_{02} & \ldots & M_{0j} & \ldots & M_{0(m-2)} & M_{0(m-1)} & M_{0m} \\ M_{10} & M_{11} & M_{12} & \ldots & M_{1j} & \ldots & M_{1(m-2)} & M_{1(m-1)} & M_{1m} \\ M_{20} & M_{21} & M_{22} & \ldots & M_{2j} & \ldots & M_{2(m-2)} & M_{2(m-1)} & M_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{k0} & M_{k1} & M_{2k} & \ldots & M_{kj} & \ldots & M_{k(m-2)} & M_{k(m-1)} & M_{km} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{(m-2)0} & M_{(m-2)1} & M_{(m-2)2} & \ldots & M_{(m-2)j} & \ldots & M_{(m-2)(m-2)} & M_{(m-2)(m-1)} & M_{(m-2)m} \\ M_{(m-1)0} & M_{(m-1)1} & M_{(m-1)2} & \ldots & M_{(m-1)j} & \ldots & M_{(m-1)(m-2)} & M_{(m-1)(m-1)} & M_{(m-1)m} \\ M_{m0} & M_{m1} & M_{m2} & \ldots & M_{mj} & \ldots & M_{m(m-2)} & M_{m(m-1)} & M_{mm} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} t^m \\ t^{m-1} \\ t^{m-2} \\ \ldots \\ t^k \\ \ldots \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Siendo las columnas de la matriz M_{ij}

$$\left.\begin{aligned}
M_{k0} &= 1 \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq k}}^{m} (t_k - t_q) \\
M_{k1} &= -\left(\sum_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{m} t_i\right) \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq k}}^{m} (t_k - t_q) \\
M_{k2} &= \left(\sum_{\substack{0\le i<j\le m\\ i,j\neq k}}^{m} t_i t_j\right) \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq k}}^{m} (t_k - t_q) \\
M_{kj} &= (-1)^{m-j}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\ldots<i(m-j)\le m\\ i1,i2,\ldots,i(m-j)\neq k}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{i(m-j)}\right) \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq k}}^{m} (t_k - t_q) \\
M_{k(m-2)} &= (-1)^{m-2}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\ldots<i(m-2)\le m\\ i1,i2,\ldots,i(m-2)\neq k}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{i(m-2)}\right) \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq k}}^{m} (t_k - t_q) \\
M_{k(m-1)} &= (-1)^{m-1}\left(\sum_{\substack{0\le i1<i2<\ldots<i(m-1)\le m\\ i1,i2,\ldots,i(m-1)\neq k}}^{m} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{i(m-1)}\right) \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq k}}^{m} (t_k - t_q) \\
M_{km} &= (-1)^{m} t_1 t_2 \ldots t_{m-2} t_{m-1} t_m \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq k}}^{m} (t_k - t_q)
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Desarrollando análogamente la ecuación de la curva polinomial que pasa por los $(n+1)$ puntos $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ldots\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{P}_i\mathbf{P}_{i+1}\ldots\mathbf{P}_{n-2}\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_n$ (figura 3.1.2.1.-2) se tendría que:

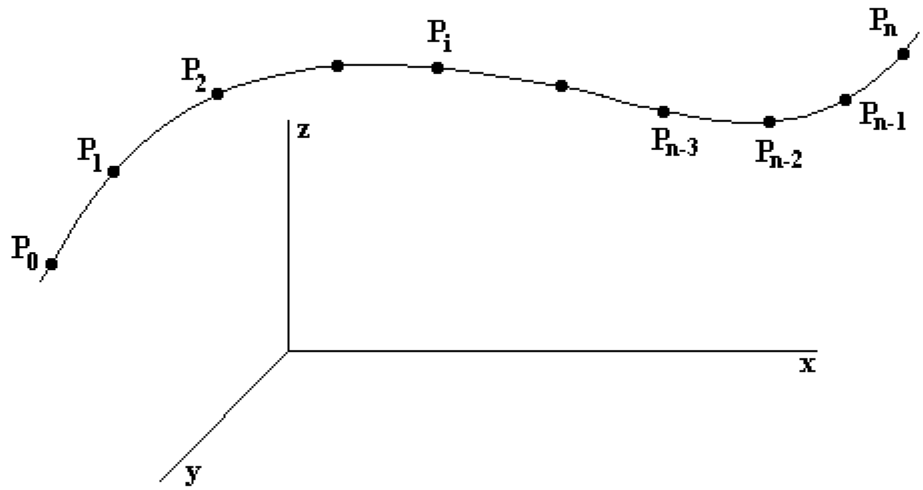


Figura 3.1.2.1.-2. Curva que pasa por (n+1) puntos

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t)\mathbf{P}_i \qquad (8)$$

Donde las $f_i(t)$ tendrán las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} f_i(t_j) = 1 & si \quad i = j \\ f_i(t_j) = 0 & si \quad i \neq j \end{cases} \qquad (9)$$

Siendo:

$$t_0 = 0$$

$$t_j = \sum_{j=0}^{j} d_{j-1} \qquad (10)$$

Calculando los $f_i(t)$ se tendría:

$$
\begin{aligned}
f_i(t) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (t - t_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (t_i - t_j)} = \Bigg\{ & t^n - t^{n-1}\left(\sum_{\substack{i1=0\\ i1\neq i}}^{n} t_{i1} \right) + t^{n-2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2\leq n\\ i1,i2\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2} \right) - t^{n-3}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<i3\leq n\\ i1,i2,i3\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2}t_{i3} \right) + \\
& t^{n-4}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<i3<i4\leq n\\ i1,i2,i3,i4\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2}t_{i3}t_{i4} \right) - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-(j-1)}t^{j-1}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-(j-1)\leq n\\ i1,i2,\ldots,im-(j-1)\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-(j-1)} \right) + \\
& (-1)^{n-j}t^{j}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-j\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-j\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-j} \right) + (-1)^{n-(j+1)}t^{j+1}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-(j+1)\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-(j+1)\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-(j+1)} \right) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-2}t^{2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-2\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-2\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-2} \right) + \\
& + (-1)^{n-1}t\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-1\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-1\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-1} \right) + (-1)^{n} t_0 t_1\ldots t_{n-1}t_n \Bigg\} \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq i}}^{n} (t_i - t_q) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Si se entra con estos valores en la fórmula (8) se llega a:

$$
\boldsymbol{P}(t) = \left\{
\begin{aligned}
& \Bigg\{ t^n - t^{n-1}\left(\sum_{\substack{i1=0\\ i1\neq 0}}^{n} t_{i1} \right) + t^{n-2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2\leq n\\ i1,i2\neq 0}}^{n} t_{i1}t_{i2} \right) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& (-1)^{n-j}t^{j}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-j\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-j\neq 0}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-j} \right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + (-1)^{n-2}t^{2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-2\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-2\neq 0}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-2} \right) + \\
& + (-1)^{n-1}t\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-1\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-1\neq 0}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-1} \right) + (-1)^{n} t_1\ldots t_{n-1}t_n \Bigg\} \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq 0}}^{n} (t_0 - t_q)
\end{aligned}
\right\} P_0 +
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left[t^{n} - t^{n-1} \left(\sum_{\substack{i1=0 \\ i1\neq 1}}^{n} t_{i1} \right) + t^{n-2} \left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2\leq n \\ i1,i2\neq 1}}^{n} t_{i1} t_{i2} \right) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \right. \\
. \\
(-1)^{n-j} t^{j} \left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-j\leq n \\ i1,i2,\ldots,in-j\neq 1}}^{n} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{in-j} \right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+ (-1)^{n-2} t^{2} \left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-2\leq n \\ i1,i2,\ldots,in-2\neq 1}}^{n} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{in-2} \right) + \\
\left. + (-1)^{n-1} t \left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-1\leq n \\ i1,i2,\ldots,in-1\neq 1}}^{n} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{in-1} \right) + (-1)^{n} t_{0} t_{2} \ldots t_{n-1} t_{n} \right\} / \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq 1}}^{n} (t_{1} - t_{q})
\end{array}
\right\} P_{1} +
$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\left\{t^{n}-t^{n-1}\left(\sum_{\substack{i1=0\\ i1\neq 2}}^{n} t_{i1}\right)+t^{n-2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2\leq n\\ i1,i2\neq 2}}^{n} t_{i1}t_{i2}\right)-\ldots\ldots\ldots\ldots+\right.\\
&.\\
&(-1)^{n-j}t^{j}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-j\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-j\neq 2}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-j}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
&+(-1)^{n-2}t^{2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-2\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-2\neq 2}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-2}\right)+\\
&\left.+(-1)^{n-1}t\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-1\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-1\neq 2}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-1}\right)+(-1)^{n}t_{0}t_{1}\ldots t_{n-1}t_{n}\right\}\Big/\prod_{\substack{q=0\\ q\neq 2}}^{n}(t_{2}-t_{q})
\end{aligned}\right\}P_{2}$$

....

....

$$\left\{\begin{aligned}
&\left\{t^{n}-t^{n-1}\left(\sum_{\substack{i1=0\\ i1\neq i}}^{n} t_{i1}\right)+t^{n-2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2\leq n\\ i1,i2\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2}\right)-\ldots\ldots\ldots\ldots+\right.\\
&.\\
&(-1)^{n-j}t^{j}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-j\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-j\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-j}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\\
&+(-1)^{n-2}t^{2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-2\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-2\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-2}\right)+\\
&\left.+(-1)^{n-1}t\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-1\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-1\neq i}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-1}\right)+(-1)^{n}t_{0}t_{1}\ldots t_{n-1}t_{n}\right\}\Big/\prod_{\substack{q=0\\ q\neq i}}^{n}(t_{i}-t_{q})
\end{aligned}\right\}P_{i}+$$

....

....

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Bigg\{ t^{n} - t^{n-1}\left(\sum_{\substack{i1=0\\ i1\neq n-2}}^{n} t_{i1}\right) + t^{n-2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2\leq n\\ i1,i2\neq n-2}}^{n} t_{i1}t_{i2}\right) - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&. \\
&(-1)^{n-j}\,t^{j}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-j\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-j\neq n-2}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-j}\right) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+(-1)^{n-2}\,t^{2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-2\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-2\neq n-2}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-2}\right) + \\
&+(-1)^{n-1}\,t\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-1\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-1\neq n-2}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-1}\right) + (-1)^{n}\,t_{0}t_{1}\ldots t_{n-1}t_{n}\Bigg\} \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq n-2}}^{n} (t_{n-2}-t_{q})
\end{aligned}
\right\} P_{n-2} +
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\Bigg\{ t^{n} - t^{n-1}\left(\sum_{\substack{i1=0\\ i1\neq n-1}}^{n} t_{i1}\right) + t^{n-2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2\leq n\\ i1,i2\neq n-1}}^{n} t_{i1}t_{i2}\right) - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&. \\
&(-1)^{n-j}\,t^{j}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-j\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-j\neq n-1}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-j}\right) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+(-1)^{n-2}\,t^{2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-2\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-2\neq n-1}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-2}\right) + \\
&+(-1)^{n-1}\,t\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-1\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-1\neq n-1}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-1}\right) + (-1)^{n}\,t_{0}t_{1}\ldots t_{n-2}t_{n}\Bigg\} \Big/ \prod_{\substack{q=0\\ q\neq n-1}}^{n} (t_{n-1}-t_{q})
\end{aligned}
\right\} P_{n-1} +
$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{ t^n - t^{n-1}\left(\sum_{\substack{i1=0\\ i1\neq n}}^{n} t_{i1}\right) + t^{n-2}\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2\leq n\\ i1,i2\neq n}}^{n} t_{i1}t_{i2}\right) - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \right.\\ . \\ (-1)^{n-j}t^j\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-j\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-j\neq n}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-j}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ +(-1)^{n-2}t^2\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-2\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-2\neq n}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-2}\right) + \\ \left. +(-1)^{n-1}t\left(\sum_{\substack{0\leq i1<i2<\ldots<in-1\leq n\\ i1,i2,\ldots,in-1\neq n}}^{n} t_{i1}t_{i2}\ldots t_{in-1}\right) + (-1)^n t_0t_1\ldots t_{n-2}t_{n-1}\right\} / \prod_{\substack{q=0\\ q\neq n}}^{n}(t_n - t_q) \end{array}\right\} P_n \qquad (12)$$

Que se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{P}(t) = (\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ldots\mathbf{P}_i\ldots\mathbf{P}_{(n-2)}\mathbf{P}_{(n-1)}\mathbf{P}_n)$$

$$\begin{pmatrix} N_{00} & N_{01} & N_{02} & \ldots & N_{0j} & \ldots & N_{0(n-2)} & N_{0(n-1)} & N_{0n} \\ N_{10} & N_{11} & N_{12} & \ldots & N_{1j} & \ldots & N_{1(n-2)} & N_{1(n-1)} & N_{1n} \\ N_{20} & N_{21} & N_{22} & \ldots & N_{2j} & \ldots & N_{2(n-2)} & N_{2(n-1)} & N_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_{k0} & N_{k1} & N_{k2} & \ldots & N_{kj} & \ldots & N_{k(n-2)} & N_{k(n-1)} & N_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ N_{(n-2)0} & N_{(n-2)1} & N_{(n-2)2} & \ldots & N_{(n-2)j} & \ldots & N_{(n-2)(n-2)} & N_{(n-2)(n-1)} & N_{(n-2)n} \\ N_{(n-1)0} & N_{(n-1)1} & N_{(n-1)2} & \ldots & N_{(n-1)j} & \ldots & N_{(n-1)(n-2)} & N_{(n-1)(n-1)} & N_{(n-1)n} \\ N_{n0} & N_{n1} & N_{n2} & \ldots & N_{nj} & \ldots & N_{n(n-2)} & N_{n(n-1)} & N_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^n \\ t^{n-1} \\ t^{n-2} \\ \ldots \\ t^k \\ \ldots \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Siendo las columnas de la matriz $N = N_{ij}$:

$$\left.\begin{aligned}
N_{k0} &= 1 \Big/ \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq k}}^{n} (t_k - t_q) \\
N_{k1} &= -\left(\sum_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} t_i \right) \Big/ \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq k}}^{n} (t_k - t_q) \\
N_{k2} &= -\left(\sum_{\substack{0\leq i< j\leq m \\ i,j\neq k}}^{n} t_i t_j \right) \Big/ \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq k}}^{n} (t_k - t_q) \\
N_{kj} &= (-1)^{n-j} \left(\sum_{\substack{0\leq i1< i2< \ldots < i(n-j)\leq n \\ i1,i2,\ldots,i(n-j)\neq k}}^{n} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{i(n-j)} \right) \Big/ \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq k}}^{n} (t_k - t_q) \\
N_{k(n-2)} &= (-1)^{n-2} \left(\sum_{\substack{0\leq i1< i2< \ldots < i(n-2)\leq n \\ i1,i2,\ldots,i(n-2)\neq k}}^{n} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{i(n-2)} \right) \Big/ \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq k}}^{n} (t_k - t_q) \\
N_{k(n-1)} &= (-1)^{n-1} \left(\sum_{\substack{0\leq i1< i2< \ldots < i(n-1)\leq n \\ i1,i2,\ldots,i(n-1)\neq k}}^{n} t_{i1} t_{i2} \ldots t_{i(n-1)} \right) \Big/ \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq k}}^{n} (t_k - t_q) \\
N_{kn} &= (-1)^{n} t_1 t_2 \ldots t_{n-2} t_{n-1} t_n \Big/ \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq k}}^{n} (t_k - t_q)
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

3.1.2.2.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE.

Efectuando el producto cartesiano de las dos ecuaciones matriciales anteriores se obtendría (figura 3.1.2.2.-1):

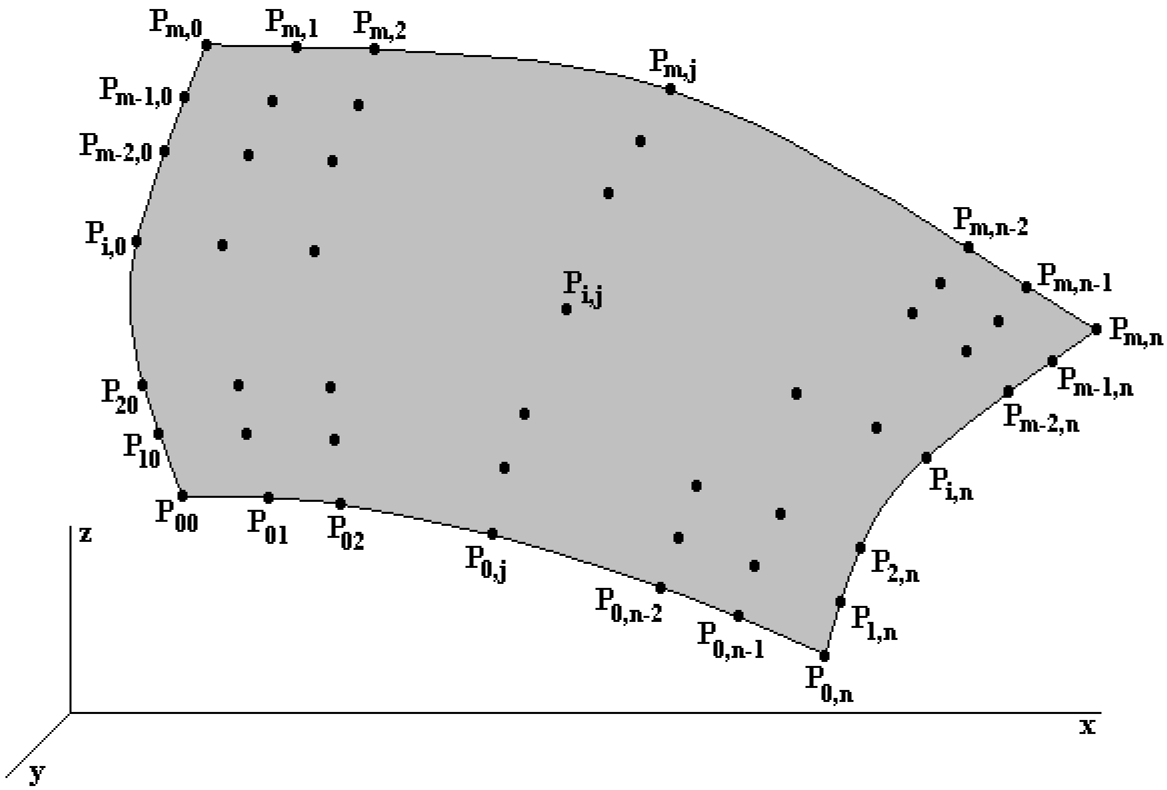


Figura 3.1.2.2.-1. Superficie que pasa por una red de (m+1)(n+1) puntos dados

$$\mathbf{P}(t,u) = (t^m t^{m-1} t^{m-2} \dots t^k \dots t^2 t \cdot 1) \cdot (M)^T \cdot$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \dots & \mathbf{P}_{0(n-2)} & \mathbf{P}_{0(n-1)} & \mathbf{P}_{0n} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \dots & \mathbf{P}_{1(n-2)} & \mathbf{P}_{1(n-1)} & \mathbf{P}_{1n} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \dots & \mathbf{P}_{2(n-2)} & \mathbf{P}_{2(n-1)} & \mathbf{P}_{2n} \\ \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \dots & \mathbf{P}_{3(n-2)} & \mathbf{P}_{3(n-1)} & \mathbf{P}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{P}_{k0} & \mathbf{P}_{k1} & \mathbf{P}_{k2} & \dots & \mathbf{P}_{k(n-2)} & \mathbf{P}_{k(n-1)} & \mathbf{P}_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{P}_{(m-2)0} & \mathbf{P}_{(m-2)1} & \mathbf{P}_{(m-2)2} & \dots & \mathbf{P}_{(m-2)(n-2)} & \mathbf{P}_{(m-2)(n-1)} & \mathbf{P}_{(m-2)n} \\ \mathbf{P}_{(m-1)0} & \mathbf{P}_{(m-1)1} & \mathbf{P}_{(m-1)2} & \dots & \mathbf{P}_{(m-1)(n-2)} & \mathbf{P}_{(m-1)(n-1)} & \mathbf{P}_{(m-1)n} \\ \mathbf{P}_{m0} & \mathbf{P}_{m1} & \mathbf{P}_{m2} & \dots & \mathbf{P}_{m(n-2)} & \mathbf{P}_{m(n-1)} & \mathbf{P}_{mn} \end{pmatrix} \cdot$$
$$(N) \cdot \begin{pmatrix} u^n \\ u^{n-1} \\ u^{n-2} \\ u^{n-3} \\ \dots \\ u^{n-k} \\ \dots \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Que sería la ecuación de la superficie que pasa por la red de $(m+1)x(n+1)$ puntos dados .

En efecto, ya que se cumple que:

$$\boldsymbol{P}(t_i, u_j) = \boldsymbol{P}_{ij} \qquad \begin{matrix} \forall\, i = 0,1,2,\dots,m \\ \forall\, j = 0,1,2,\dots,n \end{matrix} \qquad (2)$$

3.1.3.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BILINEAL QUE PASA POR UNA RED DE 2X2 PUNTOS DADOS.

Sea la curva lineal **P***(t)* que pasa por dos puntos dados $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$, (véase figura 3.1.3.-1) cuya ecuación sería:

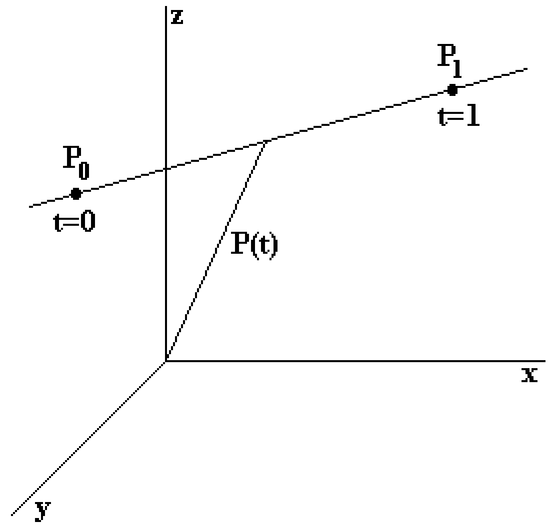


Figura 3.1.3.-1. Curva lineal que pasa por dos puntos dados

$$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{P}_0\left(1 - t\right) + \boldsymbol{P}_1(t) \qquad \left(1\right)$$

Ecuación que, para $t = 0$, da el punto $\boldsymbol{P}_0$ y , para $t = 1$, el punto $\boldsymbol{P}_1$

La ecuación anterior se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \left(2\right)$$

Si ahora se efectúa el producto cartesiano de esta ecuación por sí misma se llegada a (figura 3.1.3.-2):

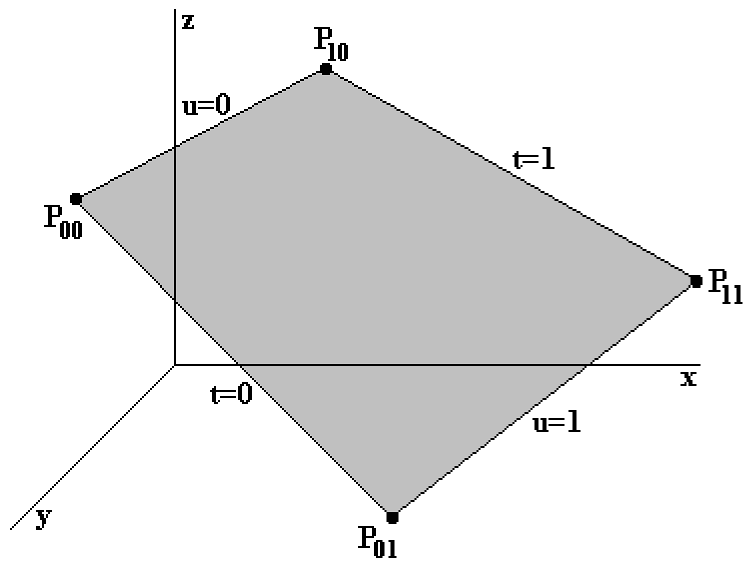


Figura 3.1.3.-2. Superficie bilineal que pasa por cuatro puntos dados

$$\mathbf{P}(t,u)=\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{T}\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

que es la ecuación de la superficie polinomial bilineal que pasa por los puntos $\mathbf{P}_{00}$, $\mathbf{P}_{01}$, $\mathbf{P}_{10}$, $\mathbf{P}_{11}$.

En efecto:

$$\mathbf{P}\left(t_i, t_j\right)=\mathbf{P}_{ij} \qquad \forall\, i=0,1 \qquad \forall\, j=0,1 \qquad (4)$$

siendo:

$$t_i = i/1 \qquad u_j = j/1 \qquad (5)$$

3.1.3.1.- CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BILINEAL TRIANGULAR

Si en la figura 3.1.3.-2 se contrae el borde correspondiente a u = 1 se obtiene la superficie triangular polinomial bilineal (vease figura 3.1.3.1.-1) y la ecuación correspondiente seria:

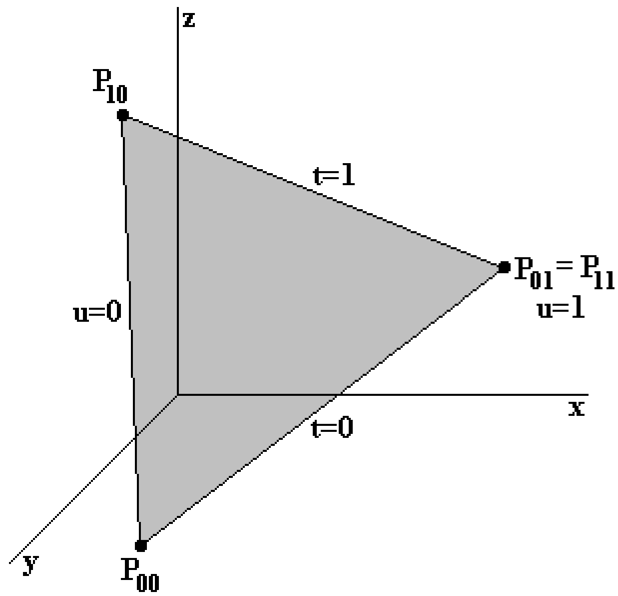


Figura 3.1.3.1.-1. Superficie bilineal que pasa por tres puntos dados

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Ecuación de la superficie polinomial bilineal que pasa por los tres puntos $\mathbf{P}_{00}$, $\mathbf{P}_{10}$, $\mathbf{P}_{11}$.

En efecto se cumple que:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}(0,0) &= \mathbf{P}_{00} \\ \mathbf{P}(1,0) &= \mathbf{P}_{10} \\ \mathbf{P}(1,1) &= \mathbf{P}_{11} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

3.1.3.2.- FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BILINEAL QUE PASA POR UNA RED DE 2X2 PUNTOS DADOS

Se tenía que la ecuación de la superficie era:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Efectuando los productos matriciales se llega a:

$$\mathbf{P}(t,u) = ac\mathbf{P}_{00} + bc\mathbf{P}_{10} + ad\mathbf{P}_{01} + bd\mathbf{P}_{11} \qquad (2)$$

Siendo:

$$\left.\begin{aligned} a &= -t+1 \\ b &= t \\ c &- u+1 \\ d &= u \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Si los componentes de cada vector son:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) &= (x,y,z) \\ \mathbf{P}_{00} &= (x00, y00, z00) \\ \mathbf{P}_{01} &= (x01, y01, z01) \\ \mathbf{P}_{10} &= (x10, y10, z10) \\ \mathbf{P}_{11} &= (x11, y11, z11) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Se tiene, al substituir estos valores en (2):

$$(x,y,z) = ac(x00, y00, z00) + bc(x10, y10, z10) + ad(x01, y01, z01) + bd(x11, y11, z11) \qquad (5)$$

Desglosando por componentes se obtienen las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial bilineal que interpela la red de 2x2 puntos dados:

$$\begin{aligned} x &= acx00 + bcx10 + adx01 + bdx11 \\ y &= acy00 + bcy10 + ady01 + bdy11 \\ z &= acz00 + bcz10 + adz01 + bdz11 \end{aligned} \qquad (6)$$

3.1.4.-CONSTRUCCIÓN DE UNA SUPERFICIE BICUADRÁTICA QUE PASA POR UNA RED DE 3X3 PUNTOS DADOS

Sean tres puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$, la curva cuadrática que los interpola (figura 3.1.4.-1) tendrá por ecuación:

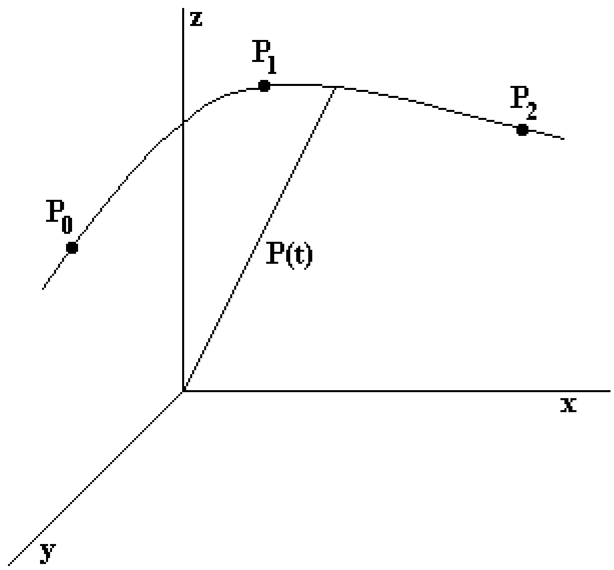


Figura 3.1.4.-1. Curva polinomial cuadrática que pasa por tres puntos dados

$$\mathbf{P}(t) = f_0(t)\mathbf{P}_0 + f_1(t)\mathbf{P}_1 + f_2(t)\mathbf{P}_2 \qquad (1)$$

donde $f_0(t), f_1(t), f_2(t)$ son funciones cuadráticas en *t*.

Si se adopta una interpolación uniforme, es decir, que $t = 0$ en $\mathbf{P}_0$, $t = 1$ en $\mathbf{P}_1$, y $t = 2$ en $\mathbf{P}_2$, los requerimientos para las $f_i(t)$ en cada valor de t serán:

t	$f_0(t)$	$f_1(t)$	$f_2(t)$
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1

Tabla (2)

Luego las $f_i(t)$ son polinomios de interpolación de Lagrange que se pueden escribir :

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 1/2(t-1)(t-2) \\ f_1(t) &= -t(t-2) \\ f_2(t) &= (1/2)t(t-1) \end{aligned} \qquad (3)$$

Luego la curva de interpolación queda, sustituyendo los valores de (3) en (1) como:

$$\mathbf{P}(t) = 1/2(t-1)(t-2)\mathbf{P}_0 - t(t-2)\mathbf{P}_1 + (1/2)t(t-1)\mathbf{P}_2 \qquad (4)$$

Si se pone la fórmula (4) en forma matricial queda:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Si se busca ahora una interpolación polinomial no uniforme y se parte de la ecuación (1) con las restricciones t = 0 en $\mathbf{P}_0$, t = d_o en $\mathbf{P}_1$, (donde d_o es la distancia entre los puntos $\mathbf{P}_o$ y $\mathbf{P}_l$) y t = d_o+d_1, en $\mathbf{P}_2$ (d_1 es la distancia entre $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ los requerimientos para las f_i (t) en cada valor de t serán:

t	$f_0(t)$	$f_1(t)$	$f_2(t)$
0	1	0	0
d_0	0	1	0
$d_0 + d_1$	0	0	1

Tabla (6)

Luego son polinomios de Lagrange de valor:

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{(t-d_0)(t-d_0-d_1)}{(-d_0)(-d_0-d_1)} \\ f_1(t) &= \frac{t(t-d_0-d_1)}{d_0(-d_1)} \\ f_2(t) &= \frac{t(t-d_0)}{(d_0+d_1)d_1} \end{aligned} \qquad (7)$$

La ecuación (1) quedaría, al llevar estos valores de las $f_i(t)$, como:

$$\mathbf{P}(t) = \frac{(t-d_0)(t-d_0-d_1)}{(-d_0)(-d_0-d_1)}\mathbf{P}_0 + \frac{t(t-d_0-d_1)}{d_0(-d_1)}\mathbf{P}_1 + \frac{t(t-d_0)}{(d_0+d_1)d_1}\mathbf{P}_2 \qquad (8)$$

que se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{d_0(d_0+d_1)} & \dfrac{-1}{(d_0+d_1)} - \dfrac{1}{d_0} & 1 \\ \dfrac{-1}{d_0 d_1} & \dfrac{1}{d_0} + \dfrac{1}{d_1} & 0 \\ \dfrac{1}{(d_0+d_1)d_1} & \dfrac{-1}{d_1} + \dfrac{1}{(d_0+d_1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Se tiene pues una curva que para t = 0 pasa por $\mathbf{P}_0$, para t = d_o pasa por $\mathbf{P}_1$ y para t = d_o+d_1 pasa por $\mathbf{P}_2$

En efecto se comprueba al operar que:

P(0)= $\mathbf{P}_0$ c.q.d. (10)
P(d_o)= $\mathbf{P}_1$ c.q.d. (11)
P(d_o+ d_1)= $\mathbf{P}_2$ c.q.d. (12)

La ecuación (9) se reduce a la ecuación (5) si hacemos d_o= d_1 = 1

Una forma diferente toma la ecuación si se hace d_o=d_1 =1/2 con lo que tendremos una curva de exactamente igual forma pero cuyo parámetro toma valores entre 0 y 1.

La ecuación (9) en este caso quedaría:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Efectuando el producto cartesiano de la curva que pasa por estos tres puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ puesta en la forma definida en la ecuación (13) se va a obtener la superficie que interpola una red de 3x3 puntos dados (figura 3.1.4.-2).

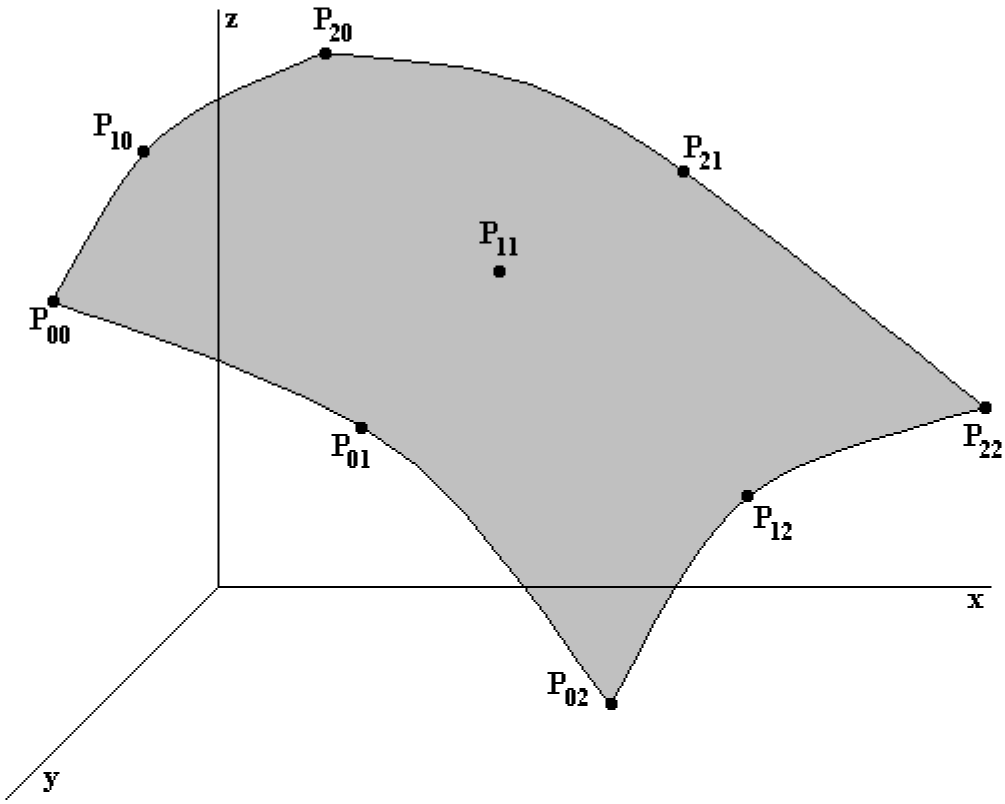


Figura 3.1.4.-2. Superficie polinomial que pasa por una red de 3x3 puntos dados

La forma de la ecuación de la superficie producto cartesiano sería:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Se puede dar significado geométrico a las kj comprobando que:

$$\mathbf{P}(t_i, u_j) = k_{ij} \qquad (15)$$

Por lo tanto:

$$k_{ij} = \mathbf{P_{ij}} \qquad \forall\, i = 0,1,2 \qquad \forall\, j = 0,1,2 \qquad (16)$$

Luego la ecuación (14) se puede poner como:

$$\mathbf{P}(t,u)=\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{00}} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

La ecuación (17) es la de la superficie bicuadrática controlada por nueve puntos.

Esta superficie pasa por los nueve puntos dados ya que es fácil comprobar que:

$$\mathbf{P}(t_i,u_j)=\mathbf{P}_{ij} \qquad \forall\, i=0,1,2 \quad \forall\, j=0,1,2$$
$$\forall\, t_i=0,1,2 \quad \forall\, u_j=0,1,2 \qquad (18)$$

3.1.4.1.-NUEVA FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BICUADRÁTICA QUE PASA POR UNA RED DE 3X3 PUNTOS DADOS

Se tenia que la ecuación de la superficie era:

$$\mathbf{P}(t,u)=\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{00}} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Efectuando los productos matriciales se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) = {} & ad\mathbf{P_{00}} + bd\mathbf{P}_{10} + cd\mathbf{P}_{20} + \\ & ae\mathbf{P}_{01} + be\mathbf{P}_{11} + ce\mathbf{P}_{21} + \\ & af\mathbf{P}_{02} + bf\mathbf{P}_{12} + cf\mathbf{P}_{22} \end{aligned} \qquad (2)$$

Siendo :

$$\begin{aligned} a &= 2t^2 - 3t + 1 \\ b &= -4t^2 + 4t \\ c &= 2t^2 - t \\ d &= 2u^2 - 3u + 1 \\ e &= -4u^2 + 4u \\ f &= 2u^2 - u \end{aligned} \qquad (3)$$

Como cada uno de los vectores tiene las siguientes componentes:

$$\mathbf{P}(t,u) = (x, y, z)$$
$$\mathbf{P_{ij}} = (xij, yij, zij) \qquad (4)$$

Si se llevan estos valores a (1) se tendría:

$$\begin{aligned}(x, y, z) = {} & ad(x00, y00, z00 + bd(x10, y10, z10) + cd(x20, y20, z20) + \\ & ae(x01, y01, z01) + be(x11, y11, z11) + ce(x21, y21, z21) + \\ & af(x02, y02z02) + bf(x12, y12, z12) + cf(x22, y22z22)\end{aligned} \qquad (5)$$

Desglosando por componentes obtendríamos las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial bicuadrática que interpola la red de 3x3 puntos dados:

$$\begin{aligned}x = {} & adx00 + bdx10 + cdx20 + \\ & aex01 + bex11 + cex21 + \\ & afx02 + bfx12 + cfx22 \\ y = {} & ady00 + bdy10 + cdy20 + \\ & aey01 + bey11 + cey21 + \\ & afy02 + bfy12 + cfy22 \\ z = {} & adz00 + bdz10 + cdz20 + \\ & aez01 + bez11 + cez21 + \\ & afz02 + bfz12 + cfz22\end{aligned} \qquad (6)$$

3.1.5.-CONSTRUCCIÓN DE UNA SUPERFICIE BICÚBICA OUE PASA POR UNA RED DE 4X4 PUNTOS DADOS

Sean cuatro puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ y determinemos la curva cúbica que los interpola (figura 3.1.5.-1) que tendrá por ecuación:

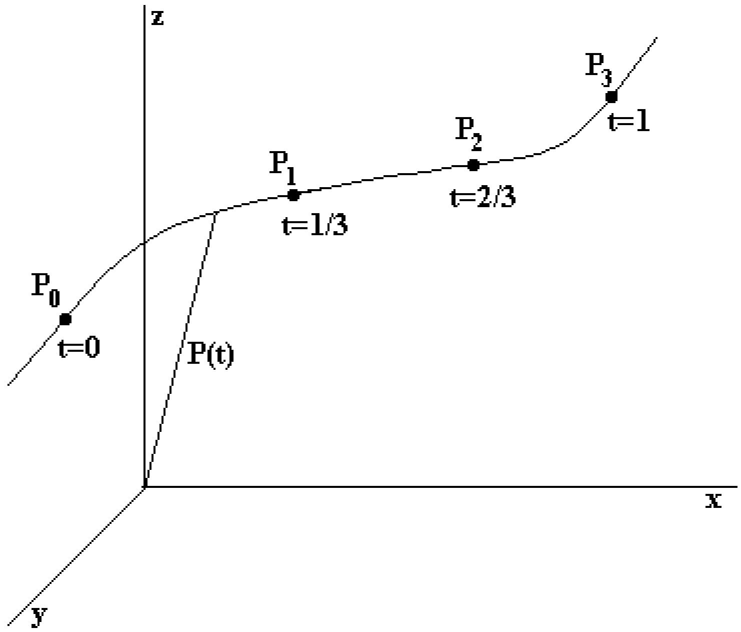


Figura 3.1.5.-1. Curva polinomial cúbica que pasa por cuatro puntos

$$\mathbf{P}(t) = f_0(t)\mathbf{P_0} + f_1(t)\mathbf{P_1} + f_2(t)\mathbf{P_2} + f_3(t)\mathbf{P_3} \qquad (1)$$

donde las $f_i(t)$ son funciones cúbicas en t.

Si se adopta una interpolación no uniforme y las funciones $f_i(t)$ tienen las restricciones:

t	$f_0(t)$	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_3(t)$
t_0	1	0	0	0
t_1	0	1	0	0
t_2	0	0	1	0
t_3	0	0	0	1

Tabla (2)

Estas funciones serán polinomios de interpolación de Lagrange que, calculados, serían:

$$
\begin{aligned}
f_0(t) &= \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)}\\
f_1(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\\
f_2(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\\
f_3(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Llevando estos valores a (1) la curva de interpolación queda:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) = {} & \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)}\mathbf{P_0} + \frac{(t-t_0)(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\mathbf{P_1} + \\
& \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)}\mathbf{P_2} + \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)}\mathbf{P_3}
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

que se puede poner en forma matricial como:

$$
\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P_0} & \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)} & -\frac{t_1+t_2+t_3}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)} & \frac{t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)} & -\frac{t_1t_2t_3}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)}\\
\frac{1}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)} & -\frac{t_0+t_2+t_3}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)} & \frac{t_0t_2+t_2t_3+t_3t_0}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)} & -\frac{t_0t_2t_3}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)}\\
\frac{1}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)} & -\frac{t_0+t_1+t_3}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)} & -\frac{t_0t_1+t_1t_3+t_3t_0}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)} & -\frac{t_0t_1t_3}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_2)}\\
\frac{1}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} & -\frac{t_0+t_1+t_2}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} & -\frac{t_0t_1+t_1t_2+t_2t_0}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} & -\frac{t_0t_1t_2}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5)
$$

Si se adopta una curva de interpolación uniforme donde t tome valores entre cero y uno y de manera que $t_o = 0$, $t_1 = 1/3$, $t_2 = 2/3$ y $t_3 = 3/3 = 1$ la ecuación (5) se reduce a:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P_0} & \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

A partir de la ecuación (6), que define la curva cúbica que pasa por los cuatro puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, se va a definir la superficie producto cartesiano que pasa por una red de 4x4 puntos dados (figura 3.1.5.-2).

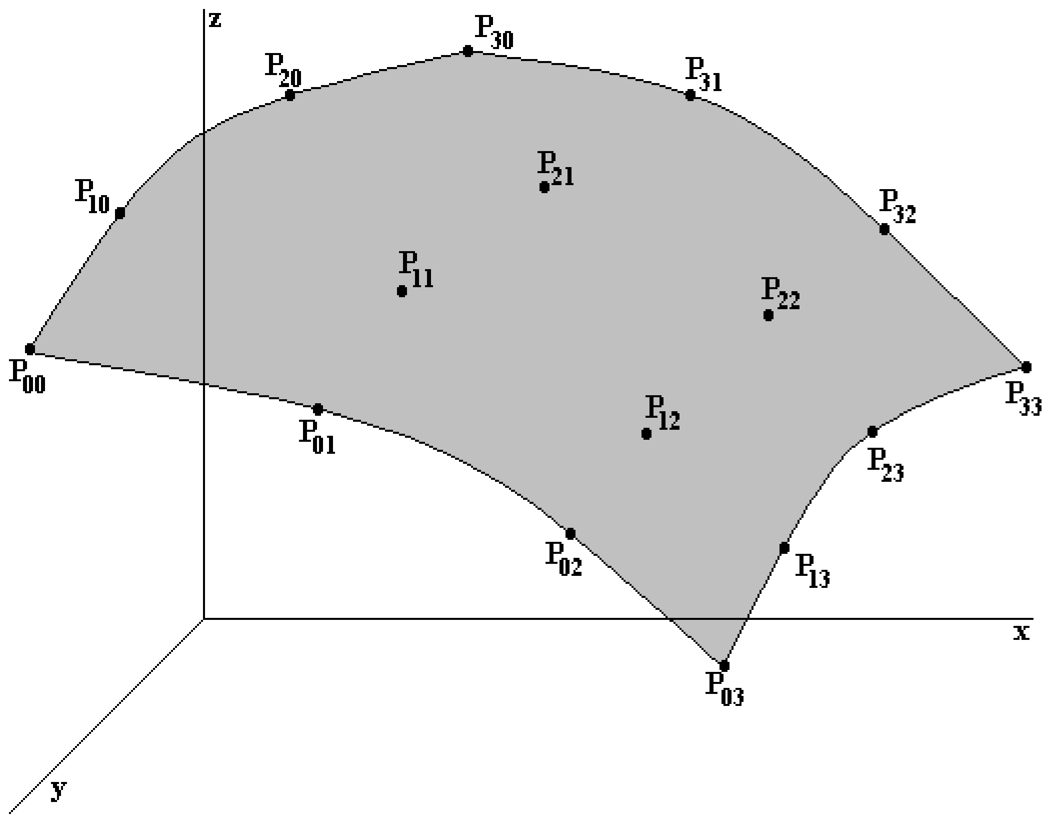


Figura 3.1.5.-2. Superficie polinomial bicúbica que pasa por una red de 4x4 puntos dados

Esta superficie tendrá una ecuación de la forma:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Se puede dar significado geométrico a las k_{ij} comprobando que:

$$\mathbf{P}(t_i,u_j) = k_{ij} \qquad (8)$$

Por lo tanto:

$$k_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \qquad \forall\, i = 0,1/3,2/3,1 \qquad \forall\, j = 0,1/3,2/3,1 \qquad (9)$$

Luego la ecuación (7) se puede poner como:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

La ecuación (10) es la de la superficie bicúbica controlada por 16 puntos (P_{ij}, i = 0, 1, 2, 3; j= 0, 1, 2, 3).

Esta superficie pasa por los dieciséis puntos dados ya que es fácil comprobar que:

$$\mathbf{P}(t_i,u_j) = \mathbf{P}_{ij} \qquad \forall\, i = 0,1,2,3 \quad \forall\, j = 0,1,2,3$$
$$\forall\, t_i = 0,1/3,2/3,1 \quad \forall\, u_j = 0,1/3,2/3,1 \qquad (11)$$

3.1.5.1.-NUEVA FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMICA BICÚBICA QUE PASA POR UNA RED DE 4X4 PUNTOS DADOS

Se tenía que la ecuación de la superficie era:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Efectuando los productos matriciales se llega a:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) = {} & ae\mathbf{P}_{00} + be\mathbf{P}_{10} + ce\mathbf{P}_{20} + de\mathbf{P}_{30} + \\ & af\mathbf{P}_{01} + bf\mathbf{P}_{11} + cf\mathbf{P}_{21} + df\mathbf{P}_{31} + \\ & ag\mathbf{P}_{02} + bg\mathbf{P}_{12} + cg\mathbf{P}_{22} + dg\mathbf{P}_{32} + \\ & ah\mathbf{P}_{03} + bh\mathbf{P}_{13} + ch\mathbf{P}_{23} + dh\mathbf{P}_{33} \end{aligned} \qquad (2)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} a &= -9/2t^3 + 9t^2 - 11/2t + 1 \\ b &= 27/2t^3 - 45/2t^2 + 9t \\ c &= -27/2t^3 + 18t^2 - 9/2t \\ d &= 9/2t^3 - 9/2t^2 + t \\ e &= -9/2u^3 + 9u^2 - 11/2u + 1 \\ f &= 27/2u^3 - 45/2u^2 + 9u \\ g &= -27/2u^3 + 18u^2 - 9/2u \\ h &= 9/2u^3 - 9/2u^2 + u \end{aligned} \qquad (3)$$

Como cada uno de los vectores tiene las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) &= (x,y,z) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{ij}} &= (xij, yij, zij) \end{aligned} \qquad (4)$$

Se tendría, al substituir estos valores en (1):

$$\begin{aligned}(x,y,z) = {} & ae(x00,y00,z00) + be(x10,y10,z10) + ce(x20,y20,z20) + de(x30,y30,z30) + \\ & af(x01,y01,z01) + bf(x11,y11,z11) + cf(x21,y21,z21) + df(x31,y31,z31) + \\ & ag(x02,y02,z02) + bg(x12,y12,z12) + cg(x22,y22,z22) + dg(x32,y32,z32) + \\ & ah(x03,y03,z03) + bh(x13,y13,z13) + ch(x23,y23,z23) + dh(x33,y33,z33)\end{aligned} \qquad (5)$$

Desglosando por componentes se obtienen las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial bicúbica que interpola la red de 4x4 puntos dados:

$$\begin{aligned}x = {} & aex00 + bex10 + cex20 + dex30 + \\ & afx01 + bfx11 + cfx21 + dfx31 + \\ & agx02 + bgx12 + cgx22 + dgx32 + \\ & ahx03 + bhx13 + chx23 + dhx33 \\ y = {} & aey00 + bey10 + cey20 + dey30 + \\ & afy01 + bfy11 + cfy21 + dfy31 + \\ & agy02 + bgy12 + cgy22 + dgy32 + \\ & ahy03 + bhy13 + chy23 + dhy33 \\ z = {} & aez00 + bez10 + cez20 + dez30 + \\ & afz01 + bfz11 + cfz21 + dfz31 + \\ & agx02 + bgx12 + cgx22 + dgx32 + \\ & ahx03 + bhx13 + chx23 + dhx33\end{aligned} \qquad (6)$$

3.1.6.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 2X3 PUNTOS DADOS

La curva polinomial lineal P(t) que pasa por dos puntos dados $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$, era:

$$\mathbf{P}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t \\ 1\end{pmatrix} \qquad (1)$$

Análogamente, la curva polinomial cuadrática que pasa por tres puntos dados $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ tenia por ecuación:

$$\mathbf{P}(u) = \begin{pmatrix}\mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^2 \\ u \\ 1\end{pmatrix} \qquad (2)$$

Efectuando el producto cartesiano de ambas ecuaciones (figura 3.1.6.-1) se tiene:

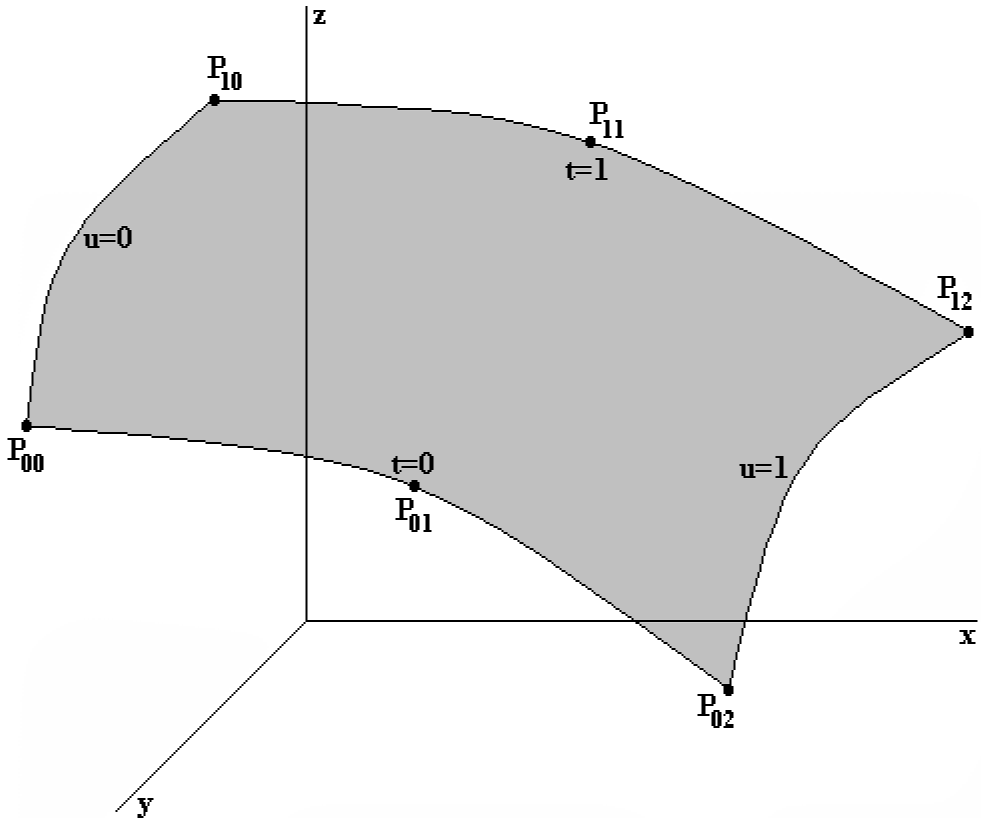


Figura 3.1.6.-1. Superficie polinomial que pasa por una red de 2x3 puntos dados

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Se puede dar significado geométrico a los kij comprobándose que:

$$\mathbf{P}(t_i, u_j) = k_{ij} \qquad (4)$$

Luego:

$$k_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \qquad \forall\, i = 0,1 \qquad \forall\, j = 0,1,2 \qquad (5)$$

Por lo tanto la ecuación (3) se puede poner como:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Que es la ecuación de la superficie que interpola la red de 2x3 puntos dados.

3.1.6.1.-NUEVA FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL OUE PASA POR UNA RED DE 2X3 PUNTOS DADOS

La ecuación de la superficie era:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Operando con las matrices se llega a:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) = {} & ac\mathbf{P}_{00} + bc\mathbf{P}_{10} + \\ & ad\mathbf{P}_{01} + bd\mathbf{P}_{11} + \\ & ae\mathbf{P}_{02} + be\mathbf{P}_{12} \end{aligned} \qquad (2)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} a &= -t+1 \\ b &= t \\ c &= 2u^2 - 3u + 1 \\ d &= -4u^2 + 4u \\ e &= 2u^2 - u \end{aligned} \qquad (3)$$

Los componentesde los vectores son:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) &= (x, y, z) \\ \mathbf{P_{ij}} &= (xij, yij, zij) \end{aligned} \qquad (4)$$

Llevando estos valores a (2) queda:

$$\begin{aligned} (x,y,z) = {} & ac(x00, y00, z00) + bc(x10, y10, z10) + \\ & ad(x01, y01, z01) + bd(x11, y11, z11) + \\ & ae(x02, y02, z02) + be(x12, y12, z12) \end{aligned} \qquad (5)$$

Desglosando por componentes se obtienen las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial que interpola la red de 2x3 puntos dados:

$$
\begin{aligned}
x = {} & acx00 + bcx10 + \\
& adx01 + bdx11 + \\
& aex02 + bex12 \\
y = {} & acy00 + bcy10 + \\
& ady01 + bdy11 + \qquad\qquad (6) \\
& aey02 + bey12 \\
z = {} & acz00 + bcz10 + \\
& adz01 + bdz11 + \\
& aez02 + bez12
\end{aligned}
$$

3.1.7.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 2X4 PUNTOS DADOS

La curva polinomial lineal **P**(t) que pasa por dos puntos dados $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$ era:

$$
\mathbf{P}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)
$$

Análogamente, la curva polinomial cúbica que pasa por cuatro puntos dados $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ tenía por ecuación:

$$
\mathbf{P}(u) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)
$$

Efectuando el producto cartesiano de ambas ecuaciones (fígura 3.1.7.-1) se tendrá:

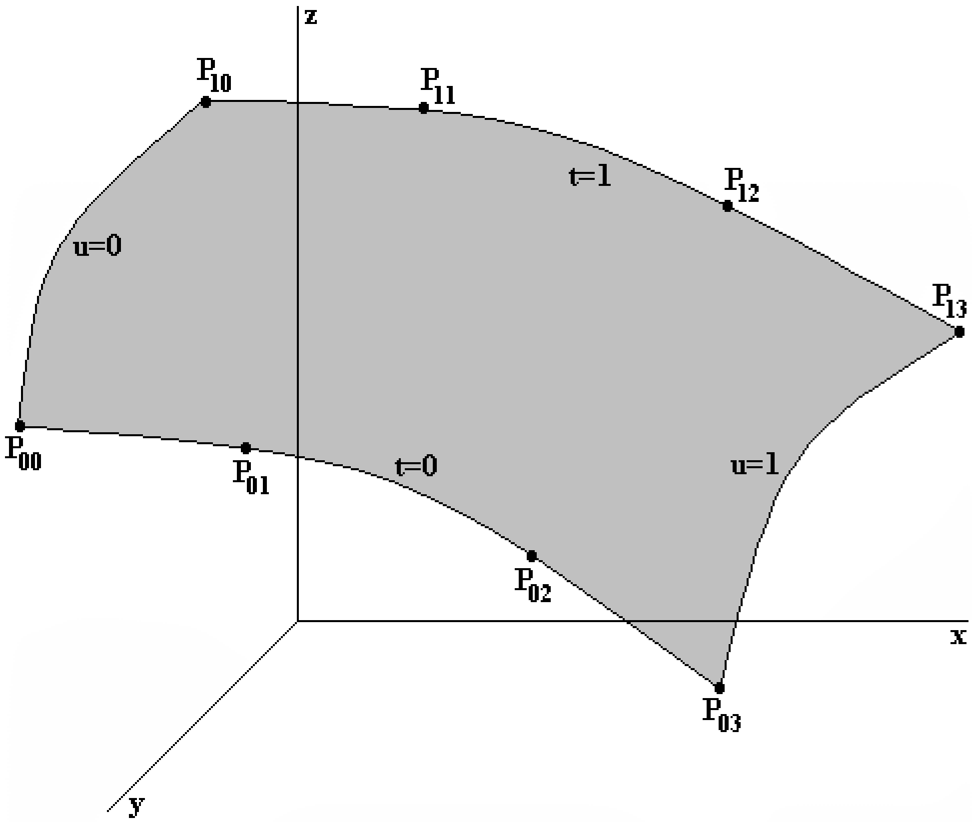


Figura 3.1.7.-1. Superficie polinomial que pasa por una red de 2x4 puntos dados

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Se puede dar significado geométrico a los k_{ij} comprobándose que:

$$\mathbf{P}(t_i, u_j) = k_{ij} \qquad (4)$$

Luego:

$$k_{ij} = \mathbf{P}_{ij} \qquad \forall\, i = 0,1 \qquad \forall\, j = 0,1,2,3 \qquad (5)$$

Por lo tanto la ecuación (3) se puede poner como:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Que sería la ecuación de la superficie que interpola la red de 2x4 puntos dados.

3.1.7.1.-NUEVA FORMULACION PARAMETRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 2X4 PUNTOS DADOS

La ecuación de la superficie era:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} = \ & ac\mathbf{P}_{00} + bc\mathbf{P}_{10} + \\ & ad\mathbf{P}_{01} + bd\mathbf{P}_{11} + \\ & ae\mathbf{P}_{02} + be\mathbf{P}_{12} + \qquad (1) \\ & af\mathbf{P}_{03} + bf\mathbf{P}_{13} + \end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} a &= -t + 1 \\ b &= t \\ c &= -9/2u^3 + 9u^2 - 11/2u + 1 \qquad (2) \\ d &= 27/2u^3 - 45/2u^2 + 9u \\ e &= -27/2u^3 + 18u^2 - 9/2u \\ f &= 9/2u^3 - 9/2u^2 + u \end{aligned}$$

Los vectores tienen por componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) &= (x, y, z) \\ \mathbf{P_{ij}} &= (xij, yij, zij) \qquad (3) \end{aligned}$$

Si se llevan estos valores a (1) se tiene:

$$\begin{aligned}(x,y,z) = {} & ac(x00,y00,z00) + bc(x10,y10,z10) + \\ & ad(x01,y01,z01) + bd(x11,y11,z11) + \\ & ae(x02,y02,z02) + be(x12,y12,z12) + \\ & af(x03,y03,z03) + bf(x13,y13,z13) + \end{aligned} \qquad (4)$$

Desglosando por componentes se obtienen las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial que interpola la red de 2x4 puntos dados.

$$\begin{aligned} x = {} & acx00 + bcx10 + \\ & adx01 + bdx11 + \\ & aex02 + bex12 + \\ & afx03 + bfx13 \\ y = {} & acy00 + bcy10 + \\ & ady01 + bdy11 + \\ & aey02 + bey12 + \\ & afy03 + bfy13 \\ z = {} & acz00 + bcz10 + \\ & adz01 + bdz11 + \\ & aez02 + bez12 + \\ & afz03 + bfz13 \end{aligned} \qquad (5)$$

3.1.8.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL OUE PASA POR UNA RED DE 2X5 PUNTOS DADOS

La curva polinomial **P**(t) que pasa por dos puntos dados $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$ era:

$$\mathbf{P}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Si se desarrolla la ecuación de la curva polinomial de grado cuatro que pasa por los cinco puntos $\mathbf{P}_0$ $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ $\mathbf{P}_3$ $\mathbf{P}_4$ tendríamos que sería, para el caso de interpolación uniforme:

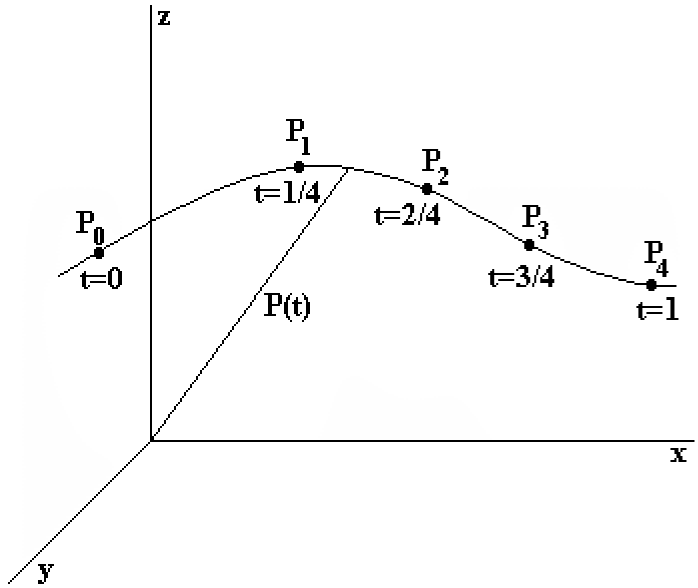


Figura 3.1.8.- 1a. Curva polinomial que pasa por cinco puntos dados

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P_0} & \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 256/24 & -2560/96 & 8960/384 & -12800/1536 & 1 \\ -256/6 & 2304/24 & -6656/96 & 6144/384 & 0 \\ 256/4 & -2048/16 & 4864/64 & -3072/256 & 0 \\ -256/6 & 1792/24 & -3584/96 & 2048/384 & 0 \\ 256/24 & -1536/96 & 2816/384 & -1536/1536 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Efectuando el producto cartesiano (figura 3.1.8.- 1b) de las ecuaciones (1) y (2) se tendría:

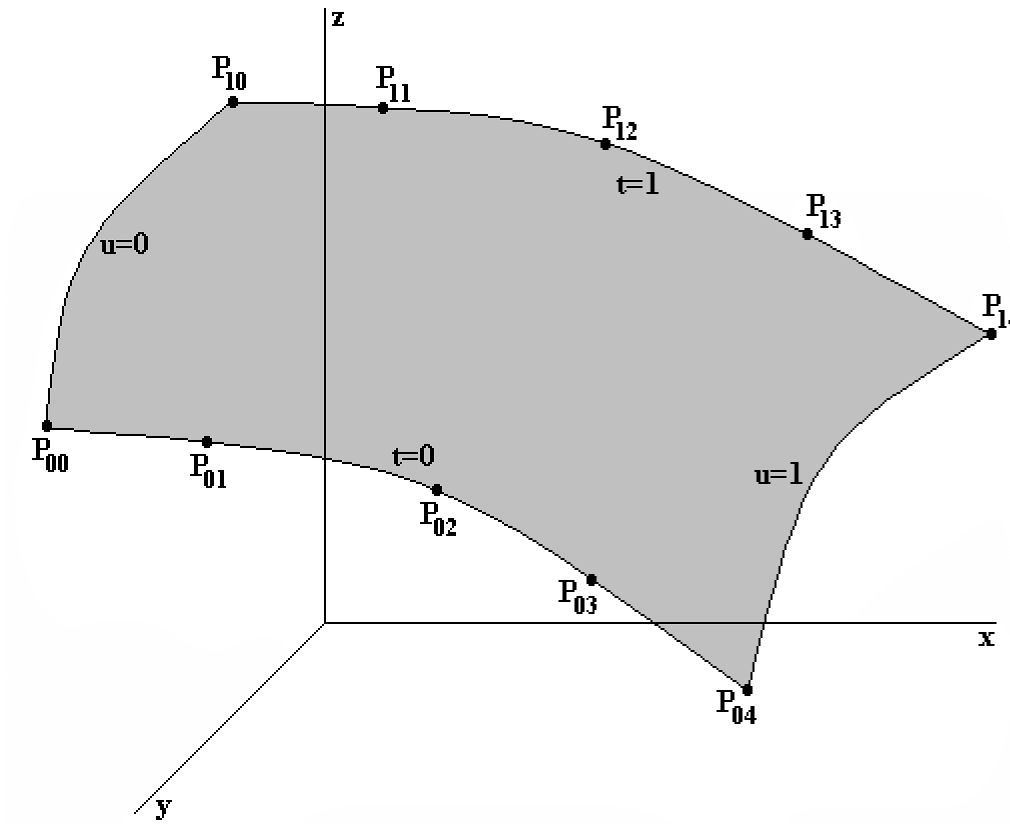


Figura 3.1.8.- 1b. Superficie polinomial que pasa por una red de 2x5 puntos dados

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} & k_{04} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 256/24 & -2560/96 & 8960/384 & -12800/1536 & 1 \\ -256/6 & 2304/24 & -6656/96 & 6144/384 & 0 \\ 256/4 & -2048/16 & 4864/64 & -3072/256 & 0 \\ -256/6 & 1792/24 & -3584/96 & 2048/384 & 0 \\ 256/24 & -1536/96 & 2816/384 & -1536/1536 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Se puede dar significado geométrico a los k_{ij} comprobándose que:

$$\mathbf{P}(t_i, u_j) = k_{ij} \qquad (4)$$

Luego:

$$k_{ij} = \mathbf{P_{ij}} \qquad \forall\, i = 0,1 \qquad \forall\, j = 0,1,2,3,4 \qquad (5)$$

Por lo tanto la ecuación (3) se puede poner como:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{04} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 256/24 & -2560/96 & 8960/384 & -12800/1536 & 1 \\ -256/6 & 2304/24 & -6656/96 & 6144/384 & 0 \\ 256/4 & -2048/16 & 4864/64 & -3072/256 & 0 \\ -256/6 & 1792/24 & -3584/96 & 2048/384 & 0 \\ 256/24 & -1536/96 & 2816/384 & -1536/1536 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Que es la ecuación de la superficie que interpola la red de 2x5 puntos dados.

3.1.8.1.-NUEVA FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 2X5 PUNTOS DADOS

La ecuación de la superficie era:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{04} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 256/24 & -2560/96 & 8960/384 & -12800/1536 & 1 \\ -256/6 & 2304/24 & -6656/96 & 6144/384 & 0 \\ 256/4 & -2048/16 & 4864/64 & -3072/256 & 0 \\ -256/6 & 1792/24 & -3584/96 & 2048/384 & 0 \\ 256/24 & -1536/96 & 2816/384 & -1536/1536 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{aligned} = {} & ac\mathbf{P}_{00} + bc\mathbf{P}_{10} + \\ & ad\mathbf{P}_{01} + bd\mathbf{P}_{11} + \\ & ae\mathbf{P}_{02} + be\mathbf{P}_{12} + \qquad (1) \\ & af\mathbf{P}_{03} + bf\mathbf{P}_{13} + \\ & ag\mathbf{P}_{04} + bg\mathbf{P}_{14} \end{aligned}$$

Síendo:

$$
\begin{aligned}
&a = -t + 1\\
&b = t\\
&c = 256/24u^4 - 2560/96u^3 + 8960/384u^2 - 12800/1536u + 1\\
&d = -256/6u^4 - 2304/24u^3 - 6656/96u^2 + 6144/384u \qquad (2)\\
&e = 256/4u^4 - 2048/16u^3 + 4864/64u^2 - 3072/256u\\
&f = -256/6u^4 + 1792/24u^3 - 3584/96u^2 + 2048/384u\\
&g = 256/24u^4 - 1536/96u^3 + 2816/384u^2 - u
\end{aligned}
$$

Los componentes de los vectores son:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u) = (x,y,z) \qquad (3)\\
&\mathbf{P_{ij}}(xij, yij, zij)
\end{aligned}
$$

Si se llevan estos valores a (1) tenemos:

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) = {} & ac(x00, y00, z00) + bc(x10, y10, z10) +\\
& ad(x01, y01, z01) + bd(x11, y11, z11) + \qquad (4)\\
& ae(x02, y02, z02) + be(x12, y12, z12) +\\
& af(x03, y03, z03) + bf(x13, y13, z13) +\\
& ag(x04, y04, z04) + bg(x14, y14, z14)
\end{aligned}
$$

Desglosando por componentes obtenemos las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial que interpola la red de 2x5 puntos dados:

$$\begin{aligned} x = {} & acx00 + bcx10 + \\ & adx01 + bdx11 + \\ & aex02 + bex12 + \\ & afx03 + bfx13 + \\ & agx04 + bgx14 \\ y = {} & acy00 + bcy10 + \\ & ady01 + bdy11 + \\ & aey02 + bey12 + \\ & afy03 + bfy13 + \qquad\qquad (5) \\ & agy04 + bgyy14 \\ z = {} & acz00 + bcz10 + \\ & adz01 + bdz11 + \\ & aez02 + bez12 + \\ & afz03 + bfz13 + \\ & agz04 + bgz14 \end{aligned}$$

3.1.9.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 3X4 PUNTOS DADOS

La curva polinomial que pasa por tres puntos dados $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ era:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Análogarnente la ecuación de la curva polinomial que pasa por cuatro puntos dados $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Efectuando el producto cartesiano de ambas ecuaciones (figura 3.1.9.-l) tendríamos:

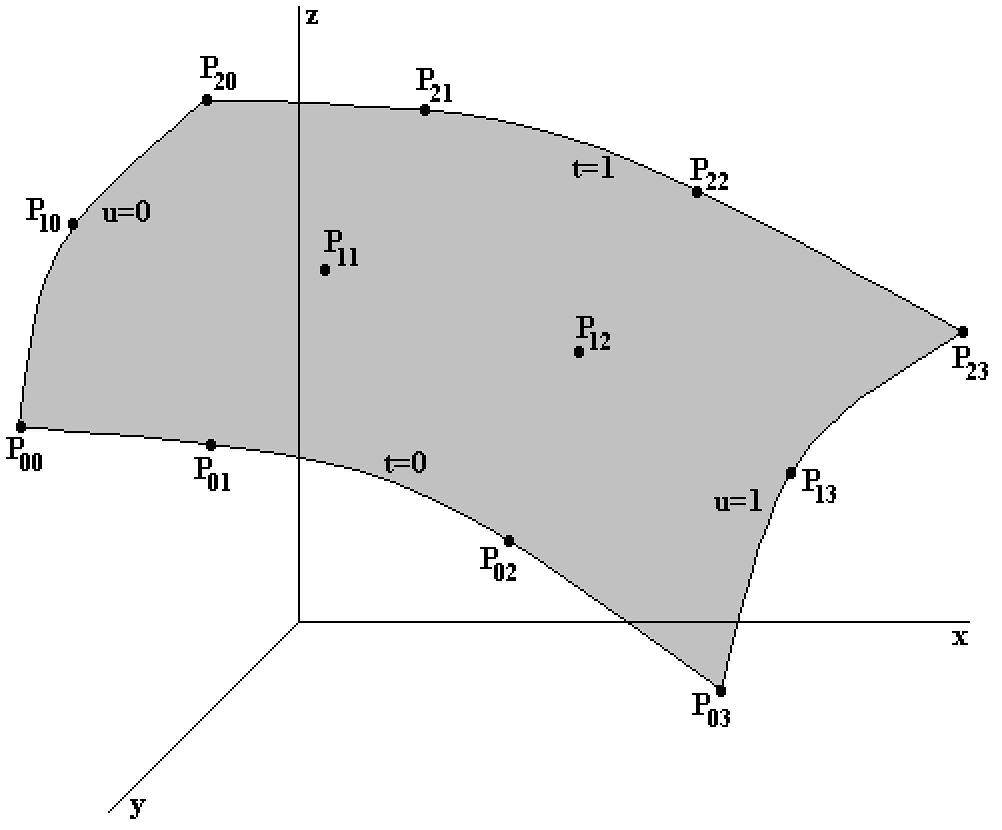


Figura 3.1.9.-l. Superficie polinomial que pasa por una red de 3x4 puntos dados

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^2 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -9/2 & 9 & -11/2 & 1 \\ 27/2 & -45/2 & 9 & 0 \\ -27/2 & 18 & -9/2 & 0 \\ 9/2 & -9/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Que es la ecuación de la superficie polinomial cúbico-cuarta que interpola la red de 3x4 puntos dados.

3.1.10-CONSTRUCCIÓN DE UNA SUPERFICIE BICUÁRTICA OUE PASA POR UNA RED DE PUNTOS 5X5 DADOS

Sean cinco puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ y determinemos la curva cuártica que los interpola que tenia por ecuación:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 256/24 & -2560/96 & 8960/384 & -12800/1536 & 1 \\ -256/6 & 2304/24 & -6656/96 & 6144/384 & 0 \\ 256/4 & -2048/16 & 4864/64 & -3072/256 & 0 \\ -256/6 & 1792/24 & -3584/96 & 2048/384 & 0 \\ 256/24 & -1536/96 & 2816/384 & -1536/1536 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Efectuando el producto cartesiano de esta ecuación por si misma (figura 3.1.10.-1) tendríamos:

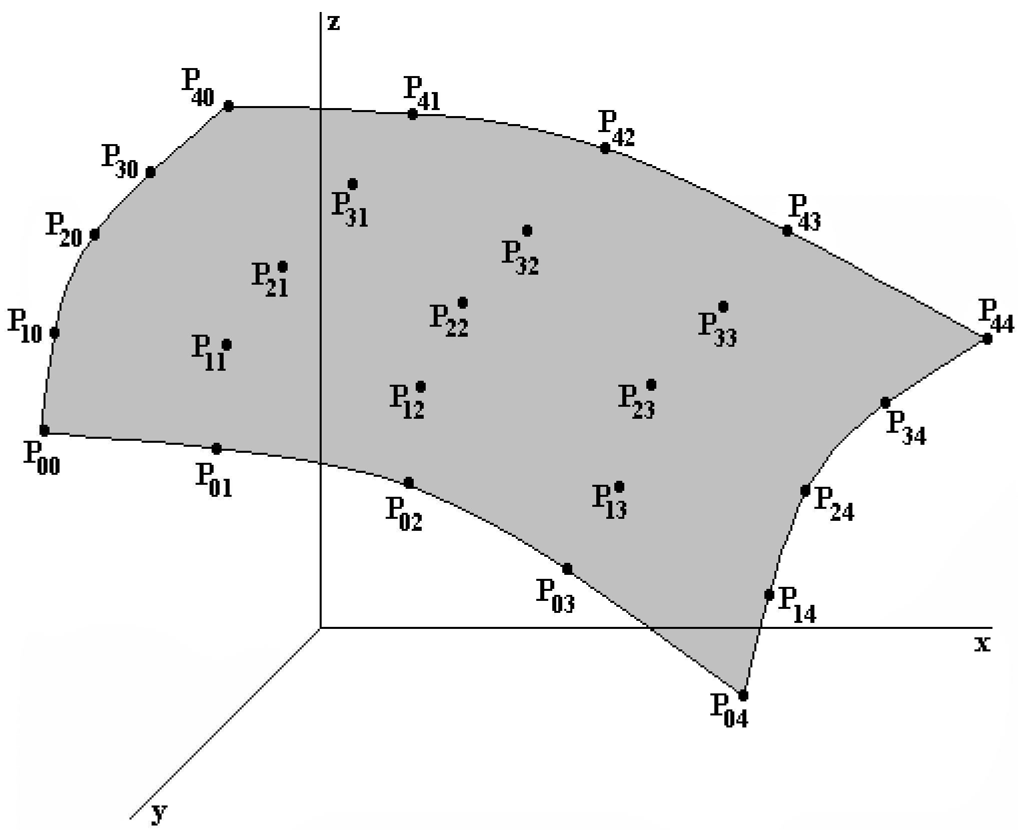


Figura 3.1.10.-1. Superficie polinomial que pasa por una red de 5x5 puntos dados

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 256/24 & -2560/96 & 8960/384 & -12800/1536 & 1 \\ -256/6 & 2304/24 & -6656/96 & 6144/384 & 0 \\ 256/4 & -2048/16 & 4864/64 & -3072/256 & 0 \\ -256/6 & 1792/24 & -3584/96 & 2048/384 & 0 \\ 256/24 & -1536/96 & 2816/384 & -1536/1536 & 0 \end{pmatrix}^T$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{04} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} \\ \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} \\ \mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 256/24 & -2560/96 & 8960/384 & -12800/1536 & 1 \\ -256/6 & 2304/24 & -6656/96 & 6144/384 & 0 \\ 256/4 & -2048/16 & 4864/64 & -3072/256 & 0 \\ -256/6 & 1792/24 & -3584/96 & 2048/384 & 0 \\ 256/24 & -1536/96 & 2816/384 & -1536/1536 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Que seria la ecuación de la superficie polinomial bicuarta que interpola la red de 5x5 puntos dados.

3.1.10.1.-NUEVA FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BICUÁRTICA QUE PASA POR UNA RED DE 5X5 PUNTOS DADOS

Se tenia que la ecuación de la superficie era:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 256/24 & -2560/96 & 8960/384 & -12800/1536 & 1 \\ -256/6 & 2304/24 & -6656/96 & 6144/384 & 0 \\ 256/4 & -2048/16 & 4864/64 & -3072/256 & 0 \\ -256/6 & 1792/24 & -3584/96 & 2048/384 & 0 \\ 256/24 & -1536/96 & 2816/384 & -1536/1536 & 0 \end{pmatrix}^T$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{04} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} \\ \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} \\ \mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 256/24 & -2560/96 & 8960/384 & -12800/1536 & 1 \\ -256/6 & 2304/24 & -6656/96 & 6144/384 & 0 \\ 256/4 & -2048/16 & 4864/64 & -3072/256 & 0 \\ -256/6 & 1792/24 & -3584/96 & 2048/384 & 0 \\ 256/24 & -1536/96 & 2816/384 & -1536/1536 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Efectuando los productos matriciales se llega a:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) = {} & af\mathbf{P}_{00} + bf\mathbf{P}_{10} + cf\mathbf{P}_{20} + df\mathbf{P}_{30} + df\mathbf{P}_{30} + \\ & ag\mathbf{P}_{01} + bg\mathbf{P}_{11} + cg\mathbf{P}_{21} + dg\mathbf{P}_{31} + dg\mathbf{P}_{30} + \\ & ah\mathbf{P}_{02} + bh\mathbf{P}_{12} + ch\mathbf{P}_{22} + dh\mathbf{P}_{32} + dh\mathbf{P}_{30} + \\ & ak\mathbf{P}_{03} + bk\mathbf{P}_{13} + ck\mathbf{P}_{23} + dk\mathbf{P}_{33} + dk\mathbf{P}_{30} + \\ & al\mathbf{P}_{03} + bl\mathbf{P}_{13} + cl\mathbf{P}_{23} + dl\mathbf{P}_{33} + dl\mathbf{P}_{30} + \end{aligned} \qquad (2)$$

Siendo:

$$
\begin{aligned}
a &= 256/24t^4 - 2560/96t^3 + 8690/384t^2 - 12800/1536t + 1 \\
b &= -256/6t^4 + 2304/24t^3 - 6656/96t^2 + 6144/384t \\
c &= 256/4t^4 - 2048/16t^3 + 4864/64t^2 - 3072/256t \\
d &= -256/6t^4 + 1792/24t^3 - 3584/96t^2 + 2048/384t \\
e &= 256/24t^4 - 1536/96t^3 + 2816/384t^2 - 1536/1536t \\
f &= 256/24u^4 - 2560/96u^3 + 8690/384u^2 - 12800/1536u + 1 \\
g &= -256/6u^4 + 2304/24u^3 - 6656/96u^2 + 6144/384u \\
h &= 256/4u^4 - 2048/16u^3 + 4864/64u^2 - 3072/256u \\
k &= -256/6u^4 + 1792/24u^3 - 3584/96u^2 + 2048/384u \\
l &= 256/24u^4 - 1536/96u^3 + 2816/384u^2 - 1536/1536u
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Cada uno de los vectores tiene las siguientes componentes:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,u) &= (x,y,z) \\
\mathbf{P_{ij}} &= (xij, yij, zij)
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Si se llevan estos valores a (2) se tiene:

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) = {} & af(x00,y00,z00) + bf(x10,y10,z10) + cf(x20,y20,z20) + \\
& df(x30,y30,z30) + ef(x40,y40,z40) + \\
& ag(x01,y01,z01) + bg(x11,y11,z11) + cg(x21,y21,z21) + \\
& dg(x31,y31,z31) + eg(x41,y41,z41) + \\
& ah(x02,y02,z02) + bh(x12,y12,z12) + ch(x22,y22,z22) + \\
& dh(x32,y32,z32) + eh(x42,y42,z42) + \\
& ak(x03,y03,z03) + bk(x13,y13,z13) + ck(x23,y23,z23) + \\
& dk(x33,y33,z33) + ek(x43,y43,z43) + \\
& al(x04,y04,z04) + bl(x14,y14,z14) + cl(x24,y24,z24) + \\
& dl(x34,y34,z34) + el(x44,y44,z44)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Desglosando por componentes se obtendrían las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial bicuártica que interpola la red de 5x5 puntos dados:

$$
\begin{aligned}
x = {} & afx00 + bfx10 + cfx20 + dfx30 + efx40 + \\
& agx01 + bgx11 + cgx21 + dgx31 + egx41 + \\
& ahx02 + bhx12 + chx22 + dhx32 + ehx42 + \\
& akx03 + bkx13 + ckx23 + dkx33 + ekx43 + \\
& alx04 + blx14 + clx24 + dlx34 + elx44 \\
y = {} & afy00 + bfy10 + cfy20 + dfy30 + efy40 + \\
& agy01 + bgy11 + cgy21 + dgy31 + egy41 + \\
& ahy02 + bhy12 + chy22 + dhy32 + ehy42 + \qquad (6) \\
& aky03 + bky13 + cky23 + dky33 + eky43 + \\
& aly04 + bly14 + cly24 + dly34 + ely44 \\
z = {} & afz00 + bfz10 + cfz20 + dfz30 + efz40 + \\
& agz01 + bgz11 + cgz21 + dgz31 + egz41 + \\
& ahz02 + bhz12 + chz22 + dhz32 + ehz42 + \\
& akz03 + bkz13 + ckz23 + dkz33 + ekz43 + \\
& alz04 + blz14 + clz24 + dlz34 + elz44
\end{aligned}
$$

3.1.11.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BIQUÍNTICA QUE PASA POR UNA RED DE 6X6 PUNTOS DADOS

Desarrollemos previamente la ecuación de la curva polinomial que pasa por los seis puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$

Que será de la forma:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{5} f_i(t)\mathbf{P}_\mathrm{i} \qquad (1)$$

Donde $f_i(t)$ tendrán las siguientes restricciones:

$$
\begin{aligned}
f_i(t_j) &= 1 \qquad si \quad i = j \\
f_i(t_j) &= 0 \qquad si \quad i \neq j \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Calculando los $f_i(t)$, que son polinomíos de Lagrange, se obtiene, para el caso de una interpolación uniforme, una ecuación matricial de la curva:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -625/24 & 1875/24 & -10625/120 & 5625/120 & -171250/15000 & 1 \\ 3125/24 & -43750/120 & 221875/600 & -481250/3000 & 75000/3000 & 0 \\ -3125/12 & 40625/60 & -184375/300 & 334375/1500 & -37500/1500 & 0 \\ 3125/12 & 37500/60 & 153125/300 & 243750/1500 & 25000/1500 & 0 \\ -3125/24 & 34375/120 & -128125/600 & 190625/3000 & -18750/3000 & 0 \\ 625/24 & -1250/24 & 4375/120 & -1250/120 & 15000/15000 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Efectuando el producto cartesiano de la ecuación anterior por sí misma (figura 3.1.11.-1) tendríamos:

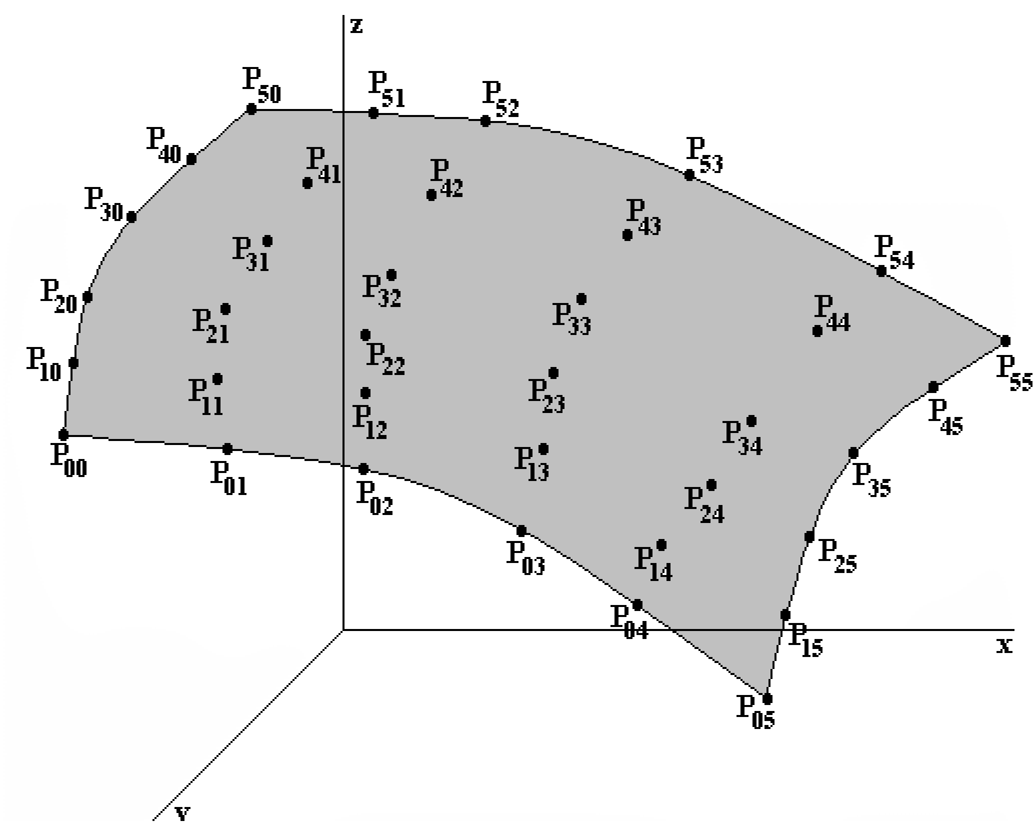


Figura 3.1.11.-1. Superficie polinomial que pasa por una red de 6x6 puntos dados

$$\mathbf{P}(t,u)=\begin{pmatrix} t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} -625/24 & 1875/24 & -10625/120 & 5625/120 & -171250/15000 & 1 \\ 3125/24 & -43750/120 & 221875/600 & -481250/3000 & 75000/3000 & 0 \\ -3125/12 & 40625/60 & -184375/300 & 334375/1500 & -37500/1500 & 0 \\ 3125/12 & 37500/60 & 153125/300 & 243750/1500 & 25000/1500 & 0 \\ -3125/24 & 34375/120 & -128125/600 & 190625/3000 & -18750/3000 & 0 \\ 625/24 & -1250/24 & 4375/120 & -1250/120 & 15000/15000 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{00}} & \mathbf{P_{01}} & \mathbf{P_{02}} & \mathbf{P_{03}} & \mathbf{P_{04}} & \mathbf{P_{05}} \\ \mathbf{P_{10}} & \mathbf{P_{11}} & \mathbf{P_{12}} & \mathbf{P_{13}} & \mathbf{P_{14}} & \mathbf{P_{15}} \\ \mathbf{P_{20}} & \mathbf{P_{21}} & \mathbf{P_{22}} & \mathbf{P_{23}} & \mathbf{P_{24}} & \mathbf{P_{25}} \\ \mathbf{P_{30}} & \mathbf{P_{31}} & \mathbf{P_{32}} & \mathbf{P_{33}} & \mathbf{P_{34}} & \mathbf{P_{35}} \\ \mathbf{P_{40}} & \mathbf{P_{41}} & \mathbf{P_{42}} & \mathbf{P_{43}} & \mathbf{P_{44}} & \mathbf{P_{45}} \\ \mathbf{P_{50}} & \mathbf{P_{51}} & \mathbf{P_{52}} & \mathbf{P_{53}} & \mathbf{P_{54}} & \mathbf{P_{55}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -625/24 & 1875/24 & -10625/120 & 5625/120 & -171250/15000 & 1 \\ 3125/24 & -43750/120 & 221875/600 & -481250/3000 & 75000/3000 & 0 \\ -3125/12 & 40625/60 & -184375/300 & 334375/1500 & -37500/1500 & 0 \\ 3125/12 & 37500/60 & 153125/300 & 243750/1500 & 25000/1500 & 0 \\ -3125/24 & 34375/120 & -128125/600 & 190625/3000 & -18750/3000 & 0 \\ 625/24 & -1250/24 & 4375/120 & -1250/120 & 15000/15000 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Que sería la ecuación de la superficie polinomial biquinta que interpola la red de 6x6 puntos dados

3.1.12.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BISEXTA QUE PASA POR UNA RED DE 7X7 PUNTOS DADOS

Desarrollemos previamente la ecuación de la curva polinomial que pasa por los siete puntos $\mathbf{P}_0$ $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ $\mathbf{P}_3$ $\mathbf{P}_4$ $\mathbf{P}_5$ $\mathbf{P}_6$ (figura 3.1.12.-1)

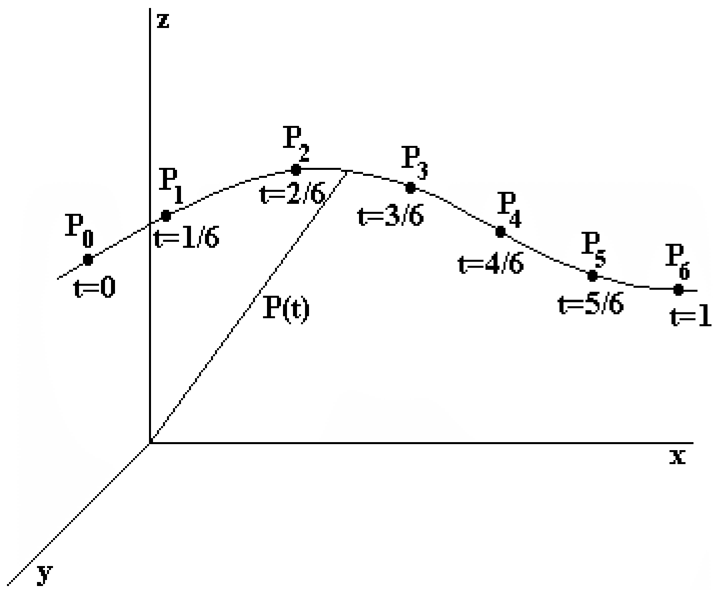


Figura 3.1.12.-1. Curva polinomial que pasa por siete puntos dados

Esta tendría la forma :

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{6} f_i(t)\mathbf{P}_i \qquad (1)$$

Donde las $f_i(t)$ tendrán las siguientes restricciones:

t	$f_0(t)$	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_3(t)$	$f_4(t)$	$f_5(t)$	$f_6(t)$
t_0	1	0	0	0	0	0	0
t_1	0	1	0	0	0	0	0
t_2	0	0	1	0	0	0	0
t_3	0	0	0	1	0	0	0
t_4	0	0	0	0	1	0	0
t_5	0	0	0	0	0	1	0
t_6	0	0	0	0	0	0	1

Tabla (2)

Siendo:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= d_0 \\ t_2 &= d_0 + d_1 \\ t_3 &= d_0 + d_1 + d_2 \\ t_4 &= d_0 + d_1 + d_2 + d_3 \\ t_5 &= d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\ t_6 &= d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 \end{aligned} \qquad (3)$$

Calculando los $f_i(t)$ llegamos:

$$f_0(t) = \frac{(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)(t-t_5)(t-t_6)}{(t_0-t_1)(t_0-t_2)(t_0-t_3)(t_0-t_4)(t_0-t_5)(t_0-t_6)} =$$

$$= \left\{ t^6 - t^5\Big(\sum_{i=0,i\neq 0}^{6} t_i\Big) + t^4\Big(\sum_{1<i<j<6,i\neq 0}^{6} t_i t_j\Big) - t^3\Big(\sum_{1<i<j<k<6,i\neq 0}^{6} t_i t_j t_k\Big) + \right.$$

$$\left. t^2\Big(\sum_{1<i<j<k<l<6,i\neq 0}^{6} t_i t_j t_k t_l\Big) - t\Big(\sum_{1<i<j<k<l<m<6,i\neq 0}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m\Big) + t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 \right\} \Big/ \prod_{i=0,i\neq 0}^{6} (t_0 - t_i) \qquad (4)$$

$$f_1(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)(t-t_5)(t-t_6)}{(t_1-t_0)(t_1-t_2)(t_1-t_3)(t_1-t_4)(t_1-t_5)(t_1-t_6)} =$$

$$= \left\{ t^6 - t^5\Big(\sum_{i=0,i\neq 1}^{6} t_i\Big) + t^4\Big(\sum_{1<i<j<6;i,j\neq 1}^{6} t_i t_j\Big) - t^3\Big(\sum_{1<i<j<k<6;i,j,k\neq 1}^{6} t_i t_j t_k\Big) + \right.$$

$$\left. t^2\Big(\sum_{1<i<j<k<l<6;i,j,k,l\neq 1}^{6} t_i t_j t_k t_l\Big) - t\Big(\sum_{1<i<j<k<l<m<6;i,j,k,l,m\neq 1}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m\Big) + t_0 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 \right\} \Big/ \prod_{i=0,i\neq 1}^{6} (t_1 - t_i) \qquad (5)$$

$$f_2(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_3)(t-t_4)(t-t_5)(t-t_6)}{(t_2-t_0)(t_2-t_1)(t_2-t_3)(t_2-t_4)(t_2-t_5)(t_2-t_6)} =$$

$$= \left\{ t^6 - t^5\Big(\sum_{i=0,i\neq 2}^{6} t_i\Big) + t^4\Big(\sum_{1<i<j<6;i,j\neq 2}^{6} t_i t_j\Big) - t^3\Big(\sum_{1<i<j<k<6;i,j,k\neq 2}^{6} t_i t_j t_k\Big) + \right.$$

$$\left. t^2\Big(\sum_{1<i<j<k<l<6;i,j,k,l\neq 2}^{6} t_i t_j t_k t_l\Big) - t\Big(\sum_{1<i<j<k<l<m<6;i,j,k,l,m\neq 2}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m\Big) + t_0 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 \right\} \Big/ \prod_{i=0,i\neq 2}^{6} (t_2 - t_i) \qquad (6)$$

$$
\begin{aligned}
f_3(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_4)(t-t_5)(t-t_6)}{(t_3-t_0)(t_3-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_4)(t_3-t_5)(t_3-t_6)} = \\
&= \Bigg\{ t^6 - t^5\Big(\sum_{i=0,i\neq 3}^{6} t_i\Big) + t^4\Big(\sum_{1<i<j<6;i,j\neq 3}^{6} t_i t_j\Big) - t^3\Big(\sum_{1<i<j<k<6;i,j,k\neq 3}^{6} t_i t_j t_k\Big) + \\
&\quad t^2\Big(\sum_{1<i<j<k<l<6;i,j,k,l\neq 3}^{6} t_i t_j t_k t_l\Big) - t\Big(\sum_{1<i<j<k<l<m<6;i,j,k,l,m\neq 3}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m\Big) + t_0 t_1 t_2 t_4 t_5 t_6 \Bigg\} \Big/ \prod_{i=0,i\neq 3}^{6} (t_3 - t_i)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_5)(t-t_6)}{(t_4-t_0)(t_4-t_1)(t_4-t_2)(t_4-t_3)(t_4-t_5)(t_4-t_6)} = \\
&= \Bigg\{ t^6 - t^5\Big(\sum_{i=0,i\neq 4}^{6} t_i\Big) + t^4\Big(\sum_{1<i<j<6;i,j\neq 4}^{6} t_i t_j\Big) - t^3\Big(\sum_{1<i<j<k<6;i,j,k\neq 4}^{6} t_i t_j t_k\Big) + \\
&\quad t^2\Big(\sum_{1<i<j<k<l<6;i,j,k,l\neq 4}^{6} t_i t_j t_k t_l\Big) - t\Big(\sum_{1<i<j<k<l<m<6;i,j,k,l,m\neq 4}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m\Big) + t_0 t_1 t_2 t_3 t_5 t_6 \Bigg\} \Big/ \prod_{i=0,i\neq 4}^{6} (t_4 - t_i)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
f_5(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)(t-t_6)}{(t_5-t_0)(t_5-t_1)(t_5-t_2)(t_5-t_3)(t_5-t_4)(t_5-t_6)} = \\
&= \Bigg\{ t^6 - t^5\Big(\sum_{i=0,i\neq 5}^{6} t_i\Big) + t^4\Big(\sum_{1<i<j<6;i,j\neq 5}^{6} t_i t_j\Big) - t^3\Big(\sum_{1<i<j<k<6;i,j,k\neq 5}^{6} t_i t_j t_k\Big) + \\
&\quad t^2\Big(\sum_{1<i<j<k<l<6;i,j,k,l\neq 5}^{6} t_i t_j t_k t_l\Big) - t\Big(\sum_{1<i<j<k<l<m<6;i,j,k,l,m\neq 5}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m\Big) + t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_6 \Bigg\} \Big/ \prod_{i=0,i\neq 5}^{6} (t_5 - t_i)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
f_6(t) &= \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)(t-t_4)(t-t_5)}{(t_6-t_0)(t_6-t_1)(t_6-t_2)(t_6-t_3)(t_6-t_4)(t_6-t_5)} = \\
&= \Bigg\{ t^6 - t^5\Big(\sum_{i=0,i\neq 6}^{6} t_i\Big) + t^4\Big(\sum_{1<i<j<6;i,j\neq 6}^{6} t_i t_j\Big) - t^3\Big(\sum_{1<i<j<k<6;i,j,k\neq 6}^{6} t_i t_j t_k\Big) + \\
&\quad t^2\Big(\sum_{1<i<j<k<l<6;i,j,k,l\neq 6}^{6} t_i t_j t_k t_l\Big) - t\Big(\sum_{1<i<j<k<l<m<6;i,j,k,l,m\neq 6}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m\Big) + t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \Bigg\} \Big/ \prod_{i=0,i\neq 6}^{6} (t_6 - t_i)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Entrando con estos valores en la fórmula (1) tendríamos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) = &\Big\{ t^6 - t^5 (\sum_{i=0, i\neq 0}^{6} t_i) + t^4 (\sum_{1<i<j<6, i\neq 0}^{6} t_i t_j) - t^3 (\sum_{1<i<j<k<6, i\neq 0}^{6} t_i t_j t_k) + \\
&t^2 (\sum_{1<i<j<k<l<6, i\neq 0}^{6} t_i t_j t_k t_l) - t (\sum_{1<i<j<k<l<m<6, i\neq 0}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m) + t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 \Big\} \mathbf{P_0} / \prod_{i=0, i\neq 0}^{6} (t_0 - t_i) + \\
&\Big\{ t^6 - t^5 (\sum_{i=0, i\neq 1}^{6} t_i) + t^4 (\sum_{1<i<j<6; i,j\neq 1}^{6} t_i t_j) - t^3 (\sum_{1<i<j<k<6; i,j,k\neq 1}^{6} t_i t_j t_k) + \\
&t^2 (\sum_{1<i<j<k<l<6; i,j,k,l\neq 1}^{6} t_i t_j t_k t_l) - t (\sum_{1<i<j<k<l<m<6; i,j,k,l,m\neq 1}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m) + t_0 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 \Big\} \mathbf{P_1} / \prod_{i=0, i\neq 1}^{6} (t_1 - t_i) + \\
&\Big\{ t^6 - t^5 (\sum_{i=0, i\neq 2}^{6} t_i) + t^4 (\sum_{1<i<j<6; i,j\neq 2}^{6} t_i t_j) - t^3 (\sum_{1<i<j<k<6; i,j,k\neq 2}^{6} t_i t_j t_k) + \\
&t^2 (\sum_{1<i<j<k<l<6; i,j,k,l\neq 2}^{6} t_i t_j t_k t_l) - t (\sum_{1<i<j<k<l<m<6; i,j,k,l,m\neq 2}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m) + t_0 t_1 t_3 t_4 t_5 t_6 \Big\} \mathbf{P_2} / \prod_{i=0, i\neq 2}^{6} (t_2 - t_i) + \\
&\Big\{ t^6 - t^5 (\sum_{i=0, i\neq 3}^{6} t_i) + t^4 (\sum_{1<i<j<6; i,j\neq 3}^{6} t_i t_j) - t^3 (\sum_{1<i<j<k<6; i,j,k\neq 3}^{6} t_i t_j t_k) + \\
&t^2 (\sum_{1<i<j<k<l<6; i,j,k,l\neq 3}^{6} t_i t_j t_k t_l) - t (\sum_{1<i<j<k<l<m<6; i,j,k,l,m\neq 3}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m) + t_0 t_1 t_2 t_4 t_5 t_6 \Big\} \mathbf{P_3} / \prod_{i=0, i\neq 3}^{6} (t_3 - t_i) + \\
&\Big\{ t^6 - t^5 (\sum_{i=0, i\neq 4}^{6} t_i) + t^4 (\sum_{1<i<j<6; i,j\neq 4}^{6} t_i t_j) - t^3 (\sum_{1<i<j<k<6; i,j,k\neq 4}^{6} t_i t_j t_k) + \\
&t^2 (\sum_{1<i<j<k<l<6; i,j,k,l\neq 4}^{6} t_i t_j t_k t_l) - t (\sum_{1<i<j<k<l<m<6; i,j,k,l,m\neq 4}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m) + t_0 t_1 t_2 t_3 t_5 t_6 \Big\} \mathbf{P_4} / \prod_{i=0, i\neq 4}^{6} (t_4 - t_i) + \\
&\Big\{ t^6 - t^5 (\sum_{i=0, i\neq 4}^{6} t_i) + t^4 (\sum_{1<i<j<6; i,j\neq 4}^{6} t_i t_j) - t^3 (\sum_{1<i<j<k<6; i,j,k\neq 4}^{6} t_i t_j t_k) + \\
&t^2 (\sum_{1<i<j<k<l<6; i,j,k,l\neq 4}^{6} t_i t_j t_k t_l) - t (\sum_{1<i<j<k<l<m<6; i,j,k,l,m\neq 4}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m) + t_0 t_1 t_2 t_3 t_5 t_6 \Big\} \mathbf{P_5} / \prod_{i=0, i\neq 4}^{6} (t_4 - t_i) + \\
&\Big\{ t^6 - t^5 (\sum_{i=0, i\neq 6}^{6} t_i) + t^4 (\sum_{1<i<j<6; i,j\neq 6}^{6} t_i t_j) - t^3 (\sum_{1<i<j<k<6; i,j,k\neq 6}^{6} t_i t_j t_k) + \\
&t^2 (\sum_{1<i<j<k<l<6; i,j,k,l\neq 6}^{6} t_i t_j t_k t_l) - t (\sum_{1<i<j<k<l<m<6; i,j,k,l,m\neq 6}^{6} t_i t_j t_k t_l t_m) + t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \Big\} \mathbf{P_6} / \prod_{i=0, i\neq 6}^{6} (t_6 - t_i) \quad (11)
\end{aligned}
$$

Que se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P_0} & \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} & \mathbf{P_6} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{M}_{01} & \mathbf{M}_{02} & \mathbf{M}_{03} & \mathbf{M}_{04} & \mathbf{M}_{05} & \mathbf{M}_{06} \\ \mathbf{M}_{10} & \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} & \mathbf{M}_{14} & \mathbf{M}_{15} & \mathbf{M}_{16} \\ \mathbf{M}_{20} & \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} & \mathbf{M}_{24} & \mathbf{M}_{25} & \mathbf{M}_{26} \\ \mathbf{M}_{30} & \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{34} & \mathbf{M}_{35} & \mathbf{M}_{36} \\ \mathbf{M}_{40} & \mathbf{M}_{41} & \mathbf{M}_{42} & \mathbf{M}_{43} & \mathbf{M}_{44} & \mathbf{M}_{45} & \mathbf{M}_{46} \\ \mathbf{M}_{50} & \mathbf{M}_{51} & \mathbf{M}_{52} & \mathbf{M}_{53} & \mathbf{M}_{54} & \mathbf{M}_{55} & \mathbf{M}_{56} \\ \mathbf{M}_{60} & \mathbf{M}_{61} & \mathbf{M}_{62} & \mathbf{M}_{63} & \mathbf{M}_{64} & \mathbf{M}_{65} & \mathbf{M}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Síendo las columnas de la matriz M_{ij}:

$$\mathbf{M}_{k,0} = 1/\prod_{q=0,q\neq k}^{6}(t_k - t_q)$$

$$\mathbf{M}_{k,1} = -(\sum_{i=0,i\neq k}^{6} t_i)/\prod_{q=0,q\neq k}^{6}(t_k - t_q)$$

$$\mathbf{M}_{k,2} = (\sum_{0\leq i<j\leq 6;i,j\neq k}^{6} t_i t_j)/\prod_{q=0,q\neq k}^{6}(t_k - t_q)$$

$$\mathbf{M}_{k,3} = (\sum_{0\leq i<j<l\leq 6;i,j,l\neq k}^{6} t_i t_j t_l)/\prod_{q=0,q\neq k}^{6}(t_k - t_q) \qquad (13)$$

$$\mathbf{M}_{k,4} = (\sum_{0\leq i<j<l<p\leq 6;i,j,l,p\neq k}^{6} t_i t_j t_l t_p)/\prod_{q=0,q\neq k}^{6}(t_k - t_q)$$

$$\mathbf{M}_{k,5} = (\sum_{0\leq i<j<l<p<q\leq 6;i,j,l,p,q\neq k}^{6} t_i t_j t_l t_p t_q)/\prod_{q=0,q\neq k}^{6}(t_k - t_q)$$

$$\mathbf{M}_{k,6} = (\sum_{0\leq i<j<l<p<q<r\leq 6;i,j,l,p,q,r\neq k}^{6} t_i t_j t_l t_p t_q t_r)/\prod_{q=0,q\neq k}^{6}(t_k - t_q)$$

Efectuando el producto cartesiano de la ecuación anterior por sí misrna (figura 3.1.12.-2) tendríamos:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} \mathbf{P_0} & \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} & \mathbf{P_6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \mathbf{M}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{04} & \mathbf{P}_{05} & \mathbf{P}_{06} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} & \mathbf{P}_{15} & \mathbf{P}_{16} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} & \mathbf{P}_{25} & \mathbf{P}_{26} \\ \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} & \mathbf{P}_{35} & \mathbf{P}_{36} \\ \mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} & \mathbf{P}_{45} & \mathbf{P}_{46} \\ \mathbf{P}_{50} & \mathbf{P}_{51} & \mathbf{P}_{52} & \mathbf{P}_{53} & \mathbf{P}_{54} & \mathbf{P}_{55} & \mathbf{P}_{56} \\ \mathbf{P}_{60} & \mathbf{P}_{61} & \mathbf{P}_{62} & \mathbf{P}_{63} & \mathbf{P}_{64} & \mathbf{P}_{65} & \mathbf{P}_{66} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} u^6 \\ u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

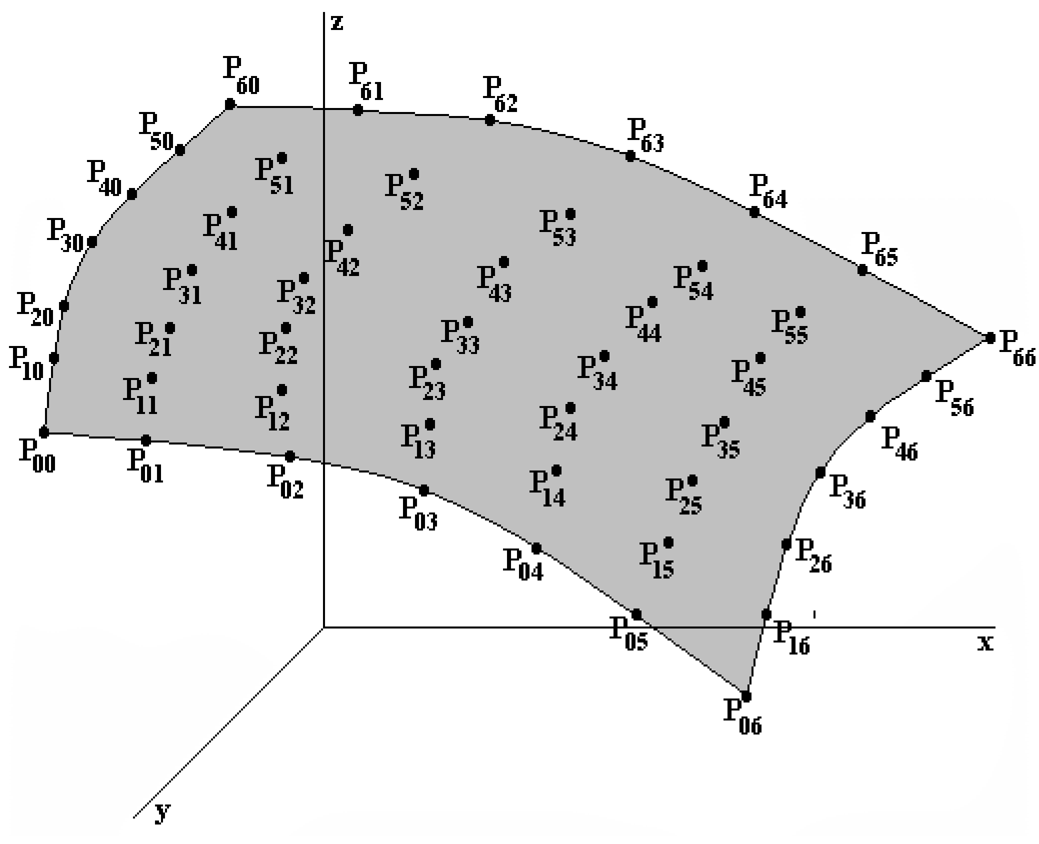


Figura 3.1.12.- 2. Superficie polinomial que pasa por una red de 7x7 puntos dados

Si se hace:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= 1/6 \\ t_2 &= 2/6 \\ t_3 &= 3/6 \\ t_4 &= 4/6 \\ t_5 &= 5/6 \\ t_6 &= 6/6 = 1 \end{aligned} \qquad (15)$$

la ecuación (14) se reduce a:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} \mathbf{P_0} & \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{P_5} & \mathbf{P_6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 324/5 & -1134/5 & 315 & -441/2 & 406/5 & -147/10 & 1 \\ -1944/5 & 1296 & 1674 & 1044 & -1566/5 & 36 & 0 \\ 972 & -3074 & 3699 & 4149/2 & 1053/2 & -45 & 0 \\ -1296 & 3888 & -4356 & 2232 & -508 & 40 & 0 \\ 972 & -2754 & 2889 & -2763/2 & 297 & -45/2 & 0 \\ -1944/5 & 5184/5 & -1026 & 468 & -486/5 & 36/5 & 0 \\ 324/5 & -162 & 153 & -135/2 & 137/10 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{04} & \mathbf{P}_{05} & \mathbf{P}_{06} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} & \mathbf{P}_{15} & \mathbf{P}_{16} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} & \mathbf{P}_{25} & \mathbf{P}_{26} \\ \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} & \mathbf{P}_{35} & \mathbf{P}_{36} \\ \mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} & \mathbf{P}_{45} & \mathbf{P}_{46} \\ \mathbf{P}_{50} & \mathbf{P}_{51} & \mathbf{P}_{52} & \mathbf{P}_{53} & \mathbf{P}_{54} & \mathbf{P}_{55} & \mathbf{P}_{56} \\ \mathbf{P}_{60} & \mathbf{P}_{61} & \mathbf{P}_{62} & \mathbf{P}_{63} & \mathbf{P}_{64} & \mathbf{P}_{65} & \mathbf{P}_{66} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 324/5 & -1134/5 & 315 & -441/2 & 406/5 & -147/10 & 1 \\ -1944/5 & 1296 & 1674 & 1044 & -1566/5 & 36 & 0 \\ 972 & -3074 & 3699 & 4149/2 & 1053/2 & -45 & 0 \\ -1296 & 3888 & -4356 & 2232 & -508 & 40 & 0 \\ 972 & -2754 & 2889 & -2763/2 & 297 & -45/2 & 0 \\ -1944/5 & 5184/5 & -1026 & 468 & -486/5 & 36/5 & 0 \\ 324/5 & -162 & 153 & -135/2 & 137/10 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^6 \\ u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Que es la ecuación de la superficie pofinomial bisexta que interpola la red de 7x7 puntos dados.

3.1.12.1.-NUEVA FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL OUE PASA POR UNA RED DE 7X7 PUNTOS DADOS

Tenemos que la ecuación de la superficie 3.1.12.-1b es (16)

Efectuando los productos matriciales obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t,u) = {} & ah\mathbf{P}_{00} + bh\mathbf{P}_{10} + ch\mathbf{P}_{20} + dh\mathbf{P}_{30} + eh\mathbf{P}_{40} + fh\mathbf{P}_{50} + gh\mathbf{P}_{60} + \\ & ak\mathbf{P}_{01} + bk\mathbf{P}_{11} + ck\mathbf{P}_{21} + dk\mathbf{P}_{31} + ek\mathbf{P}_{41} + fk\mathbf{P}_{51} + gk\mathbf{P}_{61} + \\ & al\mathbf{P}_{02} + bl\mathbf{P}_{12} + cl\mathbf{P}_{22} + dl\mathbf{P}_{32} + el\mathbf{P}_{42} + fl\mathbf{P}_{52} + gl\mathbf{P}_{62} + \\ & am\mathbf{P}_{03} + bm\mathbf{P}_{13} + cm\mathbf{P}_{23} + dm\mathbf{P}_{33} + em\mathbf{P}_{43} + fm\mathbf{P}_{53} + gm\mathbf{P}_{63} + \\ & ap\mathbf{P}_{04} + bp\mathbf{P}_{14} + cp\mathbf{P}_{24} + dp\mathbf{P}_{34} + ep\mathbf{P}_{44} + fp\mathbf{P}_{54} + gp\mathbf{P}_{64} + \\ & ar\mathbf{P}_{05} + br\mathbf{P}_{15} + cr\mathbf{P}_{25} + dr\mathbf{P}_{35} + er\mathbf{P}_{45} + fr\mathbf{P}_{55} + gr\mathbf{P}_{65} + \\ & as\mathbf{P}_{06} + bs\mathbf{P}_{16} + cs\mathbf{P}_{26} + ds\mathbf{P}_{36} + es\mathbf{P}_{46} + fs\mathbf{P}_{56} + gs\mathbf{P}_{66}\end{aligned} \qquad (1)$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
a &= 324/5t^6 - 1134/5t^5 + 315t^4 - 441/2t^3 + 406/5t^2 - 147/10t + 1\\
b &= -1944/5t^6 + 1296t^5 + 1674t^4 + 1044t^3 - 1566/5t^2 + 36t\\
c &= 972t^6 - 3074t^5 + 3699t^4 + 4149/2t^3 + 1053/2t^2 - 45t\\
d &= -1296t^6 + 3888t^5 - 4356t^4 + 2232t^3 - 508t^2 + 40t\\
e &= 972t^6 - 2754t^5 + 2889t^4 - 2763/2t^3 + 297t^2 - 45/2t\\
f &= -1944/5t^6 + 5184/5t^5 - 1026t^4 + 468t^3 - 486/5t^2 + 36/5t\\
g &= 324/5t^6 - 162t^5 + 153t^4 - 135/2t^3 + 137/10t^2 - t\\
h &= 324/5u^6 - 1134/5u^5 + 315u^4 - 441/2u^3 + 406/5u^2 - 147/10u + 1\\
k &= -1944/5u^6 + 1296u^5 + 1674u^4 + 1044u^3 - 1566/5u^2 + 36u\\
l &= 972u^6 - 3074u^5 + 3699u^4 + 4149/2u^3 + 1053/2u^2 - 45u\\
m &= -1296u^6 + 3888u^5 - 4356u^4 + 2232u^3 - 508u^2 + 40u\\
p &= 972u^6 - 2754u^5 + 2889u^4 - 2763/2u^3 + 297u^2 - 45/2u\\
r &= -1944/5u^6 + 5184/5u^5 - 1026u^4 + 468u^3 - 486/5u^2 + 36/5u\\
s &= 324/5u^6 - 162u^5 + 153u^4 - 135/2u^3 + 137/10u^2 - u
\end{aligned} \qquad (2)$$

Cada uno de los vectores tiene las siguientes componentes:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t,u) &= (x, y, z)\\ \mathbf{P}_{\mathbf{ij}} &= (xij, yij, zij)\end{aligned} \qquad (3)$$

Si se llevan estos valores a (1) se tendría:

$$
\begin{aligned}
&(x, y, z) = \\
&ah(x00, y00, z00) + bh(x10, y10, z10) + ch(x20, y20, z20) + \\
&dh(x30, y30, z30) + eh(x40, y40, z40) + fh(x50, y50, z530) + \\
&gh(x60, y60, z60) + \\
&ak(x01, y01, z01) + bk(x11, y11, z11) + ck(x21, y21, z21) + \\
&dk(x31, y31, z31) + ek(x41, y41, z41) + fk(x51, y51, z51) + \\
&gk(x61, y61, z61) + \\
&al(x02, y02, z02) + bl(x12, y12, z12) + cl(x22, y22, z22) + \\
&dl(x32, y32, z32) + el(x42, y42, z42) + fl(x52, y52, z52) + \\
&gl(x62, y62, z62) + \\
&am(x03, y03, z03) + bm(x13, y13, z13) + cm(x23, y23, z23) + \\
&dm(x33, y33, z33) + em(x43, y43, z43) + fm(x53, y53, z53) + \qquad (4) \\
&gm(x63, y63, z63) + \\
&ap(x04, y04, z04) + bp(x14, y14, z14) + cp(x24, y24, z24) + \\
&dp(x34, y34, z34) + ep(x44, y44, z44) + fp(x54, y54, z54) + \\
&gp(x64, y64, z64) + \\
&ar(x05, y05, z05) + br(x15, y15, z15) + cr(x25, y25, z25) + \\
&dr(x35, y35, z35) + er(x45, y45, z45) + fr(x55, y55, z55) + \\
&gr(x65, y65, z65) + \\
&as(x06, y06, z06) + bs(x16, y16, z16) + cs(x26, y26, z26) + \\
&ds(x36, y36, z36) + es(x46, y46, z46) + fs(x56, y56, z56) + \\
&gs(x66, y66, z66)
\end{aligned}
$$

Desglosando por componentes se obtienen las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial bisexta que interpola la red de 7x7 puntos dados:

$$
\begin{aligned}
x = {} & ahx00 + bhx10 + chx20 + dhx30 + ehx40 + fhx50 + ghx60 + \\
& akx01 + bkx11 + ckx21 + dkx31 + ekx41 + fkx51 + gkx61 + \\
& alx02 + blx12 + clx22 + dlx32 + elx42 + flx52 + glx62 + \\
& amx03 + bmx13 + cmx23 + dmx33 + emx43 + fmx53 + gmx63 + \\
& apx04 + bpx14 + cpx24 + dpx34 + epx44 + fpx54 + gpx64 + \\
& arx05 + brx15 + crx25 + drx35 + erx45 + frx55 + grx65 + \\
& asx06 + bsx16 + csx26 + dsx36 + esx46 + fsx56 + gsx66 \\
y = {} & ahy00 + bhy10 + chy20 + dhy30 + ehy40 + fhy50 + ghy60 + \\
& aky01 + bky11 + cky21 + dky31 + eky41 + fky51 + gky61 + \\
& aly02 + bly12 + cly22 + dly32 + ely42 + fly52 + gly62 + \\
& amy03 + bmy13 + cmy23 + dmy33 + emy43 + fmy53 + gmy63 + \qquad (5) \\
& apy04 + bpy14 + cpy24 + dpy34 + epy44 + fpy54 + gpy64 + \\
& ary05 + bry15 + cry25 + dry35 + ery45 + fry55 + gry65 + \\
& asy06 + bsy16 + csy26 + dsy36 + esy46 + fsy56 + gsy66 \\
z = {} & ahz00 + bhz10 + chz20 + dhz30 + ehz40 + fhz50 + ghz60 + \\
& akz01 + bkz11 + ckz21 + dkz31 + ekz41 + fkz51 + gkz61 + \\
& alz02 + blz12 + clz22 + dlz32 + elz42 + flz52 + glz62 + \\
& amz03 + bmz13 + cmz23 + dmz33 + emz43 + fmz53 + gmz63 + \\
& apz04 + bpz14 + cpz24 + dpz34 + epz44 + fpz54 + gpz64 + \\
& arz05 + brz15 + crz25 + drz35 + erz45 + frz55 + grz65 + \\
& asz06 + bsz16 + csz26 + dsz36 + esz46 + fsz56 + gsz66
\end{aligned}
$$

3.1.13.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BISÉPTIMA QUE PASA POR UNA RED DE 8X8 PUNTOS DADOS

Desarrollando previamente la ecuación de la curva polinomial que pasa por los ocho puntos $\mathbf{P}_0$ $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ $\mathbf{P}_3$ $\mathbf{P}_4$ $\mathbf{P}_5$ $\mathbf{P}_6$ $\mathbf{P}_7$ (figura 3.1.13.-1)

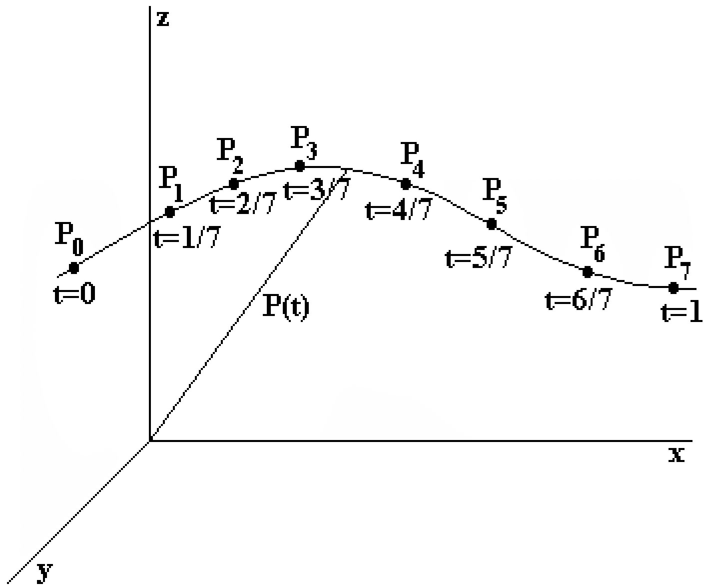


Figura 3.1.13.-1. Curva polinomial que pasa por ocho puntos dados

Esta tendría la forma:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{7} f_i(t)\mathbf{P}_{\mathrm{i}} \qquad (1)$$

Donde las $f_i(t)$ tendrán las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} f_i(t_j) &= 1 \qquad si \quad i = j \\ f_i(t_j) &= 0 \qquad si \quad i \neq j \end{aligned} \qquad (2)$$

Si se adopta una interpolación uniforme:

$$t_i = i/7 \qquad (3)$$

Calculando los $f_i(t)$ y efectuando el producto cartesiano de la ecuación matricial de la curva por sí misma (figura 3.1.13.-2) llegamos:

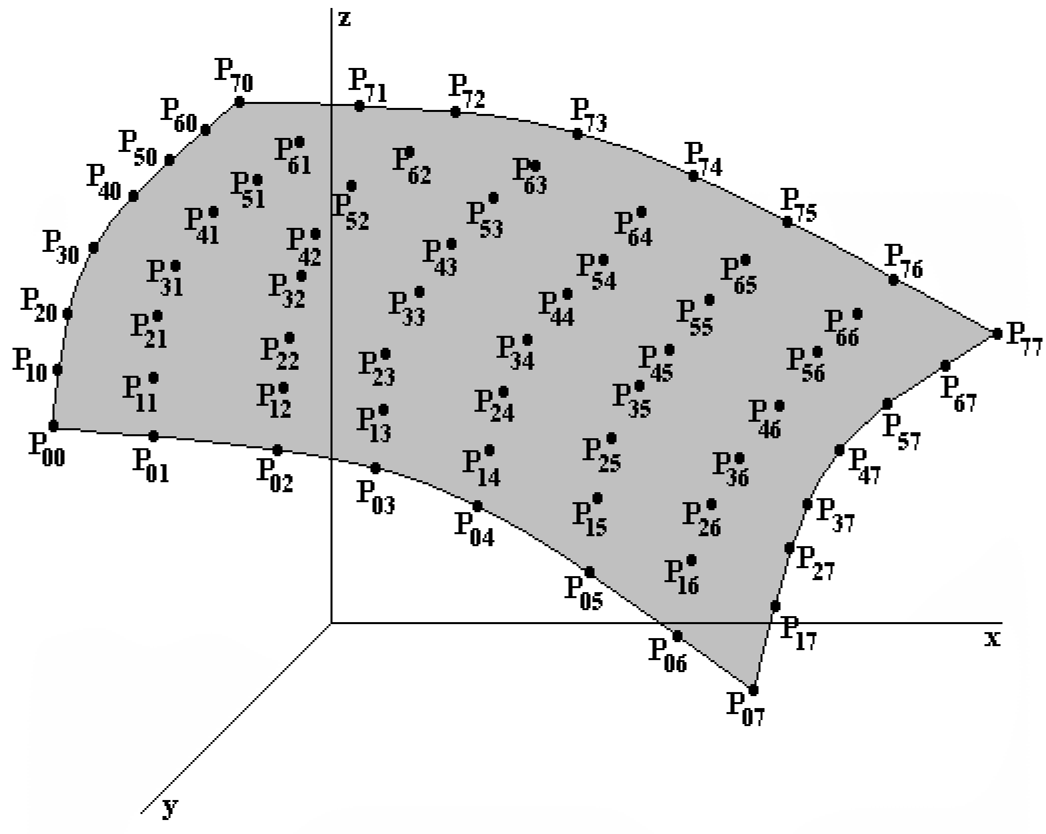


Figura 3.1.13.-2. Superficie polinomial que pasa por una red de 8x8 puntos dados

$$
\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^7 & t^6 & t^5 & t^4 & t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
-117649/720 & 117649/180 & -386561/360 & 16807/18 & -331681/720 & 22981/7180 & -363/20 & 1 \\
823543/720 & -352947/80 & 991613/144 & -88837/16 & 109417/20 & -10927/20 & 49 & 0 \\
-823543/240 & 1529437/120 & -151263/8 & 170471/12 & -1347647/240 & 43071/40 & -147/2 & 0 \\
823543/144 & -2941225/144 & 4151329/144 & -2926819/144 & 133427/18 & -46501/36 & 245/3 & 0 \\
823543/144 & 117649/6 & -1899191/72 & 52822/3 & -872935/144 & 2009/2 & -245/4 & 0 \\
823543/240 & -2705927/240 & 1159683/80 & -444185/48 & 45962/15 & -9849/20 & 147/5 & 0 \\
-823543/720 & 1294139/360 & -319333/72 & 98441/36 & -634207/720 & 49931/360 & -49/6 & 0 \\
117649/720 & -117649/240 & 84035/144 & -16807/48 & 9947/90 & -343/20 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{04} & \mathbf{P}_{05} & \mathbf{P}_{06} & \mathbf{P}_{07} \\
\mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} & \mathbf{P}_{15} & \mathbf{P}_{16} & \mathbf{P}_{17} \\
\mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} & \mathbf{P}_{25} & \mathbf{P}_{26} & \mathbf{P}_{27} \\
\mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} & \mathbf{P}_{35} & \mathbf{P}_{36} & \mathbf{P}_{37} \\
\mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} & \mathbf{P}_{45} & \mathbf{P}_{46} & \mathbf{P}_{47} \\
\mathbf{P}_{50} & \mathbf{P}_{51} & \mathbf{P}_{52} & \mathbf{P}_{53} & \mathbf{P}_{54} & \mathbf{P}_{55} & \mathbf{P}_{56} & \mathbf{P}_{57} \\
\mathbf{P}_{60} & \mathbf{P}_{61} & \mathbf{P}_{62} & \mathbf{P}_{63} & \mathbf{P}_{64} & \mathbf{P}_{65} & \mathbf{P}_{66} & \mathbf{P}_{67} \\
\mathbf{P}_{70} & \mathbf{P}_{71} & \mathbf{P}_{72} & \mathbf{P}_{73} & \mathbf{P}_{74} & \mathbf{P}_{75} & \mathbf{P}_{76} & \mathbf{P}_{77}
\end{pmatrix}
$$

$$
\left(\begin{matrix}
-117649/720 & 117649/180 & -386561/360 & 16807/18 \\
823543/720 & -352947/80 & 991613/144 & -88837/16 \\
-823543/240 & 1529437/120 & -151263/8 & 170471/12 \\
823543/144 & -2941225/144 & 4151329/144 & -2926819/144 \\
823543/144 & 117649/6 & -1899191/72 & 52822/3 \\
823543/240 & -2705927/240 & 1159683/80 & -444185/48 \\
-823543/720 & 1294139/360 & -319333/72 & 98441/36 \\
117649/720 & -117649/240 & 84035/144 & -16807/48
\end{matrix}\right.
$$

$$
\left.\begin{matrix}
-331681/720 & 22981/7180 & -363/20 & 1 \\
109417/20 & -10927/20 & 49 & 0 \\
-1347647/240 & 43071/40 & -147/2 & 0 \\
133427/18 & -46501/36 & 245/3 & 0 \\
-872935/144 & 2009/2 & -245/4 & 0 \\
45962/15 & -9849/20 & 147/5 & 0 \\
-634207/720 & 49931/360 & -49/6 & 0 \\
9947/90 & -343/20 & 1 & 0
\end{matrix}\right)
\begin{pmatrix} u^7 \\ u^6 \\ u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)
$$

Que es la ecuación de la superficie polinomial biséptima que pasa por una red de 8x8 puntos dados.

3.1.13.1.-NUEVA FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BISÉPTIMA OUE PASA POR UNA RED DE 8X8 PUNTOS DADOS

Teniamos que la ecuación de la superficie era (4) de 3.1.13

Efectuando los productos matriciales obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,u) = {} & ak\mathbf{P}_{00} + bk\mathbf{P}_{10} + ck\mathbf{P}_{20} + dk\mathbf{P}_{30} + ek\mathbf{P}_{40} + fk\mathbf{P}_{50} + gk\mathbf{P}_{60} + hk\mathbf{P}_{70} + \\
& al\mathbf{P}_{01} + bl\mathbf{P}_{11} + cl\mathbf{P}_{21} + dl\mathbf{P}_{31} + el\mathbf{P}_{41} + fl\mathbf{P}_{51} + gl\mathbf{P}_{61} + hl\mathbf{P}_{71} + \\
& am\mathbf{P}_{02} + bm\mathbf{P}_{12} + cm\mathbf{P}_{22} + dm\mathbf{P}_{32} + em\mathbf{P}_{42} + fm\mathbf{P}_{52} + gm\mathbf{P}_{62} + hm\mathbf{P}_{72} + \\
& ap\mathbf{P}_{03} + bp\mathbf{P}_{13} + cp\mathbf{P}_{23} + dp\mathbf{P}_{33} + ep\mathbf{P}_{43} + fp\mathbf{P}_{53} + gp\mathbf{P}_{63} + hp\mathbf{P}_{73} + \\
& ar\mathbf{P}_{04} + br\mathbf{P}_{14} + cr\mathbf{P}_{24} + dr\mathbf{P}_{34} + er\mathbf{P}_{44} + fr\mathbf{P}_{54} + gr\mathbf{P}_{64} + hr\mathbf{P}_{74} + \\
& as\mathbf{P}_{05} + bs\mathbf{P}_{15} + cs\mathbf{P}_{25} + ds\mathbf{P}_{35} + es\mathbf{P}_{45} + fs\mathbf{P}_{55} + gs\mathbf{P}_{65} + hs\mathbf{P}_{75} + \\
& av\mathbf{P}_{06} + bv\mathbf{P}_{16} + cv\mathbf{P}_{26} + dv\mathbf{P}_{36} + ev\mathbf{P}_{46} + fv\mathbf{P}_{56} + gv\mathbf{P}_{66} + hv\mathbf{P}_{76} + \\
& aw\mathbf{P}_{07} + bw\mathbf{P}_{17} + cw\mathbf{P}_{27} + dw\mathbf{P}_{37} + ew\mathbf{P}_{47} + fw\mathbf{P}_{57} + gw\mathbf{P}_{67} + hw\mathbf{P}_{77}
\end{aligned}
$$

Siendo:

$$
\begin{aligned}
a &= -117649/720t^7 + 117649/180t^6 - 386561/360t^5 + 16807/18t^4 \\
&\quad - 331681/720t^3 + 22981/180t^2 - 363/20t + 1 \\
b &= 823543/720t^7 - 352947/80t^6 + 991613/144t^5 - 88837/1t^4 \\
&\quad + 109417/20t^3 - 10927/20t^2 + 49t \\
c &= -823543/240t^7 + 1529437/120t^6 - 151263/8t^5 + 170471/12t^4 \\
&\quad - 1347647/240t^3 + 43071/40t^2 - 147/2t \\
d &= 823543/144t^7 - 2941225/144t^6 + 4151329/144t^5 - 2926819/144t^4 \\
&\quad + 133427/18t^3 - 46501/36t^2 + 245t \\
e &= 823543/144t^7 + 117649/6t^6 - 1899191/72t^5 + 52822/3t^4 \\
&\quad - 872935/144t^3 + 2009/2t^2 - 245/4t \\
f &= 823543/240t^7 - 2705927/240t^6 + 1159683/80t^5 - 444185/48t^4 \\
&\quad + 45962/15t^3 - 9849/20t^2 + 147/5t \\
g &= -823543/720t^7 + 1294139/360t^6 - 319333/72t^5 + 98441/36t^4 \\
&\quad - 634207/720t^3 + 49931/360t^2 - 49/6t \\
h &= 117649/720t^7 - 117649/240t^6 + 84035/144t^5 - 16807/48t^4 \\
&\quad + 9947/90t^3 - 343/20t^2 + t \\
k &= -117649/720u^7 + 117649/180u^6 - 386561/360u^5 + 16807/18u^4 \qquad (2) \\
&\quad - 331681/720u^3 + 22981/180u^2 - 363/20u + 1 \\
l &= 823543/720u^7 - 352947/80u^6 + 991613/144u^5 - 88837/1u^4 \\
&\quad + 109417/20u^3 - 10927/20u^2 + 49u \\
m &= -823543/240u^7 + 1529437/120u^6 - 151263/8u^5 + 170471/12u^4 \\
&\quad - 1347647/240u^3 + 43071/40u^2 - 147/2u \\
p &= 823543/144u^7 - 2941225/144u^6 + 4151329/144u^5 - 2926819/144u^4 \\
&\quad + 133427/18u^3 - 46501/36u^2 + 245u \\
r &= 823543/144u^7 + 117649/6u^6 - 1899191/72u^5 + 52822/3u^4 \\
&\quad - 872935/144u^3 + 2009/2u^2 - 245/4u \\
s &= 823543/240u^7 - 2705927/240u^6 + 1159683/80u^5 - 444185/48u^4 \\
&\quad + 45962/15u^3 - 9849/20u^2 + 147/5u \\
v &= -823543/720u^7 + 1294139/360u^6 - 319333/72u^5 + 98441/36u^4 \\
&\quad - 634207/720u^3 + 49931/360u^2 - 49/6u \\
w &= 117649/720u^7 - 117649/240u^6 + 84035/144u^5 - 16807/48u^4 \\
&\quad + 9947/90u^3 - 343/20u^2 + u
\end{aligned}
$$

Cada uno de los elementos tiene las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) &= (x, y, z) \\ \mathbf{P_{ij}} &= (xij, yij, zij) \end{aligned} \qquad (3)$$

Si se llevan estos valores a (1) se tiene:

$$\begin{aligned}
&(x, y, z) = \\
&ak(x00, y00, z00) + bk(x10, y10, z10) + ck(x20, y20, z20) + \\
&dk(x30, y30, z30) + ek(x40, y40, z40) + fk(x50, y50, z530) + \\
&gk(x60, y60, z60) + hk(x70, y70, z70) + \\
&al(x01, y01, z01) + bl(x11, y11, z11) + cl(x21, y21, z21) + \\
&dl(x31, y31, z31) + el(x41, y41, z41) + fl(x51, y51, z51) + \\
&gl(x61, y61, z61) + hl(x71, y71, z71) + \\
&am(x02, y02, z02) + bm(x12, y12, z12) + cm(x22, y22, z22) + \\
&dm(x32, y32, z32) + em(x42, y42, z42) + fm(x52, y52, z52) + \\
&gm(x62, y62, z62) + hm(x72, y72, z72) + \\
&ap(x03, y03, z03) + bp(x13, y13, z13) + cp(x23, y23, z23) + \\
&dp(x33, y33, z33) + ep(x43, y43, z43) + fp(x53, y53, z53) + \qquad (4) \\
&gp(x63, y63, z63) + hp(x73, y73, z73) + \\
&ar(x04, y04, z04) + br(x14, y14, z14) + cr(x24, y24, z24) + \\
&dr(x34, y34, z34) + er(x44, y44, z44) + fr(x54, y54, z54) + \\
&gr(x64, y64, z64) + hr(x74, y74, z74) + \\
&as(x05, y05, z05) + bs(x15, y15, z15) + cs(x25, y25, z25) + \\
&ds(x35, y35, z35) + es(x45, y45, z45) + fs(x55, y55, z55) + \\
&gs(x65, y65, z65) + hs(x75, y75, z75) + \\
&av(x06, y06, z06) + bv(x16, y16, z16) + cv(x26, y26, z26) + \\
&dv(x36, y36, z36) + ev(x46, y46, z46) + fv(x56, y56, z56) + \\
&gv(x66, y66, z66) + hv(x76, y76, z76) + \\
&aw(x07, y07, z07) + bw(x17, y17, z17) + cw(x27, y27, z27) + \\
&dw(x37, y37, z37) + ew(x47, y47, z47) + fw(x57, y57, z57) + \\
&gw(x67, y67, z67) + hw(x77, y77, z77)
\end{aligned}$$

Desglosando por componentes se obtendrían las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial biséptima que interpola la red de 8x8 puntos dados:

$$
\begin{aligned}
&x= \\
&akx00+bkx10+ckx20+dkx30+ekx40+fkx50+gkx60+hkx70+ \\
&alx01+blx11+clx21+dlx31+elx41+flx51+glx61+hlx71+ \\
&amx02+bmx12+cmx22+dmx32+emx42+fmx52+gmx62+hmx72+ \\
&apx03+bpx13+cpx23+dpx33+epx43+fpx53+gpx63+hpx73+ \\
&arx04+brx14+crx24+drx34+erx44+frx54+grx64+hrx74+ \\
&asx05+bsx15+csx25+dsx35+esx45+fsx55+gsx65+hsx75+ \\
&avx06+bvx16+cvx26+dvx36+evx46+fvx56+gvx66+hvx76+ \\
&awx07+bwx17+cwx27+dwx37+ewx47+fwx57+gwx67+hwx77 \\
&y= \\
&aky00+bky10+cky20+dky30+eky40+fky50+gky60+hky70+ \\
&aly01+bly11+cly21+dly31+ely41+fly51+gly61+hly71+ \\
&amy02+bmy12+cmy22+dmy32+emy42+fmy52+gmy62+hmy72+ \\
&apy03+bpy13+cpy23+dpy33+epy43+fpy53+gpy63+hpy73+ \qquad (5) \\
&ary04+bry14+cry24+dry34+ery44+fry54+gry64+hry74+ \\
&asy05+bsy15+csy25+dsy35+esy45+fsy55+gsy65+hsy75+ \\
&avy06+bvy16+cvy26+dvy36+evy46+fvy56+gvy66+hvy76+ \\
&awy07+bwy17+cwy27+dwy37+ewy47+fwy57+gwy67+hwy77 \\
&z= \\
&akz00+bkz10+ckz20+dkz30+ekz40+fkz50+gkz60+hkz70+ \\
&alz01+blz11+clz21+dlz31+elz41+flz51+glz61+hlz71+ \\
&amz02+bmz12+cmz22+dmz32+emz42+fmz52+gmz62+hmz72+ \\
&apz03+bpz13+cpz23+dpz33+epz43+fpz53+gpz63+hpz73+ \\
&arz04+brz14+crz24+drz34+erz44+frz54+grz64+hrz74+ \\
&asz05+bsz15+csz25+dsz35+esz45+fsz55+gsz65+hsz75+ \\
&avz06+bvz16+cvz26+dvz36+evz46+fvz56+gvz66+hvz76+ \\
&awz07+bwz17+cwz27+dwz37+ewz47+fwz57+gwz67+hwz77
\end{aligned}
$$

3.1.14.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BIOCTAVA OUE PASA POR UNA RED DE 9X9 PUNTOS DADOS

Desarrollemos previamente la ecuación de la curva polinomial que pasa por los nueve puntos $\mathbf{P}_0$ $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ $\mathbf{P}_3$ $\mathbf{P}_4$ $\mathbf{P}_5$ $\mathbf{P}_6$ $\mathbf{P}_7$ $\mathbf{P}_8$ (figura 3.1.14.-l).

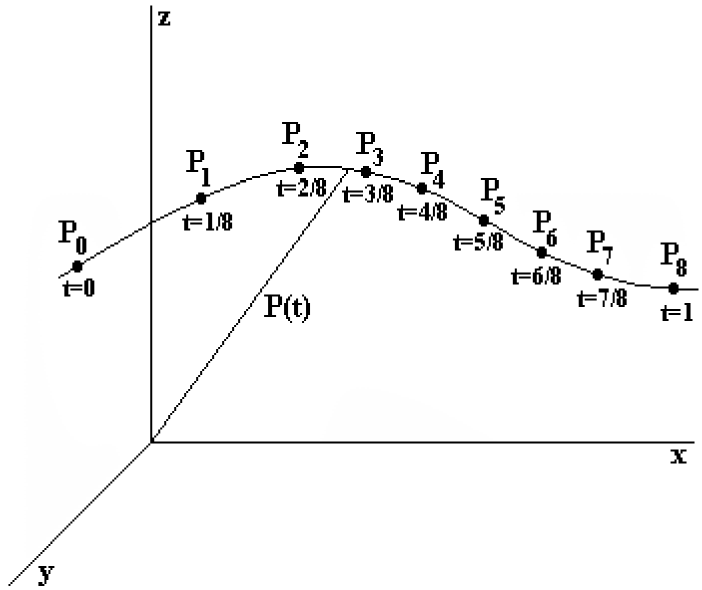


Figura 3.1.14.-l. Curva polinomial que pasa por nueve puntos dados

Esta tendría la forma:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{8} f_i(t)\mathbf{P}_{\mathrm{i}} \qquad (1)$$

8

Donde las $f_i(t)$ tendrán las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} f_i(t_j) &= 1 \qquad si \quad i = j \\ f_i(t_j) &= 0 \qquad si \quad i \neq j \end{aligned} \qquad (2)$$

Siendo:

$$t_i = i/8 \qquad (3)$$

Calculando los $f_i(t)$, substituyendo en (1), poniendo la ecuación en forma matricial y efectuando el producto cartesiano de dicha ecuación por sí misma (figura 3.1.14.-2) llegarnos :

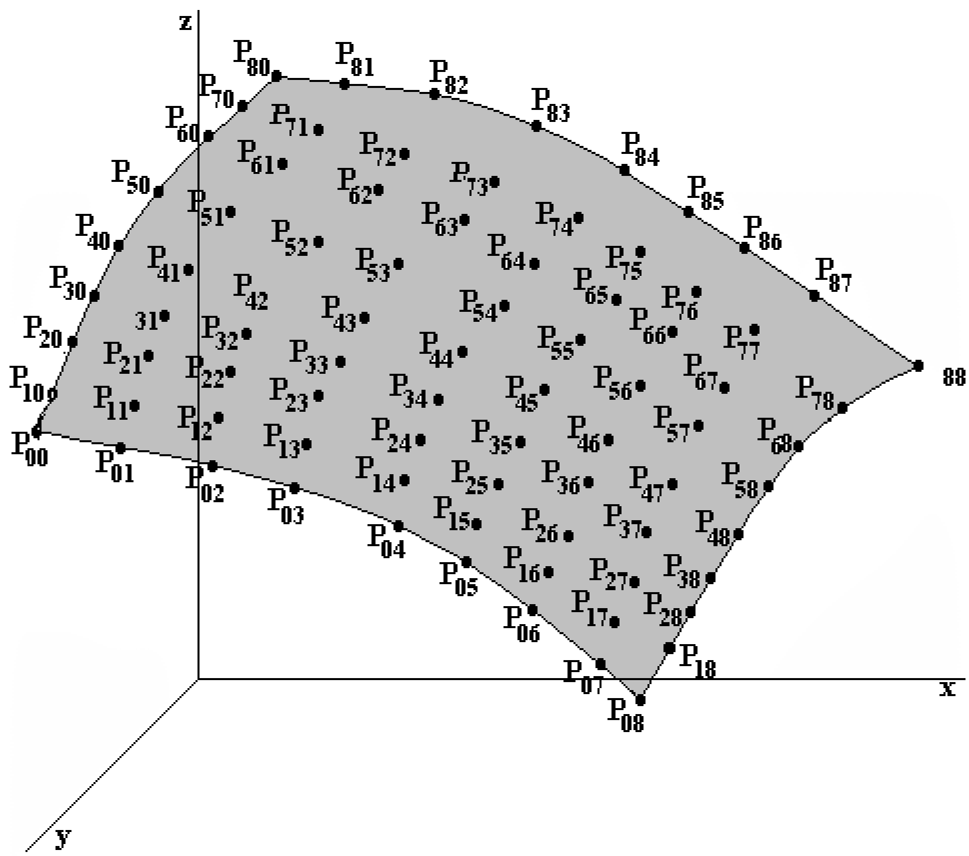


Figura 3.1.14.-2. Superficie polinomial que pasa por una red de 9x9 puntos dados

$$\mathbf{P}(t,u)=\begin{pmatrix} t^8 & t^7 & t^6 & t^5 & t^4 & t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
131072/315 & -65536/35 & 532248/15 & -18432/5 & 34208/15 & -4272/5 & 59062/315 & -761/35 & 1 \\
-1048576/315 & 131072/9 & -1196032/45 & 235520/9 & -673792/45 & 44672/9 & -30784/3 & 64 & 0 \\
524288/45 & -2228224/45 & 3915776/45 & -733184/9 & 1956992/45 & -587296/45 & 9936/5/3 & -112 & 0 \\
-1048576/45 & 1441792/15 & -2441216/15 & 145408 & -1097728/15 & 102016/5 & -128192/45 & 448/3 & 0 \\
262144/9 & -1048576/9 & 1712128/9 & -1466368/9 & 703552/9 & -186496/9 & 2764 & -140 & 0 \\
-1048576/45 & 4063232/45 & -6406144/45 & 5285888/45 & -2443264/45 & 626048/45 & -9024/5 & 448/5 & 0 \\
524288/45 & -131072/3 & 999424/15 & -53248 & 358784/15 & -5984 & 34288/45 & -112/3 & 0 \\
-1048576/315 & 3801088/315 & -802816/45 & 124928/9 & -274432/45 & 67456/45 & -6592/35 & 64/7 & 0 \\
131072/315 & -65536/45 & 94208/45 & -14336/9 & 30944/45 & -7504/45 & 726/35 & -1 & 0
\end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{04} & \mathbf{P}_{05} & \mathbf{P}_{06} & \mathbf{P}_{07} & \mathbf{P}_{08} \\
\mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} & \mathbf{P}_{15} & \mathbf{P}_{16} & \mathbf{P}_{17} & \mathbf{P}_{18} \\
\mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} & \mathbf{P}_{25} & \mathbf{P}_{26} & \mathbf{P}_{27} & \mathbf{P}_{28} \\
\mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} & \mathbf{P}_{35} & \mathbf{P}_{36} & \mathbf{P}_{37} & \mathbf{P}_{38} \\
\mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} & \mathbf{P}_{45} & \mathbf{P}_{46} & \mathbf{P}_{47} & \mathbf{P}_{48} \\
\mathbf{P}_{50} & \mathbf{P}_{51} & \mathbf{P}_{52} & \mathbf{P}_{53} & \mathbf{P}_{54} & \mathbf{P}_{55} & \mathbf{P}_{56} & \mathbf{P}_{57} & \mathbf{P}_{58} \\
\mathbf{P}_{60} & \mathbf{P}_{61} & \mathbf{P}_{62} & \mathbf{P}_{63} & \mathbf{P}_{64} & \mathbf{P}_{65} & \mathbf{P}_{66} & \mathbf{P}_{67} & \mathbf{P}_{68} \\
\mathbf{P}_{70} & \mathbf{P}_{71} & \mathbf{P}_{72} & \mathbf{P}_{73} & \mathbf{P}_{74} & \mathbf{P}_{75} & \mathbf{P}_{76} & \mathbf{P}_{77} & \mathbf{P}_{78} \\
\mathbf{P}_{80} & \mathbf{P}_{81} & \mathbf{P}_{82} & \mathbf{P}_{83} & \mathbf{P}_{84} & \mathbf{P}_{85} & \mathbf{P}_{86} & \mathbf{P}_{87} & \mathbf{P}_{88}
\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 131072/315 & -65536/35 & 532248/15 & -18432/5 & 34208/15 \\ -1048576/315 & 131072/9 & -1196032/45 & 235520/9 & -673792/45 \\ 524288/45 & -2228224/45 & 3915776/45 & -733184/9 & 1956992/45 \\ -1048576/45 & 1441792/15 & -2441216/15 & 145408 & -1097728/15 \\ 262144/9 & -1048576/9 & 1712128/9 & -1466368/9 & 703552/9 \\ -1048576/45 & 4063232/45 & -6406144/45 & 5285888/45 & -2443264/45 \\ 524288/45 & -131072/3 & 999424/15 & -53248 & 358784/15 \\ -1048576/315 & 3801088/315 & -802816/45 & 124928/9 & -274432/45 \\ 131072/315 & -65536/45 & 94208/45 & -14336/9 & 30944/45 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} -4272/5 & 59062/315 & -761/35 & 1 \\ 44672/9 & -30784/3 & 64 & 0 \\ -587296/45 & 9936/5/3 & -112 & 0 \\ 102016/5 & -128192/45 & 448/3 & 0 \\ -186496/9 & 2764 & -140 & 0 \\ 626048/45 & -9024/5 & 448/5 & 0 \\ -5984 & 34288/45 & -112/3 & 0 \\ 67456/45 & -6592/35 & 64/7 & 0 \\ -7504/45 & 726/35 & -1 & 0 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} u^8 \\ u^7 \\ u^6 \\ u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Que es la ecuación de la superficie polinomial bioctava que interpola la red de 9x9 puntos dados.

3.1.14.1.-NUEVA FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BIOCTAVA QUE PASA POR UNA RED DE 9X9 PUNTOS DADOS

Teniamos que la ecuación de la superficie era (4) de 3.1.14.

Efectuando los productos matriciales se obtendria:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t,u) = \; & al\mathbf{P}_{00} + bl\mathbf{P}_{10} + cl\mathbf{P}_{20} + dl\mathbf{P}_{30} + el\mathbf{P}_{40} + fl\mathbf{P}_{50} + gl\mathbf{P}_{60} + hl\mathbf{P}_{70} + kl\mathbf{P}_{80} + \\ & am\mathbf{P}_{01} + bm\mathbf{P}_{11} + cm\mathbf{P}_{21} + dm\mathbf{P}_{31} + em\mathbf{P}_{41} + fm\mathbf{P}_{51} + gm\mathbf{P}_{61} + hm\mathbf{P}_{71} + km\mathbf{P}_{81} + \\ & ap\mathbf{P}_{02} + bp\mathbf{P}_{12} + cp\mathbf{P}_{22} + dp\mathbf{P}_{32} + ep\mathbf{P}_{42} + fp\mathbf{P}_{52} + gp\mathbf{P}_{62} + hp\mathbf{P}_{72} + kp\mathbf{P}_{82} + \\ & aq\mathbf{P}_{03} + bq\mathbf{P}_{13} + cq\mathbf{P}_{23} + dq\mathbf{P}_{33} + eq\mathbf{P}_{43} + fq\mathbf{P}_{53} + gq\mathbf{P}_{63} + hq\mathbf{P}_{73} + kq\mathbf{P}_{83} + \\ & ar\mathbf{P}_{04} + br\mathbf{P}_{14} + cr\mathbf{P}_{24} + dr\mathbf{P}_{34} + er\mathbf{P}_{44} + fr\mathbf{P}_{54} + gr\mathbf{P}_{64} + hr\mathbf{P}_{74} + kr\mathbf{P}_{84} + \\ & as\mathbf{P}_{05} + bs\mathbf{P}_{15} + cs\mathbf{P}_{25} + ds\mathbf{P}_{35} + es\mathbf{P}_{45} + fs\mathbf{P}_{55} + gs\mathbf{P}_{65} + hs\mathbf{P}_{75} + ks\mathbf{P}_{85} + \\ & at\mathbf{P}_{06} + bt\mathbf{P}_{16} + ct\mathbf{P}_{26} + dt\mathbf{P}_{36} + et\mathbf{P}_{46} + ft\mathbf{P}_{56} + gt\mathbf{P}_{66} + ht\mathbf{P}_{76} + kt\mathbf{P}_{86} + \\ & av\mathbf{P}_{07} + bv\mathbf{P}_{17} + cv\mathbf{P}_{27} + dv\mathbf{P}_{37} + ev\mathbf{P}_{47} + fv\mathbf{P}_{57} + gv\mathbf{P}_{67} + hv\mathbf{P}_{77}kv\mathbf{P}_{87} + \\ & aw\mathbf{P}_{08} + bw\mathbf{P}_{18} + cw\mathbf{P}_{28} + dw\mathbf{P}_{38} + ew\mathbf{P}_{48} + fw\mathbf{P}_{58} + gw\mathbf{P}_{68} + hw\mathbf{P}_{78} + kw\mathbf{P}_{88}\end{aligned} \tag{1}$$

Siendo :

$$a = 131072/315t^8 - 65536/35t^7 + 532248/15t^6 - 18432/5t^5 + 34208/15t^4$$
$$- 4272/5t^3 + 59062/315t^2 - 761/35t + 1$$
$$b = -1048576/315t^8 + 131072/9t^7 - 1196032/45t^6 + 235520/9t^5 - 673792/45t^4$$
$$+ 44672/9t^3 - 30784/3t^2 + 64t$$
$$c = 524288/45t^8 - 2228224/45t^7 + 3915776/45t^6 - 733184/9t^5 + 1956992/45t^4$$
$$- 587296/45t^3 + 9936/5t^2 - 112t$$
$$d = -1048576/45t^8 + 1441792/15t^7 - 2441216/15t^6 + 145408t^5 - 1097728/15t^4$$
$$+ 102016/5t^3 - 128192/45t^2 + 448/3t$$
$$e = 262144/9t^8 - 1048576/9t^7 + 1712128/9t^6 - 1466368/9t^5 + 703552/9t^4$$
$$- 186496/9t^3 + 2764t^2 - 140t$$
$$f = -1048576/45t^8 + 4063232/45t^7 - 6406144/45t^6 + 5285888/45t^5 - 2443264/45t^4$$
$$+ 626048/45t^3 - 9024/5t^2 + 448/5t$$
$$g = 524288/45t^8 - 131072/3t^7 + 999424/15t^6 - 53248t^5 + 358784/15t^4$$
$$- 5984t^3 + 34288/45t^2 - 112/3t$$
$$h = -1048576/315t^8 + 3801088/315t^7 - 802816/45t^6 + 124928/9t^5 - 274432/45t^4$$
$$+ 67456/45t^3 - 6592/35t^2 + 64/7t$$

$$k = 131072/315t^8 - 65536/45t^7 + 94208/45t^6 - 14336/9t^5 + 30944/45t^4 \qquad (2)$$
$$- 7504/45t^3 + 726/35t^2 - t$$
$$l = 131072/315u^8 - 65536/35u^7 + 532248/15u^6 - 18432/5u^5 + 34208/15u^4$$
$$- 4272/5u^3 + 59062/315u^2 - 761/35u + 1$$
$$m = -1048576/315u^8 + 131072/9u^7 - 1196032/45u^6 + 235520/9u^5 - 673792/45u^4$$
$$+ 44672/9u^3 - 30784/3u^2 + 64u$$
$$p = 524288/45u^8 - 2228224/45u^7 + 3915776/45u^6 - 733184/9u^5 + 1956992/45u^4$$
$$- 587296/45u^3 + 9936/5u^2 - 112u$$
$$q = -1048576/45u^8 + 1441792/15u^7 - 2441216/15u^6 + 145408u^5 - 1097728/15u^4$$
$$+ 102016/5u^3 - 128192/45u^2 + 448/3u$$
$$r = 262144/9u^8 - 1048576/9u^7 + 1712128/9u^6 - 1466368/9u^5 + 703552/9u^4$$
$$- 186496/9u^3 + 2764u^2 - 140u$$
$$s = -1048576/45u^8 + 4063232/45u^7 - 6406144/45u^6 + 5285888/45u^5 - 2443264/45u^4$$
$$+ 626048/45u^3 - 9024/5u^2 + 448/5u$$
$$t = 524288/45u^8 - 131072/3u^7 + 999424/15u^6 - 53248u^5 + 358784/15u^4$$
$$- 5984u^3 + 34288/45u^2 - 112/3u$$
$$v = -1048576/315u^8 + 3801088/315u^7 - 802816/45u^6 + 124928/9u^5 - 274432/45u^4$$
$$+ 67456/45u^3 - 6592/35u^2 + 64/7u$$
$$w = 131072/315u^8 - 65536/45u^7 + 94208/45u^6 - 14336/9u^5 + 30944/45u^4$$
$$- 7504/45u^3 + 726/35u^2 - u$$

Cada uno de los vectores tiene las siguientes componentes:

$$\mathbf{P}(t,u) = (x, y, z)$$
$$\mathbf{P}_{\mathbf{ij}} = (xij, yij, zij) \qquad (3)$$

Si se llevan estos valores a (1) se tendría:

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) = {} & al(x00,y00,z00) + bl(x10,y10,z10) + cl(x20,y20,z20) + \\
& dl(x30,y30,z30) + el(x40,y40,z40) + fl(x50,y50,z50) + \\
& gl(x60,y60,z60) + hl(x70,y70,z70) + kl(x80,y80,z80) + \\
& am(x01,y01,z01) + bm(x11,y11,z11) + cm(x21,y21,z21) + \\
& dm(x31,y31,z31) + em(x41,y41,z41) + fm(x51,y51,z51) + \\
& gm(x61,y61,z61) + hm(x71,y71,z71) + km(x81,y81,z81) + \\
& ap(x02,y02,z02) + bp(x12,y12,z12) + cp(x22,y22,z22) + \\
& dp(x32,y32,z32) + ep(x42,y42,z42) + fp(x52,y52,z52) + \\
& gp(x62,y62,z62) + hp(x72,y72,z72) + kp(x82,y82,z82) + \\
& aq(x03,y03,z03) + bq(x13,y13,z13) + cq(x23,y23,z23) + \\
& dq(x33,y33,z33) + eq(x43,y43,z43) + fq(x53,y53,z53) + \\
& gq(x63,y63,z63) + hq(x73,y73,z73) + kq(x83,y83,z83) + \\
& ar(x04,y04,z04) + br(x14,y14,z14) + cr(x24,y24,z24) + \\
& dr(x34,y34,z34) + er(x44,y44,z44) + fr(x54,y54,z54) + \qquad (4) \\
& gr(x64,y64,z64) + hr(x74,y74,z74) + kr(x84,y84,z84) + \\
& as(x05,y05,z05) + bs(x15,y15,z15) + cs(x25,y25,z25) + \\
& ds(x35,y35,z35) + es(x45,y45,z45) + fs(x55,y55,z55) + \\
& gs(x65,y65,z65) + hs(x75,y75,z75) + ks(x85,y85,z85) + \\
& at(x06,y06,z06) + bt(x16,y16,z16) + ct(x26,y26,z26) + \\
& dt(x36,y36,z36) + et(x46,y46,z46) + ft(x56,y56,z56) + \\
& gt(x66,y66,z66) + ht(x76,y76,z76) + kt(x86,y86,z86) + \\
& av(x07,y07,z07) + bv(x17,y17,z17) + cv(x27,y27,z27) + \\
& dv(x37,y37,z37) + ev(x47,y47,z47) + fv(x57,y57,z57) + \\
& gv(x67,y67,z67) + hv(x77,y77,z77) + kv(x87,y87,z87) + \\
& aw(x08,y08,z08) + bw(x18,y18,z18) + cw(x28,y28,z28) + \\
& dw(x38,y38,z38) + ew(x48,y48,z48) + fw(x58,y58,z58) + \\
& gw(x68,y68,z68) + hw(x78,y78,z78) + kw(x88,y88,z88)
\end{aligned}
$$

Desglosando por componentes se obtendrían las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial bioctava que interpola la red de 9x9 puntos dados:

$$
\begin{aligned}
x = {} & alx00 + blx10 + clx20 + dlx30 + elx40 + flx50 + glx60 + hlx70 + klx80 + \\
& amx01 + bmx11 + cmx21 + dmx31 + emx41 + fmx51 + gmx61 + hmx71 + kmx81 + \\
& apx02 + bpx12 + cpx22 + dpx32 + epx42 + fpx52 + gpx62 + hpx72 + kpx82 + \\
& aqx03 + bqx13 + cqx23 + dqx33 + eqx43 + fqx53 + gqx63 + hqx73 + kqx83 + \\
& arx04 + brx14 + crx24 + drx34 + erx44 + frx54 + grx64 + hrx74 + krx84 + \\
& asx05 + bsx15 + csx25 + dsx35 + esx45 + fsx55 + gsx65 + hsx75 + ksx85 + \\
& atx06 + btx16 + ctx26 + dtx36 + etx46 + ftx56 + gtx66 + htx76 + ktx86 + \\
& avx07 + bvx17 + cvx27 + dvx37 + evx47 + fvx57 + gvx67 + hvx77 + kvx87 + \\
& awx08 + bwx18 + cwx28 + dwx38 + ewx48 + fwx58 + gwx68 + hwx78 + kwx88 \\
y = {} & aly00 + bly10 + cly20 + dly30 + ely40 + fly50 + gly60 + hly70 + kly80 + \\
& amy01 + bmy11 + cmy21 + dmy31 + emy41 + fmy51 + gmy61 + hmy71 + kmy81 + \\
& apy02 + bpy12 + cpy22 + dpy32 + epy42 + fpy52 + gpy62 + hpy72 + kpy82 + \\
& aqy03 + bqy13 + cqy23 + dqy33 + eqy43 + fqy53 + gqy63 + hqy73 + kqy83 + \\
& ary04 + bry14 + cry24 + dry34 + ery44 + fry54 + gry64 + hry74 + kry84 + \\
& asy05 + bsy15 + csy25 + dsy35 + esy45 + fsy55 + gsy65 + hsy75 + ksy85 + \\
& aty06 + bty16 + cty26 + dty36 + ety46 + fty56 + gty66 + hty76 + kty86 + \\
& avy07 + bvy17 + cvy27 + dvy37 + evy47 + fvy57 + gvy67 + hvy77 + kvy87 + \\
& awy08 + bwy18 + cwy28 + dwy38 + ewy48 + fwy58 + gwy68 + hwy78 + kwy88 \\
z = {} & alz00 + blz10 + clz20 + dlz30 + elz40 + flz50 + glz60 + hlz70 + klz80 + \\
& amz01 + bmz11 + cmz21 + dmz31 + emz41 + fmz51 + gmz61 + hmz71 + kmz81 + \\
& apz02 + bpz12 + cpz22 + dpz32 + epz42 + fpz52 + gpz62 + hpz72 + kpz82 + \\
& aqz03 + bqz13 + cqz23 + dqz33 + eqz43 + fqz53 + gqz63 + hqz73 + kqz83 + \\
& arz04 + brz14 + crz24 + drz34 + erz44 + frz54 + grz64 + hrz74 + krz84 + \\
& asz05 + bsz15 + csz25 + dsz35 + esz45 + fsz55 + gsz65 + hsz75 + ksz85 + \\
& atz06 + btz16 + ctz26 + dtz36 + etz46 + ftz56 + gtz66 + htz76 + ktz86 + \\
& avz07 + bvz17 + cvz27 + dvz37 + evz47 + fvz57 + gvz67 + hvz77 + kvz87 + \\
& awz08 + bwz18 + cwz28 + dwz38 + ewz48 + fwz58 + gwz68 + hwz78 + kwz88
\end{aligned}
\tag{5}
$$

3.1.15.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BINOVENA QUE PASA POR UNA RED DE 10X10 PUNTOS DADOS

Desarrollemos previamente la ecuación de la curva polinomial que pasa por los nueve puntos $\mathbf{P}_0$ $\mathbf{P}_1$ $\mathbf{P}_2$ $\mathbf{P}_3$ $\mathbf{P}_4$ $\mathbf{P}_5$ $\mathbf{P}_6$ $\mathbf{P}_7$ $\mathbf{P}_8$ $\mathbf{P}_9$ (figura 3.1.15.-1).

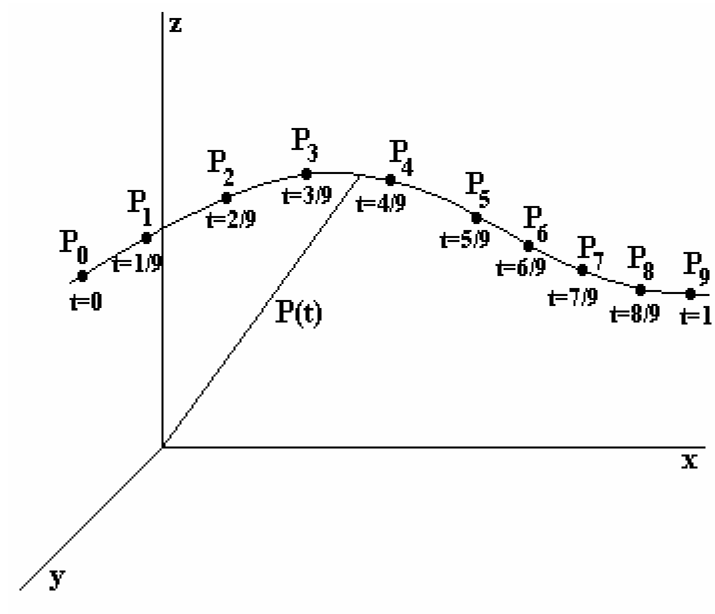


Figura 3.1.15.-1ª. Curva polinomial que pasa por diez puntos dados

Esta tendría la forma:

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^{9} f_i(t)\mathbf{P}_\mathrm{i} \qquad (1)$$

Donde las $f_i(t)$ tendrán las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} f_i(t_j) &= 1 \qquad si \quad i = j \\ f_i(t_j) &= 0 \qquad si \quad i \neq j \end{aligned} \qquad (2)$$

Siendo:

$$t_i = i/9 \qquad (3)$$

Calculando los $f_i(t)$, llevándolas a (1), poniendo esta ecuación en forma matricial y efectuando el producto cartesiano de ella por sí misma (figura 3.1.15.- 2) llegamos:

$$
\mathbf{P}(t,u) =
\begin{pmatrix}
-4782969/4480 & 4782969/896 & -5137263/448 & 885735/64 & -6589431/640 & 623295/128 & -40707/28 & 58635/224 & -7129/280 & 1 \\
43046721/4480 & -52612659/1120 & 31355019/320 & -4546773/40 & 51221727/640 & -5589243/160 & 10307331/1120 & -373329/280 & 81 & 0 \\
-43046721/1120 & 205667667/1120 & -3720087/10 & 33244587/80 & -44529507/160 & 18152829/160 & -15190173/560 & 475389/140 & -162 & 0 \\
14348907/160 & -33480783/80 & 16474671/20 & -71035947/80 & 91020753/160 & -8776431/40 & 1959363/40 & -56601/10 & 252 & 0 \\
-43046721/320 & 196101729/320 & -187598673/160 & 195629337/160 & -241241409/320 & 89119521/320 & -4752351/80 & 526419/80 & -567/2 & 0 \\
43046721/320 & -4782969/8 & 35606547/32 & -18009945/16 & 215023653/320 & -3844017/16 & 795339/16 & -21465/4 & 1134/5 & 0 \\
-14348907/160 & 62178597/160 & -28166373/40 & 55447011/80 & -64448703/160 & 22480173/160 & -2276289/80 & 60381/20 & -126 & 0 \\
43046721/1120 & -90876411/560 & 80247591/280 & -22025277/80 & 25043337/160 & -2142531/40 & 2989629/280 & -78327/70 & 324/7 & 0 \\
-43046721/4480 & 176969853/4480 & -21789081/320 & 20490003/320 & -22878207/640 & 7712091/640 & -1328967/560 & 275967/1120 & -81/8 & 0 \\
4782969/4480 & -4782969/1120 & 2302911/320 & -531441/80 & 2337903/640 & -194643/160 & 265779/1120 & -6849/280 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{04} & \mathbf{P}_{05} & \mathbf{P}_{06} & \mathbf{P}_{07} & \mathbf{P}_{08} & \mathbf{P}_{09} \\
\mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} & \mathbf{P}_{15} & \mathbf{P}_{16} & \mathbf{P}_{17} & \mathbf{P}_{18} & \mathbf{P}_{19} \\
\mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} & \mathbf{P}_{25} & \mathbf{P}_{26} & \mathbf{P}_{27} & \mathbf{P}_{28} & \mathbf{P}_{29} \\
\mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} & \mathbf{P}_{35} & \mathbf{P}_{36} & \mathbf{P}_{37} & \mathbf{P}_{38} & \mathbf{P}_{39} \\
\mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} & \mathbf{P}_{45} & \mathbf{P}_{46} & \mathbf{P}_{47} & \mathbf{P}_{48} & \mathbf{P}_{49} \\
\mathbf{P}_{50} & \mathbf{P}_{51} & \mathbf{P}_{52} & \mathbf{P}_{53} & \mathbf{P}_{54} & \mathbf{P}_{55} & \mathbf{P}_{56} & \mathbf{P}_{57} & \mathbf{P}_{58} & \mathbf{P}_{59} \\
\mathbf{P}_{60} & \mathbf{P}_{61} & \mathbf{P}_{62} & \mathbf{P}_{63} & \mathbf{P}_{64} & \mathbf{P}_{65} & \mathbf{P}_{66} & \mathbf{P}_{67} & \mathbf{P}_{68} & \mathbf{P}_{69} \\
\mathbf{P}_{70} & \mathbf{P}_{71} & \mathbf{P}_{72} & \mathbf{P}_{73} & \mathbf{P}_{74} & \mathbf{P}_{75} & \mathbf{P}_{76} & \mathbf{P}_{77} & \mathbf{P}_{78} & \mathbf{P}_{79} \\
\mathbf{P}_{80} & \mathbf{P}_{81} & \mathbf{P}_{82} & \mathbf{P}_{83} & \mathbf{P}_{84} & \mathbf{P}_{85} & \mathbf{P}_{86} & \mathbf{P}_{87} & \mathbf{P}_{88} & \mathbf{P}_{89} \\
\mathbf{P}_{90} & \mathbf{P}_{91} & \mathbf{P}_{92} & \mathbf{P}_{93} & \mathbf{P}_{94} & \mathbf{P}_{95} & \mathbf{P}_{96} & \mathbf{P}_{97} & \mathbf{P}_{98} & \mathbf{P}_{99}
\end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} -4782969/4480 & 4782969/896 & -5137263/448 & 885735/64 & -6589431/640 & 623295/128 & -40707/28 & 58635/224 & -7129/280 & 1 \\ 43046721/4480 & -52612659/1120 & 31355019/320 & -4546773/40 & 51221727/640 & -5589243/160 & 10307331/1120 & -373329/280 & 81 & 0 \\ -43046721/1120 & 205667667/1120 & -3720087/10 & 33244587/80 & -44529507/160 & 18152829/160 & -15190173/560 & 475389/140 & -162 & 0 \\ 14348907/160 & -33480783/80 & 16474671/20 & -71035947/80 & 91020753/160 & -8776431/40 & 1959363/40 & -56601/10 & 252 & 0 \\ -43046721/320 & 196101729/320 & -187598673/160 & 195629337/160 & -241241409/320 & 89119521/320 & -4752351/80 & 526419/80 & -567/2 & 0 \\ 43046721/320 & -4782969/8 & 35606547/32 & -18009945/16 & 215023653/320 & -3844017/16 & 795339/16 & -21465/4 & 1134/5 & 0 \\ -14348907/160 & 62178597/160 & -28166373/40 & 55447011/80 & -64448703/160 & 22480173/160 & -2276289/80 & 60381/20 & -126 & 0 \\ 43046721/1120 & -90876411/560 & 80247591/280 & -22025277/80 & 25043337/160 & -2142531/40 & 2989629/280 & -78327/70 & 324/7 & 0 \\ -43046721/4480 & 176969853/4480 & -21789081/320 & 20490003/320 & -22878207/640 & 7712091/640 & -1328967/560 & 275967/1120 & -81/8 & 0 \\ 4782969/4480 & -4782969/1120 & 2302911/320 & -531441/80 & 2337903/640 & -194643/160 & 265779/1120 & -6849/280 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^9 \\ u^8 \\ u^7 \\ u^6 \\ u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

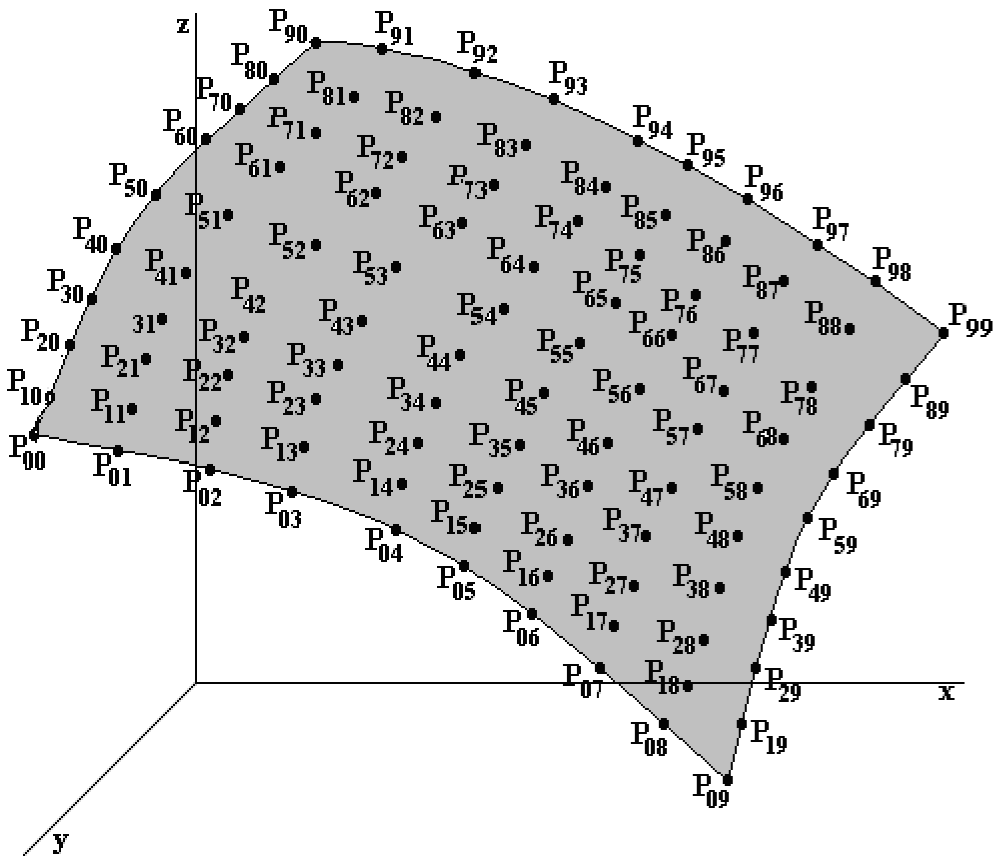


Figura 3.1.15.-2. Superficie polinomial que pasa por una red de 10x10 puntos dados

Que es la ecuación de la superficie polinomial binovena que interpola la red de 10x10 puntos dados.

3.1.15.1.-NUEVA FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BINOVENA OUE PASA POR UNA RED DE 10X10 PUNTOS DADOS.

Teniamos que la ecuación de la superficie era (4) de 3.1.15.

Efectuando los productos matriciales se obtendría :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,u) = {} & am\mathbf{P}_{00} + bm\mathbf{P}_{10} + cm\mathbf{P}_{20} + dm\mathbf{P}_{30} + em\mathbf{P}_{40} + flm\mathbf{P}_{50} + gm\mathbf{P}_{60} + hm\mathbf{P}_{70} + km\mathbf{P}_{80} + lm\mathbf{P}_{90} + \\
& an\mathbf{P}_{01} + bn\mathbf{P}_{11} + cn\mathbf{P}_{21} + dn\mathbf{P}_{31} + en\mathbf{P}_{41} + fn\mathbf{P}_{51} + gn\mathbf{P}_{61} + hn\mathbf{P}_{71} + kn\mathbf{P}_{81} + \ln\mathbf{P}_{91} + \\
& ao\mathbf{P}_{02} + bo\mathbf{P}_{12} + co\mathbf{P}_{22} + do\mathbf{P}_{32} + eo\mathbf{P}_{42} + fo\mathbf{P}_{52} + go\mathbf{P}_{62} + ho\mathbf{P}_{72} + ko\mathbf{P}_{82} + lo\mathbf{P}_{92} + \\
& ap\mathbf{P}_{03} + bp\mathbf{P}_{13} + cp\mathbf{P}_{23} + dp\mathbf{P}_{33} + ep\mathbf{P}_{43} + fp\mathbf{P}_{53} + gp\mathbf{P}_{63} + hp\mathbf{P}_{73} + kp\mathbf{P}_{83} + lp\mathbf{P}_{93} + \\
& aq\mathbf{P}_{04} + bq\mathbf{P}_{14} + cq\mathbf{P}_{24} + dq\mathbf{P}_{34} + eq\mathbf{P}_{44} + fq\mathbf{P}_{54} + gq\mathbf{P}_{64} + hq\mathbf{P}_{74} + kq\mathbf{P}_{84} + lq\mathbf{P}_{94} + \\
& ar\mathbf{P}_{05} + br\mathbf{P}_{15} + cr\mathbf{P}_{25} + dr\mathbf{P}_{35} + er\mathbf{P}_{45} + fr\mathbf{P}_{55} + gr\mathbf{P}_{65} + hr\mathbf{P}_{75} + kr\mathbf{P}_{85} + lr\mathbf{P}_{95} + \\
& as\mathbf{P}_{06} + bs\mathbf{P}_{16} + cs\mathbf{P}_{26} + ds\mathbf{P}_{36} + es\mathbf{P}_{46} + fs\mathbf{P}_{56} + gs\mathbf{P}_{66} + hs\mathbf{P}_{76} + ks\mathbf{P}_{86} + ls\mathbf{P}_{96} + \\
& av\mathbf{P}_{07} + bv\mathbf{P}_{17} + cv\mathbf{P}_{27} + dv\mathbf{P}_{37} + ev\mathbf{P}_{47} + fv\mathbf{P}_{57} + gv\mathbf{P}_{67} + hv\mathbf{P}_{77} + kv\mathbf{P}_{87} + lv\mathbf{P}_{97} + \\
& aw\mathbf{P}_{08} + bw\mathbf{P}_{18} + cw\mathbf{P}_{28} + dw\mathbf{P}_{38} + ew\mathbf{P}_{48} + fw\mathbf{P}_{58} + gw\mathbf{P}_{68} + hw\mathbf{P}_{78} + kw\mathbf{P}_{88} + lw\mathbf{P}_{98} + \\
& a\tilde{n}\mathbf{P}_{09} + b\tilde{n}\mathbf{P}_{19} + c\tilde{n}\mathbf{P}_{29} + d\tilde{n}\mathbf{P}_{39} + e\tilde{n}\mathbf{P}_{49} + f\tilde{n}\mathbf{P}_{59} + g\tilde{n}\mathbf{P}_{69} + h\tilde{n}\mathbf{P}_{79} + k\tilde{n}\mathbf{P}_{89} + l\tilde{n}\mathbf{P}_{99}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Siendo:

$$a = -4728969/4480t^9 + 4782969/896t^8 - 5137263/448t^7 + 885735/64t^6 - 6589431/640t^5 + 623295/128t^4 - 40707/28t^3 + 58635/224t^2 - 7129/280t + 1$$

$$b = 43046721/4480t^9 - 52612659/1120t^8 + 31355019/320t^7 - 4546773/40t^6 + 51221727t^5 - 5589243/160t^4 + 10307331/1120t^3 - 373329/280t^2 + 81t$$

$$c = -43046721/1120t^9 + 205667667/1120t^8 - 3720087t^7 + 33244587t^6 - 44529507t^5 + 18152829t^4 - 15190173t^3 + 475389/140t^2 - 162t$$

$$d = 14348907/160t^9 - 33480783/80t^8 + 16474671/20t^7 - 71035947/80t^6 + 91020753/160t^5 - 8776431/40t^4 + 1959363/40t^3 - 56601/10t^2 + 252t$$

$$e = -43046721/320t^9 + 196101729/320t^8 - 187598673/160t^7 + 195629337/160t^6 - 241241409/320t^5 + 89119521/320t^4 - 4752351/80t^3 + 526419/80t^2 - 567/2t$$

$$f = 4304672/320t^9 - 4782969/8t^8 + 35606547/32t^7 - 18009945/16t^6 + 215023653/320t^5 - 3844017/16t^4 + 795339/16t^3 - 21465/4t^2 + 1134/5t$$

$$g = -14348907/160t^9 + 62178597/160t^8 - 28166373/40t^7 + 55447011/80t^6 - 64448703t^5 + 22480173/160t^4 - 2276289/80t^3 + 60381/20t^2 - 126t$$

$$h = 4304672171120t^9 - 90876411/560t^8 + 80247591/280t^7 - 22025277t^6 + 25043337/160t^5 - 2142531/40t^4 + 2989629/280t^3 - 78327/70t^2 + 324/7t$$

$$k = -43046721/4480t^9 + 176969853/4480t^8 - 21789081/320t^7 + 20490003/320t^6 - 22878207/640t^5 - 7712091/640t^4 - 1328967/560t^3 + 275967/1120t^2 - 81/8t$$

$$l = 4782969/4480t^9 - 4782969/1120t^8 + 2302911/320t^7 - 531441/80t^6 + 2337903/640t^5 - 194643/160t^4 + 265779/1120t^3 - 6849/280t^2 + t$$

$$m = -4728969/4480u^9 + 4782969/896u^8 - 5137263/448u^7 + 885735/64u^6 \qquad (2)$$
$$- 6589431/640u^5 + 623295/128u^4 - 40707/28u^3 + 58635/224u^2$$
$$- 7129/280u + 1$$
$$n = 43046721/4480u^9 - 52612659/1120u^8 + 31355019/320u^7 -$$
$$4546773/40u^6 + 51221727u^5 - 5589243/160u^4 + 10307331/1120u^3 -$$
$$373329/280u^2 + 81u$$
$$o = -43046721/1120u^9 + 205667667/1120u^8 - 3720087u^7 + 33244587u^6 -$$
$$44529507u^5 + 18152829u^4 - 15190173u^3 + 475389/140u^2 - 162u$$
$$p = 14348907/160u^9 - 33480783/80u^8 + 16474671/20u^7 - 71035947/80u^6 +$$
$$91020753/160u^5 - 8776431/40u^4 + 1959363/40u^3 - 56601/10u^2 + 252u$$
$$q = -43046721/320u^9 + 196101729/320u^8 - 187598673/160u^7 +$$
$$195629337/160u^6 - 241241409/320u^5 + 89119521/320u^4$$
$$- 4752351/80u^3 + 526419/80u^2 - 567/2u$$
$$r = 4304672/320u^9 - 4782969/8u^8 + 35606547/32u^7 - 18009945/16u^6 +$$
$$215023653/320u^5 - 3844017/16u^4 + 795339/16u^3 - 21465/4u^2 +$$
$$1134/5u$$
$$s = -14348907/160u^9 + 62178597/160u^8 - 28166373/40u^7 + 55447011/80u^6 -$$
$$64448703u^5 + 22480173/160u^4 - 2276289/80u^3 + 60381/20u^2 - 126u$$
$$v = 4304672171120u^9 - 90876411/560u^8 + 80247591/280u^7 - 22025277u^6 +$$
$$25043337/160u^5 - 2142531/40u^4 + 2989629/280u^3 - 78327/70u^2 +$$
$$324/7u$$
$$w = -43046721/4480u^9 + 176969853/4480u^8 - 21789081/320u^7 +$$
$$20490003/320u^6 - 22878207/640u^5 - 7712091/640u^4 -$$
$$1328967/560u^3 + 275967/1120u^2 - 81/8u$$
$$\tilde{n} = 4782969/4480u^9 - 4782969/1120u^8 + 2302911/320u^7 - 531441/80u^6$$
$$+ 2337903/640u^5 - 194643/160u^4 + 265779/1120u^3 - 6849/280u^2 + u$$

Cada uno de los vectores tiene las siguientes componentes:

$$\mathbf{P}(t,u) = (x,y,z)$$
$$\mathbf{P_{ij}} = (xij, yij, zij) \qquad (3)$$

Si se llevan estos valores a (1) se tendría :

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) = {} & am(x00,y00,z00) + bm(x10,y10,z10) + cm(x20,y20,z20) + \\
& dm(x30,y30,z30) + em(x40,y40,z40) + fm(x50,y50,z50) + \\
& gm(x60,y60,z60) + hm(x70,y70,z70) + km(x80,y80,z80) + \\
& lm(x90,y90,z90) + \\
& an(x01,y01,z01) + bn(x11,y11,z11) + cn(x21,y21,z21) + \\
& dn(x31,y31,z31) + en(x41,y41,z41) + fn(x51,y51,z51) + \\
& gn(x61,y61,z61) + hn(x71,y71,z71) + kn(x81,y81,z81) + \\
& \ln(x91,y91,z91) + \\
& ao(x02,y02,z02) + bo(x12,y12,z12) + co(x22,y22,z22) + \\
& do(x32,y32,z32) + eo(x42,y42,z42) + fo(x52,y52,z52) + \\
& go(x62,y62,z62) + ho(x72,y72,z72) + ko(x82,y82,z82) + \\
& lo(x92,y92,z92) + \\
& ap(x03,y03,z03) + bp(x13,y13,z13) + cp(x23,y23,z23) + \\
& dp(x33,y33,z33) + ep(x43,y43,z43) + fp(x53,y53,z53) + \\
& gp(x63,y63,z63) + hp(x73,y73,z73) + kp(x83,y83,z83) + \\
& lp(x93,y93,z93) + \\
& aq(x04,y04,z04) + bq(x14,y14,z14) + cq(x24,y24,z24) + \\
& dq(x34,y34,z34) + eq(x44,y44,z44) + fq(x54,y54,z54) + \qquad (4) \\
& gq(x64,y64,z64) + hq(x74,y74,z74) + kq(x84,y84,z84) + \\
& lq(x94,y94,z94) + \\
& \quad ar(x05,y05,z05) + br(x15,y15,z15) + cr(x25,y25,z25) + \\
& \quad dr(x35,y35,z35) + er(x45,y45,z45) + fr(x55,y55,z55) + \\
& \quad gr(x65,y65,z65) + hr(x75,y75,z75) + kr(x85,y85,z85) + \\
& \quad lr(x95,y95,z95) + \\
& \quad as(x06,y06,z06) + bs(x16,y16,z16) + cs(x26,y26,z26) + \\
& \quad ds(x36,y36,z36) + es(x46,y46,z46) + fs(x56,y56,z56) + \\
& \quad gs(x66,y66,z66) + hs(x76,y76,z76) + ks(x86,y86,z86) + \\
& \quad ls(x96,y96,z96) + \\
& \quad av(x07,y07,z07) + bv(x17,y17,z17) + cv(x27,y27,z27) + \\
& \quad dv(x37,y37,z37) + ev(x47,y47,z47) + fv(x57,y57,z57) + \\
& \quad gv(x67,y67,z67) + hv(x77,y77,z77) + kv(x87,y87,z87) + \\
& \quad lv(x97,y97,z97) + \\
& \quad aw(x08,y08,z08) + bw(x18,y18,z18) + cw(x28,y28,z28) + \\
& \quad dw(x38,y38,z38) + ew(x48,y48,z48) + fw(x58,y58,z58) + \\
& \quad gw(x68,y68,z68) + hw(x78,y78,z78) + kw(x88,y88,z88) + \\
& \quad lw(x98,y98,z98) + \\
& \quad a\tilde{n}(x08,y08,z08) + b\tilde{n}(x18,y18,z18) + c\tilde{n}(x28,y28,z28) + \\
& \quad d\tilde{n}(x38,y38,z38) + e\tilde{n}(x48,y48,z48) + f\tilde{n}(x58,y58,z58) + \\
& \quad g\tilde{n}(x68,y68,z68) + h\tilde{n}(x78,y78,z78) + k\tilde{n}(x88,y88,z88) + \\
& \quad l\tilde{n}(x99,y99,z99)
\end{aligned}
$$

Desglosando por componentes se obtendrían las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial binovena que interpola la red de 10x10 puntos dados:

$$
\begin{aligned}
x = {} & amx00 + bmx10 + cmx20 + dmx30 + emx40 + fmx50 + gmx60 + \\
& hmx70 + kmx80 + lmx90 + \\
& anx01 + bnx11 + cnx21 + dnx31 + enx41 + fnx51 + gnx61 + \\
& hnx71 + knx81 + lnx91 + \\
& aox02 + box12 + cox22 + dox32 + eox42 + fox52 + gox62 + \\
& hox72 + kox82 + lox92 + \\
& apx03 + bpx13 + cpx23 + dpx33 + epx43 + fpx53 + gpx63 + \\
& hpx73 + kpx83 + lpx93 + \\
& aqx04 + bqx14 + cqx24 + dqx34 + eqx44 + fqx54 + gqx64 + \\
& hqx74 + kqx84 + lqx94 + \\
& arx05 + brx15 + crx25 + drx35 + erx45 + frx55 + grx65 + \\
& hrx75 + krx85 + lrx95 + \\
& asx06 + bsx16 + csx26 + dsx36 + esx46 + fsx56 + gsx66 + \\
& hsx76 + ksx86 + lsx96 + \\
& avx07 + bvx17 + cvx27 + dvx37 + evx47 + fvx57 + gvx67 + \\
& hvx77 + kvx87 + lvx97 + \\
& awx08 + bwx18 + cwx28 + dwx38 + ewx48 + fwx58 + gwx68 + \\
& hwx78 + kwx88 + lwx98 + \\
& a\tilde{n}x09 + b\tilde{n}x19 + c\tilde{n}x29 + d\tilde{n}x39 + e\tilde{n}x49 + f\tilde{n}x59 + g\tilde{n}x69 + \\
& h\tilde{n}x79 + k\tilde{n}x89 + l\tilde{n}x99
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = {} & amy00 + bmy10 + cmy20 + dmy30 + emy40 + fmy50 + gmy60 + \\
& hmy70 + kmy80 + lmy90 + \\
& any01 + bny11 + cny21 + dny31 + eny41 + fny51 + gny61 + \\
& hny71 + kny81 + \ln y91 + \\
& aoy02 + boy12 + coy22 + doy32 + eoy42 + foy52 + goy62 + \\
& hoy72 + koy82 + loy92 + \\
& apy03 + bpy13 + cpy23 + dpy33 + epy43 + fpy53 + gpy63 + \\
& hpy73 + kpy83 + lpy93 + \\
& aqy04 + bqy14 + cqy24 + dqy34 + eqy44 + fqy54 + gqy64 + \\
& hqy74 + kqy84 + lqy94 + \\
& ary05 + bry15 + cry25 + dry35 + ery45 + fry55 + gry65 + \\
& hry75 + kry85 + lry95 + \\
& asy06 + bsy16 + csy26 + dsy36 + esy46 + fsy56 + gsy66 + \\
& hsy76 + ksy86 + lsy96 + \\
& avy07 + bvy17 + cvy27 + dvy37 + evy47 + fvy57 + gvy67 + \\
& hvy77 + kvy87 + lvy97 + \\
& awy08 + bwy18 + cwy28 + dwy38 + ewy48 + fwy58 + gwy68 + \\
& hwy78 + kwy88 + lwy98 + \\
& a\tilde{n}y09 + b\tilde{n}y19 + c\tilde{n}y29 + d\tilde{n}y39 + e\tilde{n}y49 + f\tilde{n}y59 + g\tilde{n}y69 + \\
& h\tilde{n}y79 + k\tilde{n}y89 + l\tilde{n}y99
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$\begin{aligned} z = {} & amz00 + bmz10 + cmz20 + dmz30 + emz40 + fmz50 + gmz60 + \\ & hmz70 + kmz80 + lmz90 + \\ & anz01 + bnz11 + cnz21 + dnz31 + enz41 + fnz51 + gnz61 + \\ & hnz71 + knz81 + \ln z91 + \\ & aoz02 + boz12 + coz22 + doz32 + eoz42 + foz52 + goz62 + \\ & hoz72 + koz82 + loz92 + \\ & apz03 + bpz13 + cpz23 + dpz33 + epz43 + fpz53 + gpz63 + \\ & hpz73 + kpz83 + lpz93 + \\ & aqz04 + bqz14 + cqz24 + dqz34 + eqz44 + fqz54 + gqz64 + \\ & hqz74 + kqz84 + lqz94 + \\ & arz05 + brz15 + crz25 + drz35 + erz45 + frz55 + grz65 + \\ & hrz75 + krz85 + lrz95 + \\ & asz06 + bsz16 + csz26 + dsz36 + esz46 + fsz56 + gsz66 + \\ & hsz76 + ksz86 + lsz96 + \\ & avz07 + bvz17 + cvz27 + dvz37 + evz47 + fvz57 + gvz67 + \\ & hvz77 + kvz87 + lvz97 + \\ & awz08 + bwz18 + cwz28 + dwz38 + ewz48 + fwz58 + gwz68 + \\ & hwz78 + kwz88 + lwz98 + \\ & a\tilde{n}z09 + b\tilde{n}z19 + c\tilde{n}z29 + d\tilde{n}z39 + e\tilde{n}z49 + f\tilde{n}z59 + g\tilde{n}z69 + \\ & h\tilde{n}z79 + k\tilde{n}z89 + l\tilde{n}z99 \end{aligned}$$

<u>3.1.16.-APROXIMACIÓN DE UNA SUPERFICIE CONOCIDA MEDIANTE OTRA QUE INTERPOLA ALGUNOS DE SUS PUNTOS</u>

Dada una superficie S_1 cuyas ecuaciones paramétricas conocemos:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1(t,u) \\ y &= y_1(t,u) \\ z &= z_1(t,u) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Se pretende costruir una superficie que pase por una serie de puntos $\mathbf{P}_{ij}$ de S_1. Dicha superficie, que llamaremos S_2, tendría de ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_2(t,u) \\ y &= y_2(t,u) \\ z &= z_2(t,u) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

3.1.16.1-ERROR DE APROXIMACIÓN ENTRE AMBAS SUPERFICIES

Si el área de la superficie S_1 dada es:

$$A_1 = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\partial (x_1, y_1)}{\partial (t,u)}\right)^2 + \left(\frac{\partial (y_1, z_1)}{\partial (t,u)}\right)^2 + \left(\frac{\partial (x_1, z_1)}{\partial (t,u)}\right)^2}\, dtdu \qquad (1)$$

donde:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial (x_1, y_1)}{\partial (t,u)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial t} & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1 \\ \left(\dfrac{\partial (y_1, z_1)}{\partial (t,u)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial t} & \dfrac{\partial z_1}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ e_1 & k_1 \end{vmatrix} = c_1 k_1 - e_1 d_1 \\ \left(\dfrac{\partial (x_1, z_1)}{\partial (t,u)}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} & \dfrac{\partial x_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial t} & \dfrac{\partial z_1}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ e_1 & k_1 \end{vmatrix} = a_1 k_1 - b_1 e_1 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

y el área de la superficie S_2 que hemos construido como aproximante es:

$$A_2 = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\partial (x_2, y_2)}{\partial (t,u)}\right)^2 + \left(\frac{\partial (y_2, z_2)}{\partial (t,u)}\right)^2 + \left(\frac{\partial (x_2, z_2)}{\partial (t,u)}\right)^2}\, dtdu \qquad (3)$$

donde:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\dfrac{\partial\,(x_2,y_2)}{\partial\,(t,u)}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_2}{\partial t} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t} & \dfrac{\partial y_2}{\partial u}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{vmatrix}=a_2d_2-b_2c_2\\
\left(\dfrac{\partial\,(y_2,z_2)}{\partial\,(t,u)}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial y_2}{\partial t} & \dfrac{\partial y_2}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z_2}{\partial t} & \dfrac{\partial z_2}{\partial u}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}c_2 & d_2\\ e_2 & k_2\end{vmatrix}=c_2k_2-e_2d_2\\
\left(\dfrac{\partial\,(x_2,z_2)}{\partial\,(t,u)}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_2}{\partial t} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z_2}{\partial t} & \dfrac{\partial z_2}{\partial u}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ e_2 & k_2\end{vmatrix}=a_2k_2-b_2e_2
\end{array}\right\} \qquad (4)$$

el error de áreas que se comete, expresado en % sería:

$$E_A=\frac{A_2-A_1}{A_1}100 \qquad (5)$$

y el error lineal sería:

$$E_L\leq\sqrt{\left|\frac{A_2-A_1}{A_1}100\right|} \qquad (6)$$

3.1.16.2-PROGRAMACIÓN DEL CÁLCULO DE ERRORES

El programa que se propone está desarrollado haciendo uso del paquete Mathematica y es:

Arca de la superficie a aproximar:

$$A_1=$$

Ecuaciones paramétricas de la superficie aproximante:

$$x=$$

$$y=$$

$$z=$$

Cálculo de las derivadas:

$$a = D[x,t]$$
$$b = D[x,u]$$
$$c = D[y,t]$$
$$d = D[y,u]$$
$$e = D[z,t]$$
$$k = D[z,u]$$

Cálculo del área de la superficie aproximante:

$$A_2 = NIntegrate[Sqrt[(ad - cb)^2 + (ck - de)^2 + (ak - eb)^2], \{t,0,1\}, \{u,0,1\}]$$
$$A_2 = N[\%]$$

Cálculo del error de área:

$$Error = \frac{A_2 - A_1}{A_1} 100$$

$$W = N[\%]$$

Error lineal:

$$EL \leq Sqrt[Abs[W]]$$

3.1.16.3.-EJEMPLO DE APROXIMACIÓN DE UNA SUPERFICIE

Se trata de aproximar un semicilindro S_1 (figura 3.1.16.3.- 1) de r = 1 y altura h = 2 mediante una superficie S_2 que pasa por los siguientes puntos del cilindro:

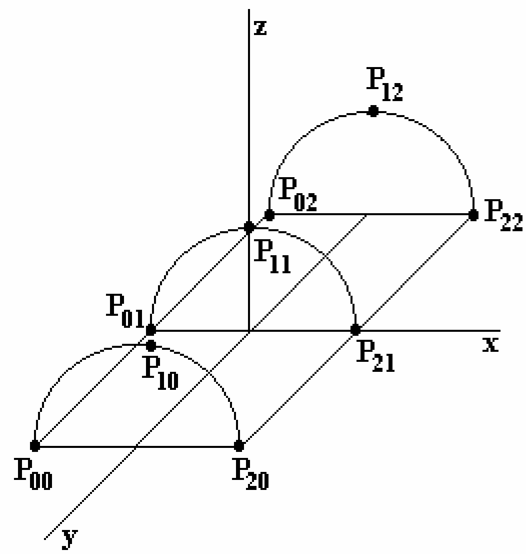


Figura 3.1.16.3.- 1. Aproximación de un semicilindro mediante una superficie polinomial que pasa por una red de 3x3 puntos del semicilindro

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}_{00} = (-1,1,0) & \mathbf{P}_{01} = (-1,0,0) & \mathbf{P}_{02} = (-1,-1,0) \\ \mathbf{P}_{10} = (0,1,1) & \mathbf{P}_{11} = (0,0,1) & \mathbf{P}_{12} = (0,-1,1) \\ \mathbf{P}_{20} = (1,1,0) & \mathbf{P}_{21} = (1,0,0) & \mathbf{P}_{22} = (1,-1,0) \end{array} \qquad (1)$$

El área del semicilindro S_1 sería:

$$A_1 = 2\pi\, rh/2 = 6.2832 \qquad (2)$$

Las ecuaciones de la superficie aproximante S_2, que es una superficie bicuadrática que pasa por la red de 3x3 puntos, todos ellos pertenecientes a S_1, serían:

$$\begin{aligned} x &= 2t - 1 \\ y &= -2u + 1 \\ z &= -4t^2 + 4t \end{aligned} \qquad (3)$$

El área de la superficie aproximante S_2 es:

$$A_2 = 5.9157 \qquad (4)$$

El error de área cometido sería:

$$E_A = \frac{A_2 - A_1}{A_2} 100 = 5.8\% \qquad (5)$$

y el error lineal cometido sería :

$$E_L \leq \sqrt{\left| \frac{A_2 - A_1}{A_2} 100 \right|} = 2.4\% \qquad (6)$$

3.2.-SUPERFICIES POLINOMIALES DEFINIDAS POR PUNTOS Y TANGENTES EN ELLOS

3.2.1.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE NXN PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

3.2.1.1.-CONSTRUCCIÓN DE LAS CURVAS GENERADORAS

Supongamos la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ …..$\mathbf{P}_n$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, ... $\mathbf{T}_n$ (figura 3.2.1.1.-1).

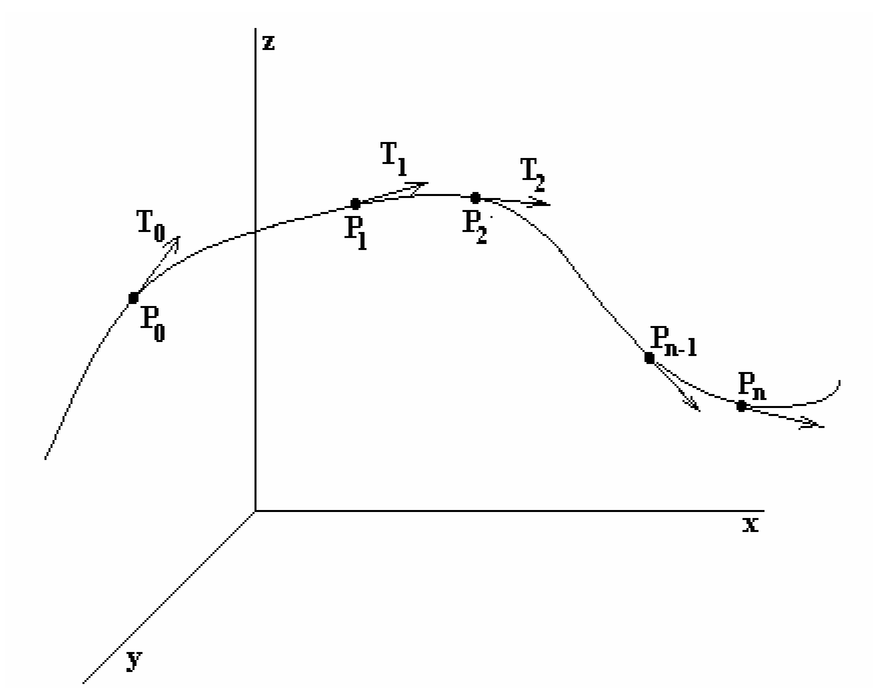


Figura 3.2.1.1.-1. Curva polinomial que pasa por (n+1) puntos dados con tangentes en ellos tambien dadas

Su ecuación se puede poner como:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) = {} & f_0(t)\mathbf{P}_0 + f_1(t)\mathbf{P}_1 + f_2(t)\mathbf{P}_2 + \cdots + f_n(t)\mathbf{P}_n + \\ & g_0(t)\mathbf{T}_0 + g_1(t)\mathbf{T}_1 + g_2(t)\mathbf{T}_2 + \cdots + g_n(t)\mathbf{T}_n \qquad (1)\end{aligned}$$

y la ecuación de la tangente sería:

$$\mathbf{P}'(t) = f_0'(t)\mathbf{P}_0 + f_1'(t)\mathbf{P}_1 + f_2'(t)\mathbf{P}_2 + \cdots + f_n'(t)\mathbf{P}_\mathrm{n} + \\ g_0'(t)\mathbf{T}_0 + g_1'(t)\mathbf{T}_1 + g_2'(t)\mathbf{T}_2 + \cdots + g_n'(t)\mathbf{T}_\mathrm{n} \qquad (2)$$

con las restricciones:

t	$f_0(t)$	$f_0'(t)$	$f_1(t)$	$f_1'(t)$	$f_2(t)$	$f_2'(t)$	$\cdots$	$f_{n-2}(t)$	$f_{n-2}'(t)$	$f_{n-1}(t)$	$f_{n-1}'(t)$	$f_n(t)$	$f_n'(t)$
t_0	1	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0
t_1	0	0	1	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0
t_2	0	0	0	0	1	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_{n-2}	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	1	0	0	0	0	0
t_{n-1}	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	1	0	0	0
t_n	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	1	0

t	$g_0(t)$	$g_0'(t)$	$g_1(t)$	$g_1'(t)$	$g_2(t)$	$g_2'(t)$	$\cdots$	$g_{n-2}(t)$	$g_n'(t)$	$g_{n-1}(t)$	$g_{n-1}'(t)$	$g_n(t)$	$g_n'(t)$
t_0	0	1	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0
t_1	0	0	0	1	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	0
t_2	0	0	0	0	0	1	$\cdots$	0	0	0	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_{n-2}	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	1	0	0	0	0	0
t_{n-1}	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	1	0	0
t_n	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	0	1

Cumpliéndose que:

$$\mathbf{P}(t_i) = \mathbf{P}_\mathrm{i} \qquad \forall\ i = 0,1,2,..........,n \\ \mathbf{P}'(t_i) = \mathbf{T}_\mathrm{i} \qquad \forall\ i = 0,1,2,..........,n \qquad (3)$$

Calculando los $f_i(t)$ y los $g_i(t)$, que serán polinomios de Hermite de la forma:

$$f_0(t) = (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 ....(t - t_{n-2})^2 (t - t_{n-1})^2 (t - t_n)^2 (a_0 + b_0 t)$$

con las restricciones de : $f_0(t_0) = 1, \quad f'_0(t_0) = 0$

$$f_1(t) = (t - t_0)^2 (t - t_2)^2 ....(t - t_{n-2})^2 (t - t_{n-1})^2 (t - t_n)^2 (a_1 + b_1 t)$$

con las restricciones de: $f_1(t_1) = 1, \quad f'_1(t_1) = 0$

$$f_2(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 ....(t - t_{n-2})^2 (t - t_{n-1})^2 (t - t_n)^2 (a_2 + b_2 t)$$

con las restricciones de : $f_2(t_2) = 1, \quad f'_2(t_2) = 0$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . . (4)

$$f_{n-2}(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 ....(t - t_{n-3})^2 (t - t_{n-1})^2 (t - t_n)^2 (a_{n-2} + b_{n-2} t)$$

con las restricciones de : $f_{n-2}(t_{n-2}) = 1, \quad f'_{n-2}(t_{n-2}) = 0$

$$f_{n-1}(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 ....(t - t_{n-3})^2 (t - t_{n-2})^2 (t - t_n)^2 (a_{n-1} + b_{n-1} t)$$

con las restricciones de : $f_{n-1}(t_{n-1}) = 1, \quad f'_{n-1}(t_{n-1}) = 0$

$$f_n(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 ....(t - t_{n-3})^2 (t - t_{n-2})^2 (t - t_{n-1})^2 (a_n + b_n t)$$

con las restricciones de : $f_n(t_n) = 1, \quad f'_n(t_n) = 0$

En general:

$$f_i(t) = (a_i + b_i t) \prod_{j=0, j \neq i}^{n} (t - t_j)^2 \qquad (5)$$

con las restricciones de $f_i(t_i) = 1, \quad f'_i(t_i) = 0$

Análogarnente :

$$g_0(t) = \frac{(t-t_1)^2(t-t_1)^2 \ldots\ldots\ldots(t-t_{n-2})^2(t-t_{n-1})^2(t-t_n)^2(t-t_0)}{(t_0-t_1)^2(t_0-t_2)^2 \ldots\ldots\ldots(t_0-t_{n-2})^2(t_0-t_{n-1})^2(t_0-t_n)^2}$$

$$g_1(t) = \frac{(t-t_0)^2(t-t_2)^2 \ldots\ldots\ldots(t-t_{n-2})^2(t-t_{n-1})^2(t-t_n)^2(t-t_1)}{(t_1-t_0)^2(t_1-t_2)^2 \ldots\ldots\ldots(t_1-t_{n-2})^2(t_1-t_{n-1})^2(t_1-t_n)^2}$$

$$g_2(t) = \frac{(t-t_0)^2(t-t_1)^2 \ldots\ldots\ldots(t-t_{n-2})^2(t-t_{n-1})^2(t-t_n)^2(t-t_2)}{(t_2-t_0)^2(t_2-t_1)^2 \ldots\ldots\ldots(t_2-t_{n-2})^2(t_2-t_{n-1})^2(t_2-t_n)^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6)$$

$$g_{n-2}(t) = \frac{(t-t_0)^2(t-t_1)^2 \ldots\ldots\ldots(t-t_{n-3})^2(t-t_{n-1})^2(t-t_n)^2(t-t_{n-2})}{(t_{n-2}-t_0)^2(t_{n-2}-t_1)^2 \ldots\ldots\ldots(t_{n-2}-t_{n-3})^2(t_{n-2}-t_{n-1})^2(t_{n-2}-t_n)^2}$$

$$g_{n-1}(t) = \frac{(t-t_0)^2(t-t_1)^2 \ldots\ldots\ldots(t-t_{n-3})^2(t-t_{n-2})^2(t-t_n)^2(t-t_{n-1})}{(t_{n-1}-t_0)^2(t_{n-1}-t_1)^2 \ldots\ldots\ldots(t_{n-1}-t_{n-3})^2(t_{n-1}-t_{n-2})^2(t_{n-1}-t_n)^2}$$

$$g_n(t) = \frac{(t-t_0)^2(t-t_1)^2 \ldots\ldots\ldots(t-t_{n-3})^2(t-t_{n-2})^2(t-t_{n-1})^2(t-t_n)}{(t_n-t_0)^2(t_n-t_1)^2 \ldots\ldots\ldots(t_n-t_{n-3})^2(t_n-t_{n-2})^2(t_n-t_{n-1})^2}$$

En general:

$$g_i(t) = \frac{(t-t_i)\prod_{j=0,\, j\neq i}^{n}(t-t_j)^2}{\prod_{j=0,\, j\neq i}^{n}(t_i-t_j)^2} \qquad (7)$$

Resolviendo los sistemas lineales en a_0, b_0 a_l b_1 a_2, b_2……….. a_n, b_n se sacan estos valores.

Las expresiones que adoptarán los $f_i(t)$ y las $g_i(t)$ serían:

$$
\begin{aligned}
f_0(t) &= A_{0,2n+1}t^{2n+1} + A_{0,2n}t^{2n} + A_{0,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + A_{0,2}t^2 + A_{0,1}t + A_{0,0} \\
f_1(t) &= A_{1,2n+1}t^{2n+1} + A_{1,2n}t^{2n} + A_{1,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + A_{1,2}t^2 + A_{1,1}t + A_{1,0} \\
f_2(t) &= A_{2,2n+1}t^{2n+1} + A_{2,2n}t^{2n} + A_{2,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + A_{2,2}t^2 + A_{2,1}t + A_{2,0} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (8) \\
f_{n-2}(t) &= A_{n-2,2n+1}t^{2n+1} + A_{n-2,2n}t^{2n} + A_{n-2,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + A_{n-2,2}t^2 + A_{n-2,1}t + A_{n-2,0} \\
f_{n-1}(t) &= A_{n-1,2n+1}t^{2n+1} + A_{n-1,2n}t^{2n} + A_{n-1,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + A_{n-1,2}t^2 + A_{n-1,1}t + A_{n-1,0} \\
f_n(t) &= A_{n,2n+1}t^{2n+1} + A_{n,2n}t^{2n} + A_{n,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + A_{n,2}t^2 + A_{n,1}t + A_{n,0}
\end{aligned}
$$

En general:

$$f_i(t) = \sum_{j=0}^{2n+1} A_{i,j} t^j \qquad (9)$$

Análogamente se tiene que :

$$\begin{aligned}
g_0(t) &= B_{0,2n+1}t^{2n+1} + B_{0,2n}t^{2n} + B_{0,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + B_{0,2}t^2 + B_{0,1}t + B_{0,0} \\
g_1(t) &= B_{1,2n+1}t^{2n+1} + B_{1,2n}t^{2n} + B_{1,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + B_{1,2}t^2 + B_{1,1}t + B_{1,0} \\
g_2(t) &= B_{2,2n+1}t^{2n+1} + B_{2,2n}t^{2n} + B_{2,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + B_{2,2}t^2 + B_{2,1}t + B_{2,0} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (10) \\
g_{n-2}(t) &= B_{n-2,2n+1}t^{2n+1} + B_{n-2,2n}t^{2n} + B_{n-2,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + B_{n-2,2}t^2 + B_{n-2,1}t + B_{n-2,0} \\
g_{n-1}(t) &= B_{n-1,2n+1}t^{2n+1} + B_{n-1,2n}t^{2n} + B_{n-1,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + B_{n-1,2}t^2 + B_{n-1,1}t + B_{n-1,0} \\
g_n(t) &= B_{n,2n+1}t^{2n+1} + B_{n,2n}t^{2n} + B_{n,2n-1}t^{2n-1} + \cdots + B_{n,2}t^2 + B_{n,1}t + B_{n,0}
\end{aligned}$$

En general:

$$g_i(t) = \sum_{j=0}^{2n+1} B_{i,j} t^j \qquad (11)$$

Llevando estos valores a la ecuación (1) ésta se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P_0} & \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \cdots & \mathbf{P_{n-2}} & \mathbf{P_{n-1}} & \mathbf{P_n} & \mathbf{T_0} & \mathbf{T_1} & \mathbf{T_0} & \cdots & \mathbf{T_{n-2}} & \mathbf{T_{n-1}} & \mathbf{T_n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
A_{0,2n+1} & A_{0,2n} & A_{0,2n-1} & \cdots & A_{0,2} & A_{0,1} & A_{0,0} \\
A_{1,2n+1} & A_{1,2n} & A_{1,2n-1} & \cdots & A_{1,2} & A_{1,1} & A_{1,0} \\
A_{2,2n+1} & A_{2,2n} & A_{2,2n-1} & \cdots & A_{1,2} & A_{2,1} & A_{0,0} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{n-2,2n+1} & A_{n-2,2n} & A_{n-2,2n-1} & \cdots & A_{n-2,2} & A_{n-2,1} & A_{n-2,0} \\
A_{n-1,2n+1} & A_{n-1,2n} & A_{n-1,2n-1} & \cdots & A_{n-1,2} & A_{n-1,1} & A_{n-1,0} \\
A_{n,2n+1} & A_{n,2n} & A_{n,2n-1} & \cdots & A_{n,2} & A_{n,1} & A_{n,0} \\
B_{0,2n+1} & B_{0,2n} & B_{0,2n-1} & \cdots & B_{0,2} & B_{0,1} & B_{0,0} \\
B_{1,2n+1} & B_{1,2n} & B_{1,2n-1} & \cdots & B_{1,2} & B_{1,1} & B_{1,0} \\
B_{2,2n+1} & B_{2,2n} & B_{2,2n-1} & \cdots & B_{1,2} & B_{2,1} & B_{0,0} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
B_{n-2,2n+1} & B_{n-2,2n} & B_{n-2,2n-1} & \cdots & B_{n-2,2} & B_{n-2,1} & B_{n-2,0} \\
B_{n-1,2n+1} & B_{n-1,2n} & B_{n-1,2n-1} & \cdots & B_{n-1,2} & B_{n-1,1} & B_{n-1,0} \\
B_{n,2n+1} & B_{n,2n} & B_{n,2n-1} & \cdots & B_{n,2} & B_{n,1} & B_{n,0}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} t^{2n+1} \\ t^{2n} \\ t^{2n-1} \\ \cdots \\ t^{n+3} \\ t^{n+2} \\ t^{n+1} \\ t^{n} \\ t^{n-1} \\ t^{n-2} \\ \cdots \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

3.2.1.2.-COSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE

Efectuando el producto cartesiano de la ecuación anterior por sí misma se tendría (figura 3.2.1.2.-1):

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^{2n+1} & t^{2n} & t^{2n-1} & \cdots & t^2 & t & 1 \end{pmatrix} (C_{ij})^T (M_{ij})(C_{ij})$$
$$\begin{pmatrix} u^{2n+1} & u^{2n} & u^{2n-1} & \cdots & u^2 & u & 1 \end{pmatrix}^T \qquad (1)$$

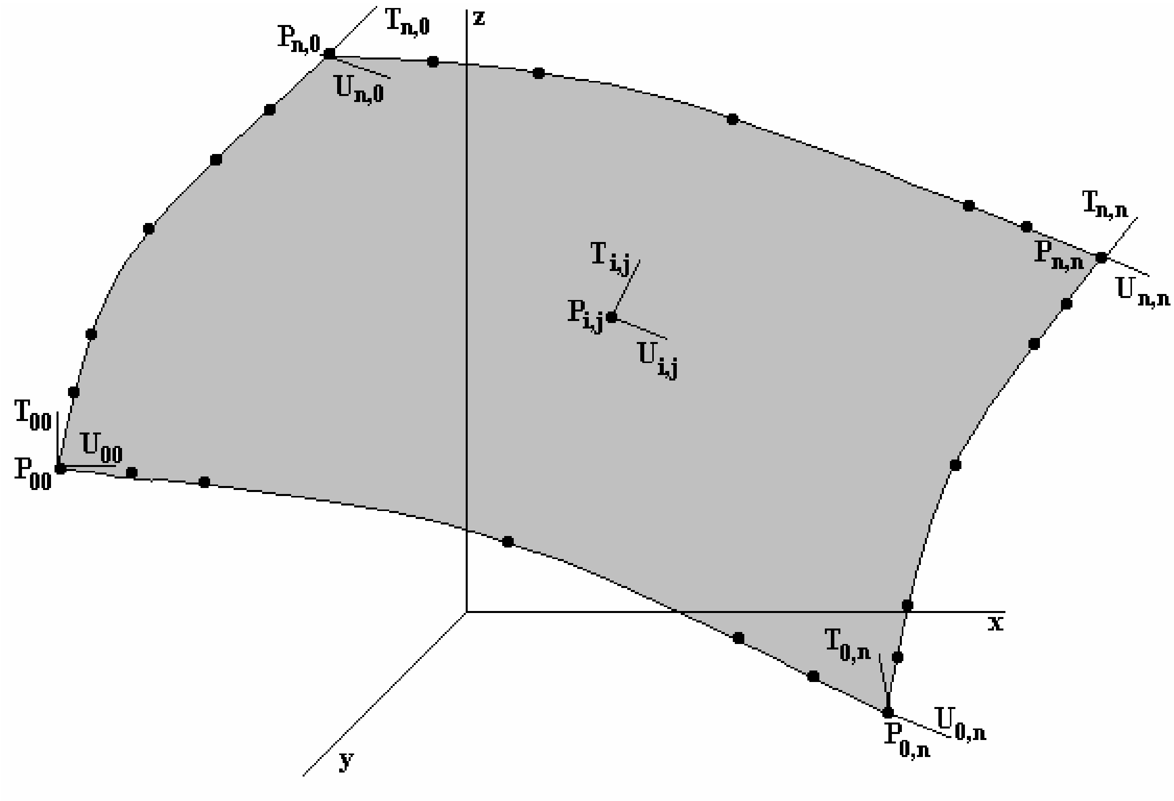


Figura 3.2.1.2.–1. Superficie polinomial que pasa por una red de (n+1)x(n+1) puntos dados con tangentes en ellos tambien dadas

Siendo:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{P_0} & \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \cdots & \mathbf{P_{n-2}} & \mathbf{P_{n-1}} & \mathbf{P_n} & \mathbf{T_0} & \mathbf{T_1} & \mathbf{T_0} & \cdots & \mathbf{T_{n-2}} & \mathbf{T_{n-1}} & \mathbf{T_n} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_0} & \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \cdots & \mathbf{P_{n-2}} & \mathbf{P_{n-1}} & \mathbf{P_n} & \mathbf{T_0} & \mathbf{T_1} & \mathbf{T_0} & \cdots & \mathbf{T_{n-2}} & \mathbf{T_{n-1}} & \mathbf{T_n} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & \cdots & M_{0,2n-1} & M_{0,2n} & M_{0,2n+1} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & \cdots & M_{1,2n-1} & M_{1,2n} & M_{1,2n+1} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & M_{2,2n-1} & M_{2,2n} & M_{2,2n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{2n-1,0} & M_{2n-1,1} & M_{2n-1,2} & \cdots & M_{2n-1,2n-1} & M_{2n-1,2n} & M_{2n-1,2n+1} \\ M_{2n,0} & M_{2n,1} & M_{2n,2} & \cdots & M_{2n,2n-1} & M_{2n,2n} & M_{2n,2n+1} \\ M_{2n+1,0} & M_{2n+1,1} & M_{2n+1,2} & \cdots & M_{2n+1,2n-1} & M_{2n+1,2n} & M_{2n+1,2n+1} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Esta matriz se puede poner como:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,1} & \cdots & \mathbf{P}_{0,n\text{-}1} & \mathbf{P}_{0,n} & \mathbf{U}_{0,0} & \mathbf{U}_{0,1} & \cdots & \mathbf{U}_{0,n\text{-}1} & \mathbf{U}_{0,n} \\ \mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_{1,1} & \cdots & \mathbf{P}_{1,n\text{-}1} & \mathbf{P}_{1,n} & \mathbf{U}_{1,0} & \mathbf{U}_{1,1} & \cdots & \mathbf{U}_{1,n\text{-}1} & \mathbf{U}_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{P}_{n\text{-}1,0} & \mathbf{P}_{n\text{-}1,1} & \cdots & \mathbf{P}_{n\text{-}1,n\text{-}1} & \mathbf{P}_{n,n} & \mathbf{U}_{n\text{-}1,0} & \mathbf{U}_{n\text{-}1,1} & \cdots & \mathbf{U}_{n\text{-}1,n\text{-}1} & \mathbf{U}_{n\text{-}1,n} \\ \mathbf{P}_{n,0} & \mathbf{P}_{n,1} & \cdots & \mathbf{P}_{n,n\text{-}1} & \mathbf{P}_{n,n} & \mathbf{U}_{n,0} & \mathbf{U}_{n,1} & \cdots & \mathbf{U}_{n,n\text{-}1} & \mathbf{U}_{n,n} \\ \mathbf{T}_{0,0} & \mathbf{T}_{0,1} & \cdots & \mathbf{T}_{0,n\text{-}1} & \mathbf{T}_{0,n} & \mathbf{E}_{0,0} & \mathbf{E}_{0,1} & & \mathbf{E}_{0,n\text{-}1} & \mathbf{E}_{0,n} \\ \mathbf{T}_{1,0} & \mathbf{T}_{1,1} & \cdots & \mathbf{T}_{1,n\text{-}1} & \mathbf{T}_{1,n} & \mathbf{E}_{1,0} & \mathbf{E}_{1,1} & & \mathbf{E}_{1,n\text{-}1} & \mathbf{E}_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\ \mathbf{T}_{n\text{-}1,0} & \mathbf{T}_{n\text{-}1,1} & \cdots & \mathbf{T}_{n\text{-}1,n\text{-}1} & \mathbf{T}_{n\text{-}1,n} & \mathbf{E}_{n\text{-}1,0} & \mathbf{E}_{n\text{-}1,1} & & \mathbf{E}_{n\text{-}1,n\text{-}1} & \mathbf{E}_{n\text{-}1,n} \\ \mathbf{T}_{n,0} & \mathbf{T}_{n,1} & \cdots & \mathbf{T}_{n,n\text{-}1} & \mathbf{T}_{n,n} & \mathbf{E}_{n,0} & \mathbf{E}_{n,1} & & \mathbf{E}_{n,n\text{-}1} & \mathbf{E}_{n,n} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Siendo los componentes de la matriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ij} &= \mathbf{P}(t_i, u_j) \\ \mathbf{U}_{ij} &= \left(\frac{\partial\, \mathbf{P}(\mathrm{t},\mathrm{u})}{\partial\, u} \right)_{t=t_i, u=u_j} \\ \mathbf{T}_{ij} &= \left(\frac{\partial\, \mathbf{P}(\mathrm{t},\mathrm{u})}{\partial\, t} \right)_{t=t_i, u=u_j} \qquad (4) \\ \mathbf{E}_{ij} &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathrm{t},\mathrm{u})}{\partial\, t \partial\, u} \right)_{t=t_i, u=u_j} \end{aligned}$$

3.2.2.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 2X2 PUNTOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

3.2.2.1.-CONSTRUCCIÓN DE LAS CURVAS GENERADORAS

Una curva cúbica polinomial que pasa por dos puntos $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$ con tangentes en ambos $\mathbf{T}_0$ y $\mathbf{T}_1$ (figura 3.2.2.1.-1) tendrá una ecuación de la forma:

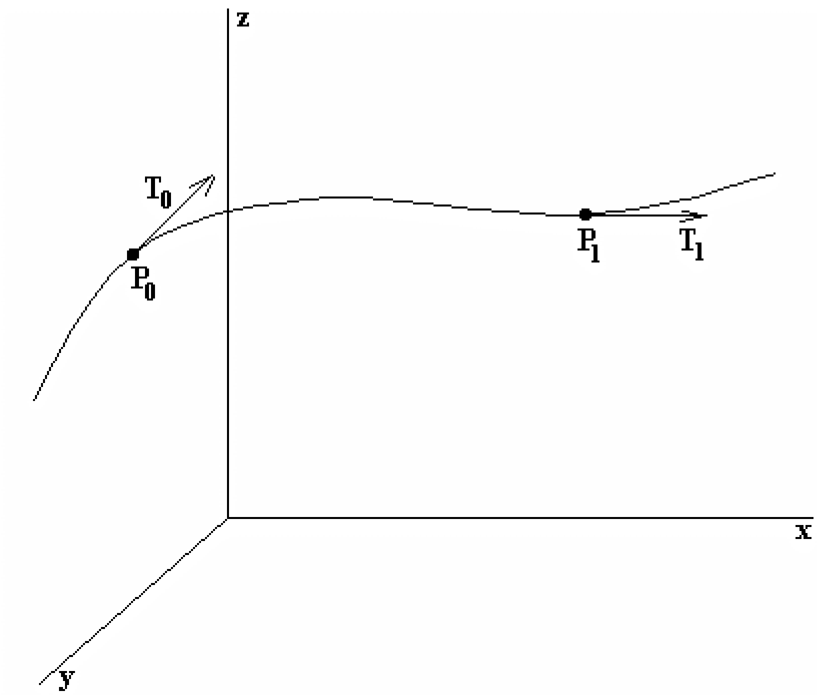


Figura 3.2.2.1.-1. Curva polinomial que pasa por dos puntos dados con tangentes en ellos tambien dadas

$$\mathbf{P}(t) = f_0(t)\mathbf{P}_0 + f_1(t)\mathbf{P}_1 + g_0(t)\mathbf{T}_0 + g_1(t)T_1 \qquad (1)$$

donde las $f_i(t)$ y las $g_i(t)$ cumplen las restricciones:

t	$f_0(t)$	$f'_0(t)$	$f_1(t)$	$f'_1(t)$	$g_0(t)$	$g'_0(t)$	$g_1(t)$	$g'_1(t)$
0	1	0	0	0	0	1	0	0
d_0	0	0	1	0	0	0	0	1

siendo d_0 la distancia entre $\mathbf{P}_0$ y $\mathbf{P}_1$.

Resolviendo el problema de Hermite para las funciones $f_i(t)$ y $g_i(t)$ se obtendría :

$$
\begin{aligned}
f_0(t) &= \frac{(2t + d_0)(t - d_0)}{d_0^{\,3}} = (2(\frac{t}{d_0}) + 1)((\frac{t}{d_0}) - 1)^2 \\
f_1(t) &= \frac{(3d_0 - 2t)t^2}{d_0^{\,3}} = (3 - 2(\frac{t}{d_0}))(\frac{t}{d_0})^2 \\
g_0(t) &= \frac{t(t - d_0)^2}{d_0^{\,2}} = d_0(\frac{t}{d_0})((\frac{t}{d_0}) - 1)^2 \\
g_1(t) &= \frac{(d_0 - t)t^2}{d_0^{\,2}} = d_0((\frac{t}{d_0}) - 1)(\frac{t}{d_0})^2
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Luego la ecuación (1) se puede poner en forma matricial como:

$$
\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\frac{2}{d_0^{\,3}} & -\frac{3}{d_0^{\,2}} & 0 & 1 \\
-\frac{2}{d_0^{\,3}} & \frac{3}{d_0^{\,2}} & 0 & 0 \\
\frac{1}{d_0^{\,2}} & -\frac{1}{d_0^{\,2}} & 1 & 0 \\
\frac{1}{d_0^{\,2}} & \frac{1}{d_0} & & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}
\qquad (3)
$$

Donde la curva se extiende desde $\mathbf{P}_0$ hasta $\mathbf{P}_1$ cuando t discurre desde 0 a d_0. Si hacemos $d_0 t = t$ obtenemos una forma equivalente de la curva donde t ahora discurre desde 0 a 1.

Por tanto:

$$
\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
2 & -3 & 0 & 1 \\
-2 & 3 & 0 & 0 \\
d_0 & -2d_0 & d_0 & 0 \\
d_0 & -d_0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}
\qquad (4)
$$

Si establecemos una interpolación uniforme, $d_0 = 1$, obtenemos:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Ecuación de la curva cúbica que pasa por $\mathbf{P}_0$ con tangente $\mathbf{T}_0$ y por $\mathbf{P}_1$ con tangente $\mathbf{T}_1$.

3.2.2.2.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE

Supongamos que formamos el producto cartesiano de la ecuación (4) por ella misma para obtener una superficie (figura 3.2.2.2.-1)

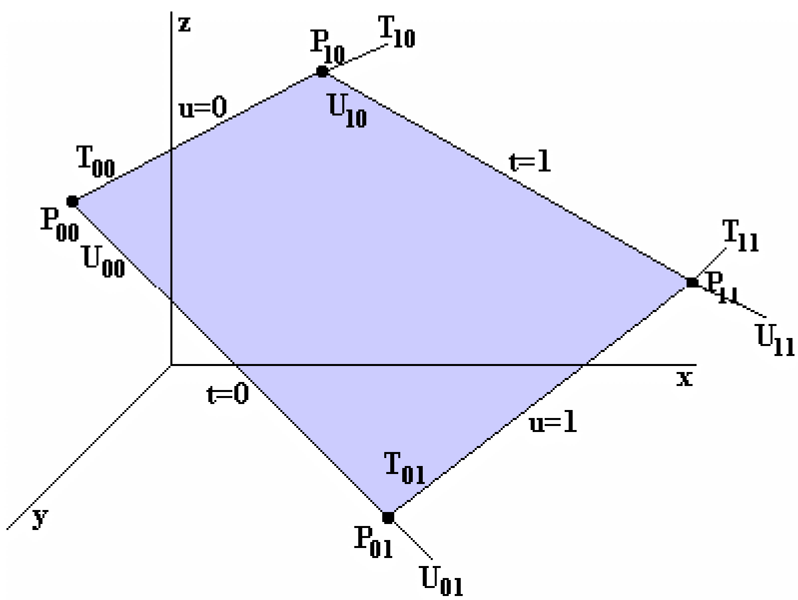


Figura 3.2.2.2.-1. Superficie que pasa por una red de 2x2 puntos dados con tangentes en ellos tambien dadas

Tenemos que la ecuación de la superficie será:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Veamos el significado geométrico de las componentes de la matriz $k_{jj.}$

Dando valores a t y u:

t= 0, 1
u= 0, 1

Se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P}(0,0) &= k_{00} \\ \mathbf{P}(0,1) &= k_{01} \\ \mathbf{P}(1,0) &= k_{10} \\ \mathbf{P}(1,1) &= k_{11} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Diferenciando ahora la ecuación (1) con respecto a t:

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t,u)}{\partial t} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Si evaluamos esta derivada se tiene:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=1,u=0} = k_{30} \qquad (4)$$

Como esta derivada sería la tangente en la dirección de las t crecientes la notaremos por $\mathbf{T}_{30}$ y por lo tanto tendremos que:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=1,u=0} = k_{30} = \mathbf{T}_{10} \qquad (5)$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathbf{P}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=1,u=1} &= k_{31} = \mathbf{T}_{11}\\ \left(\frac{\partial \mathbf{P}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=0,u=0} &= k_{20} = \mathbf{T}_{00} \qquad (6)\\ \left(\frac{\partial \mathbf{P}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=0,u=1} &= k_{21} = \mathbf{T}_{01}\end{aligned}$$

Luego los cuatro componentes de la parte inferior izquierda de la matriz son las cuatro tangentes en el sentido de las t crecientes en las cuatro esquinas de la superficie.

Operando análogamente con respecto a u:

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t,u)}{\partial u} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3u^2 \\ 2u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Si evaluamos la derivada en t = 0, u = 0 se tendrá al particularizar y hacer los cálculos:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}(t,u)}{\partial u}\right)_{t=0,u=0} = k_{02} \qquad (8)$$

Como esta derivada sería la tangente en la dirección de las u crecientes la notaremos por $\mathbf{U}_{00}$ y por tanto tendremos:

$$\left(\frac{\partial\,\mathbf{P}(t,u)}{\partial\,u}\right)_{t=0,u=0} = k_{02} = \mathbf{U}_{00} \qquad (9)$$

Análogamente obtendremos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\,\mathbf{P}(t,u)}{\partial\,u}\right)_{t=0,u=1} &= k_{03} = \mathbf{U}_{01} \\
\left(\frac{\partial\,\mathbf{P}(t,u)}{\partial\,u}\right)_{t=1,u=0} &= k_{11} = \mathbf{U}_{10} \qquad (10) \\
\left(\frac{\partial\,\mathbf{P}(t,u)}{\partial\,u}\right)_{t=1,u=1} &= k_{13} = \mathbf{U}_{11}
\end{aligned}$$

Por lo tanto los cuatro componentes de la parte superior derecha de la matriz son los cuatro tangentes en la dirección creciente de las u, en las cuatro esquinas de la superficie.

Calculemos por ultimo las derivadas cruzadas de la ecuación con respecto a t y a u:

$$\frac{\partial\,\mathbf{P}^2(t,u)}{\partial\,t\partial\,u} = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3u^2 \\ 2u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Si evaluamos esta derivada en t = 0, u = 1 tendríamos al particularizar y hacer los cálculos:

$$\left(\frac{\partial\,\mathbf{P}^2(t,u)}{\partial\,t\partial\,u}\right)_{t=0,u=1} = k_{23} \qquad (12)$$

Estos vectores los notaremos por **E** y en este caso como nos estamos refiriendo al punto $\mathbf{P}_{01}$, lo llamaremos $\mathbf{E}_{01}$.

Análogamente obtendríamos:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}^2(t,u)}{\partial t \partial u}\right)_{t=0,u=0} = k_{22} = \mathbf{E}_{00}$$
$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}^2(t,u)}{\partial t \partial u}\right)_{t=1,u=0} = k_{32} = \mathbf{E}_{10} \qquad (13)$$
$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}^2(t,u)}{\partial t \partial u}\right)_{t=1,u=1} = k_{33} = \mathbf{E}_{11}$$

Por todo ello la ecuación (1) se puede poner en la forma:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{U}_{10} & \mathbf{U}_{11} \\ \mathbf{T}_{00} & \mathbf{T}_{01} & \mathbf{E}_{00} & \mathbf{E}_{01} \\ \mathbf{T}_{10} & \mathbf{T}_{11} & \mathbf{E}_{10} & \mathbf{E}_{11} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Que es la ecuación de la superficie que pasa por la red de 2x2 puntos dados con tangentes en ellos tambien dadas

3.2.2.3.-NUEVA FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 2X2 PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

Tenemos que la ecuación de la superficie era, si hemos supuesto que los $\mathbf{E}_{ij}$ son cero:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{U}_{10} & \mathbf{U}_{11} \\ \mathbf{T}_{00} & \mathbf{T}_{01} & 0 & 0 \\ \mathbf{T}_{10} & \mathbf{T}_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Efectuando los productos matriciales se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) = {} & ae\mathbf{P}_{00} + be\mathbf{P}_{10} + ce\mathbf{T}_{00} + de\mathbf{T}_{10} + \\ & af\mathbf{P}_{01} + bf\mathbf{P}_{11} + cf\mathbf{T}_{01} + df\mathbf{T}_{11} + \\ & ag\mathbf{U}_{00} + bg\mathbf{U}_{10} + ah\mathbf{U}_{01} + bh\mathbf{U}_{11} \end{aligned} \qquad (2)$$

Siendo :

$$\begin{aligned} a &= 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ b &= -2t^3 + 3t^2 \\ c &= t^3 - 2t^2 + t \\ d &= t^3 - t^2 \\ e &= 2u^3 - 3u^2 + 1 \\ f &= -2u^3 + 3u^2 \\ g &= u^3 - 2u^2 + u \\ h &= u^3 - u^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

Cada uno de los vectores tiene las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) &= (x, y, z) \\ \mathbf{P_{ij}} &= (xij, yij, zij) \\ \mathbf{T_{ij}} &= (xtij, ytij, ztij) \\ \mathbf{U_{ij}} &= (xuij, yuij, zuij) \\ \mathbf{E_{ij}} &= (xeij, yeij, zeij) \end{aligned} \qquad (4)$$

Si se llevan estos valores a (1) se tendría:

$$
\begin{aligned}
&(x,y,z)= \\
&ae(x00,y00,z00)+be(x10,y10,z10)+ce(xt00,yt00,zt00)+de(xt10,yt10,zt10)+ \\
&af(x01,y01,z01)+bf(x11,y11,z11)+cf(xt01,yt01,zt01)+df(xt11,yt11,zt11)+ \\
&ag(xu00,yu00,zu00)+bg(xu10,yu10,zu10)+ah(xu01,yu01,zu01)+bh(xu11,yu11,zu11)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

Desglosando por componentes se obtienen las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial bicúbica que pasa por los cuatro puntos dados con $\mathbf{T}_{ij}$, $\mathbf{U}_{ij}$, $\mathbf{E}_{ij}$ dadas:

$$
\begin{aligned}
x= {}& aex00+bex10+cext00+dext10+ \\
& afx01+bfx11+cfxt01+dfxt11+ \\
& agxu00+bgxu10+ahxu01+bhxu11 \\
y= {}& aey00+bey10+ceyt00+deyt10+ \\
& afy01+bfy11+cfyt01+dfyt11+ \\
& agyu00+bgyu10+ahyu01+bhyu11 \\
z= {}& aez00+bez10+cezt00+dezt10+ \\
& afz01+bfz11+cfzt01+dfzt11+ \\
& agzu00+bgzu10+ahzu01+bhzu11
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

3.2.3.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 3X3 PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

3.2.3.1.-CONSTRUCCIÓN DE LAS CURVAS GENERADORAS

Sea la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ (Figura 3.2.3.1.-1)

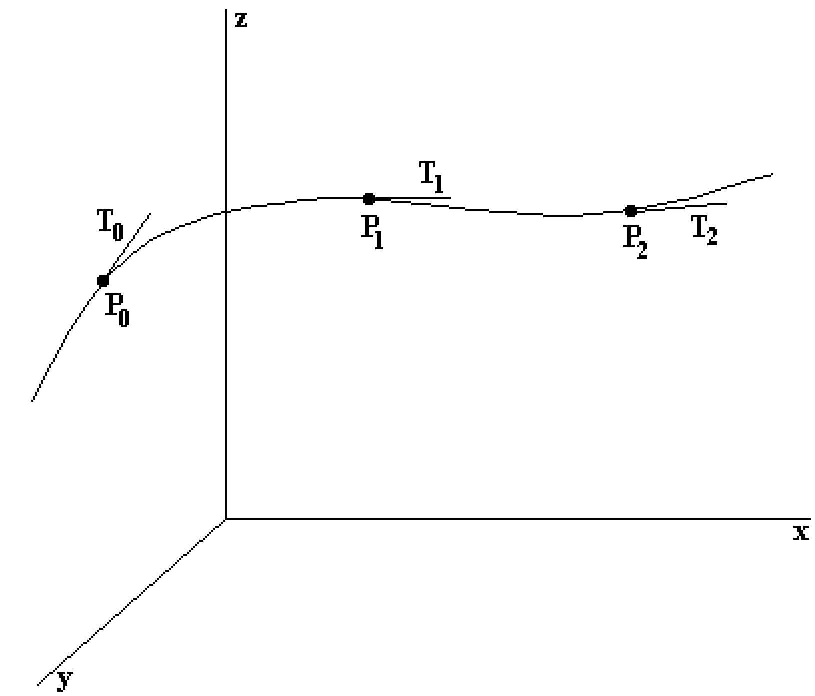


Figura 3.2.3.1.–1. Curva polinomial que pasa por tres puntos dados con tangentes en ellos tambien dadas

Su ecuación se puede poner como:

$$\mathbf{P}(t) = f_0(t)\mathbf{P}_0 + f_1(t)\mathbf{P}_1 + f_2(t)\mathbf{P}_2 + g_0(t)\mathbf{T}_0 + g_1(t)\mathbf{T}_1 + g_2(t)\mathbf{T}_2 \qquad (1)$$

La ecuación de la tangente sería:

$$\mathbf{P}'(t) = f'_0(t)\mathbf{P}_0 + f'_1(t)\mathbf{P}_1 + f'_2(t)\mathbf{P}_2 + g'_0(t)\mathbf{T}_0 + g'_1(t)\mathbf{T}_1 + g'_2(t)\mathbf{T}_2 \qquad (2)$$

con las restricciones :

t	$f_0(t)$	$f'_0(t)$	$f_1(t)$	$f'_1(t)$	$f_2(t)$	$f'_2(t)$	$g_0(t)$	$g'_0(t)$	$g_1(t)$	$g'_1(t)$	$g_2(t)$	$g'_2(t)$
t_0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
t_1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
t_2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Cumpliéndose que:

$$\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0 \qquad \mathbf{P}(t_1) = \mathbf{P}_1 \qquad \mathbf{P}(t_2) = \mathbf{P}_2$$
$$\mathbf{P}'(t_0) = \mathbf{T}_0 \qquad \mathbf{P}'(t_1) = \mathbf{T}_1 \qquad \mathbf{P}'(t_2) = \mathbf{T}_2 \qquad (3)$$

Calculando los f_0 (t) f_l(t) f_2(t) g_0(t) g_l(t) g_2(t) que serán polinomios de Hermite de la forma:

$$f_0(t) = (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 (a_0 + b_0 t)$$

con las restricciones de: $f_0(t_0) = 1 \qquad f'_0(t_0) = 0$

$$g_0(t) = (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 (t - t_0) / (t_0 - t_1)^2 (t_0 - t_2)^2$$

Análogamente:

$$f_1(t) = (t - t_0)^2 (t - t_2)^2 (a_1 + b_1 t)$$

con las restricciones de: $f_1(t_1) = 1 \qquad f'_1(t_1) = 0$

$$g_1(t) = (t - t_0)^2 (t - t_2)^2 (t - t_1) / (t_1 - t_0)^2 (t_1 - t_2)^2$$

Igualmente :

$$f_2(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 (a_2 + b_2 t)$$

con las restricciones de : $f_2(t_2) = 1 \qquad f'_2(t_2) = 0$

$$g_2(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 (t - t_2) / (t_2 - t_0)^2 (t_2 - t_1)^2$$

Resolviendo los sistemas lineales en a_0, b_0, a_l, b_1, a_2, b_2 se determinan estos valores:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 5t_0^2 - 3t_0 t_1 - 3t_0 t_2 + t_1 t_2 / (t_0 - t_1)^3 (t_2 - t_0)^3 \\
b_0 &= 2(-2t_0 + t_1 + t_2) / (t_1 - t_0)^3 (t_2 - t_0)^3 \\
a_1 &= 5t_1^2 - 3t_0 t_1 - 3t_1 t_2 + t_0 t_2 / (t_0 - t_1)^3 (t_2 - t_1)^3 \\
b_1 &= 2(-2t_1 + t_0 + t_2) / (t_0 - t_1)^3 (t_2 - t_1)^3 \\
a_2 &= 5t_2^2 - 3t_0 t_2 - 3t_1 t_2 + t_0 t_1 / (t_1 - t_2)^3 (t_0 - t_2)^3 \\
b_2 &= 2(-2t_2 + t_0 + t_1) / (t_0 - t_2)^3 (t_1 - t_2)^3
\end{aligned} \qquad (5)$$

Entrando con estos valores en la fórmula de **P**(t) se tendría:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) = {} & f_0(t)\mathbf{P}_0 + f_1(t)\mathbf{P}_1 + f_2(t)\mathbf{P}_2 + g_0(t)\mathbf{T}_0 + g_1(t)\mathbf{T}_1 + g_2(t)\mathbf{T}_2 = \\
& (t - t_1)^2(t - t_2)^2(a_0 + b_0 t)\mathbf{P}_0 + \\
& (t - t_0)^2(t - t_2)^2(a_1 + b_1 t)\mathbf{P}_1 + \\
& (t - t_0)^2(t - t_1)^2(a_2 + b_2 t)\mathbf{P}_2 + \\
& (t - t_1)^2(t - t_2)^2(t - t_0)/(t_0 - t_1)^2(t_0 - t_2)^2\mathbf{T}_0 + \\
& (t - t_0)^2(t - t_2)^2(t - t_1)/(t_1 - t_0)^2(t_1 - t_2)^2\mathbf{T}_1 + \\
& (t - t_0)^2(t - t_1)^2(t - t_2)/(t_2 - t_0)^2(t_2 - t_1)^2\mathbf{T}_2
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P}(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}
b_0 & a_0-2b_0t_1-2b_0t_2 & -2a_0t_1+b_0t_1^2-2a_0t_2+4b_0t_1t_2+b_0t_2^2 & a_0t_1^2+4a_0t_1t_2-2b_0t_1^2t_2+a_0t_2^2-2b_0t_1t_2^2 & -2a_0t_1^2t_2-2a_0t_1t_2^2+b_0t_1^2t_2^2 & a_0t_1^2t_2^2\\
b_1 & a_1-2b_1t_0-2b_1t_2 & -2a_1t_0+b_1t_0^2-2a_1t_2+4b_1t_0t_2+b_1t_2^2 & a_1t_0^2+4a_1t_0t_2-2b_1t_0^2t_2+a_1t_2^2-2b_1t_0t_2^2 & -2a_1t_0^2t_2-2a_1t_0t_2^2+b_0t_0^2t_2^2 & a_1t_0^2t_2^2\\
b_2 & a_2-2b_2t_0-2b_2t_1 & -2a_2t_0+b_2t_0^2-2a_2t_1+4b_2t_0t_1+b_2t_1^2 & a_2t_0^2+4a_2t_0t_1-2b_2t_0^2t_1+a_2t_1^2-2b_2t_0t_1^2 & -2a_2t_0^2t_1-2a_2t_0t_1^2+b_0t_0^2t_1^2 & a_2t_0^2t_1^2\\
\dfrac{1}{(t_0-t_1)^2(t_0-t_2)^2} & -t_0-2t_1-\dfrac{2t_2}{(t_0-t_1)^2(t_0-t_2)^2} & 2t_0t_1+t_1^2+2t_0t_2+4t_1t_2+\dfrac{t_2^2}{(t_0-t_1)^2(t_0-t_2)^2} & -t_0t_1^2-4t_0t_1t_2-2t_1^2t_2-t_0t_2^2-\dfrac{2t_1t_2^2}{(t_0-t_1)^2(t_0-t_2)^2} & -2t_0t_1^2t_2+2t_0t_1t_2^2+\dfrac{t_1^2t_2^2}{(t_0-t_1)^2(t_0-t_2)^2} & -\dfrac{t_0t_1^2t_2^2}{(t_0-t_1)^2(t_0-t_2)^2}\\
\dfrac{1}{(t_1-t_0)^2(t_1-t_2)^2} & -t_1-2t_0-\dfrac{2t_2}{(t_1-t_0)^2(t_1-t_2)^2} & 2t_0t_1+t_0^2+2t_1t_2+4t_0t_2+\dfrac{t_2^2}{(t_1-t_0)^2(t_1-t_2)^2} & -t_0^2t_1-4t_0t_1t_2-2t_0^2t_2-t_1t_2^2-\dfrac{2t_0t_2^2}{(t_1-t_0)^2(t_1-t_2)^2} & -2t_1t_0^2t_2+2t_0t_1t_2^2+\dfrac{t_0^2t_2^2}{(t_1-t_0)^2(t_1-t_2)^2} & -\dfrac{t_1t_0^2t_2^2}{(t_1-t_0)^2(t_1-t_2)^2}\\
\dfrac{1}{(t_2-t_0)^2(t_2-t_1)^2} & -t_2-2t_0-\dfrac{2t_1}{(t_2-t_0)^2(t_2-t_1)^2} & 2t_0t_2+t_0^2+2t_1t_2+4t_0t_1+\dfrac{t_1^2}{(t_2-t_0)^2(t_2-t_1)^2} & -t_0^2t_2-4t_0t_1t_2-2t_0^2t_1-t_2t_1^2-\dfrac{2t_0t_1^2}{(t_2-t_0)^2(t_2-t_1)^2} & -2t_1t_0^2t_2+2t_0t_2t_1^2+\dfrac{t_0^2t_1^2}{(t_2-t_0)^2(t_2-t_1)^2} & -\dfrac{t_2t_0^2t_1^2}{(t_2-t_0)^2(t_2-t_1)^2}
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^5\\t^4\\t^3\\t^2\\t\\1\end{pmatrix} \qquad (7)$$

Si se hace $t_0=0$, $t_1= 1/2$, $t_2= 1$ la ecuación de la curva quedaría:

$$\mathbf{P}(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}24 & -68 & 66 & -23 & 0 & 1\\ 0 & 16 & -32 & 16 & 0 & 0\\ -24 & 52 & -34 & 7 & 0 & 0\\ 4 & -12 & 13 & -6 & 1 & 0\\ 16 & -40 & 32 & -8 & 0 & 0\\ 4 & -8 & 5 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^5\\ t^4\\ t^3\\ t^2\\ t\\ 1\end{pmatrix} \qquad (8)$$

3.2.3.2.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE

Haciendo el producto cartesiano de la ecuación anterior por sí misma (Figura 3.2.3.2.-1) se llega a:

$$\mathbf{P}(t,u)=\begin{pmatrix}t^5\\ t^4\\ t^3\\ t^2\\ t\\ 1\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}24 & -68 & 66 & -23 & 0 & 1\\ 0 & 16 & -32 & 16 & 0 & 0\\ -24 & 52 & -34 & 7 & 0 & 0\\ 4 & -12 & 13 & -6 & 1 & 0\\ 16 & -40 & 32 & -8 & 0 & 0\\ 4 & -8 & 5 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} & k_{04} & k_{05}\\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15}\\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25}\\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35}\\ k_{40} & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45}\\ k_{50} & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}24 & -68 & 66 & -23 & 0 & 1\\ 0 & 16 & -32 & 16 & 0 & 0\\ -24 & 52 & -34 & 7 & 0 & 0\\ 4 & -12 & 13 & -6 & 1 & 0\\ 16 & -40 & 32 & -8 & 0 & 0\\ 4 & -8 & 5 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u^5\\ u^4\\ u^3\\ u^2\\ u\\ 1\end{pmatrix} \qquad (1)$$

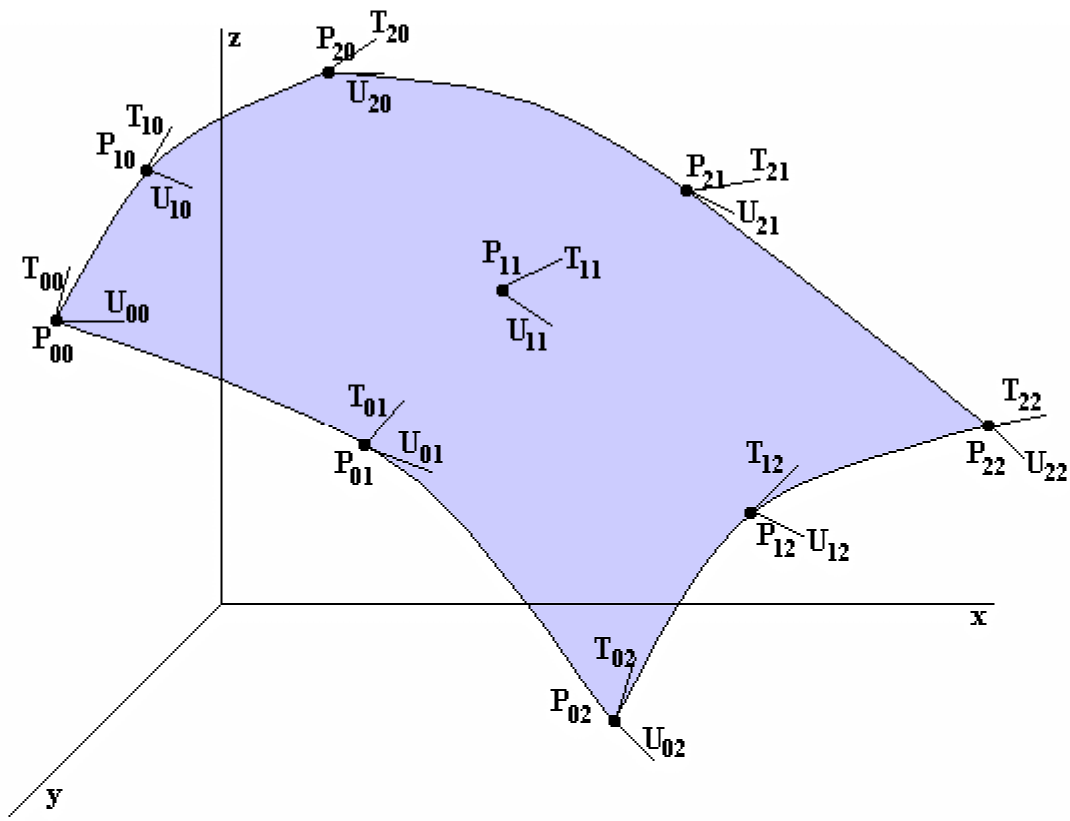


Figura 3.2.3.2.-1. Superficie polinomial que pasa por una red de 3x3 puntos dados con tangentes en ellos tambien dadas

Veamos el significado geométrico de los componentes de la matriz k_{ij}

Dando valores a t y u:

$$t = 0,1/2,1$$
$$u = 0,1/2,1$$

se tiene que:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{P}(0,0)=k_{00} & \mathbf{P}(1/2,0)=k_{10} & \mathbf{P}(1,0)=k_{20}\\
\mathbf{P}(0,1/2)=k_{01} & \mathbf{P}(1/2,1/2)=k_{11} & \mathbf{P}(1,1/2)=k_{21}\\
\mathbf{P}(0,1)=k_{02} & \mathbf{P}(1/2,1)=k_{12} & \mathbf{P}(1,1)=k_{22}\\
\\
\mathbf{P'_t}(0,0)=k_{30} & \mathbf{P'_t}(1/2,0)=k_{40} & \mathbf{P'_t}(1,0)=k_{50}\\
\mathbf{P'_t}(0,1/2)=k_{31} & \mathbf{P'_t}(1/2,1/2)=k_{41} & \mathbf{P'_t}(1,1/2)=k_{51}\\
\mathbf{P'_t}(0,1)=k_{32} & \mathbf{P'_t}(1/2,1)=k_{42} & \mathbf{P'_t}(1,1)=k_{52}\\
\\
\mathbf{P'_u}(0,0)=k_{03} & \mathbf{P'_u}(1/2,0)=k_{13} & \mathbf{P'_u}(1,0)=k_{23}\\
\mathbf{P'_u}(0,1/2)=k_{04} & \mathbf{P'_u}(1/2,1/2)=k_{14} & \mathbf{P'_u}(1,1/2)=k_{24}\\
\mathbf{P'_u}(0,1)=k_{05} & \mathbf{P'_u}(1/2,1)=k_{15} & \mathbf{P'_u}(1,1)=k_{25}\\
\\
\mathbf{P''_{tu}}(0,0)=k_{33} & \mathbf{P''_{tu}}(1/2,0)=k_{43} & \mathbf{P''_{tu}}(1,0)=k_{53}\\
\mathbf{P''_{tu}}(0,1/2)=k_{34} & \mathbf{P''_{tu}}(1/2,1/2)=k_{44} & \mathbf{P''_{tu}}(1,1/2)=k_{54}\\
\mathbf{P''_{tu}}(0,1)=k_{35} & \mathbf{P''_{tu}}(1/2,1)=k_{45} & \mathbf{P''_{tu}}(1,1)=k_{55}
\end{array}
\qquad (2)
$$

Por tanto la ecuación de la superficie se puede poner en la forma:

$$
\mathbf{P}(t,u)=\begin{pmatrix} t^5\\ t^4\\ t^3\\ t^2\\ t\\ 1\end{pmatrix}^T
\begin{pmatrix} 24 & -68 & 66 & -23 & 0 & 1\\ 0 & 16 & -32 & 16 & 0 & 0\\ -24 & 52 & -34 & 7 & 0 & 0\\ 4 & -12 & 13 & -6 & 1 & 0\\ 16 & -40 & 32 & -8 & 0 & 0\\ 4 & -8 & 5 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}^T
\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} & \mathbf{U}_{02}\\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{U}_{10} & \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12}\\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{U}_{20} & \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22}\\ \mathbf{T}_{00} & \mathbf{T}_{01} & \mathbf{T}_{02} & \mathbf{E}_{00} & \mathbf{E}_{01} & \mathbf{E}_{02}\\ \mathbf{T}_{10} & \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{E}_{10} & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12}\\ \mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{E}_{20} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22}\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 24 & -68 & 66 & -23 & 0 & 1\\ 0 & 16 & -32 & 16 & 0 & 0\\ -24 & 52 & -34 & 7 & 0 & 0\\ 4 & -12 & 13 & -6 & 1 & 0\\ 16 & -40 & 32 & -8 & 0 & 0\\ 4 & -8 & 5 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u^5\\ u^4\\ u^3\\ u^2\\ u\\ 1\end{pmatrix}
\qquad (3)
$$

Siendo:

$$\mathbf{T}_{ij} = \left(\frac{\partial\,\mathbf{P}(t,u)}{\partial\,t}\right)_{t=i,u=j}$$

$$\mathbf{U}_{ij} = \left(\frac{\partial\,\mathbf{P}(t,u)}{\partial\,u}\right)_{t=i,u=j} \qquad (4)$$

$$\mathbf{E}_{ij} = \left(\frac{\partial\,\mathbf{P}''(t,u)}{\partial\,t\partial\,u}\right)_{t=i,u=j}$$

3.2.3.3.-NUEVA FORMULACIÓN PARAMÉTRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 3X3 PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

Se tenía que la ecuación de la superficie era:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 24 & -68 & 66 & -23 & 0 & 1 \\ 0 & 16 & -32 & 16 & 0 & 0 \\ -24 & 52 & -34 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & -12 & 13 & -6 & 1 & 0 \\ 16 & -40 & 32 & -8 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} & \mathbf{U}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{U}_{10} & \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{U}_{20} & \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \\ \mathbf{T}_{00} & \mathbf{T}_{01} & \mathbf{T}_{02} & \mathbf{E}_{00} & \mathbf{E}_{01} & \mathbf{E}_{02} \\ \mathbf{T}_{10} & \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{E}_{10} & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{E}_{20} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 24 & -68 & 66 & -23 & 0 & 1 \\ 0 & 16 & -32 & 16 & 0 & 0 \\ -24 & 52 & -34 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & -12 & 13 & -6 & 1 & 0 \\ 16 & -40 & 32 & -8 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 5 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Efectuando los productos matriciales se llega a:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u) = {} & ha\mathbf{P}_{00} + hb\mathbf{P}_{10} + hc\mathbf{P}_{20} + hd\mathbf{T}_{00} + hg\mathbf{T}_{10} + hf\mathbf{T}_{20} + \\ & ka\mathbf{P}_{01} + kb\mathbf{P}_{11} + kc\mathbf{P}_{21} + kd\mathbf{T}_{01} + kg\mathbf{T}_{11} + kf\mathbf{T}_{21} + \\ & la\mathbf{P}_{02} + lb\mathbf{P}_{12} + lc\mathbf{P}_{22} + ld\mathbf{T}_{02} + lg\mathbf{T}_{12} + lf\mathbf{T}_{22} + \qquad (2) \\ & \mathrm{m}a\mathbf{U}_{00} + mb\mathbf{U}_{10} + mc\mathbf{U}_{20} + \\ & na\mathbf{U}_{01} + nb\mathbf{U}_{11} + nc\mathbf{U}_{21} + \\ & pa\mathbf{U}_{02} + pb\mathbf{U}_{12} + pc\mathbf{U}_{22} \end{aligned}$$

Siendo:

$$
\begin{aligned}
a &= 1 - 23t^2 + 66t^3 - 68t^4 + 24t^5 \\
b &= 16t^2 - 32t^3 + 16t^4 \\
c &= 7t^2 - 34t^3 + 52t^4 - 24t^5 \\
d &= t - 6t^2 + 13t^3 - 12t^4 + 4t^5 \\
g &= -8t^2 + 32t^3 - 40t^4 + 16t^5 \\
f &= -t^2 + 5t^3 - 8t^4 + 4t^5 \\
h &= 1 - 23u^2 + 66u^3 - 68u^4 + 24u^5 \\
k &= 16u^2 - 32u^3 + 16u^4 \\
l &= 7u^2 - 34u^3 + 52u^4 - 24u^5 \\
m &= u - 6u^2 + 13u^3 - 12u^4 + 4u^5 \\
n &= -8u^2 + 32u^3 - 40u^4 + 16u^5 \\
p &= -u^2 + 5u^3 - 8u^4 + 4u^5
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Cada uno de los vectores tiene las siguientes componentes:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,u) &= (x, y, z) \\
\mathbf{P_{ij}} &= (xij, yij, zij) \\
\mathbf{T_{ij}} &= (xtij, ytij, ztij) \\
\mathbf{U_{ij}} &= (xuij, yuij, zuij)
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Si se llevan estos valores a (1) y se desglosa por componentes se obtendrían las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial biquíntica que interpola la red de 5x5 puntos dados con tangentes en ellos también dadas:

$$
\begin{aligned}
x = {} & h(ax00 + bx10 + cx20 + dxt00 + gxt10 + fxt20) + \\
& k(ax01 + bx11 + cx21 + dxt01 + gxt11 + fxt21) + \\
& l(ax02 + bx12 + cx22 + dxt02 + gxt12 + fxt22) + \\
& m(axu00 + bxu10 + cxu20) + \\
& n(axu01 + bxu11 + cxu21) + \\
& p(axu02 + bxu12 + cxu22) \\
y = {} & h(ay00 + by10 + cy20 + dyt00 + gyt10 + fyt20) + \\
& k(ay01 + by11 + cy21 + dyt01 + gyt11 + fyt21) + \\
& l(ay02 + by12 + cy22 + dyt02 + gyt12 + fyt22) + \\
& m(ayu00 + byu10 + cyu20) + \\
& n(ayu01 + byu11 + cyu21) + \\
& p(ayu02 + byu12 + cyu22) \\
z = {} & h(az00 + bz10 + cz20 + dzt00 + gzt10 + fzt20) + \\
& k(az01 + bz11 + cz21 + dzt01 + gzt11 + fzt21) + \\
& l(az02 + bz12 + cz22 + dzt02 + gzt12 + fzt22) + \\
& m(azu00 + bzu10 + czu20) + \\
& n(azu01 + bzu11 + czu21) + \\
& p(azu02 + bzu12 + czu22)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

3.2.4.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 4X4 PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

3.2.4.1.-CONSTRUCCIÓN DE LAS CURVAS GENERADORAS

Supongamos la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, y $\mathbf{P}_3$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, y $\mathbf{T}_3$ (figura 3.2.4.1.- l).

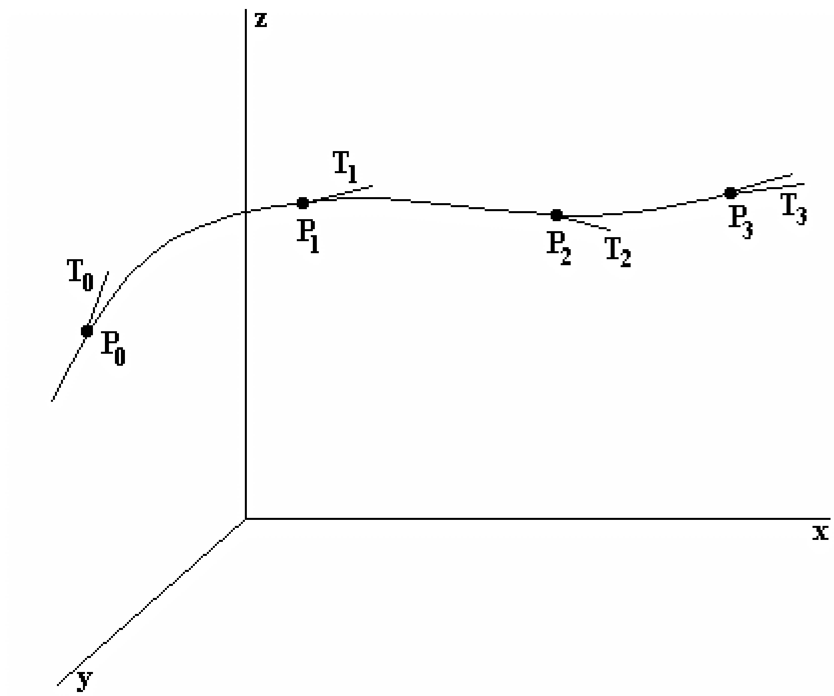


Figura 3.2.4.1.- l. Curva polinomial que pasa por cuatro puntos dados con tangentes en ellos tambien dadas

Su ecuación se puede poner como:

$$\mathbf{P}(t) = f_0(t)\mathbf{P}_0 + f_1(t)\mathbf{P}_1 + f_2(t)\mathbf{P}_2 + f_3(t)\mathbf{P}_3 + g_0(t)\mathbf{T}_0 + g_1(t)\mathbf{T}_1 + g_2(t)\mathbf{T}_2 + g_3(t)\mathbf{T}_3 \qquad (1)$$

y la ecuación de la tangente sería:

$$\mathbf{P}'(t) = f_0'(t)\mathbf{P}_0 + f_1'(t)\mathbf{P}_1 + f'_2(t)\mathbf{P}_2 + f'_3(t)\mathbf{P}_3 + g'_0(t)\mathbf{T}_0 + g'_1(t)\mathbf{T}_1 + g'_2(t)\mathbf{T}_2 + g'_3(t)\mathbf{T}_3 \qquad (2)$$

con las restricciones en las funciones $f_i(t)$ y $g_i(t)$:

t	$f_0(t)$	$f_0'(t)$	$f_1(t)$	$f_1'(t)$	$f_2(t)$	$f'_2(t)$	$f_3(t)$	$f'_3(t)$
t_0	1	0	0	0	0	0	0	0
t_1	0	0	1	0	0	0	0	0
t_2	0	0	0	0	1	0	0	0
t_3	0	0	0	0	0	0	1	0

u	$g_0(t)$	$g'_0(t)$	$g_1(t)$	$g'_1(t)$	$g_2(t)$	$g'_2(t)$	$g_3(t)$	$g'_3(t)$
u_0	0	1	0	0	0	0	0	0
u_1	0	0	0	1	0	0	0	0
u_2	0	0	0	0	0	1	0	0
u_3	0	0	0	0	0	0	0	1

Cumpliéndose que:

$$\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0 \qquad \mathbf{P}(t_1) = \mathbf{P}_1 \qquad \mathbf{P}(t_2) = \mathbf{P}_2 \qquad \mathbf{P}(t_3) = \mathbf{P}_3$$
$$\mathbf{P}'(t_0) = \mathbf{T}_0 \qquad \mathbf{P}'(t_1) = \mathbf{T}_1 \qquad \mathbf{P}'(t_2) = \mathbf{T}_2 \qquad \mathbf{P}'(t_3) = \mathbf{T}_3 \qquad (3)$$

Calculando los $f_0(t)$ $f_1(t)$ $f_2(t)$ $g_0(t)$ $g_1(t)$ $g_2(t)$ que serán polinomios de Hermite de la forma:

$$f_0(t) = (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 (t - t_3)^2 (a_0 + b_0 t)$$

con las restricciones de: $f_0(t_0) = 1 \quad f'_0(t_0) = 0$

$$g_0(t) = (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 (t - t_3)^2 (t - t_0) / (t_0 - t_1)^2 (t_0 - t_2)^2 (t_0 - t_3)^2$$

$$f_1(t) = (t - t_0)^2 (t - t_2)^2 (t - t_3)^2 (a_1 + b_1 t)$$

con las restricciones de: $f_1(t_1) = 1 \quad f'_1(t_1) = 0$ (4)

$$g_1(t) = (t - t_0)^2 (t - t_2)^2 (t - t_3)^2 (t - t_1) / (t_1 - t_0)^2 (t_1 - t_2)^2 (t_1 - t_3)^2$$

$$f_2(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 (t - t_3)^2 (a_2 + b_2 t)$$

con las restricciones de : $f_2(t_2) = 1 \quad f'_2(t_2) = 0$

$$g_2(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 (t - t_3)^2 (t - t_2) / (t_2 - t_0)^2 (t_2 - t_1)^2 (t_2 - t_3)^2$$

$$f_3(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 (a_3 + b_3 t)$$

con las restricciones de: $f_3(t_3) = 1 \qquad f'_3(t_3) = 0$

$$g_3(t) = (t - t_0)^2(t - t_1)^2(t - t_2)^2(t - t_3)/(t_3 - t_0)^2(t_3 - t_1)^2(t_3 - t_2)^2$$

Resolviendo los sistemas lineales en a_0, b_0, a_l, b_1, a_2, b_2 , a_3, b_3 se obtienen estos valores:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -7t_0^3 + 5t_0^2t_1 + 5t_0^2t_2 - 3t_0t_1t_2 + 5t_0^2t_3 - 3t_0t_1t_3 - 3t_0t_2t_3 + \\
&\quad t_1t_2t_3/(t_1 - t_0)^3(t_2 - t_0)^3(t_3 - t_0)^3 \\
b_0 &= 2(3t_0^2 - 2t_0t_1 - 2t_0t_2 + t_1t_2 - 2t_0t_3 + t_1t_3 + t_2t_3)/(t_1 - t_0)^3(t_2 - t_0)^3(t_3 - t_0)^3 \\
a_1 &= -3t_0t_1 + 5t_1^2 + 5t_0t_1^2 - 7t_1^3 + t_0t_2 - 3t_1t_2 + -3t_0t_1t_2 - \\
&\quad 5t_1^2t_2/(t_0 - t_1)^3(t_2 - t_1)^3(t_3 - t_1)^3 \\
b_1 &= 2(t_0 - 2t_1 - 2t_0t_1 + 3t_1^2 + t_2 + t_0t_2 - 2t_1t_2)/(t_0 - t_1)^3(t_2 - t_1)^3(t_3 - t_1)^3 \\
a_2 &= -(3t_0t_1t_2 - 5t_0t_2^2 - 5t_1t_2^2 + 7t_2^3 - t_0t_1t_3 + 3t_0t_2t_3 + 3t_1t_2t_3 - \\
&\quad 5t_2^2t_3/(t_1 - t_2)^3(t_0 - t_2)^3(t_3 - t_2)^3 \\
b_2 &= -2(-t_0t_1 + 2t_0t_2 + t_1)/(t_0 - t_2)^3(t_1 - t_2)^3 \\
a_3 &= -(t_0t_1t_2 + 3t_0t_1t_3 + 3t_0t_2t_3 + 3t_1t_2t_3 - 5t_0t_3^2 + 5t_1t_3^2 - 5t_2^2t_3 + \\
&\quad 7t_3^2/(t_0 - t_3)^3(t_1 - t_3)^3(t_2 - t_3)^3 \\
b_3 &= -2(-t_0t_1 - t_0t_2 - t_1t_2 + 2t_0t_3 + 2t_1t_3 + 2t_2t_3 - 3t_3^2)/(t_0 - t_3)^3(t_1 - t_3)^3(t_2 - t_3)^3
\end{aligned} \tag{5}$$

Entrando con estos valores en la fórmula de **P**(t) se tendría:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= f_0(t)\mathbf{P}_0 + f_1(t)\mathbf{P}_1 + f_2(t)\mathbf{P}_2 + f_3(t)\mathbf{P}_3 + \\
&\quad g_0(t)\mathbf{T}_0 + g_1(t)\mathbf{T}_1 + g_2(t)\mathbf{T}_2 + g_3(t)\mathbf{T}_3 = \\
&(t - t_1)^2(t - t_2)^2(t - t_3)^2(a_0 + b_0t)\mathbf{P}_0 + \\
&(t - t_0)^2(t - t_2)^2(t - t_3)^2(a_1 + b_1t)\mathbf{P}_1 + \\
&(t - t_0)^2(t - t_1)^2(t - t_3)^2(a_2 + b_2t)\mathbf{P}_2 + \\
&(t - t_0)^2(t - t_1)^2(t - t_2)^2(a_3 + b_3t)\mathbf{P}_3 + \\
&(t - t_1)^2(t - t_2)^2(t - t_3)^2(t - t_0)/(t_0 - t_1)^2(t_0 - t_2)^2(t_0 - t_3)^2\mathbf{T}_0 + \\
&(t - t_0)^2(t - t_2)^2(t - t_3)^2(t - t_1)/(t_1 - t_0)^2(t_1 - t_2)^2(t_1 - t_3)^2\mathbf{T}_1 + \\
&(t - t_0)^2(t - t_1)^2(t - t_3)^2(t - t_2)/(t_2 - t_0)^2(t_2 - t_1)^2(t_2 - t_3)^2\mathbf{T}_2 + \\
&(t - t_0)^2(t - t_1)^2(t - t_2)^2(t - t_3)/(t_3 - t_0)^2(t_3 - t_1)^2(t_3 - t_2)^2\mathbf{T}_3
\end{aligned} \tag{6}$$

Operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} & c_{05} & c_{06} & c_{07} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} \\ c_{40} & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} \\ c_{50} & c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & c_{57} \\ c_{60} & c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & c_{67} \\ c_{70} & c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & c_{77} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^7 \\ t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Siendo la matriz C:

$$\left(\begin{array}{cc} b_0 & a_0 - 2b_0(t_1 + t_2 + t_3) \\ b_1 & a_1 - 2b_1(t_0 + t_2 + t_3) \\ b_2 & a_2 - 2b_2(t_0 + t_1 + t_3) \\ b_3 & a_3 - 2b_3(t_0 + t_1 + t_2) \\ \dfrac{1}{(t_1 - t_0)^2(t_2 - t_0)^2(t_3 - t_0)^2} & -t_0 - 2(t_1 + t_2 + t_3) \\ \dfrac{1}{(t_0 - t_1)^2(t_2 - t_1)^2(t_3 - t_1)^2} & -t_1 - 2(t_0 + t_2 + t_3) \\ \dfrac{1}{(t_0 - t_2)^2(t_1 - t_2)^2(t_3 - t_2)^2} & -t_2 - 2(t_0 + t_1 + t_3) \\ \dfrac{1}{(t_0 - t_3)^2(t_1 - t_3)^2(t_2 - t_3)^2} & -t_3 - 2(t_0 + t_1 + t_2) \end{array} \right.$$

$$-2a_0(t_1+t_2+t_3)+b_0(t_1^2+t_2^2+t_3^2)+4b_0(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)$$
$$-2a_1(t_1+t_2+t_3)+b_1(t_0^2+t_2^2+t_3^2)+4b_1(t_0t_2+t_0t_3+t_2t_3)$$
$$-2a_2(t_1+t_2+t_3)+b_2(t_0^2+t_1^2+t_3^2)+4b_2(t_0t_1+t_0t_3+t_1t_3)$$
$$-2a_3(t_1+t_2+t_3)+b_3(t_0^2+t_1^2+t_2^2)+4b_3(t_0t_1+t_0t_2+t_1t_2)$$
$$2t_0(t_1+t_2+t_3)+4(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)+\frac{(t_1^2+t_2^2+t_3^2)}{(t_1-t_0)^2(t_2-t_0)^2(t_3-t_0)^2}$$
$$2t_1(t_0+t_2+t_3)+4(t_0t_2+t_0t_3+t_2t_3)+\frac{(t_0^2+t_2^2+t_3^2)}{(t_0-t_1)^2(t_2-t_1)^2(t_3-t_1)^2}$$
$$2t_2(t_0+t_1+t_3)+4(t_0t_1+t_0t_3+t_1t_3)+\frac{(t_0^2+t_1^2+t_3^2)}{(t_0-t_2)^2(t_1-t_2)^2(t_3-t_2)^2}$$
$$2t_3(t_0+t_1+t_2)+4(t_0t_1+t_0t_2+t_1t_2)+\frac{(t_0^2+t_1^2+t_2^2)}{(t_0-t_3)^2(t_1-t_3)^2(t_2-t_3)^2}$$
$$a_0(t_1^2+t_2^2+t_3^2)-2b_0(t_1^2t_2+t_1t_2^2+t_1^2t_3+t_1t_3^2+t_2^2t_3+t_2t_3^2)+4a_0(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)+8b_0t_1t_2t_3$$
$$a_1(t_0^2+t_2^2+t_3^2)-2b_1(t_0^2t_2+t_0t_2^2+t_0^2t_3+t_0t_3^2+t_2^2t_3+t_2t_3^2)+4a_1(t_0t_2+t_0t_3+t_2t_3)+8b_1t_0t_2t_3$$
$$a_2(t_0^2+t_1^2+t_3^2)-2b_2(t_0^2t_1+t_0t_1^2+t_0^2t_3+t_0t_3^2+t_1^2t_3+t_1t_3^2)+4a_2(t_0t_1+t_0t_3+t_1t_3)+8b_2t_0t_1t_3$$
$$a_3(t_0^2+t_1^2+t_2^2)-2b_3(t_0^2t_1+t_0t_1^2+t_0^2t_2+t_0t_2^2+t_1^2t_2+t_1t_2^2)+4a_3(t_0t_1+t_0t_2+t_1t_2)+8b_3t_0t_1t_2$$
$$\frac{t_0(t_1^2+t_2^2+t_3^2)+(t_1^2t_2+t_1t_2^2+t_1^2t_3+t_1t_3^2+t_2^2t_3+t_2t_3^2)+4(t_0t_1t_2+t_0t_1t_3+t_0t_2t_3)+8t_1t_2t_3}{(t_1-t_0)^2(t_2-t_0)^2(t_3-t_0)^2}$$
$$\frac{t_1(t_0^2+t_2^2+t_3^2)+(t_0^2t_2+t_0t_2^2+t_0^2t_3+t_0t_3^2+t_2^2t_3+t_2t_3^2)+4(t_1t_0t_2+t_1t_0t_3+t_1t_2t_3)+8t_0t_2t_3}{(t_0-t_1)^2(t_2-t_1)^2(t_3-t_1)^2}$$
$$\frac{t_2(t_0^2+t_1^2+t_3^2)+(t_0^2t_1+t_0t_1^2+t_0^2t_3+t_0t_3^2+t_1^2t_3+t_1t_3^2)+4(t_2t_0t_1+t_2t_0t_3+t_2t_1t_3)+8t_0t_1t_3}{(t_0-t_2)^2(t_1-t_2)^2(t_3-t_2)^2}$$
$$\frac{t_3(t_0^2+t_1^2+t_2^2)+(t_0^2t_1+t_0t_1^2+t_0^2t_2+t_0t_2^2+t_1^2t_2+t_1t_2^2)+4(t_3t_0t_1+t_3t_0t_2+t_3t_1t_2)+8t_0t_1t_2}{(t_0-t_3)^2(t_1-t_3)^2(t_2-t_3)^2}$$

$$-2a_0(t_1^2t_2 + t_1t_2^2 + t_1^2t_3 + t_1t_3^2 + t_2^2t_3 + t_2t_3^2) + b_0(t_1^2t_2^2 + t_1^2t_3^2 + t_2^2t_3^2) +$$
$$4b_0(t_1^2t_2t_3 + t_1t_2^2t_3 + t_1t_2t_3^2) - 8a_0t_1t_2t_3$$
$$-2a_1(t_0^2t_2 + t_0t_2^2 + t_0^2t_3 + t_0t_3^2 + t_2^2t_3 + t_2t_3^2) + b_1(t_0^2t_2^2 + t_0^2t_3^2 + t_2^2t_3^2) +$$
$$4b_1(t_0^2t_2t_3 + t_0t_2^2t_3 + t_0t_2t_3^2) - 8a_1t_0t_2t_3$$
$$-2a_2(t_0^2t_1 + t_0t_1^2 + t_0^2t_3 + t_0t_3^2 + t_1^2t_3 + t_1t_3^2) + b_2(t_0^2t_1^2 + t_0^2t_3^2 + t_1^2t_3^2) +$$
$$4b_2(t_0^2t_1t_3 + t_0t_1^2t_3 + t_0t_1t_3^2) - 8a_2t_0t_1t_3$$
$$-2a_3(t_0^2t_1 + t_0t_1^2 + t_0^2t_2 + t_0t_2^2 + t_1^2t_2 + t_1t_2^2) + b_3(t_0^2t_1^2 + t_0^2t_2^2 + t_1^2t_2^2) +$$
$$4b_3(t_0^2t_1t_2 + t_0t_1^2t_2 + t_0t_1t_2^2) - 8a_3t_0t_1t_2$$
$$2t_0(t_1^2t_2 + t_1t_2^2 + t_1^2t_3 + t_1t_3^2 + t_2^2t_3 + t_2t_3^2) + (t_1^2t_2^2 + t_1^2t_3^2 + t_2^2t_3^2) +$$
$$4(t_1^2t_2t_3 + t_1t_2^2t_3 + t_1t_2t_3^2) + \frac{8t_0t_1t_2t_3}{(t_1 - t_0)^2(t_2 - t_0)^2(t_3 - t_0)^2}$$
$$2t_1(t_0^2t_2 + t_0t_2^2 + t_0^2t_3 + t_0t_3^2 + t_2^2t_3 + t_2t_3^2) + (t_0^2t_2^2 + t_0^2t_3^2 + t_2^2t_3^2) +$$
$$4(t_0^2t_2t_3 + t_0t_2^2t_3 + t_0t_2t_3^2) + \frac{8t_0t_1t_2t_3}{(t_0 - t_1)^2(t_2 - t_1)^2(t_3 - t_1)^2}$$
$$2t_2(t_0^2t_1 + t_0t_1^2 + t_0^2t_3 + t_0t_3^2 + t_1^2t_3 + t_1t_3^2) + (t_0^2t_1^2 + t_0^2t_3^2 + t_1^2t_3^2) +$$
$$4(t_0^2t_1t_3 + t_0t_1^2t_3 + t_0t_1t_3^2) + \frac{8t_0t_1t_2t_3}{(t_0 - t_2)^2(t_1 - t_2)^2(t_3 - t_2)^2}$$
$$2t_3(t_0^2t_1 + t_0t_1^2 + t_0^2t_2 + t_0t_2^2 + t_1^2t_2 + t_1t_2^2) + (t_0^2t_1^2 + t_0^2t_2^2 + t_1^2t_2^2) +$$
$$4(t_0^2t_1t_2 + t_0t_1^2t_2 + t_0t_1t_2^2) + \frac{8t_0t_1t_2t_3}{(t_0 - t_3)^2(t_1 - t_3)^2(t_2 - t_3)^2}$$
$$4a_0(t_1^2t_2t_3 + t_1t_2^2t_3 + t_1t_2t_3^2) - 2b_0(t_1^2t_2^2t_3 + t_1^2t_2t_3^2 + t_1t_2^2t_3^2) + a_0(t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3)$$
$$4a_1(t_0^2t_2t_3 + t_0t_2^2t_3 + t_0t_2t_3^2) - 2b_1(t_0^2t_2^2t_3 + t_0^2t_2t_3^2 + t_0t_2^2t_3^2) + a_1(t_0t_2 + t_0t_3 + t_2t_3)$$
$$4a_2(t_0^2t_1t_3 + t_0t_1^2t_3 + t_0t_1t_3^2) - 2b_2(t_0^2t_1^2t_3 + t_0^2t_1t_3^2 + t_0t_1^2t_3^2) + a_2(t_0t_1 + t_0t_3 + t_1t_3)$$
$$4a_3(t_0^2t_1t_2 + t_0t_1^2t_2 + t_0t_1t_2^2) - 2b_3(t_0^2t_1^2t_2 + t_0^2t_1t_2^2 + t_0t_1^2t_2^2) + a_3(t_0t_1 + t_0t_2 + t_1t_2)$$
$$\frac{-4t_0(t_1^2t_2t_3 + t_1t_2^2t_3 + t_1t_2t_3^2) + 2(t_1^2t_2^2t_3 + t_1^2t_2t_3^2 + t_1t_2^2t_3^2) + t_0(t_1^2t_2^2 + t_1^2t_3^2 + t_2^2t_3^2)}{(t_1 - t_0)^2(t_2 - t_0)^2(t_3 - t_0)^2}$$
$$\frac{-4t_1(t_0^2t_2t_3 + t_0t_2^2t_3 + t_0t_2t_3^2) + 2(t_0^2t_2^2t_3 + t_0^2t_2t_3^2 + t_0t_2^2t_3^2) + t_0(t_0^2t_2^2 + t_0^2t_3^2 + t_2^2t_3^2)}{(t_0 - t_1)^2(t_2 - t_1)^2(t_3 - t_1)^2}$$
$$\frac{-4t_2(t_0^2t_1t_3 + t_0t_1^2t_3 + t_0t_1t_3^2) + 2(t_0^2t_1^2t_3 + t_0^2t_1t_3^2 + t_0t_1^2t_3^2) + t_0(t_0^2t_1^2 + t_0^2t_3^2 + t_1^2t_3^2)}{(t_0 - t_2)^2(t_1 - t_2)^2(t_3 - t_2)^2}$$
$$\frac{-4t_3(t_0^2t_1t_2 + t_0t_1^2t_2 + t_0t_1t_2^2) + 2(t_0^2t_1^2t_2 + t_0^2t_1t_2^2 + t_0t_1^2t_2^2) + t_0(t_0^2t_1^2 + t_0^2t_2^2 + t_1^2t_2^2)}{(t_0 - t_3)^2(t_1 - t_3)^2(t_2 - t_3)^2}$$

$$
\begin{array}{c}
-2a_0(t_1^2t_2^2t_3 + t_1^2t_2t_3^2 + t_1t_2^2t_3^2) + b_0t_1^2t_2^2t_3^2 \\
-2a_1(t_0^2t_2^2t_3 + t_0^2t_2t_3^2 + t_0t_2^2t_3^2) + b_1t_0^2t_2^2t_3^2 \\
-2a_2(t_0^2t_1^2t_3 + t_0^2t_1t_3^2 + t_0t_1^2t_3^2) + b_2t_0^2t_1^2t_3^2 \\
-2a_3(t_0^2t_1^2t_2 + t_0^2t_1t_2^2 + t_0t_1^2t_2^2) + b_3t_0^2t_1^2t_2^2 \\
2t_0(t_1^2t_2^2t_3 + + t_1^2t_2t_3^2 + t_1t_2^2t_3^2) + \dfrac{t_1^2t_2^2t_3^2}{(t_1-t_0)^2(t_2-t_0)^2(t_3-t_0)^2} \\
2t_1(t_0^2t_2^2t_3 + + t_0^2t_2t_3^2 + t_0t_2^2t_3^2) + \dfrac{t_0^2t_2^2t_3^2}{(t_0-t_1)^2(t_2-t_1)^2(t_3-t_1)^2} \\
2t_2(t_0^2t_1^2t_3 + + t_0^2t_1t_3^2 + t_0t_1^2t_3^2) + \dfrac{t_0^2t_1^2t_3^2}{(t_0-t_2)^2(t_1-t_2)^2(t_3-t_2)^2} \\
2t_3(t_0^2t_1^2t_2 + + t_0^2t_1t_2^2 + t_0t_1^2t_2^2) + \dfrac{t_0^2t_1^2t_2^2}{(t_0-t_3)^2(t_1-t_3)^2(t_2-t_3)^2}
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{c}
a_0t_1^2t_2^2t_3^2 \\
a_1t_0^2t_2^2t_3^2 \\
a_2t_0^2t_1^2t_3^2 \\
a_3t_0^2t_1^2t_2^2 \\
\dfrac{t_0t_1^2t_2^2t_3^2}{(t_1-t_0)^2(t_2-t_0)^2(t_3-t_0)^2} \\
\dfrac{t_1t_0^2t_2^2t_3^2}{(t_0-t_1)^2(t_2-t_1)^2(t_3-t_1)^2} \\
\dfrac{t_2t_0^2t_1^2t_3^2}{(t_0-t_2)^2(t_1-t_2)^2(t_3-t_2)^2} \\
\dfrac{t_3t_0^2t_1^2t_2^2}{(t_0-t_3)^2(t_1-t_3)^2(t_2-t_3)^2}
\end{array}
\right)
\qquad (8)
$$

Si se hace $t_0=0$, $t_1=1/3$, $t_2=2/3$, $t_3=1$ la ecuación de la curva quedaría:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 891/4 & -3483/4 & 2709/2 & -2115/2 & 1691/4 & -291/4 & 0 & 1 \\ 2187/4 & -3645/2 & 8991/4 & -1215 & 243 & 0 & 0 & 0 \\ -2187/4 & 8019/4 & -5589/2 & 3645/2 & -2187/4 & 243/4 & 0 & 0 \\ -891/4 & 1377/2 & -3231/4 & 450 & -119 & 12 & 0 & 0 \\ 81/4 & -81 & 261/2 & -108 & 193/4 & -11 & 1 & 0 \\ 729/4 & -2673/4 & 3807/4 & -2619/4 & 216 & -27 & 0 & 0 \\ 729/4 & -1215/2 & 1539/2 & -459 & 513/4 & -27/2 & 0 & 0 \\ 81/4 & -243/4 & 279/4 & -153/4 & 10 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^7 \\ t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

3.2.4.2. CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE

Haciendo el producto cartesiano de la ecuación anterior por sí misma (Figura 3.2.4.2.-1) se llega a:

$$\mathbf{P}(t,u)=\begin{pmatrix} t^7 & t^6 & t^5 & t^4 & t^3 & t^2 & t & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
891/4 & -3483/4 & 2709/2 & -2115/2 & 1691/4 & -291/4 & 0 & 1\\
2187/4 & -3645/2 & 8991/4 & -1215 & 243 & 0 & 0 & 0\\
-2187/4 & 8019/4 & -5589/2 & 3645/2 & -2187/4 & 243/4 & 0 & 0\\
-891/4 & 1377/2 & -3231/4 & 450 & -119 & 12 & 0 & 0\\
81/4 & -81 & 261/2 & -108 & 193/4 & -11 & 1 & 0\\
729/4 & -2673/4 & 3807/4 & -2619/4 & 216 & -27 & 0 & 0\\
729/4 & -1215/2 & 1539/2 & -459 & 513/4 & -27/2 & 0 & 0\\
81/4 & -243/4 & 279/4 & -153/4 & 10 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix}
\mathrm{k}_{00} & \mathrm{k}_{01} & \mathrm{k}_{02} & \mathrm{k}_{03} & \mathrm{k}_{04} & \mathrm{k}_{05} & \mathrm{k}_{06} & \mathrm{k}_{07}\\
\mathrm{k}_{10} & \mathrm{k}_{11} & \mathrm{k}_{12} & \mathrm{k}_{13} & \mathrm{k}_{14} & \mathrm{k}_{15} & \mathrm{k}_{16} & \mathrm{k}_{17}\\
\mathrm{k}_{20} & \mathrm{k}_{21} & \mathrm{k}_{22} & \mathrm{k}_{23} & \mathrm{k}_{24} & \mathrm{k}_{25} & \mathrm{k}_{26} & \mathrm{k}_{27}\\
\mathrm{k}_{30} & \mathrm{k}_{31} & \mathrm{k}_{32} & \mathrm{k}_{33} & \mathrm{k}_{34} & \mathrm{k}_{35} & \mathrm{k}_{36} & \mathrm{k}_{37}\\
\mathrm{k}_{40} & \mathrm{k}_{41} & \mathrm{k}_{42} & \mathrm{k}_{43} & \mathrm{k}_{44} & \mathrm{k}_{45} & \mathrm{k}_{46} & \mathrm{k}_{47}\\
\mathrm{k}_{50} & \mathrm{k}_{51} & \mathrm{k}_{52} & \mathrm{k}_{53} & \mathrm{k}_{54} & \mathrm{k}_{55} & \mathrm{k}_{56} & \mathrm{k}_{57}\\
\mathrm{k}_{60} & \mathrm{k}_{61} & \mathrm{k}_{62} & \mathrm{k}_{63} & \mathrm{k}_{64} & \mathrm{k}_{65} & \mathrm{k}_{66} & \mathrm{k}_{67}\\
\mathrm{k}_{70} & \mathrm{k}_{71} & \mathrm{k}_{72} & \mathrm{k}_{73} & \mathrm{k}_{74} & \mathrm{k}_{75} & \mathrm{k}_{76} & \mathrm{k}_{77}
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
891/4 & -3483/4 & 2709/2 & -2115/2 & 1691/4 & -291/4 & 0 & 1\\
2187/4 & -3645/2 & 8991/4 & -1215 & 243 & 0 & 0 & 0\\
-2187/4 & 8019/4 & -5589/2 & 3645/2 & -2187/4 & 243/4 & 0 & 0\\
-891/4 & 1377/2 & -3231/4 & 450 & -119 & 12 & 0 & 0\\
81/4 & -81 & 261/2 & -108 & 193/4 & -11 & 1 & 0\\
729/4 & -2673/4 & 3807/4 & -2619/4 & 216 & -27 & 0 & 0\\
729/4 & -1215/2 & 1539/2 & -459 & 513/4 & -27/2 & 0 & 0\\
81/4 & -243/4 & 279/4 & -153/4 & 10 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u^7\\ u^6\\ u^5\\ u^4\\ u^3\\ u^2\\ u\\ 1\end{pmatrix} \qquad (1)$$

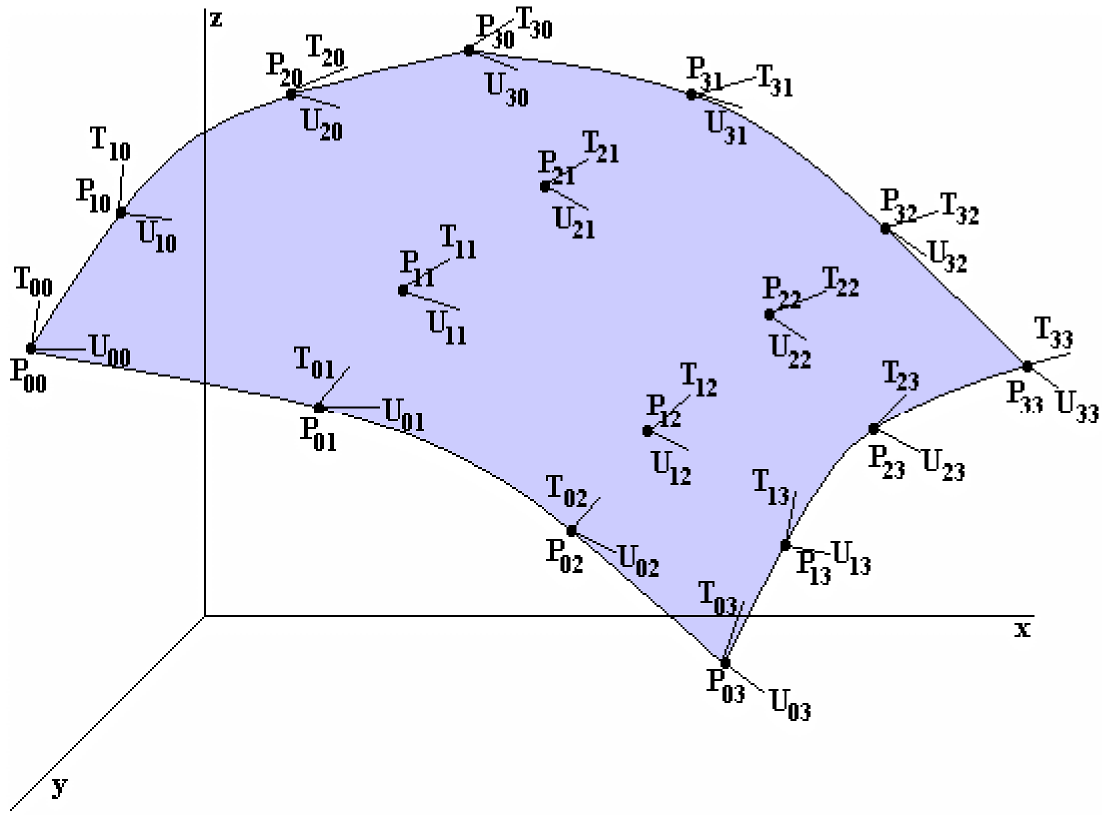


Figura 3.2.4.2.-1. Superficie polinomial que pasa por una red de 4x4 puntos dados con tangentes en ellos tambien dadas

Veamos el significado geométrico de los componentes de la matriz k_{ij}

Dando valores a t y u:

$$t = 0, 1/3, 2/3, 1$$
$$u = 0, 1/3, 2/3, 1$$

se tiene que:

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{P}(0,0)=k_{00} & \mathbf{P}(1/3,0)=k_{10} & \mathbf{P}(2/3,0)=k_{20} & \mathbf{P}(1,0)=k_{30}\\
\mathbf{P}(0,1/3)=k_{01} & \mathbf{P}(1/3,1/3)=k_{11} & \mathbf{P}(2/3,1/3)=k_{21} & \mathbf{P}(1,1/3)=k_{31}\\
\mathbf{P}(0,2/3)=k_{02} & \mathbf{P}(1/3,2/3)=k_{12} & \mathbf{P}(2/3,2/3)=k_{22} & \mathbf{P}(1,2/3)=k_{32}\\
\mathbf{P}(0,1)=k_{03} & \mathbf{P}(1/3,1)=k_{13} & \mathbf{P}(2/3,1)=k_{23} & \mathbf{P}(1,1)=k_{33}\\
\\
\mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(0,0)=k_{40} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(1/3,0)=k_{41} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(2/3,0)=k_{42} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(1,0)=k_{43}\\
\mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(0,1/3)=k_{50} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(1/3,1/3)=k_{51} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(2/3,1/3)=k_{52} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(1,1/3)=k_{53}\\
\mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(0,2/3)=k_{60} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(1/3,2/3)=k_{61} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(2/3,2/3)=k_{62} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(1,2/3)=k_{63}\\
\mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(0,1)=k_{70} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(1/3,1)=k_{71} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(2/3,1)=k_{72} & \mathbf{P}'_{\mathbf{t}}(1,1)=k_{73}\\
\\
\mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(0,0)=k_{04} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(1/3,0)=k_{05} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(2/3,0)=k_{06} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(1,0)=k_{07}\\
\mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(0,1/3)=k_{14} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(1/3,1/3)=k_{15} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(2/3,1/3)=k_{16} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(1,1/3)=k_{17}\\
\mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(0,2/3)=k_{24} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(1/3,2/3)=k_{25} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(2/3,2/3)=k_{26} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(1,2/3)=k_{27}\\
\mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(0,1)=k_{34} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(1/3,1)=k_{35} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(2/3,1)=k_{36} & \mathbf{P}'_{\mathbf{u}}(1,1)=k_{37}\\
\\
\mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(0,0)=k_{44} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(1/3,0)=k_{45} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(2/3,0)=k_{46} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(1,0)=k_{47}\\
\mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(0,1/3)=k_{54} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(1/3,1/3)=k_{55} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(2/3,1/3)=k_{56} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(1,1/3)=k_{57}\\
\mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(0,2/3)=k_{64} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(1/3,2/3)=k_{65} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(2/3,2/3)=k_{66} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(1,2/3)=k_{67}\\
\mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(0,1)=k_{74} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(1/3,1)=k_{75} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(2/3,1)=k_{76} & \mathbf{P}''_{\mathbf{tu}}(1,1)=k_{77}
\end{array}
\qquad (2)
$$

Por tanto la ecuación de la superficie se puede poner en la forma:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^7 & t^6 & t^5 & t^4 & t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
891/4 & -3483/4 & 2709/2 & -2115/2 & 1691/4 & -291/4 & 0 & 1 \\
2187/4 & -3645/2 & 8991/4 & -1215 & 243 & 0 & 0 & 0 \\
-2187/4 & 8019/4 & -5589/2 & 3645/2 & -2187/4 & 243/4 & 0 & 0 \\
-891/4 & 1377/2 & -3231/4 & 450 & -119 & 12 & 0 & 0 \\
81/4 & -81 & 261/2 & -108 & 193/4 & -11 & 1 & 0 \\
729/4 & -2673/4 & 3807/4 & -2619/4 & 216 & -27 & 0 & 0 \\
729/4 & -1215/2 & 1539/2 & -459 & 513/4 & -27/2 & 0 & 0 \\
81/4 & -243/4 & 279/4 & -153/4 & 10 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} & \mathbf{U}_{02} & \mathbf{U}_{03} \\
\mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{U}_{10} & \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{13} \\
\mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{U}_{20} & \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} & \mathbf{U}_{23} \\
\mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{U}_{30} & \mathbf{U}_{31} & \mathbf{U}_{32} & \mathbf{U}_{33} \\
\mathbf{T}_{00} & \mathbf{T}_{01} & \mathbf{T}_{02} & \mathbf{T}_{03} & \mathbf{E}_{00} & \mathbf{E}_{01} & \mathbf{E}_{02} & \mathbf{E}_{03} \\
\mathbf{T}_{10} & \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} & \mathbf{E}_{10} & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} \\
\mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{E}_{20} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \\
\mathbf{T}_{30} & \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & \mathbf{T}_{33} & \mathbf{E}_{30} & \mathbf{E}_{31} & \mathbf{E}_{32} & \mathbf{E}_{33}
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
891/4 & -3483/4 & 2709/2 & -2115/2 & 1691/4 & -291/4 & 0 & 1 \\
2187/4 & -3645/2 & 8991/4 & -1215 & 243 & 0 & 0 & 0 \\
-2187/4 & 8019/4 & -5589/2 & 3645/2 & -2187/4 & 243/4 & 0 & 0 \\
-891/4 & 1377/2 & -3231/4 & 450 & -119 & 12 & 0 & 0 \\
81/4 & -81 & 261/2 & -108 & 193/4 & -11 & 1 & 0 \\
729/4 & -2673/4 & 3807/4 & -2619/4 & 216 & -27 & 0 & 0 \\
729/4 & -1215/2 & 1539/2 & -459 & 513/4 & -27/2 & 0 & 0 \\
81/4 & -243/4 & 279/4 & -153/4 & 10 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u^7 \\ u^6 \\ u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Siendo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_{ij} &= \left(\frac{\partial\, \mathbf{P}(t,u)}{\partial\, t} \right)_{t=i,u=j} \\
\mathbf{U}_{ij} &= \left(\frac{\partial\, \mathbf{P}(t,u)}{\partial\, u} \right)_{t=i,u=j} \qquad (4) \\
\mathbf{E}_{ij} &= \left(\frac{\partial\, \mathbf{P}''(t,u)}{\partial\, t \partial\, u} \right)_{t=i,u=j}
\end{aligned}
$$

3.2.4.3.-NUEVA FORMULACION PARAMETRICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 4X4 PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

Se tenía que la ecuación de la superficie era:

$$\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^7 & t^6 & t^5 & t^4 & t^3 & t^2 & t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 891/4 & -3483/4 & 2709/2 & -2115/2 & 1691/4 & -291/4 & 0 & 1 \\ 2187/4 & -3645/2 & 8991/4 & -1215 & 243 & 0 & 0 & 0 \\ -2187/4 & 8019/4 & -5589/2 & 3645/2 & -2187/4 & 243/4 & 0 & 0 \\ -891/4 & 1377/2 & -3231/4 & 450 & -119 & 12 & 0 & 0 \\ 81/4 & -81 & 261/2 & -108 & 193/4 & -11 & 1 & 0 \\ 729/4 & -2673/4 & 3807/4 & -2619/4 & 216 & -27 & 0 & 0 \\ 729/4 & -1215/2 & 1539/2 & -459 & 513/4 & -27/2 & 0 & 0 \\ 81/4 & -243/4 & 279/4 & -153/4 & 10 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} & \mathbf{U}_{02} & \mathbf{U}_{03} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{U}_{10} & \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{13} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{U}_{20} & \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} & \mathbf{U}_{23} \\ \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{U}_{30} & \mathbf{U}_{31} & \mathbf{U}_{32} & \mathbf{U}_{33} \\ \mathbf{T}_{00} & \mathbf{T}_{01} & \mathbf{T}_{02} & \mathbf{T}_{03} & \mathbf{E}_{00} & \mathbf{E}_{01} & \mathbf{E}_{02} & \mathbf{E}_{03} \\ \mathbf{T}_{10} & \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} & \mathbf{E}_{10} & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} \\ \mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{E}_{20} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} \\ \mathbf{T}_{30} & \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & \mathbf{T}_{33} & \mathbf{E}_{30} & \mathbf{E}_{31} & \mathbf{E}_{32} & \mathbf{E}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 891/4 & -3483/4 & 2709/2 & -2115/2 & 1691/4 & -291/4 & 0 & 1 \\ 2187/4 & -3645/2 & 8991/4 & -1215 & 243 & 0 & 0 & 0 \\ -2187/4 & 8019/4 & -5589/2 & 3645/2 & -2187/4 & 243/4 & 0 & 0 \\ -891/4 & 1377/2 & -3231/4 & 450 & -119 & 12 & 0 & 0 \\ 81/4 & -81 & 261/2 & -108 & 193/4 & -11 & 1 & 0 \\ 729/4 & -2673/4 & 3807/4 & -2619/4 & 216 & -27 & 0 & 0 \\ 729/4 & -1215/2 & 1539/2 & -459 & 513/4 & -27/2 & 0 & 0 \\ 81/4 & -243/4 & 279/4 & -153/4 & 10 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u^7 \\ u^6 \\ u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Efectuando los productos matriciales se llega a:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t,u) = {} & aj\mathbf{P}_{00} + bj\mathbf{P}_{10} + cj\mathbf{P}_{20} + dj\mathbf{P}_{30} + ej\mathbf{T}_{00} + fj\mathbf{T}_{10} + gj\mathbf{T}_{20} + hj\mathbf{T}_{30} + \\ & ak\mathbf{P}_{01} + bk\mathbf{P}_{11} + ck\mathbf{P}_{21} + dk\mathbf{P}_{31} + ek\mathbf{T}_{01} + fk\mathbf{T}_{11} + gk\mathbf{T}_{21} + hk\mathbf{T}_{31} + \\ & al\mathbf{P}_{02} + bl\mathbf{P}_{12} + cl\mathbf{P}_{22} + dl\mathbf{P}_{32} + el\mathbf{T}_{02} + fl\mathbf{T}_{12} + gl\mathbf{T}_{22} + hl\mathbf{T}_{32} + \\ & am\mathbf{P}_{03} + bm\mathbf{P}_{13} + cm\mathbf{P}_{23} + dm\mathbf{P}_{33} + em\mathbf{T}_{03} + fm\mathbf{T}_{13} + gm\mathbf{T}_{23} + hm\mathbf{T}_{33} + \\ & an\mathbf{U}_{00} + bn\mathbf{U}_{10} + cn\mathbf{U}_{20} + dn\mathbf{U}_{30} + en\mathbf{E}_{00} + fn\mathbf{E}_{10} + gn\mathbf{E}_{20} + hn\mathbf{E}_{30} + \\ & ap\mathbf{U}_{01} + bp\mathbf{U}_{11} + cp\mathbf{U}_{21} + dp\mathbf{U}_{31} + ep\mathbf{E}_{01} + fp\mathbf{E}_{11} + gp\mathbf{E}_{21} + hp\mathbf{E}_{31} + \\ & aq\mathbf{U}_{02} + bq\mathbf{U}_{12} + cq\mathbf{U}_{22} + dq\mathbf{U}_{32} + eq\mathbf{E}_{02} + fq\mathbf{E}_{12} + gq\mathbf{E}_{22} + hq\mathbf{E}_{32} + \\ & ar\mathbf{U}_{03} + br\mathbf{U}_{13} + cr\mathbf{U}_{23} + dr\mathbf{U}_{33} + er\mathbf{E}_{03} + fr\mathbf{E}_{13} + gr\mathbf{E}_{23} + hr\mathbf{E}_{33}\end{aligned} \qquad (2)$$

Siendo:

$$\begin{aligned}
a &= 891/4t^7 - 3483/4t^6 + 2709/2t^5 - 2115/2t^4 + 1691/4t^3 - 291/4t^2 + 1\\
b &= 2187/4t^7 - 3645/2t^6 + 8991/4t^5 - 1215t^4 + 243t^3\\
c &= -2187/4t^7 + 8019/4t^6 - 5589/2t^5 + 3645/2t^4 - 2187/4t^3 + 243/4t^2\\
d &= -891/4t^7 + 1377/2t^6 + -3231/4t^5 + 450t^4 - 119t^3 + 12t^2\\
e &= 81/4t^7 - 81t^6 + 261/2t^5 - 108t^4 + 193/4t^3 - 11t^2 + t\\
f &= 729/4t^7 - 2673/4t^6 + 3807/4t^5 - 2619/4t^4 + 216t^3 - 26t^2\\
g &= 729/4t^7 - 1215/2t^6 + 1539/2t^5 - 459t^4 + 513/4t^3 - 27/2t^2\\
h &= 81/4t^7 - 243/4t^6 + 279/4t^5 - 153/4t^4 + 10t^3 - t^2\\
j &= 891/4u^7 - 3483/4u^6 + 2709/2u^5 - 2115/2u^4 + 1691/4u^3 - 291/4u^2 + 1 \qquad (3)\\
k &= 2187/4u^7 - 3645/2u^6 + 8991/4u^5 - 1215u^4 + 243u^3\\
l &= -2187/4u^7 + 8019/4u^6 - 5589/2u^5 + 3645/2u^4 - 2187/4u^3 + 243/4u^2\\
m &= -891/4u^7 + 1377/2u^6 + -3231/4u^5 + 450u^4 - 119u^3 + 12u^2\\
n &= 81/4u^7 - 81u^6 + 261/2u^5 - 108u^4 + 193/4u^3 - 11u^2 + u\\
p &= 729/4u^7 - 2673/4u^6 + 3807/4u^5 - 2619/4u^4 + 216u^3 - 26u^2\\
q &= 729/4u^7 - 1215/2u^6 + 1539/2u^5 - 459u^4 + 513/4u^3 - 27/2u^2\\
r &= 81/4u^7 - 243/4u^6 + 279/4u^5 - 153/4u^4 + 10u^3 - u^2
\end{aligned}$$

Cada uno de los vectores tiene las siguientes componentes:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t,u) &= (x, y, z)\\ \mathbf{P_{ij}} &= (xij, yij, zij)\\ \mathbf{T_{ij}} &= (xtij, ytij, ztij) \qquad (4)\\ \mathbf{U_{ij}} &= (xuij, yuij, zuij)\end{aligned}$$

Si se llevan estos valores a (1) y desglosando por componentes se obtendrían las ecuaciones paramétricas de la superficie polínomíal biséptima que interpola la red de 4X4 puntos dados con tangentes dadas en cada uno de ellos:

$$
\begin{aligned}
x = {} & j(ax00 + bx10 + cx20 + dx30 + ext00 + fxt10 + gxt20 + hxt30) + \\
& k(ax01 + bx11 + cx21 + dx31 + ext01 + fxt11 + gxt21 + hxt31) + \\
& l(ax02 + bx12 + cx22 + dx32 + ext02 + fxt12 + gxt22 + hxt32) + \\
& m(ax03 + bx13 + cx23 + dx33 + ext03 + fxt13 + gxt23 + hxt33) + \\
& n(axu00 + bxu10 + cxu20 + dxu30 + exe00 + fxe10 + gxe20 + hxe30) + \\
& p(axu01 + bxu11 + cxu21 + dxu31 + exe01 + fxe11 + gxe21 + hxe31) + \\
& q(axu02 + bxu12 + cxu22 + dxu32 + exe02 + fxe12 + gxe22 + hxe32) + \\
& r(axu03 + bxu13 + cxu23 + dxu33 + exe03 + fxe13 + gxe23 + hxe33) \\
y = {} & j(ay00 + by10 + cy20 + dy30 + eyt00 + fyt10 + gyt20 + hyt30) + \\
& k(ay01 + by11 + cy21 + dy31 + eyt01 + fyt11 + gyt21 + hyt31) + \\
& l(ay02 + by12 + cy22 + dy32 + eyt02 + fyt12 + gyt22 + hyt32) + \\
& m(ay03 + by13 + cy23 + dy33 + eyt03 + fyt13 + gyt23 + hyt33) + \\
& n(ayu00 + byu10 + cyu20 + dyu30 + eye00 + fye10 + gye20 + hye30) + \qquad (5) \\
& p(ayu01 + byu11 + cyu21 + dyu31 + eye01 + fye11 + gye21 + hye31) + \\
& q(ayu02 + byu12 + cyu22 + dyu32 + eye02 + fye12 + gye22 + hye32) + \\
& r(ayu03 + byu13 + cyu23 + dyu33 + eye03 + fye13 + gye23 + hye33) \\
z = {} & j(az00 + bz10 + cz20 + dz30 + ezt00 + fzt10 + gzt20 + hzt30) + \\
& k(az01 + bz11 + cz21 + dz31 + ezt01 + fzt11 + gzt21 + hzt31) + \\
& l(az02 + bz12 + cz22 + dz32 + ezt02 + fzt12 + gzt22 + hzt32) + \\
& m(az03 + bz13 + cz23 + dz33 + ezt03 + fzt13 + gzt23 + hzt33) + \\
& n(azu00 + bzu10 + czu20 + dzu30 + eze00 + fze10 + gze20 + hze30) + \\
& p(azu01 + bzu11 + czu21 + dzu31 + eze01 + fze11 + gze21 + hze31) + \\
& q(azu02 + bzu12 + czu22 + dzu32 + eze02 + fze12 + gze22 + hze32) + \\
& r(azu03 + bzu13 + czu23 + dzu33 + eze03 + fze13 + gze23 + hze33)
\end{aligned}
$$

3.2.5.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL OUE PASA POR UNA RED DE 5X5 PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

3.2.5.1.-CONSTRUCCIÓN DE LAS CURVAS GENERADORAS

Supongamos la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ y $\mathbf{P}_4$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$,$\mathbf{T}_3$ y $\mathbf{T}_4$ (figura 3.2.5.1.-1)

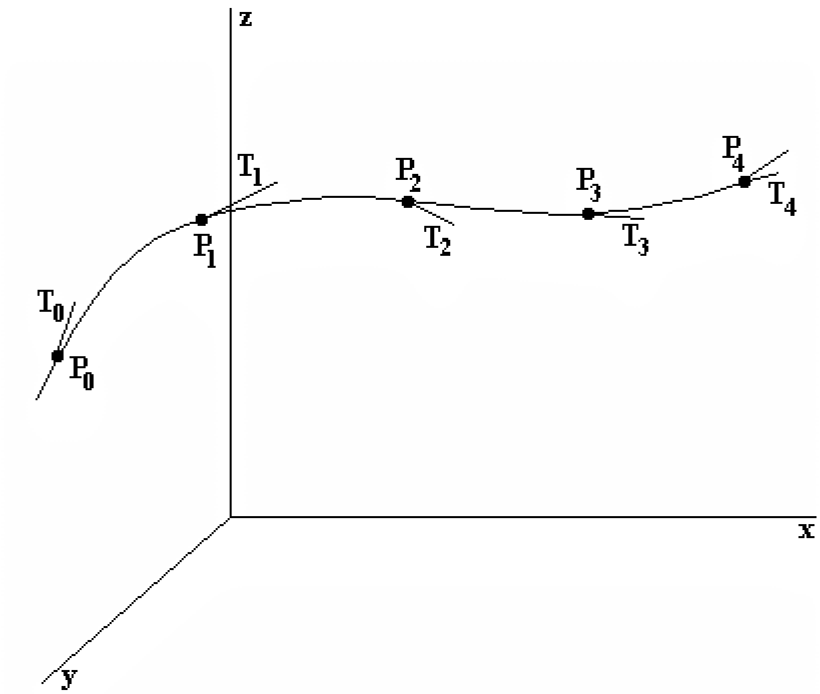


Figura 3.2.5.1.-1. Curva polinomial que pasa por cinco puntos dados con tangentes en ellos tambien dadas

Su ecuación se puede poner como:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) = {} & f_0(t)\mathbf{P}_0 + f_1(t)\mathbf{P}_1 + f_2(t)\mathbf{P}_2 + f_3(t)\mathbf{P}_3 + f_4(t)\mathbf{P}_4 + \\ & g_0(t)\mathbf{T}_0 + g_1(t)\mathbf{T}_1 + g_2(t)\mathbf{T}_2 + g_3(t)\mathbf{T}_3 + g_4(t)\mathbf{T}_4\end{aligned} \qquad (1)$$

y la ecuación de la tangente sería:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'(t) = {} & f_0'(t)\mathbf{P}_0 + f'_1(t)\mathbf{P}_1 + f'_2(t)\mathbf{P}_2 + f'_3(t)\mathbf{P}_3 + f'_4(t)\mathbf{P}_4 + \\ & g'_0(t)\mathbf{T}_0 + g'_1(t)\mathbf{T}_1 + g'_2(t)\mathbf{T}_2 + g'_3(t)\mathbf{T}_3 + g'_4(t)\mathbf{T}_4\end{aligned} \qquad (2)$$

con las restricciones para las funciones $f_i(t)$ y $g_i(t)$:

t	$f_0(t)$	$f_0'(t)$	$f_1(t)$	$f'_1(t)$	$f_2(t)$	$f'_2(t)$	$f_3(t)$	$f'_3(t)$	$f_4(t)$	$f'_4(t)$

t_0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
t_1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
t_2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
t_3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
t_4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

t	$g_0(t)$	$g'_0(t)$	$g_1(t)$	$g'_1(t)$	$g_2(t)$	$g'_2(t)$	$g_3(t)$	$g'_3(t)$	$g_4(t)$	$g'_4(t)$
t_0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
t_1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
t_2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
t_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
t_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Cumpliéndose que:

$$\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0 \qquad \mathbf{P}(t_1) = \mathbf{P}_1 \qquad \mathbf{P}(t_2) = \mathbf{P}_2 \qquad \mathbf{P}(t_3) = \mathbf{P}_3 \qquad \mathbf{P}(t_4) = \mathbf{P}_4$$
$$\mathbf{P}'(t_0) = \mathbf{T}_0 \qquad \mathbf{P}'(t_1) = \mathbf{T}_1 \qquad \mathbf{P}'(t_2) = \mathbf{T}_2 \qquad \mathbf{P}'(t_3) = \mathbf{T}_3 \qquad \mathbf{P}'(t_4) = \mathbf{P}_4 \tag{3}$$

Calculando los $f_0(t)$ $f_1(t)$ $f_2(t)$ $f_3(t)$ $f_4(t)$ $g_0(t)$ $g_1(t)$ $g_2(t)$ $g_3(t)$ $g_4(t)$, que serán polinomios de Hermite de la forma:

$$f_0(t) = (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 (t - t_3)^2 (t - t_4)^2 (a_0 + b_0 t)$$

con las restricciones de : $f_0(t_0) = 1 \qquad f'_0(t_0) = 0$

$$g_0(t) = (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 (t - t_3)^2 (t - t_4)^2 (t - t_0) / (t_0 - t_1)^2 (t_0 - t_2)^2 (t_0 - t_3)^2 (t_0 - t_4)^2$$

$$f_1(t) = (t - t_0)^2 (t - t_2)^2 (t - t_3)^2 (t - t_4)^2 (a_1 + b_1 t)$$

con las restricciones de: $f_1(t_1) = 1 \qquad f'_1(t_1) = 0$ (4)

$$g_1(t) = (t - t_0)^2 (t - t_2)^2 (t - t_3)^2 (t - t_4)^2 (t - t_1) / (t_1 - t_0)^2 (t_1 - t_2)^2 (t_1 - t_3)^2 (t_1 - t_4)^2$$

$$f_2(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 (t - t_3)^2 (t - t_4)^2 (a_2 + b_2 t)$$

con las restricciones de: $f_2(t_2) = 1 \qquad f'_2(t_2) = 0$

$$g_2(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 (t - t_3)^2 (t - t_4)^2 (t - t_2) / (t_2 - t_0)^2 (t_2 - t_1)^2 (t_2 - t_3)^2 (t_2 - t_4)^2$$

$$f_3(t) = (t - t_0)^2 (t - t_1)^2 (t - t_2)^2 (t - t_4)^2 (a_3 + b_3 t)$$

con las restricciones de: $f_3(t_3) = 1 \qquad f'_3(t_3) = 0$

$$g_3(t) = (t - t_0)^2(t - t_1)^2(t - t_2)^2(t - t_4)^2(t - t_3)/(t_3 - t_0)^2(t_3 - t_1)^2(t_3 - t_2)^2(t_3 - t_4)^2$$

$$f_4(t) = (t - t_0)^2(t - t_1)^2(t - t_2)^2(t - t_3)^2(a_4 + b_4 t)$$

con las restricciones de: $f_4(t_4) = 1 \qquad f'_4(t_4) = 0$

$$g_4(t) = (t - t_0)^2(t - t_1)^2(t - t_2)^2(t - t_3)^2(t - t_4)/(t_4 - t_0)^2(t_4 - t_1)^2(t_4 - t_2)^2(t_4 - t_3)^2$$

Resolviendo los sistemas lineales en a_0, b_0, a_1, b_1 , a_2, b_2 , a_3, b_3 se obtienen los valores de estos parámetros.

Entrando con estos valores en la fórmula de P(t) se tendría:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) = {} & f_0(t)\mathbf{P}_0 + f_1(t)\mathbf{P}_1 + f_2(t)\mathbf{P}_2 + f_3(t)\mathbf{P}_3 + f_4(t)\mathbf{P}_4 + \\ & g_0(t)\mathbf{T}_0 + g_1(t)\mathbf{T}_1 + g_2(t)\mathbf{T}_2 + g_3(t)\mathbf{T}_3 + g_4(t)\mathbf{T}_4\end{aligned}$$

Operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{T}_0 & \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} & c_{05} & c_{06} & c_{07} & c_{08} & c_{09} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{17} & c_{18} & c_{19} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{27} & c_{28} & c_{29} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & c_{37} & c_{38} & c_{39} \\ c_{40} & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & c_{47} & c_{48} & c_{49} \\ c_{50} & c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & c_{57} & c_{58} & c_{59} \\ c_{60} & c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & c_{67} & c_{68} & c_{69} \\ c_{70} & c_{71} & c_{72} & c_{73} & c_{74} & c_{75} & c_{76} & c_{77} & c_{78} & c_{79} \\ c_{80} & c_{81} & c_{82} & c_{83} & c_{84} & c_{85} & c_{86} & c_{87} & c_{88} & c_{89} \\ c_{90} & c_{91} & c_{92} & c_{93} & c_{94} & c_{95} & c_{96} & c_{97} & c_{98} & c_{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^9 \\ t^8 \\ t^7 \\ t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Siendo los componentes de la matriz C :

$c_{00} = b_0$

$c_{10} = b_1$

$c_{20} = b_2$

$c_{30} = b_3$

$c_{40} = b_4$

$$c_{50} = 1/\prod_{i=0,i\neq 0}^{5}(t_0 - t_i)$$

$$c_{60} = 1/\prod_{i=0,i\neq 1}^{5}(t_1 - t_i)$$

$$c_{70} = 1/\prod_{i=0,i\neq 2}^{5}(t_2 - t_i)$$

$$c_{80} = 1/\prod_{i=0,i\neq 3}^{5}(t_3 - t_i)$$

$$c_{90} = 1/\prod_{i=0,i\neq 4}^{5}(t_4 - t_i)$$

$$c_{01} = a_0 - 2b_0\sum_{i=0,i\neq 0}^{4} t_i$$

$$c_{11} = a_1 - 2b_1\sum_{i=0,i\neq 1}^{4} t_i$$

$$c_{21} = a_2 - 2b_2\sum_{i=0,i\neq 2}^{4} t_i$$

$$c_{31} = a_3 - 2b_3\sum_{i=0,i\neq 3}^{4} t_i$$

$$c_{41} = a_4 - 2b_4\sum_{i=0,i\neq 4}^{4} t_i$$

$$c_{51} = -(t_0 2\sum_{i=0,i\neq 0}^{4} t_i)/\prod_{i=0,i\neq 0}^{4}(t_0 - t_i)$$

$$c_{61} = -(t_1 2\sum_{i=0,i\neq 1}^{4} t_i)/\prod_{i=0,i\neq 1}^{4}(t_1 - t_i)$$

$$c_{71} = -(t_2 2\sum_{i=0,i\neq 2}^{4} t_i)/\prod_{i=0,i\neq 2}^{4}(t_2 - t_i)$$

$$c_{81} = -(t_3 2\sum_{i=0,i\neq 3}^{4} t_i)/\prod_{i=0,i\neq 3}^{4}(t_3 - t_i)$$

$$c_{91} = -(t_4 2\sum_{i=0,i\neq 4}^{4} t_i)/\prod_{i=0,i\neq 4}^{4}(t_4 - t_i)$$

$$c_{02} = -2a_0(\sum_{i=0,i\neq 0}^{4} t_i) + b_0(\sum_{i=0,i\neq 0}^{4} t_i^2) + 4b_0(\sum_{1\leq i\leq j\leq 4,i\neq 0}^{4} t_i t_j)$$

$$c_{12} = -2a_1(\sum_{i=0,i\neq 1}^{4} t_i) + b_1(\sum_{i=0,i\neq 1}^{4} t_i^2) + 4b_1(\sum_{1\leq i\leq j\leq 4,i\neq 1}^{4} t_i t_j)$$

$$c_{22} = -2a_2(\sum_{i=0,i\neq 2}^{4} t_i) + b_2(\sum_{i=0,i\neq 2}^{4} t_i^2) + 4b_2(\sum_{1\leq i\leq j\leq 4,i\neq 2}^{4} t_i t_j)$$

$$c_{32} = -2a_3(\sum_{i=0,i\neq 3}^{4} t_i) + b_3(\sum_{i=0,i\neq 3}^{4} t_i^2) + 4b_3(\sum_{1\leq i\leq j\leq 4,i\neq 3}^{4} t_i t_j)$$

$$c_{42} = -2a_4(\sum_{i=0,i\neq 4}^{4} t_i) + b_4(\sum_{i=0,i\neq 4}^{4} t_i^2) + 4b_4(\sum_{1\leq i\leq j\leq 4,i\neq 4}^{4} t_i t_j)$$

$$c_{52} = 2t_0(\sum_{i=0,i\neq 0}^{4} t_i) + 4(\sum_{1\leq i\leq j\leq 4;i,j\neq 0}^{4} t_i t_j) + (\sum_{i=0,i\neq 0}^{4} t_i^2) / \prod_{i=0,i\neq 0}^{4} (t_0 - t_i)$$

$$c_{62} = 2t_1(\sum_{i=0,i\neq 1}^{4} t_i) + 4(\sum_{1\leq i\leq j\leq 4;i,j\neq 1}^{4} t_i t_j) + (\sum_{i=0,i\neq 1}^{4} t_i^2) / \prod_{i=0,i\neq 1}^{4} (t_1 - t_i)$$

$$c_{72} = 2t_2(\sum_{i=0,i\neq 2}^{4} t_i) + 4(\sum_{1\leq i\leq j\leq 4;i,j\neq 2}^{4} t_i t_j) + (\sum_{i=0,i\neq 2}^{4} t_i^2) / \prod_{i=0,i\neq 2}^{4} (t_2 - t_i)$$

$$c_{82} = 2t_3(\sum_{i=0,i\neq 3}^{4} t_i) + 4(\sum_{1\leq i\leq j\leq 4;i,j\neq 3}^{4} t_i t_j) + (\sum_{i=0,i\neq 3}^{4} t_i^2) / \prod_{i=0,i\neq 3}^{4} (t_3 - t_i)$$

$$c_{92} = 2t_4(\sum_{i=0,i\neq 4}^{4} t_i) + 4(\sum_{1\leq i\leq j\leq 4;i,j\neq 4}^{4} t_i t_j) + (\sum_{i=0,i\neq 4}^{4} t_i^2) / \prod_{i=0,i\neq 4}^{4} (t_4 - t_i)$$

$$c_{03} = a_0\Big(\sum_{i=0,i\neq 0}^{4} t_i^2\Big) + 4a_0\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0}^{4} t_i t_j\Big) - 2b_0\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0}^{4} t_i t_j^2\Big) -$$
$$8b_0\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0}^{4} t_i t_j t_k\Big)$$

$$c_{13} = a_1\Big(\sum_{i=0,i\neq 1}^{4} t_i^2\Big) + 4a_1\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 1}^{4} t_i t_j\Big) - 2b_1\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 1}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 1}^{4} t_i t_j^2\Big) -$$
$$8b_1\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 1}^{4} t_i t_j t_k\Big)$$

$$c_{23} = a_2\Big(\sum_{i=0,i\neq 2}^{4} t_i^2\Big) + 4a_2\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 2}^{4} t_i t_j\Big) - 2b_2\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 2}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 2}^{4} t_i t_j^2\Big) -$$
$$8b_2\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 2}^{4} t_i t_j t_k\Big)$$

$$c_{33} = a_3\Big(\sum_{i=0,i\neq 3}^{4} t_i^2\Big) + 4a_3\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 3}^{4} t_i t_j\Big) - 2b_3\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 3}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 3}^{4} t_i t_j^2\Big) -$$
$$8b_3\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 3}^{4} t_i t_j t_k\Big)$$

$$c_{43} = a_4\Big(\sum_{i=0,i\neq 4}^{4} t_i^2\Big) + 4a_4\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 4}^{4} t_i t_j\Big) - 2b_4\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 4}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 4}^{4} t_i t_j^2\Big) -$$
$$8b_4\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 4}^{4} t_i t_j t_k\Big)$$

$$c_{53} = -t_0\left(\sum_{i=0,i\neq 0}^{4} t_i^2\right) - 2\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0}^{4} t_i t_j^2\right) - 4t_0\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0}^{4} t_i t_j\right) -$$

$$8\left(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0}^{4} t_i t_j t_k\right) / \prod_{i=0,i\neq 0}^{4} (t_0 - t_i)$$

$$c_{63} = -t_1\left(\sum_{i=0,i\neq 1}^{4} t_i^2\right) - 2\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 1}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 1}^{4} t_i t_j^2\right) - 4t_1\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 1}^{4} t_i t_j\right) -$$

$$8\left(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 1}^{4} t_i t_j t_k\right) / \prod_{i=0,i\neq 1}^{4} (t_1 - t_i)$$

$$c_{73} = -t_2\left(\sum_{i=0,i\neq 2}^{4} t_i^2\right) - 2\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 2}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 2}^{4} t_i t_j^2\right) - 4t_2\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 2}^{4} t_i t_j\right) -$$

$$8\left(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 2}^{4} t_i t_j t_k\right) / \prod_{i=0,i\neq 2}^{4} (t_2 - t_i)$$

$$c_{83} = -t_3\left(\sum_{i=0,i\neq 3}^{4} t_i^2\right) - 2\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 3}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 3}^{4} t_i t_j^2\right) - 4t_3\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 3}^{4} t_i t_j\right) -$$

$$8\left(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 3}^{4} t_i t_j t_k\right) / \prod_{i=0,i\neq 3}^{4} (t_3 - t_i)$$

$$c_{93} = -t_4\left(\sum_{i=0,i\neq 4}^{4} t_i^2\right) - 2\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 4}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 4}^{4} t_i t_j^2\right) - 4t_4\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 4}^{4} t_i t_j\right) -$$

$$8\left(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 4}^{4} t_i t_j t_k\right) / \prod_{i=0,i\neq 4}^{4} (t_4 - t_i)$$

$$c_{04} = -2a_0\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0}^{4} t_i t_j^2\right) - 8a_0\left(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0}^{4} t_i t_j t_k\right) +$$

$$b_0\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0}^{4} t_i^2 t_j^2\right) +$$

$$4b_0\left(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0}{t_i t_j t_k}\left(\sum_{i=0,i\neq 0,4}^{4} t_i\right) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0}{t_i t_j t_k}\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0,3}^{4} t_i\right) +\right.$$

$$\left.\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0}{t_i t_j t_k}\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\neq 0,2}^{4} t_i\right) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0}{t_i t_j t_k}\left(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\neq 0,1}^{4} t_i\right) -\right.$$

$$-16 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\neq 0}{t_i t_j t_k t_l}$$

$$c_{14} = -2a_1\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1}^{4} t_i t_j^2\Big) - 8a_1\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1}^{4} t_i t_j t_k\Big) +$$

$$b_1\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1}^{4} t_i^2 t_j^2\Big) +$$

$$4b_1\Big(t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,4} \Big(\sum_{i=0,i\ne 1,4}^{4} t_i\Big) + t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,3} \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1,3}^{4} t_i\Big) +$$

$$t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,2} \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 1,2}^{4} t_i\Big) + t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,0} \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 0,1}^{4} t_i\Big) -$$

$$-16\, t_i t_j t_k t_l{}_{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 1}$$

$$c_{24} = -2a_2\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2}^{4} t_i t_j^2\Big) - 8a_2\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2}^{4} t_i t_j t_k\Big) +$$

$$b_2\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2}^{4} t_i^2 t_j^2\Big) +$$

$$4b_2\Big(t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,4} \Big(\sum_{i=0,i\ne 2,4}^{4} t_i\Big) + t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,3} \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2,3}^{4} t_i\Big) +$$

$$t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,2} \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 1,2}^{4} t_i\Big) + t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,1} \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 0,2}^{4} t_i\Big) -$$

$$-16\, t_i t_j t_k t_l{}_{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 2}$$

$$c_{34} = -2a_3\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 3}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 3}^{4} t_i t_j^2\Big) - 8a_3\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 3}^{4} t_i t_j t_k\Big) +$$

$$b_3\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 3}^{4} t_i^2 t_j^2\Big) +$$

$$4b_3\Big(t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 3,4} \Big(\sum_{i=0,i\ne 3,4}^{4} t_i\Big) + t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,3} \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2,3}^{4} t_i\Big) +$$

$$t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,3} \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 1,3}^{4} t_i\Big) + t_i t_j t_k{}_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,3} \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 0,3}^{4} t_i\Big) -$$

$$-16\, t_i t_j t_k t_l{}_{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 3}$$

$$c_{44} = -2a_4\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 4}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 4}^{4} t_i t_j^2\Big) - 8a_4\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 4}^{4} t_i t_j t_k\Big) +$$

$$b_4\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 4}^{4} t_i^2 t_j^2\Big) +$$

$$4b_4\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 3,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{i=0,i\ne 3,4}^{4} t_i\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2,4}^{4} t_i\Big) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 1,4}^{4} t_i\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 0,4}^{4} t_i\Big) -$$

$$-16 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 4}{t_i t_j t_k t_l}$$

$$c_{54} = \Big(\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0}^{4} t_i^2 t_j^2\Big) + 2t_0\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0}^{4} t_i t_j^2\Big) +$$

$$4\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0}^{4} t_i^2 t_j t_k + \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0}^{4} t_i t_j^2 t_k + \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0}^{4} t_i t_j t_k^2\Big)$$

$$+8\mathrm{t}_0\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0}^{4} t_i t_j t_k\Big) + 16 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 0}{} t_i t_j t_k t_l\Big) \prod_{i=0,i\ne 0}^{4} (t_0 - t_i)$$

$$c_{64} = \Big(\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1}^{4} t_i^2 t_j^2\Big) + 2t_1\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1}^{4} t_i t_j^2\Big) +$$

$$4\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1}^{4} t_i^2 t_j t_k + \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1}^{4} t_i t_j^2 t_k + \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1}^{4} t_i t_j t_k^2\Big)$$

$$+8\mathrm{t}_1\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1}^{4} t_i t_j t_k\Big) + 16 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 1}{} t_i t_j t_k t_l\Big) \prod_{i=0,i\ne 1}^{4} (t_1 - t_i)$$

$$c_{74} = \Big(\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2}^{4} t_i^2 t_j^2\Big) + 2t_2\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2}^{4} t_i t_j^2\Big) +$$

$$4\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2}^{4} t_i^2 t_j t_k + \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2}^{4} t_i t_j^2 t_k + \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2}^{4} t_i t_j t_k^2\Big)$$

$$+8\mathrm{t}_2\Big(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2}^{4} t_i t_j t_k\Big) + 16 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 2}{} t_i t_j t_k t_l\Big) \prod_{i=0,i\ne 2}^{4} (t_2 - t_i)$$

$$c_{84} = ((\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 3}^{4} t_i^2 t_j^2) + 2t_3(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 3}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 3}^{4} t_i t_j^2) +$$

$$4(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 3}^{4} t_i^2 t_j t_k + \sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 3}^{4} t_i t_j^2 t_k + \sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 3}^{4} t_i t_j t_k^2)$$

$$+8\mathrm{t}_3(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 3}^{4} t_i t_j t_k) + 16_{1\le i\le j\le k\le l\le 4; i,j,k,l\ne 3} t_i t_j t_k t_l) \prod_{i=0, i\ne 3}^{4} (t_3 - t_i)$$

$$c_{94} = ((\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 4}^{4} t_i^2 t_j^2) + 2t_4(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 4}^{4} t_i^2 t_j + \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 4}^{4} t_i t_j^2) +$$

$$4(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 4}^{4} t_i^2 t_j t_k + \sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 4}^{4} t_i t_j^2 t_k + \sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 4}^{4} t_i t_j t_k^2)$$

$$+8\mathrm{t}_4(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 4}^{4} t_i t_j t_k) + 16_{1\le i\le j\le k\le l\le 4; i,j,k,l\ne 4} t_i t_j t_k t_l) \prod_{i=0, i\ne 4}^{4} (t_4 - t_i)$$

$$c_{05} = a_0(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 0}^{4} t_i^2 t_j^2) +$$

$$4a_0(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,4}{t_i t_j t_k} (\sum_{i=0, i\ne 0,4}^{4} t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,3}{t_i t_j t_k} (\sum_{1\le i\le j\le 4; i\ne 0,3}^{4} t_i) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,2}{t_i t_j t_k} (\sum_{i=0; i\ne 0,2}^{4} t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,1}{t_i t_j t_k} (\sum_{i=0; i\ne 0,1}^{4} t_i) -$$

$$2b_0(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,4}{t_i t_j t_k} (\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 0,4}^{4} t_i t_j) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,3}{t_i t_j t_k} (\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,3}^{4} t_i t_j) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,2}{t_i t_j t_k} (\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,2}^{4} t_i t_j) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,1}{t_i t_j t_k} (\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 0,1}^{4} t_i t_j) -$$

$$-\ 8b_0(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,4}{t_i t_j t_k} (\sum_{i=0; i\ne 0}^{4} t_i)$$

$$+16 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4; i,j,k,l\ne 0}{\mathrm{a}_0 t_i t_j t_k t_l}$$

$$
\begin{aligned}
c_{15} = {} & a_1\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1}^{4} t_i^2 t_j^2\Big) + \\
& 4a_1\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,4}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{i=0,i\ne 1,4}^{4} t_i\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,3}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i\ne 1,3}^{4} t_i\Big) + \\
& \qquad \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,2}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{i=0; i\ne 1,2}^{4} t_i\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,1}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{i=0; i\ne 0,1}^{4} t_i\Big) - \\
& 2b_1\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,4}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,4}^{4} t_i t_j\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,3}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,3}^{4} t_i t_j\Big) + \\
& \qquad \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,2}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,2}^{4} t_i t_j\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,1}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 0,1}^{4} t_i t_j\Big) - \\
& - 8b_1\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{i=0; i\ne 1}^{4} t_i\Big) \\
& +16 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4; i,j,k,l\ne 1}{\mathrm{a}_1 t_i t_j t_k t_l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{25} = {} & a_2\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 2}^{4} t_i^2 t_j^2\Big) + \\
& 4a_2\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 2,4}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{i=0,i\ne 2,4}^{4} t_i\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 2,3}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i\ne 2,3}^{4} t_i\Big) + \\
& \qquad \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,2}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{i=0; i\ne 1,2}^{4} t_i\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,2}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{i=0; i\ne 0,2}^{4} t_i\Big) - \\
& 2b_2\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 2,4}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 2,4}^{4} t_i t_j\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 2,3}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 2,3}^{4} t_i t_j\Big) + \\
& \qquad \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,2}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,2}^{4} t_i t_j\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,2}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 0,2}^{4} t_i t_j\Big) - \\
& - 8b_2\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 2}{t_i t_j t_k}\Big(\sum_{i=0; i\ne 2}^{4} t_i\Big) \\
& +16 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4; i,j,k,l\ne 2}{\mathrm{a}_2 t_i t_j t_k t_l}
\end{aligned}
$$

$$c_{35} = a_3\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i,j\ne 3}^{4} t_i^2 t_j^2\Big) +$$

$$4a_3\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 3,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{i=0,i\ne 3,4}^{4} t_i\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 2,3}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i\ne 2,3}^{4} t_i\Big) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 1,3}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{i=0;\, i\ne 1,3}^{4} t_i\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 0,3}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{i=0;\, i\ne 0,3}^{4} t_i\Big) -$$

$$2b_3\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 3,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i,j\ne 3,4}^{4} t_i t_j\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 2,3}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i,j\ne 2,3}^{4} t_i t_j\Big) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 1,3}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i,j\ne 1,3}^{4} t_i t_j\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 0,3}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i,j\ne 0,3}^{4} t_i t_j\Big) -$$

$$-\ 8b_3\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 3}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{i=0;\, i\ne 3}^{4} t_i\Big)$$

$$+16\ \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;\, i,j,k,l\ne 3}{\mathrm{a}_3 t_i t_j t_k t_l}$$

$$c_{45} = a_4\Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i,j\ne 4}^{4} t_i^2 t_j^2\Big) +$$

$$4a_4\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 3,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{i=0,i\ne 3,4}^{4} t_i\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 2,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i\ne 2,4}^{4} t_i\Big) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 1,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{i=0;\, i\ne 1,4}^{4} t_i\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 0,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{i=0;\, i\ne 0,4}^{4} t_i\Big) -$$

$$2b_4\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 3,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i,j\ne 3,4}^{4} t_i t_j\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 2,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i,j\ne 2,4}^{4} t_i t_j\Big) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 1,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i,j\ne 1,4}^{4} t_i t_j\Big) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 0,4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{1\le i\le j\le 4;\, i,j\ne 0,4}^{4} t_i t_j\Big) -$$

$$-\ 8b_4\Big(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;\, i,j,k\ne 4}{t_i t_j t_k}\ \Big(\sum_{i=0;\, i\ne 4}^{4} t_i\Big)$$

$$+16\ \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;\, i,j,k,l\ne 4}{\mathrm{a}_4 t_i t_j t_k t_l}$$

$$c_{55} = ((-t_0(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0}^{4} t_i^2 t_j^2) -$$

$$2(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,4}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0,4}^{4} t_i t_j) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0,3}^{4} t_i t_j) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,2}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0,2}^{4} t_i t_j) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,1}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0,1}^{4} t_i t_j) -$$

$$4t_0(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,4}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0,i\ne 0,4}^{4} t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 0,3}^{4} t_i) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,2}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0;i\ne 0,2}^{4} t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,1}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0;i\ne 0,1}^{4} t_i) -$$

$$-8(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k,l\ne 0}{t_i t_j t_k t_l}(\sum_{i=0;i\ne 0}^{4} t_i)$$

$$-16 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 0}{t_i t_j t_k t_l t_m}) / \prod_{i=0,i\ne 0}^{4} (t_0 - t_i)$$

$$c_{65} = ((-t_1(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1}^{4} t_i^2 t_j^2) -$$

$$2(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,4}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1,4}^{4} t_i t_j) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1,3}^{4} t_i t_j) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,2}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1,2}^{4} t_i t_j) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,1}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0,1}^{4} t_i t_j) -$$

$$4t_1(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,4}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0,i\ne 1,4}^{4} t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 1,3}^{4} t_i) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,2}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0;i\ne 1,2}^{4} t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,1}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0;i\ne 0,1}^{4} t_i) -$$

$$-8(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k,l\ne 1}{t_i t_j t_k t_l}(\sum_{i=0;i\ne 1}^{4} t_i)$$

$$-16 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 1}{t_i t_j t_k t_l t_m}) / \prod_{i=0,i\ne 1}^{4} (t_1 - t_i)$$

$$c_{75} = ((-t_2(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2}^{4} t_i^2 t_j^2) -$$

$$2(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,4}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2,4}^{4} t_i t_j) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2,3}^{4} t_i t_j) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,2}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1,2}^{4} t_i t_j) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,2}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0,2}^{4} t_i t_j) -$$

$$4t_2(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,4}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0,i\ne 2,4}^{4} t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 2,3}^{4} t_i) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,2}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0;i\ne 1,2}^{4} t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,2}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0;i\ne 0,2}^{4} t_i) -$$

$$-8(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k,l\ne 1}{t_i t_j t_k t_l}(\sum_{i=0;i\ne 2}^{4} t_i)$$

$$-16\underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 1}{t_i t_j t_k t_l t_m})/\prod_{i=0,i\ne 2}^{4}(t_2 - t_i)$$

$$c_{85} = ((-t_3(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 3}^{4} t_i^2 t_j^2) -$$

$$2(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 3,4}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 3,4}^{4} t_i t_j) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2,3}^{4} t_i t_j) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1,3}^{4} t_i t_j) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0,3}^{4} t_i t_j) -$$

$$4t_3(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 3,4}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0,i\ne 3,4}^{4} t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 2,3}^{4} t_i) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0;i\ne 1,3}^{4} t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,3}{t_i t_j t_k}(\sum_{i=0;i\ne 0,3}^{4} t_i) -$$

$$-8(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k,l\ne 3}{t_i t_j t_k t_l}(\sum_{i=0;i\ne 3}^{4} t_i)$$

$$-16\underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 3}{t_i t_j t_k t_l t_m})/\prod_{i=0,i\ne 3}^{4}(t_3 - t_i)$$

$$c_{95}=((-t_4(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 3}^{4} t_i^2t_j^2)-$$

$$2(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 3,4} t_it_jt_k(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 3,4}^{4} t_it_j)+\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,4} t_it_jt_k(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2,4}^{4} t_it_j)+$$

$$\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,4} t_it_jt_k(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1,4}^{4} t_it_j)+\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,4} t_it_jt_k(\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0,4}^{4} t_it_j)-$$

$$4t_4(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 3,4} t_it_jt_k(\sum_{i=0,i\ne 3,4}^{4} t_i)+\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2,4} t_it_jt_k(\sum_{1\le i\le j\le 4;i\ne 2,4}^{4} t_i)+$$

$$\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,4} t_it_jt_k(\sum_{i=0;i\ne 1,4}^{4} t_i)+\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,4} t_it_jt_k(\sum_{i=0;i\ne 0,4}^{4} t_i)-$$

$$-8(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k,l\ne 4} t_it_jt_kt_l(\sum_{i=0;i\ne 4}^{4} t_i)$$

$$-16\sum_{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 4} t_it_jt_kt_lt_m)/\prod_{i=0,i\ne 4}^{4}(t_4-t_i)$$

$$c_{06}=-2a_0(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,4} t_i^2t_j^2t_k^2(\sum_{i=0,i\ne 0,4}^{4} 1/t_i)+\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,3} t_i^2t_j^2t_k^2(\sum_{i=0,i\ne 0,3}^{4} 1/t_i)+$$

$$\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,2} t_i^2t_j^2t_k^2(\sum_{i=0,i\ne 0,2}^{4} 1/t_i)+\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,1} t_i^2t_j^2t_k^2(\sum_{i=0,i\ne 0,1}^{4} 1/t_i))-$$

$$8a_0\sum_{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 0} t_it_jt_kt_l(\sum_{i=0,i\ne 0}^{4} t_i)+b_0\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0}^{4} t_i^2t_j^2t_k^2+$$

$$4b_0(\sum_{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 0} t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0}^{4} t_it_j)$$

$$c_{16}=-2a_1(\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,4} t_i^2t_j^2t_k^2(\sum_{i=0,i\ne 1,4}^{4} 1/t_i)+\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,3} t_i^2t_j^2t_k^2(\sum_{i=0,i\ne 1,3}^{4} 1/t_i)+$$

$$\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1,2} t_i^2t_j^2t_k^2(\sum_{i=0,i\ne 1,2}^{4} 1/t_i)+\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0,1} t_i^2t_j^2t_k^2(\sum_{i=0,i\ne 0,1}^{4} 1/t_i))-$$

$$8a_1\sum_{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 1} t_it_jt_kt_l(\sum_{i=0,i\ne 1}^{4} t_i)+b_1\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1}^{4} t_i^2t_j^2t_k^2+$$

$$4b_1(\sum_{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 1} t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2\sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1}^{4} t_it_j)$$

$$c_{26} = -2a_2(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 2,4}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 2,4}^{4} 1/t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 2,3}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 2,3}^{4} 1/t_i) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 1,2}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 1,2}^{4} 1/t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0,2}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 0,2}^{4} 1/t_i)) -$$

$$8a_2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\neq 2}{t_it_jt_kt_l}(\sum_{i=0,i\neq 2}^{4} t_i) + b_2 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 2}^{4} t_i^2t_j^2t_k^2 +$$

$$4b_2(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\neq 2}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 2}^{4} t_it_j)$$

$$c_{36} = -2a_3(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 3,4}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 3,4}^{4} 1/t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 2,3}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 2,3}^{4} 1/t_i) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 1,3}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 1,3}^{4} 1/t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0,3}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 0,3}^{4} 1/t_i)) -$$

$$8a_3 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\neq 3}{t_it_jt_kt_l}(\sum_{i=0,i\neq 3}^{4} t_i) + b_3 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 3}^{4} t_i^2t_j^2t_k^2 +$$

$$4b_3(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\neq 3}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 3}^{4} t_it_j)$$

$$c_{46} = -2a_4(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 3,4}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 3,4}^{4} 1/t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 2,4}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 2,4}^{4} 1/t_i) +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 1,4}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 1,4}^{4} 1/t_i) + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0,4}{t_i^2t_j^2t_k^2}(\sum_{i=0,i\neq 0,4}^{4} 1/t_i)) -$$

$$8a_4 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\neq 4}{t_it_jt_kt_l}(\sum_{i=0,i\neq 4}^{4} t_i) + b_4 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 4}^{4} t_i^2t_j^2t_k^2 +$$

$$4b_4(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\neq 4}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 4}^{4} t_it_j)$$

$$c_{56} = (\sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0}^{4} t_i^2t_j^2t_k^2 +$$

$$2t_0(\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0,4}{t_it_jt_k} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0,4}^{4} t_it_j + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0,3}{t_it_jt_k} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0,3}^{4} t_it_j +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0,2}{t_it_jt_k} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0,2}^{4} t_it_j + \underset{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\neq 0,1}{t_it_jt_k} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0,1}^{4} t_it_j) +$$

$$4(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k\neq 0}{t_it_jt_kt_l} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\neq 0}^{4} t_it_j) + 8 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k\neq 0}{t_it_jt_kt_lt_l} \sum_{i=0,i\neq 0}^{4} t_i) / \prod_{i=0,i\neq 0}^{4} (t_0 - t_i)$$

$$c_{66} = (\sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1}^{4} t_i^2 t_j^2 t_k^2 +$$

$$2t_1(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,4}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,4}^{4} t_i t_j + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,3}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,3}^{4} t_i t_j +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,2}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,2}^{4} t_i t_j + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,1}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 0,1}^{4} t_i t_j) +$$

$$4(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4; i,j,k\ne 1}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1}^{4} t_i t_j) + 8 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4; i,j,k\ne 1}{t_i t_j t_k t_l t_l} \sum_{i=0, i\ne 1}^{4} t_i) / \prod_{i=0, i\ne 1}^{4} (t_1 - t_i)$$

$$c_{76} = (\sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 2}^{4} t_i^2 t_j^2 t_k^2 +$$

$$2t_2(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 2,4}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 2,4}^{4} t_i t_j + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 2,3}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 2,3}^{4} t_i t_j +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,2}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,2}^{4} t_i t_j + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,2}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 0,2}^{4} t_i t_j) +$$

$$4(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4; i,j,k\ne 2}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 2}^{4} t_i t_j) + 8 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4; i,j,k\ne 2}{t_i t_j t_k t_l t_l} \sum_{i=0, i\ne 2}^{4} t_i) / \prod_{i=0, i\ne 2}^{4} (t_2 - t_i)$$

$$c_{86} = (\sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 3}^{4} t_i^2 t_j^2 t_k^2 +$$

$$2t_3(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 3,4}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 3,4}^{4} t_i t_j + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 2,3}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 2,3}^{4} t_i t_j +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,3}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,3}^{4} t_i t_j + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,3}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 0,3}^{4} t_i t_j) +$$

$$4(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4; i,j,k\ne 3}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 3}^{4} t_i t_j) + 8 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4; i,j,k\ne 3}{t_i t_j t_k t_l t_l} \sum_{i=0, i\ne 3}^{4} t_i) / \prod_{i=0, i\ne 3}^{4} (t_3 - t_i)$$

$$c_{96} = (\sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 4}^{4} t_i^2 t_j^2 t_k^2 +$$

$$2t_4(\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 3,4}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 3,4}^{4} t_i t_j + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 2,4}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 2,4}^{4} t_i t_j +$$

$$\underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 1,4}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 1,4}^{4} t_i t_j + \underset{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0,4}{t_i t_j t_k} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 0,4}^{4} t_i t_j) +$$

$$4(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4; i,j,k\ne 4}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 4}^{4} t_i t_j) + 8 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4; i,j,k\ne 4}{t_i t_j t_k t_l t_l} \sum_{i=0, i\ne 4}^{4} t_i) / \prod_{i=0, i\ne 4}^{4} (t_4 - t_i)$$

$$c_{07} = a_0 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4; i,j,k\ne 0}^{4} t_i t_j t_k + 4a_0(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4; i,j,k,l\ne 0}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le 4; i,j\ne 0}^{4} t_i t_j)$$

$$c_{17} = a_1 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1}^{4} t_i t_j t_k + 4a_1(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 1}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1}^{4} t_i t_j)$$

$$c_{27} = a_2 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2}^{4} t_i t_j t_k + 4a_2(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 2}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2}^{4} t_i t_j)$$

$$c_{37} = a_3 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 3}^{4} t_i t_j t_k + 4a_3(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 3}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 3}^{4} t_i t_j)$$

$$c_{47} = a_4 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 4}^{4} t_i t_j t_k + 4a_4(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 4}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 4}^{4} t_i t_j)$$

$$c_{57} = (-t_0 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0}^{4} t_i^2 t_j^2 t_k^2 - 2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 0}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 0}^{4} t_i t_j t_k -$$

$$4 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 4}{t_i t_j t_k t_l t_m} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 0}^{4} t_i t_j) / \prod_{i=0,i\ne 0}^{4} (t_0 - t_i)$$

$$c_{67} = (-t_1 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1}^{4} t_i^2 t_j^2 t_k^2 - 2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 1}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1}^{4} t_i t_j t_k -$$

$$4 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 1}{t_i t_j t_k t_l t_m} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 1}^{4} t_i t_j) / \prod_{i=0,i\ne 1}^{4} (t_1 - t_i)$$

$$c_{77} = (-t_2 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2}^{4} t_i^2 t_j^2 t_k^2 - 2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 2}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2}^{4} t_i t_j t_k -$$

$$4 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 2}{t_i t_j t_k t_l t_m} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 2}^{4} t_i t_j) / \prod_{i=0,i\ne 2}^{4} (t_2 - t_i)$$

$$c_{87} = (-t_3 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 3}^{4} t_i^2 t_j^2 t_k^2 - 2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 3}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 3}^{4} t_i t_j t_k -$$

$$4 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 3}{t_i t_j t_k t_l t_m} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 3}^{4} t_i t_j) / \prod_{i=0,i\ne 3}^{4} (t_3 - t_i)$$

$$c_{97} = (-t_4 \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 4}^{4} t_i^2 t_j^2 t_k^2 - 2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le 4;i,j,k,l\ne 4}{t_i t_j t_k t_l} \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 4}^{4} t_i t_j t_k -$$

$$4 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 4}{t_i t_j t_k t_l t_m} \sum_{1\le i\le j\le 4;i,j\ne 4}^{4} t_i t_j) / \prod_{i=0,i\ne 4}^{4} (t_4 - t_i)$$

$$c_{08} = -2a_0 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 0}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} \left(\sum_{i=0,i\ne 0}^{4} 1/t_i\right) + b_0 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 0}{t_it_jt_kt_l}$$

$$c_{18} = -2a_1 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 1}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} \left(\sum_{i=0,i\ne 1}^{4} 1/t_i\right) + b_1 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 1}{t_it_jt_kt_l}$$

$$c_{28} = -2a_2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 2}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} \left(\sum_{i=0,i\ne 2}^{4} 1/t_i\right) + b_2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 2}{t_it_jt_kt_l}$$

$$c_{38} = -2a_3 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 3}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} \left(\sum_{i=0,i\ne 3}^{4} 1/t_i\right) + b_3 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 3}{t_it_jt_kt_l}$$

$$c_{48} = -2a_4 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 4}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} \left(\sum_{i=0,i\ne 4}^{4} 1/t_i\right) + b_4 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 4}{t_it_jt_kt_l}$$

$$c_{58} = \left(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 0}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} + 2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 4}{t_it_jt_kt_lt_m} \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 4}^{4} t_it_jt_k\right) / \prod_{i=0,i\ne 0}^{4} (t_0 - t_i)$$

$$c_{68} = \left(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 1}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} + 2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 1}{t_it_jt_kt_lt_m} \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 1}^{4} t_it_jt_k\right) / \prod_{i=0,i\ne 1}^{4} (t_1 - t_i)$$

$$c_{78} = \left(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 2}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} + 2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 2}{t_it_jt_kt_lt_m} \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 2}^{4} t_it_jt_k\right) / \prod_{i=0,i\ne 2}^{4} (t_2 - t_i)$$

$$c_{88} = \left(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 3}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} + 2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 3}{t_it_jt_kt_lt_m} \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 3}^{4} t_it_jt_k\right) / \prod_{i=0,i\ne 3}^{4} (t_3 - t_i)$$

$$c_{98} = \left(\underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 4}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2} + 2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 4}{t_it_jt_kt_lt_m} \sum_{1\le i\le j\le k\le 4;i,j,k\ne 4}^{4} t_it_jt_k\right) / \prod_{i=0,i\ne 4}^{4} (t_4 - t_i)$$

$$c_{09} = a_0 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 0}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2}$$

$$c_{19} = a_1 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 1}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2}$$

$$c_{29} = a_2 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 2}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2}$$

$$c_{39} = a_3 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 3}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2}$$

$$c_{49} = a_4 \underset{1\le i\le j\le k\le l\le m\le 4;i,j,k,l,m\ne 4}{t_i^2t_j^2t_k^2t_l^2}$$

$$c_{59} = \Big(\underset{1\leq i\leq j\leq k\leq l\leq m\leq 4; i,j,k,l,m\neq 0}{t_i^2 t_j^2 t_k^2 t_l^2 t_m^2} \Big) \prod_{i=0, i\neq 0}^{4} (t_0 - t_i)$$

$$c_{69} = \Big(\underset{1\leq i\leq j\leq k\leq l\leq m\leq 4; i,j,k,l,m\neq 1}{t_i^2 t_j^2 t_k^2 t_l^2 t_m^2} \Big) \prod_{i=0, i\neq 1}^{4} (t_1 - t_i)$$

$$c_{79} = \Big(\underset{1\leq i\leq j\leq k\leq l\leq m\leq 4; i,j,k,l,m\neq 2}{t_i^2 t_j^2 t_k^2 t_l^2 t_m^2} \Big) \prod_{i=0, i\neq 2}^{4} (t_2 - t_i)$$

$$c_{89} = \Big(\underset{1\leq i\leq j\leq k\leq l\leq m\leq 4; i,j,k,l,m\neq 3}{t_i^2 t_j^2 t_k^2 t_l^2 t_m^2} \Big) \prod_{i=0, i\neq 3}^{4} (t_3 - t_i)$$

$$c_{99} = \Big(\underset{1\leq i\leq j\leq k\leq l\leq m\leq 4; i,j,k,l,m\neq 4}{t_i^2 t_j^2 t_k^2 t_l^2 t_m^2} \Big) \prod_{i=0, i\neq 4}^{4} (t_4 - t_i)$$

Si se hace $t_0=0$, $t_1=1/4$, $t_2=2/4$, $t_3=3/4$, $t_4=1$ la ecuación de la curva quedaría:

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P_0} & \mathbf{P_1} & \mathbf{P_2} & \mathbf{P_3} & \mathbf{P_4} & \mathbf{T_0} & \mathbf{T_1} & \mathbf{T_2} & \mathbf{T_3} & \mathbf{T_4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
51200/27 & -252928/27 & 528640/27 & 607360/27 & -416200/27 & -171724/27 & 40310/27 & 0 & 485/3 & 1 \\
327680/27 & -1507328/27 & 2871296/27 & -2914304/27 & 1682432/27 & -1682432/27 & 541184/27 & 28672/9 & -512/3 & 0 \\
0 & 4096 & -16384 & 26112 & -20992 & 8848 & -1824 & 144 & 0 & 0 \\
-327680/27 & 1441792/27 & -2609152/27 & 2504704/27 & -1371136/27 & 426496/27 & -69632/27 & 512/3 & 0 & 0 \\
-51200/27 & 207872/27 & -34841/27 & 311936/27 & -160712/27 & 4751/27 & -2482/9 & 53/3 & 0 & 0 \\
9/4 & -45/4 & 765/32 & -225/8 & 20457/1024 & 8955/1024 & -9405/4096 & 675/2048 & -81/4096 & 0 \\
9/64 & -171/256 & 1359/1024 & -5841/4096 & 1827/2048 & -5301/16384 & 513/8192 & -81/16384 & 0 & 0 \\
1/256 & -9/512 & 67/2048 & -133/4096 & 120/655369 & -781/131072 & 33/32768 & -9/131072 & 0 & 0 \\
1/576 & -17/2304 & 119/9216 & -443/36864 & 59/9216 & -287/147456 & 23/73728 & -1/49152 & 0 & 0 \\
9/1024 & -9/256 & 477/8192 & -423/8192 & 6921/262144 & 1017/131072 & -1269/1048576 & 81/1048576 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} t^9 \\ t^8 \\ t^7 \\ t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

3.2.5.2.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE

Haciendo el producto cartesiano de la ecuación anterior por sí misma (figura 3.2.5.2.- 1) se llega a:

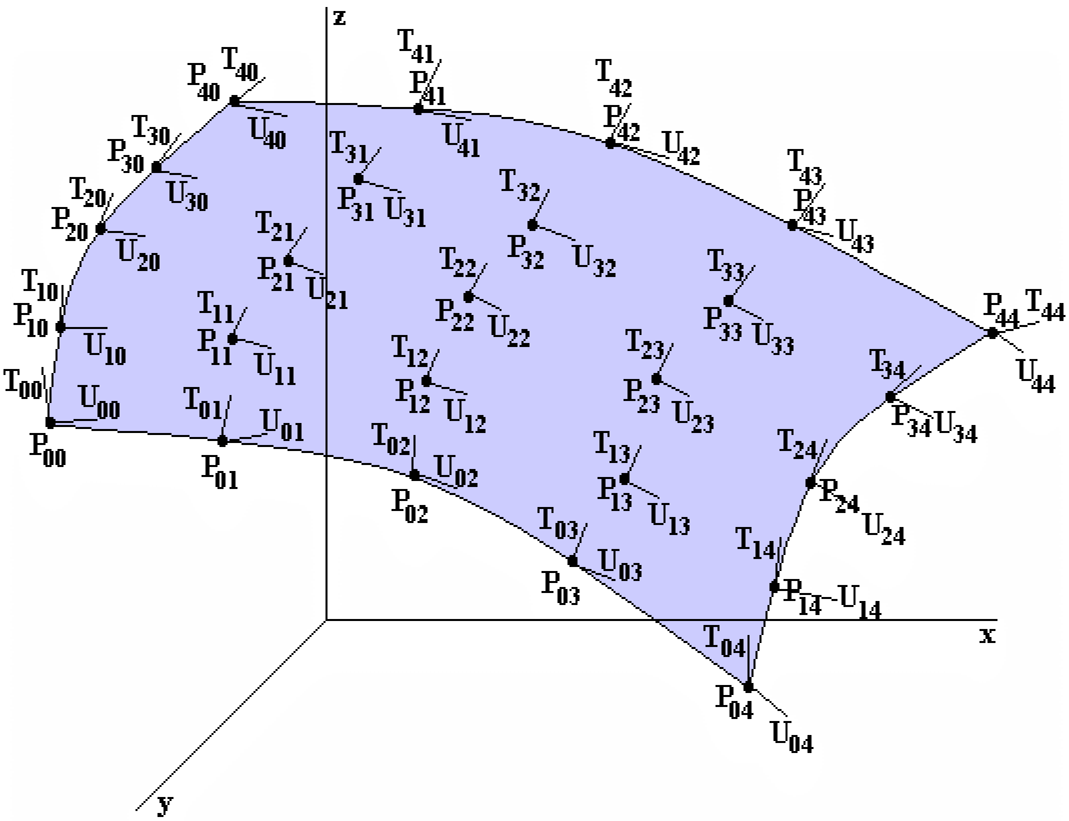


Figura 3.2.5.2.-1. Superficie polinomial que pasa por una red de 5x5 puntos dados con tangentes en ellos tambien dadas

$$\mathbf{P}(t,u)=\begin{pmatrix} t^9 \\ t^8 \\ t^7 \\ t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 51200/27 & -252928/27 & 528640/27 & 607360/27 & -416200/27 & -171724/27 & 40310/27 & 0 & 485/3 & 1 \\ 327680/27 & -1507328/27 & 2871296/27 & -2914304/27 & 1682432/27 & -1682432/27 & 541184/27 & 28672/9 & -512/3 & 0 \\ 0 & 4096 & -16384 & 26112 & -20992 & 8848 & -1824 & 144 & 0 & 0 \\ -327680/27 & 1441792/27 & -2609152/27 & 2504704/27 & -1371136/27 & 426496/27 & -69632/27 & 512/3 & 0 & 0 \\ -51200/27 & 207872/27 & -34841/27 & 311936/27 & -160712/27 & 4751/27 & -2482/9 & 53/3 & 0 & 0 \\ 9/4 & -45/4 & 765/32 & -225/8 & 20457/1024 & 8955/1024 & -9405/4096 & 675/2048 & -81/4096 & 0 \\ 9/64 & -171/256 & 1359/1024 & -5841/4096 & 1827/2048 & -5301/16384 & 513/8192 & -81/16384 & 0 & 0 \\ 1/256 & -9/512 & 67/2048 & -133/4096 & 120/655369 & -781/131072 & 33/32768 & -9/131072 & 0 & 0 \\ 1/576 & -17/2304 & 119/9216 & -443/36864 & 59/9216 & -287/147456 & 23/73728 & -1/49152 & 0 & 0 \\ 9/1024 & -9/256 & 477/8192 & -423/8192 & 6921/262144 & 1017/131072 & -1269/1048576 & 81/1048576 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} & k_{04} & k_{05} & k_{06} & k_{07} & k_{08} & k_{09} \\
k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} \\
k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} \\
k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} & k_{39} \\
k_{40} & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} & k_{49} \\
k_{50} & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & k_{59} \\
k_{60} & k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} & k_{69} \\
k_{70} & k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} & k_{79} \\
k_{80} & k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} & k_{89} \\
k_{90} & k_{91} & k_{92} & k_{93} & k_{94} & k_{95} & k_{96} & k_{97} & k_{98} & k_{99}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
51200/27 & -252928/27 & 528640/27 & 607360/27 & -416200/27 & -171724/27 & 40310/27 & 0 & 485/3 & 1 \\
327680/27 & -1507328/27 & 2871296/27 & -2914304/27 & 1682432/27 & -1682432/27 & 541184/27 & 28672/9 & -512/3 & 0 \\
0 & 4096 & -16384 & 26112 & -20992 & 8848 & -1824 & 144 & 0 & 0 \\
-327680/27 & 1441792/27 & -2609152/27 & 2504704/27 & -1371136/27 & 426496/27 & -69632/27 & 512/3 & 0 & 0 \\
-51200/27 & 207872/27 & -34841/27 & 311936/27 & -160712/27 & 4751/27 & -2482/9 & 53/3 & 0 & 0 \\
9/4 & -45/4 & 765/32 & -225/8 & 20457/1024 & 8955/1024 & -9405/4096 & 675/2048 & -81/4096 & 0 \\
9/64 & -171/256 & 1359/1024 & -5841/4096 & 1827/2048 & -5301/16384 & 513/8192 & -81/16384 & 0 & 0 \\
1/256 & -9/512 & 67/2048 & -133/4096 & 120/655369 & -781/131072 & 33/32768 & -9/131072 & 0 & 0 \\
1/576 & -17/2304 & 119/9216 & -443/36864 & 59/9216 & -287/147456 & 23/73728 & -1/49152 & 0 & 0 \\
9/1024 & -9/256 & 477/8192 & -423/8192 & 6921/262144 & 1017/131072 & -1269/1048576 & 81/1048576 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u^9 \\ u^8 \\ u^7 \\ u^6 \\ u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}
\qquad (1)
$$

Veamos el significado geométrico de los componentes de la matriz k_{ij}

Dando valores a t y u:

$$t = 0,1/4,2/4,3/4,1$$
$$u = 0,1/4,2/4,3/4,1$$

se tiene que:

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}(0,0) = k_{00}; \mathbf{P}(1/4,0) = k_{10}; \mathbf{P}(2/4,0) = k_{20}; \mathbf{P}(3/4,0) = k_{30}; \mathbf{P}(1,0) = k_{40} \\
\mathbf{P}(0,1/4) = k_{01}; \mathbf{P}(1/4,1/4) = k_{11}; \mathbf{P}(2/4,1/4) = k_{21}; \mathbf{P}(3/4,1/4) = k_{31}; \mathbf{P}(1,1/4) = k_{41} \\
\mathbf{P}(0,2/4) = k_{02}; \mathbf{P}(1/4,2/4) = k_{12}; \mathbf{P}(2/4,2/4) = k_{22}; \mathbf{P}(3/4,2/4) = k_{32}; \mathbf{P}(1,2/4) = k_{42} \\
\mathbf{P}(0,3/4) = k_{03}; \mathbf{P}(1/4,3/4) = k_{13}; \mathbf{P}(2/4,3/4) = k_{23}; \mathbf{P}(3/4,3/4) = k_{33}; \mathbf{P}(1,3/4) = k_{43} \\
\mathbf{P}(0,1) = k_{04}; \mathbf{P}(1/4,1) = k_{14}; \mathbf{P}(2/4,1) = k_{24}; \mathbf{P}(3/4,1) = k_{34}; \mathbf{P}(1,1) = k_{44}
\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{P_t}'(0,0) = k_{50}; \mathbf{P_t}'(1/4,0) = k_{51}; \mathbf{P_t}'(2/4,0) = k_{52}; \mathbf{P_t}'(3/4,0) = k_{53}; \mathbf{P_t}'(1,0) = k_{54} \\
\mathbf{P_t}'(0,1/4) = k_{60}; \mathbf{P_t}'(1/4,1/4) = k_{61}; \mathbf{P_t}'(2/4,1/4) = k_{62}; \mathbf{P_t}'(3/4,1/4) = k_{63}; \mathbf{P_t}'(1,1/4) = k_{64} \\
\mathbf{P_t}'(0,2/4) = k_{70}; \mathbf{P_t}'(1/4,2/4) = k_{71}; \mathbf{P_t}'(2/4,2/4) = k_{72}; \mathbf{P_t}'(3/4,2/4) = k_{73}; \mathbf{P_t}'(1,2/4) = k_{74} \\
\mathbf{P_t}'(0,3/4) = k_{80}; \mathbf{P_t}'(1/4,3/4) = k_{81}; \mathbf{P_t}'(2/4,3/4) = k_{82}; \mathbf{P_t}'(3/4,3/4) = k_{83}; \mathbf{P_t}'(1,3/4) = k_{84} \\
\mathbf{P_t}'(0,1) = k_{90}; \mathbf{P_t}'(1/4,1) = k_{91}; \mathbf{P_t}'(2/4,1) = k_{92}; \mathbf{P_t}'(3/4,1) = k_{93}; \mathbf{P_t}'(1,1) = k_{94}
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{P_u}'(0,0) = k_{05}; \mathbf{P_u}'(1/4,0) = k_{06}; \mathbf{P_u}'(2/4,0) = k_{07}; \mathbf{P_u}'(3/4,0) = k_{08}; \mathbf{P_u}'(1,0) = k_{09} \\
\mathbf{P_u}'(0,1/4) = k_{15}; \mathbf{P_u}'(1/4,1/4) = k_{16}; \mathbf{P_u}'(2/4,1/4) = k_{17}; \mathbf{P_u}'(3/4,1/4) = k_{18}; \mathbf{P_u}'(1,1/4) = k_{19} \\
\mathbf{P_u}'(0,2/4) = k_{25}; \mathbf{P_u}'(1/4,2/4) = k_{26}; \mathbf{P_u}'(2/4,2/4) = k_{27}; \mathbf{P_u}'(3/4,2/4) = k_{28}; \mathbf{P_u}'(1,2/4) = k_{29} \\
\mathbf{P_u}'(0,3/4) = k_{35}; \mathbf{P_u}'(1/4,3/4) = k_{36}; \mathbf{P_u}'(2/4,3/4) = k_{37}; \mathbf{P_u}'(3/4,3/4) = k_{38}; \mathbf{P_u}'(1,3/4) = k_{39} \\
\mathbf{P_u}'(0,1) = k_{45}; \mathbf{P_u}'(1/4,1) = k_{46}; \mathbf{P_u}'(2/4,1) = k_{47}; \mathbf{P_u}'(3/4,1) = k_{48}; \mathbf{P_u}'(1,1) = k_{49}
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mathbf{P_{tu}}''(0,0) = k_{55}; \mathbf{P_{tu}}''(1/4,0) = k_{56}; \mathbf{P_{tu}}''(2/4,0) = k_{57}; \mathbf{P_{tu}}''(3/4,0) = k_{58}; \mathbf{P_{tu}}''(1,0) = k_{59} \\
\mathbf{P_{tu}}''(0,1/4) = k_{65}; \mathbf{P_{tu}}''(1/4,1/4) = k_{66}; \mathbf{P_{tu}}''(2/4,1/4) = k_{67}; \mathbf{P_{tu}}''(3/4,1/4) = k_{68}; \mathbf{P_{tu}}''(1,1/4) = k_{69} \\
\mathbf{P_{tu}}''(0,2/4) = k_{75}; \mathbf{P_{tu}}''(1/4,2/4) = k_{76}; \mathbf{P_{tu}}''(2/4,2/4) = k_{77}; \mathbf{P_{tu}}''(3/4,2/4) = k_{78}; \mathbf{P_{tu}}''(1,2/4) = k_{79} \\
\mathbf{P_{tu}}''(0,3/4) = k_{85}; \mathbf{P_{tu}}''(1/4,3/4) = k_{86}; \mathbf{P_{tu}}''(2/4,3/4) = k_{87}; \mathbf{P_{tu}}''(3/4,3/4) = k_{88}; \mathbf{P_{tu}}''(1,3/4) = k_{89} \\
\mathbf{P_{tu}}''(0,1) = k_{95}; \mathbf{P_{tu}}''(1/4,1) = k_{96}; \mathbf{P_{tu}}''(2/4,1) = k_{97}; \mathbf{P_{tu}}''(3/4,1) = k_{98}; \mathbf{P_{tu}}''(1,1) = k_{99}
\end{gathered}$$

Por tanto la ecuación de la superficie se puede poner en la forma:

$$
\mathbf{P}(t,u) = \begin{pmatrix} t^9 \\ t^8 \\ t^7 \\ t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T
\left(\begin{array}{cccccccccc}
51200/27 & -252928/27 & 528640/27 & 607360/27 & -416200/27 & -171724/27 & 40310/27 & 0 & 485/3 & 1 \\
327680/27 & -1507328/27 & 2871296/27 & -2914304/27 & 1682432/27 & -1682432/27 & 541184/27 & 28672/9 & -512/3 & 0 \\
0 & 4096 & -16384 & 26112 & -20992 & 8848 & -1824 & 144 & 0 & 0 \\
-327680/27 & 1441792/27 & -2609152/27 & 2504704/27 & -1371136/27 & 426496/27 & -69632/27 & 512/3 & 0 & 0 \\
-51200/27 & 207872/27 & -34841/27 & 311936/27 & -160712/27 & 4751/27 & -2482/9 & 53/3 & 0 & 0 \\
9/4 & -45/4 & 765/32 & -225/8 & 20457/1024 & 8955/1024 & -9405/4096 & 675/2048 & -81/4096 & 0 \\
9/64 & -171/256 & 1359/1024 & -5841/4096 & 1827/2048 & -5301/16384 & 513/8192 & -81/16384 & 0 & 0 \\
1/256 & -9/512 & 67/2048 & -133/4096 & 120/655369 & -781/131072 & 33/32768 & -9/131072 & 0 & 0 \\
1/576 & -17/2304 & 119/9216 & -443/36864 & 59/9216 & -287/147456 & 23/73728 & -1/49152 & 0 & 0 \\
9/1024 & -9/256 & 477/8192 & -423/8192 & 6921/262144 & 1017/131072 & -1269/1048576 & 81/1048576 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{04} & \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} & \mathbf{U}_{02} & \mathbf{U}_{03} & \mathbf{U}_{04} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} & \mathbf{U}_{10} & \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{13} & \mathbf{U}_{14} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} & \mathbf{U}_{20} & \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} & \mathbf{U}_{23} & \mathbf{U}_{24} \\ \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} & \mathbf{U}_{30} & \mathbf{U}_{31} & \mathbf{U}_{32} & \mathbf{U}_{33} & \mathbf{U}_{34} \\ \mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} & \mathbf{U}_{40} & \mathbf{U}_{41} & \mathbf{U}_{42} & \mathbf{U}_{43} & \mathbf{U}_{44} \\ \mathbf{T}_{00} & \mathbf{T}_{01} & \mathbf{T}_{02} & \mathbf{T}_{03} & \mathbf{T}_{04} & \mathbf{E}_{00} & \mathbf{E}_{01} & \mathbf{E}_{02} & \mathbf{E}_{03} & \mathbf{E}_{04} \\ \mathbf{T}_{10} & \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} & \mathbf{T}_{14} & \mathbf{E}_{10} & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\ \mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{24} & \mathbf{E}_{20} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{24} \\ \mathbf{T}_{30} & \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & \mathbf{T}_{33} & \mathbf{T}_{34} & \mathbf{E}_{30} & \mathbf{E}_{31} & \mathbf{E}_{32} & \mathbf{E}_{33} & \mathbf{E}_{34} \\ \mathbf{T}_{40} & \mathbf{T}_{41} & \mathbf{T}_{42} & \mathbf{T}_{43} & \mathbf{T}_{44} & \mathbf{E}_{40} & \mathbf{E}_{41} & \mathbf{E}_{42} & \mathbf{E}_{43} & \mathbf{E}_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 51200/27 & -252928/27 & 528640/27 & 607360/27 & -416200/27 & -171724/27 & 40310/27 & 0 & 485/3 & 1 \\ 327680/27 & -1507328/27 & 2871296/27 & -2914304/27 & 1682432/27 & -1682432/27 & 541184/27 & 28672/9 & -512/3 & 0 \\ 0 & 4096 & -16384 & 26112 & -20992 & 8848 & -1824 & 144 & 0 & 0 \\ -327680/27 & 1441792/27 & -2609152/27 & 2504704/27 & -1371136/27 & 426496/27 & -69632/27 & 512/3 & 0 & 0 \\ -51200/27 & 207872/27 & -34841/27 & 311936/27 & -160712/27 & 4751/27 & -2482/9 & 53/3 & 0 & 0 \\ 9/4 & -45/4 & 765/32 & -225/8 & 20457/1024 & 8955/1024 & -9405/4096 & 675/2048 & -81/4096 & 0 \\ 9/64 & -171/256 & 1359/1024 & -5841/4096 & 1827/2048 & -5301/16384 & 513/8192 & -81/16384 & 0 & 0 \\ 1/256 & -9/512 & 67/2048 & -133/4096 & 120/655369 & -781/131072 & 33/32768 & -9/131072 & 0 & 0 \\ 1/576 & -17/2304 & 119/9216 & -443/36864 & 59/9216 & -287/147456 & 23/73728 & -1/49152 & 0 & 0 \\ 9/1024 & -9/256 & 477/8192 & -423/8192 & 6921/262144 & 1017/131072 & -1269/1048576 & 81/1048576 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^9 \\ u^8 \\ u^7 \\ u^6 \\ u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Siendo:

$$\mathbf{T}_{ij} = \left(\frac{\partial\,\mathbf{P}(t,u)}{\partial\, t} \right)_{t=i,u=j}$$
$$\mathbf{U}_{ij} = \left(\frac{\partial\,\mathbf{P}(t,u)}{\partial\, u} \right)_{t=i,u=j} \qquad (4)$$
$$\mathbf{E}_{ij} = \left(\frac{\partial\,\mathbf{P}''(t,u)}{\partial\, t\partial\, u} \right)_{t=i,u=j}$$

3.2.5.3.-NUEVA FORMULACIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 5X5 PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

Se tenía que la ecuación de la superficie era:

$$
\mathbf{P}(t,u)=\begin{pmatrix} t^9 \\ t^8 \\ t^7 \\ t^6 \\ t^5 \\ t^4 \\ t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}^T
\begin{pmatrix}
51200/27 & -252928/27 & 528640/27 & 607360/27 & -416200/27 & -171724/27 & 40310/27 & 0 & 485/3 & 1 \\
327680/27 & -1507328/27 & 2871296/27 & -2914304/27 & 1682432/27 & -1682432/27 & 541184/27 & 28672/9 & -512/3 & 0 \\
0 & 4096 & -16384 & 26112 & -20992 & 8848 & -1824 & 144 & 0 & 0 \\
-327680/27 & 1441792/27 & -2609152/27 & 2504704/27 & -1371136/27 & 426496/27 & -69632/27 & 512/3 & 0 & 0 \\
-51200/27 & 207872/27 & -34841/27 & 311936/27 & -160712/27 & 4751/27 & -2482/9 & 53/3 & 0 & 0 \\
9/4 & -45/4 & 765/32 & -225/8 & 20457/1024 & 8955/1024 & -9405/4096 & 675/2048 & -81/4096 & 0 \\
9/64 & -171/256 & 1359/1024 & -5841/4096 & 1827/2048 & -5301/16384 & 513/8192 & -81/16384 & 0 & 0 \\
1/256 & -9/512 & 67/2048 & -133/4096 & 120/655369 & -781/131072 & 33/32768 & -9/131072 & 0 & 0 \\
1/576 & -17/2304 & 119/9216 & -443/36864 & 59/9216 & -287/147456 & 23/73728 & -1/49152 & 0 & 0 \\
9/1024 & -9/256 & 477/8192 & -423/8192 & 6921/262144 & 1017/131072 & -1269/1048576 & 81/1048576 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{04} & \mathbf{U}_{00} & \mathbf{U}_{01} & \mathbf{U}_{02} & \mathbf{U}_{03} & \mathbf{U}_{04} \\
\mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{14} & \mathbf{U}_{10} & \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{13} & \mathbf{U}_{14} \\
\mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{24} & \mathbf{U}_{20} & \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} & \mathbf{U}_{23} & \mathbf{U}_{24} \\
\mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{34} & \mathbf{U}_{30} & \mathbf{U}_{31} & \mathbf{U}_{32} & \mathbf{U}_{33} & \mathbf{U}_{34} \\
\mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{44} & \mathbf{U}_{40} & \mathbf{U}_{41} & \mathbf{U}_{42} & \mathbf{U}_{43} & \mathbf{U}_{44} \\
\mathbf{T}_{00} & \mathbf{T}_{01} & \mathbf{T}_{02} & \mathbf{T}_{03} & \mathbf{T}_{04} & \mathbf{E}_{00} & \mathbf{E}_{01} & \mathbf{E}_{02} & \mathbf{E}_{03} & \mathbf{E}_{04} \\
\mathbf{T}_{10} & \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} & \mathbf{T}_{14} & \mathbf{E}_{10} & \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \mathbf{E}_{13} & \mathbf{E}_{14} \\
\mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{24} & \mathbf{E}_{20} & \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{24} \\
\mathbf{T}_{30} & \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & \mathbf{T}_{33} & \mathbf{T}_{34} & \mathbf{E}_{30} & \mathbf{E}_{31} & \mathbf{E}_{32} & \mathbf{E}_{33} & \mathbf{E}_{34} \\
\mathbf{T}_{40} & \mathbf{T}_{41} & \mathbf{T}_{42} & \mathbf{T}_{43} & \mathbf{T}_{44} & \mathbf{E}_{40} & \mathbf{E}_{41} & \mathbf{E}_{42} & \mathbf{E}_{43} & \mathbf{E}_{44}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
51200/27 & -252928/27 & 528640/27 & 607360/27 & -416200/27 & -171724/27 & 40310/27 & 0 & 485/3 & 1 \\
327680/27 & -1507328/27 & 2871296/27 & -2914304/27 & 1682432/27 & -1682432/27 & 541184/27 & 28672/9 & -512/3 & 0 \\
0 & 4096 & -16384 & 26112 & -20992 & 8848 & -1824 & 144 & 0 & 0 \\
-327680/27 & 1441792/27 & -2609152/27 & 2504704/27 & -1371136/27 & 426496/27 & -69632/27 & 512/3 & 0 & 0 \\
-51200/27 & 207872/27 & -34841/27 & 311936/27 & -160712/27 & 4751/27 & -2482/9 & 53/3 & 0 & 0 \\
9/4 & -45/4 & 765/32 & -225/8 & 20457/1024 & 8955/1024 & -9405/4096 & 675/2048 & -81/4096 & 0 \\
9/64 & -171/256 & 1359/1024 & -5841/4096 & 1827/2048 & -5301/16384 & 513/8192 & -81/16384 & 0 & 0 \\
1/256 & -9/512 & 67/2048 & -133/4096 & 120/655369 & -781/131072 & 33/32768 & -9/131072 & 0 & 0 \\
1/576 & -17/2304 & 119/9216 & -443/36864 & 59/9216 & -287/147456 & 23/73728 & -1/49152 & 0 & 0 \\
9/1024 & -9/256 & 477/8192 & -423/8192 & 6921/262144 & 1017/131072 & -1269/1048576 & 81/1048576 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u^9 \\ u^8 \\ u^7 \\ u^6 \\ u^5 \\ u^4 \\ u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{pmatrix}
\qquad (1)
$$

Efectuando los productos matriciales se llega a:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u) = \\
&al\mathbf{P}_{00} + bl\mathbf{P}_{10} + cl\mathbf{P}_{20} + dl\mathbf{P}_{30} + el\mathbf{P}_{40} + fl\mathbf{T}_{00} + gl\mathbf{T}_{10} + hl\mathbf{T}_{20} + jl\mathbf{T}_{30} + kl\mathbf{T}_{40} + \\
&am\mathbf{P}_{01} + bm\mathbf{P}_{11} + cm\mathbf{P}_{21} + dm\mathbf{P}_{31} + em\mathbf{P}_{41} + fm\mathbf{T}_{01} + gm\mathbf{T}_{11} + hm\mathbf{T}_{21} + jm\mathbf{T}_{31} + km\mathbf{T}_{41} + \\
&an\mathbf{P}_{02} + bn\mathbf{P}_{12} + cn\mathbf{P}_{22} + dn\mathbf{P}_{32} + en\mathbf{P}_{42} + fn\mathbf{T}_{02} + gn\mathbf{T}_{12} + hn\mathbf{T}_{22} + jn\mathbf{T}_{32} + kn\mathbf{T}_{42} + \\
&a\tilde{n}\mathbf{P}_{03} + b\tilde{n}\mathbf{P}_{13} + c\tilde{n}\mathbf{P}_{23} + d\tilde{n}\mathbf{P}_{33} + e\tilde{n}\mathbf{P}_{43} + f\tilde{n}\mathbf{T}_{03} + g\tilde{n}\mathbf{T}_{13} + h\tilde{n}\mathbf{T}_{23} + j\tilde{n}\mathbf{T}_{33} + k\tilde{n}\mathbf{T}_{43} + \\
&ao\mathbf{P}_{04} + bo\mathbf{P}_{14} + co\mathbf{P}_{24} + do\mathbf{P}_{34} + eo\mathbf{P}_{44} + fo\mathbf{T}_{04} + go\mathbf{T}_{14} + ho\mathbf{T}_{24} + jo\mathbf{T}_{34} + ko\mathbf{T}_{44} + \\
&ap\mathbf{U}_{00} + bp\mathbf{U}_{10} + cp\mathbf{U}_{20} + dp\mathbf{U}_{30} + ep\mathbf{U}_{40} + fp\mathbf{E}_{00} + gp\mathbf{E}_{10} + hp\mathbf{E}_{20} + jp\mathbf{E}_{30} + kp\mathbf{E}_{40} + \\
&aq\mathbf{U}_{01} + bq\mathbf{U}_{11} + cq\mathbf{U}_{21} + dq\mathbf{U}_{31} + eq\mathbf{U}_{41} + fq\mathbf{E}_{01} + gq\mathbf{E}_{11} + hq\mathbf{E}_{21} + jq\mathbf{E}_{31} + kq\mathbf{E}_{41} + \\
&ar\mathbf{U}_{02} + br\mathbf{U}_{12} + cr\mathbf{U}_{22} + dr\mathbf{U}_{32} + er\mathbf{U}_{42} + fr\mathbf{E}_{02} + gr\mathbf{E}_{12} + hr\mathbf{E}_{22} + jr\mathbf{E}_{32} + kr\mathbf{E}_{42} + \\
&as\mathbf{U}_{03} + bs\mathbf{U}_{13} + cs\mathbf{U}_{23} + ds\mathbf{U}_{33} + es\mathbf{U}_{43} + fs\mathbf{E}_{03} + gs\mathbf{E}_{13} + hs\mathbf{E}_{23} + js\mathbf{E}_{33} + ks\mathbf{E}_{43} + \\
&aw\mathbf{U}_{04} + bw\mathbf{U}_{14} + cw\mathbf{U}_{24} + dw\mathbf{U}_{34} + ew\mathbf{U}_{44} + fw\mathbf{E}_{04} + gw\mathbf{E}_{14} + hw\mathbf{E}_{24} + jw\mathbf{E}_{34} + kw\mathbf{E}_{44}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Siendo:

$$a = 51200/27t^9 - 252928/27t^8 + 528640/27t^7 - 607360/27t^6 + 416200/27t^5 - 171724/27t^4 + 40310/27t^3 - 485/3t^2 + 1$$

$$b = 327680/27t^9 - 1507328/27t^8 + 2871296/27t^7 - 2914304/27t^6 + 1682432/27t^5 - 541184/27t^4 + 28672/9t^3 - 51273t^2$$

$$c = 4096t^8 - 16384t^7 + 26112t^6 - 20992t^5 + 8848t^4 - 1824t^3 + 144t^2$$

$$d = -327680/27t^9 + 1441792/27t^8 - 2609152/27t^7 + 2504704/27t^6 - 1371136/27t^5 + 426496/27t^4 - 69632/27t^3 + 512/3t^2$$

$$e = -51200/27t^9 + 207872/27t^8 - 348416/27t^7 + 311936/27t^6 - 160712/27t^5 + 47516/27t^4 - 2482/9t^3 + 53/3t^2$$

$$f = 1024/9t^9 - 5120/9t^8 + 10880/9t^7 - 12800/9t^6 + 9092/9t^5 - 3980/9t^4 + 1045/9t^3 - 50/3t^2 + t$$

$$g = 16384/9t^9 - 77824/9t^8 + 154624/9t^7 - 166144/9t^6 + 103936/9t^5 - 37696/9t^4 + 2432/3t^3 - 64t^2$$

$$h = 4096t^9 - 18432t^8 + 34304t^7 - 34048t^6 + 19344t^5 - 6248t^4 + 1056t^3 - 72t^2$$

$$j = 16384/9t^9 - 69632/9t^8 + 121856/9t^7 - 113408/9t^6 + 60416/9t^5 - 18368/9t^4 + 2944/9t^3 - 64/3t^2$$

$$k = 1024/9t^9 - 4096/9t^8 + 6784/9t^7 - 6016/9t^6 + 3076/9t^5 - 904/9t^4 + 47/3t^3 - t^2$$

$$\begin{aligned}
l &= 51200/27u^9 - 252928/27u^8 + 528640/27u^7 - 607360/27u^6 + \\
&\quad 416200/27u^5 - 171724/27u^4 + 40310/27u^3 - 485/3u^2 + 1 \\
m &= 327680/27u^9 - 1507328/27u^8 + 2871296/27u^7 - 2914304/27u^6 + \\
&\quad 1682432/27u^5 - 541184/27u^4 + 28672/9u^3 - 51273u^2 \\
n &= 4096u^8 - 16384u^7 + 26112u^6 - 20992u^5 + 8848u^4 - 1824u^3 + 144u^2 \\
\tilde{n} &= -327680/27u^9 + 1441792/27u^8 - 2609152/27u^7 + 2504704/27u^6 - \\
&\quad 1371136/27u^5 + 426496/27u^4 - 69632/27u^3 + 512/3u^2 \\
o &= -51200/27u^9 + 207872/27u^8 - 348416/27u^7 + 311936/27u^6 - \\
&\quad 160712/27u^5 + 47516/27u^4 - 2482/9u^3 + 53/3u^2 \\
p &= 1024/9u^9 - 5120/9u^8 + 10880/9u^7 - 12800/9u^6 + \\
&\quad 9092/9u^5 - 3980/9u^4 + 1045/9u^3 - 50/3u^2 + u \\
q &= 16384/9u^9 - 77824/9u^8 + 154624/9u^7 - 166144/9u^6 + \\
&\quad 103936/9u^5 - 37696/9u^4 + 2432/3u^3 - 64u^2 \\
r &= 4096u^9 - 18432u^8 + 34304u^7 - 34048u^6 + \\
&\quad 19344u^5 - 6248u^4 + 1056u^3 - 72u^2 \\
s &= 16384/9u^9 - 69632/9u^8 + 121856/9u^7 - 113408/9u^6 + \\
&\quad 60416/9u^5 - 18368/9u^4 + 2944/9u^3 - 64/3u^2 \\
w &= 1024/9u^9 - 4096/9u^8 + 6784/9u^7 - 6016/9u^6 + \\
&\quad 3076/9u^5 - 904/9u^4 + 47/3u^3 - u^2
\end{aligned} \qquad (3)$$

Cada uno de los vectores tiene las siguientes componentes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,u) &= (x, y, z) \\
\mathbf{P_{ij}} &= (xij, yij, zij) \\
\mathbf{T_{ij}} &= (xtij, ytij, ztij) \\
\mathbf{U_{ij}} &= (xuij, yuij, zuij) \\
\mathbf{E_{ij}} &= (xuij, yuij, zuij)
\end{aligned} \qquad (4)$$

Si se llevan estos valores a (1) y desglosando por componentes se obtendrían las ecuaciones paramétricas de la superficie polinomial binovena que interpola la red de 5x5 puntos dados :

$$
\begin{aligned}
&x = \\
&l(ax00+bx10+cx20+dx30+ex40+fxt00+gxt10+hxt20+jxt30+kxt40)+ \\
&m(ax01+bx11+cx21+dx31+ex41+fxt01+gxt11+hxt21+jxt31+kxt41)+ \\
&n(ax02+bx12+cx22+dx32+ex42+fxt02+gxt12+hxt22+jxt32+kxt42)+ \\
&ñ(ax03+bx13+cx23+dx33+ex43+fxt03+gxt13+hxt23+jxt33+kxt43)+ \\
&o(ax04+bx14+cx24+dx34+ex44+fxt04+gxt14+hxt24+jxt34+kxt44)+ \\
&p(axu00+bxu10+cxu20+dxu30+exu40+fxe00+gxe10+hxe20+jxe30+kxe40)+ \\
&q(axu01+bxu11+cxu21+dxu31+exu41+fxe01+gxe11+hxe21+jxe31+kxe41)+ \\
&r(axu02+bxu12+cxu22+dxu32+exu42+fxe02+gxe12+hxe22+jxe32+kxe42)+ \\
&s(axu03+bxu13+cxu23+dxu33+exu43+fxe03+gxe13+hxe23+jxe33+kxe43)+ \\
&w(axu04+bxu14+cxu24+dxu34+exu44+fxe04+gxe14+hxe24+jxe34+kxe44)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&y = \\
&l(ay00+by10+cy20+dy30+ey40+fyt00+gyt10+hyt20+jyt30+kyt40)+ \\
&m(ay01+by11+cy21+dy31+ey41+fyt01+gyt11+hyt21+jyt31+kyt41)+ \\
&n(ay02+by12+cy22+dy32+ey42+fyt02+gyt12+hyt22+jyt32+kyt42)+ \\
&ñ(ay03+by13+cy23+dy33+ey43+fyt03+gyt13+hyt23+jyt33+kyt43)+ \\
&o(ay04+by14+cy24+dy34+ey44+fyt04+gyt14+hyt24+jyt34+kyt44)+ \qquad (5) \\
&p(ayu00+byu10+cyu20+dyu30+eyu40+fye00+gye10+hye20+jye30+kye40)+ \\
&q(ayu01+byu11+cyu21+dyu31+eyu41+fye01+gye11+hye21+jye31+kye41)+ \\
&r(ayu02+byu12+cyu22+dyu32+eyu42+fye02+gye12+hye22+jye32+kye42)+ \\
&s(ayu03+byu13+cyu23+dyu33+eyu43+fye03+gye13+hye23+jye33+kye43)+ \\
&w(ayu04+byu14+cyu24+dyu34+eyu44+fye04+gye14+hye24+jye34+kye44)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z = \\
&l(az00+bz10+cz20+dz30+ez40+fzt00+gzt10+hzt20+jzt30+kzt40)+ \\
&m(az01+bz11+cz21+dz31+ez41+fzt01+gzt11+hzt21+jzt31+kzt41)+ \\
&n(az02+bz12+cz22+dz32+ez42+fzt02+gzt12+hzt22+jzt32+kzt42)+ \\
&ñ(az03+bz13+cz23+dz33+ez43+fzt03+gzt13+hzt23+jzt33+kzt43)+ \\
&o(az04+bz14+cz24+dz34+ez44+fzt04+gzt14+hzt24+jzt34+kzt44)+ \\
&p(azu00+bzu10+czu20+dzu30+ezu40+fze00+gze10+hze20+jze30+kze40)+ \\
&q(azu01+bzu11+czu21+dzu31+ezu41+fze01+gze11+hze21+jze31+kze41)+ \\
&r(azu02+bzu12+czu22+dzu32+ezu42+fze02+gze12+hze22+jze32+kze42)+ \\
&s(azu03+bzu13+czu23+dzu33+ezu43+fze03+gze13+hze23+jze33+kze43)+ \\
&w(azu04+bzu14+czu24+dzu34+ezu44+fze04+gze14+hze24+jze34+kze44)
\end{aligned}
$$

3.2.6.-APROXIMACIÓN DE UNA SUPERFICIE CONOCIDA MEDIANTE OTRA QUE INTERPOLA ALGUNOS DE SUS PUNTOS

Dada una superficie S_1 cuyas ecuaciones paramétricas conocemos:

$$\begin{aligned} x &= x_1(t,u) \\ y &= y_1(t,u) \qquad (1) \\ z &= z_1(t,u) \end{aligned}$$

Se pretende construir una superficie S_2 que pase por una serie de puntos $\mathbf{P}_{ij}$ de S_1 con tangentes en ellos $\mathbf{T}_{ij}$ y $\mathbf{U}_{ij}$ iguales a las de la superficie S_1. Dicha superficie que llamaremos S_2 tendría de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= x_2(t,u) \\ y &= y_2(t,u) \qquad (2) \\ z &= z_2(t,u) \end{aligned}$$

3.2.6.1-ERROR DE APROXIMACIÓN ENTRE AMBAS SUPERFICIES

Si el área de la superficie dada es:

$$A_1 = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\partial(x_1,y_1)}{\partial(t,u)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y_1,z_1)}{\partial(t,u)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_1,z_1)}{\partial(t,u)}\right)^2}\,dtdu \qquad (1)$$

donde:

$$\frac{\partial(x_1,y_1)}{\partial(t,u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \frac{\partial y_1}{\partial t} & \frac{\partial y_1}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = a_1 d_1 - b_1 c_1$$

$$\frac{\partial(y_1,z_1)}{\partial(t,u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t} & \frac{\partial y_1}{\partial u} \\ \frac{\partial z_1}{\partial t} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ e_1 & k_1 \end{vmatrix} = c_1 k_1 - e_1 d_1 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial(x_1,z_1)}{\partial(t,u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} & \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ \frac{\partial z_1}{\partial t} & \frac{\partial z_1}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ e_1 & k_1 \end{vmatrix} = a_1 k_1 - b_1 e_1$$

y el área de la superficie que hemos construido como aproximante es:

$$A_2 = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\partial(x_2,y_2)}{\partial(t,u)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y_2,z_2)}{\partial(t,u)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_2,z_2)}{\partial(t,u)}\right)^2}\,dtdu \qquad (3)$$

donde:

$$\frac{\partial (x_2, y_2)}{\partial (t,u)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_2}{\partial t} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial t} & \dfrac{\partial y_2}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = a_2 d_2 - b_2 c_2$$

$$\frac{\partial (y_2, z_2)}{\partial (t,u)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_2}{\partial t} & \dfrac{\partial y_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial t} & \dfrac{\partial z_2}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ e_2 & k_2 \end{vmatrix} = c_2 k_2 - e_2 d_2 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial (x_2, z_2)}{\partial (t,u)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_2}{\partial t} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial t} & \dfrac{\partial z_2}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ e_2 & k_2 \end{vmatrix} = a_2 k_2 - b_2 e_2$$

El error de áreas que se comete, expresado en % sería:

$$E_A = \frac{A_2 - A_1}{A_1} 100 \qquad (5)$$

y el error lineal sería:

$$E_L \leq \sqrt{\left| \frac{A_2 - A_1}{A_1} 100 \right|} \qquad (6)$$

<u>3.2.6.2. PROGRAMACIÓN DEL CÁLCULO DE ERRORES</u>

El programa que se propone esta desarrollado haciendo uso del paquete Mathematica y es :

Área de la superficie a aproximar:

$$A_1 =$$

Ecuaciones paramétrícas de la superficie aproximante:

$$x =$$

$$y =$$

$$z =$$

Cálculo de las derivadas:

$$a = D[x,t]$$
$$b = D[x,u]$$
$$c = D[y,t]$$
$$d = D[y,u]$$
$$e = D[z,t]$$
$$k = D[z,u]$$

Cálculo del área de la superficie aproximante:

$$A_2 = NIntegrate\left[Sqrt\left[(ad - cb)\wedge 2 + (ck - de)\wedge 2 + (ak - eb)\wedge 2\right], \{t,0,1\}, \{u,0,1\}\right]$$
$$A_2 = N[\%]$$

Cálculo del error de área:

$$Error = \frac{A_2 - A_1}{A_1} 100$$
$$w = N[\%]$$

Error lineal:

$$E_L \leq Sqrt\left[Abs[w]\right]$$

3.2.6.3.-EJEMPLO DE APROXIMACIÓN DE UNA SUPERFICIE

Se trata de aproximar un semicilindro (figura 3.2.6.3.-1) de r = 1 y altura h = 2 mediante una superficie que pasa por los siguientes puntos del cilindro:

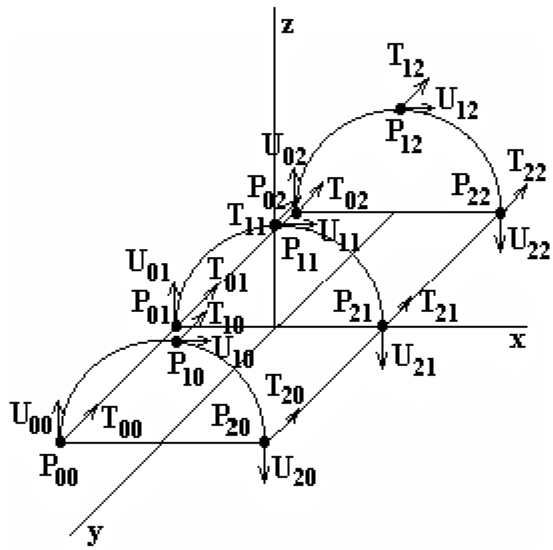


Figura 3.2.6.3.-1. Aproximación de un semicilindro mediante una superficie que pasa por una red de 3x3 puntos del cilindro con sus tangentes en ellos iguales a las del semicilindro

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}_{00} = (-1,-1,0) & \mathbf{P}_{01} = (0,-1,1) & \mathbf{P}_{02} = (1,-1,0) \\ \mathbf{P}_{10} = (-1,0,0) & \mathbf{P}_{11} = (0,0,1) & \mathbf{P}_{12} = (1,0,0) \\ \mathbf{P}_{20} = (-1,1,0) & \mathbf{P}_{21} = (0,1,1) & \mathbf{P}_{22} = (1,1,0) \end{array} \qquad (1)$$

con tangentes en ellos:

$$\begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{\mathbf{T}_{00} = \mathbf{T}_{01} = \mathbf{T}_{02} = \mathbf{T}_{10} = \mathbf{T}_{11} = \mathbf{T}_{12} = \mathbf{T}_{20} = \mathbf{T}_{21} = \mathbf{T}_{22} = (0,1,0)} \\ \mathbf{U}_{00} = (0,0,1) & \mathbf{U}_{01} = (1,0,0) & \mathbf{U}_{02} = (0,0,-1) \\ \mathbf{U}_{10} = (0,0,1) & \mathbf{U}_{11} = (1,0,0) & \mathbf{U}_{12} = (0,0,-1) \\ \mathbf{U}_{20} = (0,0,1) & \mathbf{U}_{21} = (1,0,0) & \mathbf{U}_{22} = (0,0,-1) \end{array} \qquad (2)$$

El área del semicilindro sería:

$$A_1 = 2\pi\, rh/2 = 6.2832 \qquad (3)$$

Las ecuaciones de la superficie aproximante serían:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 22u^2 - 68u^3 + 80u^4 - 32u^5 \\ y &= -1 + t + 15t^2 - 50t^3 + 60t^4 - 24t^5 \\ z &= u + 11u^2 - 24u^3 + 12u^4 \end{aligned} \qquad (4)$$

El área de la superficie aproximante es:

$$A_2 = 5.70068 \qquad (5)$$

y el error lineal cometido sería:

$$E = \sqrt{\left|\frac{5.70068 - 6.2832}{6.2832} 100\right|} = 3\%$$

3.3.-SUPERFICIES POLINOMIALES MIXTAS DEFINIDAS POR PUNTOS

3.3.1.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE(N+l)x(M+1) PUNTOS DADOS USANDO POLINOMIOS DE GRADO 3 0 MENOR. PROBLEMA MIXTO

3.3.1.1.-CONSTRUCCIÓN DE LAS CURVAS GENERADORAS

Supongamos la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$,$\mathbf{P}_6$ ....$\mathbf{P}_{n-2}$,$\mathbf{P}_{n-1}$, $\mathbf{P}_n$ con tangentes $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_5$, $\mathbf{T}_6$ ....$\mathbf{T}_{n-3}$, $\mathbf{T}_{n-2}$ en los puntos $\mathbf{P}_2$ $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_5$,$\mathbf{P}_6$………… $\mathbf{P}_{n-3}$ y $\mathbf{P}_{n-2}$ (figura 3.3.1.1.-1) siendo (n+1) múltiplo de 3.

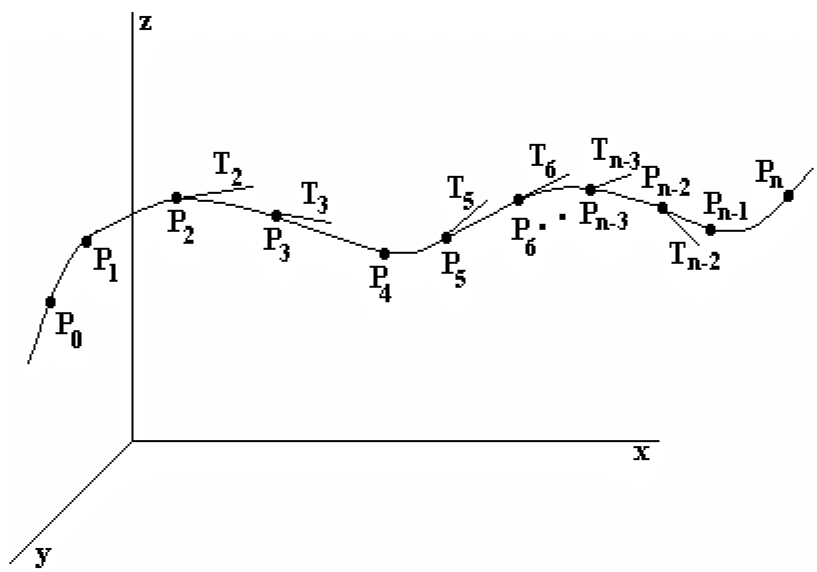


Figura 3.3.1.1.-1. Curva polinomial que pasa por (n+1) puntos dados con tangentes en algunos de ellos tambien dadas

Dicha curva se puede descomponer en los tramos: C 0-2, C 2-3, C 3-5, C 5-6, C (n-3)-(n-2), C (n-2)-n.

El tramo C 0-2 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P}_{0,2}(t) = F_0(t)\mathbf{P_0} + F_1(t)\mathbf{P_1} + F_2(t)\mathbf{P_2} \qquad (1)$$

con las restricciones:

t	$F_0(t)$	$F_1(t)$	$F_2(t)$
0	1	0	0
1/n	0	1	0
2/n	0	0	1

Tabla (2)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \frac{(t-1/n)(t-2/n)}{(0-1/n)(0-2/n)} = (n^2/2)t^2 - (3n/2)t + 1 \\ F_1(t) &= \frac{(t-0)(t-2/n)}{(1/n-0)(1/n-2/n)} = -n^2t^2 + 2nt \\ F_2(t) &= \frac{(t-0)(t-1/n)}{(2/n-0)(2/n-1/n)} = (n^2/2)t^2 - (n/2)t \end{aligned} \qquad (3)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (1), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P}_{0,2}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^2/2 & -3n/2 & 1 \\ -n^2 & 2n & 0 \\ n^2/2 & -n/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Análogamente el tramo de curva C 2-3 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$.

La ecuación de este tramo sería:

$$\mathbf{P}_{2,3}(t) = F_2(t)\mathbf{P_2} + F_3(t)\mathbf{P_3} + G_2(t)\mathbf{T_2} + G_3(t)\mathbf{T_3} \qquad (5)$$

con las restricciones:

t	$F_2(t)$	$F'_2(t)$	$F_3(t)$	$F'_3(t)$	$G_2(t)$	$G'_2(t)$	$G_3(t)$	$G'_3(t)$
2/n	1	0	0	0	0	1	0	0
3/n	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (6)

Las soluciones de las $F_i(t)$ que cumplen estas condiciones serían:

$$F_2(t) = (t - 3/n)^2 (a_2 + b_2 t) \qquad (7)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} F_2(2/n) &= 1 \\ F'_2(2/n) &= 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

Igualmente:

$$F_3(t) = (t - 2/n)^2 (a_3 + b_3 t) \qquad (9)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} F_3(3/n) &= 1 \\ F'_3(3/n) &= 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

cuyas soluciones serían:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= c_{23}t^3 + c_{22}t^2 + c_{21}t + c_{20} \\ F_3(t) &= c_{33}t^3 + c_{32}t^2 + c_{31}t + c_{30} \end{aligned} \qquad (11)$$

Análogamente las $G_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} G_2(t) &= \frac{(t - 3/n)^2 (t - 2/n)}{(2/n - 3/n)^2} = d_{23}t^3 + d_{22}t^2 + d_{21}t + d_{20} \\ G_3(t) &= \frac{(t - 2/n)^2 (t - 3/n)}{(3/n - 2/n)^2} = d_{33}t^3 + d_{32}t^2 + d_{31}t + d_{30} \end{aligned} \qquad (12)$$

Luego (5) se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{P}_{2,3}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{23} & c_{22} & c_{21} & c_{20} \\ c_{33} & c_{32} & c_{31} & c_{30} \\ d_{23} & d_{22} & d_{21} & d_{20} \\ d_{33} & d_{32} & d_{31} & d_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Operando igualmente, el tramo C 3-5 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ y $\mathbf{P}_5$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P}_{3,5}(t) = F_3(t)\mathbf{P_3} + F_4(t)\mathbf{P_4} + F_5(t)\mathbf{P_5} \qquad (14)$$

con las restricciones:

t	$F_3(t)$	$F_4(t)$	$F_5(t)$
3/n	1	0	0
4/n	0	1	0
5/n	0	0	1

Tabla (15)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_3(t) &= \frac{(t-4/n)(t-5/n)}{(3/n-4/n)(3/n-5/n)} = (n^2/2)t^2 - (9n/2)t + 10 \\ F_4(t) &= \frac{(t-3/n)(t-5/n)}{(4/n-3/n)(4/n-5/n)} = -n^2t^2 + 8nt - 15 \\ F_5(t) &= \frac{(t-3/n)(t-4/n)}{(5/n-3/n)(5/n-4/n)} = (n^2/2)t^2 - (7n/2)t + 6 \end{aligned} \qquad (16)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (14), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P}_{3,5}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^2/2 & -9n/2 & 10 \\ -n^2 & 8n & -15 \\ n^2/2 & -7n/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Análogamente el tramo de curva C r-(r+1) sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_r$ y $\mathbf{P}_{r+1}$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_r$ y $\mathbf{T}_{r+1}$

La ecuación de este tramo sería:

$$\mathbf{P}_{r,r+1}(t) = F_r(t)\mathbf{P_r} + F_{r+1}(t)\mathbf{P_{r+1}} + G_r(t)\mathbf{T_r} + G_{r+1}(t)\mathbf{T_{r+1}} \qquad (18)$$

con las restricciones:

t	$F_r(t)$	$F'_r(t)$	$F_{r+1}(t)$	$F'_{r+1}(t)$	$G_r(t)$	$G'_r(t)$	$G_{r+1}(t)$	$G'_{r+1}(t)$
r/n	1	0	0	0	0	1	0	0
(r+1)/n	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (19)

Las soluciones de las Fi(t) que cumplen estas condiciones serían

$$F_r(t) = (t - r/n)^2 (a_r + b_r t) \qquad (20)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} F_r(r/n) &= 1 \\ F'_r(r/n) &= 0 \end{aligned} \qquad (21)$$

Igualmente:

$$F_{r+1}(t) = (t - (r+1)/n)^2 (a_{r+1} + b_{r+1} t) \qquad (22)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} F_{r+1}((r+1)/n) &= 1 \\ F'_{r+1}((r+1)/n) &= 0 \end{aligned} \qquad (23)$$

Cuyas soluciones serían:

$$\begin{aligned} F_r(t) &= c_{r3}t^3 + c_{r2}t^2 + c_{r1}t + c_{r0} \\ F_{r+1}(t) &= c_{(r+1)3}t^3 + c_{(r+1)2}t^2 + c_{(r+1)1}t + c_{(r+1)0} \end{aligned} \qquad (24)$$

Análogamente las $G_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} G_r(t) &= \frac{(t - (r+1)/n)^2 (t - r/n)}{(r/n - (r+1)/n)^2} = d_{r3}t^3 + d_{r2}t^2 + d_{r1}t + d_{r0} \\ G_{r+1}(t) &= \frac{(t - r/n)^2 (t - (r+1)/n)}{((r+1)/n - r/n)^2} = d_{(r+1)3}t^3 + d_{(r+1)2}t^2 + d_{(r+1)1}t + d_{(r+1)0} \end{aligned} \qquad (25)$$

Que se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{P}_{r,r+1}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_r & \mathbf{P}_{r+1} & \mathbf{T}_r & \mathbf{T}_{r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{r3} & c_{r2} & c_{r1} & c_{r0} \\ c_{(r+1)3} & c_{(r+1)2} & c_{(r+1)1} & c_{(r+1)0} \\ d_{r3} & d_{r2} & d_{r1} & d_{r0} \\ d_{(r+1)3} & d_{(r+1)2} & d_{(r+1)1} & d_{(r+1)0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (26)$$

Operando igualmente, el tramo C i-(i+2) sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{P}_{i+1}$ y $\mathbf{P}_{i+2}$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P}_{i,i+2}(t) = F_i(t)\mathbf{P_i} + F_{i+1}(t)\mathbf{P_{i+1}} + F_{i+2}(t)\mathbf{P_{i+2}} \qquad (27)$$

con las restricciones:

t	$F_i(t)$	$F_{i+1}(t)$	$F_{i+2}(t)$
i/n	1	0	0
(i+1)/n	0	1	0
(i+2)/n	0	0	1

Tabla (28)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \frac{(t-(i+1)/n)(t-(i+2)/n)}{(i/n-(i+1)/n)(i/n-(i+2)/n)} = (n^2/2)t^2 - n((2i+3)/2)t + (i+1)(i+2)/2 \\ F_{i+1}(t) &= \frac{(t-i/n)(t-(i+2)/n)}{((i+1)/n-i/n)((i+1)/n-(i+2)/n)} = -n^2t^2 + n(2i+2)t - i(i+2) \\ F_{i+2}(t) &= \frac{(t-i/n)(t-(i+1)/n)}{((i+2)/n-i/n)((i+2)/n-(i+1)/n)} = (n^2/2)t^2 - n(2i+1)/2t + i(i+1)/2 \end{aligned} \qquad (29)$$

Entrando con estos valores en la fórmula de $\mathbf{P}_{i,i+2}(t)$ se tendría:

$$\mathbf{P}_{i,i+2}(t) = F_i(t)\mathbf{P_i} + F_{i+1}(t)\mathbf{P_{i+1}} + F_{i+2}(t)\mathbf{P_{i+2}} \qquad (30)$$

Operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P}_{i,i+2}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_i & \mathbf{P}_{i+1} & \mathbf{P}_{i+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^2/2 & -n(2i+3)/2 & (i+1)(i+2)/2 \\ -n^2 & n(2i+2) & -i(i+2) \\ n^2/2 & -n(2i+1)/2 & i(i+1/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

El ultimo tramo C (n-2)-n sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_{n-2}$ $\mathbf{P}_{n-1}$
y
$\mathbf{P}_n$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P}_{n-2,n}(t) = F_{n-2}(t)\mathbf{P_{n-2}} + F_{n-1}(t)\mathbf{P_{n-1}} + F_n(t)\mathbf{P_n} \qquad (32)$$

con las restricciones:

t	$F_{n-2}(t)$	$F_{n-1}(t)$	$F_n(t)$
(n-2)/n	1	0	0
(n-1)/n	0	1	0

1	0	0	1

Tabla (33)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned}
F_{n-2}(t) &= \frac{(t-(n-1)/n)(t-1)}{((n-2)/n-(n-1)/n)((n-2)/n-1)} = \frac{1}{((n-2)/n-1)((n-2)/n-(n-1)/n)}t^2 + \\
&\quad (-\frac{1}{((n-2)/n-1)((n-2)/n-(n-1)/n))} - \frac{n-1}{((n-2)/n-1)((n-2)/n-(n-1)/n)n})t + \\
&\quad \frac{n-1}{((n-2)/n-1)((n-2)/n-(n-1)/n)n} \\
F_{n-1}(t) &= \frac{(t-(n-2)/n)(t-1)}{((n-1)/n-(n-2)/n)((n-1)/n-1)} = \frac{1}{((n-1)/n-1)((n-1)/n-(n-2)/n)}t^2 + \\
&\quad (-\frac{1}{((n-1)/n-1)((n-1)/n-(n-2)/n))} - \frac{n-2}{((n-1)/n-1)((n-1)/n-(n-2)/n)n})t + \\
&\quad \frac{n-2}{((n-1)/n-1)((n-1)/n-(n-2)/n)n} \\
F_n(t) &= \frac{(t-(n-2)/n)(t-(n-1)/n)}{(1-(n-2)/n)(1-(n-1)/n)} = \frac{1}{(1-(n-2)/n)(1-(n-1)/n)}t^2 + \\
&\quad (-\frac{n-2}{(1-(n-2)/n)(1-(n-1)/n))} - \frac{n-1}{(1-(n-2)/n)(1-(n-1)/n)n})t + \\
&\quad \frac{(n-2)(n-1)}{(1-(n-2)/n)(1-(n-1)/n)n^2}
\end{aligned} \tag{34}$$

Entrando con estos valores en la fórmula (32), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$
\mathbf{P}_{n-2,n}(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{n-2} & \mathbf{P}_{n-1} & \mathbf{P}_{n}\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\dfrac{1}{((n-2)/n-1)((n-2)/n-(n-1)/n)} & -\dfrac{1}{((n-2)/n-1)((n-2)/n-(n-1)/n))}-\dfrac{n-1}{((n-2)/n-1)((n-2)/n-(n-1)/n)n} & \dfrac{n-1}{((n-2)/n-1)((n-2)/n-(n-1)/n)n} \\
\dfrac{1}{((n-1)/n-1)((n-1)/n-(n-2)/n)} & -\dfrac{1}{((n-1)/n-1)((n-1)/n-(n-2)/n))}-\dfrac{n-2}{((n-1)/n-1)((n-1)/n-(n-2)/n)n} & \dfrac{n-2}{((n-1)/n-1)((n-1)/n-(n-2)/n)n} \\
\dfrac{1}{(1-(n-2)/n)(1-(n-1)/n)} & -\dfrac{n-2}{(1-(n-2)/n)(1-(n-1)/n))}-\dfrac{n-1}{(1-(n-2)/n)(1-(n-1)/n)n} & \dfrac{(n-2)(n-1)}{(1-(n-2)/n)(1-(n-1)/n)n^{2}}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} t^{2} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (35)
$$

Supongamos la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_l$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$………. $\mathbf{P}_{rn-2}$, $\mathbf{P}_{m-i}$, $\mathbf{P}_m$ con tangentes $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_5$, $\mathbf{T}_6$ ....$\mathbf{T}_{m-3}$, $\mathbf{T}_{m-2}$ en los puntos $\mathbf{P}_2$ $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$…… …. $\mathbf{P}_{m-3}$ y $\mathbf{P}_{m-2}$ (figura 3.3.1.1.-2) siendo (m+1) múltiplo de 3.

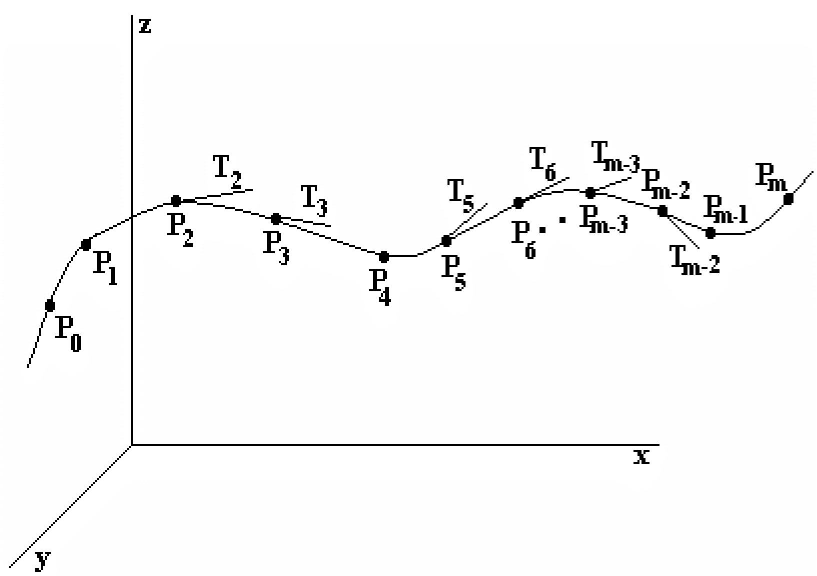


Figura 3.3.1.1.-2. Curva polinomial que pasa por (m+1) puntos dados contangentes en algunos de ellos tambien dadas

Dicha curva se puede descomponer en los tramos: C 0-2, C 2-3, C 3-5, C 5-6,… …….., C (m-3)-(m-2), C (m-2)-m.

El tramo C 0-2 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P}_{0,2}(t) = F_0(t)\mathbf{P_0} + F_1(t)\mathbf{P_1} + F_2(t)\mathbf{P_2} \qquad (36)$$

con las restricciones:

t	$F_0(t)$	$F_1(t)$	$F_2(t)$
0/m	1	0	0
1/m	0	1	0
2/m	0	0	1

Tabla (37)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \frac{(t-1/m)(t-2m)}{(0-1/m)(0-2/m)} = m^2/2t^2 - 3mt + 1 \\ F_1(t) &= \frac{(t-0)(t-2/m)}{(1/m-0)(1/m-2/m)} = -m^2t^2 + 2mt \\ F_2(t) &= \frac{(t-0)(t-1/m)}{(2/m-0)(2/m-1/m)} = m^2/2t^2 - m/2t \end{aligned} \qquad (38)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (36), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P}_{0,2}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2/2 & -3m/2 & 1 \\ -m^2 & 2m & 0 \\ m^2/2 & -m/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (39)$$

Análogamente el tramo de curva C 2-3 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$.

La ecuación de este tramo sería:

$$\mathbf{P}_{2,3}(t) = F_2(t)\mathbf{P_2} + F_3(t)\mathbf{P_3} + G_2(t)\mathbf{T_2} + G_3(t)\mathbf{T_3} \qquad (40)$$

con las restricciones :

t	$F_2(t)$	$F'_2(t)$	$F_3(t)$	$F'_3(t)$	$G_2(t)$	$G'_2(t)$	$G_3(t)$	$G'_3(t)$
2/m	1	0	0	0	0	1	0	0
3/m	0	0	1	0	0	00	0	1

Tabla (41)

Las soluciones de las $F_i(t)$ que cumplen estas condiciones serían:

$$F_2(t) = (t - 3/m)^2 (a_2 + b_2 t) \qquad (42)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} F_2(2/m) &= 1 \\ F'_2(2/m) &= 0 \end{aligned} \qquad (43)$$

Igualmente :

$$F_3(t) = (t - 2/m)^2 (a_3 + b_3 t) \qquad (44)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} F_3(3/m) &= 1 \\ F'_3(3/m) &= 0 \end{aligned} \qquad (45)$$

cuyas soluciones serían:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= c_{23}t^3 + c_{22}t^2 + c_{21}t + c_{20} \\ F_3(t) &= c_{33}t^3 + c_{32}t^2 + c_{31}t + c_{30} \end{aligned} \qquad (46)$$

Análogamente las $G_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} G_2(t) &= \frac{(t - 3/m)^2 (t - 2/m)}{(2/m - 3/m)^2} = d_{23}t^3 + d_{22}t^2 + d_{21}t + d_{20} \\ G_3(t) &= \frac{(t - 2/m)^2 (t - 3/m)}{(3/m - 2/m)^2} = d_{33}t^3 + d_{32}t^2 + d_{31}t + d_{30} \end{aligned} \qquad (47)$$

Luego (40) se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{P}_{2,3}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{23} & c_{22} & c_{21} & c_{20} \\ c_{33} & c_{32} & c_{31} & c_{30} \\ d_{23} & d_{22} & d_{21} & d_{20} \\ d_{33} & d_{32} & d_{31} & d_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (48)$$

Operando igualmente, el tramo C 3-5 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ y $\mathbf{P}_5$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P}_{3,5}(t) = F_3(t)\mathbf{P_3} + F_4(t)\mathbf{P_4} + F_5(t)\mathbf{P_5} \qquad (49)$$

con las restricciones:

t	$F_3(t)$	$F_4(t)$	$F_5(t)$
3/m	1	0	0
4/m	0	1	0
5/m	0	0	1

Tabla (50)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_3(t) &= \frac{(t-4/m)(t-5/m)}{(3/m-4/m)(3/m-5/m)} = m^2/2t^2 - 9m/2t + 10 \\ F_4(t) &= \frac{(t-3/m)(t-5/m)}{(4/m-3/m)(4/m-5/m)} = -m^2t^2 + 8mt - 15 \\ F_5(t) &= \frac{(t-3/m)(t-4/m)}{(5/m-3/m)(5/m-4/m)} = m^2/2t^2 - 7m/2t + 6 \end{aligned} \qquad (51)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (49), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P}_{3,5}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2/2 & -9m/2 & 10 \\ -m^2 & 8m & -15 \\ m^2/2 & -7m/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (52)$$

Análogamente el tramo de curva C s(s+1) sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_s$ y $\mathbf{P}_{s+1}$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_s$ y $\mathbf{T}_{s+1}$

La ecuación de este tramo sería:

$$\mathbf{P}_{s,s+1}(t) = F_s(t)\mathbf{P_s} + F_{s+1}(t)\mathbf{P_{s+1}} + G_s(t)\mathbf{T_s} + G_{s+1}(t)\mathbf{T_{s+1}} \qquad (53)$$

con las restricciones:

t	$F_s(t)$	$F'_s(t)$	$F_{s+1}(t)$	$F'_{s+1}(t)$	$G_s(t)$	$G'_s(t)$	$G_{s+1}(t)$	$G'_{s+1}(t)$
s/m	1	0	0	0	0	1	0	0
(s+1)/m	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (54)

Las soluciones de las F_i (t) que cumplen estas condiciones serían:

$$F_s(t) = (t - s/m)^2 (a_s + b_s t) \qquad (55)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} F_s(s/m) &= 1 \\ F'_s(s/m) &= 0 \end{aligned} \qquad (56)$$

Igualmente:

$$F_{s+1}(t) = (t - (s+1)/m)^2 (a_{s+1} + b_{s+1} t) \qquad (57)$$

con las restricciones:

$$\begin{aligned} F_{s+1}((s+1)/m) &= 1 \\ F'_{s+1}((s+1)/m) &= 0 \end{aligned} \qquad (58)$$

cuyas soluciones serían:

$$\begin{aligned} F_s(t) &= c_{s3}t^3 + c_{s2}t^2 + c_{s1}t + c_{s0} \\ F_{s+1}(t) &= c_{(s+1)3}t^3 + c_{(s+1)2}t^2 + c_{(s+1)1}t + c_{(s+1)0} \end{aligned} \qquad (59)$$

Análogamente las $G_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} G_s(t) &= \frac{(t-(s+1)/m)^2 (t - s/m)}{(s/m - (s+1)/m)^2} = d_{s3}t^3 + d_{s2}t^2 + d_{s1}t + d_{s0} \\ G_{s+1}(t) &= \frac{(t - s/m)^2 (t - (s+1)/m)}{((s+1)/m - s/m)^2} = d_{(s+1)3}t^3 + d_{(s+1)2}t^2 + d_{(s+1)1}t + d_{(s+1)0} \end{aligned} \qquad (60)$$

Luego (53) se puede poner en forma matricial como:

$$\mathbf{P}_{s,s+1}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_s & \mathbf{P}_{s+1} & \mathbf{T}_s & \mathbf{T}_{s+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{s3} & c_{s2} & c_{s1} & c_{s0} \\ c_{(s+1)3} & c_{(s+1)2} & c_{(s+1)1} & c_{(s+1)0} \\ d_{s3} & d_{s2} & d_{s1} & d_{s0} \\ d_{(s+1)3} & d_{(s+1)2} & d_{(s+1)1} & d_{(s+1)0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (61)$$

Operando igualmente, el tramo C j-(j+2) sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_j$, $\mathbf{P}_{j+1}$ y $\mathbf{P}_{j+2}$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P}_{j,j+2}(t) = F_j(t)\mathbf{P_j} + F_{j+1}(t)\mathbf{P_{j+1}} + F_{j+2}(t)\mathbf{P_{j+2}} \qquad (62)$$

con las restricciones:

t	$F_j(t)$	$F_{j+1}(t)$	$F_{j+2}(t)$
j/m	1	0	0
(j+1)/m	0	1	0
(j+2)/m	0	0	1

Tabla (63)

Las soluciones para las $F_j(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_j(t) &= \frac{(t-(j+1)/m)(t-(j+2)/m)}{(j/m-(j+1)/m)(j/m-(j+2)/m)} = m^2/2t^2 - m(2j+3)/2t + (j+1)(j+2)/2 \\ F_{j+1}(t) &= \frac{(t-j/m)(t-(j+2)/m)}{((j+1)/m-j/m)((j+1)/m-(j+2)/m)} = -m^2t^2 + m(2j+2)t - j(j+2) \\ F_{j+2}(t) &= \frac{(t-j/m)(t-(j+1)/m)}{((j+2)/m-j/m)((j+2)/m-(j+1)/m)} = m^2/2t^2 - m(2j+1)/2t + j(j+1)/2 \end{aligned} \qquad (64)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (62), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P}_{j,j+2}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_j & \mathbf{P}_{j+1} & \mathbf{P}_{j+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2/2 & -m(2j+3)/2 & (j+1)(j+2)/2 \\ -m^2 & m(2j+2) & -j(j+2) \\ m^2/2 & -m(2j+1)/2 & j(j+1)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (65)$$

El último tramo C (m-2)-m seria la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_{m-2}$ $\mathbf{P}_{m-1}$ y $\mathbf{P}_m$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P}_{m-2,m}(t) = F_{m-2}(t)\mathbf{P_{m-2}} + F_{m-1}(t)\mathbf{P_{m-1}} + F_m(t)\mathbf{P_m} \qquad (66)$$

con las restricciones:

t	$F_{m-2}(t)$	$F_{m-1}(t)$	$F_m(t)$
(m-2)/m	1	0	0
(m-1)/m	0	1	0
1	0	0	1

Tabla (67)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$
\begin{aligned}
&F_{m-2}(t)=\frac{(t-(m-1)/m)(t-1)}{((m-2)/m-(m-1)/m)((m-2)/m-1)}=\frac{1}{[(m-2)/m-1)][(m-2)/m-(m-1)/m]}t^2+\\
&\left(-\frac{1}{[(m-2)/m-1)][(m-2)/m-(m-1)/m]}-\frac{m-1}{[(m-2)/m-1)][(m-2)/m-(m-1)/m]m}\right)t+\\
&\frac{m-1}{[(m-2)/m-1)][(m-2)/m-(m-1)/m]}\\
&F_{m-1}(t)=\frac{(t-(m-2)/m)(t-1)}{((m-1)/m-(m-2)/m)((m-1)/m-1)}=\frac{1}{[(m-1)/m-1)][(m-1)/m-(m-2)/m]}t^2+\\
&\left(-\frac{1}{[(m-1)/m-1)][(m-1)/m-(m-2)/m]}-\frac{m-1}{[(m-1)/m-1)][(m-1)/m-(m-2)/m]m}\right)t+\\
&\frac{m-2}{[(m-1)/m-1)][(m-1)/m-(m-2)/m]}\\
&F_m(t)=\frac{(t-(m-2)/m)(t-(m-1)/m)}{(1-(m-2)/m)(1-(m-1)/m)}=\frac{1}{[1-(m-2)/m][1-(m-1)/m]}t^2+\\
&\left(-\frac{m-2}{[1-(m-2)/m][1-(m-1)/m]}-\frac{m-1}{[1-(m-2)/m][1-(m-1)/m]m}\right)t+\\
&\frac{(m-2)(m-1)}{[1-(m-2)/m][1-(m-1)/m]m^2}
\end{aligned}
\qquad (68)
$$

Entrando con estos valores en la formula (66), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$
\mathbf{P}_{m-2,m}(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{m-2} & \mathbf{P}_{m-1} & \mathbf{P}_{m}\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\frac{1}{((m-2)/m-1)((m-2)/m-(m-1)/m)} & -\frac{1}{((m-2)/m-1)((m-2)/m-(m-1)/m))}-\frac{m-1}{((m-2)/m-1)((m-2)/m-(m-1)/m)m} & \frac{m-1}{((m-2)/m-1)((m-2)/m-(m-1)/m)m} \\
\frac{1}{((m-1)/m-1)((m-1)/m-(m-2)/m)} & -\frac{1}{((m-1)/m-1)((m-1)/m-(m-2)/m))}-\frac{m-2}{((m-1)/m-1)((m-1)/m-(m-2)/m)m} & \frac{m-2}{((m-1)/m-1)((m-1)/m-(m-2)/m)m} \\
\frac{1}{(1-(m-2)/m)(1-(m-1)/m)} & -\frac{m-2}{(1-(m-2)/m)(1-(m-1)/m))m}-\frac{m-1}{(1-(m-2)/m)(1-(m-1)/m)m} & \frac{(m-2)(m-1)}{(1-(m-2)/m)(1-(m-1)/m)m^2}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}
\qquad (69)
$$

<u>3.3.1.2.-CONSTRUCCIÓN DE LOS PARCHES OUE COMPONEN LA SUPERFICIE</u>

Efectuando los productos cartesianos de las curvas C 0-n y C 0-m tendremos las ecuaciones paramétricas de todos los parches que componen la superficie total (Figura 3.3.1.2-0).

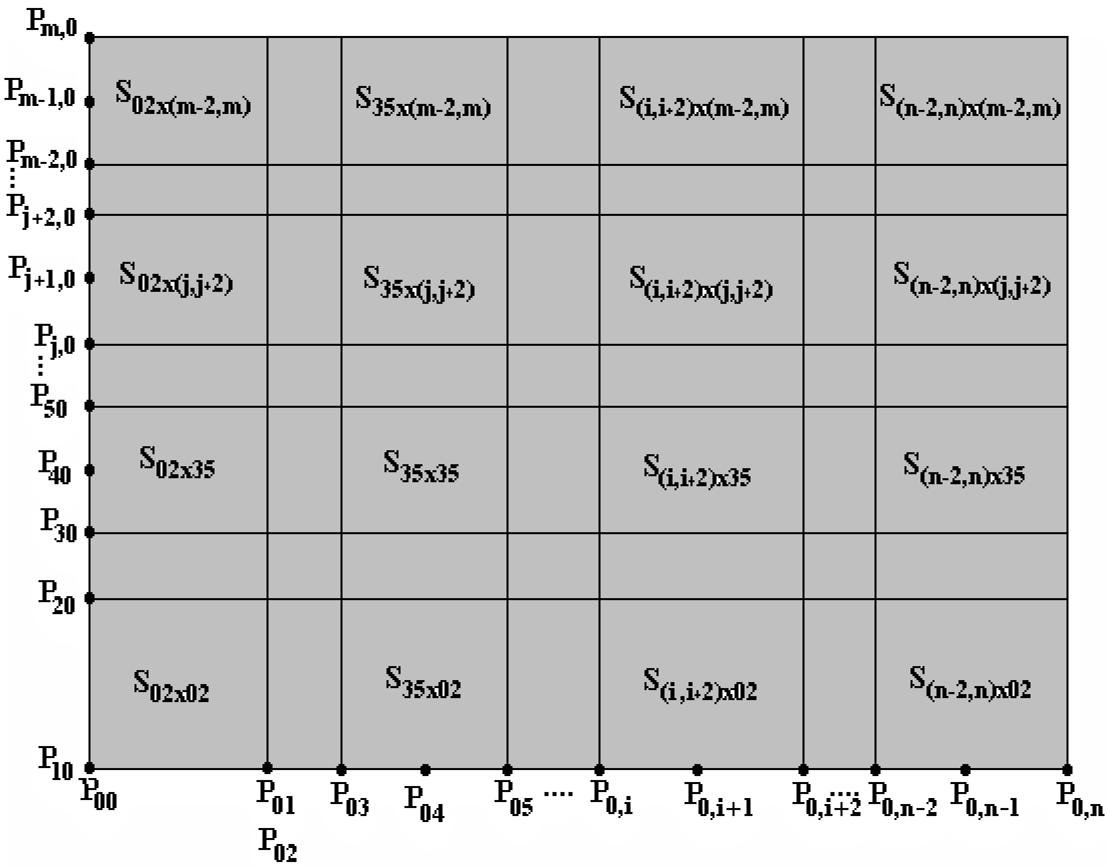


Figura 3.3.1.2-0. Superficie polinomial que pasa por una red de (n+1)x(m+1) puntos dados usando polinomios de grado 3 o menor

Así los parches formados por una red de 3x3 puntos tendrían la ecuación que a continuación se deduce.

Ecuacion del parche $S_{[k,k+2]x[l,l+2]}$
(Figura 3.3.1.2.-1)

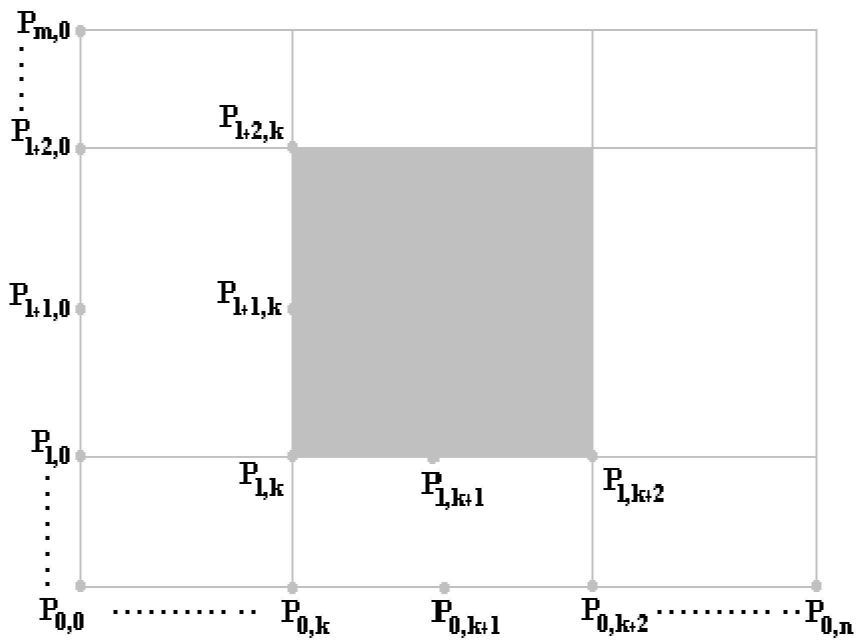


Figura 3.3.1.2.-1. Parche $S_{[k,k+2]x[l,l+2]}$

$$\mathbf{P}_{[k,k+2]x[l,l+2]}(t,u)\begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n^2/2 & -n(2k+3)/2 & (k+1)(k+2)/2 \\ -n^2 & n(2k+2) & -k(k+2) \\ n^2/2 & -n(2k+1)/2 & k(k+1)/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{P_{l,k}} \\ \mathbf{P_{l,k+1}} \\ \mathbf{P_{l,k+2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{l,k}} & \mathbf{P_{l+1,k}} & \mathbf{P_{l+2,k}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m^2/2 & -m(2l+3)/2 & (l+1)(l+2)/2 \\ -m^2 & m(2l+2) & -l(l+2) \\ m^2/2 & -m(2l+1)/2 & l(l+1)/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Donde:

$$k = 0,3,6,............n-2$$
$$l = 0,3,6,.............m-2 \qquad (2)$$

Análogamente los parches formados por una red de 3x2 puntos tendrían la ecuación que a contínuación se deduce.

Ecuacion del parche $S_{[I,I+2]x[S,S+1]}$
(Figura 3.3.1.2-2)

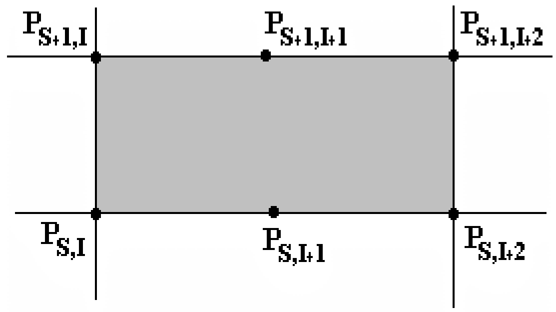


Figura 3.3.1.2.-2. Parche $S_{[I,I+2]x[S,S+1]}$

$$\mathbf{P}_{[i,i+2]x[s,s+1]}(t,u) = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n^2/2 & -n(2i+3)/2 & (i+1)(i+2)/2 \\ -n^2 & n(2i+2) & -i(i+2) \\ n^2/2 & -n(2i+1)/2 & i(i+1)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P_{s,i}} \\ \mathbf{P_{s,i+1}} \\ \mathbf{P_{s,i+2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{s,i}} & \mathbf{P_{s+1,i}} & \mathbf{T_{s,i}} & \mathbf{T_{s+1,i}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{s3} & c_{s2} & c_{s1} & c_{s0} \\ c_{(s+1)3} & c_{(s+1)2} & c_{(s+1)1} & c_{(s+1)0} \\ d_{s3} & d_{s2} & d_{s1} & d_{s0} \\ d_{(s+1)3} & d_{(s+1)2} & d_{(s+1)1} & d_{(s+1)0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Donde:

$$\begin{aligned} i &= 0,3,6,..........n-2 \\ s &= 2,5,8,.........m-3 \end{aligned} \qquad (4)$$

Analogamente los parches formados por una red de 2x3 puntos tendrían la ecuacion que a continuación se deduce.

Ecuacion del parche $\mathbf{S_{[r,r+1][j,j+2]}}$

(Figura 3.3.1.2.-3)

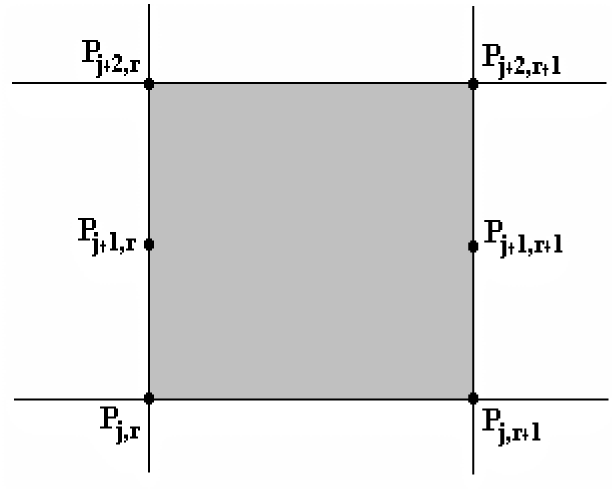


Figura 3.3.1.2.-3. Parche $S_{[r,r+1]x[j,j+2]}$

$$\mathbf{P}_{[r,r+1]x[j,j+2]}(t,u) = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{r3} & c_{r2} & c_{r1} & c_{r0} \\ c_{(r+1)3} & c_{(r+1)2} & c_{(r+1)1} & c_{(r+1)0} \\ d_{r3} & d_{r2} & d_{r1} & d_{r0} \\ d_{(r+1)3} & d_{(r+1)2} & d_{(r+1)1} & d_{(r+1)0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P_{j,r}} \\ \mathbf{P_{j,r+1}} \\ \mathbf{T_{j,r}} \\ \mathbf{T_{j,r+1}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{j,r}} & \mathbf{P_{j+1,r}} & \mathbf{P_{j+2,r}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2/2 & -m(2j+3)/2 & (j+1)(j+2)/2 \\ -m^2 & m(2j+2) & -j(j+2) \\ m^2/2 & -m(2j+1)/2 & j(j+1)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Donde:

$$r = 2,5,68,.........n-3$$
$$j = 0,3,6,........m-2 \qquad (6)$$

Análogamente los parches formados por una red de 2x2 puntos tendrían la ecuación que a continuación se deduce.

Ecuación del parche S[r,(r+1)x[s,(s+1)]

(Figura 3.3.1.2.-4)

Figura 3.3.1.2.-4. Parche $S_{[r,(r+1)x[s,(s+1)]}$

$$\mathbf{P}_{[r,r+1]x[s,s+1]}(t,u) = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{r3} & c_{r2} & c_{r1} & c_{r0} \\ c_{(r+1)3} & c_{(r+1)2} & c_{(r+1)1} & c_{(r+1)0} \\ d_{r3} & d_{r2} & d_{r1} & d_{r0} \\ d_{(r+1)3} & d_{(r+1)2} & d_{(r+1)1} & d_{(r+1)0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P_{s,r}} \\ \mathbf{P_{s,r+1}} \\ \mathbf{T_{s,r}} \\ \mathbf{T_{s,r+1}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_{s3} & c_{s2} & c_{s1} & c_{s0} \\ c_{(s+1)3} & c_{(s+1)2} & c_{(s+1)1} & c_{(s+1)0} \\ d_{s3} & d_{s2} & d_{s1} & d_{s0} \\ d_{(s+1)3} & d_{(s+1)2} & d_{(s+1)1} & d_{(s+1)0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Donde:

$$\begin{aligned} r &= 2,5,8,.........n-3 \\ s &= 2,5,8,........m-3 \end{aligned} \qquad (8)$$

La superficie total sera una superficie a trozos o "a parches" donde los parches que la componen serán del tipo 3x3 , 3x2, 2x3 y 2x2 . Cada uno de estos parches tendrá una ecuación del tipo de las deducidas anteriormente.

3.3.1.3.-DEMOSTRACIÓN DE QUE EL CONJUNTO DE LOS PARCHES FORMAN UNA SUPERFICIE LISA

A.-)CONTINUIDAD DEL PARCHE GENÉRICO 3X3 CON LOS DE SU ALREDEDOR

1.-) Continuidad con el parche de arriba (3x2)

Borde común t = (1+2)/m

(Figura 3.3.1.3.-1)

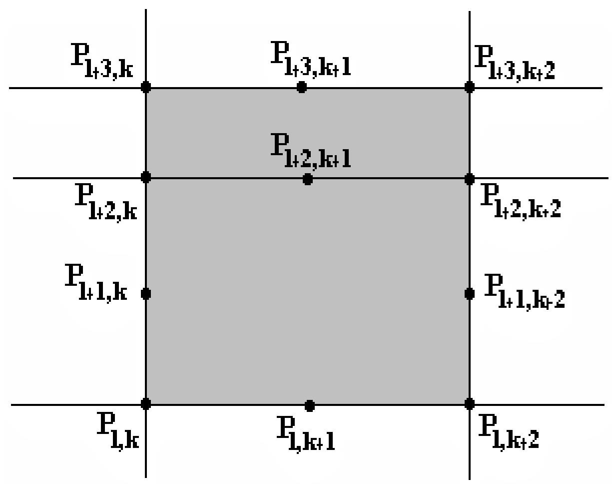


Figura 3.3.1.3.-1. Continuidad entre los parches 3x3 y 3x2

La curva en el borde común (t = (1+2)/m) a ambos parches es igual.
La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=(l+2)/m} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} f_{l,k}(u) & f_{l,k+1}(u) & f_{l,k+2}(u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{P}_{l+1,k} & \mathbf{P}_{l+2,k}\\ \mathbf{P}_{l,k+1} & \mathbf{P}_{l+1,k+1} & \mathbf{P}_{l+2,k+1}\\ \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{P}_{l+1,k+2} & \mathbf{P}_{l+2,k+2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{l,k}(t)\\ f_{l+1,k}(t)\\ f_{l+2,k}(t)\end{pmatrix}_{t=(l+2)/m} = \begin{pmatrix} f_{l,k}(u) & f_{l,k+1}(u) & f_{l,k+2}(u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{P}_{l+1,k} & \mathbf{P}_{l+2,k}\\ \mathbf{P}_{l,k+1} & \mathbf{P}_{l+1,k+1} & \mathbf{P}_{l+2,k+1}\\ \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{P}_{l+1,k+2} & \mathbf{P}_{l+2,k+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'_{l,k}(l+2/m)\\ f'_{l+1,k}(l+2/m)\\ f'_{l+2,k}(l+2/m)\end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
= {} & f_{l,k}(u)\mathbf{P}_{l,k} + f_{l,k+1}(u)\mathbf{P}_{l,k+1} + f_{l,k+2}(u)\mathbf{P}_{l,k+2} f'_{l,k}(l+2/m) + \\
& f_{l,k}(u)\mathbf{P}_{l+1,k} + f_{l,k+1}(u)\mathbf{P}_{l+1,k+1} + f_{l,k+2}(u)\mathbf{P}_{l+1,k+2} f'_{l+1,k}(l+2/m) + \\
& f_{l,k}(u)\mathbf{P}_{l+2,k} + f_{l,k+1}(u)\mathbf{P}_{l+2,k+1} + f_{l,k+2}(u)\mathbf{P}_{l+2,k+2} f'_{l+2,k}(l+2/m) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Análogamente, en el parche 3x2 se tendrá:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l+2,l+3]}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=(l+2)/m} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} F_{l,k}(u) & F_{l,k+1}(u) & F_{l,k+2}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l+2,k} & \mathbf{P}_{l+3,k} & \mathbf{T}_{l+2,k} & \mathbf{T}_{l+3,k} \\ \mathbf{P}_{l+2,k+1} & \mathbf{P}_{l+3,k+1} & \mathbf{T}_{l+2,k+1} & \mathbf{T}_{l+3,k} \\ \mathbf{P}_{l+2,k+2} & \mathbf{P}_{l+3,k+2} & \mathbf{T}_{l+2,k+2} & \mathbf{T}_{l+3,k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{l+2,k}(t) \\ F_{l+3,k}(t) \\ G_{l+2,k}(t) \\ G_{l+3,k}(t) \end{pmatrix}_{t=(l+2)/m} =$$

$$\begin{pmatrix} F_{l,k}(u) & F_{l,k+1}(u) & F_{l,k+2}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l+2,k} & \mathbf{P}_{l+3,k} & \mathbf{T}_{l+2,k} & \mathbf{T}_{l+3,k} \\ \mathbf{P}_{l+2,k+1} & \mathbf{P}_{l+3,k+1} & \mathbf{T}_{l+2,k+1} & \mathbf{T}_{l+3,k} \\ \mathbf{P}_{l+2,k+2} & \mathbf{P}_{l+3,k+2} & \mathbf{T}_{l+2,k+2} & \mathbf{T}_{l+3,k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F'_{l+2,k}((l+2)/m) \\ F'_{l+3,k}((l+2)/m) \\ G'_{l+2,k}((l+2)/m) \\ G'_{l+3,k}((l+2)/m) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta la tabla de restricciones (3):

u	$F_{l,k}(u)$	$F_{l,k+1}(u)$	$F_{l,k+2}(u)$
k/n	1	0	0
(k+1)/n	0	1	0
(k+2)/n	0	0	1

Tabla (3)

queda al operar:

$$= F_{l,k}(u)\mathbf{T}_{l+2,k} + F_{l,k+1}(u)\mathbf{T}_{l+2,k+1} + F_{l,k+2}(u)\mathbf{T}_{l+2,k+2} \qquad (4)$$

pero como:

$$\mathbf{T}_{l+2,k} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial t} \right)_{t=(l+2)/m, u=k/n} =$$

$$\mathbf{P}_{l,k} F'_{l,k}(l+2/m) + \mathbf{P}_{l+1,k} F'_{l+1,k}(l+2/m) + \mathbf{P}_{l+2,k} F'_{l+2,k}(l+2/m)$$

$$\mathbf{T}_{l+2,k+1} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial t} \right)_{t=(l+2)/m, u=k+1/n} =$$

$$\mathbf{P}_{l,k+1} F'_{l,k}(l+2/m) + \mathbf{P}_{l+1,k+1} F'_{l+1,k}(l+2/m) + \mathbf{P}_{l+2,k+1} F'_{l+2,k}(l+2/m) \qquad (5)$$

$$\mathbf{T}_{l+2,k+2} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial t} \right)_{t=(l+2)/m, u=k+2/n} =$$

$$\mathbf{P}_{l,k+2} F'_{l,k}(l+2/m) + \mathbf{P}_{l+1,k+2} F'_{l+1,k}(l+2/m) + \mathbf{P}_{l+2,k+2} F'_{l+2,k}(l+2/m)$$

Entrando con estos valores en (4) sale (1), luego (1) y (4) son iguales c.q.d.

2.-) continuidad con el parche de abajo (3x2)

Borde común t = l/m

(figura 3.3.1.3.-2)

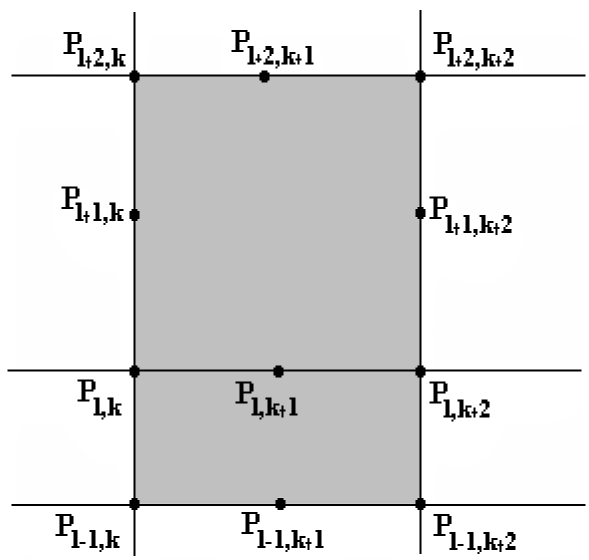


Figura 3.3.1.3.-2. Continuidad con el parche de abajo

La curva en el borde común (t = l/m) a ambos parches es igual .

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=l/m} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} F_{l,k}(u) & F_{l,k+1}(u) & F_{l,k+2}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{P}_{l+1,k} & \mathbf{P}_{l+2,k} \\ \mathbf{P}_{l,k+1} & \mathbf{P}_{l+1,k+1} & \mathbf{P}_{l+2,k+1} \\ \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{P}_{l+1,k+2} & \mathbf{P}_{l+2,k+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{l,k}(t) \\ F_{l+1,k}(t) \\ F_{l+2,k}(t) \end{pmatrix}_{t=l/m} =$$

$$\begin{pmatrix} F_{l,k}(u) & F_{l,k+1}(u) & F_{l,k+2}(u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{P}_{l+1,k} & \mathbf{P}_{l+2,k} \\ \mathbf{P}_{l,k+1} & \mathbf{P}_{l+1,k+1} & \mathbf{P}_{l+2,k+1} \\ \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{P}_{l+1,k+2} & \mathbf{P}_{l+2,k+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F'_{l,k}(l/m) \\ F'_{l+1,k}(l/m) \\ F'_{l+2,k}(l/m) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= F_{l,k}(u)\mathbf{P}_{l,k} + F_{l,k+1}(u)\mathbf{P}_{l,k+1} + F_{l,k+2}(u)\mathbf{P}_{l,k+2}F'_{l,k}(l/m) + \\ &\quad F_{l,k}(u)\mathbf{P}_{l+1,k} + F_{l,k+1}(u)\mathbf{P}_{l+1,k+1} + F_{l,k+2}(u)\mathbf{P}_{l+1,k+2}F'_{l+1,k}(l/m) + \\ &\quad F_{l,k}(u)\mathbf{P}_{l+2,k} + F_{l,k+1}(u)\mathbf{P}_{l+2,k+1} + F_{l,k+2}(u)\mathbf{P}_{l+2,k+2}F'_{l+2,k}(l/m) \end{aligned} \qquad (6)$$

Análogamente, en el parche 3x2 se tendrá:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l-1,l]}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=l/m} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} F_{l,k}(u) & F_{l,k+1}(u) & F_{l,k+2}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l-1,k} & \mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{T}_{l-1,k} & \mathbf{T}_{l,k} \\ \mathbf{P}_{l-1,k+1} & \mathbf{P}_{l,k+1} & \mathbf{T}_{l-1,k+1} & \mathbf{T}_{l,k+1} \\ \mathbf{P}_{l-1,k+2} & \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{T}_{l-1,k+2} & \mathbf{T}_{l,k+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{l-1,k}(t) \\ F_{l,k}(t) \\ G_{l-1,k}(t) \\ G_{l,k}(t) \end{pmatrix}_{t=l/m} =$$

$$\begin{pmatrix} F_{l,k}(u) & F_{l,k+1}(u) & F_{l,k+2}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l-1,k} & \mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{T}_{l-1,k} & \mathbf{T}_{l,k} \\ \mathbf{P}_{l-1,k+1} & \mathbf{P}_{l,k+1} & \mathbf{T}_{l-1,k+1} & \mathbf{T}_{l,k+1} \\ \mathbf{P}_{l-1,k+2} & \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{T}_{l-1,k+2} & \mathbf{T}_{l,k+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F'_{l-1,k}(l/m) \\ F'_{l,k}(l/m) \\ G'_{l-1,k}(l/m) \\ G'_{l,k}(l/m) \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Teniendo en cuenta el cuadro de restricciones (8):

t	$F_{l-1,k}(t)$	$F'_{l-1,k}(t)$	$F_{l,k}(t)$	$F'_{l,k}(t)$	$G_{l-1,k}(t)$	$G'_{l-1,k}(t)$	$G_{l,k}(t)$	$G'_{l,k}(t)$
(l-1)/m	1	0	0	0	0	1	0	0
l/m	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (8)

queda al operar:

$$= f_{l,k}(u)\mathbf{T}_{l,k} + f_{l,k+1}(u)\mathbf{T}_{l,k+1} + f_{l,k+2}(u)\mathbf{T}_{l,k+2} \qquad (9)$$

Pero como:

$$\mathbf{T}_{l,k} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial t} \right)_{t=l/m, u=k/n} =$$

$$\mathbf{P}_{l,k} f'_{l,k}(l/m) + \mathbf{P}_{l+1,k} f'_{l+1,k}(l/m) + \mathbf{P}_{l+2,k} f'_{l+2,k}(l/m)$$

$$\mathbf{T}_{l,k+1} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial t} \right)_{t=l/m, u=k+1/n} =$$

$$\mathbf{P}_{l,k+1} f'_{l,k}(l/m) + \mathbf{P}_{l+1,k+1} f'_{l+1,k}(l/m) + \mathbf{P}_{l+2,k+1} f'_{l+2,k}(l/m) \qquad (10)$$

$$\mathbf{T}_{l,k+2} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial t} \right)_{t=l/m, u=k+2/n} =$$

$$\mathbf{P}_{l,k+2} f'_{l,k}(l/m) + \mathbf{P}_{l+1,k+2} f'_{l+1,k}(l/m) + \mathbf{P}_{l+2,k+2} f'_{l+2,k}(l/m)$$

Entrando con estos valores en (9) sale (6), luego (6) y (9) son iguales c.q.d.

<u>3.-) continuidad con el parche de la izquierda (2x3)</u>

Borde común u= k/n

(figura 3.3.1.3.-3)

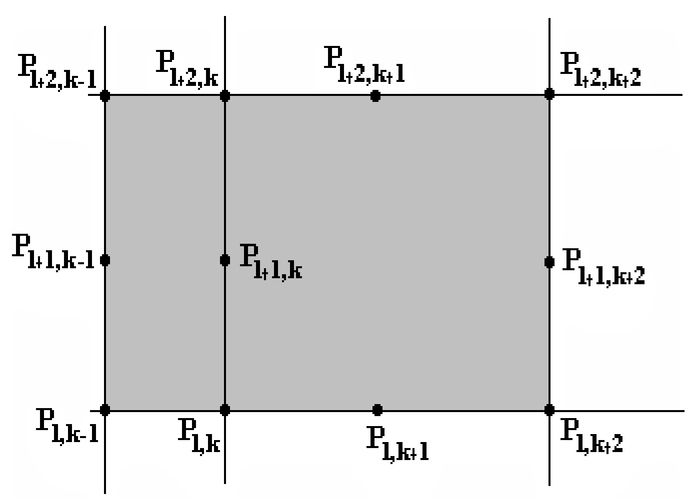


Figura 3.3.1.3.-3. Continuidad con el parche de la izquierda

La curva en el borde común (u= k/n) a ambos parches es igual .

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial t}\right)_{u=k/n} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} f_{l,k}(u) & f_{l,k+1}(u) & f_{l,k+2}(u)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{P}_{l+1,k} & \mathbf{P}_{l+2,k} \\ \mathbf{P}_{l,k+1} & \mathbf{P}_{l+1,k+1} & \mathbf{P}_{l+2,k+1} \\ \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{P}_{l+1,k+2} & \mathbf{P}_{l+2,k+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{l,k}(t) \\ F_{l+1,k}(t) \\ F_{l+2,k}(t)\end{pmatrix}_{u=k/n} =$$

$$\begin{pmatrix} f'_{l,k}(k/n) & f'_{l,k+1}(k/n) & f'_{l,k+2}(k/n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{P}_{l+1,k} & \mathbf{P}_{l+2,k} \\ \mathbf{P}_{l,k+1} & \mathbf{P}_{l+1,k+1} & \mathbf{P}_{l+2,k+1} \\ \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{P}_{l+1,k+2} & \mathbf{P}_{l+2,k+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{l,k}(t) \\ F_{l+1,k}(t) \\ F_{l+2,k}(t)\end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= f'_{l,k}(k/n)(\mathbf{P}_{l,k}f_{l,k}(t) + \mathbf{P}_{l+1,k}f_{l+1,k}(t) + \mathbf{P}_{l+2,k}f_{l+2,k}(t)) + \\ &f'_{l,k+1}(k/n)(\mathbf{P}_{l,k+1}f_{l,k}(t) + \mathbf{P}_{l+1,k+1}f_{l+1,k}(t) + \mathbf{P}_{l+2,k+1}f_{l+2,k}(t)) + \\ &f'_{l,k+2}(k/n)(\mathbf{P}_{l,k+2}f_{l,k}(t) + \mathbf{P}_{l+1,k+2}f_{l+1,k}(t) + \mathbf{P}_{l+2,k+2}f_{l+2,k}(t)) \end{aligned} \qquad (11)$$

Analogamente en el parche 2x3 se tendrá:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k-1,k][l,l+2]}(t,u)}{\partial t}\right)_{u=k/n} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} F_{l,k-1}(u) & F_{l,k}(u) & G_{l,k-1}(u) & G_{l,k}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l,k-1} & \mathbf{P}_{l+1,k-1} & \mathbf{P}_{l+2,k-1} \\ \mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{P}_{l+1,k} & \mathbf{P}_{l+2,k} \\ \mathbf{U}_{l,k-1} & \mathbf{U}_{l+1,k-1} & \mathbf{U}_{l+2,k-1} \\ \mathbf{U}_{l,k} & \mathbf{U}_{l+1,k} & \mathbf{U}_{l+2,k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{l,k}(t) \\ F_{l+1,k}(t) \\ F_{l+2,k}(t)\end{pmatrix}_{u=k/n} =$$

$$= \begin{pmatrix} F'_{l,k-1}(k/n) & F'_{l,k}(k/n) & G'_{l,k-1}(k/n) & G'_{l,k}(k/n)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l,k-1} & \mathbf{P}_{l+1,k-1} & \mathbf{P}_{l+2,k-1} \\ \mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{P}_{l+1,k} & \mathbf{P}_{l+2,k} \\ \mathbf{U}_{l,k-1} & \mathbf{U}_{l+1,k-1} & \mathbf{U}_{l+2,k-1} \\ \mathbf{U}_{l,k} & \mathbf{U}_{l+1,k} & \mathbf{U}_{l+2,k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{l,k}(t) \\ F_{l+1,k}(t) \\ F_{l+2,k}(t)\end{pmatrix} \qquad (12)$$

Teniendo en cuenta el cuadro de restricciones (13):

u	$F_{l,k-1}(u)$	$F'_{l,k-1}(u)$	$F_{l,k}(u)$	$F'_{l,k}(u)$	$G_{l,k-1}(u)$	$G'_{l,k-1}(u)$	$G_{l,k}(u)$	$G'_{l,k}(u)$
(k-1)/n	1	0	0	0	0	1	0	0
k/n	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (13)

queda al operar:

$$= \mathbf{U}_{l,k}F_{l,k}(t) + \mathbf{U}_{l+1,k}F_{l+1,k}(t) + \mathbf{U}_{l+2,k}F_{l+2,k}(t) \qquad (14)$$

Pero como:

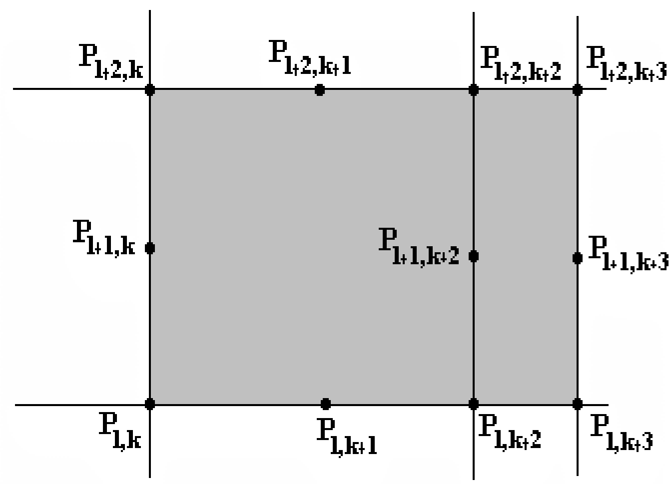
$$
\begin{aligned}
&\mathbf{U}_{l,k} = \left(\frac{\partial\, \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial\, u} \right)_{t=l/m,u=k/n} = \\
&\mathbf{P}_{l,k} f'_{l,k}(k/n) + \mathbf{P}_{l,k+1} f'_{l,k+1}(k/n) + \mathbf{P}_{l,k+2} f'_{l,k+2}(k/n) \\
&\mathbf{U}_{l+1,k} = \left(\frac{\partial\, \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial\, u} \right)_{t=(l+1)/m,u=k/n} = \\
&\mathbf{P}_{l+1,k} f'_{l,k}(k/n) + \mathbf{P}_{l+1,k+1} f'_{l,k+1}(k/n) + \mathbf{P}_{l+1,k+2} f'_{l,k+2}(k/n) \qquad (15) \\
&\mathbf{U}_{l+2,k} = \left(\frac{\partial\, \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial\, u} \right)_{t=(l+2)/m,u=k/n} = \\
&\mathbf{P}_{l+2,k} f'_{l,k}(k/n) + \mathbf{P}_{l+2,k+1} f'_{l,k+1}(k/nm) + \mathbf{P}_{l+2,k+2} f'_{l,k+2}(k/n)
\end{aligned}
$$

Entrando con estos valores en (14) sale (1 l), luego (11) y (14) son iguales c.q.d.

4.-) continuidad con el parche de la derecha (2x3)

Borde común u= (k+2)/n

(fígura 3.3.1.3.-4)



Fígura 3.3.1.3.-4. Continuidad con el parche de la derecha

La curva en el borde común (u= k+2/n) a ambos parches es igual.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches

$$
\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial u}\right)_{u=(k+2)/n} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} f_{l,k}(u) & f_{l,k+1}(u) & f_{l,k+2}(u)\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{P}_{l+1,k} & \mathbf{P}_{l+2,k} \\ \mathbf{P}_{l,k+1} & \mathbf{P}_{l+1,k+1} & \mathbf{P}_{l+2,k+1} \\ \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{P}_{l+1,k+2} & \mathbf{P}_{l+2,k+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{l,k}(t) \\ F_{l+1,k}(t) \\ F_{l+2,k}(t)\end{pmatrix}_{u=(k+2)/n} =
$$

$$
\begin{pmatrix} f'_{l,k}((k+2)/n) & f'_{l,k+1}((k+2)/n) & f'_{l,k+2}((k+2)/n)\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{P}_{l+1,k} & \mathbf{P}_{l+2,k} \\ \mathbf{P}_{l,k+1} & \mathbf{P}_{l+1,k+1} & \mathbf{P}_{l+2,k+1} \\ \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{P}_{l+1,k+2} & \mathbf{P}_{l+2,k+2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{l,k}(t) \\ F_{l+1,k}(t) \\ F_{l+2,k}(t)\end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= f'_{l,k}((k+2)/n)(\mathbf{P}_{l,k}f_{l,k}(t) + \mathbf{P}_{l+1,k}f_{l+1,k}(t) + \mathbf{P}_{l+2,k}f_{l+2,k}(t)) + \\
&\quad f'_{l,k+1}((k+2)/n)(\mathbf{P}_{l,k+1}f_{l,k}(t) + \mathbf{P}_{l+1,k+1}f_{l+1,k}(t) + \mathbf{P}_{l+2,k+1}f_{l+2,k}(t)) + \\
&\quad f'_{l,k+2}((k+2)/n)(\mathbf{P}_{l,k+2}f_{l,k}(t) + \mathbf{P}_{l+1,k+2}f_{l+1,k}(t) + \mathbf{P}_{l+2,k+2}f_{l+2,k}(t))
\end{aligned} \qquad (16)
$$

Análogamente en el parche 2x3 se tendrá:

$$
\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k+2,k+3][l,l+2]}(t,u)}{\partial u}\right)_{u=(k+2)/n} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} F_{l,k+2}(u) & F_{l,k+3}(u) & G_{l,k+2}(u) & G_{l,k+3}(u)\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{P}_{l+1,k+2} & \mathbf{P}_{l+2,k+2} \\ \mathbf{P}_{l,k+2} & \mathbf{P}_{l+1,k+3} & \mathbf{P}_{l+2,k+3} \\ \mathbf{U}_{l,k+3} & \mathbf{U}_{l+1,k+2} & \mathbf{U}_{l+2,k+2} \\ \mathbf{U}_{l,k+3} & \mathbf{U}_{l+1,k+3} & \mathbf{U}_{l+2,k+3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{l,k}(t) \\ F_{l+1,k}(t) \\ F_{l+2,k}(t)\end{pmatrix}_{u=(k+2)/n} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} F'_{l,k+2}((k+2)/n) & F'_{l,k+3}((k+2)/n) & G'_{l,k+2}((k+2)/n) & G'_{l,k+3}((k+2)/n)\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{l,k-1} & \mathbf{P}_{l+1,k-1} & \mathbf{P}_{l+2,k-1} \\ \mathbf{P}_{l,k} & \mathbf{P}_{l+1,k} & \mathbf{P}_{l+2,k} \\ \mathbf{U}_{l,k-1} & \mathbf{U}_{l+1,k-1} & \mathbf{U}_{l+2,k-1} \\ \mathbf{U}_{l,k} & \mathbf{U}_{l+1,k} & \mathbf{U}_{l+2,k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{l,k}(t) \\ F_{l+1,k}(t) \\ F_{l+2,k}(t)\end{pmatrix} \qquad (17)
$$

Teniendo en cuenta el cuadro de restricciones (18):

u	$F_{l,k+2}(u)$	$F'_{l,k+2}(u)$	$F_{l,k+3}(u)$	$F'_{l,k+3}(u)$	$G_{l,k+2}(u)$	$G'_{l,k+2}(u)$	$G_{l,k+3}(u)$	$G'_{l,k+3}(u)$
(k+2)/n	1	0	0	0	0	1	0	0
(k+3)/n	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (18)

queda al operar:

$$= \mathbf{U}_{l,k+2} F_{l,k}(t) + \mathbf{U}_{l+1,k+2} F_{l+1,k}(t) + \mathbf{U}_{l+2,k+2} F_{l+2,k}(t) \qquad (19)$$

Pero como:

$$\mathbf{U}_{l,k+2} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial u} \right)_{t=l/m,u=(k+2)/n} =$$
$$\mathbf{P}_{l,k} f'_{l,k}((k+2)/n) + \mathbf{P}_{l,k+1} f'_{l,k+1}((k+2)/n) + \mathbf{P}_{l,k+2} f'_{l,k+2}((k+2)/n)$$
$$\mathbf{U}_{l+1,k+2} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial u} \right)_{t=(l+1)/m,u=(k+2)/n} =$$
$$\mathbf{P}_{l,k} f'_{l,k}((k+2)/n) + \mathbf{P}_{l,k+1} f'_{l,k+1}((k+2)/n) + \mathbf{P}_{l,k+2} f'_{l,k+2}((k+2)/n) \qquad (20)$$
$$\mathbf{U}_{l+2,k+2} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[k,k+2][l,l+2]}(t,u)}{\partial u} \right)_{t=(l+2)/m,u=(k+2)/n} =$$
$$\mathbf{P}_{l+2,k} f'_{l,k}((k+2)/n) + \mathbf{P}_{l+2,k+1} f'_{l,k+1}((k+2)/n) + \mathbf{P}_{l+2,k+2} f'_{l,k+2}((k+2)/n)$$

Entrando con estos valores en (19) sale (16), luego (16) y (19) son iguales e.q.d.

B.)-CONTINUIDAD DEL PARCHE GENÉRICO 2X3 CON LOS DE SU ALREDEDOR

1.-) continuidad con el parche de arriba (2x2)

Borde común t = (j+2)/m

(figura 3.3.1.3.-5)

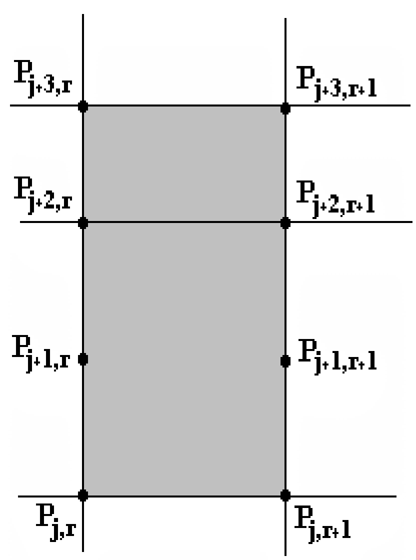


Figura 3.3.1.3.-5. Continuidad con el parche de arriba

La curva en el borde común (t = (j+2)/m) a ambos parches es igual .

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r,r+1][j,j+2]}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=(j+2)/m} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} F_{j,r}(u) & F_{j,r+1}(u) & G_{j,r}(u) & G_{j,r+1}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,r} & \mathbf{P}_{j+1,r} & \mathbf{P}_{j+2,r} \\ \mathbf{P}_{j,r+1} & \mathbf{P}_{j+1,r+1} & \mathbf{P}_{j+2,r+1} \\ \mathbf{U}_{j,r} & \mathbf{U}_{j+1,r} & \mathbf{U}_{j+2,r} \\ \mathbf{U}_{j,r+1} & \mathbf{U}_{j+1,r+1} & \mathbf{U}_{j+2,r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{j,r}(t) \\ F_{j+1,r}(t) \\ F_{j+2,r}(t) \end{pmatrix}_{t=(j+2)/m} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{j,r}(u) & F_{j,r+1}(u) & G_{j,r}(u) & G_{j,r+1}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,r} & \mathbf{P}_{j+1,r} & \mathbf{P}_{j+2,r} \\ \mathbf{P}_{j,r+1} & \mathbf{P}_{j+1,r+1} & \mathbf{P}_{j+2,r+1} \\ \mathbf{U}_{j,r} & \mathbf{U}_{j+1,r} & \mathbf{U}_{j+2,r} \\ \mathbf{U}_{j,r+1} & \mathbf{U}_{j+1,r+1} & \mathbf{U}_{j+2,r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_{j,r}((j+2)/m) \\ F'_{j+1,r}((j+2)/m) \\ F'_{j+2,r}((j+2)/m) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= F_{j,r}(u)\mathbf{P}_{j,r} + F_{j,r+1}(u)\mathbf{P}_{j,r+1} + G_{j,r}(u)\mathbf{U}_{j,r} + G_{j,r+1}(u)\mathbf{U}_{j,r+1} \\
&\quad F_{j,r}(u)\mathbf{P}_{j+1,r} + F_{j,r+1}(u)\mathbf{P}_{j+1,r+1} + G_{j,r}(u)\mathbf{U}_{j+1,r} + G_{j,r+1}(u)\mathbf{U}_{j+1,r+1}F'_{j+1,r}((j+2)/m) \\
&\quad F_{j,r}(u)\mathbf{P}_{j+2,r} + F_{j,r+1}(u)\mathbf{P}_{j+2,r+1} + G_{j,r}(u)\mathbf{U}_{j+2,r} + G_{j,r+1}(u)\mathbf{U}_{j+2,r+1}F'_{j+2,r}((j+2)/m) = \\
&= F_{j,r}(u)(\mathbf{P}_{j,r}F'_{j,r}((j+2)/m) + \mathbf{P}_{j+1,r}F'_{j+1,r}((j+2)/m) + \mathbf{P}_{j+2,r}F'_{j+2,r}((j+2)/m) + \\
&\quad F_{j,r+1}(u)(\mathbf{P}_{j,r}F'_{j,r}((j+2)/m) + \mathbf{P}_{j+1,r}F'_{j+1,r}((j+2)/m) + \mathbf{P}_{j+2,r}F'_{j+2,r}((j+2)/m) + \\
&\quad G_{j,r}(u)(\mathbf{U}_{j,r}F'_{j,r}((j+2)/m) + \mathbf{U}_{j+1,r}F'_{j+1,r}((j+2)/m) + \mathbf{U}_{j+2,r}F'_{j+2,r}((j+2)/m)) + \\
&\quad G_{j,r+1}(u)(\mathbf{U}_{j,r+1}F'_{j,r}((j+2)/m) + \mathbf{U}_{j+1,r+1}F'_{j+1,r}((j+2)/m) + \mathbf{U}_{j+2,r+1}F'_{j+2,r}((j+2)/m)
\end{aligned} \qquad (21)$$

Análogamente, en el parche 2x2 se tendría:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r,r+1][j+2,j+3]}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=(j+2)/m} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} F_{j,r}(u) & F_{j,r+1}(u) & G_{j,r}(u) & G_{j,r+1}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j+2,r} & \mathbf{P}_{j+3,r} & \mathbf{T}_{j+2,r} & \mathbf{T}_{j+3,r} \\ \mathbf{P}_{j+2,r+1} & \mathbf{P}_{j+3,r+1} & \mathbf{T}_{j+2,r+1} & \mathbf{T}_{j+3,r+1} \\ \mathbf{U}_{j+2,r} & \mathbf{U}_{j+3,r} & \mathbf{E}_{j+2,r} & \mathbf{E}_{j+3,r} \\ \mathbf{U}_{j+2,r+1} & \mathbf{U}_{j+3,r+1} & \mathbf{E}_{j+2,r+1} & \mathbf{E}_{j+3,r+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{j+2,r}(t) \\ F_{j+3,r}(t) \\ G_{j+2,r}(t) \\ G_{j+3,r}(t) \end{pmatrix}_{t=(j+2)/m} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{j,r}(u) & F_{j,r+1}(u) & G_{j,r}(u) & G_{j,r+1}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j+2,r} & \mathbf{P}_{j+3,r} & \mathbf{T}_{j+2,r} & \mathbf{T}_{j+3,r} \\ \mathbf{P}_{j+2,r+1} & \mathbf{P}_{j+3,r+1} & \mathbf{T}_{j+2,r+1} & \mathbf{T}_{j+3,r+1} \\ \mathbf{U}_{j+2,r} & \mathbf{U}_{j+3,r} & \mathbf{E}_{j+2,r} & \mathbf{E}_{j+3,r} \\ \mathbf{U}_{j+2,r+1} & \mathbf{U}_{j+3,r+1} & \mathbf{E}_{j+2,r+1} & \mathbf{E}_{j+3,r+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F'_{j+2,r}((j+2)/m) \\ F'_{j+3,r}((j+2)/m) \\ G'_{j+2,r}((j+2)/m) \\ G'_{j+3,r}((j+2)/m) \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Teniendo en cuenta el cuadro de restricciones (23):

t	$F_{j+2,r}(t)$	$F'_{j+2,r}(t)$	$F_{j+3,r}(t)$	$F'_{j+3,r}(t)$	$G_{j+2,r}(t)$	$G'_{j+2,r}(t)$	$G_{j+3,r}(t)$	$G'_{j+3,r}(t)$
(j+2)/m	1	0	0	0	0	1	0	0
(j+3)/m	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (23)

queda al operar:

$$= F_{j,r}(u)\mathbf{T}_{j+2,r} + F_{j,r+1}(u)\mathbf{T}_{j+2,r+1} + G_{j,r}(u)\mathbf{E}_{j+2,r} + G_{j,r+1}(u)\mathbf{E}_{j+2,r+1} \qquad (24)$$

Pero como:

$$\mathbf{T}_{j+2,r} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r-2,r][j,j+2]}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=l/m} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} f_{j,r-2}(u) & f_{j,r-1}(u) & f_{j,r}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,r-2} & \mathbf{P}_{j+1,r-2} & \mathbf{P}_{j+2,r-2} \\ \mathbf{P}_{j,r-1} & \mathbf{P}_{j+1,r-1} & \mathbf{P}_{j+2,r-1} \\ \mathbf{P}_{j,r} & \mathbf{P}_{j+1,r} & \mathbf{P}_{j+2,r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{j,r-2}(t) \\ F_{j+1,r-2}(t) \\ F_{j+2,r-2}(t) \end{pmatrix}_{t=(j+2)/m,u=r/n} =$$

$$\begin{pmatrix} f_{j,r-2}(r/n) & f_{j,r-1}(r/n) & f_{j,r}(r/n)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,r-2} & \mathbf{P}_{j+1,r-2} & \mathbf{P}_{j+2,r-2} \\ \mathbf{P}_{j,r-1} & \mathbf{P}_{j+1,r-1} & \mathbf{P}_{j+2,r-1} \\ \mathbf{P}_{j,r} & \mathbf{P}_{j+1,r} & \mathbf{P}_{j+2,r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F'_{j,r-2}((j+2)/m) \\ F'_{j+1,r-2}((j+2)/m) \\ F'_{j+2,r-2}((j+2)/m) \end{pmatrix} \qquad (25)$$

pero, según el cuadro (26):

u	$F_{j,r-2}(u)$	$F_{j,r-1}(u)$	$F_{j,r}(u)$
(r-2)/n	1	0	0
(r-1)/n	0	1	0
r/n	0	0	1

Tabla (26)

queda :

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,r} & \mathbf{P}_{j+1,r} & \mathbf{P}_{j+2,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_{j,r-2}((j+2)/m) \\ F'_{j+1,r-2}((j+2)/m) \\ F'_{j+2,r-2}((j+2)/m) \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{P}_{j,r} F'_{j,r-2}((j+2)/m) + \mathbf{P}_{j+1,r} F'_{j+1,r-2}((j+2)/m) + \mathbf{P}_{j+2,r} F'_{j+2,r-2}((j+2)/m) \qquad (27)$$

$$\mathbf{T}_{j+2,r+1} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r+1,r+3][j,j+2]}(t,u)}{\partial t} \right)_{t=(j+2)/m, u=(r+1)/n} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f_{j,r+1}(u) & f_{j,r+2}(u) & f_{j,r+3}(u) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,r+1} & \mathbf{P}_{j+1,r+1} & \mathbf{P}_{j+2,r+1} \\ \mathbf{P}_{j,r+2} & \mathbf{P}_{j+1,r+2} & \mathbf{P}_{j+2,r+2} \\ \mathbf{P}_{j,r+3} & \mathbf{P}_{j+1,r+3} & \mathbf{P}_{j+2,r+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{j,r+1}(t) \\ F_{j+1,r+1}(t) \\ F_{j+2,r+1}(t) \end{pmatrix}_{t=(j+2)/m, u=(r+1)/n} =$$

$$\begin{pmatrix} f_{j,r+1}((r+1)/n) & f_{j,r+2}((r+1)/n) & f_{j,r+3}((r+1)/n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,r+1} & \mathbf{P}_{j+1,r+1} & \mathbf{P}_{j+2,r+1} \\ \mathbf{P}_{j,r+2} & \mathbf{P}_{j+1,r+2} & \mathbf{P}_{j+2,r+2} \\ \mathbf{P}_{j,r+3} & \mathbf{P}_{j+1,r+3} & \mathbf{P}_{j+2,r+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_{j,r+1}((j+2)/m) \\ F'_{j+1,r+1}((j+2)/m) \\ F'_{j+2,r+1}((j+2)/m) \end{pmatrix} \qquad (28)$$

pero, según el cuadro (29) :

u	$F_{j,r+1}(u)$	$F_{j,r+2}(u)$	$F_{j,r+3}(u)$
(r+1)/n	1	0	0
(r+2)/n	0	1	0
(r+3)/n	0	0	1

Tabla (29)

quedaría:

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,r+1} & \mathbf{P}_{j+1,r+1} & \mathbf{P}_{j+2,r+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F'_{j,r+1}((j+2)/m) \\ F'_{j+1,r+1}((j+2)/m) \\ F'_{j+2,r+1}((j+2)/m) \end{pmatrix} =$$

$$= \mathbf{P}_{j,r+1} F'_{j,r+1}((j+2)/m) + \mathbf{P}_{j+1,r+1} F'_{j+1,r+1}((j+2)/m) + \mathbf{P}_{j+2,r+1} F'_{j+2,r+1}((j+2)/m) \qquad 30$$

$$\mathbf{E}_{j+2,r} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{[r,r+1][j,j+2]}(t,u)}{\partial t \partial u} \right)_{t=(j+2)/m, u=r/n} =$$

$$\begin{aligned} &= F'_{j,r}(r/n)\mathbf{P}_{j,r} + F'_{j,r+1}(r/n)\mathbf{P}_{j,r+1} + G'_{j,r}(r/n)\mathbf{U}_{j,r} + G'_{j,r+1}(r/n)\mathbf{U}_{j,r+1} F'_{j,r}((j+2)/m) + \\ &\quad F'_{j,r}(r/n)\mathbf{P}_{j+1,r} + F'_{j,r+1}(r/n)\mathbf{P}_{j+1,r+1} + G'_{j,r}(r/n)\mathbf{U}_{j+1,r} + G'_{j+1,r+1}(r/n)\mathbf{U}_{j+1,r+1} F'_{j+1,r}((j+2)/m) + \\ &\quad F'_{j,r}(r/n)\mathbf{P}_{j+2,r} + F_{j,r+1}(r/n)\mathbf{P}_{j+2,r+1} + G'_{j,r}(r/n)\mathbf{U}_{j+2,r} + G'_{j+1,r+1}(r/n)\mathbf{U}_{j+2,r+1} F'_{j+2,r}((j+2)/m) \end{aligned} \qquad (31)$$

Teniendo en cuenta el cuadro de restricciones (32):

u	$F_{j,r}(u)$	$F'_{j,r}(u)$	$F_{j,r+1}(u)$	$F'_{j,r+1}(u)$	$G_{j,r}(u)$	$G'_{j,r}(u)$	$G_{j,r+1}(u)$	$G'_{j,r+1}(u)$
r/n	1	0	0	0	0	1	0	0
(r+1/n	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (32)

queda:

$$= \mathbf{U}_{j,r} F'_{j,r}((j+2)/m) + \mathbf{U}_{j+1,r} F'_{j+1,r}((j+2)/m) + \mathbf{U}_{j+2,r} F'_{j+2,r}((j+2)/m) \qquad (33)$$

$$\mathbf{E}_{j+2,r+1} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{[r,r+1][j,j+2]}(t,u)}{\partial t \partial u} \right)_{t=(j+2)/m, u=(r+1)/n} =$$

$$\begin{aligned} &= F'_{j,r}((r+1)/n)\mathbf{P}_{j,r} + F'_{j,r+1}((r+1)/n)\mathbf{P}_{j,r+1} + \\ &\quad G'_{j,r}((r+1)/n)\mathbf{U}_{j,r} + G'_{j,r+1}((r+1)/n)\mathbf{U}_{j,r+1} F'_{j,r}((j+2)/m) + \\ &\quad F'_{j,r}((r+1)/n)\mathbf{P}_{j+1,r} + F'_{j,r+1}((r+1)/n)\mathbf{P}_{j+1,r+1} + \\ &\quad G'_{j,r}((r+1)/n)\mathbf{U}_{j+1,r} + G'_{j,r+1}((r+1)/n)\mathbf{U}_{j+1,r+1} F'_{j+1,r}((j+2)/m) + \\ &\quad F'_{j,r}((r+1)/n)\mathbf{P}_{j+2,r} + F_{j,r+1}((r+1)/n)\mathbf{P}_{j+2,r+1} + \\ &\quad G'_{j,r}((r+1)/n)\mathbf{U}_{j+2,r} + G'_{j,r+1}((r+1)/n)\mathbf{U}_{j+2,r+1} F'_{j+2,r}((j+2)/m) \end{aligned} \qquad (34)$$

Teniendo en cuenta el cuadro de restricciones (32) queda:

$$= \mathbf{U}_{j,r} F'_{j,r}((j+2)/m) + \mathbf{U}_{j+1,r} F'_{j+1,r}((j+2)/m) + \mathbf{U}_{j+2,r+2} F'_{j+2,r}((j+2)/m) \qquad (35)$$

Entrando con estos valores en (24) sale:

$$
\begin{aligned}
24 = {} & F_{j,r}(u)(\mathbf{P}_{j,r}F'_{j,r-2}((j+2)/m)+\mathbf{P}_{j+1,r}F'_{j+1,r-2}((j+2)/m)+\mathbf{P}_{j+2,r}F'_{j+2,r}((j+2)/m)+\\
& F_{j,r+1}(u)(\mathbf{P}_{j,r+1}F'_{j,r+1}((j+2)/m)+\mathbf{P}_{j+1,r+1}F'_{j+1,r+1}((j+2)/m)+\mathbf{P}_{j+2,r+1}F'_{j+2,r+1}((j+2)/m)+\\
& G_{j,r}(u)(\mathbf{U}_{j,r}F'_{j,r}((j+2)/m)+\mathbf{U}_{j+1,r}F'_{j+1,r}((j+2)/m)+\mathbf{U}_{j+2,r}F'_{j+2,r}((j+2)/m)+\\
& G_{j,r+1}(u)(\mathbf{U}_{j,r+1}F'_{j,r}((j+2)/m)+\mathbf{U}_{j+1,r+1}F'_{j+1,r}((j+2)/m)+\mathbf{U}_{j+2,r+1}F'_{j+2,r}((j+2)/m) \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Pero como :

$$
\begin{aligned}
& F_{j,r-2}(t) = F_{j,r}(t) && F_{j,r+1}(t) = F_{j,r}(t) \\
& F_{j+1,r-2}(t) = F_{j+1,r}(t) && F_{j+1,r+1}(t) = F_{j+1,r}(t) \qquad (37)\\
& F_{j+2,r-2}(t) = F_{j+2,r}(t) && F_{j+2,r+1}(t) = F_{j+2,r}(t)
\end{aligned}
$$

se tiene que (36) y (21) son iguales c.q.d.

2.-) continuidad con el parche de abajo (2x2)

Borde común t = j/m

(figura 3.3.1.3.-6)

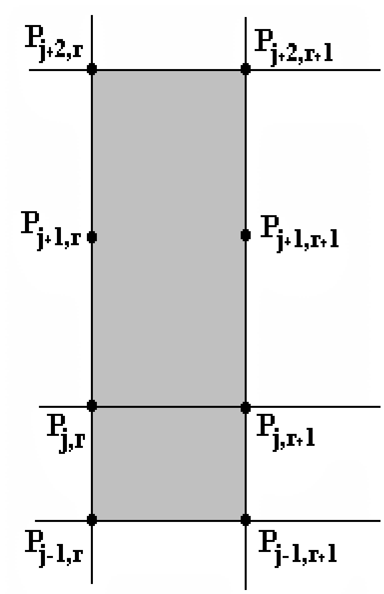


Figura 3.3.1.3.-6. Continuidad con el parche de abajo

La curva en el borde común (t = j/m) a ambos parches es igual.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r,r+1][j,j+2]}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=j/m} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} F_{j,r}(u) & F_{j,r+1}(u) & G_{j,r}(u) & G_{j,r+1}(u)\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j,r} & \mathbf{P}_{j+1,r} & \mathbf{P}_{j+2,r} \\ \mathbf{P}_{j,r+1} & \mathbf{P}_{j+1,r+1} & \mathbf{P}_{j+2,r+1} \\ \mathbf{U}_{j,r} & \mathbf{U}_{j+1,r} & \mathbf{U}_{j+2,r} \\ \mathbf{U}_{j,r+1} & \mathbf{U}_{j+1,r+1} & \mathbf{U}_{j+2,r+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{j,r}(t) \\ F_{j+1,r}(t) \\ F_{j+2,r}(t)\end{pmatrix}_{t=j/m} = \quad (38)$$

Haciendo operaciones se llega al resultado calculado anteriormente pero con t= j/m es decir:

$$\begin{aligned}(38) = {} & F_{j,r}(u)(\mathbf{P}_{j,r}F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+1,r}F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+2,r}F'_{j+2,r}(j/m) + \\ & F_{j,r+1}(u)(\mathbf{P}_{j,r+1}F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+1,r+1}F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+2,r+1}F'_{j+2,r}(j/m) + \\ & G_{j,r}(u)(\mathbf{U}_{j,r}F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+1,r}F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+2,r}F'_{j+2,r}(j/m)) + \\ & G_{j,r+1}(u)(\mathbf{U}_{j,r+1}F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+1,r+1}F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+2,r+1}F'_{j+2,r}(j/m)\end{aligned} \quad (39)$$

Análogamente, en el parche 2x2 se tendrá:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r,r+1][j-1,j]}(t,u)}{\partial t}\right)_{t=j/m} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} F_{j-1,r}(u) & F_{j-1,r+1}(u) & G_{j-1,r}(u) & G_{j-1,r+1}(u)\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{j-1,r} & \mathbf{P}_{j,r} & \mathbf{T}_{j-1,r} & \mathbf{T}_{j,r} \\ \mathbf{P}_{j-1,r+1} & \mathbf{P}_{j,r+1} & \mathbf{T}_{j-1,r+1} & \mathbf{T}_{j,r+1} \\ \mathbf{U}_{j-1,r} & \mathbf{U}_{j,r} & \mathbf{E}_{j-1,r} & \mathbf{E}_{j,r} \\ \mathbf{U}_{j-1,r+1} & \mathbf{U}_{j,r+1} & \mathbf{E}_{j-1,r+1} & \mathbf{E}_{j,r+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{j-1,r}(t) \\ F_{j,r}(t) \\ G_{j-1,r}(t) \\ G_{j,r}(t)\end{pmatrix}_{t=j/m} = \quad (40)$$

Teniendo en cuenta las restricciones del cuadro (41):

t	$F_{j-1,r}(t)$	$F'_{j-1,r}(t)$	$F_{j,r}(t)$	$F'_{j,r}(t)$	$G_{j-1,r}(t)$	$G'_{j-1,r}(t)$	$G_{j,r}(t)$	$G'_{j,r}(t)$
(j-1)/m	1	0	0	0	0	1	0	0
j/m	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (41)

queda :

$$= F_{j-1,r}(u)\mathbf{T}_{j,r} + F_{j-1,r}(u)\mathbf{T}_{j,r+1} + G_{j-1,r}(u)\mathbf{E}_{j,r} + G_{j-1,r+1}(u)\mathbf{E}_{j,r+1} \quad (42)$$

Pero como:

$$\mathbf{T}_{j,r} = \left(\frac{\partial\, \mathbf{P}_{[r,r+1][j,j+2]}(t,u)}{\partial\, t} \right)_{t=j/m,u=r/n} =$$
$$= \mathbf{P}_{j,r} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+1,r} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+2,r} F'_{j+2,r}(j/m) \qquad (43)$$

$$\mathbf{T}_{j,r+1} = \left(\frac{\partial\, \mathbf{P}_{[r,r+1][j,j+2]}(t,u)}{\partial\, t} \right)_{t=j/m,u=(r+1)/n} =$$
$$= \mathbf{P}_{j,r+1} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+1,r+1} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+2,r+1} F'_{j+2,r}(j/m) \qquad (44)$$

$$\mathbf{E}_{j,r} = \left(\frac{\partial\, \mathbf{P^2}_{[r,r+1][j,j+2]}(t,u)}{\partial\, t \partial\, u} \right)_{t=j/m,u=r/n} =$$
$$F'_{j,r}(r/n)(\mathbf{P}_{j,r} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+1,r} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+2,r} F'_{j+2,r}(j/m)) +$$
$$F'_{j,r+1}(r/n)(\mathbf{P}_{j,r+1} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+1,r+1} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+2,r+1} F'_{j+2,r}(j/m)) +$$
$$G'_{j,r}(r/n)(\mathbf{U}_{j,r} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+1,r} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+2,r} F'_{j+2,r}(j/m)) +$$
$$G'_{j,r+1}(r/n)(\mathbf{U}_{j,r+1} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+1,r+1} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+2,r+1} F'_{j+2,r}(j/m)) =$$
$$= \mathbf{U}_{j,r} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+1,r} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+2,r} F'_{j+2,r}(j/m) \qquad (45)$$

$$\mathbf{E}_{j,r+1} = \left(\frac{\partial\, \mathbf{P^2}_{[r,r+1][j,j+2]}(t,u)}{\partial\, t \partial\, u} \right)_{t=j/m,u=(r+1)/n} =$$
$$F'_{j,r}((r+1)/n)(\mathbf{P}_{j,r} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+1,r} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+2,r} F'_{j+2,r}(j/m)) +$$
$$F'_{j,r+1}((r+1)/n)(\mathbf{P}_{j,r+1} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+1,r+1} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+2,r+1} F'_{j+2,r}(j/m)) +$$
$$G'_{j,r}((r+1)/n)(\mathbf{U}_{j,r} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+1,r} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+2,r} F'_{j+2,r}(j/m)) +$$
$$G'_{j,r+1}((r+1)/n)(\mathbf{U}_{j,r+1} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+1,r+1} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+2,r+1} F'_{j+2,r}(j/m)) =$$
$$= \mathbf{U}_{j,r+1} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+1,r+1} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+2,r+1} F'_{j+2,r}(j/m) \qquad (46)$$

Entrando con estos valores de T y E en (42) sale (39) ya que:

$$42 = F_{j,r}(u)(\mathbf{P}_{j,r} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+1,r} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+2,r} F'_{j+2,r}(j/m)) +$$
$$F_{j-1,r+1}(u)(\mathbf{P}_{j,r+1} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+1,r+1} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{P}_{j+2,r+1} F'_{j+2,r}(j/m)) +$$
$$G_{j,r}(u)(\mathbf{U}_{j,r} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+1,r} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+2,r} F'_{j+2,r}(j/m)) +$$
$$G_{j-1,r+1}(u)(\mathbf{U}_{j,r+1} F'_{j,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+1,r+1} F'_{j+1,r}(j/m) + \mathbf{U}_{j+2,r+1} F'_{j+2,r}(j/m)) \qquad (47)$$

Pero como:

$$\begin{aligned} F_{j-1,r}(u) &= F_{j,r}(u) \\ F_{j-1,r+1}(u) &= F_{j,r+1}(u) \\ G_{j-1,r}(u) &= G_{j,r}(u) \\ G_{j-1,r+1}(u) &= G_{j,r+1}(u) \end{aligned} \qquad (48)$$

tenemos que (39) y (47) son iguales c.q.d.

3.-) continuidad con el parche de la izquierda (3x3)

Ya esta estudiada al ser unión con un parche 3x3

4.-) continuidad con el parche de la derecha (3x3)

Ya esta estudiada al ser unión con un parche 3x3

C.) CONTINUIDAD DEL PARCHE GENERICO 2X2 CON LOS DE SU ALREDEDOR

1.-) continuidad con el parche de arriba (2x3)

Ya esta estudiada al ser unión con un parche 2x3

2.-) continuidad con el parche de abajo (2x3)

Ya esta estudiada al ser unión con un parche 2x3

3.-) continuidad con el parche de la izquierda (3x2)

Borde común: u = r/n

(figura 3.3.1.3.-7)

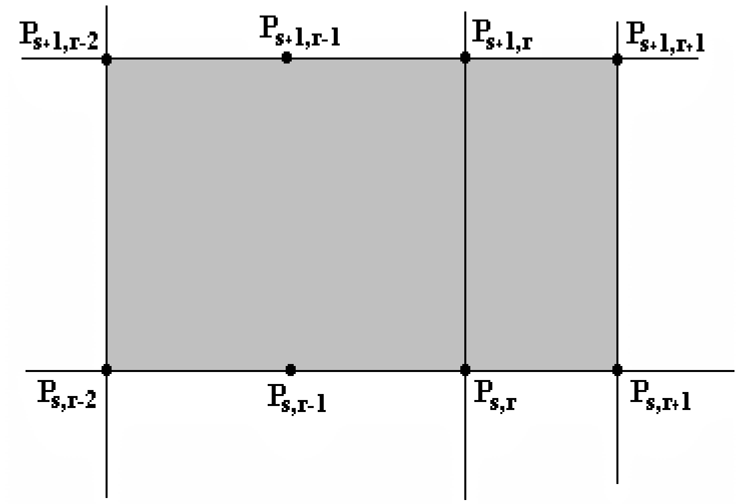


Figura 3.3.1.3.-7. Continuidad con el parche de la izquierda

La curva en el borde común (t = j/m) a ambos parches es igual .

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r-2,r][s,s+1]}(t,u)}{\partial t}\right)_{u=r/n} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} F_{s,r-2}(u) & F_{s,r-1}(u) & F_{s,r}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{s,r-2} & \mathbf{P}_{s+1,r-2} & \mathbf{T}_{s,r-2} & \mathbf{T}_{s+1,r-2} \\ \mathbf{P}_{s,r-1} & \mathbf{P}_{s+1,r-1} & \mathbf{T}_{s,r-1} & \mathbf{T}_{s+1,r-1} \\ \mathbf{P}_{s,r} & \mathbf{P}_{s+1,r} & \mathbf{T}_{s,r} & \mathbf{T}_{s+1,r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{s,r-2}(t) \\ F_{s+1,r-2}(t) \\ G_{s,r-2}(t) \\ G_{s+1,r-2}(t)\end{pmatrix}_{u=r/n} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{s,r-2}(r/n) & F_{s,r-1}(r/n) & F_{s,r}(r/n)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{s,r-2} & \mathbf{P}_{s+1,r-2} & \mathbf{T}_{s,r-2} & \mathbf{T}_{s+1,r-2} \\ \mathbf{P}_{s,r-1} & \mathbf{P}_{s+1,r-1} & \mathbf{T}_{s,r-1} & \mathbf{T}_{s+1,r-1} \\ \mathbf{P}_{s,r} & \mathbf{P}_{s+1,r} & \mathbf{T}_{s,r} & \mathbf{T}_{s+1,r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{s,r-2}(t) \\ F_{s+1,r-2}(t) \\ G_{s,r-2}(t) \\ G_{s+1,r-2}(t)\end{pmatrix}_{u=r/n} =$$

$$\begin{aligned} = {} & F_{s,r-2}(r/n)(\mathbf{P}_{s,r-2}F_{s,r-2}(t) + \mathbf{P}_{s+1,r-2}F_{s+1,r-2}(t) + \mathbf{T}_{s,r-2}G_{s,r-2}(t) + \mathbf{T}_{s+1,r-2}G_{s+1,r-2}(t)) + \\ & F_{s,r-1}(r/n)(\mathbf{P}_{s,r-1}F_{s,r-2}(t) + \mathbf{P}_{s+1,r-1}F_{s+1,r-2}(t) + \mathbf{T}_{s,r-1}G_{s,r-2}(t) + \mathbf{T}_{s+1,r-1}G_{s+1,r-2}(t)) + \\ & F_{s,r}(r/n)(\mathbf{P}_{s,r}F_{s,r-2}(t) + \mathbf{P}_{s+1,r}F_{s+1,r-2}(t) + \mathbf{T}_{s,r}G_{s,r-2}(t) + \mathbf{T}_{s+1,r}G_{s+1,r-2}(t)) \end{aligned} \quad (49)$$

Análogamente:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r,r+1][s,s+1]}(t,u)}{\partial t}\right)_{u=r/n} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} F_{s,r}(u) & F_{s,r+1}(u) & G_{s,r}(u) & G_{s,r+1}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{s,r} & \mathbf{P}_{s+1,r} & \mathbf{T}_{s,r} & \mathbf{T}_{s+1,r} \\ \mathbf{P}_{s,r+1} & \mathbf{P}_{s+1,r+1} & \mathbf{T}_{s,r+1} & \mathbf{T}_{s+1,r+1} \\ \mathbf{U}_{s,r} & \mathbf{U}_{s+1,r} & \mathbf{E}_{s,r} & \mathbf{E}_{s+1,r} \\ \mathbf{U}_{s,r+1} & \mathbf{U}_{s+1,r+1} & \mathbf{E}_{s,r+1} & \mathbf{E}_{s+1,r+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{s,r}(t) \\ F_{s+1,r}(t) \\ G_{s,r}(t) \\ G_{s+1,r}(t)\end{pmatrix}_{u=r/n} =$$

$$= \begin{pmatrix} F'_{s,r}(r/n) & F'_{s,r+1}(r/n) & G'_{s,r}(r/n) & G'_{s,r+1}(r/n)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{s,r} & \mathbf{P}_{s+1,r} & \mathbf{T}_{s,r} & \mathbf{T}_{s+1,r} \\ \mathbf{P}_{s,r+1} & \mathbf{P}_{s+1,r+1} & \mathbf{T}_{s,r+1} & \mathbf{T}_{s+1,r+1} \\ \mathbf{U}_{s,r} & \mathbf{U}_{s+1,r} & \mathbf{E}_{s,r} & \mathbf{E}_{s+1,r} \\ \mathbf{U}_{s,r+1} & \mathbf{U}_{s+1,r+1} & \mathbf{E}_{s,r+1} & \mathbf{E}_{s+1,r+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{s,r}(t) \\ F_{s+1,r}(t) \\ G_{s,r}(t) \\ G_{s+1,r}(t)\end{pmatrix} \qquad (50)$$

Pero teniendo en cuenta la tabla de restricciones (51):

u	$F_{s,r}(u)$	$F'_{s,r}(u)$	$F_{s,r+1}(u)$	$F'_{s,r+1}(u)$	$G_{s,r}(u)$	$G'_{s,r}(u)$	$G_{s,r+1}(u)$	$G'_{s,r+1}(u)$
r/n	1	0	0	0	0	1	0	0
(r+1)/n	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (51)

queda:

$$= \mathbf{U}_{s,r}F_{s,r}(t) + \mathbf{U}_{s+1,r}F_{s+1,r}(t) + \mathbf{E}_{s,r}G_{s,r}(t) + \mathbf{E}_{s+1,r}G_{s+1,r}(t) \qquad (52)$$

Pero como:

$$\mathbf{U}_{s,r} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r-2,r][s,s+1]}(t,u)}{\partial u}\right)_{t=s/m,u=r/n} \qquad (53)$$

y teniendo en cuenta la tabla de restricciones (54):

u	$F_{s,r-2}(u)$	$F'_{s,r-2}(u)$	$F_{s+1,r-2}(u)$	$F'_{s+1,r-2}(u)$	$G_{s,r-2}(u)$	$G'_{s,r-2}(u)$	$G_{s+1,r-2}(u)$	$G'_{s+1,r-2}(u)$
s/m	1	0	0	0	0	1	0	0
(s+1)/m	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (54)

queda:

$$= F'_{s,r-2}(r/n)\mathbf{P}_{s,r-2} + F'_{s,r-1}(r/n)\mathbf{P}_{s,r-1} + F'_{s,r}(r/n)\mathbf{P}_{s,r} \qquad (55)$$

Análogamente:

$$\mathbf{U}_{s+1,r} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r-2,r][s,s+1]}(t,u)}{\partial u} \right)_{t=(s+1)/m,u=r/n} \qquad (56)$$

y teniendo en cuenta la tabla de restricciones (57):

t	$F_{s,r-2}(t)$	$F'_{s,r-2}(t)$	$F_{s+1,r-2}(t)$	$F'_{s+1,r-2}(t)$	$G_{s,r-2}(t)$	$G'_{s,r-2}(t)$	$G_{s+1,r-2}(t)$	$G'_{s+1,r-2}(t)$
s/m	1	0	0	0	0	1	0	0
(s+1)/m	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (57)

queda:

$$= F'_{s,r-2}(r/n)\mathbf{P}_{s+1,r-2} + F'_{s,r-1}(r/n)\mathbf{P}_{s+1,r-1} + F'_{s,r}(r/n)\mathbf{P}_{s+1,r} \qquad (58)$$

$$\mathbf{E}_{s,r} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{[r-2,r][s,s+1]}(t,u)}{\partial t \partial u} \right)_{t=s/m,u=r/n} =$$

$$\begin{aligned}
= F'_{s,r-2}(r/n)(&\mathbf{P}_{s,r-2}F'_{s,r-2}(s/m) + \mathbf{P}_{s+1,r-2}F'_{s+1,r-2}(s/m) + \\
&\mathbf{T}_{s,r-2}G'_{s,r-2}(s/m) + \mathbf{T}_{s+1,r-2}G'_{s+1,r-2}(s/m)) + \\
F'_{s,r-1}(r/n)(&\mathbf{P}_{s,r-1}F'_{s,r-2}(s/m) + \mathbf{P}_{s+1,r-1}F'_{s+1,r-2}(s/m) + \\
&\mathbf{T}_{s,r-1}G'_{s,r-2}(s/m) + \mathbf{T}_{s+1,r-1}G'_{s+1,r-2}(s/m)) + \\
F'_{s,r}(r/n)(&\mathbf{P}_{s,r}F'_{s,r-2}(s/m) + \mathbf{P}_{s+1,r}F'_{s+1,r-2}(s/m) + \\
&\mathbf{T}_{s,r}G'_{s,r-2}(s/m) + \mathbf{T}_{s+1,r}G'_{s+1,r-2}(s/m)) = \\
= F'_{s,r-2}(r/n)\mathbf{T}_{s,r-2} &+ F'_{s,r-1}(r/n)\mathbf{T}_{s,r-1} + F'_{s,r}(r/n)\mathbf{T}_{s,r} \qquad (59)
\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\mathbf{E}_{s+1,r} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{[r-2,r][s,s+1]}(t,u)}{\partial t \partial u} \right)_{t=(s+1)/m, u=r/n} =$$

$$\begin{aligned}
&= F'_{s,r-2}(r/n)(\mathbf{P}_{s,r-2}F'_{s,r-2}((s+1)/m) + \mathbf{P}_{s+1,r-2}F'_{s+1,r-2}((s+1)/m) + \\
&\qquad \mathbf{T}_{s,r-2}G'_{s,r-2}((s+1)/m) + \mathbf{T}_{s+1,r-2}G'_{s+1,r-2}((s+1)/m)) + \\
&\quad F'_{s,r-1}(r/n)(\mathbf{P}_{s,r-1}F'_{s,r-2}((s+1)/m) + \mathbf{P}_{s+1,r-1}F'_{s+1,r-2}((s+1)/m) + \\
&\qquad \mathbf{T}_{s,r-1}G'_{s,r-2}((s+1)/m) + \mathbf{T}_{s+1,r-1}G'_{s+1,r-2}((s+1)/m)) + \\
&\quad F'_{s,r}(r/n)(\mathbf{P}_{s,r}F'_{s,r-2}((s+1)/m) + \mathbf{P}_{s+1,r}F'_{s+1,r-2}((s+1)/m) + \\
&\qquad \mathbf{T}_{s,r}G'_{s,r-2}((s+1)/m) + \mathbf{T}_{s+1,r}G'_{s+1,r-2}((s+1)/m)) = \\
&= F'_{s,r-2}(r/n)\mathbf{T}_{s+1,r-2} + F'_{s,r-1}(r/n)\mathbf{T}_{s+1,r-1} + F'_{s,r}(r/n)\mathbf{T}_{s+1,r} \qquad (60)
\end{aligned}$$

Entrando con los valores de (55). (58), (59) y (60) en (52):

$$\begin{aligned}
&(52) = \\
&= F'_{s,r-2}(r/n)\mathbf{P}_{s,r-2} + F'_{s,r-1}(r/n)\mathbf{P}_{s,r-1} + F'_{s,r}(r/n)\mathbf{P}_{s,r})F_{s,r}(t) + \\
&\quad F'_{s,r-2}(r/n)\mathbf{P}_{s+1,r-2} + F'_{s,r-1}(r/n)\mathbf{P}_{s+1,r-1} + F'_{s,r}(r/n)\mathbf{P}_{s+1,r})F_{s+1,r}(t) + \\
&\quad F'_{s,r-2}(r/n)\mathbf{T}_{s,r-2} + F'_{s,r-1}(r/n)\mathbf{T}_{s,r-1} + F'_{s,r}(r/n)\mathbf{T}_{s,r})G_{s,r}(t) + \\
&\quad F'_{s,r-2}(r/n)\mathbf{T}_{s+1,r-2} + F'_{s,r-1}(r/n)\mathbf{T}_{s+1,r-1} + F'_{s,r}(r/n)\mathbf{T}_{s+1,r})G_{s+1,r}(t) = \\
&= F'_{s,r-2}(r/n)\mathbf{P}_{s,r-2} + F'_{s,r-1}(r/n)\mathbf{P}_{s,r-1} + F'_{s,r}(r/n)\mathbf{P}_{s,r})F_{s,r}(t) + \\
&\quad F'_{s,r-1}(r/n)(\mathbf{P}_{s,r-2}F_{s,r}(t) + \mathbf{P}_{s+1,r-2}F_{s+1,r}(t) + \mathbf{T}_{s,r-2}G_{s,r}(t) + \mathbf{T}_{s+1,r-1}G_{s+1,r}(t) + \\
&\quad F'_{s,r}(r/n)(\mathbf{P}_{s,r}F_{s,r}(t) + \mathbf{P}_{s+1,r}F_{s+1,r}(t) + \mathbf{T}_{s,r}G_{s,r}(t) + \mathbf{T}_{s+1,r}G_{s+1,r}(t) \qquad (61)
\end{aligned}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
F_{s,r-2}(t) &= F_{s,r}(t) \\
F_{s+1,r-2}(t) &= F_{s+1,r}(t) \\
G_{s,r-2}(t) &= G_{s,r}(t) \qquad (62) \\
G_{s+1,r-2}(t) &= G_{s+1,r}(t)
\end{aligned}$$

Tenemos que (49) y (61) son iguales c.q.d.

<u>4.-) continuidad con el parche de la derecha (3x2)</u>

Borde común: u= r+l/n

(figura 3.3.1.3.-8)

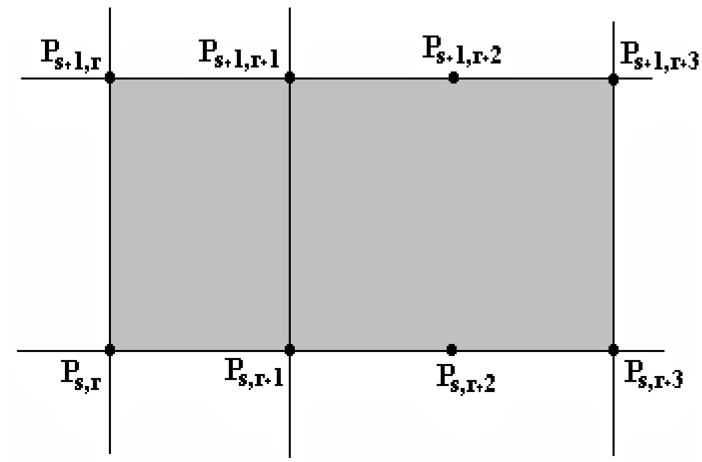


Figura 3.3.1.3.-8. Continuidad con el parche de la derecha

La curva en el borde común (u = r+1/n) a ambos parches es igual .

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r+1,r+3][s,s+1]}(t,u)}{\partial u}\right)_{u=(r+1)/n} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} F_{s,r+1}(u) & F_{s,r+2}(u) & F_{s,r+3}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{s,r+1} & \mathbf{P}_{s+1,r+1} & \mathbf{T}_{s,r+1} & \mathbf{T}_{s+1,r+1} \\ \mathbf{P}_{s,r+2} & \mathbf{P}_{s+1,r+2} & \mathbf{T}_{s,r+2} & \mathbf{T}_{s+1,r+2} \\ \mathbf{P}_{s,r+3} & \mathbf{P}_{s+1,r+3} & \mathbf{T}_{s,r+3} & \mathbf{T}_{s+1,r+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{s,r+1}(t) \\ F_{s+1,r+1}(t) \\ G_{s,r+1}(t) \\ G_{s+1,r+1}(t) \end{pmatrix}_{u=r/n} =$$

$$= \begin{pmatrix} F'_{s,r+1}((r+1)/n) & F'_{s,r+2}((r+1)/n) & F'_{s,r+3}((r+1)/n)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{s,r+1} & \mathbf{P}_{s+1,r+1} & \mathbf{T}_{s,r+1} & \mathbf{T}_{s+1,r+1} \\ \mathbf{P}_{s,r+2} & \mathbf{P}_{s+1,r+2} & \mathbf{T}_{s,r+2} & \mathbf{T}_{s+1,r+2} \\ \mathbf{P}_{s,r+3} & \mathbf{P}_{s+1,r+3} & \mathbf{T}_{s,r+3} & \mathbf{T}_{s+1,r+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{s,r+1}(t) \\ F_{s+1,r+1}(t) \\ G_{s,r+1}(t) \\ G_{s+1,r+1}(t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} = \; & F'_{s,r+1}((r+1)/n)(\mathbf{P}_{s,r+1}F_{s,r+1}(t) + \mathbf{P}_{s+1,r+1}F_{s+1,r+1}(t) + \mathbf{T}_{s,r+1}G_{s,r+1}(t) + \mathbf{T}_{s+1,r+1}G_{s+1,r+1}(t) + \\ & F'_{s,r+2}((r+1)/n)(\mathbf{P}_{s,r+2}F_{s,r+1}(t) + \mathbf{P}_{s+1,r+2}F_{s+1,r+1}(t) + \mathbf{T}_{s,r+2}G_{s,r+1}(t) + \mathbf{T}_{s+1,r+2}G_{s+1,r+1}(t) + \\ & F'_{s,r+3}((r+1)/n)(\mathbf{P}_{s,r+3}F_{s,r+1}(t) + \mathbf{P}_{s+1,r+3}F_{s+1,r+1}(t) + \mathbf{T}_{s,r+3}G_{s,r+1}(t) + \mathbf{T}_{s+1,r+3}G_{s+1,r+1}(t) \end{aligned} \qquad (63)$$

Análogamente:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r,r+1][s,s+1]}(t,u)}{\partial u}\right)_{u=(r+1)/n} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{pmatrix} F_{s,r}(u) & F_{s,r+1}(u) & G_{s,r}(u) & G_{s,r+1}(u)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{s,r} & \mathbf{P}_{s+1,r} & \mathbf{T}_{s,r} & \mathbf{T}_{s+1,r} \\ \mathbf{P}_{s,r+1} & \mathbf{P}_{s+1,r+1} & \mathbf{T}_{s,r+1} & \mathbf{T}_{s+1,r+1} \\ \mathbf{U}_{s,r} & \mathbf{U}_{s+1,r} & \mathbf{E}_{s,r} & \mathbf{E}_{s+1,r} \\ \mathbf{U}_{s,r+1} & \mathbf{U}_{s+1,r+1} & \mathbf{E}_{s,r+1} & \mathbf{E}_{s+1,r+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{s,r}(t) \\ F_{s+1,r}(t) \\ G_{s,r}(t) \\ G_{s+1,r}(t)\end{pmatrix}_{u=(r+1)/n} =$$

$$= \begin{pmatrix} F'_{s,r}((r+1)/n) & F'_{s,r+1}((r+1)/n) & G'_{s,r}((r+1)/n) & G'_{s,r+1}((r+1)/n)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{s,r} & \mathbf{P}_{s+1,r} & \mathbf{T}_{s,r} & \mathbf{T}_{s+1,r} \\ \mathbf{P}_{s,r+1} & \mathbf{P}_{s+1,r+1} & \mathbf{T}_{s,r+1} & \mathbf{T}_{s+1,r+1} \\ \mathbf{U}_{s,r} & \mathbf{U}_{s+1,r} & \mathbf{E}_{s,r} & \mathbf{E}_{s+1,r} \\ \mathbf{U}_{s,r+1} & \mathbf{U}_{s+1,r+1} & \mathbf{E}_{s,r+1} & \mathbf{E}_{s+1,r+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{s,r}(t) \\ F_{s+1,r}(t) \\ G_{s,r}(t) \\ G_{s+1,r}(t)\end{pmatrix} \qquad (64)$$

Pero teniendo en cuenta la tabla de restricciones (65):

u	$F_{s,r}(u)$	$F'_{s,r}(u)$	$F_{s,r+1}(u)$	$F'_{s,r+1}(u)$	$G_{s,r}(u)$	$G'_{s,r}(u)$	$G_{s,r+1}(u)$	$G'_{s,r+1}(u)$
r/n	1	0	0	0	0	1	0	0
(r+1)/n	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (65)

queda :

$$= \mathbf{U}_{s,r+1}F_{s,r}(t) + \mathbf{U}_{s+1,r+1}F_{s+1,r}(t) + \mathbf{E}_{s,r+1}G_{s,r}(t) + \mathbf{E}_{s+1,r+1}G_{s+1,r}(t) \qquad (66)$$

Pero como (teniendo en cuenta la tabla de restricciones (67):

t	$F_{s,r+1}(t)$	$F'_{s,r+1}(t)$	$F_{s+1,r+1}(t)$	$F'_{s+1,r+1}(t)$	$G_{s,r+1}(t)$	$G'_{s,r+1}(t)$	$G_{s+1,r+1}(t)$	$G'_{s+1,r+1}(t)$
s/m	1	0	0	0	0	1	0	0
(s+1)/m	0	0	1	0	0	0	00	1

Tabla (67)

$$\mathbf{U}_{s,r+1} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r+1,r+3][s,s+1]}(t,u)}{\partial u}\right)_{t=s/m,u=(r+1)/n} =$$

$$= F'_{s,r+1}((r+1)/n)\mathbf{P}_{s,r+1} + F'_{s,r+2}((r+1)/n)\mathbf{P}_{s,r+2} + F'_{s,r+3}((r+1)/n)\mathbf{P}_{s,r+3} \qquad (68)$$

$$\mathbf{U}_{s+1,r+1} = \left(\frac{\partial \mathbf{P}_{[r+1,r+3][s,s+1]}(t,u)}{\partial u} \right)_{t=(s+1)/m,u=(r+1)/n} =$$
$$= F'_{s,r+1}((r+1)/n)\mathbf{P}_{s+1,r+1} + F'_{s,r+2}((r+1)/n)\mathbf{P}_{s+1,r+2} + F'_{s,r+3}((r+1)/n)\mathbf{P}_{s+1,r+3} \quad (69)$$

$$\mathbf{E}_{s,r+1} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{[r+1,r+3][s,s+1]}(t,u)}{\partial t \partial u} \right)_{t=s/m,u=(r+1)/n} =$$
$$= F'_{s,r+1}((r+1)/n)\mathbf{T}_{s,r+1} + F'_{s,r+2}((r+1)/n)\mathbf{T}_{s,r+2} + F'_{s,r+3}((r+1)/n)\mathbf{T}_{s,r+3} \quad (70)$$

$$\mathbf{E}_{s+1,r+1} = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{[r+1,r+3][s,s+1]}(t,u)}{\partial t \partial u} \right)_{t=(s+1)/m,u=(r+1)/n} =$$
$$= F'_{s,r+1}((r+1)/n)\mathbf{T}_{s+1,r+1} + F'_{s,r+2}((r+1)/n)\mathbf{T}_{s+1,r+2} + F'_{s,r+3}((r+1)/n)\mathbf{T}_{s+1,r+3} \quad (71)$$

entrando con estos valores en (66) sale (63) c.q.d.

D.-CONTINUIDAD DEL PARCHE GENERICO 3X2 CON LOS DE SU ALREDEDOR

1.-) continuidad con el parche de arriba (3x3)

Ya está estudiada al ser unión con un parche 3x3

2.-) continuidad con el parche de abajo (3x3)

Ya está estudiada al ser unión con un parche 3x3

3.-) continuidad con el parche de la izquieda(2x2)

Ya está estudiada al ser unión con un parche 2x2

4.-) continuidad con el parche de la derecha (2x2)

Ya está estudiada al ser unión con un parche 2x2

Queda por tanto demostrada la continuidad entre todos los parches que componen la superficie total polinomial que pasa por la red de (n+1)x(m+1) puntos usando polinomios de grado menor o igual que tres.

3.3.2.-CONSTRUCCION DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 6X6 PUNTOS DADOS USANDO POLINOMIOS DE GRADO 3 0 MENOR, PROBLEMA MIXTO

3-3-2-1.-CONSTRUCCION DE LAS CURVAS GENERADORAS

Supongamos la curva que pasa por $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ y $\mathbf{P}_5$ con tangentes $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$ en los puntos $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ (figura 3.3.2.1.-1).

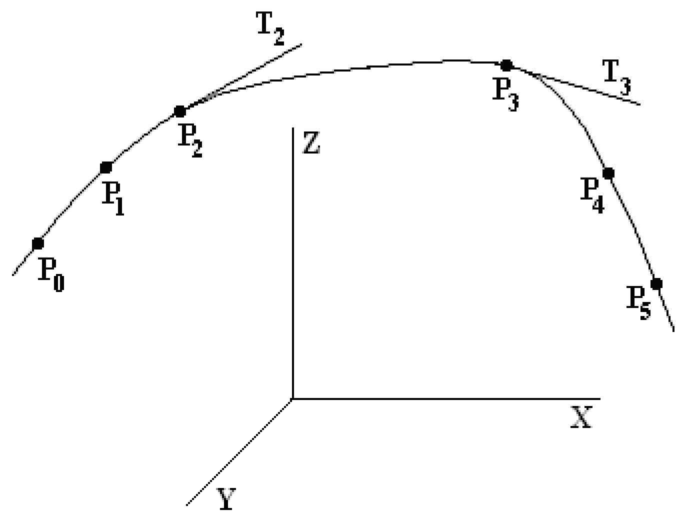


Figura 3.3.2.1.-1. Curva que pasa seis puntos con tangentes en algunos de ellos

Dicha curva se puede descomponer en tres tramos: C 0-2, C 2-3 y C 3-5.

El tramo C 0-2 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P}_{0,2}(t) = F_0(t)\mathbf{P}_0 + F_1(t)\mathbf{P}_1 + F_2(t)\mathbf{P}_2 \qquad (1)$$

con las restricciones:

t	$F_0(t)$	$F_1(t)$	$F_2(t)$
t_0 =0	1	0	0
t_1=1/5	0	1	0
t_2 =2/5	0	0	1

Tabla (2)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$F_0(t) = \frac{(t-1/5)(t-2/5)}{(0-1/5)(0-2/5)} = 25t^2 - 15/2t + 1$$
$$F_1(t) = \frac{(t-0)(t-2/5)}{(1/5-0)(1/5-2/5)} = -25t^2 + 10t \qquad (3)$$
$$F_2(t) = \frac{(t-0)(t-1/5)}{(2/5-0)(2/5-1/5)} = 25t^2 - 5/2t$$

Entrando con estos valores en la fórmula (1), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P_{0,2}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} 1/2 \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Análogamente el tramo de curva C 2-3 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$.

La ecuación de ese tramo seria:

$$\mathbf{P_{2,3}}(t) = F_2(t)\mathbf{P}_2 + F_3(t)\mathbf{P}_3 + G_2(t)\mathbf{T}_2 + G_3(t)\mathbf{T}_3 \qquad (5)$$

con las restricciones:

	$F_2(t)$	$F'_2(t)$	$F_3(t)$	$F'_3(t)$	$G_2(t)$	$G'_2(t)$	$G_3(t)$	$G'_3(t)$
t_2	1	0	0	0	0	1	0	0
t_3	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (6)

Las soluciones de las $F_i(t)$ que cumplen estas condiciones serían:

$$F_2(t) = 250t^3 - 375t^2 + 180t - 27$$
$$F_3(t) = -250t^3 + 375t^2 - 180t + 28$$
$$G_2(t) = 25t^3 - 40t^2 + 21t - 18/5 \qquad (7)$$
$$G_3(t) = 25t^3 - 35t^2 + 16t - 12/5$$

Entrando con estos valores en la fórmula (5), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P_{2,3}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Operando igualmente, el tramo C 3-5 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ y $\mathbf{P}_5$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P_{3,5}}(t) = F_3(t)\mathbf{P}_3 + F_4(t)\mathbf{P}_4 + F_5(t)\mathbf{P}_5 \qquad (9)$$

con las restricciones:

	$F_3(t)$	$F_4(t)$	$F_5(t)$
$3/5$	1	0	0
$4/5$	0	1	0
1	0	0	1

Tabla (10)

Las soluciones para las $f_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_3(t) &= \frac{(t-4/5)(t-1)}{(3/5-4/5)(3/5-1)} = 25/2t^2 - 45/2t + 10 \\ F_4(t) &= \frac{(t-3/5)(t-1)}{(4/5-3/5)(4/5-1)} = -25t^2 + 40t - 15 \\ F_5(t) &= \frac{(t-3/5)(t-4/5)}{(1-3/5)(1-4/5)} = 25/2t^2 - 35/2t + 6 \end{aligned} \qquad (11)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (9), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P_{3,5}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

3.3.2.2.-CONSTRUCCIÓN DE LOS PARCHES QUE COMPONEN LA SUPERFICIE

Si efectuamos el producto cartesiano de la curva total C 0-5 por sí misma obtenemos una superficie formada por una serie de cuadros (Figura 3.3.2.2.-1) cuyas ecuaciones serían las siguientes:

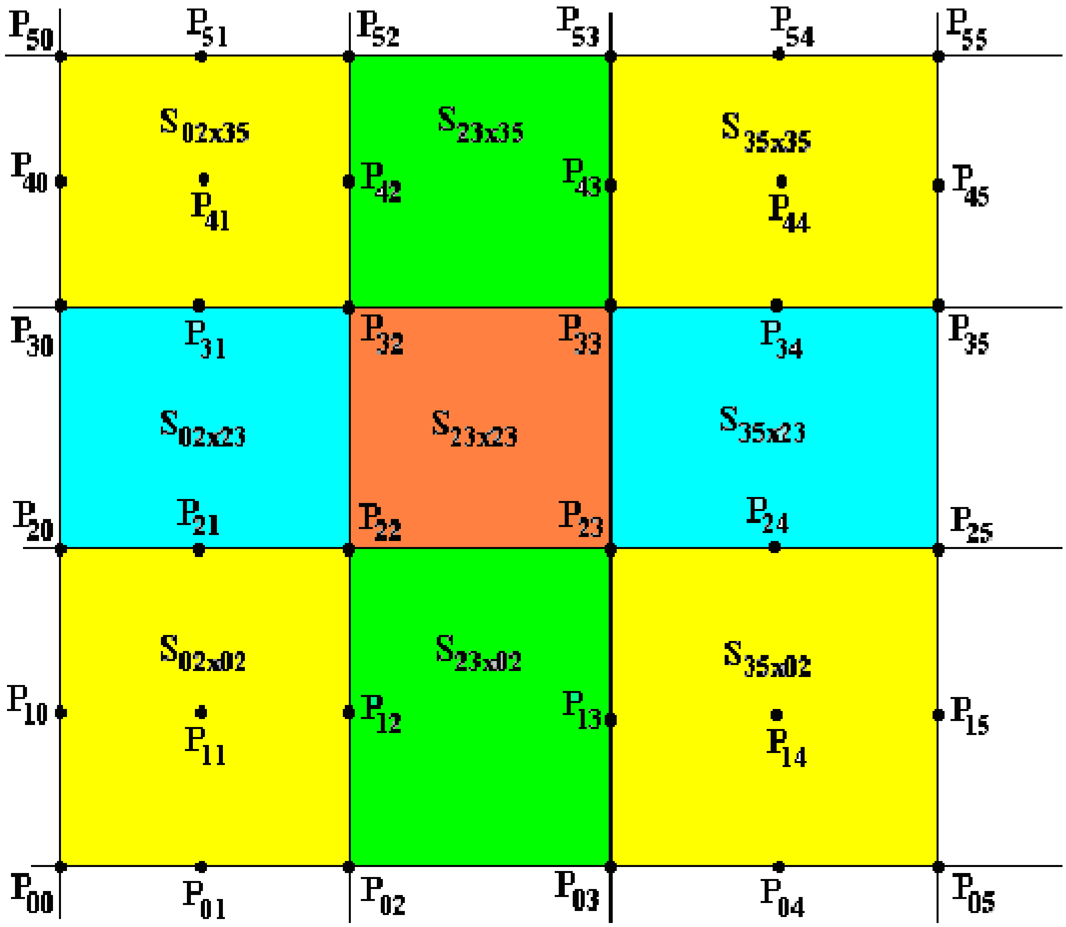


Figura 3.3.2.2.–1. Superficie formada por una red de 6x6 puntos. Conjunto de los parches que la componen

Superficie S_{02x02}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x02} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{00}} \\ \mathbf{P_{01}} \\ \mathbf{P_{02}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{00}} & \mathbf{P_{10}} & \mathbf{P_{20}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(0,0) = k_{00} & \mathbf{P}(1/5,0) = k_{01} & \mathbf{P}(2/5,0) = k_{02} \\ \mathbf{P}(0,1/5) = k_{01} & \mathbf{P}(1/5,1/5) = k_{11} & \mathbf{P}(2/5,2/5) = k_{12} \\ \mathbf{P}(0,2/5) = k_{10} & \mathbf{P}(1/5,2/5) = k_{21} & \mathbf{P}(2/5,2/5) = k_{22} \end{array} \qquad (2)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x02} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Superficie S_{02x23}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x03} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{20}} \\ \mathbf{P_{21}} \\ \mathbf{P_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{20}} & \mathbf{P_{30}} & \mathbf{T_{20}} & \mathbf{T_{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(2/5,0) = k_{00} && \mathbf{P}(3/5,0) = k_{01} \\ &\mathbf{P}(2/5,1/5) = k_{10} && \mathbf{P}(3/5,1/5) = k_{11} \\ &\mathbf{P}(2/5,2/5) = k_{20} && \mathbf{P}(3/5,2/5) = k_{21} \\ &\frac{\partial \mathbf{P}(2/5,0)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} && \frac{\partial \mathbf{P}(3/5,0)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\ &\frac{\partial \mathbf{P}(2/5,1/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} && \frac{\partial \mathbf{P}(3/5,1/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\ &\frac{\partial \mathbf{P}(2/5,2/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{22} && \frac{\partial \mathbf{P}(3/5,2/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{23} \end{aligned} \qquad (5)$$

Llevando, estos valores, a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x23} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{30} & \mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{30} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{31} \\ \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

<u>Superficie $_{02x35}$</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x35} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{30} \\ \mathbf{P}_{31} \\ \mathbf{P}_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(3/5,0) = k_{00} & \mathbf{P}(4/5,0) = k_{01} & \mathbf{P}(1,0) = k_{02} \\ \mathbf{P}(3/5,1/5) = k_{10} & \mathbf{P}(4/5,1/5) = k_{11} & \mathbf{P}(1,2/5) = k_{12} \\ \mathbf{P}(3/5,2/5) = k_{20} & \mathbf{P}(4/5,2/5) = k_{21} & \mathbf{P}(1,2/5) = k_{22} \end{array} \qquad (8)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x35} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{50} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{51} \\ \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{52} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Superficie$_{23x02}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x02} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{03} \\ \mathbf{U}_{02} \\ \mathbf{U}_{03} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(0,2/5) = k_{00} & \mathbf{P}(1/5,2/5) = k_{01} & \mathbf{P}(2/5,2/5) = k_{02} \\ \mathbf{P}(0,3/5) = k_{10} & \mathbf{P}(1/5,3/5) = k_{11} & \mathbf{P}(2/5,3/5) = k_{12} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(0,2/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1/5,2/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,2/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{22} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(0,3/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1/5,3/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,3/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{32} \end{array} \qquad (11)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x02} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{U}_{02} & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{22} \\ \mathbf{U}_{03} & \mathbf{U}_{13} & \mathbf{U}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

<u>Superficie$_{23x23}$</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x23} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{U}_{22} \\ \mathbf{U}_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(2/5,2/5) = k_{00} & \mathbf{P}(3/5,2/5) = k_{01} \\
\mathbf{P}(2/5,3/5) = k_{10} & \mathbf{P}(3/5,3/5) = k_{11} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,2/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,2/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,3/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,3/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,2/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,2/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,3/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,3/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}^2(2/5,2/5)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P}^2(3/5,2/5)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{23} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}^2(2/5,3/5)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{32} & \dfrac{\partial \mathbf{P}^2(3/5,3/5)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{33}
\end{array} \qquad (14)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x23} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \\ \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{33} \\ \mathbf{U}_{22} & \mathbf{U}_{32} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{32} \\ \mathbf{U}_{23} & \mathbf{U}_{33} & \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

<u>Superficie$_{23x35}$</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x35} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{32} \\ \mathbf{P}_{33} \\ \mathbf{U}_{32} \\ \mathbf{U}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(3/5,2/5) = k_{00} & \mathbf{P}(4/5,2/5) = k_{01} & \mathbf{P}(1,2/5) = k_{02} \\ \mathbf{P}(3/5,3/5) = k_{10} & \mathbf{P}(4/5,3/5) = k_{11} & \mathbf{P}(1,3/5) = k_{12} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,2/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(14/5,2/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1,2/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{22} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,3/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(4/5,3/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1,3/5)}{\partial u} = \mathrm{k}_{32} \end{array} \qquad (17)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x35} = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{52} \\ \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{53} \\ \mathbf{U}_{32} & \mathbf{U}_{42} & \mathbf{U}_{52} \\ \mathbf{U}_{33} & \mathbf{U}_{43} & \mathbf{U}_{53} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \qquad (18)$$

Superficie$_{35x02}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x02} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{03} \\ \mathbf{P}_{04} \\ \mathbf{P}_{05} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(0,3/5) = k_{00} & \mathbf{P}(1/5,3/5) = k_{01} & \mathbf{P}(2/5,3/5) = k_{02} \\ \mathbf{P}(0,4/5) = k_{10} & \mathbf{P}(1/5,4/5) = k_{11} & \mathbf{P}(2/5,4/5) = k_{12} \\ \mathbf{P}(0,1) = k_{20} & \mathbf{P}(1/5,1) = k_{21} & \mathbf{P}(2/5,1) = k_{22} \end{array} \qquad (20)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x02} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{04} & \mathbf{P}_{14} & \mathbf{P}_{24} \\ \mathbf{P}_{05} & \mathbf{P}_{15} & \mathbf{P}_{25} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

Superficie$_{35x23}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x23} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{23}} \\ \mathbf{P_{24}} \\ \mathbf{P_{25}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{23}} & \mathbf{P_{33}} & \mathbf{T_{23}} & \mathbf{T_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(2/5,3/5) = k_{00} & \mathbf{P}(3/5,3/5) = k_{01} \\ \mathbf{P}(2/5,4/5) = k_{10} & \mathbf{P}(3/5,4/5) = k_{11} \\ \mathbf{P}(2/5,1) = k_{20} & \mathbf{P}(3/5,1) = k_{21} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,3/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,3/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,4/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,4/5)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,1)}{\partial t} = \mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,2/51)}{\partial t} = \mathrm{k}_{23} \end{array} \qquad (23)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$\mathbf{P}(t,u)_{35x23} =$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{33} \\ \mathbf{P}_{24} & \mathbf{P}_{34} & \mathbf{T}_{24} & \mathbf{T}_{34} \\ \mathbf{P}_{25} & \mathbf{P}_{35} & \mathbf{T}_{25} & \mathbf{T}_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (24)$$

Superficie$_{35x35}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x35} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{33} \\ \mathbf{P}_{34} \\ \mathbf{P}_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{53} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(3/5,3/5) = k_{00} & \mathbf{P}(4/5,3/5) = k_{01} & \mathbf{P}(1,3/5) = k_{02} \\ \mathbf{P}(3/5,4/5) = k_{10} & \mathbf{P}(4/5,4/5) = k_{11} & \mathbf{P}(1,4/5) = k_{12} \\ \mathbf{P}(3/5,1) = k_{20} & \mathbf{P}(4/5,1) = k_{21} & \mathbf{P}(1,1) = k_{22} \end{array} \qquad (26)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x35} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{53} \\ \mathbf{P}_{34} & \mathbf{P}_{44} & \mathbf{P}_{54} \\ \mathbf{P}_{35} & \mathbf{P}_{45} & \mathbf{P}_{55} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (27)$$

3.3.2.3..DEMOSTRACIÓN DE QUE EL CONJUNTO DE LOS PARCHES FORMAN UNA SUPERFICIE LISA

3.3.2.3.1.-REFORMULACIÓN DE LOS PARCHES

Si llamamos:

$$\begin{aligned}
a &= 25/2t^2 - 15/2t + 1 \\
b &= -25t^2 + 10t \\
c &= 25/2t^2 - 5/2t \\
d &= 250t^3 - 375t^2 + 180t - 27 \\
e &= -250t^3 + 375t^2 - 180t + 28 \\
f &= 25t^3 - 40t^2 + 21t - 18/5 \\
g &= 25t^3 - 35t^2 + 16t - 12/5 \\
h &= 25/2t^3 - 45/2t + 10 \\
j &= -25t^2 + 40t - 15 \\
k &= 25/2t^2 - 35/2t + 6 \\
a' &= 25/2u^2 - 15/2u + 1 \qquad (1) \\
b' &= -25u^2 + 10u \\
c' &= 25/2u^2 - 5/2u \\
d' &= 250u^3 - 375u^2 + 180u - 27 \\
e' &= -250u^3 + 375u^2 - 180u + 28 \\
f' &= 25u^3 - 40u^2 + 21u - 18/5 \\
g' &= 25u^3 - 35u^2 + 16u - 12/5 \\
h' &= 25/2u^3 - 45/2u + 10 \\
j' &= -25u^2 + 40u - 15 \\
k' &= 25/2u^2 - 35/2u + 6
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las restricciones que deben de cumplir estas funciones de que:

t	a	$\frac{da}{dt}$	b	$\frac{db}{dt}$	c	$\frac{dc}{dt}$	d	$\frac{dd}{dt}$	e	$\frac{de}{dt}$
0	1		0		0					
1/5	0		1		0					
2/5	0		0		1		1	0	0	0
3/5							0	0	1	0
4/5										
1										

t	f	$\frac{df}{dt}$	g	$\frac{dg}{dt}$	h	$\frac{dh}{dt}$	j	$\frac{dj}{dt}$	k	$\frac{dk}{dt}$
0										
1/5										
2/5	0	1	0	0						
3/5	0	0	0	1	1		0		0	
4/5					0		1			0
1					0		0			1

u	a'	$\frac{da'}{dt}$	b'	$\frac{db'}{dt}$	c'	$\frac{dc'}{dt}$	d'	$\frac{dd'}{dt}$	e'	$\frac{de'}{dt}$
0	1		0		0					
1/5	0		1		0					
2/5	0		0		1		1	0	0	0
3/5							0	0	1	0
4/5										
1										

u	f'	$\frac{df'}{dt}$	g'	$\frac{dg'}{dt}$	h'	$\frac{dh'}{dt}$	j'	$\frac{dj'}{dt}$	k'	$\frac{dk'}{dt}$
0										
1/5										
2/5	0	1	0	0						
3/5	0	0	0	1	1		0		0	
4/5					0		1			0
1					0		0			1

Tabla (2)

Las ecuaciones de los distintos parches de superficie quedarían corno sigue:

Superficie$_{02x02}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x02} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= aa'\mathbf{P}_{00} + ab'\mathbf{P}_{01} + ac'\mathbf{P}_{02} + \\ &\quad ba'\mathbf{P}_{10} + bb'\mathbf{P}_{11} + bc'\mathbf{P}_{12} + \\ &\quad ca'\mathbf{P}_{20} + cb'\mathbf{P}_{21} + cc'\mathbf{P}_{22} + \end{aligned} \qquad (3)$$

Superficie$_{02x23}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x03} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{30} & \mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{30} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{31} \\ \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= da'\mathbf{P}_{20} + db'\mathbf{P}_{21} + dc'\mathbf{P}_{22} + \\ &\quad ea'\mathbf{P}_{30} + eb'\mathbf{P}_{31} + ec'\mathbf{P}_{32} + \\ &\quad fa'\mathbf{T}_{20} + fb'\mathbf{T}_{21} + fc'\mathbf{T}_{22} \end{aligned} \qquad (4)$$

Superficie$_{02x35}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x35} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{50} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{51} \\ \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= ha'\mathbf{P}_{30} + hb'\mathbf{P}_{31} + hc'\mathbf{P}_{32} + \\ &\quad ja'\mathbf{P}_{40} + jb'\mathbf{P}_{41} + jc'\mathbf{P}_{42} + \\ &\quad ka'\mathbf{P}_{50} + kb'\mathbf{P}_{51} + kc'\mathbf{P}_{52} \end{aligned} \qquad (5)$$

Superficie$_{23x02}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x02} = \begin{pmatrix} d' & e' & f' & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{U}_{02} & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{22} \\ \mathbf{U}_{03} & \mathbf{U}_{13} & \mathbf{U}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= ad'\mathbf{P}_{02} + ae'\mathbf{P}_{03} + af'\mathbf{U}_{02} + ag'\mathbf{U}_{03} + \\ &bd'\mathbf{P}_{12} + be'\mathbf{P}_{13} + bf'\mathbf{U}_{12} + bg'\mathbf{U}_{13} + \\ &cd'\mathbf{P}_{22} + ce'\mathbf{P}_{23} + cf'\mathbf{U}_{22} + cg'\mathbf{U}_{23} + \end{aligned} \qquad (6)$$

<u>Superficie$_{23x23}$</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x23} = \begin{pmatrix} d' & e' & f' & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \\ \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{33} \\ \mathbf{U}_{22} & \mathbf{U}_{32} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{32} \\ \mathbf{U}_{23} & \mathbf{U}_{33} & \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= dd'\mathbf{P}_{22} + de'\mathbf{P}_{23} + df'\mathbf{U}_{22} + dg'\mathbf{U}_{23} + \\ &ed'\mathbf{P}_{32} + ee'\mathbf{P}_{33} + ef'\mathbf{U}_{32} + eg'\mathbf{U}_{33} + \\ &fd'\mathbf{T}_{22} + fe'\mathbf{T}_{23} + ff'\mathbf{E}_{22} + fg'\mathbf{E}_{23} + \\ &gd'\mathbf{T}_{32} + ge'\mathbf{T}_{33} + gf'\mathbf{E}_{32} + gg'\mathbf{E}_{33} + \end{aligned} \qquad (7)$$

<u>Superficie$_{23x35}$</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x35} = \begin{pmatrix} d' & e' & f' & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{52} \\ \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{53} \\ \mathbf{U}_{32} & \mathbf{U}_{42} & \mathbf{U}_{52} \\ \mathbf{U}_{33} & \mathbf{U}_{43} & \mathbf{U}_{53} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= hd'\mathbf{P}_{32} + he'\mathbf{P}_{33} + hf'\mathbf{U}_{32} + hg'\mathbf{U}_{33} + \\ &jd'\mathbf{P}_{42} + je'\mathbf{P}_{43} + jf'\mathbf{U}_{42} + jg'\mathbf{U}_{43} + \\ &kd'\mathbf{P}_{52} + ke'\mathbf{P}_{53} + kf'\mathbf{U}_{52} + kg'\mathbf{U}_{53} \end{aligned} \qquad (8)$$

<u>Superficie$_{35x02}$</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x02} = \begin{pmatrix} h' & j' & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{04} & \mathbf{P}_{14} & \mathbf{P}_{24} \\ \mathbf{P}_{05} & \mathbf{P}_{15} & \mathbf{P}_{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= ah'\mathbf{P}_{03} + aj'\mathbf{P}_{04} + ak'\mathbf{P}_{05} + \\ &\quad bh'\mathbf{P}_{13} + bj'\mathbf{P}_{14} + bk'\mathbf{P}_{15} + \\ &\quad ch'\mathbf{P}_{23} + cj'\mathbf{P}_{24} + ck'\mathbf{P}_{25} + \end{aligned} \qquad (9)$$

<u>Superficie$_{35x23}$</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x23} = \begin{pmatrix} h' & j' & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{33} \\ \mathbf{P}_{24} & \mathbf{P}_{34} & \mathbf{T}_{24} & \mathbf{T}_{34} \\ \mathbf{P}_{25} & \mathbf{P}_{35} & \mathbf{T}_{25} & \mathbf{T}_{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ g \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= dh'\mathbf{P}_{23} + dj'\mathbf{P}_{24} + dk'\mathbf{P}_{25} + \\ &\quad eh'\mathbf{P}_{33} + ej'\mathbf{P}_{34} + ek'\mathbf{P}_{35} + \\ &\quad fh'\mathbf{T}_{23} + fj'\mathbf{T}_{24} + fk'\mathbf{T}_{25} + \\ &\quad gh'\mathbf{T}_{33} + gj'\mathbf{T}_{34} + gk'\mathbf{T}_{35} \end{aligned} \qquad (10)$$

<u>Superficie$_{35x35}$</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x35} = \begin{pmatrix} h' & j' & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{53} \\ \mathbf{P}_{34} & \mathbf{P}_{44} & \mathbf{P}_{54} \\ \mathbf{P}_{35} & \mathbf{P}_{45} & \mathbf{P}_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ j \\ k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= hh'\mathbf{P}_{33} + hj'\mathbf{P}_{34} + hk'\mathbf{P}_{35} + \\ &\quad jh'\mathbf{P}_{43} + jj'\mathbf{P}_{44} + jk'\mathbf{P}_{45} + \\ &\quad kh'\mathbf{P}_{53} + kj'\mathbf{P}_{54} + kk'\mathbf{P}_{55} + \end{aligned} \qquad (11)$$

<u>3.3.2.3.2.UNIONES DE PARCHES CONTIGUOS</u>

Veamos ahora que estos parches se unen entre sí con una unión lisa:

<u>Unión de S0$_{2x02}$ con S$_{23x02}$</u>

Ambas tienen el borde común en u=2/5:

$$\mathbf{P}(t,2/5)_{02x02} = (aa'\mathbf{P}_{00} + ab'\mathbf{P}_{01} + ac'\mathbf{P}_{02} + ba'\mathbf{P}_{10} + bb'\mathbf{P}_{11} + bc'\mathbf{P}_{12} + ca'\mathbf{P}_{20} + cb'\mathbf{P}_{21} + cc'\mathbf{P}_{22})_{u=2/5} = a\mathbf{P}_{02} + b\mathbf{P}_{12} + c\mathbf{P}_{22} \quad (1)$$

$$\mathbf{P}(t,2/5)_{23x02} = (ad'\mathbf{P}_{02} + ae'\mathbf{P}_{03} + af'\mathbf{U}_{02} + ag'\mathbf{U}_{03} + bd'\mathbf{P}_{12} + be'\mathbf{P}_{13} + bf'\mathbf{U}_{12} + bg'\mathbf{U}_{13} + cd'\mathbf{P}_{22} + ce'\mathbf{P}_{23} + cf'\mathbf{U}_{22} + cg'\mathbf{U}_{23} +)_{u=2/5} = a\mathbf{P}_{02} + b\mathbf{P}_{12} + c\mathbf{P}_{22} \quad (2)$$

Luego ambas curvas son iguales en el borde común c.q.d.

La tangente según la dirección de las t crecientes ha de ser igual en ambas superficies:

$$\frac{\partial\,\mathbf{P}_{02x02}(t,2/5)}{\partial\, t} = (a'\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{00} + b'\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{01} + c'\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{02} + a'\frac{db}{dt}\mathbf{P}_{10} + b'\frac{db}{dt}\mathbf{P}_{11} + c'\frac{db}{dt}\mathbf{P}_{12} + a'\frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{00} + b'\frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{00} + c'\frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{00})_{u=2/5} = = \frac{da}{dt}\mathbf{P}_{02} + \frac{db}{dt}\mathbf{P}_{12} + \frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{22} \quad (3)$$

$$\frac{\partial\,\mathbf{P}_{23x02}(t,2/5)}{\partial\, t} = (d'\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{02} + e'\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{03} + f'\frac{da}{dt}\mathbf{U}_{02} + g'\frac{da}{dt}\mathbf{U}_{03} + d'\frac{db}{dt}\mathbf{P}_{12} + e'\frac{db}{dt}\mathbf{P}_{13} + f'\frac{db}{dt}\mathbf{U}_{12} + g'\frac{db}{dt}\mathbf{U}_{13} + d'\frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{22} + e'\frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{23} + f'\frac{dc}{dt}\mathbf{U}_{22} + g'\frac{dc}{dt}\mathbf{U}_{23})_{u=2/5} = \frac{da}{dt}\mathbf{P}_{02} + \frac{db}{dt}\mathbf{P}_{12} + \frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{22} \quad (4)$$

y como se ve, ambas ecuaciones de la tangente son iguales para ambas superficies c.q.d.

Las tangentes en la dirección de las u crecientes han de ser iguales en ambas superficies:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{02x02}(t,2/5)}{\partial u} &= (a\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{00} + a\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{01} + a\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{02} + \\ &\quad b\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{10} + b\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{11} + b\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{12} + \\ &\quad c\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{20} + c\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{21} + c\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{22})_{u=2/5} = \\ &= a(5/2\mathbf{P}_{00} - 10\mathbf{P}_{01} + 15/2\mathbf{P}_{02}) + \\ &\quad b(5/2\mathbf{P}_{10} - 10\mathbf{P}_{11} + 15/2\mathbf{P}_{12}) + \\ &\quad c(5/2\mathbf{P}_{20} - 10\mathbf{P}_{21} + 15/2\mathbf{P}_{22}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{23x02}(t,2/5)}{\partial u} &= (a\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{02} + a\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{03} + a\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{02} + a\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{03} + \\ &\quad b\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{12} + b\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{13} + b\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{12} + b\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{13} + \\ &\quad c\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{22} + c\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{23} + c\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{22} + c\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{23})_{u=2/5} = \\ &= a\mathbf{U}_{02} + b\mathbf{U}_{12} + c\mathbf{U}_{22} \end{aligned} \quad (6)$$

pero como:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{02} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{02x02}(0,2/5)}{\partial u} = (5/2\mathbf{P}_{00} - 10\mathbf{P}_{01} + 15/2\mathbf{P}_{02}) \\ \mathbf{U}_{12} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{02x02}(1/5,2/5)}{\partial u} = (5/2\mathbf{P}_{10} - 10\mathbf{P}_{11} + 15/2\mathbf{P}_{12}) \\ \mathbf{U}_{22} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{02x02}(2/5,2/5)}{\partial u} = (5/2\mathbf{P}_{20} - 10\mathbf{P}_{21} + 15/2\mathbf{P}_{22}) \end{aligned} \quad (7)$$

al llevar estos valores a la ecuación anterior se comprueba que ambas expresiones son iguales luego la ecuación de las tangentes es igual en ambas superficies.

<u>Unión de S_{02x02} con S_{02x23}</u>

Ambas tienen el borde común en t=2/5

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{02x02}(2/5,\mathrm{u}) &= (aa'\mathbf{P}_{00} + ab'\mathbf{P}_{01} + ac'\mathbf{P}_{02} + \\ &\quad ba'\mathbf{P}_{10} + bb'\mathbf{P}_{11} + bc'\mathbf{P}_{12} + \\ &\quad ca'\mathbf{P}_{20} + cb'\mathbf{P}_{21} + cc'\mathbf{P}_{22})_{t=2/5} = a'\mathbf{P}_{02} + b'\mathbf{P}_{12} + c'\mathbf{P}_{22} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{02x23}(2/5,\mathrm{u}) = (&da'\mathbf{P}_{20} + db'\mathbf{P}_{21} + dc'\mathbf{P}_{22} +\\ &ea'\mathbf{P}_{30} + eb'\mathbf{P}_{31} + ec'\mathbf{P}_{32} +\\ &fa'\mathbf{T}_{20} + fb'\mathbf{T}_{21} + fc'\mathbf{T}_{22} +\\ &ga'\mathbf{T}_{30} + gb'\mathbf{T}_{31} + gc'\mathbf{T}_{32})_{t=2/5} = a'\mathbf{P}_{20} + b'\mathbf{P}_{21} + c'\mathbf{P}_{22}\end{aligned} \qquad (9)$$

Luego ambas curvas son iguales en ambas superficies c.q.d.

La tangente según la dirección de las t crecientes ha de ser igual en ambas superficies:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,\mathbf{P}_{02x02}(2/5,u)}{\partial\,t} = (&a'\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{00} + b'\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{01} + c'\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{02} +\\ &a'\frac{db}{dt}\mathbf{P}_{10} + b'\frac{db}{dt}\mathbf{P}_{11} + c'\frac{db}{dt}\mathbf{P}_{12} +\\ &a'\frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{00} + b'\frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{00} + c'\frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{00})_{t=2/5} =\\ = (&a'(\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{00} + \frac{db}{dt}\mathbf{P}_{10} + \frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{20}) +\\ &b'(\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{01} + \frac{db}{dt}\mathbf{P}_{11} + \frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{21}) +\\ &c'(\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{02} + \frac{db}{dt}\mathbf{P}_{12} + \frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{22}))_{t=2/5}\end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,\mathbf{P}_{02x23}(2/5,u)}{\partial\,t} = (&a'\frac{dd}{dt}\mathbf{P}_{20} + b'\frac{dd}{dt}\mathbf{P}_{21} + c'\frac{dd}{dt}\mathbf{P}_{22} +\\ &a'\frac{de}{dt}\mathbf{P}_{30} + b'\frac{de}{dt}\mathbf{P}_{31} + c'\frac{de}{dt}\mathbf{P}_{32} +\\ &a'\frac{df}{dt}\mathbf{T}_{20} + b'\frac{df}{dt}\mathbf{T}_{21} + c'\frac{df}{dt}\mathbf{T}_{22} +\\ &a'\frac{dg}{dt}\mathbf{T}_{30} + b'\frac{dg}{dt}\mathbf{T}_{31} + c'\frac{dg}{dt}\mathbf{T}_{32})_{t=2/5} =\\ = &a'\mathbf{T}_{20} + b'\mathbf{T}_{21} + c'\mathbf{T}_{22}\end{aligned} \qquad (11)$$

pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{20} &= \frac{\partial\,\mathbf{P}_{02x02}(2/5,0)}{\partial\,t} = \frac{da}{dt}\mathbf{P}_{00} + \frac{db}{dt}\mathbf{P}_{10} + \frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{20} \\
\mathbf{T}_{21} &= \frac{\partial\,\mathbf{P}_{02x02}(2/5,1/5)}{\partial\,t} = \frac{da}{dt}\mathbf{P}_{01} + \frac{db}{dt}\mathbf{P}_{11} + \frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{21} \\
\mathbf{T}_{22} &= \frac{\partial\,\mathbf{P}_{02x02}(2/5,2/5)}{\partial\,t} = \frac{da}{dt}\mathbf{P}_{02} + \frac{db}{dt}\mathbf{P}_{12} + \frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{22}
\end{aligned} \qquad (12)$$

como se ve ambas ecuaciones de la tangente son iguales en ambas superficies c.q d.

Las tangentes en la dirección de las u crecientes han de ser iguales en ambas superficies:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\mathbf{P}_{02x02}(2/5,u)}{\partial\,u} = &\left(a\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{00} + a\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{01} + a\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{02} + \right. \\
&b\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{10} + b\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{11} + b\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{12} + \\
&\left. c\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{20} + c\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{21} + c\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{22}\right)_{t=2/5} = \\
&= \frac{da'}{du}\mathbf{P}_{20} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{21} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{22}
\end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\,\mathbf{P}_{02x23}(2/5,u)}{\partial\,u} = &\left(d\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{20} + d\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{21} + d\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{22} + \right. \\
&e\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + e\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + e\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32} + \\
&f\frac{da'}{du}\mathbf{T}_{20} + f\frac{db'}{du}\mathbf{T}_{21} + f\frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{22} \\
&\left. g\frac{da'}{du}\mathbf{T}_{30} + g\frac{db'}{du}\mathbf{T}_{31} + g\frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{32}\right)_{u=2/5} = \\
&= \frac{da'}{du}\mathbf{P}_{20} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{21} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{22}
\end{aligned} \qquad (14)$$

se comprueba que ambas expresiones son iguales en las dos superficies c.q.d.

Unión de S_{02x23} con S_{23x23}

Ambas tienen el borde común en u=2/5:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_{02x23}(\mathrm{t},2/5) = {} & (a'd\mathbf{P}_{20} + b'd\mathbf{P}_{21} + c'd\mathbf{P}_{22} + \\
& a'e\mathbf{P}_{30} + b'e\mathbf{P}_{31} + c'e\mathbf{P}_{32} + \\
& a'f\mathbf{T}_{20} + b'f\mathbf{T}_{21} + c'f\mathbf{T}_{22} + \\
& a'g\mathbf{T}_{30} + b'g\mathbf{T}_{31} + c'g\mathbf{T}_{32})_{u=2/5} = \\
= {} & d\mathbf{P}_{22} + e\mathbf{P}_{32} + f\mathbf{T}_{22} + g\mathbf{T}_{32}
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_{23x23}(\mathrm{t},2/5) = {} & (dd'\mathbf{P}_{22} + de'\mathbf{P}_{23} + df'\mathbf{U}_{22} + dg'\mathbf{U}_{23} + \\
& ed'\mathbf{P}_{32} + ee'\mathbf{P}_{33} + ef'\mathbf{U}_{22} + eg'\mathbf{U}_{23} + \\
& fd'\mathbf{T}_{22} + fe'\mathbf{T}_{23} + ff'\mathbf{E}_{22} + fg'\mathbf{E}_{23} + \\
& gd'\mathbf{T}_{32} + ge'\mathbf{T}_{33} + gf'\mathbf{E}_{32} + gg'\mathbf{E}_{33})_{u=2/5} = \\
= {} & d\mathbf{P}_{22} + e\mathbf{P}_{32} + f\mathbf{T}_{22} + g\mathbf{T}_{32}
\end{aligned} \tag{16}
$$

Luego ambas curvas son iguales en las dos superficies c.q.d.

La tangente según la dirección de las t crecientes ha de ser igual en ambas superficies como es evidente.

La tangente según la dirección de las u crecientes ha de ser igual en ambas superficies:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\,\mathbf{P}_{02x23}(t,2/5)}{\partial\,u} = {} & (d\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{20} + d\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{21} + d\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{22} + \\
& e\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + e\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + e\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32} + \\
& f\frac{da'}{du}\mathbf{T}_{20} + f\frac{db'}{du}\mathbf{T}_{21} + f\frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{22} \\
& g\frac{da'}{du}\mathbf{T}_{30} + g\frac{db'}{du}\mathbf{T}_{31} + g\frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{32})_{u=2/5} = \\
& ((\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{20} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{21} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{22})d + \\
& (\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32})e + \\
& (\frac{da'}{du}\mathbf{T}_{20} + \frac{db'}{du}\mathbf{T}_{21} + \frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{22})f + \\
& (\frac{da'}{du}\mathbf{T}_{30} + \frac{db'}{du}\mathbf{T}_{31} + \frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{32})g)_{u=2/5}
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_{23x23}(t,2/5)}{\partial u} = \left(d\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{22} + d\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{23} + d\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{22} + d\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{23} + \right.$$
$$e\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{32} + e\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{33} + e\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{32} + e\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{33} +$$
$$f\frac{dd'}{du}\mathbf{T}_{22} + f\frac{de'}{du}\mathbf{T}_{23} + f\frac{df'}{du}\mathbf{E}_{22} + f\frac{dg'}{du}\mathbf{E}_{23} +$$
$$\left. g\frac{dd'}{du}\mathbf{T}_{32} + g\frac{de'}{du}\mathbf{T}_{33} + g\frac{df'}{du}\mathbf{E}_{32} + g\frac{dg'}{du}\mathbf{E}_{33}\right)_{u=2/5} =$$
$$= d\mathbf{U}_{22} + e\mathbf{U}_{32} + f\mathbf{E}_{22} + g\mathbf{E}_{32} \qquad (18)$$

pero como:

$$\mathbf{U}_{22} = \frac{\partial \mathbf{P}_{02x23}(2/5,3/5)}{\partial u} = \left(d\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{20} + d\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{21} + d\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{22} + \right.$$
$$e\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + e\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + e\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32} +$$
$$f\frac{da'}{du}\mathbf{T}_{20} + f\frac{db'}{du}\mathbf{T}_{21} + f\frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{22} +$$
$$\left. g\frac{da'}{du}\mathbf{T}_{30} + g\frac{db'}{du}\mathbf{T}_{31} + g\frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{32}\right)_{t=2/5,u=3/5} =$$
$$= \frac{da'}{du}\mathbf{P}_{20} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{21} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{22} \qquad (19)$$

Análogamente, se tendría que:

$$\mathbf{U}_{32} = \frac{\partial \mathbf{P}_{02x23}(3/5,2/5)}{\partial u} = \frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32} \qquad (20)$$

$$\mathbf{E}_{22} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{02x23}(2/5,2/5)}{\partial t \partial u} = \frac{da'}{du}\mathbf{T}_{20} + \frac{db'}{du}\mathbf{T}_{21} + \frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{22} \qquad (21)$$

$$\mathbf{E}_{32} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{02x23}(3/5,2/5)}{\partial t \partial u} = \frac{da'}{du}\mathbf{T}_{30} + \frac{db'}{du}\mathbf{T}_{31} + \frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{32} \qquad (22)$$

Llevando estos valores a la fórmula anterior vemos que ambas ecuaciones de la tangente son iguales para las dos superficies c.q.d..

Unión de S_{02x23} con S_{02x35}

Ambas tienen el borde común en t=3/5

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{02x23}(3/5,\mathrm{u}) = {} & (a'd\mathbf{P}_{20} + b'd\mathbf{P}_{21} + c'd\mathbf{P}_{22} + \\ & a'e\mathbf{P}_{30} + b'e\mathbf{P}_{31} + c'e\mathbf{P}_{32} + \\ & a'f\mathbf{T}_{20} + b'f\mathbf{T}_{21} + c'f\mathbf{T}_{22} + \\ & a'g\mathbf{T}_{30} + b'g\mathbf{T}_{31} + c'g\mathbf{T}_{32})_{ut=3/5} = \\ = {} & a'\mathbf{P}_{30} + b'\mathbf{P}_{31} + c'\mathbf{P}_{32}\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{02x35}(3/5,\mathrm{u}) = {} & (a'h\mathbf{P}_{30} + b'h\mathbf{P}_{31} + c'h\mathbf{P}_{32} + \\ & a'j\mathbf{P}_{40} + b'j\mathbf{P}_{41} + c'j\mathbf{P}_{42} + \\ & a'k\mathbf{P}_{50} + b'k\mathbf{P}_{51} + c'k\mathbf{P}_{52})_{t=3/5} = \\ = {} & a'\mathbf{P}_{30} + b'\mathbf{P}_{31} + c'\mathbf{P}_{32}\end{aligned} \tag{24}$$

Luego ambas curvas son iguales en ambas superficies c.q. d.

La tangente según la dirección de las t crecientes ha de ser igual en ambas superficies como es evidente.

La tangente según la dirección de las u crecientes ha de ser igual en ambas superficies:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{P}_{02x23}(3/5,u)}{\partial u} &= (d\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{20} + d\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{21} + d\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{22} + \\
&\quad e\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + e\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + e\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32} + \\
&\quad f\frac{da'}{du}\mathbf{T}_{20} + f\frac{db'}{du}\mathbf{T}_{21} + f\frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{22} \\
&\quad g\frac{da'}{du}\mathbf{T}_{30} + g\frac{db'}{du}\mathbf{T}_{31} + g\frac{dc'}{du}\mathbf{T}_{32})_{u=3/5} = \\
&= \frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32}
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{P}_{02x35}(3/5,u)}{\partial u} &= (h\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + h\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + h\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32} + \\
&\quad j\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{40} + j\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{41} + j\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{42} + \\
&\quad k\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{50} + k\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{51} + k\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{52}) = \\
&= \frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32}
\end{aligned} \tag{26}$$

Como vemos son iguales las expresiones de la tangente en las dos superficies c.q.d.

Unión de S_{02x35} con S_{23x35}

Ambas tienen el borde común en u=2/5:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,2/5)_{02x35} &= (ha'\mathbf{P}_{30} + hb'\mathbf{P}_{31} + hc'\mathbf{P}_{32} + \\
&\quad ja'\mathbf{P}_{40} + jb'\mathbf{P}_{41} + jc'\mathbf{P}_{42} + \\
&\quad ka'\mathbf{P}_{50} + kb'\mathbf{P}_{51} + kc'\mathbf{P}_{52})_{u=2/5} = h\mathbf{P}_{32} + h\mathbf{P}_{42} + h\mathbf{P}_{52}
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t,2/5)_{23x35} &= (hd'\mathbf{P}_{32} + he'\mathbf{P}_{33} + hf'\mathbf{U}_{32} + hg'\mathbf{U}_{33} + \\ &\quad jd'\mathbf{P}_{42} + je'\mathbf{P}_{43} + jf'\mathbf{U}_{42} + jg'\mathbf{U}_{43} + \\ &\quad kd'\mathbf{P}_{52} + ke'\mathbf{P}_{53} + kf'\mathbf{U}_{52} + kg'\mathbf{U}_{53})_{u=2/5} = \\ &= h\mathbf{P}_{32} + h\mathbf{P}_{42} + h\mathbf{P}_{52}\end{aligned} \tag{28}$$

Luego ambas curvas son iguales en las dos superficies c.q.d.

La tangente según la dirección de las t crecientes ha de ser igual en ambas superficies como es evidente.

La tangente según la dirección de las u crecientes ha de ser igual en ambas superficies:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{02x35}(t,2/5)}{\partial u} &= (h\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + h\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + h\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32} + \\ &\quad j\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{40} + j\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{41} + j\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{42} + \\ &\quad k\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{50} + k\frac{db'}{du}\mathbf{P}_{51} + k\frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{52})_{u=2/5} = \\ &= (h(\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32}) + \\ &\quad j(\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{40} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{41} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{42}) + \\ &\quad k(\frac{da'}{du}\mathbf{P}_{50} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{51} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{52}))_{u=2/5}\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{23x35}(t,2/5)}{\partial u} &= (h\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{32} + h\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{33} + h\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{32} + h\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{33} + \\ &\quad j\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{42} + j\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{43} + j\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{42} + j\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{43} + \\ &\quad k\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{52} + k\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{53} + k\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{52} + k\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{53} = \\ &= h\mathbf{U}_{32} + j\mathbf{U}_{42} + k\mathbf{U}_{52}\end{aligned} \tag{30}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{32} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{02x35}(3/5,2/5)}{\partial u} = \frac{da'}{du}\mathbf{P}_{30} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{31} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{32} \\
\mathbf{U}_{42} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{02x35}(4/5,2/5)}{\partial u} = \frac{da'}{du}\mathbf{P}_{40} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{41} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{42} \qquad (31) \\
\mathbf{U}_{52} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{02x35}(1,2/5)}{\partial u} = \frac{da'}{du}\mathbf{P}_{50} + \frac{db'}{du}\mathbf{P}_{51} + \frac{dc'}{du}\mathbf{P}_{52}
\end{aligned}$$

Llevando estos valores vemos que son iguales las expresiones de la tangente en ambas superficies.

Unión de S_{23x02} con S_{35x02}

Ambas tienen el borde común en u=3/5:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,3/5)_{23x02} = (&ad'\mathbf{P}_{02} + ae'\mathbf{P}_{03} + af'\mathbf{U}_{02} + ag'\mathbf{U}_{03} + \\
&bd'\mathbf{P}_{12} + be'\mathbf{P}_{13} + bf'\mathbf{U}_{12} + bg'\mathbf{U}_{13} + \\
&cd'\mathbf{P}_{22} + ce'\mathbf{P}_{23} + cf'\mathbf{U}_{22} + cg'\mathbf{U}_{23})_{u=3/5} = \\
= &a\mathbf{P}_{03} + b\mathbf{P}_{13} + c\mathbf{P}_{23} \qquad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,3/5)_{35x02} = (&ah'\mathbf{P}_{03} + aj'\mathbf{P}_{04} + ak'\mathbf{P}_{05} + \\
&bh'\mathbf{P}_{13} + bj'\mathbf{P}_{14} + bk'\mathbf{P}_{15} + \\
&ch'\mathbf{P}_{23} + cj'\mathbf{P}_{24} + ck'\mathbf{P}_{25})_{u=3/5} = \\
= &a\mathbf{P}_{03} + b\mathbf{P}_{13} + c\mathbf{P}_{23} \qquad (33)
\end{aligned}$$

Luego ambas curvas son iguales en las dos superficies c.q.d.

La tangente según la dirección de las t crecientes ha de ser igual en ambas superficies como es evidente

La tangente según la dirección de las u crecientes ha de ser igual en ambas superficies:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{P}_{23x02}(t,3/5)}{\partial u} = (&a\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{02} + a\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{03} + a\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{02} + a\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{03} + \\
&b\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{12} + b\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{13} + b\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{12} + b\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{13} + \\
&c\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{22} + c\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{23} + c\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{22} + c\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{23})_{u=3/5} = \\
= &a\mathbf{U}_{03} + b\mathbf{U}_{13} + c\mathbf{U}_{23} \qquad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{35x02}(t,3/5)}{\partial u} = & (a\frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{03} + a\frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{04} + a\frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{05} + \\ & b\frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{13} + b\frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{14} + b\frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{15} + \\ & c\frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{23} + c\frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{24} + c\frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{25})_{u=3/5} = \\ & a(\frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{03} + \frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{04} + \frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{05}) + \\ & b(\frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{13} + \frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{14} + \frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{15}) + \\ & c(\frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{23} + \frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{24} + \frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{25}))_{u=3/5}\end{aligned} \tag{35}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{03} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x02}(0,3/5)}{\partial u} = \frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{03} + \frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{04} + \frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{05} \\ \mathbf{U}_{13} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x02}(1/5,3/5)}{\partial u} = \frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{13} + \frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{14} + \frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{15} \\ \mathbf{U}_{23} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x02}(2/5,3/5)}{\partial u} = \frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{23} + \frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{24} + \frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{25}\end{aligned} \tag{36}$$

Llevando estos valores vemos que son iguales las expresiones de la tangente en ambas superficies.

Ambas tienen el borde común en u=3/5:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t,3/5)_{23x23} = & (dd'\mathbf{P}_{22} + de'\mathbf{P}_{23} + df'\mathbf{U}_{22} + dg'\mathbf{U}_{23} + \\ & ed'\mathbf{P}_{32} + ee'\mathbf{P}_{33} + ef'\mathbf{U}_{32} + eg'\mathbf{U}_{33} + \\ & fd'\mathbf{T}_{22} + fe'\mathbf{T}_{23} + ff'\mathbf{E}_{22} + fg'\mathbf{E}_{23} + \\ & gd'\mathbf{T}_{32} + ge'\mathbf{T}_{33} + gf'\mathbf{E}_{32} + gg'\mathbf{E}_{33} +)_{u=3/5} = \\ = & d\mathbf{P}_{23} + e\mathbf{P}_{33} + f\mathbf{T}_{23} + g\mathbf{T}_{33}\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t,3/5)_{35x02} = & (dh'\mathbf{P}_{23} + dj'\mathbf{P}_{24} + dk'\mathbf{P}_{25} + \\ & eh'\mathbf{P}_{33} + ej'\mathbf{P}_{34} + ek'\mathbf{P}_{35} + \\ & fh'\mathbf{T}_{23} + fj'\mathbf{T}_{24} + fk'\mathbf{T}_{25} + \\ & gh'\mathbf{T}_{33} + gj'\mathbf{T}_{34} + gk'\mathbf{T}_{35})_{u=3/5} = \\ = & d\mathbf{P}_{23} + e\mathbf{P}_{33} + f\mathbf{T}_{23} + g\mathbf{T}_{33}\end{aligned} \tag{38}$$

Luego ambas curvas son iguales en las dos superficiesc.q.d.

La tangente según la dirección de las t crecientes ha de ser igual en ambas superficies como es evidente.

La tangente según la dirección de las u crecientes ha de ser igual en ambas superficies:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{23x23}(t,3/5)}{\partial u} &= (d\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{22}+d\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{23}+d\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{22}+d\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{23}+\\ &\quad e\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{32}+e\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{33}+e\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{32}+e\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{33}+\\ &\quad f\frac{dd'}{du}\mathbf{T}_{22}+f\frac{de'}{du}\mathbf{T}_{23}+f\frac{df'}{du}\mathbf{E}_{22}+f\frac{dg'}{du}\mathbf{E}_{23}+\\ &\quad g\frac{dd'}{du}\mathbf{T}_{32}+g\frac{de'}{du}\mathbf{T}_{33}+g\frac{df'}{du}\mathbf{E}_{32}+g\frac{dg'}{du}\mathbf{E}_{33})_{u=3/5}=\\ &= d\mathbf{U}_{23}+e\mathbf{U}_{33}+f\mathbf{E}_{23}+g\mathbf{E}_{33}\end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{35x23}(t,3/5)}{\partial u} &= (d\frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{23}+d\frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{24}+d\frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{25}+\\ &\quad e\frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{33}+e\frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{34}+e\frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{35}+\\ &\quad f\frac{dh'}{du}\mathbf{T}_{23}+f\frac{dj'}{du}\mathbf{T}_{24}+f\frac{dk'}{du}\mathbf{T}_{25}+\\ &\quad g\frac{dh'}{du}\mathbf{T}_{33}+g\frac{dj'}{du}\mathbf{T}_{34}+g\frac{dk'}{du}\mathbf{T}_{35})_{u=3/5}\end{aligned} \quad (40)$$

Pero como:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{23} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x23}(2/5,3/5)}{\partial u} = \frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{23}+\frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{24}+\frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{25}\\ \mathbf{U}_{33} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x23}(3/5,3/5)}{\partial u} = \frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{33}+\frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{34}+\frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{35}\\ \mathbf{E}_{23} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{35x23}(2/5,3/5)}{\partial t\partial u} = \frac{dh'}{du}\mathbf{T}_{23}+\frac{dj'}{du}\mathbf{T}_{24}+\frac{dk'}{du}\mathbf{T}_{25}\\ \mathbf{E}_{33} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{35x23}(3/5,3/5)}{\partial t\partial u} = \frac{dh'}{du}\mathbf{T}_{33}+\frac{dj'}{du}\mathbf{T}_{34}+\frac{dk'}{du}\mathbf{T}_{35}\end{aligned} \quad (41)$$

Llevando estos valores vemos son iguales ambas expresiones para las dos superficies

Unión de S_{23x35} con S_{35x35}

Ambas tienen el borde común en u=3/5:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t,3/5)_{23x35} = (&hd'\mathbf{P}_{32} + he'\mathbf{P}_{33} + hf'\mathbf{U}_{32} + hg'\mathbf{U}_{33} + \\ &jd'\mathbf{P}_{42} + je'\mathbf{P}_{43} + jf'\mathbf{U}_{42} + jg'\mathbf{U}_{43} + \\ &kd'\mathbf{P}_{52} + ke'\mathbf{P}_{53} + kf'\mathbf{U}_{52} + kg'\mathbf{U}_{53})_{u=3/5} = h\mathbf{P}_{33} + j\mathbf{P}_{43} + k\mathbf{P}_{53}\end{aligned} \qquad (42)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t,3/5)_{35x35} = (&hh'\mathbf{P}_{33} + hj'\mathbf{P}_{34} + hk'\mathbf{P}_{35} + \\ &jh'\mathbf{P}_{43} + jj'\mathbf{P}_{44} + jk'\mathbf{P}_{45} + \\ &kh'\mathbf{P}_{53} + kj'\mathbf{P}_{54} + kk'\mathbf{P}_{55})_{u=3/5} = h\mathbf{P}_{33} + j\mathbf{P}_{43} + k\mathbf{P}_{53}\end{aligned} \qquad (43)$$

La tangente según la dirección de las t crecientes ha de ser igual en ambas superficies como es evidente.

La tangente según la dirección de las u crecientes ha de ser igual en ambas superficies:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{23x35}(t,3/5)}{\partial u} = (&h\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{32} + h\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{33} + h\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{32} + h\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{33} + \\ &j\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{42} + j\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{43} + j\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{42} + j\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{43} + \\ &k\frac{dd'}{du}\mathbf{P}_{52} + k\frac{de'}{du}\mathbf{P}_{53} + k\frac{df'}{du}\mathbf{U}_{52} + k\frac{dg'}{du}\mathbf{U}_{53})_{u=3/5} = \\ = &h\mathbf{U}_{33} + j\mathbf{U}_{43} + k\mathbf{U}_{53}\end{aligned} \qquad (44)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{35x35}(t,3/5)}{\partial u} = (&h\frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{33} + h\frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{34} + h\frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{35} + \\ &j\frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{43} + j\frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{44} + j\frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{45} + \\ &k\frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{53} + k\frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{54} + k\frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{55})_{u=3/5}\end{aligned} \qquad (45)$$

Pero como:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{33} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x35}(3/5,3/5)}{\partial u} = \frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{33} + \frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{34} + \frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{35} \\ \mathbf{U}_{43} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x23}(4/5,3/5)}{\partial u} = \frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{43} + \frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{44} + \frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{45} \\ \mathbf{U}_{53} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x23}(1,3/5)}{\partial u} = \frac{dh'}{du}\mathbf{P}_{53} + \frac{dj'}{du}\mathbf{P}_{54} + \frac{dk'}{du}\mathbf{P}_{55}\end{aligned} \qquad (46)$$

Llevando estos valores vemos son iguales las expresiones para las dos superficies.

Unión de S_{35x02} con S_{35x23}

Ambas tienen el borde común en t=2/5

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(2/5,u)_{35x02} = (&ah'\mathbf{P}_{03} + aj'\mathbf{P}_{04} + ak'\mathbf{P}_{05} + \\ &bh'\mathbf{P}_{13} + bj'\mathbf{P}_{14} + bk'\mathbf{P}_{15} + \\ &ch'\mathbf{P}_{23} + cj'\mathbf{P}_{24} + ck'\mathbf{P}_{25})_{t=2/5} = h'\mathbf{P}_{23} + j'\mathbf{P}_{24} + k'\mathbf{P}_{25}\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(2/5,u)_{35x23} = (&dh'\mathbf{P}_{23} + dj'\mathbf{P}_{24} + dk'\mathbf{P}_{25} + \\ &eh'\mathbf{P}_{33} + ej'\mathbf{P}_{34} + ek'\mathbf{P}_{35} + \\ &fh'\mathbf{T}_{23} + fj'\mathbf{T}_{24} + fk'\mathbf{T}_{25} + \\ &gh'\mathbf{T}_{33} + gj'\mathbf{T}_{34} + gk'\mathbf{T}_{35})_{u=2/5} = h'\mathbf{P}_{23} + j'\mathbf{P}_{24} + k'\mathbf{P}_{25}\end{aligned} \tag{48}$$

Luego ambas curvas son iguales en las dos superficies c.q.d.

La tangente según la dirección de las u crecientes ha de ser igual en ambas superficies como es evidente.

La tangente según la dilección de las t crecientes ha de ser igual en ambas superficies:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{35x02}(2/5,u)}{\partial t} = (&h'\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{03} + j'\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{04} + k'\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{05} + \\ &h'\frac{db}{dt}\mathbf{P}_{13} + j'\frac{db}{dt}\mathbf{P}_{14} + k'\frac{db}{dt}\mathbf{P}_{15} + \\ &h'\frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{23} + j'\frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{24} + k'\frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{25})_{t=2/5}\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{35x23}(2/5,u)}{\partial t} = (&h'\frac{dd}{dt}\mathbf{P}_{23} + j'\frac{dd}{dt}\mathbf{P}_{24} + k'\frac{dd}{dt}\mathbf{P}_{25} + \\ &h'\frac{de}{dt}\mathbf{P}_{33} + j'\frac{de}{dt}\mathbf{P}_{34} + k'\frac{de}{dt}\mathbf{P}_{35} + \\ &h'\frac{df}{dt}\mathbf{T}_{23} + j'\frac{df}{dt}\mathbf{T}_{24} + k'\frac{df}{dt}\mathbf{T}_{25} + \\ &h'\frac{dg}{dt}\mathbf{T}_{33} + j'\frac{dg}{dt}\mathbf{T}_{34} + k'\frac{dg}{dt}\mathbf{T}_{35})_{t=2/5} = \\ = &h'\mathbf{T}_{23} + j'\mathbf{T}_{24} + k'\mathbf{T}_{25}\end{aligned} \tag{50}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{23} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x02}(2/5,3/5)}{\partial t} = \left(\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{03} + \frac{db}{dt}\mathbf{P}_{13} + \frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{23}\right)_{t=2/5} \\
\mathbf{T}_{24} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x02}(2/5,4/5)}{\partial t} = \left(\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{04} + \frac{db}{dt}\mathbf{P}_{14} + \frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{24}\right)_{t=2/5} \\
\mathbf{T}_{25} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x02}(2/5,1)}{\partial t} = \left(\frac{da}{dt}\mathbf{P}_{05} + \frac{db}{dt}\mathbf{P}_{15} + \frac{dc}{dt}\mathbf{P}_{25}\right)_{t=2/5}
\end{aligned} \tag{51}$$

Llevando estos valores vemos son iguales las expresiones de la tangente en ambas superficies.

<u>Unión de S_{35x23} con S_{35x35}</u>

Ambas tienen el borde común en t=3/5

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(3/5,u)_{35x23} = (&dh'\mathbf{P}_{23} + dj'\mathbf{P}_{24} + dk'\mathbf{P}_{25} + \\
&eh'\mathbf{P}_{33} + ej'\mathbf{P}_{34} + ek'\mathbf{P}_{35} + \\
&fh'\mathbf{T}_{23} + fj'\mathbf{T}_{24} + fk'\mathbf{T}_{25} + \\
&gh'\mathbf{T}_{33} + gj'\mathbf{T}_{34} + gk'\mathbf{T}_{35})_{t=3/5} = h'\mathbf{P}_{33} + j'\mathbf{P}_{34} + k'\mathbf{P}_{35}
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(3/5,u)_{35x35} = (&hh'\mathbf{P}_{33} + hj'\mathbf{P}_{34} + hk'\mathbf{P}_{35} + \\
&jh'\mathbf{P}_{43} + jj'\mathbf{P}_{44} + jk'\mathbf{P}_{45} + \\
&kh'\mathbf{P}_{53} + kj'\mathbf{P}_{54} + kk'\mathbf{P}_{55})_{t=3/5} = h'\mathbf{P}_{33} + j'\mathbf{P}_{34} + k'\mathbf{P}_{35}
\end{aligned} \tag{53}$$

Luego ambas curvas son iguales en las dos superficies c.q.d.

La tangente según la dirección de las u crecientes ha de ser igual en ambas superficies como es evidente:

La tangente según la dirección de las t crecientes ha de ser igual en ambas superficies:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{P}_{35x23}(3/5,u)}{\partial t} = (&h'\frac{dd}{dt}\mathbf{P}_{23} + j'\frac{dd}{dt}\mathbf{P}_{24} + k'\frac{dd}{dt}\mathbf{P}_{25} + \\
&h'\frac{de}{dt}\mathbf{P}_{33} + j'\frac{de}{dt}\mathbf{P}_{34} + k'\frac{de}{dt}\mathbf{P}_{35} + \\
&h'\frac{df}{dt}\mathbf{T}_{23} + j'\frac{df}{dt}\mathbf{T}_{24} + k'\frac{df}{dt}\mathbf{T}_{25} + \\
&h'\frac{dg}{dt}\mathbf{T}_{33} + j'\frac{dg}{dt}\mathbf{T}_{34} + k'\frac{dg}{dt}\mathbf{T}_{35})_{t=3/5} = h'\mathbf{T}_{33} + j'\mathbf{T}_{34} + k'\mathbf{T}_{35}
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{35x23}(3/5,u)}{\partial t} = (&h'\frac{dh}{dt}\mathbf{P}_{33} + j'\frac{dh}{dt}\mathbf{P}_{34} + k'\frac{dh}{dt}\mathbf{P}_{35} + \\ &h'\frac{dj}{dt}\mathbf{P}_{43} + j'\frac{dj}{dt}\mathbf{P}_{44} + k'\frac{dj}{dt}\mathbf{P}_{45} + \\ &h'\frac{dk}{dt}\mathbf{P}_{53} + j'\frac{dk}{dt}\mathbf{P}_{54} + k'\frac{dk}{dt}\mathbf{P}_{55})_{t=3/5}\end{aligned} \quad (55)$$

Pero como:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{33} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x35}(3/5,3/5)}{\partial u} = (\frac{dh}{dt}\mathbf{P}_{33} + \frac{dj}{dt}\mathbf{P}_{43} + \frac{dk}{dt}\mathbf{P}_{53})_{t=3/5} \\ \mathbf{T}_{34} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x35}(3/5,4/5)}{\partial u} = (\frac{dh}{dt}\mathbf{P}_{34} + \frac{dj}{dt}\mathbf{P}_{44} + \frac{dk}{dt}\mathbf{P}_{54})_{t=3/5} \\ \mathbf{T}_{35} &= \frac{\partial \mathbf{P}_{35x35}(3/5,1)}{\partial u} = (\frac{dh}{dt}\mathbf{P}_{35} + \frac{dj}{dt}\mathbf{P}_{45} + \frac{dk}{dt}\mathbf{P}_{55})_{t=3/5}\end{aligned} \quad (56)$$

Llevando estos valores vemos son iguales las expresiones de la tangente en ambas superficies.

3.3.2.3.3.-CONCLUSIÓN

Como las uniones entre todos los parches que componen la superficie total son lisas podemos concluir que dicha superficie, así diseñada, es lisa.

3.3.3.-CONSTRUCCIÓN DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 9x6 PUNTOS DADOS USANDO POLINOMIOS DE GRADO 3 0 MENOR. PROBLEMA MIXTO

3.3.3.1.-CONSTRUCCIÓN DE LAS CURVAS GENERADORAS

Supongamos la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$, $\mathbf{P}_7$ y $\mathbf{P}_8$ con tangentes $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_5$ y $\mathbf{T}_6$ en los puntos $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_5$ y $\mathbf{P}_6$ (figura 3.3.3.1.-1)

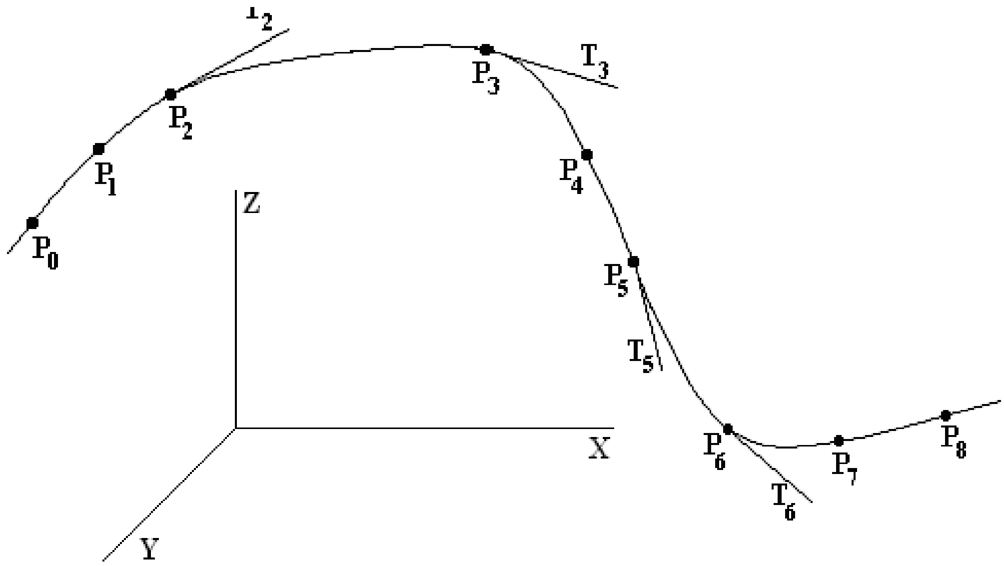


Figura 3.3.3.1.-1. Curva polinomial que pasa por nueve puntos dados con tangentes en algunos de ellos tambien dadas con grado menor o igual a tres.

Dicha curva se puede descomponer en cinco tramos: C 0-2, C 2-3 , C 3-5, C 5-6 y C 6-8.

El tramo C 0-2 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P}_{0,2}(t) = F_0(t)\mathbf{P}_0 + F_1(t)\mathbf{P}_1 + F_2(t)\mathbf{P}_2 \qquad (1)$$

con las restricciones:

t	$F_0(t)$	$F_1(t)$	$F_2(t)$
0	1	0	0
1/8	0	1	0
2/8	0	0	1

Tabla (2)

Las soluciones para las $f_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \frac{(t-1/8)(t-2/8)}{(0-1/8)(0-2/8)} = 32t^2 - 12t + 1 \\ F_1(t) &= \frac{(t-0)(t-2/8)}{(1/8-0)(1/8-2/8)} = -64t^2 + 16t \\ F_2(t) &= \frac{(t-0)(t-1/8)}{(2/8-0)(2/8-1/8)} = 32t^2 - 4t \end{aligned} \qquad (3)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (1), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P_{0,2}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Análogamente el tramo de curva C 2-3 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$.

La ecuación de este tramo sería:

$$\mathbf{P_{2,3}}(t) = F_2(t)\mathbf{P}_2 + F_3(t)\mathbf{P}_3 + G_2(t)\mathbf{T}_2 + G_3(t)\mathbf{T}_3 \qquad (5)$$

con las restricciones :

t	$F_2(t)$	$F'_2(t)$	$F_3(t)$	$F'_3(t)$	$G_2(t)$	$G'_2(t)$	$G_3(t)$	$G'_3(t)$
2/8	1	0	0	0	0	1	0	0
3/8	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (6)

Las soluciones de las $F_i(t)$ que cumplen estas condiciones serían:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= 1024t^3 - 960t^2 + 288t - 27 \\ F_3(t) &= -1024t^3 + 960t^2 - 288t + 28 \\ G_2(t) &= 64t^3 - 64t^2 + 21t - 9/4 \\ G_3(t) &= 64t^3 - 56t^2 + 16t - 3/2 \end{aligned} \qquad (7)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (5), operando y poniendo el resultado en forma matricial, se tendría:

$$\mathbf{P}_{2,3}(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1024 & -960 & 288 & -27\\ -1024 & 960 & -288 & 28\\ 64 & -64 & 21 & -9/4\\ 64 & -56 & 16 & -3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^3\\ t^2\\ t\\ 1\end{pmatrix} \quad (8)$$

Operando, igualmente, el tramo C 3-5 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ y $\mathbf{P}_5$ cuya ecuación se puede expresar corno:

$$\mathbf{P}_{3,5}(t)=F_3(t)\mathbf{P}_3+F_4(t)\mathbf{P}_4+F_5(t)\mathbf{P}_5 \quad (9)$$

con las restricciones:

t	$F_3(t)$	$F_4(t)$	$F_5(t)$
3/8	1	0	0
4/8	0	1	0
5/8	0	0	1

Tabla (10)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned}F_3(t)&=\frac{(t-4/8)(t-5/8)}{(3/8-4/8)(3/8-5/8)}=32t^2-36t+10\\ F_4(t)&=\frac{(t-3/8)(t-5/8)}{(4/8-3/8)(4/8-5/8)}=-64t^2+64t-15\\ F_5(t)&=\frac{(t-3/8)(t-4/8)}{(5/8-3/8)(5/8-4/8)}=32t^2-28t+6\end{aligned} \quad (11)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (9), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P}_{3,5}(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32 & -36 & 10\\ -64 & 64 & -15\\ 32 & -28 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^2\\ t\\ 1\end{pmatrix} \quad (12)$$

Análogamente el tramo de curva C 5-6 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_5$ y $\mathbf{P}_6$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_5$ y $\mathbf{T}_6$.

La ecuación de este tramo sería:

$$\mathbf{P_{5,6}}(t) = F_5(t)\mathbf{P}_5 + F_6(t)\mathbf{P}_6 + G_5(t)\mathbf{T}_5 + G_6(t)\mathbf{T}_6 \qquad (13)$$

con las restricciones :

t	$F_5(t)$	$F'_5(t)$	$F_6(t)$	$F'_6(t)$	$G_5(t)$	$G'_5(t)$	$G_6(t)$	$G'_6(t)$
5/8	1	0	0	0	0	1	0	0
6/8	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (14)

Las soluciones de las $F_i(t)$ que cumplen estas condiciones serían:

$$\begin{aligned} F_5(t) &= 1024t^3 - 2112t^2 + 1440t - 324 \\ F_6(t) &= -1024t^3 + 2112t^2 - 1440t + 325 \\ G_5(t) &= 64t^3 - 136t^2 + 96t - 45/2 \\ G_6(t) &= 64t^3 - 128t^2 + 85t - 75/4 \end{aligned} \qquad (15)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (13), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P_{5,6}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_5 & \mathbf{P}_6 & \mathbf{T}_5 & \mathbf{T}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Operando igualmente, el tramo C 6-8 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_6$, $\mathbf{P}_7$ y $\mathbf{P}_8$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P_{6,8}}(t) = F_6(t)\mathbf{P}_6 + F_7(t)\mathbf{P}_7 + F_8(t)\mathbf{P}_8 \qquad (17)$$

con las restricciones:

t	$F_6(t)$	$F_7(t)$	$F_8(t)$

6/8	1	0	0
7/8	0	1	0
1	0	0	1

Tabla (18)

Las soluciones para las $f_i(t)$ serían:

$$
\begin{aligned}
F_6(t) &= \frac{(t-7/8)(t-1)}{(6/8-7/8)(6/8-1)} = 32t^2 - 60t + 28 \\
F_7(t) &= \frac{(t-6/8)(t-1)}{(7/8-6/8)(7/8-1)} = -64t^2 + 11t - 48 \qquad (19) \\
F_8(t) &= \frac{(t-6/8)(t-7/8)}{(1-6/8)(1-7/8)} = 32t^2 - 52t + 21
\end{aligned}
$$

Entrando con estos valores en la fórmula (17), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$
\mathbf{P}_{6,8}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_6 & \mathbf{P}_7 & \mathbf{P}_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (20)
$$

Supongamos la curva que pasa por $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ y $\mathbf{P}_5$ con tangentes $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$ en los puntos $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ (figura 3.3.3.1.-2)

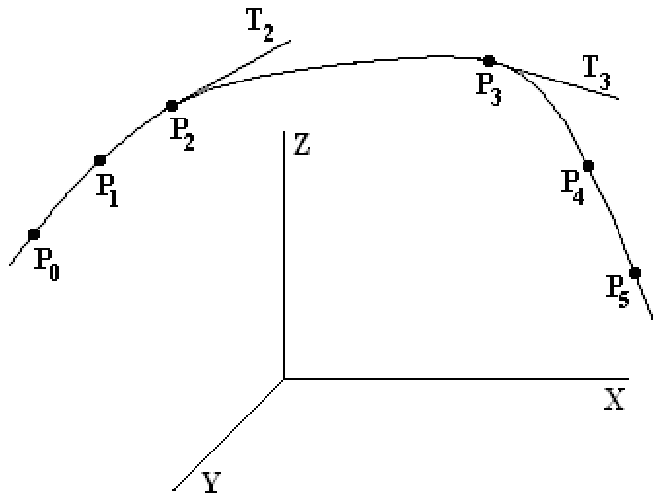


Figura 3.3.3.1.-2. Curva polinomial que pasa por seis puntos dados con tangentes, en algunos de ellos, tambien dadas con grado menor o igual a tres

Dicha curva se puede descomponer en cinco tramos : C 0-2, C 2-3 y C 3-5.

El tramo C 0-2 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{0,2}}(t) = F_0(t)\mathbf{P}_0 + F_1(t)\mathbf{P}_1 + F_2(t)\mathbf{P}_2 \qquad (21)$$

con las restricciones:

t	$F_0(t)$	$F_1(t)$	$F_2(t)$
0	1	0	0
1/5	0	1	0
2/5	0	0	1

Tabla (22)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \frac{(t-1/5)(t-2/5)}{(0-1/5)(0-2/5)} = 25/2t^2 - 15/2t + 1 \\ F_1(t) &= \frac{(t-0)(t-2/5)}{(1/5-0)(1/5-2/5)} = -25t^2 + 10t \\ F_2(t) &= \frac{(t-0)(t-1/5)}{(2/5-0)(2/5-1/5)} = 25/2t^2 - 5/2t \end{aligned} \qquad (23)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (21), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{0,2}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (24)$$

Análogamente el tramo de curva C 2-3 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$.

La ecuación de este tramo sería:

$$\mathbf{P_{2,3}}(t) = F_2(t)\mathbf{P}_2 + F_3(t)\mathbf{P}_3 + G_2(t)\mathbf{T}_2 + G_3(t)\mathbf{T}_3 \qquad (25)$$

con las restricciones:

t	$F_2(t)$	$F'_2(t)$	$F_3(t)$	$F'_3(t)$	$G_2(t)$	$G'_2(t)$	$G_3(t)$	$G'_3(t)$
2/5	1	0	0	0	0	1	0	0
3/5	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (26)

Las soluciones de las $F_i(t)$ que cumplen estas condiciones serían:

$$\begin{aligned}
F_2(t) &= 250t^3 - 375t^2 + 180t + 28 \\
F_3(t) &= -250t^3 + 375t^2 - 180t + 28 \\
G_2(t) &= 25t^3 - 40t^2 + 21t - 18/5 \\
G_3(t) &= 25t^3 - 35t^2 + 16t - 12/5
\end{aligned} \qquad (27)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (25), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P_{2,3}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & 18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

Operando igualmente, el tramo C 3-5 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ y $\mathbf{P}_5$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P_{3,5}}(t) = F_3(t)\mathbf{P}_3 + F_4(t)\mathbf{P}_4 + F_5(t)\mathbf{P}_5 \qquad (29)$$

con las restricciones:

t	$F_3(t)$	$F_4(t)$	$F_5(t)$
3/5	1	0	0
4/5	0	1	0
1	0	0	1

Tabla (30)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_3(t) &= \frac{(t-4/5)(t-12/5)}{(3/5-4/5)(3/5-1)} = 25/2t^2 - 45/2t + 10 \\ F_4(t) &= \frac{(t-3/5)(t-1)}{(4/5-3/5)(4/5-1)} = -25t^2 + 40t - 15 \\ F_5(t) &= \frac{(t-3/5)(t-4/5)}{(1-3/5)(1-4/5)} = 25/2t^2 - 35/2t + 6 \end{aligned} \qquad (31)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (29), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P_{3,5}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (32)$$

<u>**3.3.3.2.-CONSTRUCCIÓN DE LOS PARCHES QUE COMPONEN LA SUPERFICIE**</u>

Si efectuamos el producto cartesiano de la curva total C 0-8 por la curva total C 0-5 obtenemos una superficie formada por una serie de cuadros (figura 3.3.3.2.-1) cuyas ecuaciones serían las siguientes:

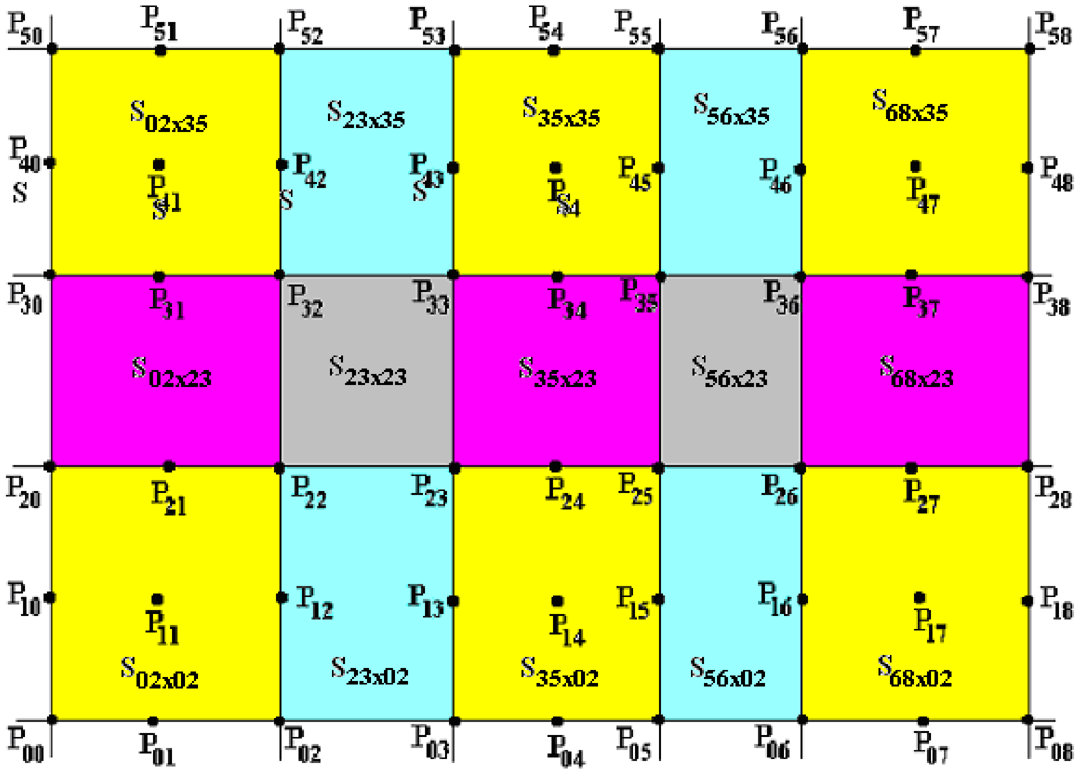


Figura 3.3.3.2.-1. Superficie polinomial que pasa por una red de 9x6 puntos dados con grado menor o igual que tres

Superficie $_{S02X02}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x02} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{00}} \\ \mathbf{P_{01}} \\ \mathbf{P_{02}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{00}} & \mathbf{P_{10}} & \mathbf{P_{20}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(0,0) = k_{00} & \mathbf{P}(1/5,0) = k_{01} & \mathbf{P}(2/5,0) = k_{02} \\ \mathbf{P}(0,1/8) = k_{01} & \mathbf{P}(1/5,1/8) = k_{11} & \mathbf{P}(2/5,2/8) = k_{12} \\ \mathbf{P}(0,2/8) = k_{10} & \mathbf{P}(1/5,2/8) = k_{21} & \mathbf{P}(2/5,2/8) = k_{22} \end{array} \qquad (2)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x02} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_0 a_0 \mathbf{P}_{00} + b_1 a_0 \mathbf{P}_{01} + b_2 a_0 \mathbf{P}_{02} + \\ &\quad b_0 a_1 \mathbf{P}_{10} + b_1 a_1 \mathbf{P}_{11} + b_2 a_1 \mathbf{P}_{12} + \qquad (3) \\ &\quad b_0 a_2 \mathbf{P}_{20} + b_1 a_2 \mathbf{P}_{21} + b_2 a_2 \mathbf{P}_{22} \end{aligned}$$

Siendo:

$$\begin{aligned} b_0 &= 32u^2 - 12u + 1 \\ b_1 &= -64u^2 + 16u \\ b_2 &= 32u^2 - 4u \\ a_0 &= 25/2t^2 - 15/2t + 1 \qquad (4) \\ a_1 &= -25t^2 + 10t \\ a_2 &= 25/2t^2 - 5/2t \end{aligned}$$

Superficie S_{02X23}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x02} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{20}} \\ \mathbf{P_{21}} \\ \mathbf{P_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{20}} & \mathbf{P_{30}} & \mathbf{T_{20}} & \mathbf{T_{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(2/5,0) = k_{00} & \mathbf{P}(3/5,0) = k_{01} \\ \mathbf{P}(2/5,1/8) = k_{10} & \mathbf{P}(3/5,1/8) = k_{11} \\ \mathbf{P}(2/5,2/8) = k_{20} & \mathbf{P}(3/5,2/8) = k_{21} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,0)}{\partial t} = k_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,0)}{\partial t} = k_{03} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,1/8)}{\partial t} = k_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,1/8)}{\partial t} = k_{13} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,2/8)}{\partial t} = k_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,2/8)}{\partial t} = k_{23} \end{array} \qquad (6)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x23} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{30} & \mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{30} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{31} \\ \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_0 a_9 \mathbf{P}_{20} + b_1 a_9 \mathbf{P}_{21} + b_2 a_9 \mathbf{P}_{22} + \\ &\quad b_0 a_{10} \mathbf{P}_{30} + b_1 a_{10} \mathbf{P}_{31} + b_2 a_{10} \mathbf{P}_{32} + \\ &\quad b_0 a_{11} \mathbf{T}_{20} + b_1 a_{11} \mathbf{T}_{21} + b_2 a_{11} \mathbf{T}_{22} + \\ &\quad b_0 a_{12} \mathbf{T}_{30} + b_1 a_{12} \mathbf{T}_{31} + b_2 a_{12} \mathbf{T}_{32} \end{aligned} \qquad (7)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} a_9 &= 250t^3 - 375t^2 + 180t + 28 \\ a_{10} &= -250t^3 + 375t^2 - 180t + 28 \\ a_{11} &= 25t^3 - 40t^2 + 21t - 18/5 \\ a_{12} &= 25t^3 - 35t^2 + 16t - 12/5 \end{aligned} \qquad (8)$$

<u>Superficie S_{02x35}</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x35} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{30}} \\ \mathbf{P_{31}} \\ \mathbf{P_{32}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{30}} & \mathbf{P_{40}} & \mathbf{P_{50}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(3/5,0)=k_{00} & \mathbf{P}(4/5,0)=k_{01} & \mathbf{P}(1,0)=k_{02} \\ \mathbf{P}(3/5,1/8)=k_{10} & \mathbf{P}(4/5,1/8)=k_{11} & \mathbf{P}(1,1/8)=k_{12} \\ \mathbf{P}(3/5,2/8)=k_{20} & \mathbf{P}(4/5,2/8)=k_{21} & \mathbf{P}(1,2/8)=k_{22} \end{array} \quad (10)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(t,u)_{02x35} = \\ &= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{50} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{51} \\ \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \\ &= b_0 a_3 \mathbf{P}_{30} + b_1 a_3 \mathbf{P}_{31} + b_2 a_3 \mathbf{P}_{32} + \\ &\quad b_0 a_4 \mathbf{P}_{40} + b_1 a_4 \mathbf{P}_{41} + b_2 a_4 \mathbf{P}_{42} + \\ &\quad b_0 a_5 \mathbf{P}_{50} + b_1 a_5 \mathbf{P}_{51} + b_2 a_5 \mathbf{P}_{52} \end{aligned} \quad (11)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} a_3 &= 25/2t^2 - 45/2t + 10 \\ a_4 &= -25t^2 + 40t - 15 \\ a_5 &= 25/2t^2 - 35/2t + 6 \end{aligned} \quad (12)$$

Superficie S_{23x02}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x02} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{03} \\ \mathbf{U}_{02} \\ \mathbf{U}_{03} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(0,2/8) = k_{00} & \mathbf{P}(1/5,2/8) = k_{01} & \mathbf{P}(2/5,2/8) = k_{02} \\ \mathbf{P}(0,3/8) = k_{10} & \mathbf{P}(1/5,3/8) = k_{11} & \mathbf{P}(2/5,3/8) = k_{12} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(0,2/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1/5,2/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,2/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{22} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(0,3/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1/5,3/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,3/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{32} \end{array} \qquad (14)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x02} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{U}_{02} & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{22} \\ \mathbf{U}_{03} & \mathbf{U}_{13} & \mathbf{U}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_9 a_0 \mathbf{P}_{02} + b_{10} a_0 \mathbf{P}_{03} + b_{11} a_0 \mathbf{U}_{02} + b_{12} a_0 \mathbf{U}_{03} + \\ &\quad b_9 a_1 \mathbf{P}_{12} + b_{10} a_1 \mathbf{P}_{13} + b_{11} a_1 \mathbf{U}_{12} + b_{12} a_1 \mathbf{U}_{13} + \qquad (15) \\ &\quad b_9 a_2 \mathbf{P}_{22} + b_{10} a_2 \mathbf{P}_{23} + b_{11} a_2 \mathbf{U}_{22} + b_{12} a_2 \mathbf{U}_{23} \end{aligned}$$

Superficie S_{23x23}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x23} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{U}_{22} \\ \mathbf{U}_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(2/5,2/8) = k_{00} & \mathbf{P}(3/5,2/8) = k_{01} \\
\mathbf{P}(2/5,3/8) = k_{10} & \mathbf{P}(3/5,3/8) = k_{11} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,2/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,2/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,3/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,3/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,2/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,2/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,3/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,3/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}^2(2/5,2/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P}^2(3/5,2/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{23} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}^2(2/5,3/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{32} & \dfrac{\partial \mathbf{P}^2(3/5,3/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{33}
\end{array} \qquad (17)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x23} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \\ \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{33} \\ \mathbf{U}_{22} & \mathbf{U}_{32} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{32} \\ \mathbf{U}_{23} & \mathbf{U}_{33} & \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_9 a_9 \mathbf{P}_{22} + b_{10} a_9 \mathbf{P}_{23} + b_{11} a_9 \mathbf{U}_{22} + b_{12} a_9 \mathbf{U}_{23} + \\ &\quad b_9 a_{10} \mathbf{P}_{32} + b_{10} a_{10} \mathbf{P}_{33} + b_{11} a_{10} \mathbf{U}_{32} + b_{12} a_{10} \mathbf{U}_{33} + \\ &\quad b_9 a_{11} \mathbf{T}_{22} + b_{10} a_{11} \mathbf{T}_{23} + b_{11} a_{11} \mathbf{E}_{22} + b_{12} a_{11} \mathbf{E}_{23} + \\ &\quad b_9 a_{12} \mathbf{T}_{32} + b_{10} a_{12} \mathbf{T}_{33} + b_{11} a_{12} \mathbf{E}_{32} + b_{12} a_{12} \mathbf{E}_{33} \end{aligned} \tag{18}$$

Superficie $\mathbf{S_{23x35}}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x35} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{32} \\ \mathbf{P}_{33} \\ \mathbf{U}_{32} \\ \mathbf{U}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{P}(3/5,2/8)=k_{00} & \mathbf{P}(4/5,2/8)=k_{01} & \mathbf{P}(1,2/8)=k_{02} \\
\mathbf{P}(3/5,3/8)=k_{10} & \mathbf{P}(4/5,3/8)=k_{11} & \mathbf{P}(1,3/8)=k_{12} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(3/5,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(4/5,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(1,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{22} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(3/5,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(4/5,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(1,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{32}
\end{array}
\qquad (20)
$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$
\mathbf{P}(t,u)_{23x35}=\begin{pmatrix} b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{52} \\ \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{53} \\ \mathbf{U}_{32} & \mathbf{U}_{42} & \mathbf{U}_{52} \\ \mathbf{U}_{33} & \mathbf{U}_{43} & \mathbf{U}_{53} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= b_9 a_3 \mathbf{P}_{32} + b_{10} a_3 \mathbf{P}_{33} + b_{11} a_3 \mathbf{U}_{32} + b_{12} a_3 \mathbf{U}_{33} + \\
&\quad b_9 a_4 \mathbf{P}_{42} + b_{10} a_4 \mathbf{P}_{43} + b_{11} a_4 \mathbf{U}_{42} + b_{12} a_4 \mathbf{U}_{43} + \\
&\quad b_9 a_5 \mathbf{P}_{52} + b_{10} a_5 \mathbf{P}_{53} + b_{11} a_5 \mathbf{U}_{52} + b_{12} a_5 \mathbf{U}_{53}
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

<u>Superficie S_{35x02}</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$
\mathbf{P}(t,u)_{35x02}=\begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T
\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{03} \\ \mathbf{P}_{04} \\ \mathbf{P}_{05} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{23} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =
$$

$$
=\begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T
\begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}
\qquad (22)
$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(0,3/8)=k_{00} & \mathbf{P}(1/5,3/8)=k_{01} & \mathbf{P}(2/5,3/8)=k_{02} \\ \mathbf{P}(0,4/8)=k_{10} & \mathbf{P}(1/5,4/8)=k_{11} & \mathbf{P}(2/5,4/8)=k_{12} \\ \mathbf{P}(0,5/8)=k_{20} & \mathbf{P}(1/5,5/8)=k_{21} & \mathbf{P}(2/5,5/8)=k_{22} \end{array} \qquad (23)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(t,u)_{35x02} = \\ &= \begin{pmatrix} b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{P}_{04} & \mathbf{P}_{14} & \mathbf{P}_{24} \\ \mathbf{P}_{05} & \mathbf{P}_{15} & \mathbf{P}_{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \\ &= b_3 a_0 \mathbf{P}_{03} + b_4 a_0 \mathbf{P}_{04} + b_5 a_0 \mathbf{P}_{05} + \\ &\quad b_3 a_1 \mathbf{P}_{13} + b_4 a_1 \mathbf{P}_{14} + b_5 a_1 \mathbf{P}_{15} + \qquad (24) \\ &\quad b_3 a_2 \mathbf{P}_{23} + b_4 a_2 \mathbf{P}_{24} + b_5 a_2 \mathbf{P}_{25} \end{aligned}$$

Superficie S_{35x23}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x23} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{23}} \\ \mathbf{P_{24}} \\ \mathbf{P_{25}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{23}} & \mathbf{P_{33}} & \mathbf{T_{23}} & \mathbf{T_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (25)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(2/5,3/8)=k_{00} && \mathbf{P}(3/5,3/8)=k_{01}\\
&\mathbf{P}(2/5,4/8)=k_{10} && \mathbf{P}(3/5,4/8)=k_{11}\\
&\mathbf{P}(2/5,5/8)=k_{20} && \mathbf{P}(3/5,5/8)=k_{21}\\
&\frac{\partial\mathbf{P}(2/5,3/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{02} && \frac{\partial\mathbf{P}(3/5,3/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{03}\\
&\frac{\partial\mathbf{P}(2/5,4/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{12} && \frac{\partial\mathbf{P}(3/5,4/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{13}\\
&\frac{\partial\mathbf{P}(2/5,5/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{22} && \frac{\partial\mathbf{P}(3/5,5/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{23}
\end{aligned} \tag{26}$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior queda como:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u)_{35x23} =\\
&=\begin{pmatrix} b_3 & b_4 & b_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{33}\\ \mathbf{P}_{24} & \mathbf{P}_{34} & \mathbf{T}_{24} & \mathbf{T}_{34}\\ \mathbf{P}_{25} & \mathbf{P}_{35} & \mathbf{T}_{25} & \mathbf{T}_{35}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_9\\ a_{10}\\ a_{11}\\ a_{12}\end{pmatrix}=\\
&= b_3a_9\mathbf{P}_{23}+b_4a_9\mathbf{P}_{24}+b_5a_9\mathbf{P}_{25}+\\
&\quad b_3a_{10}\mathbf{P}_{33}+b_4a_{10}\mathbf{P}_{34}+b_5a_{10}\mathbf{P}_{35}+\\
&\quad b_3a_{11}\mathbf{T}_{23}+b_4a_{11}\mathbf{T}_{24}+b_5a_{11}\mathbf{T}_{25}+\\
&\quad b_3a_{12}\mathbf{T}_{33}+b_4a_{12}\mathbf{T}_{34}+b_5a_{12}\mathbf{T}_{35}
\end{aligned} \tag{27}$$

Superficie S_{35x35}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}\mathit{(t,u)}_{\mathit{35x35}} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{33} \\ \mathbf{P}_{34} \\ \mathbf{P}_{35} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{53} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(3/5,3/8)=k_{00} & \mathbf{P}(4/5,3/8)=k_{01} & \mathbf{P}(1,3/8)=k_{02} \\ \mathbf{P}(3/5,4/8)=k_{10} & \mathbf{P}(4/5,4/8)=k_{11} & \mathbf{P}(1,4/8)=k_{12} \\ \mathbf{P}(3/5,5/8)=k_{20} & \mathbf{P}(4/5,5/8)=k_{21} & \mathbf{P}(1,5/8)=k_{22} \end{array} \qquad (29)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(t,u)_{35x35} = \\ &= \begin{pmatrix} b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{53} \\ \mathbf{P}_{34} & \mathbf{P}_{44} & \mathbf{P}_{54} \\ \mathbf{P}_{35} & \mathbf{P}_{45} & \mathbf{P}_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \\ &= b_3 a_3 \mathbf{P}_{33} + b_4 a_3 \mathbf{P}_{34} + b_5 a_3 \mathbf{P}_{35} + \\ &\quad b_3 a_4 \mathbf{P}_{43} + b_4 a_4 \mathbf{P}_{44} + b_5 a_4 \mathbf{P}_{45} + \\ &\quad b_3 a_5 \mathbf{P}_{53} + b_4 a_5 \mathbf{P}_{54} + b_5 a_5 \mathbf{P}_{55} \end{aligned} \qquad (30)$$

Superficie S_{56x02}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{56x02} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{05} \\ \mathbf{P}_{06} \\ \mathbf{U}_{05} \\ \mathbf{U}_{06} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{05} & \mathbf{P}_{15} & \mathbf{P}_{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (31)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(0,5/8) = k_{00} & \mathbf{P}(1/5,5/8) = k_{01} & \mathbf{P}(2/5,5/8) = k_{02} \\ \mathbf{P}(0,6/8) = k_{10} & \mathbf{P}(1/5,6/8) = k_{11} & \mathbf{P}(2/5,6/8) = k_{12} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(0,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1/5,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{22} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(0,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1/5,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{32} \end{array} \qquad (32)$$

Llevando estos valores a la matriz k_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}\mathit{(t,u)}_{56x02} = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{05} & \mathbf{P}_{15} & \mathbf{P}_{25} \\ \mathbf{P}_{06} & \mathbf{P}_{16} & \mathbf{P}_{26} \\ \mathbf{U}_{05} & \mathbf{U}_{15} & \mathbf{U}_{25} \\ \mathbf{U}_{06} & \mathbf{U}_{16} & \mathbf{U}_{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_{13}a_0\mathbf{P}_{05} + b_{14}a_0\mathbf{P}_{06} + b_{15}a_0\mathbf{U}_{05} + b_{16}a_0\mathbf{U}_{06} + \\ &b_{13}a_1\mathbf{P}_{15} + b_{14}a_1\mathbf{P}_{16} + b_{15}a_1\mathbf{U}_{15} + b_{16}a_1\mathbf{U}_{16} + \\ &b_{13}a_2\mathbf{P}_{25} + b_{14}a_2\mathbf{P}_{26} + b_{15}a_2\mathbf{U}_{25} + b_{16}a_2\mathbf{U}_{26} \end{aligned} \qquad (33)$$

Superficie $\mathbf{S_{56x23}}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}\mathit{(t,u)}_{56x23} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{25} \\ \mathbf{P}_{26} \\ \mathbf{U}_{25} \\ \mathbf{U}_{26} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{25} & \mathbf{P}_{35} & \mathbf{T}_{25} & \mathbf{T}_{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (34)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(2/5,5/8)=k_{00} & \mathbf{P}(3/5,5/8)=k_{01} \\
\mathbf{P}(2/5,6/8)=k_{10} & \mathbf{P}(3/5,6/8)=k_{11} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(2/5,5/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(3/5,5/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{03} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(2/5,6/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(3/5,6/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{13} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(2/5,5/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(3/5,5/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{21} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(2/5,6/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(3/5,6/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{31} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}^2(2/5,5/8)}{\partial t\partial u}=\mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial\mathbf{P}^2(3/5,5/8)}{\partial t\partial u}=\mathrm{k}_{23} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}^2(2/5,6/8)}{\partial t\partial u}=\mathrm{k}_{32} & \dfrac{\partial\mathbf{P}^2(3/5,6/8)}{\partial t\partial u}=\mathrm{k}_{33}
\end{array}
\qquad (35)
$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$
\mathbf{P}(t,u)_{56x23}=\begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{25} & \mathbf{P}_{35} & \mathbf{T}_{25} & \mathbf{T}_{35} \\ \mathbf{P}_{26} & \mathbf{P}_{36} & \mathbf{T}_{26} & \mathbf{T}_{36} \\ \mathbf{U}_{25} & \mathbf{U}_{26} & \mathbf{E}_{25} & \mathbf{E}_{26} \\ \mathbf{U}_{35} & \mathbf{U}_{36} & \mathbf{E}_{35} & \mathbf{E}_{36} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}=
$$

$$
\begin{aligned}
&= b_{13}a_9\mathbf{P}_{25}+b_{14}a_9\mathbf{P}_{26}+b_{15}a_9\mathbf{U}_{25}+b_{16}a_9\mathbf{U}_{26}+ \\
&\quad b_{13}a_{10}\mathbf{P}_{35}+b_{14}a_{10}\mathbf{P}_{36}+b_{15}a_{10}\mathbf{U}_{35}+b_{16}a_{10}\mathbf{U}_{36}+ \\
&\quad b_{13}a_{11}\mathbf{T}_{25}+b_{14}a_{11}\mathbf{T}_{26}+b_{15}a_{11}\mathbf{E}_{25}+b_{16}a_{11}\mathbf{E}_{26}+ \\
&\quad b_{13}a_{12}\mathbf{T}_{35}+b_{14}a_{12}\mathbf{T}_{36}+b_{15}a_{12}\mathbf{E}_{35}+b_{16}a_{12}\mathbf{E}_{36}
\end{aligned}
\qquad (36)
$$

Superficie S_{56x35}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{56x35} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{35} \\ \mathbf{P}_{36} \\ \mathbf{U}_{35} \\ \mathbf{U}_{36} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{35} & \mathbf{P}_{45} & \mathbf{P}_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (37)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(3/5,5/8) = k_{00} & \mathbf{P}(4/5,5/8) = k_{01} & \mathbf{P}(1,5/8) = k_{02} \\ \mathbf{P}(3/5,6/8) = k_{10} & \mathbf{P}(4/5,6/8) = k_{11} & \mathbf{P}(1,6/8) = k_{12} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(4/5,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{22} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(4/5,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{32} \end{array} \qquad (38)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{56x35} = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{35} & \mathbf{P}_{45} & \mathbf{P}_{55} \\ \mathbf{P}_{36} & \mathbf{P}_{46} & \mathbf{P}_{56} \\ \mathbf{U}_{35} & \mathbf{U}_{45} & \mathbf{U}_{55} \\ \mathbf{U}_{36} & \mathbf{U}_{46} & \mathbf{U}_{56} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_{13}a_3\mathbf{P}_{35} + b_{14}a_3\mathbf{P}_{36} + b_{15}a_3\mathbf{U}_{35} + b_{16}a_3\mathbf{U}_{36} + \\ &\quad b_{13}a_4\mathbf{P}_{45} + b_{14}a_4\mathbf{P}_{46} + b_{15}a_4\mathbf{U}_{45} + b_{16}a_4\mathbf{U}_{46} + \\ &\quad b_{13}a_5\mathbf{P}_{55} + b_{14}a_5\mathbf{P}_{56} + b_{15}a_5\mathbf{U}_{55} + b_{16}a_5\mathbf{U}_{56} \end{aligned} \qquad (39)$$

Superficie S_{68x02}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x02} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{06} \\ \mathbf{P}_{07} \\ \mathbf{P}_{08} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{06} & \mathbf{P}_{16} & \mathbf{P}_{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (40)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(0,6/8) = k_{00} & \mathbf{P}(1/5,6/8) = k_{01} & \mathbf{P}(2/5,6/8) = k_{02} \\ \mathbf{P}(0,7/8) = k_{10} & \mathbf{P}(1/5,7/8) = k_{11} & \mathbf{P}(2/5,7/8) = k_{12} \\ \mathbf{P}(0,1) = k_{20} & \mathbf{P}(1/5,1) = k_{21} & \mathbf{P}(2/5,1) = k_{22} \end{array} \qquad (41)$$

Llevando etos valores a la matriz K_{ij} la ecuación antetíor quedaría como:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(t,u)_{68x02} = \\ &= \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{06} & \mathbf{P}_{16} & \mathbf{P}_{26} \\ \mathbf{P}_{07} & \mathbf{P}_{17} & \mathbf{P}_{27} \\ \mathbf{P}_{08} & \mathbf{P}_{18} & \mathbf{P}_{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \\ &= b_6 a_0 \mathbf{P}_{06} + b_7 a_0 \mathbf{P}_{07} + b_8 a_0 \mathbf{P}_{08} + \\ &\quad b_6 a_1 \mathbf{P}_{16} + b_7 a_1 \mathbf{P}_{17} + b_8 a_1 \mathbf{P}_{18} + \qquad (42) \\ &\quad b_6 a_2 \mathbf{P}_{26} + b_7 a_2 \mathbf{P}_{27} + b_8 a_2 \mathbf{P}_{28} \end{aligned}$$

Superficie S_{68x23}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x23} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{26}} \\ \mathbf{P_{27}} \\ \mathbf{P_{28}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{26}} & \mathbf{P_{36}} & \mathbf{T_{26}} & \mathbf{T_{36}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 250 & -375 & 180 & -27 \\ -250 & 375 & -180 & 28 \\ 25 & -40 & 21 & -18/5 \\ 25 & -35 & 16 & -12/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (43)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(2/5,6/8) = k_{00} & \mathbf{P}(3/5,6/8) = k_{01} \\ \mathbf{P}(2/5,7/8) = k_{10} & \mathbf{P}(3/5,7/8) = k_{11} \\ \mathbf{P}(2/5,1) = k_{20} & \mathbf{P}(3/5,1) = k_{21} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,7/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,7/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/5,1)}{\partial t} = \mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/5,1)}{\partial t} = \mathrm{k}_{23} \end{array} \qquad (44)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x23} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{26} & \mathbf{P}_{36} & \mathbf{T}_{26} & \mathbf{T}_{36} \\ \mathbf{P}_{27} & \mathbf{P}_{37} & \mathbf{T}_{27} & \mathbf{T}_{37} \\ \mathbf{P}_{28} & \mathbf{P}_{38} & \mathbf{T}_{28} & \mathbf{T}_{38} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_6 a_9 \mathbf{P}_{26} + b_7 a_9 \mathbf{P}_{27} + b_8 a_9 \mathbf{P}_{28} + \\ &\quad b_6 a_{10} \mathbf{P}_{36} + b_7 a_{10} \mathbf{P}_{37} + b_8 a_{10} \mathbf{P}_{38} + \\ &\quad b_6 a_{11} \mathbf{T}_{26} + b_7 a_{11} \mathbf{T}_{27} + b_8 a_{11} \mathbf{T}_{28} + \\ &\quad b_6 a_{12} \mathbf{T}_{36} + b_7 a_{12} \mathbf{T}_{37} + b_8 a_{12} \mathbf{T}_{38} \end{aligned} \qquad (45)$$

<u>Superficie S_{68x35}</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x35} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{36} \\ \mathbf{P}_{37} \\ \mathbf{P}_{38} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{36} & \mathbf{P}_{46} & \mathbf{P}_{56} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 25/2 & -45/2 & 10 \\ -25 & 40 & -15 \\ 25/2 & -35/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (46)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(3/5, 6/8) = k_{00} & \mathbf{P}(4/5, 6/8) = k_{01} & \mathbf{P}(1, 6/8) = k_{02} \\ \mathbf{P}(3/5, 7/8) = k_{10} & \mathbf{P}(4/5, 7/8) = k_{11} & \mathbf{P}(1, 7/8) = k_{12} \\ \mathbf{P}(3/5, 1) = k_{20} & \mathbf{P}(4/5, 1) = k_{21} & \mathbf{P}(1, 1) = k_{22} \end{array} \qquad (47)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x35} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{36} & \mathbf{P}_{46} & \mathbf{P}_{56} \\ \mathbf{P}_{37} & \mathbf{P}_{47} & \mathbf{P}_{57} \\ \mathbf{P}_{38} & \mathbf{P}_{48} & \mathbf{P}_{58} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_6 a_3 \mathbf{P}_{36} + b_7 a_3 \mathbf{P}_{37} + b_8 a_3 \mathbf{P}_{38} + \\ &\quad b_6 a_4 \mathbf{P}_{46} + b_7 a_4 \mathbf{P}_{47} + b_8 a_4 \mathbf{P}_{48} + \\ &\quad b_6 a_5 \mathbf{P}_{56} + b_7 a_5 \mathbf{P}_{57} + b_8 a_5 \mathbf{P}_{58} \end{aligned} \qquad (48)$$

3.3.4.-CONSTRUCCIÓN DE LASUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 9x9 PUNTOS DADOS USANDO POLINOMIOS DE GRADO 3 0 MENOR, PROBLEMA MIXTO

3.3.4.1.-CONSTRUCCIÓN DE LAS CURVAS GENERADORAS

Supongamos la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$, $\mathbf{P}_7$ y $\mathbf{P}_8$ con tangentes $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_5$ y $\mathbf{T}_6$ en los puntos $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_5$ y $\mathbf{P}_6$ (figura 3.3.4.1.-1):

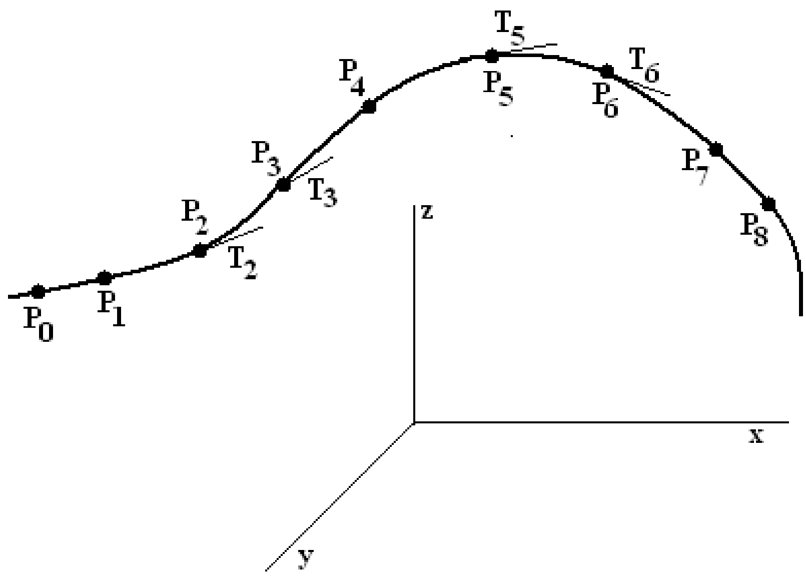


Figura 3.3.4.1.-1. Curva polinomial que pasa por nueve puntos dados con tangentes, en algunos de ellos, tambien dadas con grado menor o igual que tres

Dicha curva se puede descomponer en cinco tramos: C 0-2, C 2-3 , C 3-5, C 5-6 y C 6-8.

El tramo C 0-2 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{P_{0,2}}(t) = F_0(t)\mathbf{P}_0 + F_1(t)\mathbf{P}_1 + F_2(t)\mathbf{P}_2 \qquad (1)$$

con las restricciones:

t	$F_0(t)$	$F_1(t)$	$F_2(t)$
0	1	0	0
1/8	0	1	0
2/8	0	0	1

Tabla (2)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \frac{(t-1/8)(t-2/8)}{(0-1/8)(0-2/8)} = 32t^2 - 12t + 1 \\ F_1(t) &= \frac{(t-0)(t-2/8)}{(1/8-0)(1/8-2/8)} = -64t^2 + 16t \\ F_2(t) &= \frac{(t-0)(t-1/8)}{(2/8-0)(2/8-1/8)} = 32t^2 - 4t \end{aligned} \qquad (3)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (1), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P_{0,2}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Analogamente el tramo de curva C 2-3 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_2$ y $\mathbf{T}_3$.

La ecuación de este tramo sería:

$$\mathbf{P_{2,3}}(t) = F_2(t)\mathbf{P}_2 + F_3(t)\mathbf{P}_3 + G_2(t)\mathbf{T}_2 + G_3(t)\mathbf{T}_3 \qquad (5)$$

con las restricciones:

t	$F_2(t)$	$F'_2(t)$	$F_3(t)$	$F'_3(t)$	$G_2(t)$	$G'_2(t)$	$G_3(t)$	$G'_3(t)$
2/8	1	0	0	0	0	1	0	0
3/8	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (6)

Las soluciones de las $F_i(t)$ que cumplen estas condiciones serían:

$$
\begin{aligned}
F_2(t) &= 1024t^3 - 960t^2 + 288t - 27 \\
F_3(t) &= -1024t^3 + 960t^2 - 288t + 28 \\
G_2(t) &= 64t^3 - 64t^2 + 21t - 9/4 \\
G_3(t) &= 64t^3 - 56t^2 + 16t - 3/2
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Entrando con estos valores en la fórmula (5) operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$
\mathbf{P_{2,3}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & 9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (8)
$$

Operando igualmente, el tramo C 3-5 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ y $\mathbf{P}_5$ cuya ecuación se puede expresar como:

$$
\mathbf{P_{3,5}}(t) = F_3(t)\mathbf{P}_3 + F_4(t)\mathbf{P}_4 + F_5(t)\mathbf{P}_5 \qquad (9)
$$

con las restricciones:

t	$F_3(t)$	$F_4(t)$	$F_5(t)$
3/8	1	0	0
4/8	0	1	0
5/8	0	0	1

Tabla (10)

Las soluciones para las $F_i(t)$ serían:

$$
\begin{aligned}
F_3(t) &= \frac{(t-4/8)(t-5/8)}{(3/8-4/8)(3/8-5/8)} = 32t^2 - 36t + 10 \\
F_4(t) &= \frac{(t-3/8)(t-5/8)}{(4/8-3/8)(4/8-5/8)} = -64t^2 + 64t - 15 \\
F_5(t) &= \frac{(t-3/8)(t-4/8)}{(5/8-3/8)(5/8-4/8)} = 32t^2 - 28t + 6
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Entrando con estos valores en la fórmula (9) operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P_{3,5}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

Análogamente el tramo de curva C 5-6 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_5$ y $\mathbf{P}_6$ con tangentes en ellos $\mathbf{T}_5$ y $\mathbf{T}_6$.

La ecuación de este tramo quedaría :

$$\mathbf{P_{5,6}}(t) = F_5(t)\mathbf{P}_5 + F_6(t)\mathbf{P}_6 + G_5(t)\mathbf{T}_5 + G_6(t)\mathbf{T}_6 \qquad (13)$$

con las restricciones :

t	$F_5(t)$	$F'_5(t)$	$F_6(t)$	$F'_6(t)$	$G_5(t)$	$G'_5(t)$	$G_6(t)$	$G'_6(t)$
5/8	1	0	0	0	0	1	0	0
6/8	0	0	1	0	0	0	0	1

Tabla (14)

Las soluciones de las $F_i(t)$ que cumplen estas condiciones serían:

$$\begin{aligned} F_5(t) &= 1024t^3 - 2112t^2 + 1440t - 324 \\ F_6(t) &= -1024t^3 + 2112t^2 - 1440t + 325 \\ G_5(t) &= 64t^3 - 136t^2 + 96t - 45/2 \\ G_6(t) &= 64t^3 - 128t^2 + 85t - 75/4 \end{aligned} \qquad (15)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (13), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P_{5,6}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_5 & \mathbf{P}_6 & \mathbf{T}_5 & \mathbf{T}_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (16)$$

Operando igualmente, el tramo C 6-8 sería la curva que pasa por los puntos $\mathbf{P}_6$, $\mathbf{P}_7$ y $\mathbf{P}_8$ cuya ecuación se puede expresar como :

$$\mathbf{P_{6,8}}(t) = F_6(t)\mathbf{P}_6 + F_7(t)\mathbf{P}_7 + F_8(t)\mathbf{P}_8 \qquad (17)$$

con las restricciones :

t	$F_6(t)$	$F_7(t)$	$F_8(t)$
6/8	1	0	0
7/8	0	1	0
1	0	0	1

Tabla (18)

Las soluciones para las $f_i(t)$ serían:

$$\begin{aligned} F_6(t) &= \frac{(t-7/8)(t-1)}{(6/8-7/8)(6/8-1)} = 32t^2 - 60t + 28 \\ F_7(t) &= \frac{(t-6/8)(t-1)}{(7/8-6/8)(7/8-1)} = -64t^2 + 112t - 48 \\ F_8(t) &= \frac{(t-6/8)(t-7/8)}{(1-6/8)(1-7/8)} = 32t^2 - 52t + 21 \end{aligned} \qquad (19)$$

Entrando con estos valores en la fórmula (17), operando y poniendo el resultado en forma matricial se tendría:

$$\mathbf{P_{6,8}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_6 & \mathbf{P}_7 & \mathbf{P}_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (20)$$

3.3.4.2.-CONSTRUCCIÓN DE LOS PARCHES QUE COMPONEN LA SUPERFICIE

Si efectuamos el producto cartesiano de la curva total C 0-8 por sí misma obtenemos una superficie formada por una serie de cuadros (figura 3.3.4.2.-1) cuyas ecuaciones serían las siguientes:

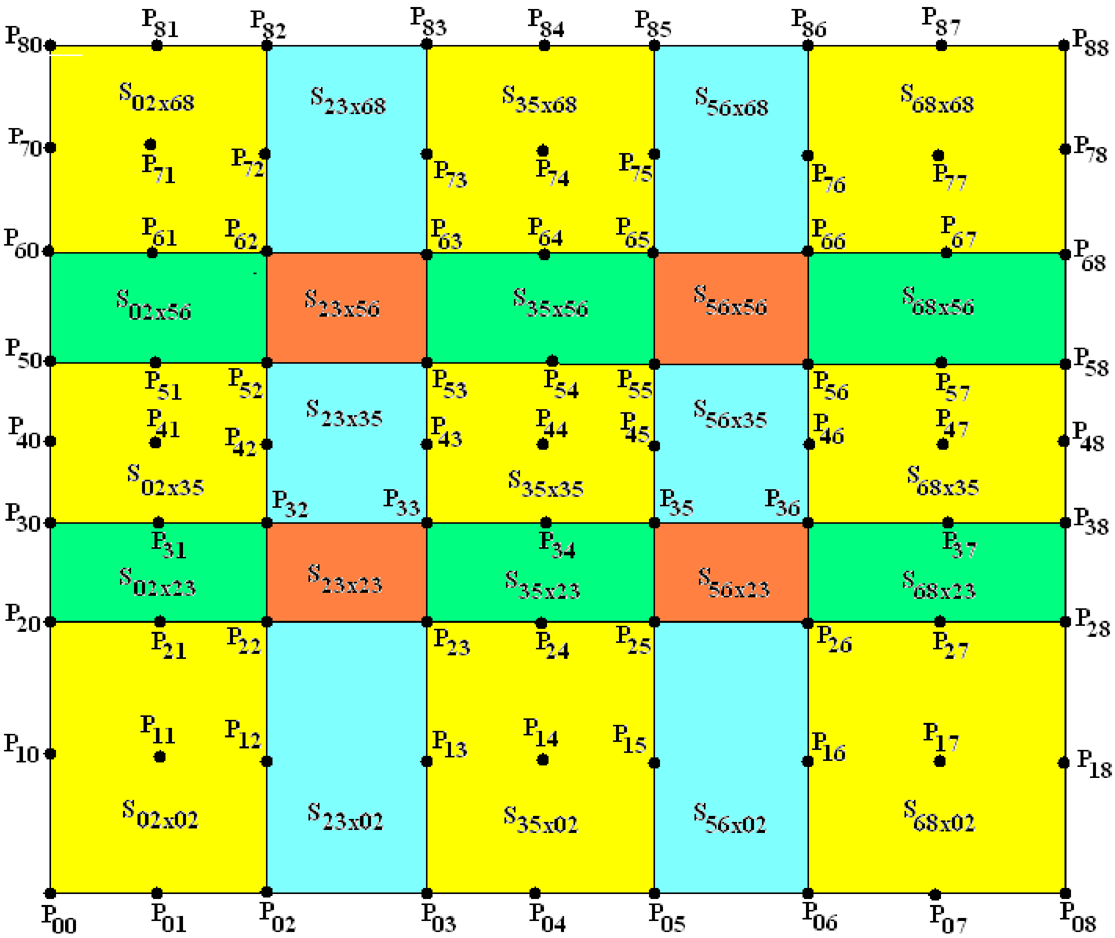


Figura 3.3.4.2.-1. Superficie que pasa por una red de 9x9 puntos dados con grado menor o igual que tres

Superfície S_{02x02}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x02} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{00}} \\ \mathbf{P_{01}} \\ \mathbf{P_{02}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{00}} & \mathbf{P_{10}} & \mathbf{P_{20}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25/2 & -15/2 & 1 \\ -25 & 10 & 0 \\ 25/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(0,0) = k_{00} & \mathbf{P}(1/8,0) = k_{01} & \mathbf{P}(2/8,0) = k_{02} \\ \mathbf{P}(0,1/8) = k_{10} & \mathbf{P}(1/88,1/8) = k_{11} & \mathbf{P}(2/8,2/8) = k_{12} \\ \mathbf{P}(0,2/8) = k_{20} & \mathbf{P}(1/8,2/8) = k_{21} & \mathbf{P}(2/8,2/8) = k_{22} \end{array} \qquad (2)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x02} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_0 a_0 \mathbf{P}_{00} + b_1 a_0 \mathbf{P}_{01} + b_2 a_0 \mathbf{P}_{02} + \\ &\quad b_0 a_1 \mathbf{P}_{10} + b_1 a_1 \mathbf{P}_{11} + b_2 a_1 \mathbf{P}_{12} + \\ &\quad b_0 a_2 \mathbf{P}_{20} + b_1 a_2 \mathbf{P}_{21} + b_2 a_2 \mathbf{P}_{22} \end{aligned} \qquad (3)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} b_0 &= 32u^2 - 12u + 1 \\ b_1 &= -64u^2 + 16u \\ b_2 &= 32u^2 - 4u \\ a_0 &= 32t^2 - 12t + 1 \\ a_1 &= -64t^2 + 16t \\ a_2 &= 32t^2 - 4t \end{aligned} \qquad (4)$$

Superficie S_{02x23}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x03} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{20}} \\ \mathbf{P_{21}} \\ \mathbf{P_{22}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{20}} & \mathbf{P_{30}} & \mathbf{T_{20}} & \mathbf{T_{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(2/8,0) = k_{00} & \mathbf{P}(3/8,0) = k_{01} \\ \mathbf{P}(2/8,1/8) = k_{10} & \mathbf{P}(3/8,1/8) = k_{11} \\ \mathbf{P}(2/8,2/8) = k_{20} & \mathbf{P}(3/8,2/8) = k_{21} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/8,0)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,0)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/8,1/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,1/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/8,2/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,2/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{23} \end{array} \qquad (6)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x03} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{30} & \mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{30} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{31} \\ \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_0 a_9 \mathbf{P}_{20} + b_1 a_9 \mathbf{P}_{21} + b_2 a_9 \mathbf{P}_{22} + \\ &\quad b_0 a_{10} \mathbf{P}_{30} + b_1 a_{10} \mathbf{P}_{31} + b_2 a_{10} \mathbf{P}_{32} + \\ &\quad b_0 a_{11} \mathbf{T}_{20} + b_1 a_{11} \mathbf{T}_{21} + b_2 a_{11} \mathbf{T}_{22} + \\ &\quad b_0 a_{12} \mathbf{T}_{30} + b_1 a_{12} \mathbf{T}_{31} + b_2 a_{12} \mathbf{T}_{32} \end{aligned} \qquad (7)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} a_9 &= 1024t^3 - 960t^2 + 288t - 27 \\ a_{10} &= -1024t^3 + 960t^2 - 288t + 28 \\ a_{11} &= 64t^3 - 64t^2 + 21t - 9/4 \\ a_{12} &= 64t^3 - 56t^2 + 16t - 3/2 \end{aligned} \qquad (8)$$

<u>Superfície S_{02x35}</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x35} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{30}} \\ \mathbf{P_{31}} \\ \mathbf{P_{32}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{30}} & \mathbf{P_{40}} & \mathbf{P_{50}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(3/8,0)=k_{00} & \mathbf{P}(4/8,0)=k_{01} & \mathbf{P}(5/8,0)=k_{02} \\ \mathbf{P}(3/8,1/8)=k_{10} & \mathbf{P}(4/8,1/8)=k_{11} & \mathbf{P}(5/8,1/8)=k_{12} \\ \mathbf{P}(3/8,2/8)=k_{20} & \mathbf{P}(4/8,2/8)=k_{21} & \mathbf{P}(5/8,2/8)=k_{22} \end{array} \qquad (10)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(t,u)_{02x35} = \\ &= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{30} & \mathbf{P}_{40} & \mathbf{P}_{50} \\ \mathbf{P}_{31} & \mathbf{P}_{41} & \mathbf{P}_{51} \\ \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \\ &= b_0 a_3 \mathbf{P}_{30} + b_1 a_3 \mathbf{P}_{31} + b_2 a_3 \mathbf{P}_{32} + \\ &\quad b_0 a_4 \mathbf{P}_{40} + b_1 a_4 \mathbf{P}_{41} + b_2 a_4 \mathbf{P}_{42} + \\ &\quad b_0 a_5 \mathbf{P}_{50} + b_1 a_5 \mathbf{P}_{51} + b_2 a_5 \mathbf{P}_{52} \end{aligned} \qquad (11)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} a_3 &= 32t^2 - 36t + 10 \\ a_4 &= -64t^2 + 64t - 15 \\ a_5 &= 32t^2 - 28t + 6 \end{aligned} \qquad (12)$$

Superficie S_{02x56}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x56} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{50} \\ \mathbf{P}_{51} \\ \mathbf{P}_{52} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{50} & \mathbf{P}_{60} & \mathbf{T}_{50} & \mathbf{T}_{60} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(5/8,0) = k_{00} & \mathbf{P}(6/8,0) = k_{01} \\
\mathbf{P}(5/8,1/8) = k_{10} & \mathbf{P}(6/8,1/8) = k_{11} \\
\mathbf{P}(5/8,2/8) = k_{20} & \mathbf{P}(6/8,2/8) = k_{11} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,0)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,0)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,1/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,1/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,2/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,2/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{23}
\end{array} \qquad (14)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x56} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{50} & \mathbf{P}_{60} & \mathbf{T}_{50} & \mathbf{T}_{60} \\ \mathbf{P}_{51} & \mathbf{P}_{61} & \mathbf{T}_{51} & \mathbf{T}_{61} \\ \mathbf{P}_{52} & \mathbf{P}_{62} & \mathbf{T}_{52} & \mathbf{T}_{61} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_0 a_{13}\mathbf{P}_{50} + b_1 a_{13}\mathbf{P}_{51} + b_2 a_{13}\mathbf{P}_{52} + \\ &\quad b_0 a_{14}\mathbf{P}_{60} + b_1 a_{14}\mathbf{P}_{61} + b_2 a_{14}\mathbf{P}_{62} + \\ &\quad b_0 a_{15}\mathbf{T}_{50} + b_1 a_{15}\mathbf{T}_{51} + b_2 a_{15}\mathbf{T}_{52} + \\ &\quad b_0 a_{16}\mathbf{T}_{60} + b_1 a_{16}\mathbf{T}_{61} + b_2 a_{16}\mathbf{T}_{62} \end{aligned} \qquad (15)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} a_{13} &= 1024t^3 - 2112t^2 + 1440t - 324 \\ a_{14} &= -1024t^3 + 2112t^2 - 1440t + 325 \\ a_{15} &= 64t^3 - 136t^2 + 96t - 45/2 \\ a_{16} &= 64t^3 - 128t^2 + 85t - 75/4 \end{aligned} \qquad (16)$$

Superficie S_{02x68}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{02x68} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{60}} \\ \mathbf{P_{61}} \\ \mathbf{P_{62}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{60}} & \mathbf{P_{70}} & \mathbf{P_{80}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(6/8,0)=k_{00} & \mathbf{P}(7/8,0)=k_{01} & \mathbf{P}(1,0)=k_{02} \\ \mathbf{P}(6/8,1/8)=k_{10} & \mathbf{P}(7/8,1/8)=k_{11} & \mathbf{P}(1,1/8)=k_{12} \\ \mathbf{P}(6/8,2/8)=k_{20} & \mathbf{P}(7/8,2/8)=k_{21} & \mathbf{P}(1,2/8)=k_{22} \end{array} \qquad (18)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(t,u)_{02x68} = \\ &= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{60} & \mathbf{P}_{70} & \mathbf{P}_{80} \\ \mathbf{P}_{61} & \mathbf{P}_{71} & \mathbf{P}_{81} \\ \mathbf{P}_{62} & \mathbf{P}_{72} & \mathbf{P}_{82} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} = \\ &= b_0 a_6 \mathbf{P}_{60} + b_1 a_6 \mathbf{P}_{61} + b_2 a_6 \mathbf{P}_{62} + \\ &\quad b_0 a_7 \mathbf{P}_{70} + b_1 a_7 \mathbf{P}_{71} + b_2 a_7 \mathbf{P}_{72} + \qquad (19) \\ &\quad b_0 a_8 \mathbf{P}_{80} + b_1 a_8 \mathbf{P}_{81} + b_2 a_8 \mathbf{P}_{82} \end{aligned}$$

Superficie S_{23x02}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u)_{23x02} &= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{02}} \\ \mathbf{P_{03}} \\ \mathbf{U_{02}} \\ \mathbf{U_{03}} \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} \mathbf{P_{02}} & \mathbf{P_{12}} & \mathbf{P_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (20) \end{aligned}$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{P}(0,2/8)=k_{00} & \mathbf{P}(1/8,2/8)=k_{01} & \mathbf{P}(2/8,2/8)=k_{02} \\
\mathbf{P}(0,3/8)=k_{10} & \mathbf{P}(1/8,3/8)=k_{11} & \mathbf{P}(2/8,3/8)=k_{12} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(0,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(1/8,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(2/8,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{22} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(0,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(1/8,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(2/8,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{32}
\end{array} \qquad (21)$$

Llevando estar valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,u)_{23x02} &= \begin{pmatrix} b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{U}_{02} & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{22} \\ \mathbf{U}_{03} & \mathbf{U}_{13} & \mathbf{U}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \\
&= b_9 a_0 \mathbf{P}_{02} + b_{10} a_0 \mathbf{P}_{03} + b_{11} a_0 \mathbf{U}_{02} + b_{12} a_0 \mathbf{U}_{03} + \\
&\quad b_9 a_1 \mathbf{P}_{12} + b_{10} a_1 \mathbf{P}_{13} + b_{11} a_1 \mathbf{U}_{12} + b_{12} a_1 \mathbf{U}_{13} + \\
&\quad b_9 a_2 \mathbf{P}_{22} + b_{10} a_2 \mathbf{P}_{23} + b_{11} a_2 \mathbf{U}_{22} + b_{12} a_2 \mathbf{U}_{23}
\end{aligned} \qquad (22)$$

Superficie S_{23x23}

La ecuación de esta superficie sería:

$\mathbf{P}(t,u)_{23x23} =$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{U}_{22} \\ \mathbf{U}_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (23)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(2/8,2/8) = k_{00} & \mathbf{P}(3/8,2/8) = k_{01} \\
\mathbf{P}(2/8,3/8) = k_{10} & \mathbf{P}(3/8,3/8) = k_{11} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/8,2/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,2/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/8,3/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,3/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/8,2/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,2/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(2/8,3/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,3/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}^2(2/8,2/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P}^2(3/8,2/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{23} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}^2(2/8,3/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{32} & \dfrac{\partial \mathbf{P}^2(3/8,3/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{33}
\end{array} \qquad (24)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x23} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \\ \mathbf{P}_{23} & \mathbf{P}_{33} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{33} \\ \mathbf{U}_{22} & \mathbf{U}_{32} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{E}_{32} \\ \mathbf{U}_{23} & \mathbf{U}_{33} & \mathbf{E}_{23} & \mathbf{E}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_9 a_9 \mathbf{P}_{22} + b_{10} a_9 \mathbf{P}_{23} + b_{11} a_9 \mathbf{U}_{22} + b_{12} a_9 \mathbf{U}_{23} + \\ &\quad b_9 a_{10} \mathbf{P}_{32} + b_{10} a_{10} \mathbf{P}_{33} + b_{11} a_{10} \mathbf{U}_{32} + b_{12} a_{10} \mathbf{U}_{33} + \\ &\quad b_9 a_{11} \mathbf{T}_{22} + b_{10} a_{11} \mathbf{T}_{23} + b_{11} a_{11} \mathbf{E}_{22} + b_{12} a_{11} \mathbf{E}_{23} + \\ &\quad b_9 a_{12} \mathbf{T}_{32} + b_{10} a_{12} \mathbf{T}_{33} + b_{11} a_{12} \mathbf{E}_{32} + b_{12} a_{12} \mathbf{E}_{33} \end{aligned} \qquad (25)$$

Superficie S_{23x35}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x35} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{32} \\ \mathbf{P}_{33} \\ \mathbf{U}_{32} \\ \mathbf{U}_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (26)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{P}(3/8,2/8)=k_{00} & \mathbf{P}(4/8,2/8)=k_{01} & \mathbf{P}(5/8,2/8)=k_{02} \\
\mathbf{P}(3/8,3/8)=k_{10} & \mathbf{P}(4/8,3/8)=k_{11} & \mathbf{P}(5/8,3/8)=k_{12} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(3/8,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(4/8,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(5/8,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{22} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(3/8,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(4/8,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(5/8,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{32}
\end{array} \qquad (27)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,u)_{23x35} &= \begin{pmatrix} b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{32} & \mathbf{P}_{42} & \mathbf{P}_{52} \\ \mathbf{P}_{33} & \mathbf{P}_{43} & \mathbf{P}_{53} \\ \mathbf{U}_{32} & \mathbf{U}_{42} & \mathbf{U}_{52} \\ \mathbf{U}_{33} & \mathbf{U}_{43} & \mathbf{U}_{53} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \\
&= b_9 a_3 \mathbf{P}_{32} + b_{10} a_3 \mathbf{P}_{33} + b_{11} a_3 \mathbf{U}_{32} + b_{12} a_3 \mathbf{U}_{33} + \\
&\quad b_9 a_4 \mathbf{P}_{42} + b_{10} a_4 \mathbf{P}_{43} + b_{11} a_4 \mathbf{U}_{42} + b_{12} a_4 \mathbf{U}_{43} + \\
&\quad b_9 a_5 \mathbf{P}_{52} + b_{10} a_5 \mathbf{P}_{53} + b_{11} a_5 \mathbf{U}_{52} + b_{12} a_5 \mathbf{U}_{53}
\end{aligned} \qquad (28)$$

Superficie $\mathbf{S_{23x56}}$

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x56} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{52} \\ \mathbf{P}_{53} \\ \mathbf{U}_{52} \\ \mathbf{U}_{53} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{52} & \mathbf{P}_{62} & \mathbf{T}_{52} & \mathbf{T}_{62} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (29)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(5/8,2/8) = k_{00} & \mathbf{P}(6/8,2/8) = k_{01} \\
\mathbf{P}(5/8,3/8) = k_{10} & \mathbf{P}(6/8,3/8) = k_{11} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,2/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,2/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,3/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,3/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,2/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,2/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,3/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,3/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}^2(5/8,2/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P}^2(6/8,2/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{23} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}^2(5/8,3/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{32} & \dfrac{\partial \mathbf{P}^2(6/8,3/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{33}
\end{array} \qquad (30)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$\mathbf{P}(t,u)_{23x56} =$

$$= \begin{pmatrix} b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{52} & \mathbf{P}_{62} & \mathbf{T}_{52} & \mathbf{T}_{62} \\ \mathbf{P}_{53} & \mathbf{P}_{63} & \mathbf{T}_{53} & \mathbf{T}_{63} \\ \mathbf{U}_{52} & \mathbf{U}_{62} & \mathbf{E}_{52} & \mathbf{E}_{62} \\ \mathbf{U}_{53} & \mathbf{U}_{63} & \mathbf{E}_{53} & \mathbf{E}_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_9 a_{13}\mathbf{P}_{52} + b_{10}a_{13}\mathbf{P}_{53} + b_{11}a_{13}\mathbf{U}_{52} + b_{12}a_{13}\mathbf{U}_{53} + \\ &\quad b_9 a_{14}\mathbf{P}_{62} + b_{10}a_{14}\mathbf{P}_{63} + b_{11}a_{14}\mathbf{U}_{62} + b_{12}a_{14}\mathbf{U}_{63} + \\ &\quad b_9 a_{15}\mathbf{T}_{52} + b_{10}a_{15}\mathbf{T}_{53} + b_{11}a_{15}\mathbf{E}_{52} + b_{12}a_{15}\mathbf{E}_{53} + \\ &\quad b_9 a_{16}\mathbf{T}_{62} + b_{10}a_{16}\mathbf{T}_{63} + b_{11}a_{16}\mathbf{E}_{62} + b_{12}a_{16}\mathbf{E}_{63} \end{aligned} \qquad (31)$$

Superficie S_{23x68}

La ecuación de esta superficie sería:

$\mathbf{P}(t,u)_{23x68} =$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{62} \\ \mathbf{P}_{63} \\ \mathbf{U}_{62} \\ \mathbf{U}_{63} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{62} & \mathbf{P}_{72} & \mathbf{P}_{82} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (32)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{P}(6/8,2/8)=k_{00} & \mathbf{P}(7/8,2/8)=k_{01} & \mathbf{P}(1,2/8)=k_{02} \\
\mathbf{P}(6/8,3/8)=k_{10} & \mathbf{P}(7/8,3/8)=k_{11} & \mathbf{P}(1,3/8)=k_{12} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(6/8,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(7/8,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(1,2/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{22} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(6/8,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(7/8,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(1,3/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{32}
\end{array} \qquad (33)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuacion anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{23x68}=\begin{pmatrix} b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P}_{62} & \mathbf{P}_{72} & \mathbf{P}_{82}\\ \mathbf{P}_{63} & \mathbf{P}_{73} & \mathbf{P}_{83}\\ \mathbf{U}_{62} & \mathbf{U}_{72} & \mathbf{U}_{82}\\ \mathbf{U}_{63} & \mathbf{U}_{73} & \mathbf{U}_{83}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_6\\ a_7\\ a_8\end{pmatrix}=$$

$$\begin{aligned}
&= b_9a_6\mathbf{P}_{62}+b_{10}a_6\mathbf{P}_{63}+b_{11}a_6\mathbf{U}_{62}+b_{12}a_6\mathbf{U}_{63}+\\
&\quad b_9a_7\mathbf{P}_{72}+b_{10}a_7\mathbf{P}_{73}+b_{11}a_7\mathbf{U}_{72}+b_{12}a_7\mathbf{U}_{73}+\\
&\quad b_9a_8\mathbf{P}_{82}+b_{10}a_8\mathbf{P}_{83}+b_{11}a_8\mathbf{U}_{82}+b_{12}a_8\mathbf{U}_{83}
\end{aligned} \qquad (34)$$

Superficie S_{35x02}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x02}=\begin{pmatrix} u^2 & u & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32 & -36 & 10\\ -64 & 64 & -15\\ 32 & -28 & 6\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mathbf{P_{03}}\\ \mathbf{P_{04}}\\ \mathbf{P_{05}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{P_{03}} & \mathbf{P_{13}} & \mathbf{P_{23}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32 & -12 & 1\\ -64 & 16 & 0\\ 32 & -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2\\ t\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} u^2 & u & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32 & -36 & 10\\ -64 & 64 & -15\\ 32 & -28 & 6\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}k_{00} & k_{01} & k_{02}\\ k_{10} & k_{11} & k_{12}\\ k_{20} & k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}32 & -12 & 1\\ -64 & 16 & 0\\ 32 & -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2\\ t\\ 1\end{pmatrix} \qquad (35)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(0,3/8)=k_{00} & \mathbf{P}(1/8,3/8)=k_{01} & \mathbf{P}(2/8,3/8)=k_{02} \\ \mathbf{P}(0,4/8)=k_{10} & \mathbf{P}(1/8,4/8)=k_{11} & \mathbf{P}(2/8,4/8)=k_{12} \\ \mathbf{P}(0,5/8)=k_{20} & \mathbf{P}(1/8,5/8)=k_{21} & \mathbf{P}(2/8,5/8)=k_{22} \end{array} \qquad (36)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x02} = \begin{pmatrix} b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P_{03}} & \mathbf{P_{13}} & \mathbf{P_{23}} \\ \mathbf{P_{04}} & \mathbf{P_{14}} & \mathbf{P_{24}} \\ \mathbf{P_{05}} & \mathbf{P_{15}} & \mathbf{P_{25}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_3 a_0 \mathbf{P}_{03} + b_4 a_0 \mathbf{P}_{04} + b_5 a_0 \mathbf{P}_{05} + \\ &\quad b_3 a_1 \mathbf{P}_{13} + b_4 a_1 \mathbf{P}_{14} + b_5 a_1 \mathbf{P}_{15} + \qquad (37) \\ &\quad b_3 a_2 \mathbf{P}_{23} + b_4 a_2 \mathbf{P}_{24} + b_5 a_2 \mathbf{P}_{25} \end{aligned}$$

Superficie S_{35x23}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x23} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{23}} \\ \mathbf{P_{24}} \\ \mathbf{P_{25}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{23}} & \mathbf{P_{33}} & \mathbf{T_{23}} & \mathbf{T_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (38)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(2/8,3/8)=k_{00} \qquad \mathbf{P}(3/8,3/8)=k_{01}\\
&\mathbf{P}(2/8,4/8)=k_{10} \qquad \mathbf{P}(3/8,4/8)=k_{11}\\
&\mathbf{P}(2/8,5/8)=k_{20} \qquad \mathbf{P}(3/8,5/8)=k_{21}\\
&\frac{\partial\mathbf{P}(2/8,3/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{02} \qquad \frac{\partial\mathbf{P}(3/8,3/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{03}\\
&\frac{\partial\mathbf{P}(2/8,4/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{12} \qquad \frac{\partial\mathbf{P}(3/8,4/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{13}\\
&\frac{\partial\mathbf{P}(2/8,5/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{22} \qquad \frac{\partial\mathbf{P}(3/8,5/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{23}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$
\mathbf{P}(t,u)_{35x23}=\begin{pmatrix} b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{P_{23}} & \mathbf{P_{33}} & \mathbf{T_{23}} & \mathbf{T_{33}} \\ \mathbf{P_{24}} & \mathbf{P_{24}} & \mathbf{T_{24}} & \mathbf{T_{34}} \\ \mathbf{P_{25}} & \mathbf{P_{35}} & \mathbf{T_{25}} & \mathbf{T_{35}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}=
$$

$$
\begin{aligned}
&=b_3a_9\mathbf{P_{23}}+b_4a_9\mathbf{P_{24}}+b_5a_9\mathbf{P_{25}}+\\
&\quad b_3a_{10}\mathbf{P_{33}}+b_4a_{10}\mathbf{P_{34}}+b_5a_{10}\mathbf{P_{35}}+\\
&\quad b_3a_{11}\mathbf{T_{23}}+b_4a_{11}\mathbf{T_{24}}+b_5a_{11}\mathbf{T_{25}}+\\
&\quad b_3a_{12}\mathbf{T_{33}}+b_4a_{12}\mathbf{T_{34}}+b_5a_{12}\mathbf{T_{35}}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

<u>Superficie S_{35x35}</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,u)_{35x235}&=\begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} \mathbf{P_{33}} \\ \mathbf{P_{34}} \\ \mathbf{P_{35}} \end{pmatrix}\\
&\quad\begin{pmatrix} \mathbf{P_{33}} & \mathbf{P_{43}} & \mathbf{P_{53}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}=\\
&=\begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}\\
&\quad\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(3/8,3/8)=k_{00} & \mathbf{P}(4/8,3/8)=k_{01} & \mathbf{P}(5/8,3/8)=k_{02} \\ \mathbf{P}(3/8,4/8)=k_{10} & \mathbf{P}(4/8,4/8)=k_{11} & \mathbf{P}(5/8,4/8)=k_{12} \\ \mathbf{P}(3/8,5/8)=k_{20} & \mathbf{P}(4/8,5/8)=k_{21} & \mathbf{P}(5/8,5/8)=k_{22} \end{array} \qquad (42)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u)_{35x235} &= \begin{pmatrix} b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P_{33}} & \mathbf{P_{43}} & \mathbf{P_{53}} \\ \mathbf{P_{34}} & \mathbf{P_{44}} & \mathbf{P_{54}} \\ \mathbf{P_{35}} & \mathbf{P_{45}} & \mathbf{P_{55}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \\ &= b_3a_3\mathbf{P_{33}} + b_4a_3\mathbf{P_{34}} + b_5a_3\mathbf{P_{35}} + \\ &\quad b_3a_4\mathbf{P_{43}} + b_4a_4\mathbf{P_{44}} + b_5a_4\mathbf{P_{45}} + \qquad (43) \\ &\quad b_3a_5\mathbf{P_{53}} + b_4a_5\mathbf{P_{54}} + b_5a_5\mathbf{P_{55}} \end{aligned}$$

<u>Superficie S_{35x56}</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t,u)_{35x56} &= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{53}} \\ \mathbf{P_{54}} \\ \mathbf{P_{55}} \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{53} & \mathbf{P}_{63} & \mathbf{T}_{53} & \mathbf{T}_{63} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (44) \end{aligned}$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(5/8,3/8)=k_{00} & \mathbf{P}(6/8,3/8)=k_{01} \\
\mathbf{P}(5/8,4/8)=k_{10} & \mathbf{P}(6/8,4/8)=k_{11} \\
\mathbf{P}(5/8,5/8)=k_{20} & \mathbf{P}(6/8,5/8)=k_{21} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(5/8,3/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(6/8,3/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{03} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(5/8,4/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(6/8,4/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{13} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(5/8,5/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(6/8,5/8)}{\partial t}=\mathrm{k}_{23}
\end{array}
\qquad (45)
$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$
\mathbf{P}\mathit{(t,u)}_{35x56}=\begin{pmatrix} b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{P_{53}} & \mathbf{P_{63}} & \mathbf{T_{53}} & \mathbf{T_{63}} \\ \mathbf{P_{54}} & \mathbf{P_{64}} & \mathbf{T_{54}} & \mathbf{T_{64}} \\ \mathbf{P_{55}} & \mathbf{P_{65}} & \mathbf{T_{55}} & \mathbf{T_{65}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix}=
$$

$$
\begin{aligned}
&= b_3a_{13}\mathbf{P_{53}}+b_4a_{13}\mathbf{P_{54}}+b_5a_{13}\mathbf{P_{55}}+ \\
&\quad b_3a_{14}\mathbf{P_{63}}+b_4a_{14}\mathbf{P_{64}}+b_5a_{14}\mathbf{P_{65}}+ \\
&\quad b_3a_{15}\mathbf{T_{53}}+b_4a_{15}\mathbf{T_{54}}+b_5a_{15}\mathbf{T_{55}}+ \\
&\quad b_3a_{16}\mathbf{T_{63}}+b_4a_{16}\mathbf{T_{64}}+b_5a_{16}\mathbf{T_{65}}
\end{aligned}
\qquad (46)
$$

<u>Superfície S_{35x68}</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$
\mathbf{P}\mathit{(t,u)}_{35x68}=\begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} \mathbf{P_{63}} \\ \mathbf{P_{64}} \\ \mathbf{P_{65}} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{P_{63}} & \mathbf{P_{73}} & \mathbf{P_{83}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (47)
$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll}\mathbf{P}(6/8,3/8)=k_{00} & \mathbf{P}(7/8,3/8)=k_{01} & \mathbf{P}(1,3/8)=k_{02}\\ \mathbf{P}(6/8,4/8)=k_{10} & \mathbf{P}(7/8,4/8)=k_{11} & \mathbf{P}(1,4/8)=k_{12}\\ \mathbf{P}(6/8,5/8)=k_{20} & \mathbf{P}(7/8,5/8)=k_{21} & \mathbf{P}(1,5/8)=k_{22}\end{array} \qquad (48)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{35x68}=\begin{pmatrix} b_3 & b_4 & b_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{P_{63}} & \mathbf{P_{73}} & \mathbf{P_{83}}\\ \mathbf{P_{64}} & \mathbf{P_{74}} & \mathbf{P_{84}}\\ \mathbf{P_{65}} & \mathbf{P_{75}} & \mathbf{P_{85}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_6\\ a_7\\ a_8\end{pmatrix}=$$

$$\begin{aligned}&=b_3a_6\mathbf{P_{63}}+b_4a_6\mathbf{P_{64}}+b_5a_6\mathbf{P_{65}}+\\ &\quad b_3a_7\mathbf{P_{73}}+b_4a_7\mathbf{P_{74}}+b_5a_7\mathbf{P_{75}}+\\ &\quad b_3a_8\mathbf{P_{83}}+b_4a_8\mathbf{P_{84}}+b_5a_8\mathbf{P_{85}}\end{aligned} \qquad (49)$$

<u>Superficie S_{56x02}</u>

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{56x02}=\begin{pmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1024 & -2112 & 1440 & -324\\ -1024 & 2112 & -1440 & 325\\ 64 & -136 & 96 & -45/2\\ 64 & -128 & 85 & -75/4\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\mathbf{P_{05}}\\ \mathbf{P_{06}}\\ \mathbf{U_{05}}\\ \mathbf{U_{06}}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{P_{05}} & \mathbf{P_{15}} & \mathbf{P_{25}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}32 & -12 & 1\\ -64 & 16 & 0\\ 32 & -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^2\\ t\\ 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1024 & -2112 & 1440 & -324\\ -1024 & 2112 & -1440 & 325\\ 64 & -136 & 96 & -45/2\\ 64 & -128 & 85 & -75/4\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}k_{00} & k_{01} & k_{02}\\ k_{10} & k_{11} & k_{12}\\ k_{20} & k_{21} & k_{22}\\ k_{30} & k_{31} & k_{32}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}32 & -12 & 1\\ -64 & 16 & 0\\ 32 & -4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^2\\ t\\ 1\end{pmatrix} \qquad (50)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{P}(0,5/8)=k_{00} & \mathbf{P}(1/8,5/8)=k_{01} & \mathbf{P}(2/8,5/8)=k_{02} \\
\mathbf{P}(0,6/8)=k_{10} & \mathbf{P}(1/8,6/8)=k_{11} & \mathbf{P}(2/8,6/8)=k_{12} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(0,5/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(1/8,5/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(2/8,5/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{22} \\
\dfrac{\partial\mathbf{P}(0,6/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(1/8,6/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial\mathbf{P}(2/8,6/8)}{\partial u}=\mathrm{k}_{32}
\end{array} \qquad (51)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t,u)_{56x02} &= \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P_{05}} & \mathbf{P_{15}} & \mathbf{P_{25}} \\ \mathbf{P_{06}} & \mathbf{P_{16}} & \mathbf{P_{26}} \\ \mathbf{U_{05}} & \mathbf{U_{15}} & \mathbf{U_{25}} \\ \mathbf{U_{06}} & \mathbf{U_{16}} & \mathbf{U_{26}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \\
&= b_{13}a_0\mathbf{P_{05}} + b_{14}a_0\mathbf{P_{06}} + b_{15}a_0\mathbf{U_{05}} + b_{16}a_0\mathbf{U_{06}} + \\
&\quad b_{13}a_1\mathbf{P_{15}} + b_{14}a_1\mathbf{P_{16}} + b_{15}a_1\mathbf{U_{15}} + b_{16}a_1\mathbf{U_{16}} + \\
&\quad b_{13}a_2\mathbf{P_{25}} + b_{14}a_2\mathbf{P_{26}} + b_{15}a_2\mathbf{U_{25}} + b_{16}a_2\mathbf{U_{26}}
\end{aligned} \qquad (52)$$

Superficie S_{56x23}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{56x02} = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{25}} \\ \mathbf{P_{26}} \\ \mathbf{U_{25}} \\ \mathbf{U_{26}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{25}} & \mathbf{P_{35}} & \mathbf{T_{25}} & \mathbf{T_{35}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{33} & k_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (53)$$

Los componentes de la matriz Kij se comprueba que serían:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(2/8,5/8) = k_{00} && \mathbf{P}(2/8,5/8) = k_{01} \\
&\mathbf{P}(2/8,6/8) = k_{10} && \mathbf{P}(2/8,6/8) = k_{11} \\
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,5/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} && \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,5/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} && \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} && \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} \\
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} && \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} \\
&\frac{\partial \mathbf{P^2}(2/8,5/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{22} && \frac{\partial \mathbf{P^2}(3/8,5/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{23} \\
&\frac{\partial \mathbf{P^2}(2/8,6/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{32} && \frac{\partial \mathbf{P^2}(3/8,6/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{33}
\end{aligned} \qquad (54)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{56x23} = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P_{25}} & \mathbf{P_{35}} & \mathbf{T_{25}} & \mathbf{T_{35}} \\ \mathbf{P_{26}} & \mathbf{P_{36}} & \mathbf{T_{26}} & \mathbf{T_{36}} \\ \mathbf{U_{25}} & \mathbf{U_{35}} & \mathbf{E_{25}} & \mathbf{E_{35}} \\ \mathbf{U_{26}} & \mathbf{U_{36}} & \mathbf{E_{26}} & \mathbf{E_{36}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_{13}a_9\mathbf{P_{25}} + b_{14}a_9\mathbf{P_{26}} + b_{15}a_9\mathbf{U_{25}} + b_{16}a_9\mathbf{U_{26}} + \\ &\quad b_{13}a_{10}\mathbf{P_{35}} + b_{14}a_{10}\mathbf{P_{36}} + b_{15}a_{10}\mathbf{U_{35}} + b_{16}a_{10}\mathbf{U_{36}} + \\ &\quad b_{13}a_{11}\mathbf{T_{25}} + b_{14}a_{11}\mathbf{T_{26}} + b_{15}a_{11}\mathbf{E_{25}} + b_{16}a_{11}\mathbf{E_{26}} + \\ &\quad b_{13}a_{12}\mathbf{T_{35}} + b_{14}a_{12}\mathbf{T_{36}} + b_{15}a_{12}\mathbf{E_{35}} + b_{16}a_{12}\mathbf{E_{36}} \end{aligned} \qquad (55)$$

Superficie S_{56x35}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{56x35} = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{35}} \\ \mathbf{P_{36}} \\ \mathbf{U_{35}} \\ \mathbf{U_{36}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{35}} & \mathbf{P_{45}} & \mathbf{P_{55}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (56)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(3/8,5/8) = k_{00} & \mathbf{P}(4/8,5/8) = k_{01} & \mathbf{P}(5/8,5/8) = k_{02} \\ \mathbf{P}(3/8,6/8) = k_{10} & \mathbf{P}(4/8,6/8) = k_{11} & \mathbf{P}(5/8,6/8) = k_{12} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(4/8,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{22} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(4/8,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{32} \end{array} \qquad (57)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{56x35} = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P_{35}} & \mathbf{P_{45}} & \mathbf{P_{55}} \\ \mathbf{P_{36}} & \mathbf{P_{46}} & \mathbf{P_{56}} \\ \mathbf{U_{35}} & \mathbf{U_{45}} & \mathbf{U_{55}} \\ \mathbf{U_{36}} & \mathbf{U_{46}} & \mathbf{U_{56}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_{13}a_3\mathbf{P_{35}} + b_{14}a_3\mathbf{P_{36}} + b_{15}a_3\mathbf{U_{35}} + b_{16}a_3\mathbf{U_{36}} + \\ &\quad b_{13}a_4\mathbf{P_{45}} + b_{14}a_4\mathbf{P_{46}} + b_{15}a_4\mathbf{U_{45}} + b_{16}a_4\mathbf{U_{46}} + \\ &\quad b_{13}a_5\mathbf{P_{55}} + b_{14}a_5\mathbf{P_{56}} + b_{15}a_5\mathbf{U_{55}} + b_{16}a_5\mathbf{U_{56}} \end{aligned} \qquad (58)$$

Superficie S_{56x56}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{56x56} = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{55}} \\ \mathbf{P_{56}} \\ \mathbf{U_{55}} \\ \mathbf{U_{56}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{55}} & \mathbf{P_{65}} & \mathbf{T_{55}} & \mathbf{T_{65}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{30} & k_{31} & k_{33} & k_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (59)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{P}(5/8,5/8) = k_{00} & \mathbf{P}(6/8,5/8) = k_{01} \\
\mathbf{P}(5/8,6/8) = k_{10} & \mathbf{P}(6/8,6/8) = k_{11} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,5/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,5/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P^2}(5/8,5/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P^2}(6/8,5/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{23} \\
\dfrac{\partial \mathbf{P^2}(5/8,6/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{32} & \dfrac{\partial \mathbf{P^2}(6/8,6/8)}{\partial t \partial u} = \mathrm{k}_{33}
\end{array}
\qquad (60)
$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$
\mathbf{P}(t,u)_{56x56} = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P_{55}} & \mathbf{P_{65}} & \mathbf{T_{55}} & \mathbf{T_{65}} \\ \mathbf{P_{56}} & \mathbf{P_{66}} & \mathbf{T_{56}} & \mathbf{T_{66}} \\ \mathbf{U_{55}} & \mathbf{U_{65}} & \mathbf{E_{55}} & \mathbf{E_{65}} \\ \mathbf{U_{56}} & \mathbf{U_{66}} & \mathbf{E_{56}} & \mathbf{E_{66}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= b_{13}a_{13}\mathbf{P_{55}} + b_{14}a_{13}\mathbf{P_{56}} + b_{15}a_{13}\mathbf{U_{55}} + b_{16}a_{13}\mathbf{U_{56}} + \\
&\quad b_{13}a_{14}\mathbf{P_{65}} + b_{14}a_{14}\mathbf{P_{66}} + b_{15}a_{14}\mathbf{U_{65}} + b_{16}a_{14}\mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b_{13}a_{15}\mathbf{T_{55}} + b_{14}a_{15}\mathbf{T_{56}} + b_{15}a_{15}\mathbf{E_{55}} + b_{16}a_{15}\mathbf{E_{56}} + \\
&\quad b_{13}a_{16}\mathbf{T_{65}} + b_{14}a_{16}\mathbf{T_{66}} + b_{15}a_{16}\mathbf{E_{65}} + b_{16}a_{16}\mathbf{E_{66}}
\end{aligned}
\qquad (61)
$$

Superficie S_{56x68}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{56x56} = \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P_{65}} \\ \mathbf{P_{66}} \\ \mathbf{U_{65}} \\ \mathbf{U_{66}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P_{66}} & \mathbf{P_{76}} & \mathbf{P_{86}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \\ k_{30} & k_{31} & k_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (62)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(6/8,5/8) = k_{00} & \mathbf{P}(7/8,5/8) = k_{01} & \mathbf{P}(1,5/8) = k_{02} \\ \mathbf{P}(6/8,6/8) = k_{10} & \mathbf{P}(7/8,6/8) = k_{11} & \mathbf{P}(1,6/8) = k_{12} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{20} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(7/8,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{21} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1,5/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{22} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{30} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(7/8,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{31} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(1,6/8)}{\partial u} = \mathrm{k}_{32} \end{array} \qquad (63)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{56x68} = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P_{65}} & \mathbf{P_{75}} & \mathbf{P_{85}} \\ \mathbf{P_{66}} & \mathbf{P_{76}} & \mathbf{P_{86}} \\ \mathbf{U_{65}} & \mathbf{U_{75}} & \mathbf{U_{85}} \\ \mathbf{U_{66}} & \mathbf{U_{76}} & \mathbf{U_{86}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_{13}a_6\mathbf{P_{65}} + b_{14}a_6\mathbf{P_{66}} + b_{15}a_6\mathbf{U_{65}} + b_{16}a_6\mathbf{U_{66}} + \\ &\quad b_{13}a_7\mathbf{P_{75}} + b_{14}a_7\mathbf{P_{76}} + b_{15}a_7\mathbf{U_{75}} + b_{16}a_7\mathbf{U_{76}} + \\ &\quad b_{13}a_8\mathbf{P_{85}} + b_{14}a_8\mathbf{P_{86}} + b_{15}a_8\mathbf{U_{85}} + b_{16}a_8\mathbf{U_{86}} \end{aligned} \qquad (64)$$

Superficie S_{68x02}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x02} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{06} \\ \mathbf{P}_{07} \\ \mathbf{P}_{08} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{06} & \mathbf{P}_{16} & \mathbf{P}_{26} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & -12 & 1 \\ -64 & 16 & 0 \\ 32 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (65)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(0,6/8) = k_{00} & \mathbf{P}(1/8,6/8) = k_{01} & \mathbf{P}(2/8,6/8) = k_{02} \\ \mathbf{P}(0,7/8) = k_{10} & \mathbf{P}(1/8,7/8) = k_{11} & \mathbf{P}(2/8,7/8) = k_{12} \\ \mathbf{P}(0,1) = k_{20} & \mathbf{P}(1/8,1) = k_{21} & \mathbf{P}(2/8,1) = k_{22} \end{array} \qquad (66)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x02} = \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{06} & \mathbf{P}_{16} & \mathbf{P}_{26} \\ \mathbf{P}_{07} & \mathbf{P}_{17} & \mathbf{P}_{27} \\ \mathbf{P}_{08} & \mathbf{P}_{18} & \mathbf{P}_{28} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_6 a_0 \mathbf{P}_{06} + b_7 a_0 \mathbf{P}_{07} + b_8 a_0 \mathbf{P}_{08} + \\ &\quad b_6 a_1 \mathbf{P}_{16} + b_7 a_1 \mathbf{P}_{17} + b_8 a_1 \mathbf{P}_{18} + \qquad (67) \\ &\quad b_6 a_2 \mathbf{P}_{26} + b_7 a_2 \mathbf{P}_{27} + b_8 a_2 \mathbf{P}_{28} \end{aligned}$$

Superficie S_{68x23}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x23} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{26} \\ \mathbf{P}_{27} \\ \mathbf{P}_{28} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{26} & \mathbf{P}_{36} & \mathbf{T}_{26} & \mathbf{T}_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1024 & -960 & 288 & -27 \\ -1024 & 960 & -288 & 28 \\ 64 & -64 & 21 & -9/4 \\ 64 & -56 & 16 & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (68)$$

Los componentes de la matriz Kij se comprueba que serían:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(2/8,6/8) = k_{00} & \mathbf{P}(3/8,6/8) = k_{01} \\ \mathbf{P}(2/8,7/8) = k_{10} & \mathbf{P}(3/8,7/8) = k_{11} \\ \mathbf{P}(2/8,1) = k_{10} & \mathbf{P}(3/8,1) = k_{11} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/8,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/8,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,7/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(2/8,1)}{\partial t} = \mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(3/8,1)}{\partial t} = \mathrm{k}_{23} \end{array} \qquad (69)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x23} = \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{26} & \mathbf{P}_{36} & \mathbf{T}_{26} & \mathbf{T}_{36} \\ \mathbf{P}_{27} & \mathbf{P}_{37} & \mathbf{T}_{27} & \mathbf{T}_{37} \\ \mathbf{P}_{28} & \mathbf{P}_{38} & \mathbf{T}_{28} & \mathbf{T}_{38} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_6 a_9 \mathbf{P}_{26} + b_7 a_9 \mathbf{P}_{27} + b_8 a_9 \mathbf{P}_{28} + \\ &\quad b_6 a_{10} \mathbf{P}_{36} + b_7 a_{10} \mathbf{P}_{37} + b_8 a_{10} \mathbf{P}_{38} + \\ &\quad b_6 a_{11} \mathbf{T}_{26} + b_7 a_{11} \mathbf{T}_{27} + b_8 a_{11} \mathbf{T}_{28} + \\ &\quad b_6 a_{12} \mathbf{T}_{36} + b_7 a_{12} \mathbf{T}_{37} + b_8 a_{12} \mathbf{T}_{38} \end{aligned} \qquad (70)$$

Superficie S_{68x35}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x35} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{36} \\ \mathbf{P}_{37} \\ \mathbf{P}_{38} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{36} & \mathbf{P}_{46} & \mathbf{P}_{56} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & -36 & 10 \\ -64 & 64 & -15 \\ 32 & -28 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (71)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(3/8,6/8) = k_{00} & \mathbf{P}(4/8,6/8) = k_{01} & \mathbf{P}(5/8,6/8) = k_{02} \\ \mathbf{P}(3/8,7/8) = k_{10} & \mathbf{P}(4/8,7/8) = k_{11} & \mathbf{P}(5/8,7/8) = k_{12} \\ \mathbf{P}(3/8,1) = k_{20} & \mathbf{P}(4/8,1) = k_{21} & \mathbf{P}(5/8,1) = k_{22} \end{array} \qquad (72)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x35} = \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{36} & \mathbf{P}_{46} & \mathbf{P}_{56} \\ \mathbf{P}_{37} & \mathbf{P}_{47} & \mathbf{P}_{57} \\ \mathbf{P}_{38} & \mathbf{P}_{48} & \mathbf{P}_{58} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_6 a_3 \mathbf{P}_{36} + b_7 a_3 \mathbf{P}_{37} + b_8 a_3 \mathbf{P}_{38} + \\ &\quad b_6 a_4 \mathbf{P}_{46} + b_7 a_4 \mathbf{P}_{47} + b_8 a_4 \mathbf{P}_{48} + \\ &\quad b_6 a_5 \mathbf{P}_{56} + b_7 a_5 \mathbf{P}_{57} + b_8 a_5 \mathbf{P}_{58} \end{aligned} \qquad (73)$$

Superficie S_{68x56}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x56} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{56} \\ \mathbf{P}_{57} \\ \mathbf{P}_{58} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{56} & \mathbf{P}_{66} & \mathbf{T}_{56} & \mathbf{T}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} & k_{03} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1024 & -2112 & 1440 & -324 \\ -1024 & 2112 & -1440 & 325 \\ 64 & -136 & 96 & -45/2 \\ 64 & -128 & 85 & -75/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (74)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(5/8,6/8) = k_{00} & \mathbf{P}(6/8,6/8) = k_{01} \\ \mathbf{P}(5/8,7/8) = k_{10} & \mathbf{P}(6/8,7/8) = k_{11} \\ \mathbf{P}(5/8,1) = k_{20} & \mathbf{P}(6/8,1) = k_{21} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{02} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{03} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,6/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{12} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,7/8)}{\partial t} = \mathrm{k}_{13} \\ \dfrac{\partial \mathbf{P}(5/8,1)}{\partial t} = \mathrm{k}_{22} & \dfrac{\partial \mathbf{P}(6/8,1)}{\partial t} = \mathrm{k}_{23} \end{array} \qquad (75)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x56} = \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{56} & \mathbf{P}_{66} & \mathbf{T}_{56} & \mathbf{T}_{66} \\ \mathbf{P}_{57} & \mathbf{P}_{67} & \mathbf{T}_{57} & \mathbf{T}_{67} \\ \mathbf{P}_{58} & \mathbf{P}_{68} & \mathbf{T}_{58} & \mathbf{T}_{68} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_6 a_{13}\mathbf{P}_{56} + b_7 a_{13}\mathbf{P}_{57} + b_8 a_{13}\mathbf{P}_{58} + \\ &\quad b_6 a_{14}\mathbf{P}_{66} + b_7 a_{14}\mathbf{P}_{67} + b_8 a_{14}\mathbf{P}_{68} + \\ &\quad b_6 a_{15}\mathbf{T}_{56} + b_7 a_{15}\mathbf{T}_{57} + b_8 a_{15}\mathbf{T}_{58} + \\ &\quad b_6 a_{16}\mathbf{T}_{66} + b_7 a_{16}\mathbf{T}_{67} + b_8 a_{16}\mathbf{T}_{68} \end{aligned} \qquad (76)$$

Suíterficie S_{68x68}

La ecuación de esta superficie sería:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x68} = \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{66} \\ \mathbf{P}_{67} \\ \mathbf{P}_{68} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{66} & \mathbf{P}_{76} & \mathbf{P}_{86} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_{00} & k_{01} & k_{02} \\ k_{10} & k_{11} & k_{12} \\ k_{20} & k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & -60 & 28 \\ -64 & 112 & -48 \\ 32 & -52 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (77)$$

Los componentes de la matriz K_{ij} se comprueba que serían:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}(6/8,6/8) = k_{00} & \mathbf{P}(7/8,6/8) = k_{01} & \mathbf{P}(1,6/8) = k_{02} \\ \mathbf{P}(6/8,7/8) = k_{10} & \mathbf{P}(7/8,7/8) = k_{11} & \mathbf{P}(1,7/8) = k_{12} \\ \mathbf{P}(6/8,1) = k_{20} & \mathbf{P}(7/8,1) = k_{21} & \mathbf{P}(1,1) = k_{22} \end{array} \qquad (78)$$

Llevando estos valores a la matriz K_{ij} la ecuación anterior quedaría como:

$$\mathbf{P}(t,u)_{68x68} = \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{66} & \mathbf{P}_{76} & \mathbf{P}_{86} \\ \mathbf{P}_{67} & \mathbf{P}_{77} & \mathbf{P}_{87} \\ \mathbf{P}_{68} & \mathbf{P}_{78} & \mathbf{P}_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= b_6 a_6 \mathbf{P}_{66} + b_7 a_6 \mathbf{P}_{67} + b_8 a_6 \mathbf{P}_{68} + \\ &\quad b_6 a_7 \mathbf{P}_{76} + b_7 a_7 \mathbf{P}_{77} + b_8 a_7 \mathbf{P}_{78} + \\ &\quad b_6 a_8 \mathbf{P}_{86} + b_7 a_8 \mathbf{P}_{87} + b_8 a_8 \mathbf{P}_{88} \end{aligned} \qquad (79)$$

3.3.4.3.-DEMOSTRACIÓN DE QUE EL CONJUNTO DE LOS PARCHES FORMAN UNA SUPERFICIE LISA

Superficie S_{02x02} con S_{02x23}

La curva en el borde común (t=2/5) a ambos parches es igual:

$$\mathbf{P}(2/8,u)_{02x02} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (b_0 a_0 \mathbf{P}_{00} + b_1 a_0 \mathbf{P}_{01} + b_2 a_0 \mathbf{P}_{02} + \\ &\quad b_0 a_1 \mathbf{P}_{10} + b_1 a_1 \mathbf{P}_{11} + b_2 a_1 \mathbf{P}_{12} + \\ &\quad b_0 a_2 \mathbf{P}_{20} + b_1 a_2 \mathbf{P}_{21} + b_2 a_2 \mathbf{P}_{22})_{t=2/5} = \\ &= b_0 \mathbf{P}_{20} + b_1 \mathbf{P}_{21} + b_2 \mathbf{P}_{22} \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\mathbf{P}(2/8,u)_{02x03} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{30} & \mathbf{T}_{20} & \mathbf{T}_{30} \\ \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{31} & \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{31} \\ \mathbf{P}_{22} & \mathbf{P}_{32} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (b_0 a_9 \mathbf{P}_{20} + b_1 a_9 \mathbf{P}_{21} + b_2 a_9 \mathbf{P}_{22} + \\ &\quad b_0 a_{10} \mathbf{P}_{30} + b_1 a_{10} \mathbf{P}_{31} + b_2 a_{10} \mathbf{P}_{32} + \\ &\quad b_0 a_{11} \mathbf{T}_{20} + b_1 a_{11} \mathbf{T}_{21} + b_2 a_{11} \mathbf{T}_{22} + \\ &\quad b_0 a_{12} \mathbf{T}_{30} + b_1 a_{12} \mathbf{T}_{31} + b_2 a_{12} \mathbf{T}_{32})_{t=2/5} = \\ &= b_0 \mathbf{P}_{20} + b_1 \mathbf{P}_{21} + b_2 \mathbf{P}_{22} \end{aligned} \qquad (2)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,u)_{02x02}}{\partial t} = \\
&= (b_0 a'_0 \mathbf{P}_{00} + b_1 a'_0 \mathbf{P}_{01} + b_2 a'_0 \mathbf{P}_{02} + \\
&\quad b_0 a'_1 \mathbf{P}_{10} + b_1 a'_1 \mathbf{P}_{11} + b_2 a'_1 \mathbf{P}_{12} + \\
&\quad b_0 a'_2 \mathbf{P}_{20} + b_1 a'_2 \mathbf{P}_{21} + b_2 a'_2 \mathbf{P}_{22})_{t=2/8}
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,u)_{02x23}}{\partial t} = \\
&= (b_0 a'_9 \mathbf{P}_{20} + b_1 a'_9 \mathbf{P}_{21} + b_2 a'_9 \mathbf{P}_{22} + \\
&\quad b_0 a'_{10} \mathbf{P}_{30} + b_1 a'_{10} \mathbf{P}_{31} + b_2 a'_{10} \mathbf{P}_{32} + \\
&\quad b_0 a'_{11} \mathbf{T}_{20} + b_1 a'_{11} \mathbf{T}_{21} + b_2 a'_{11} \mathbf{T}_{22} + \\
&\quad b_0 a'_{12} \mathbf{T}_{30} + b_1 a'_{12} \mathbf{T}_{31} + b_2 a'_{12} \mathbf{T}_{32})_{t=2/8} = \\
&= b_0 \mathbf{T}_{20} + b_1 \mathbf{T}_{21} + b_2 \mathbf{T}_{22}
\end{aligned} \tag{4}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}_{20} = \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,0)_{02x02}}{\partial t} = \\
&= (b_0 a'_0 \mathbf{P}_{00} + b_1 a'_0 \mathbf{P}_{01} + b_2 a'_0 \mathbf{P}_{02} + \\
&\quad b_0 a'_1 \mathbf{P}_{10} + b_1 a'_1 \mathbf{P}_{11} + b_2 a'_1 \mathbf{P}_{12} + \\
&\quad b_0 a'_2 \mathbf{P}_{20} + b_1 a'_2 \mathbf{P}_{21} + b_2 a'_2 \mathbf{P}_{22})_{t=2/8,u=0} = \\
&= (a'_0 \mathbf{P}_{00} + a'_1 \mathbf{P}_{10} + a'_2 \mathbf{P}_{20})_{t=2/8}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}_{21} = \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,1/8)_{02x02}}{\partial t} = \\
&= (b_0 a'_0 \mathbf{P}_{00} + b_1 a'_0 \mathbf{P}_{01} + b_2 a'_0 \mathbf{P}_{02} + \\
&\quad b_0 a'_1 \mathbf{P}_{10} + b_1 a'_1 \mathbf{P}_{11} + b_2 a'_1 \mathbf{P}_{12} + \\
&\quad b_0 a'_2 \mathbf{P}_{20} + b_1 a'_2 \mathbf{P}_{21} + b_2 a'_2 \mathbf{P}_{22})_{t=2/8,u=1/8} = \\
&= (a'_0 \mathbf{P}_{01} + a'_1 \mathbf{P}_{11} + a'_2 \mathbf{P}_{21})_{t=2/8}
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}_{22} = \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,2/8)_{02x02}}{\partial t} = \\
&= (b_0 a'_0 \mathbf{P}_{00} + b_1 a'_0 \mathbf{P}_{01} + b_2 a'_0 \mathbf{P}_{02} + \\
&\quad b_0 a'_1 \mathbf{P}_{10} + b_1 a'_1 \mathbf{P}_{11} + b_2 a'_1 \mathbf{P}_{12} + \\
&\quad b_0 a'_2 \mathbf{P}_{20} + b_1 a'_2 \mathbf{P}_{21} + b_2 a'_2 \mathbf{P}_{22})_{t=2/8,u=2/8} = \\
&= (a'_0 \mathbf{P}_{02} + a'_1 \mathbf{P}_{12} + a'_2 \mathbf{P}_{22})_{t=2/8}
\end{aligned} \tag{7}$$

Entrando con estos valores en (4) sale (3), luego (3) y (4) son iguales c.q.d.

Superficie S_{02x02} con S_{23x02}

La curva en el borde común (u = 2/8) a ambos parches es igual:

$$\mathbf{P}(\mathrm{t},2/8)_{02x02} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{00} & \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{02} \\ \mathbf{P}_{10} & \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{20} & \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (b_0 a_0 \mathbf{P}_{00} + b_1 a_0 \mathbf{P}_{01} + b_2 a_0 \mathbf{P}_{02} + \\ &\quad b_0 a_1 \mathbf{P}_{10} + b_1 a_1 \mathbf{P}_{11} + b_2 a_1 \mathbf{P}_{12} + \\ &\quad b_0 a_2 \mathbf{P}_{20} + b_1 a_2 \mathbf{P}_{21} + b_2 a_2 \mathbf{P}_{22})_{u=2/8} = \\ &= a_0 \mathbf{P}_{02} + a_1 \mathbf{P}_{12} + a_2 \mathbf{P}_{22} \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\mathbf{P}(t,2/8)_{23x02} = \begin{pmatrix} b_9 & b_{10} & b_{11} & b_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{02} & \mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{22} \\ \mathbf{P}_{03} & \mathbf{P}_{13} & \mathbf{P}_{23} \\ \mathbf{U}_{02} & \mathbf{U}_{12} & \mathbf{U}_{22} \\ \mathbf{U}_{03} & \mathbf{U}_{13} & \mathbf{U}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (b_9 a_0 \mathbf{P}_{02} + b_{10} a_0 \mathbf{P}_{03} + b_{11} a_0 \mathbf{U}_{02} + b_{12} a_0 \mathbf{U}_{03} + \\ &b_9 a_1 \mathbf{P}_{12} + b_{10} a_1 \mathbf{P}_{13} + b_{11} a_1 \mathbf{U}_{12} + b_{12} a_1 \mathbf{U}_{13} + \\ &b_9 a_2 \mathbf{P}_{22} + b_{10} a_2 \mathbf{P}_{23} + b_{11} a_2 \mathbf{U}_{22} + b_{12} a_2 \mathbf{U}_{23})_{u=2/8} = \\ &= a_0 \mathbf{P}_{02} + a_1 \mathbf{P}_{12} + a_2 \mathbf{P}_{22} \end{aligned} \qquad (9)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,2/8)_{02x02}}{\partial u} = \\
&= (b_0 a'_0 \mathbf{P}_{00} + b_1 a'_0 \mathbf{P}_{01} + b_2 a'_0 \mathbf{P}_{02} + \\
&\quad b_0 a'_1 \mathbf{P}_{10} + b_1 a'_1 \mathbf{P}_{11} + b_2 a'_1 \mathbf{P}_{12} + \\
&\quad b_0 a'_2 \mathbf{P}_{20} + b_1 a'_2 \mathbf{P}_{21} + b_2 a'_2 \mathbf{P}_{22})_{u=2/8}
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,2/8)_{23x02}}{\partial u} = \\
&= (b'_9 a_0 \mathbf{P}_{02} + b'_{10} a_0 \mathbf{P}_{03} + b'_{11} a_0 \mathbf{U}_{02} + b'_{12} a_0 \mathbf{U}_{03} + \\
&\quad b'_9 a_1 \mathbf{P}_{12} + b'_{10} a_1 \mathbf{P}_{13} + b'_{11} a_1 \mathbf{U}_{12} + b'_{12} a_1 \mathbf{U}_{13} + \\
&\quad b'_9 a_2 \mathbf{P}_{22} + b'_{10} a_2 \mathbf{P}_{23} + b'_{11} a_2 \mathbf{U}_{22} + b'_{12} a_2 \mathbf{U}_{23})_{u=2/8} = \\
&= a_0 \mathbf{U}_{02} + a_1 \mathbf{U}_{12} + a_2 \mathbf{U}_{22}
\end{aligned} \tag{11}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{02} &= \frac{\partial \mathbf{P}(0,2/8)_{02x02}}{\partial u} = (b'_0 \mathbf{P}_{00} + b'_1 \mathbf{P}_{01} + b'_2 \mathbf{P}_{02})_{u=2/8} \\
\mathbf{U}_{12} &= \frac{\partial \mathbf{P}(1/8,2/8)_{02x02}}{\partial u} = (b'_0 \mathbf{P}_{10} + b'_1 \mathbf{P}_{11} + b'_2 \mathbf{P}_{12})_{u=2/8} \\
\mathbf{U}_{22} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,2/8)_{02x02}}{\partial u} = (b'_0 \mathbf{P}_{20} + b'_1 \mathbf{P}_{21} + b'_2 \mathbf{P}_{22})_{u=2/8}
\end{aligned} \tag{12}$$

Entrando con estos valores en (11) sale (10), luego (10) y (11) son iguales e.q.d.

Superficie S_{02x23} con S_{23x23}

La curva en el borde común (u = 2/8) a ambos parches es igual:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,2/8)_{02x03} = \\
&= (b_0 a_9 \mathbf{P}_{20} + b_1 a_9 \mathbf{P}_{21} + b_2 a_9 \mathbf{P}_{22} + \\
&\quad b_0 a_{10} \mathbf{P}_{30} + b_1 a_{10} \mathbf{P}_{31} + b_2 a_{10} \mathbf{P}_{32} + \\
&\quad b_0 a_{11} \mathbf{T}_{20} + b_1 a_{11} \mathbf{T}_{21} + b_2 a_{11} \mathbf{T}_{22} + \\
&\quad b_0 a_{12} \mathbf{T}_{30} + b_1 a_{12} \mathbf{T}_{31} + b_2 a_{12} \mathbf{T}_{32})_{u=2/8} = \\
&= a_9 \mathbf{P}_{22} + a_{10} \mathbf{P}_{32} + a_{11} \mathbf{T}_{22} + a_{12} \mathbf{T}_{32} \qquad (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,2/8)_{23x23} = \\
&= (b_9 a_9 \mathbf{P}_{22} + b_{10} a_9 \mathbf{P}_{23} + b_{11} a_9 \mathbf{U}_{22} + b_{12} a_9 \mathbf{U}_{23} + \\
&\quad b_9 a_{10} \mathbf{P}_{32} + b_{10} a_{10} \mathbf{P}_{33} + b_{11} a_{10} \mathbf{U}_{32} + b_{12} a_{10} \mathbf{U}_{33} + \\
&\quad b_9 a_{11} \mathbf{T}_{22} + b_{10} a_{11} \mathbf{T}_{23} + b_{11} a_{11} \mathbf{E}_{22} + b_{12} a_{11} \mathbf{E}_{23} + \qquad 14 \\
&\quad b_9 a_{12} \mathbf{T}_{32} + b_{10} a_{12} \mathbf{T}_{33} + b_{11} a_{12} \mathbf{E}_{32} + b_{12} a_{12} \mathbf{E}_{33})_{u=2/8} = \\
&= a_9 \mathbf{P}_{22} + a_{10} \mathbf{P}_{32} + a_{11} \mathbf{T}_{22} + a_{12} \mathbf{T}_{32}
\end{aligned}
$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,2/8)_{02x03}}{\partial u} = \\
&= (b'_0 a_9 \mathbf{P}_{20} + b'_1 a_9 \mathbf{P}_{21} + b'_2 a_9 \mathbf{P}_{22} + \\
&\quad b'_0 a_{10} \mathbf{P}_{30} + b'_1 a_{10} \mathbf{P}_{31} + b'_2 a_{10} \mathbf{P}_{32} + \\
&\quad b'_0 a_{11} \mathbf{T}_{20} + b'_1 a_{11} \mathbf{T}_{21} + b'_2 a_{11} \mathbf{T}_{22} + \\
&\quad b'_0 a_{12} \mathbf{T}_{30} + b'_1 a_{12} \mathbf{T}_{31} + b'_2 a_{12} \mathbf{T}_{32})_{u=2/8} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,2/8)_{23x23}}{\partial u} = \\
&= (b'_9 a_9 \mathbf{P}_{22} + b'_{10} a_9 \mathbf{P}_{23} + b'_{11} a_9 \mathbf{U}_{22} + b'_{12} a_9 \mathbf{U}_{23} + \\
&\quad b'_9 a_{10} \mathbf{P}_{32} + b'_{10} a_{10} \mathbf{P}_{33} + b'_{11} a_{10} \mathbf{U}_{32} + b'_{12} a_{10} \mathbf{U}_{33} + \\
&\quad b'_9 a_{11} \mathbf{T}_{22} + b'_{10} a_{11} \mathbf{T}_{23} + b'_{11} a_{11} \mathbf{E}_{22} + b'_{12} a_{11} \mathbf{E}_{23} + \qquad (16) \\
&\quad b'_9 a_{12} \mathbf{T}_{32} + b'_{10} a_{12} \mathbf{T}_{33} + b'_{11} a_{12} \mathbf{E}_{32} + b'_{12} a_{12} \mathbf{E}_{33})_{u=2/8} = \\
&= a_9 \mathbf{U}_{22} + a_{10} \mathbf{U}_{32} + a_{11} \mathbf{E}_{22} + a_{12} \mathbf{E}_{32}
\end{aligned}
$$

Pero como:

$$\mathbf{U}_{22}=\frac{\partial\mathbf{P}(2/8,2/8)_{02x03}}{\partial u}=(b'_0\mathbf{P}_{20}+b'_1\mathbf{P}_{21}+b'_2\mathbf{P}_{22})_{u=2/8}$$
$$\mathbf{U}_{32}=\frac{\partial\mathbf{P}(3/8,2/8)_{02x03}}{\partial u}=(b'_0\mathbf{P}_{30}+b'_1\mathbf{P}_{31}+b'_2\mathbf{P}_{32})_{u=2/8}$$
$$\mathbf{E}_{22}=\frac{\partial^2\mathbf{P}(2/8,2/8)_{02x03}}{\partial t\partial u}=(b'_0\mathbf{T}_{20}+b'_1\mathbf{T}_{21}+b'_2\mathbf{T}_{22})_{u=2/8} \qquad (17)$$
$$\mathbf{E}_{32}=\frac{\partial^2\mathbf{P}(3/8,2/8)_{02x03}}{\partial t\partial u}=(b'_0\mathbf{T}_{30}+b'_1\mathbf{T}_{31}+b'_2\mathbf{T}_{32})_{u=2/8}$$

Entrando con estos valores en (16) sale (15), luego (15) y (16) son iguales c.q.d.

Superficie S_{02x23} con S_{02x35}

La curva en el borde común (t = 3/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(3/8,u)_{02x03}&=(b_0a_9\mathbf{P}_{20}+b_1a_9\mathbf{P}_{21}+b_2a_9\mathbf{P}_{22}+\\&b_0a_{10}\mathbf{P}_{30}+b_1a_{10}\mathbf{P}_{31}+b_2a_{10}\mathbf{P}_{32}+\\&b_0a_{11}\mathbf{T}_{20}+b_1a_{11}\mathbf{T}_{21}+b_2a_{11}\mathbf{T}_{22}+\\&b_0a_{12}\mathbf{T}_{30}+b_1a_{12}\mathbf{T}_{31}+b_2a_{12}\mathbf{T}_{32})_{t=3/8}=\\&=b_0\mathbf{P}_{30}+b_1\mathbf{P}_{31}+b_2\mathbf{P}_{32} \qquad (18)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(3/8,u)_{02x35}&=(b_0a_3\mathbf{P}_{30}+b_1a_3\mathbf{P}_{31}+b_2a_3\mathbf{P}_{32}+\\&b_0a_4\mathbf{P}_{40}+b_1a_4\mathbf{P}_{41}+b_2a_4\mathbf{P}_{42}+\\&b_0a_5\mathbf{P}_{50}+b_1a_5\mathbf{P}_{51}+b_2a_5\mathbf{P}_{52})_{t=3/8}=\\&=b_0\mathbf{P}_{30}+b_1\mathbf{P}_{31}+b_2\mathbf{P}_{32} \qquad (19)\end{aligned}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\frac{\partial (3/8,u)_{02x03}}{\partial t} = (b_0 a'_9 \mathbf{P}_{20} + b_1 a'_9 \mathbf{P}_{21} + b_2 a'_9 \mathbf{P}_{22} +$$
$$b_0 a'_{10} \mathbf{P}_{30} + b_1 a'_{10} \mathbf{P}_{31} + b_2 a'_{10} \mathbf{P}_{32} +$$
$$b_0 a'_{11} \mathbf{T}_{20} + b_1 a'_{11} \mathbf{T}_{21} + b_2 a'_{11} \mathbf{T}_{22} +$$
$$b_0 a'_{12} \mathbf{T}_{30} + b_1 a'_{12} \mathbf{T}_{31} + b_2 a'_{12} \mathbf{T}_{32})_{t=3/8} =$$
$$= b_0 \mathbf{T}_{30} + b_1 \mathbf{T}_{31} + b_2 \mathbf{T}_{32} \qquad (20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}(3/8,u)_{02x35}}{\partial t} = (b_0 a'_3 \mathbf{P}_{30} + b_1 a'_3 \mathbf{P}_{31} + b_2 a'_3 \mathbf{P}_{32} +$$
$$b_0 a'_4 \mathbf{P}_{40} + b_1 a'_4 \mathbf{P}_{41} + b_2 a'_4 \mathbf{P}_{42} +$$
$$b_0 a'_5 \mathbf{P}_{50} + b_1 a'_5 \mathbf{P}_{51} + b_2 a'_5 \mathbf{P}_{52})_{t=3/8} \qquad (21)$$

Pero como:

$$\mathbf{T}_{30} = \frac{\partial (3/8,0)_{02x35}}{\partial t} = (a'_3 \mathbf{P}_{30} + a'_4 \mathbf{P}_{40} + a'_5 \mathbf{P}_{50})_{t=3/8}$$
$$\mathbf{T}_{31} = \frac{\partial (3/8,1/8)_{02x35}}{\partial t} = (a'_3 \mathbf{P}_{31} + a'_4 \mathbf{P}_{41} + a'_5 \mathbf{P}_{51})_{t=3/8} \qquad (22)$$
$$\mathbf{T}_{32} = \frac{\partial (3/8,2/8)_{02x35}}{\partial t} = (a'_3 \mathbf{P}_{32} + a'_4 \mathbf{P}_{42} + a'_5 \mathbf{P}_{52})_{t=3/8}$$

Entrando con estos valores en (20) sale (21), luego (20) y (21) son iguales c.q.d.

Superficie S_{02x35} con S_{23x35}

La curva en el borde común (u= 2/8) a ambos parches es igual:

$$\mathbf{P}(t,2/8)_{02x35} = (b_0 a_3 \mathbf{P}_{30} + b_1 a_3 \mathbf{P}_{31} + b_2 a_3 \mathbf{P}_{32} +$$
$$b_0 a_4 \mathbf{P}_{40} + b_1 a_4 \mathbf{P}_{41} + b_2 a_4 \mathbf{P}_{42} +$$
$$b_0 a_5 \mathbf{P}_{50} + b_1 a_5 \mathbf{P}_{51} + b_2 a_5 \mathbf{P}_{52})_{u=2/8} =$$
$$= a_3 \mathbf{P}_{32} + a_4 \mathbf{P}_{42} + a_5 \mathbf{P}_{52} \qquad (23)$$

$$\mathbf{P}(t,2/8)_{23x35} = (b_9 a_3 \mathbf{P}_{32} + b_{10} a_3 \mathbf{P}_{33} + b_{11} a_3 \mathbf{U}_{32} + b_{12} a_3 \mathbf{U}_{33} +$$
$$b_9 a_4 \mathbf{P}_{42} + b_{10} a_4 \mathbf{P}_{43} + b_{11} a_4 \mathbf{U}_{42} + b_{12} a_4 \mathbf{U}_{43} +$$
$$b_9 a_5 \mathbf{P}_{52} + b_{10} a_5 \mathbf{P}_{53} + b_{11} a_5 \mathbf{U}_{52} + b_{12} a_5 \mathbf{U}_{53})_{u=2/8} =$$
$$= a_3 \mathbf{P}_{32} + a_4 \mathbf{P}_{42} + a_5 \mathbf{P}_{52} \qquad (24)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t,2/8)_{02x35}}{\partial u} =$$

$$= (b'_0 a_3 \mathbf{P}_{30} + b'_1 a_3 \mathbf{P}_{31} + b'_2 a_3 \mathbf{P}_{32} + b'_0 a_4 \mathbf{P}_{40} + b'_1 a_4 \mathbf{P}_{41} + b'_2 a_4 \mathbf{P}_{42} + b'_0 a_5 \mathbf{P}_{50} + b'_1 a_5 \mathbf{P}_{51} + b'_2 a_5 \mathbf{P}_{52})_{u=2/8} \qquad (25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t,2/8)_{23x35}}{\partial u} =$$

$$=(b'_9 a_3 \mathbf{P}_{32} + b'_{10} a_3 \mathbf{P}_{33} + b'_{11} a_3 \mathbf{U}_{32} + b'_{12} a_3 \mathbf{U}_{33} + b'_9 a_4 \mathbf{P}_{42} + b'_{10} a_4 \mathbf{P}_{43} + b'_{11} a_4 \mathbf{U}_{42} + b'_{12} a_4 \mathbf{U}_{43} + b'_9 a_5 \mathbf{P}_{52} + b'_{10} a_5 \mathbf{P}_{53} + b'_{11} a_5 \mathbf{U}_{52} + b'_{12} a_5 \mathbf{U}_{53})_{u=2/8} =$$

$$= a_3 \mathbf{P}_{32} + a_4 \mathbf{P}_{42} + a_5 \mathbf{P}_{52} \qquad (26)$$

Pero como:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{32} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,2/8)_{02x35}}{\partial u} = (b'_0 \mathbf{P}_{30} + b'_1 \mathbf{P}_{31} + b'_2 \mathbf{P}_{32})_{u=2/8} \\ \mathbf{U}_{42} &= \frac{\partial \mathbf{P}(4/8,2/8)_{02x35}}{\partial u} = (b'_0 \mathbf{P}_{40} + b'_1 \mathbf{P}_{51} + b'_2 \mathbf{P}_{42})_{u=2/8} \\ \mathbf{U}_{52} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,2/8)_{02x35}}{\partial u} = (b'_0 \mathbf{P}_{50} + b'_1 \mathbf{P}_{51} + b'_2 \mathbf{P}_{52})_{u=2/8} \end{aligned} \qquad (27)$$

Entrando con estos valores en (26) sale (25), luego (25) y (26) son iguales c.q.d.

Superficie S_{02x35} con S_{02x56}

La curva en el borde común (t = 5/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(5/8,u)_{02x35} = \\
&= (b_0 a_3 \mathbf{P}_{30} + b_1 a_3 \mathbf{P}_{31} + b_2 a_3 \mathbf{P}_{32} + \\
&\quad b_0 a_4 \mathbf{P}_{40} + b_1 a_4 \mathbf{P}_{41} + b_2 a_4 \mathbf{P}_{42} + \\
&\quad b_0 a_5 \mathbf{P}_{50} + b_1 a_5 \mathbf{P}_{51} + b_2 a_5 \mathbf{P}_{52})_{u=5/8} = \\
&= b_0 \mathbf{P}_{50} + b_1 \mathbf{P}_{51} + b_2 \mathbf{P}_{52} \qquad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(5/8,u)_{02x56} = \\
&(b_0 a_{13} \mathbf{P}_{50} + b_1 a_{13} \mathbf{P}_{51} + b_2 a_{13} \mathbf{P}_{52} + \\
&\quad b_0 a_{14} \mathbf{P}_{60} + b_1 a_{14} \mathbf{P}_{61} + b_2 a_{14} \mathbf{P}_{62} + \\
&\quad b_0 a_{15} \mathbf{T}_{50} + b_1 a_{15} \mathbf{T}_{51} + b_2 a_{15} \mathbf{T}_{52} + \\
&\quad b_0 a_{16} \mathbf{T}_{60} + b_1 a_{16} \mathbf{T}_{61} + b_2 a_{16} \mathbf{T}_{62})_{t=5/8} = \\
&= b_0 \mathbf{P}_{50} + b_1 \mathbf{P}_{51} + b_2 \mathbf{P}_{52} \qquad (29)
\end{aligned}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(5/8,u)_{02x35}}{\partial t} = \\
&(b'_0 a_3 \mathbf{P}_{30} + b'_1 a_3 \mathbf{P}_{31} + b'_2 a_3 \mathbf{P}_{32} + \\
&\quad b'_0 a_4 \mathbf{P}_{40} + b'_1 a_4 \mathbf{P}_{41} + b'_2 a_4 \mathbf{P}_{42} + \\
&\quad b'_0 a_5 \mathbf{P}_{50} + b'_1 a_5 \mathbf{P}_{51} + b'_2 a_5 \mathbf{P}_{52})_{u=5/8} \qquad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(5/8,u)_{02x56}}{\partial t} = \\
&(b_0 a'_{13} \mathbf{P}_{50} + b_1 a'_{13} \mathbf{P}_{51} + b_2 a'_{13} \mathbf{P}_{52} + \\
&\quad b_0 a'_{14} \mathbf{P}_{60} + b_1 a'_{14} \mathbf{P}_{61} + b_2 a'_{14} \mathbf{P}_{62} + \\
&\quad b_0 a'_{15} \mathbf{T}_{50} + b_1 a'_{15} \mathbf{T}_{51} + b_2 a'_{15} \mathbf{T}_{52} + \\
&\quad b_0 a'_{16} \mathbf{T}_{60} + b_1 a'_{16} \mathbf{T}_{61} + b_2 a'_{16} \mathbf{T}_{62})_{t=5/8} = \\
&= b_0 \mathbf{T}_{50} + b_1 \mathbf{T}_{51} + b_2 \mathbf{T}_{52} \qquad (31)
\end{aligned}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{50} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,0)_{02x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P}_{30} + a'_4\mathbf{P}_{40} + a'_5\mathbf{P}_{50})_{t=5/8} \\
\mathbf{T}_{51} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,1/8)_{02x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P}_{31} + a'_4\mathbf{P}_{41} + a'_5\mathbf{P}_{51})_{t=5/8} \\
\mathbf{T}_{52} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,2/8)_{02x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P}_{32} + a'_4\mathbf{P}_{42} + a'_5\mathbf{P}_{52})_{t=5/8}
\end{aligned} \tag{32}$$

Entrando con estos valores en (31) sale (30), luego (30) y (31) son iguales c.q.d.

<u>Superficie S_{02x56} con S_{23x56}</u>

La curva en el borde común (u = 2/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u)_{02x56} = \\
&= (b_0a_{13}\mathbf{P}_{50} + b_1a_{13}\mathbf{P}_{51} + b_2a_{13}\mathbf{P}_{52} + \\
&\quad b_0a_{14}\mathbf{P}_{60} + b_1a_{14}\mathbf{P}_{61} + b_2a_{14}\mathbf{P}_{62} + \\
&\quad b_0a_{15}\mathbf{T}_{50} + b_1a_{15}\mathbf{T}_{51} + b_2a_{15}\mathbf{T}_{52} + \\
&\quad b_0a_{16}\mathbf{T}_{60} + b_1a_{16}\mathbf{T}_{61} + b_2a_{16}\mathbf{T}_{62})_{u=2/8} = \\
&= a_{13}\mathbf{P}_{52} + a_{14}\mathbf{P}_{62} + a_{15}\mathbf{T}_{52} + a_{16}\mathbf{T}_{62}
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u)_{23x56} = \\
&= (b_9a_{13}\mathbf{P}_{52} + b_{10}a_{13}\mathbf{P}_{53} + b_{11}a_{13}\mathbf{U}_{52} + b_{12}a_{13}\mathbf{U}_{53} + \\
&\quad b_9a_{14}\mathbf{P}_{62} + b_{10}a_{14}\mathbf{P}_{63} + b_{11}a_{14}\mathbf{U}_{62} + b_{12}a_{14}\mathbf{U}_{63} + \\
&\quad b_9a_{15}\mathbf{T}_{52} + b_{10}a_{15}\mathbf{T}_{53} + b_{11}a_{15}\mathbf{E}_{52} + b_{12}a_{15}\mathbf{E}_{53} + \\
&\quad b_9a_{16}\mathbf{T}_{62} + b_{10}a_{16}\mathbf{T}_{63} + b_{11}a_{16}\mathbf{E}_{62} + b_{12}a_{16}\mathbf{E}_{63})_{u=2/8} = \\
&= a_{13}\mathbf{P}_{52} + a_{14}\mathbf{P}_{62} + a_{15}\mathbf{T}_{52} + a_{16}\mathbf{T}_{62}
\end{aligned} \tag{34}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t,2/8)_{02x56}}{\partial u} =$$
$$= (b'_0 a_{13}\mathbf{P}_{50} + b'_1 a_{13}\mathbf{P}_{51} + b'_2 a_{13}\mathbf{P}_{52} +$$
$$b'_0 a_{14}\mathbf{P}_{60} + b'_1 a_{14}\mathbf{P}_{61} + b'_2 a_{14}\mathbf{P}_{62} +$$
$$b'_0 a_{15}\mathbf{T}_{50} + b'_1 a_{15}\mathbf{T}_{51} + b'_2 a_{15}\mathbf{T}_{52} +$$
$$b'_0 a_{16}\mathbf{T}_{60} + b'_1 a_{16}\mathbf{T}_{61} + b'_2 a_{16}\mathbf{T}_{62})_{u=2/8} \qquad (35)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t,2/8)_{23x56}}{\partial u} =$$
$$= (b'_9 a_{13}\mathbf{P}_{52} + b'_{10} a_{13}\mathbf{P}_{53} + b'_{11} a_{13}\mathbf{U}_{52} + b'_{12} a_{13}\mathbf{U}_{53} +$$
$$b'_9 a_{14}\mathbf{P}_{62} + b'_{10} a_{14}\mathbf{P}_{63} + b'_{11} a_{14}\mathbf{U}_{62} + b'_{12} a_{14}\mathbf{U}_{63} +$$
$$b'_9 a_{15}\mathbf{T}_{52} + b'_{10} a_{15}\mathbf{T}_{53} + b'_{11} a_{15}\mathbf{E}_{52} + b'_{12} a_{15}\mathbf{E}_{53} +$$
$$b'_9 a_{16}\mathbf{T}_{62} + b'_{10} a_{16}\mathbf{T}_{63} + b'_{11} a_{16}\mathbf{E}_{62} + b'_{12} a_{16}\mathbf{E}_{63})_{u=2/8} =$$
$$= a_{13}\mathbf{U}_{52} + a_{14}\mathbf{U}_{62} + a_{15}\mathbf{E}_{52} + a_{16}\mathbf{E}_{62} \qquad (36)$$

Pero como:

$$\mathbf{U}_{52} = \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,2/8)_{02x56}}{\partial u} = (b'_0 \mathbf{P}_{50} + b'_1 \mathbf{P}_{51} + b'_2 \mathbf{P}_{52})_{u=5/8}$$
$$\mathbf{U}_{62} = \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,2/8)_{02x56}}{\partial u} = (b'_0 \mathbf{P}_{60} + b'_1 \mathbf{P}_{61} + b'_2 \mathbf{P}_{62})_{u=5/8} \qquad (37)$$
$$\mathbf{E}_{52} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}(5/8,2/8)_{02x56}}{\partial t \partial u} = (b'_0 \mathbf{T}_{50} + b'_1 \mathbf{T}_{51} + b'_2 \mathbf{T}_{52})_{u=5/8}$$
$$\mathbf{E}_{62} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}(6/8,2/8)_{02x56}}{\partial t \partial u} = (b'_0 \mathbf{T}_{60} + b'_1 \mathbf{T}_{61} + b'_2 \mathbf{T}_{62})_{u=5/8}$$

Entrando con estos valores en (36) sale (35), luego (35) y (36) son iguales e. d.

Superficie S_{02x56} con S_{02x68}

La curva en el borde común (t = 6/8) a ambos parches es igual:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u)_{02x56} = \\
&= (b_0 a_{13}\mathbf{P}_{50} + b_1 a_{13}\mathbf{P}_{51} + b_2 a_{13}\mathbf{P}_{52} + \\
&\quad b_0 a_{14}\mathbf{P}_{60} + b_1 a_{14}\mathbf{P}_{61} + b_2 a_{14}\mathbf{P}_{62} + \\
&\quad b_0 a_{15}\mathbf{T}_{50} + b_1 a_{15}\mathbf{T}_{51} + b_2 a_{15}\mathbf{T}_{52} + \\
&\quad b_0 a_{16}\mathbf{T}_{60} + b_1 a_{16}\mathbf{T}_{61} + b_2 a_{16}\mathbf{T}_{62})_{t=6/8} = \\
&= b_0\mathbf{P}_{60} + b_1\mathbf{P}_{61} + b_2\mathbf{P}_{62}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u)_{02x68} = \\
&= (b_0 a_6\mathbf{P}_{60} + b_1 a_6\mathbf{P}_{61} + b_2 a_6\mathbf{P}_{62} + \\
&\quad b_0 a_7\mathbf{P}_{70} + b_1 a_7\mathbf{P}_{71} + b_2 a_7\mathbf{P}_{72} + \\
&\quad b_0 a_8\mathbf{P}_{80} + b_1 a_8\mathbf{P}_{81} + b_2 a_8\mathbf{P}_{82})_{t=6/8} = \\
&= b_0\mathbf{P}_{60} + b_1\mathbf{P}_{61} + b_2\mathbf{P}_{62}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(6/8,u)_{02x56}}{\partial t} = \\
&= (b'_0 a_{13}\mathbf{P}_{50} + b'_1 a_{13}\mathbf{P}_{51} + b'_2 a_{13}\mathbf{P}_{52} + \\
&\quad b'_0 a_{14}\mathbf{P}_{60} + b'_1 a_{14}\mathbf{P}_{61} + b'_2 a_{14}\mathbf{P}_{62} + \\
&\quad b'_0 a_{15}\mathbf{T}_{50} + b'_1 a_{15}\mathbf{T}_{51} + b'_2 a_{15}\mathbf{T}_{52} + \\
&\quad b'_0 a_{16}\mathbf{T}_{60} + b'_1 a_{16}\mathbf{T}_{61} + b'_2 a_{16}\mathbf{T}_{62})_{u=2/8} = \\
&= b_0\mathbf{T}_{60} + b_1\mathbf{T}_{61} + b_2\mathbf{T}_{62}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,u)_{02x68}}{\partial t} = \\
&= (b_0 a'_6\mathbf{P}_{60} + b_1 a'_6\mathbf{P}_{61} + b_2 a'_6\mathbf{P}_{62} + \\
&\quad b_0 a'_7\mathbf{P}_{70} + b_1 a'_7\mathbf{P}_{71} + b_2 a'_7\mathbf{P}_{72} + \\
&\quad b_0 a'_8\mathbf{P}_{80} + b_1 a'_8\mathbf{P}_{81} + b_2 a'_8\mathbf{P}_{82})_{u=2/8}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Pero como:

$$\mathbf{T}_{60} = \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,0)_{02x56}}{\partial t} = (a'_6\mathbf{P}_{60} + a'_7\mathbf{P}_{70} + a'_8\mathbf{P}_{80})_{t=6/8}$$
$$\mathbf{T}_{61} = \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,1/8)_{02x56}}{\partial t} = (a'_6\mathbf{P}_{61} + a'_7\mathbf{P}_{71} + a'_8\mathbf{P}_{81})_{t=6/8} \qquad (42)$$
$$\mathbf{T}_{62} = \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,2/8)_{02x56}}{\partial t} = (a'_6\mathbf{P}_{62} + a'_7\mathbf{P}_{72} + a'_8\mathbf{P}_{82})_{t=6/8}$$

Entrando con estos valores en (40) sale (41), luego (40) y (41) son iguales c.q.d.

Superficie S_{23x02} con S_{35x02}

La curva en el borde común (u= 3/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t,3/8)_{23x02} &= \\ &= (b_9a_0\mathbf{P}_{02} + b_{10}a_0\mathbf{P}_{03} + b_{11}a_0\mathbf{U}_{02} + b_{12}a_0\mathbf{U}_{03} + \\ &\quad b_9a_1\mathbf{P}_{12} + b_{10}a_1\mathbf{P}_{13} + b_{11}a_1\mathbf{U}_{12} + b_{12}a_1\mathbf{U}_{13} + \\ &\quad b_9a_2\mathbf{P}_{22} + b_{10}a_2\mathbf{P}_{23} + b_{11}a_2\mathbf{U}_{22} + b_{12}a_2\mathbf{U}_{23})_{u=3/8} = \\ &= a_0\mathbf{P}_{03} + a_1\mathbf{P}_{13} + a_2\mathbf{P}_{23}\end{aligned} \qquad (43)$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(t,3/8)_{35x02} = \\ &= (b_3a_0\mathbf{P}_{03} + b_4a_0\mathbf{P}_{04} + b_5a_0\mathbf{P}_{05} + \\ &\quad b_3a_1\mathbf{P}_{13} + b_4a_1\mathbf{P}_{14} + b_5a_1\mathbf{P}_{15} + \\ &\quad b_3a_2\mathbf{P}_{23} + b_4a_2\mathbf{P}_{24} + b_5a_2\mathbf{P}_{25})_{u=3/8} = \\ &= a_0\mathbf{P}_{03} + a_1\mathbf{P}_{13} + a_2\mathbf{P}_{23}\end{aligned} \qquad (44)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,3/8)_{23x02}}{\partial u} = \\
&(b'_9 a_0 \mathbf{P}_{02} + b'_{10} a_0 \mathbf{P}_{03} + b'_{11} a_0 \mathbf{U}_{02} + b'_{12} a_0 \mathbf{U}_{03} + \\
&b'_9 a_1 \mathbf{P}_{12} + b'_{10} a_1 \mathbf{P}_{13} + b'_{11} a_1 \mathbf{U}_{12} + b'_{12} a_1 \mathbf{U}_{13} + \\
&b'_9 a_2 \mathbf{P}_{22} + b'_{10} a_2 \mathbf{P}_{23} + b'_{11} a_2 \mathbf{U}_{22} + b'_{12} a_2 \mathbf{U}_{23})_{u=3/8} = \\
&= a_0 \mathbf{U}_{03} + a_1 \mathbf{U}_{13} + a_2 \mathbf{U}_{23}
\end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,3/8)_{35x02}}{\partial u} = \\
&= (b'_3 a_0 \mathbf{P}_{03} + b'_4 a_0 \mathbf{P}_{04} + b'_5 a_0 \mathbf{P}_{05} + \\
&\quad b'_3 a_1 \mathbf{P}_{13} + b'_4 a_1 \mathbf{P}_{14} + b'_5 a_1 \mathbf{P}_{15} + \\
&\quad b'_3 a_2 \mathbf{P}_{23} + b'_4 a_2 \mathbf{P}_{24} + b'_5 a_2 \mathbf{P}_{25})_{u=3/8}
\end{aligned} \tag{46}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{03} &= \frac{\partial \mathbf{P}(0,3/8)_{35x02}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P}_{03} + b'_4 \mathbf{P}_{04} + b'_5 \mathbf{P}_{05})_{u=3/8} \\
\mathbf{U}_{13} &= \frac{\partial \mathbf{P}(1/8,3/8)_{35x02}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P}_{13} + b'_4 \mathbf{P}_{14} + b'_5 \mathbf{P}_{15})_{u=3/8} \\
\mathbf{U}_{23} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,3/8)_{35x02}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P}_{23} + b'_4 \mathbf{P}_{24} + b'_5 \mathbf{P}_{25})_{u=3/8}
\end{aligned} \tag{47}$$

Entrando con estos valores en (45) sale (46), luego (45) y (46) son iguales c.q.d.

Superficie S_{23x02} con S_{23x23}

La curva en el borde común (t = 2/8) a afnbos parches es igual:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(2/8,u)_{23x02} = \\
&\qquad = (b_9 a_0 \mathbf{P}_{02} + b_{10} a_0 \mathbf{P}_{03} + b_{11} a_0 \mathbf{U}_{02} + b_{12} a_0 \mathbf{U}_{03} + \\
&\qquad\quad b_9 a_1 \mathbf{P}_{12} + b_{10} a_1 \mathbf{P}_{13} + b_{11} a_1 \mathbf{U}_{12} + b_{12} a_1 \mathbf{U}_{13} + \\
&\qquad\quad b_9 a_2 \mathbf{P}_{22} + b_{10} a_2 \mathbf{P}_{23} + b_{11} a_2 \mathbf{U}_{22} + b_{12} a_2 \mathbf{U}_{23})_{t=2/8} = \\
&= b_9 \mathbf{P}_{22} + b_{10} \mathbf{P}_{23} + b_{11} \mathbf{U}_{22} + b_{12} \mathbf{U}_{23}
\end{aligned} \tag{48}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(2/8,u)_{23x23} = \\
&= (b_9 a_9 \mathbf{P}_{22} + b_{10} a_9 \mathbf{P}_{23} + b_{11} a_9 \mathbf{U}_{22} + b_{12} a_9 \mathbf{U}_{23} + \\
&\quad b_9 a_{10} \mathbf{P}_{32} + b_{10} a_{10} \mathbf{P}_{33} + b_{11} a_{10} \mathbf{U}_{32} + b_{12} a_{10} \mathbf{U}_{33} + \\
&\quad b_9 a_{11} \mathbf{T}_{22} + b_{10} a_{11} \mathbf{T}_{23} + b_{11} a_{11} \mathbf{E}_{22} + b_{12} a_{11} \mathbf{E}_{23} + \\
&\quad b_9 a_{12} \mathbf{T}_{32} + b_{10} a_{12} \mathbf{T}_{33} + b_{11} a_{12} \mathbf{E}_{32} + b_{12} a_{12} \mathbf{E}_{33})_{t=2/8} = \\
&= b_9 \mathbf{P}_{22} + b_{10} \mathbf{P}_{23} + b_{11} \mathbf{U}_{22} + b_{12} \mathbf{U}_{23}
\end{aligned} \tag{49}
$$

Luego son iguales c,q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,u)_{23x02}}{\partial t} = \\
&(b'_9 a_0 \mathbf{P}_{02} + b'_{10} a_0 \mathbf{P}_{03} + b'_{11} a_0 \mathbf{U}_{02} + b'_{12} a_0 \mathbf{U}_{03} + \\
&b'_9 a_1 \mathbf{P}_{12} + b'_{10} a_1 \mathbf{P}_{13} + b'_{11} a_1 \mathbf{U}_{12} + b'_{12} a_1 \mathbf{U}_{13} + \\
&b'_9 a_2 \mathbf{P}_{22} + b'_{10} a_2 \mathbf{P}_{23} + b'_{11} a_2 \mathbf{U}_{22} + b'_{12} a_2 \mathbf{U}_{23})_{t=2/8}
\end{aligned} \tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,u)_{23x23}}{\partial t} = \\
&= (b_9 a'_9 \mathbf{P}_{22} + b_{10} a'_9 \mathbf{P}_{23} + b_{11} a'_9 \mathbf{U}_{22} + b_{12} a'_9 \mathbf{U}_{23} + \\
&\quad b_9 a'_{10} \mathbf{P}_{32} + b_{10} a'_{10} \mathbf{P}_{33} + b_{11} a'_{10} \mathbf{U}_{32} + b_{12} a'_{10} \mathbf{U}_{33} + \\
&\quad b_9 a'_{11} \mathbf{T}_{22} + b_{10} a'_{11} \mathbf{T}_{23} + b_{11} a'_{11} \mathbf{E}_{22} + b_{12} a'_{11} \mathbf{E}_{23} + \\
&\quad b_9 a'_{12} \mathbf{T}_{32} + b_{10} a'_{12} \mathbf{T}_{33} + b_{11} a'_{12} \mathbf{E}_{32} + b_{12} a'_{12} \mathbf{E}_{33})_{t=2/8} = \\
&= b_9 \mathbf{T}_{22} + b_{10} \mathbf{T}_{23} + b_{11} \mathbf{E}_{22} + b_{12} \mathbf{E}_{23}
\end{aligned} \tag{51}
$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{22} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,2/8)_{23x02}}{\partial t} = (a'_0\mathbf{P}_{02} + a'_1\mathbf{P}_{12} + a'_2\mathbf{P}_{22})_{t=2/8} \\
\mathbf{T}_{23} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,3/8)_{23x02}}{\partial t} = (a'_0\mathbf{P}_{03} + a'_1\mathbf{P}_{13} + a'_2\mathbf{P}_{23})_{t=2/8} \\
\mathbf{E}_{22} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(2/8,2/8)_{23x02}}{\partial t \partial u} = (a'_0\mathbf{U}_{02} + a'_1\mathbf{U}_{12} + a'_2\mathbf{U}_{22})_{t=2/8} \\
\mathbf{E}_{23} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(2/8,3/8)_{23x02}}{\partial t \partial u} = (a'_0\mathbf{U}_{03} + a'_1\mathbf{U}_{13} + a'_2\mathbf{U}_{23})_{t=2/8}
\end{aligned} \qquad (52)$$

Entrando con estos valores en (51) sale (50), luego (50) y (51) son iguales c.q.d.

Suíterflcie $\mathbf{S_{23x23}}$ con $\mathbf{S_{35x23}}$

La curva en el borde común (u = 3/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u)_{23x23} = \\
&= (b_9a_9\mathbf{P}_{22} + b_{10}a_9\mathbf{P}_{23} + b_{11}a_9\mathbf{U}_{22} + b_{12}a_9\mathbf{U}_{23} + \\
&\quad b_9a_{10}\mathbf{P}_{32} + b_{10}a_{10}\mathbf{P}_{33} + b_{11}a_{10}\mathbf{U}_{32} + b_{12}a_{10}\mathbf{U}_{33} + \\
&\quad b_9a_{11}\mathbf{T}_{22} + b_{10}a_{11}\mathbf{T}_{23} + b_{11}a_{11}\mathbf{E}_{22} + b_{12}a_{11}\mathbf{E}_{23} + \\
&\quad b_9a_{12}\mathbf{T}_{32} + b_{10}a_{12}\mathbf{T}_{33} + b_{11}a_{12}\mathbf{E}_{32} + b_{12}a_{12}\mathbf{E}_{33})_{u=3/8} = \\
&= a_9\mathbf{P}_{23} + a_{10}\mathbf{P}_{33} + a_{11}\mathbf{T}_{23} + a_{12}\mathbf{T}_{33}
\end{aligned} \qquad (53)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u)_{35x23} = \\
&= (b_3a_9\mathbf{P_{23}} + b_4a_9\mathbf{P_{24}} + b_5a_9\mathbf{P_{25}} + \\
&\quad b_3a_{10}\mathbf{P_{33}} + b_4a_{10}\mathbf{P_{34}} + b_5a_{10}\mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b_3a_{11}\mathbf{T_{23}} + b_4a_{11}\mathbf{T_{24}} + b_5a_{11}\mathbf{T_{25}} + \\
&\quad b_3a_{12}\mathbf{T_{33}} + b_4a_{12}\mathbf{T_{34}} + b_5a_{12}\mathbf{T_{35}})_{u=3/8} = \\
&= a_9\mathbf{P}_{23} + a_{10}\mathbf{P}_{33} + a_{11}\mathbf{T}_{23} + a_{12}\mathbf{T}_{33}
\end{aligned} \qquad (54)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,3/8)_{23x23}}{\partial u} = \\
&(b'_9 a_9 \mathbf{P}_{22} + b'_{10} a_9 \mathbf{P}_{23} + b'_{11} a_9 \mathbf{U}_{22} + b'_{12} a_9 \mathbf{U}_{23} + \\
&\quad b'_9 a_{10} \mathbf{P}_{32} + b'_{10} a_{10} \mathbf{P}_{33} + b'_{11} a_{10} \mathbf{U}_{32} + b'_{12} a_{10} \mathbf{U}_{33} + \\
&\quad b'_9 a_{11} \mathbf{T}_{22} + b'_{10} a_{11} \mathbf{T}_{23} + b'_{11} a_{11} \mathbf{E}_{22} + b'_{12} a_{11} \mathbf{E}_{23} + \\
&\quad b'_9 a_{12} \mathbf{T}_{32} + b'_{10} a_{12} \mathbf{T}_{33} + b'_{11} a_{12} \mathbf{E}_{32} + b'_{12} a_{12} \mathbf{E}_{33})_{u=3/8} = \\
&= a_9 \mathbf{P}_{23} + a_{10} \mathbf{P}_{33} + a_{11} \mathbf{T}_{23} + a_{12} \mathbf{T}_{33}
\end{aligned} \tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,3/8)_{35x23}}{\partial u} = \\
&(b'_3 a_9 \mathbf{P_{23}} + b'_4 a_9 \mathbf{P_{24}} + b'_5 a_9 \mathbf{P_{25}} + \\
&\quad b'_3 a_{10} \mathbf{P_{33}} + b'_4 a_{10} \mathbf{P_{34}} + b'_5 a_{10} \mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b'_3 a_{11} \mathbf{T_{23}} + b'_4 a_{11} \mathbf{T_{24}} + b'_5 a_{11} \mathbf{T_{25}} + \\
&\quad b'_3 a_{12} \mathbf{T_{33}} + b'_4 a_{12} \mathbf{T_{34}} + b'_5 a_{12} \mathbf{T_{35}})_{u=3/8}
\end{aligned} \tag{56}
$$

Pero como:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}_{23} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,3/8)_{35x23}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{23}} + b'_4 \mathbf{P_{24}} + b'_5 \mathbf{P_{25}})_{u=3/8} \\
\mathbf{U}_{33} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,3/8)_{35x23}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{33}} + b'_4 \mathbf{P_{34}} + b'_5 \mathbf{P_{35}})_{u=3/8} \\
\mathbf{E}_{23} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(2/8,3/8)_{35x23}}{\partial t \partial u} = (b'_3 \mathbf{T_{23}} + b'_4 \mathbf{T_{24}} + b'_5 \mathbf{T_{25}})_{u=3/8} \\
\mathbf{E}_{33} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(2/8,3/8)_{35x23}}{\partial t \partial u} = (b'_3 \mathbf{T_{33}} + b'_4 \mathbf{T_{34}} + b'_5 \mathbf{T_{35}})_{u=3/8}
\end{aligned} \tag{57}
$$

Entrando con estos valores en (55) sale (56), luego (55) y (56) son iguales c.q,d.

Superficie S_{23x23} con S_{23x35}

La curva en el borde común (t = 3/8) a arnbos parches es igual:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\mathit{(3/8,u)}_{23x23} = \\
&= (b_9 a_9 \mathbf{P}_{22} + b_{10} a_9 \mathbf{P}_{23} + b_{11} a_9 \mathbf{U}_{22} + b_{12} a_9 \mathbf{U}_{23} + \\
&\quad b_9 a_{10} \mathbf{P}_{32} + b_{10} a_{10} \mathbf{P}_{33} + b_{11} a_{10} \mathbf{U}_{32} + b_{12} a_{10} \mathbf{U}_{33} + \\
&\quad b_9 a_{11} \mathbf{T}_{22} + b_{10} a_{11} \mathbf{T}_{23} + b_{11} a_{11} \mathbf{E}_{22} + b_{12} a_{11} \mathbf{E}_{23} + \\
&\quad b_9 a_{12} \mathbf{T}_{32} + b_{10} a_{12} \mathbf{T}_{33} + b_{11} a_{12} \mathbf{E}_{32} + b_{12} a_{12} \mathbf{E}_{33})_{t=3/8} = \\
&= b_9 \mathbf{P}_{32} + b_{10} \mathbf{P}_{33} + b_{11} \mathbf{U}_{32} + b_{12} \mathbf{U}_{33}
\end{aligned}
\tag{58}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\mathit{(3/8,u)}_{23x35} = \\
&= (b_9 a_3 \mathbf{P}_{32} + b_{10} a_3 \mathbf{P}_{33} + b_{11} a_3 \mathbf{U}_{32} + b_{12} a_3 \mathbf{U}_{33} + \\
&b_9 a_4 \mathbf{P}_{42} + b_{10} a_4 \mathbf{P}_{43} + b_{11} a_4 \mathbf{U}_{42} + b_{12} a_4 \mathbf{U}_{43} + \\
&b_9 a_5 \mathbf{P}_{52} + b_{10} a_5 \mathbf{P}_{53} + b_{11} a_5 \mathbf{U}_{52} + b_{12} a_5 \mathbf{U}_{53})_{t=3/8} = \\
&= b_9 \mathbf{P}_{32} + b_{10} \mathbf{P}_{33} + b_{11} \mathbf{U}_{32} + b_{12} \mathbf{U}_{33}
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}\mathit{(3/8,u)}_{23x23}}{\partial t} = \\
&= (b_9 a'_9 \mathbf{P}_{22} + b_{10} a'_9 \mathbf{P}_{23} + b_{11} a'_9 \mathbf{U}_{22} + b_{12} a'_9 \mathbf{U}_{23} + \\
&\quad b_9 a'_{10} \mathbf{P}_{32} + b_{10} a'_{10} \mathbf{P}_{33} + b_{11} a'_{10} \mathbf{U}_{32} + b_{12} a'_{10} \mathbf{U}_{33} + \\
&\quad b_9 a'_{11} \mathbf{T}_{22} + b_{10} a'_{11} \mathbf{T}_{23} + b_{11} a'_{11} \mathbf{E}_{22} + b_{12} a'_{11} \mathbf{E}_{23} + \\
&\quad b_9 a'_{12} \mathbf{T}_{32} + b_{10} a'_{12} \mathbf{T}_{33} + b_{11} a'_{12} \mathbf{E}_{32} + b_{12} a'_{12} \mathbf{E}_{33})_{t=3/8} = \\
&= b_9 \mathbf{T}_{32} + b_{10} \mathbf{T}_{33} + b_{11} \mathbf{E}_{32} + b_{12} \mathbf{E}_{33}
\end{aligned}
\tag{60}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}\mathit{(3/8,u)}_{23x35}}{\partial t} = \\
&= (b_9 a'_3 \mathbf{P}_{32} + b_{10} a'_3 \mathbf{P}_{33} + b_{11} a'_3 \mathbf{U}_{32} + b_{12} a'_3 \mathbf{U}_{33} + \\
&b_9 a'_4 \mathbf{P}_{42} + b_{10} a'_4 \mathbf{P}_{43} + b_{11} a'_4 \mathbf{U}_{42} + b_{12} a'_4 \mathbf{U}_{43} + \\
&b_9 a'_5 \mathbf{P}_{52} + b_{10} a'_5 \mathbf{P}_{53} + b_{11} a'_5 \mathbf{U}_{52} + b_{12} a'_5 \mathbf{U}_{53})_{t=3/8}
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{33} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,2/8)_{23x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P}_{32} + a'_4\mathbf{P}_{42} + a'_5\mathbf{P}_{52})_{t=3/8} \\
\mathbf{T}_{33} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,3/8)_{23x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P}_{33} + a'_4\mathbf{P}_{43} + a'_5\mathbf{P}_{53})_{t=3/8} \\
\mathbf{E}_{32} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(3/8,2/8)_{23x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{U}_{32} + a'_4\mathbf{U}_{42} + a'_5\mathbf{U}_{52})_{t=3/8} \\
\mathbf{E}_{33} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(3/8,3/8)_{23x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{U}_{33} + a'_4\mathbf{U}_{43} + a'_5\mathbf{U}_{53})_{t=3/8}
\end{aligned} \qquad (62)$$

Entrando con estos valores en (60) sale (61), luego (60) y (61) son iguales c.q.d.

Superficie S_{23x35} con S_{35x35}

La curva en el borde común (u = 3/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u)_{23x35} = \\
&= (b_9a_3\mathbf{P}_{32} + b_{10}a_3\mathbf{P}_{33} + b_{11}a_3\mathbf{U}_{32} + b_{12}a_3\mathbf{U}_{33} + \\
&b_9a_4\mathbf{P}_{42} + b_{10}a_4\mathbf{P}_{43} + b_{11}a_4\mathbf{U}_{42} + b_{12}a_4\mathbf{U}_{43} + \\
&b_9a_5\mathbf{P}_{52} + b_{10}a_5\mathbf{P}_{53} + b_{11}a_5\mathbf{U}_{52} + b_{12}a_5\mathbf{U}_{53})_{u=3/8} = \\
&= a_3\mathbf{P}_{33} + a_4\mathbf{P}_{43} + a_5\mathbf{P}_{53}
\end{aligned} \qquad (63)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u)_{35x35} = \\
&= (b_3a_3\mathbf{P}_{33} + b_4a_3\mathbf{P}_{34} + b_5a_3\mathbf{P}_{35} + \\
&\quad b_3a_4\mathbf{P}_{43} + b_4a_4\mathbf{P}_{44} + b_5a_4\mathbf{P}_{45} + \\
&\quad b_3a_5\mathbf{P}_{53} + b_4a_5\mathbf{P}_{54} + b_5a_5\mathbf{P}_{55})_{u=3/8} = \\
&= a_3\mathbf{P}_{33} + a_4\mathbf{P}_{43} + a_5\mathbf{P}_{53}
\end{aligned} \qquad (64)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,3/8)_{23x35}}{\partial u} = \\
&(b'_9 a_3 \mathbf{P}_{32} + b'_{10} a_3 \mathbf{P}_{33} + b'_{11} a_3 \mathbf{U}_{32} + b'_{12} a_3 \mathbf{U}_{33} + \\
&b'_9 a_4 \mathbf{P}_{42} + b'_{10} a_4 \mathbf{P}_{43} + b'_{11} a_4 \mathbf{U}_{42} + b'_{12} a_4 \mathbf{U}_{43} + \\
&b'_9 a_5 \mathbf{P}_{52} + b'_{10} a_5 \mathbf{P}_{53} + b'_{11} a_5 \mathbf{U}_{52} + b'_{12} a_5 \mathbf{U}_{53})_{u=3/8} = \\
&= a_3 \mathbf{U}_{33} + a_4 \mathbf{U}_{43} + a_5 \mathbf{U}_{53}
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,3/8)_{35x35}}{\partial t} = \\
&= (b'_3 a_3 \mathbf{P_{33}} + b'_4 a_3 \mathbf{P_{34}} + b'_5 a_3 \mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b'_3 a_4 \mathbf{P_{43}} + b'_4 a_4 \mathbf{P_{44}} + b'_5 a_4 \mathbf{P_{45}} + \\
&\quad b'_3 a_5 \mathbf{P_{53}} + b'_4 a_5 \mathbf{P_{54}} + b'_5 a_5 \mathbf{P_{55}})_{u=3/8}
\end{aligned} \tag{66}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{33} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,3/8)_{35x35}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{33}} + b'_4 \mathbf{P_{34}} + b'_5 \mathbf{P_{35}}) \\
\mathbf{U}_{43} &= \frac{\partial \mathbf{P}(4/8,3/8)_{35x35}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{43}} + b'_4 \mathbf{P_{44}} + b'_5 \mathbf{P_{45}}) \\
\mathbf{U}_{53} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,3/8)_{35x35}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{53}} + b'_4 \mathbf{P_{54}} + b'_5 \mathbf{P_{55}})
\end{aligned} \tag{67}$$

Entrando con estos valores en (65) sale (66) luego (65) y (66) son iguales c.q.d.

Superficie S_{23x35} con S_{23x56}

La curva en el borde común (t = 5/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(5/8,u)_{23x35} = \\
&= (b_9 a_3 \mathbf{P}_{32} + b_{10} a_3 \mathbf{P}_{33} + b_{11} a_3 \mathbf{U}_{32} + b_{12} a_3 \mathbf{U}_{33} + \\
&b_9 a_4 \mathbf{P}_{42} + b_{10} a_4 \mathbf{P}_{43} + b_{11} a_4 \mathbf{U}_{42} + b_{12} a_4 \mathbf{U}_{43} + \\
&b_9 a_5 \mathbf{P}_{52} + b_{10} a_5 \mathbf{P}_{53} + b_{11} a_5 \mathbf{U}_{52} + b_{12} a_5 \mathbf{U}_{53})_{t=5/8} = \\
&= b_9 \mathbf{P}_{52} + b_{10} \mathbf{P}_{53} + b_{11} \mathbf{U}_{52} + b_{12} \mathbf{U}_{53}
\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(5/8,u)_{23x56} = \\
&= (b_9 a_{13} \mathbf{P}_{52} + b_{10} a_{13} \mathbf{P}_{53} + b_{11} a_{13} \mathbf{U}_{52} + b_{12} a_{13} \mathbf{U}_{53} + \\
&\quad b_9 a_{14} \mathbf{P}_{62} + b_{10} a_{14} \mathbf{P}_{63} + b_{11} a_{14} \mathbf{U}_{62} + b_{12} a_{14} \mathbf{U}_{63} + \\
&\quad b_9 a_{15} \mathbf{T}_{52} + b_{10} a_{15} \mathbf{T}_{53} + b_{11} a_{15} \mathbf{E}_{52} + b_{12} a_{15} \mathbf{E}_{53} + \\
&\quad b_9 a_{16} \mathbf{T}_{62} + b_{10} a_{16} \mathbf{T}_{63} + b_{11} a_{16} \mathbf{E}_{62} + b_{12} a_{16} \mathbf{E}_{63})_{t=5/8} = \\
&= b_9 \mathbf{P}_{52} + b_{10} \mathbf{P}_{53} + b_{11} \mathbf{U}_{52} + b_{12} \mathbf{U}_{53}
\end{aligned} \tag{69}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(5/8,u)_{23x35}}{\partial t} = \\
&= (b'_9 a_3 \mathbf{P}_{32} + b'_{10} a_3 \mathbf{P}_{33} + b'_{11} a_3 \mathbf{U}_{32} + b'_{12} a_3 \mathbf{U}_{33} + \\
&b'_9 a_4 \mathbf{P}_{42} + b'_{10} a_4 \mathbf{P}_{43} + b'_{11} a_4 \mathbf{U}_{42} + b'_{12} a_4 \mathbf{U}_{43} + \\
&b'_9 a_5 \mathbf{P}_{52} + b'_{10} a_5 \mathbf{P}_{53} + b'_{11} a_5 \mathbf{U}_{52} + b'_{12} a_5 \mathbf{U}_{53})_{t=5/8}
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(5/8,u)_{23x56}}{\partial t} = \\
&= (b_9 a'_{13} \mathbf{P}_{52} + b_{10} a'_{13} \mathbf{P}_{53} + b_{11} a'_{13} \mathbf{U}_{52} + b_{12} a'_{13} \mathbf{U}_{53} + \\
&\quad b_9 a'_{14} \mathbf{P}_{62} + b_{10} a'_{14} \mathbf{P}_{63} + b_{11} a'_{14} \mathbf{U}_{62} + b_{12} a'_{14} \mathbf{U}_{63} + \\
&\quad b_9 a'_{15} \mathbf{T}_{52} + b_{10} a'_{15} \mathbf{T}_{53} + b_{11} a'_{15} \mathbf{E}_{52} + b_{12} a'_{15} \mathbf{E}_{53} + \\
&\quad b_9 a'_{16} \mathbf{T}_{62} + b_{10} a'_{16} \mathbf{T}_{63} + b_{11} a'_{16} \mathbf{E}_{62} + b_{12} a'_{16} \mathbf{E}_{63})_{t=5/8} = \\
&= b_9 \mathbf{T}_{52} + b_{10} \mathbf{T}_{53} + b_{11} \mathbf{E}_{52} + b_{12} \mathbf{E}_{53}
\end{aligned} \tag{71}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{52} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,2/8)_{23x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P}_{32} + a'_4\mathbf{P}_{42} + a'_5\mathbf{P}_{52})_{t=5/8} \\
\mathbf{T}_{53} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,3/8)_{23x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P}_{33} + a'_4\mathbf{P}_{43} + a'_5\mathbf{P}_{53})_{t=5/8} \\
\mathbf{E}_{52} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(5/8,2/8)_{23x35}}{\partial t \partial u} = (a'_3\mathbf{U}_{32} + a'_4\mathbf{U}_{42} + a'_5\mathbf{U}_{52})_{t=5/8} \\
\mathbf{E}_{53} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(5/8,3/8)_{23x35}}{\partial t \partial u} = (a'_3\mathbf{U}_{33} + a'_4\mathbf{U}_{43} + a'_5\mathbf{U}_{53})_{t=5/8}
\end{aligned} \qquad (72)$$

Entrando con estos valores en (71) sale (70), luego (70) y (71) son iguales c.q.d.

Superficie S_{23x56} con S_{35x56}

La curva en el borde común (u = 3/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,3/8)_{23x56} = \\
&= (b_9a_{13}\mathbf{P}_{52} + b_{10}a_{13}\mathbf{P}_{53} + b_{11}a_{13}\mathbf{U}_{52} + b_{12}a_{13}\mathbf{U}_{53} + \\
&\quad b_9a_{14}\mathbf{P}_{62} + b_{10}a_{14}\mathbf{P}_{63} + b_{11}a_{14}\mathbf{U}_{62} + b_{12}a_{14}\mathbf{U}_{63} + \\
&\quad b_9a_{15}\mathbf{T}_{52} + b_{10}a_{15}\mathbf{T}_{53} + b_{11}a_{15}\mathbf{E}_{52} + b_{12}a_{15}\mathbf{E}_{53} + \\
&\quad b_9a_{16}\mathbf{T}_{62} + b_{10}a_{16}\mathbf{T}_{63} + b_{11}a_{16}\mathbf{E}_{62} + b_{12}a_{16}\mathbf{E}_{63})_{t=5/8} = \\
&= a_{13}\mathbf{P}_{53} + a_{14}\mathbf{P}_{63} + a_{15}\mathbf{T}_{53} + a_{16}\mathbf{T}_{63}
\end{aligned} \qquad (73)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,3/8)_{35x56} = \\
&= (b_3a_{13}\mathbf{P}_{53} + b_4a_{13}\mathbf{P}_{54} + b_5a_{13}\mathbf{P}_{55} + \\
&\quad b_3a_{14}\mathbf{P}_{63} + b_4a_{14}\mathbf{P}_{64} + b_5a_{14}\mathbf{P}_{65} + \\
&\quad b_3a_{15}\mathbf{T}_{53} + b_4a_{15}\mathbf{T}_{54} + b_5a_{15}\mathbf{T}_{55} + \\
&\quad b_3a_{16}\mathbf{T}_{63} + b_4a_{16}\mathbf{T}_{64} + b_5a_{16}\mathbf{T}_{65})_{t=5/8} = \\
&= a_{13}\mathbf{P}_{53} + a_{14}\mathbf{P}_{63} + a_{15}\mathbf{T}_{53} + a_{16}\mathbf{T}_{63}
\end{aligned} \qquad (74)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t,3/8)_{23x56}}{\partial u} =$$
$$= (b'_9 a_{13}\mathbf{P}_{52} + b'_{10} a_{13}\mathbf{P}_{53} + b'_{11} a_{13}\mathbf{U}_{52} + b'_{12} a_{13}\mathbf{U}_{53} +$$
$$b'_9 a_{14}\mathbf{P}_{62} + b'_{10} a_{14}\mathbf{P}_{63} + b'_{11} a_{14}\mathbf{U}_{62} + b'_{12} a_{14}\mathbf{U}_{63} +$$
$$b'_9 a_{15}\mathbf{T}_{52} + b'_{10} a_{15}\mathbf{T}_{53} + b'_{11} a_{15}\mathbf{E}_{52} + b'_{12} a_{15}\mathbf{E}_{53} +$$
$$b'_9 a_{16}\mathbf{T}_{62} + b'_{10} a_{16}\mathbf{T}_{63} + b'_{11} a_{16}\mathbf{E}_{62} + b'_{12} a_{16}\mathbf{E}_{63})_{t=5/8} =$$
$$= a_{13}\mathbf{U}_{53} + a_{14}\mathbf{U}_{63} + a_{15}\mathbf{E}_{53} + a_{16}\mathbf{E}_{63} \qquad (75)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}(t,3/8)_{35x56}}{\partial u} =$$
$$= (b'_3 a_{13}\mathbf{P_{53}} + b'_4 a_{13}\mathbf{P_{54}} + b'_5 a_{13}\mathbf{P_{55}} +$$
$$b'_3 a_{14}\mathbf{P_{63}} + b'_4 a_{14}\mathbf{P_{64}} + b'_5 a_{14}\mathbf{P_{65}} +$$
$$b'_3 a_{15}\mathbf{T_{53}} + b'_4 a_{15}\mathbf{T_{54}} + b'_5 a_{15}\mathbf{T_{55}} +$$
$$b'_3 a_{16}\mathbf{T_{63}} + b'_4 a_{16}\mathbf{T_{64}} + b'_5 a_{16}\mathbf{T_{65}})_{t=5/8} \qquad (76)$$

Pero como:

$$\mathbf{U}_{53} = \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,3/8)_{35x56}}{\partial u} = (b'_3\mathbf{P_{53}} + b'_4\mathbf{P_{54}} + b'_5\mathbf{P_{55}})_{u=3/8}$$
$$\mathbf{U}_{63} = \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,3/8)_{35x56}}{\partial u} = (b'_3\mathbf{P_{63}} + b'_4\mathbf{P_{64}} + b'_5\mathbf{P_{65}})_{u=3/8}$$
$$\mathbf{E}_{53} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}(5/8,3/8)_{35x56}}{\partial t \partial u} = (b'_3\mathbf{T_{53}} + b'_4\mathbf{T_{54}} + b'_5\mathbf{T_{55}})_{u=3/8} \qquad (77)$$
$$\mathbf{E}_{63} = \frac{\partial^2 \mathbf{P}(5/8,3/8)_{35x56}}{\partial t \partial u} = (b'_3\mathbf{T_{63}} + b'_4\mathbf{T_{64}} + b'_5\mathbf{T_{65}})_{u=3/8}$$

Entrando con estos valores en (76) sale (75). luego (75) y (76) son iguales c.q.d.

Superficie S_{23x56} con S_{23x68}

La curva en el borde común (t = 6/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(6/8,u)_{23x56} = \\
&= (b_9 a_{13}\mathbf{P}_{52} + b_{10}a_{13}\mathbf{P}_{53} + b_{11}a_{13}\mathbf{U}_{52} + b_{12}a_{13}\mathbf{U}_{53} + \\
&\quad b_9 a_{14}\mathbf{P}_{62} + b_{10}a_{14}\mathbf{P}_{63} + b_{11}a_{14}\mathbf{U}_{62} + b_{12}a_{14}\mathbf{U}_{63} + \\
&\quad b_9 a_{15}\mathbf{T}_{52} + b_{10}a_{15}\mathbf{T}_{53} + b_{11}a_{15}\mathbf{E}_{52} + b_{12}a_{15}\mathbf{E}_{53} + \\
&\quad b_9 a_{16}\mathbf{T}_{62} + b_{10}a_{16}\mathbf{T}_{63} + b_{11}a_{16}\mathbf{E}_{62} + b_{12}a_{16}\mathbf{E}_{63})_{t=5/8} = \\
&= b_9\mathbf{P}_{62} + b_{10}\mathbf{P}_{63} + b_{11}\mathbf{U}_{62} + b_{12}\mathbf{U}_{63}
\end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(6/8,u)_{23x68} = \\
&= (b_9 a_6\mathbf{P}_{62} + b_{10}a_6\mathbf{P}_{63} + b_{11}a_6\mathbf{U}_{62} + b_{12}a_6\mathbf{U}_{63} + \\
&b_9 a_7\mathbf{P}_{72} + b_{10}a_7\mathbf{P}_{73} + b_{11}a_7\mathbf{U}_{72} + b_{12}a_7\mathbf{U}_{73} + \\
&b_9 a_8\mathbf{P}_{82} + b_{10}a_8\mathbf{P}_{83} + b_{11}a_8\mathbf{U}_{82} + b_{12}a_8\mathbf{U}_{83})_{t=6/8} = \\
&= b_9\mathbf{P}_{62} + b_{10}\mathbf{P}_{63} + b_{11}\mathbf{U}_{62} + b_{12}\mathbf{U}_{63}
\end{aligned} \tag{79}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{P}(6/8,u)_{23x56}}{\partial t} = \\
&= (b_9 a'_{13}\mathbf{P}_{52} + b_{10}a'_{13}\mathbf{P}_{53} + b_{11}a'_{13}\mathbf{U}_{52} + b_{12}a'_{13}\mathbf{U}_{53} + \\
&\quad b_9 a'_{14}\mathbf{P}_{62} + b_{10}a'_{14}\mathbf{P}_{63} + b_{11}a'_{14}\mathbf{U}_{62} + b_{12}a'_{14}\mathbf{U}_{63} + \\
&\quad b_9 a'_{15}\mathbf{T}_{52} + b_{10}a'_{15}\mathbf{T}_{53} + b_{11}a'_{15}\mathbf{E}_{52} + b_{12}a'_{15}\mathbf{E}_{53} + \\
&\quad b_9 a'_{16}\mathbf{T}_{62} + b_{10}a'_{16}\mathbf{T}_{63} + b_{11}a'_{16}\mathbf{E}_{62} + b_{12}a'_{16}\mathbf{E}_{63})_{t=6/8} = \\
&= b_9\mathbf{T}_{62} + b_{10}\mathbf{T}_{63} + b_{11}\mathbf{E}_{62} + b_{12}\mathbf{E}_{63}
\end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{P}(6/8,u)_{23x68}}{\partial t} = \\
&= (b_9 a'_6\mathbf{P}_{62} + b_{10}a'_6\mathbf{P}_{63} + b_{11}a'_6\mathbf{U}_{62} + b_{12}a'_6\mathbf{U}_{63} + \\
&b_9 a'_7\mathbf{P}_{72} + b_{10}a'_7\mathbf{P}_{73} + b_{11}a'_7\mathbf{U}_{72} + b_{12}a'_7\mathbf{U}_{73} + \\
&b_9 a'_8\mathbf{P}_{82} + b_{10}a'_8\mathbf{P}_{83} + b_{11}a'_8\mathbf{U}_{82} + b_{12}a'_8\mathbf{U}_{83})_{t=6/8}
\end{aligned} \tag{81}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{62} &= \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,2/8)_{23x68}}{\partial t} = (a'_6\mathbf{P}_{\mathbf{62}} + a'_7\mathbf{P}_{\mathbf{72}} + a'_8\mathbf{P}_{\mathbf{82}})_{t=6/8} \\
\mathbf{T}_{63} &= \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,3/8)_{23x68}}{\partial t} = (a'_6\mathbf{P}_{\mathbf{63}} + a'_7\mathbf{P}_{\mathbf{73}} + a'_8\mathbf{P}_{\mathbf{83}})_{t=6/8} \\
\mathbf{E}_{62} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(6/8,2/8)_{23x68}}{\partial t\partial u} = (a'_6\mathbf{U}_{\mathbf{62}} + a'_7\mathbf{U}_{\mathbf{72}} + a'_8\mathbf{U}_{\mathbf{82}})_{t=6/8} \\
\mathbf{E}_{63} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(6/8,3/8)_{23x68}}{\partial t\partial u} = (a'_6\mathbf{U}_{\mathbf{63}} + a'_7\mathbf{U}_{\mathbf{73}} + a'_8\mathbf{U}_{\mathbf{83}})_{t=6/8}
\end{aligned} \tag{82}$$

Entrando con estos valores en (80) sale (81), luego (80) y (81) son iguales c.q.d.

<u>Superficie S_{35x02} con S_{56x02}</u>

La curva en el borde común (u = 5/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,5/8)_{35x02} = \\
&= (b_3a_0\mathbf{P}_{03} + b_4a_0\mathbf{P}_{04} + b_5a_0\mathbf{P}_{05} + \\
&\quad b_3a_1\mathbf{P}_{13} + b_4a_1\mathbf{P}_{14} + b_5a_1\mathbf{P}_{15} + \\
&\quad b_3a_2\mathbf{P}_{23} + b_4a_2\mathbf{P}_{24} + b_5a_2\mathbf{P}_{25})_{u=5/8} = \\
&= a_0\mathbf{P}_{05} + a_1\mathbf{P}_{15} + a_2\mathbf{P}_{25}
\end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,5/8)_{56x02} = \\
&= (b_{13}a_0\mathbf{P}_{\mathbf{05}} + b_{14}a_0\mathbf{P}_{\mathbf{06}} + b_{15}a_0\mathbf{U}_{\mathbf{05}} + b_{16}a_0\mathbf{U}_{\mathbf{06}} + \\
&\quad b_{13}a_1\mathbf{P}_{\mathbf{15}} + b_{14}a_1\mathbf{P}_{\mathbf{16}} + b_{15}a_1\mathbf{U}_{\mathbf{15}} + b_{16}a_1\mathbf{U}_{\mathbf{16}} + \\
&\quad b_{13}a_2\mathbf{P}_{\mathbf{25}} + b_{14}a_2\mathbf{P}_{\mathbf{26}} + b_{15}a_2\mathbf{U}_{\mathbf{25}} + b_{16}a_2\mathbf{U}_{\mathbf{26}})_{t=2/5} = \\
&= a_0\mathbf{P}_{05} + a_1\mathbf{P}_{15} + a_2\mathbf{P}_{25}
\end{aligned} \tag{84}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,5/8)_{35x02}}{\partial u} = \\
&= (b'_3 a_0 \mathbf{P}_{03} + b'_4 a_0 \mathbf{P}_{04} + b'_5 a_0 \mathbf{P}_{05} + \\
&\quad b'_3 a_1 \mathbf{P}_{13} + b'_4 a_1 \mathbf{P}_{14} + b'_5 a_1 \mathbf{P}_{15} + \\
&\quad b'_3 a_2 \mathbf{P}_{23} + b'_4 a_2 \mathbf{P}_{24} + b'_5 a_2 \mathbf{P}_{25})_{u=5/8}
\end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,5/8)_{56x02}}{\partial u} = \\
&= (b'_{13} a_0 \mathbf{P}_{\mathbf{05}} + b'_{14} a_0 \mathbf{P}_{\mathbf{06}} + b'_{15} a_0 \mathbf{U}_{\mathbf{05}} + b'_{16} a_0 \mathbf{U}_{\mathbf{06}} + \\
&\quad b'_{13} a_1 \mathbf{P}_{\mathbf{15}} + b'_{14} a_1 \mathbf{P}_{\mathbf{16}} + b'_{15} a_1 \mathbf{U}_{\mathbf{15}} + b'_{16} a_1 \mathbf{U}_{\mathbf{16}} + \\
&\quad b'_{13} a_2 \mathbf{P}_{\mathbf{25}} + b'_{14} a_2 \mathbf{P}_{\mathbf{26}} + b'_{15} a_2 \mathbf{U}_{\mathbf{25}} + b'_{16} a_2 \mathbf{U}_{\mathbf{26}})_{t=2/8} = \\
&= a_0 \mathbf{U}_{05} + a_1 \mathbf{U}_{15} + a_2 \mathbf{U}_{25}
\end{aligned} \tag{86}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{05} &= \frac{\partial \mathbf{P}(0,5/8)_{35x02}}{\partial u} = b'_3 \mathbf{P}_{03} + b'_4 \mathbf{P}_{04} + b'_5 \mathbf{P}_{05} \\
\mathbf{U}_{15} &= \frac{\partial \mathbf{P}(1/8,5/8)_{35x02}}{\partial u} = b'_3 \mathbf{P}_{13} + b'_4 \mathbf{P}_{14} + b'_5 \mathbf{P}_{15} \\
\mathbf{U}_{25} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,5/8)_{35x02}}{\partial u} = b'_3 \mathbf{P}_{23} + b'_4 \mathbf{P}_{24} + b'_5 \mathbf{P}_{25}
\end{aligned} \tag{87}$$

Entrando con estos valores en (86) sale (85), luego (85) y (86) son iguales c.q.d.

Superficie S_{35x02} con S_{35x23}

La curva en el borde común (t = 2/8) a ambos parches es igual

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(2/8,u)_{35x02} = \\
&= (b_3 a_0 \mathbf{P}_{03} + b_4 a_0 \mathbf{P}_{04} + b_5 a_0 \mathbf{P}_{05} + \\
&\quad b_3 a_1 \mathbf{P}_{13} + b_4 a_1 \mathbf{P}_{14} + b_5 a_1 \mathbf{P}_{15} + \\
&\quad b_3 a_2 \mathbf{P}_{23} + b_4 a_2 \mathbf{P}_{24} + b_5 a_2 \mathbf{P}_{25})_{t=2/8} = \\
&= b_3 \mathbf{P}_{23} + b_4 \mathbf{P}_{24} + b_5 \mathbf{P}_{25}
\end{aligned}
\tag{88}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(2/8,u)_{35x23} = \\
&= (b_3 a_9 \mathbf{P}_{\mathbf{23}} + b_4 a_9 \mathbf{P}_{\mathbf{24}} + b_5 a_9 \mathbf{P}_{\mathbf{25}} + \\
&\quad b_3 a_{10} \mathbf{P}_{\mathbf{33}} + b_4 a_{10} \mathbf{P}_{\mathbf{34}} + b_5 a_{10} \mathbf{P}_{\mathbf{35}} + \\
&\quad b_3 a_{11} \mathbf{T}_{\mathbf{23}} + b_4 a_{11} \mathbf{T}_{\mathbf{24}} + b_5 a_{11} \mathbf{T}_{\mathbf{25}} + \\
&\quad b_3 a_{12} \mathbf{T}_{\mathbf{33}} + b_4 a_{12} \mathbf{T}_{\mathbf{34}} + b_5 a_{12} \mathbf{T}_{\mathbf{35}})_{t=2/8} = \\
&= b_3 \mathbf{P}_{23} + b_4 \mathbf{P}_{24} + b_5 \mathbf{P}_{25}
\end{aligned}
\tag{89}
$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,u)_{35x02}}{\partial t} = \\
&= (b_3 a'_0 \mathbf{P}_{03} + b_4 a'_0 \mathbf{P}_{04} + b_5 a'_0 \mathbf{P}_{05} + \\
&\quad b_3 a'_1 \mathbf{P}_{13} + b_4 a'_1 \mathbf{P}_{14} + b_5 a'_1 \mathbf{P}_{15} + \\
&\quad b_3 a'_2 \mathbf{P}_{23} + b_4 a'_2 \mathbf{P}_{24} + b_5 a'_2 \mathbf{P}_{25})_{t=2/8}
\end{aligned}
\tag{90}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,u)_{35x23}}{\partial t} = \\
&= (b_3 a'_9 \mathbf{P}_{\mathbf{23}} + b_4 a'_9 \mathbf{P}_{\mathbf{24}} + b_5 a'_9 \mathbf{P}_{\mathbf{25}} + \\
&\quad b_3 a'_{10} \mathbf{P}_{\mathbf{33}} + b_4 a'_{10} \mathbf{P}_{\mathbf{34}} + b_5 a'_{10} \mathbf{P}_{\mathbf{35}} + \\
&\quad b_3 a'_{11} \mathbf{T}_{\mathbf{23}} + b_4 a'_{11} \mathbf{T}_{\mathbf{24}} + b_5 a'_{11} \mathbf{T}_{\mathbf{25}} + \\
&\quad b_3 a'_{12} \mathbf{T}_{\mathbf{33}} + b_4 a'_{12} \mathbf{T}_{\mathbf{34}} + b_5 a'_{12} \mathbf{T}_{\mathbf{35}})_{t=2/8} = \\
&= b_3 \mathbf{T}_{23} + b_4 \mathbf{T}_{24} + b_5 \mathbf{T}_{25}
\end{aligned}
\tag{91}
$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T_{23}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,3/8)_{35x02}}{\partial t} = (a'_0\mathbf{P}_{03} + a'_1\mathbf{P}_{13} + a'_2\mathbf{P}_{23})_{t=2/8} \\
\mathbf{T_{24}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,4/8)_{35x02}}{\partial t} = (a'_0\mathbf{P}_{04} + a'_1\mathbf{P}_{14} + a'_2\mathbf{P}_{24})_{t=2/8} \\
\mathbf{T_{25}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,5/8)_{35x02}}{\partial t} = (a'_0\mathbf{P}_{05} + a'_1\mathbf{P}_{15} + a'_2\mathbf{P}_{25})_{t=2/8}
\end{aligned} \tag{92}$$

Entrando con estos valores en (91) sale (90), luego (90) y (91) son iguales c.q.d.

<u>Superficie S_{35x23} con S_{56x23}</u>

La curva en el borde coniún (u = 5/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,5/8)_{35x23} = \\
&= (b_3a_9\mathbf{P_{23}} + b_4a_9\mathbf{P_{24}} + b_5a_9\mathbf{P_{25}} + \\
&\quad b_3a_{10}\mathbf{P_{33}} + b_4a_{10}\mathbf{P_{34}} + b_5a_{10}\mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b_3a_{11}\mathbf{T_{23}} + b_4a_{11}\mathbf{T_{24}} + b_5a_{11}\mathbf{T_{25}} + \\
&\quad b_3a_{12}\mathbf{T_{33}} + b_4a_{12}\mathbf{T_{34}} + b_5a_{12}\mathbf{T_{35}})_{u=5/8} = \\
&= a_9\mathbf{P_{25}} + a_{10}\mathbf{P_{35}} + a_{11}\mathbf{T_{25}} + a_{12}\mathbf{T_{35}}
\end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,5/8)_{56x23} = \\
&= (b_{13}a_9\mathbf{P_{25}} + b_{14}a_9\mathbf{P_{26}} + b_{15}a_9\mathbf{U_{25}} + b_{16}a_9\mathbf{U_{26}} + \\
&\quad b_{13}a_{10}\mathbf{P_{35}} + b_{14}a_{10}\mathbf{P_{36}} + b_{15}a_{10}\mathbf{U_{35}} + b_{16}a_{10}\mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b_{13}a_{11}\mathbf{T_{25}} + b_{14}a_{11}\mathbf{T_{26}} + b_{15}a_{11}\mathbf{E_{25}} + b_{16}a_{11}\mathbf{E_{26}} + \\
&\quad b_{13}a_{12}\mathbf{T_{35}} + b_{14}a_{12}\mathbf{T_{36}} + b_{15}a_{12}\mathbf{E_{35}} + b_{16}a_{12}\mathbf{E_{36}})_{u=5/8} = \\
&= a_9\mathbf{P_{25}} + a_{10}\mathbf{P_{35}} + a_{11}\mathbf{T_{25}} + a_{12}\mathbf{T_{35}}
\end{aligned} \tag{94}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,5/8)_{35x23}}{\partial u} = \\
&= (b'_3 a_9 \mathbf{P_{23}} + b'_4 a_9 \mathbf{P_{24}} + b'_5 a_9 \mathbf{P_{25}} + \\
&\quad b'_3 a_{10} \mathbf{P_{33}} + b'_4 a_{10} \mathbf{P_{34}} + b'_5 a_{10} \mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b'_3 a_{11} \mathbf{T_{23}} + b'_4 a_{11} \mathbf{T_{24}} + b'_5 a_{11} \mathbf{T_{25}} + \\
&\quad b'_3 a_{12} \mathbf{T_{33}} + b'_4 a_{12} \mathbf{T_{34}} + b'_5 a_{12} \mathbf{T_{35}})_{u=5/8}
\end{aligned} \qquad (95)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,5/8)_{56x23}}{\partial u} = \\
&= (b'_{13} a_9 \mathbf{P_{25}} + b'_{14} a_9 \mathbf{P_{26}} + b'_{15} a_9 \mathbf{U_{25}} + b'_{16} a_9 \mathbf{U_{26}} + \\
&\quad b'_{13} a_{10} \mathbf{P_{35}} + b'_{14} a_{10} \mathbf{P_{36}} + b'_{15} a_{10} \mathbf{U_{35}} + b'_{16} a_{10} \mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b'_{13} a_{11} \mathbf{T_{25}} + b'_{14} a_{11} \mathbf{T_{26}} + b'_{15} a_{11} \mathbf{E_{25}} + b'_{16} a_{11} \mathbf{E_{26}} + \\
&\quad b'_{13} a_{12} \mathbf{T_{35}} + b'_{14} a_{12} \mathbf{T_{36}} + b'_{15} a_{12} \mathbf{E_{35}} + b'_{16} a_{12} \mathbf{E_{36}})_{u=5/8} = \\
&= a_9 \mathbf{U_{25}} + a_{10} \mathbf{U_{35}} + a_{11} \mathbf{E_{25}} + a_{12} \mathbf{E_{35}}
\end{aligned} \qquad (96)$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U_{25}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,5/8)_{35x23}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{23}} + b'_4 \mathbf{P_{24}} + b'_5 \mathbf{P_{25}})_{u=5/8} \\
\mathbf{U_{35}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,5/8)_{35x23}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{33}} + b'_4 \mathbf{P_{34}} + b'_5 \mathbf{P_{35}})_{u=5/8} \\
\mathbf{E_{25}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(2/8,5/8)_{35x23}}{\partial t \partial u} = (b'_3 \mathbf{T_{23}} + b'_4 \mathbf{T_{24}} + b'_5 \mathbf{T_{25}})_{u=5/8} \\
\mathbf{E_{35}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(3/8,5/8)_{35x23}}{\partial t \partial u} = (b'_3 \mathbf{T_{33}} + b'_4 \mathbf{T_{34}} + b'_5 \mathbf{T_{35}})_{u=5/8}
\end{aligned} \qquad (97)$$

Entrando con estos valores en (96) sale (95), luego (95) y (96) son iguales c.q.d.

Superficie S_{35x23} con S_{35x35}

La curva en el borde común (t = 3/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(3/8,u)_{35x23} = \\
&= (b_3 a_9 \mathbf{P_{23}} + b_4 a_9 \mathbf{P_{24}} + b_5 a_9 \mathbf{P_{25}} + \\
&\quad b_3 a_{10} \mathbf{P_{33}} + b_4 a_{10} \mathbf{P_{34}} + b_5 a_{10} \mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b_3 a_{11} \mathbf{T_{23}} + b_4 a_{11} \mathbf{T_{24}} + b_5 a_{11} \mathbf{T_{25}} + \\
&\quad b_3 a_{12} \mathbf{T_{33}} + b_4 a_{12} \mathbf{T_{34}} + b_5 a_{12} \mathbf{T_{35}})_{t=3/8} = \\
&= b_3 \mathbf{P_{33}} + b_4 \mathbf{P_{34}} + b_5 \mathbf{P_{35}}
\end{aligned} \qquad (98)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(3/8,u)_{35x235} = \\
&= (b_3 a_3 \mathbf{P_{33}} + b_4 a_3 \mathbf{P_{34}} + b_5 a_3 \mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b_3 a_4 \mathbf{P_{43}} + b_4 a_4 \mathbf{P_{44}} + b_5 a_4 \mathbf{P_{45}} + \\
&\quad b_3 a_5 \mathbf{P_{53}} + b_4 a_5 \mathbf{P_{54}} + b_5 a_5 \mathbf{P_{55}})_{t=3/8} = \\
&= b_3 \mathbf{P_{33}} + b_4 \mathbf{P_{34}} + b_5 \mathbf{P_{35}}
\end{aligned} \qquad (99)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(3/8,u)_{35x23}}{\partial t} = \\
&= (b_3 a'_9 \mathbf{P_{23}} + b_4 a'_9 \mathbf{P_{24}} + b_5 a'_9 \mathbf{P_{25}} + \\
&\quad b_3 a'_{10} \mathbf{P_{33}} + b_4 a'_{10} \mathbf{P_{34}} + b_5 a'_{10} \mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b_3 a'_{11} \mathbf{T_{23}} + b_4 a'_{11} \mathbf{T_{24}} + b_5 a'_{11} \mathbf{T_{25}} + \\
&\quad b_3 a'_{12} \mathbf{T_{33}} + b_4 a'_{12} \mathbf{T_{34}} + b_5 a'_{12} \mathbf{T_{35}})_{t=3/8} = \\
&= b_3 \mathbf{T_{33}} + b_4 \mathbf{T_{34}} + b_5 \mathbf{T_{35}}
\end{aligned} \qquad (100)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(3/8,u)_{35x35}}{\partial t} = \\
&= (b_3 a'_3 \mathbf{P_{33}} + b_4 a'_3 \mathbf{P_{34}} + b_5 a'_3 \mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b_3 a'_4 \mathbf{P_{43}} + b_4 a'_4 \mathbf{P_{44}} + b_5 a'_4 \mathbf{P_{45}} + \\
&\quad b_3 a'_5 \mathbf{P_{53}} + b_4 a'_5 \mathbf{P_{54}} + b_5 a'_5 \mathbf{P_{55}})_{t=3/8}
\end{aligned} \qquad (101)$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T_{33}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,3/8)_{35x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P_{33}} + a'_4\mathbf{P_{43}} + a'_5\mathbf{P_{53}})_{t=3/8} \\
\mathbf{T_{34}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,4/8)_{35x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P_{34}} + a'_4\mathbf{P_{44}} + a'_5\mathbf{P_{54}})_{t=3/8} \\
\mathbf{T_{35}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,5/8)_{35x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P_{35}} + a'_4\mathbf{P_{45}} + a'_5\mathbf{P_{55}})_{t=3/8}
\end{aligned} \qquad (102)$$

Entrando con estos valores en (100) sale (101), luego (100) y (101) son iguales c.q.d.

<u>Superficie S_{35x35} con S_{56x35}</u>

La curva en el borde común (u=5/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,5/8)_{35x35} = \\
&= (b_3a_3\mathbf{P_{33}} + b_4a_3\mathbf{P_{34}} + b_5a_3\mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b_3a_4\mathbf{P_{43}} + b_4a_4\mathbf{P_{44}} + b_5a_4\mathbf{P_{45}} + \\
&\quad b_3a_5\mathbf{P_{53}} + b_4a_5\mathbf{P_{54}} + b_5a_5\mathbf{P_{55}})_{u=5/8} = \\
&= a_3\mathbf{P_{35}} + a_4\mathbf{P_{45}} + a_5\mathbf{P_{55}}
\end{aligned} \qquad (103)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,5/8)_{56x35} = \\
&= (b_{13}a_3\mathbf{P}_{35} + b_{14}a_3\mathbf{P}_{36} + b_{15}a_3\mathbf{U}_{35} + b_{16}a_3\mathbf{U}_{36} + \\
&b_{13}a_4\mathbf{P}_{45} + b_{14}a_4\mathbf{P}_{46} + b_{15}a_4\mathbf{U}_{45} + b_{16}a_4\mathbf{U}_{46} + \\
&b_{13}a_5\mathbf{P}_{55} + b_{14}a_5\mathbf{P}_{56} + b_{15}a_5\mathbf{U}_{55} + b_{16}a_5\mathbf{U}_{56})_{u=5/8} = \\
&= a_3\mathbf{P_{35}} + a_4\mathbf{P_{45}} + a_5\mathbf{P_{55}}
\end{aligned} \qquad (104)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,5/8)_{35x35}}{\partial u} = \\
&= (b'_3 a_3 \mathbf{P_{33}} + b'_4 a_3 \mathbf{P_{34}} + b'_5 a_3 \mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b'_3 a_4 \mathbf{P_{43}} + b'_4 a_4 \mathbf{P_{44}} + b'_5 a_4 \mathbf{P_{45}} + \\
&\quad b'_3 a_5 \mathbf{P_{53}} + b'_4 a_5 \mathbf{P_{54}} + b'_5 a_5 \mathbf{P_{55}})_{u=5/8}
\end{aligned} \qquad (105)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,5/8)_{56x35}}{\partial u} = \\
&= (b'_{13} a_3 \mathbf{P}_{35} + b'_{14} a_3 \mathbf{P}_{36} + b'_{15} a_3 \mathbf{U}_{35} + b'_{16} a_3 \mathbf{U}_{36} + \\
&b'_{13} a_4 \mathbf{P}_{45} + b'_{14} a_4 \mathbf{P}_{46} + b'_{15} a_4 \mathbf{U}_{45} + b'_{16} a_4 \mathbf{U}_{46} + \\
&b'_{13} a_5 \mathbf{P}_{55} + b'_{14} a_5 \mathbf{P}_{56} + b'_{15} a_5 \mathbf{U}_{55} + b'_{16} a_5 \mathbf{U}_{56})_{u=5/8} = \\
&= a_3 \mathbf{U_{35}} + a_4 \mathbf{U_{45}} + a_5 \mathbf{U_{55}}
\end{aligned} \qquad (106)$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{35} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,5/8)_{35x35}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{33}} + b'_4 \mathbf{P_{34}} + b'_5 \mathbf{P_{35}})_{u=5/8} \\
\mathbf{U}_{45} &= \frac{\partial \mathbf{P}(4/8,5/8)_{35x35}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{43}} + b'_4 \mathbf{P_{44}} + b'_5 \mathbf{P_{45}})_{u=5/8} \\
\mathbf{U}_{55} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,5/8)_{35x35}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{53}} + b'_4 \mathbf{P_{54}} + b'_5 \mathbf{P_{55}})_{u=5/8}
\end{aligned} \qquad (107)$$

Entrando con estos valores en (106) sale (105), luego (105) y (106) son iguales c.q.d.

Superficie S_{35x35} con S_{35x56}

La curva en el borde común (t = 5/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(5/8,u)_{35x35} = \\
&= (b_3a_3\mathbf{P_{33}} + b_4a_3\mathbf{P_{34}} + b_5a_3\mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b_3a_4\mathbf{P_{43}} + b_4a_4\mathbf{P_{44}} + b_5a_4\mathbf{P_{45}} + \\
&\quad b_3a_5\mathbf{P_{53}} + b_4a_5\mathbf{P_{54}} + b_5a_5\mathbf{P_{55}})_{t=5/8} = \\
&= b_3\mathbf{P_{53}} + b_4\mathbf{P_{54}} + b_5\mathbf{P_{55}}
\end{aligned} \qquad (108)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(5/8,u)_{35x56} = \\
&= (b_3a_{13}\mathbf{P_{53}} + b_4a_{13}\mathbf{P_{54}} + b_5a_{13}\mathbf{P_{55}} + \\
&\quad b_3a_{14}\mathbf{P_{63}} + b_4a_{14}\mathbf{P_{64}} + b_5a_{14}\mathbf{P_{65}} + \\
&\quad b_3a_{15}\mathbf{T_{53}} + b_4a_{15}\mathbf{T_{54}} + b_5a_{15}\mathbf{T_{55}} + \\
&\quad b_3a_{16}\mathbf{T_{63}} + b_4a_{16}\mathbf{T_{64}} + b_5a_{16}\mathbf{T_{65}})_{t=5/8} = \\
&= b_3\mathbf{P_{53}} + b_4\mathbf{P_{54}} + b_5\mathbf{P_{55}}
\end{aligned} \qquad (109)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(5/8,u)_{35x35}}{\partial t} = \\
&= (b_3a'_3\mathbf{P_{33}} + b_4a'_3\mathbf{P_{34}} + b_5a'_3\mathbf{P_{35}} + \\
&\quad b_3a'_4\mathbf{P_{43}} + b_4a'_4\mathbf{P_{44}} + b_5a'_4\mathbf{P_{45}} + \\
&\quad b_3a'_5\mathbf{P_{53}} + b_4a'_5\mathbf{P_{54}} + b_5a'_5\mathbf{P_{55}})_{t=5/8}
\end{aligned} \qquad (110)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(5/8,u)_{35x56}}{\partial t} = \\
&= (b_3a'_{13}\mathbf{P_{53}} + b_4a'_{13}\mathbf{P_{54}} + b_5a'_{13}\mathbf{P_{55}} + \\
&\quad b_3a'_{14}\mathbf{P_{63}} + b_4a'_{14}\mathbf{P_{64}} + b_5a'_{14}\mathbf{P_{65}} + \\
&\quad b_3a'_{15}\mathbf{T_{53}} + b_4a'_{15}\mathbf{T_{54}} + b_5a'_{15}\mathbf{T_{55}} + \\
&\quad b_3a'_{16}\mathbf{T_{63}} + b_4a'_{16}\mathbf{T_{64}} + b_5a'_{16}\mathbf{T_{65}})_{t=5/8} = \\
&= b_3\mathbf{T_{53}} + b_4\mathbf{T_{54}} + b_5\mathbf{T_{55}}
\end{aligned} \qquad (111)$$

Pero como:

$$\mathbf{T_{53}} = \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,3/8)_{35x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P_{33}} + a'_4\mathbf{P_{43}} + a'_5\mathbf{P_{53}})_{t=5/8}$$
$$\mathbf{T_{54}} = \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,4/8)_{35x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P_{34}} + a'_4\mathbf{P_{44}} + a'_5\mathbf{P_{54}})_{t=5/8} \qquad (112)$$
$$\mathbf{T_{55}} = \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,5/8)_{35x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P_{35}} + a'_4\mathbf{P_{45}} + a'_5\mathbf{P_{55}})_{t=5/8}$$

Entrando con estos valores en (111) sale (110), luego (110) y (111) son iguales c.q.d.

<u>Superficie S_{35x56} con S_{56x56}</u>

La curva en el borde común (u = 5/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,5/8)_{35x56} = \\
&= (b_3a_{13}\mathbf{P_{53}} + b_4a_{13}\mathbf{P_{54}} + b_5a_{13}\mathbf{P_{55}} + \\
&\quad b_3a_{14}\mathbf{P_{63}} + b_4a_{14}\mathbf{P_{64}} + b_5a_{14}\mathbf{P_{65}} + \\
&\quad b_3a_{15}\mathbf{T_{53}} + b_4a_{15}\mathbf{T_{54}} + b_5a_{15}\mathbf{T_{55}} + \\
&\quad b_3a_{16}\mathbf{T_{63}} + b_4a_{16}\mathbf{T_{64}} + b_5a_{16}\mathbf{T_{65}})_{u=5/8} = \\
&= a_{13}\mathbf{P_{55}} + a_{14}\mathbf{P_{65}} + a_{15}\mathbf{T_{55}} + a_{16}\mathbf{T_{65}}
\end{aligned} \qquad (113)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,u)_{56x56} = \\
&= (b_{13}a_{13}\mathbf{P_{55}} + b_{14}a_{13}\mathbf{P_{56}} + b_{15}a_{13}\mathbf{U_{55}} + b_{16}a_{13}\mathbf{U_{56}} + \\
&\quad b_{13}a_{14}\mathbf{P_{65}} + b_{14}a_{14}\mathbf{P_{66}} + b_{15}a_{14}\mathbf{U_{65}} + b_{16}a_{14}\mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b_{13}a_{15}\mathbf{T_{55}} + b_{14}a_{15}\mathbf{T_{56}} + b_{15}a_{15}\mathbf{E_{55}} + b_{16}a_{15}\mathbf{E_{56}} + \\
&\quad b_{13}a_{16}\mathbf{T_{65}} + b_{14}a_{16}\mathbf{T_{66}} + b_{15}a_{16}\mathbf{E_{65}} + b_{16}a_{16}\mathbf{E_{66}})_{u=2/8} = \\
&= a_{13}\mathbf{P_{55}} + a_{14}\mathbf{P_{65}} + a_{15}\mathbf{T_{55}} + a_{16}\mathbf{T_{65}}
\end{aligned} \qquad (114)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,5/8)_{35x56}}{\partial u} = \\
&= (b'_3 a_{13}\mathbf{P_{53}} + b'_4 a_{13}\mathbf{P_{54}} + b'_5 a_{13}\mathbf{P_{55}} + \\
&\quad b'_3 a_{14}\mathbf{P_{63}} + b'_4 a_{14}\mathbf{P_{64}} + b'_5 a_{14}\mathbf{P_{65}} + \\
&\quad b'_3 a_{15}\mathbf{T_{53}} + b'_4 a_{15}\mathbf{T_{54}} + b'_5 a_{15}\mathbf{T_{55}} + \\
&\quad b'_3 a_{16}\mathbf{T_{63}} + b'_4 a_{16}\mathbf{T_{64}} + b'_5 a_{16}\mathbf{T_{65}})_{u=5/8}
\end{aligned} \tag{115}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,5/8)_{56x56}}{\partial u} = \\
&= (b'_{13} a_{13}\mathbf{P_{55}} + b'_{14} a_{13}\mathbf{P_{56}} + b'_{15} a_{13}\mathbf{U_{55}} + b'_{16} a_{13}\mathbf{U_{56}} + \\
&\quad b'_{13} a_{14}\mathbf{P_{65}} + b'_{14} a_{14}\mathbf{P_{66}} + b'_{15} a_{14}\mathbf{U_{65}} + b'_{16} a_{14}\mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b'_{13} a_{15}\mathbf{T_{55}} + b'_{14} a_{15}\mathbf{T_{56}} + b'_{15} a_{15}\mathbf{E_{55}} + b'_{16} a_{15}\mathbf{E_{56}} + \\
&\quad b'_{13} a_{16}\mathbf{T_{65}} + b'_{14} a_{16}\mathbf{T_{66}} + b'_{15} a_{16}\mathbf{E_{65}} + b'_{16} a_{16}\mathbf{E_{66}})_{u=5/8} = \\
&= a_{13}\mathbf{U_{55}} + a_{14}\mathbf{U_{65}} + a_{15}\mathbf{E_{55}} + a_{16}\mathbf{E_{65}}
\end{aligned} \tag{116}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U_{55}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,5/8)_{35x56}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{53}} + b'_4 \mathbf{P_{54}} + b'_5 \mathbf{P_{55}})_{u=5/8} \\
\mathbf{U_{65}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,5/8)_{35x56}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{63}} + b'_4 \mathbf{P_{64}} + b'_5 \mathbf{P_{65}})_{u=5/8} \\
\mathbf{E_{55}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(5/8,5/8)_{35x56}}{\partial t \partial u} = (b'_3 \mathbf{T_{53}} + b'_4 \mathbf{T_{54}} + b'_5 \mathbf{T_{55}})_{u=5/8} \\
\mathbf{E_{65}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(6/8,5/8)_{35x56}}{\partial t \partial u} = (b'_3 \mathbf{T_{63}} + b'_4 \mathbf{T_{64}} + b'_5 \mathbf{T_{65}})_{u=5/8}
\end{aligned} \tag{117}$$

Entrando con estos valores en (116) sale (115), luego (115) y (116) son iguales c.q.d.

<u>Superficie S_{35x56} con S_{35x68}</u>

La curva en el borde común (t = 6/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(6/8,u)_{35x56} = \\
&= (b_3 a_{13}\mathbf{P_{53}} + b_4 a_{13}\mathbf{P_{54}} + b_5 a_{13}\mathbf{P_{55}} + \\
&\quad b_3 a_{14}\mathbf{P_{63}} + b_4 a_{14}\mathbf{P_{64}} + b_5 a_{14}\mathbf{P_{65}} + \\
&\quad b_3 a_{15}\mathbf{T_{53}} + b_4 a_{15}\mathbf{T_{54}} + b_5 a_{15}\mathbf{T_{55}} + \\
&\quad b_3 a_{16}\mathbf{T_{63}} + b_4 a_{16}\mathbf{T_{64}} + b_5 a_{16}\mathbf{T_{65}})_{u=5/8} = \\
&= b_3\mathbf{P_{63}} + b_4\mathbf{P_{64}} + b_5\mathbf{P_{65}}
\end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(6/8,u)_{35x68} = \\
&= (b_3 a_6\mathbf{P_{63}} + b_4 a_6\mathbf{P_{64}} + b_5 a_6\mathbf{P_{65}} + \\
&\quad b_3 a_7\mathbf{P_{73}} + b_4 a_7\mathbf{P_{74}} + b_5 a_7\mathbf{P_{75}} + \\
&\quad b_3 a_8\mathbf{P_{83}} + b_4 a_8\mathbf{P_{84}} + b_5 a_8\mathbf{P_{85}})_{t=6/8} = \\
&= b_3\mathbf{P_{63}} + b_4\mathbf{P_{64}} + b_5\mathbf{P_{65}}
\end{aligned} \tag{119}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{P}(6/8,u)_{35x56}}{\partial t} = \\
&= (b_3 a'_{13}\mathbf{P_{53}} + b_4 a'_{13}\mathbf{P_{54}} + b_5 a'_{13}\mathbf{P_{55}} + \\
&\quad b_3 a'_{14}\mathbf{P_{63}} + b_4 a'_{14}\mathbf{P_{64}} + b_5 a'_{14}\mathbf{P_{65}} + \\
&\quad b_3 a'_{15}\mathbf{T_{53}} + b_4 a'_{15}\mathbf{T_{54}} + b_5 a'_{15}\mathbf{T_{55}} + \\
&\quad b_3 a'_{16}\mathbf{T_{63}} + b_4 a'_{16}\mathbf{T_{64}} + b_5 a'_{16}\mathbf{T_{65}})_{t=6/8} = \\
&= b_3\mathbf{T_{63}} + b_4\mathbf{T_{64}} + b_5\mathbf{T_{65}}
\end{aligned} \tag{120}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{P}(6/8,u)_{35x68}}{\partial t} = \\
&= (b_3 a'_6\mathbf{P_{63}} + b_4 a'_6\mathbf{P_{64}} + b_5 a'_6\mathbf{P_{65}} + \\
&\quad b_3 a'_7\mathbf{P_{73}} + b_4 a'_7\mathbf{P_{74}} + b_5 a'_7\mathbf{P_{75}} + \\
&\quad b_3 a'_8\mathbf{P_{83}} + b_4 a'_8\mathbf{P_{84}} + b_5 a'_8\mathbf{P_{85}})_{u=2/8}
\end{aligned} \tag{121}$$

Pero como:

$$\mathbf{T_{63}} = \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,3/8)_{35x56}}{\partial t} = (a'_6 \mathbf{P_{63}} + a'_7 \mathbf{P_{73}} + a'_8 \mathbf{P_{83}})_{t=6/8}$$
$$\mathbf{T_{64}} = \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,4/8)_{35x56}}{\partial t} = (a'_6 \mathbf{P_{64}} + a'_7 \mathbf{P_{74}} + a'_8 \mathbf{P_{84}})_{t=6/8} \qquad (122)$$
$$\mathbf{T_{65}} = \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,5/8)_{35x56}}{\partial t} = (a'_6 \mathbf{P_{65}} + a'_7 \mathbf{P_{75}} + a'_8 \mathbf{P_{85}})_{t=6/8}$$

Entrando con estos valores en (120) sale (121), luego (120) y (121) son iguales c.q.d.

Superficie S_{35x68} con S_{56x68}

La curva en el borde común (u = 5/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,5/8)_{35x68} = \\
&= (b_3 a_6 \mathbf{P_{63}} + b_4 a_6 \mathbf{P_{64}} + b_5 a_6 \mathbf{P_{65}} + \\
&\quad b_3 a_7 \mathbf{P_{73}} + b_4 a_7 \mathbf{P_{74}} + b_5 a_7 \mathbf{P_{75}} + \\
&\quad b_3 a_8 \mathbf{P_{83}} + b_4 a_8 \mathbf{P_{84}} + b_5 a_8 \mathbf{P_{85}})_{u=5/8} = \\
&= a_6 \mathbf{P_{65}} + a_7 \mathbf{P_{75}} + a_8 \mathbf{P_{85}}
\end{aligned} \qquad (123)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,5/8)_{56x68} = \\
&= (b_{13} a_6 \mathbf{P_{65}} + b_{14} a_6 \mathbf{P_{66}} + b_{15} a_6 \mathbf{U_{65}} + b_{16} a_6 \mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b_{13} a_7 \mathbf{P_{75}} + b_{14} a_7 \mathbf{P_{76}} + b_{15} a_7 \mathbf{U_{75}} + b_{16} a_7 \mathbf{U_{76}} + \\
&\quad b_{13} a_8 \mathbf{P_{85}} + b_{14} a_8 \mathbf{P_{86}} + b_{15} a_8 \mathbf{U_{85}} + b_{16} a_8 \mathbf{U_{86}})_{u=5/8} = \\
&= a_6 \mathbf{P_{65}} + a_7 \mathbf{P_{75}} + a_8 \mathbf{P_{85}}
\end{aligned} \qquad (124)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,5/8)_{35x68}}{\partial u} = \\
&= (b'_3 a_6 \mathbf{P_{63}} + b'_4 a_6 \mathbf{P_{64}} + b'_5 a_6 \mathbf{P_{65}} + \\
&\quad b'_3 a_7 \mathbf{P_{73}} + b'_4 a_7 \mathbf{P_{74}} + b'_5 a_7 \mathbf{P_{75}} + \\
&\quad b'_3 a_8 \mathbf{P_{83}} + b'_4 a_8 \mathbf{P_{84}} + b'_5 a_8 \mathbf{P_{85}})_{u=5/8}
\end{aligned} \tag{125}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,5/8)_{56x68}}{\partial u} = \\
&= (b'_{13} a_6 \mathbf{P_{65}} + b'_{14} a_6 \mathbf{P_{66}} + b'_{15} a_6 \mathbf{U_{65}} + b'_{16} a_6 \mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b'_{13} a_7 \mathbf{P_{75}} + b'_{14} a_7 \mathbf{P_{76}} + b'_{15} a_7 \mathbf{U_{75}} + b'_{16} a_7 \mathbf{U_{76}} + \\
&\quad b'_{13} a_8 \mathbf{P_{85}} + b'_{14} a_8 \mathbf{P_{86}} + b'_{15} a_8 \mathbf{U_{85}} + b'_{16} a_8 \mathbf{U_{86}})_{u=5/8}
\end{aligned} \tag{126}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U_{65}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,5/8)_{35x68}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{63}} + b'_4 \mathbf{P_{64}} + b'_5 \mathbf{P_{65}})_{u=5/8} \\
\mathbf{U_{75}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(7/8,5/8)_{35x68}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{73}} + b'_4 \mathbf{P_{74}} + b'_5 \mathbf{P_{75}})_{u=5/8} \\
\mathbf{U_{85}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(1,5/8)_{35x68}}{\partial u} = (b'_3 \mathbf{P_{83}} + b'_4 \mathbf{P_{84}} + b'_5 \mathbf{P_{85}})_{u=5/8}
\end{aligned} \tag{127}$$

Entrando con estos valores en (126) sale (125), luego (125) y (126) son iguales c.q.d.

Superficie S_{56x02} con S_{68x02}

La curva en el borde común (u = 6/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,6/8)_{56x02} = \\
&= (b_{13} a_0 \mathbf{P_{05}} + b_{14} a_0 \mathbf{P_{06}} + b_{15} a_0 \mathbf{U_{05}} + b_{16} a_0 \mathbf{U_{06}} + \\
&\quad b_{13} a_1 \mathbf{P_{15}} + b_{14} a_1 \mathbf{P_{16}} + b_{15} a_1 \mathbf{U_{15}} + b_{16} a_1 \mathbf{U_{16}} + \\
&\quad b_{13} a_2 \mathbf{P_{25}} + b_{14} a_2 \mathbf{P_{26}} + b_{15} a_2 \mathbf{U_{25}} + b_{16} a_2 \mathbf{U_{26}})_{u=6/8} = \\
&= a_0 \mathbf{P_{06}} + a_1 \mathbf{P_{16}} + a_2 \mathbf{P_{26}}
\end{aligned} \tag{128}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,6/8)_{68x02} = \\
&= (b_6 a_0 \mathbf{P}_{06} + b_7 a_0 \mathbf{P}_{07} + b_8 a_0 \mathbf{P}_{08} + \\
&\quad b_6 a_1 \mathbf{P}_{16} + b_7 a_1 \mathbf{P}_{17} + b_8 a_1 \mathbf{P}_{18} + \\
&\quad b_6 a_2 \mathbf{P}_{26} + b_7 a_2 \mathbf{P}_{27} + b_8 a_2 \mathbf{P}_{28})_{u=6/8} = \\
&= a_0 \mathbf{P_{06}} + a_1 \mathbf{P_{16}} + a_2 \mathbf{P_{26}}
\end{aligned} \tag{129}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,6/8)_{56x02}}{\partial u} = \\
&= (b'_{13} a_0 \mathbf{P_{05}} + b'_{14} a_0 \mathbf{P_{06}} + b'_{15} a_0 \mathbf{U_{05}} + b'_{16} a_0 \mathbf{U_{06}} + \\
&\quad b'_{13} a_1 \mathbf{P_{15}} + b'_{14} a_1 \mathbf{P_{16}} + b'_{15} a_1 \mathbf{U_{15}} + b'_{16} a_1 \mathbf{U_{16}} + \\
&\quad b'_{13} a_2 \mathbf{P_{25}} + b'_{14} a_2 \mathbf{P_{26}} + b'_{15} a_2 \mathbf{U_{25}} + b'_{16} a_2 \mathbf{U_{26}})_{u=6/8} = \\
&= a_0 \mathbf{U_{06}} + a_1 \mathbf{U_{16}} + a_2 \mathbf{U_{26}}
\end{aligned} \tag{130}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,6/8)_{68x02}}{\partial u} = \\
&= (b'_6 a_0 \mathbf{P}_{06} + b'_7 a_0 \mathbf{P}_{07} + b'_8 a_0 \mathbf{P}_{08} + \\
&\quad b'_6 a_1 \mathbf{P}_{16} + b'_7 a_1 \mathbf{P}_{17} + b'_8 a_1 \mathbf{P}_{18} + \\
&\quad b'_6 a_2 \mathbf{P}_{26} + b'_7 a_2 \mathbf{P}_{27} + b'_8 a_2 \mathbf{P}_{28})_{t=2/8}
\end{aligned} \tag{131}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U_{06}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(0,6/8)_{68x02}}{\partial u} = (b'_6 \mathbf{P}_{06} + b'_7 \mathbf{P}_{07} + b'_8 \mathbf{P}_{08})_{u=6/8} \\
\mathbf{U_{16}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(1/8,6/8)_{68x02}}{\partial u} = (b'_6 \mathbf{P}_{16} + b'_7 \mathbf{P}_{17} + b'_8 \mathbf{P}_{18})_{u=6/8} \\
\mathbf{U_{26}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,6/8)_{68x02}}{\partial u} = (b'_6 \mathbf{P}_{26} + b'_7 \mathbf{P}_{27} + b'_8 \mathbf{P}_{28})_{u=6/8}
\end{aligned} \tag{132}$$

Entrando con estos valores en (130) sale (13l), luego (130) y (131) son iguales c.q.d.

Superficie S_{56x02} con S_{56x23}

La curva en el borde común (t = 2/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\mathit{(2/8,u)}_{56x02} = \\
&= (b_{13}a_0\mathbf{P_{05}} + b_{14}a_0\mathbf{P_{06}} + b_{15}a_0\mathbf{U_{05}} + b_{16}a_0\mathbf{U_{06}} + \\
&\quad b_{13}a_1\mathbf{P_{15}} + b_{14}a_1\mathbf{P_{16}} + b_{15}a_1\mathbf{U_{15}} + b_{16}a_1\mathbf{U_{16}} + \\
&\quad b_{13}a_2\mathbf{P_{25}} + b_{14}a_2\mathbf{P_{26}} + b_{15}a_2\mathbf{U_{25}} + b_{16}a_2\mathbf{U_{26}})_{t=2/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{P_{25}} + b_{14}\mathbf{P_{26}} + b_{15}\mathbf{U_{25}} + b_{16}\mathbf{U_{26}}
\end{aligned} \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\mathit{(2/8,u)}_{56x23} = \\
&= (b_{13}a_9\mathbf{P_{25}} + b_{14}a_9\mathbf{P_{26}} + b_{15}a_9\mathbf{U_{25}} + b_{16}a_9\mathbf{U_{26}} + \\
&\quad b_{13}a_{10}\mathbf{P_{35}} + b_{14}a_{10}\mathbf{P_{36}} + b_{15}a_{10}\mathbf{U_{35}} + b_{16}a_{10}\mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b_{13}a_{11}\mathbf{T_{25}} + b_{14}a_{11}\mathbf{T_{26}} + b_{15}a_{11}\mathbf{E_{25}} + b_{16}a_{11}\mathbf{E_{26}} + \\
&\quad b_{13}a_{12}\mathbf{T_{35}} + b_{14}a_{12}\mathbf{T_{36}} + b_{15}a_{12}\mathbf{E_{35}} + b_{16}a_{12}\mathbf{E_{36}})_{t=2/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{P_{25}} + b_{14}\mathbf{P_{26}} + b_{15}\mathbf{U_{25}} + b_{16}\mathbf{U_{26}}
\end{aligned} \tag{134}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{P}\mathit{(2/8,u)}_{56x02}}{\partial t} = \\
&= (b_{13}a'_0\mathbf{P_{05}} + b_{14}a'_0\mathbf{P_{06}} + b_{15}a'_0\mathbf{U_{05}} + b_{16}a'_0\mathbf{U_{06}} + \\
&\quad b_{13}a'_1\mathbf{P_{15}} + b_{14}a'_1\mathbf{P_{16}} + b_{15}a'_1\mathbf{U_{15}} + b_{16}a'_1\mathbf{U_{16}} + \\
&\quad b_{13}a'_2\mathbf{P_{25}} + b_{14}a'_2\mathbf{P_{26}} + b_{15}a'_2\mathbf{U_{25}} + b_{16}a'_2\mathbf{U_{26}})_{t=2/8}
\end{aligned} \tag{135}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{P}\mathit{(2/8,u)}_{56x23}}{\partial t} = \\
&= (b_{13}a_9\mathbf{P_{25}} + b_{14}a_9\mathbf{P_{26}} + b_{15}a_9\mathbf{U_{25}} + b_{16}a_9\mathbf{U_{26}} + \\
&\quad b_{13}a_{10}\mathbf{P_{35}} + b_{14}a_{10}\mathbf{P_{36}} + b_{15}a_{10}\mathbf{U_{35}} + b_{16}a_{10}\mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b_{13}a_{11}\mathbf{T_{25}} + b_{14}a_{11}\mathbf{T_{26}} + b_{15}a_{11}\mathbf{E_{25}} + b_{16}a_{11}\mathbf{E_{26}} + \\
&\quad b_{13}a_{12}\mathbf{T_{35}} + b_{14}a_{12}\mathbf{T_{36}} + b_{15}a_{12}\mathbf{E_{35}} + b_{16}a_{12}\mathbf{E_{36}})_{t=2/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{T_{25}} + b_{14}\mathbf{T_{26}} + b_{15}\mathbf{E_{25}} + b_{16}\mathbf{E_{26}}
\end{aligned} \tag{136}$$

Pero como:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T_{25}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,5/8)_{56x02}}{\partial t} = (a'_0\mathbf{P_{05}} + a'_1\mathbf{P_{15}} + a'_2\mathbf{P_{25}})_{t=2/8} \\
\mathbf{T_{26}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,6/8)_{56x02}}{\partial t} = (a'_0\mathbf{P_{06}} + a'_1\mathbf{P_{16}} + a'_2\mathbf{P_{26}})_{t=2/8} \\
\mathbf{E_{25}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(2/8,5/8)_{56x02}}{\partial t \partial u} = (a'_0\mathbf{U_{05}} + a'_1\mathbf{U_{15}} + a'_2\mathbf{U_{25}})_{t=2/8} \\
\mathbf{E_{26}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(2/8,6/8)_{56x02}}{\partial t \partial u} = (a'_0\mathbf{U_{06}} + a'_1\mathbf{U_{16}} + a'_2\mathbf{U_{26}})_{t=2/8}
\end{aligned}
\tag{137}
$$

Entrando con estos valores en (136) sale (135), luego (135) y (136) son iguales c.q.d.

Superficie S_{56x23} con S_{68x23}

La curva en el borde común (u = 6/8) a ambos parches es igual:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,6/8)_{56x23} = \\
&= (b_{13}a_9\mathbf{P_{25}} + b_{14}a_9\mathbf{P_{26}} + b_{15}a_9\mathbf{U_{25}} + b_{16}a_9\mathbf{U_{26}} + \\
&\quad b_{13}a_{10}\mathbf{P_{35}} + b_{14}a_{10}\mathbf{P_{36}} + b_{15}a_{10}\mathbf{U_{35}} + b_{16}a_{10}\mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b_{13}a_{11}\mathbf{T_{25}} + b_{14}a_{11}\mathbf{T_{26}} + b_{15}a_{11}\mathbf{E_{25}} + b_{16}a_{11}\mathbf{E_{26}} + \\
&\quad b_{13}a_{12}\mathbf{T_{35}} + b_{14}a_{12}\mathbf{T_{36}} + b_{15}a_{12}\mathbf{E_{35}} + b_{16}a_{12}\mathbf{E_{36}})_{u=6/8} = \\
&= a_9\mathbf{P_{26}} + a_{10}\mathbf{P_{36}} + a_{11}\mathbf{T_{26}} + a_{12}\mathbf{T_{36}}
\end{aligned}
\tag{138}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,6/8)_{68x23} = \\
&= (b_6a_9\mathbf{P}_{26} + b_7a_9\mathbf{P}_{27} + b_8a_9\mathbf{P}_{28} + \\
&\quad b_6a_{10}\mathbf{P}_{36} + b_7a_{10}\mathbf{P}_{37} + b_8a_{10}\mathbf{P}_{38} + \\
&\quad b_6a_{11}\mathbf{T}_{26} + b_7a_{11}\mathbf{T}_{27} + b_8a_{11}\mathbf{T}_{28} + \\
&\quad b_6a_{12}\mathbf{T}_{36} + b_7a_{12}\mathbf{T}_{37} + b_8a_{12}\mathbf{T}_{38})_{u=6/8} = \\
&= a_9\mathbf{P_{26}} + a_{10}\mathbf{P_{36}} + a_{11}\mathbf{T_{26}} + a_{12}\mathbf{T_{36}}
\end{aligned}
\tag{139}
$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,6/8)_{56x23}}{\partial u} = \\
&= (b'_{13} a_9 \mathbf{P_{25}} + b'_{14} a_9 \mathbf{P_{26}} + b'_{15} a_9 \mathbf{U_{25}} + b'_{16} a_9 \mathbf{U_{26}} + \\
&\quad b'_{13} a_{10} \mathbf{P_{35}} + b'_{14} a_{10} \mathbf{P_{36}} + b'_{15} a_{10} \mathbf{U_{35}} + b'_{16} a_{10} \mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b'_{13} a_{11} \mathbf{T_{25}} + b'_{14} a_{11} \mathbf{T_{26}} + b'_{15} a_{11} \mathbf{E_{25}} + b'_{16} a_{11} \mathbf{E_{26}} + \\
&\quad b'_{13} a_{12} \mathbf{T_{35}} + b'_{14} a_{12} \mathbf{T_{36}} + b'_{15} a_{12} \mathbf{E_{35}} + b'_{16} a_{12} \mathbf{E_{36}})_{t=3/8} = \\
&= a_9 \mathbf{U_{26}} + a_{10} \mathbf{U_{36}} + a_{11} \mathbf{E_{26}} + a_{12} \mathbf{E_{36}}
\end{aligned} \qquad (140)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,6/8)_{68x23}}{\partial u} = \\
&= (b'_6 a_9 \mathbf{P}_{26} + b'_7 a_9 \mathbf{P}_{27} + b'_8 a_9 \mathbf{P}_{28} + \\
&\quad b'_6 a_{10} \mathbf{P}_{36} + b'_7 a_{10} \mathbf{P}_{37} + b'_8 a_{10} \mathbf{P}_{38} + \\
&\quad b'_6 a_{11} \mathbf{T}_{26} + b'_7 a_{11} \mathbf{T}_{27} + b'_8 a_{11} \mathbf{T}_{28} + \\
&\quad b'_6 a_{12} \mathbf{T}_{36} + b'_7 a_{12} \mathbf{T}_{37} + b'_8 a_{12} \mathbf{T}_{38})_{t=3/8}
\end{aligned} \qquad (141)$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U_{26}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,6/8)_{68x23}}{\partial u} = (b'_6 \mathbf{P}_{26} + b'_7 \mathbf{P}_{27} + b'_8 \mathbf{P}_{28})_{t=3/8} \\
\mathbf{U_{36}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,6/8)_{68x23}}{\partial u} = (b'_6 \mathbf{P}_{36} + b'_7 \mathbf{P}_{37} + b'_8 \mathbf{P}_{38})_{t=3/8} \\
\mathbf{E_{26}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(2/8,6/8)_{68x23}}{\partial t \partial u} = (b'_6 \mathbf{T}_{26} + b'_7 \mathbf{T}_{27} + b'_8 \mathbf{T}_{28})_{t=3/8} \\
\mathbf{E_{36}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(3/8,6/8)_{68x23}}{\partial t \partial u} = (b'_6 \mathbf{T}_{36} + b'_7 \mathbf{T}_{37} + b'_8 \mathbf{T}_{38})_{t=3/8}
\end{aligned} \qquad (142)$$

Entrando con estos valores en (140) sale (141), luego (140) y (141) son iguales c.q.d.

Superficie S_{56x23} con S_{56x35}

La curva en el borde común (t = 3/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(3/8,u)_{56x23} = \\
&= (b_{13}a_9\mathbf{P_{25}} + b_{14}a_9\mathbf{P_{26}} + b_{15}a_9\mathbf{U_{25}} + b_{16}a_9\mathbf{U_{26}} + \\
&\quad b_{13}a_{10}\mathbf{P_{35}} + b_{14}a_{10}\mathbf{P_{36}} + b_{15}a_{10}\mathbf{U_{35}} + b_{16}a_{10}\mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b_{13}a_{11}\mathbf{T_{25}} + b_{14}a_{11}\mathbf{T_{26}} + b_{15}a_{11}\mathbf{E_{25}} + b_{16}a_{11}\mathbf{E_{26}} + \\
&\quad b_{13}a_{12}\mathbf{T_{35}} + b_{14}a_{12}\mathbf{T_{36}} + b_{15}a_{12}\mathbf{E_{35}} + b_{16}a_{12}\mathbf{E_{36}})_{t=3/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{P_{35}} + b_{14}\mathbf{P_{36}} + b_{15}\mathbf{U_{35}} + b_{16}\mathbf{U_{36}}
\end{aligned} \tag{143}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(3/8,u)_{56x35} = \\
&= (b_{13}a_3\mathbf{P_{35}} + b_{14}a_3\mathbf{P_{36}} + b_{15}a_3\mathbf{U_{35}} + b_{16}a_3\mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b_{13}a_4\mathbf{P_{45}} + b_{14}a_4\mathbf{P_{46}} + b_{15}a_4\mathbf{U_{45}} + b_{16}a_4\mathbf{U_{46}} + \\
&\quad b_{13}a_5\mathbf{P_{55}} + b_{14}a_5\mathbf{P_{56}} + b_{15}a_5\mathbf{U_{55}} + b_{16}a_5\mathbf{U_{56}})_{t=3/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{P_{35}} + b_{14}\mathbf{P_{36}} + b_{15}\mathbf{U_{35}} + b_{16}\mathbf{U_{36}}
\end{aligned} \tag{144}$$

Luego son iguales c.q,d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(3/8,u)_{56x23}}{\partial t} = \\
&= (b_{13}a'_9\mathbf{P_{25}} + b_{14}a'_9\mathbf{P_{26}} + b_{15}a'_9\mathbf{U_{25}} + b_{16}a'_9\mathbf{U_{26}} + \\
&\quad b_{13}a'_{10}\mathbf{P_{35}} + b_{14}a'_{10}\mathbf{P_{36}} + b_{15}a'_{10}\mathbf{U_{35}} + b_{16}a'_{10}\mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b_{13}a'_{11}\mathbf{T_{25}} + b_{14}a'_{11}\mathbf{T_{26}} + b_{15}a'_{11}\mathbf{E_{25}} + b_{16}a'_{11}\mathbf{E_{26}} + \\
&\quad b_{13}a'_{12}\mathbf{T_{35}} + b_{14}a'_{12}\mathbf{T_{36}} + b_{15}a'_{12}\mathbf{E_{35}} + b_{16}a'_{12}\mathbf{E_{36}})_{t=3/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{T_{35}} + b_{14}\mathbf{T_{36}} + b_{15}\mathbf{E_{35}} + b_{16}\mathbf{E_{36}}
\end{aligned} \tag{145}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(3/8,u)_{56x35}}{\partial t} = \\
&= (b_{13}a'_3\mathbf{P_{35}} + b_{14}a'_3\mathbf{P_{36}} + b_{15}a'_3\mathbf{U_{35}} + b_{16}a'_3\mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b_{13}a'_4\mathbf{P_{45}} + b_{14}a'_4\mathbf{P_{46}} + b_{15}a'_4\mathbf{U_{45}} + b_{16}a'_4\mathbf{U_{46}} + \\
&\quad b_{13}a'_5\mathbf{P_{55}} + b_{14}a'_5\mathbf{P_{56}} + b_{15}a'_5\mathbf{U_{55}} + b_{16}a'_5\mathbf{U_{56}})_{t=3/8}
\end{aligned} \tag{146}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T_{35}} &= \frac{\partial \mathbf{P}\mathit{(3/8,5/8)}_{56x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P_{35}} + a'_4\mathbf{P_{45}} + a'_5\mathbf{P_{55}})_{t=3/8} \\
\mathbf{T_{36}} &= \frac{\partial \mathbf{P}\mathit{(3/8,6/8)}_{56x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P_{36}} + a'_4\mathbf{P_{46}} + a'_5\mathbf{P_{56}})_{t=3/8} \\
\mathbf{E_{35}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}\mathit{(3/8,5/8)}_{56x35}}{\partial t \partial u} = (a'_3\mathbf{U_{35}} + a'_4\mathbf{U_{45}} + a'_5\mathbf{U_{55}})_{t=3/8} \\
\mathbf{E_{36}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}\mathit{(3/8,6/8)}_{56x35}}{\partial t \partial u} = (a'_3\mathbf{U_{36}} + a'_4\mathbf{U_{46}} + a'_5\mathbf{U_{56}})_{t=3/8}
\end{aligned} \tag{147}$$

Entrando con estos valores en (145) sale (146), luego (145) y (146) son iguales c.q.d.

Superficie S_{56x35} con S_{68x35}

La curva en el borde común (u = 6/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\mathit{(t,6/8)}_{56x35} = \\
&= (b_{13}a_3\mathbf{P_{35}} + b_{14}a_3\mathbf{P_{36}} + b_{15}a_3\mathbf{U_{35}} + b_{16}a_3\mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b_{13}a_4\mathbf{P_{45}} + b_{14}a_4\mathbf{P_{46}} + b_{15}a_4\mathbf{U_{45}} + b_{16}a_4\mathbf{U_{46}} + \\
&\quad b_{13}a_5\mathbf{P_{55}} + b_{14}a_5\mathbf{P_{56}} + b_{15}a_5\mathbf{U_{55}} + b_{16}a_5\mathbf{U_{56}})_{u=6/8} = \\
&= a_3\mathbf{P_{36}} + a_4\mathbf{P_{46}} + a_5\mathbf{P_{56}}
\end{aligned} \tag{148}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\mathit{(t,6/8)}_{68x35} = \\
&= (b_6 a_3\mathbf{P}_{36} + b_7 a_3\mathbf{P}_{37} + b_8 a_3\mathbf{P}_{38} + \\
&\quad b_6 a_4\mathbf{P}_{46} + b_7 a_4\mathbf{P}_{47} + b_8 a_4\mathbf{P}_{48} + \\
&\quad b_6 a_5\mathbf{P}_{56} + b_7 a_5\mathbf{P}_{57} + b_8 a_5\mathbf{P}_{58})_{u=6/8} = \\
&= a_3\mathbf{P_{36}} + a_4\mathbf{P_{46}} + a_5\mathbf{P_{56}}
\end{aligned} \tag{149}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{P}(t,6/8)_{56x35}}{\partial u} = \\ &= (b'_{13}a_3\mathbf{P_{35}} + b'_{14}a_3\mathbf{P_{36}} + b'_{15}a_3\mathbf{U_{35}} + b'_{16}a_3\mathbf{U_{36}} + \\ &\quad b'_{13}a_4\mathbf{P_{45}} + b'_{14}a_4\mathbf{P_{46}} + b'_{15}a_4\mathbf{U_{45}} + b'_{16}a_4\mathbf{U_{46}} + \\ &\quad b'_{13}a_5\mathbf{P_{55}} + b'_{14}a_5\mathbf{P_{56}} + b'_{15}a_5\mathbf{U_{55}} + b'_{16}a_5\mathbf{U_{56}})_{t=5/8} = \\ &= a_3\mathbf{U_{36}} + a_4\mathbf{U_{46}} + a_5\mathbf{U_{56}}\end{aligned} \tag{150}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{P}(t,6/8)_{68x35}}{\partial u} = \\ &= (b'_6 a_3\mathbf{P}_{36} + b'_7 a_3\mathbf{P}_{37} + b'_8 a_3\mathbf{P}_{38} + \\ &\quad b'_6 a_4\mathbf{P}_{46} + b'_7 a_4\mathbf{P}_{47} + b'_8 a_4\mathbf{P}_{48} + \\ &\quad b'_6 a_5\mathbf{P}_{56} + b'_7 a_5\mathbf{P}_{57} + b'_8 a_5\mathbf{P}_{58})_{t=5/8}\end{aligned} \tag{151}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}\mathbf{U_{36}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(3/8,6/8)_{68x35}}{\partial u} = (b'_6\mathbf{P}_{36} + b'_7\mathbf{P}_{37} + b'_8\mathbf{P}_{38})_{u=6/8} \\ \mathbf{U_{46}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(4/8,6/8)_{68x35}}{\partial u} = (b'_6\mathbf{P}_{46} + b'_7\mathbf{P}_{47} + b'_8\mathbf{P}_{48})_{u=6/8} \\ \mathbf{U_{56}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,6/8)_{68x35}}{\partial u} = (b'_6\mathbf{P}_{56} + b'_7\mathbf{P}_{57} + b'_8\mathbf{P}_{58})_{u=6/8}\end{aligned} \tag{152}$$

Entrando con estos valores en (148) sale (149), luego (148) y (149) son iguales c.q.d.

Superficie S_{56x35} con S_{56x56}

La curva en el borde común (t = 5/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(5/8,u)_{56x35} = \\
&= (b_{13}a_3\mathbf{P_{35}} + b_{14}a_3\mathbf{P_{36}} + b_{15}a_3\mathbf{U_{35}} + b_{16}a_3\mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b_{13}a_4\mathbf{P_{45}} + b_{14}a_4\mathbf{P_{46}} + b_{15}a_4\mathbf{U_{45}} + b_{16}a_4\mathbf{U_{46}} + \\
&\quad b_{13}a_5\mathbf{P_{55}} + b_{14}a_5\mathbf{P_{56}} + b_{15}a_5\mathbf{U_{55}} + b_{16}a_5\mathbf{U_{56}})_{t=5/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{P_{55}} + b_{14}\mathbf{P_{56}} + b_{15}\mathbf{U_{55}} + b_{16}\mathbf{U_{56}}
\end{aligned} \tag{153}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(5/8,u)_{56x56} = \\
&= (b_{13}a_{13}\mathbf{P_{55}} + b_{14}a_{13}\mathbf{P_{56}} + b_{15}a_{13}\mathbf{U_{55}} + b_{16}a_{13}\mathbf{U_{56}} + \\
&\quad b_{13}a_{14}\mathbf{P_{65}} + b_{14}a_{14}\mathbf{P_{66}} + b_{15}a_{14}\mathbf{U_{65}} + b_{16}a_{14}\mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b_{13}a_{15}\mathbf{T_{55}} + b_{14}a_{15}\mathbf{T_{56}} + b_{15}a_{15}\mathbf{E_{55}} + b_{16}a_{15}\mathbf{E_{56}} + \\
&\quad b_{13}a_{16}\mathbf{T_{65}} + b_{14}a_{16}\mathbf{T_{66}} + b_{15}a_{16}\mathbf{E_{65}} + b_{16}a_{16}\mathbf{E_{66}})_{t=5/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{P_{55}} + b_{14}\mathbf{P_{56}} + b_{15}\mathbf{U_{55}} + b_{16}\mathbf{U_{56}}
\end{aligned} \tag{154}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(5/8,u)_{56x35}}{\partial t} = \\
&= (b_{13}a'_3\mathbf{P_{35}} + b_{14}a'_3\mathbf{P_{36}} + b_{15}a'_3\mathbf{U_{35}} + b_{16}a'_3\mathbf{U_{36}} + \\
&\quad b_{13}a'_4\mathbf{P_{45}} + b_{14}a'_4\mathbf{P_{46}} + b_{15}a'_4\mathbf{U_{45}} + b_{16}a'_4\mathbf{U_{46}} + \\
&\quad b_{13}a'_5\mathbf{P_{55}} + b_{14}a'_5\mathbf{P_{56}} + b_{15}a'_5\mathbf{U_{55}} + b_{16}a'_5\mathbf{U_{56}})_{t=5/8}
\end{aligned} \tag{155}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(5/8,u)_{56x56}}{\partial t} = \\
&= (b_{13}a'_{13}\mathbf{P_{55}} + b_{14}a'_{13}\mathbf{P_{56}} + b_{15}a'_{13}\mathbf{U_{55}} + b_{16}a'_{13}\mathbf{U_{56}} + \\
&\quad b_{13}a'_{14}\mathbf{P_{65}} + b_{14}a'_{14}\mathbf{P_{66}} + b_{15}a'_{14}\mathbf{U_{65}} + b_{16}a'_{14}\mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b_{13}a'_{15}\mathbf{T_{55}} + b_{14}a'_{15}\mathbf{T_{56}} + b_{15}a'_{15}\mathbf{E_{55}} + b_{16}a'_{15}\mathbf{E_{56}} + \\
&\quad b_{13}a'_{16}\mathbf{T_{65}} + b_{14}a'_{16}\mathbf{T_{66}} + b_{15}a'_{16}\mathbf{E_{65}} + b_{16}a'_{16}\mathbf{E_{66}})_{t=5/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{T_{55}} + b_{14}\mathbf{T_{56}} + b_{15}\mathbf{E_{55}} + b_{16}\mathbf{E_{56}}
\end{aligned} \tag{156}$$

Pero como:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T_{55}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,5/8)_{56x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P_{35}} + a'_4\mathbf{P_{45}} + a'_5\mathbf{P_{55}})_{t=5/8} \\
\mathbf{T_{56}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,6/8)_{56x35}}{\partial t} = (a'_3\mathbf{P_{36}} + a'_4\mathbf{P_{46}} + a'_5\mathbf{P_{56}})_{t=5/8} \\
\mathbf{E_{55}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(5/8,5/8)_{56x35}}{\partial t \partial u} = (a'_3\mathbf{U_{35}} + a'_4\mathbf{U_{45}} + a'_5\mathbf{U_{55}})_{t=5/8} \\
\mathbf{E_{56}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(5/8,6/8)_{56x35}}{\partial t \partial u} = (a'_3\mathbf{U_{36}} + a'_4\mathbf{U_{46}} + a'_5\mathbf{U_{56}})_{t=5/8}
\end{aligned}
\qquad (157)
$$

Entrando con estos valores en (156) sale (155), luego (155) y (156) son iguales c.q.d.

Superficie S_{56x56} con S_{68x56}

La curva en el borde común (u = 6/8) a ambos parches es igual:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,6/8)_{56x56} = \\
&= (b_{13}a_{13}\mathbf{P_{55}} + b_{14}a_{13}\mathbf{P_{56}} + b_{15}a_{13}\mathbf{U_{55}} + b_{16}a_{13}\mathbf{U_{56}} + \\
&\quad b_{13}a_{14}\mathbf{P_{65}} + b_{14}a_{14}\mathbf{P_{66}} + b_{15}a_{14}\mathbf{U_{65}} + b_{16}a_{14}\mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b_{13}a_{15}\mathbf{T_{55}} + b_{14}a_{15}\mathbf{T_{56}} + b_{15}a_{15}\mathbf{E_{55}} + b_{16}a_{15}\mathbf{E_{56}} + \\
&\quad b_{13}a_{16}\mathbf{T_{65}} + b_{14}a_{16}\mathbf{T_{66}} + b_{15}a_{16}\mathbf{E_{65}} + b_{16}a_{16}\mathbf{E_{66}})_{t=5/8} = \\
&= a_{13}\mathbf{P_{56}} + a_{14}\mathbf{P_{66}} + a_{15}\mathbf{T_{56}} + a_{16}\mathbf{T_{66}}
\end{aligned}
\qquad (158)
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(t,6/8)_{68x56} = \\
&= (b_6a_{13}\mathbf{P}_{56} + b_7a_{13}\mathbf{P}_{57} + b_8a_{13}\mathbf{P}_{58} + \\
&\quad b_6a_{14}\mathbf{P}_{66} + b_7a_{14}\mathbf{P}_{67} + b_8a_{14}\mathbf{P}_{68} + \\
&\quad b_6a_{15}\mathbf{T}_{56} + b_7a_{15}\mathbf{T}_{57} + b_8a_{15}\mathbf{T}_{58} + \\
&\quad b_6a_{16}\mathbf{T}_{66} + b_7a_{16}\mathbf{T}_{67} + b_8a_{16}\mathbf{T}_{68})_{u=6/8} = \\
&= a_{13}\mathbf{P_{56}} + a_{14}\mathbf{P_{66}} + a_{15}\mathbf{T_{56}} + a_{16}\mathbf{T_{66}}
\end{aligned}
\qquad (159)
$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según u es igual en el borde común a ambos parches:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,6/8)_{56x56}}{\partial u} = \\
&= (b'_{13} a_{13} \mathbf{P}_{\mathbf{55}} + b'_{14} a_{13} \mathbf{P}_{\mathbf{56}} + b'_{15} a_{13} \mathbf{U}_{\mathbf{55}} + b'_{16} a_{13} \mathbf{U}_{\mathbf{56}} + \\
&\quad b'_{13} a_{14} \mathbf{P}_{\mathbf{65}} + b'_{14} a_{14} \mathbf{P}_{\mathbf{66}} + b'_{15} a_{14} \mathbf{U}_{\mathbf{65}} + b'_{16} a_{14} \mathbf{U}_{\mathbf{66}} + \\
&\quad b'_{13} a_{15} \mathbf{T}_{\mathbf{55}} + b'_{14} a_{15} \mathbf{T}_{\mathbf{56}} + b'_{15} a_{15} \mathbf{E}_{\mathbf{55}} + b'_{16} a_{15} \mathbf{E}_{\mathbf{56}} + \\
&\quad b'_{13} a_{16} \mathbf{T}_{\mathbf{65}} + b'_{14} a_{16} \mathbf{T}_{\mathbf{66}} + b'_{15} a_{16} \mathbf{E}_{\mathbf{65}} + b'_{16} a_{16} \mathbf{E}_{\mathbf{66}})_{t=5/8} = \\
&= a_{13} \mathbf{U}_{\mathbf{56}} + a_{14} \mathbf{U}_{\mathbf{66}} + a_{15} \mathbf{E}_{\mathbf{56}} + a_{16} \mathbf{E}_{\mathbf{66}}
\end{aligned}
\tag{160}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(t,6/8)_{68x56}}{\partial u} = \\
&= (b'_6 a_{13} \mathbf{P}_{56} + b'_7 a_{13} \mathbf{P}_{57} + b'_8 a_{13} \mathbf{P}_{58} + \\
&\quad b'_6 a_{14} \mathbf{P}_{66} + b'_7 a_{14} \mathbf{P}_{67} + b'_8 a_{14} \mathbf{P}_{68} + \\
&\quad b'_6 a_{15} \mathbf{T}_{56} + b'_7 a_{15} \mathbf{T}_{57} + b'_8 a_{15} \mathbf{T}_{58} + \\
&\quad b'_6 a_{16} \mathbf{T}_{66} + b'_7 a_{16} \mathbf{T}_{67} + b'_8 a_{16} \mathbf{T}_{68})_{u=6/8}
\end{aligned}
\tag{161}
$$

Pero como:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}_{\mathbf{56}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,6/8)_{68x56}}{\partial u} = (b'_6 \mathbf{P}_{56} + b'_7 \mathbf{P}_{57} + b'_8 \mathbf{P}_{58})_{u=6/8} \\
\mathbf{U}_{\mathbf{66}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,6/8)_{68x56}}{\partial u} = (b'_6 \mathbf{P}_{66} + b'_7 \mathbf{P}_{67} + b'_8 \mathbf{P}_{68})_{u=6/8} \\
\mathbf{E}_{\mathbf{56}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(5/8,6/8)_{68x56}}{\partial t \partial u} = (b'_6 \mathbf{T}_{56} + b'_7 \mathbf{T}_{57} + b'_8 \mathbf{T}_{58})_{u=6/8} \\
\mathbf{E}_{\mathbf{66}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(6/8,6/8)_{68x56}}{\partial t \partial u} = (b'_6 \mathbf{T}_{66} + b'_7 \mathbf{T}_{67} + b'_8 \mathbf{T}_{68})_{u=6/8}
\end{aligned}
\tag{162}
$$

Entrando con estos valores en (160) sale (161), luego (160) y (161) son iguales c.q.d.

Superficie S_{56x56} con S_{56x68}

La curva en el borde común (t = 6/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&(6/8,u)_{56x56} = \\
&= (b_{13}a_{13}\mathbf{P_{55}} + b_{14}a_{13}\mathbf{P_{56}} + b_{15}a_{13}\mathbf{U_{55}} + b_{16}a_{13}\mathbf{U_{56}} + \\
&\quad b_{13}a_{14}\mathbf{P_{65}} + b_{14}a_{14}\mathbf{P_{66}} + b_{15}a_{14}\mathbf{U_{65}} + b_{16}a_{14}\mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b_{13}a_{15}\mathbf{T_{55}} + b_{14}a_{15}\mathbf{T_{56}} + b_{15}a_{15}\mathbf{E_{55}} + b_{16}a_{15}\mathbf{E_{56}} + \\
&\quad b_{13}a_{16}\mathbf{T_{65}} + b_{14}a_{16}\mathbf{T_{66}} + b_{15}a_{16}\mathbf{E_{65}} + b_{16}a_{16}\mathbf{E_{66}})_{t=6/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{P_{65}} + b_{14}\mathbf{P_{66}} + b_{15}\mathbf{U_{65}} + b_{16}\mathbf{U_{66}}
\end{aligned} \tag{163}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(6/8,u)_{56x68} = \\
&= (b_{13}a_{6}\mathbf{P_{65}} + b_{14}a_{6}\mathbf{P_{66}} + b_{15}a_{6}\mathbf{U_{65}} + b_{16}a_{6}\mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b_{13}a_{7}\mathbf{P_{75}} + b_{14}a_{7}\mathbf{P_{76}} + b_{15}a_{7}\mathbf{U_{75}} + b_{16}a_{7}\mathbf{U_{76}} + \\
&\quad b_{13}a_{8}\mathbf{P_{85}} + b_{14}a_{8}\mathbf{P_{86}} + b_{15}a_{8}\mathbf{U_{85}} + b_{16}a_{8}\mathbf{U_{86}})_{t=6/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{P_{65}} + b_{14}\mathbf{P_{66}} + b_{15}\mathbf{U_{65}} + b_{16}\mathbf{U_{66}}
\end{aligned} \tag{164}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(6/8,u)_{56x56}}{\partial t} = \\
&= (b_{13}a'_{13}\mathbf{P_{55}} + b_{14}a'_{13}\mathbf{P_{56}} + b_{15}a'_{13}\mathbf{U_{55}} + b_{16}a'_{13}\mathbf{U_{56}} + \\
&\quad b_{13}a'_{14}\mathbf{P_{65}} + b_{14}a'_{14}\mathbf{P_{66}} + b_{15}a'_{14}\mathbf{U_{65}} + b_{16}a'_{14}\mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b_{13}a'_{15}\mathbf{T_{55}} + b_{14}a'_{15}\mathbf{T_{56}} + b_{15}a'_{15}\mathbf{E_{55}} + b_{16}a'_{15}\mathbf{E_{56}} + \\
&\quad b_{13}a'_{16}\mathbf{T_{65}} + b_{14}a'_{16}\mathbf{T_{66}} + b_{15}a'_{16}\mathbf{E_{65}} + b_{16}a'_{16}\mathbf{E_{66}})_{t=6/8} = \\
&= b_{13}\mathbf{T_{65}} + b_{14}\mathbf{T_{66}} + b_{15}\mathbf{E_{65}} + b_{16}\mathbf{E_{66}}
\end{aligned} \tag{165}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(6/8,u)_{56x68}}{\partial t} = \\
&= (b_{13}a'_{6}\mathbf{P_{65}} + b_{14}a'_{6}\mathbf{P_{66}} + b_{15}a'_{6}\mathbf{U_{65}} + b_{16}a'_{6}\mathbf{U_{66}} + \\
&\quad b_{13}a'_{7}\mathbf{P_{75}} + b_{14}a'_{7}\mathbf{P_{76}} + b_{15}a'_{7}\mathbf{U_{75}} + b_{16}a'_{7}\mathbf{U_{76}} + \\
&\quad b_{13}a'_{8}\mathbf{P_{85}} + b_{14}a'_{8}\mathbf{P_{86}} + b_{15}a'_{8}\mathbf{U_{85}} + b_{16}a'_{8}\mathbf{U_{86}})_{t=6/8}
\end{aligned} \tag{166}$$

Pero como:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T_{65}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,5/8)_{56x68}}{\partial t} = (a'_6\mathbf{P_{65}} + a'_7\mathbf{P_{75}} + a'_8\mathbf{P_{85}})_{u=6/8} \\
\mathbf{T_{66}} &= \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,6/8)_{56x68}}{\partial t} = (a'_6\mathbf{P_{66}} + a'_7\mathbf{P_{76}} + a'_8\mathbf{P_{86}})_{u=6/8} \\
\mathbf{E_{65}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(6/8,5/8)_{56x68}}{\partial t \partial u} = (a'_6\mathbf{U_{65}} + a'_7\mathbf{U_{75}} + a'_8\mathbf{U_{85}})_{t=6/8} \\
\mathbf{E_{66}} &= \frac{\partial^2 \mathbf{P}(6/8,6/8)_{56x68}}{\partial t \partial u} = (a'_6\mathbf{U_{66}} + a'_7\mathbf{U_{76}} + a'_8\mathbf{U_{86}})_{t=6/8}
\end{aligned}
\qquad (167)
$$

Entrando con estos valores en (165) sale (166) luego (165) y (166) son iguales c.q.d.

Superficie S_{68x02} con S_{68x23}

La curva en el borde común (t=2/8) a ambos parches es igual:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(2/8,u)_{68x02} = \\
&= (b_6a_0\mathbf{P}_{06} + b_7a_0\mathbf{P}_{07} + b_8a_0\mathbf{P}_{08} + \\
&\quad b_6a_1\mathbf{P}_{16} + b_7a_1\mathbf{P}_{17} + b_8a_1\mathbf{P}_{18} + \\
&\quad b_6a_2\mathbf{P}_{26} + b_7a_2\mathbf{P}_{27} + b_8a_2\mathbf{P}_{28})_{t=2/8} = \\
&= b_6\mathbf{P}_{26} + b_7\mathbf{P}_{27} + b_8\mathbf{P}_{28}
\end{aligned}
\qquad (168)
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}(2/8,u)_{68x23} = \\
&= (b_6a_9\mathbf{P}_{26} + b_7a_9\mathbf{P}_{27} + b_8a_9\mathbf{P}_{28} + \\
&\quad b_6a_{10}\mathbf{P}_{36} + b_7a_{10}\mathbf{P}_{37} + b_8a_{10}\mathbf{P}_{38} + \\
&\quad b_6a_{11}\mathbf{T}_{26} + b_7a_{11}\mathbf{T}_{27} + b_8a_{11}\mathbf{T}_{28} + \\
&\quad b_6a_{12}\mathbf{T}_{36} + b_7a_{12}\mathbf{T}_{37} + b_8a_{12}\mathbf{T}_{38})_{t=2/8} = \\
&= b_6\mathbf{P}_{26} + b_7\mathbf{P}_{27} + b_8\mathbf{P}_{28}
\end{aligned}
\qquad (169)
$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,u)_{68x02}}{\partial t} = \\
&= (b_6 a'_0 \mathbf{P}_{06} + b_7 a'_0 \mathbf{P}_{07} + b_8 a'_0 \mathbf{P}_{08} + \\
&\quad b_6 a'_1 \mathbf{P}_{16} + b_7 a'_1 \mathbf{P}_{17} + b_8 a'_1 \mathbf{P}_{18} + \\
&\quad b_6 a'_2 \mathbf{P}_{26} + b_7 a'_2 \mathbf{P}_{27} + b_8 a'_2 \mathbf{P}_{28})_{t=2/8}
\end{aligned} \tag{170}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(2/8,u)_{68x23}}{\partial t} = \\
&= (b_6 a'_9 \mathbf{P}_{26} + b_7 a'_9 \mathbf{P}_{27} + b_8 a'_9 \mathbf{P}_{28} + \\
&\quad b_6 a'_{10} \mathbf{P}_{36} + b_7 a'_{10} \mathbf{P}_{37} + b_8 a'_{10} \mathbf{P}_{38} + \\
&\quad b_6 a'_{11} \mathbf{T}_{26} + b_7 a'_{11} \mathbf{T}_{27} + b_8 a'_{11} \mathbf{T}_{28} + \\
&\quad b_6 a'_{12} \mathbf{T}_{36} + b_7 a'_{12} \mathbf{T}_{37} + b_8 a'_{12} \mathbf{T}_{38})_{t=2/8} = \\
&= b_6 \mathbf{T}_{26} + b_7 \mathbf{T}_{27} + b_8 \mathbf{T}_{28}
\end{aligned} \tag{171}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{26} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,6/8)_{68x02}}{\partial t} = (a'_0 \mathbf{P}_{06} + a'_1 \mathbf{P}_{16} + a'_2 \mathbf{P}_{26}) \\
\mathbf{T}_{27} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,7/8)_{68x02}}{\partial t} = (a'_0 \mathbf{P}_{07} + a'_1 \mathbf{P}_{17} + a'_2 \mathbf{P}_{27}) \\
\mathbf{T}_{28} &= \frac{\partial \mathbf{P}(2/8,1)_{68x02}}{\partial t} = (a'_0 \mathbf{P}_{08} + a'_1 \mathbf{P}_{18} + a'_2 \mathbf{P}_{28})
\end{aligned} \tag{172}$$

Entrando con estos valores en (171) sale (170), luego (170) y (171) son iguales c.q.d.

Superficie S_{68x23} con S_{68x35}

La curva en el borde común (t = 3/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(3/8,u)_{68x23} = \\
&= (b_6 a_9 \mathbf{P}_{26} + b_7 a_9 \mathbf{P}_{27} + b_8 a_9 \mathbf{P}_{28} + \\
&\quad b_6 a_{10} \mathbf{P}_{36} + b_7 a_{10} \mathbf{P}_{37} + b_8 a_{10} \mathbf{P}_{38} + \\
&\quad b_6 a_{11} \mathbf{T}_{26} + b_7 a_{11} \mathbf{T}_{27} + b_8 a_{11} \mathbf{T}_{28} + \\
&\quad b_6 a_{12} \mathbf{T}_{36} + b_7 a_{12} \mathbf{T}_{37} + b_8 a_{12} \mathbf{T}_{38})_{t=3/8} = \\
&= b_6 \mathbf{P}_{36} + b_7 \mathbf{P}_{37} + b_8 \mathbf{P}_{38}
\end{aligned} \tag{173}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(3/8,u)_{68x35} = \\
&= (b_6 a_3 \mathbf{P}_{36} + b_7 a_3 \mathbf{P}_{37} + b_8 a_3 \mathbf{P}_{38} + \\
&\quad b_6 a_4 \mathbf{P}_{46} + b_7 a_4 \mathbf{P}_{47} + b_8 a_4 \mathbf{P}_{48} + \\
&\quad b_6 a_5 \mathbf{P}_{56} + b_7 a_5 \mathbf{P}_{57} + b_8 a_5 \mathbf{P}_{58})_{t=3/8} = \\
&= b_6 \mathbf{P}_{36} + b_7 \mathbf{P}_{37} + b_8 \mathbf{P}_{38}
\end{aligned} \tag{174}$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(3/8,u)_{68x23}}{\partial t} = \\
&= (b_6 a'_9 \mathbf{P}_{26} + b_7 a'_9 \mathbf{P}_{27} + b_8 a'_9 \mathbf{P}_{28} + \\
&\quad b_6 a'_{10} \mathbf{P}_{36} + b_7 a'_{10} \mathbf{P}_{37} + b_8 a'_{10} \mathbf{P}_{38} + \\
&\quad b_6 a'_{11} \mathbf{T}_{26} + b_7 a'_{11} \mathbf{T}_{27} + b_8 a'_{11} \mathbf{T}_{28} + \\
&\quad b_6 a'_{12} \mathbf{T}_{36} + b_7 a'_{12} \mathbf{T}_{37} + b_8 a'_{12} \mathbf{T}_{38})_{t=2/8} = \\
&= b_6 \mathbf{T}_{36} + b_7 \mathbf{T}_{37} + b_8 \mathbf{T}_{38}
\end{aligned} \tag{175}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(3/8,u)_{68x35}}{\partial t} = \\
&= (b_6 a'_3 \mathbf{P}_{36} + b_7 a'_3 \mathbf{P}_{37} + b_8 a'_3 \mathbf{P}_{38} + \\
&\quad b_6 a'_4 \mathbf{P}_{46} + b_7 a'_4 \mathbf{P}_{47} + b_8 a'_4 \mathbf{P}_{48} + \\
&\quad b_6 a'_5 \mathbf{P}_{56} + b_7 a'_5 \mathbf{P}_{57} + b_8 a'_5 \mathbf{P}_{58})_{t=3/8}
\end{aligned} \tag{176}$$

Pero como:

$$\mathbf{T}_{36}=\frac{\partial \mathbf{P}(3/8,6/8)_{68x35}}{\partial t}=(a'_3\mathbf{P}_{36}+a'_4\mathbf{P}_{46}+a'_5\mathbf{P}_{56})_{t=3/8}$$
$$\mathbf{T}_{37}=\frac{\partial \mathbf{P}(3/8,7/8)_{68x35}}{\partial t}=(a'_3\mathbf{P}_{377}+a'_4\mathbf{P}_{47}+a'_5\mathbf{P}_{57})_{t=3/8} \qquad (177)$$
$$\mathbf{T}_{38}=\frac{\partial \mathbf{P}(3/8,1)_{68x35}}{\partial t}=(a'_3\mathbf{P}_{38}+a'_4\mathbf{P}_{48}+a'_5\mathbf{P}_{58})_{t=3/8}$$

Entrando con estos valores en (175) sale (176), luego (175) y (176) son iguales c.q.d.

Superficie S_{68x35} con S_{68x56}

La curva en el borde común (t =5/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(5/8,u)_{68x35}=\\&=(b_6a_3\mathbf{P}_{36}+b_7a_3\mathbf{P}_{37}+b_8a_3\mathbf{P}_{38}+\\&\quad b_6a_4\mathbf{P}_{46}+b_7a_4\mathbf{P}_{47}+b_8a_4\mathbf{P}_{48}+\\&\quad b_6a_5\mathbf{P}_{56}+b_7a_5\mathbf{P}_{57}+b_8a_5\mathbf{P}_{58})_{t=5/8}=\\&=b_6\mathbf{P}_{56}+b_7\mathbf{P}_{57}+b_8\mathbf{P}_{58}\end{aligned} \qquad (178)$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(5/8,u)_{68x56}=\\&=(b_6a_{13}\mathbf{P}_{56}+b_7a_{13}\mathbf{P}_{57}+b_8a_{13}\mathbf{P}_{58}+\\&\quad b_6a_{14}\mathbf{P}_{66}+b_7a_{14}\mathbf{P}_{67}+b_8a_{14}\mathbf{P}_{68}+\\&\quad b_6a_{15}\mathbf{T}_{56}+b_7a_{15}\mathbf{T}_{57}+b_8a_{15}\mathbf{T}_{58}+\\&\quad b_6a_{16}\mathbf{T}_{66}+b_7a_{16}\mathbf{T}_{67}+b_8a_{16}\mathbf{T}_{68})_{t=5/8}=\\&=b_6\mathbf{P}_{56}+b_7\mathbf{P}_{57}+b_8\mathbf{P}_{58}\end{aligned} \qquad (179)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(5/8,u)_{68x35}}{\partial t} = \\
&= (b_6 a'_3 \mathbf{P}_{36} + b_7 a'_3 \mathbf{P}_{37} + b_8 a'_3 \mathbf{P}_{38} + \\
&\quad b_6 a'_4 \mathbf{P}_{46} + b_7 a'_4 \mathbf{P}_{47} + b_8 a'_4 \mathbf{P}_{48} + \\
&\quad b_6 a'_5 \mathbf{P}_{56} + b_7 a'_5 \mathbf{P}_{57} + b_8 a'_5 \mathbf{P}_{58})_{t=5/8}
\end{aligned} \tag{180}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{P}(5/8,u)_{68x56}}{\partial t} = \\
&= (b_6 a'_{13} \mathbf{P}_{56} + b_7 a'_{13} \mathbf{P}_{57} + b_8 a'_{13} \mathbf{P}_{58} + \\
&\quad b_6 a'_{14} \mathbf{P}_{66} + b_7 a'_{14} \mathbf{P}_{67} + b_8 a'_{14} \mathbf{P}_{68} + \\
&\quad b_6 a'_{15} \mathbf{T}_{56} + b_7 a'_{15} \mathbf{T}_{57} + b_8 a'_{15} \mathbf{T}_{58} + \\
&\quad b_6 a'_{16} \mathbf{T}_{66} + b_7 a'_{16} \mathbf{T}_{67} + b_8 a'_{16} \mathbf{T}_{68})_{t=5/8} = \\
&= b_6 \mathbf{Tt}_{56} + b_7 \mathbf{T}_{57} + b_8 \mathbf{T}_{58}
\end{aligned} \tag{181}$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{56} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,6/8)_{68x35}}{\partial t} = (a'_3 \mathbf{P}_{36} + a'_4 \mathbf{P}_{46} + a'_5 \mathbf{P}_{56})_{t=5/8} \\
\mathbf{T}_{57} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,7/8)_{68x35}}{\partial t} = (a'_3 \mathbf{P}_{37} + a'_4 \mathbf{P}_{47} + a'_5 \mathbf{P}_{57})_{t=5/8} \\
\mathbf{T}_{58} &= \frac{\partial \mathbf{P}(5/8,1)_{68x35}}{\partial t} = (a'_3 \mathbf{P}_{38} + a'_4 \mathbf{P}_{48} + a'_5 \mathbf{P}_{58})_{t=5/8}
\end{aligned} \tag{182}$$

Entrando con estos valores en (181) sale (180), luego (180) y (181) son iguales c.q.d.

Superficie S_{68x56} con S_{68x68}

La curva en el borde común (t= 6/8) a ambos parches es igual:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(6/8,u)_{68x56} = \\
&= (b_6 a_{13}\mathbf{P}_{56} + b_7 a_{13}\mathbf{P}_{57} + b_8 a_{13}\mathbf{P}_{58} + \\
&\quad b_6 a_{14}\mathbf{P}_{66} + b_7 a_{14}\mathbf{P}_{67} + b_8 a_{14}\mathbf{P}_{68} + \\
&\quad b_6 a_{15}\mathbf{T}_{56} + b_7 a_{15}\mathbf{T}_{57} + b_8 a_{15}\mathbf{T}_{58} + \\
&\quad b_6 a_{16}\mathbf{T}_{66} + b_7 a_{16}\mathbf{T}_{67} + b_8 a_{16}\mathbf{T}_{68})_{t=6/8} = \\
&= b_6\mathbf{P}_{66} + b_7\mathbf{P}_{67} + b_8\mathbf{P}_{68}
\end{aligned} \qquad (183)$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(6/8,u)_{68x68} = \\
&= (b_6 a_6\mathbf{P}_{66} + b_7 a_6\mathbf{P}_{67} + b_8 a_6\mathbf{P}_{68} + \\
&\quad b_6 a_7\mathbf{P}_{76} + b_7 a_7\mathbf{P}_{77} + b_8 a_7\mathbf{P}_{78} + \\
&\quad b_6 a_8\mathbf{P}_{86} + b_7 a_8\mathbf{P}_{87} + b_8 a_8\mathbf{P}_{88})_{t=6/8} = \\
&= b_6\mathbf{P}_{66} + b_7\mathbf{P}_{67} + b_8\mathbf{P}_{68}
\end{aligned} \qquad (184)$$

Luego son iguales c.q.d.

La derivada según t es igual en el borde común a ambos parches:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{P}(6/8,u)_{68x56}}{\partial t} = \\
&= (b_6 a'_{13}\mathbf{P}_{56} + b_7 a'_{13}\mathbf{P}_{57} + b_8 a'_{13}\mathbf{P}_{58} + \\
&\quad b_6 a'_{14}\mathbf{P}_{66} + b_7 a'_{14}\mathbf{P}_{67} + b_8 a'_{14}\mathbf{P}_{68} + \\
&\quad b_6 a'_{15}\mathbf{T}_{56} + b_7 a'_{15}\mathbf{T}_{57} + b_8 a'_{15}\mathbf{T}_{58} + \\
&\quad b_6 a'_{16}\mathbf{T}_{66} + b_7 a'_{16}\mathbf{T}_{67} + b_8 a'_{16}\mathbf{T}_{68})_{t=6/8} = \\
&= b_6\mathbf{T}_{66} + b_7\mathbf{T}_{67} + b_8\mathbf{T}_{68}
\end{aligned} \qquad (185)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathbf{P}(6/8,u)_{68x68}}{\partial t} = \\
&= (b_6 a'_6\mathbf{P}_{66} + b_7 a'_6\mathbf{P}_{67} + b_8 a'_6\mathbf{P}_{68} + \\
&\quad b_6 a'_7\mathbf{P}_{76} + b_7 a'_7\mathbf{P}_{77} + b_8 a'_7\mathbf{P}_{78} + \\
&\quad b_6 a'_8\mathbf{P}_{86} + b_7 a'_8\mathbf{P}_{87} + b_8 a'_8\mathbf{P}_{88})_{t=6/8}
\end{aligned} \qquad (186)$$

Pero como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{66} &= \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,6/8)_{68x56}}{\partial t} = (a'_{13}\mathbf{P}_{56} + a'_{14}\mathbf{P}_{66} + a'_{15}\mathbf{T}_{56} + a'_{16}\mathbf{T}_{66})_{t=6/8} \\
\mathbf{T}_{67} &= \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,7/8)_{68x56}}{\partial t} = (a'_{13}\mathbf{P}_{57} + a'_{14}\mathbf{P}_{67} + a'_{15}\mathbf{T}_{57} + a'_{16}\mathbf{T}_{67})_{t=6/8} \qquad (187) \\
\mathbf{T}_{68} &= \frac{\partial \mathbf{P}(6/8,1)_{68x56}}{\partial t} = (a'_{13}\mathbf{P}_{58} + a'_{14}\mathbf{P}_{68} + a'_{15}\mathbf{T}_{58} + a'_{16}\mathbf{T}_{68})_{t=6/8}
\end{aligned}$$

Entrando con estos valores en (185) sale (186), luego (185) y (186) son iguales c.q.d.

CAPITULO 4: TRATAMIENTO INFORMATICO

4.1.- SUPERFICIES POLINOMIALES DEFINIDAS POR PUNTOS

4.1.1.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE (M+I)X(N+1) PUNTOS DADOS

El proceso para diseñar este tipo de superficies responde a un organigrama del tipo del representado en la figura 4.1.1.-1.

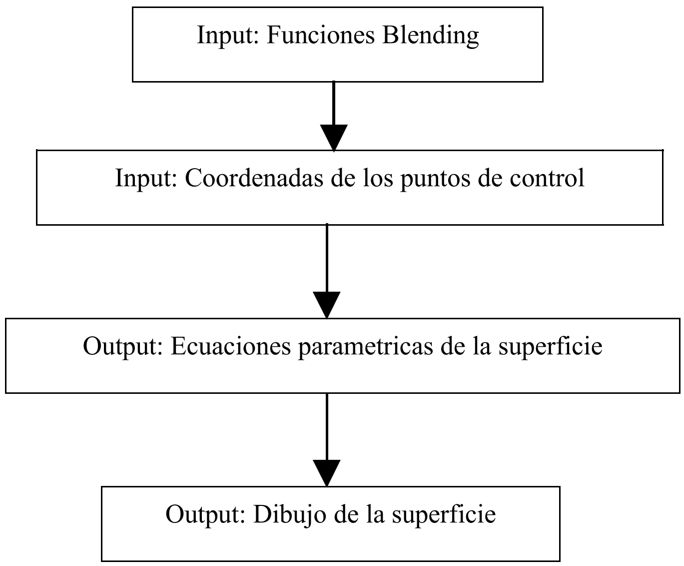


Figura 4.1.1.-1. Organigrama de diseño de superficies polinomiales definidas por puntos

Partiendo de las funciones previas y de las coordenadas cartesianas de los puntos de la red a interpolar se obtienen las ecuaciones paramétricas de la superficie. Con ellas se puede hacer la representación gráfica de la superficie interpolante:

4.1.2.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BILINEAL QUE PASA POR UNA RED DE 2X2 PUNTOS DADOS

El organigrama del proceso sería el de la figura 4. 1. 1.- 1:

El programa sería:

Funciones previas

a =-t+1
b=t
c=-u+1

d=u

Coordenadas de las esquinas

coordenadas de P00

x00 =
y00 =
z00 =

coordenadas de P01

x01 =
y0l =
z0l =

coordenadas de Pl0

x10 =
y10 =
z10 =

coordenadas de P11

x11 =
y11 =
z11 =

Ecuacíones paramétricas de la superficie

```
x =a*c*x00+b*c*x10+a*d*x01+b*d*x11
Expand[x]
x = Simplify[xl

y = a*c*y00+b*c*yl0+a*d*y0l+b*d*y11
Expand[y]
y = Simplify[y]

z =a*c*z00+b*c*zl0+a*d*z0l+b*d*z11
Expand[z]
z = Simplify[zl
```

Dibujo de la superficie

```
ParametricPlot3D[ {x,y.z}, {t,0,1},{u,0,1}
```

4.1.3.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BICUADRATICA OUE PASA POR UNA RED DE 3X3 PUNTOS DADOS

El organigrama del proceso sería el de la figura 4.1.1.-1

El programa sería:

Funciones blending

$a = 2t^2-3t+1$
$b= -4t^2+4t$
$c= 2t^2-t$

$d = 2u^2-3u+l$
$e = -4u^2+4u$
$f =2u^2-u$

Coordenadas de la red de puntos

coordenadas de P00
x00=
y00=
z00=

coordenadas de Pl0
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P20
x20=
y20=
z20=

coordenadas de P01

x01=
y01=
z01=

coordenadas de P11
x11=
y11=
z11=

coordenadas de P21
x2l=
y2l=

z2l=

coordenadas de P02

x02=
y02=
z02=

coordenadas de P12

xl2=
yl2=
zl2=

coordenadas de P22

y22=
z22=
z22=

Ecuaciones paramétricas de la superficie polinómica

x= a d x00 + b d x10 + c d x20 +
a e x01+ b e x11 + c e x21 +
a f x02+ b f x12+ c f x22

y= a d y00 + b d y10 + c d y20 +
a e y01+ b e y11 + c e y21 +
a f y02+ b f y12+ c f y22

z= a d z00 + b d z10 + c d z20 +
a e z01+ b e z11 + c e z21 +
a f z02+ b f z12+ c f z22

Dibujo de la superficie

ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 1},{ u, 0, 1}

4.1.4.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMICA BICUBICA OUE PASA POR UNA RED DE 4X4 PUNTOS DADOS

El organigrama del proceso sería el de la figura 4.1.1.-1

El programa sería:

Funciones blending

$a = -9/2t^3+9t^2-11/2t+1$
$b = 27/2t^3-45/2t^2+9t$
$e = -27/2t^3+18t^2-9/2t$
$d = 9/2t^3-9/2t^2+t$

$e = -9/2u^3+9u^2-11/2u+l$
$f = 27/2u^3-45/2u^2+9u$
$g = -27/2u^3+18u^2-9/2u$
$h = 9/2u^3-9/2u^2+u$

Coordenadas de los puntos

coordenadas de P00
x00=
y00=
z00=

coordenadas de P10
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P20
x20=
y20=
z20=

coordenadas de P30
x30=
y30=
z30=

coordenadas de P01
x01=
y01=
z01=

coordenadas de P11
x11=
y11=
z11=

coordenadas de P21
x2l=
y2l=

z2l=

coordenadas de   P31
x31=
y31=
z31=

coordenadas de P02
x02=
y02=
z02=

coordenadas de P12
x12=
y12=
z12=

coordenadas de P22
x22=
y22=
z22=

coordenadas de P32
x32=
y32=
z32=

coordenadas de P03
x03=
y03=
z03=

coordenadas de P13
x13=
y13=
z13=

coordenadas de P23
x23=
y23=
z23=

coordenadas de P33
x33=
y33=

z33=

Ecuaciones parametricas de la superficie

x = a e x00 + b e x10+c e x20+d e x30+
a f x01 + b f x11 +c f x21+d f x31 +
a g x02+b g x12+c g x22+d g x32 +
a h x03+b h x13+c h x23+d h x33

y = a e y00 + b e y10+c e y20+d e y30+
a f y01 + b f y11 +c f y21+d f y31 +
a g y02+b g y12+c g y22+d g y32 +
a h y03+b h y13+c h y23+d h y33

z = a e z00 + b e z10+c e z20+d e z30+
a f z01 + b f z11 +c f z21+d f z31 +
a g z02+b g z12+c g z22+d g z32 +
a h z03+b h z13+c h z23+d h z33

Dibujo de la superficie

ParametricPlot3D[{x, y, z},{t, 0. 1 },{u. 0, l}]

4.1.5.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL OUE PASA POR UNA RED DE 2X3 PUNTOS DADOS

El organigrama del proceso sería el de la figura 4.1.1.-1

El programa sería:

Funciones previas

a=-t+1
b =t

c=2u^2-3u+l
d= -4u^2 +4u
e= 2u^2-u

Coordenadas de los puntos

coordenadas de P00
x00=
y00=
z00=

coordenadas de P01
x01=
y01=
z01=

coordenadas de P02
x02=
y02=
z02=

coordenadas de P10
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P11
x11=
y11=
z11=

coordenadas de P12
x12=
y12=
z12=

Ecuaciones parametricas de la superficie

```
x=a cx00+b cxlo+
   a dx0l +bdxll +
   a e x02 + b e xl2
Expand[x]
x=Simplify[xl

y = a e y00 + b e yl0 +
    a d y0l + b d y= 1 +
    a e y02 +b e yl2
Expand[y]
y=Simplify[yl

z = a e z00 + b e zl0 +
     a d z0l + b d zl 1 +
     a e z02 +b e zl2
Expand[z]
z=Simplify[z]
```

Dibujo de la superficie

ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1}]

4.1.6.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 2X4 PUNTOS DADOS

El organigrama de] proceso sería el de la figura 4.1.1.-1

El programa sería:

Funciones previas

$a = -t+1$
$b= t$
$c= -9/2\ u^3+ 9\ u^2 -11/2\ u+ 1$

$d = 27/2\ u^3 -45/2\ u^2+9u$
$e = -27/2\ u^3+18\ u^2 -9/2\ u$
$f = 9/2\ u^3 -9/2\ u^2+1$

Coordenadas de los puntos

coordenadas de P00

x00=
y00=
z00=

coordenadas de P01

x01=
y01=
z01=

coordenadas de P02

x02=
y02=
z02=

coordenadas de P03

x03=
y03=
z03=

coordenadas de P10

x10=
y10=
z10=

coordenadas de P11

x11=
y11=
z11=

coordenadas de P12

x12=
y12=
z12=

coordenadas de P13

x13=
y13=
z13=

Ecuaciones parametricas de la superficie

x = a c x00 + b e x10 + a d x0l + b d xl1 +
a e x02 +b e xl2+ a f x03+b f xl3

y= a e y00 + b e yl0 + a d y0l + b d yl1 +
a e y02 +b e yl2+a f y03+b f yl3

z= a e z00 + b czlo+a dz01+bdzll +
a e z02 + b e zl2+a f z03+b f zl3

Dibujo de la superficie

ParametriePlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1}

4.1.7.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL OUE PASA POR UNA RED DE 2X5 PUNTOS DADOS

El organigrama del proceso sería el de figura 4. 1. l.-1

El programa sería:

Funciones previas

a=-t+1
b= t

c=256/24 u^4 –2560/96 u^3+8960/384 u^2 12800/1536 u +l
d=- 256/6 u^4 + 2304/24 u^3 -6656/96 u^2 + 6144/384 u
e=256/4 u^4 – 2048/16 u^3 +4864/64 u^2 – 3072/256 u
f=- 256/6 u^4 +1792/24 u^3 - 3584/96 u^2 + 2048/384 u
g=256/24 u^4 – 1536/96 u^3 + 2816/384 u^2 - u

Coordenadas de los puntos

coordenadas de P00
x00=
y00=
z00=

coordenadas de P01
x01=
y01=
z01=

coordenadas de P02
x02=
y02=
z02=

coordenadas de P03
x03=
y03=
z03=

coordenadas de P04
x04=
y04=
z04=

coordenadas de P10
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P11
x11=
y11=
z11=

coordenadas de P12
x12=
y12=
z12=

coordenadas de P13
x13=
y13=
z13=

coordenadas de P14
x14=
y14=
z14=

Ecuaciones parametricas de la superficie

x= ac x00+bcxl0+
adx01+bdx 1l+
aex02+be xl2+
afx03 +bf xl3+
agx04+bg xl4

y= ac y00 + b e yl0 +
a d y0l + b d yl1+
a e y02 + b e yl2 +
a f y03 + b f yl3 +
a g y04 + b g yl4

z= ac z00 + b e zl0 +
a d z0l + b d z11+
a e z02 +be zl2+
a f z03 +bf zl3+
a g z04 +bg zl4

Dibujo de la superficie

ParametricPlot3D[{x, y, z},(t, 0 1},{u, 0, 1}

4.1.8.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMICA BISEXTA QUE PASA POR UNA RED DE 7X7 PUNTOS DADOS

El organigrama del proceso sería el de la figura 4.1.1.-1

El programa sería:

Funciones blending:

$a = 324/5\ t^6 - 1134/5\ t^5 + 315\ t^4 - 441/2\ t^3 + 406/5\ t^2\ 147/10\ t + 1$
$b = -\ 1944/5\ t^6 + 1296\ t^5 + 1674\ t^4 + 1044\ t^3 - 1566/5\ t^2 + 36\ t$
$e = 972\ t^6 - 3074\ t^5 + 3699\ t^4 + 4149/2\ t^3 + 1053/2\ t^2 - 45\ t$
$d = -\ 1296\ t^6 + 3888\ t^5 - 4356\ t^4 + 2232\ t^3 - 508\ t^2 + 40\ t$
$e = 972\ t^6 - 2754\ t^5 + 2889\ t^4 - 2763/2\ t^3 + 297\ t^2 - 4512\ t$
$f = -1944/5t^6+5184/5t^5-1026t^4+468t^3-486/5t^2+36/5t$
$g =324/5t^6-162t^5+153t^4-135/2t^3+137/l0t^2-t$

$h = 324/5\ u^6 - 1134/5\ u^5 + 315\ u^4 - 441/2\ u^3 + 406/5\ u^2 - 147/10\ u + 1$
$k= -\ 1944/5\ u^6 + 1296\ u^5 + 1674\ u^4 + 1044\ u^3 - 1566/5\ u^2 + 36\ u$
$1 = 972\ u^6 - 3074\ u^5 + 3699\ u^4 + 4149/2\ u^3 + 1053/2\ u^2 - 45\ u$
$m - 1296\ u^6 + 3888\ u^5 - 4356\ u^4 + 2232\ u^3 - 508\ u^2 + 40\ u$
$p= 972\ u^6 - 2754\ u^5 + 2889\ u^4 - 2763/2\ u^3 + 297\ u^2 - 45/2\ u$
$r = -\ 1944/5\ u^6+5184/5\ u^5-1026\ u^4+468\ u^3-486/5\ u^2+36/5\ u$
$s =324/5\ u^6-162\ u^5+153\ u^4-135/2\ u^3+137/10\ u^2-u$

Coordenadas de los puntos

coordenadas de P00:

x00=
y00=
z00=

coordenadas de P01 :

x01=
y01=
z01=

coordenadas de P02 :

x02=
y02=
z02=

coordenadas de P03

x03=
y03=
z03=

coordenadas de P04:

x04=
y04=

z04=

coordenadas de P05
x05=
y05=
z05=

coordenadas de P06:
x06=
y06=
z06=

coordenadas de P10
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P11
x11=
y11=
z11=

coordenadas de P12
x12=
y12=
z12=

coordenadas de P13
x13=
y13=
z13=

coordenadas de P14:
x14=
y14=
z14=

coordenadas de P15
x15=
y15=
z15=

coordenadas de P16
x16=
y16=

z16=

coordenadas de P20:
x20=
y20=
z20=

coordenadas de P21
x21=
y21=
z21=

coordenadas de P22
x22=
y22=
z22=

coordenadas de P23
x23=
y23=
z23=

coordenadas de P24:
x24=
y24=
z24=

coordenadas de P25
x25=
y25=
z25=

coordenadas de P26:
x26=
y26=
z26=

coordenadas de P30:
x30=
y30=
z30=

coordenadas de P31
x31=
y31=

z31=

coordenadas de P32
x32=
y32=
z32=

coordenadas de P33
x33=
y33=
z33=

coordenadas de P34
x34=
y34=
z34=

coordenadas de P35
x35=
y35=
z35=

coordenadas de P36
x36=
y36=
z36=

coordenadas de P40:
x40=
y40=
z40=

coordenadas de P41
x4l=
y4l=
z4l=

coordenadas de P42
x42=
y42=
z42=

coordenadas de P43
x43=
y43=

z43=

coordenadas de P44:
x44=
y44=
z44=

coordenadas de P45
x45=
y45=
z45=

coordenadas de P46
x46=
y46=
z46=

coordenadas de P50:
x50=
y50=
z50=

coordenadas de P51
x51=
y51=
z51=

coordenadas de P52
x52=
y52=
z52=

coordenadas de P53
x53=
y53=
z53=

coordenadas de P54:
x54=
y54=
z54=

coordenadas de P55
x55=
y55=

z55=

coordenadas de P56
x56=
y56=
z56=

coordenadas de P60:
x60=
y60=
z60=

coordenadas de P61
x61=
y61=
z61=

coordenadas de P62 :
x62=
y62=
z62=

coordenadas de P63 :
x63=
y63=
z63=

coordenadas de P64:
x64=
y64=
z64=

coordenadas de P65
x65=
y65=
z65=

coordenadas de P66:
x66=
y66=
z66=

Ecuaciones parametricas de la superficie

x=ahx00+bhxl0+chx20+dhx30+ehx40+fhx50+ghx60+

akx01+bkx1l+ckx2l+dkx3l+ekx4l+fkx5l+gkx6l+
alx02+blxl2+clx22+dlx32+elx42+flx52+glx62+
amx03+bmxl3+cmx23+dmx33+emx43+fmx53+gmx63+
apx04+bpxl4+cpx24+dpx34 +epx44+fpx54+gpx64 +
arx05+brxl5 +crx25 +drx35 +erx45 +frx55+grx65+
asx06+bsxl6 +csx26+dsx36 +esx46+fsx56 +gsx66

y=ahy00+bhyl0+chy20+dhy30+ehy40+fhy50+ghy60+
aky01+bkyll+cky2l+dky3l+eky4l+fky5l+gky6l+
aly02+blyl2+cly22+dly32+ely42+fly52+gly62+
amy03+bmyl3+cmy23+dmy33+emy43+fmy53+gmy63+
apy04+bpyl4+cpy24+dpy34 +epy44+fpy54+gpy64 +
ary05+bryl5 +cry25 +dry35 +ery45 +fry55+gry65+
asy06+bsyl6 +csy26+dsy36 +esy46+fsy56 +gsy66

z=ahz00+bhzl0+chz20+dhz30+ehz40+fhz50+ghz60+
akz01+bkzll+ckz2l+dkz3l+ekz4l+fkz5l+gkz6l+
alz02 +blzl2 +clz22 +dlz32 +elz42 +flz52 +glz62 +
a mz03+bmzl3+cmz23+dmz33+emz43+fmz53+ gmz63+
apz04+bpzl4+cpz24+dpz34 +epz44+fpz54+gpz64 +
arz05+brzl5 +crz25 +drz35 +erz45 +frz55+grz65+
asz06+bszl6 +csz26+dsz36 +esz46+fsz56 +gsz66

Dibujo de la superficie

ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1 },(u,0,1}

4.1.9.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMICA BISEPTIMA QUE PASA POR UNA RED DE 8X8 PUNTOS DADOS

El organigrama del proceso seria el de la figura 4.1.1.-1

El programa seria:

Funciones blending:

a=- $17649/720t^7+117649/l80t^6-386561/360t^5+16807/18t^4-331681/720t^3$
$+22981/180t^2$ -363/20t+1

b=$823543/720t^7-352947/80t^6+991613/144t^5-88837/16t^4+1094l7/20t^3$
- 10927/20t2+49t

c=$-823543/240t^7+1529437/l20t^6-151263/8t^5+170471/12t^4-1347647/240t^3$

$+43071/40t^2 -147/2t$

$d=823543/144t^7-2941225/144t^6+4151329/144t^5-2926819/144t^4+133427/18t^3$
$-46501136t^2+245/3t$

$e=823543/144t^7+117649/6t^6-1899191/72t^5+52822/3t^4-872935/144t^3$
$+200912\ t^2 -245/4\ t$

$f=823543/240t^7-2705927/240t^6+1159683/80t^5-444185/48t^4+45962/15t^3$
$-9849/20\ t^2 +147/5\ t$

$g=-823543/720t^7+1294139/360t^6-319333/72t^5+98441/36t^4-634207/720t^3$
$+49931/360\ t^2 -4916\ t$

$h=117649/720t^7-117649/240t^6+84035/144t^5-16807/48t^4+9947/90t^3$
$-343/20t^2+ t$

$k=-1\ 17649/720u^7+117649/180u^6-396561/360u^5+16807/18u^4-331681/720u^3$
$+2298l/l80u^2 -363/20u +l$

$l=823543/720u^7-352947/80u^6+991613/144u^5-88837/16u^4+109417/20u^3$
$-10927/20u^2 +49u$

$m=-823543/240u^7+1529437/120u^6-151263/8u^5+170471/12u^4-1347647/240u^3$
$+43071/40u^2 -147/2u$

$P=823543/144u^7-2941225/144u^6+4151329/144u^5-2926819/ 144u^4+133427/18u^3$
$-46501/36u^2 +245/3u$

$r=823543/144u^7+117649/6u^6-l899191/72u^5+52822/3u^4-872935/144u^3$
$+2009/2u^2 -245/4u$

$s=823543/240u^7-2705927/240u^6+1159683/80u^5-444185/48u^4+45962/15u^3$
$-9849/20u^2 +147/5u$

$v=-823543/720u^7+1294139/360u^6-319333/72u^5+98441/36u^4-634207/720u^3$
$+49931/360u^2 -49/6u$

$w=117649/720u^7-117649/240u^6+84035/144u^5-16807/48u^4+9947/90u^3$
$-343/20u^2+u$

Coordenadas de los puntos

coordenadas de P00
x00=

y00=
z00=

coordenadas de P01
x01=
y01=
z01=

coordenadas de P02:
x02=
y02=
z02=

coordenadas de P03
x03=
y03=
z03=

coordenadas de P04:
x04=
y04=
z04=

coordenadas de P05
x05=
y05=
z05=

coordenadas de P06
x06=
y06=
z06=

coordenadas de P07
x07=
y07=
z07=

coordenadas de P10
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P11
x11=

y11=
z11=

coordenadas de P12
x12=
y12=
z12=

coordenadas de P13
x13=
y13=
z13=

coordenadas de P14:
x14=
y14=
z14=

coordenadas de P15
x15=
y15=
z15=

coordenadas de P16:
x16=
y16=
z16=

coordenadas de P17
x17=
y17=
z17=

coordenadas de P20:
x20=
y20=
z20=

coordenadas de P21
x21=
y21=
z21=

coordenadas de P22:
x22=

y22=
z22=

coordenadas de P23
x23=
y23=
z23=

coordenadas de P24
x24=
y24=
z24=

coordenadas de P25
x25=
y25=
z25=

coordenadas de P26
x26=
y26=
z26=

coordenadas de P27
x27=
y27=
z27=

coordenadas de P30:
x30=
y30=
z30=

coordenadas de P31
x31=
y31=
z31=

coordenadas de P32:
x32=
y32=
z32=

coordenadas de P33

x33=
y33=
z33=

coordenadas de P34:
x34=
y34=
z34=

coordenadas de P35
x35=
y35=
z35=

coordenadas de P36:
x36=
y36=
z36=

coordenadas de P37
x37=
y37=
z37=

coordenadas de P40:
x40=
y40=
z40=

coordenadas de P41 :
x4l=
y4l=
z4l=

coordenadas de P42 :
x42=
y42=
z42=

coordenadas de P43 :
x43=
y43=
z43=

coordenadas de P44 :

x44=
y44=
z44=

coordenadas de P45
x45=
y45=
z45=

coordenadas de P46
x46=
y46=
z46=

coordenadas de P47
x47=
y47=
z47=

coordenadas de P50:
x50=
y50=
z50=

coordenadas de P51
x5l=
y5l=
z5l=

coordenadas de P52
x52=
y52=
z52=

coordenadas de P53
x53=
y53=
z53=

coordenadas de P54:
x54=
y54=
z54=

coordenadas de P55

x55=
y55=
z55=

coordenadas de P56:
x56=
y56=
z56=

coordenadas de P57
x57=
y57=
z57=

coordenadas de P60:
x60=
y60=
z60=

coordenadas de P61
x6l=
y6l=
z6l=

coordenadas de P62:
x62=
y62=
z62=

coordenadas de P63
x63=
y63=
z63=

coordenadas de P64
x64=
y64=
z64=

coordenadas de P65
x65=
y65=
z65=

coordenadas de P66

x66=
y66=
z66=

coordenadas de P67
x67=
y67=
z67=

coordenadas de P70:
x70=
y70=
z70=

coordenadas de P71
x7l=
y7l=
z7l=

coordenadas de P72
x72=
y72=
z72=

coordenadas de P73
x73=
y73=
z73=

coordenadas de P74:
x74=
y74=
z74=

coordenadas de P75
x75=
y75=
z75=

coordenadas de P76:
x76=
y76=
z76=

coordenadas de P77

x77=
y77=
Z17=

Ecuaciones parametricas de la superficie

x=akx00+bkxl0+ckx20+dkx30+ekx40+fkx50+gkx60+hkx70+
alx01+blxll+clx2l+dlx3l+elx4l+flx5l+glx6l+hlx7l+
a m x02+b m xl2+c m x22+d m x32+ e m x42+ f m x52 + g mx62+hmx72+
a p x03 + b p xl3 + e p x23 +d p x33 +e p x43 +f p x53 + g p x63 +hpx73+
arx04+brxl4+crx24+drx34+erx44+frx54+grx64+hrx74+
asx05+bsxl5+csx25+dsx35+esx45+fsx55+gsx65+hsx75+
a v x06 + b v xl6 + e v x26 + d v x36 + e v x46 + f v x56+ g v x66+bvx76+
a w x07+b w xl7+c w x27+ d w x37+ e w x47+ f w x57+ g w x67+hvx77

y=aky00+bkyl0+cky20+dky30+eky40+fky50+gky60+hky70+
aly01+blyll+cly2l+dly3l+ely4l+fly5l+gly6l+hly7l+
amy02+bmyl2+cmy22+dmy32+emy42+fmy52+gmy62+hmy72+
apy03+bpyl3+cpy23+dpy33+epy43+fpy53+gpy63+hpy73+
ary04+bryl4+cry24+dry34 +ery44+fry54+gry64 +hry74+
a sy05 + b s yl5 +csy25+dsy35+esy45+fsy55+gsy65 +hsy75+
a v y06 + b v yl6+ c v y26+ d v y36+ e v y46 + f v y56 + g v y66+hvy76+
a w y07+ b w yl7 +c w y27+ d w y37+ e w y47+ f w y57 + g w y67+hvy77

z=akz00+bkzl0+ckz20+dkz30+ekz40+fkz50+gkz60+hkz70+
alz01+blzll+clz2l+dlz3l+elz4l+flz5l+glz6l+hlz7l+
a m z02+ b m zl2+ c m z22+d m z32+ e m z42+ f m z52 + g mz62+hmz72 +
a p z03 + b p zl3 + c p z23 +d p z33 +e p z43 +f p z53 + g p z63 +hpz73+
arz04+brzl4+crz24+drz34 +erz44+frz54+grz64 +hrz74+
a sz05 + b s zl5 + c s z25 + d s z35 + e s z45 + f s z55 + g s z65 +hsz75+
avz06+bvzl6+cvz26+dvz36+evz46+fvz56 +gvz66+hvz76+
a w z07+ b w zl7 +c w z27+ d w z37+ e w z47+ f w z57 + g w z67+hvz77

Dibujo de la superficie

ParametricPlot3D[{x,y,z}, {t,0,1},{ u,0,1}]

4.1.10.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BIOCTAVA QUE PASA POR UNA RED DE 9X9 PUNTOS DADOS

El organigrama del proceso sería el de la figura 4.1.1.-1

El programa sería:

Funciones blending

$a=131072/315t^8-65536/35t^7+532248/15t^6-18432/5t^5+34208/15t^4-4272/5t^3$
$+59062/315\ t^2\ -761135\ t\ +l$
$b=-1048576/315t^8+131072/9t^7-1196032/45t^6+235520/9t^5-673792/45t^4+44672/9t^3$
$-30784/35t^2+64t$
$c=524288/45t^8-2228224/45t^7+3915776/45t^6-733184/9t^5+1956992/45t^4-587296/45t^3$
$+9936/5t^2\ -112t$
$d=-1048576/45t^8+1441792/15t^7-2441216/15t^6+145408t^5-1097728/15t^4+102016/5t^3$
$-1\ 28192/45t^2\ +448/3t$
$e=262144/9t^8-1048576/9t^7+1712128/9t^6-1466368/9t^5+703552/9t^4-186496/9t$
$f=-1048576/45t^8+4063232/45t^7-6406144/45t^6+5285888/45t^5-2443264/45t^4$
$+626048/45t^3\ -9024/5t^2\ +448/5t$
$g=524288/45t^8-131072/3t^7+999424/15t^6-53248t^5+358784/15t^4-5984t^3$
$+34288/45t^2\ -112/3t$
$h=-\ 1048576/315t^8+3801088/315t^7-802816/45t^6+124928/9t^5-274432/45t^4$
$+67456/45t^3\ -6592/35t^2\ +64/7t$
$k=131072/315t^8-65536/45t^7+94208/45t^6-14336/9t^5+30944/45t^4-7504/45t^3$
$+726/35t^2\ -\ t$

$l=131072/315u^8-65536/35u^7+532248/15u^6-18432/5u^5+34208/15u^4-4272/5u^3$
$+59062/315\ u^2\ -761135\ u\ +l$
$m=-1048576/315u^8+131072/9u^7-1196032/45u^6+235520/9u^5-673792/45u^4+44672/9u^3$
$-30784/35u^2+64u$
$p=524288/45u^8-2228224/45u^7+3915776/45u^6-733184/9u^5+1956992/45u^4-587296/45u^3$
$+9936/5u^2\ –112u$

$q=-1048576/45u^8+1441792/15u^7-2441216/15u^6+145408u^5-1097728/15u^4+102016/5u^3$
$-1\ 28192/45u^2\ +448/3u$
$r=262144/9u^8-1048576/9u^7+1712128/9u^6-1466368/9u^5+703552/9u^4-186496/9u$
$s=-1048576/45u^8+4063232/45u^7-6406144/45u^6+5285888/45u^5-2443264/45u^4$
$+626048/45u^3\ -9024/5u^2\ +448/5u$
$n=524288/45u^8-131072/3u^7+999424/15u^6-53248u^5+358784/15u^4-5984u^3$
$+34288/45u^2\ -112/3u$
$v=-\ 1048576/315u^8+3801088/315u^7-802816/45u^6+124928/9u^5-274432/45u^4$
$+67456/45u^3\ -6592/35u^2\ +64/7u$
$w=131072/315u^8-65536/45u^7+94208/45u^6-14336/9u^5+30944/45u^4-7504/45u^3$
$+726/35u^2\ -\ u$

Coordenadas de los puntos

Coordenadas de P00

x00 =
y00 =
z00 =

Coordenadas de P01
x01 =
y01 =
z01 =

Coordenadas de P02
x02 =
y02 =
z02 =

Coordenadas de P03
x03 =
y03 =
z03 =

Coordenadas de P04
x04 =
y04 =
z04 =

Coordenadas de P05
x05 =
y05 =
z05 =

Coordenadas de P06
x06 =
y06 =
z06 =

Coordenadas de P07
x07=
y07 =
z07 =

Coordenadas de P08
x08 =
y08 =
z08 =

Coordenadas de P10

x10=
y10 =
z10 =

Coordenadas de P11
x11 =
y11=
z11 =

Coordenadas de P12
x12 =
y12 =
z12 =

Coordenadas de P13
x13 =
y13 =
z13 =

Coordenadas de P14
x14 =
y14 =
z14 =

Coordenadas de P15
x15 =
y15 =
z15 =

Coordenadas de P16
x16 =
y16 =
z16 =

Coordenadas de P17
x17=
yl7 =
zl7 =

Coordenadas de P18
x18 =
y18 =
z18 =

Coordenadas de P20

x20 =
y20 =
z20 =

Coordenadas de P21
x21 =
y21 =
z21 =

Coordenadas de P22
x22 =
y22 =
z22 =

Coordenadas de P23
x23 =
y23 =
z23 =

Coordenadas de P24
x24 =
y24 =
z24 =

Coordenadas de P25
x25 =
y25 =
z25 =

Coordenadas de P26
x26 =
y26 =
z26 =

Coordenadas de P27
x27
y27 =
z27 =

Coordenadas de P28
x28 =
y28 =
z28 =

Coordenadas de P30

x30 =
y30 =
z30 =

Coordenadas de P31
x31=
y31 =
z31 =

Coordenadas de P32
x32 =
y32 =
z32 =

Coordenadas de P33
x33 =
y33 =
z33 =

Coordenadas de P34
x34 =
y34 =
z34 =

Coordenadas de P35
x35 =
y35 =
z35 =

Coordenadas de P36
x36 =
y36 =
z36 =

Coordenadas de P37
x37
y37 =
z37 =

Coordenadas de P38
x38 =
y38 =
z38 =

Coordenadas de P40

x40 =
y40 =
z40 =

Coordenadas de P41
x41=
y41 =
z41 =

Coordenadas de P42
x42 =
y42 =
z42 =

Coordenadas de P43
x43 =
y43 =
z43 =

Coordenadas de P44
x44 =
y44 =
z44 =

Coordenadas de P45
x45 =
y45 =
z45 =

Coordenadas de P46
x46 =
y46 =
z46 =

Coordenadas de P47
x47
y47 =
z47 =

Coordenadas de P48
x48 =
y48 =
z48 =

Coordenadas de P50

x50 =
y50 =
z50 =

Coordenadas de P51
x51 =
y51 =
z51 =

Coordenadas de P52
x52 =
y52 =
z52 =

Coordenadas de P53
x53 =
y53 =
z53 =

Coordenadas de P54
x54 =
y54 =
z54 =

Coordenadas de P55
x55 =
y55 =
z55 =

Coordenadas de P56
x56 =
y56 =
z56 =

Coordenadas de P57
x57
y57 =
z57 =

Coordenadas de P58
x58 =
y58 =
z58 =

Coordenadas de P60

x60 =
y60 =
z60 =

Coordenadas de P6l
x61 =
y61=
z61=

Coordenadas de P62
x62 =
y62 =
z62 =

Coordenadas de P63
x63 =
y63 =
z63 =

Coordenadas de P64
x64 =
y64 =
z64 =

Coordenadas de P65
x65 =
y65 =
z65 =

Coordenadas de P66
x66 =
y66 =
z66 =

Coordenadas deP67
x67
y67 =
z67 =

Coordenadas de P68
x68 =
y68 =
z68 =

Coordenadas de P70

x70 =
y70 =
z70 =

Coordenadas de P71
x7l =
y7l =
z7l =

Coordenadas de P72
x72 =
y72 =
z72 =

Coordenadas de P73
x73 =
y73 =
z73 =

Coordenadas de P74
x74 =
y74 =
z74 =

Coordenadas de P75
x75 =
y75 =
z75 =

Coordenadas de P76
x76 =
y76 =
z76 =

Coordenadas de P77
x77 =
y77 =
z77 =

Coordenadas de P78
x78 =
y78 =
z78 =

Coordenadas de P80

x80 =
y80 =
z80 =

Coordenadas de P81
x8l =
y8l =
z8l =

Coordenadas de P82
x82 =
y82 =
z82 =

Coordenadas de P83
x83 =
y83 =
z83 =

Coordenadas de P84
x84 =
y84 =
z84 =

Coordenadas de P85
x85 =
y85 =
z85 =

Coordenadas de P86
x86 =
y86 =
z86 =

Coordenadas de P87
x87
y87 =
z87 =

Coordenadas de P88
x88 =
y88 =
z88 =

Ecuaciones parametricas de la superficie

x= a1x00 +b1xl0 +e1x20 + d1x30 +e1x40 + f 1 x50 + g1 x60 +h1 x70 +k1 x80 +
a m x0l +b m xl1 +e m x2l + d m x3l +e m x4l +f m x5l + g m x6l +h m x7l +k m x8l
+
apx02 +b p xl2 +c p x22 +d p x32 +e p x42 +fpx52 + g p x62 +h p x72 +k p x82 +
aqx03 +b q xl3+cq x23 +dq x33 +eq x43 +fqx53 + g q x63 +h q x73 +k q x83 +
arx04 +b r xl4 +c r x24 + d r x34 +e r x44 +frx54 + g r x64 +h r x74 +k r x84 +
asx05 +b s xl5 +c s x25 + d s x35 +e s x45 +fsx55 +g s x65 +h s x75 +k s x85 +
anx06 +b n xl6 +c n x26 + d n x36 +e n x46 +fnx56 + g n x66 +h n x76 +k n x86 +
avx07 +b v xl7 +e v x27 + d v x37 +e v x47 +fvx57 + g v x67 +h v x77 +k v x87 +
a w x08 +b w xl8 +e w x28 + d w x38 +e w x48 +f w x58 +g w x68 +h w x78 +k w
x88

y= a1y00 +b1yl0 +e1y20 + d1y30 +e1y40 + f 1 y50 + g1 y60 +h1 y70 +k1 y80 +
a m y0l +b m yl1 +e m y2l + d m y3l +e m y4l +f m y5l + g m y6l +h m y7l +k m y8l
+
apy02 +b p yl2 +c p y22 +d p y32 +e p y42 +fpy52 + g p y62 +h p y72 +k p y82 +
aqy03 +b q yl3+cq y23 +dq y33 +eq y43 +fqy53 + g q y63 +h q y73 +k q y83 +
ary04 +b r yl4 +c r y24 + d r y34 +e r y44 +fry54 + g r y64 +h r y74 +k r y84 +
asy05 +b s yl5 +c s y25 + d s y35 +e s y45 +fsy55 +g s y65 +h s y75 +k s y85 +
any06 +b n yl6 +c n y26 + d n y36 +e n y46 +fny56 + g n y66 +h n y76 +k n y86 +
avy07 +b v yl7 +e v y27 + d v y37 +e v y47 +fvy57 + g v y67 +h v y77 +k v y87 +
a w y08 +b w yl8 +e w y28 + d w y38 +e w y48 +f w y58 +g w y68 +h w y78 +k w
y88

z= a1z00 +b1zl0 +e1z20 + d1z30 +e1z40 + f 1 z50 + g1 z60 +h1 z70 +k1 z80 +
a m z0l +b m zl1 +e m z2l + d m z3l +e m z4l +f m z5l + g m z6l +h m z7l +k m z8l
+
apz02 +b p zl2 +c p z22 +d p z32 +e p z42 +fpz52 + g p z62 +h p z72 +k p z82 +
aqz03 +b q zl3+cq z23 +dq z33 +eq z43 +fqz53 + g q z63 +h q z73 +k q z83 +
arz04 +b r zl4 +c r z24 + d r z34 +e r z44 +frz54 + g r z64 +h r z74 +k r z84 +
asz05 +b s zl5 +c s z25 + d s z35 +e s z45 +fsz55 +g s z65 +h s z75 +k s z85 +
anz06 +b n zl6 +c n z26 + d n z36 +e n z46 +fnz56 + g n z66 +h n z76 +k n z86 +
avz07 +b v zl7 +e v z27 + d v z37 +e v z47 +fvz57 + g v z67 +h v z77 +k v z87 +
a w z08 +b w zl8 +e w z28 + d w z38 +e w z48 +f w z58 +g w z68 +h w z78 +k w
x88

Dibujo de la superficie

ParametricPlot3D[{x,y,z},{ t,0,1},{u,0,1}]

4.1.11.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL BINOVENA QUE PASA POR UNA RED DE 10X10 PUNTOS DADOS

El organigrama del proceso sería el de la figura 4.1.1.-I

El programa sería:

Funciones blending

$a=1-7129/280t+58635/224t^2-40707/28t^3+623295/l28t^4-6589431/640t^5+885735/64t^6-$
$5137263/448t^7+4782969/896t^8- 4782969/4480t^9$

$b=81t-373329/280t^2+10307331/1120t^3-5589243/160t^4+51221727/640t^5-$
$4546773/40t^6+31355019/320t^7-52612659/1120t^8+43046721/4480t^9$

$c=-162t+475389/l40t^2-15190173/560t^3+18152829/l60t^4-44529507/l60t^5+33244587/80t^6-$
$3720087/10t^7+205667667/1120t^8 -4304672l/1l20t^9$

$d=252t-56601/l0t^2+1959363/40t^3-8776431/40t^4+91020753/l60t^5-71035947/80t^6$
$+16474671/20t^7 -33480783/80t^8+14348907/l60t^9$

$e=-567/2t+526419/80t^2-4752351/80t^3+89119521/320t^4-241241409/320t^5$
$+195629337/l60t^6 -187598673/l60t^7+196101729/320t^8 -43046721/320t^9$

$f=1134/5t-21465/4t^2+795339/16t^3-3844017/16t^4+215023653/320t^5-18009945/16t^6$
$+35606547/32t^7-4782969/8t^8+43046721/320t^9$

$g=-126t+60381/20t^2-2276289/80t^3+22480173/l60t^4-64448703/l60t^5+55447011/80t^6$
$+28166373/40t^7+62178597/l60t^8-14348907/l60t^9$

$h=324/7t-78327/70t^2+2989629/280t^3-214253l/40t^4+25043337/l60t^5$
$-22025277/80t^6+80247591/280t^7-90876411/560t^8+4304672l/1120t^9$

$k=-81/8t+275967/1120t^2-1328967/560t^3+7712091/640t^4-22878207/640t^5 +20490003/320t^6-$
$21789081/320t^7+176969853/4480t^8 -43046721/4480t^9$

$l=t-6849/280t^2+265779/1120t^3-194643/l60t^4+2337903/640t^5-531441/80t^6$
$+2302911/320t^7 -4782969/1120t^8+4782969/4480t^9$

$m=1-7129/280u+58635/224u^2-40707/28u^3+623295/l28u^4-6589431/640u^5+885735/64u^6-$
$5137263/448u^7+4782969/896u^8- 4782969/4480u^9$

$n=81u-373329/280u^2+10307331/1120u^3-5589243/160u^4+51221727/640u^5-$

$4546773/40u^6+31355019/320u^7-52612659/1120u^8+43046721/4480u^9$

$o=-162u+475389/l40u^2-15190173/560u^3+18152829/l60u^4-44529507/l60u^5 +33244587/80u^6$
$-3720087/10u^7+205667667/1120u^8 -4304672l/1l20u^9$

$p=252u-56601/l0u^2+1959363/40u^3-8776431/40u^4+91020753/l60u^5-71035947/80u^6$
$+16474671/20u^7 -33480783/80u^8+14348907/l60u^9$

$q=-567/2u+526419/80u^2-4752351/80u^3+89119521/320u^4-241241409/320u^5$
$+195629337/l60u^6 -187598673/l60u^7+196101729/320u^8 -43046721/320u^9$

$r=1134/5u-21465/4u^2+795339/16u^3-3844017/16u^4+215023653/320u^5-18009945/16u^6$
$+35606547/32u^7-4782969/8u^8+43046721/320u^9$

$s=-126u+60381/20u^2-2276289/80u^3+22480173/l60u^4-64448703/l60u^5+55447011/80u^6$
$+28166373/40u^7+62178597/l60u^8-14348907/l60u^9$

$v=324/7u-78327/70u^2+2989629/280u^3-214253l/40u^4+25043337/l60u^5$
$-22025277/80u^6+80247591/280u^7-90876411/560u^8+4304672l/1120u^9$

$w=-81/8u+275967/1120u^2-1328967/560u^3+7712091/640u^4-22878207/640u^5$
$+20490003/320u^6-21789081/320u^7+176969853/4480u^8 -43046721/4480u^9$

$ñ=u-6849/280u^2+265779/1120u^3-194643/l60u^4+2337903/640u^5-531441/80u^6$
$+2302911/320u^7 -4782969/1120u^8+4782969/4480t^9$

Coordenadas de los puntos

Coordenadas de P00
x00 =
y00 =
z00 =

Coordenadas de P01
x01=
y01=
z01=

Coordenadas de P02
x02 =
y02 =
z02 =

Coordenadas de P03
x03 =

y03 =
z03 =

Coordenadas de P04
x04 =
y04 =
z04 =

Coordenadas de P05
x05 =
y05 =
z05 =

Coordenadas de P06
x06 =
y06 =
z06 =

Coordenadas de P07
x07 =
y07 =
z07 =

Coordenadas de P08
x08 =
y08 =
z08 =

Coordenadas de P09
x09 =
y09 =
z09 =

Coordenadas de P10
x10 =
y10 =
z10 =

Coordenadas de P11
x11 =
y11 =
z11 =

Coordenadas de P12
xl2=

yl2=
zl2=

Coordenadas de P13
X13 =
Y13 =
Z13 =

Coordenadas de P14
x14 =
y14 =
z14 =

Coordenadas de P15
x15 =
y15 =
z15 =

Coordenadas de P16
x16 =
y16 =
z16 =

Coordenadas de P17
x17 =
y17 =
z17 =

Coordenadas de P18
x18 =
y18 =
z19 =

Coordenadas de P19
x19 =
y19 =
z19 =

Coordenadas de P20
x20 =
y20 =
z20 =

Coordenadas de P21
x21 =

y21 =
z21=

Coordenadas de P22
x22 =
y22 =
z22 =

Coordenadas de P23
x23 =
y23 =
z23 =

Coordenadas de P24
x24 =
y24 =
z24 =

Coordenadas de P25
x25 =
y25 =
z25 =

Coordenadas de P26
x26 =
y26 =
z26 =

Coordenadas de P27
x27 =
y27 =
z27 =

Coordenadas de P28
x28 =
y28 =
z28 =

Coordenadas de P29
x29 =
y29 =
z29 =

Coordenadas de P30
x30=

y30 =
z30 =

Coordenadas de P31
x31 =
y31 =
z31 =

Coordenadas de P32
x32 =
y32 =
Z32 =

Coordenadas de P33
x33 =
y33 =
z33 =

Coordenadas de P34
x34 =
y34 =
z34 =

Coordenadas de P35
x35 =
y35 =
z35 =

Coordenadas de P36
x36 =
y36 =
z36 =

Coordenadas de P37
x37 =
y37 =
z37 =

Coordenadas de P38
x38 =
y38 =
z38 =

Coordenadas de P39
x39 =

y39 =
z39 =

Coordenadas de P40
x40 =
y40 =
z40 =

Coordenadas de P41
x41 =
y41 =
z41=

Coordenadas de P42
x42 =
y42 =
z42 =

Coordenadas de P43
x43 =
y43 =
z43 =

Coordenadas de P44
x44 =
y44 =
z44 =

Coordenadas de P45
x45 =
y45 =
z45 =

Coordenadas de P46
x46 =
y46 =
z46 =

Coordenadas de P47
x47 =
y47 =
z47 =

Coordenadas de P48
x48 =

y48 =
z48 =

Coordenadas de P49
x49 =
y49 =
z49 =

Coordenadas de P50
x50 =
y50 =
z50 =

Coordenadas de P51
x51 =
y51 =
z51 =

Coordenadas de P52
x52 =
y52 =
z52 =

Coordenadas deP53
x53 =
y53 =
z53 =

Coordenadas de P54
x54 =
y54 =
z54 =

Coordenadas de P55
x55 =
y55 =
z55 =

Coordenadas de P56
x56 =
y56 =
z56 =

Coordenadas de P57
x57 =

y57 =
z57 =

Coordenadas de P58
x58 =
y58 =
z58 =

Coordenadas de P59
x59 =
y98 =
z59 =

Coordenadas de P60
x60 =
y60 =
z60 =

Coordenadas de P61
x6l=
y61=
z61=

Coordenadas de P62
x62 =
y62 =
z62 =

Coordenadas de P63
x63 =
y63 =
z63 =

Coordenadas de P64
x64 =
y64 =
z64 =

Coordenadas de P65
x65 =
y65 =
z65 =

Coordenadas de P66
x66 =

y66 =
z66 =

Coordenadas de P67
x67 =
y67 =
z67 =

Coordenadas de P68
x68 =
y68 =
z68 =

Coordenadas de P69
x69 =
y69 =
z69 =

Coordenadas de P70
x70 =
y70 =
z70 =

Coordenadas de P71
x71 =
y71 =
z71 =

Coordenadas de P72
x72 =
y72 =
z72 =
Coordenadas de P73
x73 =
Y73 =
Z73 =

Coordenadas de P74
x74 =
y74 =
z74 =

Coordenadas de P75
x75 =
y75 =

z75 =

Coordenadas de P76
x76 =
y76 =
z76 =

Coordenadas de P77
x77 =
y77 =
z77 =

Coordenadas de P78
x78 =
y78 =
z78 =

Coordenadas de P79
x79 =
y79 =
z79 =

Coordenadas de P80
x80 =
y80 =
z80 =

Coordenadas de P81
x81 =
y81 =
z81 =

Coordenadas de P82
x82 =
y82 =
z82 =

Coordenadas de P83
x83 =
y83 =
z83 =

Coordenadas de P84
x84 =
y84 =

z84 =

Coordenadas de P85
x85 =
y85 =
z85 =

Coordenadas de P86
x86 =
y86 =
z86 =

Coordenadas de P87
x87 =
y87 =
z87 =

Coordenadas de P88
x88 =
y88 =
z88 =

Coordenadas de P89
x89=
y89=
z89=

Coordenadas de P90
x90 =
y90 =
z90 =

Coordenadas de P91
x91 =
y91 =
z91 =

Coordenadas de P92
x92 =
y92 =
z92 =

Coordenadas de P93
x93 =
y93 =

z93 =

Coordenadas de P94
x94 =
y94 =
z94 =

Coordenadas de P95
x95 =
y95 =
z95 =

Coordenadas de P96
x96 =
y96 =
z96 =

Coordenadas de P97
x97=
y97=
z97=

Coordenadas de P98
x98 =
y98 =
z98 =

Coordenadas de P99
x99 =
y99 =
z99 =

Ecuaciones paramétricas de la superficie

x= a*m*x00+b*m*x10+c*m*x20+d*m*x30+e*m*x40+
f*m*x50+g*m*x60+h*m*x70+k*m*x80+l*m*x90+
a*n*x0l+b*n*xll+c*n*x2l+d*n*x3l+e*n*x4l+
f*n*x5l+g*n*x6l+h*n*x7l+k*n*x8l+I*n*x9l+
a*o*x02+b*o*xl2+c*o*x22+d*o*x32+e*o*x42+
f*o*x52+g*o*x62+h*o*x72+k*o*x82+1*o*x92+
a*p*x03+b*p*xl3+c*p*x23+d*p*x33+e*p*x43+
f*p*x53+g*p*x63+h*p*x73+k*p*x83+1*p*x93+
a*q*x04+b*q*xl4+c*q*x24+d*q*x34+e*q*x44+
f*q*x54+g*q*x64+h*q*x74+k*q*x84+1*q*x94+
a*r*x05+b*r*xl5+c*r*x25+d*r*x35+e*r*x45+

f*r*x55+g*r*x65+h*r*x75+k*r*x85+1*r*x95+
a*s*x06+b*s*xl6+c*s*x26+d*s*x36+e*s*x46+
f*s*x56+g*s*x66+h*s*x76+k*s*x86+1*s*x96+
a*v*x07+b*v*xl7+c*v*x27+d*v*x37+e*v*x47+
f*v*x57+g*v*x67+h*v*x77+k*v*x87+1*v*x97+
a*w*x08+b*w*xl8+c*w*x28+d*w*x38+e*w*x48+
f*w*x58+g*w*x68+b*w*x78+k*w*x88+1*w*x98+
a*ñ*x09+b*ñ*xl9+c*ñ*x29+d*ñ*x39+e*ñ*x49+
f*ñ*x59+g*ñ*x69+h*ñ*x79+k*ñ*x89+1*ñ*x99

y= a*m*y00+b*m*y10+c*m*y20+d*m*y30+e*m*y40+
f*m*y50+g*m*y60+h*m*y70+k*m*y80+l*m*y90+
a*n*y0l+b*n*yll+c*n*y2l+d*n*y3l+e*n*y4l+
f*n*y5l+g*n*y6l+h*n*y7l+k*n*y8l+I*n*y9l+
a*o*y02+b*o*yl2+c*o*y22+d*o*y32+e*o*y42+
f*o*y52+g*o*y62+h*o*y72+k*o*y82+1*o*y92+
a*p*y03+b*p*yl3+c*p*y23+d*p*y33+e*p*y43+
f*p*y53+g*p*y63+h*p*y73+k*p*y83+1*p*y93+
a*q*y04+b*q*yl4+c*q*y24+d*q*y34+e*q*y44+
f*q*y54+g*q*y64+h*q*y74+k*q*y84+1*q*y94+
a*r*y05+b*r*yl5+c*r*y25+d*r*y35+e*r*y45+
f*r*y55+g*r*y65+h*r*y75+k*r*y85+1*r*y95+
a*s*y06+b*s*yl6+c*s*y26+d*s*y36+e*s*y46+
f*s*y56+g*s*y66+h*s*y76+k*s*y86+1*s*y96+
a*v*y07+b*v*yl7+c*v*y27+d*v*y37+e*v*y47+
f*v*y57+g*v*y67+h*v*y77+k*v*y87+1*v*y97+
a*w*y08+b*w*yl8+c*w*y28+d*w*y38+e*w*y48+
f*w*y58+g*w*y68+b*w*y78+k*w*y88+1*w*y98+
a*ñ*y09+b*ñ*yl9+c*ñ*y29+d*ñ*y39+e*ñ*y49+
f*ñ*y59+g*ñ*y69+h*ñ*y79+k*ñ*y89+1*ñ*y99

z= a*m*z00+b*m*z10+c*m*z20+d*m*z30+e*m*z40+
f*m*z50+g*m*z60+h*m*z70+k*m*z80+l*m*z90+
a*n*z0l+b*n*zll+c*n*z2l+d*n*z3l+e*n*z4l+
f*n*z5l+g*n*z6l+h*n*z7l+k*n*z8l+I*n*z9l+
a*o*z02+b*o*zl2+c*o*z22+d*o*z32+e*o*z42+
f*o*z52+g*o*z62+h*o*z72+k*o*z82+1*o*z92+
a*p*z03+b*p*zl3+c*p*z23+d*p*z33+e*p*z43+
f*p*z53+g*p*z63+h*p*z73+k*p*z83+1*p*z93+
a*q*z04+b*q*zl4+c*q*z24+d*q*z34+e*q*z44+
f*q*z54+g*q*z64+h*q*z74+k*q*z84+1*q*z94+
a*r*z05+b*r*zl5+c*r*z25+d*r*z35+e*r*z45+
f*r*z55+g*r*z65+h*r*z75+k*r*z85+1*r*z95+
a*s*z06+b*s*zl6+c*s*z26+d*s*z36+e*s*z46+
f*s*z56+g*s*z66+h*s*z76+k*s*z86+1*s*z96+

```
a*v*z07+b*v*zl7+c*v*z27+d*v*z37+e*v*z47+
f*v*z57+g*v*z67+h*v*z77+k*v*z87+1*v*z97+
a*w*z08+b*w*zl8+c*w*z28+d*w*z38+e*w*z48+
f*w*z58+g*w*z68+b*w*z78+k*w*z88+1*w*z98+
a*ñ*z09+b*ñ*zl9+c*ñ*z29+d*ñ*z39+e*ñ*z49+
f*ñ*z59+g*ñ*z69+h*ñ*z79+k*ñ*z89+1*ñ*z99
```

Dibujo de la superficie

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1}]
```

4.2.- SUPERFICIES POLINOMIALES DEFINIDAS POR PUNTOS Y TANGENTES EN ELLOS

4.2.1.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE NXN PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

El diseño de superficies que pasan por una red de puntos dada con tangentes en cada uno de ellos que son tambien dadas responde a un organigrama tal como el de la figura 4.2.1.-1.

Partiendo de las funciones que rigen el proceso se entra en el programa con las coordenadas cartesianas de los puntos a interpolar y las componentes de los vectores tangentes según dos direcciones en dichos puntos.

Con ello se han determinado las ecuaciones paramétricas de la superficie interpolante y posteriormente se obtiene el diseño grafico de ésta.

4.2.2.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL OUE PASA POR UNA RED DE 2X2 PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

El organigrama del proceso sería: ver figura 4.2.1.-1

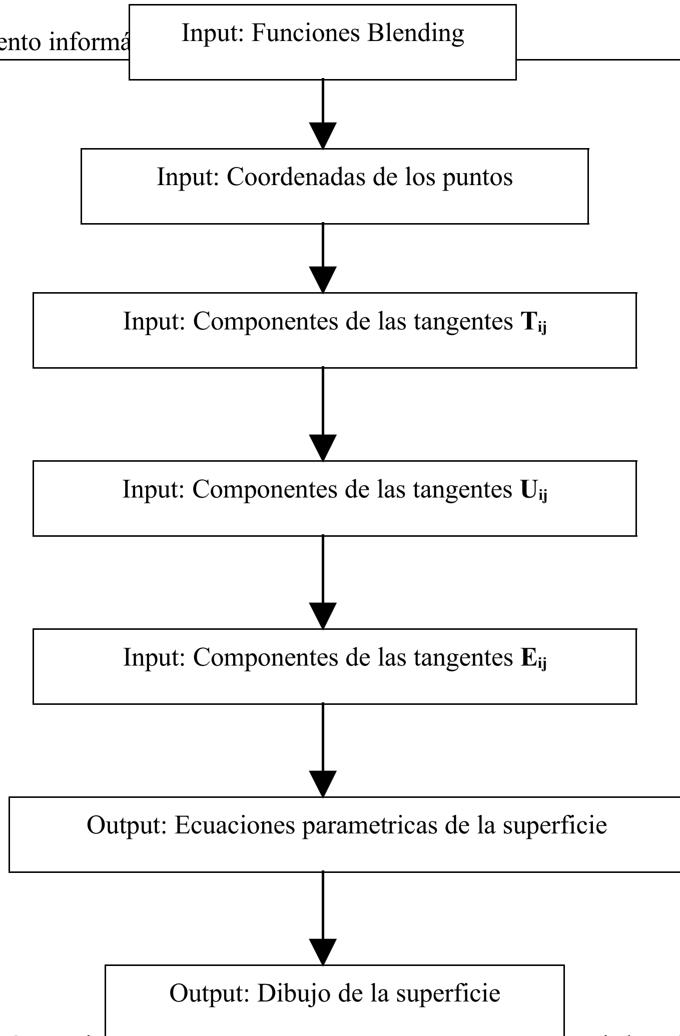


Figura 4.2.1.-1. Organigrama de diseño de superficies polinomiales definidas por puntos y tangentes en ellos

El programa sería:

Funciones previas

$$a = 2t^3-3t^2+1$$
$$b = -2t^3+3t^2$$
$$c = t^3-2t^2+t$$
$$d = t^3-t^2$$

$$e = 2u^3-3u^2+1$$
$$f = -2u^3+3u^2$$
$$g = u^3-2u^2+u$$
$$h = u^3-u^2$$

Coordenadas de las esquinas

coordenadas de P00
x00=
y00=
z00=

coordenadas de P10
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P01
x01=
y01=
z01=

coordenadas de P11
x11=
y11=
z11=

Componentes de las Tij

componentes de T00
xt00=
yt00=
zt00=

componentes de T10
xt10=
yt10=
zt10=

componentes de T01
xt01=
yt01=
zt01=

componentes de T11
xt11=
yt11=
zt11=

Componentes de las Uij

componentes de U00
xu00=
xu00=
zu00=

componentes de U01
xu01=
yU01=
zu01=

componentes de U10
xu10=
yu10=
zu10=

componentes de U11
xu11=
yu11=
zu11=

Componentes de los Eij

componentes de E00
xe00=
ye00=
ze00=

componentes de E10
xe10=
ye10=
ze10=

componentes de E01
xe01=
ye01=
ze01=

componentes de E11
xe11=
ye11=
ze11=

Ecuaciones parametricas de la superficie

x=a e x00+bex10+ce xt00+dext10 +
a f x01 +bf x11+c f xt0l +df xt11 +
a g xu00+b g xu00+c g xe00+d g xe10 +
a h xu01+b h xu11+c h xe01+d h xe11

y=a e y00+bey10+ce yt00+deyt10 +
a f y01 +bf y11+c f yt0l +df yt11 +
a g yu00+b g yu00+c g ye00+d g ye10 +
a h yu01+b h yu11+c h ye01+d h ye11

z=a e z00+bez10+ce zt00+dezt10 +
a f z01 +bf z11+c f zt0l +df zt11 +
a g zu00+b g zu00+c g ze00+d g ze10 +
a h zu01+b h zu11+c h ze01+d h ze11

Dibujo de la superficie

ParametricPlot3D[{(x, y, z},{t, 0, 1}, {u, 0, 1}]

4.2.3.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 3x3 PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

El organigrama del proceso sería el de la figura 4.2. 1.-1.

El programa sería:

Funciones previas

$a = 1-23t^2+66t^3-68t^4+24t^5$
$b = 16t^2 - 32t^3 + 16t^4$
$c = 7t^2-34t^3+52t^4-24t^5$
$d = t-6t^2+13t^3-12t^4+4t^5$
$g = -8t^2+32t^3-40t^4+16t^5$
$f = -t^2+5t^3-8t^4+4t^5$

$h = 1-23u^2+66u^3-68u^4+24u^5$
$k = 16u^2 - 32u^3 + 16u^4$
$l = 7u^2-34u^3+52u^4-24u^5$
$m = u-6u^2+13u^3-12u^4+4u^5$
$n = -8u^2+32u^3-40u^4+16u^5$
$p= -u^2+5u^3-8u^4+4u^5$

Coordenadas de los puntos

coordenadas de P00:
x00=
y00=
z00=

coordenadas de P01:
x01=
y01=
z01=

coordenadas de P02:
x02=
y02=
z02=
coordenadas de P10:
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P11:
x11=
y11=
z11=

coordenadas de P12:
x12=
y12=
z12=

coordenadas de P20:
x20=
y20=
z20=

coordenadas de P21:
x21=
y21=
z21=

coordenadas de P22:
x22=
y22=
z22=

Componentes de las tangentes Tij

componentes de T00
xt00=
yt00=
zt00=

componentes de T01
xt01=
yt01=
zt01=

componentes de T02
xt02=
yt02=
zt02=

componentes de T10
xt10=
yt10=
zt10=

componentes de T11
xt11=
yt11=
zt11=

componentes de T12
xt12=
yt12=
zt12=

componentes de T20
xt20=
yt20=
zt20=

componentes de T21
xt21=
yt21=
zt21=

componentes de T22
xt22=

yt22=
zt22=

Componentes de las tangentes Uij

componentes de U00
xu00=
yu00=
zu00=

componentes de U01
xu01=
yu01=
zu01=

componentes de U02
xu02=
yu02=
zu02=

componentes de U10
xu10
yu10=
zu10=

componentes de U11
xu11=
yu11=
zu11=

componentes de U12
xu12=
yu12=
zu12=

componentes de U20
xu20=
yu20=
zu20=

componentes de U21
xu21=
yu21=
zu21=

componentes de U22
xu22=
yu22=
zu22=

Componentes de las Eij

componentes de E00
xe00=
ye00=
ze00=

componentes de E01
xe01=
ye01=
ze01=

componentes de E02
xe02=
ye02=
ze02=

componentes de E10
xe10=
ye10=
ze10=

componentes de E11
xe11=
ye11=
ze11=

componentes de E12
xel2=
yel2=
ze12=

componentes de E20
xe20=
ye20=
ze20=

componentes de E21
xe21=
ye21=

ze21=

componentes de E22
xe22=
ye22=
ze22=

Ecuaciones parametricas de la superficie

```
x= h*(a*x00 + b*xl0 + c*x20 + d*xt00 + g*xt10 + f*xt20) +
   k*(a*x01 + b*x11 + c*x2l + d*xt0l + g*xt1 1 + f*xt2l) +
   l*(a*x02 + b*x12 + c*x22 + d*xt02 + g*xt12 + f*xt22) +
   m*(a*xu00 + b*xul0 + c*xu20) +
   n*(a*xu01+ b*xu11 + c*xu21) +
   p*(a*xu02 + b*xu12 + c*xu22)

x = Simplify[xl

y= h*(a*y00 + b*yl0 + c*y20 + d*yt00 + g*yt10 + f*yt20) +
   k*(a*y01 + b*y11 + c*y2l + d*yt0l + g*yt1 1 + f*yt2l) +
   l*(a*y02 + b*y12 + c*y22 + d*yt02 + g*yt12 + f*yt22) +
   m*(a*yu00 + b*yul0 + c*yu20) +
   n*(a*yu01+ b*yu11 + c*yu21) +
   p*(a*yu02 + b*yu12 + c*yu22)

y = Simplify[yl

z= h*(a*z00 + b*zl0 + c*z20 + d*zt00 + g*zt10 + f*zt20) +
   k*(a*z01 + b*z11 + c*z2l + d*zt0l + g*zt1 1 + f*zt2l) +
   l*(a*z02 + b*z12 + c*z22 + d*zt02 + g*zt12 + f*zt22) +
   m*(a*zu00 + b*zul0 + c*zu20) +
   n*(a*zu01+ b*zu11 + c*zu21) +
   p*(a*zu02 + b*zu12 + c*zu22)

z = Simplify[zl
```

Dibujo de la superficie

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1}]
```

4.2.4.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 4X4 PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

El organigrama del proceso sería el de la figura 4.2. 1.-1

El programa sería:

Funciones blending

$a=891/4t^7-3483/4t^6+2709/2t^5-2115/2t^4+1691/4t^3-291/4t^2+1;$

$b=2187/4t^7-3645/2t^6+8991/4t^5-1215t^4+243t^3;$

$c=-2187/4t^7+8019/4t^6-5589/2t^5+3645/2t^4-2187/4t^3+243/4t^2;$

$d=-891/4t^7+1377/2t^6-3231/4t^5+450t^4-119t^3+12t^2;$

$e = 81/4t^7-81t^6+261/2t^5-108t^4+193/4t^3-11t^2+t;$

$f = 729/4t^7-2673/4t^6+3807/4t^5-2619/4t^4+216t^3-27t^2;$

$g=729/4t^7-1215/2t^6+1539/2t^5-459t^4+513/4t^3-27/2t^2;$

$h=81/4t^7-243/4t^6+279/4t^5-153/4t^4+10t^3-t^2;$

$j=891/4u^7-3483/4u^6+2709/2u^5-2115/2u^4+1691/4u^3-291/4u^2+1;$

$k=2187/4u^7-3645/2u^6+8991/4u^5-1215u^4+243u^3;$

$l=-2187/4u^7+8019/4u^6-5589/2u^5+3645/2u^4-2187/4u^3+243/4u^2;$

$m=-891/4u^7+1377/2u^6-3231/4u^5+450u^4-119u^3+12u^2;$

$n = 81/4u^7-81u^6+261/2u^5-108u^4+193/4u^3-11u^2+u;$

$p = 729/4u^7-2673/4u^6+3807/4u^5-2619/4u^4+216u^3-27u^2;$

$q=729/4u^7-1215/2u^6+1539/2u^5-459u^4+513/4u^3-27/2u^2;$

$r=81/4u^7-243/4u^6+279/4u^5-153/4u^4+10u^3-u^2;$

Coordenadas de los puntos

coordenadas de P00:
x00=
y00=

z00=

coordenadas de P01:
x01=
y01=
z01=

coordenadas de P02:
x02=
y02=
z02=

coordenadas de P03:
x03=
y03=
z03=

coordenadas de P10:
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P11:
x11=
y11=
z11=

coordenadas de P12:
x12=
y12=
z12=

coordenadas de P13:
x13=
y13=
z13=

coordenadas de P20:
x20=
y20=
z20=

coordenadas de P21:
x2l=
y2l=

z2l=

coordenadas de P22:
x22=
y22=
z22=

coordenadas de P23:
x23=
y23=
z23=

coordenadas de P30:
x30=
y30=
z30=

coordenadas de P31:
x31=
y31=
z31=

coordenadas de P32:
x32=
y32=
z32=

coordenadas de P33:
x33=
y33=
z33=

Componentes de las tangentes Tij

componentes de T00
xt00=
yt00=
zt00=

componentes de T01
xt01=
yt01=
zt01=

componentes de T02

xt02=
yt02=
zt02=

componentes de T03
xt03=
yt03=
zt03=

componentes de T10
xt10=
yt10=
zt10=

componentes de T11
xt11=
yt11=
zt11=

componentes de T12
xt12=
yt12=
zt12=

componentes de T13
xt13=
yt13=
zt13=

componentes de T20
xt20=
yt20=
zt20=

componentes de T21
xt21=
yt21=
zt21=

componentes de T22
xt22=
yt22=
zt22=

componentes de T23

xt23=
yt23=
zt23=

componentes de T30
xt30=
yt30=
zt30=

componentes de T31
xt31=
yt31=
zt31=

componentes de T32
xt32=
yt32=
zt32=

componentes de T33
xt33=
yt33=
zt33=

Componentes de Uij

componentes de U00
xu00=
yu00=
zu00=

componentes de U01
xu01=
yu01=
zu01=

componentes de U02
xu02=
yu02=
zu02=

componentes de U03
xu03=
yu03=

zu03=

componentes de U10
xu10=
yu10=
zu10=

componentes de U11
xu11=
yu11=
zu11=

componentes de U12
xu12=
yu12=
zu12=

componentes de U13
xu13=
yu13=
zu13=

componentes de U20
xu20=
yu20=
zu20=

componentes de U21
xu21=
yu21=
zu21=

componentes de U22
xu22=
yu22=
zu22=

componentes de U23
xu23=
yu23=
zu23=

componentes de U30
xu30=
yu30=

zu30=

componentes de U31
xu3l=
yu3l=
zu3l=

componentes de U32
xu32=
yu32=
zu32=

componentes de U33
xu33=
yu33=
zu33=

Componentes de las Eij

Componentes de E00
xe00=
ye00=
ze00=

componentes de E01
xe01=
ye01=
ze01=

componentes de E02
xe02=
ye02=
ze02=

componentes de E03
xe03=
ye03=
ze03=

componentes de E10
xe10=
ye10=
ze10=

componentes de E11

xe11=
ye11=
ze11=

componentes de E12
xe12=
ye12=
ze12=

componentes de E13
xe13=
ye13=
ze13=

componentes de E20
xe20=
ye20=
ze20=

componentes de E21
xe20=
ye20=
ze20=

componentes de E22
xe22=
ye22=
ze22=

componentes de E23
xe23=
ye23=
ze23=

componentes de E30
xe30=
ye30=
ze30=

componentes de E31
xe31=
ye31=
ze31=

componentes de E32

xe32=
ye32=
ze32=

componentes de E33
xe33=
ye33=
ze33=

Ecuaciones parametricas de la superficie

```
x = a*j*x00+b*j*x10+c*j*x20+d*j*x30+e*j*xt00+f*j*xt10+g*j*xt20+h*j*xt30+
    a*k*x0l+b*k*x11+c*k*x21+d*k*x31+e*k*xt01+f*k*xt11+g*k*xt21+h*k*xt31+
    a*l*x02+b*l*xl2+c*l*x22+d*l*x32+e*l*xt02+f*l*xtl2+g*l*xt22+h*l*xt32+
     a*m*x03+b*m*x13+c*m*x23+d*m*x33+e*m*xt03+f*m*xt13+g*m*xt23+h*m*xt33
+
     a*n*xu00+b*n*xu10+c*n*xu20+d*n*xu30+e*n*xe00+f*n*xe10+g*n*xe20+h*n*xe3
0+
                              a*p*xu01+b*p*xu11+c*p*xu21+d*p*xu31+e*p*xe01+f*p*xel
l+g*p*xe21+h*p*xe31+
     a*q*xu02+b*q*xu12+c*q*xu22+d*q*xu32+e*q*xe02+f*q*xe12+g*q*xe22+h*q*xe3
2+
    a*r*xu03+b*r*xu13+c*r*xu23+d*r*xu33+e*r*xe03+f*r*xe13+g*r*xe23+h*r*xe33;

x = Simplify[x]


y = a*j*y00+b*j*y10+c*j*y20+d*j*y30+e*j*yt00+f*j*yt10+g*j*yt20+h*j*yt30+
    a*k*y0l+b*k*y11+c*k*y21+d*k*y31+e*k*yt01+f*k*yt11+g*k*yt21+h*k*yt31+
    a*l*y02+b*l*yl2+c*l*y22+d*l*y32+e*l*yt02+f*l*ytl2+g*l*yt22+h*l*yt32+
    a*m*y03+b*m*y13+c*m*y23+d*m*y33+e*m*yt03+f*m*yt13+g*m*yt23+h*m*yt33+
     a*n*yu00+b*n*yu10+c*n*yu20+d*n*yu30+e*n*ye00+f*n*ye10+g*n*ye20+h*n*ye30
+
                              a*p*yu01+b*p*yu11+c*p*yu21+d*p*yu31+e*p*ye01+f*p*yel
l+g*p*ye21+h*p*ye31+
     a*q*yu02+b*q*yu12+c*q*yu22+d*q*yu32+e*q*ye02+f*q*ye12+g*q*ye22+h*q*ye32
+
    a*r*yu03+b*r*yu13+c*r*yu23+d*r*yu33+e*r*ye03+f*r*ye13+g*r*ye23+h*r*ye33;

y = Simplify[y]

z = a*j*z00+b*j*z10+c*j*z20+d*j*z30+e*j*zt00+f*j*zt10+g*j*zt20+h*j*zt30+
    a*k*z0l+b*k*z11+c*k*z21+d*k*z31+e*k*zt01+f*k*zt11+g*k*zt21+h*k*zt31+
    a*l*z02+b*l*zl2+c*l*z22+d*l*z32+e*l*zt02+f*l*ztl2+g*l*zt22+h*l*zt32+
    a*m*z03+b*m*z13+c*m*z23+d*m*z33+e*m*zt03+f*m*zt13+g*m*zt23+h*m*zt33+
```

```
a*n*zu00+b*n*zu10+c*n*zu20+d*n*zu30+e*n*ze00+f*n*ze10+g*n*ze20+h*n*ze30
+
a*p*zu01+b*p*zu11+c*p*zu21+d*p*zu31+e*p*ze01+f*p*zel l+g*p*ze21+h*p*ze31+
a*q*zu02+b*q*zu12+c*q*zu22+d*q*zu32+e*q*ze02+f*q*ze12+g*q*ze22+h*q*ze32
+
a*r*zu03+b*r*zu13+c*r*zu23+d*r*zu33+e*r*ze03+f*r*ze13+g*r*ze23+h*r*ze33;

z = Simplify[z]
```

Dibujo de la superficie

```
ParametriePlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1}]
```

4.2.5.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 5x5 PUNTOS DADOS CON TANGENTES EN ELLOS DADAS

El organigrama del proceso sería el de la figura 4.2. 1.-1

El programa sería:

Funciones blending

$a=51200/27t^9-252928/27t^8+528640/27t^7-607360/27t^6+416200/27t^5-171724/27t^4+$
$40310/27t^3-485/3t^2+1;$

$b=327680/27t^9-1507328/27t^8+2871296/27t^7-2914304/27t^6+1682432/27t^5-541184/27t^4+$
$28672/9t^3-512/3t^2;$

$c= 4096t^8-16384t^7+26112t^6-20992t^5+8848t^4-1824t^3+144t^2 ;$

$d=-327680/27t^9+1441792/27t^8-2609152/27t^7+2504704/27t^6-1371136/27t^5+426496/27t^4-$
$69632/27t^3+512/3t^2;$

$e=-51200/27t^9+207872/27t^8-348416/27t^7+311936/27t^6-160712/27t^5+47516/27t^4-$
$2482/9t^3+53/3t^2;$

$f= t - (50t^2)/3 + (1045t^3)/9 - (3980t^4)/9 +(9092t^5)/9 - (12800t^6)/9 + (10880t^7)/9 -$
$(5120t^5)/9 + (1024t^9)/9;$

$g= -64t^2 + (2432t^3)/3 - (37696t^4)/9 +(103936t^5)/9 - (166144t^6)/9 + (154624t^7)/9 -$
$(77824t^8)/9 + (16384t^9)/9;$

$h= -72t^2 + 1056t^3 - 6248t^4 + 19344t^5 -34048t^6 + 34304t^7 - 18432t^8 + 4096t^9;$

$j = (-64t^2)/3 + (2944t^3)/9 - (18368t^4)/9 +(60416t^5)/9 - (113408t^6)/9 + (121856t^7)/9 -$
$(69632t^8)/9 + (16384t^9)/9 ;$

$k= -t^2 + (47t^3)/3 - (904t^4)/9 + (3076t^5)/9 -(6016t^6)/9 + (6784t^7)/9 - (4096t^8)/9 + (1024t^9)/9 ;$

$l=51200/27u^9-252928/27u^8+528640/27u^7-607360/27u^6+416200/27u^5-171724/27u^4+$
$40310/27u^3-485/3u^2+1;$

$m=327680/27u^9-1507328/27u^8+2871296/27u^7-2914304/27u^6+1682432/27u^5-541184/27u^4+$
$28672/9u^3-512/3u^2;$

$n= 4096u^8-16384u^7+26112u^6-20992u^5+8848u^4-1824u^3+144u^2 ;$

$ñ=-327680/27u^9+1441792/27u^8-2609152/27u^7+2504704/27u^6-1371136/27u^5+426496/27u^4-69632/27u^3+512/3u^2;$

$o=-51200/27u^9+207872/27u^8-348416/27u^7+311936/27u^6-160712/27u^5+47516/27u^4-2482/9u^3+53/3u^2;$

$p= u - (50u^2)/3 + (1045u^3)/9 - (3980u^4)/9 +(9092u^5)/9 - (12800u^6)/9 + (10880u^7)/9 - (5120u^5)/9 + (1024u^9)/9;$

$q= -64u^2 + (2432u^3)/3 - (37696u^4)/9 +(103936u^5)/9 - (166144u^6)/9 + (154624u^7)/9 - (77824u^8)/9 + (16384u^9)/9;$

$r= -72u^2 + 1056u^3 - 6248u^4 + 19344u^5 -34048u^6 + 34304u^7 - 18432u^8 + 4096u^9;$

$s = (-64u^2)/3 + (2944u^3)/9 - (18368u^4)/9 +(60416u^5)/9 - (113408u^6)/9 + (121856u^7)/9 - (69632u^8)/9 + (16384u^9)/9 ;$

$w= -u^2 + (47u^3)/3 - (904u^4)/9 + (3076u^5)/9 -(6016u^6)/9 + (6784u^7)/9 - (4096u^8)/9 + (1024u^9)/9 ;$

Coordenadas de los puntos

coordenadas de P00:
x00=
y00=
z00=

coordenadas de P01:
x01=
y01=
z01=

coordenadas de P02:
x02=
y02=
z02=

coordenadas de P03:
x03=
y03=
z03=

coordenadas de P04:
x04=

y04=
z04=

coordenadas de P10:
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P11:
x11=
y11=
z11=

coordenadas de P12:
x12=
y12=
z12=

coordenadas de P13:
x13=
y13=
z13=

coordenadas de P14:
x14=
y14=
z14=

coordenadas de P20:
x20=
y20=
z20=

coordenadas de P21:
x21=
y21=
z21=
coordenadas de P22:
x22=
y22=
z22=

coordenadas de P23:
x23=
y23=

z23=

coordenadas de P24:
x24=
y24=
z24=

coordenadas de P30:
x30=
y30=
z30=

coordenadas de P31:
x31=
y31=
z31=

coordenadas de P32:
x32=
y32=
z32=

coordenadas de P33:
x33=
y33=
z33=

coordenadas de P34:
x34=
y34=
z34=

coordenadas de P40:
x40=
y40=
z40=

coordenadas de P41:
x41=
y41=
z41=

coordenadas de P42:
x42=
y42=

z42=

coordenadas de P43:
x43=
y43=
z43=

coordenadas de P44:
x44=
y44=
z44=

Componentes de las tangentes Tij

componentes de T00
xt00=
yt00=
z00=

componentes de T01
xt01=
yt01=
zt01=

componentes de T02
xt02=
yt02=
zt02=

componentes de T03
xt03=
yt03=
zt03=

componentes de T04
xt04=
yt04=
zt04=

componentes de T10
xt10=
yt10=
zt10=

componentes de T11

xt11=
yt11=
zt11=

componentes de T12
xt12=
yt12=
zt12=

componentes de T13
xt13=
yt13=
zt13=

componentes de T14
xt14=
yt14=
zt14=

componentes de T20
xt20=
yt20=
zt20=

componentes de T21
xt2l=
yt2l=
zt2l=

componentes de T22
xt22=
yt22=
zt22=

componentes de T23
xt23=
yt23=
zt23=

componentes de T24
xt24=
yt24=
zt24=

componentes de T30

xt30=
yt30=
zt30=

componentes de T31
xt31=
yt31=
zt31=

componentes de T32
xt32=
yt32=
zt32=

componentes de T33
xt33=
yt33=
zt33=

componentes de T34
xt34=
yt34=
zt34=

componentes de T40
xt40=
yt40=
zt40=

componentes de T41
xt4l=
yt4l=
zt4l=

componentes de T42
xt42=
yt42=
zt42=

componentes de T43
xt43=
yt43=
zt43=

componentes de T44

xt44=
yt44=
zt44=

Componentes de las tangentes Uij

componentes de U00
xu00=
yu00=
zu00=

componentes de U01
xu01=
yu01=
zu01=

componentes de U02
xu02=
yu02=
zu02=

componentes de U03
xu03=
yu03=
zu03=

componentes de U04
xu04=
yu04=
zu04=

componentes de U10
xu10=
yu10=
zu10=

componentes de U11
xu11=
yu11=
zu11=

componentes de U12
xu12=
yu12=
zu12=

componentes de U13
xu13=
yu13=
zu13=

componentes de U I4
xu14=
yu14=
zu14=

componentes de U20
xu20=
yu20=
zu20=

componentes de U21
xu21=
yu21=
zu21=

componentes de U22
xu22=
yu22=
zu22=
componentes de U23
xu23=
yu23=
zu23=

componentes de U24
xu24=
yu24=
zu24=

componentes de U30
xu30=
yu30=
zu30=

componentes de U31
xu3l=
yu3l=
zu3l=

componentes de U32
xu32=
yu32=
zu32=

componentes de U33
xu33=
yu33=
zu33=

componentes de U34
xu34=
yu34=
zu34=

componentes de U40
xu40=
yu40=
zu40=

componentes de U41
xu41=
yu41=
zu41=

componentes de U42
xu42=
yu42=
zu42=

componentes de U43
xu43=
yu43=
zu43=

componentes de U44
xu44=
yu44=
zu44=

Componentes de Eij

componentes de E00
xe00=

ye00=
ze00=

componentes de E01
xe01=
ye01=
ze01=

componentes de E02
xe02=
ye02=
ze02=

componentes de E03
xe03=
ye03=
ze03=

componentes de E04
xe04=
ye04=
ze04=

componentes de E10
xe10=
ye10=
ze10=

componentes de E11
xe11=
ye11=
ze11=

componentes de E12
xe12=
ye12=
ze12=

componentes de E13
xe13=
ye13=
ze13=

componentes de E14
xe14=

ye14=
ze14=

componentes de E20
xe20=
ye20=
ze20=

componentes de E21
xe21=
ye21=
ze21=

componentes de E22
xe22=
ye22=
ze22=

componentes de E23
xe23=
ye23=
ze23=

componentes de E24
xe24=
ye24=
ze24=

componentes de E30
xe30=
ye30=
ze30=

componentes de E31
xe31=
ye31=
ze31=

componentes de E32
xe32=
ye32=
ze32=

componentes de E33
xe33=

ye33=
ze33=

componentes de E34
xe34=
ye34=
ze34=

componentes de E40
xe40=
ye40=
ze40=

componentes de E41
xe41=
ye41=
ze41=

componentes de E42
xe42=
ye42=
ze42=

componentes de E43
xe43=
ye43=
ze43=

componentes de E44
xe44=
ye44=
ze44=

Ecuaciones paramétricas de la superficie

x=al x00+bl x10+cl x20+dl x30+el x40+fl xt00+gl xt10+hl xt20+jl xt30+kl xt40+
am x0l+bm x11+cm x21+dm x3l+em x4l+fm xt01+gm xt11+hm xt21+jm xt31+km xt41+
an x02+bn x12+cn x22+dn x32+en x42+fn xt02+gn xt12+hn xt22+jn xt32+kn xt42+
añ x03+bñ x13+cñ x23+dñ x33+eñ x43+fñ xt03+gñ xt13+bñ xt23+jñ xt33+kñ xt43+
ao x04+bo x14+co x24+do x34+eo x44+fo xt04+go xt14+ho xt24+jo xt34+ko xt44+
ap xu00+bp xu10+cp xu20+dp xu30+ep xu40+fp xe00+gp xe10+hp xe20+jpxe30+kp xe40+
aq xu01+bq xu11+cq xu21+dq xu31+eq xu41+fq xe01+gq xe11+hq xe21+jq xe31+kq

xe41+
ar xu02+br xu12+cr xu22+dr xu32+er xu42+fr xe02+gr xe12+hr xe22+jr xe32+kr xe42+
as xu03+bs xu13+cs xu23+ds xu33+es xu43+fs xe03+gs xe13+hs xe23+js xe33+ks
xe43+
aw xu04+bw xu14+cw xu24+dw xu34+ew xu44+fw xe04+gw xe14+hw xe24+jwxe34+
kwxe44;

x= Simplify[xl

y=al y00+bl y10+cl y20+dl y30+el y40+fl yt00+gl yt10+hl yt20+jl yt30+kl yt40+
am y0l+bm y11+cm y21+dm y3l+em y4l+fm yt01+gm yt11+hm yt21+jm yt31+km yt41+
an y02+bn y12+cn y22+dn y32+en y42+fn yt02+gn yt12+hn yt22+jn yt32+kn yt42+
añ y03+bñ y13+cñ y23+dñ y33+eñ y43+fñ yt03+gñ yt13+bñ yt23+jñ yt33+kñ yt43+
ao y04+bo y14+co y24+do y34+eo y44+fo yt04+go yt14+ho yt24+jo yt34+ko yt44+
ap yu00+bp yu10+cp yu20+dp yu30+ep yu40+fp ye00+gp ye10+hp ye20+jpye30+kp
ye40+
aq yu01+bq yu11+cq yu21+dq yu31+eq yu41+fq ye01+gq ye11+hq ye21+jq ye31+kq
ye41+
ar yu02+br yu12+cr yu22+dr yu32+er yu42+fr ye02+gr ye12+hr ye22+jr ye32+kr ye42+
as yu03+bs yu13+cs yu23+ds yu33+es yu43+fs ye03+gs ye13+hs ye23+js ye33+ks ye43+
aw yu04+bw yu14+cw yu24+dw yu34+ew yu44+fw ye04+gw ye14+hw ye24+jwye34+
kwye44;

y= Simplify[yl

z=al z00+bl z10+cl z20+dl z30+el z40+fl zt00+gl zt10+hl zt20+jl zt30+kl zt40+
am z0l+bm z11+cm z21+dm z3l+em z4l+fm zt01+gm zt11+hm zt21+jm zt31+km zt41+
an z02+bn z12+cn z22+dn z32+en z42+fn zt02+gn zt12+hn zt22+jn zt32+kn zt42+
añ z03+bñ z13+cñ z23+dñ z33+eñ z43+fñ zt03+gñ zt13+bñ zt23+jñ zt33+kñ zt43+
ao z04+bo z14+co z24+do z34+eo z44+fo zt04+go zt14+ho zt24+jo zt34+ko zt44+
ap zu00+bp zu10+cp zu20+dp zu30+ep zu40+fp ze00+gp ze10+hp ze20+jpze30+kp
ze40+
aq zu01+bq zu11+cq zu21+dq zu31+eq zu41+fq ze01+gq ze11+hq ze21+jq ze31+kq
ze41+
ar zu02+br zu12+cr zu22+dr zu32+er zu42+fr ze02+gr ze12+hr ze22+jr ze32+kr ze42+
as zu03+bs zu13+cs zu23+ds zu33+es zu43+fs ze03+gs ze13+hs ze23+js ze33+ks ze43+
aw zu04+bw zu14+cw zu24+dw zu34+ew zu44+fw ze04+gw ze14+hw ze24+jwze34+
kwze44;

z= Simplify[zl

Dibujo de la superficie

ParametricPlot3D[{x,y,z},{t.0, l},{u,0,1}]

4.3.- SUPERFICIES POLINOMIALES MIXTAS DEFINIDAS POR PUNTOS

ORGANIGRAMA DE DISEÑO DE SUPERFICIES POLINOMIALES MIXTAS OUE PASAN POR UNA RED DE 6X6 PUNTOS

Input: Funciones previas

Input: Coordenadas de los puntos
Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c1

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uii de la frontera
Output: Componentes de las Eii de la frontera

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c2

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output : Componentes de las Uii de la frontera
Gutput: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c3

Output: Cotnponentes de las Tii de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eii de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c4

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

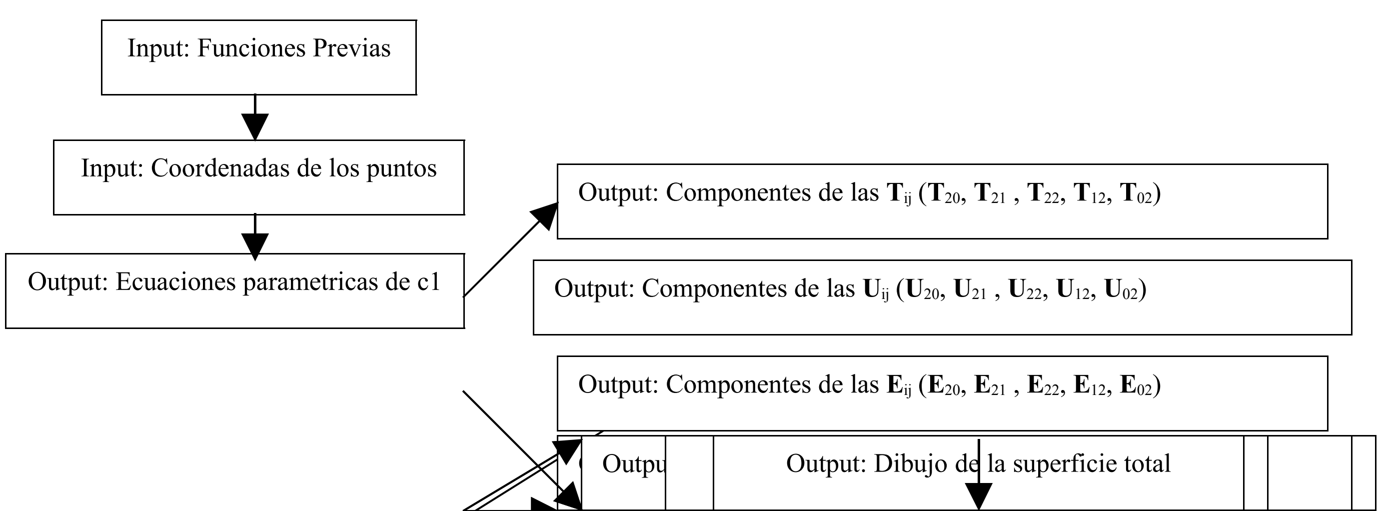
Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c5
Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c6
Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c7
Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c8
Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c9

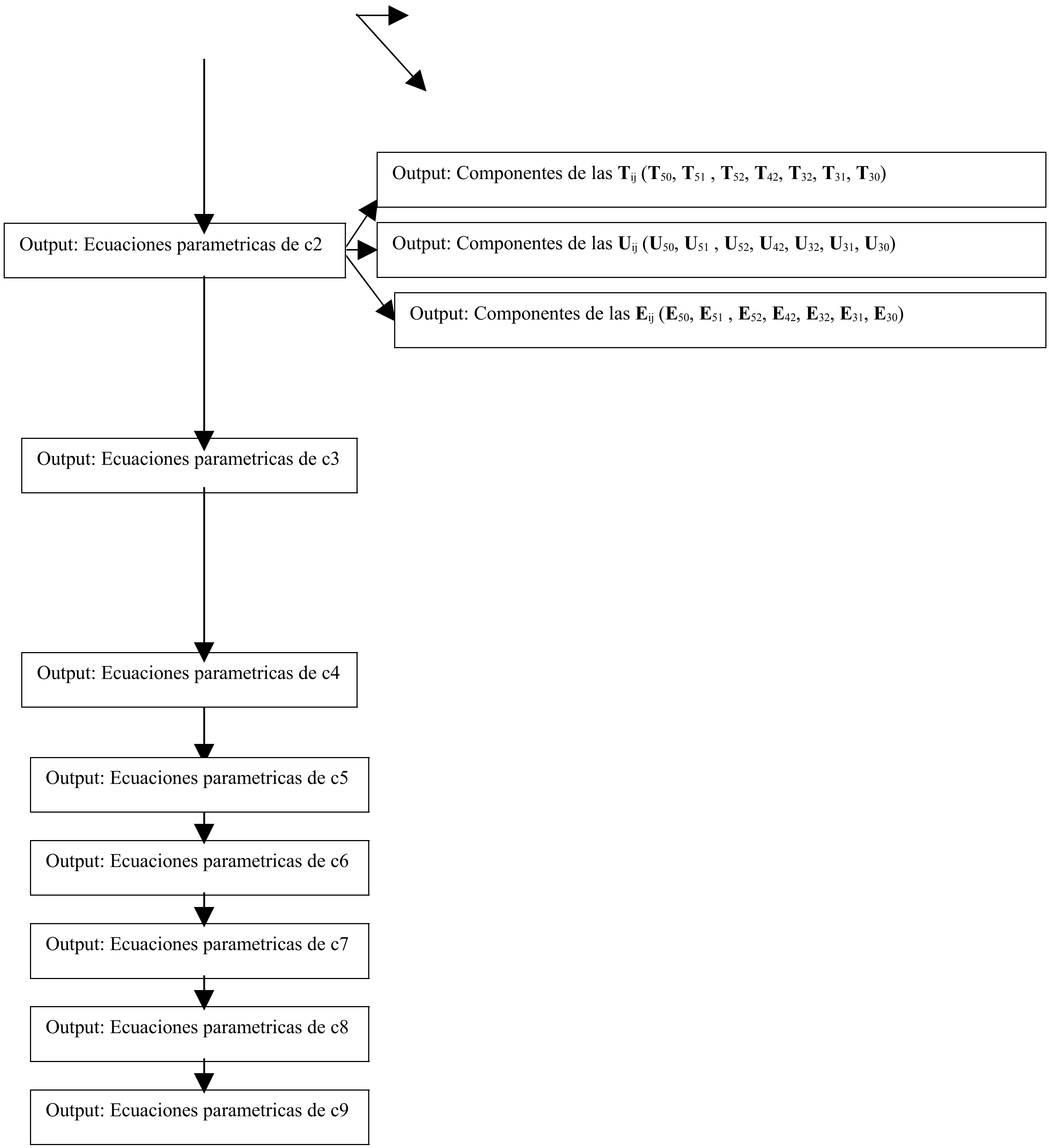
Output : Dibujo de la superficie cl
Output : Dibujo de la superficie c2

Output : Dibujo de la superficie c3
Output : Dibujo de la superficie c4
Output : Dibujo de la superficie c5
Output : Dibujo de la superficie e6

Output : Dibujo de la superficie c7
Output : Dibujo de la superficie cS
Output : Dibujo de la superficie c9
Output : Dibujo de la superficie total

Figura 4.3. 1.-I





4.3.-SUPERFICIES POLINOMIALES MIXTAS DEFINIDAS POR PUNTOS

Organigrama de superficies polinomiales mixtas que pasan por una red de 6x6 puntos

4.3.1.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 6X6 PUNTOS DADOS USANDO POLINOMIOS DE GRADO TRES O MENOR

CREACION DE LOS PARCHES COMPONENTES

Off[General::spell
Off[General::spell 1

FUNCIONES PREVIAS

$$a = 25/2t^2 - 15/2t + 1$$
$$b = -25t^2 + 10t$$
$$c = 25/2t^2 - 5/2t$$
$$d = 250t^3 - 375t^2 + 180t - 27$$
$$e = -250t^3 + 375t^2 - 180t + 28$$
$$f = 25t^3 - 40t^2 + 21t - 18/5$$
$$g = 25t^3 - 35t^2 + 16t - 12/5$$
$$h = 25/2t^3 - 45/2t + 10$$
$$j = -25t^2 + 40t - 15$$
$$k = 25/2t^2 - 35/2t + 6$$
$$a' = 25/2u^2 - 15/2u + 1$$
$$b' = -25u^2 + 10u$$
$$c' = 25/2u^2 - 5/2u$$
$$d' = 250u^3 - 375u^2 + 180u - 27$$
$$e' = -250u^3 + 375u^2 - 180u + 28$$
$$f' = 25u^3 - 40u^2 + 21u - 18/5$$
$$g' = 25u^3 - 35u^2 + 16u - 12/5$$
$$h' = 25/2u^3 - 45/2u + 10$$
$$j' = -25u^2 + 40u - 15$$
$$k' = 25/2u^2 - 35/2u + 6$$

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=
y00=
z00=

coordenadas de P01
x01=

y01=
z01=

coordenadas de P02
x02=
y02=
z02=

coordenadas de P03
x03=
y03=
z03=

coordenadas de P04
x04=
y04=
z04=

coordenadas de P05
x05=
y05=
z05=

coordenadas de P10
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P11
x11=
y11=
z11=

coordenadas de P12
x12=
y12=
z12=

coordenadas de P13
x13=
y13=
z13=

coordenadas de P14
x14=

y14=
z14=

coordenadas de P15
x15=
y15=
z15=

coordenadas de P20
x20=
y20=
z20=

coordenadas de P21
x2l=
y2l=
z2l=

coordenadas de P22
x22=
y22=
z22=

coordenadas de P23
x23=
y23=
z23=

coordenadas de P24
x24=
y24=
z24=

coordenadas de P25
x25=
y25=
z25=

coordenadas de P30
x30=
y30=
z30=

coordenadas de P31
x31=

y31=
z31=

coordenadas de P32
x32=
y32=
z32=

coordenadas de P33
x33=
y33=
z33=

coordenadas de P34
x34=
y34=
z34=

coordenadas de P35
x35=
y35=
z35=

coordenadas de P40
x40=
y40=
z40=

coordenadas de P41
x41 =
y41 =
z41=

coordenadas de P42
x42=
y42=
z42=

coordenadas de P43
x43=
y43=
z43=

coordenadas de P44
x44=

y44=
z44=

coordenadas de P45
x45=
y45=
z45=

coordenadas de P50
x50=
y50=
z50=

coordenadas de P51
x51=
y51=
z51=

coordenadas de P52
x52=
y52=
z52=

coordenadas de P53
x53=
y53=
z53=

coordenadas de P54
x54=
y54=
z54=

coordenadas de P55
x55=
y55=
z55=

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x1= a' a x00+b' a x01+c' a x02+
a' b x10+b' b x11+c' b x12+
a' c x20+b' c x21+c' c x22

```
x1=Simplify[x1]

y1= a' a y00+b' a y01+c' a y02+
      a' b y10+b' b y11+c' b y12+
      a' c y20+b' c y21+c' c y22

y1=Simplify[y1]


z1= a' a z00+b' a z01+c' a z02+
      a' b z10+b' b z11+c' b z12+
      a' c z20+b' c z21+c' c z22

z1=Simplify[z1]
```

COMPONENTES DE LAS Tij DE LA FRONTERA

```
componentes de T20
xt20=Limit[D[Limit[x1,u->0],t],t->2/5]
yt20=Limit[D[Limit[y1,u->0],t],t->2/5]
zt20=Limit[D[Limit[z1,u->0],t],t->2/5]

componentes de T21
xt21=Limit[D[Limit[x1,u->1/5],t],t->2/5]
yt21=Limit[D[Limit[y1,u->1/5],t],t->2/5]
zt21=Limit[D[Limit[z1,u->1/5],t],t->2/5]

componentes de T22
xt22=Limit[D[Limit[x1,u->2/5],t],t->2/5]
yt22=Limit[D[Limit[y1,u->2/5],t],t->2/5]
zt22=Limit[D[Limit[z1,u->2/5],t],t->2/5]

componentes de T12
xt12=Limit[D[Limit[x1,u->2/5],t],t->1/5]
yt12=Limit[D[Limit[y1,u->2/5],t],t->1/5]
zt12=Limit[D[Limit[z1,u->2/5],t],t->1/5]

componentes de T02
xt02=Limit[D[Limit[x1,u->2/5],t],t->0]
yt02=Limit[D[Limit[y1,u->2/5],t],t->0]
zt02=Limit[D[Limit[z1,u->2/5],t],t->0]
```

COMPONENTES DE LAS Uij DE LA FRONTERA

componentes de U20
xu20= Limit[D[Limit[x1,t->2/5],u],u->0]
yu20= Limit[D[Limit[y1,t->2/5],u],u->0]
zu20= Limit[D[Limit[y1,t->2/5],u],u->0]

componentes de U21
xu21= Limit[D[Limit[x1,t->2/5],u],u->1/5]
yu21= Limit[D[Limit[y1,t->2/5],u],u->1/5]
zu21= Limit[D[Limit[y1,t->2/5],u],u->1/5]

componentes de U22
xu22= Limit[D[Limit[x1,t->2/5],u],u->2/5]
yu22= Limit[D[Limit[y1,t->2/5],u],u->2/5]
zu22= Limit[D[Limit[y1,t->2/5],u],u->2/5]

componentes de U12
xu12= Limit[D[Limit[x1,t->1/5],u],u->2/5]
yu12= Limit[D[Limit[y1,t->1/5],u],u->2/5]
zu12= Limit[D[Limit[y1,t->1/5],u],u->2/5]

componentes de U02
xu02= Limit[D[Limit[x1,t->0],u],u->2/5]
yu02= Limit[D[Limit[y1,t->0],u],u->2/5]
zu02= Limit[D[Limit[y1,t->0],u],u->2/5]

COMPONENTES DE LAS Eij DE LA FRONTERA

componentes de E20
xe20=Limit[Limit[D[D[x1,t],u],t->2/5],u->0]
ye20= Limit[Limit[D[D[y1,t],u],t->2/5],u->0]
ze20= Limit[Limit[D[D[z1,t],u],t->2/5],u->0]

componentes de E21
xe21=Limit[Limit[D[D[x1,t],u],t->2/5],u->1/5]
ye21= Limit[Limit[D[D[y1,t],u],t->2/5],u->1/5]
ze21= Limit[Limit[D[D[z1,t],u],t->2/5],u->1/5]

componentes de E22
xe22=Limit[Limit[D[D[x1,t],u],t->2/5],u->2/5]
ye22= Limit[Limit[D[D[y1,t],u],t->2/5],u->2/5]
ze22= Limit[Limit[D[D[z1,t],u],t->2/5],u->2/5]

componentes de E12
xe12=Limit[Limit[D[D[x1,t],u],t->1/5],u->1/5]

```
ye12= Limit[Limit[D[D[y1,t],u],t->1/5],u->1/5]
ze12= Limit[Limit[D[D[z1,t],u],t->1/5],u->1/5]
```

componentes de E02

```
xe02=Limit[Limit[D[D[x1,t],u],t->0],u->2/5]
ye02= Limit[Limit[D[D[y1,t],u],t->0],u->2/5]
ze02= Limit[Limit[D[D[z1,t],u],t->0],u->2/5]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x2=   a' h x30+b' h x31+c' h x32+
      a' j x40+b' j x41+c' j x42+
      a' k x50+b' k x5l+c' k x52;

x2=Simplify[x2]

y2=   a' h y30+b' h y31+c' h y32+
      a' j y40+b' j y41+c' j y42+
      a' k y50+b' k y5l+c' k y52;

y2=Simplify[y2]


z2=   a' h z30+b' h z31+c' h z32+
      a' j z40+b' j z41+c' j z42+
      a' k z50+b' k z5l+c' k z52;

z2=Simplify[z2]
```

COMPONENTES DE LAS Tij DE LA FRONTERA

componentes de T50

```
xt50= Limit[D[Limit[x2,u->0],t],t->1]
yt50= Limit[D[Limit[y2,u->0],t],t->1]
zt50= Limit[D[Limit[z2,u->0],t],t->1]
```

componentes de T51

```
xt51= Limit[D[Limit[x2,u->1/5],t],t->1]
yt51= Limit[D[Limit[y2,u->1/5],t],t->1]
zt51= Limit[D[Limit[z2,u->1/5],t],t->1]
```

componentes de T52

```
xt52= Limit[D[Limit[x2,u->2/5],t],t->1]
```

yt52= Limit[D[Limit[y2,u->2/5],t],t->1]
zt52= Limit[D[Limit[z2,u->2/5],t],t->1]

componentes de T42
xt42= Limit[D[Limit[x2,u->2/5],t],t->4/5]
yt42= Limit[D[Limit[y2,u->2/5],t],t->4/5]
zt42= Limit[D[Limit[z2,u->2/5],t],t->4/5]

componentes de T32
xt32= Limit[D[Limit[x2,u->2/5],t],t->3/5]
yt32= Limit[D[Limit[y2,u->2/5],t],t->3/5]
zt32= Limit[D[Limit[z2,u->2/5],t],t->3/5]

componentes de T31
xt31= Limit[D[Limit[x2,u->1/5],t],t->3/5]
yt31= Limit[D[Limit[y2,u->1/5],t],t->3/5]
zt31= Limit[D[Limit[z2,u->1/5],t],t->3/5]

componentes de T30
xt30= Limit[D[Limit[x2,u->0],t],t->3/5]
yt30= Limit[D[Limit[y2,u->0],t],t->3/5]
zt30= Limit[D[Limit[z2,u->0],t],t->3/5]

COMPONENTES DE LAS Uij DE LA FRONTERA

componentes de U50
xu50= Limit[D[Limit[x2,t->1],u],u->0]
yu50= Limit[D[Limit[y2,t->1],u],u->0]
zu50= Limit[D[Limit[z2,t->1],u],u->0]

componentes de U51
xu51 = Limit[D[Limit[x2,t->1],u],u->1/5]
yu51 = Limit[D[Limit[y2,t->1],u],u->1/5]
zu51 = Limit[D[Limit[z2,t->1],u],u->1/5]

componentes de U52
xu52= Limit[D[Limit[x2,t->1],u],u->2/5]
yu52= Limit[D[Limit[x2,t->1],u],u->2/5]
zu52= Limit[D[Limit[x2,t->1],u],u->2/5]

componentes de U42
xu42= Limit[D[Limit[x2,t->4/5],u],u->2/5]
yu42= Limit[D[Limit[y2,t->4/5],u],u->2/5]
zu42= Limit[D[Limit[z2,t->4/5],u],u->2/5]

componentes de U32
xu32= Limit[D[Limit[x2,t->3/5],u],u->2/5]
yu32= Limit[D[Limit[y2,t->3/5],u],u->2/5]
zu32= Limit[D[Limit[z2,t->3/5],u],u->2/5]

componentes de U31
xu31= Limit[D[Limit[x2,t->3/5],u],u->1/5]
yu31= Limit[D[Limit[y2,t->3/5],u],u->1/5]
zu31= Limit[D[Limit[z2,t->3/5],u],u->1/5]

componentes de U30
xu30= Limit[D[Limit[x2,t->3/5],u],u->0]
yu30= Limit[D[Limit[y2,t->3/5],u],u->0]
zu30= Limit[D[Limit[z2,t->3/5],u],u->0]

COMPONENTES DE LAS Eij DE LA FRONTERA

componentes de E50
xe50= Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t->1],u->0]
ye50= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t->1],u->0]
ze50= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t->1],u->0]

componentes de E51
xe51= Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t->1],u->1/5]
ye51= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t->1],u->1/5]
ze51= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t->1],u->1/5]

componenws de E52
xe52= Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t->1],u->2/5]
ye52= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t->1],u->2/5]
ze52= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t->1],u->2/5]

componentes de E42
xe42= Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t->4/5],u->2/5]
ye42= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t->4/5],u->2/5]
ze42= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t->4/5],u->2/5]

componentes de E32
xe32= Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t->3/5],u->2/5]
ye32= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t->3/5],u->2/5]
ze32= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t->3/5],u->2/5]

componentes de E31
xe31= Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t->3/5],u->1/5]

```
ye31= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t->3/5],u->1/5]
ze31= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t->3/5],u->1/5]

componentes de E30
xe30= Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t->3/5],u->0]
ye30= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t->3/5],u->0]
ze30= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t->3/5],u->0]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x3 = h' a x03+j' a x04+k' a x05+
     h' b x13+j' b x14+k' b x15+
     h' c x23+j' c x24+k' c x25

x3 = Simplify[x3]

y3 = h' a y03+j' a y04+k' a y05+
     h' b y13+j' b y14+k' b y15+
     h' c y23+j' c y24+k' c y25

y3 = Simplify[y3]


z3 = h' a z03+j' a z04+k' a z05+
     h' b z13+j' b z14+k' b z15+
     h' c z23+j' c z24+k' c z25

z3 = Simplify[z3]
```

COMPONENTES DE LAS Tij DE LA FRONTERA

```
componentes de T23
xt23= Limit[D[Limit[x3,u->3/5],t],t->2/5]
yt23= Limit[D[Limit[y3,u->3/5],t],t->2/5]
zt23= Limit[D[Limit[z3,u->3/5],t],t->2/5]

componentes de T24
xt24= Limit[D[Limit[x3,u->4/5],t],t->2/5]
yt24= Limit[D[Limit[y3,u->4/5],t],t->2/5]
zt24= Limit[D[Limit[z3,u->4/5],t],t->2/5]

componentes de T25
xt25= Limit[D[Limit[x3,u->1],t],t->2/5]
yt25= Limit[D[Limit[y3,u->1],t],t->2/5]
```

zt25= Limit[D[Limit[z3,u->1],t],t->2/5]

componentes de T03
xt03= Limit[D[Limit[x3,u->3/5],t],t->0]
yt03= Limit[D[Limit[y3,u->3/5],t],t->0]
zt03= Limit[D[Limit[z3,u->3/5],t],t->0]

componentes de T13
xt13= Limit[D[Limit[x3,u->3/5],t],t->1/5]
yt13= Limit[D[Limit[y3,u->3/5],t],t->1/5]
zt13= Limit[D[Limit[z3,u->3/5],t],t->1/5]

COMPONENTES DE LAS Uij DE LA FRONTERA

componentes de U23
xu23= Limit[D[Limit[x3,t->2/5],u],u->3/5]
yu23= Limit[D[Limit[y3,t->2/5],u],u->3/5]
zu23= Limit[D[Limit[z3,t->2/5],u],u->3/5]

componentes de U24
xu24= Limit[D[Limit[x3,t->2/5],u],u->4/5]
yu24= Limit[D[Limit[y3,t->2/5],u],u->4/5]
zu24= Limit[D[Limit[z3,t->2/5],u],u->4/5]

componentes de U25
xu25= Limit[D[Limit[x3,t->2/5],u],u->1]
yu25= Limit[D[Limit[y3,t->2/5],u],u->1]
zu25= Limit[D[Limit[z3,t->2/5],u],u->1]

componentes de U03
xu03= Limit[D[Limit[x3,t->0],u],u->3/5]
yu03= Limit[D[Limit[y3,t->0],u],u->3/5]
zu03= Limit[D[Limit[z3,t->0],u],u->3/5]

componentes de U13
xu13= Limit[D[Limit[x3,t->1/5],u],u->3/5]
yu13= Limit[D[Limit[y3,t->1/5],u],u->3/5]
zu13= Limit[D[Limit[z3,t->1/5],u],u->3/5]

COMPONENTES DE LAS Eij DE LA FRONTERA

componentes de E23
xe23= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t->2/5],u->3/5]

```
ye23= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t->2/5],u->3/5]
ze23= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t->2/5],u->3/5]

componentes de E24
xe24= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t->2/5],u->4/5]
ye24= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t->2/5],u->4/5]
ze24= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t->2/5],u->4/5]

componentes de E25
xe25= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t->2/5],u->1]
ye25= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t->2/5],u->1]
ze25= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t->2/5],u->1]

componentesdeE03
xe03=Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t->0],u->3/5]
ye03= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t->0],u->3/5]
ze03= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t->0],u->3/5]

componentes de E13
xe13= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t->1/5],u->3/5]
ye13= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t->1/5],u->3/5]
ze13= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t->1/5],u->3/5]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x4 = h' h x33+j' h x34+k' h x35+
     h' j x43+j' j x44+k' j x45+
     h' k x53+j' k x54+k' k x55

x4 = Simplify[x4]

y4 = h' h y33+j' h y34+k' h y35+
     h' j y43+j' j y44+k' j y45+
     h' k y53+j' k y54+k' k y55

y4 = Simplify[y4]

z4 = h' h z33+j' h z34+k' h z35+
     h' j z43+j' j z44+k' j z45+
     h' k z53+j' k z54+k' k z55

z4 = Simplify[z4]
```

COMPONENTES DE LAS Tij DE LA FRONTERA

componentes de T53
xt53= Limit[D[Limit[x4,u->3/5],t],t->1]
yt53= Limit[D[Limit[y4,u->3/5],t],t->1]
zt53= Limit[D[Limit[z4,u->3/5],t],t->1]

componentes de T43
xt43= Limit[D[Limit[x4,u->3/5],t],t->4/5]
yt43= Limit[D[Limit[y4,u->3/5],t],t->4/5]
zt43= Limit[D[Limit[z4,u->3/5],t],t->4/5]

componentes de T33
xt33= Limit[D[Limit[x4,u->3/5],t],t->3/5]
yt33= Limit[D[Limit[y4,u->3/5],t],t->3/5]
zt33= Limit[D[Limit[z4,u->3/5],t],t->3/5]

componentes de T34
xt34= Limit[D[Limit[x4,u->4/5],t],t->3/5]
yt34= Limit[D[Limit[y4,u->4/5],t],t->3/5]
zt34= Limit[D[Limit[z4,u->4/5],t],t->3/5]

componentes de T35
xt35= Limit[D[Limit[x4,u->1],t],t->3/5]
yt35= Limit[D[Limit[y4,u->1],t],t->3/5]
zt35= Limit[D[Limit[z4,u->1],t],t->3/5]

COMPONENTES DE LAS Uij DE LA FRONTERA

componentes de U53
xu53= Limit[D[Limit[x4,t->1],u],u->3/5]
yu53= Limit[D[Limit[y4,t->1],u],u->3/5]
zu53= Limit[D[Limit[z4,t->1],u],u->3/5]

componentes de U43
xu43= Limit[D[Limit[x4,t->4/5],u],u->3/5]
yu43= Limit[D[Limit[y4,t->4/5],u],u->3/5]
zu43= Limit[D[Limit[z4,t->4/5],u],u->3/5]

componentes de U33
xu33= Limit[D[Limit[x4,t->3/5],u],u->3/5]
yu33= Limit[D[Limit[y4,t->3/5],u],u->3/5]
zu33= Limit[D[Limit[z4,t->3/5],u],u->3/5]

componentes de U34
xu34= Limit[D[Limit[x4,t->3/5],u],u->4/5]
yu34= Limit[D[Limit[y4,t->3/5],u],u->4/5]
zu34= Limit[D[Limit[z4,t->3/5],u],u->4/5]

componentes de U35
xu35= Limit[D[Limit[x4,t->3/5],u],u->1]
yu35= Limit[D[Limit[y4,t->3/5],u],u->1]
zu35= Limit[D[Limit[z4,t->3/5],u],u->1]

COMPONENTES DE LAS Eij DE LA FRONTERA

componentes de E53
xe53= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t->1],u->3/5]
ye53= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t->1],u->3/5]
ze53= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->1],u->3/5]

componentes de E43
xe43= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t->4/5],u->3/5]
ye43= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t->4/5],u->3/5]
ze43= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->4/5],u->3/5]

componentes de E33
xe33= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t->3/5],u->3/5]
ye33= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t->3/5],u->3/5]
ze33= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->3/5],u->3/5]

componentes de E34
xe34= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t->3/5],u->4/5]
ye34= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t->3/5],u->4/5]
ze34= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->3/5],u->4/5]

componentes de E35
xe35= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t->3/5],u->1]
ye35= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t->3/5],u->1]
ze35= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->3/5],u->1]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x5 = d' a x02+e' a x03+ f'a xu02+g' a xu03+
d' b x12+e' b x13+ f' b xu12+g' b xu13+
d' c x22+e' c x23+ f' c xu22+g' c xu23

```
x5 = Simplify[x5]

y5 = d' a y02+e' a y03+ f'a yu02+g' a yu03+
       d' b y12+e' b y13+ f' b yu12+g' b yu13+
       d' c y22+e' c y23+ f' c yu22+g' c yu23

y5 = Simplify[y5]

z5 = d' a z02+e' a z03+ f'a zu02+g' a zu03+
       d' b z12+e' b z13+ f' b zu12+g' b zu13+
       d' c z22+e' c z23+ f' c zu22+g' c zu23

z5 = Simplify[z5]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x6=d' d x22+e' d x23+f ' d xu22+g' d xu23+
     d' e x32+e' e x33+f ' e xu32+g' e xu33+
     d' f xt22+e' f xt23+f ' f xe22+g' f xe23+
     d' g xt32+e' g xt33+f ' g xe32+g' g xe33;

x6=Simplify[x6]

y6=d' d y22+e' d y23+f ' d yu22+g' d yu23+
     d' e y32+e' e y33+f ' e yu32+g' e yu33+
     d' f yt22+e' f yt23+f ' f ye22+g' f ye23+
     d' g yt32+e' g yt33+f ' g ye32+g' g ye33;

y6=Simplify[y6]


z6=d' d z22+e' d z23+f ' d zu22+g' d zu23+
     d' e z32+e' e z33+f ' e zu32+g' e zu33+
     d' f zt22+e' f zt23+f ' f ze22+g' f ze23+
     d' g zt32+e' g zt33+f ' g ze32+g' g ze33;

z6=Simplify[z6]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x7 = d' d x22+e' d x23+ f ' d xu22+g' d xu23+
       d' e x32+e' e x33+ f '  e xu32+g' e xu33+
       d' f  xt22+e' f xt23+ f '  f xe22+g' f xe23+
```

```
        d' g xt32+e' g xt33+ f ' g xe32+g' g xe33;

    x7 = Simplify[x7]

    y7 = d' d y22+e' d y23+ f ' d yu22+g' d yu23+
        d' e y32+e' e y33+ f '  e yu32+g' e yu33+
        d' f  yt22+e' f yt23+ f '  f ye22+g' f ye23+
        d' g yt32+e' g yt33+ f ' g ye32+g' g ye33;

    y7 = Simplify[y7]

    z7 = d' d z22+e' d z23+ f ' d zu22+g' d zu23+
        d' e z32+e' e z33+ f '  e zu32+g' e zu33+
        d' f  zt22+e' f zt23+ f '  f ze22+g' f ze23+
        d' g zt32+e' g zt33+ f ' g ze32+g' g ze33;

    z7 = Simplify[z7]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x8 = d' h x32+e' h x33+ f '  h xu32+g' h xu33+
    d' j x42+e' j x43+ f '  j xu42+g' j xu43+
    d' k x52+e' k x53+ f '  k xu52+g' k xu53;

x8 = Simplify[x8]

y8 = d' h y32+e' h y33+ f '  h yu32+g' h yu33+
    d' j y42+e' j y43+ f '  j yu42+g' j yu43+
    d' k y52+e' k y53+ f '  k yu52+g' k yu53;

y8 = Simplify[y8]

z8 = d' h z32+e' h z33+ f '  h zu32+g' h zu33+
    d' j z42+e' j z43+ f '  j zu42+g' j zu43+
    d' k z52+e' k z53+ f '  k zu52+g' k zu53;

z8 = Simplify[z8]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
    x9 = h' d x23+j' d x24+k' d x25+
        h' e x33+j' e x34+k' e x35+
        h' f xt23+j' f xt24+k' f xt25+
```

```
        h' g xt33+j' g xt34+k' g xt35;

    x9=Simplify[x9]

    y9 = h' d y23+j' d y24+k' d y25+
        h' e y33+j' e y34+k' e y35+
        h' f yt23+j' f yt24+k' f yt25+
        h' g yt33+j' g yt34+k' g yt35;

    y9=Simplify[y9]

    z9 = h' d z23+j' d z24+k' d z25+
        h' e z33+j' e z34+k' e z35+
        h' f zt23+j' f zt24+k' f zt25+
        h' g zt33+j' g zt34+k' g zt35;

    z9=Simplify[z9]
```

CREACION DE LA SUPERFICIE TOTAL

```
Off[General::spell
Off[general::spell 1
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c1=ParametricPlot3D[{x1, y1, z1},
        {t,0.2/5},{u,0,2/5),PlotPoints->10,
        AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel}]


c2=ParametricPlot3D[{x2, y2, z2},
        {t,3/5,1},{u,0,2/5),PlotPoints->10,
        AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel}]


c3= ParametricPlot3D[{x3, y3, z3},
        {t,0,2/5},{u,3/5,1),PlotPoints->10,
        AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel}]

c4= ParametricPlot3D[{x4, y4, z4},
        {t,3/5,1},{u,3/5,1),PlotPoints->10,
        AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel}]
```

```
c5= ParametricPlot3D[{x5, y5, z5},
    {t,2/5,3/5},{u,0,2/5),PlotPoints->10,
    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel}]


c6= ParametricPlot3D[{x6, y6, z6},
    {t,2/5,3/5},{u,2/5,3/5),PlotPoints->10,
    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel}]

c7= ParametricPlot3D[{x7, y7, z7},
    {t,2/5,3/5},{u,3/5,1),PlotPoints->10,
    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel}]

c8= ParametricPlot3D[{x8, y8, z8},
    {t,0,2/5},{u,2/5,3/5),PlotPoints->10,
    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel}]

c9= ParametricPlot3D[{x9, y9, z9},
    {t,3/5,1},{u,2/5,3/5),PlotPoints->10,
    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel}]
```

SUPERFICIE TOTAL

```
Show[cl, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9]
```

ORGANIGRAMA DE DISEÑO DE SUPERFICIES POLINOMIALES MIXTAS QUE PASAN POR UNA RED DE 9X6 PUNTOS

Input: Funciones previas

Input: Coordenadas de los puntos

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie el

Output: Dibujo de la superficie c1

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c2

Output : Dibujo de la superficie c2

Output : Componentes de las Tii de la frontera
Output : Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c3

Output : Dibujo de la superficie c3

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c4

Output: Dibujo de la superficie c4

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c5

Output: Dibujo de la superficie c5

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output Ecuaciones parametricas de la superficie c6

Output Dibujo de la superficie c6

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output : Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output Ecuaciones parametricas de la superficie c7
Output Dibujo de la superficie c7

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c8
Output: Dibujo de la superficie c8

Output Ecuaciones parametricas de la superficie c9
Output: Dibujo de la superficie c9

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c110
Output: Dibujo de la superficie c110

Output: Ecuaciones pararnetricas de la superficie c111
Output: Dibujo de la superficie c111

Output: Ecuaciones paraínetricas de la superficie c112

Output : Dibujo de la superficie c112

Output: Ecuaciones pararnetricas de la superficie c113
Output: Dibujo de la superficie c113

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c114
Output: Dibujo de la superficie c114

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c115

Output : Dibujo de la superficie c115

Output : Dibujo de la superficie total

Figura 4.3.2.-1. Organigrama de diseño de superficies polinomiales mixtas que pasan por una red de 9x6 puntos

4.3.2.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 9x6 PUNTOS DADOS USANDO POLINOMIOS DE GRADO TRES O MENOR

Off[General ::spell
Off[General::spell 1

FUNCIONES PREVIAS

a0=25/2t^2-15/2t+1;
a1=25t^2+10t;
a2=25/2t^2-5/2t;
a3=25/2t^2-45/2t+10;
a4=-25/2t^2+40t-15;
a5= 25/2t^2-35/2t+6;
a9= 250t^3-375t^2+180t-27;
a10= -250t^3+375t^2-180t+28;
a11= 25t^3-40t^2+21t-18/5;
a12= 25t^3-35t^2+16t-12/5;

b0=32u^2-12u+1;
b1=-64u^2+16u;
b2=32u^2-4u;
b3=32u^2-36u+10;
b4=-64u^2+64u-15;
b5= 32u^2-28u+6;
b6=32u^2-60u+28 ;
b7=-64u^2+112u-48 ;
b8=32u^2-52u+21 ;
b9=1024u^3-960u^2+288u-27 ;
b10= -1024u3+960u^2-288u+28 ;
b11= 64u^3-64u^2+21u-9/4;
b12= 64u^3-56u^2+16u-3/2;
b13=1024u^3-2112u^2+1440u-324;
b14=-1024u^3+2112u^2-1440u+325;
b15=64u^3-136u^2+96u-45/2;
b16=64u^3-128u^2+85u-75/4;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=
y00=
z00=

coordenadas de P01
x01=
y01=
z01=

coordenadas de P02
x02=
y02=
z02=

coordenadas de P03
x03=
y03=
z03=

coordenadas de P04
x04=
y04=
z04=

coordenadas de P05
x05=
y05=
z05=

coordenadas de P06
x06=
y06=
z06=

coordenadas de P07
x07=
y07=
z07=

coordenadas de P08
x08=
y08=
z08=

coordenadas de P10
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P11
x11=
y11=
z11=

coordenadas de P12
x12=
y12=
z12=

coordenadas de P13
x13=
y13=
z13=

coordenadas de P14
x14=
y14=
z14=

coordenadas de P15
x15=
y15=
z15=

coordenadas de P16
x16=
y16=
z16=

coordenadas de P17
x17=
y17=
z17=

coordenadas de P18
x18=
y18=
z18=

coordenadas de P20
x20=
y20=
z20=

coordenadas de P21
x21=
y21=
z21=

coordenadas de P22
x22=
y22=
z22=

coordenadas de P23
x23=
y23=
z23=

coordenadas de P24
x24=
y24=
z24=

coordenadas de P25
x25=
y25=
z25=

coordenadas de P26
x26=
y26=
z26=

coordenadas de P27
x27=
y27=
z27=

coordenadas de P28
x28=
y28=
z28=

coordenadas de P30
x30=
y30=
z30=

coordenadas de P31
x3l=
y3l=
z3l=

coordenadas de P32
x32=
y32=
z32=

coordenadas de P33
x33=
y33=
z33=

coordenadas de P34
x34=
y34=
z34=

coordenadas de P35
x35=
y35=
z35=

coordenadas de P36
x36=
y36=
z36=

coordenadas de P37
x37=
y37=
z37=

coordenadas de P38
x38=
y38=
z38=

coordenadas de P40
x40=
y40=
z40=

coordenadas de P41
x4l=
y4l=
z4l=

coordenadas de P42
x42=
y42=
z42=

coordenadas de P43
x43=
y43=
z43=

coordenadas de P44
x44=
y44=
z44=

coordenadas de P45
x45=
y45=
z45=

coordenadas de P46
x46=
y46=
z46=

coordenadas de P47
x47=
y47=
z47=

coordenadas de P48
x48=
y48=
z48=

coordenadas de P50
x50=
y50=
z50=

coordenadas de P51
x5l=
y51=
z51=

coordenadas de P52
x52=
y52=
z52=

coordenadas de P53
x53=
y53=
z53=

coordenadas de P54
x54=
y54=
z54=

coordenadas de P55
x55=
y55=
z55=

coordenadas de P56
x56=
y56=
z56=

coordenadas de P57
x57=
y57=
z57=

coordenadas de P58
x58=
y58=
z58=

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x= b0 a0 x00+b1 a0 x01+b2 a0 x02+
b0 a1 x10+b1 a1 x11+b2 a1 x12+
b0 a2 x20+b1 a2 x21+b2 a2 x22;

```
x=Simplify[xl]

y= b0 a0 y00+b1 a0 y01+b2 a0 y02+
   b0 a1 y10+b1 a1 y11+b2 a1 y12+
   b0 a2 y20+b1 a2 y21+b2 a2 y22;

y=Simplify[yl]

z= b0 a0 z00+b1 a0 z01+b2 a0 z02+
   b0 a1 z10+b1 a1 z11+b2 a1 z12+
   b0 a2 z20+b1 a2 z21+b2 a2 z22;

z=Simplify[zl]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
C1=ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,2/5},{u,0,2/8},
     AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T20

```
xt20=Limit[D[Limit[x,u->0],t],t->2/5]
yt20=Limit[D[Limit[y,u->0],t],t->2/5]
zt20=Limit[D[Limit[z,u->0],t],t->2/5]
```

COMPONENTES DE T21

```
xt21=Limit[D[Limit[x,u->1/8],t],t->2/5]
yt21=Limit[D[Limit[y,u->1/8],t],t->2/5]
zt21=Limit[D[Limit[z,u->1/8],t],t->2/5]
```

COMPONENTES DE T22

```
xt22=Limit[D[Limit[x,u->2/8],t],t->2/5]
yt22=Limit[D[Limit[y,u->2/8],t],t->2/5]
zt22=Limit[D[Limit[z,u->2/8],t],t->2/5]
```

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U20

```
xu20= Limit[D[Limit[x,t->2/5],u],u->0]
yu20= Limit[D[Limit[y,t->2/5],u],u->0]
zu20= Limit[D[Limit[z,t->2/5],u],u->0]
```

COMPONENTES DE U21
xu21= Limit[D[Limit[x,t->2/5],u],u->1/8]
yu21= Limit[D[Limit[y,t->2/5],u],u->1/8]
zu21= Limit[D[Limit[z,t->2/5],u],u->1/8]

COMPONENTES DE U22
xu22= Limit[D[Limit[x,t->2/5],u],u->2/8]
yu22= Limit[D[Limit[y,t->2/5],u],u->2/8]
zu22= Limit[D[Limit[z,t->2/5],u],u->2/8]

COMPONENTES DE U12
xu12= Limit[D[Limit[x,t->1/5],u],u->2/8]
yu12= Limit[D[Limit[y,t->1/5],u],u->2/8]
zu12= Limit[D[Limit[z,t->1/5],u],u->2/8]

COMPONENTES DE U02
xu02= Limit[D[Limit[x,t->0],u],u->2/8]
yu02= Limit[D[Limit[y,t->0],u],u->2/8]
zu02= Limit[D[Limit[z,t->0],u],u->2/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E20
xe20=Limit[Limit[D[D[x,t],u],t->2/5],u->0]
ye20= Limit[Limit[D[D[y,t],u],t->2/5],u->0]
ze20= Limit[Limit[D[D[z,t],u],t->2/5],u->0]

COMPONENTES DE E21
xe21=Limit[Limit[D[D[x,t],u],t->2/5],u->1/8]
ye21= Limit[Limit[D[D[y,t],u],t->2/5],u->1/8]
ze21= Limit[Limit[D[D[z,t],u],t->2/5],u->1/8]

COMPONENTES DE E22
xe22=Limit[Limit[D[D[x,t],u],t->2/5],u->2/8]
ye22= Limit[Limit[D[D[y,t],u],t->2/5],u->2/8]
ze22= Limit[Limit[D[D[z,t],u],t->2/5],u->2/8]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x2= b0 a3 x30+b1 a3 x31+b2 a3 x32+
    b0 a4 x40+b1 a4 x41+b2 a4 x42+
    b0 a5 x50+b1 a5 x51+b2 a5 x52;

x2=Simplify[x2]

```
y2= b0 a3 y30+b1 a3 y31+b2 a3 y32+
    b0 a4 y40+b1 a4 y41+b2 a4 y42+
    b0 a5 y50+b1 a5 y51+b2 a5 y52;

y2=Simplify[y2]

z2= b0 a3 z30+b1 a3 z31+b2 a3 z32+
    b0 a4 z40+b1 a4 z41+b2 a4 z42+
    b0 a5 z50+b1 a5 z51+b2 a5 z52;

z2=Simplify[z2]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c2=ParametricPlot3D[{x2,y2,z2},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
    AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T30

```
xt30=Limit[D[Limit[x2,u->0],t],t->3/5]
yt30=Limit[D[Limit[y2,u->0],t],t->3/5]
zt30=Limit[D[Limit[z2,u->0],t],t->3/5]
```

COMPONENTES DE T31

```
xt31=Limit[D[Limit[x2,u->1/8],t],t->3/5]
yt31=Limit[D[Limit[y2,u->1/8],t],t->3/5]
zt31=Limit[D[Limit[z2,u->1/8],t],t->3/5]
```

COMPONENTES DE T32

```
xt32=Limit[D[Limit[x2,u->2/8],t],t->3/5]
yt32=Limit[D[Limit[y2,u->2/8],t],t->3/5]
zt32=Limit[D[Limit[z2,u->2/8],t],t->3/5]
```

COMPONENTES DE T42

```
xt42=Limit[D[Limit[x2,u->2/8],t],t->4/5]
yt42=Limit[D[Limit[y2,u->2/8],t],t->4/5]
zt42=Limit[D[Limit[z2,u->2/8],t],t->4/5]
```

COMPONENTES DE T52

```
xt52=Limit[D[Limit[x2,u->2/8],t],t->1]
yt52=Limit[D[Limit[y2,u->2/8],t],t->1]
zt52=Limit[D[Limit[z2,u->2/8],t],t->1]
```

COMPONENTES DE T51
xt51=Limit[D[Limit[x2,u->1/8],t],t->1]
yt51=Limit[D[Limit[y2,u->1/8],t],t->1]
zt51=Limit[D[Limit[z2,u->1/8],t],t->1]

COMPONENTES DE T50
xt50=Limit[D[Limit[x2,u->0],t],t->1]
yt50=Limit[D[Limit[y2,u->0],t],t->1]
zt50=Limit[D[Limit[z2,u->0],t],t->1]

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U32
xu32= Limit[D[Limit[x2,t->3/5],u],u->2/8]
yu32= Limit[D[Limit[y2,t->3/5],u],u->2/8]
zu32= Limit[D[Limit[y2,t->3/5],u],u->2/8]

COMPONENTES DE U42
xu42= Limit[D[Limit[x2,t->4/5],u],u->2/8]
yu42= Limit[D[Limit[y2,t->4/5],u],u->2/8]
zu42= Limit[D[Limit[y2,t->4/5],u],u->2/8]

COMPONENTES DE U52
xu52= Limit[D[Limit[x2,t->1],u],u->2/8]
yu52= Limit[D[Limit[y2,t->1],u],u->2/8]
zu52= Limit[D[Limit[y2,t->1],u],u->2/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E32
xe32=Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t->3/5],u->2/8]
ye32= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t->3/5],u->2/8]
ze32= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t->3/5],u->2/8]

COMPONENTES DE E52
xe52=Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t->1],u->2/8]
ye52= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t->1],u->2/8]
ze52= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t->1],u->2/8]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x3= b3 a0 x03+b4 a0 x04+b5 a0 x05+
    b3 a1 x13+b4 a1 x14+b5 a1 x15+
    b3 a2 x23+b4 a2 x24+b5 a2 x25;

```
x3=Simplify[x3]

y3= b3 a0 y03+b4 a0 y04+b5 a0 y05+
    b3 a1 y13+b4 a1 y14+b5 a1 y15+
    b3 a2 y23+b4 a2 y24+b5 a2 y25;

y3=Simplify[y3]

z3= b3 a0 z03+b4 a0 z04+b5 a0 z05+
    b3 a1 z13+b4 a1 z14+b5 a1 z15+
    b3 a2 z23+b4 a2 z24+b5 a2 z25;

z3=Simplify[z3]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c3=ParametricPlot3D[{x3,y3,z3},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
      AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T03
```
xt03=Limit[D[Limit[x3,u->3/8],t],t->0]
yt03=Limit[D[Limit[y3,u->3/8],t],t->0]
zt03=Limit[D[Limit[z3,u->3/8],t],t->0]
```

COMPONENTES DE T13
```
xt13=Limit[D[Limit[x3,u->3/8],t],t->1/5]
yt13=Limit[D[Limit[y3,u->3/8],t],t->1/5]
zt13=Limit[D[Limit[z3,u->3/8],t],t->1/5]
```

COMPONENTES DE T23
```
xt23=Limit[D[Limit[x3,u->3/8],t],t->2/5]
yt23=Limit[D[Limit[y3,u->3/8],t],t->2/5]
zt23=Limit[D[Limit[z3,u->3/8],t],t->2/5]
```

COMPONENTES DE T24
```
xt24=Limit[D[Limit[x3,u->4/8],t],t->2/5]
yt24=Limit[D[Limit[y3,u->4/8],t],t->2/5]
zt24=Limit[D[Limit[z3,u->4/8],t],t->2/5]
```

COMPONENTES DE T25
```
xt25=Limit[D[Limit[x3,u->5/8],t],t->2/5]
```

yt25=Limit[D[Limit[y3,u->5/8],t],t->2/5]
zt25=Limit[D[Limit[z3,u->5/8],t],t->2/5]

COMPONENTES DE T15
xt15=Limit[D[Limit[x3,u->5/8],t],t->1/5]
yt15=Limit[D[Limit[y3,u->5/8],t],t->1/5]
zt15=Limit[D[Limit[z3,u->5/8],t],t->1/5]

COMPONENTES DE T05
xt05=Limit[D[Limit[x3,u->5/8],t],t->0]
yt05=Limit[D[Limit[y3,u->5/8],t],t->0]
zt05=Limit[D[Limit[z3,u->5/8],t],t->0]

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U03
xu03= Limit[D[Limit[x3,t->0],u],u->3/8]
yu03= Limit[D[Limit[y3,t->0],u],u->3/8]
zu03= Limit[D[Limit[y3,t->0],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U13
xu13= Limit[D[Limit[x3,t->1/5],u],u->3/8]
yu13= Limit[D[Limit[y3,t->1/5],u],u->3/8]
zu13= Limit[D[Limit[y3,t->3/5],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U23
xu23= Limit[D[Limit[x3,t->2/5],u],u->3/8]
yu23= Limit[D[Limit[y3,t->2/5],u],u->3/8]
zu23= Limit[D[Limit[y3,t->2/5],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U25
xu25= Limit[D[Limit[x3,t->2/5],u],u->5/8]
yu25= Limit[D[Limit[y3,t->2/5],u],u->5/8]
zu25= Limit[D[Limit[y3,t->2/5],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U15
xu15= Limit[D[Limit[x3,t->1/5],u],u->5/8]
yu15= Limit[D[Limit[y3,t->1/5],u],u->5/8]
zu15= Limit[D[Limit[y3,t->3/5],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U05
xu05= Limit[D[Limit[x3,t->0],u],u->5/8]
yu05= Limit[D[Limit[y3,t->0],u],u->5/8]
zu05= Limit[D[Limit[y3,t->0],u],u->5/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E23
```
xe23=Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t->2/5],u->3/8]
ye23= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t->2/5],u->3/8]
ze23= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t->2/5],u->3/8]
```

COMPONENTES DE E25
```
xe25=Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t->2/5],u->5/8]
ye25= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t->2/5],u->5/8]
ze25= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t->2/5],u->5/8]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x4= b3 a3 x33+b4 a3 x34+b5 a3 x35+
    b3 a4 x43+b4 a4 x44+b5 a4 x45+
    b3 a5 x53+b4 a5 x54+b5 a5 x55;

x4=Simplify[x4]

y4= b3 a3 y33+b4 a3 y34+b5 a3 y35+
    b3 a4 y43+b4 a4 y44+b5 a4 y45+
    b3 a5 y53+b4 a5 y54+b5 a5 y55;

y4=Simplify[y4]

z4= b3 a3 z33+b4 a3 z34+b5 a3 z35+
    b3 a4 z43+b4 a4 z44+b5 a4 z45+
    b3 a5 z53+b4 a5 z54+b5 a5 z55;

z4=Simplify[z4]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c4=ParametricPlot3D[{x4,y4,z4},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
      AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T33
```
xt33=Limit[D[Limit[x4,u->3/8],t],t->3/5]
yt33=Limit[D[Limit[y4,u->3/8],t],t->3/5]
zt33=Limit[D[Limit[z4,u->3/8],t],t->3/5]
```

COMPONENTES DE T34
xt34=Limit[D[Limit[x4,u->4/8],t],t->3/5]
yt34=Limit[D[Limit[y4,u->4/8],t],t->3/5]
zt34=Limit[D[Limit[z4,u->4/8],t],t->3/5]

COMPONENTES DE T35
xt35=Limit[D[Limit[x4,u->5/8],t],t->3/5]
yt35=Limit[D[Limit[y4,u->5/8],t],t->3/5]
zt35=Limit[D[Limit[z4,u->5/8],t],t->3/5]

COMPONENTES DE T45
xt45=Limit[D[Limit[x4,u->5/8],t],t->4/5]
yt45=Limit[D[Limit[y4,u->5/8],t],t->4/5]
zt45=Limit[D[Limit[z4,u->5/8],t],t->4/5]

COMPONENTES DE T55
xt55=Limit[D[Limit[x4,u->5/8],t],t->1]
yt55=Limit[D[Limit[y4,u->5/8],t],t->1]
zt55=Limit[D[Limit[z4,u->5/8],t],t->1]

COMPONENTES DE T54
xt54=Limit[D[Limit[x4,u->4/8],t],t->1]
yt54=Limit[D[Limit[y4,u->4/8],t],t->1]
zt54=Limit[D[Limit[z4,u->4/8],t],t->1]

COMPONENTES DE T53
xt53=Limit[D[Limit[x4,u->3/8],t],t->1]
yt53=Limit[D[Limit[y4,u->3/8],t],t->1]
zt53=Limit[D[Limit[z4,u->3/8],t],t->1]

COMPONENTES DE T43
xt43=Limit[D[Limit[x4,u->3/8],t],t->4/5]
yt43=Limit[D[Limit[y4,u->3/8],t],t->4/5]
zt43=Limit[D[Limit[z4,u->3/8],t],t->4/5]

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U33
xu33= Limit[D[Limit[x4,t->3/5],u],u->3/8]
yu33= Limit[D[Limit[y4,t->3/5],u],u->3/8]
zu33= Limit[D[Limit[y4,t->3/5],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U35
xu35= Limit[D[Limit[x4,t->3/5],u],u->5/8]
yu35= Limit[D[Limit[y4,t->3/5],u],u->5/8]
zu35= Limit[D[Limit[y4,t->3/5],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U45
xu45= Limit[D[Limit[x4,t->4/5],u],u->5/8]
yu45= Limit[D[Limit[y4,t->4/5],u],u->5/8]
zu45= Limit[D[Limit[y4,t->4/5],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U55
xu55= Limit[D[Limit[x4,t->1],u],u->5/8]
yu55= Limit[D[Limit[y4,t->1],u],u->5/8]
zu55= Limit[D[Limit[y4,t->1],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U53
xu53= Limit[D[Limit[x4,t->1],u],u->3/8]
yu53= Limit[D[Limit[y4,t->1],u],u->3/8]
zu53= Limit[D[Limit[y4,t->1],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U43
xu43= Limit[D[Limit[x4,t->4/5],u],u->3/8]
yu43= Limit[D[Limit[y4,t->4/5],u],u->3/8]
zu43= Limit[D[Limit[y4,t->4/5],u],u->3/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E33
xe33=Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t->3/5],u->3/8]
ye33= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t->3/5],u->3/8]
ze33= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->3/5],u->3/8]

COMPONENTES DE E35
xe35=Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t->3/5],u->5/8]
ye35= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t->3/5],u->5/8]
ze35= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->3/5],u->5/8]

COMPONENTES DE E55
xe55=Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t->1],u->5/8]
ye55= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t->1],u->5/8]
ze55= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->1],u->5/8]

COMPONENTES DE E53
xe53=Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t->1],u->3/8]
ye53= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t->1],u->3/8]

ze53= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->1],u->3/8]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x5= b6 a0 x06+b7 a0 x07+b8 a0 x08+
      b6 a1 x16+b7 a1 x17+b8 a1 x18+
      b6 a2 x26+b7 a2 x27+b8 a2 x28;

x5=Simplify[x5]
y5= b6 a0 y06+b7 a0 y07+b8 a0 y08+
      b6 a1 y16+b7 a1 y17+b8 a1 y18+
      b6 a2 y26+b7 a2 y27+b8 a2 y28;

y5=Simplify[y5]

z5= b6 a0 z06+b7 a0 z07+b8 a0 z08+
      b6 a1 z16+b7 a1 z17+b8 a1 z18+
      b6 a2 z26+b7 a2 z27+b8 a2 z28;

z5=Simplify[z5]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c5=ParametricPlot3D[{x5,y5,z5},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
          AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T06
xt06=Limit[D[Limit[x5,u->6/8],t],t->0]
yt06=Limit[D[Limit[y5,u->6/8],t],t->0]
zt06=Limit[D[Limit[z5,u->6/8],t],t->0]

COMPONENTES DE T16
xt16=Limit[D[Limit[x5,u->6/8],t],t->1/5]
yt16=Limit[D[Limit[y5,u->6/8],t],t->1/5]
zt16=Limit[D[Limit[z5,u->6/8],t],t->1/5]

COMPONENTES DE T26
xt26=Limit[D[Limit[x5,u->6/8],t],t->2/5]
yt26=Limit[D[Limit[y5,u->6/8],t],t->2/5]
zt26=Limit[D[Limit[z5,u->6/8],t],t->2/5]

COMPONENTES DE T27

```
xt27=Limit[D[Limit[x5,u->7/8],t],t->2/5]
yt27=Limit[D[Limit[y5,u->7/8],t],t->2/5]
zt27=Limit[D[Limit[z5,u->7/8],t],t->2/5]

COMPONENTES DE T28
xt28=Limit[D[Limit[x5,u->1],t],t->2/5]
yt28=Limit[D[Limit[y5,u->1],t],t->2/5]
zt28=Limit[D[Limit[z5,u->1],t],t->2/5]
```

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

```
COMPONENTES DE U06
xu06= Limit[D[Limit[x5,t->0],u],u->6/8]
yu06= Limit[D[Limit[y5,t->0],u],u->6/8]
zu06= Limit[D[Limit[y5,t->0],u],u->6/8]

COMPONENTES DE U16
xu16= Limit[D[Limit[x5,t->1/5],u],u->6/8]
yu16= Limit[D[Limit[y5,t->1/5],u],u->6/8]
zu16= Limit[D[Limit[y5,t->1/5],u],u->6/8]

COMPONENTES DE U26
xu26= Limit[D[Limit[x5,t->2/5],u],u->6/8]
yu26= Limit[D[Limit[y5,t->2/5],u],u->6/8]
zu26= Limit[D[Limit[y5,t->2/5],u],u->6/8]
```

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

```
COMPONENTES DE E26
xe26=Limit[Limit[D[D[x5,t],u],t->2/5],u->6/8]
ye26= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t->2/5],u->6/8]
ze26= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t->2/5],u->6/8]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x6= b6 a3 x36+b7 a3 x37+b8 a3 x38+
    b6 a4 x46+b7 a4 x47+b8 a4 x48+
    b6 a5 x56+b7 a5 x57+b8 a5 x58;

x6=Simplify[x6]

y6= b6 a3 y36+b7 a3 y37+b8 a3 y38+
    b6 a4 y46+b7 a4 y47+b8 a4 y48+
    b6 a5 y56+b7 a5 y57+b8 a5 y58;
```

```
y6=Simplify[y6]

z6= b6 a3 z36+b7 a3 z37+b8 a3 z38+
    b6 a4 z46+b7 a4 z47+b8 a4 z48+
    b6 a5 z56+b7 a5 z57+b8 a5 z58;

z6=Simplify[z6]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c6=ParametricPlot3D[{x6,y6,z6},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
        AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T38

```
xt38=Limit[D[Limit[x6,u->1],t],t->3/5]
yt38=Limit[D[Limit[y6,u->1],t],t->3/5]
zt38=Limit[D[Limit[z6,u->1],t],t->3/5]
```

COMPONENTES DE T37

```
xt37=Limit[D[Limit[x6,u->7/8],t],t->3/5]
yt37=Limit[D[Limit[y6,u->7/8],t],t->3/5]
zt37=Limit[D[Limit[z6,u->7/8],t],t->3/5]
```

COMPONENTES DE T36

```
xt36=Limit[D[Limit[x6,u->6/8],t],t->3/5]
yt36=Limit[D[Limit[y6,u->6/8],t],t->3/5]
zt36=Limit[D[Limit[z6,u->6/8],t],t->3/5]
```

COMPONENTES DE T46

```
xt46=Limit[D[Limit[x6,u->6/8],t],t->4/5]
yt46=Limit[D[Limit[y6,u->6/8],t],t->4/5]
zt46=Limit[D[Limit[z6,u->6/8],t],t->4/5]
```

COMPONENTES DE T56

```
xt56=Limit[D[Limit[x6,u->6/8],t],t->1]
yt56=Limit[D[Limit[y6,u->6/8],t],t->1]
zt56=Limit[D[Limit[z6,u->6/8],t],t->1]
```

COMPONENTES DE T57

```
xt57=Limit[D[Limit[x6,u->7/8],t],t->1]
yt57=Limit[D[Limit[y6,u->7/8],t],t->1]
zt57=Limit[D[Limit[z6,u->7/8],t],t->1]
```

COMPONENTES DE T58
xt58=Limit[D[Limit[x6,u->1],t],t->1]
yt58=Limit[D[Limit[y6,u->1],t],t->1]
zt58=Limit[D[Limit[z6,u->1],t],t->1]

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U36
xu36= Limit[D[Limit[x6,t->3/5],u],u->6/8]
yu36= Limit[D[Limit[y6,t->3/5],u],u->6/8]
zu36= Limit[D[Limit[y6,t->3/5],u],u->6/8]

COMPONENTES DE U46
xu46= Limit[D[Limit[x6,t->4/5],u],u->6/8]
yu46= Limit[D[Limit[y6,t->4/5],u],u->6/8]
zu46= Limit[D[Limit[y6,t->4/5],u],u->6/8]

COMPONENTES DE U56
xu56= Limit[D[Limit[x6,t->1],u],u->6/8]
yu56= Limit[D[Limit[y6,t->1],u],u->6/8]
zu56= Limit[D[Limit[y6,t->1],u],u->6/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E36
xe36=Limit[Limit[D[D[x6,t],u],t->3/5],u->6/8]
ye36= Limit[Limit[D[D[y6,t],u],t->3/5],u->6/8]
ze36= Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t->3/5],u->6/8]

COMPONENTES DE E56
xe56=Limit[Limit[D[D[x6,t],u],t->1],u->6/8]
ye56= Limit[Limit[D[D[y6,t],u],t->1],u->6/8]
ze56= Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t->1],u->6/8]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x7=b0 a9 x20+b1 a9 x21 +b2 a9 x22+
    b0 a10 x30+b1 a10 x31+b2 a10 x32+
    b0 a11 xt20+b1 a11 xt21 +b2 a11 xt22+
    b0 a12 xt30+b1 a12 xt31 +b2 a12 xt32;

x7=Simplify[x7]

y7=b0 a9 y20+b1 a9 y21 +b2 a9 y22+

```
     b0 a10 y30+b1 a10 y31+b2 a10 y32+
     b0 a11 yt20+b1 a11 yt21 +b2  a11  yt22+
     b0 a12 yt30+b1 a12 yt31 +b2  a12  yt32;

y7=Simplify[y7]

z7=b0 a9 z20+b1 a9 z21 +b2 a9 z22+
     b0 a10 z30+b1 a10 z31+b2 a10 z32+
     b0 a11 zt20+b1 a11 zt21 +b2  a11  zt22+
     b0 a12 zt30+b1 a12 zt31 +b2  a12  zt32;

z7=Simplify[z7]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c7=ParametricPlot3D[{x7,y7,z7},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
        AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x8=b9 a0 x02+b10 a0 x03+b11 a0 xu02+b12 a0 xu03+
     b9 a1 x12+b10 a1 x13+b11 a1 xu12+b12 a1 xu13+
     b9 a2 x22+b10 a2 x23+b11 a2 xu22+b12 a2 xu23;

x8=Simplify[x8]

y8=b9 a0 y02+b10 a0 y03+b11 a0 yu02+b12 a0 yu03+
     b9 a1 y12+b10 a1 y13+b11 a1 yu12+b12 a1 yu13+
     b9 a2 y22+b10 a2 y23+b11 a2 yu22+b12 a2 yu23;

y8=Simplify[y8]

z8=b9 a0 z02+b10 a0 z03+b11 a0 zu02+b12 a0 zu03+
     b9 a1 z12+b10 a1 z13+b11 a1 zu12+b12 a1 zu13+
     b9 a2 z22+b10 a2 z23+b11 a2 zu22+b12 a2 zu23;

z8=Simplify[z8]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c8=ParametricPlot3D[{x8,y8,z8},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
        AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x9=b9*a9*x22+b10*a9*x23+bll*a9*xu22+bl2*a9*xu23+
     b9*a10*x32+b10*a10*x33+b11*a10*xu32+b12*a10*xu33+
     b9*a11*xt22+b10*a11*xt23+b11*a11*xe22+b12*a11*xe23+
     b9*a12*xt32+b10*a12*xt33+b11*a12*xe32+b12*a12*xe33;

x9=Simplify[x9]

y9=b9*a9*y22+b10*a9*y23+bll*a9*yu22+bl2*a9*yu23+
     b9*a10*y32+b10*a10*y33+b11*a10*yu32+b12*a10*yu33+
     b9*a11*yt22+b10*a11*yt23+b11*a11*ye22+b12*a11*ye23+
     b9*a12*yt32+b10*a12*yt33+b11*a12*ye32+b12*a12*ye33;

y9=Simplify[y9]

z9=b9*a9*z22+b10*a9*z23+bll*a9*zu22+bl2*a9*zu23+
     b9*a10*z32+b10*a10*z33+b11*a10*zu32+b12*a10*zu33+
     b9*a11*zt22+b10*a11*zt23+b11*a11*ze22+b12*a11*ze23+
     b9*a12*zt32+b10*a12*zt33+b11*a12*ze32+b12*a12*ze33;

z9=Simplify[z9]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c9=ParametricPlot3D[{x9,y9,z9},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
          AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x110=b9*a3*x32+b10*a3*x33+b11*a3*xu32+b12*a3*xu33+
        b9*a4*x42+b10*a4*x43+b11*a4*xu42+b12*a4*xu43+
        b9*a5*x52+b10*a5*x53+b11*a5*xu52+b12*a5*xu53;

x110=Simplify[x110]

y110=b9*a3*y32+b10*a3*y33+b11*a3*yu32+b12*a3*yu33+
        b9*a4*y42+b10*a4*y43+b11*a4*yu42+b12*a4*yu43+
        b9*a5*y52+b10*a5*y53+b11*a5*yu52+b12*a5*yu53;

y110=Simplify[y110]

z110=b9*a3*z32+b10*a3*z33+b11*a3*zu32+b12*a3*zu33+
        b9*a4*z42+b10*a4*z43+b11*a4*zu42+b12*a4*zu43+
        b9*a5*z52+b10*a5*z53+b11*a5*zu52+b12*a5*zu53;
```

```
z110=Simplify[z110]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c110=ParametricPlot3D[{x110,y110,z110},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
        AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x111=b3*a9*x23+b4*a9*x24+b5*a9*x25+
     b3*a10*x33+b4*a10*x34+b5*a10*x35+
     b3*a11*xt23+b4*a11*xt24+b5*a11*xt25+
     b3*a12*xt33+b4*a12*xt34+b5*a12*xt35

x111=Simplify[x111]

y111=b3*a9*y23+b4*a9*y24+b5*a9*y25+
     b3*a10*y33+b4*a10*y34+b5*a10*y35+
     b3*a11*yt23+b4*a11*yt24+b5*a11*yt25+
     b3*a12*yt33+b4*a12*yt34+b5*a12*yt35

y111=Simplify[y111]

z111=b3*a9*z23+b4*a9*z24+b5*a9*z25+
     b3*a10*z33+b4*a10*z34+b5*a10*z35+
     b3*a11*zt23+b4*a11*zt24+b5*a11*zt25+
     b3*a12*zt33+b4*a12*zt34+b5*a12*zt35

z111=Simplify[z111]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c111=ParametricPlot3D[{x111,y111,z111},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
        AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x112=b13*a0*x05+b14*a0*x06+b15*a0*xu05+b16*a0*xu06+
     b13*a1*x15+b14*a1*x16+b15*a1*xu15+b16*a1*xu16+
     b13*a2*x25+b14*a2*x26+b15*a2*xu25+b16*a2*xu26;

x112=Simplify[x112]
```

```
y112=b13*a0*y05+b14*a0*y06+b15*a0*yu05+b16*a0*yu06+
        b13*a1*y15+b14*a1*y16+b15*a1*yu15+b16*a1*yu16+
        b13*a2*y25+b14*a2*y26+b15*a2*yu25+b16*a2*yu26;

y112=Simplify[y112]

z112=b13*a0*z05+b14*a0*z06+b15*a0*zu05+b16*a0*zu06+
        b13*a1*z15+b14*a1*z16+b15*a1*zu15+b16*a1*zu16+
        b13*a2*z25+b14*a2*z26+b15*a2*zu25+b16*a2*zu26;

z112=Simplify[z112]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c112=ParametricPlot3D[{x112,y112,z112},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
            AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x113=b13*a9*x25+b14*a9*x26+b15*a9*xu25+b16*a9*xu26+
        b13*a10*x35+b14*a10*x36+b15*a10*xu35+b16*a10*xu36+
        b13*a11*xt25+b14*a11*xt26+b15*a11*xe25+b16*a11*xe26+
        b13*a12*xt35+b14*a12*xt36+b15*a12*xe35+b16*a12*xe36;

x113=Simplify[x113]

y113=b13*a9*y25+b14*a9*y26+b15*a9*yu25+b16*a9*yu26+
        b13*a10*y35+b14*a10*y36+b15*a10*yu35+b16*a10*yu36+
        b13*a11*yt25+b14*a11*yt26+b15*a11*ye25+b16*a11*ye26+
        b13*a12*yt35+b14*a12*yt36+b15*a12*ye35+b16*a12*ye36;

y113=Simplify[y113]

z113=b13*a9*z25+b14*a9*z26+b15*a9*zu25+b16*a9*zu26+
        b13*a10*z35+b14*a10*z36+b15*a10*zu35+b16*a10*zu36+
        b13*a11*zt25+b14*a11*zt26+b15*a11*ze25+b16*a11*ze26+
        b13*a12*zt35+b14*a12*zt36+b15*a12*ze35+b16*a12*ze36;

z113=Simplify[z113]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c113=ParametricPlot3D[{x113,y113,z113},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
        AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x114=b13*a3*x35+b14*a3*x36+b15*a3*xu35+b16*a3*xu36+
     b13*a4*x45+b14*a4*x46+b15*a4*xu45+b16*a4*xu46+
     b13*a5*x55+b14*a5*x56+b15*a5*xu55+b16*a5*xu56;

x 114=Simplify[x114]

y114=b13*a3*y35+b14*a3*y36+b15*a3*yu35+b16*a3*yu36+
     b13*a4*y45+b14*a4*y46+b15*a4*yu45+b16*a4*yu46+
     b13*a5*y55+b14*a5*y56+b15*a5*yu55+b16*a5*yu56;

y 114=Simplify[y114]

z114=b13*a3*z35+b14*a3*z36+b15*a3*zu35+b16*a3*zu36+
     b13*a4*z45+b14*a4*z46+b15*a4*zu45+b16*a4*zu46+
     b13*a5*z55+b14*a5*z56+b15*a5*zu55+b16*a5*zu56;

z 114=Simplify[z114]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c114=ParametricPlot3D[{x114,y114,z114},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
        AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x115=b6*a9*x26+b7*a9*x27+b8*a9*x28+
     b6*a10*x36+b7*a10*x37+b8*a10*x38+
     b6*a11*xt26+b7*a11*xt27+b8*a11*xt28+
     b6*a12*xt36+b7*a12*xt37+b8*a12*xt38

x115=Simplify[x115]

y115=b6*a9*y26+b7*a9*y27+b8*a9*y28+
     b6*a10*y36+b7*a10*y37+b8*a10*y38+
     b6*a11*yt26+b7*a11*yt27+b8*a11*yt28+
     b6*a12*yt36+b7*a12*yt37+b8*a12*yt38

y115=Simplify[y115]
```

```
z115=b6*a9*z26+b7*a9*z27+b8*a9*z28+
       b6*a10*z36+b7*a10*z37+b8*a10*z38+
       b6*a11*zt26+b7*a11*zt27+b8*a11*zt28+
       b6*a12*zt36+b7*a12*zt37+b8*a12*zt38

z115=Simplify[z115]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c115=ParametricPlot3D[{x115,y115,z115},{t,3/5,1},{u,0,2/8},
        AxesLabel->{xLabel,yLabel.zLabel},PlotPoints->2]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE TOTAL

```
Show[cl,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c110,c111,c112,c113,c114,c115]
```

<u>ORGANIGRAMA DE DISEÑO DE SUPERFICIES POLINOMIALES MIXTAS QUE PASAN POR UNA RED DE 9X9 PUNTOS</u>

Input: Funciones previas

Input: Coordenadas de los puntos
Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c1

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output : Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c2

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c3

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c4

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c5

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output : Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c6

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c7

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output : Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c8

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c9

Output: Componentes de las Tij de la frontera
Output: Componentes de las Uij de la frontera
Output: Componentes de las Eij de la frontera

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c110

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c111

Output : Ecuaciones parametricas de la superf icie c112

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c113

Output : Ecuaciones pararnetricas de la superficie c114

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c115

Output: Ecuaciones parametricas de la superficie c116

Output : Ecuaciones pararnetricas de la superficie c117

Output : Ecuaciones pararnetricas de la superf icie c118

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c119

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c120

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c121

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c122

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c123

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c124

Output : Ecuaciones parametricas de la superficie c125

Output: dibujo de la superficie c1

Output: dibujo de la superficie c2

Output: dibujo de la superficie c3

Output : dibujo de la superficie c4

Output : dibujo de la superficie c5

Output : dibujo de la superficie c6

Output : dibujo de la superficie c7

Output: dibujo de la superficie c8

Output: dibujo de la superficie c9

Output: dibujo de la superficie c10

Output : dibujo de la superficie c11

Output : dibujo de la superficie c12

Output : dibujo de la superficie c13

Output : dibujo de la superficie c14

Output: dibujo de la superficie c15

Output : dibujo de la superficie c16

Output: dibujo de la superficie c17

Output: dibujo de la superficie c18

Output: dibujo de la superficie c19

Output: dibujo de la superficie c20

Output: dibujo de la superficie c2l

Output: dibujo de la superflcie c22

Output: dibujo de la superficie c23

Output: dibujo de la superficie c24

Output: dibujo de la superficie c25

Output: dibujo de la superficie total

Figura 4.3.3.-1. organigrama de diseño de superficies polinomiales mixtas que pasan por una red de 9x9 puntos

4.3.3.-PROGRAMACION EN MATHEMATICA DE LA SUPERFICIE POLINOMIAL QUE PASA POR UNA RED DE 9x9 PUNTOS DADOS USANDO POLINOMIOS DE GRADO TRES O MENOR

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

FUNCIONES PREVIAS

```
a0=32t^2-12t+1
a1=-64t^2+16t
a2=32t^2-4t
```

a3=32t^2-36t+10
a4=-64t^2+64t-15
a5= 32t^2-28t+6
a6= 32t^2-60t+28
a7= -64t^2+112
a8= 32t^2-52t+21;
a9= 1024t^3-960t^2+288t-27;
a10= -1024t^3+960t^2-288t+28;
a11= 64t^3-64t^2+21t-9/4;
a12= 64t^3-56t^2+16t-312;
a13= 1024t^3-2112t^2+1440t-324
a14= - 1024t^3+2112t^2-1440t+325
a15= 64t^3-136t^2+96t-45/2
a16= 64t^3-128t^2+85t-75/4

b0=-32u^2-12u+l
b1=-64u^2+16u
b2=32u^2-4u
b3=32u^2-36u+10
b4=-64u^2+64u-15
b5= 32u^2-28u+6
b6= 32u^2-60u+28
b7= -64u^2+112u-48;
b8= 32u^2-52u+21;
b9= 1024u^3-960u^2+288u-27;

b10= -1024u^3+960u^2-288u+28;
b11= 64u^3-64u^2+21u-9/4;
b12= 64u^13-56u^2+16u-3/2;
b13= 1024u^3-2112u^2+1440u-324
b14= -1024u^3+2112u^2-1440u+325
b15= 64u^3-136u^2+96u-45/2
b16= 64u^3-128u^2+85u-75/4

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=
y00=
z00=

coordenadas de P01
x01=
y01=
z01=

coordenadas de P02
x02=
y02=
z02=

coordenadas de P03
x03=
y03=
z03=

coordenadas de P04
x04=
y04=
z04=

coordenadas de P05
x05=
y05=
z05=

coordenadas de P06
x06=
y06=
z06=

coordenadas de P07
x07=
y07=
z07=

coordenadas de P08
x08=
y08=
z08=

coordenadas de P10
x10=
y10=
z10=

coordenadas de P11
x11=
y11=
z11=

coordenadas de P12
xl2=
yl2=
zl2=

coordenadas de P13
x13=
y13=
z13=

coordenadas de P14
x14=
y14=
z14=

coordenadas de P15
x15=
y15=
z15=

coordenadas de P16
x16=
y16=
z16=

coordenadas de P17
x17=
y17=
z17=

coordenadas de P18
x18=
y18=
z18=

coordenadas de P20
x20=
y20=
z20=

coordenadas de P21
x21=
y21=
z21=

coordenadas de P22
x22=
y22=
z22=

coordenadas de P23
x23=
y23=
z23=

coordenadas de P24
x24=
y24=
z24=

coordenadas de P25
x25=
y25=
z25=

coordenadas de P26
x26=
y26=
z26=

coordenadas de P27
x27=
y27=
z27=

coordenadas de P28
x28=
y28=
z28=

coordenadas de P30
x30=
y30=
z30=

coordenadas de P31
x31=
y31=
z31=

coordenadas de P32
x32=
y32=
z32=

coordenadas de P33
x33=
y33=
z33=

coordenadas de P34
x34=
y34=
z34=

coordenadas de P35
x35=
y35=
z35=

coordenadas de P36
x36=
y36=
z36=

coordenadas de P37
x37=
y37=
z37=

coordenadas de P38
x38=
y38=
z38=

coordenadas de P40
x40=
y40=
z40=

coordenadas de P41
x41=
y41=
z41=

coordenadas de P42
x42=
y42=
z42=

coordenadas de P43
x43=
y43=
z43=

coordenadas de P44
x44=
y44=
z44=

coordenadas de P45
x45=
y45=
z45=

coordenadas de P46
x46=
y46=
z46=

coordenadas de P47
x47=
y47=
z47=

coordenadas de P48
x48=
y48=
z48=

coordenadas de P50
x50=
y50=
z50=

coordenadas de P51
x51=
y51=
z51=

coordenadas de P52
x52=
y52=
z52=

coordenadas de P53
x53=
y53=
z53=

coordenadas de P54
x54=
y54=
z54=

coordenadas de P55
x55=
y55=
z55=

coordenadas de P56
x56=
y56=
z56=

coordenadas de P57
x57=
y57=
z57=

coordenadas de P58
x58=
y58=
z58=

coordenadas de P60
x60=
y60=
z60=

coordenadas de P61
x61=
y61=
z61=

coordenadas de P62
x62=
y62=
z62=

coordenadas de P63
x63=
y63=
z63=

coordenadas de P64
x64=
y64=
z64=

coordenadas de P65
x65=
y65=
z65=

coordenadas de P66
x66=
y66=
z66=

coordenadas de P67
x67=
y67=
z67=

coordenadas de P68
x68=
y68=
z68=

coordenadas de P70
x70=
y70=
z70=

coordenadas de P71
x71=
y71=
z71=

coordenadas de P72
x72=
y72=
z72=

coordenadas de P73
x73=
y73=
z73=

coordenadas de P74
x74=
y74=
z74=

coordenadas de P75
x75=
y75=
z75=

coordenadas de P76
x76=
y76=
z76=

coordenadas de P77
x77=
y77=
z77=

coordenadas de P78
x78=
y78=
z78=

coordenadas de P80
x80=
y80=
z80=

coordenadas de P81
x81=
y81=
z81=

coordenadas de P82
x82=
y82=
z82=

coordenadas de P83
x83=
y83=
z83=

coordenadas de P84
x84=
y84=
z84=

coordenadas de P85
x85=
y85=
z85=

coordenadas de P86
x86=
y86=
z86=

coordenadas de P87
x87=
y87=
z87=

coordenadas de P88
x88=
y88=
z88=

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x1= b0*a0*x00+b1*a0*x01+b2*a0*x02+
    b0*a1*x10+b1*a1*x11+b2*a1*x12+
    b0*a2*x20+b1*a2*x21+b2*a2*x22;

x1=Simplify[x1]
```

```
y1= b0*a0*y00+b1*a0*y01+b2*a0*y02+
    b0*a1*y10+b1*a1*y11+b2*a1*y12+
    b0*a2*y20+b1*a2*y21+b2*a2*y22;

y1=Simplify[y1]

z1= b0*a0*z00+b1*a0*z01+b2*a0*z02+
    b0*a1*z10+b1*a1*z11+b2*a1*z12+
    b0*a2*z20+b1*a2*z21+b2*a2*z22;

z1=Simplify[z1]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T20

```
xt20=Limit[D[Limit[x1,u->0],t],t->2/8]
yt20=Limit[D[Limit[y1,u->0],t],t->2/8]
zt20=Limit[D[Limit[z1,u->0],t],t->2/8]
```

COMPONENTES DE T21

```
xt21=Limit[D[Limit[x1,u->1/8],t],t->2/8]
yt21=Limit[D[Limit[y1,u->1/8],t],t->2/8]
zt21=Limit[D[Limit[z1,u->1/8],t],t->2/8]
```

COMPONENTES DE T22

```
xt22=Limit[D[Limit[x1,u->2/8],t],t->2/8]
yt22=Limit[D[Limit[y1,u->2/8],t],t->2/8]
zt22=Limit[D[Limit[z1,u->2/8],t],t->2/8]
```

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U20

```
xu20= Limit[D[Limit[x1,t->2/8],u],u->0]
yu20= Limit[D[Limit[y1,t->2/8],u],u->0]
zu20= Limit[D[Limit[y1,t->2/8],u],u->0]
```

COMPONENTES DE U21

```
xu21= Limit[D[Limit[x1,t->2/8],u],u->1/8]
yu21= Limit[D[Limit[y1,t->2/8],u],u->1/8]
zu21= Limit[D[Limit[y1,t->2/8],u],u->1/8]
```

COMPONENTES DE U22

```
xu22= Limit[D[Limit[x1,t->2/8],u],u->2/8]
yu22= Limit[D[Limit[y1,t->2/8],u],u->2/8]
zu22= Limit[D[Limit[y1,t->2/8],u],u->2/8]
```

COMPONENTES DE U12
xu12= Limit[D[Limit[x1,t->1/8],u],u->2/8]
yu12= Limit[D[Limit[y1,t->1/8],u],u->2/8]
zu12= Limit[D[Limit[y1,t->1/8],u],u->2/8]

COMPONENTES DE U02
xu02= Limit[D[Limit[x1,t->0],u],u->2/8]
yu02= Limit[D[Limit[y1,t->0],u],u->2/8]
zu02= Limit[D[Limit[y1,t->0],u],u->2/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E20
xe20=Limit[Limit[D[D[x1,t],u],t->2/8],u->0]
ye20= Limit[Limit[D[D[y1,t],u],t->2/8],u->0]
ze20= Limit[Limit[D[D[z1,t],u],t->2/8],u->0]

COMPONENTES DE E21
xe21=Limit[Limit[D[D[x1,t],u],t->2/8],u->1/8]
ye21= Limit[Limit[D[D[y1,t],u],t->2/8],u->1/8]
ze21= Limit[Limit[D[D[z1,t],u],t->2/8],u->1/8]

COMPONENTES DE E22
xe22=Limit[Limit[D[D[x1,t],u],t->2/8],u->2/8]
ye22= Limit[Limit[D[D[y1,t],u],t->2/8],u->2/8]
ze22= Limit[Limit[D[D[z1,t],u],t->2/8],u->2/8]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x2= b0*a3*x30+b1*a3*x31 +b2*a3*x32+
    b0*a4*x40+b1*a4*x41+b2*a4*x42+
    b0*a5*x50+b1*a5*x51+b2*a5*x52;
x2=Simplify[x2]

y2= b0*a3*y30+b1*a3*y31 +b2*a3*y32+
    b0*a4*y40+b1*a4*y41+b2*a4*y42+
    b0*a5*y50+b1*a5*y51+b2*a5*y52;
y2=Simplify[y2]

z2= b0*a3*z30+b1*a3*z31 +b2*a3*z32+
    b0*a4*z40+b1*a4*z41+b2*a4*z42+
    b0*a5*z50+b1*a5*z51+b2*a5*z52;
z2=Simplify[z2]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T30
xt30=Limit[D[Limit[x2,u->0],t],t->3/8]
yt30=Limit[D[Limit[y2,u->0],t],t->3/8]
zt30=Limit[D[Limit[z2,u->0],t],t->3/8]

COMPONENTES DE T31
xt31=Limit[D[Limit[x2,u->1/8],t],t->3/8]
yt31=Limit[D[Limit[y2,u->1/8],t],t->3/8]
zt31=Limit[D[Limit[z2,u->1/8],t],t->3/8]

COMPONENTES DE T32
xt32=Limit[D[Limit[x2,u->2/8],t],t->3/8]
yt32=Limit[D[Limit[y2,u->2/8],t],t->3/8]
zt32=Limit[D[Limit[z2,u->2/8],t],t->3/8]

COMPONENTES DE T42
xt42=Limit[D[Limit[x2,u->2/8],t],t->4/8]
yt42=Limit[D[Limit[y2,u->2/8],t],t->4/8]
zt42=Limit[D[Limit[z2,u->2/8],t],t->4/8]

COMPONENTES DE T52
xt52=Limit[D[Limit[x2,u->2/8],t],t->5/8]
yt52=Limit[D[Limit[y2,u->2/8],t],t->5/8]
zt52=Limit[D[Limit[z2,u->2/8],t],t->5/8]

COMPONENTES DE T51
xt51=Limit[D[Limit[x2,u->1/8],t],t->5/8]
yt51=Limit[D[Limit[y2,u->1/8],t],t->5/8]
zt51=Limit[D[Limit[z2,u->1/8],t],t->5/8]

COMPONENTES DE T50
xt50=Limit[D[Limit[x2,u->0],t],t->5/8]
yt50=Limit[D[Limit[y2,u->0],t],t->5/8]
zt50=Limit[D[Limit[z2,u->0],t],t->5/8]

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U32
xu32= Limit[D[Limit[x2,t->3/8],u],u->2/8]
yu32= Limit[D[Limit[y2,t->3/8],u],u->2/8]
zu32= Limit[D[Limit[y2,t->3/8],u],u->2/8]

```
COMPONENTES DE U42
xu42= Limit[D[Limit[x2,t->4/8],u],u->2/8]
yu42= Limit[D[Limit[y2,t->4/8],u],u->2/8]
zu42= Limit[D[Limit[y2,t->4/8],u],u->2/8]

COMPONENTES DE U52
xu52= Limit[D[Limit[x2,t->5/8],u],u->2/8]
yu52= Limit[D[Limit[y2,t->5/8],u],u->2/8]
zu52= Limit[D[Limit[y2,t->5/8],u],u->2/8]
```

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

```
COMPONENTES DE E32
xe32=Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t->3/8],u->2/8]
ye32= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t->3/8],u->2/8]
ze32= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t->3/8],u->2/8]

COMPONENTES DE E52
xe52=Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t->5/8],u->2/8]
ye52= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t->5/8],u->2/8]
ze52= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t->5/8],u->2/8]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x3= b0*a6*x60+b1*a6*x61+b2*a6*x62+
    b0*a7*x70+b1*a7*x71+b2*a7*x72+
    b0*a8*x80+b1*a8*x81+b2*a8*x82;
x3=Simplify[x3]

y3= b0*a6*y60+b1*a6*y61+b2*a6*y62+
    b0*a7*y70+b1*a7*y71+b2*a7*y72+
    b0*a8*y80+b1*a8*y81+b2*a8*y82;
y3=Simplify[y3]

z3= b0*a6*z60+b1*a6*z61+b2*a6*z62+
    b0*a7*z70+b1*a7*z71+b2*a7*z72+
    b0*a8*z80+b1*a8*z81+b2*a8*z82;
z3=Simplify[z3]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

```
COMPONENTES DE T60
xt60=Limit[D[Limit[x3,u->0],t],t->6/8]
yt60=Limit[D[Limit[y3,u->0],t],t->6/8]
```

zt60=Limit[D[Limit[z3,u->0],t],t->6/8]

COMPONENTES DE T61
xt61=Limit[D[Limit[x3,u->1/8],t],t->6/8]
yt61=Limit[D[Limit[y3,u->1/8],t],t->6/8]
zt61=Limit[D[Limit[z3,u->1/8],t],t->6/8]

COMPONENTES DE T62
xt62=Limit[D[Limit[x3,u->2/8],t],t->6/8]
yt62=Limit[D[Limit[y3,u->2/8],t],t->6/8]
zt62=Limit[D[Limit[z3,u->2/8],t],t->6/8]

COMPONENTES DE T72
xt72=Limit[D[Limit[x3,u->2/8],t],t->7/8]
yt72=Limit[D[Limit[y3,u->2/8],t],t->7/8]
zt72=Limit[D[Limit[z3,u->2/8],t],t->7/8]

COMPONENTES DE T82
xt82=Limit[D[Limit[x3,u->2/8],t],t->1]
yt82=Limit[D[Limit[y3,u->2/8],t],t->1]
zt82=Limit[D[Limit[z3,u->2/8],t],t->1]

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U62
xu62= Limit[D[Limit[x3,t->6/8],u],u->2/8]
yu62= Limit[D[Limit[y3,t->6/8],u],u->2/8]
zu62= Limit[D[Limit[y3,t->6/8],u],u->2/8]

COMPONENTES DE U72
xu72= Limit[D[Limit[x3,t->7/8],u],u->2/8]
yu72= Limit[D[Limit[y3,t->7/8],u],u->2/8]
zu72= Limit[D[Limit[y3,t->7/8],u],u->2/8]

COMPONENTES DE U82
xu82= Limit[D[Limit[x3,t->1],u],u->2/8]
yu82= Limit[D[Limit[y3,t->1],u],u->2/8]
zu82= Limit[D[Limit[y3,t->1],u],u->2/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E62
```
xe62=Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t->6/8],u->2/8]
ye62= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t->6/8],u->2/8]
ze62= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t->6/8],u->2/8]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x4= b3*a0*x03+b4*a0*x04+b5*a0*x05+
    b3*a1*x13+b4*a1*x14+b5*a1*x15+
    b3*a2*x23+b4*a2*x24+b5*a2*x25;
x4=Simplify[x4]

y4= b3*a0*y03+b4*a0*y04+b5*a0*y05+
    b3*a1*y13+b4*a1*y14+b5*a1*y15+
    b3*a2*y23+b4*a2*y24+b5*a2*y25;
y4=Simplify[y4]

z4= b3*a0*z03+b4*a0*z04+b5*a0*z05+
    b3*a1*z13+b4*a1*z14+b5*a1*z15+
    b3*a2*z23+b4*a2*z24+b5*a2*z25;
z4=Simplify[z4]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T03
```
xt03=Limit[D[Limit[x4,u->3/8],t],t->0]
yt03=Limit[D[Limit[y4,u->3/8],t],t->00]
zt03=Limit[D[Limit[z4,u->3/8],t],t->0]
```

COMPONENTU DE T13
```
xt13=Limit[D[Limit[x4,u->3/8],t],t->1/8]
yt13=Limit[D[Limit[y4,u->3/8],t],t->1/8]
zt13=Limit[D[Limit[z4,u->3/8],t],t->1/8]
```

COMPONENTES DE T23
```
xt23=Limit[D[Limit[x4,u->3/8],t],t->2/8]
yt23=Limit[D[Limit[y4,u->3/8],t],t->2/8]
zt23=Limit[D[Limit[z4,u->3/8],t],t->2/8]
```

COMPONENTES DE T24
```
xt24=Limit[D[Limit[x4,u->4/8],t],t->2/8]
yt24=Limit[D[Limit[y4,u->4/8],t],t->2/8]
zt24=Limit[D[Limit[z4,u->4/8],t],t->2/8]
```

COMPONENTES DE T25
xt25=Limit[D[Limit[x4,u->5/8],t],t->2/8]
yt25=Limit[D[Limit[y4,u->5/8],t],t->2/8]
zt25=Limit[D[Limit[z4,u->5/8],t],t->2/8]

COMPONENTES DE T15
xt15=Limit[D[Limit[x4,u->5/8],t],t->1/8]
yt15=Limit[D[Limit[y4,u->5/8],t],t->1/8]
zt15=Limit[D[Limit[z4,u->5/8],t],t->1/8]

COMPONENTES DE T05
xt05=Limit[D[Limit[x4,u->5/8],t],t->0]
yt13=Limit[D[Limit[y4,u->5/8],t],t->0]
zt13=Limit[D[Limit[z4,u->5/8],t],t->0]

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U03
xu03= Limit[D[Limit[x4,t->0],u],u->3/8]
yu03= Limit[D[Limit[y4,t->0],u],u->3/8]
zu03= Limit[D[Limit[y4,t->0],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U13
xu13= Limit[D[Limit[x4,t->1/8],u],u->3/8]
yu13= Limit[D[Limit[y4,t->1/8],u],u->3/8]
zu13= Limit[D[Limit[y4,t->1/8],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U23
xu23= Limit[D[Limit[x4,t->2/8],u],u->3/8]
yu23= Limit[D[Limit[y4,t->2/8],u],u->3/8]
zu23= Limit[D[Limit[y4,t->2/8],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U25
xu25= Limit[D[Limit[x4,t->2/8],u],u->5/8]
yu25= Limit[D[Limit[y4,t->2/8],u],u->5/8]
zu25= Limit[D[Limit[y4,t->2/8],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U15
xu15= Limit[D[Limit[x4,t->1/8],u],u->5/8]
yu15= Limit[D[Limit[y4,t->1/8],u],u->5/8]
zu15= Limit[D[Limit[y4,t->1/8],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U05
zu05= Limit[D[Limit[z4,t->1/8],u],u->3/8]
yu05= Limit[D[Limit[y4,t->1/8],u],u->3/8]
zu05= Limit[D[Limit[y4,t->1/8],u],u->3/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E23
ze23=Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->2/8],u->3/8]
ye23= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t->2/8],u->3/8]
ze23= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->2/8],u->3/8]

COMPONENTES DE E25
ze25=Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->2/8],u->5/8]
ye25= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t->2/8],u->5/8]
ze25= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t->2/8],u->5/8]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x5= b3*a3*x33+b4*a3*x34+b5*a3*x35+
    b3*a4*x43+b4*a4*x44+b5*a4*x45+
    b3*a5*x53+b4*a5*x54+b5*a5*x55;
x5=Simplify[x5]

y5= b3*a3*y33+b4*a3*y34+b5*a3*y35+
    b3*a4*y43+b4*a4*y44+b5*a4*y45+
    b3*a5*y53+b4*a5*y54+b5*a5*y55;
y5=Simplify[y5]

z5= b3*a3*z33+b4*a3*z34+b5*a3*z35+
    b3*a4*z43+b4*a4*z44+b5*a4*z45+
    b3*a5*z53+b4*a5*z54+b5*a5*z55;
z5=Simplify[z5]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T33
zt33=Limit[D[Limit[z5,u->3/8],t],t->3/8]
yt33=Limit[D[Limit[y5,u->3/8],t],t->3/8]
zt33=Limit[D[Limit[z5,u->3/8],t],t->3/8]

COMPONENTES DE T34
zt34=Limit[D[Limit[z5,u->4/8],t],t->3/8]
yt34=Limit[D[Limit[y5,u->4/8],t],t->3/8]

zt34=Limit[D[Limit[z5,u->4/8],t],t->3/8]

COMPONENTES DE T35
zt35=Limit[D[Limit[z5,u->5/8],t],t->3/8]
yt35=Limit[D[Limit[y5,u->5/8],t],t->3/8]
zt35=Limit[D[Limit[z5,u->5/8],t],t->3/8]

COMPONENTES DE T45
zt45=Limit[D[Limit[z5,u->5/8],t],t->4/8]
yt45=Limit[D[Limit[y5,u->5/8],t],t->4/8]
zt45=Limit[D[Limit[z5,u->5/8],t],t->4/8]

COMPONENTES DE T55
zt55=Limit[D[Limit[z5,u->5/8],t],t->5/8]
yt55=Limit[D[Limit[y5,u->5/8],t],t->5/8]
zt55=Limit[D[Limit[z5,u->5/8],t],t->5/8]

COMPONENTES DE T54
zt54=Limit[D[Limit[z5,u->4/8],t],t->5/8]
yt54=Limit[D[Limit[y5,u->4/8],t],t->5/8]
zt54=Limit[D[Limit[z5,u->4/8],t],t->5/8]

COMPONENTES DE T53
zt53=Limit[D[Limit[z5,u->3/8],t],t->5/8]
yt53=Limit[D[Limit[y5,u->3/8],t],t->5/8]
zt53=Limit[D[Limit[z5,u->3/8],t],t->5/8]

COMPONENTES DE T43
zt43=Limit[D[Limit[z5,u->3/8],t],t->4/8]
yt43=Limit[D[Limit[y5,u->3/8],t],t->4/8]
zt43=Limit[D[Limit[z5,u->3/8],t],t->4/8]

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U33
zu33= Limit[D[Limit[z5,t->3/8],u],u->3/8]
yu33= Limit[D[Limit[y5,t->3/8],u],u->3/8]
zu33= Limit[D[Limit[y5,t->3/8],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U35
zu35= Limit[D[Limit[z5,t->3/8],u],u->5/8]
yu35= Limit[D[Limit[y5,t->3/8],u],u->5/8]
zu35= Limit[D[Limit[y5,t->3/8],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U45

zu45= Limit[D[Limit[z5,t->4/8],u],u->5/8]
yu45= Limit[D[Limit[y5,t->4/8],u],u->5/8]
zu45= Limit[D[Limit[y5,t->4/8],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U55
zu55= Limit[D[Limit[z5,t->5/8],u],u->5/8]
yu55= Limit[D[Limit[y5,t->5/8],u],u->5/8]
zu55= Limit[D[Limit[y5,t->5/8],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U53
zu53= Limit[D[Limit[z5,t->5/8],u],u->3/8]
yu53= Limit[D[Limit[y5,t->5/8],u],u->3/8]
zu53= Limit[D[Limit[y5,t->5/8],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U43
zu43= Limit[D[Limit[z5,t->4/8],u],u->3/8]
yu43= Limit[D[Limit[y5,t->4/8],u],u->3/8]
zu43= Limit[D[Limit[y5,t->4/8],u],u->3/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E33
ze33=Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t->3/8],u->3/8]
ye33= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t->3/8],u->3/8]
ze33= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t->3/8],u->3/8]

COMPONENTES DE E35
ze35=Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t->3/8],u->5/8]
ye35= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t->3/8],u->5/8]
ze35= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t->3/8],u->5/8]

COMPONENTES DE E55
ze55=Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t->5/8],u->5/8]
ye55= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t->5/8],u->5/8]
ze55= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t->5/8],u->5/8]

COMPONENTES DE E53
ze53=Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t->5/8],u->3/8]
ye53= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t->5/8],u->3/8]
ze53= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t->5/8],u->3/8]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x6= b3*a6*x63+b4*a6*x64+b5*a6*x65+
b3*a7*x73+b4*a7*x74+b5*a7*x75+

```
      b3*a8*x83+b4*a8*x84+b5*a8*x85;
x6=Simplify[x6]

y6= b3*a6*y63+b4*a6*y64+b5*a6*y65+
      b3*a7*y73+b4*a7*y74+b5*a7*y75+
      b3*a8*y83+b4*a8*y84+b5*a8*y85;
y6=Simplify[y6]

z6= b3*a6*z63+b4*a6*z64+b5*a6*z65+
      b3*a7*z73+b4*a7*z74+b5*a7*z75+
      b3*a8*z83+b4*a8*z84+b5*a8*z85;
z6=Simplify[z6]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T83
```
zt83=Limit[D[Limit[z6,u->3/8],t],t->1]
yt83=Limit[D[Limit[y6,u->3/8],t],t->1]
zt83=Limit[D[Limit[z6,u->3/8],t],t->1]
```

COMPONENTES DE T73
```
zt73=Limit[D[Limit[z6,u->3/8],t],t->7/8]
yt73=Limit[D[Limit[y6,u->3/8],t],t->7/8]
zt73=Limit[D[Limit[z6,u->3/8],t],t->7/8]
```

COMPONENTES DE T63
```
zt63=Limit[D[Limit[z6,u->3/8],t],t->6/8]
yt63=Limit[D[Limit[y6,u->3/8],t],t->6/8]
zt63=Limit[D[Limit[z6,u->3/8],t],t->6/8]
```

COMPONENTES DE T64
```
zt64=Limit[D[Limit[z6,u->4/8],t],t->6/8]
yt64=Limit[D[Limit[y6,u->4/8],t],t->6/8]
zt64=Limit[D[Limit[z6,u->4/8],t],t->6/8]
```

COMPONENTES DE T65
```
zt65=Limit[D[Limit[z6,u->5/8],t],t->6/8]
yt65=Limit[D[Limit[y6,u->5/8],t],t->6/8]
zt65=Limit[D[Limit[z6,u->5/8],t],t->6/8]
```

COMPONENTES DE T75
```
zt75=Limit[D[Limit[z6,u->5/8],t],t->7/8]
yt75=Limit[D[Limit[y6,u->5/8],t],t->7/8]
zt75=Limit[D[Limit[z6,u->5/8],t],t->7/8]
```

COMPONENTES DE T85
zt85=Limit[D[Limit[z6,u->5/8],t],t->1]
yt85=Limit[D[Limit[y6,u->5/8],t],t->1]
zt85=Limit[D[Limit[z6,u->5/8],t],t->1]

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U83
zu83= Limit[D[Limit[z6,t->1],u],u->3/8]
yu83= Limit[D[Limit[y6,t->1],u],u->3/8]
zu83= Limit[D[Limit[y6,t->1],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U73
zu73= Limit[D[Limit[z6,t->7/8],u],u->3/8]
yu73= Limit[D[Limit[y6,t->7/8],u],u->3/8]
zu73= Limit[D[Limit[y6,t->7/8],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U63
zu63= Limit[D[Limit[z6,t->6/8],u],u->3/8]
yu63= Limit[D[Limit[y6,t->6/8],u],u->3/8]
zu63= Limit[D[Limit[y6,t->6/8],u],u->3/8]

COMPONENTES DE U65
zu65= Limit[D[Limit[z6,t->6/8],u],u->5/8]
yu65= Limit[D[Limit[y6,t->6/8],u],u->5/8]
zu65= Limit[D[Limit[y6,t->6/8],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U75
zu75= Limit[D[Limit[z6,t->7/8],u],u->5/8]
yu75= Limit[D[Limit[y6,t->7/8],u],u->5/8]
zu75= Limit[D[Limit[y6,t->7/8],u],u->5/8]

COMPONENTES DE U85
zu85= Limit[D[Limit[z6,t->1],u],u->5/8]
yu85= Limit[D[Limit[y6,t->1],u],u->5/8]
zu85= Limit[D[Limit[y6,t->1],u],u->5/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E63
ze63=Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t->6/8],u->3/8]
ye63= Limit[Limit[D[D[y6,t],u],t->6/8],u->3/8]
ze63= Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t->6/8],u->3/8]

COMPONENTES DE E65

```
ze65=Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t->6/8],u->5/8]
ye65= Limit[Limit[D[D[y6,t],u],t->6/8],u->5/8]
ze65= Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t->6/8],u->5/8]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x7= b6*a0*x06+b7*a0*x07+b8*a0*x08+
     b6*a1*x16+b7*a1*x17+b8*a1*x18+
     b6*a2*x26+b7*a2*x27+b8*a2*x28;

x7=Simplify[x7]

y7= b6*a0*y06+b7*a0*y07+b8*a0*y08+
     b6*a1*y16+b7*a1*y17+b8*a1*y18+
     b6*a2*y26+b7*a2*y27+b8*a2*y28;

y7=Simplify[y7]

z7= b6*a0*z06+b7*a0*z07+b8*a0*z08+
     b6*a1*z16+b7*a1*z17+b8*a1*z18+
     b6*a2*z26+b7*a2*z27+b8*a2*z28;

z7=Simplify[z7]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T06

```
zt06=Limit[D[Limit[z7,u->6/8],t],t->0]
yt06=Limit[D[Limit[y7,u->6/8],t],t->0]
zt06=Limit[D[Limit[z7,u->6/8],t],t->0]
```

COMPONENTES DE T16

```
zt16=Limit[D[Limit[z7,u->6/8],t],t->1/8]
yt16=Limit[D[Limit[y7,u->6/8],t],t->1/8]
zt16=Limit[D[Limit[z7,u->6/8],t],t->1/8]
```

COMPONENTES DE T26

```
zt26=Limit[D[Limit[z7,u->6/8],t],t->2/8]
yt26=Limit[D[Limit[y7,u->6/8],t],t->2/8]
zt26=Limit[D[Limit[z7,u->6/8],t],t->2/8]
```

COMPONENTES DE T27

```
zt27=Limit[D[Limit[z7,u->7/8],t],t->2/8]
yt27=Limit[D[Limit[y7,u->7/8],t],t->2/8]
zt27=Limit[D[Limit[z7,u->7/8],t],t->2/8]
```

COMPONENTES DE T28
```
zt28=Limit[D[Limit[z7,u->1],t],t->2/8]
yt28=Limit[D[Limit[y7,u->1],t],t->2/8]
zt28=Limit[D[Limit[z7,u->1],t],t->2/8]
```

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U06
```
zu06= Limit[D[Limit[z7,t->0],u],u->6/8]
yu06= Limit[D[Limit[y7,t->0],u],u->6/8]
zu06= Limit[D[Limit[y7,t->0],u],u->6/8]
```

COMPONENTES DE U16
```
zu16= Limit[D[Limit[z7,t->1/8],u],u->6/8]
yu16= Limit[D[Limit[y7,t->1/8],u],u->6/8]
zu16= Limit[D[Limit[y7,t->1/8],u],u->6/8]
```

COMPONENTES DE U26
```
zu26= Limit[D[Limit[z7,t->2/8],u],u->6/8]
yu26= Limit[D[Limit[y7,t->2/8],u],u->6/8]
zu26= Limit[D[Limit[y7,t->2/8],u],u->6/8]
```

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E26
```
ze26=Limit[Limit[D[D[z7,t],u],t->2/8],u->6/8]
ye26= Limit[Limit[D[D[y7,t],u],t->2/8],u->6/8]
ze26= Limit[Limit[D[D[z7,t],u],t->2/8],u->6/8]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x8= b6*a3*x36+b7*a3*x37+b8*a3*x38+
    b6*a4*x46+b7*a4*x47+b8*a4*x48+
    b6*a5*x56+b7*a5*x57+b8*a5*x58;
x8=Simplify[x8]

y8= b6*a3*y36+b7*a3*y37+b8*a3*y38+
    b6*a4*y46+b7*a4*y47+b8*a4*y48+
    b6*a5*y56+b7*a5*y57+b8*a5*y58;
y8=Simplify[y8]

z8= b6*a3*z36+b7*a3*z37+b8*a3*z38+
    b6*a4*z46+b7*a4*z47+b8*a4*z48+
    b6*a5*z56+b7*a5*z57+b8*a5*z58;
```

z8=Simplify[z8]

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T38
zt38=Limit[D[Limit[z8,u->1],t],t->3/8]
yt38=Limit[D[Limit[y8,u->1],t],t->3/8]
zt38=Limit[D[Limit[z8,u->1],t],t->3/8]

COMPONENTES DE T37
zt37=Limit[D[Limit[z8,u->7/8],t],t->3/8]
yt37=Limit[D[Limit[y8,u->7/8],t],t->3/8]
zt37=Limit[D[Limit[z8,u->7/8],t],t->3/8]

COMPONENTES DE T36
zt36=Limit[D[Limit[z8,u->6/8],t],t->3/8]
yt36=Limit[D[Limit[y8,u->6/8],t],t->3/8]
zt36=Limit[D[Limit[z8,u->6/8],t],t->3/8]

COMPONENTES DE T46
zt46=Limit[D[Limit[z8,u->6/8],t],t->4/8]
yt46=Limit[D[Limit[y8,u->6/8],t],t->4/8]
zt46=Limit[D[Limit[z8,u->6/8],t],t->4/8]

COMPONENTES DE T56
zt56=Limit[D[Limit[z8,u->6/8],t],t->5/8]
yt56=Limit[D[Limit[y8,u->6/8],t],t->5/8]
zt56=Limit[D[Limit[z8,u->6/8],t],t->5/8]

COMPONENTES DE T57
zt57=Limit[D[Limit[z8,u->7/8],t],t->5/8]
yt57=Limit[D[Limit[y8,u->7/8],t],t->5/8]
zt57=Limit[D[Limit[z8,u->7/8],t],t->5/8]

COMPONENTES DE T58
zt58=Limit[D[Limit[z8,u->1],t],t->5/8]
yt58=Limit[D[Limit[y8,u->1],t],t->5/8]
zt58=Limit[D[Limit[z8,u->1],t],t->5/8]

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U36
zu36= Limit[D[Limit[z8,t->3/8],u],u->6/8]
yu36= Limit[D[Limit[y8,t->3/8],u],u->6/8]

zu36= Limit[D[Limit[y8,t->3/8],u],u->6/8]

COMPONENTES DE U46
zu46= Limit[D[Limit[z8,t->4/8],u],u->6/8]
yu46= Limit[D[Limit[y8,t->4/8],u],u->6/8]
zu46= Limit[D[Limit[y8,t->4/8],u],u->6/8]

COMPONENTES DE U56
zu56= Limit[D[Limit[z8,t->5/8],u],u->6/8]
yu56= Limit[D[Limit[y8,t->5/8],u],u->6/8]
zu56= Limit[D[Limit[y8,t->5/8],u],u->6/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E36
ze36=Limit[Limit[D[D[z8,t],u],t->3/8],u->6/8]
ye36= Limit[Limit[D[D[y8,t],u],t->3/8],u->6/8]
ze36= Limit[Limit[D[D[z8,t],u],t->3/8],u->6/8]

COMPONENTES DE E56
ze56=Limit[Limit[D[D[z8,t],u],t->5/8],u->6/8]
ye56= Limit[Limit[D[D[y8,t],u],t->5/8],u->6/8]
ze56= Limit[Limit[D[D[z8,t],u],t->5/8],u->6/8]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x9= b6*a6*x66+b7*a6*x67+b8*a6*x68+
    b6*a7*x76+b7*a7*x77+b8*a7*x78+
    b6*a8*x86+b7*a8*x87+b8*a8*x88;
x9=Simplify[x9]

y9= b6*a6*y66+b7*a6*y67+b8*a6*y68+
    b6*a7*y76+b7*a7*y77+b8*a7*y78+
    b6*a8*y86+b7*a8*y87+b8*a8*y88;
y9=Simplify[y9]

z9= b6*a6*z66+b7*a6*z67+b8*a6*z68+
    b6*a7*z76+b7*a7*z77+b8*a7*z78+
    b6*a8*z86+b7*a8*z87+b8*a8*z88;
z9=Simplify[z9]
```

COMPONENTES DE LOS Tij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE T86

zt86=Limit[D[Limit[z9,u->6/8],t],t->1]
yt86=Limit[D[Limit[y9,u->6/8],t],t->1]
zt86=Limit[D[Limit[z9,u->6/8],t],t->1]

COMPONENTES DE T76
zt76=Limit[D[Limit[z9,u->6/8],t],t->7/8]
yt76=Limit[D[Limit[y9,u->6/8],t],t->7/8]
zt76=Limit[D[Limit[z9,u->6/8],t],t->7/8]

COMPONENTES DE T66
zt66=Limit[D[Limit[z9,u->6/8],t],t->6/8]
yt66=Limit[D[Limit[y9,u->6/8],t],t->6/8]
zt66=Limit[D[Limit[z9,u->6/8],t],t->6/8]

COMPONENTES DE T67
zt67=Limit[D[Limit[z9,u->7/8],t],t->6/8]
yt67=Limit[D[Limit[y9,u->7/8],t],t->6/8]
zt67=Limit[D[Limit[z9,u->7/8],t],t->6/8]

COMPONENTES DE T68
zt68=Limit[D[Limit[z9,u->1],t],t->6/8]
yt68=Limit[D[Limit[y9,u->1],t],t->6/8]
zt68=Limit[D[Limit[z9,u->1],t],t->6/8]

COMPONENTES DE LOS Uij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE U86
zu86= Limit[D[Limit[z9,t->1],u],u->6/8]
yu86= Limit[D[Limit[y9,t->1],u],u->6/8]
zu86= Limit[D[Limit[y9,t->1],u],u->6/8]

COMPONENTES DE U76
zu76= Limit[D[Limit[z9,t->7/8],u],u->6/8]
yu76= Limit[D[Limit[y9,t->7/8],u],u->6/8]
zu76= Limit[D[Limit[y9,t->7/8],u],u->6/8]

COMPONENTES DE U66
zu66= Limit[D[Limit[z9,t->6/8],u],u->6/8]
yu66= Limit[D[Limit[y9,t->6/8],u],u->6/8]
zu66= Limit[D[Limit[y9,t->6/8],u],u->6/8]

COMPONENTES DE LOS Eij DE LA FRONTERA

COMPONENTES DE E66
ze66=Limit[Limit[D[D[z9,t],u],t->6/8],u->6/8]

```
ye66= Limit[Limit[D[D[y9,t],u],t->6/8],u->6/8]
ze66= Limit[Limit[D[D[z9,t],u],t->6/8],u->6/8]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=b0*a9*x20+b1*a9*x21+b2*a9*x22+
        b0*a10*x30+b1*a10*x31+b2*a10*x32+
        b0*a11*xt20+b1*a11*xt21+b2*a11*xt22+
        b0*a12*xt30+b1*a12*xt31+b2*a12*xt32;
x110=Simplify[x110]

y110=b0*a9*y20+b1*a9*y21+b2*a9*y22+
        b0*a10*y30+b1*a10*y31+b2*a10*y32+
        b0*a11*yt20+b1*a11*yt21+b2*a11*yt22+
        b0*a12*yt30+b1*a12*yt31+b2*a12*yt32;
y110=Simplify[y110]

z110=b0*a9*z20+b1*a9*z21+b2*a9*z22+
        b0*a10*z30+b1*a10*z31+b2*a10*z32+
        b0*a11*zt20+b1*a11*zt21+b2*a11*zt22+
        b0*a12*zt30+b1*a12*zt31+b2*a12*zt32;
z110=Simplify[z110]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x111=b0*a13*x50+b1*a13*x51+b2*a13*x52+
        b0*a14*x60+b1*a14*x6l+b2*a14*x62+
        b0*a15*xt50+b1*a15*xt51+b2*a15*xt52+
        b0*a16*xt60+b1*a16*xt61+b2*a16*xt62
x111=Simplify[x111]

y111=b0*a13*y50+b1*a13*y51+b2*a13*y52+
        b0*a14*y60+b1*a14*y6l+b2*a14*y62+
        b0*a15*yt50+b1*a15*yt51+b2*a15*yt52+
        b0*a16*yt60+b1*a16*yt61+b2*a16*yt62;
y111=Simplify[y111]

z111=b0*a13*z50+b1*a13*z51+b2*a13*z52+
        b0*a14*z60+b1*a14*z6l+b2*a14*z62+
        b0*a15*zt50+b1*a15*zt51+b2*a15*zt52+
        b0*a16*zt60+b1*a16*zt61+b2*a16*zt62;
z111=Simplify[z111]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x112=b9*a0*x02+b10*a0*x03+b11*a0*xu02+b12*a0*xu03+
        b9*a1*x12+b10*a1*x13+b11*a1*xu12+b12*a1*xu13+
        b9*a2*x22+b10*a2*x23+b11*a2*xu22+b12*a2*xu23;
x112=Simplify[x112]

y112=b9*a0*y02+b10*a0*y03+b11*a0*yu02+b12*a0*yu03+
        b9*a1*y12+b10*a1*y13+b11*a1*yu12+b12*a1*yu13+
        b9*a2*y22+b10*a2*y23+b11*a2*yu22+b12*a2*yu23;
y112=Simplify[y112]

z112=b9*a0*z02+b10*a0*z03+b11*a0*zu02+b12*a0*zu03+
        b9*a1*z12+b10*a1*z13+b11*a1*zu12+b12*a1*zu13+
        b9*a2*z22+b10*a2*z23+b11*a2*zu22+b12*a2*zu23;
z112=Simplify[z112]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x113=b9*a9*x22+b10*a9*x23+b11*a9*xu22+b12*a9*xu23+
        b9*a10*x32+b10*a10*x33+b11*a10*xu32+b12*a10*xu33+
        b9*a11*xt22+b10*a11*xt23+b11*a11*xe22+b12*a11*xe23+
        b9*a12*xt32+b10*a12*xt33+b11*a12*xe32+b12*a12*xe33;
x113=Simplify[x113]

y113=b9*a9*y22+b10*a9*y23+b11*a9*yu22+b12*a9*yu23+
        b9*a10*y32+b10*a10*y33+b11*a10*yu32+b12*a10*yu33+
        b9*a11*yt22+b10*a11*yt23+b11*a11*ye22+b12*a11*ye23+
        b9*a12*yt32+b10*a12*yt33+b11*a12*ye32+b12*a12*ye33;
y113=Simplify[y113]

z113=b9*a9*z22+b10*a9*z23+b11*a9*zu22+b12*a9*zu23+
        b9*a10*z32+b10*a10*z33+b11*a10*zu32+b12*a10*zu33+
        b9*a11*zt22+b10*a11*zt23+b11*a11*ze22+b12*a11*ze23+
        b9*a12*zt32+b10*a12*zt33+b11*a12*ze32+b12*a12*ze33;
z113=Simplify[z113]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x114=b9*a3*x32+b10*a3*x33+b11*a3*xu32+b12*a3*xu33+
        b9*a4*x42+b10*a4*x43+b11*a4*xu42+b12*a4*xu43+
        b9*a5*x52+b10*a5*x53+b11*a5*xu52+b12*a5*xu53;
x114=Simplify[x114]
```

```
y114=b9*a3*y32+b10*a3*y33+b11*a3*yu32+b12*a3*yu33+
      b9*a4*y42+b10*a4*y43+b11*a4*yu42+b12*a4*yu43+
      b9*a5*y52+b10*a5*y53+b11*a5*yu52+b12*a5*yu53;
y114=Simplify[y114]

z114=b9*a3*z32+b10*a3*z33+b11*a3*zu32+b12*a3*zu33+
      b9*a4*z42+b10*a4*z43+b11*a4*zu42+b12*a4*zu43+
      b9*a5*z52+b10*a5*z53+b11*a5*zu52+b12*a5*zu53;
z114=Simplify[z114]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x115=b9*a13*x52+b10*a13*x53+b11*a13*xu52+b12*a13*xu53+
      b9*a14*x62+b10*a14*x63+b11*a14*xu62+b12*a14*xu63+
      b9*a15*xt52+b10*a15*xt53+b11*a15*xe52+b12*a15*xe53+
      b9*a16*xt62+b10*a16*xt63+b11*a16*xe62+b12*a16*xe63;
x115=Sirnplify[x115]
y115=b9*a13*y52+b10*a13*y53+b11*a13*yu52+b12*a13*yu53+
      b9*a14*y62+b10*a14*y63+b11*a14*yu62+b12*a14*yu63+
      b9*a15*yt52+b10*a15*yt53+b11*a15*ye52+b12*a15*ye53+
      b9*a16*yt62+b10*a16*yt63+b11*a16*ye62+b12*a16*ye63;
y115=Sirnplify[y115]

z115=b9*a13*z52+b10*a13*z53+b11*a13*zu52+b12*a13*zu53+
      b9*a14*z62+b10*a14*z63+b11*a14*zu62+b12*a14*zu63+
      b9*a15*zt52+b10*a15*zt53+b11*a15*ze52+b12*a15*ze53+
      b9*a16*zt62+b10*a16*zt63+b11*a16*ze62+b12*a16*ze63;
z115=Sirnplify[z115]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x116=b9*a6*x62+b10*a6*x63+b11*a6*xu62+b12*a6*xu63+
      b9*a7*x72+b10*a7*x73+b11*a7*xu72+b12*a7*xu73+
      b9*a8*x82+b10*a8*x83+b11*a8*xu82+b12*a8*xu83;
x116=Simplify[x116]

y116=b9*a6*y62+b10*a6*y63+b11*a6*yu62+b12*a6*yu63+
      b9*a7*y72+b10*a7*y73+b11*a7*yu72+b12*a7*yu73+
      b9*a8*y82+b10*a8*y83+b11*a8*yu82+b12*a8*yu83;
y116=Simplify[y116]

z116=b9*a6*z62+b10*a6*z63+b11*a6*zu62+b12*a6*zu63+
      b9*a7*z72+b10*a7*z73+b11*a7*zu72+b12*a7*zu73+
```

```
        b9*a8*z82+b10*a8*z83+b11*a8*zu82+b12*a8*zu83;
z116=Simplify[z116]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x117=b3*a9*x23+b4*a9*x24+b5*a9*x25+
        b3*a10*x33+b4*a10*x34+b5*a10*x35+
        b3*a11*xt23+b4*a11*xt24+b5*a11*xt25+
        b3*a12*xt33+b4*a12*xt34+b5*a12*xt35;
x117=Simplify[x117]

y117=b3*a9*y23+b4*a9*y24+b5*a9*y25+
        b3*a10*y33+b4*a10*y34+b5*a10*y35+
        b3*a11*yt23+b4*a11*yt24+b5*a11*yt25+
        b3*a12*yt33+b4*a12*yt34+b5*a12*yt35;
y117=Simplify[y117]

z117=b3*a9*z23+b4*a9*z24+b5*a9*z25+
        b3*a10*z33+b4*a10*z34+b5*a10*z35+
        b3*a11*zt23+b4*a11*zt24+b5*a11*zt25+
        b3*a12*zt33+b4*a12*zt34+b5*a12*zt35;
z117=Simplify[z117]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x118=b3*a13*x53+b4*a13*x54+b5*a13*x55+
        b3*a14*x63+b4*a14*x64+b5*a14*x65+
        b3*a15*xt53+b4*a15*xt54+b5*a15*xt55+
        b3*a16*xt63+b4*a16*xt64+b5*a16*xt65;
x118=Simplify[x118]

y118=b3*a13*y53+b4*a13*y54+b5*a13*y55+
        b3*a14*y63+b4*a14*y64+b5*a14*y65+
        b3*a15*yt53+b4*a15*yt54+b5*a15*yt55+
        b3*a16*yt63+b4*a16*yt64+b5*a16*yt65;
y118=Simplify[y118]

z118=b3*a13*z53+b4*a13*z54+b5*a13*z55+
        b3*a14*z63+b4*a14*z64+b5*a14*z65+
        b3*a15*zt53+b4*a15*zt54+b5*a15*zt55+
        b3*a16*zt63+b4*a16*zt64+b5*a16*zt65;
z118=Simplify[z118]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x119=b13*a0*x05+b14*a0*x06+b15*a0*xu05+b16*a0*xu06+
        b13*a1*x15+b14*a1*x16+b15*a1*xu15+b16*a1*xu16+
        b13*a2*x25+b14*a2*x26+b15*a2*xu25+b16*a2*xu26;
x119=Simplify[x119]

y119=b13*a0*y05+b14*a0*y06+b15*a0*yu05+b16*a0*yu06+
        b13*a1*y15+b14*a1*y16+b15*a1*yu15+b16*a1*yu16+
        b13*a2*y25+b14*a2*y26+b15*a2*yu25+b16*a2*yu26;
y119=Simplify[y119]

z119=b13*a0*z05+b14*a0*z06+b15*a0*zu05+b16*a0*zu06+
        b13*a1*z15+b14*a1*z16+b15*a1*zu15+b16*a1*zu16+
        b13*a2*z25+b14*a2*z26+b15*a2*zu25+b16*a2*zu26;
z119=Simplify[z119]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x120=b13*a9*x25+b14*a9*x26+b15*a9*xu25+b16*a9*xu26+
        b13*a10*x35+b14*a10*x36+b15*a10*xu35+b16*a10*xu36+
        b13*a11*xt25+b14*a11*xt26+b15*a11*xe25+b16*a11*xe26+
        b13*a12*xt35+b14*a12*xt36+b15*a12*xe35+b16*a12*xe36;
x120=Simplify[x120]

y120=b13*a9*y25+b14*a9*y26+b15*a9*yu25+b16*a9*yu26+
        b13*a10*y35+b14*a10*y36+b15*a10*yu35+b16*a10*yu36+
        b13*a11*yt25+b14*a11*yt26+b15*a11*ye25+b16*a11*ye26+
        b13*a12*yt35+b14*a12*yt36+b15*a12*ye35+b16*a12*ye36;
y120=Simplify[y120]

z120=b13*a9*z25+b14*a9*z26+b15*a9*zu25+b16*a9*zu26+
        b13*a10*z35+b14*a10*z36+b15*a10*zu35+b16*a10*zu36+
        b13*a11*zt25+b14*a11*zt26+b15*a11*ze25+b16*a11*ze26+
        b13*a12*zt35+b14*a12*zt36+b15*a12*ze35+b16*a12*ze36;
z120=Simplify[z120]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x121=b13*a3*x35+b14*a3*x36+b15*a3*xu35+b16*a3*xu36+
        b13*a4*x45+b14*a4*x46+b15*a4*xu45+b16*a4*xu46+
        b13*a5*x55+b14*a5*x56+b15*a5*xu55+b16*a5*xu56;
```

```
x121=Simplify[z121]

y121=b13*a3*y35+b14*a3*y36+b15*a3*yu35+b16*a3*yu36+
       b13*a4*y45+b14*a4*y46+b15*a4*yu45+b16*a4*yu46+
       b13*a5*y55+b14*a5*y56+b15*a5*yu55+b16*a5*yu56;
y121=Simplify[z121]

z121=b13*a3*z35+b14*a3*z36+b15*a3*zu35+b16*a3*zu36+
       b13*a4*z45+b14*a4*z46+b15*a4*zu45+b16*a4*zu46+
       b13*a5*z55+b14*a5*z56+b15*a5*zu55+b16*a5*zu56;
z121=Simplify[z121]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x122=b13*a13*x55+b14*a13*x56+b15*a13*xu55+b16*a13*xu56+
       b13*a14*x65+b14*a14*x66+b15*a14*xu65+b16*a14*xu66+
       b13*a15*xt55+b14*a15*xt56+b15*a15*xe55+b16*a15*xe56+
       b13*a16*xt65+b14*a16*xt66+b15*a16*xe65+b16*a16*xe66;
x122=Simplify[x122]

y122=b13*a13*y55+b14*a13*y56+b15*a13*yu55+b16*a13*yu56+
       b13*a14*y65+b14*a14*y66+b15*a14*yu65+b16*a14*yu66+
       b13*a15*yt55+b14*a15*yt56+b15*a15*ye55+b16*a15*ye56+
       b13*a16*yt65+b14*a16*yt66+b15*a16*ye65+b16*a16*ye66;
y122=Simplify[y122]

z122=b13*a13*z55+b14*a13*z56+b15*a13*zu55+b16*a13*zu56+
       b13*a14*z65+b14*a14*z66+b15*a14*zu65+b16*a14*zu66+
       b13*a15*zt55+b14*a15*zt56+b15*a15*ze55+b16*a15*ze56+
       b13*a16*zt65+b14*a16*zt66+b15*a16*ze65+b16*a16*ze66;
z122=Simplify[z122]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x123=b13*a6*x65+b14*a6*x66+b15*a6*xu65+b16*a6*xu66+
       b13*a7*x75+b14*a7*x76+b15*a7*xu75+b16*a7*xu76+
       b13*a8*x85+b14*a8*x86+b15*a8*xu85+b16*a8*xu86;
x123=Simplify[x123]

y123=b13*a6*y65+b14*a6*y66+b15*a6*yu65+b16*a6*yu66+
       b13*a7*y75+b14*a7*y76+b15*a7*yu75+b16*a7*yu76+
       b13*a8*y85+b14*a8*y86+b15*a8*yu85+b16*a8*yu86;
y123=Simplify[y123]
```

```
z123=b13*a6*z65+b14*a6*z66+b15*a6*zu65+b16*a6*zu66+
        b13*a7*z75+b14*a7*z76+b15*a7*zu75+b16*a7*zu76+
        b13*a8*z85+b14*a8*z86+b15*a8*zu85+b16*a8*zu86;
z123=Simplify[z123]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x 124=b6*a9*x26+b7*a9*x27+b8 *a9*x28+
         b6*a10*x36+b7*a10*x37+b8*a10*x38+
         b6*a11*xt26+b7*a11*xt27+b8*a11*xt28+
         b6*a12*xt36+b7*a12*xt37+b8*a12*xt38;
x124=Simplify[x124]

y 124=b6*a9*y26+b7*a9*y27+b8 *a9*y28+
         b6*a10*y36+b7*a10*y37+b8*a10*y38+
         b6*a11*yt26+b7*a11*yt27+b8*a11*yt28+
         b6*a12*yt36+b7*a12*yt37+b8*a12*yt38;
y124=Simplify[y124]

z 124=b6*a9*z26+b7*a9*z27+b8 *a9*z28+
         b6*a10*z36+b7*a10*z37+b8*a10*z38+
         b6*a11*zt26+b7*a11*zt27+b8*a11*zt28+
         b6*a12*zt36+b7*a12*zt37+b8*a12*zt38;
z124=Simplify[z124]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x125=b6*a13*x56+b7*a13*x57+b8*a13*x58+
        b6*a14*x66+b7*a14*x67+b8*a14*x68+
        b6*a15*xt56+b7*a15*xt57+b8*a15*xt58+
        b6*a16*xt66+b7*a16*xt67+b8*a16*xt68;
x125=Sirnplify[x125]

y125=b6*a13*y56+b7*a13*y57+b8*a13*y58+
        b6*a14*y66+b7*a14*y67+b8*a14*y68+
        b6*a15*yt56+b7*a15*yt57+b8*a15*yt58+
        b6*a16*yt66+b7*a16*yt67+b8*a16*yt68;
y125=Sirnplify[y125]

z125=b6*a13*z56+b7*a13*z57+b8*a13*z58+
        b6*a14*z66+b7*a14*z67+b8*a14*z68+
        b6*a15*zt56+b7*a15*zt57+b8*a15*zt58+
        b6*a16*zt66+b7*a16*zt67+b8*a16*zt68;
z125=Sirnplify[z125]
```

CONSTRUCCION DE LA SUPERFICIE TOTAL

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
Off[Set::write]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c1=S.9x9.02-02=
ParametricPlot3D[{xl,yl,zl},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c2=S.9x9.02-23=
ParametricPlot3D[{x2,y2,z2},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c3=S.9x9.02-35=
ParametricPlot3D[{x3,y3,z3},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c4=S.9x9.02-56=
ParametricPlot3D[{x4,y4,z4},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c5=S.9x9.02-68=
ParametricPlot3D[{x5,y5,z5},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c6=S.9x9.23-02=
ParametricPlot3D[{x6,y6,z6},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c7=S.9x9.23-23=
ParametricPlot3D[{x7,y7,z7},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c8=S.9x9.23-35=
ParametricPlot3D[{x7,y7,z7},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c9=S.9x9.23-56=
ParametricPlot3D[{x9,y9,z9},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]
```

```
c10=S.9x9.23-68=
ParametricPlot3D[{x10,y10,z10},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c11=S.9x9.35-02=
ParametricPlot3D[{x11,y11,z11},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c12=S.9x9.35-23=
ParametricPlot3D[{x12,y12,z12},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c13=S.9x9.35-35=
ParametricPlot3D[{x13,y13,z13},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c14=S.9x9.35-56=
ParametricPlot3D[{x14,y14,z14},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c15=S.9x9.35-68=
ParametricPlot3D[{x15,y15,z15},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c16=S.9x9.56-02=
ParametricPlot3D[{x16,y16,z16},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c17=S.9x9.56-23=
ParametricPlot3D[{x17,y17,z17},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c18=S.9x9.56-35=
ParametricPlot3D[{x18,y18,z18},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c19=S.9x9.56-56=
ParametricPlot3D[{x19,y19,z19},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c20=S.9x9.56-68=
ParametricPlot3D[{x20,y20,z20},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c21=S.9x9.68-02=
```

```
ParametricPlot3D[{x21,y21,z21},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c22=S.9x9.68-23=
ParametricPlot3D[{x22,y22,z22},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c23=S.9x9.68-35=
ParametricPlot3D[{x23,y23,z23},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c24=5.9x9.68-56=
ParametricPlot3D[{x24,y24,z24},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]

c25=S.9x9.68-68=
ParametricPlot3D[{x25,y25,z25},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
                    AxesLabel->{xLabel,yLabel,zLabel},PlotPoints->5]
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE TOTAL

```
Show[c11,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c1,c11,c12,c13,c14,
       c15,c 16,c 17,c18,c19,c20,c21,c22,c23,c24,c25]
```

CAPITULO 5: EJEMPLOS DE APLICACION

Ejemplo de superficie bilineal que pasa por una red de 2x2 puntos dados: P-1

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

Funciones previas

```
a=-t+1;
b=t;
c=-u+1;
d=u;
```

Coordenadas de las esquinas

Coordenadas de P00

```
x00=0;
x00=0;
x00=0;
```

Coordenadas de P01

```
x01=4;
y01=8;
z01=3;
```

Coordenadas de P10

```
x10=-3;
y10=7;
z10=10;
```

Coordenadas de P11

```
x11=2;
y11=10;
z11=6;
```

Ecuaciones parametricas de la superficie

```
x=a*c*x00+b*c*x10+a*d*x01+b*d*x11;
Expand[x] ;
x=simplify[x]

    -3 t + 4 u + t u

y=a*c*y00+b*c*y10+a*d*y01+b*d*y11;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

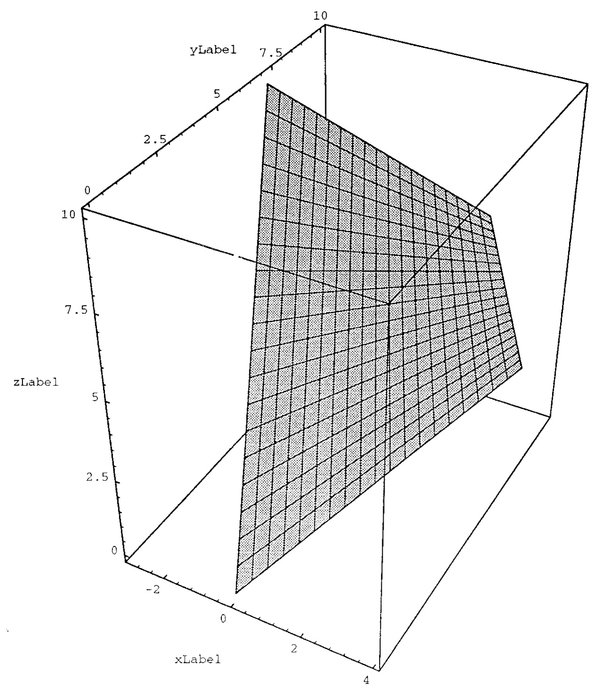
7 t + 8 u - 5 t u

z=a*c*z00+b*c*z10+a*d*z01+b*d*z11;
Expand[z] ;
z=simplify[z]

10 t + 3 u - 7 t u

Dibujo de la superficie

ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]



Ejemplo de superficie bilíneal que pasa por una red de 2x2 puntos dados: P-2

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

Funciones previas

```
a=-t+1;
b=t;
c=-u+1;
d=u;
```

Coordenadas de las esquinas

Coordenadas de P00

```
x00=4;
x00=5;
x00=0;
```

Coordenadas de P01

```
x01=-1;
y01=7;
z01=9;
```

Coordenadas de P10

```
x10=2;
y10=10;
z10=8;
```

Coordenadas de P11

```
x11=1;
y11=1;
z11=6;
```

Ecuaciones parametricas de la superficie

```
x=a*c*x00+b*c*x10+a*d*x01+b*d*x11;
Expand[x] ;
x=simplify[x]
```

4-2 t -5 u + 4t u

```
y=a*c*y00+b*c*y10+a*d*y01+b*d*y11;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

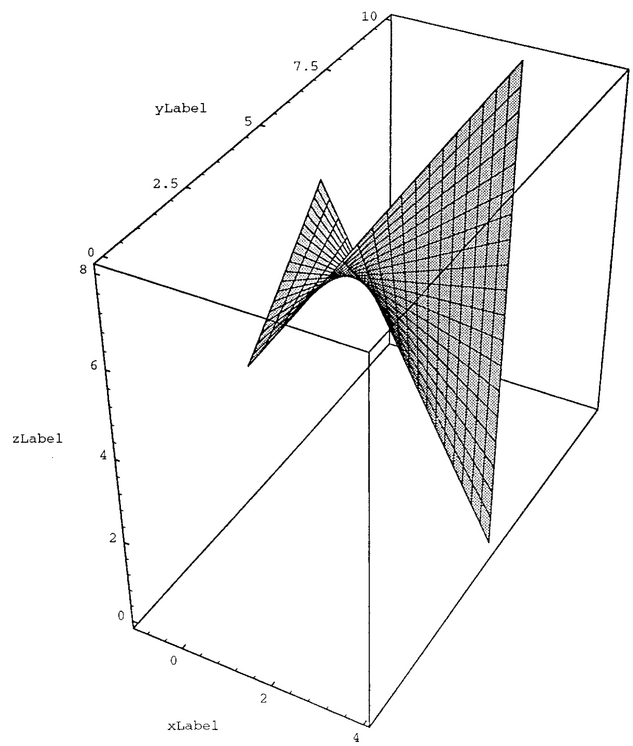
5+5 t + 2 u - 11 t u

```
z=a*c*z00+b*c*z10+a*d*z01+b*d*z11;
Expand[z] ;
z=simplify[z]
```

8 t + 6 u - 8 t u

Dibujo de la superficie

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



Ejemplo de superficie bilineal que pasa por una red de 2x2 puntos dados: P-3

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

Funciones previas

```
a=-t+1;
b=t;
c=-u+1;
d=u;
```

Coordenadas de las esquinas

Coordenadas de P00

```
x00=4;
x00=5;
x00=0;
```

Coordenadas de P01

```
x01=-1;
y01=7;
z01=0;
```

Coordenadas de P10

```
x10=2;
y10=10;
z10=8;
```

Coordenadas de P11

```
x11=1;
y11=1;
z11=6;
```

Ecuaciones parametricas de la superficie

```
x=a*c*x00+b*c*x10+a*d*x01+b*d*x11;
Expand[x] ;
x=simplify[x]

    4-2 t -5 u +4 t u

y=a*c*y00+b*c*y10+a*d*y01+b*d*y11;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

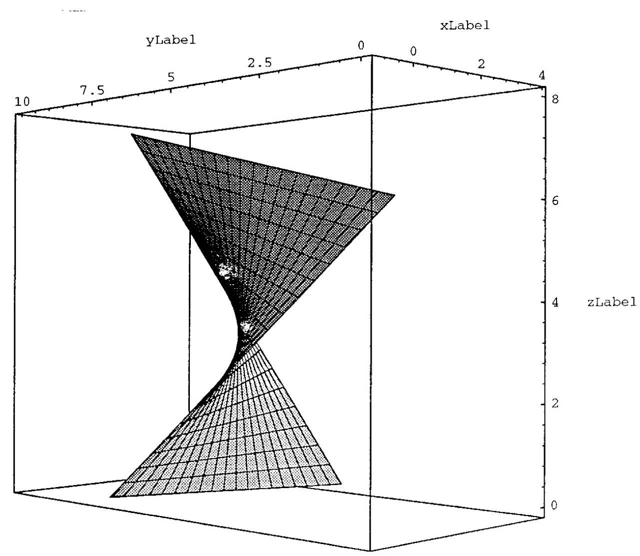
5+5 t + 2 u - 11 t u

```
z=a*c*z00+b*c*z10+a*d*z01+b*d*z11;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

2 t (4 – u)

Dibujo de la superficie

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                    AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



Ejemplo de superficie polinomial bilineal triangular que pasa por una red de tres puntos dados : P-4

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

Funciones previas

```
a=-t+1;
b=t;
c=-u+1;
d=u;
```

Coordenadas de las esquinas

Coordenadas de P00

```
x00=0;
x00=0;
x00=0;
```

Coordenadas de P01

```
x01=2;
y01=10;
z01=6;
```

Coordenadas de P10

```
x10=-3;
y10=7;
z10=10;
```

Coordenadas de P11

```
x11=2;
y11=10;
z11=6;
```

Ecuaciones parametricas de la superficie

```
x=a*c*x00+b*c*x10+a*d*x01+b*d*x11;
Expand[x] ;
x=simplify[x]
```

$$-3\,t + 2\,u + 3\,t\,u$$

```
y=a*c*y00+b*c*y10+a*d*y01+b*d*y11;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

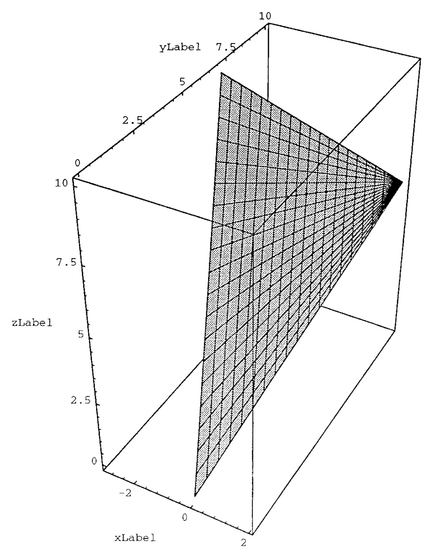
7 t + 10 u - 7 t u

```
z=a*c*z00+b*c*z10+a*d*z01+b*d*z11;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

10 t + 6 u - 10 t u

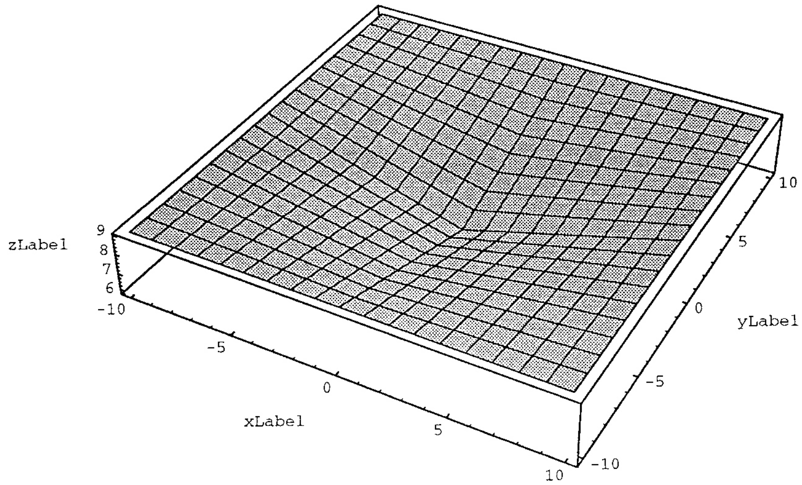
Dibujo de la superficie

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                    AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



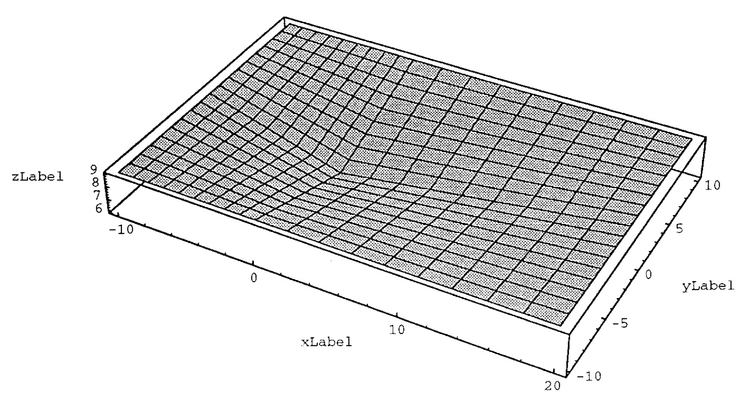
Ejemplo del uso de superficies polinomiales bilineales para el diseño de una combinacion del tipo paraguas simétrico: P-5

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

a=ParametricPlot3D[{10*u,
                    10*(-1+t),
                      3*(3-t+t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                   AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                   DisplayFunction->Identity,
                    PlotPoints->10]


b=ParametricPlot3D[{10*u,
                      10*t,
                      3*(2+t+u-t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                   AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                   DisplayFunction->Identity,
                   PlotPoints->10]

c=ParametricPlot3D[{10*(-1+u),
                      10*t,
                      3*(3-u+t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                   AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                   DisplayFunction->Identity,
                   PlotPoints->10]


d=ParametricPlot3D[{10*(-1+u),
                      10*(-1+t),
                      9-3*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                   AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                   DisplayFunction->Identity,
                   PlotPoints->10]


Show[a,b,c,d,DisplayFunction->$DisplayFunction]
```


zLabel
9
8
7
6
-10
-5
0
xLabel
5
10
-10
-5
0
yLabel
5
10

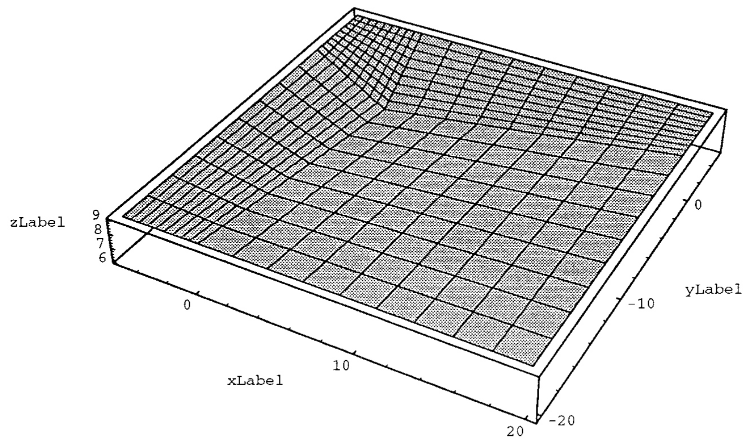
Ejemplo del uso de superficies polinomiales bilineales para el diseño de una combinación del tipo paraguas simétrico: P-6

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

 a=ParametricPlot3D[{20*u,
                     10*(-1+t),
                     3*(3-t+t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


 b=ParametricPlot3D[{20*u,
                     10*t,
                     3*(2+t+u-t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]

 c=ParametricPlot3D[{10*(-1+u),
                     10*t,
                     3*(3-u+t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


 d=ParametricPlot3D[{10*(-1+u),
                     10*(-1+t),
                     9-3*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]

Show[a,b,c,d,DisplayFunction->$DisplayFunction]
```



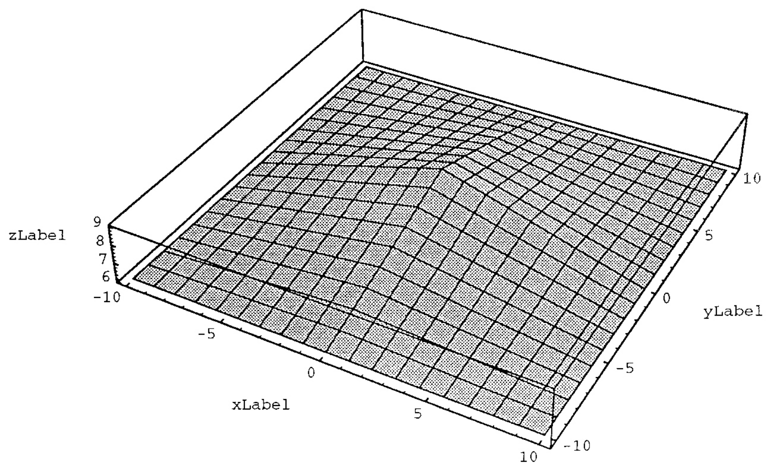
Ejemplo del uso de superficies polinomiales bilineales para el diseño de una combinación del tipo paraguas asimetrico: P-7

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

  a=ParametricPlot3D[{20*u,
                      20*(-1+t),
                      3*(3-t+t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                         AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                         DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


  b=ParametricPlot3D[{20*u,
                      5*t,
                      3*(2+t+u-t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                         AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                         DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]

  c=ParametricPlot3D[{-5+5*u,
                      5*t,
                      3*(3-u+t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                         AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                         DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


  d=ParametricPlot3D[{-5+5*u,
                      20*(-1+t),
                      9-3*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                         AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                         DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


Show[a,b,c,d,DisplayFunction->$DisplayFunction]
```


zLabel
9
8
7
6
0
10
xLabel
20
0
-10
yLabel
-20

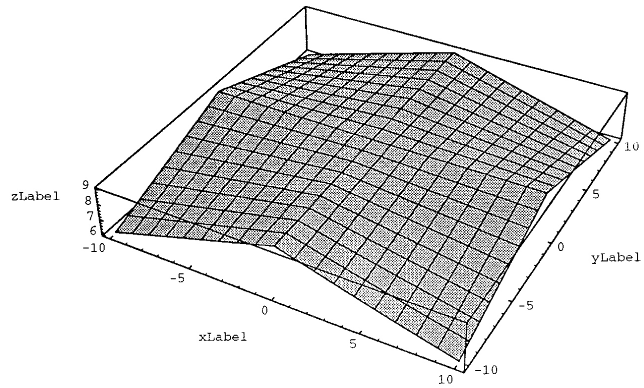
Ejemplo del uso de superficies polinomiales bilineales para el diseño de una combinación del tipo paraguas invertido: P-8

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

  a=ParametricPlot3D[{10*u,
                     10*(-1+t),
                     3*(2+t-t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


  b=ParametricPlot3D[{10*u,
                     10*t,
                     3*(3-t-u+t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]

  c=ParametricPlot3D[{-10+10*u,
                     10*t,
                     3*(2+u-t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


  d=ParametricPlot3D[{10*(-1+u),
                     10*(-1+t),
                     6+3*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


Show[a,b,c,d,DisplayFunction->$DisplayFunction]
```


zLabel
9
8
7
6
-10
-5
0
5
10
xLabel
10
5
0
-5
-10
yLabel

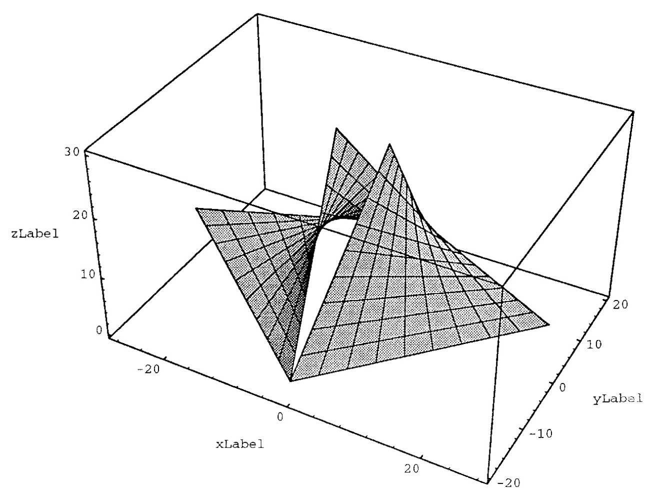
Ejemplo del uso de superficies polinomiales bilineales para el diseño de una combinación del tipo paraguas de vértices caidos: P-9

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

  a=ParametricPlot3D[{10*u,
                      10*(-1+t),
                      3*(3-u+t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                         AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                         DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


  b=ParametricPlot3D[{10*u,
                      10*t,
                      9-3*t*u },{t,0,1},{u,0,1},
                         AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                         DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


  c=ParametricPlot3D[{10*(-1+u),
                      10*t,
                      3*(3-t+t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                         AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                         DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


  d=ParametricPlot3D[{10*(-1+u),
                      10*(-1+t),
                      3*(2+t+u-t*u)},{t,0,1},{u,0,1},
                         AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                         DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]

Show[a,b,c,d,DisplayFunction->$DisplayFunction]
```


zLabel
9
8
7
6
-10
-5
0
5
10
xLabel
10
5
0
-5
-10
yLabel

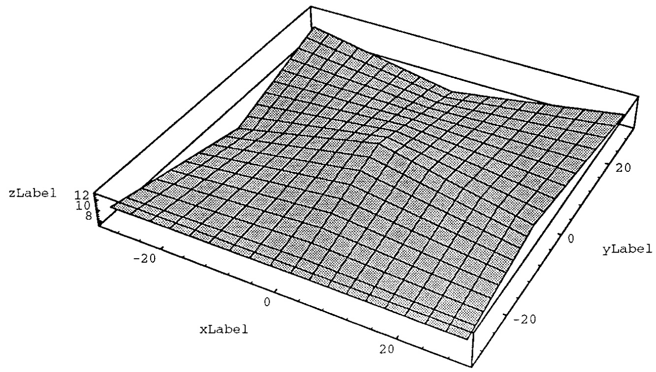
Ejemplo del uso de superficies polinomiales bilineales para el diseño de la cubierta de la iglesia de S. Jose Obrero (Monterrey): P-10

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

 a=ParametricPlot3D[{10*u,
                10*(-1+t),
                3*(3-t+t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                   AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                   DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


 b=ParametricPlot3D[{10*u,
                10*t,
                3*(2+t+u-t*u) },{t,0,1},{u,0,1},
                   AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                   DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]

Show[a,b,DisplayFunction->$DisplayFunction]
```



Ejemplo del uso de superficies polinomiales bilineales para el diseño de la cubierta de la piscina municipal de Hatfield (Inglaterra): P-11

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

 a=ParametricPlot3D[{3*(10-t)*u,
                     3*(-1+t)*(9+u),
                     7+6*t+3*u-9*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


 b=ParametricPlot3D[{3*(9+t)*u,
                     3*t*(9+u),
                     13-6*t-6*u+9*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]

 c=ParametricPlot3D[{3*(9+t)*(-1+u),
                     3*t*(10-u),
                     7+3*t+6*u-9*t*u },{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


 d=ParametricPlot3D[{-30+3*t+30*u-3*t*u,
                     -30+30*t+3*u-3*t*u,
                     10-3*t-3*u+9*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]

Show[a,b,c,d,DisplayFunction->$DisplayFunction]
```


zLabel
12
10
8
-20
0
xLabel
20
20
0
yLabel
-20

Ejemplo del uso de superficies polinomiales bilineales para el diseño de la cubierta de la iglesia de N.S. de la Soledad (F.Candela) : P-12

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

Funciones previas

```
a=-t+1;
b=t;
c=-u+1;
d=u;
```

Coordenadas de las esquinas

Coordenadas de P00

```
x00=0;
x00=0;
x00=3;
```

Coordenadas de P01

```
x01=18;
y01=14.5;
z01=7;
```

Coordenadas de P10

```
x10=-18;
y10=14.5;
z10=7;
```

Coordenadas de P11

```
x11=0;
y11=29;
z11=3;
```

Ecuaciones parametricas de la superficie

```
x=a*c*x00+b*c*x10+a*d*x01+b*d*x11;
Expand[x] ;
x=simplify[x]

    18(-t+u)

y=a*c*y00+b*c*y10+a*d*y01+b*d*y11;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

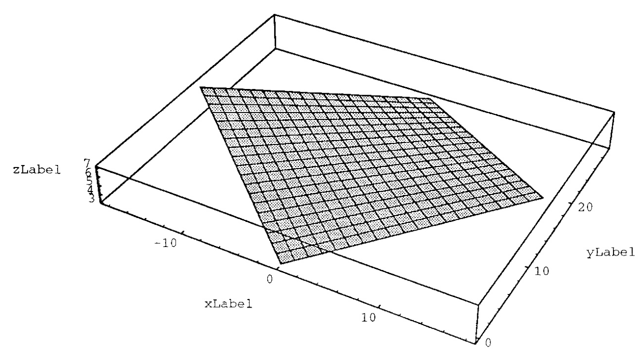
14.5t+14.5u

```
z=a*c*z00+b*c*z10+a*d*z01+b*d*z11;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

3+4t+4u-8tu

Dibujo de la superficie

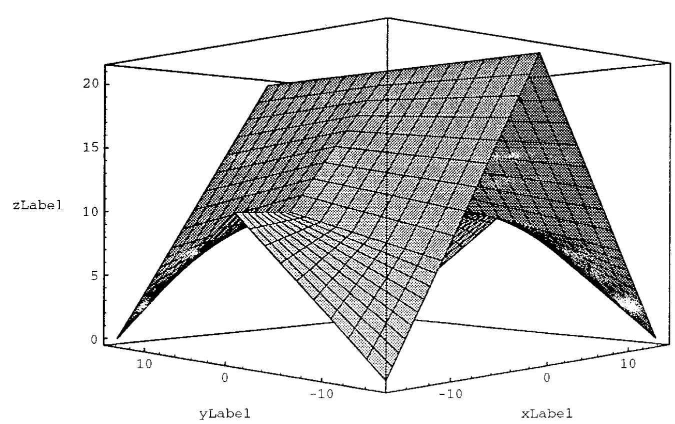
```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                           AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



Ejemplo del uso de superficies polinomiales bilineales para el diseño de la cubierta de la iglesia de la Medalla Milagrosa (F. Candela): P-13

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]


a=ParametricPlot3D[{10*(-1+u),
                   15*(-1+t),
                   7+3*t+14*u-3*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                       AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                       DisplayFunction->Identity,
                       PlotPoints->10,ViewPoint->{-2,-2,0}]


b=ParametricPlot3D[{10*(-1+u),
                   15*t,
                   10-3*t+11*u+3*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                       AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                       DisplayFunction->Identity,
                       PlotPoints->10,ViewPoint->{-2,-2,0}]


c=ParametricPlot3D[{5*(-3+u),
                   15*t,
                   10-10*t+7*t*u },{t,0,1},{u,0,1},
                       AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                       DisplayFunction->Identity,
                       PlotPoints->10,ViewPoint->{-2,-2,0}]


d=ParametricPlot3D[{5*(-3+u),
                   15*(-1+t),
                   10*t+7*u-7*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                       AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                       DisplayFunction->Identity,
                       PlotPoints->10,ViewPoint->{-2,-2,0}]


e=ParametricPlot3D[{-10*(-1+u),
                   15*(-1+t),
                   7+3*t+14*u-3*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                       AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                       DisplayFunction->Identity,
                       PlotPoints->10,ViewPoint->{-2,-2,0}]
```

```
f=ParametricPlot3D[{-10*(-1+u),
                    15*t,
                    10-3*t+11*u+3*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity,
                        PlotPoints->10,ViewPoint->{-2,-2,0}]


g=ParametricPlot3D[{-5*(-3+u),
                    15*t,
                    10-10*t+7*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity,
                        PlotPoints->10,ViewPoint->{-2,-2,0}]


h=ParametricPlot3D[{-5*(-3+u),
                    15*(-1+t),
                    10*t+7*u-7*t*u},{t,0,1},{u,0,1},
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                        DisplayFunction->Identity,
                        PlotPoints->10,ViewPoint->{-2,-2,0}]

Show[a,b,c,d,e,f,g,h,DisplayFunction->$DisplayFunction]
```



Ejemplo de superficie polinomial bicuadrática que pasa por una red de 3x3 puntos dados: P-14

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

FUNCIONES PREVIAS

```
a=2*t^2-3*t+l;
b=-4*t^2+4^t;
c=2*t^2-t;

d=2*u^2-3*u+l;
e=-4*u^2+4^u;
f=2*u^2-u;
```

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00

```
x00=5;
y00=-6;
z00=0;
```

coordenadas de P10

```
x10=0;
y10=-6;
z10=2;
```

coordenadas de P20

```
x20=-5;
y20=-6;
z20=0;
```

coordenadas de P01

```
x01=-4.7;
y01=0;
z01=0;
```

coordenadas de P11

```
x11=0;
y11=0;
z11=11.7;
```

coordenadas de P21

```
x21=-4.7;
```

```
y21=0;
z21=0;
```

coordenadas de P02

```
x02=5;
y02=6;
z02=0;
```

coordenadas de P12

```
x12=0;
y12=6;
z12=12;
```

coordenadas de P22

```
x22=-5;
y22=6;
z22=0;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE POLINOMICA

```
x=a*d*x00+b*d*x10+c*d*x20+
   a*e*x01+b*e*x11+c*e*x21+
   a*f*x02+b*f*x12+c*f*x22
x=Simplify[x]
```

$5-10t-1.2u+2.4tu+1.2u^2-2.4tu^2$

```
y=a*d*y00+b*d*y10+c*d*y20+
   a*e*y01+b*e*y11+c*e*y21+
   a*f*y02+b*f*y12+c*f*y22
y=Simplify[y]
```

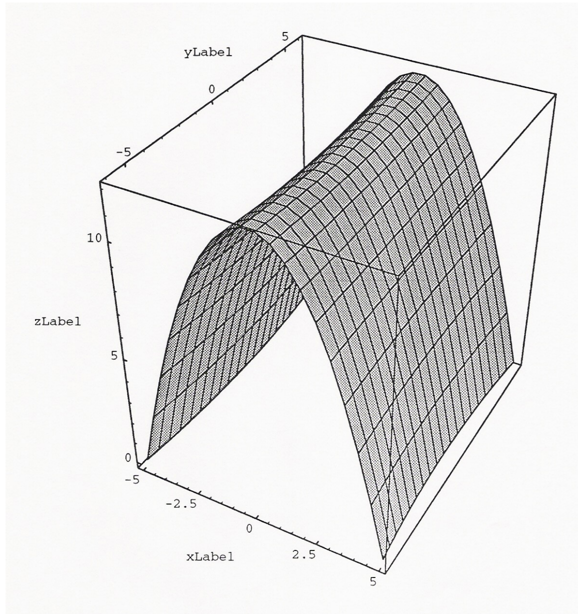
$-6+12u$

```
z=a*d*z00+b*d*z10+c*d*z20+
   a*e*z01+b*e*z11+c*e*z21+
   a*f*z02+b*f*z12+c*f*z22
z=Simplify[z]
```

$11.7(4t-4t^2)(4u-4u^2)+12(4t-4t^2)(1-3u+2u^2)+12(4t-4t^2)(-u+2u^2)$

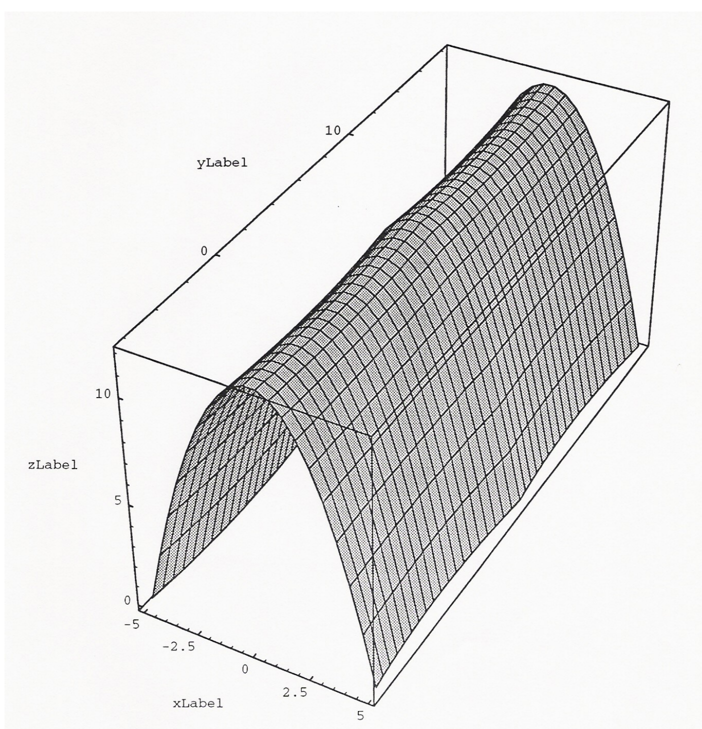
DIBUJO DE LA SUPERFICIE POLINOMICA

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```


yLabel
5
0
-5
10
zLabel
5
0
-5
-2.5
0
xLabel
2.5
5

Ejemplo del uso de superficies polinomiales bicuadráticas para el diseño del Pabellón de Rayos Cósmicos: P-15

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

 a=ParametricPlot3D[{5-10*t-1.2*u+2.4*t*u+1.2*u^2-2.4*t*u^2,
      -6+12*u,
      48*t-48*t^2-4.8*t*u+4.8*t^2*u+4.8*t*u^2-4.8*t^2*u^2},{t,0,1},{u,0,1},
                AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]


 b=ParametricPlot3D[{5-10*t-1.2*u+2.4*t*u+1.2*u^2-2.4*t*u^2,
           6+12*u,
                    48*t-48*t^2-4.8*t*u+4.8*t^2*u+4.8*t*u^2-
 4.8*t^2*u^2},{t,0,1},{u,0,1},
                AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel},
                DisplayFunction->Identity, PlotPoints->10]

Show[a,b, DisplayFunction->$DisplayFunction]
```



Ejemplo de superficie polinomial bicúbica que pasa por una red de 4x4 puntos dados:

P-16

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

FUNCIONES PREVIAS

```
a=-(9/2)*t^3+9/2*t^2-(11/2)*t+l;
b=(27/2)*t^3-(45/2)*t^2+9*t;
c=-(27/2)*t^3+18*t^2-(9/2)*t;
d=(9/2)*t^3-(9/2)*t^2+t;

e=-(9/2)*u^3+9/2*u^2-(11/2)*u+l;
f=(27/2)*u^3-(45/2)*u^2+9*u;
g=-(27/2)*u^3+18*u^2-(9/2)*u;
h=(9/2)*u^3-(9/2)*u^2+u;
```

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00

```
x00=-1;
y00=0;
z00=0;
```

coordenadas de P10

```
x10=-0.7;
y10=0;
z10=0.7;
```

coordenadas de P20

```
x20=0.7;
y20=0;
z20=0.7;
```

coordenadas de P30

```
x30=1;
y30=0;
z30=0;
```

coordenadas de P01

```
x01=-1;
y01=1/3;
z01=0;
```

coordenadas de P11

x11=-0.7;
y11=1/3;
z11=0.7;

coordenadas de P21
x21=0.7;
y21=1/3;
z21=0.7;

coordenadas de P31
x31=1;
y31=1/3;
z31=0;

coordenadas de P02
x02=-1;
y02=2/3;
z02=0;

coordenadas de P12
x12=-0.7;
y12=2/3;
z12=0.7;

coordenadas de P22
x22=0.7;
y22=2/3;
z22=0.7;

coordenadas de P32
x32=1;
y32=2/3;
z32=0;

coordenadas de P03
x03=-1;
y03=1;
z03=0;

coordenadas de P13
x13=-0.7;
y13=1;
z13=0.7;

coordenadas de P23

```
x23=0.7;
y23=1;
z23=0.7;
```

coordenadas de P33

```
x33=1;
y33=1;
z33=0;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=a*e*x00+b*e*x10+c*e*x20+d*e*x30+
  a*f*x01+b*f*x11+c*f*x21+d*f*x31+
  a*g*x02+b*g*x12+c*g*x22+d*g*x32+
  a*h*x03+b*h*x13+c*h*x23+d*h*x33;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$-1-2.95\ t + 14.85\ t^2 - 9.9\ t^3 + 6.93889\ 10^{-18} t^2 u -$
$3.46945\ 10^{-18}\ t^3 u + 1.04083\ 10^{-17}\ t\ u^2 - 1.38778\ 10^{-17}\ t^2\ u^2 +$
$1.38778\ 10^{-17} t^3 u^2 - 1.38778\ 10\text{-}17\ \ t^2\ \ u^3$

```
y=a*e*y00+b*e*y10+c*e*y20+d*e*y30+
  a*f*y01+b*f*y11+c*f*y21+d*f*y31+
  a*g*y02+b*g*y12+c*g*y22+d*g*y32+
  a*h*y03+b*h*y13+c*h*y23+d*h*y33;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

u

```
z=a*e*z00+b*e*z10+c*e*z20+d*e*z30+
  a*f*z01+b*f*z11+c*f*z21+d*f*z31+
  a*g*z02+b*g*z12+c*g*z22+d*g*z32+
  a*h*z03+b*h*z13+c*h*z23+d*h*z33;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

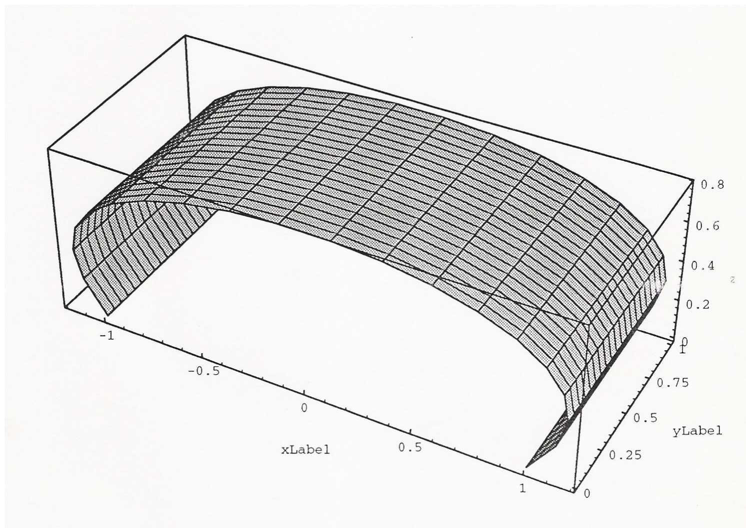
$3.15\ t - 3.15\ t^2 - 6.93889\ 10^{-18} t^2\ u - 3.46945\ 10^{-18} t^3 u -$

$3.46945\ 10^{-18} t\ u^2 - 1.38778\ 10^{-17} t^2\ u^2\ \ - 3.46945\ 10^{-18}\ t\ u^3 -$

$1.38778\ 10^{-17} t^2\ u^3$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]



Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 2x3 puntos dados: P-17

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

FUNCIONES PREVIAS

```
a=-t+1;
b=t;

c=2*u^2-3*u+1;
d=-4*u^2+4*u;
e=2*u^2-u
```

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
```
x00=0;
y00=-1;
z00=0;
```

coordenadas de P01
```
x01=-1;
y01=0;
z01=0;
```

coordenadas de P02
```
x02=0;
y02=1;
z02=0;
```

coordenadas de P10
```
x10=0;
y10=-1;
z10=1;
```

coordenadas de P11
```
x11=1;
y11=0;
z11=1;
```

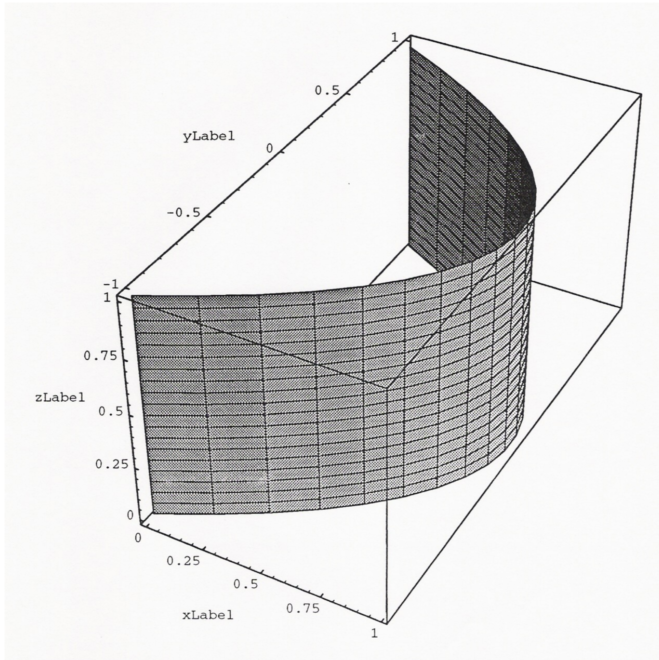
coordenadas de P12
```
x12=0;
y12=1;
z12=1;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
            x=a*c*x00+b*c*x10+
               a*d*x01+b*d*x11+
               a*e*x02+b*e*x12 ;
Expand[x];
x=simplify[x]

  4 (1 - u) u

            y=a*c*y00+b*c*y10+
               a*d*y01+b*d*y11+
               a*e*y02+b*e*y12 ;
Expand[y];
y=simplify[y]

      -1 + 2 u

            z=a*c*z00+b*c*z10+
               a*d*z01+b*d*z11+
               a*e*z02+b*e*z12 ;
Expand[z];
z=simplify[z]

  t
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                              AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```


yLabel
zLabel
xLabel
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.75
0.5
0.25
0
0
0.25
0.5
0.75
1

Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 2x3 puntos dados: P-18

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

FUNCIONES PREVIAS

```
a=-t+1;
b=t;

c=2*u^2-3*u+1;
d=-4*u^2+4*u;
e=2*u^2-u
```

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

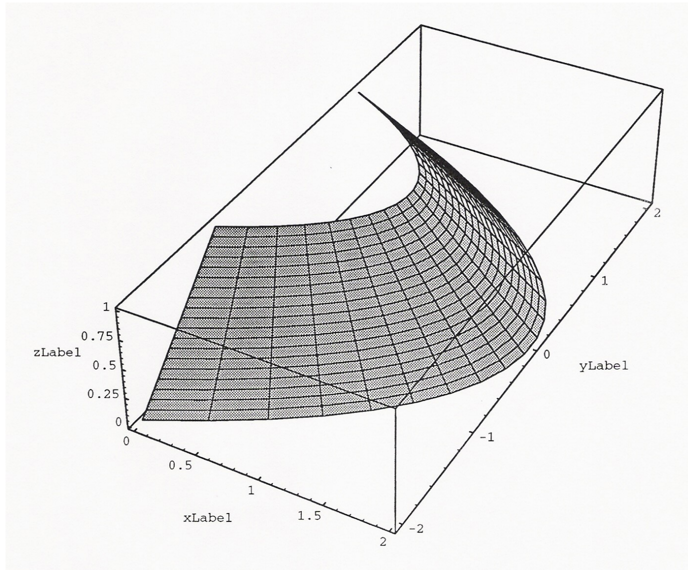
```
coordenadas de P00
        x00=0;
        y00=-2;
        z00=0;

coordenadas de P01
        x01=2;
        y01=0;
        z01=0;

coordenadas de P02
        x02=0;
        y02=2;
        z02=0;

coordenadas de P10
        x10=0;
        y10=-1;
        z10=1;

coordenadas de P11
        x11=1;
        y11=0;
        z11=1;

coordenadas de P12
        x12=0;
        y12=1;
        z12=1;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
            x=a*c*x00+b*c*x10+
               a*d*x01+b*d*x11+
               a*e*x02+b*e*x12 ;
Expand[x];
x=simplify[x]

        4 (-2 +t) (-1+u)u

            y=a*c*y00+b*c*y10+
               a*d*y01+b*d*y11+
               a*e*y02+b*e*y12 ;
Expand[y];
y=simplify[y]

     -2 +t+ 4 u-2tu

            z=a*c*z00+b*c*z10+
               a*d*z01+b*d*z11+
               a*e*z02+b*e*z12 ;
Expand[z];
z=simplify[z]

            t
```

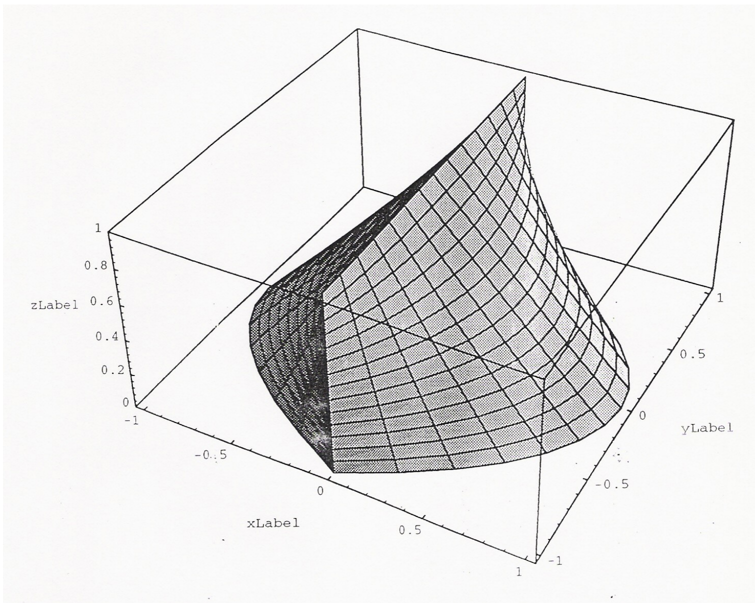
DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                          AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```


1
0.75
zLabel
0.5
0.25
0
0
0.5
1
xLabel
1.5
2
-2
-1
0
yLabel
1
2

Ejemplo de uso de una superficie polinomial que pasa por una red de 2x3 puntos para aproximar un conoide: P-19

Show[a,b]



Ejemplo de uso de una superficie polinomial que pasa por una red de 2x3 puntos para aproximar un cono: P-20

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=-t+1;
b=t;

c=2*u^2-3*u+1;
d=-4*u^2+4*u;
e=2*u^2-u

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=-1;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=-1;
y01=0;
z01=0;

coordenadas de P02
x02=0;
y02=1;
z02=0;

coordenadas de P10
x10=0;
y10=0;
z10=1;

coordenadas de P11
x11=0;
y11=0;
z11=1;

coordenadas de P12
x12=0;
y12=0;

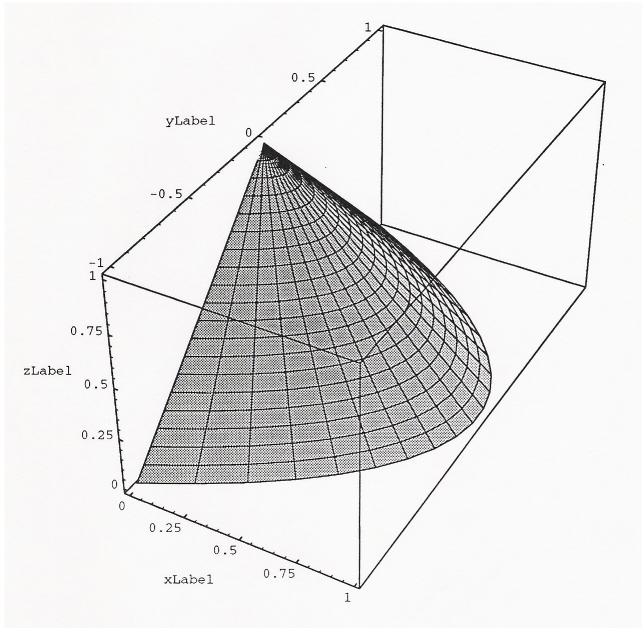
```
z12=1;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=a*c*x00+b*c*x10+
   a*d*x01+b*d*x11+
   a*e*x02+b*e*x12 ;
Expand[x];
x=simplify[x]

4 (1 - t)(1- u)u

y=a*c*y00+b*c*y10+
   a*d*y01+b*d*y11+
   a*e*y02+b*e*y12 ;
Expand[y];
y=simplify[y]

-1+t + 2 u-2tu

z=a*c*z00+b*c*z10+
   a*d*z01+b*d*z11+
   a*e*z02+b*e*z12 ;
Expand[z];
z=simplify[z]

t
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                  AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```


1
0.5
yLabel
0
-0.5
-1
1
0.75
zLabel
0.5
0.25
0
0
0.25
0.5
xLabel
0.75
1

Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 2x4 puntos dados: P-21

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

```
a=-t+1;
b= t;

c=-9/2*u^3+9*u^2-11/2*u+l;
d= -27/2*u^3-45/2*u^2+9*u;
e=-27/2*u^3+18*u^2-9/2*u;
f=9/2*u^3-9/2*u^2+u;
```

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
```
x00=0;
y00=-1;
z00=0;
```

coordenadas de P01
```
x01=1;
y01=0;
z01=0;
```

coordenadas de P02
```
x02=0;
y02=1;
z02=0;
```

coordenadas de P03
```
x03=-1;
y03=0;
z03=0;
```

coordenadas de P10
```
x10=0;
y10=-1;
z10=1;
```

coordenadas de P11
```
x11=1;
```

```
y11=0;
z11=2;
```

coordenadas de P12

```
x12=0;
y12=1;
z12=3;
```

coordenadas de P13

```
x13=-1;
y13=0;
z13=4;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=a*c*x00+b*c*x10+
  a*d*x01+b*d*x11+
  a*e*x02+b*e*x12+
  a*f*x03+b*f*x13;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$u\,(8-18\,u+9\,u^2)$

```
y=a*c*y00+b*c*y10+
  a*d*y01+b*d*y11+
  a*e*y02+b*e*y12+
  a*f*y03+b*f*y13;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

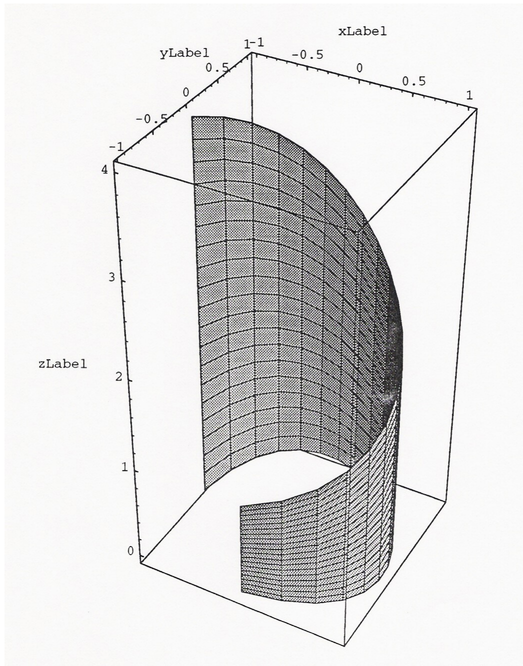
$-1+u+9\,u^2-9\,u^3$

```
z=a*c*z00+b*c*z10+
  a*d*z01+b*d*z11+
  a*e*z02+b*e*z12+
  a*f*z03+b*f*z13;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$t+3\,t\,u$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                    AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



Ejemplo de uso de superficies polinomiales que pasan por una red de 2x5 puntos para hacer una digitilización de un terreno: P-22

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=-t+1;
b= t;

c=256/24*u^4-2560/96*u^3+8960/384*u^2-12800/1536*u+l;
d =-256/6*u^4+2304/24*u^3-6656/96*u^2+6144/384*u;
e=256/4*u^4-2048/16*u^3+4864/64*u^2-3072/256*u;
f=-256/6*u^4+1792/24*u^ 3-3584/96*u^2+2049/384*u;
g=256/24*u^4-1536/96 *u^ 3+2816/384 *u^ 2-u;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=17;
y00=7;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=18;
y01=22;
z01=0;

coordenadas de P02
x02=2;
y02=18;
z02=0;

coordenadas de P03
x03=3;
y03=8;
z03=0;

coordenadas de P04
x04=17;
y04=7;
z04=0;

coordenadas de P10

```
        x10=14;
        y10=9;
        z10=4;
```

coordenadas de P11

```
        x11=14;
        y11=19;
        z11=4;
```

coordenadas de P12

```
        x12=6;
        y12=18;
        z12=4;
```

coordenadas de P13

```
        x13=7
        y13=9;
        z13=4;
```

coordenadas de P14

```
        x14=14;
        y14=9;
        z14=4;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x1=a*c*x00+b*c*x10+
   a*d*x01+b*d*x11+
   a*e*x02+b*e*x12+
   a*f*x03+b*f*x13+
   a*g*x04+b*g*x14;
  Expand[x1];
  x1=Simplify[x1]
```

$(51 - 9t + 364\,u - 188\,t\,u - 2060\,u^2 + 1020\,t\,u^2 + 2912u^3 -$

$1408\,t\,u^3 - 1216\,u^4 + 576\,tu^4)/3$

```
y1=a*c*y00+b*c*y10+
   a*d*y01+b*d*y11+
   a*e*y02+b*e*y12+
   a*f*y03+b*f*y13+
   a*g*y04+b*g*y14;
  Expand[y1];
  y1=Simplify[y1]
```

$(21 + 6t + 340u - 184tu - 724u^2 + 696tu^2 + 320u^3$

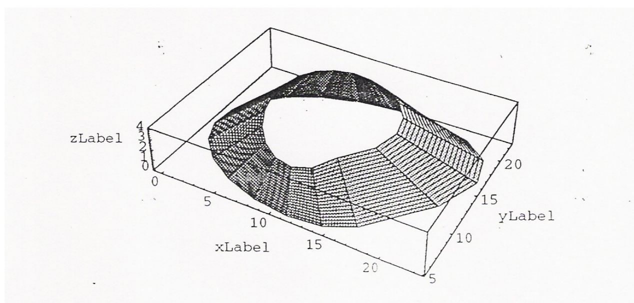
$896tu^3 + 64u^4 + 384tu^4)/3$

```
z1=a*c*z00+b*c*z10+
   a*d*z01+b*d*z11+
   a*e*z02+b*e*z12+
   a*f*z03+b*f*z13+
   a*g*z04+b*g*z14;
  Expand[z1];
  z1=Simplify[z1]
```

4 t

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
a=ParametricPlot3D[{x1,y1,z1},{t,0,1},{u,0,1},
                   AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
```
x00=14;
y00=9;
z00=4;
```

coordenadas de P01
```
x01=14;
y01=9;
z01=4;
```

coordenadas de P02
```
x02=6;
y02=18;
z02=14;
```

coordenadas de P03
```
x03=7;
y03=9;
z03=4;
```

coordenadas de P04
```
x04=14;
y04=9;
z04=4;
```

coordenadas de P10
```
x10=13;
y10=12;
z10=11;
```

coordenadas de P11
```
x11=14;
y11=15;
z11=11;
```

coordenadas de P12
```
x12=9;
y12=16;
z12=11;
```

coordenadas de P13
```
x13=9;
y13=11;
z13=11;
```

coordenadas de P14
```
x14=13;
y14=12;
z14=11;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x2=a*c*x00+b*c*x10+
   a*d*x01+b*d*x11+
   a*e*x02+b*e*x12+
   a*f*x03+b*f*x13+
   a*g*x04+b*g*x14;
  Expand[x2];
  x2=Simplify[x2]
```

$(4 - 3t + 176\, u - 48\, t\, u - 1040\, u^2 + 368\, t\, u^2 + 1504u^3 -$

$576\, t\, u^3 - 640\, u^4 + 256\, tu^4)/3$

```
y2=a*c*y00+b*c*y10+
   a*d*y01+b*d*y11+
   a*e*y02+b*e*y12+
   a*f*y03+b*f*y13+
   a*g*y04+b*g*y14;
  Expand[y2];
  y2=Simplify[y2]
```

$(27 + 9t + 156\, u - 172tu - 28u^2 + 428tu^2 - 576\, u^3 -$

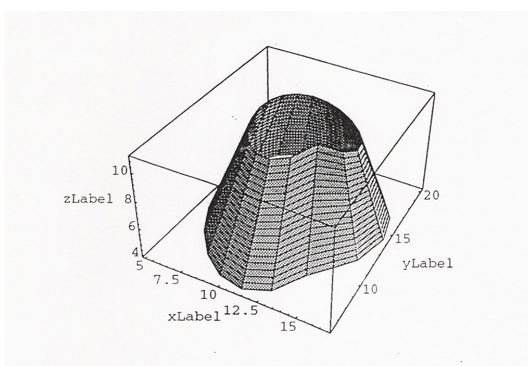
$320tu^3 + 448\, u^4 + 64tu^4)/3$

```
z2=a*c*z00+b*c*z10+
   a*d*z01+b*d*z11+
   a*e*z02+b*e*z12+
   a*f*z03+b*f*z13+
   a*g*z04+b*g*z14;
  Expand[z2];
  z2=Simplify[z2]
```

4+7 t

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
b=ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00

```
x00=13;
```

y00=12;
z00=11;

coordenadas de P01
x01=14;
y01=15;
z01=11;

coordenadas de P02
x02=9;
y02=16;
z02=11;

coordenadas de P03
x03=9;
y03=11;
z03=11;

coordenadas de P04
x04=13;
y04=12;
z04=11;

coordenadas de P10
x10=13;
y10=13;
z10=18;

coordenadas de P11
x11=12;
y11=15;
z11=18;

coordenadas de P12
x12=10;
y12=14;
z12=18;

coordenadas de P13
x13=9;
y13=12;
z13=18;

coordenadas de P14
x14=13;

```
y14=13;
z14=18;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x3=a*c*x00+b*c*x10+
   a*d*x01+b*d*x11+
   a*e*x02+b*e*x12+
   a*f*x03+b*f*x13+
   a*g*x04+b*g*x14;
  Expand[x3];
  x3=Simplify[x3]
```

$(39 + 128 u -100 t u - 672 u^2 + 420 t u^2 + 928u^3-$

$512 t u^3 - 384 u^4 +192 tu^4)/3$

```
y3=a*c*y00+b*c*y10+
   a*d*y01+b*d*y11+
   a*e*y02+b*e*y12+
   a*f*y03+b*f*y13+
   a*g*y04+b*g*y14;
  Expand[y3];
  y3=Simplify[y3]
```

$(36 + 3t - 16 u +60tu+400u^2 -476tu^2 -896 u^3+$

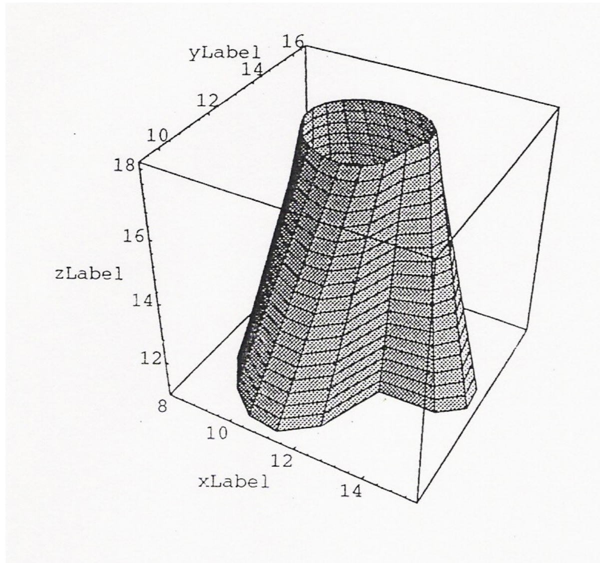
$864tu^3+512 u^4-448tu^4)/3$

```
z3=a*c*z00+b*c*z10+
   a*d*z01+b*d*z11+
   a*e*z02+b*e*z12+
   a*f*z03+b*f*z13+
   a*g*z04+b*g*z14;
  Expand[z3];
  z3=Simplify[z3]
```

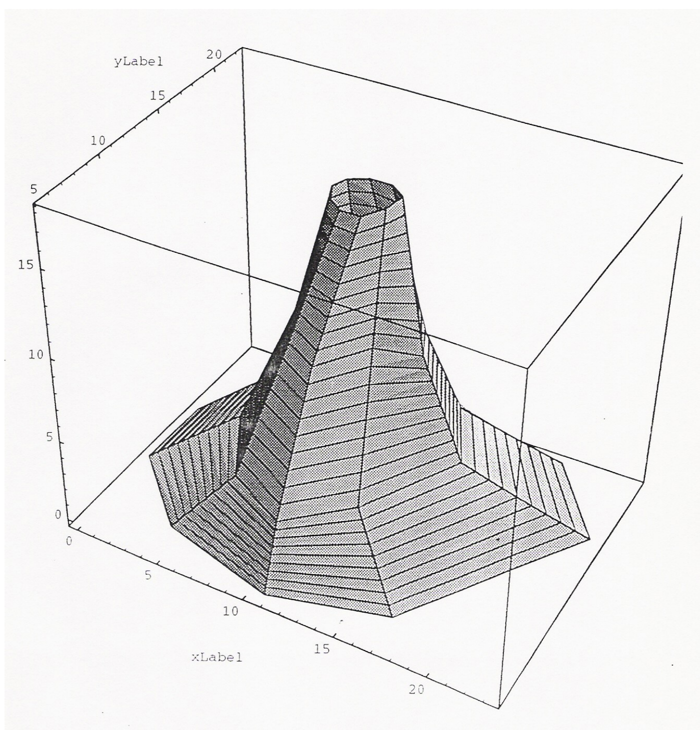
11+7 t

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c=ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                      AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```


yLabel
16
14
12
10
18
16
zLabel
14
12
8
10
12
xLabel
14

Show[a,b,c]


yLabel
20
15
10
5
15
10
5
0
0
5
10
xLabel
15
20

Ejemplo de uso de superficies polinomiales que pasan por una red de 2x5 puntos para hacer una digitalización de un terreno: P-23

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x1=a*c*x00+b*c*x10+
    a*d*x01+b*d*x11+
    a*e*x02+b*e*x12+
    a*f*x03+b*f*x13+
    a*g*x04+b*g*x14;
  Expand[x1];
  x1=Simplify[x1]
```

$$(39 - 3 t + 233 u -68 t u -826 u^2 + 304tu^2 +784 u^3$$

$$-352 t u^3 - 224 u^4 + 128 t u^4)/ 3$$

```
y1=a*c*y00+b*c*y10+
    a*d*y01+b*d*y11+
    a*e*y02+b*e*y12+
    a*f*y03+b*f*y13+
    a*g*y04+b*g*y14;
  Expand[y1];
  y1=Simplify[y1]
```

$$(12 + 9 t + 271 u - 258 t u - 266 u^2 + 924 t u^2 - 16 u^3-$$

$$1248 t u^3 + 32 u^4 + 576 t u^4)/ 3$$

```
z1=a*c*z00+b*c*z10+
    a*d*z01+b*d*z11+
    a*e*z02+b*e*z12+
    a*f*z03+b*f*z13+
    a*g*z04+b*g*z14;
  Expand[z1];
  z1=Simplify[z1]
```

3 t

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x2=a*c*x00+b*c*x10+
    a*d*x01+b*d*x11+
    a*e*x02+b*e*x12+
```

```
    a*f*x03+b*f*x13+
    a*g*x04+b*g*x14;
  Expand[x2];
  x2=Simplify[x2]
```

$(36 + 6\ t + 165\ u - 155\ t\ u - 522\ u^2 + 494\ t\ u^2 + 432\ u$-
$496\ t\ u^3 - 96\ u^4 + 160\ t\ u^4)/3$

```
y2=a*c*y00+b*c*y10+
    a*d*y01+b*d*y11+
    a*e*y02+b*e*y12+
    a*f*y03+b*f*y13+
    a*g*y04+b*g*y14;
  Expand[y2];
  y2=Simplify[y2]
```

$(21 + 18\ t + 13\ u + 83\ t\ u + 658\ u^2 - 754\ t\ u^2 - 1264\ u^3\ +$

$1264\ t\ u^3 + 608\ u^4 - 608\ t\ u^4)/\ 3$

```
z2=a*c*z00+b*c*z10+
    a*d*z01+b*d*z11+
    a*e*z02+b*e*z12+
    a*f*z03+b*f*z13+
    a*g*z04+b*g*z14;
  Expand[z2];
  z2=Simplify[z2]
```

3+5t

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x3=a*c*x00+b*c*x10+
    a*d*x01+b*d*x11+
    a*e*x02+b*e*x12+
    a*f*x03+b*f*x13+
    a*g*x04+b*g*x14;
  Expand[x3];
  x3=Simplify[x3]
```

$(2\ (21 - 3\ t + 5\ u + 24\ \ tu - 14\ u^2 - 114\ \ tu^2 - 32\ u^3 +$

$192\ t\ u^3 + 32\ u^4 - 96\ t\ u^4\ +)/3$

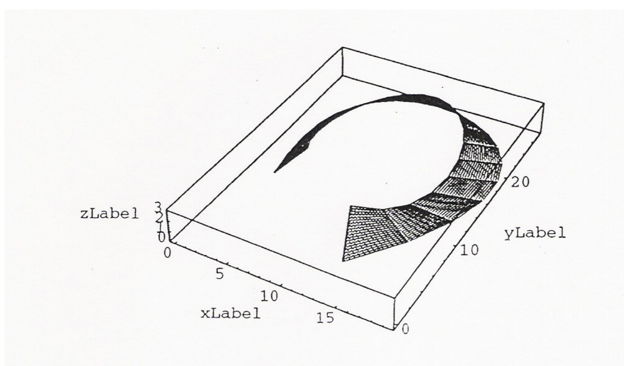
```
y3=a*c*y00+b*c*y10+
     a*d*y01+b*d*y11+
     a*e*y02+b*e*y12+
     a*f*y03+b*f*y13+
     a*g*y04+b*g*y14;
  Expand[y3];
  y3=Simplify[y3]
```

$(39 + 3\,t + 96\,u - 64\,t\,u - 96\,u^2 + 160\,t\,u - 224\,t\,u^3 \quad + 128\,tu^4)/3$

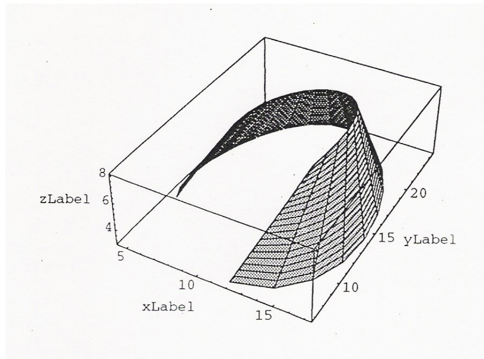
```
z3=a*c*z00+b*c*z10+
     a*d*z01+b*d*z11+
     a*e*z02+b*e*z12+
     a*f*z03+b*f*z13+
     a*g*z04+b*g*z14;
  Expand[z3];
  z3=Simplify[z3]
```

8(1+t)

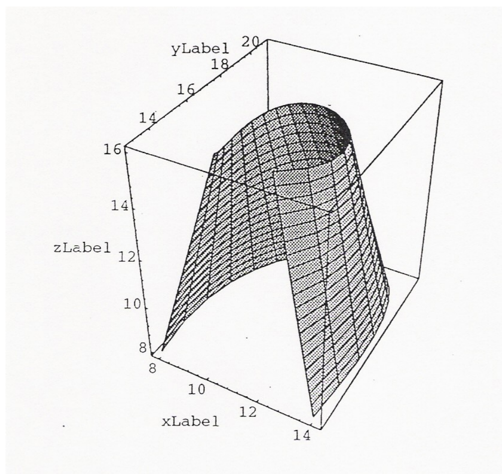
```
a=ParametricPlot3D[{x1,y1,z1},{t,0,1},{u,0,1},PlotPoints->20,
                                AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



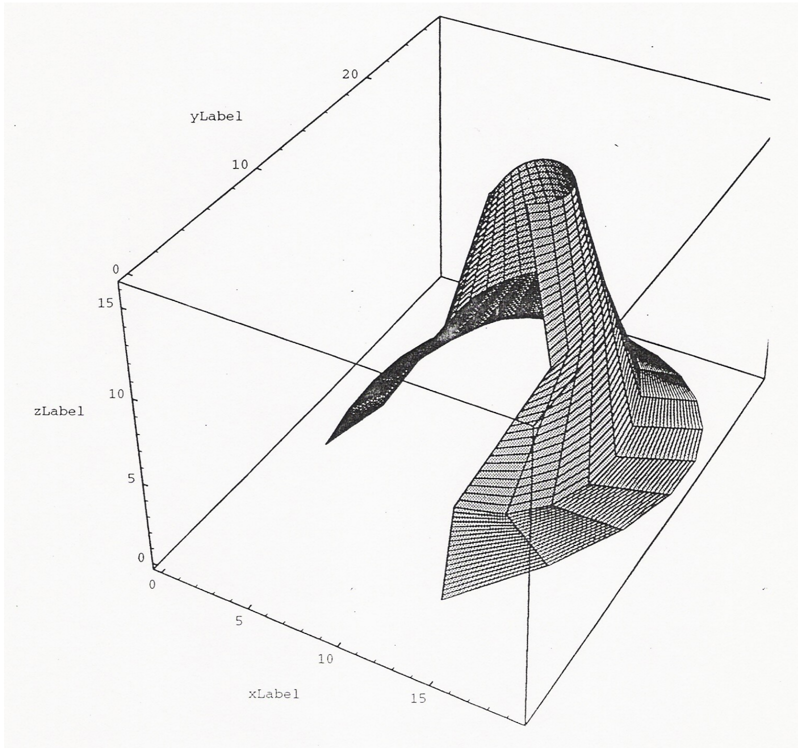

```
b=ParametricPlot3D[{x2,y2,z2},{t,0,1},{u,0,1}, PlotPoints->20,
                                AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



c=ParametricPlot3D[{x3,y3,z3},{t,0,1},{u,0,1}, PlotPoints->20,
AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]



Show[a,b,c]


yLabel
zLabel
xLabel
20
10
0
15
10
5
0
0
5
10
15

Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 5x5 puntos dados: P-24

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=256/24*t^4-(2560/96)*t^3+8960/384*t^2-(12800/1536)*t+l;
b=-256/6*t^4 +(2304/24)*t^3-(6656/96)*t^2+6144/384*t;
c=256/4*t^4-(2048/16)*t^3+4864/64*t^2-(3072/256)*t;
d=-256/6*t^4+ (1792/24)*t^3-(3584/96)*t^2+2048/384t;
e=256/24*t^4-1536/96)*t^3+2816/384*t^2-1536/1536t ;

f=256/24*u^4-(2560/96)*u^3+8960/384*u^2-(12800/1536)*u+l;
g=-256/6*u^4 +(2304/24)*u^3-(6656/96)*u^2+6144/384*u;
h=256/4*u^4-(2048/16)*u^3+4864/64*u^2-(3072/256)*u;
k=-256/6*u^4+ (1792/24)*u^3-(3584/96)*u^2+2048/384u;
l=256/24*u^4-1536/96)*u^3+2816/384*u^2-1536/1536u ;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=1/4;
y00=1;
z00=-1/8;

coordenadas de P10
x10=-1/4;
y10=2;
z10=-1/8;

coordenadas de P20
x20=1/4;
y20=3;
z20=-1/8;

coordenadas de P30
x30=1/4;
y30=4;
z30=-1/8;

coordenadas de P40
x40=1/4;
y40=5;
z40=-1/8;

coordenadas de P01
x01=1/36;
y01=1;

z01=-1/216;

coordenadas de P11
x11=1/36
y11=2;
z11=-1/216;

coordenadas de P21
x21=1/36;
y21=3;
z21=-1/216;

coordenadas de P31
x31=1/36;
y31=4;
z31=-1/216;

coordenadas de P41
x41=1/36;
y41=5;
z41=-1/216;

coordenadas de P02
x02=0;
y02=1;
z02=0;

coordenadas de P12
x12=0;
y12=2;
z12=0;

coordenadas de P22
x22=0;
y22=3;
z22=0;

coordenadas de P32
x32=0;
y32=4;
z32=0;

coordenadas de P42
x42=0;
y42=5;
z42=0;

coordenadas de P03
x03=1/36;
y03=1;

z03=1/216;

coordenadas de P13
x13=1/36;
y13=2;
z13=1/216;

coordenadas de P23
x23=1/36;
y23=3;
z23=1/216;

coordenadas de P33
x33=1/36;
y33=4;
z33=1/216;

coordenadas de P43
x43=1/36;
y43=5;
z43=1/216;

coordenadas de P04
x04=1/4;
y04=1;
z04=1/8;

coordenadas de P14
x14=1/4;
y14=2;
z14=1/8;

coordenadas de P24
x24=1/4;
y24=3;
z24=1/8;

coordenadas de P34
x34=1/4;
y34=4;
z34=1/8;

coordenadas de P44
x42=1/4;
y42=5;
z42=1/8;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x=a*f*x00+b*f*x10+c*f*x20+d*f*x30+e*f*x40+

```
    a*g*x01+b*g*x11+c*g*x21+d*g*x31+e*g*x41+
    a*h*x02+b*h*x12+c*h*x22+d*h*x32+e*h*x42+
    a*k*x03+b*k*x13+c*k*x23+d*k*x33+d*e*x43+
    a*l*x04+b*l*x14+c*l*x24+d*l*x34+d*l*x44
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$((-1+2u)^2 (27-80u+80u^2))/108$

```
y=a*f*y00+b*f*y10+c*f*y20+d*f*y30+e*f*y40+
    a*g*y01+b*g*y11+c*g*y21+d*g*y31+e*g*y41+
    a*h*y02+b*h*y12+c*h*y22+d*h*y32+e*h*y42+
    a*k*y03+b*k*y13+c*k*y23+d*k*y33+d*e*y43+
    a*l*y04+b*l*y14+c*l*y24+d*l*y34+d*l*y44
Expand[y];
y=simplify[y]
```

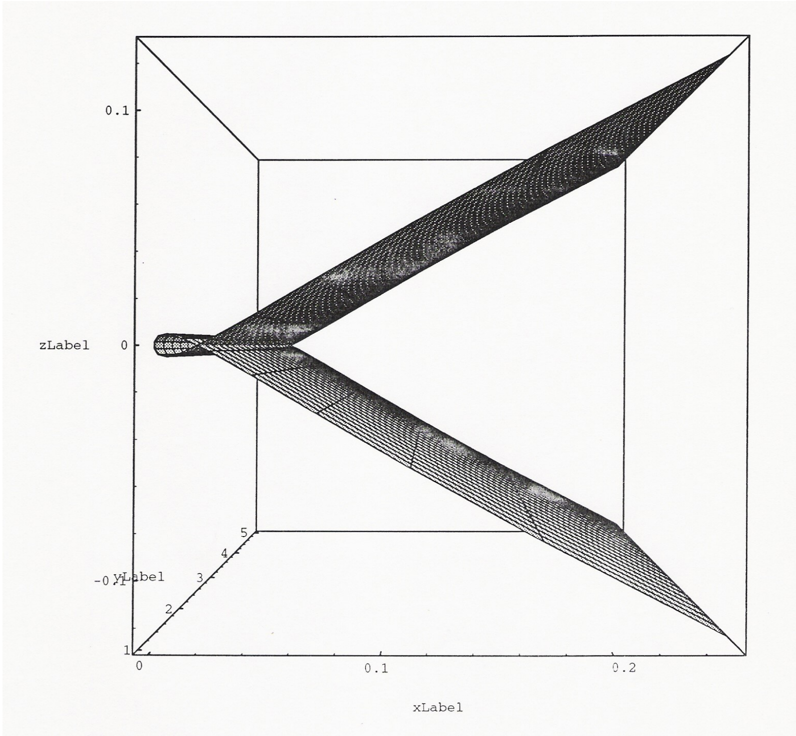
$1+4t$

```
z=a*f*z00+b*f*z10+c*f*z20+d*f*z30+e*f*z40+
    a*g*z01+b*g*z11+c*g*z21+d*g*z31+e*g*z41+
    a*h*z02+b*h*z12+c*h*z22+d*h*z32+e*h*z42+
    a*k*z03+b*k*z13+c*k*z23+d*k*z33+d*e*z43+
    a*l*z04+b*l*z14+c*l*z24+d*l*z34+d*l*z44
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$$(-81+ 562u-1200u^2+800 u^3)/648$$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},ViewPoint->{0,-2,0}
                    AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```


0.1
zLabel 0
-0.1
yLabel
1
2
3
4
5
0
0.1
0.2
xLabel

Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 7x7 puntos dados: P-25

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=324/5t^6-1134/5t^5+315t^4-(441/2)t^3+406/5t^2-(147/10)t+l;
b=-1944/5t^6+1296t^5-1674t^4 +1044t^3-(1566/5)t^2+36t;
c=972t^6-3078t^5+3699t^4-(4149/2)t^3+1053/2t^2-45t;
d=-1296t^6+3888t^5-4356 ^4+ 2232t^3-508t^2+40t;
e=972t^6-2754t^5+2889t^4-2763/2t^3+297t^2-45/2t ;
f=-1944/5t^6+5184/5t^5-1026t^4+468t^3-486/5t^2+(36/5)t;
g=324/5t^6-162t^5+153t^4 -(135/2)t^3+(137/10)t^2-2t;

h=324/5u^6-1134/5u^5+315u^4-(441/2)u^3+406/5u^2-(147/10)u+l;
k=-1944/5u^6+1296u^5-1674u^4 +1044u^3-(1566/5)u^2+36u;
l=972u^6-3078u^5+3699u^4-(4149/2)u^3+1053/2u^2-45u;
m=-1296u^6+3888u^5-4356u ^4+ 2232u^3-508u^2+40u;
p=972u^6-2754u^5+2889u^4-2763/2u^3+297u^2-45/2u ;
r=-1944/5u^6+5184/5u^5-1026u^4+468u^3-486/5u^2+(36/5)u;
s=324/5u^6-162u^5+153u^4 -(135/2)u^3+(137/10)u^2-2t;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=0;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=1;
y01=0.5;
z01=0;

coordenadas de P02
x02=2;
y02=1;
z02=0;

coordenadas de P03
x03=3.5;
y03=1.5;
z03=0;

coordenadas de P04
x04=4;
y04=1;

z04=0;

coordenadas de P05
x05=5;
y05=0.7;
z05=0;

coordenadas de P06
x06=6;
y06=2;
z06=0;

coordenadas de P10
x10=0;
y10=0;
z10=1;

coordenadas de P11
x11=1;
y11=0.5;
z11=1;

coordenadas de P12
x12=2;
y12=1;
z12=1;

coordenadas de P13
x13=3.5;
y13=1.5;
z13=1;

coordenadas de P14
x14=4;
y14=1;
z14=1;

coordenadas de P15
x15=5;
y15=0.7;
z15=1;

coordenadas de P16
x16=6;
y16=2;
z16=1;

coordenadas de P20
x20=0;
y20=0;

z20=2;

coordenadas de P21
x21=1;
y21=0.5;
z21=2;

coordenadas de P22
x22=2;
y22=1;
z22=2;

coordenadas de P23
x23=3.5;
y23=1.5;
z23=2;

coordenadas de P24
x24=4;
y24=1;
z24=2;

coordenadas de P25
x25=5;
y25=0.7;
z25=2;

coordenadas de P26
x26=6;
y26=2;
z26=2;

coordenadas de P30
x30=0;
y30=0;
z30=3;

coordenadas de P31
x31=1;
y31=0.5;
z31=3;

coordenadas de P32
x32=2;
y32=1;
z32=3;

coordenadas de P33
x33=3.5;
y33=1.5;

z33=3;

coordenadas de P34
x34=4;
y34=1;
z34=3;

coordenadas de P35
x35=5;
y35=0.7;
z35=3;

coordenadas de P36
x36=6;
y36=2;
z36=3;

coordenadas de P40
x40=0;
y40=0;
z40=4;

coordenadas de P41
x41=1;
y41=0.5;
z41=4;

coordenadas de P42
x42=2;
y42=1;
z42=4;

coordenadas de P43
x43=3.5;
y43=1.5;
z43=4;

coordenadas de P44
x44=4;
y44=1;
z44=4;

coordenadas de P45
x45=5;
y45=0.7;
z45=4;

coordenadas de P46
x46=6;
y46=2;

z46=4;

coordenadas de P50
x50=0;
y50=0;
z50=5;

coordenadas de P51
x51=1;
y51=0.5;
z51=5;

coordenadas de P52
x52=2;
y52=1;
z52=5;

coordenadas de P53
x53=3.5;
y53=1.5;
z53=5;

coordenadas de P54
x54=4;
y54=1;
z54=5;

coordenadas de P55
x55=5;
y55=0.7;
z55=5;

coordenadas de P56
x56=6;
y56=2;
z56=5;

coordenadas de P60
x60=0;
y60=0;
z60=6;

coordenadas de P61
x61=1;
y61=0.5;
z61=6;

coordenadas de P62
x62=2;
y62=1;

z62=6;

coordenadas de P63
x63=3.5;
y63=1.5;
z63=6;

coordenadas de P64
x64=4;
y64=1;
z64=6;

coordenadas de P65
x65=5;
y65=0.7;
z65=6;

coordenadas de P66
x66=6;
y66=2;
z66=6;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=a*h*x00+b*h*x10+c*h*x20+d*h*x30+e*h*x40+f*h*x50+g*h*x60+
   a*k*x01+b*k*x11+c*k*x21+d*k*x31+e*k*x41+f*k*x51+g*k*x61+
   a*l*x02+b*l*x12 +c*l*x22+d*l*x32+e*l*x42+f*l*x52+g*l*x62+
   a*m*x03+b*m*x13+c*m*x23+d*m*x33+e*m*x43+f*m*x53+g*m*x63
   a*p*x04+b*p*x14+c*p*x24+d*p*x34+e*p*x44+f*p*x54+g*p*x64+
   a*r*x05+b*r*x15+c*r*x25+d*r*x35+e*r*x45+f*r*x55+g*r*x65+
   a*s*x06+b*s*x16+c*s*x26+d*s*x36+e*s*x46+f*s*x56+g*s*x66;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$26u-166533\ 10^{-16}tu-8.88178\ 10^{-15}t^2u-$
$1.06581\ 10^{-14}t^5u-5.32907\ 10^{-15}t^6u-254u^2+$
$8.88178\ 10^{-16}tu^2+4.79616\ 10^{-14}t^2u^2+$
$1.84741\ 10^{-13}t^3u^2+2.13163\ 10^{-13}t^4u^2+$
$7.53175\ 10\text{-}^{13}t^5u^2-1.42109\ 10^{-14}t^6u^2+1116u^3-$
$1.42109\ 10^{-14}tu^3-3.41061\ 10^{-13}t^2u^3+$
$6.82121\ 10^{-13}t^5u^3-1.42109\ 10^{-12}t^6u^3-2178u^4+$
$7.10543\ 10^{-15}tu^4+1.53477\ 10^{-12}t^2u^4-$
$3.18323\ 10^{-12}t^5u^4-1.59162\ 10^{-12}t^6u^4+1944u^5+$
$3.55271\ 10^{-14}tu^5-1.7053\ 10^{-13}t^2u^5+$
$5.91172\ 10^{-12}t^5u^5-6.82121\ 10^{-13}t^6u^5-648u^6-$
$1.06581\ 10^{-14}tu^6+1.35003\ 10^{-13}t^2u^6-$
$1.7053\ 10^{-13}t^3u^6+9.09495\ 10^{-13}t^4u^6-$
$1.25056\ 10^{-12}t^5u^6+3.97904\ 10^{-13}t^6u^6$

```
y=a*h*y00+b*h*y10+c*h*y20+d*h*y30+e*h*y40+f*h*y50+g*h*y60+
```

```
   a*k*y01+b*k*y11+c*k*y21+d*k*y31+e*k*y41+f*k*y51+g*k*y61+
   a*l*y02+b*l*y12 +c*l*y22+d*l*y32+e*l*y42+f*l*y52+g*l*y62+
   a*m*y03+b*m*y13+c*m*y23+d*m*y33+e*m*y43+f*m*y53+g*m*y63
   a*p*y04+b*p*y14+c*p*y24+d*p*y34+e*p*y44+f*p*y54+g*p*y64+
   a*r*y05+b*r*y15+c*r*y25+d*r*y35+e*r*y45+f*r*y55+g*r*y65+
   a*s*y06+b*s*y16+c*s*y26+d*s*y36+e*s*y46+f*s*y56+g*s*y66;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

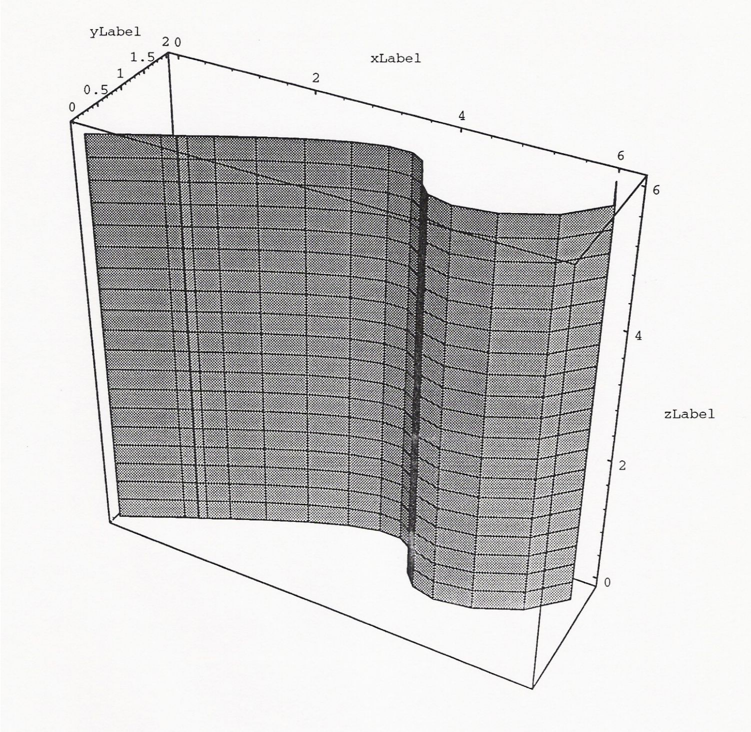
$13.54u+8.32667\ 10^{-17}tu+6.66134\ 10^{-16}t^2u+$
$3.37508\ 10^{-14}t^5u+2.66454\ 10^{-15}t^6u-135.74u^2+$
$3.77476\ 10^{-15}tu^2-6.66134\ 10^{-14}t^2u^2-$
$9.59233\ 10^{-14}t^3u^2-8.52651\ 10^{-14}t^4u^2+$
$3.33955\ 10-^{13}t^5u^2+2.84217\ 10^{-14}t^6u^2+606.6u^3-$
$3.55271\ 10^{-15}tu^3-8.52651\ 10^{-14}t^2u^3-$
$7.38964\ 10^{-13}t^5u^3-1.13687\ 10^{-13}t^6u^3-$
$1195u^4-2.13163\ 10^{-13}t^2u^4-$
$1.81899\ 10^{-12}t^5u^4+1049.76\ u^5+$
$2.13163\ 10^{-14}tu^5-4.54747\ 10^{-13}t^2u^5+$
$2.27374\ 10^{-12}t^5u^5-6.82121\ 10^{-13}t^6u^5-$
$336.96u^6+4.44089\ 10^{-15}tu^6+6.03961\ 10^{-14}t^2u^6+$
$8.52651\ 10^{-14}t^3u^6-3.41061\ 10^{-13}t^4u^6-$
$2.55795\ 10^{-13}t^5u^6+2.27374\ 10^{-13}t^6u^6$

```
z=a*h*z00+b*h*z10+c*h*z20+d*h*z30+e*h*z40+f*h*z50+g*h*z60+
   a*k*z01+b*k*z11+c*k*z21+d*k*z31+e*k*z41+f*k*z51+g*k*z61+
   a*l*z02+b*l*z12 +c*l*z22+d*l*z32+e*l*z42+f*l*z52+g*l*z62+
   a*m*z03+b*m*z13+c*m*z23+d*m*z33+e*m*z43+f*m*z53+g*m*z63
   a*p*z04+b*p*z14+c*p*z24+d*p*z34+e*p*z44+f*p*z54+g*p*z64+
   a*r*z05+b*r*z15+c*r*z25+d*r*z35+e*r*z45+f*r*z55+g*r*z65+
   a*s*z06+b*s*z16+c*s*z26+d*s*z36+e*s*z46+f*s*z56+g*s*z66;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

6t

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},ViewPoint->{0,-2,0}
                          AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```


yLabel
0
0.5
1
1.5
2
0
xLabel
2
4
6
6
4
2
0
zLabel

Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 8x8 puntos dados: P-26

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=-117649/720t^7+11649/180t^6-386561/360t^5+16807/18t^4-(331681/720)t^3+22981/180t^2-(363/20)t+l;

b=823543/720t^7-^352947/80t^6+991613/144t^5-88837/16t^4+109417/45t^3-(10927/20)t^2+49t;

c=-823543/240t^7+1529437/120t^6-151263/8t^5+170471/12t^4-(1347647/240)t^3+43071/40t^2-147/2t;

d=823543/144t^7-2941225/144t^6+4151329/144t^5-2926819/144t^4+133427/18t^3-46501/36t^2+245/3t;

e=-823543/144t^7+117649/6t^6-1899191/72t^5+52822/3t^4-872935/144t^3+2009/2t^2-245/4t ;

f=823543/240t^7-2705927/240t^6+1159683/80t^5-444185/48t^4+45962/15t^3-9849/20t^2+(147/5)t;

g=-823543/720t^7+1294139/360t^6-319333/772t^5+98441/36t^4 -(634207/720)t^3+(49931/360)t^2-49/6t;

h=117649/720t^7-117649/240t^6+84035/144t^5-16807/48t^4+(9947/90)t^3-(343/20)t^2+t;

k=-117649/720u^7+11649/180u^6-386561/360u^5+16807/18u^4-(331681/720)u^3+22981/180u^2-(363/20)u+l;

l=823543/720u^7-^352947/80u^6+991613/144u^5-88837/16u^4+109417/45u^3-(10927/20)u^2+49u;

m=-823543/240u^7+1529437/120u^6-151263/8u^5+170471/12u^4-(1347647/240)u^3+43071/40u^2-147/2u;

p=823543/144u^7-2941225/144u^6+4151329/144u^5-2926819/144u^4+133427/18u^3-46501/36u^2+245/3u;

r=-823543/144u^7+117649/6u^6-1899191/72u^5+52822/3u^4-872935/144u^3+2009/2u^2-245/4u ;

s=823543/240u^7-2705927/240u^6+1159683/80u^5-444185/48u^4+45962/15u^3-9849/20u^2+(147/5)u;

v=-823543/720u^7+1294139/360u^6-319333/772u^5+98441/36u^4 -(634207/720)u^3+(49931/360)u^2-49/6u;

w=117649/720u^7-117649/240u^6+84035/144u^5-16807/48u^4+(9947/90)u^3-(343/20)u^2+u;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=-1;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=0.73;
y01=-0.73;
z01=0;

coordenadas de P02
x02=1;
y02=0;
z02=0;

coordenadas de P03
x03=0.73;
y03=0.73;
z03=0;

coordenadas de P04
x04=0;
y04=1;
z04=0;

coordenadas de P05
x05=-0.73;
y05=0.73;
z05=0;

coordenadas de P06
x06=-1;
y06=0;
z06=0;

coordenadas de P07
x07=-0.73;
y07=-0.73;
z07=0;

coordenadas de P10

x10=0;
y10=-1.3;
z10=0.1;

coordenadas de P11
x11=1.03;
y11=-1.03;
z11=0.1;

coordenadas de P12
x12=1.3;
y12=0;
z12=0.1;

coordenadas de P13
x13=1.03;
y13=1.03;
z13=0.1;

coordenadas de P14
x14=0;
y14=1.3;
z14=0.1;

coordenadas de P15
x15=-1.03;
y15=1.03;
z15=0.1;

coordenadas de P16
x16=-1.3;
y16=0;
z16=0.1;

coordenadas de P17
x17=-1.03;
y17=-1.03;
z17=0.1;

coordenadas de P20
x20=0;
y20=-1.6;
z20=0.2;

coordenadas de P21
x21=1.33;
y21=-1.33;
z21=0.2;

coordenadas de P22

x22=1.6;
y22=0;
z22=0.2;

coordenadas de P23
x23=1.33;
y23=1.33;
z23=0.2;

coordenadas de P24
x24=0;
y24=1.6;
z24=0.2;

coordenadas de P25
x25=-1.33;
y25=1.33;
z25=0.2;

coordenadas de P26
x26=-1.6;
y26=0;
z26=0.2;

coordenadas de P27
x27=-1.33;
y27=-1.33;
z27=0.2;

coordenadas de P30
x30=0;
y30=-1.9;
z30=0.3;

coordenadas de P31
x31=1.63;
y31=-1.63;
z31=0.3;

coordenadas de P32
x32=1.9;
y32=0;
z32=0.3;

coordenadas de P33
x33=1.63;
y33=1.63;
z33=0.3;

coordenadas de P34

x34=0;
y34=1.9;
z34=0.3;

coordenadas de P35
x35=-1.63;
y35=1.63;
z35=0.3;

coordenadas de P36
x36=-1.9;
y36=0
z36=0.3;

coordenadas de P37
x37=-1.63;
y37=-1.63;
z37=0.3;

coordenadas de P40
x40=0;
y40=-2.2;
z40=0.4;

coordenadas de P41
x41=1.93;
y41=-1.93;
z41=0.4;

coordenadas de P42
x42=2.2;
y42=0;
z42=0.4;

coordenadas de P43
x43=1.93;
y43=1.93;
z43=0.4;

coordenadas de P44
x44=0;
y44=2.2;
z44=0.4;

coordenadas de P45
x45=-1.93;
y45=1.93;
z45=0.4;

coordenadas de P46

x46=-2.2;
y46=0;
z46=0.4;

coordenadas de P47
x47=-1.93;
y47=-1.932;
z47=0.4;

coordenadas de P50
x50=0;
y50=-2.5;
z50=0.5;

coordenadas de P51
x51=2.23;
y51=-2.23;
z51=0.5;

coordenadas de P52
x52=2.5;
y52=0;
z52=0.5;

coordenadas de P53
x53=2.23;
y53=2.23;
z53=0.5;

coordenadas de P54
x54=0;
y54=0.5;

coordenadas de P55
x55=-2.23;
y55=2.23;
z55=0.5;

coordenadas de P56
x56=-2.5;
y56=0;
z56=0.5;

coordenadas de P57
x57=-2.23;
y57=-2.23;
z57=0.5;

coordenadas de P60
x60=0;

y60=-2.8;
z60=0.6;

coordenadas de P61
x61=-2.53;
y61=-2.53;
z61=0.6;

coordenadas de P62
x62=2.8;
y62=0;
z62=0.6;

coordenadas de P63
x63=2.53;
y63=2.53;
z63=0.6;

coordenadas de P64
x64=0;
y64=2.8;
z64=0.6;

coordenadas de P65
x65=-2.53;
y65=2.53;
z65=0.6;

coordenadas de P66
x66=-2.8;
y66=0;
z66=0.6;

coordenadas de P67
x67=-2.53;
y67=-2.53;
z67=0.6;

coordenadas de P70
x70=0;
y70=-2.5;
z70=0.7;

coordenadas de P71
x71=2.23;
y71=-2.23;
z71=0.7;

coordenadas de P72
x72=2.5;

y72=0;
z72=0.7;

coordenadas de P73
x73=2.23;
y73=2.23;
z73=0.7;

coordenadas de P74
x74=0;
y74=2.5;
z74=0.7;

coordenadas de P75
x75=-2.23;
y75=2.23;
z75=0.7;

coordenadas de P76
x76=-2.5;
y76=0;
z76=0.7;

coordenadas de P77
x77=-2.23;
y77=-2.23;
z77=0.7;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=a*k*x00+b*k*x10+c*k*x20+d*k*x30+e*k*x40+f*k*x50+g*k*x60+ h*k*x70+
   a*l*x01+b*l*x11+c*l*x21+d*l*x31+e*l*x41+f*l*x51+g*l*x61+ g*l*x71+
   a*m*x02+b*m*x12+c*m*x22+d*m*x32+e*m*x42+f*m*x52+g*m*x62+g*m*x72+
   a*p*x03+b*p*x13+c*p*x23+d*p*x33+e*p*x43+f*p*x53+g*p*x63 g*p*x73+
   a*r*x04+b*r*x14+c*r*x24+d*r*x34+e*r*x44+f*r*x54+g*r*x64+g*r*x74+
   a*s*x05+b*s*x15+c*s*x25+d*s*x35+e*s*x45+f*s*x55+g*s*x65+g*s*x75+
   a*v*x06+b*v*x16+c*v*x26+d*v*x36+e*v*x46+f*v*x56+g*v*x66+g*v*x76+
   a*w*x07+b*w*x17+c*w*x27+d*w*x37+e*w*x47+f*w*x57+g*w*x67+g*w*x77;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$7.86133u+52.4tu+359.464\,t^2u-2316.55t^3u+$
$7339.06\,t^4u-12231.8\,t^5u+10274.7t^6u-3424.89t^7u-$
$31.6867u^2-585.55\,tu^2-4016.87t^2u^2+25886.5t^3u^2-$
$82011.2t^4u^2+136685\,t^5u^2-114816t^6u^2+38271.9t^7u^2+$
$82011t^4u^2+136685t^5u^2-114816t^6u^2+38271.9t^7u^2+$
$134.342u^3+2902.64tu^3+19912.1t^2u^3-128322t^3u^3+$
$406539t^4u^3-677564t^5u^3+569154t^6u^3-189718t^7u^3+$

$408.17u^4-7203tu^4-49412.6t^2u^4+318437t^3u^4-$
$1.00884\ 10^6t^4u^4+1.6814\ 10^6\ t^5u^4-1.41238\ 10^6\ t^6u^4+$
$470792t^7u^4+591.046\ u^5+9243.85\ tu^5+63412.8\ t^2u^5-$
$408660t^3u^5+1.29468\ 10^6\ t^4u^5-2.1578\ 10^6\ t^5u^5+$
$1.81255\ 10^6\ t^6u^5-604183\ t^7u^5-392.163u^6-5882.45\ tu^6-$
$40353.6\ t^2u^6+260057t^3u^6-823886t^4u^6+$
$1.37314\ 10^6\ t^5u^6-1.15344\ 10^6\ t^6u^6+384480\ t^7u^6+$
$98.0408u^7+1470.61tu^7+10088.4t^2u^7-65014.1t^3u^7+$
$205972t^4u^7-343286t^5u^7+288360t^6u^7-96120.1t^7u^7$

```
y=a*k*y00+b*k*y10+c*k*y20+d*k*y30+e*k*y40+f*k*y50+g*k*y60+ h*k*y70+
   a*l*y01+b*l*y11+c*l*y21+d*l*y31+e*l*y41+f*l*y51+g*l*y61+ g*l*y71+
   a*m*y02+b*m*y12+c*m*y22+d*m*y32+e*m*y42+f*m*y52+g*m*y62+g*m*y72+
   a*p*y03+b*p*y13+c*p*y23+d*p*y33+e*p*y43+f*p*y53+g*p*y63 g*p*y73+
   a*r*y04+b*r*y14+c*r*y24+d*r*y34+e*r*y44+f*r*y54+g*r*y64+g*r*y74+
   a*s*y05+b*s*y15+c*s*y25+d*s*y35+e*s*y45+f*s*y55+g*s*y65+g*s*y75+
   a*v*y06+b*v*yyy16+c*v*y26+d*v*y36+e*v*y46+f*v*y56+g*v*y66+g*v*y76+
   a*w*y07+b*w*y17+c*w*y27+d*w*y37+e*w*y47+f*w*y57+g*w*y67+g*w*y77;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

$-1-1.5t-10.29\ t^2+66.3133\ t^3-210.087\ t^4+350.146\ t^5+$
$294.122\ t^6+98.0408\ t^7+1.47867\ u+26.95\ tu+184.877t^2u-$
$1191.43t^3u+3774.57\ t^4u-6290.95\ t^5u+5284.4t^6u-$
$1761.47\ t^7u-142427\ u^2-515.725\ tu^2-3537.87\ t^2u^3+$
$154732\ t^3u^3+490208\ t^4u^3-817014\ t^5u^3+686292\ t^6u^3-$
$228764\ t^7u^3-610.254\ u^4-10504.4\ tu^4-72060\ t^2u^4+$
$464387\ t^3u^4-1.47123\ 10^6\ t^4u^4+2.45204\ 10^6\ t^5u^4-$
$2.05972\ 10^6\ t^6u^4+686572\ t^7u^4+870.229\ u^5+15826.6\ tu^5+$
$108570\ t^2u^5-699676\ t^3u^5+2.21665\ 10^6\ t^4u^5-$
$3.69441\ 10^6\ t^5u^5+3.1033\ 10^6\ t^6u^5-1.03443\ 10^6\ t^7\ u^5-$
$607.853\ u^6-11764.9\ tu^6-80707.2\ t^2u^6+520113\ t^3u^6-$
$1.64777\ 10^6\ t^4u^6+2.74629\ 10^6\ t^5u^6-2.30688\ 10^6\ t^6u^6+$
$7689603\ t^7\ u^6+169.937\ u^7+3431.43\ tu^7+23539.6\ t^2u^7-$
$151700\ t^3u^7+480600\ t^4u^7-801000\ t^5u^7+672840\ t^6u^7-$
$224280\ t^7u^7$

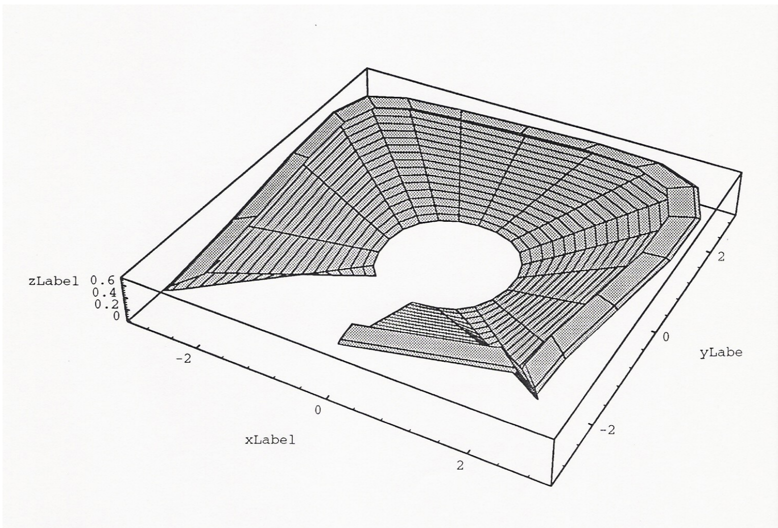
```
z=a*k*z00+b*k*z10+c*k*z20+d*k*z30+e*k*z40+f*k*z50+g*k*z60+ h*k*z70+
   a*l*z01+b*l*z11+c*l*z21+d*l*z31+e*l*z41+f*l*z51+g*l*z61+ g*l*z71+
   a*m*z02+b*m*z12+c*m*z22+d*m*z32+e*m*z42+f*m*z52+g*m*z62+g*m*z72+
   a*p*z03+b*p*z13+c*p*z23+d*p*z33+e*p*z43+f*p*z53+g*p*z63 g*p*z73+
   a*r*z04+b*r*z14+c*r*z24+d*r*z34+e*r*z44+f*r*z54+g*r*z64+g*r*z74+
   a*s*z05+b*s*z15+c*s*z25+d*s*z35+e*s*z45+f*s*z55+g*s*z65+g*s*z75+
   a*v*z06+b*v*z16+c*v*z26+d*v*z36+e*v*z46+f*v*z56+g*v*z66+g*v*z76+
   a*w*z07+b*w*z17+c*w*z27+d*w*z37+e*w*z47+f*w*z57+g*w*z67+g*w*z77;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$-0.7\ t-2.25514\ 10^{-17}\ t^2-\ 8.32667\ 10^{-17}\ t^3-4.85723\ 10^{-16}\ t^4+$
$8.04912\ 10^{-16}\ t^5+1.02696\ 10^{-15}\ t^6-4.85723\ 10^{-17}\ t^7-$

$1.34441\ 10^{-15}\ tu+5.60663\ 10^{-15}\ t^2u-1.00919\ 10^{-13}\ t^3u-$
$6.26166\ 10^{-14}\ t^4u+8.30447\ 10^{-14}\ t^5u+1.77636\ 10^{-15}\ t^6u+$
$9.72555\ 10\text{-}14\ t^7u+6.80012\ 10^{-15}\ tu^2+3.566937\ 10^{-13}\ t^2u^2-$
$7.86038\ 10^{-13}\ t^3u^2+2.32703\ 10^{-13}\ t^4u^2+4.5759\ 10^{-12}\ t^5u^2+$
$4.17089\ 10^{-12}\ t^6u^2-2.23377\ 10^{-12}\ t^7u^2-2.83107\ 10^{-15}\ t\ u^3+$
$1.223679\ 10^{-12}\ t^2u^3+6.49081\ 10^{-12}\ t^3u^3+$
$8.65441\ 10^{-12}\ t^4u^3+1.12266\ 10^{-12}\ t^5u^3+$
$1.41114\ 10^{-11}\ t^6u^3+8.97771\ 10^{-12}\ t^7u^3-2.62512\ 10^{-13}\ tu^4-$
$1.32339\ 10^{-12}\ t^2\ u^4+3.02691\ 10^{-12}\ t^3u^4+$
$5.82503\ 10^{-11}\ t^4u^4+6.9349\ 10^{-11}\ t^5u^4+6.62226\ 10^{-12}\ t^6u^4+$
$1.1056\ 10^{-11}\ t^7u^4+6.37268\ 10^{-14}\ tu^5-4.01457\ 10^{-12}\ t^2\ u^5-$
$4.84661\ 10^{-11}\ t^3u^5+4.47926\ 10^{-11}\ t^4u^5-$
$6.93205\ 10^{-11}\ t^5u^5+7.13385\ 10^{-12}\ t^6u^5-$
$1.08002\ 10^{-12}\ t^7u^5-\ 7.83262\ 10^{-14}\ tu^6+\ 2.8022\ 10^{-13}\ t^2u^6+$
$1.62004\ 10^{-12}\ t^3\ u^6+5.1287\ 10^{-11}\ t^4\ u^6+2.11742\ 10^{-11}\ t5\ u^6-$
$2.74269\ 10^{-12}\ t^6u^6+1.4424\ 10^{-12}\ t^7u^6+1.1588\ 10^{-14}\ tu^7-$
$2.26374\ 10^{-13}\ t^2u^7-3.24718\ 10^{-12}\ t^3u^7-1.0548\ 10^{-11}\ t^4u^7+$
$2.74483\ 10^{-11}\ t^5u^7-1.68221\ 10^{-11}\ t^6\ u^7\ +6.63114\ 10^{-12}\ t^7u^7$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},PlotPoints->20,
                          AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 8x8 puntos dados: P-27

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=-117649/720t^7+11649/180t^6-386561/360t^5+16807/18t^4-(331681/720)t^3+22981/180t^2-(363/20)t+l;

b=823543/720t^7-^352947/80t^6+991613/144t^5-88837/16t^4+109417/45t^3-(10927/20)t^2+49t;

c=-823543/240t^7+1529437/120t^6-151263/8t^5+170471/12t^4-(1347647/240)t^3+43071/40t^2-147/2t;

d=823543/144t^7-2941225/144t^6+4151329/144t^5-2926819/144t^4+133427/18t^3-46501/36t^2+245/3t;

e=-823543/144t^7+117649/6t^6-1899191/72t^5+52822/3t^4-872935/144t^3+2009/2t^2-245/4t ;

f=823543/240t^7-2705927/240t^6+1159683/80t^5-444185/48t^4+45962/15t^3-9849/20t^2+(147/5)t;

g=-823543/720t^7+1294139/360t^6-319333/772t^5+98441/36t^4 -(634207/720)t^3+(49931/360)t^2-49/6t;

h=117649/720t^7-117649/240t^6+84035/144t^5-16807/48t^4+(9947/90)t^3-(343/20)t^2+t;

k=-117649/720u^7+11649/180u^6-386561/360u^5+16807/18u^4-(331681/720)u^3+22981/180u^2-(363/20)u+l;

l=823543/720u^7-^352947/80u^6+991613/144u^5-88837/16u^4+109417/45u^3-(10927/20)u^2+49u;

m=-823543/240u^7+1529437/120u^6-151263/8u^5+170471/12u^4-(1347647/240)u^3+43071/40u^2-147/2u;

p=823543/144u^7-2941225/144u^6+4151329/144u^5-2926819/144u^4+133427/18u^3-46501/36u^2+245/3u;

r=-823543/144u^7+117649/6u^6-1899191/72u^5+52822/3u^4-872935/144u^3+2009/2u^2-245/4u ;

s=823543/240u^7-2705927/240u^6+1159683/80u^5-444185/48u^4+45962/15u^3-9849/20u^2+(147/5)u;

v=-823543/720u^7+1294139/360u^6-319333/772u^5+98441/36u^4
-(634207/720)u^3+(49931/360)u^2-49/6u;

w=117649/720u^7-117649/240u^6+84035/144u^5-16807/48u^4+(9947/90)u^3-(343/20)u^2+u;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=-1;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=0.73;
y01=-0.73;
z01=0;

coordenadas de P02
x02=1;
y02=0;
z02=0;

coordenadas de P03
x03=0.73;
y03=0.73;
z03=0;

coordenadas de P04
x04=0;
y04=1;
z04=0;

coordenadas de P05
x05=-0.73;
y05=0.73;
z05=0;

coordenadas de P06
x06=-1;
y06=0;
z06=0;

coordenadas de P07
x07=-0.73;
y07=-0.73;
z07=0;

coordenadas de P10

x10=0.73;
y10=-0.73;
z10=0.25;

coordenadas de P11
x11=1;
y11=0
z11=0.25;

coordenadas de P12
x12=0.73;
y12=0.73;
z12=0.25;

coordenadas de P13
x13=0;
y13=1;
z13=0.25;

coordenadas de P14
x14=-0.73;
y14=0.73;
z14=0.25;

coordenadas de P15
x15=-1;
y15=0;
z15=0.25;

coordenadas de P16
x16=-0.73;
y16=-0.73;
z16=0.25;

coordenadas de P17
x17=0;
y17=-1;
z17=0.25;

coordenadas de P20
x20=1;
y20=0;
z20=0.5;

coordenadas de P21
x21=0.73;
y21=0.73;
z21=0.5;

coordenadas de P22

x22=0;
y22=1;
z22=0.5;

coordenadas de P23
x23=-0.73;
y23=0.73;
z23=0.5;

coordenadas de P24
x24=-1;
y24=0;
z24=0.5;

coordenadas de P25
x25=-0.73;
y25=-0.73;
z25=0.5;

coordenadas de P26
x26=0;
y26=-1;
z26=0.5;

coordenadas de P27
x27=0.73;
y27=-0.73;
z27=0.5;

coordenadas de P30
x30=0.73;
y30=0.73;
z30=0.75;

coordenadas de P31
x31=0;
y31=1;
z31=0.75;

coordenadas de P32
x32=-0.73;
y32=0.73;
z32=0.75;

coordenadas de P33
x33=-1;
y33=0;
z33=0.75;

coordenadas de P34

x34=-0.73;
y34=-0.73;
z34=0.75;

coordenadas de P35
x35=0;
y35=-1;
z35=0.75;

coordenadas de P36
x36=0.73;
y36=-0.73;
z36=0.75;

coordenadas de P37
x37=1;
y37=0;
z37=0.75;

coordenadas de P40
x40=0;
y40=1;
z40=1;

coordenadas de P41
x41=-0.73;
y41=0.73;
z41=1;

coordenadas de P42
x42=-1;
y42=0;
z42=1;

coordenadas de P43
x43=-0.73;
y43=-0.73;
z43=1;

coordenadas de P44
x44=0;
y44=-1;
z44=1;

coordenadas de P45
x45=0.73;
y45=-0.73;
z45=1;

coordenadas de P46

x46=1;
y46=0;
z46=1;

coordenadas de P47
x47=0.73;
y47=0.73;
z47=1;

coordenadas de P50
x50=-0.73;
y50=0.73;
z50=1.25;

coordenadas de P51
x51=-1;
y51=0;
z51=1.25;

coordenadas de P52
x52=-0.73;
y52=-0.73;
z52=1.25;

coordenadas de P53
x53=0;
y53=-1;
z53=1.25;

coordenadas de P54
x54=0.73;
y54=-0.73;
z54=1.25;

coordenadas de P55
x55=1
y55=0;
z55=1.25;

coordenadas de P56
x56=0.73;
y56=0.73;
z56=1.25;

coordenadas de P57
x57=0;
y57=1;
z57=1.25;

coordenadas de P60

x60=-1;
y60=0;
z60=1.5;

coordenadas de P61
x61=-0.73;
y61=-0.73;
z61=1.5;

coordenadas de P62
x62=0;
y62=-1;
z62=1.5;

coordenadas de P63
x63=0.73;
y63=-0.73;
z63=1.5;

coordenadas de P64
x64=1;
y64=0;
z64=1.5;

coordenadas de P65
x65=0.73;
y65=0.73;
z65=1.5;

coordenadas de P66
x66=0;
y66=1;
z66=1.5;

coordenadas de P67
x67=-0.73;
y67=0.73;
z67=1.5;

coordenadas de P70
x70=-0.73;
y70=-0.73;
z70=1.75;

coordenadas de P71
x71=0;
y71=-1;
z71=1.75;

coordenadas de P72

x72=0.73;
y72=-0.73;
z72=1.75;

coordenadas de P73
x73=1;
y73=0;
z73=1.75;

coordenadas de P74
x74=0.73;
y74=0.73;
z74=1.75;

coordenadas de P75
x75=0;
y75=1;
z75=1.75;

coordenadas de P76
x76=-0.73;
y76=0.73;
z76=1.75;

coordenadas de P77
x77=-1;
y77=0;
z77=1.75;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=a*k*x00+b*k*x10+c*k*x20+d*k*x30+e*k*x40+f*k*x50+g*k*x60+ h*k*x70+
   a*l*x01+b*l*x11+c*l*x21+d*l*x31+e*l*x41+f*l*x51+g*l*x61+ g*l*x71+
   a*m*x02+b*m*x12+c*m*x22+d*m*x32+e*m*x42+f*m*x52+g*m*x62+g*m*x72+
   a*p*x03+b*p*x13+c*p*x23+d*p*x33+e*p*x43+f*p*x53+g*p*x63 g*p*x73+
   a*r*x04+b*r*x14+c*r*x24+d*r*x34+e*r*x44+f*r*x54+g*r*x64+g*r*x74+
   a*s*x05+b*s*x15+c*s*x25+d*s*x35+e*s*x45+f*s*x55+g*s*x65+g*s*x75+
   a*v*x06+b*v*x16+c*v*x26+d*v*x36+e*v*x46+f*v*x56+g*v*x66+g*v*x76+
   a*w*x07+b*w*x17+c*w*x27+d*w*x37+e*w*x47+f*w*x57+g*w*x67+g*w*x77;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$7.86133\ t- 31.6867\ t^2+134.342\ t^3-408.17\ t^4+591.046\ t^5-$
$392.163\ t^6+98.0408\ t^7+7.86133\ u+379.642\ tu-$
$6536.78\ t^2u+37874.5\ t^3u-105397\ t^4u+152020\ t^5u-$
$109305\ t^6u+30958\ t^7u-31.6867\ u^2-6536.78\ tu^2+$
$105796\ t^2u^2-606669\ t^3u^2+1.66318\ 10^6\ t^4u^2-$
$2.35977\ 10^6\ t^5u^2+1.67134\ 10^6\ t^6u^2-467257\ t^7u^2+$

$134.342\ u^3+37874.5\ tu^3-\ 606669\ t^2u^3+3.43084\ 10^6\ t^3u^3-$
$9.28351\ 10^6\ t^4u^3+1.30246\ 10^7\ t^5u^3-\ 9.13606\ 10^6\ t^6u^3+$
$2.53258\ 10^6\ t^7u^3-408.17\ u^4-105397\ tu^4+$
$1.66318\ 10^6\ t^2u^4-9.28351\ 10^6\ t^3u^4+2.48545\ 10^7\ t^4u^4-$
$3.45547\ 10^7\ t^5u^4+2.40427\ 10^7\ t^6u^4-6.61572\ 10^6\ t^7\ u^4+$
$591.046\ u^5+152020\ tu^5-2.35977\ 10^6\ t^2u^5+$
$1.30246\ 10^7\ t^3u^5-3.45547\ 10^7\ t^4u^5+4.76551\ 10^7\ t^5u^5-$
$3.29127\ 10^7\ t^6u^5+8.99409\ 10^6\ t^7u^5-392.163\ u^6-$
$109305\ tu^6+1.67134\ 10^6\ t^2u^6-9.13606\ 10^6\ t^3u^6+$
$2.40427\ 10^7\ t^4u^6-3.29127\ 10^7\ t^5u^6+2.25733\ 10^7\ t^6u^6-$
$6.12819\ 10^6\ t^7u^6+98.0408\ u^7+30958\ tu^7-467257\ t^2u^7+$
$2.53258\ 10^6\ t^3u^7-6.61572\ 10^6\ t^4u^7+8.99409\ 10^6\ t^5u^7-$
$6.12819\ 10^6\ t^6u^7+1.65326\ 10^6\ t^7u^7$

```
y=a*k*y00+b*k*y10+c*k*y20+d*k*y30+e*k*y40+f*k*y50+g*k*y60+ h*k*y70+
   a*l*y01+b*l*y11+c*l*y21+d*l*y31+e*l*y41+f*l*y51+g*l*y61+ g*l*y71+
   a*m*y02+b*m*y12+c*m*y22+d*m*y32+e*m*y42+f*m*y52+g*m*y62+g*m*y72+
   a*p*y03+b*p*y13+c*p*y23+d*p*y33+e*p*y43+f*p*y53+g*p*y63 g*p*y73+
   a*r*y04+b*r*y14+c*r*y24+d*r*y34+e*r*y44+f*r*y54+g*r*y64+g*r*y74+
   a*s*y05+b*s*y15+c*s*y25+d*s*y35+e*s*y45+f*s*y55+g*s*y65+g*s*y75+
   a*v*y06+b*v*yyy16+c*v*y26+d*v*y36+e*v*y46+f*v*y56+g*v*y66+g*v*y76+
   a*w*y07+b*w*y17+c*w*y27+d*w*y37+e*w*y47+f*w*y57+g*w*y67+g*w*y77;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

$-1+1.47867\ t-\ 14.2427\ t^2+190.975\ t^3-610.254\ t^4+$
$870.229\ t^5-607.853\ t^6+169.937\ t^7+1.47867\ u-148.454\ tu+$
$1701.81\ t^2u-5285.65\ t^3u+3807.65\ t^4u+7324.49\ t^5u-$
$12901.5\ t^6u+5496.82\ t^7u-14.2427\ u^2+1701.81\ tu^2-$
$8239.46\ t^2u^2-28695.9\ t^3u^2+243828\ t^4u^2-544358\ t^5u^2+$
$508621\ t^6u^2-172834\ t^7u^2+190.975\ u^3-5285.65\ tu^3-$
$28695.9\ t^2u^3+589519\ t^3u^3-2.54832\ 10^6\ t^4u^3+$
$4.74535\ 10^6\ t^5u^3-\ 4.0639\ 10^6\ t^6u^3+1.31114\ 10^6\ t^7u^3-$
$610.254\ u^4+3807.65\ tu^4+243828\ t^2u^4-2.54832\ 10^6\ t^3u^4+$
$9.52447\ 10^6\ t^4u^4-1.65916\ 10^7\ t^5u^4+1.36647\ 10^7\ t^6u^4-$
$4.2962\ 10^6\ t^7\ u^4+870.229\ u^5+7324.49\ tu^5-544358\ t^2u^5+$
$4.74535\ 10^6\ t^3u^5-1.65916\ 10^7\ t^4u^5+2.78782\ 10^7\ t^5u^5-$
$2.24396\ 10^7\ t^6u^5+6.94353\ 10^6\ t^7u^5-607.853\ u^6-$
$12901.5\ tu^6+508621\ 10^6\ t^2u^6-4.0639\ 10^6\ t^3u^6+$
$1.36647\ 10^7\ t^4u^6-2.24396\ 10^7\ t^5u^6+1.77886\ 10^7\ t^6u^6-$
$5.44467\ 10^6\ t^7u^6+169.937\ u^7+5496.82\ tu^7-172834\ t^2u^7+$
$1.31114\ 10^6\ t^3u^7-4.2962\ 10^6\ t^4u^7+6.94353\ 10^6\ t^5u^7-$
$5.44467\ 10^6\ t^6u^7+1.65326\ 10^6\ t^7u^7$

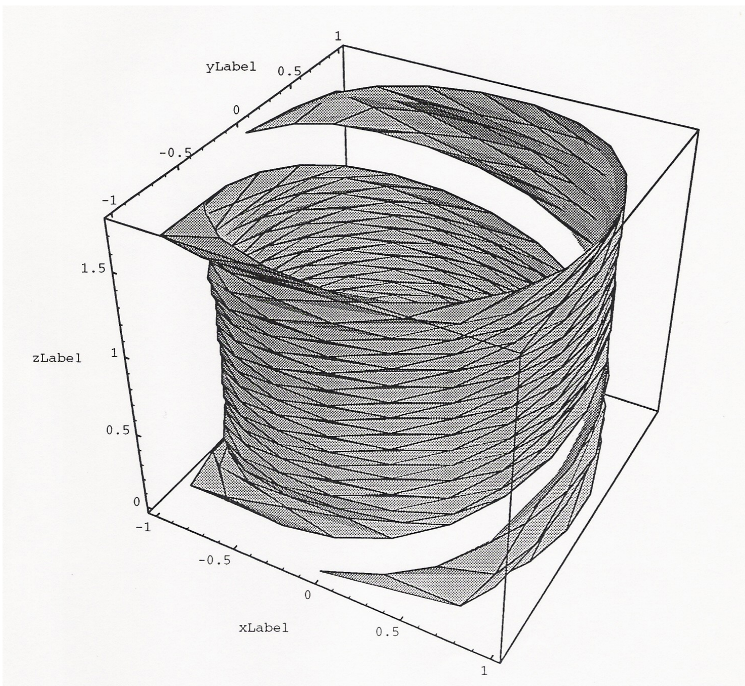
```
z=a*k*z00+b*k*z10+c*k*z20+d*k*z30+e*k*z40+f*k*z50+g*k*z60+ h*k*z70+
   a*l*z01+b*l*z11+c*l*z21+d*l*z31+e*l*z41+f*l*z51+g*l*z61+ g*l*z71+
   a*m*z02+b*m*z12+c*m*z22+d*m*z32+e*m*z42+f*m*z52+g*m*z62+g*m*z72+
   a*p*z03+b*p*z13+c*p*z23+d*p*z33+e*p*z43+f*p*z53+g*p*z63 g*p*z73+
   a*r*z04+b*r*z14+c*r*z24+d*r*z34+e*r*z44+f*r*z54+g*r*z64+g*r*z74+
   a*s*z05+b*s*z15+c*s*z25+d*s*z35+e*s*z45+f*s*z55+g*s*z65+g*s*z75+
```

```
   a*v*z06+b*v*z16+c*v*z26+d*v*z36+e*v*z46+f*v*z56+g*v*z66+g*v*z76+
   a*w*z07+b*w*z17+c*w*z27+d*w*z37+e*w*z47+f*w*z57+g*w*z67+g*w*z77;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$1.75\,t- 4.51028\ 10^{-17}\ t^2-7.49401\ 10^{-16}\ t^3+5.55112\ 10^{-16}\ t^4+$
$2.22045\ 10^{-16}\ t^5+9.99201\ 10^{-16}\ t^6+5.55112\ 10^{-16}\ t^7+$
$2.32453\ 10^{-16}\ tu+ 2.94209\ 10^{-15}\ t^2u-8.61533\ 10^{-14}\ t^3u+$
$2.15827\ 10^{-13}\ t^4u-1.21325\ 10^{-12}\ t^5u+1.46549\ 10^{-13}\ t^6u+$
$1.54987\ 10^{-13}\ t^7u+3.23769\ 10^{-14}\ tu^2+8.54872\ 10^{-14}\ t^2u^2-$
$3.88312\ 10^{-12}\ t^3u^2+7.00595\ 10^{-12}\ 10^6\ t^4u^2-$
$1.11839\ 10^{-11}\ t^5u^2-5.94724\ 10^{-12}\ t^6u^2-$
$2.87059\ 10^{-12}\ t^7u^2-3.41949\ 10^{-14}\ tu^3- 1.05693\ 10^{-12}\ t^2u^3-$
$1.1795\ 10^{-11}\ t^3u^3+7.64544\ 10^{-12}\ t^4u^3-4.78906\ 10^{-11}\ t^5u^3-$
$3.49587\ 10^{-12}\ t^6u^3+1.33014\ 10^{-11}\ t^7u^3+4.58522\ 10^{-16}\ tu^4-$
$3.95595\ 10^{-12}\ t^2u^4+2.2311\ 10^{-12}\ t^3u^4-1.52681\ 10^{-10}\ t^4u^4+$
$1.02318\ 10^{-12}\ t^5u^4+9.2939\ 10^{-11}\ t^6u^4+3.11502\ 10^{-11}\ t^7\ u^4+$
$5.04374\ 10^{-13}\ tu^5-4.77662\ 10^{-12}\ t^2u^5+3.75309\ 10^{-11}\ t^3u^5+$
$4.99085\ 10^{-11}\ t^4u^5-1.63823\ 10^{-10}\ t^5u^5-$
$1.01352\ 10^{-10}\ t^6u^5-3.16902\ 10^{-11}\ t^7u^5-5.55556\ 10^{-13}\ tu^6-$
$7.94742\ 10^{-12}\ t^2u^6-2.03357\ 10^{-11}\ t^3u^6-$
$1.30882\ 10^{-10}\ t^4u^6-2.47212\ 10^{-10}\ t^5u^6-6.5711\ 10^{-11}\ t^6u^6-$
$1.90283\ 10^{-11}\ t^7u^6-8.84848\ 10^{-14}\ tu^7+2.53131\ 10^{-13}\ t^2u^7-$
$7.76268\ 10^{-12}\ t^3u^7-3.32179\ 10^{-11}\ t^4u^7-$
$4.91553\ 10^{-11}\ t^5u^7-4.45084\ 10^{-11}\ t^6u^7-4.67892\ 10^{-12}\ t^7u^7$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},PlotPoints->20,
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 8x8 puntos dados: P-28

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=-117649/720t^7+11649/180t^6-386561/360t^5+16807/18t^4-(331681/720)t^3+22981/180t^2-(363/20)t+l;

b=823543/720t^7-^352947/80t^6+991613/144t^5-88837/16t^4+109417/45t^3-(10927/20)t^2+49t;

c=-823543/240t^7+1529437/120t^6-151263/8t^5+170471/12t^4-(1347647/240)t^3+43071/40t^2-147/2t;

d=823543/144t^7-2941225/144t^6+4151329/144t^5-2926819/144t^4+133427/18t^3-46501/36t^2+245/3t;

e=-823543/144t^7+117649/6t^6-1899191/72t^5+52822/3t^4-872935/144t^3+2009/2t^2-245/4t ;

f=823543/240t^7-2705927/240t^6+1159683/80t^5-444185/48t^4+45962/15t^3-9849/20t^2+(147/5)t;

g=-823543/720t^7+1294139/360t^6-319333/772t^5+98441/36t^4 -(634207/720)t^3+(49931/360)t^2-49/6t;

h=117649/720t^7-117649/240t^6+84035/144t^5-16807/48t^4+(9947/90)t^3-(343/20)t^2+t;

k=-117649/720u^7+11649/180u^6-386561/360u^5+16807/18u^4-(331681/720)u^3+22981/180u^2-(363/20)u+l;

l=823543/720u^7-^352947/80u^6+991613/144u^5-88837/16u^4+109417/45u^3-(10927/20)u^2+49u;

m=-823543/240u^7+1529437/120u^6-151263/8u^5+170471/12u^4-(1347647/240)u^3+43071/40u^2-147/2u;

p=823543/144u^7-2941225/144u^6+4151329/144u^5-2926819/144u^4+133427/18u^3-46501/36u^2+245/3u;

r=-823543/144u^7+117649/6u^6-1899191/72u^5+52822/3u^4-872935/144u^3+2009/2u^2-245/4u ;

s=823543/240u^7-2705927/240u^6+1159683/80u^5-444185/48u^4+45962/15u^3-9849/20u^2+(147/5)u;

v=-823543/720u^7+1294139/360u^6-319333/772u^5+98441/36u^4
-(634207/720)u^3+(49931/360)u^2-49/6u;

w=117649/720u^7-117649/240u^6+84035/144u^5-16807/48u^4+(9947/90)u^3-(343/20)u^2+u;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=-1;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=0.73;
y01=-0.73;
z01=0;

coordenadas de P02
x02=1;
y02=0;
z02=0;

coordenadas de P03
x03=0.73;
y03=0.73;
z03=0;

coordenadas de P04
x04=0;
y04=1;
z04=0;

coordenadas de P05
x05=-0.73;
y05=0.73;
z05=0;

coordenadas de P06
x06=-1;
y06=0;
z06=0;

coordenadas de P07
x07=-0.73;
y07=-0.73;
z07=0;

coordenadas de P10
x10=1;

y10=-1;
z10=0.5;

coordenadas de P11
x11=1.73;
y11=-0.03;
z11=0.5;

coordenadas de P12
x12=2;
y12=0;
z12=0.5;

coordenadas de P13
x13=1.73;
y13=0.73;
z13=0.5;

coordenadas de P14
x14=1;
y14=1;
z14=0.5;

coordenadas de P15
x15=0.27;
y15=.73;
z15=0.5;

coordenadas de P16
x16=0;
y16=0;
z16=0.5;

coordenadas de P17
x17=0.27;
y17=-0.73;
z17=0.5;

coordenadas de P20
x20=1.5;
y20=-1;
z20=1;

coordenadas de P21
x21=2.23;
y21=-0.73;
z21=1;

coordenadas de P22
x22=2.5;

y22=0;
z22=1;

coordenadas de P23
x23=2.23;
y23=0.73;
z23=1;

coordenadas de P24
x24=1.5;
y24=1;
z24=1;

coordenadas de P25
x25=0.77;
y25=0.73;
z25=1;

coordenadas de P26
x26=0.5;
y26=0;
z26=1;

coordenadas de P27
x27=0.77;
y27=-0.73;
z27=1;

coordenadas de P30
x30=-0.5;
y30=-1;
z30=1.5;

coordenadas de P31
x31=0.23;
y31=-0.73;
z31=1.5;

coordenadas de P32
x32=-0.5;
y32=0;
z32=1.5;

coordenadas de P33
x33=0.23;
y33=0.73;
z33=1.5;

coordenadas de P34
x34=-0.5;

y34=1;
z34=1.5;

coordenadas de P35
x35=-1.23;
y35=0.73;
z35=1.5;

coordenadas de P36
x36=-1.5;
y36=0;
z36=1.5;

coordenadas de P37
x37=-1.23;
y37=-0.73;
z37=1.5;

coordenadas de P40
x40=0;
y40=-1;
z40=2;

coordenadas de P41
x41=0.73;
y41=-0.73;
z41=2;

coordenadas de P42
x42=1;
y42=0;
z42=2;

coordenadas de P43
x43=0.73;
y43=0.73;
z43=2;

coordenadas de P44
x44=0;
y44=1;
z44=2;

coordenadas de P45
x45=-0.73;
y45=0.73;
z45=2;

coordenadas de P46
x46=-1;

y46=0;
z46=2;

coordenadas de P47
x47=-0.73;
y47=-0.73;
z47=2;

coordenadas de P50
x50=1;
y50=-1;
z50=2.5;

coordenadas de P51
x51=1.73;
y51=-0.73;
z51=2.5;

coordenadas de P52
x52=2;
y52=0;
z52=2.5;

coordenadas de P53
x53=1.73;
y53=0.73;
z53=2.5;

coordenadas de P54
x54=1;
y54=1;
z54=2.5;

coordenadas de P55
x55=0.27;
y55=0.73;
z55=2.5;

coordenadas de P56
x56=0;
y56=0;
z56=2.5;

coordenadas de P57
x57=0.27;
y57=-0.73;
z57=2.5;

coordenadas de P60
x60=-1;

y60=-1;
z60=3;

coordenadas de P61
x61=-0.27;
y61=-0.73;
z61=3;

coordenadas de P62
x62=0;
y62=0;
z62=3;

coordenadas de P63
x63=-0.27;
y63=0.73;
z63=3;

coordenadas de P64
x64=-1;
y64=-1;
z64=3;

coordenadas de P65
x65=-1.73;
y65=0.73;
z65=3;

coordenadas de P66
x66=-2;
y66=0;
z66=3;

coordenadas de P67
x67=-1.73;
y67=-0.73;
z67=3;

coordenadas de P70
x70=0;
y70=-1;
z70=3.5;

coordenadas de P71
x71=0.73;
y71=-0.73;
z71=3.5;

coordenadas de P72
x72=1;

```
        y72=0;
        z72=3.5;

coordenadas de P73
        x73=0.73;
        y73=0.73;
        z73=3.5;

coordenadas de P74
        x74=0;
        y74=1;
        z74=3.5;

coordenadas de P75
        x75=-0.73;
        y75=0.73;
        z75=3.5;

coordenadas de P76
        x76=-1;
        y76=0;
        z76=3.5;

coordenadas de P77
        x77=-0.73;
        y77=-0.73;
        z77=3.5;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=a*k*x00+b*k*x10+c*k*x20+d*k*x30+e*k*x40+f*k*x50+g*k*x60+ h*k*x70+
  a*l*x01+b*l*x11+c*l*x21+d*l*x31+e*l*x41+f*l*x51+g*l*x61+ g*l*x71+
  a*m*x02+b*m*x12+c*m*x22+d*m*x32+e*m*x42+f*m*x52+g*m*x62+g*m*x72+
  a*p*x03+b*p*x13+c*p*x23+d*p*x33+e*p*x43+f*p*x53+g*p*x63 g*p*x73+
  a*r*x04+b*r*x14+c*r*x24+d*r*x34+e*r*x44+f*r*x54+g*r*x64+g*r*x74+
  a*s*x05+b*s*x15+c*s*x25+d*s*x35+e*s*x45+f*s*x55+g*s*x65+g*s*x75+
  a*v*x06+b*v*x16+c*v*x26+d*v*x36+e*v*x46+f*v*x56+g*v*x66+g*v*x76+
  a*w*x07+b*w*x17+c*w*x27+d*w*x37+e*w*x47+f*w*x57+g*w*x67+g*w*x77;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$-64.5167\ t + 1083.51\ t^2 - 5752.63\ t^3 + 13930.8\ t^4 - 16958.7\ t^5 +$
$10049.2\ t^6 - 2287.62\ t^7 + 7.86133\ u + 1.05471\ 10^{-15}\ tu +$
$6.30607\ 10^{-14}\ t^2u - 1.77636\ 10^{-14}\ t^3u + 1.98952\ 10^{-13}\ t^4u -$
$6.25278\ 10^{-13}\ t^5u - 5.68434\ 10^{-14}\ t^6u + 1.06581\ 10^{-13}\ t^7u -$
$31.6867\ u^2 + 3.66374\ 10^{-14}\ tu^2 - 2.55795\ 10^{-13}\ t^2u^2 +$
$4.34852\ 10^{-12}\ t^3u^2 + 5.68434\ 10^{-12}\ 10^6\ t^4u^2 + 1.7053\ 10^{-12}\ t^5u^2 -$
$9.20863\ 10^{-12}\ t^6u^2 + 4.26326\ 10^{-13}\ t^7u^2 + 134.342\ u^3 -$
$8.17124\ 10^{-14}\ tu^3 - 6.39488\ 10^{-13}\ t^2u^3 + 4.54747\ 10^{-12}\ t^3u^3 +$
$4.91127\ 10^{-11}\ t^4u^3 + 2.91038\ 10^{-11}\ t^5u^3 -$

$8.41283\ 10^{-11}\ t^6u^3 - 2.6148\ 10^{-12}\ t^7u^3 - 408.17\ u^4 +$
$8.88178\ 10^{-14}\ tu^4 + 1.02318\ 10^{-12}\ t^2u^4 + 1.81899\ 10^{-11}\ t^3u^4 -$
$1.81899\ 10^{-12}\ t^4u^4 + 1.10049\ 10^{-10}\ t^5u^4 -$
$1.50976\ 10^{-10}\ t^6u^4 + 1.79625\ 10^{-11}\ t^7\ u^4 + 591.046\ u^5 -$
$1.21858\ 10^{-12}\ tu^5 + 1.59162\ 10^{-12}\ t^2u^5 + 3.09228\ 10^{-11}\ t^3u^5 -$
$3.19233\ 10^{-10}\ t^4u^5 - 2.47383\ 10^{-10}\ t^5u^5 -$
$5.18412\ 10^{-11}\ t^6u^5 - 1.47793\ 10^{-11}\ t^7u^5 - 392.163\ u^6 +$
$2.8777\ 10^{-13}\ tu^6 + 1.3074\ 10^{-12}\ t^2u^6 + 4.16094\ 10^{-11}\ t^3u^6 +$
$2.72848\ 10^{-11}\ t^4u^6 + 1.90994\ 10^{-11}\ t^5u^6 -$
$1.54614\ 10^{-10}\ t^6u^6 - 9.32232\ 10^{-12}\ t^7u^6 + 98.0408\ u^7 -$
$2.57572\ 10^{-14}\ tu^7 - 5.68434\ 10^{-14}\ t^2u^7 - 6.42331\ 10^{-12}\ t^3u^7 +$
$1.45519\ 10^{-11}\ t^4u^7 + 2.56932\ 10^{-11}\ t^5u^7 +$
$7.7307\ 10^{-12}\ t^6u^7 - 1.63141\ 10^{-11}\ t^7u^7$

```
y=a*k*y00+b*k*y10+c*k*y20+d*k*y30+e*k*y40+f*k*y50+g*k*y60+ h*k*y70+
   a*l*y01+b*l*y11+c*l*y21+d*l*y31+e*l*y41+f*l*y51+g*l*y61+ g*l*y71+
   a*m*y02+b*m*y12+c*m*y22+d*m*y32+e*m*y42+f*m*y52+g*m*y62+g*m*y72+
   a*p*y03+b*p*y13+c*p*y23+d*p*y33+e*p*y43+f*p*y53+g*p*y63 g*p*y73+
   a*r*y04+b*r*y14+c*r*y24+d*r*y34+e*r*y44+f*r*y54+g*r*y64+g*r*y74+
   a*s*y05+b*s*y15+c*s*y25+d*s*y35+e*s*y45+f*s*y55+g*s*y65+g*s*y75+
   a*v*y06+b*v*yyy16+c*v*y26+d*v*y36+e*v*y46+f*v*y56+g*v*y66+g*v*y76+
   a*w*y07+b*w*y17+c*w*y27+d*w*y37+e*w*y47+f*w*y57+g*w*y67+g*w*y77;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

$-1 + 1.47867\ u + 680.283\ tu - 1749.4\ t^2u - 24503.2\ t^3u +$
$144529\ t^4u - 307113\ t^5u + 289041\ t^6u - 100884\ t^7u -$
$14.2427\ u^2 - 2332.97\ tu^2 - 69693.9\ t^2u^2 + 839703\ t^3u^2 -$
$3.3701\ 10^6\ t^4u^2 + 6.27668\ 10^6\ t^5u^2 - 5.53473\ 10^6\ t^6u^2 -$
$1.86047\ 10^6\ t^7u^2 + 190.975\ u^3 - 15613.4\ tu^3 + 751668\ t^2u^3 -$
$6.54093\ 10^6\ t^3u^3 + 2.37027\ 10^7\ t^4u^3 - 4.2052\ 10^7\ t^5u^3 +$
$3.60749\ 10^7\ t^6u^3 - 1.19208\ 10^7\ t^7u^3 - 610.254\ u^4 +$
$97142\ tu^4 - 2.76072\ 10^6\ t^2u^4 + 2.15683\ 10^7\ t^3u^4 -$
$7.47138\ 10^7\ t^4u^4 + 1.29419\ 10^8\ t^5u^4 - 1.09444\ 10^8\ t^6u^4 +$
$3.58333\ 10^7\ t^7\ u^4 + 870.229\ u^5 - 194638\ tu^5 +$
$4.68342\ 10^6\ t^2u^5 - 3.47485\ 10^7\ t^3u^5 + 1.17494\ 10^8\ t^4u^5 -$
$2.00785\ 10^8\ t^5u^5 + 1.6838\ 10^8\ t^6u^5 - 5.48285\ 10^7\ t^7u^5 -$
$607.853\ u^6 + 168941\ tu^6 - 3.75191\ 10^6\ t^2u^6 +$
$2.70343\ 10^7\ t^3u^6 - 9.00888\ 10^7\ t^4u^6 + 1.52665\ 10^8\ t^5u^6 -$
$1.27351\ 10^8\ t^6u^6 + 4.13236\ 10^7\ t^7u^6 + 169.937\ u^7 -$
$54178.5\ tu^7 + 1.14899\ 10^6\ t^2u^7 - 8.12836\ 10^6\ t^3u^7 +$
$2.68316\ 10^7\ t^4u^7 - 4.52165\ 10^7\ t^5u^7 + 3.75856\ 10^7\ t^6u^7 - 1.21672\ 10^7\ t^7u^7$

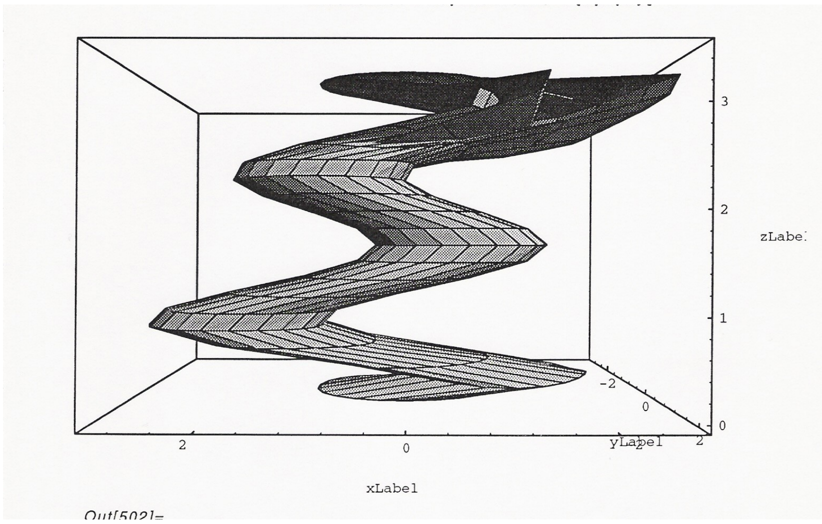
```
z=a*k*z00+b*k*z10+c*k*z20+d*k*z30+e*k*z40+f*k*z50+g*k*z60+ h*k*z70+
   a*l*z01+b*l*z11+c*l*z21+d*l*z31+e*l*z41+f*l*z51+g*l*z61+ g*l*z71+
   a*m*z02+b*m*z12+c*m*z22+d*m*z32+e*m*z42+f*m*z52+g*m*z62+g*m*z72+
   a*p*z03+b*p*z13+c*p*z23+d*p*z33+e*p*z43+f*p*z53+g*p*z63 g*p*z73+
   a*r*z04+b*r*z14+c*r*z24+d*r*z34+e*r*z44+f*r*z54+g*r*z64+g*r*z74+
   a*s*z05+b*s*z15+c*s*z25+d*s*z35+e*s*z45+f*s*z55+g*s*z65+g*s*z75+
   a*v*z06+b*v*z16+c*v*z26+d*v*z36+e*v*z46+f*v*z56+g*v*z66+g*v*z76+
```

```
   a*w*z07+b*w*z17+c*w*z27+d*w*z37+e*w*z47+f*w*z57+g*w*z67+g*w*z77;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$3.5\, t- 9.02056\ 10^{-17}\ t^2-1.4988\ 10^{-15}\ t^3+1.11022\ 10^{-15}\ t^4+$
$4.44089\ 10^{-16}\ t^5+1.9984\ 10^{-15}\ t^6+1.11022\ 10^{-15}\ t^7+$
$4.64906\ 10^{-16}\ tu+ 5.88418\ 10^{-15}\ t^2u+1.68754\ 10^{-13}\ t^3u+$
$6.59028\ 10^{-13}\ t^4u-2.19913\ 10^{-12}\ t^5u+6.57252\ 10^{-14}\ t^6u+$
$3.09974\ 10^{-13}\ t^7u+7.91034\ 10^{-15}\ tu^2+1.70974\ 10^{-13}\ t^2u^2-$
$8.67573\ 10^{-12}\ t^3u^2+1.44667\ 10^{-11}\ 10^6\ t^4u^2-$
$1.78204\ 10^{-11}\ t^5u^2-1.55325\ 10^{-11}\ t^6u^2-$
$5.74119\ 10^{-12}\ t^7u^2-6.83897\ 10^{-14}\ tu^3- 3.02336\ 10^{-12}\ t^2u^3-$
$2.359\ 10^{-11}\ t^3u^3+1.52909\ 10^{-11}\ t^4u^3-1.28523\ 10^{-10}\ t^5u^3-$
$6.99174\ 10^{-12}\ t^6u^3+2.66027\ 10^{-11}\ t^7u^3+9.17044\ 10^{-14}\ tu^4-$
$8.13927\ 10^{-12}\ t^2u^4+4.46221\ 10^{-12}\ t^3u^4-$
$3.05363\ 10^{-10}\ t^4u^4-1.07093\ 10^{-10}\ t^5u^4-$
$2.79783\ 10^{-10}\ t^6u^4+6.23004\ 10^{-11}\ t^7\ u^4+1.00875\ 10^{-12}\ tu^5-$
$9.55325\ 10^{-12}\ t^2u^5+7.14238\ 10^{-11}\ t^3u^5+$
$1.14369\ 10^{-10}\ t^4u^5-3.34921\ 10^{-10}\ t^5u^5-$
$2.02704\ 10^{-10}\ t^6u^5-6.33804\ 10^{-11}\ t^7u^5-2.02061\ 10^{-12}\ tu^6-$
$1.58948\ 10^{-11}\ t^2u^6-4.1581\ 10^{-11}\ t^3u^6-2.89333\ 10^{-11}\ t^4u^6-$
$4.94424\ 10^{-10}\ t^5u^6-1.31422\ 10^{-10}\ t^6u^6-$
$3.80567\ 10^{-11}\ t^7u^6-1.7697\ 10^{-13}\ tu^7+7.33635\ 10^{-13}\ t^2u^7+$
$1.33511\ 10^{-11}\ t^3u^7-6.73452\ 10^{-11}\ t^4u^7-$
$1.27415\ 10^{-10}\ t^5u^7-8.90168\ 10^{-11}\ t^6u^7-9.35785\ 10^{-12}\ t^7u^7$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},PlotPoints->20,ViewPoint->{0,2,0},
                                AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 8x8 puntos dados: P-29

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=-117649/720t^7+11649/180t^6-386561/360t^5+16807/18t^4-(331681/720)t^3+22981/180t^2-(363/20)t+l;

b=823543/720t^7-^352947/80t^6+991613/144t^5-88837/16t^4+109417/45t^3-(10927/20)t^2+49t;

c=-823543/240t^7+1529437/120t^6-151263/8t^5+170471/12t^4-(1347647/240)t^3+43071/40t^2-147/2t;

d=823543/144t^7-2941225/144t^6+4151329/144t^5-2926819/144t^4+133427/18t^3-46501/36t^2+245/3t;

e=-823543/144t^7+117649/6t^6-1899191/72t^5+52822/3t^4-872935/144t^3+2009/2t^2-245/4t ;

f=823543/240t^7-2705927/240t^6+1159683/80t^5-444185/48t^4+45962/15t^3-9849/20t^2+(147/5)t;

g=-823543/720t^7+1294139/360t^6-319333/772t^5+98441/36t^4 -(634207/720)t^3+(49931/360)t^2-49/6t;

h=117649/720t^7-117649/240t^6+84035/144t^5-16807/48t^4+(9947/90)t^3-(343/20)t^2+t;

k=-117649/720u^7+11649/180u^6-386561/360u^5+16807/18u^4-(331681/720)u^3+22981/180u^2-(363/20)u+l;

l=823543/720u^7-^352947/80u^6+991613/144u^5-88837/16u^4+109417/45u^3-(10927/20)u^2+49u;

m=-823543/240u^7+1529437/120u^6-151263/8u^5+170471/12u^4-(1347647/240)u^3+43071/40u^2-147/2u;

p=823543/144u^7-2941225/144u^6+4151329/144u^5-2926819/144u^4+133427/18u^3-46501/36u^2+245/3u;

r=-823543/144u^7+117649/6u^6-1899191/72u^5+52822/3u^4-872935/144u^3+2009/2u^2-245/4u ;

s=823543/240u^7-2705927/240u^6+1159683/80u^5-444185/48u^4+45962/15u^3-9849/20u^2+(147/5)u;

v=-823543/720u^7+1294139/360u^6-319333/772u^5+98441/36u^4
-(634207/720)u^3+(49931/360)u^2-49/6u;

w=117649/720u^7-117649/240u^6+84035/144u^5-16807/48u^4+(9947/90)u^3-(343/20)u^2+u;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=0;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=1;
y01=0;
z01=0;

coordenadas de P02
x02=2;
y02=0;
z02=0;

coordenadas de P03
x03=3;
y03=0;
z03=0;

coordenadas de P04
x04=4;
y04=0;
z04=0;

coordenadas de P05
x05=5;
y05=0;
z05=0;

coordenadas de P06
x06=6;
y06=0;
z06=0;

coordenadas de P07
x07=7;
y07=0;
z07=0;

coordenadas de P10
x10=0;

y10=1;
z10=2;

coordenadas de P11
x11=1;
y11=1;
z11=2;

coordenadas de P12
x12=2;
y12=1;
z12=2;

coordenadas de P13
x13=3;
y13=1;
z13=2;

coordenadas de P14
x14=1;
y14=1;
z14=2;

coordenadas de P15
x15=5;
y15=1;
z15=2;

coordenadas de P16
x16=6;
y16=1;
z16=2;

coordenadas de P17
x17=7;
y17=1;
z17=2;

coordenadas de P20
x20=0;
y20=2;
z20=3;

coordenadas de P21
x21=1;
y21=2;
z21=3;

coordenadas de P22
x22=2;

y22=2;
z22=3;

coordenadas de P23
x23=3;
y23=2;
z23=3;

coordenadas de P24
x24=4;
y24=2;
z24=3;

coordenadas de P25
x25=5;
y25=2;
z25=3;

coordenadas de P26
x26=6;
y26=2;
z26=3;

coordenadas de P27
x27=7;
y27=2;
z27=3;

coordenadas de P30
x30=0;
y30=3;
z30=5;

coordenadas de P31
x31=1;
y31=3;
z31=5;

coordenadas de P32
x32=2;
y32=3;
z32=5;

coordenadas de P33
x33=3;
y33=3;
z33=5;

coordenadas de P34
x34=4;

y34=3;
z34=5;

coordenadas de P35
x35=5;
y35=3;
z35=5;

coordenadas de P36
x36=6;
y36=3;
z36=5;

coordenadas de P37
x37=7;
y37=3;
z37=5;

coordenadas de P40
x40=0;
y40=4;
z40=7;

coordenadas de P41
x41=1;
y41=4;
z41=7;

coordenadas de P42
x42=2;
y42=4;
z42=7;

coordenadas de P43
x43=3;
y43=4;
z43=7;

coordenadas de P44
x44=4;
y44=4;
z44=7;

coordenadas de P45
x45=5;
y45=4;
z45=7;

coordenadas de P46
x46=6;

y46=4;
z46=7;

coordenadas de P47
x47=7;
y47=4;
z47=7;

coordenadas de P50
x50=0;
y50=5;
z50=8;

coordenadas de P51
x51=1;
y51=5;
z51=8;

coordenadas de P52
x52=2;
y52=5;
z52=8;

coordenadas de P53
x53=3;
y53=5;
z53=8;

coordenadas de P54
x54=4;
y54=5;
z54=8;

coordenadas de P55
x55=5;
y55=5;
z55=8;

coordenadas de P56
x56=6;
y56=5;
z56=8;

coordenadas de P57
x57=7;
y57=5;
z57=8;

coordenadas de P60
x60=0;

y60=6;
z60=10;

coordenadas de P61
x61=1;
y61=6;
z61=10;

coordenadas de P62
x62=2;
y62=6;
z62=10;

coordenadas de P63
x63=3;
y63=6;
z63=10;

coordenadas de P64
x64=4;
y64=6;
z64=10;

coordenadas de P65
x65=5;
y65=6;
z65=10;

coordenadas de P66
x66=6;
y66=6;
z66=10;

coordenadas de P67
x67=7;
y67=6;
z67=10;

coordenadas de P70
x70=0;
y70=7;
z70=11;

coordenadas de P71
x71=1;
y71=7;
z71=11;

coordenadas de P72
x72=2;

```
        y72=7;
        z72=11;

coordenadas de P73
        x73=3;
        y73=7;
        z73=11;

coordenadas de P74
        x74=4;
        y74=7;
        z74=11;

coordenadas de P75
        x75=5;
        y75=7;
        z75=11;

coordenadas de P76
        x76=6;
        y76=7;
        z76=11;

coordenadas de P77
        x77=7;
        y77=7;
        z77=11;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

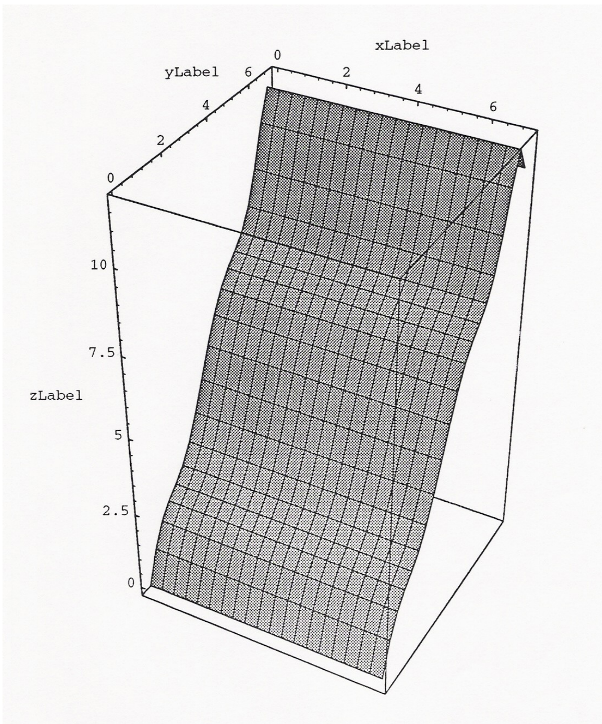
```
x=a*k*x00+b*k*x10+c*k*x20+d*k*x30+e*k*x40+f*k*x50+g*k*x60+ h*k*x70+
  a*l*x01+b*l*x11+c*l*x21+d*l*x31+e*l*x41+f*l*x51+g*l*x61+ g*l*x71+
  a*m*x02+b*m*x12+c*m*x22+d*m*x32+e*m*x42+f*m*x52+g*m*x62+g*m*x72+
  a*p*x03+b*p*x13+c*p*x23+d*p*x33+e*p*x43+f*p*x53+g*p*x63 g*p*x73+
  a*r*x04+b*r*x14+c*r*x24+d*r*x34+e*r*x44+f*r*x54+g*r*x64+g*r*x74+
  a*s*x05+b*s*x15+c*s*x25+d*s*x35+e*s*x45+f*s*x55+g*s*x65+g*s*x75+
  a*v*x06+b*v*x16+c*v*x26+d*v*x36+e*v*x46+f*v*x56+g*v*x66+g*v*x76+
  a*w*x07+b*w*x17+c*w*x27+d*w*x37+e*w*x47+f*w*x57+g*w*x67+g*w*x77;
Expand[x];
x=simplify[x]

7u

y=a*k*y00+b*k*y10+c*k*y20+d*k*y30+e*k*y40+f*k*y50+g*k*y60+ h*k*y70+
  a*l*y01+b*l*y11+c*l*y21+d*l*y31+e*l*y41+f*l*y51+g*l*y61+ g*l*y71+
  a*m*y02+b*m*y12+c*m*y22+d*m*y32+e*m*y42+f*m*y52+g*m*y62+g*m*y72+
  a*p*y03+b*p*y13+c*p*y23+d*p*y33+e*p*y43+f*p*y53+g*p*y63 g*p*y73+
  a*r*y04+b*r*y14+c*r*y24+d*r*y34+e*r*y44+f*r*y54+g*r*y64+g*r*y74+
  a*s*y05+b*s*y15+c*s*y25+d*s*y35+e*s*y45+f*s*y55+g*s*y65+g*s*y75+
  a*v*y06+b*v*yyy16+c*v*y26+d*v*y36+e*v*y46+f*v*y56+g*v*y66+g*v*y76+
```

```
   a*w*y07+b*w*y17+c*w*y27+d*w*y37+e*w*y47+f*w*y57+g*w*y67+g*w*y77;
Expand[y];
y=simplify[y]

7t

z=a*k*z00+b*k*z10+c*k*z20+d*k*z30+e*k*z40+f*k*z50+g*k*z60+ h*k*z70+
   a*l*z01+b*l*z11+c*l*z21+d*l*z31+e*l*z41+f*l*z51+g*l*z61+ g*l*z71+
   a*m*z02+b*m*z12+c*m*z22+d*m*z32+e*m*z42+f*m*z52+g*m*z62+g*m*z72+
   a*p*z03+b*p*z13+c*p*z23+d*p*z33+e*p*z43+f*p*z53+g*p*z63 g*p*z73+
   a*r*z04+b*r*z14+c*r*z24+d*r*z34+e*r*z44+f*r*z54+g*r*z64+g*r*z74+
   a*s*z05+b*s*z15+c*s*z25+d*s*z35+e*s*z45+f*s*z55+g*s*z65+g*s*z75+
   a*v*z06+b*v*z16+c*v*z26+d*v*z36+e*v*z46+f*v*z56+g*v*z66+g*v*z76+
   a*w*z07+b*w*z17+c*w*z27+d*w*z37+e*w*z47+f*w*z57+g*w*z67+g*w*z77;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$(t\ (7782-11025\ t-\ 156065\ t^2+936390\ \ t^3-\ 1949612\ t^4+1764735^6\ t^5-588245\ t^6))/360$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},PlotPoints->20,
                        AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 9x9 puntos dados: P-30

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=131072/315*t^8-65536/35*t^7+53248/15*t^6-18432/5*t^5+34208/15*t^4-4272/5*t^3+59062/315*t^2-761/35*t+l;

b=-1048576/315*t^8-131072/9*t^71196032/45*t^6+235520/9*t^5-673792/45*t^4+44672/9*t^3-30784/35*t^2+64*t;

c=524288/45*t^8-2228224/45*t^7+3915776/45*t^6-733184/9*t^5+1956992/45*t^4-587296/45*t^3+9936/5*t^2-112*t;

d=-1048576/45*t^8+1441792/15*t^7-2441216/15*t^6+145408*t^5-1097728/15*t^4+ 102016/5*t^3-128192/45*t^2+448/3*t;

e=262144/9*t^8-1048576/9*t^7+1712128/9*t^6-1466368/9*t^5+703552/9*t^4-186496/9*t^3+2764*t^2-140*t ;

f=-1048576/45*t^8+4063232/45*t^7-6406144/45*t^6+5285888/45*t^5-2443264/45*t^4+626048/45*t^3-9024/5*t^2+448/5*t;

g=524288/45*t^8-131072/3*t^7+999424/15*t^6-53248*t^5+358784/15*t^4 -5984*t^3+34288/45*t^2-112/3*t;

h=-1048576/315*t^8+3801088/315*t^7-802816/45*t^6+124928/9*t^5-274432/45*t^4+67456/45*t^3-6592/35*t^2+64/7*t;

k=131072/315*t^8-65536/45*t^7+94208/45*t^6-14336/9*t^5+30944/45*t^4-7504/45*t^3+726/35*t^2-t;

l=131072/315*u^8-65536/35*u^7+53248/15*u^6-18432/5*u^5+34208/15*u^4-4272/5*u^3+59062/315*u^2-761/35*u+l;

m=-1048576/315*u^8-131072/9*u^71196032/45*u^6+235520/9*u^5-673792/45*u^4+44672/9*u^3-30784/35*u^2+64*u;

p=524288/45*u^8-2228224/45*u^7+3915776/45*u^6-733184/9*u^5+1956992/45*u^4-587296/45*u^3+9936/5*u^2-112*u;

q=-1048576/45*u^8+1441792/15*u^7-2441216/15*u^6+145408*u^5-1097728/15*u^4+ 102016/5*u^3-128192/45*u^2+448/3*u;

r=262144/9*u^8-1048576/9*u^7+1712128/9*u^6-1466368/9*u^5+703552/9*u^4-186496/9*u^3+2764*u^2-140*u ;

s=-1048576/45*u^8+4063232/45*u^7-6406144/45*u^6+5285888/45*u^5-2443264/45*u^4+626048/45*u^3-9024/5*u^2+448/5*u;

n=524288/45*u^8-131072/3*u^7+999424/15*u^6-53248*u^5+358784/15*u^4-5984*u^3+34288/45*u^2-112/3*u;

v=-1048576/315*u^8+3801088/315*u^7-802816/45*u^6+124928/9*u^5-274432/45*u^4+67456/45*u^3-6592/35*u^2+64/7*u;

w=131072/315*u^8-65536/45*u^7+94208/45*u^6-14336/9*u^5+30944/45*u^4-7504/45*u^3+726/35*u^2-u;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=0;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=1;
y01=0;
z01=0;

coordenadas de P02
x02=2;
y02=0;
z02=0;

coordenadas de P03
x03=3;
y03=0;
z03=0;

coordenadas de P04
x04=4;
y04=0;
z04=0;

coordenadas de P05
x05=5;
y05=0;
z05=0;

coordenadas de P06
x06=6;
y06=0;
z06=0;

coordenadas de P07
x07=7;
y07=0;
z07=0;

coordenadas de P08
x08=8;
y08=0;
z08=0;

coordenadas de P10
x10=0;
y10=1;
z10=2;

coordenadas de P11
x11=1;
y11=1;
z11=2;

coordenadas de P12
x12=2;
y12=1;
z12=2;

coordenadas de P13
x13=3;
y13=1;
z13=2;

coordenadas de P14
x14=4;
y14=1;
z14=2;

coordenadas de P15
x15=5;
y15=1;
z15=2;

coordenadas de P16
x16=6;
y16=1;
z16=2;

coordenadas de P17
x17=7;
y17=-1;
z17=2;

coordenadas de P18
x18=8;
y18=1;
z18=2;

coordenadas de P20
x20=0;
y20=2;
z20=3;

coordenadas de P21
x21=1;
y21=2;
z21=3;

coordenadas de P22
x22=2;
y22=2;
z22=3;

coordenadas de P23
x23=3;
y23=2;
z23=3;

coordenadas de P24
x24=4;
y24=2;
z24=3;

coordenadas de P25
x25=5;
y25=2;
z25=3;

coordenadas de P26
x26=6;
y26=2;
z26=3;

coordenadas de P27
x27=7;
y27=2;
z27=3;

coordenadas de P28
x28=8;
y28=2;
z28=3;

coordenadas de P30
x30=0;
y30=3;
z30=5;

coordenadas de P31
x31=1;
y31=3;
z31=5;

coordenadas de P32
x32=2;
y32=3;
z32=5;

coordenadas de P33
x33=3;
y33=3;
z33=5;

coordenadas de P34
x34=4;
y34=3;
z34=5;

coordenadas de P35
x35=5;
y35=3;
z35=5;

coordenadas de P36
x36=6;
y36=3;
z36=5;

coordenadas de P37
x37=7;
y37=3;
z37=5;

coordenadas de P38
x38=8;
y38=3;
z38=5;

coordenadas de P40
x40=0;
y40=4;
z40=7;

coordenadas de P41
x41=1;
y41=4;
z41=7;

coordenadas de P42
x42=2;
y42=4;
z42=7;

coordenadas de P43
x43=3;
y43=4;
z43=7;

coordenadas de P44
x44=4;
y44=4;
z44=7;

coordenadas de P45
x45=5;
y45=4;
z45=7;

coordenadas de P46
x46=6;
y46=4;
z46=7;

coordenadas de P47
x47=7;
y47=4;
z47=7;

coordenadas de P48
x48=8;
y48=4;
z48=7;

coordenadas de P50
x50=0;
y50=5;
z50=8;

coordenadas de P51
x51=1;
y51=5;
z51=8;

coordenadas de P52
x52=2;
y52=5;
z52=8;

coordenadas de P53
x53=3;
y53=5;
z53=8;

coordenadas de P54
x54=4;
y54=5;
z54=8;

coordenadas de P55
x55=5;
y55=5;
z55=8;

coordenadas de P56
x56=6;
y56=5;
z56=8;

coordenadas de P57
x57=7;
y57=5;
z57=8;

coordenadas de P58
x58=8;
y58=5;
z58=8;

coordenadas de P60
x60=0;
y60=6;
z60=10;

coordenadas de P61
x61=1;
y61=6;
z61=10;

coordenadas de P62
x62=2;
y62=6;
z62=10;

```
coordenadas de P63
          x63=3;
          y63=6;
          z63=10;

coordenadas de P64
          x64=4;
          y64=6;
          z64=10;

coordenadas de P65
          x65=5;
          y65=6;
          z65=10;

coordenadas de P66
          x66=6;
          y66=6;
          z66=10;

coordenadas de P67
          x67=7;
          y67=6;
          z67=10;

coordenadas de P68
          x68=8;
          y68=6;
          z68=10;

coordenadas de P70
          x70=0;
          y70=7;
          z70=11;

coordenadas de P71
          x71=1;
          y71=7;
          z71=11;

coordenadas de P72
          x72=2;
          y72=7;
          z72=11;

coordenadas de P73
          x73=3;
          y73=7;
          z73=11;
```

coordenadas de P74
x74=4;
y74=7;
z74=11;

coordenadas de P75
x75=5;
y75=7;
z75=11;

coordenadas de P76
x76=6;
y76=7;
z76=11;

coordenadas de P77
x77=7;
y77=7;
z77=11;

coordenadas de P78
x78=8;
y78=7;
z78=11;

coordenadas de P80
x80=0;
y80=8;
z80=13;

coordenadas de P81
x81=1;
y81=8;
z81=13;

coordenadas de P82
x82=2;
y82=8;
z82=13;

coordenadas de P83
x83=3;
y83=8;
z83=13;

coordenadas de P84
x84=4;
y84=8;
z84=13;

coordenadas de P85
x85=5;
y85=8;
z85=13;

coordenadas de P86
x86=6;
y86=8;
z86=13;

coordenadas de P87
x87=7;
y87=8;
z87=13;

coordenadas de P88
x88=8;
y88=8;
z88=13;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=a*l*x00+b*l*x10+c*l*x20+d*l*x30+e*l*x40+f*l*x50+g*l*x60+
  h*l*x70+k*l*x80+
  a*m*x01+b*m*x11+c*m*x21+d*m*x31+e*m*x41+f*m*x51+g*m*x61+
  h*m*x71+k*m*x81+
  a*p*x02+b*p*x12+c*p*x22+d*p*x32+e*p*x42+f*p*x52+g*p*x62+
  h*p*x72+k*p*x82+
                  a*q*x03+b*q*x13+c*q*x23+d*q*x33+e*q*x43+f*q*x53+g*q*x63+
  h*q*x73+k*q*x83+
  a*r*x04+b*r*x14+c*r*x24+d*r*x34+e*r*x44+f*r*x54+g*r*x64+
  h*r*x74++k*l*x84+
  a*s*x05+b*s*x15+c*s*x25+d*s*x35+e*s*x45+f*s*x55+g*s*x65+
  h*s*x75+k*l*x85+
  a*n*x06+b*n*x16+c*n*x26+d*n*x36+e*n*x46+f*n*x56+g*n*x66+
  h*n*x76++k*n*x86+
  a*v*x07+b*v*x17+c*v*x27+d*v*x37+e*v*x47+f*v*x57+g*v*x67+
  h*v*x77+k*v*x87+
  a*w*x08+b*w*x18+c*w*x28+d*w*x38+e*w*x48+f*w*x58+g*w*x68+
  h*w*x78+k*l*x88;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

8u

```
x=a*l*y00+b*l*y10+c*l*y20+d*l*y30+e*l*y40+f*l*y50+g*l*y60+
  h*l*y70+k*l*y80+
  a*m*y01+b*m*y11+c*m*y21+d*m*y31+e*m*y41+f*m*y51+g*m*y61+
  h*m*y71+k*m*y81+
  a*p*y02+b*p*y12+c*p*y22+d*p*y32+e*p*y42+f*p*y52+g*p*y62+
```

```
 h*p*y72+k*p*y82+
                    a*q*y03+b*q*y13+c*q*y23+d*q*y33+e*q*y43+f*q*y53+g*q*y63+
 h*q*y73+k*q*y83+
 a*r*y04+b*r*y14+c*r*y24+d*r*y34+e*r*y44+f*r*y54+g*r*y64+
 h*r*y74++k*l*y84+
 a*s*y05+b*s*y15+c*s*y25+d*s*y35+e*s*y45+f*s*y55+g*s*y65+
 h*s*y75+k*l*y85+
 a*n*y06+b*n*y16+c*n*y26+d*n*y36+e*n*y46+f*n*y56+g*n*y66+
 h*n*y76++k*n*y86+
 a*v*y07+b*v*y17+c*v*y27+d*v*y37+e*v*y47+f*v*y57+g*v*y67+
 h*v*y77+k*v*y87+
 a*w*y08+b*w*y18+c*w*y28+d*w*y38+e*w*y48+f*w*y58+g*w*y68+
 h*w*y78+k*l*y88;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

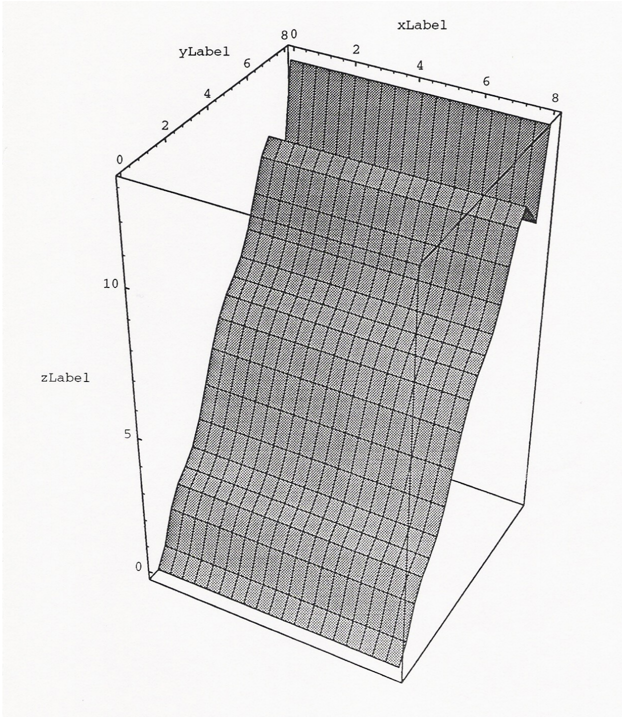
8t

```
x=a*l*z00+b*l*z10+c*l*z20+d*l*z30+e*l*z40+f*l*z50+g*l*z60+
  h*l*z70+k*l*z80+
  a*m*z01+b*m*z11+c*m*z21+d*m*z31+e*m*z41+f*m*z51+g*m*z61+
  h*m*z71+k*m*z81+
  a*p*z02+b*p*z12+c*p*z22+d*p*z32+e*p*z42+f*p*z52+g*p*z62+
  h*p*z72+k*p*z82+
                    a*q*z03+b*q*z13+c*q*z23+d*q*z33+e*q*z43+f*q*z53+g*q*z63+
 h*q*z73+k*q*z83+
 a*r*z04+b*r*z14+c*r*z24+d*r*z34+e*r*z44+f*r*z54+g*r*z64+
 h*r*z74++k*l*z84+
 a*s*z05+b*s*z15+c*s*z25+d*s*z35+e*s*z45+f*s*z55+g*s*z65+
 h*s*z75+k*l*z85+
 a*n*z06+b*n*z16+c*n*z26+d*n*z36+e*n*z46+f*n*z56+g*n*z66+
 h*n*z76++k*n*z86+
 a*v*z07+b*v*z17+c*v*z27+d*v*z37+e*v*z47+f*v*z57+g*v*z67+
 h*v*z77+k*v*z87+
 a*w*z08+b*w*z18+c*w*z28+d*w*z38+e*w*z48+f*w*z58+g*w*z68+
 h*w*z78+k*l*z88;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$(t\,(-\ 3243 + 216090\ t - 2042320\ t^2 + 8979040\ t^3 - 20887552\ t^4 +$
$26521600\ t^5 - 17367040\ t^6 + 4587520\ t^7))/315$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                    AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```


xLabel
0
2
4
6
8
yLabel
8
6
4
2
0
zLabel
10
5
0

Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 9x9 puntos dados: P-31

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=131072/315*t^8-65536/35*t^7+53248/15*t^6-18432/5*t^5+34208/15*t^4-4272/5*t^3+59062/315*t^2-761/35*t+l;

b=-1048576/315*t^8-131072/9*t^71196032/45*t^6+235520/9*t^5-673792/45*t^4+44672/9*t^3-30784/35*t^2+64*t;

c=524288/45*t^8-2228224/45*t^7+3915776/45*t^6-733184/9*t^5+1956992/45*t^4-587296/45*t^3+9936/5*t^2-112*t;

d=-1048576/45*t^8+1441792/15*t^7-2441216/15*t^6+145408*t^5-1097728/15*t^4+ 102016/5*t^3-128192/45*t^2+448/3*t;

e=262144/9*t^8-1048576/9*t^7+1712128/9*t^6-1466368/9*t^5+703552/9*t^4-186496/9*t^3+2764*t^2-140*t ;

f=-1048576/45*t^8+4063232/45*t^7-6406144/45*t^6+5285888/45*t^5-2443264/45*t^4+626048/45*t^3-9024/5*t^2+448/5*t;

g=524288/45*t^8-131072/3*t^7+999424/15*t^6-53248*t^5+358784/15*t^4 -5984*t^3+34288/45*t^2-112/3*t;

h=-1048576/315*t^8+3801088/315*t^7-802816/45*t^6+124928/9*t^5-274432/45*t^4+67456/45*t^3-6592/35*t^2+64/7*t;

k=131072/315*t^8-65536/45*t^7+94208/45*t^6-14336/9*t^5+30944/45*t^4-7504/45*t^3+726/35*t^2-t;

l=131072/315*u^8-65536/35*u^7+53248/15*u^6-18432/5*u^5+34208/15*u^4-4272/5*u^3+59062/315*u^2-761/35*u+l;

m=-1048576/315*u^8-131072/9*u^71196032/45*u^6+235520/9*u^5-673792/45*u^4+44672/9*u^3-30784/35*u^2+64*u;

p=524288/45*u^8-2228224/45*u^7+3915776/45*u^6-733184/9*u^5+1956992/45*u^4-587296/45*u^3+9936/5*u^2-112*u;

q=-1048576/45*u^8+1441792/15*u^7-2441216/15*u^6+145408*u^5-1097728/15*u^4+ 102016/5*u^3-128192/45*u^2+448/3*u;

r=262144/9*u^8-1048576/9*u^7+1712128/9*u^6-1466368/9*u^5+703552/9*u^4-186496/9*u^3+2764*u^2-140*u ;

s=-1048576/45*u^8+4063232/45*u^7-6406144/45*u^6+5285888/45*u^5-2443264/45*u^4+626048/45*u^3-9024/5*u^2+448/5*u;

n=524288/45*u^8-131072/3*u^7+999424/15*u^6-53248*u^5+358784/15*u^4 -5984*u^3+34288/45*u^2-112/3*u;

v=-1048576/315*u^8+3801088/315*u^7-802816/45*u^6+124928/9*u^5-274432/45*u^4+67456/45*u^3-6592/35*u^2+64/7*u;

w=131072/315*u^8-65536/45*u^7+94208/45*u^6-14336/9*u^5+30944/45*u^4-7504/45*u^3+726/35*u^2-u;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=2.1213;
y00=-2.1213;
z00=7;

coordenadas de P01
x01=2.4748;
y01=-2.4748;
z01=7;

coordenadas de P02
x02=2.6516;
y02=-2.6516;
z02=5;

coordenadas de P03
x03=2.8284;
y03=-2.8284;
z03=3;

coordenadas de P04
x04=5.3032;
y04=-5.3032;
z04=3;

coordenadas de P05
x05=7.7781;
y05=-7.7781;
z05=3;

coordenadas de P06
x06=7.9548;
y06=-7.9548;
z06=5;

coordenadas de P07
x07=8.1316;
y07=-8.1316;
z07=7;

coordenadas de P08
x08=8.4852;
y08=-8.4852;
z08=7;

coordenadas de P10
x10=3;
y10=0;
z10=10;

coordenadas de P11
x11=3.5;
y11=0;
z11=10;

coordenadas de P12
x12=3.75;
y12=0;
z12=8;

coordenadas de P13
x13=4;
y13=0;
z13=6;

coordenadas de P14
x14=7.5;
y14=0;
z14=6;

coordenadas de P15
x15=11;
y15=0;
z15=6;

coordenadas de P16
x16=11.25;
y16=0;
z16=8;

coordenadas de P17
x17=11.5;
y17=0;
z17=10;

coordenadas de P18
x18=12;
y18=0;
z18=10;

coordenadas de P20
x20=3;
y20=5;
z20=13;

coordenadas de P21
x21=3.5;
y21=5;
z21=13;

coordenadas de P22
x22=3.75;
y22=5;
z22=11;

coordenadas de P23
x23=4;
y23=5;
z23=9;

coordenadas de P24
x24=7.5;
y24=5;
z24=9;

coordenadas de P25
x25=11;
y25=5;
z25=9;

coordenadas de P26
x26=11.25;
y26=5;
z26=11;

coordenadas de P27
x27=11.5;
y27=5;
z27=13;

coordenadas de P28
x28=12;
y28=5;
z28=13;

coordenadas de P30
x30=3;
y30=10;
z30=17;

coordenadas de P31
x31=3.5;
y31=10;
z31=17;

coordenadas de P32
x32=3.75;
y32=10;
z32=15;

coordenadas de P33
x33=4;
y33=10;
z33=13;

coordenadas de P34
x34=7.5;
y34=10;
z34=13;

coordenadas de P35
x35=11;
y35=10;
z35=13;

coordenadas de P36
x36=11.25;
y36=10;
z36=15;

coordenadas de P37
x37=11.5;
y37=10;
z37=17;

coordenadas de P38
x38=12;
y38=10;
z38=17;

coordenadas de P40
x40=3;
y40=15;
z40=22;

coordenadas de P41
x41=3.5;
y41=15;
z41=22;

coordenadas de P42
x42=3.75;
y42=15;
z42=20;

coordenadas de P43
x43=4;
y43=15;
z43=18;

coordenadas de P44
x44=7.5;
y44=15;
z44=18;

coordenadas de P45
x45=11;
y45=15;
z45=18;

coordenadas de P46
x46=11.25;
y46=15;
z46=20;

coordenadas de P47
x47=11.5;
y47=15;
z47=22;

coordenadas de P48
x48=12;
y48=15;
z48=22;

coordenadas de P50
x50=3;
y50=20;
z50=28;

coordenadas de P51
x51=3.5;
y51=20;
z51=28;

coordenadas de P52
x52=3.75;
y52=20;
z52=26;

coordenadas de P53
x53=4;
y53=20;
z53=24;

coordenadas de P54
x54=7.5;
y54=20;
z54=24;

coordenadas de P55
x55=11;
y55=20;
z55=24;

coordenadas de P56
x56=11.25;
y56=20;
z56=26;

coordenadas de P57
x57=11.5;
y57=20;
z57=28;

coordenadas de P58
x58=12;
y58=20;
z58=28;

coordenadas de P60
x60=3;
y60=25;
z60=35;

coordenadas de P61
x61=3.5;
y61=25;
z61=35;

coordenadas de P62
x62=3.75;
y62=25;
z62=33;

coordenadas de P63
x63=4;
y63=25;
z63=31;

coordenadas de P64
x64=7.5;
y64=25;
z64=31;

coordenadas de P65
x65=11;
y65=25;
z65=31;

coordenadas de P66
x66=11.25;
y66=25;
z66=33;

coordenadas de P67
x67=11.25;
y67=25;
z67=35;

coordenadas de P68
x68=12;
y68=25;
z68=35;

coordenadas de P70
x70=3;
y70=30;
z70=36;

coordenadas de P71
x71=3.5;
y71=30;
z71=36;

coordenadas de P72
x72=3.75;
y72=30;
z72=35;

coordenadas de P73
x73=4;
y73=30;
z73=33;

coordenadas de P74
x74=7.5;
y74=30;
z74=33;

coordenadas de P75
x75=11;
y75=30;
z75=33;

coordenadas de P76
x76=11.25;
y76=30;
z76=35;

coordenadas de P77
x77=11.5;
y77=30;
z77=36;

coordenadas de P78
x78=12;
y78=30;
z78=36;

coordenadas de P80
x80=3;
y80=35;
z80=37;

coordenadas de P81
x81=3.5;
y81=35;
z81=37;

coordenadas de P82
x82=3.75;
y82=35;
z82=35;

coordenadas de P83
x83=4;
y83=35;
z83=33;

coordenadas de P84
x84=7.5;
y84=35;
z84=33;

coordenadas de P85
x85=11;
y85=35;
z85=33;

coordenadas de P86
x86=11.25;
y86=35;
z86=35;

coordenadas de P87
x87=11.5;
y87=35;
z87=37;

coordenadas de P88
x88=12;
y88=35;
z88=37;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=a*l*x00+b*l*x10+c*l*x20+d*l*x30+e*l*x40+f*l*x50+g*l*x60+
   h*l*x70+k*l*x80+
   a*m*x01+b*m*x11+c*m*x21+d*m*x31+e*m*x41+f*m*x51+g*m*x61+
   h*m*x71+k*m*x81+
   a*p*x02+b*p*x12+c*p*x22+d*p*x32+e*p*x42+f*p*x52+g*p*x62+
   h*p*x72+k*p*x82+
   a*q*x03+b*q*x13+c*q*x23+d*q*x33+e*q*x43+f*q*x53+g*q*x63+
  h*q*x73+k*q*x83+
  a*r*x04+b*r*x14+c*r*x24+d*r*x34+e*r*x44+f*r*x54+g*r*x64+
  h*r*x74++k*l*x84+
  a*s*x05+b*s*x15+c*s*x25+d*s*x35+e*s*x45+f*s*x55+g*s*x65+
  h*s*x75+k*l*x85+
  a*n*x06+b*n*x16+c*n*x26+d*n*x36+e*n*x46+f*n*x56+g*n*x66+
  h*n*x76++k*n*x86+
  a*v*x07+b*v*x17+c*v*x27+d*v*x37+e*v*x47+f*v*x57+g*v*x67+
  h*v*x77+k*v*x87+
  a*w*x08+b*w*x18+c*w*x28+d*w*x38+e*w*x48+f*w*x58+g*w*x68+
  h*w*x78+k*l*x88;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$2.1213+19.1054t -164.755t^2 +750761\ t^3 - 2003.9t^4 +3239.24t^5 -3119.27t^6 +1645.33t^7 -365.628t^8 - 389893u -351.431tu +3030.55\ t^2u -13809.7\ t^3u +36860.4\ t^4u - 59583.6t^5u +57376.8\ t^6u -30264.7\ t^7u +6725.48\ t^8u +758.825\ u^2 +6840.24\ tu^2 - 58986.4\ t^2u^2 +268792\ t^3u^2 -717449\ t^4u^2 +1.15973\ 10^6\ t^5u^2 -1.11678\ 10^6\ t^6u^2 +589069\ t^7u^2 - 130904\ t^8u^2 -4934.76\ u^3 -44490.6\ tu^3 +383662\ t^2u^3 -1.74829\ 10^6\ t^3u^3 + 4.66646\ 10^6\ t^4u^3 -7.54317\ 10^6\ t^5u^3 + 7.2638\ 10^6\ t^6u^3 -3.83145\ 10^6\ t^7u^3 +851434\ t^8u^3 +14877.9\ u^4 +134174\ tu^4 -1.15704\ 10^6\ t^2u^4 +5.27246\ 10^6\ t^3u^4 -1.40731\ 10^7\ t^4u^4$

$+2.27486\ 10^7\ t^5u^4 -2.19061\ 10^7\ t^6u^4\ +1.15549\ 10^7\ t^7u^4\ -2.56774\ 10^6\ t^8u^4\ -22417.9\ u^5$
$-202281\ tu^5\ +1.74436\ 10^6\ t^2u^5\ -7.94876\ 10^6\ t^3u^5\ +2.12165\ 10^7\ t^4u^5 -3.42958\ 10^7\ t^5u^5$
$+3.30256\ 10^7\ t^6u^5 -1.74201\ 10^7\ t^7u^5\ +3.87113\ 10^6\ t^8u^5 +16462.2\ u^6\ +148711\ tu^6$ -
$1.2824\ 10^6\ t^2u^6 +5.84369\ 10^6\ t^3u^6\ -1.55978\ 10^7\ t^4u^6\ +2.52132\ 10^7\ t^5u^6\ -2.42794\ 10^7\ t^6u^6$
$+1.28067\ 10^7\ t^7u^6 -2.84594\ 10^6\ t^8u^6 -4698.6\ u^7 -42594.8\ tu^7 +367314\ t^2u^7$ –
$1.67379\ 10^6\ t^3u^7 +4.46763\ 10^6\ t^4u^7 -7.22176\ 10^6\ t^5u^7 +6.95428\ 10^6\ t^6u^7\ -3.66819\ 10^6\ t^7u^7$
$+815154\ t^8u^7 -2.28856\ u^8\ +49.7598\ tu^8\ -429.101\ t^2u^8\ +1955.34\ t^3u^8\ -5219.13\ t^4u^8$
$+8436.54\ t^5u^8 - 8124.08\ t^6u^8\ +4285.23\ t^7u^8 -952.273\ t^8u^8$

```
y=a*l*y00+b*l*y10+c*l*y20+d*l*y30+e*l*y40+f*l*y50+g*l*y60+
   h*l*y70+k*l*y80+
   a*m*y01+b*m*y11+c*m*y21+d*m*y31+e*m*y41+f*m*y51+g*m*y61+
   h*m*y71+k*m*y81+
   a*p*y02+b*p*y12+c*p*y22+d*p*y32+e*p*y42+f*p*y52+g*p*y62+
   h*p*y72+k*p*y82+
                    a*q*y03+b*q*y13+c*q*y23+d*q*y33+e*q*y43+f*q*y53+g*q*y63+
  h*q*y73+k*q*y83+
  a*r*y04+b*r*y14+c*r*y24+d*r*y34+e*r*y44+f*r*y54+g*r*y64+
  h*r*y74++k*l*y84+
  a*s*y05+b*s*y15+c*s*y25+d*s*y35+e*s*y45+f*s*y55+g*s*y65+
  h*s*y75+k*l*y85+
  a*n*y06+b*n*y16+c*n*y26+d*n*y36+e*n*y46+f*n*y56+g*n*y66+
  h*n*y76++k*n*y86+
  a*v*y07+b*v*y17+c*v*y27+d*v*y37+e*v*y47+f*v*y57+g*v*y67+
  h*v*y77+k*v*y87+
  a*w*y08+b*w*y18+c*w*y28+d*w*y38+e*w*y48+f*w*y58+g*w*y68+
  h*w*y78+k*l*y88;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

$-2.1213-22.5912\ t\ +539.752\ t^2 -2459.56\ t^3 + 6564.97\ t^4 -10612\ t^5 +10219\ t^6\ 5390.24\ t^7$
$+1197.83\ t^8 +38.9893\ u -847.739\ tu +7310.43\ t^2u -33312.5\ t^3u +88916.4\ t^4u$ – $143730t^5u$
$+138407\ t^6u\ -73005.8\ t^7u\ +16223.5\ t^8u -758.825\ u^2\ +16499\ tu^2 - 142279\ t^2u^2\ +648340$
$t^3u^2 -1.73053\ 10^6\ t^4u^2\ +2.79733\ 10^6\ t^5u^2\ -2.69373\ 10^6\ t^6u^2\ +1.42087\ 10^6\ t^7u^2$ -
$315748\ t^8u^2\ +4934.76\ u^3\ -107296\ tu^3\ +925260\ t^2u^3\ -4.21626\ 10^6\ t^3u^3$ +
$1.12539\ 10^7\ t^4u^3\ -1.81915\ 10^7\ t^5u^3\ + 1.75177\ 10^7\ t^6u^3\ -9.24013\ 10^6\ t^7u^3\ +2.05336\ 10^6$
$t^8u^3\ -14877.9\ u^4\ +323489\ tu^4\ -2.78959\ 10^6\ t^2u^4\ +1.27117\ 10^7\ t^3u^4\ -3.39296\ 10^7\ t^4u^4$
$+5.4846\ 10^7\ t^5u^4 -5.28147\ 10^7\ t^6u^4\ +2.78583\ 10^7\ t^7u^4\ -6.19073\ 10^6\ t^8u^4\ +22417.9\ u^5$
$-487430\ tu^5\ +4.20332\ 10^6\ t^2u^5\ -1.91539\ 10^7\ t^3u^5\ +5.11248\ 10^7\ t^4u^5 -8.26414\ 10^7\ t^5u^5$
$+7.95806\ 10^7\ t^6u^5 -4.19766\ 10^7\ t^7u^5\ +9.32813\ 10^6\ t^8u^5 -16462.2\ u^6\ +357934\ tu^6$ -
$3.08663\ 10^6\ t^2u^6 +1.40653\ 10^7\ t^3u^6\ -3.75425\ 10^7\ t^4u^6\ +6.06861\ 10^7\ t^5u^6\ -5.84385\ 10^7\ t^6u^6$
$+3.08247\ 10^7\ t^7u^6 -6.84993\ 10^6\ t^8u^6 +4698.6\ u^7 -102161\ tu^7 +880980\ t^2u^7$ –
$4.01448\ 10^6\ t^3u^7 +1.07153\ 10^7\ t^4u^7 -1.73209\ 10^7\ t^5u^7 +1.66794\ 10^7\ t^6u^7\ -8.79792\ 10^6\ t^7u^7$
$+1.95509\ 10^6\ t^8u^7 +2.28856\ u^8\ -49.7598\ tu^8\ +429.101\ t^2u^8\ -1955.34\ t^3u^8\ +5219.13\ t^4u^8$
$-8436.54\ t^5u^8 + 8124.08\ t^6u^8\ -4285.23\ t^7u^8 +952.273\ t^8u^8$

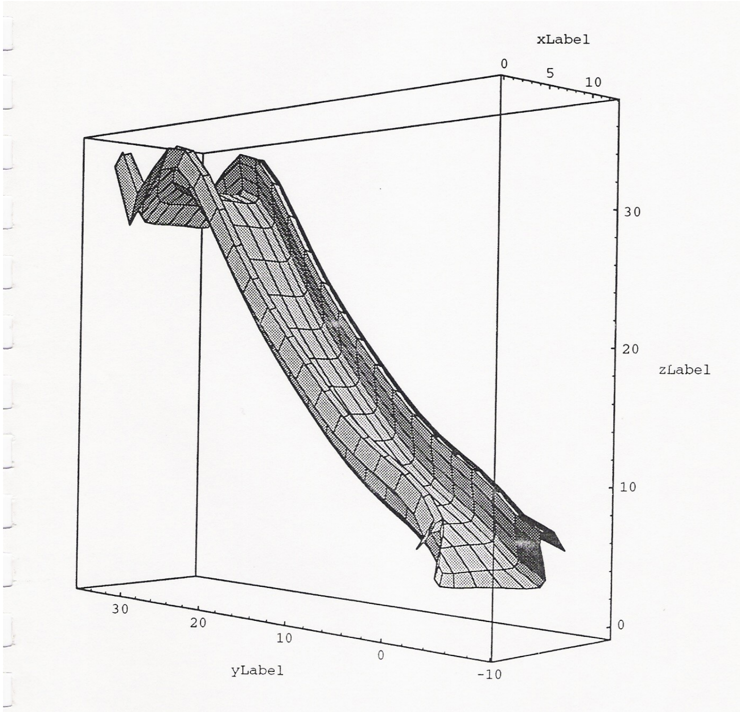
```
z=a*l*z00+b*l*z10+c*l*z20+d*l*z30+e*l*z40+f*l*z50+g*l*z60+
   h*l*z70+k*l*z80+
   a*m*z01+b*m*z11+c*m*z21+d*m*z31+e*m*z41+f*m*z51+g*m*z61+
   h*m*z71+k*m*z81+
```

```
  a*p*z02+b*p*z12+c*p*z22+d*p*z32+e*p*z42+f*p*z52+g*p*z62+
  h*p*z72+k*p*z82+
                  a*q*z03+b*q*z13+c*q*z23+d*q*z33+e*q*z43+f*q*z53+g*q*z63+
  h*q*z73+k*q*z83+
  a*r*z04+b*r*z14+c*r*z24+d*r*z34+e*r*z44+f*r*z54+g*r*z64+
  h*r*z74++k*l*z84+
  a*s*z05+b*s*z15+c*s*z25+d*s*z35+e*s*z45+f*s*z55+g*s*z65+
  h*s*z75+k*l*z85+
  a*n*z06+b*n*z16+c*n*z26+d*n*z36+e*n*z46+f*n*z56+g*n*z66+
  h*n*z76++k*n*z86+
  a*v*z07+b*v*z17+c*v*z27+d*v*z37+e*v*z47+f*v*z57+g*v*z67+
  h*v*z77+k*v*z87+
  a*w*z08+b*w*z18+c*w*z28+d*w*z38+e*w*z48+f*w*z58+g*w*z68+
  h*w*z78+k*l*z88;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$$
\begin{gathered}
(99225-216270t +12073680 t^2 -101172960 t^3 - 426585600t^4 -986388480t^5 \\
+1274757120t^6 -861143040t^7 +235929600t^8 - 1375920u -6531840tu +134555904 t^2u \\
-1070931456 t^3u +4356882432 t^4u - 9916784640t^5u +12745506816 t^6u -8620867584 t^7u \\
+2378170368 t^8u +29196720 u^2 +111409920 tu^2 - 2295044352 t^2u^2 +18266275328 t^3u^2 \\
-74312892416 t^4u^2 +169145016320 t^5u^2 -217392939008 t^6u^2 +147041288192 t^7u^2 - \\
40563113984 t^8u^2 -231114240 u^3 -705208320 tu^3 +14527291392 t^2u^3 -115622821888 \\
t^3u^3 + \\
470389620736 t^4u^3 -1070662942720 t^5u^3 + 1376065159168 t^6u^3 -930749612032 t^7u^3 \\
+256758513664 t^8u^3 +884540160 u^4 +2346209280 tu^4 -48331911168 t^2u^4 \\
+384674045952 t^3u^4 -1564973727744 t^4u^4 +3562067066880 t^5u^4 -4578132099072 t^6u^4 \\
+3096579145728 t^7u^4 -854228729856 t^8u^4 -1847623680 u^5 -4506255360 tu^5 \\
+92828860416 t^2u^5 -738825601024 t^3u^5 +3005772464128 t^4u^5 -6841497026560 t^5u^5 \\
+8793006014464 t^6u^5 -5947455963136 t^7u^5 +1640677507072 t^8u^5 +2157281280 u^6 \\
+5025300480tu^6 -103521189888 t^2u^6 +823925932032 t^3u^6 -3351987093504 t^4u^6 \\
+7629522862080 t^5u^6 -9805812989952 t^6u^6 +6632503246848 t^7u^6 -1829656068096 \\
t^8u^6 -1321205760 u^7 -3019898880 tu^7 +62209916928 t^2u^7 - \\
495129198592 t^3u^7 +2014339661824 t^4u^7 -4584877588480 t^5u^7 +5892695130112 t^6u^7 \\
-3985729650688 t^7u^7 +1099511627776 t^8u^7 +330301440 u^8 +754974720 tu^8 \\
-15552479232 t^2u^8 +123782299648 t^3u^8 -503584915456 t^4u^8 +1146219397120 t^5u^8 - \\
1473173782528 t^6u^8 +996432412672 t^7u^8 -274877906944 t^8u^8)/14175
\end{gathered}
$$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},ViewPoint->{-2,-2,0},
                           AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```


xLabel
0
5
10
30
20
zLabel
10
0
30
20
10
0
yLabel
-10

Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 10x10 puntos dados: P-32

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=-4782969/4480*t^9+4782969/896*t^8-5137263/448*t^7+885735/64*t^6-6589431/640*t^5+623295/128*t^4-40707/28*t^3+58635/224*t^2-7129/280*t+l;

b=43046721/4480*t^9-52612659/1120*t^8+31355019/320*t^7-4546773/40*t^6+51221727/640*t^5-5589243/160*t^4+10307331/1120*t^3-373329/280*t^2+81*t;

c=-43046721/1120*t^9+205667/1120*t^8-3720087/10*t^7+33244587/80*t^6-44529507/160*t^5+18152829/160*t^4-15190173/560*t^3+475389/140*t^2-162*t;

d=14348907/160*t^9-33480783/80*t^8+16474671/20*t^7-71035947/80*t^6+91020753/160*t^5-8776431/40*t^4+ 1959363/40*t^3-56601/10*t^2+252*t;

e=-43046721/320*t^9+196101729/320*t^8-187598673/160*t^7+195629337/160*t^6-241241409/320*t^5+89119521/320*t^4-4752351/80*t^3+526419/80*t^2-567/2*t ;

f=43046721/320*t^9-4782969/8*t^8+35606547/32*t^7-18009945/16*t^6+215023653/320*t^5-3844017/16*t^4+795339/16*t^3-21465/4*t^2+1134/5*t;

g=-14348907/160*t^9+62178597/160*t^8-28166373/40*t^7+55447011/80*t^6-64448703/160*t^5+22480173/160*t^4
-2276289/80*t^3+60381/20*t^2-126*t;

h=43046721/1120*t^9-90876411/560*t^8+80247591/280*t^7-22025277/80*t^6+25043337/160*t^5-2142531/40*t^4+2989629/280*t^3-78327/70*t^2+324/7*t;

k=-43046721/4480*t^9+176969853/4480*t^8-21789081/320*t^7+20490003/320*t^6-22878207/640*t^5+7712091/640*t^4-1328967/560*t^3+275967/1120*t^2-81/8*t;

l=4782969/4480*t^9-4782969/1120*t^8+2302911/320*t^7-531441/80*t^6+2337903/640*t^5-194643/160*t^4+265779/1120*t^3-6849/280*t^2+t;

m=-4782969/4480*u^9+4782969/896*u^8-5137263/448*u^7+885735/64*u^6-6589431/640*u^5+623295/128*u^4-40707/28*u^3+58635/224*u^2-7129/280*u+l;

n=43046721/4480*u^9-52612659/1120*u^8+31355019/320*u^7-4546773/40*u^6+51221727/640*u^5-5589243/160*u^4+10307331/1120*u^3-373329/280*u^2+81*u;

o=-43046721/1120*u^9+205667/1120*u^8-3720087/10*u^7+33244587/80*u^6-44529507/160*u^5+18152829/160*u^4-15190173/560*u^3+475389/140*u^2-162*u;

p=14348907/160*u^9-33480783/80*u^8+16474671/20*u^7-71035947/80*u^6+91020753/160*u^5-8776431/40*u^4+1959363/40*u^3-56601/10*u^2+252*u;

q=-43046721/320*u^9+196101729/320*u^8-187598673/160*u^7+195629337/160*u^6-241241409/320*u^5+89119521/320*u^4-4752351/80*u^3+526419/80*u^2-567/2*u;

r=43046721/320*u^9-4782969/8*u^8+35606547/32*u^7-18009945/16*u^6+215023653/320*u^5-3844017/16*u^4+795339/16*u^3-21465/4*u^2+1134/5*u;

s=-14348907/160*u^9+62178597/160*u^8-28166373/40*u^7+55447011/80*u^6-64448703/160*u^5+22480173/160*u^4-2276289/80*u^3+60381/20*u^2-126*u;

v=43046721/1120*u^9-90876411/560*u^8+80247591/280*u^7-22025277/80*u^6+25043337/160*u^5-2142531/40*u^4+2989629/280*u^3-78327/70*u^2+324/7*u;

w=-43046721/4480*u^9+176969853/4480*u^8-21789081/320*u^7+20490003/320*u^6-22878207/640*u^5+7712091/640*u^4-1328967/560*u^3+275967/1120*u^2-81/8*u;

ñ=4782969/4480*u^9-4782969/1120*u^8+2302911/320*u^7-531441/80*u^6+2337903/640*u^5-194643/160*u^4+265779/1120*u^3-6849/280*u^2+u;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00

x00=0;
y00=0;
z00=0;

coordenadas de P01

x01=1;

y01=0;
z01=0;

coordenadas de P02
x02=2;
y02=0;
z02=0;

coordenadas de P03
x03=3;
y03=0;
z03=0;

coordenadas de P04
x04=4;
y04=0;
z04=0;

coordenadas de P05
x05=5;
y05=0;
z05=0;

coordenadas de P06
x06=6;
y06=0;
z06=0;

coordenadas de P07
x07=7;
y07=0;
z07=0;

coordenadas de P08
x08=8;
y08=0;
z08=0;

coordenadas de P09
x09=9;
y09=0;
z09=0;

coordenadas de P10
x10=0;
y10=1;
z10=2;

coordenadas de P11
x11=1;

y11=1;
z11=2;

coordenadas de P12
x12=2;
y12=1;
z12=2;

coordenadas de P13
x13=3;
y13=1;
z13=2;

coordenadas de P14
x14=4;
y14=1;
z14=2;

coordenadas de P15
x15=5;
y15=1;
z15=2;

coordenadas de P16
x16=6;
y16=1;
z16=2;

coordenadas de P17
x17=7;
y17=1;
z17=2;

coordenadas de P18
x18=8;
y18=1;
z18=2;

coordenadas de P19
x19=9;
y19=1;
z19=2;

coordenadas de P20
x20=0;
y20=2;
z20=3;

coordenadas de P21
x21=1;

y21=2;
z21=3;

coordenadas de P22
x22=2;
y22=2;
z22=3;

coordenadas de P23
x23=3;
y23=2;
z23=3;

coordenadas de P24
x24=4;
y24=2;
z24=3;

coordenadas de P25
x25=5;
y25=2;
z25=3;

coordenadas de P26
x26=6;
y26=2;
z26=3;

coordenadas de P27
x27=7;
y27=2;
z27=3;

coordenadas de P28
x28=8;
y28=2;
z28=3;

coordenadas de P29
x29=9;
y29=2;
z29=3;

coordenadas de P30
x30=0;
y30=3;
z30=5;

coordenadas de P31
x31=1;

y31=3;
z31=5;

coordenadas de P32
x32=2;
y32=3;
z32=5;

coordenadas de P33
x33=3;
y33=3;
z33=5;

coordenadas de P34
x34=4;
y34=3;
z34=5;

coordenadas de P35
x35=5;
y35=3;
z35=5;

coordenadas de P36
x36=6;
y36=3;
z36=5;

coordenadas de P37
x37=7;
y37=3;
z37=5;

coordenadas de P38
x38=8;
y38=3;
z38=5;

coordenadas de P39
x39=9;
y39=3;
z39=5;

coordenadas de P40
x40=0;
y40=4;
z40=7;

coordenadas de P41
x41=1;

y41=4;
z41=7;

coordenadas de P42
x42=2;
y42=4;
z42=7;

coordenadas de P43
x43=3;
y43=4;
z43=7;

coordenadas de P44
x44=4;
y44=4;
z44=7;

coordenadas de P45
x45=5;
y45=4;
z45=7;

coordenadas de P46
x46=6;
y46=4;
z46=7;

coordenadas de P47
x47=7;
y47=4;
z47=7;

coordenadas de P48
x48=8;
y48=4;
z48=7;

coordenadas de P49
x49=9;
y49=4;
z49=7;

coordenadas de P50
x50=0;
y50=5;
z50=8;

coordenadas de P51
x51=1;

y51=5;
z51=8;

coordenadas de P52
x52=2;
y52=5;
z52=8;

coordenadas de P53
x53=3;
y53=5;
z53=8;

coordenadas de P54
x54=4;
y54=5;
z54=8;

coordenadas de P55
x55=5;
y55=5;
z55=8;

coordenadas de P56
x56=6;
y56=5;
z56=8;

coordenadas de P57
x57=7;
y57=5;
z57=8;

coordenadas de P58
x58=8;
y58=5;
z58=8;

coordenadas de P59
x59=9;
y59=5;
z59=8;

coordenadas de P60
x60=0;
y60=6;
z60=10;

coordenadas de P61
x61=1;

y61=6;
z61=10;

coordenadas de P62
x62=2;
y62=6;
z62=10;

coordenadas de P63
x63=3;
y63=6;
z63=10;

coordenadas de P64
x64=4;
y64=6;
z64=10;

coordenadas de P65
x65=5;
y65=6;
z65=10;

coordenadas de P66
x66=6;
y66=6;
z66=10;

coordenadas de P67
x67=7;
y67=6;
z67=10;

coordenadas de P68
x68=8;
y68=6;
z68=10;

coordenadas de P69
x69=9;
y69=6;
z69=10;

coordenadas de P70
x70=0;
y70=7;
z70=11;

coordenadas de P71
x71=1;

y71=7;
z71=11;

coordenadas de P72
x72=2;
y72=7;
z72=11;

coordenadas de P73
x73=3;
y73=7;
z73=11;

coordenadas de P74
x74=4;
y74=7;
z74=11;

coordenadas de P75
x75=5;
y75=7;
z75=11;

coordenadas de P76
x76=6;
y76=7;
z76=11;

coordenadas de P77
x77=7;
y77=7;
z77=11;

coordenadas de P78
x78=8;
y78=7;
z78=11;

coordenadas de P79
x79=9;
y79=7;
z79=11;

coordenadas de P80
x80=0;
y80=8;
z80=13;

coordenadas de P81
x81=1;

y81=8;
z81=13;

coordenadas de P82
x82=2;
y82=8;
z82=13;

coordenadas de P83
x83=3;
y83=8;
z83=13;

coordenadas de P84
x84=4;
y84=8;
z84=13;

coordenadas de P85
x85=5;
y85=8;
z85=13;

coordenadas de P86
x86=6;
y86=8;
z86=13;

coordenadas de P87
x87=7;
y87=8;
z87=13;

coordenadas de P88
x88=8;
y88=8;
z88=13;

coordenadas de P89
x89=9;
y89=8;
z89=13;

coordenadas de P90
x90=0;
y90=9;
z90=14;

coordenadas de P91
x91=1;

y91=9;
z91=14;

coordenadas de P92
x92=2;
y92=9;
z92=14;

coordenadas de P93
x93=3;
y93=9;
z93=14;

coordenadas de P94
x94=4;
y94=9;
z94=14;

coordenadas de P95
x95=5;
y95=9;
z95=14;

coordenadas de P96
x96=6;
y96=9;
z96=14;

coordenadas de P97
x97=7;
y97=9;
z97=14;

coordenadas de P98
x98=8;
y98=9;
z98=14;

coordenadas de P99
x99=9;
y99=9;
z99=14;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x=a*m*x00+b*m*x10+c*m*x20+d*m*x30+e*m*x40+f*m*x50+g*m*x60+
h*m*x70+k*m*x80+l*m*x90+
a*n*x01+b*n*x11+c*n*x21+d*n*x31+e*n*x41+f*n*x51+g*n*x61+
h*n*x71+k*n*x81+ l*n*x91+
a*o*x02+b*o*x12+c*o*x22+d*o*x32+e*o*x42+f*o*x52+g*o*x62+

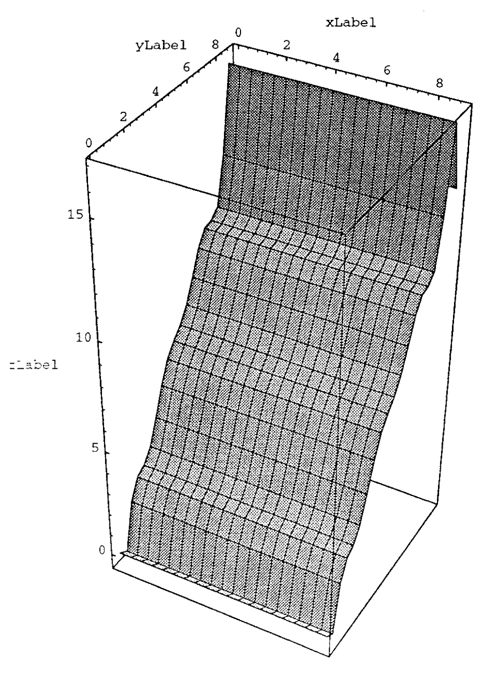
```
    h*o*x72+k*o*x82+ l*o*x92+
                      a*p*x03+b*p*x13+c*p*x23+d*p*x33+e*p*x43+f*p*x53+g*p*x63+
   h*p*x73+k*p*x83+l*p*x93+
   a*q*x04+b*q*x14+c*q*x24+d*q*x34+e*q*x44+f*q*x54+g*q*x64+
   h*q*x74+k*q*x84+ l*q*x94+
   a*r*x05+b*r*x15+c*r*x25+d*r*x35+e*r*x45+f*r*x55+g*r*x65+
   h*r*x75+k*r*x85+ l*r*x95+
   a*s*x06+b*s*x16+c*s*x26+d*s*x36+e*s*x46+f*s*x56+g*s*x66+
   h*s*x76+k*s*x86+ l*s*x96+
   a*v*x07+b*v*x17+c*v*x27+d*v*x37+e*v*x47+f*v*x57+g*v*x67+
   h*v*x77+k*v*x87+ l*v*x97+
   a*w*x08+b*w*x18+c*w*x28+d*w*x38+e*w*x48+f*w*x58+g*w*x68+
   h*w*x78+k*w*x88+ l*w*x98+            ;
   a*ñ*x08+b*ñ*x18+c*ñ*x28+d*ñ*x38+e*ñ*x48+f*ñ*x58+g*ñ*x68+
   h*ñ*x78+k*ñ*x88+ l*ñ*x98;
Expand[x];
x=simplify[x]

9u

y=a*m*y00+b*m*y10+c*m*y20+d*m*y30+e*m*y40+f*m*y50+g*m*y60+
    h*m*y70+k*m*y80+l*m*y90+
    a*n*y01+b*n*y11+c*n*y21+d*n*y31+e*n*y41+f*n*y51+g*n*y61+
    h*n*y71+k*n*y81+ l*n*y91+
    a*o*y02+b*o*y12+c*o*y22+d*o*y32+e*o*y42+f*o*y52+g*o*y62+
    h*o*y72+k*o*y82+ l*o*y92+
                      a*p*y03+b*p*y13+c*p*y23+d*p*y33+e*p*y43+f*p*y53+g*p*y63+
   h*p*y73+k*p*y83+l*p*y93+
   a*q*y04+b*q*y14+c*q*y24+d*q*y34+e*q*y44+f*q*y54+g*q*y64+
   h*q*y74+k*q*y84+ l*q*y94+
   a*r*y05+b*r*y15+c*r*y25+d*r*y35+e*r*y45+f*r*y55+g*r*y65+
   h*r*y75+k*r*y85+ l*r*y95+
   a*s*y06+b*s*y16+c*s*y26+d*s*y36+e*s*y46+f*s*y56+g*s*y66+
   h*s*y76+k*s*y86+ l*s*y96+
   a*v*y07+b*v*y17+c*v*y27+d*v*y37+e*v*y47+f*v*y57+g*v*y67+
   h*v*y77+k*v*y87+ l*v*y97+
   a*w*y08+b*w*y18+c*w*y28+d*w*y38+e*w*y48+f*w*y58+g*w*y68+
   h*w*y78+k*w*y88+ l*w*y98+
   a*ñ*y08+b*ñ*y18+c*ñ*y28+d*ñ*y38+e*ñ*y48+f*ñ*y58+g*ñ*y68+
   h*ñ*y78+k*ñ*y88+ l*ñ*y98;
Expand[y];
y=simplify[y]

9t

z=a*m*z00+b*m*z10+c*m*z20+d*m*z30+e*m*z40+f*m*z50+g*m*z60+
    h*m*z70+k*m*z80+l*m*z90+
    a*n*z01+b*n*z11+c*n*z21+d*n*z31+e*n*z41+f*n*z51+g*n*z61+
    h*n*z71+k*n*z81+ l*n*z91+
    a*o*z02+b*o*z12+c*o*z22+d*o*z32+e*o*z42+f*o*z52+g*o*z62+
```

```
 h*o*z72+k*o*z82+ l*o*z92+
                        a*p*z03+b*p*z13+c*p*z23+d*p*z33+e*p*z43+f*p*z53+g*p*z63+
 h*p*z73+k*p*z83+l*p*z93+
 a*q*z04+b*q*z14+c*q*z24+d*q*z34+e*q*z44+f*q*z54+g*q*z64+
 h*q*z74+k*q*z84+ l*q*z94+
 a*r*z05+b*r*z15+c*r*z25+d*r*z35+e*r*z45+f*r*z55+g*r*z65+
 h*r*z75+k*r*z85+ l*r*z95+
 a*s*z06+b*s*z16+c*s*z26+d*s*z36+e*s*z46+f*s*z56+g*s*z66+
 h*s*z76+k*s*z86+ l*s*z96+
 a*v*z07+b*v*z17+c*v*z27+d*v*z37+e*v*z47+f*v*z57+g*v*z67+
 h*v*z77+k*v*z87+ l*v*z97+
 a*w*z08+b*w*z18+c*w*z28+d*w*z38+e*w*z48+f*w*z58+g*w*z68+
 h*w*z78+k*w*z88+ l*w*z98+
 a*ñ*z08+b*ñ*z18+c*ñ*z28+d*ñ*z38+e*ñ*z48+f*ñ*z58+g*ñ*z68+
 h*ñ*z78+k*ñ*z88+ l*ñ*z98;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$(t\ (-459568+13861764\ t -138100536\ t^2 +700504119\ t^3 - 2024569323 t^4 +3472907886\ t^5 -3497236074 t^6 +1908404631\ t^7 -435250179\ t^8\ ))/4480$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                              AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 2x2 puntos dados con tangentes en ellos dadas: PT-1

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=2*t^3-3*t^2 +l;
b=-2*t^3+3*t^2;
c=t^3-2*t^2+t;
d=t^3-t^2;

a=2*u^3-3*u^2 +l;
b=-2*u^3+3*u^2;
c=u^3-2*u^2+u;
d=u^3-u^2;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=0;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=0;
y01=1;
z01=0;

coordenadas de P10
x10=0;
y10=0;
z10=1;

coordenadas de P11
x11=0;
y11=1;
z11=1;

COMPONENTES DE LAS T_{IJ}

componentes de T00
xt00=1;
yt00=0;
zt00=0;

componentes de T01
xt01=1;
yt01=1;

zt01=0;

componentes de T10
xt10=-1;
yt10=0;
zt10=1;

componentes de T11
xt11=-1;
yt11=1;
zt11=1;

COMPONENTES DE LAS U_{IJ}

componentes de U00
xu00=0;
yu00=1;
zu00=0;

componentes de U01
xu01=0;
yu01=1;
zu01=0;

componentes de U10
xu10=0;
yu10=1;
zu10=0;

componentes de U11
xu11=0;
yu11=1;
zu11=0;

COMPONENTES DE LAS E_{IJ}

componentes de E00
xe00=0;
ye00=1;
ze00=0;

componentes de E01
xe01=0;
ye01=1;
ze01=0;

componentes de E10
xe10=0;
ye10=1;

```
ze10=0;
```

componentes de E11

```
xe11=0;
ye11=1;
ze11=0;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=a*e*x00+b*e*x10+c*e*xt00+d*e*xt10+
   a*f*x01+b*f*x11+c*f*xt01+d*f*xt11+
   a*g*xu00+b*g*xu10+a*h*xu01+b*h*xu11;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$t - t^2$

```
y=a*e*y00+b*e*y10+c*e*yt00+d*e*yt10+
   a*f*y01+b*f*y11+c*f*yt01+d*f*yt11+
   a*g*yu00+b*g*yu10+a*h*yu01+b*h*yu11;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

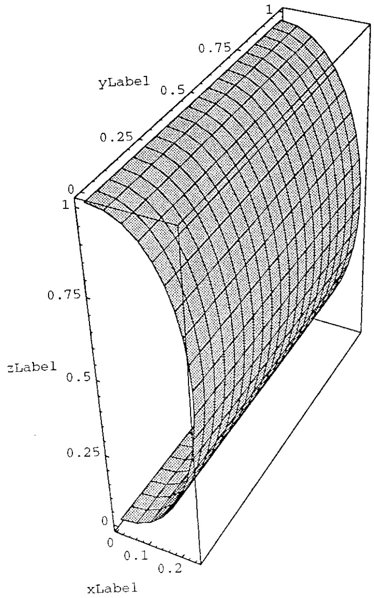
u

```
z=a*e*z00+b*e*z10+c*e*zt00+d*e*zt10+
   a*f*z01+b*f*z11+c*f*zt01+d*f*zt11+
   a*g*zu00+b*g*zu10+a*h*zu01+b*h*zu11;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$(3-2\ t)\ t^2$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                       AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



yLabel
zLabel
xLabel
0
0.25
0.5
0.75
1
0.1
0.2

Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 3x3 puntos dados con tangentes en ellos dadas: PT-2

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

```
a=24*t^5-68*t^4+66*t^3-23*t^2+1;
b=16*t^4-32*t^3+16*t^2;
c=-24*t^5+52*t^4-34*t^3+7*t^2;
d=4*t^5-12*t^4+13*t^3-6*t^2+t;
g=16*t^5-40*t^4+32*t^3-8*t^2;
f=4*t^5-8*t^4+5*t^3-t^2;

h=24*u^5-68*u^4+66*u^3-23*u^2+1;
k=16*u^4-32*u^3+16*u^2;
l=-24*u^5+52*u^4-34*u^3+7*u^2;
m=4*u^5-12*u^4+13*u^3-6*u^2+u;
n=16*u^5-40*u^4+32*u^3-8*u^2;
p=4*u^5-8*u^4+5*u^3-u^2;
```

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00

```
x00=0;
y00=0;
z00=0;
```

coordenadas de P01

```
x01=0;
y01=1;
z01=0;
```

coordenadas de P02

```
x02=0;
y02=2;
z02=0;
```

coordenadas de P10

```
x10=0;
y10=0;
z10=1;
```

coordenadas de P11

```
x11=0;
y11=1;
z11=1;
```

coordenadas de P12
x12=0;
y12=2;
z12=1;

coordenadas de P20
x20=0;
y20=0;
z20=2;

coordenadas de P21
x21=0;
y21=1;
z21=2;

coordenadas de P22
x22=0;
y22=2;
z22=2;

COMPONENTES DE LAS T_{IJ}

componentes de T00
xt00=1;
yt00=0;
zt00=0;

componentes de T01
xt01=1;
yt01=0;
zt01=0;

componentes de T02
xt02=1;
yt02=0;
zt02=0;

componentes de T10
xt10=-1;
yt10=0;
zt10=0;

componentes de T11
xt11=-1;
yt11=0;
zt11=0;

componentes de T12

xt12=-1;
yt12=0;
zt12=0;

componentes de T20
xt20=1;
yt20=0;
zt20=0;

componentes de T21
xt21=1;
yt21=0;
zt21=0;

componentes de T22
xt22=1;
yt22=0;
zt22=0;

COMPONENTES DE LAS U_{IJ}

componentes de U00
xu00=0;
yu00=1;
zu00=0;

componentes de U01
xu01=0;
yu01=1;
zu01=0;

componentes de U02
xu02=0;
yu02=1;
zu02=0;

componentes de U10
xu10=0;
yu10=1;
zu10=0;

componentes de U11
xu11=0;
yu11=1;
zu11=0;

componentes de U12
xu12=0;
yu12=1;

zu12=0;

componentes de U20
xu20=0;
yu20=1;
zu20=0;

componentes de U21
xu21=0;
yu21=1;
zu21=0;

componentes de U22
xu22=0;
yu22=1;
zu22=0;

COMPONENTES DE LAS E_{IJ}

componentes de E00
xe00=0;
ye00=0;
ze00=0;

componentes de E01
xe01=0;
ye01=0;
ze01=0;

componentes de E02
xe02=0;
ye02=0;
ze02=0;

componentes de E10
xe10=0;
ye10=0;
ze10=0;

componentes de E11
xe11=0;
ye11=0;
ze11=0;

componentes de E12
xe12=0;
ye12=0;
ze12=0;

componentes de E20

```
xe20=0;
ye20=0;
ze20=0;
```

componentes de E21

```
xe21=0;
ye21=0;
ze21=0;
```

componentes de E22

```
xe22=0;
ye22=0;
ze22=0;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=h*(a* x00+b* x10+c*x20+d* xt00+g* xt10+f*xt20)+
   k*(a* x01+b* x11+c*x21+d* xt01+g* xt11+f*xt21)+
   l*(a* x02+b* x12+c*x22+d* xt02+g* xt12+f*xt22)+
   m*(a* xu00+b* xu10+c*xu20)+
   n*(a* xu01+b* xu11+c*xu21)+
   p*(a* xu02+b* xu12+c*xu22) ;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$t + t^2 -14 t^3 +20t^4 -8 t^5$

```
y=h*(a* y00+b* y10+c*y20+d* yt00+g* yt10+f*yt20)+
   k*(a* y01+b* y11+c*y21+d* yt01+g* yt11+f*yt21)+
   l*(a* y02+b* y12+c*y22+d* yt02+g* yt12+f*yt22)+
   m*(a* yu00+b* yu10+c*yu20)+
   n*(a* yu01+b* yu11+c*yu21)+
   p*(a* yu02+b* yu12+c*yu22) ;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

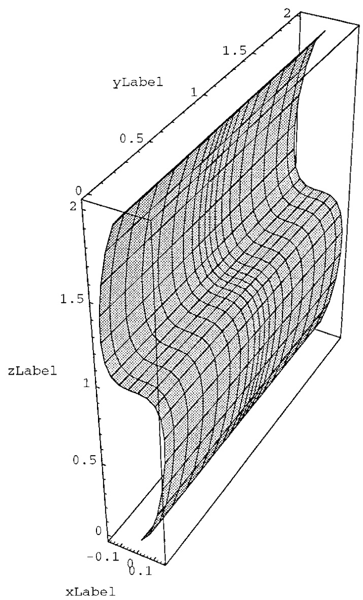
$u+ 15 u^2 -50 u^3 + 60u^4 -24 u^5$

```
z=h*(a* z00+b* z10+c*z20+d* zt00+g* zt10+f*zt20)+
   k*(a* z01+b* z11+c*z21+d* zt01+g* zt11+f*zt21)+
   l*(a* z02+b* z12+c*z22+d* zt02+g* zt12+f*zt22)+
   m*(a* zu00+b* zu10+c*zu20)+
   n*(a* zu01+b* zu11+c*zu21)+
   p*(a* zu02+b* zu12+c*zu22) ;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$2 t^2 (15-50t+60 t^2 - 24t^3)$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]



Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 4x4 puntos dados con tangentes en ellos dadas: PT-3

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

FUNCIONES PREVIAS

```
a=891/4*t^7-3483/4*t^6+2709/2*t^5-2115/2*t^4+1691/4*t^3-291/4*t^2+1;
b=2187/4*t^7-3645/2*t^6+8991/4*t^5-1215*t^4+243*t^3;
c=-2187/4*t^78019/4*t^6-5589/2*t^5+3645/2*t^42187/4*t^3+243/4*t^2;
d=-891/4*t^7+1377/2*t^63231/4*t^5+450*t^4-119*t^3+12*t^2;
e=81/4*t^7-81*t^6+261/2*t^5-108*t^4+193/4*t^3-11*t^2+t;
f=729/4*t^7-2673/4*t^6+3807/4*t^5-2619/4*t^4+216*t^3-27*t^2;
g=729/4*t^7-1215/2*t^6+1539/2*t^5-459*t^4+513/4*t^3-27/2*t^2;
h=81/4*t^7-243/4*t^6+279/4*t^5-153/4*t^4+10*t^3-t^2;

j=891/4*u^7-3483/4*u^6+2709/2*u^5-2115/2*u^4+1691/4*u^3-291/4*u^2+1;
k=2187/4*u^7-3645/2*u^6+8991/4*u^5-1215*u^4+243*u^3;
l=-2187/4*u^78019/4*u^6-5589/2*u^5+3645/2*u^42187/4*u^3+243/4*u^2;
m=-891/4*u^7+1377/2*u^63231/4*u^5+450*u^4-119*u^3+12*u^2;
n=81/4*u^7-81*u^6+261/2*u^5-108*u^4+193/4*u^3-11*u^2+u;
p=729/4*u^7-2673/4*u^6+3807/4*u^5-2619/4*u^4+216*u^3-27*u^2;
q=729/4*u^7-1215/2*u^6+1539/2*u^5-459*u^4+513/4*u^3-27/2*u^2;
r=81/4*u^7-243/4*u^6+279/4*u^5-153/4*u^4+10*u^3-u^2;
```

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00

```
x00=0;
y00=0;
z00=0;
```

coordenadas de P01

```
x01=0;
y01=1;
z01=0;
```

coordenadas de P02

```
x02=0;
y02=2;
z02=0;
```

coordenadas de P03

```
x03=0;
y03=3;
z03=0;
```

coordenadas de P10

x10=0;
y10=0;
z10=1;

coordenadas de P11
x11=0;
y11=1;
z11=1;

coordenadas de P12
x12=0;
y12=2;
z12=1;

coordenadas de P13
x13=0;
y13=3;
z13=1;

coordenadas de P20
x20=0;
y20=0;
z20=2;

coordenadas de P21
x21=0;
y21=1;
z21=2;

coordenadas de P22
x22=0;
y22=2;
z22=2;

coordenadas de P23
x23=0;
y23=3;
z23=2;

coordenadas de P30
x30=0;
y30=0;
z30=3;

coordenadas de P31
x31=0;
y31=1;
z31=3;

coordenadas de P32

x32=0;
y32=2;
z32=3;

coordenadas de P33
x33=0;
y33=3;
z33=3;

COMPONENTES DE LAS T_{IJ}

componentes de T00
xt00=1;
yt00=0;
zt00=0;

componentes de T01
xt01=1;
yt01=0;
zt01=0;

componentes de T02
xt02=1;
yt02=0;
zt02=0;

componentes de T03
xt03=1;
yt03=0;
zt03=0;

componentes de T10
xt10=-1;
yt10=0;
zt10=0;

componentes de T11
xt11=-1;
yt11=0;
zt11=0;

componentes de T12
xt12=-1;
yt12=0;
zt12=0;

componentes de T13
xt13=-1;
yt13=0;

zt13=0;

componentes de T20
xt20=1;
yt20=0;
zt20=0;

componentes de T21
xt21=1;
yt21=0;
zt21=0;

componentes de T22
xt22=1;
yt22=0;
zt22=0;

componentes de T23
xt23=1;
yt23=0;
zt23=0;

componentes de T30
xt30=-1;
yt30=0;
zt30=0;

componentes de T31
xt31=-1;
yt31=0;
zt31=0;

componentes de T32
xt32=-1;
yt32=0;
zt32=0;

componentes de T33
xt33=-1;
yt33=0;
zt33=0;

COMPONENTES DE LAS U_{IJ}

componentes de U00
xu00=0;
yu00=1;
zu00=0;

componentes de U01
xu01=0;
yu01=1;
zu01=0;

componentes de U02
xu02=0;
yu02=1;
zu02=0;

componentes de U03
xu03=0;
yu03=1;
zu03=0;

componentes de U10
xu10=0;
yu10=1;
zu10=0;

componentes de U11
xu11=0;
yu11=1;
zu11=0;

componentes de U12
xu12=0;
yu12=1;
zu12=0;

componentes de U13
xu13=0;
yu13=1;
zu12=0;

componentes de U20
xu20=0;
yu20=1;
zu20=0;

componentes de U21
xu21=0;
yu21=1;
zu21=0;

componentes de U22
xu22=0;
yu22=1;
zu22=0;

componentes de U23
xu23=0;
yu23=1;
zu23=0;

componentes de U30
xu30=0;
yu30=1;
zu30=0;

componentes de U31
xu31=0;
yu31=1;
zu31=0;

componentes de U32
xu22=0;
yu32=1;
zu32=0;

componentes de U33
xu33=0;
yu33=1;
zu33=0;

COMPONENTES DE LAS E_{IJ}

componentes de E00
xe00=0;
ye00=0;
ze00=0;

componentes de E01
xe01=0;
ye01=0;
ze01=0;

componentes de E02
xe02=0;
ye02=0;
ze02=0;

componentes de E03
xe03=0;
ye03=0;
ze03=0;

componentes de E10
xe10=0;

ye10=0;
ze10=0;

componentes de E11
xe11=0;
ye11=0;
ze11=0;

componentes de E12
xe12=0;
ye12=0;
ze12=0;

componentes de E13
xe13=0;
ye13=0;
ze13=0;

componentes de E20
xe20=0;
ye20=0;
ze20=0;

componentes de E21
xe21=0;
ye21=0;
ze21=0;

componentes de E22
xe22=0;
ye22=0;
ze22=0;

componentes de E23
xe23=0;
ye23=0;
ze23=0;

componentes de E30
xe30=0;
ye30=0;
ze30=0;

componentes de E31
xe31=0;
ye31=0;
ze31=0;

componentes de E32
xe32=0;

```
ye32=0;
ze32=0;
```

componentes de E33

```
xe33=0;
ye33=0;
ze33=0;
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=a*j*x00+b*j*x10+c*j*x20+d*j*x30+
   e*j*xt00+f*j*xt10+g*j*xt30+h*j*xt30+
   a*k*x01+b*k*x11+c*k*x21+d*k*x31+
   e*k*xt01+f*k*xt11+g*k*xt21+h*k*xt31+
   a*l*x02+b*l*x12+c*l*x22+d*l*x32+
   e*l*xt02+f*l*xt12+g*l*xt22+h*l*xt32+
   a*m*x03+b*m*x13+c*m*x23+d*m*x33+
   e*m*xt03+f*m*xt13+g*m*xt23+h*m*xt33+
   a*n*xu00+b*n*xu10+c*n*xu20+d*n*xu30+
   e*n*xe00+f*n*xe10+g*n*xe30+h*n*xe30+
   a*p*xu01+b*p*xu11+c*p*xu21+d*p*xu31+
   e*p*xe01+f*p*xe11+g*p*xe21+h*p*xe31+
   a*q*xu02+b*q*xu12+c*q*xu22+d*q*xu32+
   e*q*xe02+f*q*xe12+g*q*xe22+h*q*xe32+
   a*r*xu03+b*r*xu13+c*r*xu23+d*r*xu33+
   e*r*xe03+f*r*xe13+g*r*xe23+h*r*xe33;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$t\,(2+7t-99\,t^2+252\,t^3-243\,t^4+81\,t^5)/2$

```
y=a*j*y00+b*j*y10+c*j*y20+d*j*y30+
   e*j*yt00+f*j*yt10+g*j*yt30+h*j*yt30+
   a*k*y01+b*k*y11+c*k*y21+d*k*y31+
   e*k*yt01+f*k*yt11+g*k*yt21+h*k*yt31+
   a*l*y02+b*l*y12+c*l*y22+d*l*y32+
   e*l*yt02+f*l*yt12+g*l*yt22+h*l*yt32+
   a*m*y03+b*m*y13+c*m*y23+d*m*y33+
   e*m*yt03+f*m*yt13+g*m*yt23+h*m*yt33+
   a*n*yu00+b*n*yu10+c*n*yu20+d*n*yu30+
   e*n*ye00+f*n*ye10+g*n*ye30+h*n*ye30+
   a*p*yu01+b*p*yu11+c*p*yu21+d*p*yu31+
   e*p*ye01+f*p*ye11+g*p*ye21+h*p*ye31+
   a*q*yu02+b*q*yu12+c*q*yu22+d*q*yu32+
   e*q*ye02+f*q*ye12+g*q*ye22+h*q*ye32+
   a*r*yu03+b*r*yu13+c*r*yu23+d*r*yu33+
   e*r*ye03+f*r*ye13+g*r*ye23+h*r*ye33;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

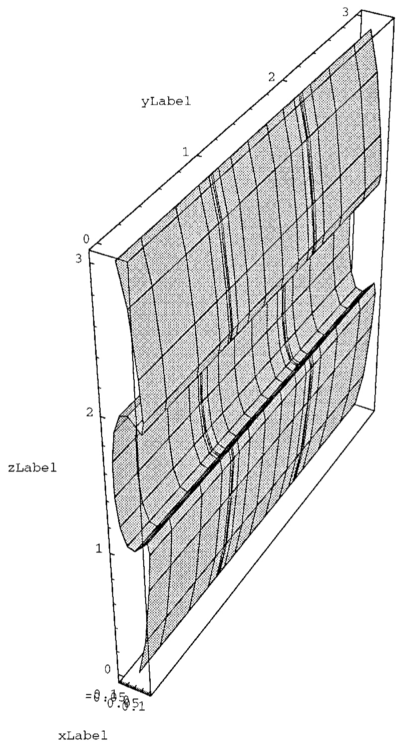
$u + 105\,u^2 - 805\,u^3 + 2520\,u^4 - 3843\,u^5 + 2835\,u^6 - 810\,u^7$

```
z=a*j*z00+b*j*z10+c*j*z20+d*j*z30+
   e*j*zt00+f*j*zt10+g*j*zt30+h*j*zt30+
   a*k*z01+b*k*z11+c*k*z21+d*k*z31+
   e*k*zt01+f*k*zt11+g*k*zt21+h*k*zt31+
   a*l*z02+b*l*z12+c*l*z22+d*l*z32+
   e*l*zt02+f*l*zt12+g*l*zt22+h*l*zt32+
   a*m*z03+b*m*z13+c*m*z23+d*m*z33+
   e*m*zt03+f*m*zt13+g*m*zt23+h*m*zt33+
   a*n*zu00+b*n*zu10+c*n*zu20+d*n*zu30+
   e*n*ze00+f*n*ze10+g*n*ze30+h*n*ze30+
   a*p*zu01+b*p*zu11+c*p*zu21+d*p*zu31+
   e*p*ze01+f*p*ze11+g*p*ze21+h*p*ze31+
   a*q*zu02+b*q*zu12+c*q*zu22+d*q*zu32+
   e*q*ze02+f*q*ze12+g*q*ze22+h*q*ze32+
   a*r*zu03+b*r*zu13+c*r*zu23+d*r*zu33+
   e*r*ze03+f*r*ze13+g*r*ze23+h*r*ze33;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$3\,t^2\,(105 - 805t + 2520\,t^2 - 3843t^3 + 2835\,t^4 - 810\,t^5)/2$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                                  AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```


yLabel
zLabel
xLabel
0
1
2
3

Ejemplo de superficie polinomial que pasa por una red de 5x5 puntos dados con tangentes en ellos dadas: PT-4

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=51200/27*t^9-252928/27*t^8+528640/27*t^7-607360/27*t^6+416200/27*t^5-171724/27*t^4+40310/27*t^3-485/3*t^2+1;

b=327680/27*t^9-1507328/27*t^8+2871296/27*t^7-2914304/27*t^6+1682432/27*t^5-541184/27*t^4+28672/9*t^3-512/3*t^2;

c=4096*t^8-16384*t^7+26112*t^6-20992*t^5+8848*t^4-1824*t^3+144*t^2;

d=-327680/27*t^9+1441792/27*t^8-2609152/27*t^7+2504704/2t*t^6-1371136/27*t^5+426496/27*t^4-69632/27*t^3+512/3*t^2;

e=-51200/27*t^9+207872/27*t^8-348416/27*t^7+311936/27*t^6-160712/27*t^5+47516/27*t^4-2482/9*t^3+53/3*t^2;

f=1024/9*t^9-5120/9*t^8+10880/9*t^7-12800/9*t^6+9092/9*t^5-3980/9*t^4+1045/9*t^3-50/3*t^2;

g=16384/9*t^9-77824/9*t^8+154624/9*t^7-166144/9*t^6+103936/9*t^5-37696/9*t^4+2432/3*t^3-64*t^2;

h=4096*t^9-18432*t^8+34304*t^7-34048*t^6+19344*t^5-6248*t^4+1056*t^3-72*t^2;

j=16384/9*t^9-69632/9*t^8+121856/9*t^7-113408/9*t^6+60416/9*t^5-18368/9*t^4+2944/9*t^3-64*t^2;

k=1024/9*t^9-4096/9*t^8+6784/9*t^7-6016/9*t^6+3076/9*t^5-904/9*t^4+47/3*t^3-t^2;

l=51200/27*u^9-252928/27*u^8+528640/27*u^7-607360/27*u^6+416200/27*u^5-171724/27*u^4+40310/27*u^3-485/3*u^2+1;

m=327680/27*u^9-1507328/27*u^8+2871296/27*u^7-2914304/27*u^6+1682432/27*u^5-541184/27*u^4+28672/9*u^3-512/3*u^2;

n=4096*u^8-16384*u^7+26112*u^6-20992*u^5+8848*u^4-1824*u^3+144*u^2;

ñ=-327680/27*u^9+1441792/27*u^8-2609152/27*u^7+2504704/2u*t^6-1371136/27*u^5+426496/27*u^4-69632/27*u^3+512/3*u^2;

o=-51200/27*u^9+207872/27*u^8-348416/27*u^7+311936/27*u^6-160712/27*u^5+47516/27*u^4-2482/9*u^3+53/3*u^2;

p=1024/9*u^9-5120/9*u^8+10880/9*u^7-12800/9*u^6+9092/9*u^5-3980/9*u^4+1045/9*u^3-50/3*u^2;

q=16384/9*u^9-77824/9*u^8+154624/9*u^7-166144/9*u^6+103936/9*u^5-37696/9*u^4+2432/3*u^3-64*u^2;

r=4096*u^9-18432*u^8+34304*u^7-34048*u^6+19344*u^5-6248*u^4+1056*u^3-72*u^2;

s=16384/9*u^9-69632/9*u^8+121856/9*u^7-113408/9*u^6+60416/9*u^5-18368/9*u^4+2944/9*u^3-64*u^2;

w=1024/9*u^9-4096/9*u^8+6784/9*u^7-6016/9*u^6+3076/9*u^5-904/9*u^4+47/3*u^3-u^2;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=0;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=0;
y01=1;
z01=0;

coordenadas de P02
x02=0;
y02=2;
z02=0;

coordenadas de P03
x03=0;
y03=3;
z03=0;

coordenadas de P04
x04=0;
y04=4;
z04=0;

coordenadas de P10
x10=0;
y10=0;
z10=1;

coordenadas de P11
x11=0;
y11=1;
z11=1;

coordenadas de P12
x12=0;
y12=2;
z12=1;

coordenadas de P13
x13=0;
y13=3;
z13=1;

coordenadas de P14
x14=0;
y14=4;
z14=1;

coordenadas de P20
x20=0;
y20=0;
z20=2;

coordenadas de P21
x21=0;
y21=1;
z21=2;

coordenadas de P22
x22=0;
y22=2;
z22=2;

coordenadas de P23
x23=0;
y23=3;
z23=2;

coordenadas de P24
x24=0;
y24=4;
z24=2;

coordenadas de P30
x30=0;
y30=0;
z30=3;

coordenadas de P31
x31=0;
y31=1;
z31=3;

coordenadas de P32
x32=0;
y32=2;
z32=3;

coordenadas de P33
x33=0;
y33=3;
z33=3;

coordenadas de P34
x34=0;
y34=4;
z34=3;

coordenadas de P40
x40=0;
y40=0;
z40=4;

coordenadas de P41
x41=0;
y41=1;
z41=4;

coordenadas de P42
x42=0;
y42=2;
z42=4;

coordenadas de P43
x43=0;
y43=3;
z43=4;

coordenadas de P44
x44=0;
y44=4;
z44=4;

COMPONENTES DE LAS T_{IJ}

componentes de T00

xt00=1;
yt00=0;
zt00=0;

componentes de T01
xt01=1;
yt01=0;
zt01=0;

componentes de T02
xt02=1;
yt02=0;
zt02=0;

componentes de T03
xt03=1;
yt03=0;
zt03=0;

componentes de T04
xt04=1;
yt04=0;
zt04=0;

componentes de T10
xt10=-1;
yt10=0;
zt10=0;

componentes de T11
xt11=-1;
yt11=0;
zt11=0;

componentes de T12
xt12=-1;
yt12=0;
zt12=0;

componentes de T13
xt13=-1;
yt13=0;
zt13=0;

componentes de T14
xt14=-1;
yt14=0;
zt14=0;

componentes de T20

xt20=1;
yt20=0;
zt20=0;

componentes de T21
xt21=1;
yt21=0;
zt21=0;

componentes de T22
xt22=1;
yt22=0;
zt22=0;

componentes de T23
xt23=1;
yt23=0;
zt23=0;

componentes de T24
xt24=1;
yt24=0;
zt24=0;

componentes de T30
xt30=-1;
yt30=0;
zt30=0;

componentes de T31
xt31=-1;
yt31=0;
zt31=0;

componentes de T32
xt32=-1;
yt32=0;
zt32=0;

componentes de T33
xt33=-1;
yt33=0;
zt33=0;

componentes de T34
xt34=-1;
yt34=0;
zt34=0;

componentes de T40

xt40=1;
yt40=0;
zt40=0;

componentes de T41
xt41=1;
yt41=0;
zt41=0;

componentes de T42
xt42=1;
yt42=0;
zt42=0;

componentes de T43
xt43=1;
yt43=0;
zt43=0;

componentes de T44
xt44=1;
yt44=0;
zt44=0;

COMPONENTES DE LAS U_{IJ}

componentes de U00
xu00=0;
yu00=1;
zu00=0;

componentes de U01
xu01=0;
yu01=1;
zu01=0;

componentes de U02
xu02=0;
yu02=1;
zu02=0;

componentes de U03
xu03=0;
yu03=1;
zu03=0;

componentes de U04
xu04=0;
yu04=1;

zu04=0;

componentes de U10
xu10=0;
yu10=1;
zu10=0;

componentes de U11
xu11=0;
yu11=1;
zu11=0;

componentes de U12
xu12=0;
yu12=1;
zu12=0;

componentes de U13
xu13=0;
yu13=1;
zu13=0;

componentes de U14
xu14=0;
yu14=1;
zu14=0;

componentes de U20
xu20=0;
yu20=1;
zu20=0;

componentes de U21
xu21=0;
yu21=1;
zu21=0;

componentes de U22
xu22=0;
yu22=1;
zu22=0;

componentes de U23
xu23=0;
yu23=1;
zu23=0;

componentes de U24
xu24=0;

yu24=1;
zu24=0;

componentes de U30
xu30=0;
yu30=1;
zu30=0;

componentes de U31
xu31=0;
yu31=1;
zu31=0;

componentes de U32
xu22=0;
yu32=1;
zu32=0;

componentes de U33
xu33=0;
yu33=1;
zu33=0;

componentes de U34
xu34=0;
yu34=1;
zu34=0;

componentes de U40
xu40=0;
yu40=1;
zu40=0;

componentes de U41
xu41=0;
yu41=1;
zu41=0;

componentes de U42
xu42=0;
yu42=1;
zu42=0;

componentes de U43
xu43=0;
yu43=1;
zu43=0;

componentes de U44
xu44=0;

yu44=1;
zu44=0;

COMPONENTES DE LAS E_{IJ}

componentes de E00
xe00=0;
ye00=0;
ze00=0;

componentes de E01
xe01=0;
ye01=0;
ze01=0;

componentes de E02
xe02=0;
ye02=0;
ze02=0;

componentes de E03
xe03=0;
ye03=0;
ze03=0;

componentes de E04
xe04=0;
ye04=0;
ze04=0;

componentes de E10
xe10=0;
ye10=0;
ze10=0;

componentes de E11
xe11=0;
ye11=0;
ze11=0;

componentes de E12
xe12=0;
ye12=0;
ze12=0;

componentes de E13
xe13=0;
ye13=0;
ze13=0;

componentes de E14
    xe14=0;
    ye14=0;
    ze14=0;

componentes de E20
    xe20=0;
    ye20=0;
    ze20=0;

componentes de E21
    xe21=0;
    ye21=0;
    ze21=0;

componentes de E22
    xe22=0;
    ye22=0;
    ze22=0;

componentes de E23
    xe23=0;
    ye23=0;
    ze23=0;

componentes de E24
    xe24=0;
    ye24=0;
    ze24=0;

componentes de E30
    xe30=0;
    ye30=0;
    ze30=0;

componentes de E31
    xe31=0;
    ye31=0;
    ze31=0;

componentes de E32
    xe32=0;
    ye32=0;
    ze32=0;

componentes de E33
    xe33=0;
    ye33=0;
    ze33=0;

componentes de E34
xe34=0;
ye34=0;
ze34=0;

componentes de E40
xe40=0;
ye40=0;
ze40=0;

componentes de E41
xe41=0;
ye41=0;
ze41=0;

componentes de E42
xe42=0;
ye42=0;
ze42=0;

componentes de E43
xe43=0;
ye43=0;
ze43=0;

componentes de E44
xe44=0;
ye44=0;
ze44=0;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x=a*l*x00+b*l*x10+c*l*x20+d*l*x30+e*l*x40+
f*l*xt00+g*l*xt10+h*l*xt20+j*l*xt30++k*l*xt40+
a*m*x01+b*m*x11+c*m*x21+d*m*x31+e*m*x41+
f*m*xt01+g*m*xt11+h*m*xt21+j*m*xt31++k*m*xt41+
a*n*x02+b*n*x12+c*n*x22+d*n*x32+e*n*x42+
f*n*xt02+g*n*xt12+h*n*xt22+j*n*xt32++k*n*xt42+
a*ñ*x03+b*ñ*x13+c*ñ*x23+d*ñ*x33+e*ñ*x43+
f*ñ*xt03+g*ñ*xt13+h*ñ*xt23+j*ñ*xt33++k*ñ*xt43+
a*o*x04+b*o*x14+c*o*x24+d*o*x34+e*o*x44+
f*o*xt04+g*o*xt14+h*o*xt24+j*o*xt34++k*o*xt44+
a*p*x00+b*p*x10+c*p*x20+d*p*x30+e*p*x40+
f*p*xe00+g*p*xe10+h*p*xe20+j*p*xe30++k*p*xe40+
a*q*x01+b*q*x11+c*q*x21+d*q*x31+e*q*x41+
f*q*xe01+g*q*xe11+h*q*xe21+j*q*xe31++k*q*xe41+
a*r*x02+b*r*x12+c*r*x22+d*r*x32+e*r*x42+
f*r*xe02+g*r*xe12+h*r*xe22+j*r*xe32++k*r*xe42+

```
   a*s*x03+b*s*x13+c*s*x23+d*s*x33+e*s*x43+
   f*s*xe03+g*s*xe13+h*s*xe23+j*s*xe33++k*s*xe43+
   a*w*x04+b*w*x14+c*w*x24+d*w*x34+e*w*x44+
   f*w*xe04+g*w*xe14+h*w*xe24+j*w*xe34++k*w*xe44;
Expand[x];
x=simplify[x]
```

$(t\,(3-13\,t+150\,t^2-1684\,t^3+7304\,t^4-15232\,t^5+16640\,t^6-9216\,t^7+2048\,t^8))/3$

```
y=a*l*y00+b*l*y10+c*l*y20+d*l*y30+e*l*y40+
   f*l*yt00+g*l*yt10+h*l*yt20+j*l*yt30++k*l*yt40+
   a*m*y01+b*m*y11+c*m*y21+d*m*y31+e*m*y41+
   f*m*yt01+g*m*yt11+h*m*yt21+j*m*yt31++k*m*yt41+
   a*n*y02+b*n*y12+c*n*y22+d*n*y32+e*n*y42+
   f*n*yt02+g*n*yt12+h*n*yt22+j*n*yt32++k*n*yt42+
   a*ñ*y03+b*ñ*y13+c*ñ*y23+d*ñ*y33+e*ñ*y43+
   f*ñ*yt03+g*ñ*yt13+h*ñ*yt23+j*ñ*yt33++k*ñ*yt43+
   a*o*y04+b*o*y14+c*o*y24+d*o*y34+e*o*y44+
   f*o*yt04+g*o*yt14+h*o*yt24+j*o*yt34++k*o*yt44+
   a*p*y00+b*p*y10+c*p*y20+d*p*y30+e*p*y40+
   f*p*ye00+g*p*ye10+h*p*ye20+j*p*ye30++k*p*ye40+
   a*q*y01+b*q*y11+c*q*y21+d*q*y31+e*q*y41+
   f*q*ye01+g*q*ye11+h*q*ye21+j*q*ye31++k*q*ye41+
   a*r*y02+b*r*y12+c*r*y22+d*r*y32+e*r*y42+
   f*r*ye02+g*r*ye12+h*r*ye22+j*r*ye32++k*r*ye42+
   a*s*y03+b*s*y13+c*s*y23+d*s*y33+e*s*y43+
   f*s*ye03+g*s*ye13+h*s*ye23+j*s*ye33++k*s*ye43+
   a*w*y04+b*w*y14+c*w*y24+d*w*y34+e*w*y44+
   f*w*ye04+g*w*ye14+h*w*ye24+j*w*ye34++k*w*ye44;
Expand[y];
y=simplify[y]
```

$u+525\,u^2-20930/3\,u^3+39060\,u^4-116872\,u^5+201600\,u^6-200960\,u^7+107520\,u^8-71680/3\,u^9$

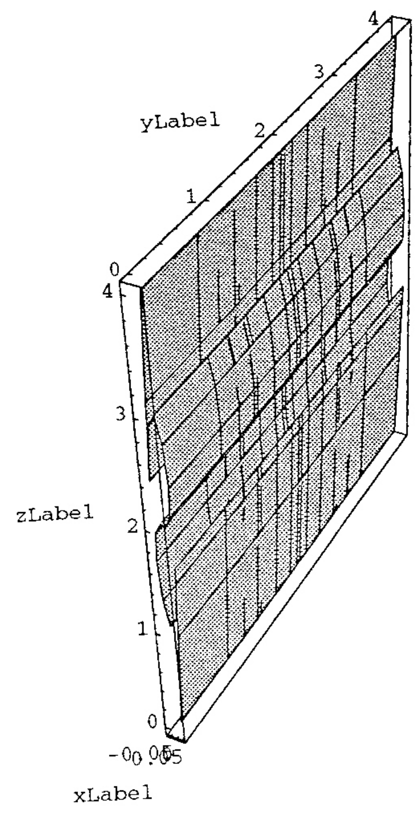
```
z=a*l*z00+b*l*z10+c*l*z20+d*l*z30+e*l*z40+
   f*l*zt00+g*l*zt10+h*l*zt20+j*l*zt30++k*l*zt40+
   a*m*z01+b*m*z11+c*m*z21+d*m*z31+e*m*z41+
   f*m*zt01+g*m*zt11+h*m*zt21+j*m*zt31++k*m*zt41+
   a*n*z02+b*n*z12+c*n*z22+d*n*z32+e*n*z42+
   f*n*zt02+g*n*zt12+h*n*zt22+j*n*zt32++k*n*zt42+
   a*ñ*z03+b*ñ*z13+c*ñ*z23+d*ñ*z33+e*ñ*z43+
   f*ñ*zt03+g*ñ*zt13+h*ñ*zt23+j*ñ*zt33++k*ñ*zt43+
   a*o*z04+b*o*z14+c*o*z24+d*o*z34+e*o*z44+
   f*o*zt04+g*o*zt14+h*o*zt24+j*o*zt34++k*o*zt44+
   a*p*z00+b*p*z10+c*p*z20+d*p*z30+e*p*z40+
   f*p*ze00+g*p*ze10+h*p*ze20+j*p*ze30++k*p*ze40+
   a*q*z01+b*q*z11+c*q*z21+d*q*z31+e*q*z41+
   f*q*ze01+g*q*ze11+h*q*ze21+j*q*ze31++k*q*ze41+
```

```
   a*r*z02+b*r*z12+c*r*z22+d*r*z32+e*r*z42+
   f*r*ze02+g*r*ze12+h*r*ze22+j*r*ze32++k*r*ze42+
   a*s*z03+b*s*z13+c*s*z23+d*s*z33+e*s*z43+
   f*s*ze03+g*s*ze13+h*s*ze23+j*s*ze33++k*s*ze43+
   a*w*z04+b*w*z14+c*w*z24+d*w*z34+e*w*z44+
   f*w*ze04+g*w*ze14+h*w*ze24+j*w*ze34++k*w*ze44;
Expand[z];
z=simplify[z]
```

$(4\ t^2\ (1575\text{-}20930\ t\ +117180\ t^2 - 350616\ t^3\ +604800\ t^4\ \text{-}602880\ t^5 +322560\ t^6\text{-}71680\ t^7))/9$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,1},{u,0,1},
                     AxesLabel->{XLabel,yLabel,ZLabel}]
```



Ejemplo de superficie polinomial mixta que pasa por una red de 6x6 puntos usando polinomios de grado tres o menor: M-1

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a=25/2*t^2-15/2*t+1;

b=-25*t^2+10*t;

c=25/2*t^2-5/2*t;

d=250*t^3-375*t^2+180*t-27;

e=-250*t^3+375*t^2-180*t+28;

f=25*t^3-40*t^2+21*t-18/5;

g=25*t^3-35*t^2+16*t-12/5;

h=25/2*t^2-45/2*t+10*t;

j=-25/2*t^2+40*t-15;

k=25/2t^2-35/2*t+6;

a´=25/2*t^2-15/2*t+1;

b´=-25*t^2+10*t;

c´=25/2*t^2-5/2*t;

d´=250*t^3-375*t^2+180*t-27;

e´=-250*t^3+375*t^2-180*t+28;

f´=25*t^3-40*t^2+21*t-18/5;

g´=25*t^3-35*t^2+16*t-12/5;

h´=25/2*t^2-45/2*t+10*t;

j´=-25/2*t^2+40*t-15;

k´=25/2t^2-35/2*t+6;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=0;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=1;
y01=0;
z01=1;

coordenadas de P02
x02=2;
y02=0;
z02=3;

coordenadas de P03
x03=4;
y03=0;
z03=1;

coordenadas de P04
x04=5;
y04=0;
z04=4;

coordenadas de P05
x05=7;
y05=0;
z05=2;

coordenadas de P10
x10=0;
y10=1;
z10=0;

coordenadas de P11
x11=1;
y11=1;
z11=1;

coordenadas de P12
x12=2;
y12=1;
z12=3;

coordenadas de P13
x13=4;
y13=1;

z13=1;

coordenadas de P14
x14=5;
y14=1;
z14=4;

coordenadas de P15
x15=7;
y15=1;
z15=2;

coordenadas de P20
x20=0;
y20=2;
z20=0;

coordenadas de P21
x21=1;
y21=2;
z21=1;

coordenadas de P22
x22=2;
y22=2;
z22=3;

coordenadas de P23
x23=4;
y23=2;
z23=1;

coordenadas de P24
x24=5;
y24=2;
z24=4;

coordenadas de P25
x25=7;
y25=2;
z25=2;

coordenadas de P30
x30=0;
y30=3;
z30=0;

coordenadas de P31
x31=1;
y31=3;

z31=1;

coordenadas de P32
x32=2;
y32=3;
z32=2;

coordenadas de P33
x33=4;
y33=3;
z33=1;

coordenadas de P34
x34=5;
y34=3;
z34=4;

coordenadas de P35
x35=7;
y35=3;
z35=2;

coordenadas de P40
x40=0;
y40=4;
z40=0;

coordenadas de P41
x41=1;
y41=4;
z41=1;

coordenadas de P42
x42=2;
y42=4;
z42=3;

coordenadas de P43
x43=4;
y43=4;
z43=1;

coordenadas de P44
x44=5;
y44=4;
z44=4;

coordenadas de P45
x45=7;
y45=4;

z45=2;

coordenadas de P50
x50=0;
y50=5;
z50=0;

coordenadas de P51
x51=1;
y51=5;
z51=1;

coordenadas de P52
x52=2;
y52=5;
z52=3;

coordenadas de P53
x53=4;
y53=5;
z53=1;

coordenadas de P54
x54=5;
y54=5;
z54=4;

coordenadas de P55
x55=7;
y55=5;
z55=2;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x1=a´*a*x00+b´*a*x01+c´*a*x02+
   a´*b*x10+b´*b*x11+c´*b*x12+
   a´*c*x20+b´*c*x21+c´*c*x22;
x1=simplify[x1]
```

5u

```
y1=a´*a*y00+b´*a*y01+c´*a*y02+
   a´*b*y10+b´*b*y11+c´*b*y12+
   a´*c*y20+b´*c*y21+c´*c*y22;
y1=simplify[y1]
```

5t

```
z1=a´*a*z00+b´*a*z01+c´*a*z02+
```

```
    a´*b*z10+b´*b*z11+c´*b*z12+
    a´*c*z20+b´*c*z21+c´*c*z22;
z1=simplify[z1]
```

5u(1+5u)/2

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T20

```
xt20=Limit[D[Limit[x1,u→ 0],t],t→ 2/5];
yt20=Limit[D[Limit[y1,u→ 0],t],t→ 2/5];
zt20=Limit[D[Limit[z1,u→ 0],t],t→ 2/5];
```

componentes de T21

```
xt21=Limit[D[Limit[x1,u→ 1/5],t],t→ 2/5];
yt21=Limit[D[Limit[y1,u→ 1/5],t],t→ 2/5];
zt21=Limit[D[Limit[z1,u→ 1/5],t],t→ 2/5];
```

componentes de T22

```
xt22=Limit[D[Limit[x1,u→ 2/5],t],t→ 2/5];
yt22=Limit[D[Limit[y1,u→ 2/5],t],t→ 2/5];
zt22=Limit[D[Limit[z1,u→ 2/5],t],t→ 2/5];
```

componentes de T12

```
xt12=Limit[D[Limit[x1,u→ 2/5],t],t→ 1/5];
yt12=Limit[D[Limit[y1,u→ 2/5],t],t→ 1/5];
zt12=Limit[D[Limit[z1,u→ 2/5],t],t→ 1/5];
```

componentes de T02

```
xt02=Limit[D[Limit[x1,u→ 2/5],t],t→ 0];
yt02=Limit[D[Limit[y1,u→ 2/5],t],t→ 0];
zt02=Limit[D[Limit[z1,u→ 2/5],t],t→ 0];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U20

```
xu20=Limit[D[Limit[x1,t→ 2/5],u],u→ 0];
yu20=Limit[D[Limit[y1,t→ 2/5],u],u→ 0];
zu20=Limit[D[Limit[z1,t→ 2/5],u],u→ 0];
```

componentes de U21

```
xu21=Limit[D[Limit[x1,t→ 2/5],u],u→ 1/5];
yu21=Limit[D[Limit[y1,t→ 2/5],u],u→ 1/5];
zu21=Limit[D[Limit[z1,t→ 2/5],u],u→ 1/5];
```

componentes de U22

```
xu22=Limit[D[Limit[x1,t→ 2/5],u],u→ 2/5];
```

```
yu22=Limit[D[Limit[y1,t→ 2/5],u],u→ 2/5];
zu22=Limit[D[Limit[z1,t→ 2/5],u],u→ 2/5];
```

componentes de U12

```
xu12=Limit[D[Limit[x1,t→ 1/5],u],u→ 2/5];
yu12=Limit[D[Limit[y1,t→ 1/5],u],u→ 2/5];
zu12=Limit[D[Limit[z1,t→ 1/5],u],u→ 2/5];
```

componentes de U02

```
xu02=Limit[D[Limit[x1,t→ 0],u],u→ 2/5];
yu02=Limit[D[Limit[y1,t→ 0],u],u→ 2/5];
zu02=Limit[D[Limit[z1,t→ 0],u],u→ 2/5];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E20

```
xe20= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 0];
ye20= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 0];
ze20= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 0];
```

componentes de E21

```
xe21= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 1/5];
ye21= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 1/5];
ze21= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 1/5];
```

componentes de E22

```
xe22= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 2/5];
ye22= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 2/5];
ze22= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 2/5];
```

componentes de E12

```
xe12= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 2/5];
ye12= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 2/5];
ze12= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 2/5,u→ 2/5];
```

componentes de E02

```
xe02= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 0,u→ 2/5];
ye02= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 0,u→ 2/5];
ze02= Limit[Limit[D[x1,t],u],t→ 0,u→ 2/5];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x2=a´*h*x30+b´*h*x31+c´*h*x32+
   a´*j*x40+b´*j*x41+c´*j*x42+
   a´*k*x50+b´*k*x51+c´*k*x52;
x2=simplify[x2]
```

5u

```
y2=a´*h*y30+b´*h*y31+c´*h*y32+
    a´*j*y40+b´*j*y41+c´*j*y42+
    a´*k*y50+b´*k*y51+c´*k*y52;
y2=simplify[y2]
```

5t

```
z2=a´*h*z30+b´*h*z31+c´*h*z32+
    a´*j*z40+b´*j*z41+c´*j*z42+
    a´*k*z50+b´*k*z51+c´*k*z52;
z2=simplify[z2]
```

5u(1+5u)/2

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T50

```
xt50=Limit[D[Limit[x2,u→ 0],t],t→ 1];
yt50=Limit[D[Limit[y2,u→ 0],t],t→ 1];
zt50=Limit[D[Limit[z2,u→ 0],t],t→ 1];
```

componentes de T51

```
xt51=Limit[D[Limit[x2,u→ 1/5],t],t→ 1];
yt51=Limit[D[Limit[y2,u→ 1/5],t],t→ 1];
zt51=Limit[D[Limit[z2,u→ 1/5],t],t→ 1];
```

componentes de T52

```
xt52=Limit[D[Limit[x2,u→ 2/5],t],t→ 1];
yt52=Limit[D[Limit[y2,u→ 2/5],t],t→ 1];
zt52=Limit[D[Limit[z2,u→ 2/5],t],t→ 1];
```

componentes de T42

```
xt42=Limit[D[Limit[x2,u→ 2/5],t],t→ 4/5];
yt42=Limit[D[Limit[y2,u→ 2/5],t],t→ 4/5];
zt42=Limit[D[Limit[z2,u→ 2/5],t],t→ 4/5];
```

componentes de T32

```
xt32=Limit[D[Limit[x2,u→ 2/5],t],t→ 3/5];
yt32=Limit[D[Limit[y2,u→ 2/5],t],t→ 3/5];
zt32=Limit[D[Limit[z2,u→ 2/5],t],t→ 3/5];
```

componentes de T31

```
xt31=Limit[D[Limit[x2,u→ 1/5],t],t→ 3/5];
yt31=Limit[D[Limit[y2,u→ 1/5],t],t→ 3/5];
zt31=Limit[D[Limit[z2,u→ 1/5],t],t→ 3/5];
```

componentes de T30

```
xt30=Limit[D[Limit[x2,u→ 0],t],t→ 3/5];
yt30=Limit[D[Limit[y2,u→ 0],t],t→ 3/5];
zt30=Limit[D[Limit[z2,u→ 0],t],t→ 3/5];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U50

```
xu50=Limit[D[Limit[x2,t→ 1],u],u→ 0];
yu50=Limit[D[Limit[y2,t→ 1],u],u→ 0];
zu50=Limit[D[Limit[z2,t→ 1],u],u→ 0];
```

componentes de U51

```
xu51=Limit[D[Limit[x2,t→ 1],u],u→ 1/5];
yu51=Limit[D[Limit[y2,t→ 1],u],u→ 1/5];
zu51=Limit[D[Limit[z2,t→ 1],u],u→ 1/5];
```

componentes de U52

```
xu52=Limit[D[Limit[x2,t→ 1],u],u→ 2/5];
yu52=Limit[D[Limit[y2,t→ 1],u],u→ 2/5];
zu52=Limit[D[Limit[z2,t→ 1],u],u→ 2/5];
```

componentes de U42

```
xu42=Limit[D[Limit[x2,t→ 4/5],u],u→ 2/5];
yu42=Limit[D[Limit[y2,t→ 4/5],u],u→ 2/5];
zu42=Limit[D[Limit[z2,t→ 4/5],u],u→ 2/5];
```

componentes de U32

```
xu32=Limit[D[Limit[x2,t→ 3/5],u],u→ 2/5];
yu32=Limit[D[Limit[y2,t→ 3/5],u],u→ 2/5];
zu32=Limit[D[Limit[z2,t→ 3/5],u],u→ 2/5];
```

componentes de U31

```
xu31=Limit[D[Limit[x2,t→ 3/5],u],u→ 1/5];
yu31=Limit[D[Limit[y2,t→ 3/5],u],u→ 1/5];
zu31=Limit[D[Limit[z2,t→ 3/5],u],u→ 1/5];
```

componentes de U30

```
xu30=Limit[D[Limit[x2,t→ 3/5],u],u→ 0];
yu30=Limit[D[Limit[y2,t→ 3/5],u],u→ 0];
zu30=Limit[D[Limit[z2,t→ 3/5],u],u→ 0];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E50

```
xe50= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 0];
ye50= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 0];
ze50= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 0];
```

componentes de E51

```
xe51= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 1/5];
ye51= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 1/5];
ze51= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 1/5];
```

componentes de E52

```
xe52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 2/5];
ye52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 2/5];
ze52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 2/5];
```

componentes de E42

```
xe42= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 4/5,u→ 2/5];
ye42= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 4/5,u→ 2/5];
ze42= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 4/5,u→ 2/5];
```

componentes de E32

```
xe32= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 3/5,u→ 2/5];
ye32= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 3/5,u→ 2/5];
ze32= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 3/5,u→ 2/5];
```

componentes de E31

```
xe31= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 3/5,u→ 1/5];
ye31= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 3/5,u→ 1/5];
ze31= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 3/5,u→ 1/5];
```

componentes de E30

```
xe30= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 3/5,u→ 0];
ye30= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 3/5,u→ 0];
ze30= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 3/5,u→ 0];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x3=h´*a*x03+j´*a*x04+k´*a*x05+
   h´*b*x13+j´*b*x14+k´*b*x15+
   h´*c*x23+j´*c*x24+k´*c*x25;
x3=simplify[x3]
```

$(14\text{-}25u+25u^2)/2$

```
y3=h´*a*y03+j´*a*y04+k´*a*y05+
   h´*b*y13+j´*b*y14+k´*b*y15+
   h´*c*y23+j´*c*y24+k´*c*y25;
y3=simplify[y3]
```

5t

```
z3=h´*a*z03+j´*a*z04+k´*a*z05+
```

```
    h´*b*z13+j´*b*z14+k´*b*z15+
    h´*c*z23+j´*c*z24+k´*c*z25;
z3=simplify[z3]
```

$(-76+205u-125u^2)/2$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T23

```
xt23=Limit[D[Limit[x3,u→ 3/5],t],t→ 2/5];
yt23=Limit[D[Limit[y3,u→ 3/5],t],t→ 2/5];
zt23=Limit[D[Limit[z3,u→ 3/5],t],t→ 2/5];
```

componentes de T24

```
xt24=Limit[D[Limit[x3,u→ 4/5],t],t→ 2/5];
yt24=Limit[D[Limit[y3,u→ 4/5],t],t→ 2/5];
zt24=Limit[D[Limit[z3,u→ 4/5],t],t→ 2/5];
```

componentes de T25

```
xt25=Limit[D[Limit[x3,u→ 1],t],t→ 2/5];
yt25=Limit[D[Limit[y3,u→ 1],t],t→ 2/5];
zt25=Limit[D[Limit[z3,u→ 1],t],t→ 2/5];
```

componentes de T03

```
xt03=Limit[D[Limit[x3,u→ 3/5],t],t→ 0];
yt03=Limit[D[Limit[y3,u→ 35],t],t→ 0];
zt03=Limit[D[Limit[z3,u→ 3/5],t],t→ 0];
```

componentes de T13

```
xt13=Limit[D[Limit[x3,u→ 3/5],t],t→ 1/5];
yt13=Limit[D[Limit[y3,u→ 3/5],t],t→ 1/5];
zt13=Limit[D[Limit[z3,u→ 3/5],t],t→ 1/5];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U23

```
xu23=Limit[D[Limit[x3,t→ 2/5],u],u→ 3/5];
yu23=Limit[D[Limit[y3,t→ 2/5],u],u→ 3/5];
zu23=Limit[D[Limit[z3,t→ 2/5],u],u→ 3/5];
```

componentes de U24

```
xu24=Limit[D[Limit[x3,t→ 2/5],u],u→ 4/5];
yu24=Limit[D[Limit[y3,t→ 2/5],u],u→ 4/5];
zu24=Limit[D[Limit[z3,t→ 2/5],u],u→ 4/5];
```

componentes de U25

```
xu25=Limit[D[Limit[x3,t→ 2/5],u],u→ 1];
yu25=Limit[D[Limit[y3,t→ 2/5],u],u→ 1];
```

zu25=Limit[D[Limit[z3,t→ 2/5],u],u→ 1];

componentes de U03
xu03=Limit[D[Limit[x3,t→ 0],u],u→ 3/5];
yu03=Limit[D[Limit[y3,t→ 0],u],u→ 3/5];
zu03=Limit[D[Limit[z3,t→ 0],u],u→ 3/5];

componentes de U13
xu13=Limit[D[Limit[x3,t→ 1/5],u],u→ 3/5];
yu13=Limit[D[Limit[y3,t→ 1/5],u],u→ 3/5];
zu13=Limit[D[Limit[z3,t→ 1/5],u],u→ 3/5];

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E23
xe23= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 2/5],u→ 3/5];
ye23= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 2/5],u→ 3/5];
ze23= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 2/5],u→ 3/5];

componentes de E24
xe24= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 2/5],u→ 4/5];
ye24= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 2/5],u→ 4/5];
ze24= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 2/5],u→ 4/5];

componentes de E25
xe25= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 2/5],u→ 1];
ye25= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 2/5],u→ 1];
ze25= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 2/5],u→ 1];

componentes de E03
xe03= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 0],u→ 3/5];
ye03= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 0],u→ 3/5];
ze03= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 0],u→ 3/5];

componentes de E13
xe13= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 1/5],u→ 3/5];
ye13= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 1/5],u→ 3/5];
ze13= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 1/5],u→ 3/5];

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x4=h´*h*x33+j´*h*x34+k´*h*x35+
h´*j*x43+j´*j*x44+k´*j*x45+
h´*k*x53+j´*k*x54+k´*k*x55;
x4=simplify[x4]

$(14-25u+25u^2)/2$

```
y4=h´*h*y33+j´*h*y34+k´*h*y35+
    h´*j*y43+j´*j*y44+k´*j*y45+
    h´*k*y53+j´*k*y54+k´*k*y55;
y4=simplify[y4]
```

5t

```
z4=h´*h*z33+j´*h*z34+k´*h*hz35+
    h´*j*z43+j´*j*z44+k´*j*z45+
    h´*k*z53+j´*k*z54+k´*k*z55;
z4=simplify[z4]
```

$(-76+205u-125u^2)/2$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T53

```
xt53=Limit[D[Limit[x4,u→ 3/5],t],t→ 1];
yt53=Limit[D[Limit[y4,u→ 3/5],t],t→ 1];
zt53=Limit[D[Limit[z4,u→ 3/5],t],t→ 1];
```

componentes de T43

```
xt43=Limit[D[Limit[x4,u→ 3/5],t],t→ 4/5];
yt43=Limit[D[Limit[y4,u→ 3/5],t],t→ 4/5];
zt43=Limit[D[Limit[z4,u→ 3/5],t],t→ 4/5];
```

componentes de T33

```
xt33=Limit[D[Limit[x4,u→ 3/5],t],t→ 3/5];
yt33=Limit[D[Limit[y4,u→ 3/5],t],t→ 3/5];
zt33=Limit[D[Limit[z4,u→ 3/5],t],t→ 3/5];
```

componentes de T34

```
xt34=Limit[D[Limit[x4,u→ 4/5],t],t→ 3/5];
yt34=Limit[D[Limit[y4,u→ 4/5],t],t→ 3/5];
zt34=Limit[D[Limit[z4,u→ 4/5],t],t→ 3/5];
```

componentes de T35

```
xt35=Limit[D[Limit[x4,u→ 1],t],t→ 3/5];
yt35=Limit[D[Limit[y4,u→ 1],t],t→ 3/5];
zt35=Limit[D[Limit[z4,u→ 1],t],t→ 3/5];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U53

```
xu53=Limit[D[Limit[x4,t→ 1],u],u→ 3/5];
yu53=Limit[D[Limit[y4,t→ 1],u],u→ 3/5];
zu53=Limit[D[Limit[z4,t→ 1],u],u→ 3/5];
```

componentes de U43
```
xu43=Limit[D[Limit[x4,t→ 4/5],u],u→ 3/5];
yu43=Limit[D[Limit[y4,t→ 4/5],u],u→ 3/5];
zu43=Limit[D[Limit[z4,t→ 4/5],u],u→ 3/5];
```

componentes de U33
```
xu33=Limit[D[Limit[x4,t→ 3/5],u],u→ 3/5];
yu33=Limit[D[Limit[y4,t→ 3/5],u],u→ 3/5];
zu33=Limit[D[Limit[z4,t→ 3/5],u],u→ 3/5];
```

componentes de U34
```
xu34=Limit[D[Limit[x4,t→ 3/5],u],u→ 4/5];
yu34=Limit[D[Limit[y4,t→ 3/5],u],u→ 4/5];
zu34=Limit[D[Limit[z4,t→ 3/5],u],u→ 4/5];
```

componentes de U35
```
xu35=Limit[D[Limit[x4,t→ 3/5],u],u→ 1];
yu35=Limit[D[Limit[y4,t→ 3/5],u],u→ 1];
zu35=Limit[D[Limit[z4,t→ 3/5],u],u→ 1];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E53
```
xe53= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→ 1],u→ 3/5];
ye53= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→ 1],u→ 3/5];
ze53= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→ 1],u→ 3/5];
```

componentes de E43
```
xe43= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→ 4/5],u→ 3/5];
ye43= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→ 4/5],u→ 3/5];
ze434= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→ 4/5],u→ 3/5];
```

componentes de E33
```
xe33= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→ 3/5],u→ 3/5];
ye33= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→ 3/5],u→ 3/5];
ze33= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→ 3/5],u→ 3/5];
```

componentes de E34
```
xe34= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→ 3/5],u→ 4/5];
ye34= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→ 3/5],u→ 4/5];
ze34= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→ 3/5],u→ 4/5];
```

componentes de E35
```
xe35= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→ 3/5],u→ 1];
ye35= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→ 3/5],u→ 1];
ze35= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→ 3/5],u→ 1];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x5=d´*a*x02+e´*a*x03+f´*a*xu02+g´*a*xu03+
    d´*b*x12+e´*b*x13+f´*b*xu12+ g´*b*xu13+
    d´*c*x22+e´*c*x23+f´*c*xu22+g´*c*xu23;
x5=simplify[x5]
```

$(68-430u+925u^2-625u^3)/2$

```
y5=d´*a*y02+e´*a*y03+f´*a*yu02+g´*a*yu03+
    d´*b*y12+e´*b*y13+f´*b*yu12+ g´*b*yu13+
    d´*c*y22+e´*c*y23+f´*c*yu22+g´*c*yu23;
y5=simplify[y5]
```

5t

```
z5=d´*a*z02+e´*a*z03+f´*a*zu02+g´*a*zu03+
    d´*b*z12+e´*b*z13+f´*b*zu12+ g´*b*zu13+
    d´*c*z22+e´*c*z23+f´*c*zu22+g´*c*zu23;
z5=simplify[z5]
```

$(-328+2125u-4425u^2+3000u^3)/2$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x6=d´*d*x22+e´*d*x23+f´*d*xu22+g´*d*xu23+
    d´*e*x32+e´*e*x33+f´*e*xu32+ g´*e*xu33+
    d´*f*xt22+e´*f*xt23+f´*f*xe22+g´*f*xe23+
    d´*g*xt32+e´*g*xt33+f´*g*xe32+g´*g*xe33;
x6=simplify[x6]
```

$(68-430u+925u^2-625u^3)/2$

```
y6=d´*d*y22+e´*d*y23+f´*d*yu22+g´*d*yu23+
    d´*e*y32+e´*e*y33+f´*e*yu32+ g´*e*yu33+
    d´*f*yt22+e´*f*yt23+f´*f*ye22+g´*f*ye23+
    d´*g*yt32+e´*g*yt33+f´*g*ye32+g´*g*ye33;
y6=simplify[y6]
```

5t

```
z6=d´*d*z22+e´*d*z23+f´*d*zu22+g´*d*zu23+
    d´*e*z32+e´*e*z33+f´*e*zu32+ g´*e*zu33+
    d´*f*zt22+e´*f*zt23+f´*f*ze22+g´*f*ze23+
    d´*g*zt32+e´*g*zt33+f´*g*ze32+g´*g*ze33;
z6=simplify[z6]
```

$(-328+2125u-4425u^2+3000u^3)/2$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x7=a´*d*x20+b´*d*x21+c´*d*x22+
    a´*e*x30+b´*e*x31+c´*e*x32+
    a´*f*xt20+b´*f*xt21+c´*f*xt22+
    a´*g*xt30+b´*g*xt31+c´*g*xt32;
x7=simplify[x7]
```

5u

```
y7=a´*d*y20+b´*d*y21+c´*d*y22+
    a´*e*y30+b´*e*y31+c´*e*y32+
    a´*f*yt20+b´*f*yt21+c´*f*yt22+
    a´*g*yt30+b´*g*yt31+c´*g*yt32;
y7=simplify[y7]
```

5t

```
z7=a´*d*z20+b´*d*z21+c´*d*z22+
    a´*e*z30+b´*e*z31+c´*e*z32+
    a´*f*zt20+b´*f*zt21+c´*f*zt22+
    a´*g*zt30+b´*g*zt31+c´*g*zt32;
z7=simplify[z7]
```

5u(1+5u)/2

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x8=d´*h*x32+e´*h*x33+f´*h*xu32+g´*h*xu33+
    d´*j*x42+e´*j*x43+f´*j*xu42+ g´*j*xu43+
    d´*k*x52+e´*k*x53+f´*k*xu52+ g´*k*xu53;
x8=simplify[x8]
```

$(68-430u+925u^2-625u^3)/2$

```
y8=d´*h*y32+e´*h*y33+f´*h*yu32+g´*h*yu33+
    d´*j*y42+e´*j*y43+f´*j*yu42+ g´*j*yu43+
    d´*k*y52+e´*k*y53+f´*k*yu52+ g´*k*yu53;
y8=simplify[y8]
```

5t

```
z8=d´*h*z32+e´*h*z33+f´*h*zu32+g´*h*zu33+
    d´*j*z42+e´*j*z43+f´*j*zu42+ g´*j*zu43+
    d´*k*z52+e´*k*z53+f´*k*zu52+ g´*k*zu53;
z8=simplify[z8]
```

$(-328+2125u-4425u^2+3000u^3)/2$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x9=h´*d*x23+j´*d*x24+k´*d*xu25+
    h´*e*x33+j´*e*x34+k´*e*xu35+
    h´*f*xt23+j´*f*xt24+k´*f*xt25+
    h´*g*xt33+j´*g*xt34+k´*g*xt35;
x9=simplify[x9]
```

$(14-25u+25u^2)/2$

```
y9=h´*d*y23+j´*d*y24+k´*d*yu25+
    h´*e*y33+j´*e*y34+k´*e*yu35+
    h´*f*yt23+j´*f*yt24+k´*f*yt25+
    h´*g*yt33+j´*g*yt34+k´*g*yt35;
y9=simplify[y9]
```

5t

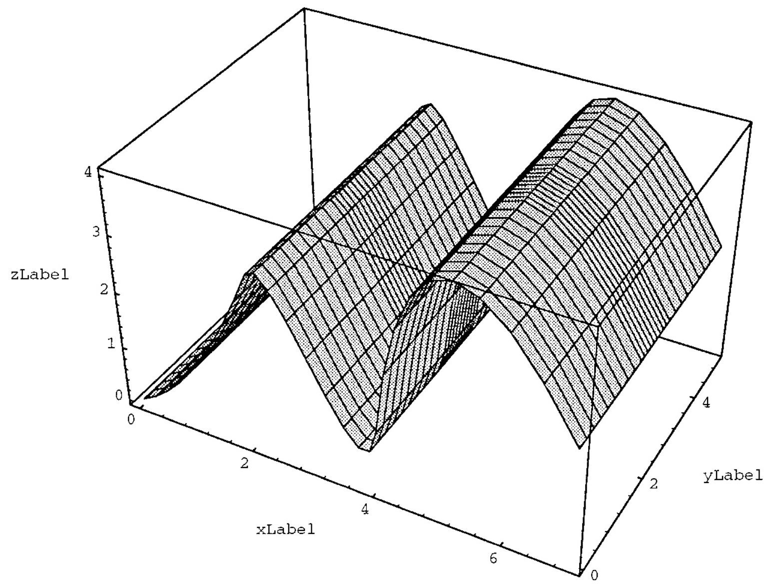
```
z9=h´*d*z23+j´*d*z24+k´*d*zu25+
    h´*e*z33+j´*e*z34+k´*e*zu35+
    h´*f*zt23+j´*f*zt24+k´*f*zt25+
    h´*g*zt33+j´*g*zt34+k´*g*zt35;
z9=simplify[z9]
```

$(-76+205u-125u^2)/2$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c1=ParametricPlot3D[{x1,y1,z1},{t,0,2/5},{u,0,2/5},PlotPoints→ 10,
    AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]

c2=ParametricPlot3D[{x2,y2,z2},{t,3/5,1},{u,0,2/5},PlotPoints→ 10,
    AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]

c3=ParametricPlot3D[{x3,y3,z3},{t,0,2/5},{u,3/5,1},PlotPoints→ 10,
    AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]

c4=ParametricPlot3D[{x4,y4,z4},{t,3/5,1},{u,3/5,1},PlotPoints→ 10,
    AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]


c5=ParametricPlot3D[{x7,y7,z7},{t,2/5,3/5},{u,0,2/5},PlotPoints→ 10,
    AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]

c6=ParametricPlot3D[{x6,y6,z6},{t,2/5,3/5},{u,2/5,3/5},PlotPoints→ 10,
    AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]


c7=ParametricPlot3D[{x9,y9,z9},{t,2/5,3/5},{u,3/5,1},PlotPoints→ 10,
    AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]
```

```
c8=ParametricPlot3D[{x5,y5,z5},{t,0,2/5},{u,2/5,3/5},PlotPoints→ 10,
   AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]

c9=ParametricPlot3D[{x8,y8,z8},{t,3/5,1},{u,2/5,3/5},PlotPoints→ 10,
   AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]


Show[c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,DisplayFunction→ $DisplayFunction]
```



Ejemplo de superficie polinomial mixta que pasa por una red de 9x6 puntos usando polinomios de grado tres o menor: M-2

```
Off[General::spell]
Off[General::spell 1]
```

FUNCIONES PREVIAS

```
a0=25/2*t^2-15/2*t+1;

a1=-25*t^2+10*t;

a2=25/2*t^2-5/2*t;

a3=25/2*t^2-45/2*t+10;

a4=-25*t^2+40*t-15;

a5=25/2*t^2-35/2*t+6;

a9=250*t^3-375*t^2+180*t-27;

a10=-250*t^3+375*t^2-180*t+28;

a11=25*t^3-40*t^2+21*t-18/5;

a12=25t^3-35*t^2+16*t-12/5;


b0=32*u^2-12*u+1;

b1=-64*u^2+16*u;

b2=32*u^2-4*u;

b3=32*u^2-36*u+10;

b4=-64*u^2+64*u-15

b5=32*u^2-28*u+6;

b6=32*u^2-60*u+28;

b7=-64*u^2+112*u-48;

b8=32*u^2-52*u+21;

b9=1024*u^3-960*u^2+28*u-27;

b10=-1024*u^3+960*u^2-28*u+28;
```

b11=64*u^3-64*u^2+21*u-9/4;

b12=64*u^3-56*u^2+16*u-3/2;

b13=1024*u^3-2112*u^2+1440*u-324;

b14=-1024*u^3+2112*u^2-1440*u+325;

b15=64*u^3-136*u^2+96*u-45/2;

b16=64*u^3-128*u^2+85*u-75/4;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=0;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=1;
y01=0;
z01=1;

coordenadas de P02
x02=2;
y02=0;
z02=2;

coordenadas de P03
x03=3;
y03=0;
z03=3;

coordenadas de P04
x04=4;
y04=0;
z04=4;

coordenadas de P05
x05=5;
y05=0;
z05=3;

coordenadas de P06
x06=6;
y06=0;
z06=2;

coordenadas de P07
x07=7;
y07=0;
z07=1;

coordenadas de P08
x08=8;
y08=0;
z08=0;

coordenadas de P10
x10=0;
y10=1;
z10=1;

coordenadas de P11
x11=1;
y11=1;
z11=2;

coordenadas de P12
x12=2;
y12=1;
z12=3;

coordenadas de P13
x13=3;
y13=1;
z13=4;

coordenadas de P14
x14=4;
y14=1;
z14=5;

coordenadas de P15
x15=5;
y15=1;
z15=4;

coordenadas de P16
x16=6;
y16=1;
z16=3;

coordenadas de P17
x17=7;
y17=1;
z17=2;

coordenadas de P18
x18=8;
y18=1;
z18=1;

coordenadas de P20
x20=0;
y20=2;
z20=2;

coordenadas de P21
x21=1;
y21=2;
z21=3;

coordenadas de P22
x22=2;
y22=2;
z22=4;

coordenadas de P23
x23=3;
y23=2;
z23=5;

coordenadas de P24
x24=4;
y24=2;
z24=6;

coordenadas de P25
x25=5;
y25=2;
z25=5;

coordenadas de P26
x26=6;
y26=2;
z26=4;

coordenadas de P27
x27=7;
y27=2;
z27=3;

coordenadas de P28
x28=8;
y28=2;
z28=3;

coordenadas de P30
x30=0;
y30=3;
z30=2;

coordenadas de P31
x31=1;
y31=3;
z31=3;

coordenadas de P32
x32=2;
y32=3;
z32=4;

coordenadas de P33
x33=3;
y33=3;
z33=5;

coordenadas de P34
x34=4;
y34=3;
z34=6;

coordenadas de P35
x35=5;
y35=3;
z35=5;

coordenadas de P36
x36=6;
y36=3;
z36=4;

coordenadas de P37
x37=7;
y37=3;
z37=3;

coordenadas de P38
x38=8;
y38=3;
z38=2;

coordenadas de P40
x40=0;
y40=4;
z40=1;

coordenadas de P41
x41=1;
y41=4;
z41=2;

coordenadas de P42
x42=2;
y42=4;
z42=3;

coordenadas de P43
x43=3;
y43=4;
z43=4;

coordenadas de P44
x44=4;
y44=4;
z44=5;

coordenadas de P45
x45=5;
y45=4;
z45=4;

coordenadas de P46
x46=6;
y46=4;
z46=3;

coordenadas de P47
x47=7;
y47=4;
z47=2;

coordenadas de P48
x48=8;
y48=4;
z48=4;

coordenadas de P50
x50=0;
y50=5;
z50=0;

coordenadas de P51
x51=1;
y51=5;
z51=1;

coordenadas de P52
x52=2;
y52=5;
z52=2;

coordenadas de P53
x53=3;
y53=5;
z53=3;

coordenadas de P54
x54=4;
y54=5;
z54=4;

coordenadas de P55
x55=5;
y55=5;
z55=3;

coordenadas de P56
x56=6;
y56=5;
z56=2;

coordenadas de P57
x57=7;
y57=5;
z57=1;

coordenadas de P58
x58=8;
y58=5;
z58=0;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x=b0*a0*x00+b1*a0*x01+b2*a0*x02+
   b0*a1*x10+b1*a1*x11+b2*a1*x12+
   b0*a2*x20+b1*a2*x21+b2*a2*x22;
x=simplify[x]
```

8u

```
y=b0*a0*y00+b1*a0*y01+b2*a0*y02+
   b0*a1*y10+b1*a1*y11+b2*a1*y12+
   b0*a2*y20+b1*a2*y21+b2*a2*y22;
y=simplify[y]
```

5t

```
z=b0*a0*z00+b1*a0*z01+b2*a0*z02+
   b0*a1*z10+b1*a1*z11+b2*a1*z12+
   b0*a2*z20+b1*a2*z21+b2*a2*z22;
z=simplify[z]
```

5t+8u

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c1=ParametricPlot3D[{x,y,z},{t,0,2/5},{u,0,2/5},PlotPoints→ 5,
   AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]
```

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T20

```
xt20=Limit[D[Limit[x,u→ 0],t],t→ 2/5];
yt20=Limit[D[Limit[y,u→ 0],t],t→ 2/5];
zt20=Limit[D[Limit[z,u→ 0],t],t→ 2/5];
```

componentes de T21

```
xt21=Limit[D[Limit[x,u→ 1/8],t],t→ 2/5];
yt21=Limit[D[Limit[y,u→ 1/8],t],t→ 2/5];
zt21=Limit[D[Limit[z,u→ 1/8],t],t→ 2/5];
```

componentes de T22

```
xt22=Limit[D[Limit[x,u→ 2/8],t],t→ 2/5];
yt22=Limit[D[Limit[y,u→ 2/8],t],t→ 2/5];
zt22=Limit[D[Limit[z,u→ 2/8],t],t→ 2/5];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U20

```
xu20=Limit[D[Limit[x,t→ 2/5],u],u→ 0];
yu20=Limit[D[Limit[y,t→ 2/5],u],u→ 0];
zu20=Limit[D[Limit[z,t→ 2/5],u],u→ 0];
```

componentes de U21

```
xu21=Limit[D[Limit[x,t→ 2/5],u],u→ 1/8];
yu21=Limit[D[Limit[y,t→ 2/5],u],u→ 1/8];
zu21=Limit[D[Limit[z,t→ 2/5],u],u→ 1/8];
```

componentes de U22

```
xu22=Limit[D[Limit[x,t→ 2/5],u],u→ 2/8];
yu22=Limit[D[Limit[y,t→ 2/5],u],u→ 2/8];
zu22=Limit[D[Limit[z,t→ 2/5],u],u→ 2/8];
```

componentes de U12

```
xu12=Limit[D[Limit[x,t→ 1/5],u],u→ 2/8];
yu12=Limit[D[Limit[y,t→ 1/5],u],u→ 2/8];
zu12=Limit[D[Limit[z,t→ 1/5],u],u→ 2/8];
```

componentes de U02

```
xu02=Limit[D[Limit[x,t→ 0],u],u→ 2/8];
yu02=Limit[D[Limit[y,t→ 0],u],u→ 2/8];
zu02=Limit[D[Limit[z,t→ 0],u],u→ 2/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E20

```
xe20= Limit[Limit[D[D[x,t],u],t→ 2/5],u→ 0];
ye20= Limit[Limit[D[D[y,t],u],t→ 2/5],u→ 0];
ze20= Limit[Limit[D[D[z,t],u],t→ 2/5],u→ 0];
```

componentes de E21

```
xe21= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 2/5],u→ 1/8];
ye21= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 2/5],u→ 1/8];
ze21= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 2/5],u→ 1/8];
```

componentes de E22

```
xe22= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 2/5],u→ 2/8];
ye22= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 2/5],u→ 2/8];
ze22= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 2/5],u→ 2/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x2= b0*a3*x30+b1*a3*x31+b2*a3*x32+
    b0*a4*x40+b1*a4*x41+b2*a4*x42+
    b0*a5*x50+b1*a5*x51+b2*a5*x52;
x2=simplify[x2]
```

8u

```
y2= b0*a3*y30+b1*a3*y31+b2*a3*y32+
    b0*a4*y40+b1*a4*y41+b2*a4*y42+
    b0*a5*y50+b1*a5*y51+b2*a5*y52;
y2=simplify[y2]
```

5t

```
z2= b0*a3*z30+b1*a3*z31+b2*a3*z32+
    b0*a4*z40+b1*a4*z41+b2*a4*z42+
    b0*a5*z50+b1*a5*z51+b2*a5*z52;
```

z2=simplify[z2]

5-5t+8u

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c2=ParametricPlot3D[{x2,y2,z2},{t,3/5,1},{u,0,2/5},PlotPoints→ 5,
   AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]
```

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T30

```
xt30=Limit[D[Limit[x2,u→ 0],t],t→ 3/5];
yt30=Limit[D[Limit[y2,u→ 0],t],t→ 3/5];
zt30=Limit[D[Limit[z2,u→ 0],t],t→ 3/5];
```

componentes de T31

```
xt31=Limit[D[Limit[x2,u→ 1/8],t],t→ 3/5];
yt31=Limit[D[Limit[y2,u→ 1/8],t],t→ 3/5];
zt31=Limit[D[Limit[z2,u→ 1/8],t],t→ 3/5];
```

componentes de T32

```
xt32=Limit[D[Limit[x2,u→ 2/8],t],t→ 3/5];
yt32=Limit[D[Limit[y2,u→ 2/8],t],t→ 3/5];
zt32=Limit[D[Limit[z2,u→ 2/8],t],t→ 3/5];
```

componentes de T42

```
xt42=Limit[D[Limit[x2,u→ 2/8],t],t→ 4/5];
yt42=Limit[D[Limit[y2,u→ 2/8],t],t→ 4/5];
zt42=Limit[D[Limit[z2,u→ 2/8],t],t→ 4/5];
```

componentes de T52

```
xt52=Limit[D[Limit[x2,u→ 2/8],t],t→ 1];
yt52=Limit[D[Limit[y2,u→ 2/8],t],t→ 1];
zt52=Limit[D[Limit[z2,u→ 2/8],t],t→ 1];
```

componentes de T51

```
xt51=Limit[D[Limit[x2,u→ 1/8],t],t→ 1];
yt51=Limit[D[Limit[y2,u→ 1/8],t],t→ 1];
zt51=Limit[D[Limit[z2,u→ 1/8],t],t→ 1];
```

componentes de T50

```
xt50=Limit[D[Limit[x2,u→ 0],t],t→ 1];
yt50=Limit[D[Limit[y2,u→ 0],t],t→ 1];
zt50=Limit[D[Limit[z2,u→ 0],t],t→ 1];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U32

```
xu32=Limit[D[Limit[x2,t→ 3/5],u],u→ 2/8];
yu32=Limit[D[Limit[y2,t→ 3/5],u],u→ 2/8];
zu32=Limit[D[Limit[z2,t→ 3/5],u],u→ 2/8];
```

componentes de U42

```
xu42=Limit[D[Limit[x2,t→ 4/5],u],u→ 2/8];
yu42=Limit[D[Limit[y2,t→ 4/5],u],u→ 2/8];
zu42=Limit[D[Limit[z2,t→ 4/5],u],u→ 2/8];
```

componentes de U52

```
xu52=Limit[D[Limit[x2,t→ 1],u],u→ 2/8];
yu52=Limit[D[Limit[y2,t→ 1],u],u→ 2/8];
zu52=Limit[D[Limit[z2,t→ 1],u],u→ 2/8];
```

COMPONENTES DE LAS EIJ DE LA FRONTERA

componentes de E32

```
xe32= Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t→ 3/5],u→ 2/8];
ye32= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t→ 3/5],u→ 2/8];
ze32= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t→ 3/5],u→ 2/8];
```

componentes de E52

```
xe52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 1/8];
ye52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 1/8];
ze52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 1,u→ 1/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x3= b3*a0*x03+b4*a0*x04+b5*a0*x05+
    b3*a1*x13+b4*a1*x14+b5*a1*x15+
    b3*a2*x23+b4*a2*x24+b5*a2*x25;
x3=simplify[x3]

8u

y3= b0*a3*y30+b1*a3*y31+b2*a3*y32+
    b0*a4*y40+b1*a4*y41+b2*a4*y42+
    b0*a5*y50+b1*a5*y51+b2*a5*y52;
y3=simplify[y3]

5t

z3= b0*a3*z30+b1*a3*z31+b2*a3*z32+
    b0*a4*z40+b1*a4*z41+b2*a4*z42+
    b0*a5*z50+b1*a5*z51+b2*a5*z52;
```

```
z3=simplify[z3]
```

$-12+5t+64u-64u^2$

COMPONENTES DE LAS TIJ DE LA FRONTERA

componentes de T03

```
xt03=Limit[D[Limit[x3,u→ 3/8],t],t→ 0];
yt03=Limit[D[Limit[y3,u→ 3/8],t],t→ 0];
zt03=Limit[D[Limit[z3,u→ 3/8],t],t→ 0];
```

componentes de T13

```
xt13=Limit[D[Limit[x3,u→ 3/8],t],t→ 1/5];
yt13=Limit[D[Limit[y3,u→ 3/8],t],t→ 1/5];
zt13=Limit[D[Limit[z3,u→ 3/8],t],t→ 1/5];
```

componentes de T23

```
xt23=Limit[D[Limit[x3,u→ 3/8],t],t→ 2/5];
yt23=Limit[D[Limit[y3,u→ 3/8],t],t→ 2/5];
zt23=Limit[D[Limit[z3,u→ 3/8],t],t→ 2/5];
```

componentes de T24

```
xt24=Limit[D[Limit[x3,u→ 4/8],t],t→ 2/5];
yt24=Limit[D[Limit[y3,u→ 4/8],t],t→ 2/5];
zt24=Limit[D[Limit[z3,u→ 4/8],t],t→ 2/5];
```

componentes de T25

```
xt25=Limit[D[Limit[x3,u→ 5/8],t],t→ 2/5];
yt25=Limit[D[Limit[y3,u→ 5/8],t],t→ 2/5];
zt25=Limit[D[Limit[z3,u→ 5/8],t],t→ 2/5];
```

componentes de T15

```
xt15=Limit[D[Limit[x3,u→ 5/8],t],t→ 1/5];
yt15=Limit[D[Limit[y3,u→ 5/8],t],t→ 1/5];
zt15=Limit[D[Limit[z3,u→ 5/8],t],t→ 1/5];
```

componentes de T05

```
xt05=Limit[D[Limit[x3,u→ 5/8],t],t→ 0];
yt05=Limit[D[Limit[y3,u→ 5/8],t],t→ 0];
zt05=Limit[D[Limit[z3,u→ 5/8],t],t→ 0];
```

COMPONENTES DE LAS UIJ DELA FRONTERA

componentes de U03

```
xu03=Limit[D[Limit[x3,t→ 0],u],u→ 3/8];
yu03=Limit[D[Limit[y3,t→ 0],u],u→ 3/8];
zu03=Limit[D[Limit[z3,t→ 0],u],u→ 3/8];
```

componentes de U13

```
xu13=Limit[D[Limit[x3,t→ 1/5],u],u→ 3/8];
yu13=Limit[D[Limit[y3,t→ 1/5],u],u→ 3/8];
zu13=Limit[D[Limit[z3,t→ 1/5],u],u→ 3/8];
```

componentes de U23

```
xu23=Limit[D[Limit[x3,t→ 2/5],u],u→ 3/8];
yu23=Limit[D[Limit[y3,t→ 2/5],u],u→ 3/8];
zu23=Limit[D[Limit[z3,t→ 2/5],u],u→ 3/8];
```

componentes de U25

```
xu25=Limit[D[Limit[x3,t→ 2/5],u],u→ 5/8];
yu25=Limit[D[Limit[y3,t→ 2/5],u],u→ 5/8];
zu25=Limit[D[Limit[z3,t→ 2/5],u],u→ 5/8];
```

componentes de U15

```
xu15=Limit[D[Limit[x3,t→ 1/5],u],u→ 5/8];
yu15=Limit[D[Limit[y3,t→ 1/5],u],u→ 5/8];
zu15=Limit[D[Limit[z3,t→ 1/5],u],u→ 5/8];
```

componentes de U05

```
xu05=Limit[D[Limit[x3,t→ 0],u],u→ 5/8];
yu05=Limit[D[Limit[y3,t→ 0],u],u→ 5/8];
zu05=Limit[D[Limit[z3,t→ 0],u],u→ 5/8];
```

COMPONENTES DE LAS EIJ DE LA FRONTERA

componentes de E23

```
xe23= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 2/5],u→ 3/8];
ye23= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 2/5],u→ 3/8];
ze23= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 2/5],u→ 3/8];
```

componentes de E25

```
xe25= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 2/5],u→ 5/8];
ye25= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 2/5],u→ 5/8];
ze25= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 2/5],u→ 5/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x4= b3*a3*x33+b4*a3*x34+b5*a3*x35+
    b3*a4*x43+b4*a4*x44+b5*a4*x45+
    b3*a5*x53+b4*a5*x54+b5*a5*x55;
x4=simplify[x4]
```

8u

```
y4= b3*a3*y33+b4*a3*y34+b5*a3*y35+
    b3*a4*y43+b4*a4*y44+b5*a4*y45+
```

```
     b3*a5*y53+b4*a5*y54+b5*a5*y55;
y4=simplify[y4]
5t

z4= b3*a3*z33+b4*a3*z34+b5*a3*z35+
     b3*a4*z43+b4*a4*z44+b5*a4*z45+
     b3*a5*z53+b4*a5*z54+b5*a5*z55;
z4=simplify[z4]
```

$-7-5t+64u-64u^2$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c3=ParametricPlot3D[{x4,y4,z4},{t,3/5,1},{u,3/8,5/8},PlotPoints→ 5,
   AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]
```

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T33

```
xt33=Limit[D[Limit[x4,u→ 3/8],t],t→ 3/5];
yt33=Limit[D[Limit[y4,u→ 3/8],t],t→ 3/5];
zt33=Limit[D[Limit[z4,u→ 3/8],t],t→ 3/5];
```

componentes de T34

```
xt34=Limit[D[Limit[x4,u→ 4/8],t],t→ 3/5];
yt34=Limit[D[Limit[y4,u→ 4/8],t],t→ 3/5];
zt34=Limit[D[Limit[z4,u→ 4/8],t],t→ 3/5];
```

componentes de T35

```
xt35=Limit[D[Limit[x4,u→ 5/8],t],t→ 3/5];
yt35=Limit[D[Limit[y4,u→ 5/8],t],t→ 3/5];
zt35=Limit[D[Limit[z4,u→ 5/8],t],t→ 3/5];
```

componentes de T45

```
xt34=Limit[D[Limit[x4,u→ 5/8],t],t→ 4/5];
yt34=Limit[D[Limit[y4,u→ 5/8],t],t→ 4/5];
zt34=Limit[D[Limit[z4,u→ 5/8],t],t→ 4/5];
```

componentes de T55

```
xt55=Limit[D[Limit[x4,u→ 5/8],t],t→ 1];
yt55=Limit[D[Limit[y4,u→ 5/8],t],t→ 1];
zt55=Limit[D[Limit[z4,u→ 5/8],t],t→ 1];
```

componentes de T54

```
xt54=Limit[D[Limit[x4,u→ 4/8],t],t→ 1];
yt54=Limit[D[Limit[y4,u→ 4/8],t],t→ 1];
zt54=Limit[D[Limit[z4,u→ 4/8],t],t→ 1];
```

componentes de T53

xt53=Limit[D[Limit[x4,u→ 3/8],t],t→ 1];
yt53=Limit[D[Limit[y4,u→ 3/8],t],t→ 1];
zt53=Limit[D[Limit[z4,u→ 3/8],t],t→ 1];

componentes de T43
xt43=Limit[D[Limit[x4,u→ 3/8],t],t→ 4/5];
yt43=Limit[D[Limit[y4,u→ 3/8],t],t→ 4/5];
zt43=Limit[D[Limit[z4,u→ 3/8],t],t→ 4/5];

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U33
xu33=Limit[D[Limit[x4,t→ 3/5],u],u→ 3/8];
yu33=Limit[D[Limit[y4,t→ 3/5],u],u→ 3/8];
zu33=Limit[D[Limit[z4,t→ 3/5],u],u→ 3/8];

componentes de U35
xu35=Limit[D[Limit[x4,t→ 3/5],u],u→ 5/8];
yu35=Limit[D[Limit[y4,t→ 3/5],u],u→ 5/8];
zu35=Limit[D[Limit[z4,t→ 3/5],u],u→ 5/8];

componentes de U45
xu45=Limit[D[Limit[x4,t→ 4/5],u],u→ 5/8];
yu45=Limit[D[Limit[y4,t→ 4/5],u],u→ 5/8];
zu45=Limit[D[Limit[z4,t→ 4/5],u],u→ 5/8];

componentes de U55
xu55=Limit[D[Limit[x4,t→ 1],u],u→ 5/8];
yu55=Limit[D[Limit[y4,t→ 1],u],u→ 5/8];
zu55=Limit[D[Limit[z4,t→ 1],u],u→ 5/8];

componentes de U53
xu53=Limit[D[Limit[x4,t→ 1],u],u→ 3/8];
yu53=Limit[D[Limit[y4,t→ 1],u],u→ 3/8];
zu53=Limit[D[Limit[z4,t→ 1],u],u→ 3/8];

componentes de U43
xu43=Limit[D[Limit[x4,t→ 4/5],u],u→ 3/8];
yu43=Limit[D[Limit[y4,t→ 4/5],u],u→ 3/8];
zu43=Limit[D[Limit[z4,t→ 4/5],u],u→ 3/8];

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E33
xe33= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→ 3/5],u→ 3/8];
ye33= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→ 3/5],u→ 3/8];
ze33= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→ 3/5],u→ 3/8];

componentes de E35

```
xe35= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→ 3/5],u→ 5/8];
ye35= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→ 3/5],u→ 5/8];
ze35= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→ 3/5],u→ 5/8];
```

componentes de E55

```
xe55= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→ 1],u→ 5/8];
ye55= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→ 1],u→ 5/8];
ze55= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→ 1],u→ 5/8];
```

componentes de E53

```
xe53= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→ 1],u→ 3/8];
ye53= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→ 1],u→ 3/8];
ze53= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→ 1],u→ 3/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x5= b6*a0*x06+b7*a0*x07+b8*a0*x08+
    b6*a1*x16+b7*a1*x17+b8*a1*x18+
    b6*a2*x26+b7*a2*x27+b8*a2*x28;
x5=simplify[x5]

8u

y5= b6*a0*y06+b7*a0*y07+b8*a0*y08+
    b6*a1*y16+b7*a1*y17+b8*a1*y18+
    b6*a2*y26+b7*a2*y27+b8*a2*y28;
y5=simplify[y5]

5t

z5= b6*a0*z06+b7*a0*z07+b8*a0*z08+
    b6*a1*z16+b7*a1*z17+b8*a1*z18+
    b6*a2*z26+b7*a2*z27+b8*a2*z28;
z5=simplify[z5]

8+5t-8u
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c5=ParametricPlot3D[{x5,y5,z5},{t,0,2/5},{u,6/8,1},PlotPoints→ 5,
   AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]
```

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T06

```
xt06=Limit[D[Limit[x5,u→ 6/8],t],t→ 0];
yt06=Limit[D[Limit[y5,u→ 6/8],t],t→ 0];
zt06=Limit[D[Limit[z5,u→ 6/8],t],t→ 0];
```

componentes de T16

```
xt16=Limit[D[Limit[x5,u→ 6/8],t],t→ 1/5];
yt16=Limit[D[Limit[y5,u→ 6/8],t],t→ 1/5];
zt16=Limit[D[Limit[z5,u→ 6/8],t],t→ 1/5];
```

componentes de T26

```
xt26=Limit[D[Limit[x5,u→ 6/8],t],t→ 6/5];
yt26=Limit[D[Limit[y5,u→ 6/8],t],t→ 6/5];
zt26=Limit[D[Limit[z5,u→ 6/8],t],t→ 6/5];
```

componentes de T27

```
xt27=Limit[D[Limit[x5,u→ 7/8],t],t→ 2/5];
yt27=Limit[D[Limit[y5,u→ 7/8],t],t→ 2/5];
zt27=Limit[D[Limit[z5,u→ 7/8],t],t→ 2/5];
```

componentes de T28

```
xt28=Limit[D[Limit[x5,u→ 1],t],t→ 2/5];
yt28=Limit[D[Limit[y5,u→ 1],t],t→ 2/5];
zt28=Limit[D[Limit[z5,u→ 1],t],t→ 2/5];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de U06

```
xu06=Limit[D[Limit[x5,t→ 0],u],u→ 6/8];
yu06=Limit[D[Limit[y5,t→ 0],u],u→ 6/8];
zu06=Limit[D[Limit[z5,t→ 0],u],u→ 6/8];
```

componentes de U16

```
xu16=Limit[D[Limit[x5,t→ 1/5],u],u→ 6/8];
yu16=Limit[D[Limit[y5,t→ 1/5],u],u→ 6/8];
zu16=Limit[D[Limit[z5,t→ 1/5],u],u→ 6/8];
```

componentes de U26

```
xu26=Limit[D[Limit[x5,t→ 2/5],u],u→ 6/8];
yu26=Limit[D[Limit[y5,t→ 2/5],u],u→ 6/8];
zu26=Limit[D[Limit[z5,t→ 2/5],u],u→ 6/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E26

```
xe26= Limit[Limit[D[D[x5,t],u],t→ 2/5],u→ 6/8];
ye26= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t→ 2/5],u→ 6/8];
ze26= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t→ 2/5],u→ 6/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x6= b6*a3*x36+b7*a3*x37+b8*a3*x38+
    b6*a4*x46+b7*a4*x47+b8*a4*x48+
    b6*a5*x56+b7*a5*x57+b8*a5*x58;
x6=simplify[x6]

8u

y6= b6*a3*y36+b7*a3*y37+b8*a3*y38+
    b6*a4*y46+b7*a4*y47+b8*a4*y48+
    b6*a5*y56+b7*a5*y57+b8*a5*y58;
y6=simplify[y6]

5t

z6= b6*a3*z36+b7*a3*z37+b8*a3*z38+
    b6*a4*z46+b7*a4*z47+b8*a4*z48+
    b6*a5*z56+b7*a5*z57+b8*a5*z58;
z6=simplify[z6]

13-5t-8u
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c6=ParametricPlot3D[{x6,y6,z6},{t,3/5,1},{u,6/8,1},PlotPoints→ 5,
   AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]
```

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T38

```
xt38=Limit[D[Limit[x6,u→ 1],t],t→ 3/5];
yt38=Limit[D[Limit[y6,u→ 1],t],t→ 3/5];
zt38=Limit[D[Limit[z6,u→ 1],t],t→ 3/5];
```

componentes de T37

```
xt37=Limit[D[Limit[x6,u→ 7/8],t],t→ 3/5];
yt37=Limit[D[Limit[y6,u→ 7/8],t],t→ 3/5];
zt37=Limit[D[Limit[z6,u→ 7/8],t],t→ 3/5];
```

componentes de T36

```
xt36=Limit[D[Limit[x6,u→ 6/8],t],t→ 3/5];
yt36=Limit[D[Limit[y6,u→ 6/8],t],t→ 3/5];
zt36=Limit[D[Limit[z6,u→ 6/8],t],t→ 3/5];
```

componentes de T46

```
xt46=Limit[D[Limit[x6,u→ 6/8],t],t→ 4/5];
yt46=Limit[D[Limit[y6,u→ 6/8],t],t→ 4/5];
zt46=Limit[D[Limit[z6,u→ 6/8],t],t→ 4/5];
```

componentes de T56

```
xt56=Limit[D[Limit[x6,u→ 6/8],t],t→ 1];
yt56=Limit[D[Limit[y6,u→ 6/8],t],t→ 1];
zt56=Limit[D[Limit[z6,u→ 6/8],t],t→ 1];
```

componentes de T57

```
xt57=Limit[D[Limit[x6,u→ 7/8],t],t→ 1];
yt57=Limit[D[Limit[y6,u→ 7/8],t],t→ 1];
zt57=Limit[D[Limit[z6,u→ 7/8],t],t→ 1];
```

componentes de T58

```
xt58=Limit[D[Limit[x6,u→ 1],t],t→ 1];
yt58=Limit[D[Limit[y6,u→ 1],t],t→ 1];
zt58=Limit[D[Limit[z6,u→ 1],t],t→ 1];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de U36

```
xu36=Limit[D[Limit[x6,t→ 3/5],u],u→ 6/8];
yu36=Limit[D[Limit[y6,t→ 3/5],u],u→ 6/8];
zu36=Limit[D[Limit[z6,t→ 3/5],u],u→ 6/8];
```

componentes de U46

```
xu46=Limit[D[Limit[x6,t→ 4/5],u],u→ 6/8];
yu46=Limit[D[Limit[y6,t→ 4/5],u],u→ 6/8];
zu46=Limit[D[Limit[z6,t→ 4/5],u],u→ 6/8];
```

componentes de U56

```
xu56=Limit[D[Limit[x6,t→ 1],u],u→ 6/8];
yu56=Limit[D[Limit[y6,t→ 1],u],u→ 6/8];
zu56=Limit[D[Limit[z6,t→ 1],u],u→ 6/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E36

```
xe36= Limit[Limit[D[D[x6,t],u],t→ 3/5],u→ 6/8];
ye36= Limit[Limit[D[D[y6,t],u],t→ 3/5],u→ 6/8];
ze36= Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t→ 3/5],u→ 6/8];
```

componentes de E56

```
xe56= Limit[Limit[D[D[x6,t],u],t→ 1],u→ 6/8];
ye56= Limit[Limit[D[D[y6,t],u],t→ 1],u→ 6/8];
ze56= Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t→ 1],u→ 6/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x7= b0*a9*x20+b1*a9*x21+b2*a9*x22+
```

```
      b0*a10*x30+b1*a10*x31+b2*a10*x32+
      b0*a11*xt20+b1*a11*xt21+b2*a11*xt22+
      b0*a12*xt30+b1*a12*xt31+b2*a12*xt32;
x7=simplify[x7]
```

8u

```
y7= b0*a9*y20+b1*a9*y21+b2*a9*y22+
      b0*a10*y30+b1*a10*y31+b2*a10*y32+
      b0*a11*yt20+b1*a11*yt21+b2*a11*yt22+
      b0*a12*yt30+b1*a12*yt31+b2*a12*yt32;
y7=simplify[y7]
```

5t

```
z7= b0*a9*z20+b1*a9*z21+b2*a9*z22+
      b0*a10*z30+b1*a10*z31+b2*a10*z32+
      b0*a11*zt20+b1*a11*zt21+b2*a11*zt22+
      b0*a12*zt30+b1*a12*zt31+b2*a12*zt32;
z7=simplify[z7]
```

$-4+25t-25t^2+8u$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c7=ParametricPlot3D[{x7,y7,z7},{t,2/5,3/5},{u,0,2/8},PlotPoints→ 5,
   AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x8= b9*a0*x02+b10*a0*x03+b11*a0*xu02+ b12*a0*xu03+
      b9*a1*x12+b10*a1*x13+b11*a1*xu12+ b12*a1*xu13+
      b9*a2*x22+b10*a2*x23+b11*a2*xu22+ b12*a2*xu23;
x8=simplify[x8]
```

8u

```
y8= b9*a0*y02+b10*a0*y03+b11*a0*yu02+ b12*a0*yu03+
      b9*a1*y12+b10*a1*y13+b11*a1*yu12+ b12*a1*yu13+
      b9*a2*y22+b10*a2*y23+b11*a2*yu22+ b12*a2*yu23;
y8=simplify[y8]
```

5t

```
z8= b9*a0*z02+b10*a0*z03+b11*a0*zu02+ b12*a0*zu03+
      b9*a1*z12+b10*a1*z13+b11*a1*zu12+ b12*a1*zu13+
      b9*a2*z22+b10*a2*z23+b11*a2*zu22+ b12*a2*zu23;
z8=simplify[z8]
```

$-12+5t+136u-448u^2+512u^3$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c8=ParametricPlot3D[{x8,y8,z8},{t,0,2/5},{u,2/8,3/8},PlotPoints→ 5,
   AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x9= b9*a9*x22+b10*a9*x23+b11*a9*xu22+ b12*a9*xu23+
    b9*a10*x32+b10*a10*x33+b11*a10*xu32+ b12*a10*xu33+
    b9*a11*xt22+b10*a11*xt23+b11*a11*xe22+ b12*a11*xe23
    b9*a12*xt32+b10*a12*xt33+b11*a12*xe32+ b12*a12*xe33;
x9=simplify[x9]
```

$8u$

```
y9= b9*a9*y22+b10*a9*y23+b11*a9*yu22+ b12*a9*yu23+
    b9*a10*y32+b10*a10*y33+b11*a10*yu32+ b12*a10*yu33+
    b9*a11*yt22+b10*a11*yt23+b11*a11*ye22+ b12*a11*ye23
    b9*a12*yt32+b10*a12*yt33+b11*a12*ye32+ b12*a12*ye33;
y9=simplify[y9]
```

$5t$

```
z9= b9*a9*z22+b10*a9*z23+b11*a9*zu22+ b12*a9*zu23+
    b9*a10*z32+b10*a10*z33+b11*a10*zu32+ b12*a10*zu33+
    b9*a11*zt22+b10*a11*zt23+b11*a11*ze22+ b12*a11*ze23
    b9*a12*zt32+b10*a12*zt33+b11*a12*ze32+ b12*a12*ze33;
z9=simplify[z9]
```

$-16+25t-25t^2+136u-448u^2+512u^3$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c9=ParametricPlot3D[{x9,y9,z9},{t, 2/5,3/5},{u,2/8,3/8},PlotPoints→ 5,
   AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x110= b9*a3*x32+b10*a3*x33+b11*a3*xu32+ b12*a3*xu33+
      b9*a4*x42+b10*a4*x43+b11*a4*xu42+ b12*a4*xu43+
      b9*a5*x52+b10*a5*x53+b11*a5*xu52+ b12*a5*xu53;
x110=simplify[x110]
```

$8u$

```
y110= b9*a3*y32+b10*a3*y33+b11*a3*yu32+ b12*a3*yu33+
      b9*a4*y42+b10*a4*y43+b11*a4*yu42+ b12*a4*yu43+
```

b9*a5*y52+b10*a5*y53+b11*a5*yu52+ b12*a5*yu53;
y110=simplify[y110]

5t

z110= b9*a3*z32+b10*a3*z33+b11*a3*zu32+ b12*a3*zu33+
b9*a4*z42+b10*a4*z43+b11*a4*zu42+ b12*a4*zu43+
b9*a5*z52+b10*a5*z53+b11*a5*zu52+ b12*a5*zu53;
z110=simplify[z110]

$-7-5t+136u-448u^2+512u^3$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

c110=ParametricPlot3D[{x110,y110,z110},{t,3/5,1},{u,2/8,3/8},
PlotPoints→ 5,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel},
DisplayFunction→ Identity]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x111= b3*a9*x23+b4*a9*x24+b5*a9*xu25+
b3*a10*x33+b4*a10*x34+b5*a10*x35+
b3*a11*xt23+b4*a11*xt24+b5*a11*xt25+
b3*a12*xt33+b4*a12*xt34+b5*a12*xt35;
x111=simplify[x111]

8u

y111= b3*a9*y23+b4*a9*y24+b5*a9*yu25+
b3*a10*y33+b4*a10*y34+b5*a10*y35+
b3*a11*yt23+b4*a11*yt24+b5*a11*yt25+
b3*a12*yt33+b4*a12*yt34+b5*a12*yt35;
y111=simplify[y111]

5t

z111= b3*a9*z23+b4*a9*z24+b5*a9*zu25+
b3*a10*z33+b4*a10*z34+b5*a10*z35+
b3*a11*zt23+b4*a11*zt24+b5*a11*zt25+
b3*a12*zt33+b4*a12*zt34+b5*a12*zt35;
z111=simplify[z111]

$-16+25t-25t^2+64u-64u^2$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

c111=ParametricPlot3D[{x111,y111,z111},{t,2/5,3/5},{u,3/8,5/8},
PlotPoints→ 5,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→
Identity]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x112= b13*a0*x05+b14*a0*x06+b15*a0*xu05+ b16*a0*xu06+
      b13*a1*x15+b14*a1*x16+b15*a1*xu15+ b16*a1*xu16+
      b13*a2*x25+b14*a2*x26+b15*a2*xu25+ b16*a2*xu26;
x112=simplify[x112]
```

8u

```
y112= b13*a0*y05+b14*a0*y06+b15*a0*yu05+ b16*a0*yu06+
      b13*a1*y15+b14*a1*y16+b15*a1*yu15+ b16*a1*yu16+
      b13*a2*y25+b14*a2*y26+b15*a2*yu25+ b16*a2*yu26;
y112=simplify[y112]
```

5t

```
z112= b13*a0*z05+b14*a0*z06+b15*a0*zu05+ b16*a0*zu06+
      b13*a1*z15+b14*a1*z16+b15*a1*zu15+ b16*a1*zu16+
      b13*a2*z25+b14*a2*z26+b15*a2*zu25+ b16*a2*zu26;
z112=simplify[z112]
```

$188+5t-776u+1088u^2-512u^3$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c112=ParametricPlot3D[{x112,y112,z112},{t,0,2/5},{u,5/8,6/8},
PlotPoints→ 5,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel},     DisplayFunction→
Identity]
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x113= b13*a9*x25+b14*a9*x26+b15*a9*xu25+ b16*a9*xu26+
      b13*a10*x35+b14*a10*x36+b15*a10*xu35+ b16*a10*xu36+
      b13*a11*xt25+b14*a11*xt26+b15*a11*xe25+ b16*a11*xe26+
      b13*a12*xt35+b14*a12*xt36+b15*a12*xe35+ b16*a12*xe36;
x113=simplify[x113]
```

8u

```
y113= b13*a9*y25+b14*a9*y26+b15*a9*yu25+ b16*a9*yu26+
      b13*a10*y35+b14*a10*y36+b15*a10*yu35+ b16*a10*yu36+
      b13*a11*yt25+b14*a11*yt26+b15*a11*ye25+ b16*a11*ye26+
      b13*a12*yt35+b14*a12*yt36+b15*a12*ye35+ b16*a12*ye36;
y113=simplify[y113]
```

5t

```
z113= b13*a9*z25+b14*a9*z26+b15*a9*zu25+ b16*a9*zu26+
      b13*a10*z35+b14*a10*z36+b15*a10*zu35+ b16*a10*zu36+
      b13*a11*zt25+b14*a11*zt26+b15*a11*ze25+ b16*a11*ze26+
      b13*a12*zt35+b14*a12*zt36+b15*a12*ze35+ b16*a12*ze36;
z113=simplify[z113]
```

$184+25t-25t^2-776u+1088u^2-512u^3$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

c113=ParametricPlot3D[{x113,y113,z113},{t,2/5,3/5},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→ 5,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x114= b13*a3*x35+b14*a3*x36+b15*a3*xu35+ b16*a3*xu36+
      b13*a4*x45+b14*a4*x46+b15*a4*xu45+ b16*a4*xu46+
      b13*a5*x55+b14*a5*x56+b15*a5*xu55+ b16*a5*xu56;
x114=simplify[x114]
```

8u

```
y114= b13*a3*y35+b14*a3*y36+b15*a3*yu35+ b16*a3*yu36+
      b13*a4*y45+b14*a4*y46+b15*a4*yu45+ b16*a4*yu46+
      b13*a5*y55+b14*a5*y56+b15*a5*yu55+ b16*a5*yu56;
y114=simplify[y114]
```

5t

```
z114= b13*a3*z35+b14*a3*z36+b15*a3*zu35+ b16*a3*zu36+
      b13*a4*z45+b14*a4*z46+b15*a4*zu45+ b16*a4*zu46+
      b13*a5*z55+b14*a5*z56+b15*a5*zu55+ b16*a5*zu56;
z114=simplify[z114]
```

$193-5t-776u+1088u^2-512u^3$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

c114=ParametricPlot3D[{x114,y114,z114},{t,3/5,1},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→ 5,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity]

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x115= b6*a9*x26+b7*a9*x27+b8*a9*x28+
      b6*a10*x36+b7*a10*x37+b8*a10*x38+
      b6*a11*xt26+b7*a11*xt27+b8*a11*xt28+
      b6*a12*xt36+b7*a12*xt37+b8*a12*xt38;
x115=simplify[x115]
```

8u

```
y115= b6*a9*y26+b7*a9*y27+b8*a9*y28+
      b6*a10*y36+b7*a10*y37+b8*a10*y38+
      b6*a11*yt26+b7*a11*yt27+b8*a11*yt28+
```

```
        b6*a12*yt36+b7*a12*yt37+b8*a12*yt38;
y115=simplify[y115]
```

5t

```
z115= b6*a9*z26+b7*a9*z27+b8*a9*z28+
        b6*a10*z36+b7*a10*z37+b8*a10*z38+
        b6*a11*zt26+b7*a11*zt27+b8*a11*zt28+
        b6*a12*zt36+b7*a12*zt37+b8*a12*zt38;
z115=simplify[z115]
```

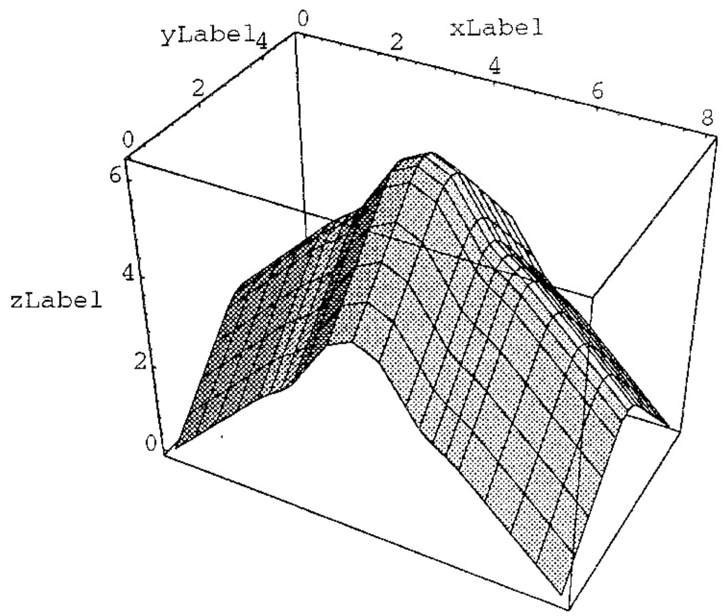
$4+25t-25t^2-8u$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c115=ParametricPlot3D[{x115,y115,z115},{t,2/5,3/5},{u,6/8,1},
PlotPoints→ 5,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→
Identity
```

DIBUJO DE LA SUPERFICIE TOTAL

```
Show[c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c110,c111,c112,c113,c114,c115,
DisplayFunction→ $DisplayFunction]
```



Ejemplo de superficie polinomial mixta que pasa por una red de 9x9 puntos usando polinomios de grado tres o menor: M-3

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

```
a0=32*t^2-12*t+1;

a1=-64*t^2+16*t;

a2=32*t^2-4*t;

a3=32*t^2-36*t+10;

a4=-64*t^2+64*t-15;

a5=32*t^2-28*t+6;

a6=32*t^2-60*t+28;

a7=-64*t^2+112*t-48;

a8=32*t^2-52*t+21;

a9=1024*t^3-960*t^2+288*t-27;

a10=-1024*t^3+960*t^2-288*t+28;

a11=64*t^3-64*t^2+21*t-9/4;

a12=64t^3-56*t^2+16*t-3/2;

a13=1024t^3-2112*t^2+1440*t-324;

a14=-1024t^3+2112*t^2-1440*t+325;

a15=64t^3-136*t^2+96*t-45/2;

a16=64t^3-128*t^2+85*t-75/4;


b0=32*u^2-12*u+1;

b1=-64*u^2+16*u;

b2=32*u^2-4*u;

b3=32*u^2-36*u+10;
```

b4=-64*u^2+64*u-15;

b5=32*u^2-28*u+6;

b6=32*u^2-60*u+28;

b7=-64*u^2+112*u-48;

b8=32*u^2-52*u+21;

b9=1024*u^3-960*u^2+288*u-27;

b10=-1024*u^3+960*u^2-288*u+28;

b11=64*u^3-64*u^2+21*u-9/4;

b12=64u^3-56*u^2+16*u-3/2;

b13=1024u^3-2112*u^2+1440*u-324;

b14=-1024u^3+2112*u^2-1440*u+325;

b15=64u^3-136*u^2+96*u-45/2;

b16=64u^3-128*u^2+85*u-75/4;

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

coordenadas de P00
x00=0;
y00=0;
z00=0;

coordenadas de P01
x01=1;
y01=0;
z01=1;

coordenadas de P02
x02=2;
y02=0;
z02=2;

coordenadas de P03
x03=3;
y03=0;
z03=3;

coordenadas de P04
x04=4;
y04=0;
z04=4;

coordenadas de P05
x05=5;
y05=0;
z05=3;

coordenadas de P06
x06=6;
y06=0;
z06=2;

coordenadas de P07
x07=7;
y07=0;
z07=1;

coordenadas de P08
x08=8;
y08=0;
z08=0;

coordenadas de P10
x10=0;
y10=1;
z10=1;

coordenadas de P11
x11=1;
y11=1;
z11=2;

coordenadas de P12
x12=2;
y12=1;
z12=3;

coordenadas de P13
x13=3;
y13=1;
z13=4;

coordenadas de P14
x14=4;
y14=1;
z14=5;

coordenadas de P15
x15=5;
y15=1;
z15=4;

coordenadas de P16
x16=6;
y16=1;
z16=3;

coordenadas de P17
x17=7;
y17=1;
z17=2;

coordenadas de P18
x18=8;
y18=1;
z18=1;

coordenadas de P20
x20=0;
y20=2;
z20=2;

coordenadas de P21
x21=1;
y21=2;
z21=3;

coordenadas de P22
x22=2;
y22=2;
z22=4;

coordenadas de P23
x23=3;
y23=2;
z23=5;

coordenadas de P24
x24=4;
y24=2;
z24=6;

coordenadas de P25
x25=5;
y25=2;
z25=5;

coordenadas de P26
x26=6;
y26=2;
z26=4;

coordenadas de P27
x27=7;
y27=2;
z27=3;

coordenadas de P28
x28=8;
y28=2;
z28=2;

coordenadas de P30
x30=0;
y30=3;
z30=3;

coordenadas de P31
x31=1;
y31=3;
z31=4;

coordenadas de P32
x32=2;
y32=3;
z32=5;

coordenadas de P33
x33=3;
y33=3;
z33=6;

coordenadas de P34
x34=4;
y34=3;
z34=7;

coordenadas de P35
x35=5;
y35=3;
z35=6;

coordenadas de P36
x36=6;
y36=3;
z36=5;

coordenadas de P37
x37=7;
y37=3;
z37=4;

coordenadas de P38
x38=8;
y38=3;
z38=3;

coordenadas de P40
x40=0;
y40=4;
z40=4;

coordenadas de P41
x41=1;
y41=4;
z41=5;

coordenadas de P42
x42=3;
y42=4;
z42=6;

coordenadas de P43
x43=3;
y43=4;
z43=7;

coordenadas de P44
x44=4;
y44=4;
z44=8;

coordenadas de P45
x45=5;
y45=4;
z45=7;

coordenadas de P46
x46=6;
y46=4;
z46=6;

coordenadas de P47
x47=7;
y47=4;
z47=5;

coordenadas de P48
x48=8;
y48=4;
z48=4;

coordenadas de P50
x50=0;
y50=5;
z50=3;

coordenadas de P51
x51=1;
y51=5;
z51=4;

coordenadas de P52
x52=2;
y52=5;
z52=5;

coordenadas de P53
x53=3;
y53=5;
z53=6;

coordenadas de P54
x54=4;
y54=5;
z54=7;

coordenadas de P55
x55=5;
y55=5;
z55=6;

coordenadas de P56
x56=6;
y56=5;
z56=5;

coordenadas de P57
x57=7;
y57=5;
z57=2;

coordenadas de P58
x58=8;
y58=5;
z58=3;

coordenadas de P60
x60=0;
y60=6;
z60=2;

coordenadas de P61
x61=1;
y61=6;
z61=3;

coordenadas de P62
x62=2;
y62=6;
z62=4;

coordenadas de P63
x63=3;
y63=6;
z63=5;

coordenadas de P64
x64=4;
y64=6;
z64=6;

coordenadas de P65
x65=5;
y65=6;
z65=5;

coordenadas de P66
x66=6;
y66=6;
z66=4;

coordenadas de P67
x67=7;
y67=6;
z67=3;

coordenadas de P68
x68=8;
y68=6;
z68=2;

coordenadas de P70
x70=0;
y70=7;
z70=1;

coordenadas de P71
x71=1;
y71=7;
z71=2;

coordenadas de P72
x72=2;
y72=7;
z72=3;

coordenadas de P73
x73=3;
y73=7;
z73=4;

coordenadas de P74
x74=4;
y74=7;
z74=5;

coordenadas de P75
x75=5;
y75=7;
z75=4;

coordenadas de P76
x76=6;
y76=7;
z76=3;

coordenadas de P77
x77=7;
y77=7;
z77=2;

coordenadas de P78
x78=8;
y78=7;
z78=1;

coordenadas de P80
x80=0;
y80=8;
z80=0;

coordenadas de P81
x81=1;
y81=8;
z81=1;

coordenadas de P82
x82=2;
y82=8;
z82=2;

coordenadas de P83
x83=3;
y83=8;
z83=3;

coordenadas de P84
x84=4;
y84=8;
z84=4;

coordenadas de P85
x85=5;
y85=8;
z85=3;

coordenadas de P86
x86=6;
y86=8;
z86=2;

coordenadas de P87
x87=7;
y87=8;
z87=1;

coordenadas de P88
x88=8;
y88=8;
z88=0;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x1=b0*a0*x00+b1*a0*x01+b2*a0*x02+
    b0*a1*x10+b1*a1*x11+b2*a1*x12+
    b0*a2*x20+b1*a2*x21+b2*a2*x22;
x1=simplify[x1]
```

8u

```
y1=b0*a0*y00+b1*a0*y01+b2*a0*y02+
    b0*a1*y10+b1*a1*y11+b2*a1*y12+
    b0*a2*y20+b1*a2*y21+b2*a2*y22;
y1=simplify[y1]
```

8t

```
z1=b0*a0*z00+b1*a0*z01+b2*a0*z02+
     b0*a1*z10+b1*a1*z11+b2*a1*z12+
     b0*a2*z20+b1*a2*z21+b2*a2*z22;
z1=simplify[z1]
```

8(t+u)

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T20

```
xt20=Limit[D[Limit[x1,u→ 0],t],t→ 2/8];
yt20=Limit[D[Limit[y1,u→ 0],t],t→ 2/8];
zt20=Limit[D[Limit[z1,u→ 0],t],t→ 2/8];
```

componentes de T21

```
xt21=Limit[D[Limit[x,u→ 1/8],t],t→ 2/8];
yt21=Limit[D[Limit[y,u→ 1/8],t],t→ 2/8];
zt21=Limit[D[Limit[z,u→ 1/8],t],t→ 2/8];
```

componentes de T22

```
xt22=Limit[D[Limit[x,u→ 2/8],t],t→ 2/8];
yt22=Limit[D[Limit[y,u→ 2/8],t],t→ 2/8];
zt22=Limit[D[Limit[z,u→ 2/8],t],t→ 2/8];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U20

```
xu20=Limit[D[Limit[x,t→ 2],u],u→ 0];
yu20=Limit[D[Limit[y,t→ 2],u],u→ 0];
zu20=Limit[D[Limit[z,t→ 2],u],u→ 0];
```

componentes de U21

```
xu21=Limit[D[Limit[x,t→ 1/8],u],u→ 1/8];
yu21=Limit[D[Limit[y,t→ 1/8],u],u→ 1/8];
zu21=Limit[D[Limit[z,t→ 1/8],u],u→ 1/8];
```

componentes de U22

```
xu22=Limit[D[Limit[x,t→ 2/8],u],u→ 2/8];
yu22=Limit[D[Limit[y,t→ 2/8],u],u→ 2/8];
zu22=Limit[D[Limit[z,t→ 2/8],u],u→ 2/8];
```

componentes de U12

```
xu12=Limit[D[Limit[x,t→ 1/8],u],u→ 2/8];
yu12=Limit[D[Limit[y,t→ 1/8],u],u→ 2/8];
zu12=Limit[D[Limit[z,t→ 1/8],u],u→ 2/8];
```

componentes de U02

```
xu02=Limit[D[Limit[x,t→ 0],u],u→ 2/8];
yu02=Limit[D[Limit[y,t→ 0],u],u→ 2/8];
zu02=Limit[D[Limit[z,t→ 0],u],u→ 2/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E20

```
xe20= Limit[Limit[D[D[x,t],u],t→ 2/8],u→ 0];
ye20= Limit[Limit[D[D[y,t],u],t→ 2/8],u→ 0];
ze20= Limit[Limit[D[D[z,t],u],t→ 2/8],u→ 0];
```

componentes de E21

```
xe21= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 2/8],u→ 1/8];
ye21= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 2/8],u→ 1/8];
ze21= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 2/8],u→ 1/8];
```

componentes de E22

```
xe22= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 2/8],u→ 2/8];
ye22= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 2/8],u→ 2/8];
ze22= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 2/8],u→ 2/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x2= b0*a3*x30+b1*a3*x31+b2*a3*x32+
    b0*a4*x40+b1*a4*x41+b2*a4*x42+
    b0*a5*x50+b1*a5*x51+b2*a5*x52;
x2=simplify[x2]
```

8u

```
y2= b0*a3*y30+b1*a3*y31+b2*a3*y32+
    b0*a4*y40+b1*a4*y41+b2*a4*y42+
    b0*a5*y50+b1*a5*y51+b2*a5*y52;
y2=simplify[y2]
```

5t

```
z2= b0*a3*z30+b1*a3*z31+b2*a3*z32+
    b0*a4*z40+b1*a4*z41+b2*a4*z42+
    b0*a5*z50+b1*a5*z51+b2*a5*z52;
z2=simplify[z2]
```

$4(-3+16t-16t^2+2u)$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T30

```
xt30=Limit[D[Limit[x2,u→ 0],t],t→ 3/8];
yt30=Limit[D[Limit[y2,u→ 0],t],t→ 3/8];
zt30=Limit[D[Limit[z2,u→ 0],t],t→ 3/8];
```

componentes de T31

```
xt31=Limit[D[Limit[x2,u→ 1/8],t],t→ 3/8];
yt31=Limit[D[Limit[y2,u→ 1/8],t],t→ 3/8];
zt31=Limit[D[Limit[z2,u→ 1/8],t],t→ 3/8];
```

componentes de T32

```
xt32=Limit[D[Limit[x2,u→ 2/8],t],t→ 3/8];
yt32=Limit[D[Limit[y2,u→ 2/8],t],t→ 3/8];
zt32=Limit[D[Limit[z2,u→ 2/8],t],t→ 3/8];
```

componentes de T42

```
xt42=Limit[D[Limit[x2,u→ 2/8],t],t→ 4/8];
yt42=Limit[D[Limit[y2,u→ 2/8],t],t→ 4/8];
zt42=Limit[D[Limit[z2,u→ 2/8],t],t→ 4/8];
```

componentes de T52

```
xt52=Limit[D[Limit[x2,u→ 2/8],t],t→ 5/8];
yt52=Limit[D[Limit[y2,u→ 2/8],t],t→ 5/8];
zt52=Limit[D[Limit[z2,u→ 2/8],t],t→ 5/8];
```

componentes de T51

```
xt51=Limit[D[Limit[x2,u→ 1/8],t],t→ 5/8];
yt51=Limit[D[Limit[y2,u→ 1/8],t],t→ 5/8];
zt51=Limit[D[Limit[z2,u→ 1/8],t],t→ 5/8];
```

componentes de T50

```
xt50=Limit[D[Limit[x2,u→ 0],t],t→ 5/8];
yt50=Limit[D[Limit[y2,u→ 0],t],t→ 5/8];
zt50=Limit[D[Limit[z2,u→ 0],t],t→ 5/8];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U32

```
xu32=Limit[D[Limit[x2,t→ 3/8],u],u→ 2/8];
yu32=Limit[D[Limit[y2,t→ 3/8],u],u→ 2/8];
zu32=Limit[D[Limit[z2,t→ 3/8],u],u→ 2/8];
```

componentes de U42

```
xu42=Limit[D[Limit[x2,t→ 4/8],u],u→ 2/8];
yu42=Limit[D[Limit[y2,t→ 4/8],u],u→ 2/8];
zu42=Limit[D[Limit[z2,t→ 4/8],u],u→ 2/8];
```

componentes de U52

```
xu52=Limit[D[Limit[x2,t→ 5/8],u],u→ 2/8];
yu52=Limit[D[Limit[y2,t→ 5/8],u],u→ 2/8];
zu52=Limit[D[Limit[z2,t→ 5/8],u],u→ 2/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E32

```
xe32= Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t→ 3/8],u→ 2/8];
ye32= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t→ 3/8],u→ 2/8];
ze32= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t→ 3/8],u→ 2/8];
```

componentes de E52

```
xe52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 5/8,u→ 2/8];
ye52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 5/8,u→ 2/8];
ze52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→ 5/8,u→ 2/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x3= b0*a6*x60+b1*a6*x61+b2*a6*x62+
    b0*a7*x70+b1*a7*x71+b2*a7*x72+
    b0*a8*x80+b1*a8*x81+b2*a8*x82;
x3=simplify[x3]
```

8u

```
y3= b0*a6*y60+b1*a6*y61+b2*a6*y62+
    b0*a7*y70+b1*a7*y71+b2*a7*y72+
    b0*a8*y80+b1*a8*y81+b2*a8*y82;
y3=simplify[y3]
```

8t

```
z3= b0*a6*z60+b1*a6*z61+b2*a6*z62+
    b0*a7*z70+b1*a7*z71+b2*a7*z72+
    b0*a8*z80+b1*a8*z81+b2*a8*z82;
z3=simplify[z3]
```

8(1-t+u)

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T60

```
xt60=Limit[D[Limit[x3,u→ 0],t],t→ 6/8];
yt60=Limit[D[Limit[y3,u→ 0],t],t→ 6/8];
zt60=Limit[D[Limit[z3,u→ 0],t],t→ 6/8];
```

componentes de T61

```
xt61=Limit[D[Limit[x3,u→ 1/8],t],t→ 6/8];
yt61=Limit[D[Limit[y3,u→ 1/8],t],t→ 6/8];
zt61=Limit[D[Limit[z3,u→ 1/8],t],t→ 6/8];
```

componentes de T62

```
xt62=Limit[D[Limit[x3,u→ 2/8],t],t→ 6/8];
yt62=Limit[D[Limit[y3,u→ 2/8],t],t→ 6/8];
zt62=Limit[D[Limit[z3,u→ 2/8],t],t→ 6/8];
```

componentes de T72

```
xt72=Limit[D[Limit[x3,u→ 2/8],t],t→ 7/8];
yt72=Limit[D[Limit[y3,u→ 2/8],t],t→ 7/8];
zt72=Limit[D[Limit[z3,u→ 2/8],t],t→ 7/8];
```

componentes de T82

```
xt82=Limit[D[Limit[x3,u→ 2/8],t],t→ 1];
yt82=Limit[D[Limit[y3,u→ 2/8],t],t→ 1];
zt82=Limit[D[Limit[z3,u→ 2/8],t],t→ 1];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U62

```
xu62=Limit[D[Limit[x3,t→ 6/8],u],u→ 2/8];
yu62=Limit[D[Limit[y3,t→ 6/8],u],u→ 2/8];
zu62=Limit[D[Limit[z3,t→ 6/8],u],u→ 2/8];
```

componentes de U72

```
xu72=Limit[D[Limit[x3,t→ 7/8],u],u→ 2/8];
yu72=Limit[D[Limit[y3,t→ 7/8],u],u→ 2/8];
zu72=Limit[D[Limit[z3,t→ 7/8],u],u→ 2/8];
```

componentes de U82

```
xu82=Limit[D[Limit[x3,t→ 1],u],u→ 2/8];
yu82=Limit[D[Limit[y3,t→ 1],u],u→ 2/8];
zu82=Limit[D[Limit[z3,t→ 1],u],u→ 2/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E62

```
xe62= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→ 6/8],u→ 2/8];
ye62= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→ 6/8],u→ 2/8];
ze62= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→ 6/8],u→ 2/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x4= b3*a0*x03+b4*a0*x04+b5*a0*x05+
    b3*a1*x13+b4*a1*x14+b5*a1*x15+
    b3*a2*x23+b4*a2*x24+b5*a2*x25;
x4=simplify[x4]
```

8u

```
y4= b3*a0*y03+b4*a0*y04+b5*a0*y05+
    b3*a1*y13+b4*a1*y14+b5*a1*y15+
    b3*a2*y23+b4*a2*y24+b5*a2*y25;
y4=simplify[y4]
```

8t

```
z4= b3*a0*z03+b4*a0*z04+b5*a0*z05+
    b3*a1*z13+b4*a1*z14+b5*a1*z15+
    b3*a2*z23+b4*a2*z24+b5*a2*z25;
z4=simplify[z4]
```

$4(-3+2t+16u-164u^2)$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T03

```
xt03=Limit[D[Limit[x4,u→ 3/8],t],t→ 0];
yt03=Limit[D[Limit[y4,u→ 3/8],t],t→ 0];
zt03=Limit[D[Limit[z4,u→ 3/8],t],t→ 0];
```

componentes de T13

```
xt13=Limit[D[Limit[x4,u→ 3/8],t],t→ 1/8];
yt13=Limit[D[Limit[y4,u→ 3/8],t],t→ 1/8];
zt13=Limit[D[Limit[z4,u→ 3/8],t],t→ 1/8];
```

componentes de T23

```
xt23=Limit[D[Limit[x4,u→ 3/8],t],t→ 2/8];
yt23=Limit[D[Limit[y4,u→ 3/8],t],t→ 2/8];
zt23=Limit[D[Limit[z4,u→ 3/8],t],t→ 2/8];
```

componentes de T24

```
xt24=Limit[D[Limit[x4,u→ 4/8],t],t→ 2/8];
yt24=Limit[D[Limit[y4,u→ 4/8],t],t→ 2/8];
zt24=Limit[D[Limit[z4,u→ 4/8],t],t→ 2/8];
```

componentes de T25

```
xt25=Limit[D[Limit[x4,u→ 5/8],t],t→ 2/8];
yt25=Limit[D[Limit[y4,u→ 5/8],t],t→ 2/8];
zt25=Limit[D[Limit[z4,u→ 5/8],t],t→ 2/8];
```

componentes de T15

xt15=Limit[D[Limit[x4,u→ 5/8],t],t→ 1/8];
yt15=Limit[D[Limit[y4,u→ 5/8],t],t→ 1/8];
zt15=Limit[D[Limit[z4,u→ 5/8],t],t→ 1/8];

componentes de T05
xt05=Limit[D[Limit[x4,u→ 5/8],t],t→ 0];
yt05=Limit[D[Limit[y4,u→ 5/8],t],t→ 0];
zt05=Limit[D[Limit[z4,u→ 5/8],t],t→ 0];

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U03
xu03=Limit[D[Limit[x4,t→ 0],u],u→ 3/8];
yu03=Limit[D[Limit[y4,t→ 0],u],u→ 3/8];
zu03=Limit[D[Limit[z4,t→ 0],u],u→ 3/8];

componentes de U13
xu13=Limit[D[Limit[x4,t→ 1/8],u],u→ 3/8];
yu13=Limit[D[Limit[y4,t→ 1/8],u],u→ 3/8];
zu13=Limit[D[Limit[z4,t→ 1/8],u],u→ 3/8];

componentes de U23
xu23=Limit[D[Limit[x4,t→ 2/8],u],u→ 3/8];
yu23=Limit[D[Limit[y4,t→ 2/8],u],u→ 3/8];
zu23=Limit[D[Limit[z4,t→ 2/8],u],u→ 3/8];

componentes de U25
xu25=Limit[D[Limit[x4,t→ 2/8],u],u→ 5/8];
yu25=Limit[D[Limit[y4,t→ 2/8],u],u→ 5/8];
zu25=Limit[D[Limit[z4,t→ 2/8],u],u→ 5/8];

componentes de U15
xu15=Limit[D[Limit[x4,t→ 1/8],u],u→ 3/8];
yu15=Limit[D[Limit[y4,t→ 1/8],u],u→ 3/8];
zu15=Limit[D[Limit[z4,t→ 1/8],u],u→ 3/8];

componentes de U05
xu05=Limit[D[Limit[x4,t→ 0],u],u→ 5/8];
yu05=Limit[D[Limit[y4,t→ 0],u],u→ 5/8];
zu05=Limit[D[Limit[z4,t→ 0],u],u→ 5/8];

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E23
xe23= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→ 2/8],u→ 3/8];
ye23= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→ 2/8],u→ 3/8];
ze23= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→ 2/8],u→ 3/8];

componentes de E25

```
xe25= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→ 2/8],u→ 5/8];
ye25= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→ 2/8],u→ 5/8];
ze25= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→ 2/8],u→ 5/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x5= b3*a3*x33+b4*a3*x34+b5*a3*x35+
    b3*a4*x43+b4*a4*x44+b5*a4*x45+
    b3*a5*x53+b4*a5*x54+b5*a5*x55;
x5=simplify[x5]
```

8u

```
y5= b3*a3*y33+b4*a3*y34+b5*a3*y35+
    b3*a4*y43+b4*a4*y44+b5*a4*y45+
    b3*a5*y53+b4*a5*y54+b5*a5*y55;
y5=simplify[y5]
```

8t

```
z5= b3*a3*z33+b4*a3*z34+b5*a3*z35+
    b3*a4*z43+b4*a4*z44+b5*a4*z45+
    b3*a5*z53+b4*a5*z54+b5*a5*z55;
z5=simplify[z5]
```

$8(-3+8t-8t^2+8u-8u^2)$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T33

```
xt33=Limit[D[Limit[x5,u→ 3/8],t],t→ 3/8];
yt33=Limit[D[Limit[y5,u→ 3/8],t],t→ 3/8];
zt33=Limit[D[Limit[z5,u→ 3/8],t],t→ 3/8];
```

componentes de T34

```
xt34=Limit[D[Limit[x5,u→ 4/8],t],t→ 3/8];
yt34=Limit[D[Limit[y5,u→ 4/8],t],t→ 3/8];
zt34=Limit[D[Limit[z5,u→ 4/8],t],t→ 3/8];
```

componentes de T35

```
xt35=Limit[D[Limit[x5,u→ 5/8],t],t→ 3/8];
yt35=Limit[D[Limit[y5,u→ 5/8],t],t→ 3/8];
zt35=Limit[D[Limit[z5,u→ 5/8],t],t→ 3/8];
```

componentes de T45

```
xt45=Limit[D[Limit[x5,u→ 5/8],t],t→ 4/8];
yt45=Limit[D[Limit[y5,u→ 5/8],t],t→ 4/8];
```

zt45=Limit[D[Limit[z5,u→ 5/8],t],t→ 4/8];

componentes de T55
xt55=Limit[D[Limit[x5,u→ 5/8],t],t→ 5/8];
yt55=Limit[D[Limit[y5,u→ 5/8],t],t→ 5/8];
zt55=Limit[D[Limit[z5,u→ 5/8],t],t→ 5/8];

componentes de T54
xt54=Limit[D[Limit[x5,u→ 4/8],t],t→ 5/8];
yt54=Limit[D[Limit[y5,u→ 4/8],t],t→ 5/8];
zt54=Limit[D[Limit[z5,u→ 4/8],t],t→ 5/8];

componentes de T53
xt53=Limit[D[Limit[x5,u→ 3/8],t],t→ 5/8];
yt53=Limit[D[Limit[y5,u→ 3/8],t],t→ 5/8];
zt53=Limit[D[Limit[z5,u→ 3/8],t],t→ 5/8];

componentes de T43
xt43=Limit[D[Limit[x5,u→ 3/8],t],t→ 4/8];
yt43=Limit[D[Limit[y5,u→ 3/8],t],t→ 4/8];
zt43=Limit[D[Limit[z5,u→ 3/8],t],t→ 4/8];

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U33
xu33=Limit[D[Limit[x5,t→ 3/8],u],u→ 3/8];
yu33=Limit[D[Limit[y5,t→ 3/8],u],u→ 3/8];
zu33=Limit[D[Limit[z5,t→ 3/8],u],u→ 3/8];

componentes de U35
xu35=Limit[D[Limit[x5,t→ 3/8],u],u→ 5/8];
yu35=Limit[D[Limit[y5,t→ 3/8],u],u→ 5/8];
zu35=Limit[D[Limit[z5,t→ 3/8],u],u→ 5/8];

componentes de U45
xu45=Limit[D[Limit[x5,t→ 4/8],u],u→ 5/8];
yu45=Limit[D[Limit[y5,t→ 4/8],u],u→ 5/8];
zu45=Limit[D[Limit[z5,t→ 4/8],u],u→ 5/8];

componentes de U55
xu55=Limit[D[Limit[x5,t→ 5/8],u],u→ 5/8];
yu55=Limit[D[Limit[y5,t→ 5/8],u],u→ 5/8];
zu55=Limit[D[Limit[z5,t→ 5/8],u],u→ 5/8];

componentes de U53
xu53=Limit[D[Limit[x5,t→ 5/8],u],u→ 3/8];
yu53=Limit[D[Limit[y5,t→ 5/8],u],u→ 3/8];
zu53=Limit[D[Limit[z5,t→ 5/8],u],u→ 3/8];

componentes de U43

```
xu43=Limit[D[Limit[x5,t→ 4/8],u],u→ 3/8];
yu43=Limit[D[Limit[y5,t→ 4/8],u],u→ 3/8];
zu43=Limit[D[Limit[z5,t→ 4/8],u],u→ 3/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E33

```
xe33= Limit[Limit[D[D[x5,t],u],t→ 3/8],u→ 3/8];
ye33= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t→ 3/8],u→ 3/8];
ze33= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t→ 3/8],u→ 3/8];
```

componentes de E35

```
xe35= Limit[Limit[D[D[x5,t],u],t→ 3/8],u→ 5/8];
ye35= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t→ 3/8],u→ 5/8];
ze35= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t→ 3/8],u→ 5/8];
```

componentes de E55

```
xe55= Limit[Limit[D[D[x5,t],u],t→ 5/8],u→ 5/8];
ye55= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t→ 5/8],u→ 5/8];
ze55= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t→ 5/8],u→ 5/8];
```

componentes de E53

```
xe53= Limit[Limit[D[D[x5,t],u],t→ 5/8],u→ 3/8];
ye53= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t→ 5/8],u→ 3/8];
ze53= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t→ 5/8],u→ 3/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x6= b3*a6*x63+b4*a6*x64+b5*a6*x65+
    b3*a7*x73+b4*a7*x74+b5*a7*x75+
    b3*a8*x83+b4*a8*x84+b5*a8*x85;
x6=simplify[x6]

8u

y6= b3*a6*y63+b4*a6*y64+b5*a6*y65+
    b3*a7*y73+b4*a7*y74+b5*a7*y75+
    b3*a8*y83+b4*a8*y84+b5*a8*y85;
y6=simplify[y6]

8t

z6= b3*a6*z63+b4*a6*z64+b5*a6*z65+
    b3*a7*z73+b4*a7*z74+b5*a7*z75+
    b3*a8*z83+b4*a8*z84+b5*a8*z85;
z6=simplify[z6]
```

$4(-1-2t+16u-16u^2)$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T83
```
xt83=Limit[D[Limit[x6,u→ 3/8],t],t→ 1];
yt83=Limit[D[Limit[y6,u→ 3/8],t],t→ 1];
zt83=Limit[D[Limit[z6,u→ 3/8],t],t→ 1];
```

componentes de T73
```
xt73=Limit[D[Limit[x6,u→ 3/8],t],t→ 7/8];
yt73=Limit[D[Limit[y6,u→ 3/8],t],t→ 7/8];
zt73=Limit[D[Limit[z6,u→ 3/8],t],t→ 7/8];
```

componentes de T63
```
xt63=Limit[D[Limit[x6,u→ 3/8],t],t→ 6/8];
yt63=Limit[D[Limit[y6,u→ 3/8],t],t→ 6/8];
zt63=Limit[D[Limit[z6,u→ 3/8],t],t→ 6/8];
```

componentes de T64
```
xt64=Limit[D[Limit[x6,u→ 4/8],t],t→ 6/8];
yt64=Limit[D[Limit[y6,u→ 4/8],t],t→ 6/8];
zt64=Limit[D[Limit[z6,u→ 4/8],t],t→ 6/8];
```

componentes de T65
```
xt65=Limit[D[Limit[x6,u→ 5/8],t],t→ 6/8];
yt65=Limit[D[Limit[y6,u→ 5/8],t],t→ 6/8];
zt65=Limit[D[Limit[z6,u→ 5/8],t],t→ 6/8];
```

componentes de T75
```
xt75=Limit[D[Limit[x6,u→ 5/8],t],t→ 7/8];
yt75=Limit[D[Limit[y6,u→ 5/8],t],t→ 7/8];
zt75=Limit[D[Limit[z6,u→ 5/8],t],t→ 7/8];
```

componentes de T85
```
xt85=Limit[D[Limit[x6,u→ 5/8],t],t→ 1];
yt85=Limit[D[Limit[y6,u→ 5/8],t],t→ 1];
zt85=Limit[D[Limit[z6,u→ 5/8],t],t→ 1];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U83
```
xu83=Limit[D[Limit[x6,t→ 1],u],u→ 3/8];
yu83=Limit[D[Limit[y6,t→ 1],u],u→ 3/8];
zu83=Limit[D[Limit[z6,t→ 1],u],u→ 3/8];
```

componentes de U73
```
xu73=Limit[D[Limit[x6,t→ 7/8],u],u→ 3/8];
```

```
yu73=Limit[D[Limit[y6,t→ 7/8],u],u→ 3/8];
zu73=Limit[D[Limit[z6,t→ 7/8],u],u→ 3/8];
```

componentes de U63

```
xu63=Limit[D[Limit[x6,t→ 6/8],u],u→ 3/8];
yu63=Limit[D[Limit[y6,t→ 6/8],u],u→ 3/8];
zu63=Limit[D[Limit[z6,t→ 6/8],u],u→ 3/8];
```

componentes de U65

```
xu65=Limit[D[Limit[x6,t→ 6/8],u],u→ 5/8];
yu65=Limit[D[Limit[y6,t→ 6/8],u],u→ 5/8];
zu65=Limit[D[Limit[z6,t→ 6/8],u],u→ 5/8];
```

componentes de U75

```
xu75=Limit[D[Limit[x6,t→ 7/8],u],u→ 5/8];
yu75=Limit[D[Limit[y6,t→ 7/8],u],u→ 5/8];
zu75=Limit[D[Limit[z6,t→ 7/8],u],u→ 5/8];
```

componentes de U85

```
xu85=Limit[D[Limit[x6,t→ 1],u],u→ 5/8];
yu85=Limit[D[Limit[y6,t→ 1],u],u→ 5/8];
zu85=Limit[D[Limit[z6,t→ 1],u],u→ 5/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E63

```
xe63= Limit[Limit[D[D[x6,t],u],t→ 6/8],u→ 3/8];
ye63= Limit[Limit[D[D[y6,t],u],t→ 6/8],u→ 3/8];
ze63= Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t→ 6/8],u→ 3/8];
```

componentes de E65

```
xe65= Limit[Limit[D[D[x6,t],u],t→ 6/8],u→ 5/8];
ye65= Limit[Limit[D[D[y6,t],u],t→ 6/8],u→ 5/8];
ze65= Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t→ 6/8],u→ 5/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x7= b6*a0*x06+b7*a0*x07+b8*a0*x08+
    b6*a1*x16+b7*a1*x17+b8*a1*x18+
    b6*a2*x26+b7*a2*x27+b8*a2*x28;
x7=simplify[x7]
```

8u

```
y7= b6*a0*y06+b7*a0*y07+b8*a0*y08+
    b6*a1*y16+b7*a1*y17+b8*a1*y18+
    b6*a2*y26+b7*a2*y27+b8*a2*y28;
y7=simplify[y7]
```

8t

```
z7= b6*a0*z06+b7*a0*z07+b8*a0*z08+
    b6*a1*z16+b7*a1*z17+b8*a1*z18+
    b6*a2*z26+b7*a2*z27+b8*a2*z28;
z7=simplify[z7]
```

8(1+t-u)

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T06

```
xt06=Limit[D[Limit[x7,u→ 6/8],t],t→ 0];
yt06=Limit[D[Limit[y7,u→ 6/8],t],t→ 0];
zt06=Limit[D[Limit[z7,u→ 6/8],t],t→ 0];
```

componentes de T16

```
xt16=Limit[D[Limit[x7,u→ 6/8],t],t→ 1/8];
yt16=Limit[D[Limit[y7,u→ 6/8],t],t→ 1/8];
zt16=Limit[D[Limit[z7,u→ 6/8],t],t→ 1/8];
```

componentes de T26

```
xt26=Limit[D[Limit[x7,u→ 6/8],t],t→ 2/8];
yt26=Limit[D[Limit[y7,u→ 6/8],t],t→ 2/8];
zt26=Limit[D[Limit[z7,u→ 6/8],t],t→ 2/8];
```

componentes de T27

```
xt27=Limit[D[Limit[x7,u→ 7/8],t],t→ 2/8];
yt27=Limit[D[Limit[y7,u→ 7/8],t],t→ 2/8];
zt27=Limit[D[Limit[z7,u→ 7/8],t],t→ 2/8];
```

componentes de T28

```
xt28=Limit[D[Limit[x7,u→ 1],t],t→ 2/8];
yt28=Limit[D[Limit[y7,u→ 1],t],t→ 2/8];
zt28=Limit[D[Limit[z7,u→ 1],t],t→ 2/8];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U06

```
xu06=Limit[D[Limit[x7,t→ 0],u],u→ 6/8];
yu06=Limit[D[Limit[y7,t→ 0],u],u→ 6/8];
zu06=Limit[D[Limit[z7,t→ 0],u],u→ 6/8];
```

componentes de U16

```
xu16=Limit[D[Limit[x7,t→ 1/8],u],u→ 6/8];
yu16=Limit[D[Limit[y7,t→ 1/8],u],u→ 6/8];
zu16=Limit[D[Limit[z7,t→ 1/8],u],u→ 6/8];
```

componentes de U26

```
xu26=Limit[D[Limit[x7,t→ 2/8],u],u→ 6/8];
yu26=Limit[D[Limit[y7,t→ 2/8],u],u→ 6/8];
zu26=Limit[D[Limit[z7,t→ 2/8],u],u→ 6/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E26

```
xe26= Limit[Limit[D[D[x7,t],u],t→ 2/8],u→ 6/8];
ye26= Limit[Limit[D[D[y7,t],u],t→ 2/8],u→ 6/8];
ze26= Limit[Limit[D[D[z7,t],u],t→ 2/8],u→ 6/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x8= b6*a3*x36+b7*a3*x37+b8*a3*x38+
    b6*a4*x46+b7*a4*x47+b8*a4*x48+
    b6*a5*x56+b7*a5*x57+b8*a5*x58;
x8=simplify[x8]
```

8u

```
y8= b6*a3*y36+b7*a3*y37+b8*a3*y38+
    b6*a4*y46+b7*a4*y47+b8*a4*y48+
    b6*a5*y56+b7*a5*y57+b8*a5*y58;
y8=simplify[y8]
```

8t

```
z8= b6*a3*z36+b7*a3*z37+b8*a3*z38+
    b6*a4*z46+b7*a4*z47+b8*a4*z48+
    b6*a5*z56+b7*a5*z57+b8*a5*z58;
z8=simplify[z8]
```

$4(-1+16t-16t^2-2u)$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T38

```
xt38=Limit[D[Limit[x8,u→ 1],t],t→ 3/8];
yt38=Limit[D[Limit[y8,u→ 1],t],t→ 3/8];
zt38=Limit[D[Limit[z8,u→ 1],t],t→ 3/8];
```

componentes de T37

```
xt37=Limit[D[Limit[x8,u→ 7/8],t],t→ 3/8];
yt37=Limit[D[Limit[y8,u→ 7/8],t],t→ 3/8];
zt37=Limit[D[Limit[z8,u→ 7/8],t],t→ 3/8];
```

componentes de T36

```
xt36=Limit[D[Limit[x8,u→ 6/8],t],t→ 3/8];
yt36=Limit[D[Limit[y8,u→ 6/8],t],t→ 3/8];
zt36=Limit[D[Limit[z8,u→ 6/8],t],t→ 3/8];
```

componentes de T46

```
xt46=Limit[D[Limit[x8,u→ 6/8],t],t→ 4/8];
yt46=Limit[D[Limit[y8,u→ 6/8],t],t→ 4/8];
zt46=Limit[D[Limit[z8,u→ 6/8],t],t→ 4/8];
```

componentes de T56

```
xt56=Limit[D[Limit[x8,u→ 6/8],t],t→ 5/8];
yt56=Limit[D[Limit[y8,u→ 6/8],t],t→ 5/8];
zt56=Limit[D[Limit[z8,u→ 6/8],t],t→ 5/8];
```

componentes de T57

```
xt57=Limit[D[Limit[x8,u→ 7/8],t],t→ 5/8];
yt57=Limit[D[Limit[y8,u→ 7/8],t],t→ 5/8];
zt57=Limit[D[Limit[z8,u→ 7/8],t],t→ 5/8];
```

componentes de T58

```
xt58=Limit[D[Limit[x8,u→ 1],t],t→ 5/8];
yt58=Limit[D[Limit[y8,u→ 1],t],t→ 5/8];
zt58=Limit[D[Limit[z8,u→ 1],t],t→ 5/8];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U36

```
xu36=Limit[D[Limit[x8,t→ 3/8],u],u→ 6/8];
yu36=Limit[D[Limit[y8,t→ 3/8],u],u→ 6/8];
zu36=Limit[D[Limit[z8,t→ 3/8],u],u→ 6/8];
```

componentes de U46

```
xu46=Limit[D[Limit[x8,t→ 4/8],u],u→ 6/8];
yu46=Limit[D[Limit[y8,t→ 4/8],u],u→ 6/8];
zu46=Limit[D[Limit[z8,t→ 4/8],u],u→ 6/8];
```

componentes de U56

```
xu56=Limit[D[Limit[x8,t→ 5/8],u],u→ 6/8];
yu56=Limit[D[Limit[y8,t→ 5/8],u],u→ 6/8];
zu56=Limit[D[Limit[z8,t→ 5/8],u],u→ 6/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E36

```
xe36= Limit[Limit[D[D[x8,t],u],t→ 3/8],u→ 6/8];
ye36= Limit[Limit[D[D[y8,t],u],t→ 3/8],u→ 6/8];
ze36= Limit[Limit[D[D[z8,t],u],t→ 3/8],u→ 6/8];
```

componentes de E56

```
xe56= Limit[Limit[D[D[x8,t],u],t→ 5/8],u→ 6/8];
ye56= Limit[Limit[D[D[y8,t],u],t→ 5/8],u→ 6/8];
ze56= Limit[Limit[D[D[z8,t],u],t→ 5/8],u→ 6/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x9= b6*a6*x66+b7*a6*x67+b8*a6*x68+
    b6*a7*x76+b7*a7*x77+b8*a7*x78+
    b6*a8*x86+b7*a8*x87+b8*a8*x88;
x9=simplify[x9]
```

8u

```
y9= b6*a6*y66+b7*a6*y67+b8*a6*y68+
    b6*a7*y76+b7*a7*y77+b8*a7*y78+
    b6*a8*y86+b7*a8*y87+b8*a8*y88;
y9=simplify[y9]
```

8t

```
z9= b6*a6*z66+b7*a6*z67+b8*a6*z68+
    b6*a7*z76+b7*a7*z77+b8*a7*z78+
    b6*a8*z86+b7*a8*z87+b8*a8*z88;
z9=simplify[z9]
```

8(2-t+u)

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T86

```
xt86=Limit[D[Limit[x9,u→ 6/8],t],t→ 1];
yt86=Limit[D[Limit[y9,u→ 6/8],t],t→ 1];
zt86=Limit[D[Limit[z9,u→ 6/8],t],t→ 1];
```

componentes de T76

```
xt76=Limit[D[Limit[x9,u→ 6/8],t],t→ 7/8];
yt76=Limit[D[Limit[y9,u→ 6/8],t],t→ 7/8];
zt76=Limit[D[Limit[z9,u→ 6/8],t],t→ 78];
```

componentes de T66

```
xt66=Limit[D[Limit[x9,u→ 6/8],t],t→ 6/8];
yt66=Limit[D[Limit[y9,u→ 6/8],t],t→ 6/8];
zt66=Limit[D[Limit[z9,u→ 6/8],t],t→ 6/8];
```

componentes de T67

```
xt67=Limit[D[Limit[x9,u→ 7/8],t],t→ 6/8];
yt67=Limit[D[Limit[y9,u→ 7/8],t],t→ 6/8];
zt67=Limit[D[Limit[z9,u→ 7/8],t],t→ 6/8];
```

componentes de T68

```
xt68=Limit[D[Limit[x9,u→ 1],t],t→ 6/8];
yt68=Limit[D[Limit[y9,u→ 1],t],t→ 6/8];
zt68=Limit[D[Limit[z9,u→ 1],t],t→ 6/8];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U86

```
xu86=Limit[D[Limit[x9,t→ 1],u],u→ 6/8];
yu86=Limit[D[Limit[y9,t→ 1],u],u→ 6/8];
zu86=Limit[D[Limit[z9,t→ 1],u],u→ 6/8];
```

componentes de U76

```
xu76=Limit[D[Limit[x9,t→ 7/8],u],u→ 6/8];
yu76=Limit[D[Limit[y9,t→ 7/8],u],u→ 6/8];
zu76=Limit[D[Limit[z9,t→ 7/8],u],u→ 6/8];
```

componentes de U66

```
xu66=Limit[D[Limit[x9,t→ 6/8],u],u→ 6/8];
yu66=Limit[D[Limit[y9,t→ 6/8],u],u→ 6/8];
zu66=Limit[D[Limit[z9,t→ 6/8],u],u→ 6/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E66

```
xe66= Limit[Limit[D[D[x9,t],u],t→ 6/8],u→ 6/8];
ye66= Limit[Limit[D[D[y9,t],u],t→ 6/8],u→ 6/8];
ze66= Limit[Limit[D[D[z9,t],u],t→ 6/8],u→ 6/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x110= b0*a9*x20+b1*a9*x21+b2*a9*x22+
      b0*a10*x30+b1*a10*x31+b2*a10*x32+
      b0*a11*xt20+b1*a11*xt21+b2*a11*xt22+
      b0*a12*xt30+b1*a12*xt31+b2*a12*xt32;
x110=simplify[x110]
```

8u

```
y110= b0*a9*y20+b1*a9*y21+b2*a9*y22+
      b0*a10*y30+b1*a10*y31+b2*a10*y32+
      b0*a11*yt20+b1*a11*yt21+b2*a11*yt22+
      b0*a12*yt30+b1*a12*yt31+b2*a12*yt32;
y110=simplify[y110]
```

8t

```
z110= b0*a9*z20+b1*a9*z21+b2*a9*z22+
      b0*a10*z30+b1*a10*z31+b2*a10*z32+
      b0*a11*zt20+b1*a11*zt21+b2*a11*zt22+
      b0*a12*zt30+b1*a12*zt31+b2*a12*zt32;
z110=simplify[z110]
```

$4(-3+34t-112t^2+128t^3+2u)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x111= b0*a13*x50+b1*a13*x51+b2*a13*x52+
      b0*a14*x60+b1*a14*x61+b2*a14*x62+
      b0*a15*xt50+b1*a15*xt51+b2*a15*xt52+
      b0*a16*xt60+b1*a16*xt61+b2*a16*xt62;
x111=simplify[x111]
```

8u

```
y111= b0*a13*y50+b1*a13*y51+b2*a13*y52+
      b0*a14*y60+b1*a14*y61+b2*a14*y62+
      b0*a15*yt50+b1*a15*yt51+b2*a15*yt52+
      b0*a16*yt60+b1*a16*yt61+b2*a16*yt62;
y111=simplify[y111]
```

8t

```
z111= b0*a13*z50+b1*a13*z51+b2*a13*z52+
      b0*a14*z60+b1*a14*z61+b2*a14*z62+
      b0*a15*zt50+b1*a15*zt51+b2*a15*zt52+
      b0*a16*zt60+b1*a16*zt61+b2*a16*zt62;
z111=simplify[z111]
```

$4(47-194t+272t^2-128t^3+2u)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x112= b9*a0*x02+b10*a0*x03+b11*a0*xu02+ b12*a0*xu03+
      b9*a1*x12+b10*a1*x13+b11*a1*xu12+ b12*a1*xu13+
      b9*a2*x22+b10*a2*x23+b11*a2*xu22+ b12*a2*xu23;
x112=simplify[x112]
```

8u

```
y112= b9*a0*y02+b10*a0*y03+b11*a0*yu02+ b12*a0*yu03+
      b9*a1*y12+b10*a1*y13+b11*a1*yu12+ b12*a1*yu13+
      b9*a2*y22+b10*a2*y23+b11*a2*yu22+ b12*a2*yu23;
```

```
y112=simplify[y112]

8t

z112= b9*a0*z02+b10*a0*z03+b11*a0*zu02+ b12*a0*zu03+
      b9*a1*z12+b10*a1*z13+b11*a1*zu12+ b12*a1*zu13+
      b9*a2*z22+b10*a2*z23+b11*a2*zu22+ b12*a2*zu23;
z112=simplify[z112]
```

$4(-3+2t+34u-112u^2+128u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x113= b9*a9*x22+b10*a9*x23+b11*a9*xu22+ b12*a9*xu23+
      b9*a10*x32+b10*a10*x33+b11*a10*xu32+ b12*a10*xu33+
      b9*a11*xt22+b10*a11*xt23+b11*a11*xe22+ b12*a11*xe23+
      b9*a12*xt32+b10*a12*xt33+b11*a12*xe32+ b12*a12*xe33;
x113=simplify[x113]

8u

y113= b9*a9*y22+b10*a9*y23+b11*a9*yu22+ b12*a9*yu23+
      b9*a10*y32+b10*a10*y33+b11*a10*yu32+ b12*a10*yu33+
      b9*a11*yt22+b10*a11*yt23+b11*a11*ye22+ b12*a11*ye23+
      b9*a12*yt32+b10*a12*yt33+b11*a12*ye32+ b12*a12*ye33;
y113=simplify[y113]

8t

z113= b9*a9*z22+b10*a9*z23+b11*a9*zu22+ b12*a9*zu23+
      b9*a10*z32+b10*a10*z33+b11*a10*zu32+ b12*a10*zu33+
      b9*a11*zt22+b10*a11*zt23+b11*a11*ze22+ b12*a11*ze23+
      b9*a12*zt32+b10*a12*zt33+b11*a12*ze32+ b12*a12*ze33;
z113=simplify[z113]
```

$8(-3+17t-56t^2+64t^3-17u-56u^2+64u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x114= b9*a3*x32+b10*a3*x33+b11*a3*xu32+ b12*a3*xu33+
      b9*a4*x42+b10*a4*x43+b11*a4*xu42+ b12*a4*xu43+
      b9*a5*x52+b10*a5*x53+b11*a5*xu52+ b12*a5*xu53;
x114=simplify[x114]

8u

y114= b9*a3*y32+b10*a3*y33+b11*a3*yu32+ b12*a3*yu33+
      b9*a4*y42+b10*a4*y43+b11*a4*yu42+ b12*a4*yu43+
```

```
        b9*a5*y52+b10*a5*y53+b11*a5*yu52+ b12*a5*yu53;
y114=simplify[y114]
```

912t

```
z114= b9*a3*z32+b10*a3*z33+b11*a3*zu32+ b12*a3*zu33+
      b9*a4*z42+b10*a4*z43+b11*a4*zu42+ b12*a4*zu43+
      b9*a5*z52+b10*a5*z53+b11*a5*zu52+ b12*a5*zu53;
z114=simplify[z114]
```

$8(-3+8t-8t^2+17u-56u^2+64u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x115= b9*a13*x52+b10*a53*x27+b11*a13*xu52+ b12*a13*xu53+
      b9*a14*x62+b10*a14*x63+b11*a14*xu62+ b12*a14*xu63+
      b9*a15*xt52+b10*a15*xt53+b11*a15*xe52+ b12*a15*xe53+
      b9*a16*xt62+b10*a16*xt63+b11*a16*xe62+ b12*a16*xe63;
x115=simplify[x115]
```

8u

```
y115= b9*a13*y52+b10*a53*y27+b11*a13*yu52+ b12*a13*yu53+
      b9*a14*y62+b10*a14*y63+b11*a14*yu62+ b12*a14*yu63+
      b9*a15*yt52+b10*a15*yt53+b11*a15*ye52+ b12*a15*ye53+
      b9*a16*yt62+b10*a16*yt63+b11*a16*ye62+ b12*a16*ye63;
y115=simplify[y115]
```

8t

```
z115= b9*a13*z52+b10*a53*z27+b11*a13*zu52+ b12*a13*zu53+
      b9*a14*z62+b10*a14*z63+b11*a14*zu62+ b12*a14*zu63+
      b9*a15*zt52+b10*a15*zt53+b11*a15*ze52+ b12*a15*ze53+
      b9*a16*zt62+b10*a16*zt63+b11*a16*ze62+ b12*a16*ze63;
z115=simplify[z115]
```

$8(22-97t+136t^2-64t^3+17u-56u^2+64u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x116= b9*a6*x62+b10*a6*x63+b11*a6*xu62+ b12*a6*xu63+
      b9*a7*x72+b10*a7*x73+b11*a7*xu72+ b12*a7*xu73+
      b9*a8*x82+b10*a8*x83+b11*a8*xu82+ b12*a8*xu83;
x116=simplify[x116]
```

8u

```
y116= b9*a6*y62+b10*a6*y63+b11*a6*yu62+ b12*a6*yu63+
```

```
        b9*a7*y72+b10*a7*y73+b11*a7*yu72+ b12*a7*yu73+
        b9*a8*y82+b10*a8*y83+b11*a8*yu82+ b12*a8*yu83;
y116=simplify[y116]
```

8t

```
z116= b9*a6*z62+b10*a6*z63+b11*a6*zu62+ b12*a6*zu63+
        b9*a7*z72+b10*a7*z73+b11*a7*zu72+ b12*a7*zu73+
        b9*a8*z82+b10*a8*z83+b11*a8*zu82+ b12*a8*zu83;
z116=simplify[z116]
```

$4(-1-2t+34u-112u^2+128u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x117= b3*a9*x23+b4*a9*x24+b5*a9*x25+
        b3*a10*x33+b4*a10*x34+b5*a10*x35+
        b3*a11*xt23+b4*a11*xt24+b5*a11*xt25+
        b3*a12*xt33+b4*a12*xt34+b5*a12*xt35;
x117=simplify[x117]
```

8u

```
y117= b3*a9*y23+b4*a9*y24+b5*a9*y25+
        b3*a10*y33+b4*a10*y34+b5*a10*y35+
        b3*a11*yt23+b4*a11*yt24+b5*a11*yt25+
        b3*a12*yt33+b4*a12*yt34+b5*a12*yt35;
y117=simplify[y117]
```

8t

```
z117= b3*a9*z23+b4*a9*z24+b5*a9*z25+
        b3*a10*z33+b4*a10*z34+b5*a10*z35+
        b3*a11*zt23+b4*a11*zt24+b5*a11*zt25+
        b3*a12*zt33+b4*a12*zt34+b5*a12*zt35;
z117=simplify[z117]
```

$8(-3+17t-56t^2+64t^3+8u-8u^2)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x118= b3*a13*x53+b4*a13*x54+b5*a13*x55+
        b3*a14*x63+b4*a14*x64+b5*a14*x65+
        b3*a15*xt53+b4*a15*xt54+b5*a15*xt55+
        b3*a16*xt63+b4*a16*xt64+b5*a16*xt65;
x118=simplify[x118]
```

8u

```
y118= b3*a13*y53+b4*a13*y54+b5*a13*y55+
      b3*a14*y63+b4*a14*y64+b5*a14*y65+
      b3*a15*yt53+b4*a15*yt54+b5*a15*yt55+
      b3*a16*yt63+b4*a16*yt64+b5*a16*yt65;
y118=simplify[y118]
```

8t

```
z118= b3*a13*z53+b4*a13*z54+b5*a13*z55+
      b3*a14*z63+b4*a14*z64+b5*a14*z65+
      b3*a15*zt53+b4*a15*zt54+b5*a15*zt55+
      b3*a16*zt63+b4*a16*zt64+b5*a16*zt65;
z118=simplify[z118]
```

$8(22-97t+136t^2-64t^3+8u-8u^2)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x119= b13*a0*x05+b14*a0*x06+b15*a0*xu05+ b16*a0*xu06+
      b13*a1*x15+b14*a1*x16+b15*a1*xu15+ b16*a1*xu16+
      b13*a2*x25+b14*a2*x26+b15*a2*xu25+ b16*a2*xu26;
x119=simplify[x119]
```

8u

```
y119= b13*a0*y05+b14*a0*y06+b15*a0*yu05+ b16*a0*yu06+
      b13*a1*y15+b14*a1*y16+b15*a1*yu15+ b16*a1*yu16+
      b13*a2*y25+b14*a2*y26+b15*a2*yu25+ b16*a2*yu26;
y119=simplify[y119]
```

8t

```
z119= b13*a0*z05+b14*a0*z06+b15*a0*zu05+ b16*a0*zu06+
      b13*a1*z15+b14*a1*z16+b15*a1*zu15+ b16*a1*zu16+
      b13*a2*z25+b14*a2*z26+b15*a2*zu25+ b16*a2*zu26;
z119=simplify[z119]
```

$4(47+2t-194u+272u^2-128u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x120= b13*a9*x25+b14*a9*x26+b15*a9*xu25+ b16*a9*xu26+
      b13*a10*x35+b14*a10*x36+b15*a10*xu35+ b16*a10*xu36+
      b13*a11*xt25+b14*a11*xt26+b15*a11*xe25+ b16*a11*xe26+
      b13*a12*xt35+b14*a12*xt36+b15*a12*xe35+ b16*a12*xe36;
x120=simplify[x120]
```

8u

```
y120= b13*a9*y25+b14*a9*y26+b15*a9*yu25+ b16*a9*yu26+
      b13*a10*y35+b14*a10*y36+b15*a10*yu35+ b16*a10*yu36+
      b13*a11*yt25+b14*a11*yt26+b15*a11*ye25+ b16*a11*ye26+
      b13*a12*yt35+b14*a12*yt36+b15*a12*ye35+ b16*a12*ye36;
y120=simplify[y120]
```

8t

```
z120= b13*a9*z25+b14*a9*z26+b15*a9*zu25+ b16*a9*zu26+
      b13*a10*z35+b14*a10*z36+b15*a10*zu35+ b16*a10*zu36+
      b13*a11*zt25+b14*a11*zt26+b15*a11*ze25+ b16*a11*ze26+
      b13*a12*zt35+b14*a12*zt36+b15*a12*ze35+ b16*a12*ze36;
z120=simplify[z120]
```

$8(22+17t-56t^2+64t^3-97u+136u^2-64u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x121= b13*a3*x35+b14*a3*x36+b15*a3*xu35+ b16*a3*xu36+
      b13*a4*x45+b14*a4*x46+b15*a4*xu45+ b16*a4*xu46+
      b13*a5*x55+b14*a5*x56+b15*a5*xu55+ b16*a5*xu56;
x121=simplify[x121]
```

8u

```
y121= b13*a3*y35+b14*a3*y36+b15*a3*yu35+ b16*a3*yu36+
      b13*a4*y45+b14*a4*y46+b15*a4*yu45+ b16*a4*yu46+
      b13*a5*y55+b14*a5*y56+b15*a5*yu55+ b16*a5*yu56;
y121=simplify[y121]
```

8t

```
z121= b13*a3*z35+b14*a3*z36+b15*a3*zu35+ b16*a3*zu36+
      b13*a4*z45+b14*a4*z46+b15*a4*zu45+ b16*a4*zu46+
      b13*a5*z55+b14*a5*z56+b15*a5*zu55+ b16*a5*zu56;
z121=simplify[z121]
```

$8(22+8t-8t^2-97u+136u^2-64u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x122= b13*a13*x55+b14*a13*x56+b15*a13*xu55+ b16*a13*xu56+
      b13*a14*x65+b14*a14*x66+b15*a14*xu65+ b16*a14*xu66+
      b13*a15*xt55+b14*a15*xt56+b15*a15*xe55+ b16*a15*xe56+
      b13*a16*xt65+b14*a16*xt66+b15*a16*xe65+ b16*a16*xe66;
x122=simplify[x122]
```

8u

```
y122= b13*a13*y55+b14*a13*y56+b15*a13*yu55+ b16*a13*yu56+
      b13*a14*y65+b14*a14*y66+b15*a14*yu65+ b16*a14*yu66+
      b13*a15*yt55+b14*a15*yt56+b15*a15*ye55+ b16*a15*ye56+
      b13*a16*yt65+b14*a16*yt66+b15*a16*ye65+ b16*a16*ye66;
y122=simplify[y122]
```

8t

```
z122= b13*a13*z55+b14*a13*z56+b15*a13*zu55+ b16*a13*zu56+
      b13*a14*z65+b14*a14*z66+b15*a14*zu65+ b16*a14*zu66+
      b13*a15*zt55+b14*a15*zt56+b15*a15*ze55+ b16*a15*ze56+
      b13*a16*zt65+b14*a16*zt66+b15*a16*ze65+ b16*a16*ze66;
z122=simplify[z122]
```

$8(47-97t+136t^2-64t^3-97u+136u^2-64u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x123= b13*a6*x65+b14*a6*x66+b15*a6*xu65+ b16*a6*xu66+
      b13*a7*x75+b14*a7*x76+b15*a7*xu75+ b16*a7*xu76+
      b13*a8*x85+b14*a8*x86+b15*a8*xu85+ b16*a8*xu86;
x123=simplify[x123]
```

8u

```
y123= b13*a6*y65+b14*a6*y66+b15*a6*yu65+ b16*a6*yu66+
      b13*a7*y75+b14*a7*y76+b15*a7*yu75+ b16*a7*yu76+
      b13*a8*y85+b14*a8*y86+b15*a8*yu85+ b16*a8*yu86;
y123=simplify[y123]
```

8t

```
z123= b13*a6*z65+b14*a6*z66+b15*a6*zu65+ b16*a6*zu66+
      b13*a7*z75+b14*a7*z76+b15*a7*zu75+ b16*a7*zu76+
      b13*a8*z85+b14*a8*z86+b15*a8*zu85+ b16*a8*zu86;
z123=simplify[z123]
```

$4(49-2t-194u+272u^2-128u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x124= b6*a9*x26+b7*a9*x27+b8*a9*x28+
      b6*a10*x36+b7*a10*x37+b8*a10*x38+
      b6*a11*xt26+b7*a11*xt27+b8*a11*xt28+
      b6*a12*xt36+b7*a12*xt37+b8*a12*xt38;
x124=simplify[x124]
```

8u

```
y124= b6*a9*y26+b7*a9*y27+b8*a9*y28+
      b6*a10*y36+b7*a10*y37+b8*a10*y38+
      b6*a11*yt26+b7*a11*yt27+b8*a11*yt28+
      b6*a12*yt36+b7*a12*yt37+b8*a12*yt38;
y124=simplify[y124]
```

8t

```
z124= b6*a9*z26+b7*a9*z27+b8*a9*z28+
      b6*a10*z36+b7*a10*z37+b8*a10*z38+
      b6*a11*zt26+b7*a11*zt27+b8*a11*zt28+
      b6*a12*zt36+b7*a12*zt37+b8*a12*zt38;
z124=simplify[z124]
```

$4(-1+34t-112t^2+128t^3-2u)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x125= b6*a13*x56+b7*a13*x57+b8*a13*x58+
      b6*a14*x66+b7*a14*x67+b8*a14*x68+
      b6*a15*xt56+b7*a15*xt57+b8*a15*xt58+
      b6*a16*xt66+b7*a16*xt67+b8*a16*xt68;
x125=simplify[x125]
```

8u

```
y125= b6*a13*y56+b7*a13*y57+b8*a13*y58+
      b6*a14*y66+b7*a14*y67+b8*a14*y68+
      b6*a15*yt56+b7*a15*yt57+b8*a15*yt58+
      b6*a16*yt66+b7*a16*yt67+b8*a16*yt68;
y125=simplify[y125]
```

8t

```
z124= b6*a9*z26+b7*a9*z27+b8*a9*z28+
      b6*a10*z36+b7*a10*z37+b8*a10*z38+
      b6*a11*zt26+b7*a11*zt27+b8*a11*zt28+
      b6*a12*zt36+b7*a12*zt37+b8*a12*zt38;
z124=simplify[z124]
```

$4(49-194t+272t^2-128t^3-2u)$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

```
c1=s.9x9.02-02=ParametricPlot3D[{x1,y1,z1},{t,0,2/8},{u,0,2/8},
PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];
```

c2=s.9x9.02-23=ParametricPlot3D[{x110,y110,z110},{t,2/8,3/8},{u,0,2/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c3=s.9x9.02-35=ParametricPlot3D[{x2,y2,z2},{t,3/8,5/8},{u,0,2/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c4=s.9x9.02-56=ParametricPlot3D[{x111,y111,z111},{t,5/8,6/8},{u,0,2/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c5=s.9x9.02-68=ParametricPlot3D[{x3,y3,z3},{t,6/8,1},{u,0,2/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c6=s.9x9.23-02=ParametricPlot3D[{x112,y112,z112},{t,0,2/8},{u,2/8,3/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c7=s.9x9.23-23=ParametricPlot3D[{x113,y113,z113},{t,2/8,3/8},{u,2/8,3/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c8=s.9x9.23-35=ParametricPlot3D[{x114,y114,z114},{t,3/8,5/8},{u,2/8,3/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c9=s.9x9.23-56=ParametricPlot3D[{x115,y115,z115},{t,5/8,6/8},{u,2/8,3/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c10=s.9x9.23-68=ParametricPlot3D[{x116,y116,z116},{t,6/8,1},{u,2/8,3/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c11=s.9x9.35-02=ParametricPlot3D[{x4,y4,z4},{t,0,2/8},{u,3/8,5/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c12=s.9x9.35-23=ParametricPlot3D[{x117,y117,z117},{t,2/8,3/8},{u,3/8,5/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c13=s.9x9.35-35=ParametricPlot3D[{x5,y5,z5},{t,3/8,5/8},{u,3/8,5/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c14=s.9x9.35-56=ParametricPlot3D[{x118,y118,z118},{t,5/8,6/8},{u,3/8,5/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c15=s.9x9.35-68=ParametricPlot3D[{x6,y6,z6},{t,6/8,1},{u,3/8,5/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c16=s.9x9.56-02=ParametricPlot3D[{x119,y119,z119},{t,0,2/8},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c17=s.9x9.56-23=ParametricPlot3D[{x120,y120,z120},{t,2/8,3/8},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c18=s.9x9.56-35=ParametricPlot3D[{x121,y121,z121},{t,3/8,5/8},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c19=s.9x9.56-56=ParametricPlot3D[{x122,y122,z122},{t,5/8,6/8},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c20=s.9x9.56-68=ParametricPlot3D[{x123,y123,z123},{t,6/8,1},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c21=s.9x9.68-02=ParametricPlot3D[{x7,y7,z7},{t,0,2/8},{u,6/8,1}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c22=s.9x9.68-23=ParametricPlot3D[{x124,y124,z124},{t,2/8,3/8},{u,6/8,1}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c23=s.9x9.68-35=ParametricPlot3D[{x8,y8,z8},{t,3/8,5/8},{u,6/8,1}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

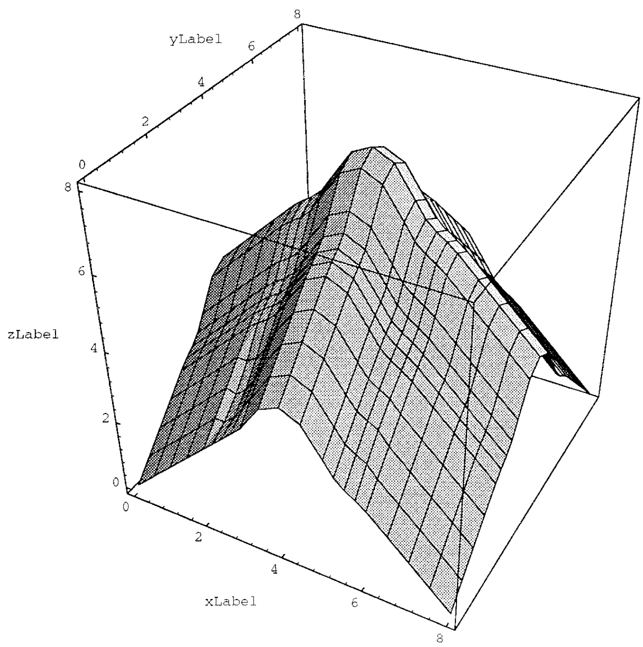
c24=s.9x9.68-56=ParametricPlot3D[{x125,y125,z125},{t,5/8,6/8},{u,6/8,1}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

c25=s.9x9.68-68=ParametricPlot3D[{x9,y9,z9},{t,6/8,1},{u,6/8,1}, PlotPoints→ 4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→ Identity];

DIBUJO DE LA SUPERFICIE TOTAL

Show[c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c110,c111,c112,c113,c114,c115,c16,c17,c18,

c19,c20,c21,c22,c23,c24,c25,DisplayFunction→ $DisplayFunction]



Ejemplo de superficie polinomial mixta que pasa por una red de 9x9 puntos para el diseño de un aliviadero: M-4

Off[General::spell]
Off[General::spell 1]

FUNCIONES PREVIAS

a0=32*t^2-12*t+1;

a1=-64*t^2+16*t;

a2=32*t^2-4*t;

a3=32*t^2-36*t+10;

a4=-64*t^2+64*t-15;

a5=32*t^2-28*t+6;

a6=32*t^2-60*t+28;

a7=-64*t^2+112*t-48;

a8=32*t^2-52*t+21;

a9=1024*t^3-960*t^2+288*t-27;

a10=-1024*t^3+960*t^2-288*t+28;

a11=64*t^3-64*t^2+21*t-9/4;

a12=64t^3-56*t^2+16*t-3/2;

a13=1024t^3-2112*t^2+1440*t-324;

a14=-1024t^3+2112*t^2-1440*t+325;

a15=64t^3-136*t^2+96*t-45/2;

a16=64t^3-128*t^2+85*t-75/4;

b0=32*u^2-12*u+1;

b1=-64*u^2+16*u;

b2=32*u^2-4*u;

b3=32*u^2-36*u+10;

```
b4=-64*u^2+64*u-15;

b5=32*u^2-28*u+6;

b6=32*u^2-60*u+28;

b7=-64*u^2+112*u-48;

b8=32*u^2-52*u+21;

b9=1024*u^3-960*u^2+288*u-27;

b10=-1024*u^3+960*u^2-288*u+28;

b11=64*u^3-64*u^2+21*u-9/4;

b12=64u^3-56*u^2+16*u-3/2;

b13=1024u^3-2112*u^2+1440*u-324;

b14=-1024u^3+2112*u^2-1440*u+325;

b15=64u^3-136*u^2+96*u-45/2;

b16=64u^3-128*u^2+85*u-75/4;
```

COORDENADAS DE LOS PUNTOS

```
coordenadas de P00
        x00=2.1213;
        y00=-2.1213;
        z00=7;

coordenadas de P01
        x01=2.4748;
        y01=-2.4748;
        z01=7;

coordenadas de P02
        x02=2.6516;
        y02=-2.6516;
        z02=5;

coordenadas de P03
        x03=2.8284;
        y03=-2.8284;
        z03=3;
```

coordenadas de P04
x04=5.3032;
y04=-5.3032;
z04=3;

coordenadas de P05
x05=7.7781;
y05=-7.7781;
z05=3;

coordenadas de P06
x06=7.9548;
y06=-7.9548;
z06=5;

coordenadas de P07
x07=8.1316;
y07=-8.1316;
z07=7;

coordenadas de P08
x08=8.4852;
y08=-8.4852;
z08=7;

coordenadas de P10
x10=3;
y10=0;
z10=10;

coordenadas de P11
x11=3.5;
y11=0;
z11=10;

coordenadas de P12
x12=3.75;
y12=0;
z12=8;

coordenadas de P13
x13=4;
y13=0;
z13=6;

coordenadas de P14
x14=7.5;
y14=0;
z14=6;

coordenadas de P15
x15=11;
y15=0;
z15=6;

coordenadas de P16
x16=11.25;
y16=0;
z16=8;

coordenadas de P17
x17=11.5;
y17=0;
z17=10;

coordenadas de P18
x18=12;
y18=0;
z18=10;

coordenadas de P20
x20=3;
y20=5;
z20=13;

coordenadas de P21
x21=3.5;
y21=5;
z21=13;

coordenadas de P22
x22=3.75;
y22=5;
z22=11;

coordenadas de P23
x23=4;
y23=5;
z23=9;

coordenadas de P24
x24=7.5;
y24=5;
z24=9;

coordenadas de P25
x25=11;
y25=5;
z25=9;

coordenadas de P26
x26=11.25;
y26=5;
z26=11;

coordenadas de P27
x27=11.5;
y27=5;
z27=13;

coordenadas de P28
x28=12;
y28=5;
z28=13;

coordenadas de P30
x30=3;
y30=10;
z30=17;

coordenadas de P31
x31=3.5;
y31=10;
z31=17;

coordenadas de P32
x32=3.75;
y32=10;
z32=15;

coordenadas de P33
x33=4;
y33=10;
z33=13;

coordenadas de P34
x34=7.5;
y34=10;
z34=13;

coordenadas de P35
x35=11;
y35=10;
z35=13;

coordenadas de P36
x36=11.25;
y36=10;
z36=15;

coordenadas de P37
x37=11.5;
y37=10;
z37=17;

coordenadas de P38
x38=12;
y38=10;
z38=17;

coordenadas de P40
x40=3;
y40=15;
z40=22;

coordenadas de P41
x41=3.5;
y41=15;
z41=22;

coordenadas de P42
x42=3.75;
y42=15;
z42=20;

coordenadas de P43
x43=4;
y43=15;
z43=18;

coordenadas de P44
x44=7.5;
y44=15;
z44=18;

coordenadas de P45
x45=11;
y45=15;
z45=18;

coordenadas de P46
x46=11.25;
y46=15;
z46=20;

coordenadas de P47
x47=11.5;
y47=15;
z47=22;

coordenadas de P48
x48=12;
y48=15;
z48=22;

coordenadas de P50
x50=3;
y50=20;
z50=28;

coordenadas de P51
x51=3.5;
y51=20;
z51=28;

coordenadas de P52
x52=3.75;
y52=20;
z52=26;

coordenadas de P53
x53=4;
y53=20;
z53=24;

coordenadas de P54
x54=7.5;
y54=20;
z54=24;

coordenadas de P55
x55=11;
y55=20;
z55=24;

coordenadas de P56
x56=11.25;
y56=20;
z56=26;

coordenadas de P57
x57=11.5;
y57=20;
z57=28;

coordenadas de P58
x58=12;
y58=20;
z58=28;

coordenadas de P60
x60=3;
y60=25;
z60=35;

coordenadas de P61
x61=3.5;
y61=25;
z61=35;

coordenadas de P62
x62=3.75;
y62=25;
z62=33;

coordenadas de P63
x63=4;
y63=25;
z63=31;

coordenadas de P64
x64=7.5;
y64=25;
z64=31;

coordenadas de P65
x65=11;
y65=25;
z65=31;

coordenadas de P66
x66=11.25;
y66=25;
z66=33;

coordenadas de P67
x67=11.25;
y67=25;
z67=35;

coordenadas de P68
x68=12;
y68=25;
z68=35;

coordenadas de P70
x70=3;
y70=30;
z70=36;

coordenadas de P71
x71=3.5;
y71=30;
z71=36;

coordenadas de P72
x72=3.75;
y72=30;
z72=35;

coordenadas de P73
x73=4;
y73=30;
z73=33;

coordenadas de P74
x74=7.5;
y74=30;
z74=33;

coordenadas de P75
x75=11;
y75=30;
z75=33;

coordenadas de P76
x76=11.25;
y76=30;
z76=35;

coordenadas de P77
x77=11.5;
y77=30;
z77=36;

coordenadas de P78
x78=12;
y78=30;
z78=36;

coordenadas de P80
x80=3;
y80=35;
z80=37;

coordenadas de P81
x81=3.5;
y81=35;
z81=37;

coordenadas de P82
x82=3.75;
y82=35;
z82=35;

coordenadas de P83
x83=4;
y83=35;
z83=33;

coordenadas de P84
x84=7.5;
y84=35;
z84=33;

coordenadas de P85
x85=11;
y85=35;
z85=33;

coordenadas de P86
x86=11.25;
y86=3.5;
z86=35;

coordenadas de P87
x87=11.5;
y87=35;
z87=37;

coordenadas de P88
x88=12;
y88=35;
z88=37;

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x1=b0*a0*x00+b1*a0*x01+b2*a0*x02+
   b0*a1*x10+b1*a1*x11+b2*a1*x12+
   b0*a2*x20+b1*a2*x21+b2*a2*x22;
x1=simplify[x1]
```

$2.1213+10.5444t-28.1184t^2+3.5348u+17.5824tu-46.8864t^2u-5.6544u^2-28.1472tu^2+75.0592t^2u^2$

```
y1=b0*a0*y00+b1*a0*y01+b2*a0*y02+
   b0*a1*y10+b1*a1*y11+b2*a1*y12+
   b0*a2*y20+b1*a2*y21+b2*a2*y22;
y1=simplify[y1]
```

-2.1213+5.4556t+921184t^2-3.5348u+42.4176tu-
113.114t^2u+5.6544u^2-67.8528tu^2+180.941t^2u^2

```
z1=b0*a0*z00+b1*a0*z01+b2*a0*z02+
    b0*a1*z10+b1*a1*z11+b2*a1*z12+
    b0*a2*z20+b1*a2*z21+b2*a2*z22;
z1=simplify[z1]
```

7+24t+8u-64u^2

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T20

```
xt20=Limit[D[Limit[x1,u→0],t],t→2/8];
yt20=Limit[D[Limit[y1,u→0],t],t→2/8];
zt20=Limit[D[Limit[z1,u→0],t],t→2/8];
```

componentes de T21

```
xt21=Limit[D[Limit[x1,u→1/8],t],t→2/8];
yt21=Limit[D[Limit[y1,u→1/8],t],t→2/8];
zt21=Limit[D[Limit[z1,u→1/8],t],t→2/8];
```

componentes de T22

```
xt22=Limit[D[Limit[x1,u→2/8],t],t→2/8];
yt22=Limit[D[Limit[y1,u→2/8],t],t→2/8];
zt22=Limit[D[Limit[z1,u→2/8],t],t→2/8];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U20

```
xu20=Limit[D[Limit[x1,t→2],u],u→0];
yu20=Limit[D[Limit[y1,t→2],u],u→0];
zu20=Limit[D[Limit[z1,t→2],u],u→0];
```

componentes de U21

```
xu21=Limit[D[Limit[x1,t→1/8],u],u→1/8];
yu21=Limit[D[Limit[y1,t→1/8],u],u→1/8];
zu21=Limit[D[Limit[z1,t→1/8],u],u→1/8];
```

componentes de U22

```
xu22=Limit[D[Limit[x1,t→2/8],u],u→2/8];
yu22=Limit[D[Limit[y1,t→2/8],u],u→2/8];
zu22=Limit[D[Limit[z1,t→2/8],u],u→2/8];
```

componentes de U12

```
xu12=Limit[D[Limit[x1,t→1/8],u],u→2/8];
yu12=Limit[D[Limit[y1,t→1/8],u],u→2/8];
```

```
zu12=Limit[D[Limit[z1,t→1/8],u],u→2/8];
```

componentes de U02

```
xu02=Limit[D[Limit[x1,t→0],u],u→2/8];
yu02=Limit[D[Limit[y1,t→0],u],u→2/8];
zu02=Limit[D[Limit[z1,t→0],u],u→2/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E20

```
xe20= Limit[Limit[D[D[x1,t],u],t→2/8],u→0];
ye20= Limit[Limit[D[D[y1,t],u],t→2/8],u→0];
ze20= Limit[Limit[D[D[z1,t],u],t→2/8],u→0];
```

componentes de E21

```
xe21= Limit[Limit[D[D[x1,t],u],t→2/8],u→1/8];
ye21= Limit[Limit[D[D[y1,t],u],t→2/8],u→1/8];
ze21= Limit[Limit[D[D[z1,t],u],t→2/8],u→1/8];
```

componentes de E22

```
xe22= Limit[Limit[D[D[x1,t],u],t→2/8],u→2/8];
ye22= Limit[Limit[D[D[y1,t],u],t→2/8],u→2/8];
ze22= Limit[Limit[D[D[z1,t],u],t→2/8],u→2/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x2= b0*a3*x30+b1*a3*x31+b2*a3*x32+
    b0*a4*x40+b1*a4*x41+b2*a4*x42+
    b0*a5*x50+b1*a5*x51+b2*a5*x52;
                x2=simplify[x2]
```

$3+5u-8u^2$

```
y2= b0*a3*y30+b1*a3*y31+b2*a3*y32+
    b0*a4*y40+b1*a4*y41+b2*a4*y42+
    b0*a5*y50+b1*a5*y51+b2*a5*y52;
y2=simplify[y2]
```

$-5+40t$

```
z2= b0*a3*z30+b1*a3*z31+b2*a3*z32+
    b0*a4*z40+b1*a4*z41+b2*a4*z42+
    b0*a5*z50+b1*a5*z51+b2*a5*z52;
z2=simplify[z2]
```

$4(2+3t+8t^2+2u-16u^2)$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T30

```
xt30=Limit[D[Limit[x2,u→0],t],t→3/8];
yt30=Limit[D[Limit[y2,u→0],t],t→3/8];
zt30=Limit[D[Limit[z2,u→0],t],t→3/8];
```

componentes de T31

```
xt31=Limit[D[Limit[x2,u→1/8],t],t→3/8];
yt31=Limit[D[Limit[y2,u→1/8],t],t→3/8];
zt31=Limit[D[Limit[z2,u→1/8],t],t→3/8];
```

componentes de T32

```
xt32=Limit[D[Limit[x2,u→2/8],t],t→3/8];
yt32=Limit[D[Limit[y2,u→2/8],t],t→3/8];
zt32=Limit[D[Limit[z2,u→2/8],t],t→3/8];
```

componentes de T42

```
xt42=Limit[D[Limit[x2,u→2/8],t],t→4/8];
yt42=Limit[D[Limit[y2,u→2/8],t],t→4/8];
zt42=Limit[D[Limit[z2,u→2/8],t],t→4/8];
```

componentes de T52

```
xt52=Limit[D[Limit[x2,u→2/8],t],t→5/8];
yt52=Limit[D[Limit[y2,u→2/8],t],t→5/8];
zt52=Limit[D[Limit[z2,u→2/8],t],t→5/8];
```

componentes de T51

```
xt51=Limit[D[Limit[x2,u→1/8],t],t→5/8];
yt51=Limit[D[Limit[y2,u→1/8],t],t→5/8];
zt51=Limit[D[Limit[z2,u→1/8],t],t→5/8];
```

componentes de T50

```
xt50=Limit[D[Limit[x2,u→0],t],t→5/8];
yt50=Limit[D[Limit[y2,u→0],t],t→5/8];
zt50=Limit[D[Limit[z2,u→0],t],t→5/8];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U32

```
xu32=Limit[D[Limit[x2,t→3/8],u],u→2/8];
yu32=Limit[D[Limit[y2,t→3/8],u],u→2/8];
zu32=Limit[D[Limit[z2,t→3/8],u],u→2/8];
```

componentes de U42

```
xu42=Limit[D[Limit[x2,t→4/8],u],u→2/8];
yu42=Limit[D[Limit[y2,t→4/8],u],u→2/8];
```

zu42=Limit[D[Limit[z2,t→4/8],u],u→2/8];

componentes de U52
xu52=Limit[D[Limit[x2,t→5/8],u],u→2/8];
yu52=Limit[D[Limit[y2,t→5/8],u],u→2/8];
zu52=Limit[D[Limit[z2,t→5/8],u],u→2/8];

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E32
xe32= Limit[Limit[D[D[x2,t],u],t→3/8],u→2/8];
ye32= Limit[Limit[D[D[y2,t],u],t→3/8],u→2/8];
ze32= Limit[Limit[D[D[z2,t],u],t→3/8],u→2/8];

componentes de E52
xe52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→5/8,u→2/8];
ye52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→5/8,u→2/8];
ze52= Limit[Limit[D[x2,t],u],t→5/8,u→2/8];

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x3= b0*a6*x60+b1*a6*x61+b2*a6*x62+
b0*a7*x70+b1*a7*x71+b2*a7*x72+
b0*a8*x80+b1*a8*x81+b2*a8*x82;
x3=simplify[x3]

$3+5u-8u^2$

y3= b0*a6*y60+b1*a6*y61+b2*a6*y62+
b0*a7*y70+b1*a7*y71+b2*a7*y72+
b0*a8*y80+b1*a8*y81+b2*a8*y82;
y3=simplify[y3]

-5+40t

z3= b0*a6*z60+b1*a6*z61+b2*a6*z62+
b0*a7*z70+b1*a7*z71+b2*a7*z72+
b0*a8*z80+b1*a8*z81+b2*a8*z82;
z3=simplify[z3]

$29+8t+200u-448tu+256t^2u-1600u^2+3584tu^{2-}2048t^2u^2$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T60
xt60=Limit[D[Limit[x3,u→0],t],t→6/8];

```
yt60=Limit[D[Limit[y3,u→0],t],t→6/8];
zt60=Limit[D[Limit[z3,u→0],t],t→6/8];
```

componentes de T61

```
xt61=Limit[D[Limit[x3,u→1/8],t],t→6/8];
yt61=Limit[D[Limit[y3,u→1/8],t],t→6/8];
zt61=Limit[D[Limit[z3,u→1/8],t],t→6/8];
```

componentes de T62

```
xt62=Limit[D[Limit[x3,u→2/8],t],t→6/8];
yt62=Limit[D[Limit[y3,u→2/8],t],t→6/8];
zt62=Limit[D[Limit[z3,u→2/8],t],t→6/8];
```

componentes de T72

```
xt72=Limit[D[Limit[x3,u→2/8],t],t→7/8];
yt72=Limit[D[Limit[y3,u→2/8],t],t→7/8];
zt72=Limit[D[Limit[z3,u→2/8],t],t→7/8];
```

componentes de T82

```
xt82=Limit[D[Limit[x3,u→2/8],t],t→1];
yt82=Limit[D[Limit[y3,u→2/8],t],t→1];
zt82=Limit[D[Limit[z3,u→2/8],t],t→1];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U62

```
xu62=Limit[D[Limit[x3,t→6/8],u],u→2/8];
yu62=Limit[D[Limit[y3,t→6/8],u],u→2/8];
zu62=Limit[D[Limit[z3,t→6/8],u],u→2/8];
```

componentes de U72

```
xu72=Limit[D[Limit[x3,t→7/8],u],u→2/8];
yu72=Limit[D[Limit[y3,t→7/8],u],u→2/8];
zu72=Limit[D[Limit[z3,t→7/8],u],u→2/8];
```

componentes de U82

```
xu82=Limit[D[Limit[x3,t→1],u],u→2/8];
yu82=Limit[D[Limit[y3,t→1],u],u→2/8];
zu82=Limit[D[Limit[z3,t→1],u],u→2/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E62

```
xe62= Limit[Limit[D[D[x3,t],u],t→6/8],u→2/8];
ye62= Limit[Limit[D[D[y3,t],u],t→6/8],u→2/8];
ze62= Limit[Limit[D[D[z3,t],u],t→6/8],u→2/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x4= b3*a0*x03+b4*a0*x04+b5*a0*x05+
    b3*a1*x13+b4*a1*x14+b5*a1*x15+
    b3*a2*x23+b4*a2*x24+b5*a2*x25;
x4=simplify[x4]
```

$-4.5954-22.8552t+60.9472t^2+19.7956u+98.4528tu-262.541t^2u+0.0032u^2-0.0384tu^2+0.1024t^2u^2$

```
y4= b3*a0*y03+b4*a0*y04+b5*a0*y05+
    b3*a1*y13+b4*a1*y14+b5*a1*y15+
    b3*a2*y23+b4*a2*y24+b5*a2*y25;
y4=simplify[y4]
```

$4.5954-75.1448t+307.053t^2+19.7956u+237.547tu-633.459t^2u-0.0032u^2+0.0384tu^2-0.1024t^2u^2$

```
z4= b3*a0*z03+b4*a0*z04+b5*a0*z05+
    b3*a1*z13+b4*a1*z14+b5*a1*z15+
    b3*a2*z23+b4*a2*z24+b5*a2*z25;
z4=simplify[z4]
```

3+24t

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T03

```
xt03=Limit[D[Limit[x4,u→3/8],t],t→0];
yt03=Limit[D[Limit[y4,u→3/8],t],t→0];
zt03=Limit[D[Limit[z4,u→3/8],t],t→0];
```

componentes de T13

```
xt13=Limit[D[Limit[x4,u→3/8],t],t→1/8];
yt13=Limit[D[Limit[y4,u→3/8],t],t→1/8];
zt13=Limit[D[Limit[z4,u→3/8],t],t→1/8];
```

componentes de T23

```
xt23=Limit[D[Limit[x4,u→3/8],t],t→2/8];
yt23=Limit[D[Limit[y4,u→3/8],t],t→2/8];
zt23=Limit[D[Limit[z4,u→3/8],t],t→2/8];
```

componentes de T24

```
xt24=Limit[D[Limit[x4,u→4/8],t],t→2/8];
yt24=Limit[D[Limit[y4,u→4/8],t],t→2/8];
zt24=Limit[D[Limit[z4,u→4/8],t],t→2/8];
```

componentes de T25

xt25=Limit[D[Limit[x4,u→5/8],t],t→2/8];
yt25=Limit[D[Limit[y4,u→5/8],t],t→2/8];
zt25=Limit[D[Limit[z4,u→5/8],t],t→2/8];

componentes de T15
xt15=Limit[D[Limit[x4,u→5/8],t],t→1/8];
yt15=Limit[D[Limit[y4,u→5/8],t],t→1/8];
zt15=Limit[D[Limit[z4,u→5/8],t],t→1/8];

componentes de T05
xt05=Limit[D[Limit[x4,u→5/8],t],t→0];
yt05=Limit[D[Limit[y4,u→5/8],t],t→0];
zt05=Limit[D[Limit[z4,u→5/8],t],t→0];

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U03
xu03=Limit[D[Limit[x4,t→0],u],u→3/8];
yu03=Limit[D[Limit[y4,t→0],u],u→3/8];
zu03=Limit[D[Limit[z4,t→0],u],u→3/8];

componentes de U13
xu13=Limit[D[Limit[x4,t→1/8],u],u→3/8];
yu13=Limit[D[Limit[y4,t→1/8],u],u→3/8];
zu13=Limit[D[Limit[z4,t→1/8],u],u→3/8];

componentes de U23
xu23=Limit[D[Limit[x4,t→2/8],u],u→3/8];
yu23=Limit[D[Limit[y4,t→2/8],u],u→3/8];
zu23=Limit[D[Limit[z4,t→2/8],u],u→3/8];

componentes de U25
xu25=Limit[D[Limit[x4,t→2/8],u],u→5/8];
yu25=Limit[D[Limit[y4,t→2/8],u],u→5/8];
zu25=Limit[D[Limit[z4,t→2/8],u],u→5/8];

componentes de U15
xu15=Limit[D[Limit[x4,t→1/8],u],u→5/8];
yu15=Limit[D[Limit[y4,t→1/8],u],u→5/8];
zu15=Limit[D[Limit[z4,t→1/8],u],u→5/8];

componentes de U05
xu05=Limit[D[Limit[x4,t→0],u],u→5/8];
yu05=Limit[D[Limit[y4,t→0],u],u→5/8];
zu05=Limit[D[Limit[z4,t→0],u],u→5/8];

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E23

```
xe23= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→2/8],u→3/8];
ye23= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→2/8],u→3/8];
ze23= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→2/8],u→3/8];
```

componentes de E25

```
xe25= Limit[Limit[D[D[x4,t],u],t→2/8],u→5/8];
ye25= Limit[Limit[D[D[y4,t],u],t→2/8],u→5/8];
ze25= Limit[Limit[D[D[z4,t],u],t→2/8],u→5/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x5= b3*a3*x33+b4*a3*x34+b5*a3*x35+
    b3*a4*x43+b4*a4*x44+b5*a4*x45+
    b3*a5*x53+b4*a5*x54+b5*a5*x55;
                x5=simplify[x5]
```

-6.5+28u

```
y5= b3*a3*y33+b4*a3*y34+b5*a3*y35+
    b3*a4*y43+b4*a4*y44+b5*a4*y45+
    b3*a5*y53+b4*a5*y54+b5*a5*y55;
y5=simplify[y5]
```

-5+40t

```
z5= b3*a3*z33+b4*a3*z34+b5*a3*z35+
    b3*a4*z43+b4*a4*z44+b5*a4*z45+
    b3*a5*z53+b4*a5*z54+b5*a5*z55;
z5=simplify[z5]
```

$4+12t+32t^2$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T33

```
xt33=Limit[D[Limit[x5,u→3/8],t],t→3/8];
yt33=Limit[D[Limit[y5,u→3/8],t],t→3/8];
zt33=Limit[D[Limit[z5,u→3/8],t],t→3/8];
```

componentes de T34

```
xt34=Limit[D[Limit[x5,u→4/8],t],t→3/8];
yt34=Limit[D[Limit[y5,u→4/8],t],t→3/8];
zt34=Limit[D[Limit[z5,u→4/8],t],t→3/8];
```

componentes de T35

xt35=Limit[D[Limit[x5,u→5/8],t],t→3/8];
yt35=Limit[D[Limit[y5,u→5/8],t],t→3/8];
zt35=Limit[D[Limit[z5,u→5/8],t],t→3/8];

componentes de T45
xt45=Limit[D[Limit[x5,u→5/8],t],t→4/8];
yt45=Limit[D[Limit[y5,u→5/8],t],t→4/8];
zt45=Limit[D[Limit[z5,u→5/8],t],t→4/8];

componentes de T55
xt55=Limit[D[Limit[x5,u→5/8],t],t→5/8];
yt55=Limit[D[Limit[y5,u→5/8],t],t→5/8];
zt55=Limit[D[Limit[z5,u→5/8],t],t→5/8];

componentes de T54
xt54=Limit[D[Limit[x5,u→4/8],t],t→5/8];
yt54=Limit[D[Limit[y5,u→4/8],t],t→5/8];
zt54=Limit[D[Limit[z5,u→4/8],t],t→5/8];

componentes de T53
xt53=Limit[D[Limit[x5,u→3/8],t],t→5/8];
yt53=Limit[D[Limit[y5,u→3/8],t],t→5/8];
zt53=Limit[D[Limit[z5,u→3/8],t],t→5/8];

componentes de T43
xt43=Limit[D[Limit[x5,u→3/8],t],t→4/8];
yt43=Limit[D[Limit[y5,u→3/8],t],t→4/8];
zt43=Limit[D[Limit[z5,u→3/8],t],t→4/8];

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U33
xu33=Limit[D[Limit[x5,t→3/8],u],u→3/8];
yu33=Limit[D[Limit[y5,t→3/8],u],u→3/8];
zu33=Limit[D[Limit[z5,t→3/8],u],u→3/8];

componentes de U35
xu35=Limit[D[Limit[x5,t→3/8],u],u→5/8];
yu35=Limit[D[Limit[y5,t→3/8],u],u→5/8];
zu35=Limit[D[Limit[z5,t→3/8],u],u→5/8];

componentes de U45
xu45=Limit[D[Limit[x5,t→4/8],u],u→5/8];
yu45=Limit[D[Limit[y5,t→4/8],u],u→5/8];
zu45=Limit[D[Limit[z5,t→4/8],u],u→5/8];

componentes de U55
xu55=Limit[D[Limit[x5,t→5/8],u],u→5/8];

```
yu55=Limit[D[Limit[y5,t→5/8],u],u→5/8];
zu55=Limit[D[Limit[z5,t→5/8],u],u→5/8];
```

componentes de U53

```
xu53=Limit[D[Limit[x5,t→5/8],u],u→3/8];
yu53=Limit[D[Limit[y5,t→5/8],u],u→3/8];
zu53=Limit[D[Limit[z5,t→5/8],u],u→3/8];
```

componentes de U43

```
xu43=Limit[D[Limit[x5,t→4/8],u],u→3/8];
yu43=Limit[D[Limit[y5,t→4/8],u],u→3/8];
zu43=Limit[D[Limit[z5,t→4/8],u],u→3/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E33

```
xe33= Limit[Limit[D[D[x5,t],u],t→3/8],u→3/8];
ye33= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t→3/8],u→3/8];
ze33= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t→3/8],u→3/8];
```

componentes de E35

```
xe35= Limit[Limit[D[D[x5,t],u],t→3/8],u→5/8];
ye35= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t→3/8],u→5/8];
ze35= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t→3/8],u→5/8];
```

componentes de E55

```
xe55= Limit[Limit[D[D[x5,t],u],t→5/8],u→5/8];
ye55= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t→5/8],u→5/8];
ze55= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t→5/8],u→5/8];
```

componentes de E53

```
xe53= Limit[Limit[D[D[x5,t],u],t→5/8],u→3/8];
ye53= Limit[Limit[D[D[y5,t],u],t→5/8],u→3/8];
ze53= Limit[Limit[D[D[z5,t],u],t→5/8],u→3/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x6= b3*a6*x63+b4*a6*x64+b5*a6*x65+
    b3*a7*x73+b4*a7*x74+b5*a7*x75+
    b3*a8*x83+b4*a8*x84+b5*a8*x85;
x6=simplify[x6]

-6.5+28u

y6= b3*a6*y63+b4*a6*y64+b5*a6*y65+
    b3*a7*y73+b4*a7*y74+b5*a7*y75+
    b3*a8*y83+b4*a8*y84+b5*a8*y85;
y6=simplify[y6]
```

-5+40t

```
z6= b3*a6*z63+b4*a6*z64+b5*a6*z65+
    b3*a7*z73+b4*a7*z74+b5*a7*z75+
    b3*a8*z83+b4*a8*z84+b5*a8*z85;
z6=simplify[z6]
```

$-23+120t -64t^2$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T83

```
xt83=Limit[D[Limit[x6,u→3/8],t],t→1];
yt83=Limit[D[Limit[y6,u→3/8],t],t→1];
zt83=Limit[D[Limit[z6,u→3/8],t],t→1];
```

componentes de T73

```
xt73=Limit[D[Limit[x6,u→3/8],t],t→7/8];
yt73=Limit[D[Limit[y6,u→3/8],t],t→7/8];
zt73=Limit[D[Limit[z6,u→3/8],t],t→7/8];
```

componentes de T63

```
xt63=Limit[D[Limit[x6,u→3/8],t],t→6/8];
yt63=Limit[D[Limit[y6,u→3/8],t],t→6/8];
zt63=Limit[D[Limit[z6,u→3/8],t],t→6/8];
```

componentes de T64

```
xt64=Limit[D[Limit[x6,u→4/8],t],t→6/8];
yt64=Limit[D[Limit[y6,u→4/8],t],t→6/8];
zt64=Limit[D[Limit[z6,u→4/8],t],t→6/8];
```

componentes de T65

```
xt65=Limit[D[Limit[x6,u→5/8],t],t→6/8];
yt65=Limit[D[Limit[y6,u→5/8],t],t→6/8];
zt65=Limit[D[Limit[z6,u→5/8],t],t→6/8];
```

componentes de T75

```
xt75=Limit[D[Limit[x6,u→5/8],t],t→7/8];
yt75=Limit[D[Limit[y6,u→5/8],t],t→7/8];
zt75=Limit[D[Limit[z6,u→5/8],t],t→7/8];
```

componentes de T85

```
xt85=Limit[D[Limit[x6,u→5/8],t],t→1];
yt85=Limit[D[Limit[y6,u→5/8],t],t→1];
zt85=Limit[D[Limit[z6,u→5/8],t],t→1];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U83

```
xu83=Limit[D[Limit[x6,t→1],u],u→3/8];
yu83=Limit[D[Limit[y6,t→1],u],u→3/8];
zu83=Limit[D[Limit[z6,t→1],u],u→3/8];
```

componentes de U73

```
xu73=Limit[D[Limit[x6,t→7/8],u],u→3/8];
yu73=Limit[D[Limit[y6,t→7/8],u],u→3/8];
zu73=Limit[D[Limit[z6,t→7/8],u],u→3/8];
```

componentes de U63

```
xu63=Limit[D[Limit[x6,t→6/8],u],u→3/8];
yu63=Limit[D[Limit[y6,t→6/8],u],u→3/8];
zu63=Limit[D[Limit[z6,t→6/8],u],u→3/8];
```

componentes de U65

```
xu65=Limit[D[Limit[x6,t→6/8],u],u→5/8];
yu65=Limit[D[Limit[y6,t→6/8],u],u→5/8];
zu65=Limit[D[Limit[z6,t→6/8],u],u→5/8];
```

componentes de U75

```
xu75=Limit[D[Limit[x6,t→7/8],u],u→5/8];
yu75=Limit[D[Limit[y6,t→7/8],u],u→5/8];
zu75=Limit[D[Limit[z6,t→7/8],u],u→5/8];
```

componentes de U85

```
xu85=Limit[D[Limit[x6,t→1],u],u→5/8];
yu85=Limit[D[Limit[y6,t→1],u],u→5/8];
zu85=Limit[D[Limit[z6,t→1],u],u→5/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E63

```
xe63= Limit[Limit[D[D[x6,t],u],t→6/8],u→3/8];
ye63= Limit[Limit[D[D[y6,t],u],t→6/8],u→3/8];
ze63= Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t→6/8],u→3/8];
```

componentes de E65

```
xe65= Limit[Limit[D[D[x6,t],u],t→6/8],u→5/8];
ye65= Limit[Limit[D[D[y6,t],u],t→6/8],u→5/8];
ze65= Limit[Limit[D[D[z6,t],u],t→6/8],u→5/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x7= b6*a0*x06+b7*a0*x07+b8*a0*x08+
    b6*a1*x16+b7*a1*x17+b8*a1*x18+
    b6*a2*x26+b7*a2*x27+b8*a2*x28;
```

```
x7=simplify[x7]
```

10.6068+52.7184t-140.582t^2-7.7792u-38.6496tu+103.066t^2u+5.6576u^2+28.1088tu^2-74.9568t^2u^2

```
y7= b6*a0*y06+b7*a0*y07+b8*a0*y08+
    b6*a1*y16+b7*a1*y17+b8*a1*y18+
    b6*a2*y26+b7*a2*y27+b8*a2*y28;
y7=simplify[y7]
```

-10.6068+107.282t-179.418t^2+7.7792u-93.3504tu+248.934t^2u-5.6576u^2+67.8912tu^2-181.043t^2u^2

```
z7= b6*a0*z06+b7*a0*z07+b8*a0*z08+
    b6*a1*z16+b7*a1*z17+b8*a1*z18+
    b6*a2*z26+b7*a2*z27+b8*a2*z28;
z7=simplify[z7]
```

-49+24t-120u-64u^2

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

```
componentes de T06
        xt06=Limit[D[Limit[x7,u→6/8],t],t→0];
        yt06=Limit[D[Limit[y7,u→6/8],t],t→0];
        zt06=Limit[D[Limit[z7,u→6/8],t],t→0];

componentes de T16
        xt16=Limit[D[Limit[x7,u→6/8],t],t→1/8];
        yt16=Limit[D[Limit[y7,u→6/8],t],t→1/8];
        zt16=Limit[D[Limit[z7,u→6/8],t],t→1/8];

componentes de T26
        xt26=Limit[D[Limit[x7,u→6/8],t],t→2/8];
        yt26=Limit[D[Limit[y7,u→6/8],t],t→2/8];
        zt26=Limit[D[Limit[z7,u→6/8],t],t→2/8];

componentes de T27
        xt27=Limit[D[Limit[x7,u→7/8],t],t→2/8];
        yt27=Limit[D[Limit[y7,u→7/8],t],t→2/8];
        zt27=Limit[D[Limit[z7,u→7/8],t],t→2/8];

componentes de T28
        xt28=Limit[D[Limit[x7,u→1],t],t→2/8];
        yt28=Limit[D[Limit[y7,u→1],t],t→2/8];
        zt28=Limit[D[Limit[z7,u→1],t],t→2/8];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U06

```
xu06=Limit[D[Limit[x7,t→0],u],u→6/8];
yu06=Limit[D[Limit[y7,t→0],u],u→6/8];
zu06=Limit[D[Limit[z7,t→0],u],u→6/8];
```

componentes de U16

```
xu16=Limit[D[Limit[x7,t→1/8],u],u→6/8];
yu16=Limit[D[Limit[y7,t→1/8],u],u→6/8];
zu16=Limit[D[Limit[z7,t→1/8],u],u→6/8];
```

componentes de U26

```
xu26=Limit[D[Limit[x7,t→2/8],u],u→6/8];
yu26=Limit[D[Limit[y7,t→2/8],u],u→6/8];
zu26=Limit[D[Limit[z7,t→2/8],u],u→6/8];
```

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E26

```
xe26= Limit[Limit[D[D[x7,t],u],t→2/8],u→6/8];
ye26= Limit[Limit[D[D[y7,t],u],t→2/8],u→6/8];
ze26= Limit[Limit[D[D[z7,t],u],t→2/8],u→6/8];
```

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x8= b6*a3*x36+b7*a3*x37+b8*a3*x38+
    b6*a4*x46+b7*a4*x47+b8*a4*x48+
    b6*a5*x56+b7*a5*x57+b8*a5*x58;
x8=simplify[x8]
```

$15-11u+8u^2$

```
y8= b6*a3*y36+b7*a3*y37+b8*a3*y38+
    b6*a4*y46+b7*a4*y47+b8*a4*y48+
    b6*a5*y56+b7*a5*y57+b8*a5*y58;
y8=simplify[y8]
```

$-5+40t$

```
z8= b6*a3*z36+b7*a3*z37+b8*a3*z38+
    b6*a4*z46+b7*a4*z47+b8*a4*z48+
    b6*a5*z56+b7*a5*z57+b8*a5*z58;
z8=simplify[z8]
```

$4(-12+3t+8t^2+30u-16u^2)$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T38

```
xt38=Limit[D[Limit[x8,u→1],t],t→3/8];
yt38=Limit[D[Limit[y8,u→1],t],t→3/8];
zt38=Limit[D[Limit[z8,u→1],t],t→3/8];
```

componentes de T37

```
xt37=Limit[D[Limit[x8,u→7/8],t],t→3/8];
yt37=Limit[D[Limit[y8,u→7/8],t],t→3/8];
zt37=Limit[D[Limit[z8,u→7/8],t],t→3/8];
```

componentes de T36

```
xt36=Limit[D[Limit[x8,u→6/8],t],t→3/8];
yt36=Limit[D[Limit[y8,u→6/8],t],t→3/8];
zt36=Limit[D[Limit[z8,u→6/8],t],t→3/8];
```

componentes de T46

```
xt46=Limit[D[Limit[x8,u→6/8],t],t→4/8];
yt46=Limit[D[Limit[y8,u→6/8],t],t→4/8];
zt46=Limit[D[Limit[z8,u→6/8],t],t→4/8];
```

componentes de T56

```
xt56=Limit[D[Limit[x8,u→6/8],t],t→5/8];
yt56=Limit[D[Limit[y8,u→6/8],t],t→5/8];
zt56=Limit[D[Limit[z8,u→6/8],t],t→5/8];
```

componentes de T57

```
xt57=Limit[D[Limit[x8,u→7/8],t],t→5/8];
yt57=Limit[D[Limit[y8,u→7/8],t],t→5/8];
zt57=Limit[D[Limit[z8,u→7/8],t],t→5/8];
```

componentes de T58

```
xt58=Limit[D[Limit[x8,u→1],t],t→5/8];
yt58=Limit[D[Limit[y8,u→1],t],t→5/8];
zt58=Limit[D[Limit[z8,u→1],t],t→5/8];
```

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U36

```
xu36=Limit[D[Limit[x8,t→3/8],u],u→6/8];
yu36=Limit[D[Limit[y8,t→3/8],u],u→6/8];
zu36=Limit[D[Limit[z8,t→3/8],u],u→6/8];
```

componentes de U46

```
xu46=Limit[D[Limit[x8,t→4/8],u],u→6/8];
yu46=Limit[D[Limit[y8,t→4/8],u],u→6/8];
zu46=Limit[D[Limit[z8,t→4/8],u],u→6/8];
```

componentes de U56

```
xu56=Limit[D[Limit[x8,t→5/8],u],u→6/8];
```

yu56=Limit[D[Limit[y8,t→5/8],u],u→6/8];
zu56=Limit[D[Limit[z8,t→5/8],u],u→6/8];

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E36
xe36= Limit[Limit[D[D[x8,t],u],t→3/8],u→6/8];
ye36= Limit[Limit[D[D[y8,t],u],t→3/8],u→6/8];
ze36= Limit[Limit[D[D[z8,t],u],t→3/8],u→6/8];

componentes de E56
xe56= Limit[Limit[D[D[x8,t],u],t→5/8],u→6/8];
ye56= Limit[Limit[D[D[y8,t],u],t→5/8],u→6/8];
ze56= Limit[Limit[D[D[z8,t],u],t→5/8],u→6/8];

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x9= b6*a6*x66+b7*a6*x67+b8*a6*x68+
b6*a7*x76+b7*a7*x77+b8*a7*x78+
b6*a8*x86+b7*a8*x87+b8*a8*x88;
x9=simplify[x9]

$15-11u+8u^2$

y9= b6*a6*y66+b7*a6*y67+b8*a6*y68+
b6*a7*y76+b7*a7*y77+b8*a7*y78+
b6*a8*y86+b7*a8*y87+b8*a8*y88;
y9=simplify[y9]

-5+40t

z9= b6*a6*z66+b7*a6*z67+b8*a6*z68+
b6*a7*z76+b7*a7*z77+b8*a7*z78+
b6*a8*z86+b7*a8*z87+b8*a8*z88;
z9=simplify[z9]

$-1371+3144t-1792t^2+3000u-6720tu+3840t^2u-1600u^2+3584tu^2-2048t^2u^2$

COMPONENTES DE LAS T_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de T86
xt86=Limit[D[Limit[x9,u→6/8],t],t→1];
yt86=Limit[D[Limit[y9,u→6/8],t],t→1];
zt86=Limit[D[Limit[z9,u→6/8],t],t→1];

componentes de T76
xt76=Limit[D[Limit[x9,u→6/8],t],t→7/8];
yt76=Limit[D[Limit[y9,u→6/8],t],t→7/8];

zt76=Limit[D[Limit[z9,u→6/8],t],t→78];

componentes de T66
xt66=Limit[D[Limit[x9,u→6/8],t],t→6/8];
yt66=Limit[D[Limit[y9,u→6/8],t],t→6/8];
zt66=Limit[D[Limit[z9,u→6/8],t],t→6/8];

componentes de T67
xt67=Limit[D[Limit[x9,u→7/8],t],t→6/8];
yt67=Limit[D[Limit[y9,u→7/8],t],t→6/8];
zt67=Limit[D[Limit[z9,u→7/8],t],t→6/8];

componentes de T68
xt68=Limit[D[Limit[x9,u→1],t],t→6/8];
yt68=Limit[D[Limit[y9,u→1],t],t→6/8];
zt68=Limit[D[Limit[z9,u→1],t],t→6/8];

COMPONENTES DE LAS U_{IJ} DELA FRONTERA

componentes de U86
xu86=Limit[D[Limit[x9,t→1],u],u→6/8];
yu86=Limit[D[Limit[y9,t→1],u],u→6/8];
zu86=Limit[D[Limit[z9,t→1],u],u→6/8];

componentes de U76
xu76=Limit[D[Limit[x9,t→7/8],u],u→6/8];
yu76=Limit[D[Limit[y9,t→7/8],u],u→6/8];
zu76=Limit[D[Limit[z9,t→7/8],u],u→6/8];

componentes de U66
xu66=Limit[D[Limit[x9,t→6/8],u],u→6/8];
yu66=Limit[D[Limit[y9,t→6/8],u],u→6/8];
zu66=Limit[D[Limit[z9,t→6/8],u],u→6/8];

COMPONENTES DE LAS E_{IJ} DE LA FRONTERA

componentes de E66
xe66= Limit[Limit[D[D[x9,t],u],t→6/8],u→6/8];
ye66= Limit[Limit[D[D[y9,t],u],t→6/8],u→6/8];
ze66= Limit[Limit[D[D[z9,t],u],t→6/8],u→6/8];

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x110= b0*a9*x20+b1*a9*x21+b2*a9*x22+
b0*a10*x30+b1*a10*x31+b2*a10*x32+
b0*a11*xt20+b1*a11*xt21+b2*a11*xt22+

b0*a12*xt30+b1*a12*xt31+b2*a12*xt32;
x110=simplify[x110]

$10.9083-73.8108t+224.947t^2-224.947t^3+$
$18.1868u-123.077tu+375.091t^2u-375.091t^3u-$
$29.1104u^2+197.03tu^2-600.474t^2u^2+600.474t^3u^2$

y110= b0*a9*y20+b1*a9*y21+b2*a9*y22+
b0*a10*y30+b1*a10*y31+b2*a10*y32+
b0*a11*yt20+b1*a11*yt21+b2*a11*yt22+
b0*a12*yt30+b1*a12*yt31+b2*a12*yt32;
y110=simplify[y110]

$-30.9083+281.811t-736.947t^2+736.947t^3+$
$31.8132u-296.923tu+904.909t^2u-904.909t^3u-$
$50.8896u^2+474.97tu^2-1447.53t^2u^2+1447.53t^3u^2$

z110= b0*a9*z20+b1*a9*z21+b2*a9*z22+
b0*a10*z30+b1*a10*z31+b2*a10*z32+
b0*a11*zt20+b1*a11*zt21+b2*a11*zt22+
b0*a12*zt30+b1*a12*zt31+b2*a12*zt32;
z110=simplify[z110]

$17-72t+288t^2-256t^3+8u-64u^2$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x111= b0*a13*x50+b1*a13*x51+b2*a13*x52+
b0*a14*x60+b1*a14*x61+b2*a14*x62+
b0*a15*xt50+b1*a15*xt51+b2*a15*xt52+
b0*a16*xt60+b1*a16*xt61+b2*a16*xt62;
x111=simplify[x111]

$3+5u-8u^2$

y111= b0*a13*y50+b1*a13*y51+b2*a13*y52+
b0*a14*y60+b1*a14*y61+b2*a14*y62+
b0*a15*yt50+b1*a15*yt51+b2*a15*yt52+
b0*a16*yt60+b1*a16*yt61+b2*a16*yt62;
y111=simplify[y111]

-5+40t

z111= b0*a13*z50+b1*a13*z51+b2*a13*z52+
b0*a14*z60+b1*a14*z61+b2*a14*z62+
b0*a15*zt50+b1*a15*zt51+b2*a15*zt52+
b0*a16*zt60+b1*a16*zt61+b2*a16*zt62;

z111=simplify[z111]

$983-4408t+6688t^2-3328t^3+$
$1208u-5440tu+8192t^2u-4096t^3u-$
$9664u^2+43520tu^2-65536t^2u^2+32768t^3u^2$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x112= b9*a0*x02+b10*a0*x03+b11*a0*xu02+ b12*a0*xu03+
         b9*a1*x12+b10*a1*x13+b11*a1*xu12+ b12*a1*xu13+
         b9*a2*x22+b10*a2*x23+b11*a2*xu22+ b12*a2*xu23;
x112=simplify[x112]
```

$-23.6871-117.755t+314.013t^2+280.709u+$
$135.49tu-3721.31t^2u-984.246u^2-4893.04tu^2+$
$13048.1t^2u^2+1131.32u^3+5624.22tu^3-14997.9t^2u^3$

```
y112= b9*a0*y02+b10*a0*y03+b11*a0*yu02+ b12*a0*yu03+
         b9*a1*y12+b10*a1*y13+b11*a1*yu12+ b12*a1*yu13+
         b9*a2*y22+b10*a2*y23+b11*a2*yu22+ b12*a2*yu23;
y112=simplify[y112]
```

$23.6871-304.245t+917.987t^2-280.709u+$
$3368.51tu-8982.69t^2u+984.246u^2-11811tu^2+$
$31495.9t^2u^2-1131.32u^3+13575.8tu^3-36202.1t^2u^3$

```
z112= b9*a0*z02+b10*a0*z03+b11*a0*zu02+ b12*a0*zu03+
         b9*a1*z12+b10*a1*z13+b11*a1*zu12+ b12*a1*zu13+
         b9*a2*z22+b10*a2*z23+b11*a2*zu22+ b12*a2*zu23;
z112=simplify[z112]
```

$3+24t+72u-384u^2+512u^3$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x113= b9*a9*x22+b10*a9*x23+b11*a9*xu22+ b12*a9*xu23+
         b9*a10*x32+b10*a10*x33+b11*a10*xu32+ b12*a10*xu33+
         b9*a11*xt22+b10*a11*xt23+b11*a11*xe22+ b12*a11*xe23+
         b9*a12*xt32+b10*a12*xt33+b11*a12*xe32+ b12*a12*xe33;
x113=simplify[x113]
```

$-121.816+824.284t-2512.1t^2+2512.1t^3+1443.62u-$
$9768.43tu+29770.4t^2u-29770.4t^3u-5061.78u^2+34251.3tu^2-$
$104385t^2u^2+104385t^3u^2+5818.16u^3-39369.5tu^3+119983t^2u^3-119983t^3u^3$

```
y113= b9*a9*y22+b10*a9*y23+b11*a9*yu22+ b12*a9*yu23+
         b9*a10*y32+b10*a10*y33+b11*a10*yu32+ b12*a10*yu33+
         b9*a11*yt22+b10*a11*yt23+b11*a11*ye22+ b12*a11*ye23+
```

b9*a12*yt32+b10*a12*yt33+b11*a12*ye32+ b12*a12*ye33;
y113=simplify[y113]

$-263.184+2449.72t-7343.9t^2+7343.9t^3+2526.38u-23579.6tu+71861.6t^2u-71861.6t^3u-8858.22u^2+82676.7tu^2-251967t^2u^2+251967t^3u^2+10181.8u^3-95030.5tu^3+289617t^2u^3-289617t^3u^3$

z113= b9*a9*z22+b10*a9*z23+b11*a9*zu22+ b12*a9*zu23+
b9*a10*z32+b10*a10*z33+b11*a10*zu32+ b12*a10*zu33+
b9*a11*zt22+b10*a11*zt23+b11*a11*ze22+ b12*a11*ze23+
b9*a12*zt32+b10*a12*zt33+b11*a12*ze32+ b12*a12*ze33;
z113=simplify[z113]

$13+72t+288t^2-256t^3+72u-384u^2+512u^3$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x114= b9*a3*x32+b10*a3*x33+b11*a3*xu32+ b12*a3*xu33+
b9*a4*x42+b10*a4*x43+b11*a4*xu42+ b12*a4*xu43+
b9*a5*x52+b10*a5*x53+b11*a5*xu52+ b12*a5*xu53;
x114=simplify[x114]

$-33.5+397u-1392u^2+1600u^3$

y114= b9*a3*y32+b10*a3*y33+b11*a3*yu32+ b12*a3*yu33+
b9*a4*y42+b10*a4*y43+b11*a4*yu42+ b12*a4*yu43+
b9*a5*y52+b10*a5*y53+b11*a5*yu52+ b12*a5*yu53;
y114=simplify[y114]

114(-5+40t)

z114= b9*a3*z32+b10*a3*z33+b11*a3*zu32+ b12*a3*zu33+
b9*a4*z42+b10*a4*z43+b11*a4*zu42+ b12*a4*zu43+
b9*a5*z52+b10*a5*z53+b11*a5*zu52+ b12*a5*zu53;
z114=simplify[z114]

$4(1+3t+8t^2+18u-96u^2+128u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x115= b9*a13*x52+b10*a53*x27+b11*a13*xu52+ b12*a13*xu53+
b9*a14*x62+b10*a14*x63+b11*a14*xu62+ b12*a14*xu63+
b9*a15*xt52+b10*a15*xt53+b11*a15*xe52+ b12*a15*xe53+
b9*a16*xt62+b10*a16*xt63+b11*a16*xe62+ b12*a16*xe63;
x115=simplify[x115]

$-33.5+397u-1392u^2+1600u^3$

y115= b9*a13*y52+b10*a53*y27+b11*a13*yu52+ b12*a13*yu53+
b9*a14*y62+b10*a14*y63+b11*a14*yu62+ b12*a14*yu63+
b9*a15*yt52+b10*a15*yt53+b11*a15*ye52+ b12*a15*ye53+
b9*a16*yt62+b10*a16*yt63+b11*a16*ye62+ b12*a16*ye63;
y115=simplify[y115]

$-5+40t$

z115= b9*a13*z52+b10*a53*z27+b11*a13*zu52+ b12*a13*zu53+
b9*a14*z62+b10*a14*z63+b11*a14*zu62+ b12*a14*zu63+
b9*a15*zt52+b10*a15*zt53+b11*a15*ze52+ b12*a15*ze53+
b9*a16*zt62+b10*a16*zt63+b11*a16*ze62+ b12*a16*ze63;
z115=simplify[z115]

$8779-39768t+59936t^2-29952t^3-75528u+$
$342720tu-5160964t^2u+258048t^3u+230016u^2-1044480tu^2+1572864t^2u^2-786432t^3u^2-$
$229888u^3+1044480tu^3-1572864t^2u^3+786432t^3u^3$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x116= b9*a6*x62+b10*a6*x63+b11*a6*xu62+ b12*a6*xu63+
b9*a7*x72+b10*a7*x73+b11*a7*xu72+ b12*a7*xu73+
b9*a8*x82+b10*a8*x83+b11*a8*xu82+ b12*a8*xu83;
x116=simplify[x116]

$-33.5+397u-1392u^2+1600u^3$

y116= b9*a6*y62+b10*a6*y63+b11*a6*yu62+ b12*a6*yu63+
b9*a7*y72+b10*a7*y73+b11*a7*yu72+ b12*a7*yu73+
b9*a8*y82+b10*a8*y83+b11*a8*yu82+ b12*a8*yu83;
y116=simplify[y116]

$-5+40t$

z116= b9*a6*z62+b10*a6*z63+b11*a6*zu62+ b12*a6*zu63+
b9*a7*z72+b10*a7*z73+b11*a7*zu72+ b12*a7*zu73+
b9*a8*z82+b10*a8*z83+b11*a8*zu82+ b12*a8*zu83;
z116=simplify[z116]

$1273-2904t+1664t^2-12024u+28224tu-$
$16128t^2u+36480u^2-86016tu^2+49152t^2u^2+$
$36352u^3+86016tu^3-49152t^2u^3$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x117= b3*a9*x23+b4*a9*x24+b5*a9*x25+
b3*a10*x33+b4*a10*x34+b5*a10*x35+
b3*a11*xt23+b4*a11*xt24+b5*a11*xt25+

b3*a12*xt33+b4*a12*xt34+b5*a12*xt35;
x117=simplify[x117]

$-23.6414+159.986t-487.578t^2+487.578t^3+101.84u-689.17tu+2100.33t^2u-2100.33t^3u-0.0288u^2+0.2688tu^2-0.8192t^2u^2+0.8192t^3u^2$

y117= b3*a9*y23+b4*a9*y24+b5*a9*y25+
b3*a10*y33+b4*a10*y34+b5*a10*y35+
b3*a11*yt23+b4*a11*yt24+b5*a11*yt25+
b3*a12*yt33+b4*a12*yt34+b5*a12*yt35;
y117=simplify[y117]

$-91.3586+846.014t-2456.42t^2+2456.42t^3+178.16u-1662.83tu+5067.67t^2u-5067.67t^3u+0.0288u^2-0.2688tu^2+0.8192t^2u^2-0.8192t^3u^2$

z117= b3*a9*z23+b4*a9*z24+b5*a9*z25+
b3*a10*z33+b4*a10*z34+b5*a10*z35+
b3*a11*zt23+b4*a11*zt24+b5*a11*zt25+
b3*a12*zt33+b4*a12*zt34+b5*a12*zt35;
z117=simplify[z117]

$13-72t+288t^2-256t^3$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x118= b3*a13*x53+b4*a13*x54+b5*a13*x55+
b3*a14*x63+b4*a14*x64+b5*a14*x65+
b3*a15*xt53+b4*a15*xt54+b5*a15*xt55+
b3*a16*xt63+b4*a16*xt64+b5*a16*xt65;
x118=simplify[x118]

-6.5+28u

y118= b3*a13*y53+b4*a13*y54+b5*a13*y55+
b3*a14*y63+b4*a14*y64+b5*a14*y65+
b3*a15*yt53+b4*a15*yt54+b5*a15*yt55+
b3*a16*yt63+b4*a16*yt64+b5*a16*yt65;
y118=simplify[y118]

-5+40t

z118= b3*a13*z53+b4*a13*z54+b5*a13*z55+
b3*a14*z63+b4*a14*z64+b5*a14*z65+
b3*a15*zt53+b4*a15*zt54+b5*a15*zt55+
b3*a16*zt63+b4*a16*zt64+b5*a16*zt65;
z118=simplify[z118]

$679\text{-}3048t+4640t^2\text{-}2304t^3$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x119= b13*a0*x05+b14*a0*x06+b15*a0*xu05+ b16*a0*xu06+
b13*a1*x15+b14*a1*x16+b15*a1*xu15+ b16*a1*xu16+
b13*a2*x25+b14*a2*x26+b15*a2*xu25+ b16*a2*xu26;
x119=simplify[x119]

$-393.545\text{-}1955.46t+5214.55t^2+1706.43u+$
$8478.89tu\text{-}22610.4t^2u\text{-}2410.08u^2\text{-}11975.1tu^2+$
$31933.5t^2u^2+1131.49u^3+6522.07tu^3\text{-}14992.2t^2u^3$

y119= b13*a0*y05+b14*a0*y06+b15*a0*yu05+ b16*a0*yu06+
b13*a1*y15+b14*a1*y16+b15*a1*yu15+ b16*a1*yu16+
b13*a2*y25+b14*a2*y26+b15*a2*yu25+ b16*a2*yu26;
y119=simplify[y119]

$393.545\text{-}4742.54t+12753.5t^2 1706.43u+$
$20477.1tu\text{-}54605.6t^2u+2410.08u^2\text{-}28920.9tu^2+$
$77122.5t^2u^2\text{-}1131.49u^3+13577.9tu^3\text{-}36207.8t^2u^3$

z119= b13*a0*z05+b14*a0*z06+b15*a0*zu05+ b16*a0*zu06+
b13*a1*z15+b14*a1*z16+b15*a1*zu15+ b16*a1*zu16+
b13*a2*z25+b14*a2*z26+b15*a2*zu25+ b16*a2*zu26;
z119=simplify[z119]

$203+24t\text{-}840u+1152u^2\text{-}512u^3$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

x120= b13*a9*x25+b14*a9*x26+b15*a9*xu25+ b16*a9*xu26+
b13*a10*x35+b14*a10*x36+b15*a10*xu35+ b16*a10*xu36+
b13*a11*xt25+b14*a11*xt26+b15*a11*xe25+ b16*a11*xe26+
b13*a12*xt35+b14*a12*xt36+b15*a12*xe35+ b16*a12*xe36;
x120=simplify[x120]

$-2023.09+13688.2t\text{-}41716.4t^2+41716.4t^3+$
$8772.17u\text{-}59352.2tu+180883t^2u\text{-}180883t^3u\text{-}$
$12389.3u^2+83825.5tu^2\text{-}255468t^2u^2+$
$255468t^3u^2+5816.55u^3\text{-}39354.5tu^3+$
$119937t^2u^3\text{-}119937t^3u^3$

y120= b13*a9*y25+b14*a9*y26+b15*a9*yu25+ b16*a9*yu26+
b13*a10*y35+b14*a10*y36+b15*a10*yu35+ b16*a10*yu36+
b13*a11*yt25+b14*a11*yt26+b15*a11*ye25+ b16*a11*ye26+
b13*a12*yt35+b14*a12*yt36+b15*a12*ye35+ b16*a12*ye36;
y120=simplify[y120]

$-3591.91+33517.8t-102028t^2+102028t^3+$
$15357.8u-143340tu+436845t^2u-436845t^3u-$
$21690.7u^2+202446tu^2-616980t^2u^2+$
$616980t^3u^2+10183.4u^3-95045.5tu^3+$
$289663t^2u^3-289663t^3u^3$

```
z120= b13*a9*z25+b14*a9*z26+b15*a9*zu25+ b16*a9*zu26+
      b13*a10*z35+b14*a10*z36+b15*a10*zu35+ b16*a10*zu36+
      b13*a11*zt25+b14*a11*zt26+b15*a11*ze25+ b16*a11*ze26+
      b13*a12*zt35+b14*a12*zt36+b15*a12*ze35+ b16*a12*ze36;
z120=simplify[z120]
```

$213-72t+288t^2-256t^3-840u+1152u^2-512u^3$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x121= b13*a3*x35+b14*a3*x36+b15*a3*xu35+ b16*a3*xu36+
      b13*a4*x45+b14*a4*x46+b15*a4*xu45+ b16*a4*xu46+
      b13*a5*x55+b14*a5*x56+b15*a5*xu55+ b16*a5*xu56;
x121=simplify[x121]
```

$-556.5+2413u-3408u^2+1600u^3$

```
y121= b13*a3*y35+b14*a3*y36+b15*a3*yu35+ b16*a3*yu36+
      b13*a4*y45+b14*a4*y46+b15*a4*yu45+ b16*a4*yu46+
      b13*a5*y55+b14*a5*y56+b15*a5*yu55+ b16*a5*yu56;
y121=simplify[y121]
```

$-5+40t$

```
z121= b13*a3*z35+b14*a3*z36+b15*a3*zu35+ b16*a3*zu36+
      b13*a4*z45+b14*a4*z46+b15*a4*zu45+ b16*a4*zu46+
      b13*a5*z55+b14*a5*z56+b15*a5*zu55+ b16*a5*zu56;
z121=simplify[z121]
```

$4(51+3t+8t^2-210u+288u^2-128u^3)$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x122= b13*a13*x55+b14*a13*x56+b15*a13*xu55+ b16*a13*xu56+
      b13*a14*x65+b14*a14*x66+b15*a14*xu65+ b16*a14*xu66+
      b13*a15*xt55+b14*a15*xt56+b15*a15*xe55+ b16*a15*xe56+
      b13*a16*xt65+b14*a16*xt66+b15*a16*xe65+ b16*a16*xe66;
x122=simplify[x122]
```

$-556.5+2413u-3408u^2+1600u^3$

```
y122= b13*a13*y55+b14*a13*y56+b15*a13*yu55+ b16*a13*yu56+
      b13*a14*y65+b14*a14*y66+b15*a14*yu65+ b16*a14*yu66+
      b13*a15*yt55+b14*a15*yt56+b15*a15*ye55+ b16*a15*ye56+
      b13*a16*yt65+b14*a16*yt66+b15*a16*ye65+ b16*a16*ye66;
y122=simplify[y122]
```

-5+40t

```
z122= b13*a13*z55+b14*a13*z56+b15*a13*zu55+ b16*a13*zu56+
      b13*a14*z65+b14*a14*z66+b15*a14*zu65+ b16*a14*zu66+
      b13*a15*zt55+b14*a15*zt56+b15*a15*ze55+ b16*a15*ze56+
      b13*a16*zt65+b14*a16*zt66+b15*a16*ze65+ b16*a16*ze66;
z122=simplify[z122]
```

$-66621+302952t-456160t^2+228096t^3+$
$305160u-1387200tu+2088960t^2u-1044480t^3u-$
$459648u^2+2088960tu^2-3145728t^2u^2+$
$1572864t^3u^2+229888u^3-1044480tu^3+$
$1572864t^2u^3-786432t^3u^3$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x123= b13*a6*x65+b14*a6*x66+b15*a6*xu65+ b16*a6*xu66+
      b13*a7*x75+b14*a7*x76+b15*a7*xu75+ b16*a7*xu76+
      b13*a8*x85+b14*a8*x86+b15*a8*xu85+ b16*a8*xu86;
x123=simplify[x123]
```

$-556.5+2413u-3408u^2+1600u^3$

```
y123= b13*a6*y65+b14*a6*y66+b15*a6*yu65+ b16*a6*yu66+
      b13*a7*y75+b14*a7*y76+b15*a7*yu75+ b16*a7*yu76+
      b13*a8*y85+b14*a8*y86+b15*a8*yu85+ b16*a8*yu86;
y123=simplify[y123]
```

-5+40t

```
z123= b13*a6*z65+b14*a6*z66+b15*a6*zu65+ b16*a6*zu66+
      b13*a7*z75+b14*a7*z76+b15*a7*zu75+ b16*a7*zu76+
      b13*a8*z85+b14*a8*z86+b15*a8*zu85+ b16*a8*zu86;
z123=simplify[z123]
```

$-10623+25320t-14464t^2+48120u-114240tu+$
$65280t^2u-72576u^2+172032tu^2-98304t^2u^2+$
$36352u^3-86016tu^3+49152t^2u^3$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x124= b6*a9*x26+b7*a9*x27+b8*a9*x28+
      b6*a10*x36+b7*a10*x37+b8*a10*x38+
```

```
          b6*a11*xt26+b7*a11*xt27+b8*a11*xt28+
          b6*a12*xt36+b7*a12*xt37+b8*a12*xt38;
x124=simplify[x124]
```

$54.5388-369.029t+1124.66t^2 1124.66t^3-$
$39.9872u+270.547tu-824.525t^2u+824.525t^3u+$
$29.0816u^2-196.762tu^2 599.654t^2u^2-599.654t^3u^2$

```
y124= b6*a9*y26+b7*a9*y27+b8*a9*y28+
          b6*a10*y36+b7*a10*y37+b8*a10*y38+
          b6*a11*yt26+b7*a11*yt27+b8*a11*yt28+
          b6*a12*yt36+b7*a12*yt37+b8*a12*yt38;
y124=simplify[y124]
```

$45.4612-430.971t1435.34t^2-1435.34t^3-$
$70.0128u+653.453tu-1991.48t^2u+1991.48t^3u+$
$50.9184u^2-475.238tu^2+1448.35t^2u^2-1448.35t^3u^2$

```
z124= b6*a9*z26+b7*a9*z27+b8*a9*z28+
          b6*a10*z36+b7*a10*z37+b8*a10*z38+
          b6*a11*zt26+b7*a11*zt27+b8*a11*zt28+
          b6*a12*zt36+b7*a12*zt37+b8*a12*zt38;
z124=simplify[z124]
```

$-39-72t+288t^2-256t^3+120u-64u^2$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE LA SUPERFICIE

```
x125= b6*a13*x56+b7*a13*x57+b8*a13*x58+
          b6*a14*x66+b7*a14*x67+b8*a14*x68+
          b6*a15*xt56+b7*a15*xt57+b8*a15*xt58+
          b6*a16*xt66+b7*a16*xt67+b8*a16*xt68;
x125=simplify[x125]
```

$15-11u+8u^2$

```
y125= b6*a13*y56+b7*a13*y57+b8*a13*y58+
          b6*a14*y66+b7*a14*y67+b8*a14*y68+
          b6*a15*yt56+b7*a15*yt57+b8*a15*yt58+
          b6*a16*yt66+b7*a16*yt67+b8*a16*yt68;
y125=simplify[y125]
```

$-5+40t$

```
z125= b6*a9*z26+b7*a9*z27+b8*a9*z28+
          b6*a10*z36+b7*a10*z37+b8*a10*z38+
          b6*a11*zt26+b7*a11*zt27+b8*a11*zt28+
          b6*a12*zt36+b7*a12*zt37+b8*a12*zt38;
z125=simplify[z125]
```

$-7473+33672t-50656t^2+25344t^3+18120u-$
$81600tu+122880t^2u-61440t^3u-9664u^2+$
$43520tu^2-65536t^2u^2+32768t^3u^2$

DIBUJO DE LA SUPERFICIE

c1=s.9x9.02-02=ParametricPlot3D[{x1,y1,z1},{t,0,2/8},{u,0,2/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c2=s.9x9.02-23=ParametricPlot3D[{x110,y110,z110},{t,2/8,3/8},{u,0,2/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c3=s.9x9.02-35=ParametricPlot3D[{x2,y2,z2},{t,3/8,5/8},{u,0,2/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c4=s.9x9.02-56=ParametricPlot3D[{x111,y111,z111},{t,5/8,6/8},{u,0,2/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c5=s.9x9.02-68=ParametricPlot3D[{x3,y3,z3},{t,6/8,1},{u,0,2/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c6=s.9x9.23-02=ParametricPlot3D[{x112,y112,z112},{t,0,2/8},{u,2/8,3/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c7=s.9x9.23-23=ParametricPlot3D[{x113,y113,z113},{t,2/8,3/8},{u,2/8,3/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c8=s.9x9.23-35=ParametricPlot3D[{x114,y114,z114},{t,3/8,5/8},{u,2/8,3/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c9=s.9x9.23-56=ParametricPlot3D[{x115,y115,z115},{t,5/8,6/8},{u,2/8,3/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c10=s.9x9.23-68=ParametricPlot3D[{x116,y116,z116},{t,6/8,1},{u,2/8,3/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c11=s.9x9.35-02=ParametricPlot3D[{x4,y4,z4},{t,0,2/8},{u,3/8,5/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c12=s.9x9.35-23=ParametricPlot3D[{x117,y117,z117},{t,2/8,3/8},{u,3/8,5/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c13=s.9x9.35-35=ParametricPlot3D[{x5,y5,z5},{t,3/8,5/8},{u,3/8,5/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c14=s.9x9.35-56=ParametricPlot3D[{x118,y118,z118},{t,5/8,6/8},{u,3/8,5/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c15=s.9x9.35-68=ParametricPlot3D[{x6,y6,z6},{t,6/8,1},{u,3/8,5/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c16=s.9x9.56-02=ParametricPlot3D[{x119,y119,z119},{t,0,2/8},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c17=s.9x9.56-23=ParametricPlot3D[{x120,y120,z120},{t,2/8,3/8},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c18=s.9x9.56-35=ParametricPlot3D[{x121,y121,z121},{t,3/8,5/8},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c19=s.9x9.56-56=ParametricPlot3D[{x122,y122,z122},{t,5/8,6/8},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c20=s.9x9.56-68=ParametricPlot3D[{x123,y123,z123},{t,6/8,1},{u,5/8,6/8}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c21=s.9x9.68-02=ParametricPlot3D[{x7,y7,z7},{t,0,2/8},{u,6/8,1}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c22=s.9x9.68-23=ParametricPlot3D[{x124,y124,z124},{t,2/8,3/8},{u,6/8,1}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

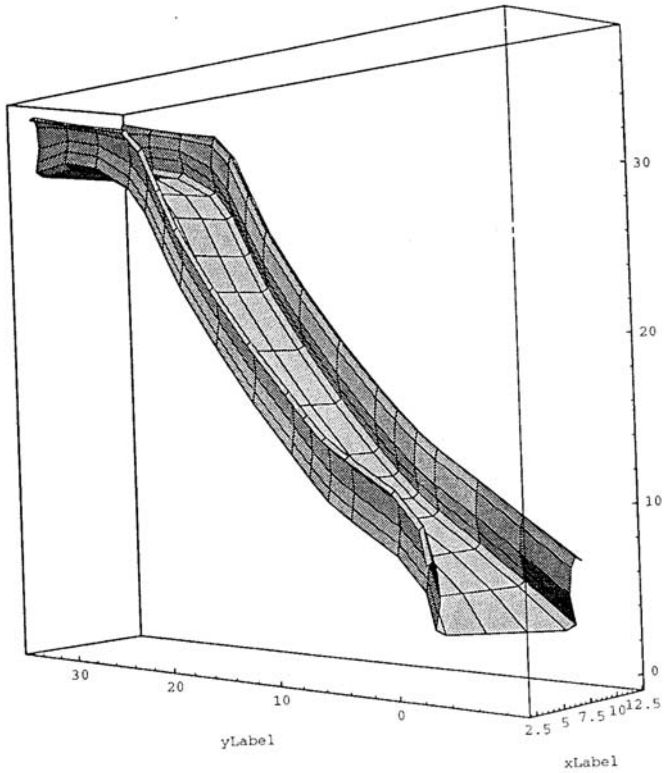
c23=s.9x9.68-35=ParametricPlot3D[{x8,y8,z8},{t,3/8,5/8},{u,6/8,1}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c24=s.9x9.68-56=ParametricPlot3D[{x125,y125,z125},{t,5/8,6/8},{u,6/8,1}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

c25=s.9x9.68-68=ParametricPlot3D[{x9,y9,z9},{t,6/8,1},{u,6/8,1}, PlotPoints→4,AxesLabel→ {XLabel,yLabel,ZLabel}, DisplayFunction→Identity];

DIBUJO DE LA SUPERFICIE TOTAL

Show[c1,c2,c3,c4,c5,c6,c7,c8,c9,c110,c111,c112,c113,c114,c115,c16,c17,c18, c19,c20,c21,c22,c23,c24,c25,DisplayFunction→$DisplayFunction]


30
20
10
0
30
20
10
0
yLabel
2.5 5 7.5 10 12.5
xLabel

CAPÍTULO 6:

CONCLUSIONES

6.1.-INTRODUCCION

Se subdividen las aportaciones, fruto de esta investigación, en los tres grandes apartados que se han venido considerando a lo largo de esta tesis:

- Superficies polinomiales definidas por puntos.
- Superficies polinomiales definidas por puntos y tangentes en ellos.
- Superficies mixtas

Dentro de cada grupo se estudian redes de puntos de distintas formas y dimensiones así como sus posibilidades de adaptación a la variada casuística.

6.2.-SUPERFICIES POLINOMIALES DEFINIDADAS POR PUNTOS

1.) La determinación de una superficie que interpole un conjunto de puntos, dados por sus coordenadas cartesianas, se hace posible mediante el uso de la metodología que se propone en los apartados correspondientes de esta tesis.

2.) Siempre se ha procurado que la superficie fuera lisa, es decir, de plano tangente único en cada punto de ella.

Si la superficie tiene de ecuación vectorial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t,u) \qquad (1)$$

y el plano tangente a la superficie tiene un vector normal:

$$\mathbf{n} = \mathbf{P}_{\mathbf{t}}' \wedge \mathbf{P}_{\mathbf{u}}' \qquad (2)$$

se tiene que el plano tangente no existirá si esa normal vale cero, es decir:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_{\mathbf{t}}' = 0 \\ &\mathbf{P}_{\mathbf{u}}' = 0 \\ &\mathbf{P}_{\mathbf{t}}' \; y \, \mathbf{P}_{\mathbf{u}}' \; son \quad paralelos \end{aligned}$$

Condiciones analíticas muy fuertes que el método en sí no genera y que son muy difíciles que se presenten en la práctica.

En el caso de que aparecieran puntos singulares, la introducción de puntos adicionales soslayarían el problema.

3.) Las ecuaciones parametricas de estas superficies son funciones polinómicas y que por tanto existen para cualquier valor de los parámetros:

$$0 \le t \le 1 \quad y \quad 0 \le u \le 1 \qquad (3)$$

en los que está definida la superficie:

$$x = \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} c_{ij} t^i u^j$$
$$y = \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} d_{ij} t^i u^j \qquad (4)$$
$$z = \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} e_{ij} t^i u^j$$

donde:

$$\mathbf{P_{ij}} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \quad y \quad c_{ij} = x_{ij} \quad d_{ij} = y_{ij} \quad e_{ij} = z_{ij} \qquad (5)$$

4.) Las funciones que definen las ecuaciones parametricas de estas superficies están acotadas en el dominio en el que esta definida la superficie:

$$|x| = \left| \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} c_{ij} t^i u^j \right| \le \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} |c_{ij}|$$
$$|y| = \left| \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} d_{ij} t^i u^j \right| \le \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} |d_{ij}| \qquad (6)$$
$$|z| = \left| \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} e_{ij} t^i u^j \right| \le \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} |e_{ij}|$$

pues:

$$0 \le t \le 1 \quad y \quad 0 \le u \le 1 \qquad (7)$$

5.) Las secciones por planos serían curvas cuyas ecuaciones paramétricas se obtendrían fácilmente ya que si:

$$x = f(t,u)$$
$$y = g(t,u) \qquad (8)$$
$$z = h(t,u)$$

es la ecuación de la superficie a cortar y

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (9)$$

es la ecuación del plano de corte, eliminando u entre ambas ecuaciones quedaría:

$$x = f_1(t)$$
$$y = g_1(t) \qquad (10)$$
$$z = h_1(t)$$

que es la ecuación de la curva sección.

6.) Estas curvas, al estar sobre la superficie, tendrían acotadas las coordenadas de sus puntos

$$\begin{aligned} |x| &= |f_1(t)| \leq k_1 \\ |y| &= |g_1(t)| \leq k_2 \\ |z| &= |h_1(t)| \leq k_3 \end{aligned} \qquad (11)$$

7.) La tangente T a la curva sección γ por un plano P en un punto de ella A se puede obtener como intersección del plano tangente a la superficie en el punto A (P) y el plano que contiene a la curva Q (figura 6.2.-1).

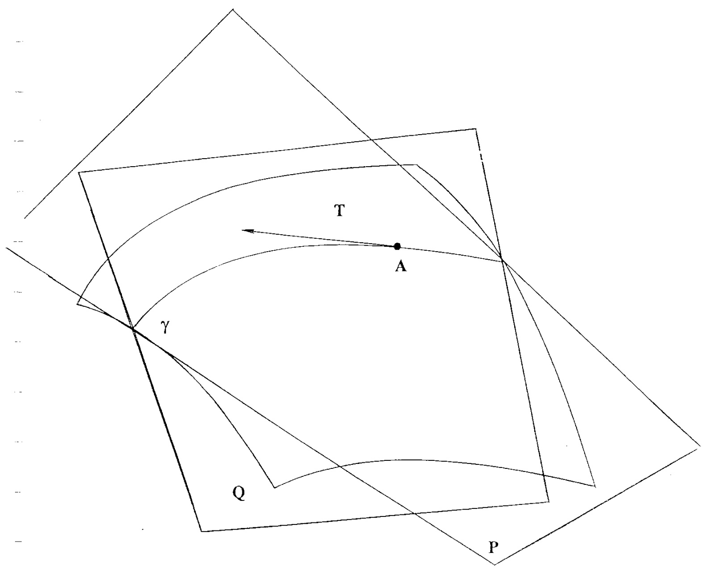


Figura 6.2.-1. Tangente a una curva plana situada sobre una superficie

Tambien se puede obtener derivando la ecuación de la curva y particularizando dicha derivada para el punto.

8.) El modelo permite adaptarse a cualquier red de puntos mediante la contracción (figura 6.2.-2).

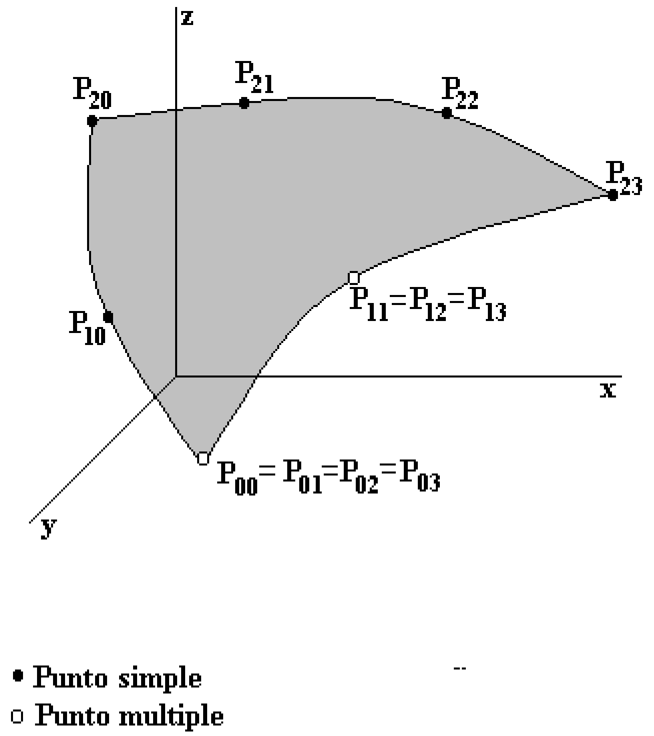


Figura 6.2.-2. Superficie que pasa por una red de 3x4 puntos de los que 7 son distintos.
Conjunto rectangular contraido para adaptarse alconjunto de puntos dados

9.) Dada una red de puntos a interpolar mediante una superficie que los englobe, esta red se puede ampliar con puntos adicionales hasta convertirse en rectangular o cuadrada.

La superficie que interpola al conjunto total de puntos, iniciales y adicionales, pasa por todos los puntos iniciales y por tanto resuelve el problema planteado (figura 6.2.-3).

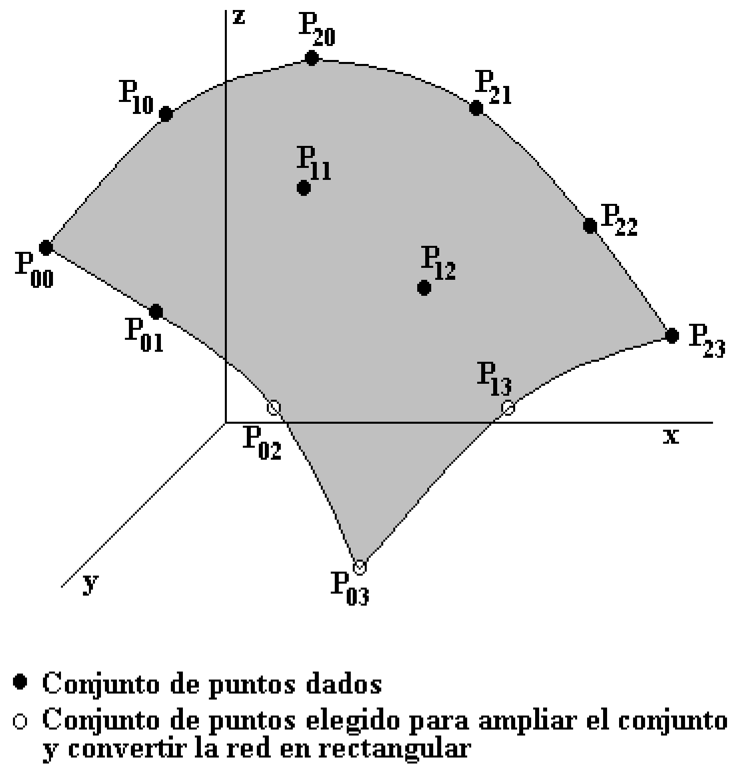


Figura 6.2.-3. Superficie que pasa por una red de 3x4 puntos ampliada a partir de 3 puntos

10.) La ampliación de una red de puntos para transformarla en una red cuadrada o rectangular se puede hacer mediante puntos exteriores o interiores a la fila o columna (se entiende que un punto es exterior a la red inicial cuando tiene un número de orden mayor que los de ella en la nueva red total) (figura 6.2.-4).

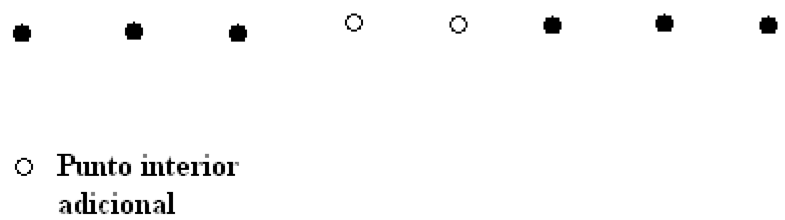


Figura 6.2.-4 . Puntos interiores adicionales para ampliar

Si se quiere que los puntos del borde de la superficie se mantengan como tales habrá que tomar los puntos adicionales como internos (de numero de orden menor que los de frontera).

Con ello se logra sacar fácilmente las ecuaciones de los bordes de la superficie interpolante (figura 6.2.-5).

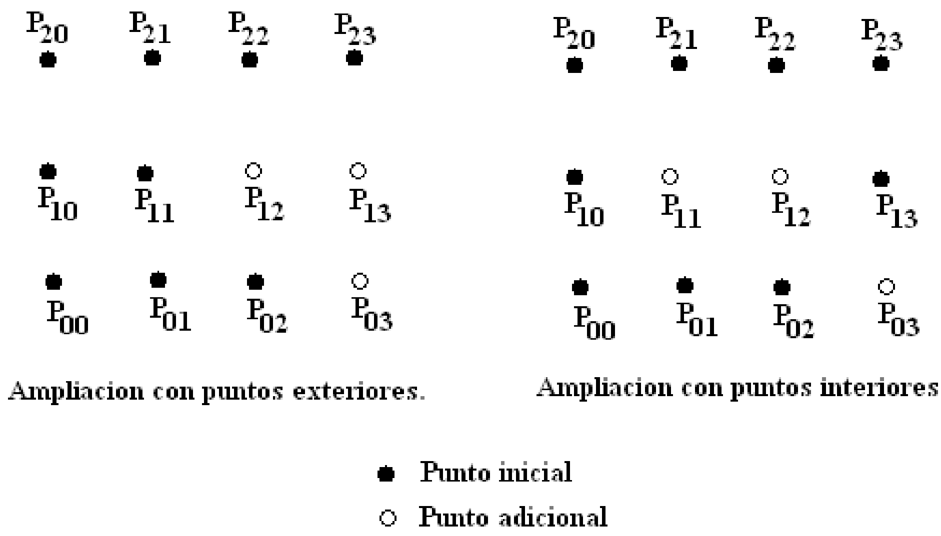


Figura 6.2.-5 Ampliación de una red de puntos para convertirla en rectangular

11.) La contracción de todos los puntos de una curva del borde en un solo punto da lugar a superficies triangulares. Es decir si $\mathbf{P}_{0i}=\mathbf{P}_{00}$ se tiene una superficie triangular (figura 6.2.-6).

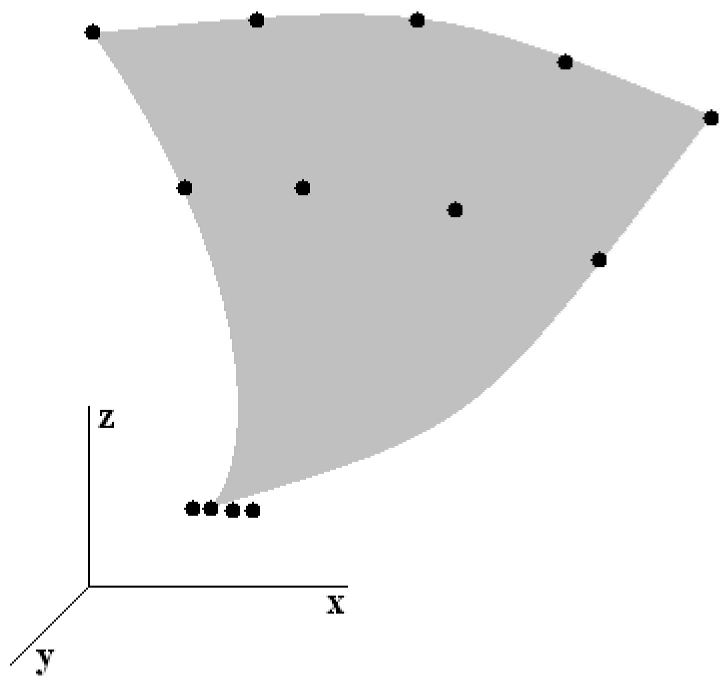


Figura 6.2.-6. Contracción de todos los puntos del borde de una superficie para convertirla en triangular

12.) Si los puntos son coplanarios la superficie interpolante es plana, siendo el plano que la contiene el mismo que el de los puntos.

Supongamos que todos los puntos estan situados en el plano z=0.

Los $\mathbf{P}_{ij}$ son tales que sus coordenadas son de la forma:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{ij}} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \qquad \forall\, i = 0,1,.....,m \qquad \forall\, j = 0,1,.....,n \qquad (12)$$

Las ecuaciones parametricas de la superficie que los engloba serían:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} f_{ij}(t,u)x_{ij} \\ y &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} g_{ij}(t,u)y_{ij} \qquad (13) \\ z &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} h_{ij}(t,u)z_{ij} \end{aligned}$$

es decir una superficie plana situada en el plano z=0.

Si los puntos a interpolar estuvieran en un plano cualquiera , se podría hacer un cambio de ejes coordenados de manera que el plano de los puntos fuera el plano XY y se estaría en el caso anterior.

13.) Se pueden determinar las ecuaciones de los parches que componen la superficie encerrada dentro de un polígono descomponiéndola en una serie de triángulos adosados. Cada triángulo se resolvería como una superficie 2x2 contraida en un triángulo (figura 6.2.-7).

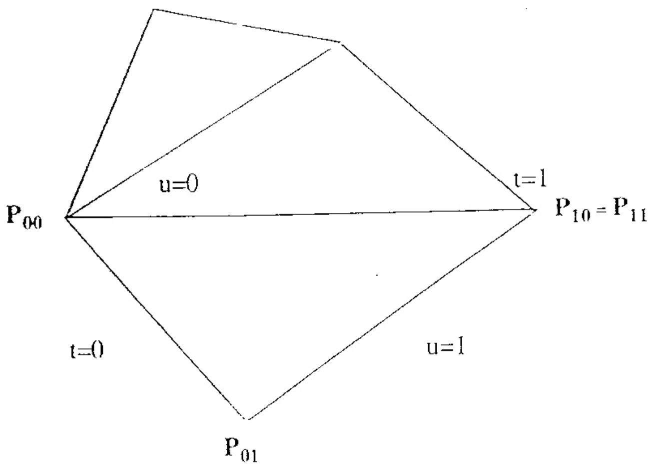


Figura 6.2.-7. Polígono formado por una serie de triángulos adosados

La superficie que queda sería la de unión de todos los parches , es decir sería una superficie a trozos.

14.) El modelo teórico asigna unos subíndices a los puntos que suponen un orden y luego los une siguiendo ese orden.

Al identificar el caso real con el modelo teórico lo que se hace es asignar unos subíndices a los puntos y por tanto ya se dice a priori en que orden se unirán esos puntos para tener la superficie que los engloba.

Este concepto de orden en el que hay que unir los puntos a interpolar es fundamental ya que una nube de puntos se puede interpolar de muchas maneras y dar lugar a diversas superficies englobadoras.

Sin mover los puntos, por los que obligatoriamente ha de pasar la superficie, solamente cambiando su nomenclatura, se obtendrían una serie de superficies que pasarían por todos los puntos pero distintas entre sí.

Es decir, se pueden diseñar varias superficies sin introducir nuevos puntos sino solamente cambiando el orden en el que se unen (o lo que es lo mismo cambiando su número de orden).

15.) Con este método de generación de superficies obtenemos superficies de una expresión analítica única para todo el entorno.

6.3.-SUPERFICIES POLINOMIALES DEFINIDADAS POR PUNTOS Y TANGENTES EN ELLOS

1.) La metodología que esta tesis propone, para este problema, permite la construcción de una superficie que pasa por una red de puntos dados por sus coordenadas cartesianas con tangentes en ellos dadas por sus componentes.

2.) La superficie obtenida es, en general, lisa en todos sus puntos. En el caso de que apareciera un punto singular se podría hacer desaparecer introduciendo puntos adicionales con sus tangentes correspondientes.

3.) Las ecuaciones paramétricas de estas superficies son funciones polinómicas y por tanto existen para cualquier valor de los parámetros:

$$0 \leq t \leq 1 \quad y \quad 0 \leq u \leq 1 \qquad (1)$$

en los que esta definida la superficie.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} C_{ij} t^i u^j \\ y &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} D_{ij} t^i u^j \qquad (2) \\ z &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} E_{ij} t^i u^j \end{aligned}$$

4.) Las funciones que definen las ecuaciones paramétricas de estas superficies están acotadas en el dominio en el que esta definida la superficie

$$
\begin{aligned}
|x| &= \left|\sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} C_{ij} t^i u^j\right| \le \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} \left|C_{ij}\right| \\
|y| &= \left|\sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} D_{ij} t^i u^j\right| \le \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} \left|D_{ij}\right| \qquad (3) \\
|z| &= \left|\sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} E_{ij} t^i u^j\right| \le \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} \left|E_{ij}\right|
\end{aligned}
$$

5.) Las secciones por planos serían curvas cuyas ecuaciones paramétricas se obtendrían fácilmente ya que si:

$$
\begin{aligned}
x &= f(t,u) \\
y &= g(t,u) \qquad (4) \\
z &= h(t,u)
\end{aligned}
$$

son las ecuaciones de la superficie a seccionar y:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (5)$$

es la ecuación del plano de corte, eliminando u entre ambas se tendría:

$$
\begin{aligned}
x &= f_1(t) \\
y &= g_1(t) \qquad (6) \\
z &= h_1(t)
\end{aligned}
$$

ecuación de la curva sección.

6.) Estas curvas, al estar sobre la superfice, estarían acotadas en las tres coordenadas de cualquier punto de ellas

$$
\begin{aligned}
|x| &= |f_1(t)| \le k_1 \\
|y| &= |g_1(t)| \le k_2 \qquad (7) \\
|z| &= |h_1(t)| \le k_3 \\
0 &\le t \le 1
\end{aligned}
$$

7.) La tangente T a la curva sección γ por un plano P en un punto de ella A se puede obtener como intersección del plano tangente a la superficie en el punto A (P) y el plano que contiene a la curva Q (figura 6.3.-1).

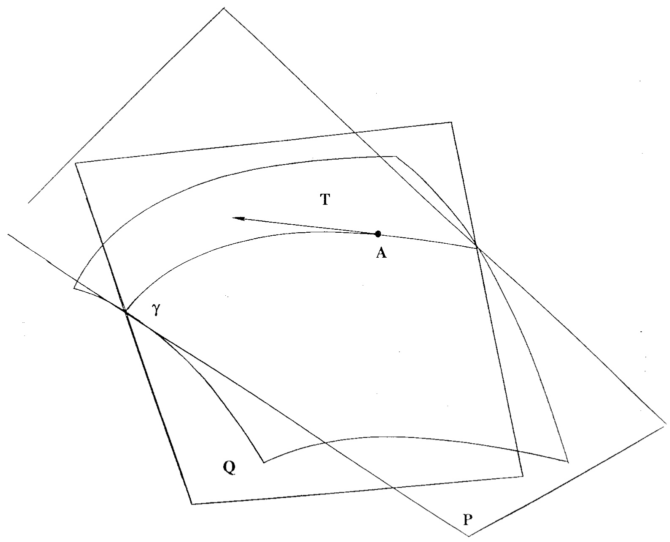


Figura 6.3.-1. Tangente a una curva plana situada sobre una superficie

Tambien se puede obtener derivando la ecuación de la curva y particularizando dicha derivada para el punto.

8.) El modelo permite adaptarse a cualquier red de puntos mediante el recurso de considerar la red de puntos dada como una contracción del modelo a usar.

Al considerar un punto como múltiple se tendrán que considerar como tales las tangentes en él.

9.) Dada una red de puntos a interpolar y sus tangentes en ellos al buscar una superficie que los englobe esta red se puede ampliar con puntos adicionales y sus tangentes respectivas hasta convertirse en rectangular o cuadrada.

La superficie que interpola al conjunto total de puntos iniciales y adicionales con sus tangentes cumple el pasar por todos los puntos iniciales con dichas tangentes y por tanto resuelve el problema planteado (figura 6.3.-2).

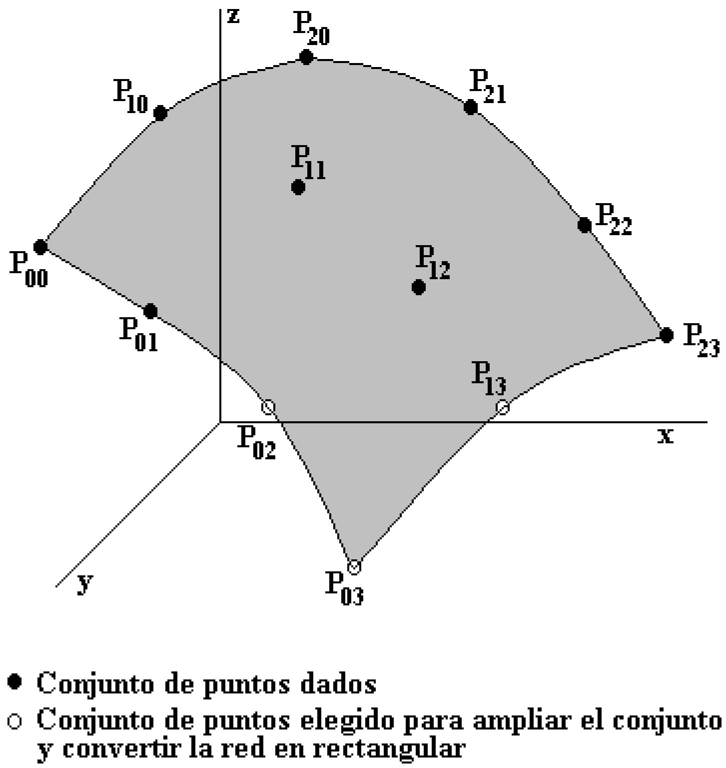


Figura 6.3.-2

10.) La ampliación de una red de puntos con sus tangentes respectivas para transformarla en una red cuadrada o rectangular con tangentes dadas en ellos se puede hacer mediante puntos adicionales exteriores o interiores a la fila o columna junto con las tangentes en ellos (se entiende que un punto es exterior a la red inicial cuando tiene un numero de orden mayor que los de ella en la nueva red total).

Si se quiere que los puntos del borde de la superficie se mantengan como tales habra que tomar los puntos adicionales como internos (de numero de orden menor que los de frontera) (figura 6.3.-3).

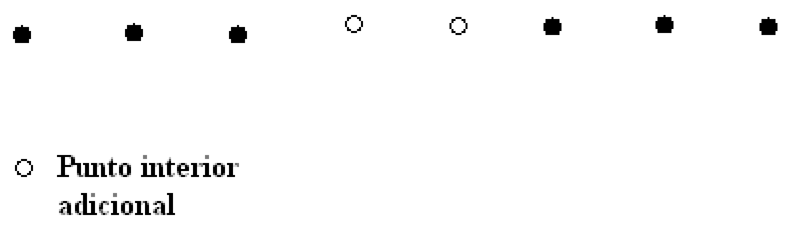


Figura 6.3.-3 . Puntos interiores adicionales para ampliar

Con ello se logra sacar fácilmente las ecuaciones de los bordes de la superficie interpolante (figura 6.2.-5).

11.) La contracción de todos los puntos de una curva del borde en uno solo, así como de sus tangentes, da lugar a superficies triangulares.

Es decir, si $\mathbf{P}_{0i}=\mathbf{P}_0$, $\mathbf{T}_{0i}=\mathbf{T}_0$ y $\mathbf{U}_{0i}=\mathbf{U}_0$ se tiene una sperficie triangular (figura 6.2.-6).

12.) Si los puntos son coplanarios y las tangentes en ellos estan situadas en el plano que los contiene entonces la superficie que los interpola es plana siendo el plano que la contiene el mismo que el de los puntos.

Supongamos que el plano que contiene a los puntos y a las tangentes en ellos sea el z=0.

Los $\mathbf{P}_{ij}$, $\mathbf{T}_{ij}$ y $\mathbf{U}_{ij}$ son de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{P_{ij}} &= (x_{ij}, y_{ij}, 0) \\ \mathbf{T_{ij}} &= (xt_{ij}, yt_{ij}, 0) \\ \mathbf{U_{ij}} &= (xu_{ij}, yu_{ij}, 0) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\forall\, i = 0,1,....,m \\ &\forall\, j = 0,1,....,n \end{aligned} \qquad (8)$$

Las ecuaciones paramétricas de la superficie que los engloba serían:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} \left(f_{ij}^1(t,u)x_{ij} + f_{ij}^2(t,u)xt_{ij} + f_{ij}^3(t,u)xu_{ij} \right) \\ y &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} \left(g_{ij}^1(t,u)y_{ij} + g_{ij}^2(t,u)yt_{ij} + g_{ij}^3(t,u)yu_{ij} \right) \qquad (9) \\ z &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} \left(h_{ij}^1(t,u)z_{ij} + h_{ij}^2(t,u)zt_{ij} + h_{ij}^3(t,u)zu_{ij} \right) \end{aligned}$$

que es una superficie contenida en z=0.

Si el plano que contiene a los puntos y sus tangentes es otro, se hace un cambio de ejes coordenados hasta hacerlo coincidir con el plano z=0 y se está en el caso anterior.

13.) El modelo teórico asigna unos subíndices a los puntos y a sus tangentes que suponen un orden y luego los une siguiendo ese orden.

Al identificar el caso real con el modelo teórico lo que se hace es asignar unos subíndices a los puntos y tangentes y por tanto ya se dice a priori en que orden se unirán esos puntos para tener la superficie que los engloba.

Este concepto de orden en el que hay que unir los puntos a interpolar es fundamental ya que una nube de puntos se puede interpolar de muchas maneras y dar lugar a diversas superficies englobadoras.

Sin mover los puntos, por los que obligatoriamente ha de pasar la superficie ni sus tangentes , solamente cambiando su nomenclatura, se obtendrían una serie de superficies que pasarían por todos los puntos pero distintas entre sí.

Es decir, se pueden diseñar varias superficies sin introducir nuevos puntos ni cambiar los valores de las tangentes en ellos sino solamente cambiando el orden en el que se unen (o lo que es lo mismo cambiando su número de orden).

14.) Con este método de generación de superficies obtenemos superficies de expresión analítica única para todo el entorno.

6.4.-SUPERFICIES POLINOMIALES MIXTAS

1.) Con este metodo se obtiene una superficie total formada por una serie de parches , por ello se tendrá que cada parche tiene una expresión analitica propia. Se tiene, por tanto, una superficie a trozos.

2.) La metodología que esta tesis propone, para este problema, permite la construcción de una superficie total que pasa por una red de puntos dados por sus coordenadas cartesianas usando polinomios de grado menor o igual a tres.

3.) Los parches componentes de la superficie totales unen entre sí mediante una unión lisa, es decir con plano tangente continuo en los bordes de unión.

4.) Las superficies son, en general, lisas es decir de plano tangente unico en cada punto de ella.

Si la superficie tiene de ecuación vectorial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(t,u) \qquad (1)$$

y el plano tangente a la superficie tiene un vector normal:

$$\mathbf{n} = \mathbf{P}_{\mathbf{t}}' \wedge \mathbf{P}_{\mathbf{u}}' \qquad (2)$$

Se tiene que el plano tangente no existira si esa normal vale cero, es decir, si:

$$\begin{array}{l} \mathbf{P}_{\mathbf{t}}' = 0 \\ \mathbf{P}_{\mathbf{u}}' = 0 \qquad\qquad (3) \\ \mathbf{P}_{\mathbf{t}}' \; y \, \mathbf{P}_{\mathbf{u}}' \; son \quad paralelos \end{array}$$

Condiciones analíticas muy fuertes que el método en sí no genera y que son muy difícil que se presenten en la práctica.

En el caso de que aparecieran la introducción de puntos adicionales soslayarían el problema.

5.) Las ecuaciones paramétricas de estas superficies son funciones polinómicas y que por tanto existen para cualquier valor de los parámetros.

$$0 \leq t \leq 1 \quad y \quad 0 \leq u \leq 1 \qquad (4)$$

en los que está definida la superficie:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} c_{ij} t^i u^j \\ y &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} d_{ij} t^i u^j \\ z &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} e_{ij} t^i u^j \end{aligned} \qquad (5)$$

donde:

$$\mathbf{P_{ij}} = (\mathrm{x_{ij}}, \mathrm{y_{ij}}, \mathrm{z_{ij}}) \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{c_{ij}} = \mathrm{x_{ij}} \quad d_{ij} = y_{\mathrm{ij}} \quad e_{ij} = z_{ij} \qquad (6)$$

6.) Las ecuaciones paramétricas de un parche de estas superficies son funciones polinómicas y que por tanto existen para cualquier valor de los parámetros.

$$0 \leq t \leq 1 \quad y \quad 0 \leq u \leq 1 \qquad (7)$$

en los que esta definida la superficie. Asi las ecuaciones del parche S $_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}$ serían:

$$\begin{aligned} x_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]} &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} c_{ij} t^i u^j \\ y_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]} &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} d_{ij} t^i u^j \\ z_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]} &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} e_{ij} t^i u^j \end{aligned} \qquad (8)$$

donde:

$$\mathbf{P_{ij}} = (\mathrm{x_{ij}}, \mathrm{y_{ij}}, \mathrm{z_{ij}}) \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{c_{ij}} = \mathrm{x_{ij}} \quad d_{ij} = y_{\mathrm{ij}} \quad e_{ij} = z_{ij} \qquad (9)$$

7.) Las funciones que definen las ecuaciones paramétricas de cada uno de los parches componentes de la superficie total estan acotadas en el dominio en el que esta definida la superficie parche:

$$\begin{aligned}
\left|x_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}\right| &= \left|\sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} c_{ij}t^i u^j\right| \le \left|\sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} c_{ij}\right| \\
\left|y_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}\right| &= \left|\sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} d_{ij}t^i u^j\right| \le \left|\sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} d_{ij}\right| \qquad (10) \\
\left|z_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}\right| &= \left|\sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} e_{ij}t^i u^j\right| \le \left|\sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} e_{ij}\right|
\end{aligned}$$

ya que:

$$0 \le t \le 1 \quad y \quad 0 \le u \le 1 \qquad (11)$$

8.) Las secciones por planos serían curvas cuyas ecuaciones paramétricas se obtendrían fácilmente. Así si las ecuaciones del parche S $_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}$ son:

$$\begin{aligned}
\left|x_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}\right| &= f_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}(t,u) \\
\left|y_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}\right| &= g_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}(t,u) \qquad (12) \\
\left|z_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}\right| &= h_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}(t,u)
\end{aligned}$$

y las del plano de corte son:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (13)$$

eliminando u entre ambas quedarían las ecuaciones de la sección del plano con el parche S $_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}$:

$$\begin{aligned}
x_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]} &= f_{1[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}(t) \\
y_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]} &= g_{1[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}(t) \qquad (14) \quad \text{(Figura 6.4.-1)} \\
z_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]} &= h_{1[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}
\end{aligned}$$

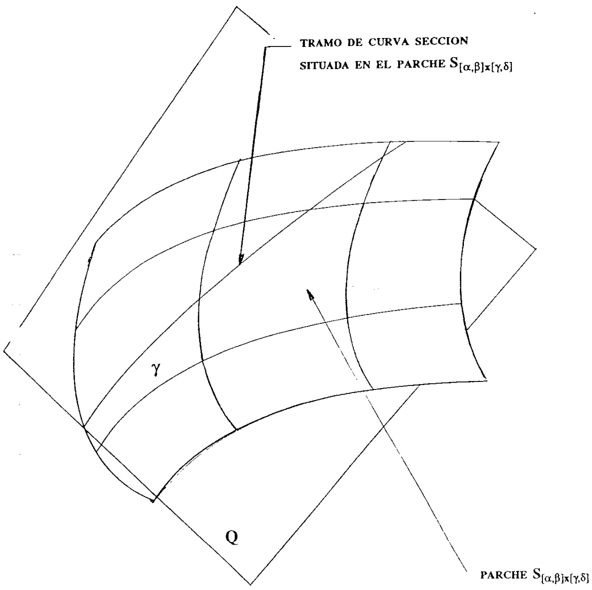


Figura 6.4.-1

9.) Esta curva a trozos, al estar sobre la superficie, estaría acotada en las tres coordenadas de cualquier punto de ella:

$$\begin{aligned} \left|x_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}\right| &= \left|f'_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}(t)\right| \leq k^1_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]} \\ \left|y_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}\right| &= \left|g'_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}(t)\right| \leq k^2_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]} \\ \left|z_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}\right| &= \left|h'_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]}(t)\right| \leq k^3_{[\alpha,\beta].[\delta,\gamma]} \end{aligned} \qquad (15)$$

en:

$$0 \leq t \leq 1 \qquad (16)$$

10.) La tangente T a la curva sección g por un plano P en un punto de ella A se puede obtener como intersección del plano tangente a la superficie en el punto A (P) y el plano que contiene a la curva Q (figura 6.2.-1).

Tambien se puede obtener derivando la ecuación de la curva y particularizando dicha derivada para el punto.

11.) El modelo permite adaptarse a cualquier red de puntos mediante la contracción (figura 6.2.-2).

12.) Dada una red de puntos a interpolar mediante una superficie que los englobe, esta red se puede ampliar con puntos adicionales hasta convertirse en rectangular o cuadrada (figuras 6.2.-3, 6.2.-4 y 6.2.-5).

La ampliación ha de hacerse con un conjunto adicional de puntos de manera que la red final de puntos (iniciales mas añadidos) tiene que adoptar la forma de red (m+1)(n+1) siendo (m+1) y (n+1) múltiplos de tres.

La superficie que interpola el conjunto total de puntos iniciales y adicionales cumple el pasar por todos los puntos iniciales y por tanto resuelve el problema planteado.

13.) La ampliación de una red de puntos para transformarla en una red cuadrada o rectangular se puede hacer mediante puntos exteriores o interiores a la fila o columna (se entiende que un punto es exterior a la red inicial cuando tiene un numero de orden mayor que los de ella en la nueva red total) (figura 6.2.-4).

Si se quiere que los puntos del borde de la superficie se mantengan como tales habrá que tomar los puntos adicionales como internos (de número de orden menor que los de frontera).

La ampliación ha de hacerse con un conjunto adicional de puntos de manera que la red final de puntos (iniciales más añadidos) tiene que adoptar la forma de red (m+1).(n+1) siendo (m+1) y (n+1) múltiplos de tres.

14) Si los puntos son coplanarios la superficie interpolante es plana, siendo el plano que la contiene el mismo que el de los puntos.

Supongamos que todos los puntos a interpolar de un parche estan situados en el plano z=0.

Los P_{ij} son tales que sus coordenadas son de la forma:

$$\mathbf{P} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \qquad \forall\, i = 0,1,..,m \qquad \forall\, j = 0,1,..,n \qquad (17)$$

Las ecuaciones paramétricas de la superficie que los engloba serían:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} f_{ij}(t,u)x_{ij} \\ y &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} g_{ij}(t,u)y_{ij} \\ z &= \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=n} h_{ij}(t,u)z_{ij} \end{aligned} \qquad (18)$$

es decir una superficie plana situada en el plano z=0

Si los puntos a interpolar estuvieran en un plano cualquiera, se podría hacer un cambio de ejes coordenados de manera que el plano de los puntos fuera el plano XY y se estaría en el caso anterior.

Evidentemente lo anterior es aplicable a cada uno de los parches que componen la superficie total que resultaría por lo tanto coplanaria con la red de puntos.

15.) El modelo teórico asigna unos subíndices a los puntos y a sus tangentes que suponen un orden y luego los une siguiendo ese orden.

Al identificar el caso real con el modelo teórico lo que se hace es asignar unos subíndices a los puntos y tangentes y por tanto ya se dice a priori en que orden se unirán esos puntos para tener la superficie que los engloba.

Este concepto de orden en el que hay que unir los puntos a interpolar es fundamental ya que una nube de puntos se puede interpolar de muchas maneras y dar lugar a diversas superficies englobadoras.

Sin mover los puntos por los que obligatoriamente ha de pasar la superficie ni sus tangentes, solamente cambiando su nomenclatura, se obtendrían una serie de superficies que pasarían por todos los puntos pero distintas entre sí.

Es decir, se pueden diseñar varias superficies sin introducir nuevos puntos ni cambiar los valores de las tangentes en ellos sino solamente cambiando el orden en el que se unen (o lo que es lo mismo cambiando su número de orden).

6.5.-LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

El trabajo de investigación que se aporta en esta tesis no puede darse en absoluto por cerrado. Muy al contrario, con él se abren nuevas vias de investigación algunas de ellas como continuación de las aquí iniciadas y otras como resultado de ideas surgidas de forma paralela al estudio realizado.

Las lineas a seguir que se sugieren se han considerado interesantes bien porque complementarían el estudio teórico o porque prometen importantes aplicaciones prácticas.

Una primera linea de investigación a seguir podría ser la de trabajar con funciones $f_i(t)$, $F_i(t)$ y $G_i(t)$ distintas a las que en esta tesis se han usado como coeficientes en las expresiones de las curvas interpolantes:

$$\mathbf{P(t)} = \sum_{i=0}^{i=n} f_i(t)\mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{P(t)} = \sum_{i=0}^{i=n} F_i(t)\mathbf{P}_i + \sum_{i=0}^{i=n} G_i(t)\mathbf{P}_i \qquad (1)$$

con las que se han construido las curvas que posteriormente, mediante su producto cartesiano, dieron lugar a las superficies interpoladoras.

Se partiría de los mismos problemas a resolver:

- Diseñar superficies que pasen por un conjunto de puntos dados por sus coordenadas cartesianas.

- Diseñar superficies que pasen por un conjunto de puntos dados con dos tangentes a la superficie en cada uno de ellos tambien dadas.

Se podría mantener la estructura operativa del algoritmo, es decir seguir el tratamiento matricial y las restricciones exigidas a las funciones.

Dentro de esta línea se podrían buscar funciones que, además de cumplir todo lo hasta aquí exigido, se les impusieran algunas condiciones adicionales más.

Estas condiciones adicionales podrían ser el obligar a que las curvas interpolantes, de las que se parte para desarrollar las superficies, cumplan con la condición de ser de longitud mínima.

Se podría renunciar a operar con polinomios de Lagrange o de Hermite de grado mínimo a efectos de liberar de restricciones no necesarias de cumplir para la resolución del problema inicial.

Habría que plantearse si estas curvas interpolantes de longitud mínima darían lugar con su producto cartesiano a superficies interpoladoras de area mínima.

La **segunda línea de investigación** que se propone sería la de buscar superficies interpolantes de un conjunto de puntos dados pero con ¨una forma adicional¨ prefijada (figura 6.5.-1).

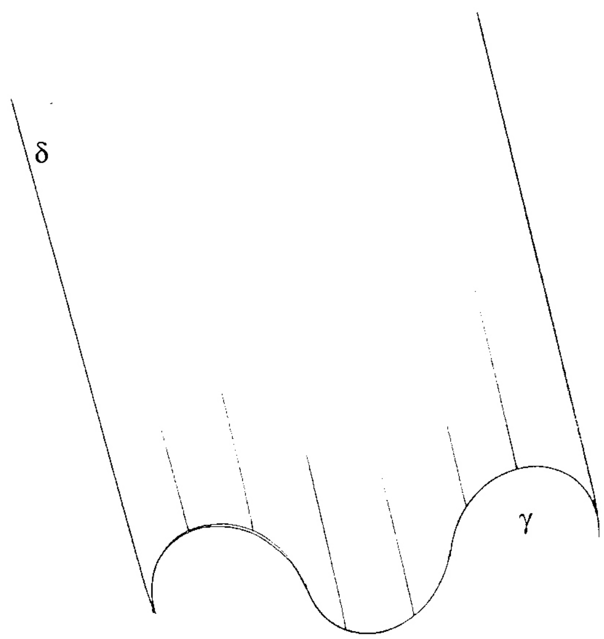


Figura 6.5.-1

La curva γ ademas de interpolar los puntos P_{0i} tendría una forma ¨oscilatoria¨ dada.

Con estas formas se podrían obtener superficies con mayor inercia y por tanto de una mayor aptitud estructural.

En este caso en la curva γ de ecuación:

$$\mathbf{P(t)} = \sum_{i=0}^{i=n} f_i(t)\mathbf{P}_i \qquad (2)$$

o de ecuación:

$$\mathbf{P(t)} = \sum_{i=0}^{i=n} F_i(t)\mathbf{P}_i + \sum_{i=0}^{i=n} G_i(t)\mathbf{P}_i \qquad (3)$$

las funciones $f_i(t)$ y $G_i(t)$ tendrían que cumplir las restricciones que en esta tesis se les ha exigido a los polinomios de Lagrange y Hermite aunque no necesariamente tendrían que ser de grado minimo.

Quizas este problema planteado de un modo generico pudiera ser de dificil solución. En este caso se podría plantear de un modo mas restringido, por ejemplo estudiando solo el caso en que las curvas γ sean planas y siendo su plano vertical.

La **tercera línea de investigación** que se propone tendría un enfoque práctico mas inmediato.

Se trataría de combinar los resultados que esta tesis aporta para el diseño de superficies que pasan por una red de puntos con las posibilidades que ofrecen las Superficies Coons.

Para trabajar con las Superficies Coons se les podría aplicar el tratamiento matricial que se ha venido usando con las Superficies Polinomiales.

Con esta simbiosis entre Superficies Polinomiales y Superficies Coons se podría abordar el diseño de superficies con bordes prefijados (figura 6.5.-2).

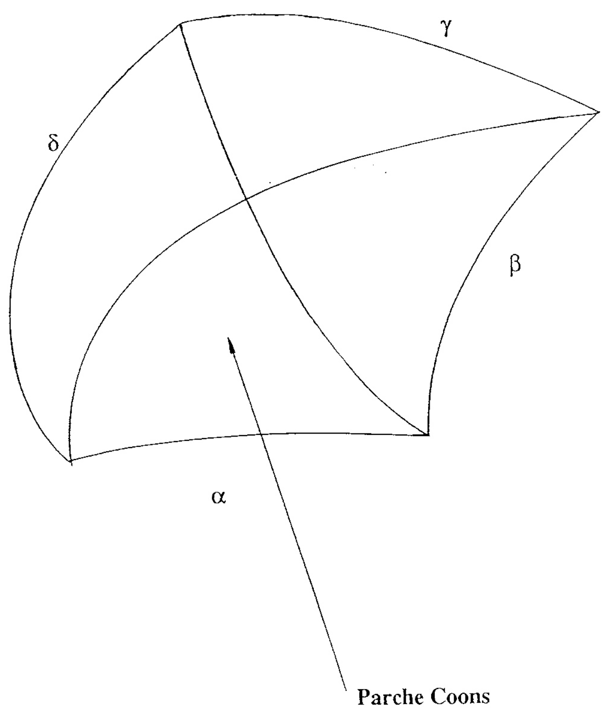


Figura 6.5.-2

CAPÍTULO 7:

BIBLIOGRAFIA

Ahlberg, J. H.; Nilson, E. N.;Wals, J. L.:
The Theory of Splines and Their Applications.
Academic Press. New York. 1967

Bell, E. T.:
Historia de las Matematicas
Fondo de Cultura Economica. Mexici. 1949

Bezier, P. E.:
Numerical Control Mathematics and Applications.
John Wiley & Sons. London. 1972

Bezier, P. E.:
Mathematical and Practical Possibilities of UNISURF.
Academic Press. Orlando. 1974

Blachman, N.:
Mathematica un Enfoque Práctico.
Ed. Ariel. 1993

Böhm, W.; Farin, G.; Kahman:
A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD.
Computer Aided Geometric Design. July. 1984

Böhm, W.:
Efficient Evaluation of Spline.
Computer 30. 1984

Boor, C.:
On Calculating with Bsplines.
J. Approx. Theory 6. 1972

Boor, C.:
Total Positivy of the Spline Collocation Matrix.
Ind. Univ. J. Math. 25 1976

Boor, C.:
A Practical Guide to Splines.
Springer Verlaag. New York. 1978

Boor, C.:
Package for Calculating with Bsplines.
SIAM J. Numer. Anal 14. 1977

Boyer, C.:
Historia de la Matematica.
Alianza Editorial . Madrid 1986

Brunet, P.:
Construccio de Corbes i Auperficies: Principis matematics i aplicacions.

Brunet, P.; Navazo, I.:
Disseny de Corbes.
E.T.S.I. Industrials. Barcelona 1983

Brunet, P.; Rojo, I:
Simulacion Mediante Splines de Sistemas en Derivadas Parciales.
I Simposium Nacional sobre Modelado y Simulación en la Industria y Servicios.
Publicos 1980

Canovas, P.:
Curvas Planas por Ordenador.
EDUNSA 1987

Casteljau, F.:
Outillages Methodes Calcul.
Andre Citröen Automóviles S. A. Paris 1959

Casteljau, F.:
Courbes et Surfaces a Pole.
Andre Citröen Automóviles S. A. Paris 1963

Castillo, E.; Iglesias, A. ; Gutierrez, J. ; Alvarez, E. ; Cobo, A.:
Mathematica.
Ed. Paraninfo. 1993

Cheney, W.; Kincaid, D.:
Numerical Mathematics and Computing
Brooks/Cole Publishing Company. Monterrey, California 1980

Cortes, J.:
Introducción al tratamiento de Graficos por Ordenador
Facultad de Matematicas. Sevilla 1983

Cortes, J.:
Elementos Matematicos para Diseño Asistido por Ordenador
Facultad de Matematicas. Cursos de Doctorado. Sevilla 1985

Cox, M G.:
The Numerical Evaluation of Bsplines
J. Inst. Math. App. 10. 1972

Curry, H. B.; Schoenberg, I. J.:
On Spline Distributions and their Limits: The Polya Distributions Functions
Bull AMER. Math. Scr 53. 1947

Curry, H. B.; Schoenberg, I. J.:
On Polya Frecuency Functions IV. The Fundamental Spline Functions and their Limits
J. d´analyse Math. 17. 1966

Chapra, S. C.; Canales, R. P.:
Metodos Numericos para Ingenieros
Mc. Graw-Hill 1987

Chasen, S:
Geometric Principles and Procedures for Computer Graphics Applications
Prentice Hall 1978

Eagle, A:
On the Relation between the Fourier Constans of a Periodic Function and the Coeffients Determined by Harmonic Analysis
Phil. Mag. 5. 1928

Farin, G. E.:
Konstruktion und Eigenschaften von Bezier-kurven und Bezier-Flächen.
Diplom-Arbeit T.U. Bramschweig. 1977

Favard, J.:
Sur l´Interpolation
J. Math. Pures Apple 19. 1940

Forrest, A. R.:
Interpolation and Approximation by Bezier Polinomials
Cambridge University. 1970

Forrest, A. R.:
Interactive Interpolation and Approximation by Bezier Polinomials
Computer J. 15. 1972

Garcia, E; Brunet, P.:
Disseny Grafic Interactiu mitjancant Funcions Spline
Ponencies de la Conv. Informatica Latina CIL81. Barcelona 1981

Golden, J.:
Fortran IV Programacion y Calculo
Ed. Urmo. Bilbao 1970

Gordon, W.; Riesenfeld, R. :
Bsplines Curves and Surfaces
Academic Press. Orlando 1974

Gould, R. J.:
Surface Programs for Numerical Control
J. Brown ed. IPC. Science and Tecnology Press. Guildford 1972

Gray, T. W.; Glynn, J.:
Exploring Mathematics with Mathematica
Addison-Wesley Publishing Company 1991

Harrington, S.:
Computer Grafics. A Programming Approach
Mc. Graw-Hill Book 1983

Hearn, D.; Baker, M.P.:
Computer Graphics
Prentice Hall 1986

Karlin, S.:
Total Positivity Vol. 1
Stanford University Press 1968

Kindle, J. H.:
Geometria Analitica
Mc. Graw-Hill Book 1970

Laurent, P. J.:
Approximation et Optimisation
Hermann Ed. Paris 1972

Lee, E.:
A Simplifield Bspline Computation Routine
Computing 29. 1982

Marsden, M. J; Schoenberg, I.J.:
On Variation Dimishing Spline Approximation
Mathematics 8. 1966

Newman, W.; Sproull, R.F.:
Principles of Interactive Computer Graphics
Mc. Graw-Hill Book 1981

Powell, M. J. D.:
Approximation Theory and Methods
Cambridge University Press. 1981