



ugr

Universidad
de Granada

Programa de Doctorado en Matemáticas

Departamento de Matemática Aplicada

**RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES
INTEGRALES E INTEGRO-DIFERENCIALES
DE FREDHOLM**

María Victoria Fernández Muñoz

Editorial: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autora: María Victoria Fernández Muñoz
ISBN: 978-84-9125-163-7
URI: <http://hdl.handle.net/10481/40374>

**RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES
INTEGRALES E INTEGRO-DIFERENCIALES
DE FREDHOLM**

María Victoria Fernández Muñoz

Granada, junio de 2015

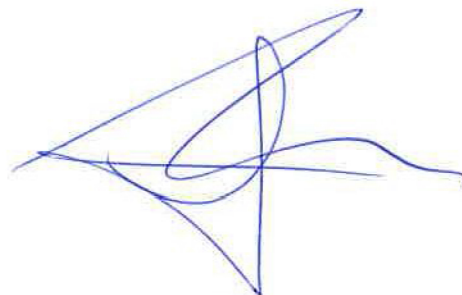
Índice General

1	Resumen	1
2	Introducción	13
2.1	Tratamiento numérico de ecuaciones integrales e integro-diferenciales	15
2.2	Resultados de existencia y unicidad	21
3	Objetivos y metodología	25
4	Resultados y publicaciones	27
4.1	Bases de Schauder	27
4.2	Descripción de los métodos iterativos	34
4.3	Publicaciones	36
5	Conclusions and open problems	63

La doctoranda María Victoria Fernández Muñoz y los directores de la tesis Ana Isabel Garralda Guillem y Manuel Ruiz Galán garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por la doctoranda bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, 7 de abril de 2015.

Directores de la tesis



Fdo.: A.I. Garralda Guillem y M. Ruiz Galán

Doctoranda



Fdo.: M.V. Fernández Muñoz

Los coautores de los artículos que conforman esta tesis doctoral declaramos que no los han presentado en otra tesis doctoral y manifestamos nuestra renuncia a hacerlo en cualquier otra. Asimismo, informamos que el trabajo llevado a cabo por la doctoranda ha sido desarrollado conjunta y gradualmente con los demás coautores, por lo que la totalidad de los resultados novedosos de la tesis contienen una aportación atribuible a la doctoranda.

Granada, 7 de abril de 2015.



Fdo.: M.I. Berenguer Maldonado

Fdo.: F. Calìo y E. Marchetti



Agradecimientos

“Es de bien nacidos ser agradecidos” (refranero español).

En estas líneas quiero expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas las personas e instituciones que, de una manera u otra, me han ayudado y han colaborado en la realización de este trabajo y muy en especial a mis directores de tesis, Ana Isabel Garralda Guillem y Manuel Ruiz Galán, por la infinita paciencia, profesionalidad, calidad humana y amistad que han tenido conmigo en estos largos años.

A las profesoras Elena Marchetti y Franca Calì del Departamento de Matemáticas “Francesco Brioschi” del Politécnico de Milán, con las que trabajé durante mi estancia allí, por su afectuosa acogida y gran apoyo, me hicieron muy agradable el trabajo y al director de dicho departamento Piercesare Secchi, que puso a mi disposición los medios para que mi estancia fuera fructífera.

A Rafael Yáñez García, actual director del Departamento de Matemática Aplicada, al que pertenezco, así como a los anteriores directores, por la ayuda que en todo momento he recibido para el desarrollo de mi trabajo.

A todos y cada uno de mis compañeros de Departamento de la E.T.S. de Ingeniería de Edificación, en particular a M. Isabel Berenguer Maldonado por su ayuda y estímulo. No olvido a mis compañeros de Departamento de la Facultad de CC. Económicas y Empresariales, con los que he compartido tantos años de docencia.

A la E.T.S. de Ingeniería de Edificación por la ayuda recibida en un proyecto de investigación.

A mis amigos y compañeros de distintos departamentos de la Universidad de Granada, con los que en todo momento, he podido contar y, en particular: Belén Senes García, M. Angeles Sánchez Domínguez, Carmen María Llorca Rodríguez, Antonio M. Gil Corral, María García Valverde, Francisca García Rodríguez, Rosalía Crespo Jiménez, y tantos otros.

A mis amigas Teresa García Muñoz, por estar siempre disponible y Pilar Guijarro Granados, que nos dejó y que tanto me animaba a la conclusión de este trabajo. A todos y cada uno de los amigos que no nombro, para evitar que esta lista sea demasiado extensa, con cuya amistad me honran y me enriquecen. A todas las personas que a lo largo de mi vida me han ayudado.

Finalmente, de forma muy especial, agradezco a mis padres Manuel Fernández Sáez (ya partió) y Francisca Muñoz Galocha, el cariño, desvelo, dedicación y el sacrificio durante toda su vida por mi formación. A mis familiares que están siempre cerca, aunque la distancia sea larga.

Capítulo 1

Resumen

Las ecuaciones integrales constituyen un campo con entidad propia dentro de las matemáticas, que además ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de importantes aspectos de las mismas. Tal es el caso de la clásica teoría de existencia y unicidad de solución para ecuaciones integrales de Fredholm en espacios de Hilbert, cuyo colofón, el *teorema de la alternativa de Fredholm*, supone una extensión natural para cierto tipo de operadores, de los resultados finito-dimensionales correspondientes a sistemas de ecuaciones lineales. Otro resultado que hunde sus raíces en el estudio de las ecuaciones integrales y, sin lugar a dudas, es una de las herramientas más importantes del análisis no lineal es el *teorema del punto fijo de Banach* que, además, constituye el punto de partida en nuestro trabajo.

El interés que despierta este tipo de ecuación no es, sin embargo, exclusivamente teórico. Su estudio viene motivado también, y de forma fundamental, por su versatilidad en el modelado de un sinnúmero de situaciones

provenientes de las más variadas áreas de las ciencias, tales como la física, la biología o las finanzas, por citar algunas. La investigación desarrollada al respecto es ingente, y como prueba de ello citamos las referencias bibliográficas [3, 15, 24, 25, 30]. En este sentido, otra clase de ecuación relacionada con la integral, y que presenta ciertas similitudes, es la integro-diferencial. En concreto, su aplicabilidad al modelado de problemas del mundo real puede consultarse en [8, 13, 17].

Sin embargo, y a pesar de la relevancia que acabamos de apuntar de las ecuaciones integrales (e integro-diferenciales), su resolución mediante métodos explícitos es posible únicamente en contados casos, que como cabe esperar, son en su mayoría bastante artificiosos. La necesidad de resolver ecuaciones integrales, a menudo muy complejas en el contexto de las aplicaciones, convierte en obligado su estudio numérico, y es en este estudio en el que se enmarca la memoria que presentamos.

En el segundo capítulo de la misma nos centramos en exponer, a grandes rasgos, algunos de los algoritmos desarrollados hasta la fecha para resolver numéricamente algún tipo concreto de ecuación integral o integro-diferencial, englobándolos según el enfoque seguido en *directos* e *iterativos*. Esta clasificación se basa en dos diferentes formas de escribir las ecuaciones objeto de estudio, utilizando un adecuado operador T en cada caso. Para ilustrar dicha clasificación consideramos el segundo tipo de ecuación trabajada en la memoria, a saber, la *ecuación integral de Fredholm de segunda clase no lineal* que viene dada por

$$f(x) = \lambda u(x) - \int_a^b k(x, y, u(y)) dy, \quad (x \in [a, b]),$$

donde $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, las funciones *núcleo* $k : [a, b]^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son conocidas, y $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función *incógnita*.

Si exigimos ciertas condiciones a las funciones dato, podemos definir el operador $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, para cada $u \in C[a, b]$, como:

$$Tu := \int_a^b k(\cdot, y, u(y))dy,$$

y reescribimos la ecuación como

$$f = (\lambda I - T)u.$$

Esta escritura sugiere un enfoque *directo*, con algoritmos como *colocación* o *Galerkin*, o de forma más general los de *proyección*. En cambio, si la ecuación se reformula como

$$u = \frac{1}{\lambda} (f + Tu),$$

entonces se trata de buscar un punto fijo del operador $\frac{1}{\lambda} (f + T)$, por lo que resulta adecuado aplicar un método *iterativo*. Es este segundo enfoque en el que se enmarcan los principales resultados de este trabajo.

La descripción de estos dos tipos de métodos nos pondrá en condiciones de presentar en los siguientes capítulos los métodos numéricos originales que hemos desarrollado para aproximar la solución de ciertas ecuaciones integrales e integro-diferenciales, a la vez que nos permitirá destacar las fortalezas de los mismos.

En concreto, nos ocupamos de tres tipos de ecuaciones, las integrales mixtas de Volterra–Fredholm de segunda clase, las integrales de Fredholm de segunda clase y las integro-diferenciales de Fredholm. Señalemos inicialmente que nos centraremos en ecuaciones cuyos dominios son intervalos compactos de números reales, tanto en el caso integral como en el integro-diferencial. La extensión a dominios más generales de \mathbb{R}^N no supone, en la mayoría de los casos, más que una pequeña complicación expositiva, pero sigue las mismas ideas.

Concluimos el segundo capítulo, de carácter introductorio, exponiendo brevemente resultados conocidos que garantizan, bajo ciertas hipótesis, la existencia de una, y sólo una, solución para las ecuaciones consideradas siempre con datos continuos.

El Capítulo 3 se ocupa de describir los objetivos principales y la metodología usada en la elaboración de esta memoria.

En el cuarto capítulo desarrollamos de manera resumida y conjunta las principales ideas y técnicas que componen los resultados originales de la memoria y que de forma detallada se presentan en formato de publicación correspondiente a tres artículos en la Sección 4.3. Partimos de la reescritura de cada una de las ecuaciones mencionadas en términos de un adecuado operador T y expresamos la solución, equivalentemente bajo adecuadas condiciones, como el único punto fijo de dicho operador. Como hemos comentado más arriba, esta reescritura sugiere el uso de un método iterativo en el que partiendo de una aproximación inicial ϕ_0 obtengamos la sucesión $T^n(\phi_0)$ que converge a la solución de la ecuación. Es obvio que si en cada iteración fuese posible calcular explícitamente la expresión $T^m(\phi_0)$, para cada m tendríamos una aproximación de la solución del problema. Pero, salvo para casos muy particulares, este cálculo explícito no es posible en la práctica. Por ello, la idea de los métodos propuestos es aproximar, en cada iteración, la imagen por el operador T de la iteración anterior por una función obtenida usando adecuadamente, y de forma diferente en cada caso, proyecciones de funciones en adecuadas bases de Schauder. Por ello iniciamos el Capítulo 4 recordando la definición y algunas propiedades básicas de las Bases de Schauder en los espacios de Banach de las funciones $C([a, b])$ y $C([a, b]^2)$ dotados de su norma usual del máximo y explicamos las ideas generales del método propuesto.

El primer tipo de ecuación que se estudia es el de la *integral mixta de Volterra–Fredholm lineal*, es decir, una ecuación de la forma

$$f(x) = \lambda u(x) - \int_a^x \tilde{k}(x, y)u(y)dy - \int_a^b k(x, y)u(y)dy, \quad (x \in [a, b]),$$

donde $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, las funciones núcleo $k, \tilde{k} : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son conocidas, y $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función *incógnita*.

Para este tipo de ecuación se proponen y comparan dos métodos numéricos. Un primer método, enmarcado en el planteamiento de los métodos directos, más concretamente, basado en el método de colocación utilizando un tipo particular de funciones spline y un segundo método que proporciona una primera aproximación a los métodos iterativos que se desarrollaran con mayor generalidad y para otro tipo de ecuaciones. Además, se incluye una comparación de los resultados numéricos obtenidos para diferentes ecuaciones.

Continuamos con el estudio de la *ecuación integral de Fredholm* presentada más arriba. Para resolver dicha ecuación se propone un método iterativo que sigue la idea descrita más arriba. La principal aportación y novedad introducida en este trabajo es el uso de bases de Schauder bidimensionales en el espacio de Banach $C([a, b]^2)$. El uso de estas bases permite salvar las dificultades del método introducido para la ecuación anterior, en el sentido que es aplicable a ecuaciones no lineales sin mayores restricciones en su función núcleo que las derivadas de la aplicabilidad del teorema del punto fijo de Banach. Hacemos también un estudio detallado del error cometido al aplicar el método y con diferentes ejemplos numéricos que ilustran su comportamiento.

Concluimos el Capítulo 4, situándonos ya fuera del ambiente puramente integral, con el análisis de la *ecuación integro-diferencial* de Fredholm, que

no es más que el problema integro-diferencial con valores iniciales:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) + \int_a^b k(x, y, u(y))dy, & (x \in [a, b]), \\ u(a) = u_0 \end{cases}$$

siendo $u_0 \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $k : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones conocidas y $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por determinar.

Para su resolución se extienden los resultados anteriores a este tipo de ecuaciones, analizando el comportamiento del método en diferentes ejemplos.

Por último, el Capítulo 5 está dedicado a recoger las conclusiones generales del trabajo presentado y a analizar los problemas abiertos para futuras investigaciones.

Abstract

Integral equations constitute a field with own entity within mathematics, which also has played a key role in the development of important theoretical aspects of them. Such is the case of the classical theory of the existence and uniqueness of solution for Fredholm integral equations in Hilbert spaces, whose most important result is *Fredholm alternative theorem*. This result is a natural extension for certain types of operators, of the finite-dimensional results for linear equations systems. Another result which has its roots in the study of integral equations and, undoubtedly, is one of the most important nonlinear tools is the *Banach Fixed Point theorem* that, in addition, constitutes the starting point in our work.

The interest aroused by this type of equation is not only from a theoretical point of view. Their study is motivated also and fundamentally, for their versatility in modelling of a lot of situations from several areas of science, such as physics, biology and finance, to name a few. The research developed on the matter is enormous: see the references [3, 15, 24, 25, 30]. In this regard, other equation related to the integral one and having certain similarities, is the integro-differential equation. Specifically, its applicability to modeling real-world problems can be found in [8, 13, 17].

However, despite the relevance of just aiming integral equations (and integro-differential equations), its explicit numerical solution can be found only in rare cases, which as expected, are rather contrived. The need to solve often very complex integral equations in the context of applications forced the development of numerical methods and there is in this study wherein the thesis is framed.

In the second chapter we focus on exposing, in a broad sense, some of the algorithms so far developed to solve some integral or integro-differential equations. We classify these methods in *direct methods* and *iterative methods*. This classification is based on two different ways of writing equations under study, using a suitable operator T in each case. To illustrate this classification we consider the second type of equation studied on this memory, namely, the *Fredholm nonlinear integral equation of the second kind*, given by

$$f(x) = \lambda u(x) - \int_a^b k(x, y, u(y)) dy, \quad (x \in [a, b]),$$

where $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, the *kernel function* $k : [a, b]^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are given, and $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is the *unknown function*.

Under some assumptions on the given functions, we can define the operator $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, for each $u \in C[a, b]$, as

$$Tu := \int_a^b k(\cdot, y, u(y)) dy,$$

and we can write the above equation as

$$f = (\lambda I - T)u.$$

This expression suggests a *direct method*, for example those based on *collocation* or *Galerkin* algorithms, or more generally, the *projection methods*. On

the other hand, if we write the equation as

$$u = \frac{1}{\lambda} (f + Tu),$$

then we try to find a fixed point operator $\frac{1}{\lambda} (f + T)$, so it is appropriate to apply an *iterative method*. The main results of this work follow this second approach.

The description of these two types of methods will put us in conditions to present in the following chapters the original numerical methods that we have developed to approximate the solution of certain integral and integro-differential equations. Moreover, they will allow us to highlight the strengths of them.

Specifically, we deal with three types of equations, the second kind mixed Volterra–Fredholm integral equation, second kind Fredholm integral equation and Fredholm integro-differential equation. Let us point out that we will focus on equations whose domains are compact intervals of real numbers. The extension to more general domains of \mathbb{R}^N implies only a difficulty in the exposition, but follows the same ideas.

We conclude the introductory chapter with a brief description of well-known results that guarantee, under certain hypotheses, the existence of one, and only one, solution for the considered equations with continuous data.

Chapter 3 is concerned with showing the main goals and the methodology we have used in the preparation of this thesis.

In the fourth chapter we summarily develop the fundamental ideas and techniques in the original results of the thesis, which are introduced in Section 4.3 in a article format corresponding to our three publications. We start

by rewriting each of the mentioned equations in terms of a suitable operator T and express the solution, equivalently under suitable conditions, as the unique fixed point of that operator. As mentioned above, this rewriting suggests the use of an iterative method: we begin with an initial approximation ϕ_0 and obtain the sequence $T^n(\phi_0)$ which converges to the solution of the equation. Obviously, if for each iteration it would be possible to calculate the expression on $T^m(\phi_0)$, for every m , we would have an approximation of the solution but, except for very special cases, this computation is not possible in practice. Therefore, the idea of the proposed method is to approximate at each iteration the image for the operator T of the previous iteration by a function obtained using in each case by projections associated with suitable Schauder bases. Thus, we begin Chapter 4 by recalling the definition and some basic properties of Schauder bases in the Banach spaces of functions $C([a, b])$ and $C([a, b]^2)$, endowed with their usual maximum norms, and we explain the general ideas of the method proposed.

The first kind of equation studied is the *linear mixed Volterra–Fredholm integral equation*, i.e., the equation

$$f(x) = \lambda u(x) - \int_a^x \tilde{k}(x, y)u(y)dy - \int_a^b k(x, y)u(y)dy, \quad (x \in [a, b]),$$

where $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, the *kernel functions* $k, \tilde{k} : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ and $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are given, and $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is *the unknown function*.

For this type of equation we propose and compare two numerical methods. A first method, in the direct setting, more specifically, a collocation method using a particular type of spline functions, and a second method providing a first approximation on the iterative methods we will develop more generality and in the other equations. We include a comparison between both methods in different concrete equations.

We continue by dealing with the study of the *Fredholm integral equation* introduced above. To solve this equation we propose an iterative method that follows the idea previously commented. The main aspect we introduce in this work is the use of two-dimensional Schauder bases in the Banach space $C([a, b]^2)$. Using these bases we can overcome the difficulties of the method introduced for the previous equations, in the sense that it is applicable to nonlinear equations without further restrictions on their kernel functions than those derived from the applicability of the Banach Fixed Point theorem. We also provide a detailed study of the committed error in applying the method and with different numerical examples illustrating its behavior.

We conclude Chapter 4, outside the integral environment, with the discussion of *the integro-differential Fredholm equation* which is the initial value integro-differential problem:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) + \int_a^b k(x, y, u(y))dy, & (x \in [a, b]), \\ u(a) = u_0 \end{cases}$$

where $u_0 \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ and $k : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ are given functions and $u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ is the unknown. To its resolution, we extend the preceding results to this type of equations, and we analyze the behavior of the method in different examples.

Finally, Chapter 5 is devoted to collect the general conclusions of the work presented and some open problems for future research.

Capítulo 2

Introducción

Las ecuaciones integrales constituyen un campo con entidad propia dentro de las matemáticas, que además ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de importantes aspectos de las mismas. Tal es el caso de la clásica teoría de existencia y unicidad de solución para ecuaciones integrales de Fredholm en espacios de Hilbert, cuyo colofón, el celebrado *teorema de la alternativa de Fredholm*, supone una extensión natural para cierto tipo de operadores, de los resultados finito-dimensionales correspondientes a sistemas de ecuaciones lineales. Otro resultado que hunde sus raíces en el estudio de las ecuaciones integrales –y en su caso particular más importante de las ecuaciones diferenciales ordinarias– y, sin lugar a dudas, una de las herramientas más importantes del análisis no lineal, es el *teorema del punto fijo de Banach*, del que nos ocupamos más adelante. Sin embargo, no es objeto de esta memoria recoger el impacto que este tipo de ecuaciones ha dejado en diversos ámbitos de las matemáticas: la mera descripción de la influencia ejercida, por ejemplo, sobre la teoría de operadores en espacios de Banach, excede el

carácter contextualizador que pretendemos dar a este aspecto de las ecuaciones integrales. No obstante, el clásico texto del desaparecido J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, [7], así como el imprescindible y más reciente *History of Banach Spaces and Linear Operators*, [19], de A. Pietsch, dan una perspectiva histórica de la influencia de las ecuaciones integrales en el análisis funcional, tanto el lineal como el no lineal.

El interés que despierta este tipo de ecuación no es, sin embargo, exclusivamente teórico. Su estudio viene motivado también, y de forma fundamental, por su versatilidad en el modelado de un sinfín de situaciones provenientes de las más variadas áreas de las ciencias, tales como la física, la biología o las finanzas, por citar algunas. La investigación desarrollada al respecto es ingente, y como prueba de ello citamos las referencias bibliográficas [3, 15, 24, 25, 30]. En este sentido, otra clase de ecuación relacionada con la integral, y que presenta ciertas similitudes, es la integro-diferencial. En concreto, su aplicabilidad al modelado de problemas del mundo real puede consultarse en [8, 13, 17].

Sin embargo, y a pesar de la relevancia que acabamos de apuntar de las ecuaciones integrales (e integro-diferenciales), su resolución mediante métodos explícitos es posible únicamente en contados casos, que como cabe esperar, son en su mayoría bastante artificiosos. La necesidad de resolver ecuaciones integrales, a menudo muy complejas en el contexto de las aplicaciones, convierte en obligado su estudio numérico, en el que se enmarca precisamente la memoria que presentamos.

En este segundo capítulo nos centramos en exponer, a grandes rasgos, algunos de los algoritmos desarrollados hasta la fecha para resolver numéricamente algún tipo concreto de ecuación integral, englobándolos según

el enfoque seguido en *directos* e *iterativos*. Ello nos pondrá en condiciones de describir en el Capítulo 4 los métodos numéricos originales que hemos desarrollado para aproximar la solución de una ecuación integral o integro-diferencial (vid. [5, 6, 4]), a la vez que nos permitirá destacar las fortalezas de los mismos.

Hagamos un breve inciso técnico que clarificará la lectura de lo que sigue. En primer lugar, todas las ecuaciones se consideran en contexto real, pero en caso complejo el tratamiento que hacemos de todas ellas es totalmente análogo; nos restringimos pues al caso real por una cuestión de simplicidad en la exposición. En otro orden de cosas, la topología asociada a un espacio normado será siempre la inducida canónicamente por su norma, por lo que los conceptos de compacidad, límite, continuidad... se entenderán en todo momento relativos a dicha topología.

2.1 Tratamiento numérico de ecuaciones integrales e integro-diferenciales

En esta sección recogemos algunos de los métodos numéricos desarrollados *ad hoc* para la resolución numérica de ecuaciones integrales e integro-diferenciales, ya sean clásicos o recientes. Para ello, se hace imprescindible la descripción de los tipos de ecuaciones que se van a considerar, y de ello nos ocupamos en primer lugar.

Señalemos inicialmente que nos centraremos en ecuaciones cuyos dominios son intervalos compactos de números reales, tanto en el caso integral como en el integro-diferencial. La extensión a dominios más generales de \mathbb{R}^N

no supone, en la mayoría de los casos, más que una pequeña complicación expositiva, pero sigue las mismas ideas.

La ecuación integral de Fredholm viene dada por

$$(2.1) \quad f(x) = \lambda u(x) - \int_a^b k(x, y, u(y)) dy, \quad (x \in [a, b]),$$

donde $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, las funciones núcleo $k : [a, b]^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son conocidas, y $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función incógnita. Cuando $\lambda = 0$ la ecuación se dice de *primera clase* y en caso contrario, de *segunda clase*. Además, tanto en una situación como en otra, se llama *lineal* si su núcleo lo es, i.e., k adopta la forma

$$\text{para todo } (x, y, t) \in [a, b]^2 \times \mathbb{R}, \quad k(x, y, t) = t\kappa(x, y),$$

para cierta función $\kappa : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, y *no lineal*, si k no admite una tal factorización.

Un caso particular importante corresponde a la *ecuación de Volterra* (a la que se aplica la misma terminología *primera clase* versus *segunda clase*, *lineal* versus *no lineal*), en la que el núcleo es del tipo

$$\text{para todo } (x, y, t) \in [a, b]^2 \times \mathbb{R}, \quad k(x, y, t) = \begin{cases} \tilde{k}(x, y, t), & \text{si } a \leq y \leq x \\ 0, & \text{si } y > x \end{cases},$$

donde \tilde{k} es una función real definida en $[a, b]^2 \times \mathbb{R}$, esto es, dicha ecuación responde a la identidad

$$(2.2) \quad f(x) = \lambda u(x) - \int_a^x \tilde{k}(x, y, u(y)) dy, \quad (x \in [a, b]).$$

A la vista de (2.1) y (2.2) podemos entender por qué en ocasiones, a la ecuación de Fredholm se le llama de *intervalo de integración fijo*, frente a

la de Volterra, conocida también como de *intervalo de integración variable*. Este tipo de ecuación puede combinarse con la anterior mediante una suma, definiendo la conocida como *ecuación integral mixta de Volterra–Fredholm*, es decir,

$$(2.3) \quad f(x) = \lambda u(x) - \int_a^x \tilde{k}(x, y, u(y)) dy - \int_a^b k(x, y, u(y)) dy, \quad (x \in [a, b]),$$

de la que obviamente ambas ecuaciones, la de Fredholm y la de Volterra, se derivan como caso particular. No debe sorprender a estas alturas de listado terminológico que se aplique a las ecuaciones mixtas la nomenclatura *primera clase/segunda clase* y *lineal/no lineal*.

Por otro lado, y situándonos ya fuera del ambiente puramente integral, la *ecuación integro-diferencial* de Fredholm no es más que el problema integro-diferencial con valores iniciales

$$(2.4) \quad \begin{cases} u'(x) = f(x) + \int_a^b k(x, y, u(y)) dy, & (x \in [a, b]), \\ u(a) = u_0 \end{cases}$$

siendo $u_0 \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $k : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones conocidas y $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función por determinar. La distinción entre ecuación *lineal* y *no lineal* se hace en la línea ya mencionada para ecuaciones integrales y no se repite por no resultar excesivamente redundantes.

Antes de centrar nuestra atención en su tratamiento numérico, insistamos una vez más en que su resolución de forma explícita no siempre es posible, sólo en situaciones muy particulares. Por ejemplo, si en una ecuación integral de Fredholm de segunda clase lineal la función f es continua y

el núcleo k es *separable*, lo que significa que

$$\text{para todo } (x, y) \in [a, b]^2, \quad k(x, y) = \sum_{j=1}^m a_j(x)b_j(y),$$

donde $m \in \mathbb{N}$ y las funciones $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m$ son funciones reales y continuas en $[a, b]$ y linealmente independientes como elementos del espacio vectorial $\mathbb{R}^{[a, b]}$, entonces la resolución de la ecuación (2.1) se reduce a encontrar la solución de un sistema algebraico de m ecuaciones lineales y m incógnitas, y para el cálculo de sus coeficientes sólo hay que determinar (si es posible de forma explícita) las integrales

$$\int_a^b a_j(x)b_k(x)dx, \quad \int_a^b b_j(x)f(x)dx, \quad j, k = 1, \dots, m.$$

Concluimos pues esta sección presentando una serie de métodos numéricos ideados para determinar la solución de forma aproximada, supuesto que exista y sea única. Este último aspecto se trata en la siguiente sección. Circunscribimos nuestra exposición a ecuaciones integrales de Fredholm de segunda clase, ecuaciones integrales mixtas de Volterra–Fredholm y ecuaciones integro-diferenciales de Fredholm, todas con datos continuos, pues como comprobaremos en los siguientes capítulos, corresponden al tipo de ecuación para el que hemos realizado aportaciones novedosas.

Tal y como se ha dicho con anterioridad, se trata de recoger algunos de los algoritmos más relevantes, ya sean clásicos o recientes. Ciertamente, nos centramos en exponer algunos de ellos, pues la investigación en este campo ha sido bastante fructífera, formando parte desde sus inicios del grupo de problemas centrales del análisis numérico. No obstante, vamos a agruparlos en dos clases fundamentales de algoritmos, los *directos* y los *iterativos*. Para entender fácilmente esta clasificación, comencemos con la ecuación integral

de Fredholm de segunda clase no lineal (2.1), con (λ necesariamente no nulo y) las funciones $k : [a, b]^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, ecuación que puede reescribirse equivalentemente en términos de operadores. Más concretamente, dado Ω un espacio topológico compacto, $C(\Omega)$ denota a lo largo de toda la memoria el espacio de Banach de las funciones reales y continuas definidas en Ω , dotado de su norma usual del máximo $\|\cdot\|_\infty$. Definimos entonces el operador $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ para cada $u \in C[a, b]$ como

$$(2.5) \quad Tu := \int_a^b k(\cdot, y, u(y)) dy,$$

que claramente es lineal y continuo. De hecho, es bien conocido que además T es compacto (aplica subconjuntos acotados en relativamente compactos): véase, por ejemplo, el indispensable texto de K. Atkinson y H. Weimin, específicamente [1, § 2.8.1]. Entonces, si I es el operador identidad en $C[a, b]$, la ecuación integral (2.1) no es más que la ecuación en $C[a, b]$

$$(2.6) \quad f = (\lambda I - T)u.$$

Esta escritura sugiere un enfoque *directo*, con algoritmos como *colocación* o *Galerkin*, o de forma más general los de *proyección*, cuyo estudio no ha dejado de estar vigente, especialmente en las últimas décadas: véanse [1, § 12.1] y [21, 16, 14]. También pueden considerarse para este tipo de formulación los llamados métodos de *Nyström*, basados en algoritmos de integración numérica, como en [1, § 12.4.3] y [22, 31].

En cambio, si la ecuación (2.1) se reformula como

$$(2.7) \quad u = \frac{1}{\lambda} (f + Tu),$$

entonces se trata de buscar un punto fijo del operador $\frac{1}{\lambda} (f + T)$, por lo que resulta adecuado aplicar un método *iterativo* (véanse, por ejemplo, [1, § 12.3]

y [27, 9]). El motivo último que lo justifica es el carácter iterativo del *teorema del punto fijo de Banach* ([2, p. 160]), cuyo enunciado en el ambiente de los espacios de Banach recordamos para dejar clara esta afirmación:

Teorema 2.1. (Teorema del punto fijo de Banach) *Sea E un espacio de Banach y supongamos que $\Phi : E \longrightarrow E$ es una aplicación para la que existe una constante $0 \leq \rho < 1$ de forma que*

$$u, v \in E \Rightarrow \|T(u) - T(v)\| \leq \rho \|u - v\|.$$

Entonces T admite un único punto fijo $u_f \in E$. De hecho, si u_0 es cualquier elemento de E y definimos recursivamente para cada $j \geq 1$

$$u_j := T(u_{j-1}),$$

entonces

$$\|u_j - u_f\| \leq \frac{\rho^j}{1 - \rho} \|u_0 - u_1\|.$$

En particular,

$$\lim_j u_j = u_f.$$

Por su parte, las ecuaciones integrales mixtas de Volterra–Fredholm de segunda especie admiten un enfoque totalmente análogo desde el punto de vista numérico, tal y como ilustran por ejemplo [18, 26, 29].

De igual forma, el tratamiento numérico de las ecuaciones integro-diferenciales de Fredholm comparte básicamente la misma clasificación, aunque con matices (vid. [11, 20, 28]). Seguimos trabajando bajo hipótesis de continuidad, sin preocuparnos de momento por la posible existencia de una solución, así como de su unicidad. En cuanto a los métodos *directos*, se obtienen a partir de la propia ecuación (2.4), y para los *iterativos*, basta reescribir

dicha ecuación en términos de punto fijo de cierto operador. En concreto, definiendo el operador $T : C[a, b] \longrightarrow C[a, b]$ en cada $u \in C[a, b]$ como

$$(2.8) \quad T(u)(x) := u_0 + \int_a^x g(s)ds + \int_a^x \int_a^b k(s, t, u(t))dtds, \quad (x \in [a, b]),$$

entonces u es solución de la ecuación integro-diferencial (2.4) cuando, y sólo cuando, u es punto fijo de este operador T .

2.2 Resultados de existencia y unicidad

Concluimos este capítulo introductorio exponiendo brevemente resultados conocidos que garantizan, bajo ciertas hipótesis, la existencia de una, y solo una, solución para las ecuaciones consideradas, esto es, las integrales de Fredholm de segunda clase, las integrales mixtas de Volterra–Fredholm de segunda clase y las integro-diferenciales de Fredholm, siempre con datos continuos.

La herramienta que se usa para estudiar esta cuestión es el teorema del punto fijo de Banach, Teorema 2.1., que además, desde el punto de vista de los métodos iterativos, proporciona una sucesión aproximante, la determinada por las iterantes del operador en cuestión sobre un elemento inicial. Se trata de resultados estándar y manejados implícitamente en la mayoría de los trabajos numéricos sobre estos tres tipos de ecuaciones.

Aunque ya hemos reescrito en la sección anterior algunas ecuaciones en términos de operadores integrales, vamos a resumir seguidamente para cada una de las ecuaciones consideradas su expresión operacional y las condiciones que, de forma natural, garantizan su unisolvencia. En concreto, notamos

por T_1 , T_2 y T_3 los operadores de $C[a, b]$ en sí mismo, definidos para cada $u \in C[a, b]$ y cada $x \in [a, b]$, respectivamente, como

$$(2.9) \quad T_1(u)(x) = \frac{1}{\lambda} \left(f(x) + \int_a^b k(x, y, u(y)) dy \right)$$

$$(2.10) \quad T_2(u)(x) = \frac{1}{\lambda} \left(f(x) + \int_a^x k_1(x, y)u(y) dy + \int_a^b k_2(x, y)u(y) dy \right)$$

y

$$(2.11) \quad T_3(u)(x) = u_0 + \int_a^x g(s) ds + \int_a^x \int_a^b G(s, t, y(t)) dt ds,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u_0 \in \mathbb{R}$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k_1, k_2 : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $k, g : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas dadas y $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función continua incógnita, solución de las ecuaciones (2.1), (2.3) y (2.4), respectivamente.

El teorema del punto fijo de Banach, Teorema 2.1., asegura que bajo ciertas condiciones de las diferentes funciones dadas, condiciones que enumeraremos a continuación, los operadores T_1 , T_2 y T_3 tienen un único punto fijo, o equivalentemente cada una de las ecuaciones (2.1), (2.3) y (2.4), respectivamente, admite una única solución.

Las condiciones que deben satisfacer los datos son las siguientes:

- Para el operador T_1 imponemos que la función k es lipschitziana en su tercera variable, con constante de Lipschitz $M > 0$ verificando que

$$(2.12) \quad |\lambda| > M(b - a).$$

- Para el operador T_2 , suponemos que

$$(2.13) \quad \|\lambda\| > 2M(b - a),$$

donde $M = \max\{\|k_1\|, \|k_2\|\}$.

- Para el operador T_3 asumimos que G es lipschitziana en su tercera variable, con constante de Lipschitz $M > 0$ verificando que

$$(2.14) \quad 1 > M(b - a)^2.$$

Capítulo 3

Objetivos y metodología

Los objetivos fundamentales que nos marcamos al iniciar el presente trabajo fueron dos. Por un lado, intentamos abordar el estudio numérico de ecuaciones integrales e integro-diferenciales de Fredholm mediante un tipo de algoritmo que permitiese obtener una aproximación de la solución de forma operativa y programable. Por otro, tratamos de unificar bajo un mismo método que, salvando en cada caso las dificultades propias de la ecuación concreta, fuese susceptible de aplicarse en otros contextos. El logro de ambos hitos queda refrendado por las publicaciones originales que aparecen recogidas en la Sección 3 del Capítulo 4.

Con relación a la metodología, se realizó inicialmente un estudio recopilatorio de los resultados teóricos que analizan las condiciones de existencia y unicidad de solución de las ecuaciones cuyo estudio numérico se ha abordado en esta tesis y que se han descrito en el Capítulo 2. Como segundo paso hemos recogido métodos numéricos clásicos y algunos recientes de especial

relevancia. En tercer lugar, y puesto que los métodos que hemos desarrollado se apoyan en sistemas biortogonales en ciertos espacios de Banach, y más concretamente de bases de Schauder en espacios asociados de forma natural a las ecuaciones que se estudian, hemos realizado un estudio en profundidad de los mismos. A continuación ha comenzado el trabajo original de la tesis, diseñando para cada tipo de ecuación un método numérico que permite aproximar su solución, analizando sus propiedades numéricas tales como convergencia o error. Seguidamente hemos desarrollado en cada caso un algoritmo que se ha programado, ilustrando su comportamiento con algunas ecuaciones particulares y comparándolo con otros métodos numéricos desarrollados últimamente. Los resultados obtenidos han sido presentados en forma de comunicación en algunos congresos internacionales como el “3rd Chilean Workshop on Numerical Analysis and Partial Differential Equations” (WONAPDE, Concepción, Chile) o “NumAn 2010 Conference on Numerical Analysis” (Chania, Grecia).

Capítulo 4

Resultados y publicaciones

El desarrollo general de las ideas fundamentales y las técnicas que comparten los resultados que, de forma detallada, se presentan, en formato original de los artículos publicados y que constituyen la aportación original de esta tesis doctoral, constituyen el principal objetivo de este capítulo.

4.1 Bases de Schauder

Recordamos en esta sección la definición y algunas propiedades básicas de las bases de Schauder en los espacios de Banach $C[a, b]$ y $C[a, b]^2$. Utilizaremos estas bases como herramienta en la resolución numérica de diferentes ecuaciones integrales e integro-diferenciales. Las definiciones y resultados contenidos en esta sección pueden encontrarse en [12, 23, 10].

Definición 4.1. Una sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1}$ en un espacio de Banach E se de-

nomina *base de Schauder* si para todo $x \in E$ existe una única sucesión de escalares $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ de forma que

$$x = \sum_{n \geq 1} \beta_n b_n.$$

Asociada a una base de Schauder se definen las dos sucesiones siguientes:

Definición 4.2. Llamamos *funcionales biortogonales* asociados a una base de Schauder $\{b_n\}_{n \geq 1}$ en un espacio de Banach E , a la sucesión de funcionales (lineales y continuos) $\{b_n^*\}_{n \geq 1}$ del dual topológico E^* de E , dados para cada $n \geq 1$ por

$$b_n^* \left(\sum_{k \geq 1} \beta_k b_k \right) := \beta_n.$$

Definición 4.3. Las *proyecciones* de una base de Schauder $\{b_n\}_{n \geq 1}$ en un espacio de Banach E es la sucesión de aplicaciones (lineales y continuas) $\{P_n\}_{n \geq 1}$ de E en E , definidas para todo $n \geq 1$ mediante las sumas parciales

$$P_n \left(\sum_{k \geq 1} \beta_k b_k \right) := \sum_{k=1}^n \beta_k b_k.$$

Recordamos a continuación la definición de la base de Schauder usual en el espacio $C[0, 1]$. Si bien todos los resultados contenidos en la presente memoria son válidos en el espacio de Banach $C[a, b]$, consideramos en adelante, en aras de mayor simplicidad en la exposición de los resultados, el espacio de Banach $C[0, 1]$.

Definición 4.4. Dada una sucesión densa de puntos distintos $\{t_i\}_{i \geq 1}$ en $[0, 1]$, con $t_1 = 0$ y $t_2 = 1$, definimos la sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1}$ siguiente:

$$b_1(t) := 1, \quad (t \in [0, 1])$$

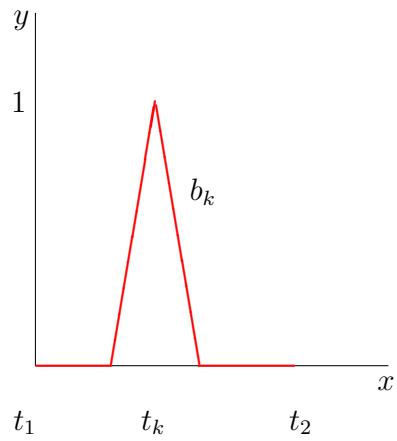
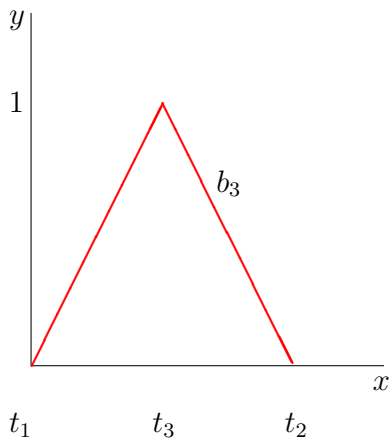
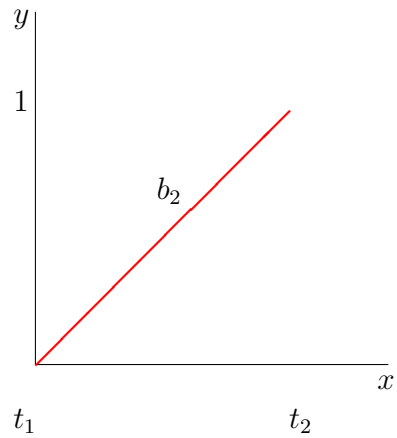
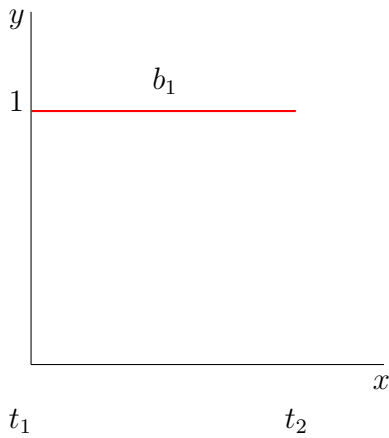
y para cada $n \geq 2$ notamos por b_n la función lineal a trozos y continua determinada por los puntos $\{t_1, \dots, t_n\}$ que satisface:

$$\text{para todo } k < n, \quad b_n(t_k) = 0$$

y

$$b_n(t_n) = 1.$$

En el gráfico siguiente ilustramos la definición de la base.



Dada la base de Schauder usual $\{b_n\}_{n \geq 1}$ de $C[0, 1]$ es sencillo obtener la sucesión de funcionales biortogonales: si $x \in C[0, 1]$ entonces

$$b_1^*(x) = x(t_1)$$

y para cada $n \geq 2$,

$$b_n^*(x) = x(t_n) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k^*(x)b_k(t_n).$$

En particular, la sucesión de proyecciones $\{P_n\}_{n \geq 1}$ satisface la siguiente propiedad de interpolación: para todo $x \in C[0, 1]$, para todo $n \geq 1$ y para todo $i \leq n$, se tiene que

$$P_n(x)(t_i) = x(t_i).$$

El siguiente resultado indica que además, bajo ciertas condiciones de suavidad adicional sobre x , podemos acotar el error obtenido al aproximar la función por su proyección n -ésima. Para ello previamente introducimos cierta notación adicional: dado un subconjunto denso $\{t_i\}_{i \geq 1}$ de puntos distintos en $[0, 1]$, notamos por T_n al conjunto $\{t_1, \dots, t_n\}$ ordenado en orden creciente para $n \geq 2$ y por ΔT_n el máximo de las distancias entre cada par de puntos consecutivos de T_n .

Proposición 4.5. *Sea $x \in C^1([0, 1])$, entonces*

$$\|x - P_n(x)\| \leq 2\|x'\|\Delta T_n.$$

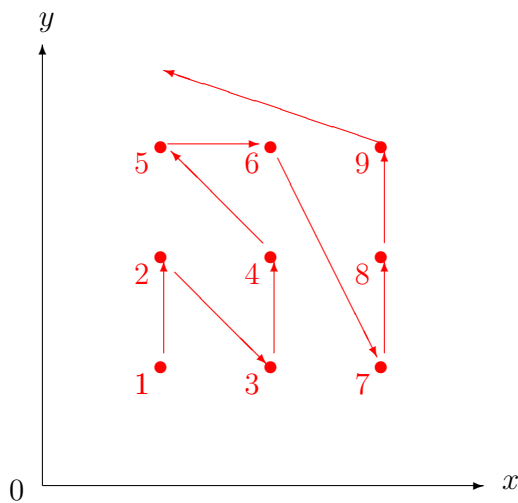
Introducimos a continuación la base de Schauder usual del espacio de Banach $C[0, 1]^2$. Para ello necesitamos en primer lugar ordenar el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

En lo que sigue notamos por $[x]$ la parte entera de un número real x .

Definición 4.6. Notamos por $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la aplicación biyectiva dada por

$$\sigma(n) := \begin{cases} (\sqrt{n}, \sqrt{n}), & \text{si } [\sqrt{n}] = \sqrt{n} \\ (n - [\sqrt{n}]^2, [\sqrt{n}] + 1), & \text{si } 0 < n - [\sqrt{n}]^2 \leq [\sqrt{n}] \\ ([\sqrt{n}] + 1, n - [\sqrt{n}]^2 - [\sqrt{n}]), & \text{si } [\sqrt{n}] < n - [\sqrt{n}]^2 \end{cases} .$$

En el gráfico siguiente ilustramos esta ordenación.



El resultado siguiente nos proporciona una base del espacio de Banach de las funciones $C[0, 1]^2$ construida a partir de la base de $C[0, 1]$.

Proposición 4.7. Dadas $\{b_i\}_{i \geq 1}$ y $\{\hat{b}_j\}_{j \geq 1}$ bases de Schauder del espacio $C[0, 1]$, entonces la sucesión

$$B_n(s, t) := b_i(s)\hat{b}_j(t), \quad (s, t \in [0, 1]),$$

con $\sigma(n) = (i, j)$, es una base de Schauder para $C[0, 1]^2$.

De ahora en adelante si $\{t_i : i \geq 1\}$ es un subconjunto denso de puntos distintos en $[0, 1]$, con $t_1 = 0$ y $t_2 = 1$, y $\{b_i\}_{i \geq 1}$ es la base usual de Schauder en $C[0, 1]$ asociada a dichos puntos, notamos por $\{B_n\}_{n \geq 1}$ la base de Schauder para $C[0, 1]^2$ obtenida de la manera “natural“ indicada más arriba.

Es fácil comprobar que esta base satisface propiedades análogas a las del caso unidimensional: para todo $s, t \in [0, 1]$,

$$B_1(s, t) = 1$$

y para $n \geq 2$

$$B_n(t_i, t_j) = \begin{cases} 1, & \text{if } \sigma(n) = (i, j) \\ 0, & \text{if } \sigma^{-1}(i, j) < n \end{cases}.$$

En particular, la sucesión de funcionales biortogonales $\{B_n^*\}_{n \geq 1}$ se puede obtener fácilmente: si $x \in C[0, 1]^2$, entonces

$$B_1^*(x) = x(t_1, t_1)$$

y para todo $n \geq 2$, if $\sigma(n) = (i, j)$, tenemos

$$B_n^*(x) = x(t_i, t_j) - \sum_{k=1}^{n-1} B_k^*(x) B_k(t_i, t_j).$$

Como consecuencia, la sucesión de proyecciones $\{Q_n\}_{n \geq 1}$ satisface

$$(4.1) \quad Q_n(x)(t_i, t_j) = x(t_i, t_j),$$

siempre que $n, i, j \in \mathbb{N}$ y $\sigma^{-1}(i, j) \leq n$.

El siguiente resultado, consecuencia directa de (4.1) y del teorema del valor medio, análogo al descrito en el caso unidimensional, nos proporciona

bajo ciertas condiciones de suavidad sobre la función, el orden de convergencia de la sucesión de proyecciones en el caso bidimensional.

Proposición 4.8. Sea $x \in C^1([0, 1]^2)$ y notamos

$$M := \max \left\{ \left\| \frac{\partial x}{\partial s} \right\|, \left\| \frac{\partial x}{\partial t} \right\| \right\}.$$

Entonces si $n \geq 2$ tenemos

$$\|x - Q_{n^2}(x)\| \leq 4M\Delta T_n.$$

En la tabla siguiente recogemos de forma resumida y comparativa las principales propiedades de las bases de Schauder uni y bidimensionales.

$b_1 = 1$ $i \geq 2 \Rightarrow b_i(t_j) = \begin{cases} 1, & \text{if } j = i \\ 0, & \text{if } j < i \end{cases}$	$B_1 = 1$ $i \geq 2 \Rightarrow B_i(t_p, t_q) = \begin{cases} 1, & \text{if } \sigma(i) = (p, q) \\ 0, & \text{if } \sigma^{-1}(p, q) < i \end{cases}$
$y \in C[0, 1]$ \Downarrow $b_1^*(y) = y(t_1)$ $i \geq 2 \Rightarrow b_i^*(y) = y(t_i) - \sum_{j=1}^{i-1} b_j^*(y)b_j(t_i)$	$z \in C[0, 1]^2$ \Downarrow $B_1^*(z) = z(t_1, t_1)$ $\left. \begin{array}{l} i \geq 2 \\ \sigma(i) = (p, q) \end{array} \right\} \Rightarrow B_i^*(z) = z(t_p, t_q) - \sum_{j=1}^{i-1} B_j^*(z)B_j(t_p, t_q)$
$y \in C[0, 1]$ \Downarrow $j \leq i \Rightarrow P_i(y)(t_j) = y(t_j)$	$z \in C[0, 1]^2$ \Downarrow $\sigma^{-1}(p, q) \leq i \Rightarrow Q_i(z)(t_p, t_q) = z(t_p, t_q)$
$\{b_i\}_{i \geq 1}$ es monótona, i.e., $\sup_{i \geq 1} \ P_i\ = 1$	$\{B_i\}_{i \geq 1}$ es monótona, i.e., $\sup_{i \geq 1} \ Q_i\ = 1$

Tabla 4.1: Propiedades de las bases de Schauder uni y bidimensionales

4.2 Descripción de los métodos iterativos

En la presente sección recogemos las ideas principales contenidas en los métodos numéricos expuestos en formato original de artículo en la Sección 3 de este cuarto capítulo. El punto de partida de los tres artículos consiste en reescribir las ecuaciones integral de Fredholm no lineal, de Volterra–Fredholm de segunda especie lineal e integro-diferencial de Fredholm no lineal, presentadas en el Capítulo 1, (2.1), (2.3) y (2.4), en términos de los operadores T_1 , T_2 y T_3 dados en (2.9), (2.10) y (2.11), que satisfacen las condiciones (2.12), (2.13) y (2.14), respectivamente.

Observación 4.9. En este punto señalamos que en el artículo correspondiente al estudio de la ecuación representada por el operador T_3 de (2.11), hay una errata en la definición de dicho operador: en la ecuación (2) de dicho artículo está intercambiado el orden de integración, por lo que en lugar de $dsdt$ debe escribirse $dt ds$. Esta errata conlleva que la constante t_m que aparece en el artículo original [4] debe ser

$$t_m = 2 \frac{(L(b-a)^2)^m}{2^m}.$$

Añadiendo la condición (2.14) y cambiando en el artículo el orden de integración y la constante t_m por esta nueva definición en todos los lugares donde aparece, los resultados y las demostraciones son todas correctas. Señalamos también que la programación se ha realizado con el operador correcto y por tanto los resultados numéricos son válidos.

El teorema del punto fijo de Banach en cada caso además nos permite escribir la solución de cada ecuación como el límite de la sucesión de funciones

$$\{T_i^m(\phi_0)\}_{m \in \mathbb{N}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

siendo ϕ_0 un función continua en $[a, b]$ arbitraria. Además, proporciona en cada caso una cota del error cometido.

Es obvio que si en cada iteración fuese posible calcular explícitamente las integrales que aparecen asociadas a cada operador, es decir, la expresión $T_i^m(\phi_0)$, para cada m tendríamos una aproximación de la solución del problema. Pero, salvo para casos muy particulares, este cálculo explícito no es posible en la práctica. Por ello, la idea de los métodos propuestos en la Sección 3 de este capítulo es aproximar, en cada iteración, la imagen por el operador T_i de la iteración anterior por una función obtenida sustituyendo en cada caso las funciones que aparecen en el integrando por proyecciones de estas funciones en adecuadas bases de Schauder. Más precisamente, en cada uno de los tres problemas indicados partimos de una función inicial $\phi_0 \in C[a, b]$, y obtenemos las sucesivas aproximaciones ϕ_m de la solución exacta u siguiendo el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc}
 \phi_0 & & \\
 \downarrow & & \\
 T_i(\phi_0) \approx \phi_1 & & \\
 \downarrow & \quad \downarrow & \\
 T_i^2(\phi_0) & \quad T_i(\phi_1) \approx \phi_2 & \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_i^3(\phi_0) & & T_i(\phi_2) \approx \phi_3 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_i^m(\phi_0) & & T_i(\phi_{m-1}) \approx \phi_m
 \end{array}$$

donde en cada iteración, la aproximación $T_i(\phi_{m-1}) \approx \phi_m$ se realiza sustituyendo las funciones que aparece en los integrandos por diferentes proyecciones en bases de Schauder adecuadas.

Para cada uno de los problemas analizados estudiamos el error cometido en las aproximaciones propuestas haciendo uso de la desigualdad triangular siguiente:

$$\|u - \phi_m\| \leq \|u - T_i^m(\phi_0)\| + \|T_i^m(\phi_0) - u\|,$$

sugerida naturalmente por el esquema indicado más arriba. La acotación del primer sumando de la expresión derecha es consecuencia directa del teorema del punto fijo de Banach, mientras que la segunda acotación se demuestra detalladamente en cada artículo.

El estudio de los métodos propuestos se completa en cada caso con la aplicación de los mismos a diferentes problemas concretos, que ilustran el comportamiento numérico de los mismos. Los resultados numéricos se han obtenido con el programa Mathematica 7.

4.3 Publicaciones

En esta última sección del Capítulo 4 recogemos los artículos originales que contienen las aportaciones originales de esta tesis. Todos ellos han aparecido en revistas internacionales indexadas en JCR y siempre en el primer cuartil de su categoría, que ha sido MATHEMATICS, APPLIED. De forma más detallada:

- M.I. Berenguer, M.V. Fernández Muñoz, A.I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán, *Numerical treatment of fixed point applied to the nonlinear Fredholm integral equation*, Fixed Point Theory Appl. Vol. 2009 (2009), Article ID 725638, 8 pp. **Factor de impacto: 1.525, posición relativa en su categoría: 34/204.**

- F. Caliò, M.V. Fernández Muñoz, E. Marchetti, *Direct and iterative methods for numerical solution of mixed integral equations*, Appl. Math. Comput. 216 (2010), 3739–3746. **Factor de impacto: 1.536, posición relativa en su categoría: 29/236.**
- M.I. Berenguer, M.V. Fernández Muñoz, A.I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán, *A sequential approach for solving the Fredholm integro-differential equation*, Appl. Numer. Math. 62 (2012), 297–304. **Factor de impacto: 1.152, posición relativa en su categoría: 61/247.**



Direct and iterative methods for the numerical solution of mixed integral equations

F. Caliò^{a,*}, M.V. Fernández Muñoz^b, E. Marchetti^a

^a Politecnico di Milano-Dipartimento di Matematica, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy

^b Universidad de Granada, Departamento de Matemática Aplicada, Campus de Fuentenuueva, 18071 Granada, Spain

ARTICLE INFO

Keywords:

Volterra–Fredholm equations
Collocation methods
Fixed point methods
Spline
Schauder bases

ABSTRACT

In this paper we analyze and compare two classical methods to solve Volterra–Fredholm integral equations. The first is a collocation method; the second one is a fixed point method. Both of them are proposed on a particular class of approximating functions. Precisely the first method is based on a linear spline class approximation and the second one on Schauder linear basis. We analyze some problems of convergence and we propose some remarks about the peculiarities and adaptability of both methods. Numerical results complete the work.

© 2010 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

Let us consider the following Volterra–Fredholm linear integral equation of the second kind:

$$\lambda u(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,y)u(y)dy + \int_a^b k_2(x,y)u(y)dy, \quad x \in [a,b], \quad (1)$$

where $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k_i (i = 1, 2) : [a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ and $u : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, with f and $k_i (i = 1, 2)$ known functions and u an unknown function satisfying (1).

When modeling real problems, one has frequently to deal with Eq. (1) which has the theoretical and computational features of both Volterra and Fredholm equations.

Suitable conditions on $k_i (i = 1, 2)$ and λ are posed in order to obtain a unique solution of (1) in $C[a,b]$, under the assumption that $f \in C[a,b]$ (for proofs in particular Banach spaces, with different conditions on $k_i (i = 1, 2)$, refer, for example, to [6,1]).

However, in this paper, to state some results about the convergence of the proposed methods, we will assume the following conditions:

- (i) $k_1, k_2 \in C^1([a,b] \times [a,b])$,
- (ii) $|\lambda| > 2(b-a)M$ where $M = \max(\|k_1\|_\infty, \|k_2\|_\infty)$

From a numerical point of view it is well known that Volterra equations are generally solved through iterative methods. On the contrary direct methods are more suitable to the solution of Fredholm equations (see for example [2] and [3]). We tried to afford the solution of (1) both through an iterative as well as through a direct numerical method. The aim of this paper is to analyze and compare these two different numerical methods.

We can reduce (1) to two equivalent compact forms:

* Corresponding author.

E-mail addresses: franca.caliò@polimi.it (F. Caliò), mvmf@ugr.es (M.V. Fernández Muñoz), elena.marchetti@polimi.it (E. Marchetti).

$$[\lambda I + \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2]u = f, \quad (2)$$

$$u = \frac{1}{\lambda} [-\mathcal{K}_1 u - \mathcal{K}_2 u + If], \quad (3)$$

where operators \mathcal{K}_1 and \mathcal{K}_2 are defined as follows:

$$\mathcal{K}_1 g = - \int_a^x k_1(x, y) g(y) dy \quad x \in [a, b], \quad (4)$$

$$\mathcal{K}_2 g = - \int_a^b k_2(x, y) g(y) dy \quad x \in [a, b], \quad (5)$$

and I is the identity operator in $C[a, b]$.

The structure of (2) and (3) suggests the idea of constructing and comparing two different classes of methods: collocation direct methods and iterative fixed point methods (normally referred in particular to non linear equations).

Both kinds of methods are proposed for a particular class of approximating functions.

Namely, the first method (in the following called CSp) is a collocation method based on a linear spline class approximation; the second one (in the following called FPSc) is a fixed point method built on Schauder linear bases.

We compare the two methods in terms of both efficiency and adaptability to the peculiarities of the integral model under consideration. Convergence analysis is carried out in both cases.

Section 2 is devoted to some preliminaries about the particular linear splines class and to the description and analysis of the numerical collocation method. Section 3 is devoted to describe the Schauder basis correlated to the fixed point method and to study the related convergence problems. In Section 4 numerical results for both methods are given. Section 5 presents some final remarks on the comparison between the two methods and some open problems.

2. The direct method

In this section we present a numerical model suitable to (1) based on a collocation method using approximating splines, in particular the so called variation-diminishing Schoenberg (VDS) splines [12].

Firstly, let us recall some background on linear VDS splines (see for example [8]).

2.1. The VDS linear splines

Let $n > 1$ and $\Pi_n := \{a = t_1 = t_2 < t_3 < \dots < t_n < t_{n+1} = t_{n+2} = b\}$ be a partition of the interval $[a, b]$ with $H_n := \max_{2 \leq j \leq n} (t_{j+1} - t_j)$, $H_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

Π_n is assumed as mesh of the set of normalized B-splines $B_{i,p}(i = 1, \dots, n)$ of order $p = 2$ defined by the following relation:

$$B_{i,2}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i} B_{i,1}(x) + \frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}} B_{i+1,1}(x),$$

$$B_{i,1}(x) = \begin{cases} 1, & t_i \leq x < t_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (6)$$

according that, for $i = 1$ and $i = n$, the second and the first term in (6) hold respectively.

The set of $B_{i,2}(x)$ ($i = 1, \dots, n$) can be considered as basis of S_{2,Π_n} (order 2 spline space, associated to Π_n). In particular the VDS splines $S_n g \in S_{2,\Pi_n}$, with $g \in C[a, b]$, are defined as:

$$S_n g := \sum_{i=1}^n g(t_{i+1}) B_{i,2}(x). \quad (7)$$

S_n is a projector operator that is it reproduces exactly a polynomial of first degree ($S_n p = p$, $p \in \mathcal{P}_2$) and also all linear spline functions ($S_n s = s$, $s \in S_{2,\Pi_n}$) [12].

2.2. The collocation method

If we define the following bounded and compact operator [9]:

$$\tilde{\mathcal{K}} g = \tilde{\mathcal{K}}_1 g + \mathcal{K}_2 g,$$

with

$$\tilde{\mathcal{K}}_1 g = \begin{cases} \mathcal{K}_1 g & \text{if } 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{if } y > x \end{cases}$$

and $\mathcal{K}_i g$ ($i = 1, 2$) as in (4) and (5), it follows that (2) is equivalent to

$$[\lambda I + \tilde{\mathcal{K}}]u = f. \quad (8)$$

If we define

$$r_n = [\lambda I + \tilde{K}]S_n u - f, \tag{9}$$

the values \tilde{u}_i , approximating the function u in t_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n$), are determined imposing that r_n , defined in (9), is zero in a set of collocation points τ_k ($k = 1, 2, \dots, n$), chosen in $[a, b]$:

$$r_n(\tau_k) = 0 \tag{10}$$

and solving the linear system (10).

Now the evaluation of the following integrals:

$$\mathcal{J}_1 S_n u = \int_a^{\tau_k} k_1(\tau_k, s) \sum_{i=1}^n u(t_{i+1}) B_{i,2}(s) ds, \tag{11}$$

$$\mathcal{J}_2 S_n u = \int_a^b k_2(\tau_k, s) \sum_{i=1}^n u(t_{i+1}) B_{i,2}(s) ds, \tag{12}$$

leads to evaluate

$$\mathcal{I}_1 B_{i,1} = \int_a^{\tau_k} k_1(\tau_k, s) s B_{i,1}(s) ds \tag{13}$$

and

$$\mathcal{I}_2 B_{i,1} = \int_a^b k_2(\tau_k, s) s B_{i,1}(s) ds, \tag{14}$$

with $i, k = 1, \dots, n$.

The computation of (13) and (14) is carried out through a closed analytical form, when it is possible.

Otherwise we substitute (11) and (12) with:

$$\mathcal{L}_1 S_n k_1 u = \int_a^{\tau_k} \sum_{i=1}^n k_1(\tau_k, t_{i+1}) u(t_{i+1}) B_{i,2}(s) ds \tag{15}$$

and

$$\mathcal{L}_2 S_n k_2 u = \int_a^b \sum_{i=1}^n k_2(\tau_k, t_{i+1}) u(t_{i+1}) B_{i,2}(s) ds, \tag{16}$$

respectively.

We assume

$$w_n = \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i B_{i,2}(x),$$

as approximated solution of (1). That is we impose:

$$[\lambda I + \tilde{K}]w_n = f. \tag{17}$$

Now the problem is to analyze the convergence of w_n to u . In the following we synthesize the steps to assure $\|u - w_n\|_\infty \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$.

By applying the bounded projector operator (7) to (8) and (17) we obtain

$$S_n(\lambda I + \tilde{K})u = S_n f, \tag{18}$$

$$S_n(\lambda I + \tilde{K})w_n = S_n f, \tag{19}$$

In (18) and (19):

$$S_n \tilde{K}u = \tilde{K}S_n u, \quad S_n \tilde{K}w_n = \tilde{K}S_n w_n,$$

consequently:

$$(\lambda I + S_n \tilde{K})(u - w_n) = \lambda(I - S_n)u, \tag{20}$$

From Theorem 1 and Corollary 2 in [14] it follows that $\|\tilde{K} - S_n \tilde{K}\|_\infty \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

Following the proof of Theorem 1 in [9] we can state from (20) that:

$$\sup_{n \geq N} \|\lambda I + S_n \tilde{K}\|_\infty^{-1} \leq M < \infty,$$

for n sufficiently large.

It follows that $\|u - w_n\|_\infty \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, exactly with the same rate of convergence as $\|u - S_n u\|_\infty$ does.

3. The iterative method

In this section we present a numerical model suitable to (1) based on a fixed point method with Schauder bases. Firstly we recall some necessary background on linear Schauder bases (see for example [13]).

3.1. Linear Schauder bases

Let $\{s_i\}_{i>0}$ the usual linear Schauder basis in the space $C[a, b]$ defined on a dense subset $H = \{t'_j\}_{j>0}$ of different points of interval $[a, b]$ with $t'_1 = a$ and $t'_2 = b$.

Precisely:

$$s_1(t') = 1 \quad t' \in [a, b],$$

$$s_i(t'_j) := \begin{cases} 0 & j < i, \\ 1 & j = i, \end{cases} \text{ for } i > 1 \tag{21}$$

so $s_i (i > 1)$ is a piecewise linear and continuous function. Let us consider the first $n > 1$ terms of H on which we construct the corresponding projection $\{P_n\}$, $n > 1$, that is

$$P_n(\varphi)(t) = \sum_{i=1}^n c_i(\varphi)s_i(t),$$

where $\{c_i(\varphi)\}$ is the unique set of real numbers so that:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i(\varphi)s_i(t) = \varphi(t) \quad \text{for all } \varphi \in C[a, b].$$

$P_n(\varphi)$ verifies the interpolation property:

$$P_n(\varphi)(t'_j) = \varphi(t'_j),$$

for all $j \leq n$.

3.2. The fixed point method

From (3), we define the operator $\mathcal{T}:C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ defined as it follows:

$$\mathcal{T}(u) = \frac{1}{\lambda} [-\mathcal{K}_1 u - \mathcal{K}_2 u + If]. \tag{22}$$

Under the hypotheses of existence and uniqueness of the solution of (1) it is well known that the fixed point theorem assures a unique fixed point for the operator \mathcal{T} in (22).

In the following we describe the algorithm to approximate the fixed point of \mathcal{T} (Schauder bases in $C([a, b] \times [a, b])$ are already used in some non linear differential or integral problems, see for example [10,11]).

Starting from a function $\varphi_0 \in C[a, b]$ we approximate $\mathcal{T}(\varphi_0)$, usually not evaluable exactly, by using suitably linear Schauder bases:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\varphi_0) &\simeq \frac{1}{\lambda} \left[f(x) + \int_a^x k_1(x, y) \sum_{i=1}^{n_0} c_i(\varphi_0)s_i(y)dy + \int_a^b k_2(x, y) \sum_{i=1}^{n_0} c_i(\varphi_0)s_i(y)dy \right] \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[f(x) + \int_a^x k_1(x, y)P_{n_0}(\varphi_0)(y)dy + \int_a^b k_2(x, y)P_{n_0}(\varphi_0)(y)dy \right], \end{aligned}$$

where $n_0 > 1$, $x \in [a, b]$, $\{s_i\}_{i>0}$ is a Schauder basis of $C[a, b]$, and $\{c_i(\varphi_0)\}$ is the set of real numbers so that $\varphi_0(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\varphi_0)s_i(t)$.
Let

$$\varphi_1(x) := \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda} \int_a^x k_1(x, y)P_{n_0}(\varphi_0)(y)dy + \frac{1}{\lambda} \int_a^b k_2(x, y)P_{n_0}(\varphi_0)(y)dy,$$

we assume $\mathcal{T}(\varphi_0) \simeq \varphi_1$.

Now we apply \mathcal{T} to $\varphi_1(x)$ and so on.

Synthesizing the steps of the algorithm, starting from $\varphi_0 \in C[a, b]$, we define for $h \geq 1$ and $n_{h-1} > 1$

$$\psi_{h-1}(x) := \int_a^x k_1(x, y)P_{n_{h-1}}(\varphi_{h-1})(y)dy, \tag{23}$$

$$\phi_{h-1}(x) := \int_a^b k_2(x, y)P_{n_{h-1}}(\varphi_{h-1})(y)dy, \tag{24}$$

$$\varphi_h(x) := \frac{1}{\lambda} [f(x) + \psi_{h-1}(x) + \phi_{h-1}(x)]. \tag{25}$$

In general, it is possible to calculate exactly the integrals in (23) and (24). Otherwise, we propose to use the tensor Schauder basis, approximating also functions $k_1(x,y)$ and $k_2(x,y)$. See, for example, [15,11,5].

Now, if we assume $\varphi_h(x)$ as function approximating the solution of (1), the problem is to study the behaviour of $\|u - \varphi_h\|_\infty$ for $h \rightarrow \infty$. We present the following theoretical results.

3.3. Fixed point convergence

For each $n > 1$ the definition of projection P_n just needs the first n points of $\{t'_j\}_{j>0}$, which ordered in an increasing way will be denoted by

$$\Delta_n = \{t_1 = a, t_2, \dots, t_n = b\}. \tag{26}$$

In the following we assume:

$$p_n = \max_{1 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i) \text{ with } t_i \in \Delta_n. \tag{27}$$

For sake of simplicity we suppose $k_1(x,y) = k_2(x,y) = k(x,y)$ and we assume that: $k(x,y) \in C^1([a,b] \times [a,b])$.

Lemma 1. Let be $\varphi \in C^1[a,b]$ and $\{P_n(\varphi)\}_{n>1}$ the sequence of the projections associated to φ and related to (26) and (27). If $L = \|\varphi'\|_\infty$, the following relation holds:

$$\|\varphi - P_n(\varphi)\|_\infty < 2Lp_n.$$

Proof. For the proof see [4,10]. \square

Let φ_0 and $f \in C^1[a,b]$, $h \geq 1$ and $\psi_{h-1}, \varphi_{h-1}, \varphi_h$ defined as in (23)–(25) respectively.

Let us assume:

$$L_{h-1} := \|\varphi'_{h-1}\|_\infty \tag{28}$$

and $p_{n_{h-1}}$ as in (27).

Lemma 2. Let \mathcal{T} as in (22). It follows that:

$$\|\mathcal{T}(\varphi_{h-1}) - \varphi_h\|_\infty \leq \frac{b-a}{|\lambda|} \|k\|_\infty 4L_{h-1}p_{n_{h-1}}.$$

Proof. The thesis is proved by the definition of the function φ_h and from the Lemma 1. \square

Theorem 3. Let us assume that u is the unique solution of the integral Eq. (1). Then, for $h \geq 1$ and $j = 1, 2, \dots, h$, given $p_{n_{j-1}}$ as in (27), L_j as in (28) and $\varepsilon_j > 0$ so that the following relation holds $\frac{b-a}{|\lambda|} \|k\|_\infty 4L_{j-1}p_{n_{j-1}} < \varepsilon_j$, it follows that

$$\|u - \varphi_h\|_\infty < \|\mathcal{T}(\varphi_0) - \varphi_0\|_\infty \frac{\alpha^h}{1-\alpha} + \sum_{j=1}^h \alpha^{h-j} \varepsilon_j.$$

with $\alpha = \frac{2(b-a)\|k\|_\infty}{|\lambda|}$ (constant of contractivity of \mathcal{T} as, for example, in [6]).

Proof. For the triangular inequality, we get

$$\|u - \varphi_h\|_\infty \leq \|u - \mathcal{T}^h(\varphi_0)\|_\infty + \|\mathcal{T}^h(\varphi_0) - \varphi_h\|_\infty.$$

By the fixed point Theorem we get

$$\|u - \mathcal{T}^h(\varphi_0)\|_\infty < \|\mathcal{T}(\varphi_0) - \varphi_0\|_\infty \frac{\alpha^h}{1-\alpha}.$$

For the second addend we apply the contractivity property of \mathcal{T} and the Lemma 2. This way, we get

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}^h(\varphi_0) - \varphi_h\|_\infty &\leq \|\mathcal{T}^h(\varphi_0) - \mathcal{T}(\varphi_{h-1})\|_\infty + \|\mathcal{T}(\varphi_{h-1}) - \varphi_h\|_\infty \leq \|\mathcal{T}(\mathcal{T}^{h-1}(\varphi_0)) - \mathcal{T}(\varphi_{h-1})\|_\infty + \frac{b-a}{|\lambda|} \|k\|_\infty 4L_{h-1}p_{n_{h-1}} \\ &\leq \alpha \|\mathcal{T}^{h-1}(\varphi_0) - \varphi_{h-1}\|_\infty + \varepsilon_h. \end{aligned}$$

The thesis follows by this step repeated successively. \square

Consequently $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $|\lambda| > 2(b-a)\|k\|_\infty$ is sufficient condition as for the existence and uniqueness of solution of (1) (see for example [6]) as for the convergence of the fixed point method.

4. Numerical results

In what follows we present numerical results for some Volterra–Fredholm integral equations, by using the numerical methods presented above. In particular, the exactness of the method for linear polynomial functions is tested.

For

$$\lambda u(x) = f(x) + \int_0^x k_1(x, s)u(s)ds + \int_0^1 k_2(x, s)u(s)ds, \quad x \in [0, 1],$$

we propose three examples:

- (1) $k_1(x, s) = k_2(x, s) = e^{(x+s)}$ for **Examples 1 and 3**.
- (2) $k_1(x, s) = k_2(x, s) = \sin(x) \cos(s)$ for **Example 2**.

For the collocation method we consider:

- the mesh points as equidistant points in $[0, 1]$ with double nodes in 0 and 1,
- the mesh points all simple in $(0, 1)$ as the approximation points,
- the collocation points as a set of distinct points of the same number of the approximation points.

For the fixed point method we consider the subset of $[0, 1]$ defined as

$$H = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{2^j}, \frac{3}{2^j}, \dots, \frac{2^j - 1}{2^j}, \dots \right\} \quad j = 0, 1, \dots$$

supporting the Schauder basis in $C[0, 1]$.

For the construction of P_n we use the subset of H formed by the first n points, with $n = 2^{j_0} + 1$, and $j_0 \geq 0$, which in increasing order are:

$$\{t_1, \dots, t_n\} = \left\{ \frac{i-1}{2^{j_0}} \right\}, \quad (i = 1, \dots, 2^{j_0} + 1).$$

so $\max_{1 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i) = \frac{1}{2^{j_0}}$.

As function $\varphi_0(x) \in C^1[0, 1]$ we assume $\varphi_0(x) = x$.

The program implements the algorithm described in Section 3.2, with the choice of the same number of points belonging to Δ_n in (26).

Precisely the number n of nodes at every iteration step in the examples for the fixed point method is $n = 17, 33$: the process is iterated m times to obtain order of precision 10^{-4} for $n = 17$ and 10^{-5} for $n = 33$.

To compare the results obtained by the two methods, we assume, for the collocation method, the dimension $d = mn$ of the collocation system.

We denote $R1$ and $R2$ respectively the $\max(|err|)$ in the fixed point and in the collocation methods, being err the set of errors related to the approximation of the unknown function in a suitable subset of points in $[0, 1]$.

Example 1. $\lambda = 15, u(x) = x$ and $f(x) = 15x - e^x(xe^x - e^x + 2)$ in **Table 1**.

$\lambda = 15, u(x) = e^x$ and $f(x) = \frac{1}{2}e^x(32 - e^2 - e^{2x})$ in **Table 2**.

Example 2. $\lambda = 3, u(x) = x$ and $f(x) = 3x - \sin x(x \sin x + \cos x + \sin 1 + \cos 1 - 2)$ in **Table 3**.

$\lambda = 3, u(x) = x^2$ and $f(x) = 3x^2 - \sin x(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x - \sin 1 + 2 \cos 1)$ in **Table 4**.

$\lambda = 3, u(x) = e^x$ and $f(x) = 3e^x - \sin x(e^x(\sin x + \cos x) + e(\sin 1 + \cos 1) - 2)/2$ in **Table 5**.

Example 3. $\lambda = 15, u(x) = 1$ and $f(x) = 15 - e^x(e^x + e - 2)$ in **Table 6**.

$\lambda = 15, u(x) = e^x$ and $f(x) = \frac{1}{2}e^x(32 - e^2 - e^{2x})$ in **Table 7**.

Example 3 is carried out through out the implementation of (15) and (16) for the collocation method and by the use of tensor Schauder bases for the fixed point method. Obviously we don't obtain the exactness for $u(x) = 1$, nevertheless we obtain satisfactory results.

Table 1
Example 1 – $u(x) = x$.

	$n = 17, m = 1$	$n = 33, m = 6$
R1	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$1.1 \cdot 10^{-16}$
R2	$9.9 \cdot 10^{-16}$	$5.9 \cdot 10^{-16}$

Table 2Example 1 – $u(x) = e^x$.

	$n = 17, m = 7$	$n = 33, m = 8$
R1	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$
R2	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$6.3 \cdot 10^{-6}$

Table 3Example 2 – $u(x) = x$.

	$n = 17, m = 2$	$n = 33, m = 1$
R1	$1.1 \cdot 10^{-16}$	$2.2 \cdot 10^{-16}$
R2	$2.1 \cdot 10^{-15}$	$1.5 \cdot 10^{-15}$

Table 4Example 2 – $u(x) = x^2$.

	$n = 17, m = 8$	$n = 33, m = 8$
R1	$3.8 \cdot 10^{-4}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$
R2	$7.8 \cdot 10^{-5}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$

Table 5Example 2 – $u(x) = e^x$.

	$n = 17, m = 6$	$n = 33, m = 6$
R1	$2.1 \cdot 10^{-4}$	$1.3 \cdot 10^{-5}$
R2	$4.1 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$

Table 6Example 3 – $u(x) = 1$.

	$n = 17, m = 7$	$n = 33, m = 8$
R1	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$8.5 \cdot 10^{-6}$
R2	$5.7 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$

Table 7Example 3 – $u(x) = e^x$.

	$n = 17, m = 6$	$n = 33, m = 8$
R1	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$
R2	$9.8 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$

5. Remarks and open problems

Numerical results for collocation and fixed point methods have been obtained by means of MATLAB 7.3[®] and Mathematica[®] respectively.

- (1) Tables 1–5 show comparable results, given a same order of number of computational operations. For both methods the linear polynomial precision is verified, while in the remaining cases we got errors of circa the same order of magnitude.
- (2) However, by increasing the number of points up to some threshold, we note that in both cases the precision does not improve. For the fixed point method an algorithmic instability is experienced, while in the collocation case the equations are more sensitive to the lack of stability of the collocation system. This last effect is currently under study. The selection of a given base in order to obtain a greater approximation is still an open problem. For instance, 4th-order splines and 3rd degree Schauder bases are under consideration. This choice should give rise to a similar precision using less steps in FPSc and a lower dimension of the collocation system in CSp.

- (3) Analyzing the possibility to use linear tensor Schauder bases [11], FPSc method is reasonably more suitable to give good results in non linear problems. We are dealing with numerical results for (1) in case of non linearity of the Volterra term:

$$\lambda u(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, s, u(s)) ds + \int_a^b k_2(x, s) u(s) ds, \quad x \in [a, b].$$

- (4) On the other hand when functions k_1 and k_2 present weak regularity, one can deduce that, due its theoretical peculiarities, the CSP method is preferable. The authors are actually working about this problem (see for instance [7]).
- (5) We intend to study the application of a fixed point method to Volterra equations with delay and its comparison with a particular collocation local method.

References

- [1] S. Andrés, Weakly Singular Volterra and Fredholm–Volterra Integral Equations, *Mathematica*, vol. XLVIII, Studia Babes-Bolyai, 2003. pp 147–155.
- [2] K.E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [3] K.E. Atkinson, H. Weimin, *Theoretical Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [4] M.I. Berenguer, M.A. Fortes, A.I. Garralda Guillem, M. Ruiz Galán, Linear Volterra integro differential equation and Schauder bases, *Appl. Math. Comput.* 159 (2004) 495–507.
- [5] M.I. Berenguer, M.V. Fernández Muñoz, A.I. Garralda Guillem, M. Ruiz Galán, Numerical Treatment of Fixed Point Applied to the Nonlinear Fredholm Integral Equation, *Fixed Point Theory Appl.* 2009, p. 8. (Article ID 735638).
- [6] F. Caliò, E. Marchetti, V. Muresan, On some Volterra–Fredholm integral equation, *IJPAM* 31 (2006) 173–184.
- [7] F. Caliò, E. Marchetti, V. Muresan, Theoretical and numerical results about some weakly singular Volterra–Fredholm equations, *Rev. Anal. Numer. Theor. Approx.* 37 (2008) 27–36.
- [8] F. Caliò, E. Marchetti, An algorithm based on q.i. modified splines for singular integral models, *Comput. Math. Appl.* 41 (2001) 1579–1588.
- [9] C. Dagnino, V. Demichelis, E. Santi, A Nodal Spline Collocation Method for Weakly Singular Volterra Integral Equations, *Mathematica*, XLVIII, Babes-Bolyai, 2003. pp. 71–81.
- [10] M. Domingo, A.I. Garralda Guillem, M. Ruiz Galán, Fredholm integral equations and Schauder bases, *Monogr. Semin. Mat. Garcia Galdeano* 31 (2004) 121–128.
- [11] D. Gamez, A.I. Garralda Guillem, M. Ruiz Galán, Nonlinear initial-value problems and Schauder bases, *Nonlinear Anal.* 63 (2005) 97–105.
- [12] T. Lyche, L.L. Schumaker, Local spline approximation methods, *J. Approx. Theory* 15 (1975) 294–325.
- [13] A. Palomares, M. Ruiz Galán, Isomorphisms, Schauder bases and numerical solution of integral and differential equation, *Numer. Funct. Anal. Optim.* 26 (2005) 129–137.
- [14] P. Rabinowitz, Numerical integration based on approximating splines, *JCAM* 33 (1990) 73–83.
- [15] Z. Semadeni, Product Schauder bases and approximation with nodes in spaces of continuous functions, *Bull. Polish Acad. Sci.* 11 (1963) 387–391.

Research Article

Numerical Treatment of Fixed Point Applied to the Nonlinear Fredholm Integral Equation

M. I. Berenguer, M. V. Fernández Muñoz, A. I. Garralda Guillem, and M. Ruiz Galán

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada, E.U. Arquitectura Técnica, c/ Severo Ochoa s/n, 18071 Granada, Spain

Correspondence should be addressed to M. Ruiz Galán, mruizg@ugr.es

Received 15 May 2009; Accepted 8 July 2009

Recommended by Massimo Furi

The authors present a method of numerical approximation of the fixed point of an operator, specifically the integral one associated with a nonlinear Fredholm integral equation, that uses strongly the properties of a classical Schauder basis in the Banach space $C([a, b] \times [a, b])$.

Copyright © 2009 M. I. Berenguer et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

1. Introduction

Let us consider the nonlinear Fredholm integral equation of the second kind

$$f(x) = \lambda u(x) - \int_a^b k(x, y, u(y)) dy, \quad (1.1)$$

where $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ and $k : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are continuous functions. By defining in the Banach space $C([a, b])$ of those continuous and real-valued functions defined on $[a, b]$ (usual sup norm) the integral operator $T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ as

$$T(v)(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda} \int_a^b k(x, y, v(y)) dy, \quad (x \in [a, b], v \in C([a, b])), \quad (1.2)$$

then the Banach fixed point, theorem guarantees that, under certain assumptions, T has a unique fixed point; that is, the Fredholm integral equation has exactly one solution. Indeed, assume in addition that k is a Lipschitz function at its third variable with Lipschitz constant

$M > 0$ and that $|\lambda| > M(b - a)$, then the operator T is contractive with contraction number $\alpha := M(b-a)/|\lambda|$, and thus T has a unique fixed point φ . Moreover, $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi_0)$, where φ_0 is any continuous function on $[a, b]$. Since in general it is not possible to calculate explicitly from a φ_0 the sequence of functions $\{T^n(\varphi_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, we define in this work a new sequence of functions, denoted by $\{\varphi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$, obtained recursively making use of certain Schauder basis in $C([a, b] \times [a, b])$ (Banach space of those continuous real-valued functions on $[a, b] \times [a, b]$ endowed with its usual sup norm). More concretely, we get φ_{h+1} from φ_h , approximating $T(\varphi_h)$ by means of the sequence of projections of such Schauder basis.

2. Numerical Approximation of the Solution

We start by recalling certain aspects about some well-known Schauder bases in the Banach spaces $C([a, b])$ and $C([a, b] \times [a, b])$.

Let us consider the usual Schauder basis $\{s_n\}_{n \geq 0}$ in $C([a, b])$, that is, for a dense sequence of distinct points $\{t'_n\}_{n \geq 0}$ in $[a, b]$ with $t'_0 = a$ and $t'_1 = b$, we define

$$s_0(t') := 1, \quad (t' \in [a, b]), \quad (2.1)$$

and for $n > 0$; s_n is the piecewise linear and continuous function with nodes $\{t'_0, t'_1, \dots, t'_n\}$ satisfying for all $i < n$, $s_n(t'_i) = 0$ and $s_n(t'_n) = 1$. From this Schauder basis we define the usual Schauder basis $\{S_n\}_{n \geq 0}$ for $C([a, b] \times [a, b])$. We consider the bijective mapping $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ($[]$ denotes integer part) given by

$$\tau(n) = \begin{cases} (\sqrt{n}, \sqrt{n}), & \text{if } \sqrt{n} = [\sqrt{n}], \\ (n - [\sqrt{n}]^2, [\sqrt{n}] + 1), & \text{if } 0 < n - [\sqrt{n}]^2 \leq [\sqrt{n}], \\ ([\sqrt{n}] + 1, n - [\sqrt{n}]^2 - [\sqrt{n}]), & \text{if } [\sqrt{n}] < n - [\sqrt{n}]^2, \end{cases} \quad (2.2)$$

and take, for each $n \in \mathbb{N}$ with $\tau(n) = (i, j)$,

$$S_n(x, y) := s_i(x)s_j(y), \quad (x, y \in [a, b]). \quad (2.3)$$

The sequence $\{S_n\}_{n \geq 0}$ is the usual Schauder basis in $C([a, b] \times [a, b])$ (see [1]). We will denote by $\{S_n^*\}_{n \geq 0}$ and $\{Q_n\}_{n \geq 0}$, respectively, the sequences of biorthogonal functionals and projections associated with such basis, that is, given $\varphi \in C([a, b] \times [a, b])$, the (continuous) functionals $S_n^* : C([a, b] \times [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ verify

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^*(\varphi) S_n, \quad (2.4)$$

and the (continuous) projections are defined by

$$Q_n = \sum_{i=0}^n S_i^*(\varphi) S_i. \quad (2.5)$$

Let us now introduce some notational conventions. For each n the definition of projection Q_{n^2} just needs the first $n+1$ points of the sequence $\{t'_n\}_{n \geq 0}$, ordered in an increasing way that will be denoted by $\Delta_n := \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$, and in addition we will write $p := \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1} - t_i)$.

We now describe idea of the numerical method proposed. The beginning point is the operator formulation of the integral Fredholm equation; from an initial function $\varphi_0 \in C([a, b])$, and since in general we cannot calculate explicitly $T(\varphi_0)$, we approximate this function in the following way: let

$$\varphi_0(x, y) := k(x, y, \varphi_0(y)), \quad (x, y \in [a, b]), \tag{2.6}$$

so

$$T(\varphi_0)(x) = \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda} \int_a^b \varphi_0(x, y) dy \approx \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda} \int_a^b Q_{m_0}(\varphi_0)(x, y) dy, \tag{2.7}$$

where m_0 is an adequate integer. We denote the last function by φ_1 and repeat the same construction. Then we define recursively for each $x, y \in [a, b]$, $h \geq 1$ and $m_{h-1} \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varphi_{h-1}(x, y) &:= k(x, y, \varphi_{h-1}(y)), \\ \varphi_h(x) &:= \frac{1}{\lambda} f(x) + \frac{1}{\lambda} \int_a^b Q_{m_{h-1}}(\varphi_{h-1})(x, y) dy. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Now we state some technical results in order to study the error $\|\varphi - \varphi_h\|_\infty$. In the first of them we give a bound for the distance between a continuous function and its projections. It is not difficult to prove it as a consequence of the Mean Value Theorem and the following interpolation property satisfied by the sequence of projections $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ (see [1]): whenever $n, i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $\tau^{-1}(i, j) < n^2$, then

$$\forall t_i, t_j \in \Delta_n, \quad Q_{n^2}(\varphi)(t_i, t_j) = \varphi(t_i, t_j). \tag{2.9}$$

Lemma 2.1. *Let $\varphi \in C^1([a, b] \times [a, b])$, let $L = \max\{\|\partial\varphi/\partial x\|_\infty, \|\partial\varphi/\partial y\|_\infty\}$, and let $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ be the sequence of projections associated with the basis $\{S_n\}_{n \geq 1}$, then it holds that*

$$\|\varphi - Q_{n^2}(\varphi)\|_\infty \leq 4Lp. \tag{2.10}$$

Let us introduce some notation, useful in what follows: given $h \geq 1$, we write

$$\begin{aligned} L_{h-1} &:= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \varphi_{h-1}}{\partial x} \right\|_\infty, \left\| \frac{\partial \varphi_{h-1}}{\partial y} \right\|_\infty \right\}, \\ p_h &:= \max_{0 \leq i \leq n_{h-1}} (t_{i+1} - t_i), \quad n_h \geq 2, \quad t_i \in \Delta_{n_h}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Lemma 2.2. Suppose that $\varphi_0 \in C^1([a, b])$, $k \in C^1([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R})$, $\lambda \neq 0$, and $T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ is the operator given by

$$T(v)(x) = \frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda} \int_a^b k(x, y, v(y))dy, \quad (x \in [a, b], v \in C([a, b])). \quad (2.12)$$

Then, maintaining the preceding notation, we have that for all $h \geq 1$,

$$\|T(\varphi_{h-1}) - \varphi_h\|_\infty \leq \frac{b-a}{|\lambda|} 4L_{h-1}p_h. \quad (2.13)$$

Proof. Since $\varphi_{h-1} \in C([a, b] \times [a, b])$ and $\{S_n\}_{n \geq 0}$ is a Schauder basis for the Banach space $C([a, b] \times [a, b])$, then

$$\varphi_{h-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^*(\varphi_{h-1})S_n. \quad (2.14)$$

On the other hand, taking into account the definition of φ_h , we have that

$$\begin{aligned} |T(\varphi_{h-1})(x) - \varphi_h(x)| &= \left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_n^*(\varphi_{h-1})S_n(x, y) - \sum_{n=0}^{m_{h-1}} S_n^*(\varphi_{h-1})S_n(x, y) \right) dy \right| \\ &= \left| \frac{1}{\lambda} \int_a^b (\varphi_{h-1}(x, y) - Q_{m_{h-1}}^2(\varphi_{h-1})(x, y)) dy \right|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Finally, in view of Lemma 2.1 we arrive at

$$\|T(\varphi_{h-1}) - \varphi_h\|_\infty \leq \frac{(b-a)}{|\lambda|} 4L_{h-1}p_h. \quad (2.16)$$

□

Finally we arrive at the following estimation of the error.

Theorem 2.3. Assume that $\lambda \neq 0$, $\varphi_0 \in C^1([a, b])$, $k \in C^1([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R})$ is a Lipschitzian function at its third variable with Lipschitz constant M with $|\lambda| > M(b-a)$ and that φ is the unique fixed point of the integral operator $T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ defined by

$$T(v)(x) = \frac{1}{\lambda}f(x) + \frac{1}{\lambda} \int_a^b k(x, y, v(y))dy, \quad (x \in [a, b], v \in C([a, b])). \quad (2.17)$$

Suppose in addition that $h \geq 1$ and that $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_h > 0$ satisfy

$$1 \leq j \leq h \implies \frac{(b-a)}{|\lambda|} 4L_{j-1}p_j < \varepsilon_j. \quad (2.18)$$

Then, with the previous notation, it is satisfied that

$$\|\varphi - \varphi_h\|_\infty \leq \|T(\varphi_0) - \varphi_0\|_\infty \frac{\alpha^h}{1 - \alpha} + \sum_{j=1}^h \alpha^{h-j} \varepsilon_j, \tag{2.19}$$

where $\alpha = M(b - a)/|\lambda|$.

Proof. We begin with the triangular inequality

$$\|\varphi - \varphi_h\|_\infty \leq \|\varphi - T^h(\varphi_0)\|_\infty + \|T^h(\varphi_0) - \varphi_h\|_\infty. \tag{2.20}$$

In order to obtain a bound for the first right-hand side term we observe that operator T is contractive, with contraction constant $\alpha \in (0, 1)$. Hence the Banach fixed point Theorem gives that

$$\varphi = \lim_{m \rightarrow \infty} T^m(\varphi_0), \tag{2.21}$$

$$\|\varphi - T^h(\varphi_0)\|_\infty \leq \|T(\varphi_0) - \varphi_0\|_\infty \frac{\alpha^h}{1 - \alpha}. \tag{2.22}$$

For deducing a bound for the second right-hand side term of (2.20), we use Lemma 2.2 and the assumption $j = 1, \dots, h \Rightarrow ((b - a)/|\lambda|) 4 L_{j-1} p_j < \varepsilon_j$ in the following chain of inequalities:

$$\begin{aligned} \|T^h(\varphi_0) - \varphi_h\|_\infty &\leq \|T^h(\varphi_0) - T(\varphi_{h-1})\|_\infty + \|T(\varphi_{h-1}) - \varphi_h\|_\infty \\ &\leq \|T^h(\varphi_0) - T(\varphi_{h-1})\|_\infty + \frac{(b - a)}{|\lambda|} 4 L_{h-1} p_h \\ &\leq \alpha \|T^{h-1}(\varphi_0) - \varphi_{h-1}\|_\infty + \varepsilon_h \\ &\leq \alpha \left(\|T^{h-1}(\varphi_0) - T(\varphi_{h-2})\|_\infty + \|T(\varphi_{h-2}) - \varphi_{h-1}\|_\infty \right) + \varepsilon_h \\ &\leq \alpha \left(\|T(T^{h-2}(\varphi_0)) - T(\varphi_{h-2})\|_\infty + \alpha \varepsilon_{h-1} + \varepsilon_h \right) \\ &\leq \alpha^2 \|T^{h-2}(\varphi_0) - \varphi_{h-2}\|_\infty + \alpha \varepsilon_{h-1} + \varepsilon_h \\ &\leq \alpha^2 \left(\|T^{h-2}(\varphi_0) - T(\varphi_{h-3})\|_\infty + \|T(\varphi_{h-3}) - \varphi_{h-2}\|_\infty \right) + \alpha \varepsilon_{h-1} + \varepsilon_h \\ &\leq \dots \\ &\leq \alpha^{h-1} \|T(\varphi_0) - \varphi_1\|_\infty + \alpha^{h-2} \varepsilon_2 + \dots + \alpha^2 \varepsilon_{h-2} + \alpha \varepsilon_{h-1} + \varepsilon_h. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Once again, in view of Lemma 2.2 it follows that

$$\|T^h \varphi_0 - \varphi_h\|_\infty \leq \sum_{j=1}^h \alpha^{h-j} \varepsilon_j. \quad (2.24)$$

Therefore, inequalities (2.20), (2.22), and (2.24) allow us to conclude that

$$\|\varphi - \varphi_h\|_\infty < \|T(\varphi_0) - \varphi_0\|_\infty \frac{\alpha^h}{1-\alpha} + \sum_{j=1}^h \alpha^{h-j} \varepsilon_j, \quad (2.25)$$

as announced. \square

Remarks 2.4. (1) The linear case was previously stated in [2]. For a general overview of the classical methods, see [3, 4].

(2) The use of Schauder bases in the numerical study of integral and differential equations has been previously considered in [5–7] or [8].

(3) For other approximating methods in Hilbert or Banach spaces, we refer to [9, 10].

3. Numerical Examples

We finally illustrate the numerical method proposed above by means of the two following examples. In both of them we choose the dense subset of $[0, 1]$

$$\left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^k}, \dots, \frac{2^k - 1}{2^k}, \dots \right\} \quad (3.1)$$

to construct the Schauder bases in $C([0, 1])$ and $C([0, 1] \times [0, 1])$. To define the sequence of approximating functions $\{\varphi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ we have taken an initial function $\varphi_0 \in C^1([0, 1])$ and for all $h \geq 1$, $m_h = n^2$ with different values of n of the form $n = 2^k + 1$, with $k \in \mathbb{N}$. For such a choice, the value p_h appearing in Lemma 2.2 is $p_h = 1/2^k$, for all $h \in \mathbb{N}$.

Example 3.1. Let us consider the nonlinear Fredholm integral equation of the second kind in $[0, 1]$:

$$2x + \frac{(2 - \pi)x^2}{8} = 2u(x) - \int_0^1 \left(\frac{x^2 y}{2} \arctan(u(y)) \right) dy, \quad (3.2)$$

whose analytical solution is the function $\varphi(x) = x$. In Table 1 we exhibit the absolute errors committed in nine points x_i in $[0, 1]$ when we approximate the exact solution φ by the iteration φ_m , by considering different values of n ($n = 9, 17, 33$).

Table 1: Example 3.1.

x_i	$n = 9, m = 3$	$n = 17, m = 3$	$n = 33, m = 3$
0.	0.	0.	0.
0.125	6.41821×10^{-6}	1.31795×10^{-6}	4.35379×10^{-8}
0.25	2.56728×10^{-5}	5.27181×10^{-6}	1.74152×10^{-7}
0.375	5.77639×10^{-5}	1.18616×10^{-5}	3.91841×10^{-7}
0.5	1.02691×10^{-4}	2.10873×10^{-5}	6.96607×10^{-7}
0.625	1.60455×10^{-4}	3.29488×10^{-5}	1.08845×10^{-6}
0.75	2.31055×10^{-4}	4.74463×10^{-5}	1.56737×10^{-6}
0.875	3.14492×10^{-4}	6.45797×10^{-5}	2.13336×10^{-6}
1.	4.10765×10^{-4}	8.4349×10^{-5}	2.78643×10^{-6}

Table 2: Example 3.2.

p	E_p	F_p
8	3.27×10^{-4}	1.86×10^{-4}
16	8.18×10^{-5}	4.61×10^{-5}
32	2.04×10^{-5}	1.12×10^{-5}
64	5.11×10^{-6}	2.72×10^{-6}

Example 3.2. Now we consider the following Fredholm integral equation appearing in [5, Example (11.2.1)]:

$$f(x) = 5u(x) - \int_0^1 e^{xy} u(y) dy, \quad (3.3)$$

where f is defined in such a way that $u(x) = e^{-x} \cos x$ is the exact solution. We denote by u_p the approximation of the exact solution given by the collocation method and by E_p the error:

$$E_p := \max_{1 \leq j \leq p+1} |u(x_j) - u_n(x_j)|, \quad (3.4)$$

where $\{x_j\}_{j=1}^{n+1}$ are the nodes of the collocation method. Now write F_p for the error

$$F_p := \max_{1 \leq j \leq p+1} |u(x_j) - \varphi_m(x_j)|, \quad (3.5)$$

with φ_m being the approximation obtained with our method, with $m_h = (p+1)^2$ for $h = 1, \dots, m$ and choosing m in such a way that

$$\frac{F_m}{F_{m+1}} < 1 + 10^{-2}. \quad (3.6)$$

In Table 2 we show the errors for both methods.

Remark 3.3. Although the errors obtained in the preceding example by our algorithm are similar to those derived from the collocation method, the computational cost is quite different: in order to apply the collocation method we need to solve high-order linear systems of algebraical equations, but for our method we just calculate linear combinations of scalar obtained by evaluating adequate functions. Indeed, the sequence of biorthogonal functionals $\{S_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfies the following easy property (see [1]): for all $v \in C([0, 1]^2)$,

$$S_1^*(v) = v(t_0, t_0) \quad (3.7)$$

while for all $n \geq 1$, if $\tau(n) = (i, j)$,

$$S_n^*(v) = v(t_i, t_j) - \sum_{k=0}^{n-1} S_k^*(v) B_k(t_i, t_j). \quad (3.8)$$

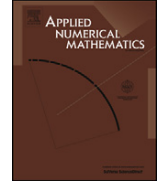
Obviously, this easy way of determining the biorthogonal functionals and consequently the approximating functions φ_h (integrals of a piecewise linear function) is equally valid in the general nonlinear case.

Acknowledgments

This research partially supported by M.E.C. (Spain) and FEDER project no. MTM2006-12533 and by Junta de Andalucía Grant FQM359.

References

- [1] Z. Semadeni, *Schauder Bases in Banach Spaces of Continuous Functions*, vol. 918 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, Germany, 1982.
- [2] M. Domingo Montesinos, A. I. Garralda Guillem, and M. Ruiz Galán, "Fredholm integral equations and Schauder bases," in *VIII Journées Zaragoza-Pau de Mathématiques Appliquées et de Statistiques*, vol. 31 of *Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano*, pp. 121–128, Zaragoza University Press, Zaragoza, Spain, 2004.
- [3] M. A. Golberg, *Numerical Solution of Integral Equations*, vol. 42 of *Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering*, Plenum Press, New York, NY, USA, 1990.
- [4] K. E. Atkinson and W. Han, *Theoretical Numerical Analysis*, Springer, New York, NY, USA, 2nd edition, 2005.
- [5] M. I. Berenguer, M. A. Fortes, A. I. Garralda Guillem, and M. Ruiz Galán, "Linear Volterra integro-differential equation and Schauder bases," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 159, no. 2, pp. 495–507, 2004.
- [6] D. Gámez, A. I. Garralda Guillem, and M. Ruiz Galán, "Nonlinear initial-value problems and Schauder bases," *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 63, no. 1, pp. 97–105, 2005.
- [7] D. Gámez, A. I. Garralda Guillem, and M. Ruiz Galán, "High-order nonlinear initial-value problems countably determined," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 228, no. 1, pp. 77–82, 2009.
- [8] A. Palomares and M. Ruiz Galán, "Isomorphisms, Schauder bases in Banach spaces, and numerical solution of integral and differential equations," *Numerical Functional Analysis and Optimization*, vol. 26, no. 1, pp. 129–137, 2005.
- [9] Z. Gu and Y. Li, "Approximation methods for common fixed points of mean nonexpansive mapping in Banach spaces," *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2008, Article ID 471532, 7 pages, 2008.
- [10] Y. Yao and R. Chen, "Iterative algorithm for approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces," *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2007, Article ID 32870, 8 pages, 2007.



A sequential approach for solving the Fredholm integro-differential equation

M.I. Berenguer, M.V. Fernández Muñoz*, A.I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán

Universidad de Granada, Dpto. Matemática Aplicada, E.T.S. Ingeniería de Edificación, c/ Severo Ochoa s/n, 18071 Granada, Spain

ARTICLE INFO

Article history:

Received 24 June 2010

Received in revised form 6 December 2010

Accepted 22 March 2011

Available online 29 March 2011

Keywords:

Fredholm integro-differential equation

Numerical methods

Schauder bases

ABSTRACT

A numerical approximation method for the solution of Fredholm integro-differential equations is presented. The method provides a sequential solution and makes use of appropriate Schauder bases in adequate Banach spaces of continuous functions as well as of classical fixed-point results. The method is computationally attractive and some numerical examples are provided to illustrate its high accuracy.

© 2011 IMACS. Published by Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Several numerical methods for approximating integro-differential equations are known, since such equations model a wide class of applied problems (see for instance [6,10,11]). These methods often transform an integro-differential equation into a linear or nonlinear system of algebraic equations that can be solved by direct or iterative methods. See [3,9,14] and the references therein for a more general view of the classical methods and some recent advances. This paper considers the specific case of the nonlinear Fredholm integro-differential equation:

$$\begin{cases} y'(x) = g(x) + \int_a^b G(x, t, y(t)) dt & (x \in [a, b]), \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

where $y_0 \in \mathbb{R}$ and $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ and $G : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are continuous functions. The linear case ($G(x, t, u) = h(x, t)u$ for certain continuous function $h : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) is an obvious particular case of the equation above.

Our starting point is the formulation of the Fredholm integro-differential equation (1) in terms of an operator T . By defining within the Banach space $\mathcal{C}([a, b])$ of those continuous and real valued functions defined on $[a, b]$ (usual sup-norm) the integral operator $T : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$ for each $y \in \mathcal{C}([a, b])$ as

$$T(y)(x) = y_0 + \int_a^x g(s) ds + \int_a^x \int_a^b G(s, t, y(t)) ds dt \quad (x \in [a, b]), \quad (2)$$

* Corresponding author.

E-mail addresses: maribel@ugr.es (M.I. Berenguer), mvfm@ugr.es (M.V. Fernández Muñoz), agarral@ugr.es (A.I. Garralda-Guillem), mruizg@ugr.es (M. Ruiz Galán).

then the *Banach fixed point theorem* ensures that, under certain conditions, the operator T admits a unique fixed point, or equivalently, the integro-differential equation (1) admits a unique solution. Specifically if the continuous function G is Lipschitzian at its third variable, with Lipschitz constant $L > 0$, then for any $u, v \in \mathcal{C}([a, b])$,

$$\|T^m(u) - T^m(v)\|_\infty \leq t_m \|u - v\|_\infty,$$

where

$$t_m = \frac{(L(b - a)^2)^m}{m!},$$

as we prove in Lemma 3.1. Therefore if φ is the only fixed point of the operator T , given any function $\varphi_0 \in \mathcal{C}([a, b])$

$$m \geq 1 \Rightarrow \|T^m(\varphi_0) - \varphi\|_\infty \leq \sum_{m \geq 0} t_m \|T(\varphi_0) - \varphi_0\|_\infty$$

and thus $\varphi = \lim_{m \rightarrow +\infty} T^m(\varphi_0)$.

In general, it is not possible to explicitly calculate from φ_0 the sequence of functions $\{T^m(\varphi_0)\}_{m \in \mathbb{N}}$. This work proposes to define a new sequence of functions, denoted by $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, which is obtained by iteration using certain Schauder bases in $\mathcal{C}([a, b])$ and in $\mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$ (usual sup-norm). More explicitly, from φ_n , we obtain φ_{n+1} approximating $T(\varphi_n)$ by the sequence of projections of the mentioned Schauder bases. Henceforth, we assume in this paper that the operator T satisfies the above Lipschitz condition, which guarantees the existence of a unique fixed point.

The Schauder bases in the study of differential and integral equations have been used successfully in [1,2,7,8,12].

Let us point out that our method can easily adapted for high-order Fredholm integro-differential equations: it suffices to associate an integral operator with such an integro-differential equation by integrating it as many times as indicated by the order of the equation and by including the initial conditions.

2. About Schauder bases

We begin by recalling the main issues about Schauder bases in the Banach spaces $\mathcal{C}([a, b])$ and $\mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$.

Let us consider $\{s_i\}_{i \geq 0}$ the usual Schauder basis in the space $\mathcal{C}([a, b])$, that is, for a dense sequence of distinct real numbers $\{t'_i\}_{i \geq 0}$ in $[a, b]$ with $t'_0 = a$ and $t'_1 = b$, we define $s_0(t') := 1$ ($t' \in [a, b]$) and for $n > 0$, s_n is the piecewise linear and continuous function with nodes at points $\{t'_0, t'_1, \dots, t'_n\}$ satisfying, for all $i < n$, $s_n(t'_i) = 0$ and $s_n(t'_n) = 1$. For each function $f \in \mathcal{C}([a, b])$ there exists a unique sequence of scalars $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ such that $f = \sum_{n \geq 0} \lambda_n s_n$. We denote by $\{s_n^*\}_{n \geq 0}$ the sequence of (continuous and linear) biorthogonal functionals in the dual space of $\mathcal{C}([a, b])$, defined by

$$s_n^* \left(\sum_{k \geq 0} \lambda_k s_k \right) = \lambda_n,$$

and by $\{P_n\}_{n \geq 0}$ the sequence of (continuous and linear) projections given by the partial sums

$$P_n \left(\sum_{k \geq 0} \lambda_k s_k \right) = \sum_{k \geq 0}^n \lambda_k s_k.$$

From this Schauder basis, we define the usual Schauder basis $\{S_n\}_{n \geq 0}$ of the Banach space $\mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$. To this end, we consider the bijective mapping $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (where $[x]$ denotes the integer part of x) given by

$$\tau(n) = \begin{cases} (\sqrt{n}, \sqrt{n}) & \text{if } \sqrt{n} = [\sqrt{n}], \\ (n - [\sqrt{n}]^2, [\sqrt{n}] + 1) & \text{if } 0 < n - [\sqrt{n}]^2 \leq [\sqrt{n}], \\ ([\sqrt{n}] + 1, n - [\sqrt{n}]^2 - [\sqrt{n}]) & \text{if } [\sqrt{n}] < n - [\sqrt{n}]^2, \end{cases}$$

which allows us to sort the pairs $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. For $n \in \mathbb{N}$ and $x, y \in [a, b]$, we define $S_n(x, y) := s_i(x)s_j(y)$, with $\tau(n) = (i, j)$. The sequence $\{S_n\}_{n \geq 0}$ is the usual Schauder basis of the space $\mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$ (see [13]). Thereafter we denote by $\{S_n^*\}_{n \geq 0}$ and $\{Q_n\}_{n \geq 0}$, respectively, the sequences of biorthogonal functionals and projections associated with such a basis.

We list below some additional notations that will be useful later on. For each n , the definition of the projections P_n and Q_{n^2} requires only the first $n + 1$ points of the sequence $\{t'_i\}_{i \geq 0}$. These $n + 1$ points, sorted in increasing order, constitute a partition of the interval $[a, b]$, which will be denoted by $\Delta_n = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$.

3. Method of the solution

Now we describe the fundamental idea of the method we propose. We begin with an initial function $\varphi_0 \in \mathcal{C}([a, b])$ and since in general it is impossible to calculate explicitly $T(\varphi_0)$, we approximate the latter function as follows: let $\psi_0(s, t) = G(s, t, \varphi_0(t))$ with $s, t \in [a, b]$, so

$$T(\varphi_0)(x) = y_0 + \int_a^x g(s) ds + \int_a^b \int_a^x \psi_0(s, t) ds dt$$

$$\approx y_0 + \int_a^x P_{n_0}(g(s)) ds + \int_a^b \int_a^x Q_{m_0^2}(\psi_0)(s, t) ds dt,$$

where n_0, m_0 are certain natural numbers. We denote the last function by φ_1 and repeat the same process, defining recursively, for each $s, t \in [a, b], h \geq 1$ and $n_{h-1}, m_{h-1} \in \mathbb{N}$:

$$\psi_{h-1}(s, t) := G(s, t, \varphi_{h-1}(t)), \tag{3}$$

$$\varphi_h(x) := y_0 + \int_a^x P_{n_{h-1}}(g(s)) ds + \int_a^b \int_a^x Q_{m_{h-1}^2}(\psi_{h-1})(s, t) ds dt. \tag{4}$$

In order to study the error $\|\varphi - \varphi_h\|_\infty$ we establish the following results. The first one shows that the operator T^n satisfies a suitable Lipschitz condition.

Lemma 3.1. *Let $u, v \in \mathcal{C}([a, b])$ and let $L \in \mathbb{R}^+$ be the Lipschitz constant of the continuous function $G : [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ of (1). Then*

$$\|T^n(u) - T^n(v)\|_\infty \leq \frac{L^n (b - a)^{2n}}{n!} \|u - v\|_\infty. \tag{5}$$

Proof. We will prove the stronger inequality

$$n \geq 1, x \in [a, b] \Rightarrow |T^n(u)(x) - T^n(v)(x)| \leq \frac{L^n (b - a)^n (x - a)^n}{n!} \|u - v\|_\infty.$$

We proceed by induction on n . For $n = 1$ we have

$$|T(u)(x) - T(v)(x)| = \left| \int_a^x \left(\int_a^b (G(s, t, u(t)) - G(s, t, v(t))) dt \right) ds \right|$$

$$\leq \int_a^x \left(\int_a^b |G(s, t, u(t)) - G(s, t, v(t))| dt \right) ds.$$

Since the function G is Lipschitzian at the third variable with Lipschitz constant $L > 0$, for all $x \in [a, b]$

$$\int_a^x \left(\int_a^b |G(s, t, u(t)) - G(s, t, v(t))| dt \right) ds \leq \int_a^x \left(\int_a^b L |u(t) - v(t)| dt \right) ds \leq \int_a^x \left(\int_a^b L \|u - v\|_\infty dt \right) ds$$

$$= L \|u - v\|_\infty (b - a)(x - a).$$

Now, we assume that the proposed inequality is valid for $(n - 1)$ and we prove it for n . Given $x \in [a, b]$,

$$|T^n(u)(x) - T^n(v)(x)| = \left| \int_a^x \left(\int_a^b (G(s, t, T^{n-1}(u)(t)) - G(s, t, T^{n-1}(v)(t))) dt \right) ds \right|$$

$$\leq \int_a^x \left(\int_a^b L |T^{n-1}(u)(t) - T^{n-1}(v)(t)| dt \right) ds$$

$$\leq \int_a^x \left(\int_a^b L L^{n-1} \|u - v\|_\infty \frac{(b - a)^{n-1}}{(n - 1)!} (s - a)^{n-1} dt \right) ds$$

$$= \frac{L^n (b - a)^n (x - a)^n}{n!} \|u - v\|_\infty,$$

which completes the proof. \square

In view of the Banach fixed point theorem and Lemma 3.1, T has a unique fixed point and the integro-differential equation admits a unique solution.

Lemma 3.2. *Let φ be the only fixed point of the operator T given by (2). Then, for all $\varphi_0 \in \mathcal{C}([a, b])$ and for all $m \geq 1$ it is satisfied that*

$$\|\varphi - T^m(\varphi_0)\|_\infty \leq \sum_{m>0} \frac{L^m (b-a)^{2m}}{m!} \|T(\varphi_0) - \varphi_0\|_\infty. \tag{6}$$

Proof. From (5), since the series of positive terms

$$\sum_{m>0} \frac{L^m (b-a)^{2m}}{m!} \tag{7}$$

is convergent, for every function $\varphi_0 \in \mathcal{C}([a, b])$, (6) follows immediately from the Banach fixed point theorem. \square

Lemma 3.3. *Assume that $m \in \mathbb{N}$ and that $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ is a subset of $\mathcal{C}([a, b])$. Then for every function $\varphi \in \mathcal{C}([a, b])$ we have that*

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_m\|_\infty &\leq \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(L(b-a)^2)^k}{k!} \|T(\varphi_0) - \varphi_0\|_\infty \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \frac{(L(b-a)^2)^{m-k}}{(m-k)!} \|T(\varphi_{k-1}) - \varphi_k\|_\infty. \end{aligned} \tag{8}$$

Proof. We begin by applying the triangular inequality

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_m\|_\infty &\leq \|\varphi - T^m(\varphi_0)\|_\infty + \|T^m(\varphi_0) - T^{m-1}(\varphi_1)\|_\infty \\ &\quad + \|T^{m-1}(\varphi_1) - T^{m-2}(\varphi_2)\|_\infty \\ &\quad + \dots + \|T^{m-(k-1)}(\varphi_{k-1}) - T^{m-(k-2)}(\varphi_{k-2})\|_\infty \\ &\quad + \dots + \|T(\varphi_{m-1}) - \varphi_m\|_\infty. \end{aligned}$$

Now as a consequence of (5) we obtain

$$\begin{aligned} \|T^{m-(k-1)}(\varphi_{k-1}) - T^{m-k}(\varphi_k)\|_\infty &= \|T^{m-k}(T(\varphi_{k-1})) - T^{m-k}(\varphi_k)\|_\infty \\ &\leq \frac{(L(b-a)^2)^{m-k}}{(m-k)!} \|T(\varphi_{k-1}) - \varphi_k\|_\infty. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\|\varphi - \varphi_m\|_\infty \leq \|\varphi - T^m(\varphi_0)\|_\infty + \sum_{k=1}^m \frac{(L(b-a)^2)^{m-k}}{(m-k)!} \|T(\varphi_{k-1}) - \varphi_k\|_\infty$$

and finally (6) implies (8). \square

Remark 3.1. Let us introduce the following notation, which we use hereafter: given $k \geq 1, n_k, m_k \in \mathbb{N}$ we write

$$\begin{aligned} M_k &:= \max \left\{ \left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial s} \right\|_\infty, \left\| \frac{\partial \psi_k}{\partial t} \right\|_\infty \right\}, \\ p_{n_k} &:= \max_{0 \leq i \leq n_k-1} (t_{i+1} - t_i), \quad n_k \geq 2, \quad t_i \in \Delta_{n_k}, \\ p_{m_k} &:= \max_{0 \leq i \leq m_k-1} (t_{i+1} - t_i), \quad m_k \geq 2, \quad t_i \in \Delta_{m_k}, \\ p_k &:= \max_{0 \leq k \leq h} \{p_{n_k}, p_{m_k}\}. \end{aligned}$$

Finally we arrive at the following estimation of the error.

Theorem 3.1. Let $h \geq 1$, $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{h-1} > 0$ and $1 \leq k \leq h$ with

$$p_{k-1}(b - a)(2\|g'\|_\infty + 4M_{k-1}(b - a)) < \varepsilon_{k-1}.$$

Assume further that $\varphi_0, g \in C^1[a, b]$ and $G \in C^1([a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R})$. Then the unique solution φ of the integral equation satisfies that

$$\|\varphi - \varphi_h\|_\infty < \sum_{k=h}^{+\infty} \frac{(L(b-a)^2)^k}{k!} \|T(\varphi_0) - \varphi_0\|_\infty + \sum_{k=1}^h \frac{(L(b-a)^2)^{h-k}}{(h-k)!} \varepsilon_{k-1}. \tag{9}$$

Proof. In view of Lemma 3.3, we need to refine $\|T(\varphi_{k-1}) - \varphi_k\|_\infty$ and for this purpose we use the definition (2) of the operator T , so

$$T(\varphi_{k-1})(x) = y_0 + \int_a^x g(s) ds + \int_a^x \int_a^b G(s, t, \varphi_{k-1}(t)) ds dt$$

and from (3) and (4)

$$\begin{aligned} |T(\varphi_{k-1})(x) - \varphi_k(x)| &\leq \int_a^x |g(s) - P_{n_{k-1}}(g)(s)| ds \\ &\quad + \int_a^x \int_a^b |\psi_{k-1}(s, t) - Q_{m_{k-1}^2}(\psi_{k-1})(s, t)| ds dt. \end{aligned}$$

We use the inequalities obtained in [1]:

$$\|g - P_{n_{k-1}}(g)\|_\infty < 2\|g'\|_\infty p_{n_{k-1}}, \tag{10}$$

$$\|\psi - Q_{m_{k-1}^2}(\psi)\|_\infty < 4M_{k-1} p_{m_{k-1}}(b - a), \tag{11}$$

so, for all $x \in [a, b]$,

$$|T(\varphi_{k-1})(x) - \varphi_k(x)| \leq 2\|g'\|_\infty p_{n_{k-1}}(x - a) + 4M_{k-1} p_{m_{k-1}}(b - a)(x - a).$$

We choose ε_{k-1} , for each $k = 1, 2, \dots, h$, such that

$$p_{k-1}(b - a)(2\|g'\|_\infty + 4M_{k-1}(b - a)) < \varepsilon_{k-1},$$

so that, for all $k = 1, \dots, h$,

$$\|T(\varphi_{k-1}) - \varphi_k\|_\infty < \varepsilon_{k-1}$$

and by Lemma 3.3, we obtain (9). \square

4. Illustrative numerical examples

In this section we present some examples to show the efficiency of the presented method. The subset $\{t'_i\}_{i \geq 1}$ chosen for constructing the Schauder basis in $\mathcal{C}([0, 1])$ and $\mathcal{C}([0, 1]^2)$ is

$$\left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^k}, \dots, \frac{2^k - 1}{2^k}, \dots \right\}.$$

To define the sequence $\{\varphi_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ introduced in (4), we choose as initial function $\varphi_0 = g$ and for all $h \geq 1$, we consider $m_h = j$ and $n_h = j^2$. We include for $j = 17$ in the first and second examples, and for $j = 9$ and $j = 17$ in the last ones, the absolute errors committed in certain representative points $x \in [0, 1]$ when we approximate the exact solution y by the iteration φ_h where h is shown in each example.

Example 4.1. Consider the problem given by

$$\begin{cases} y'(x) = xe^x + e^x - x + \int_0^1 xy(t) dt, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Table 1
Comparison of absolute errors for Example 4.1.

x	CAS wavelet method in [4]	DT method in [5]	HPM method in [14]	Our method
0.1	1.3492×10^{-3}	1.0012×10^{-2}	0.2315×10^{-5}	1.0179×10^{-7}
0.2	1.1596×10^{-3}	2.7865×10^{-2}	0.9259×10^{-5}	4.8277×10^{-7}
0.3	5.6715×10^{-3}	5.0873×10^{-2}	0.2083×10^{-4}	1.0178×10^{-6}
0.4	5.9311×10^{-2}	7.5536×10^{-2}	0.3704×10^{-4}	1.6193×10^{-6}
0.5	1.3233×10^{-2}	9.7189×10^{-2}	0.5787×10^{-4}	2.3089×10^{-6}
0.6	4.3929×10^{-2}	1.0955×10^{-1}	0.8333×10^{-4}	3.0935×10^{-6}
0.7	1.4120×10^{-2}	1.0413×10^{-1}	0.1134×10^{-3}	3.9780×10^{-6}
0.8	1.3451×10^{-2}	6.9451×10^{-2}	0.1481×10^{-3}	4.9957×10^{-6}
0.9	1.3205×10^{-2}	1.0013×10^{-2}	0.1875×10^{-3}	6.1354×10^{-6}

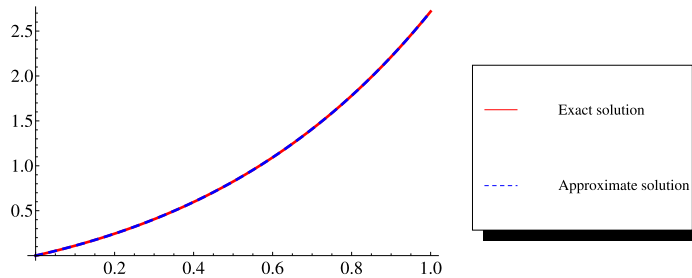


Fig. 1. Plots of approximate solution obtained by our method and the exact solution for Example 4.1.

Table 2
Comparison of absolute errors for Example 4.2.

x	CAS wavelet method in [4]	DT method in [5]	Our method
0.1	2.1794×10^{-4}	1.6667×10^{-3}	3.7900×10^{-6}
0.2	6.3855×10^{-4}	6.0939×10^{-3}	1.5160×10^{-5}
0.3	7.9137×10^{-4}	1.3202×10^{-2}	3.4110×10^{-5}
0.4	2.1559×10^{-2}	2.2914×10^{-2}	6.0640×10^{-5}
0.5	4.9936×10^{-3}	3.5158×10^{-2}	9.4750×10^{-5}
0.6	2.2173×10^{-2}	6.6965×10^{-2}	1.3644×10^{-4}
0.7	1.0565×10^{-4}	7.1243×10^{-2}	1.8571×10^{-4}
0.8	1.4323×10^{-3}	8.6398×10^{-2}	2.4256×10^{-4}
0.9	2.0775×10^{-2}	1.0810×10^{-1}	3.0699×10^{-4}

whose exact solution is $y(x) = xe^x$. We compare in Table 1 the approximate solutions of this problem obtained by using CAS wavelet approximating, differential transformation, and homotopy perturbation (HPM) methods included in [4,5,14] respectively, with the 10th iteration of our method. See Fig. 1.

Example 4.2. Consider now the following problem appearing in [4] and [5]:

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xy(t) dt, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

with the exact solution $y(x) = x$. We approximate the solution by the 5th iteration of our method. Table 2 shows that the numerical results of our method are better than results obtained in [4] and [5] by CAS wavelet approximating and differential transformation methods respectively. See Fig. 2.

Example 4.3. Let us consider the nonlinear problem

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \frac{1}{10}e^{(x+1)} \cos(1) + \int_0^1 \frac{1}{5}e^{(x+t)}y(t) \cos(y(t)) dt, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

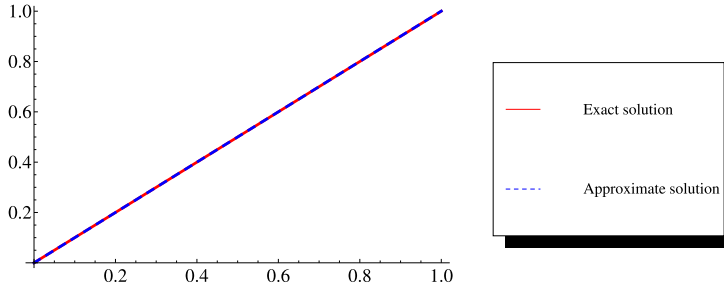


Fig. 2. Plots of approximate solution obtained by our method and the exact solution for Example 4.2.

Table 3
Absolute errors for Example 4.3.

x	$j = 9, h = 5$	$j = 17, h = 5$
0	0	0
0.1	1.3853×10^{-5}	2.9956×10^{-6}
0.2	2.5281×10^{-5}	5.5981×10^{-6}
0.3	3.5902×10^{-5}	9.7780×10^{-6}
0.4	4.8637×10^{-5}	1.2998×10^{-5}
0.5	6.8237×10^{-5}	1.7391×10^{-5}
0.6	9.0694×10^{-5}	2.2317×10^{-5}
0.7	1.0909×10^{-4}	2.6603×10^{-5}
0.8	1.2638×10^{-4}	3.3488×10^{-5}
0.9	1.4737×10^{-4}	3.8782×10^{-5}
1	1.7969×10^{-4}	4.6006×10^{-5}

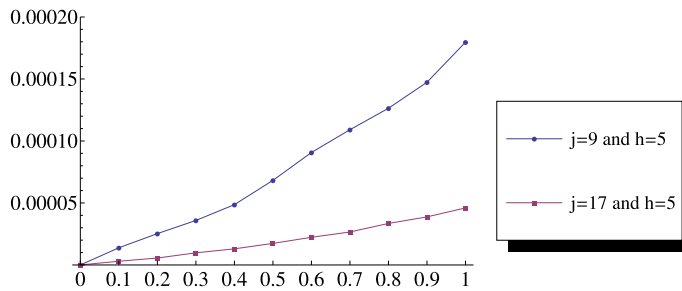


Fig. 3. Plots of absolute errors by our method for Example 4.3.

whose exact solution is the function $y(x) = x$. Table 3 shows the absolute errors committed when the exact solution y is approximated by the 5th iteration for $j = 9$ and $j = 17$. See Fig. 3.

Example 4.4. Finally we consider the nonlinear problem

$$\begin{cases} y'(x) = 2x + \frac{1}{8}(-\pi + \log(4)) + \int_0^1 t \arctan(y(t)) dt, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

whose solution is the function $y(x) = x^2$. In Table 4 we exhibit the absolute errors when we approximate the exact solution y by the 6th iteration for $j = 9$ and $j = 17$. See Fig. 4.

Acknowledgements

Research partially supported by Junta de Andalucía Grant FQM359.

Table 4
Absolute errors for Example 4.4.

x	$j = 9, h = 6$	$j = 17, h = 6$
0	0	0
0.1	3.2161×10^{-4}	9.0826×10^{-5}
0.2	6.4323×10^{-4}	1.8165×10^{-4}
0.3	9.6484×10^{-4}	2.7248×10^{-4}
0.4	1.2864×10^{-3}	3.6330×10^{-4}
0.5	1.6081×10^{-3}	4.5413×10^{-4}
0.6	1.9297×10^{-3}	5.4495×10^{-4}
0.7	2.2513×10^{-3}	6.3578×10^{-4}
0.8	2.5729×10^{-3}	7.2661×10^{-4}
0.9	2.8945×10^{-3}	8.1743×10^{-4}
1	3.2161×10^{-3}	9.0826×10^{-4}

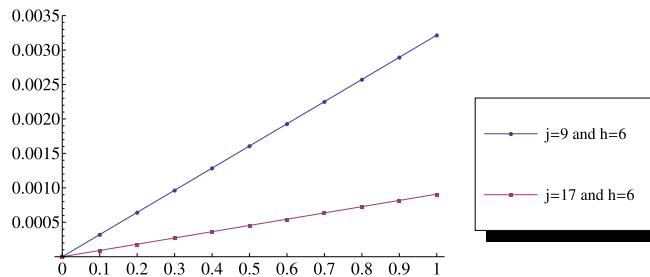


Fig. 4. Plots of absolute errors by our method for Example 4.4.

References

- [1] M.I. Berenguer, M.A. Fortes, A.I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán, Linear Volterra integro-differential equation and Schauder bases, *Appl. Math. Comput.* 159 (2) (2004) 495–507.
- [2] M.I. Berenguer, M.V. Fernández Muñoz, A.I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán, Numerical treatment of fixed point applied to the nonlinear Fredholm integral equation, *Fixed Point Theory Appl.*, Article ID 735638, 8 p., doi:10.1155/2009/735638, 2009.
- [3] M.I. Berenguer, A.I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán, Biorthogonal systems approximating the solution of the nonlinear Volterra integro-differential equation, *Fixed Point Theory Appl.*, Article ID 470149, 9 p., doi:10.1155/2010/470149, 2010.
- [4] H. Danfu, S. Xufeng, Numerical solution of integro-differential equations by using CAS wavelet operational matrix of integration, *Appl. Math. Comput.* 194 (2007) 460–466.
- [5] P. Darania, A. Ebadian, A method for the numerical solution of the integro-differential equations, *Appl. Math. Comput.* 188 (2007) 657–668.
- [6] V.V. Dyakin, S.V. Marvin, Initial-boundary value problem and integrodifferential equations of electrodynamics for an inhomogeneous conductive body, *Comput. Math. Math. Phys.* 48 (2008) 275–283.
- [7] D. Gámez, A.I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán, Nonlinear initial-value problems and Schauder bases, *Nonlinear Anal.* 63 (2005) 97–105.
- [8] D. Gámez, A.I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán, High-order nonlinear initial-value problems countably determined, *J. Comput. Appl. Math.* 228 (2009) 77–82.
- [9] M.A. Goldberg, *Numerical Solution of Integral Equations*, Plenum, New York, 1990.
- [10] M. He, A class of integrodifferential equations and applications, *Discrete Contin. Dyn. Syst. (Suppl.)* (2005) 386–396.
- [11] N.N. Nefedov, A.G. Nikitin, The Cauchy problem for a singularly perturbed integro-differential Fredholm equation, *Comput. Math. Math. Phys.* 47 (2007) 629–637.
- [12] A. Palomares, M. Ruiz Galán, Isomorphisms, Schauder bases and numerical solution of integral and differential equations, *Numer. Funct. Anal. Optim.* 26 (2005) 129–137.
- [13] Z. Semadeni, *Schauder Bases in Banach Spaces of Continuous Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [14] E. Yusufoglu (Agadjanov), Improved homotopy perturbation method for solving Fredholm type integro-differential equations, *Chaos Solitons Fractals* 41 (2009) 28–37.

Capítulo 5

Conclusions and open problems

In this thesis several numerical methods have been introduced in order to approximate the solution of a linear mixed Volterra–Fredholm integral equation, a nonlinear Fredholm integral equation of the second kind and a nonlinear Fredholm integro-differential equation. Although for the first one we have developed in addition a collocation algorithm based on the properties of a certain family of splines functions, we have focused on numerical methods of iterative nature, which have been designed not only for that mixed equation but also for the other two types of equations. Putting the emphasis on such iterative methods, we have introduced them by means of the use of adequate Schauder bases in Banach spaces of continuous functions appearing in a natural way when expressing the solution of those equations as the fixed point of an ad hoc operator between Banach spaces of that kind, as well as of the specific properties of each equation. The corresponding algorithms have some advantages, regarding some popular ones, that make them useful for the numerical treatment of the equations under consideration. Let us mention

some of their strengths:

- Despite the fact that our methods work with any Schauder basis in the corresponding Banach space of continuous function, those handled in this thesis, the usual ones, make easier their implementation in the computer.
- When dealing with Schauder bases which are smoother than the usual ones –obtained as successive integration of such bases and, where appropriate, of their tensor products, the convergence order increases. With the usual ones, the convergence order is the same as in the collocation method, but unlike what happens in this classical method, in those introduced by us we do not solve any system of nonlinear algebraical equations.
- Our family of numerical methods have the advantage of being very easy to implement. The approximating functions are the sum of a known function and integrals of piecewise uni or bivariate polynomials of degree 1 or 2. As immediately follows from the properties of the usual Schauder bases, the calculation of the coefficients of such polynomials just requires linear combinations of several evaluations of the basic functions at adequate points.
- The concrete choice of the initial function turns out to be irrelevant, since after some iterations its influence in the approximations disappears completely.
- When more nodes are used, the accuracy improves significantly, unlike the number of iterations, which only carries much weight for low values.
- The numerical experiments illustrate the stated theoretical results.

Let us finally emphasize that, according to the obtained results, the following open problems seem to be natural extensions of those considered in this thesis:

- Generalize the theoretical results and numerical algorithms to the setting of vector-valued equations, and more specifically, with their values in a Banach space.
- Extend the developed methods for functions with domains in \mathbb{R}^N , domains do not necessarily boxes.
- Analyse in detail how the use of smoother Schauder bases determines the study of the error and the programming of the corresponding numerical methods.

Bibliografía

- [1] K. Atkinson, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, 3rd ed., Text in Applied Mathematics **39**, Springer, 2009.
- [2] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. **3**, 133–181 (Thesis, Lwów 1920).
- [3] B. Basirat, K. Maleknejad, E. Hashemizadeh, *Operational matrix approach for the nonlinear Volterra–Fredholm integral equations: arising in physics and engineering*, Int. J. of the Physical Sciences **7** (2012), 226-233.
- [4] M. I. Berenguer, M. V. Fernández Muñoz, A. I. Garralda-Guillem and M. Ruiz Galán, *A sequential approach for solving the Fredholm integro–differential equation*, Appl. Num. Math. **62** (2012), 297–304.
- [5] M.I. Berenguer, M. V. Fernández Muñoz, A.I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán, *Numerical Treatment of Fixed Point Applied to the Nonlinear Fredholm Integral Equation*, Fixed Point Theory Appl., Article ID 735638, **Vol. 2009** (2009), 8 pp., doi: 10.1155/2009/735638.

- [6] F. Caliò, M. V. Fernández Muñoz, E. Marchetti, *Direct and iterative methods for the numerical solution of mixed integral equations*, Appl. Math. Comput. **216** (2010), 3739–3746.
- [7] J. Dieudonné, *History of Functional Analysis*, NorthHolland Studies **49**, Amsterdam, 1981.
- [8] V.V. Dyakin, S.V. Marvin. *Initial–boundary value problem and integro-differential equations of electrodynamics for an inhomogeneous conductive body*. Comput. Math. Math. Phys. **48** (2008), 275–283.
- [9] J.A. Ezquerro, M.A. Hernández, N. Romero, *Solving nonlinear integral equations of Fredholm type with high order iterative methods*, J. Comput. Appl. Math. **236** (2011), 1449–1463.
- [10] B. Gelbaum, J. Gil de Lamadrid, *Bases on tensor products of Banach spaces*, Pacific J. Math. **11** (1961), 1281–1286.
- [11] M.A. Goldberg. *Numerical Solution of Integral Equations*, Plenum, New York, 1990.
- [12] P. Hájek, V. Montesinos Santalucia, J. Vanderwerff and V. Zizler, *Biorthogonal Systems in Banach Spaces*, CMS Books in Mathematics **26**, Springer, (2008).
- [13] M. He. *A class of integrodifferential equations and applications*. Discrete Contin. Dyn. Syst. (Suppl.) (2005), 386–396.
- [14] F. Liu, A. Zhou, *Two-scale Boolean Galerkin discretizations for Fredholm integral equations of the second kind*, SIAM J. Numer. Anal. **45** (2007), 296–312.

- [15] A. Makroglou, *Integral equations and actuarial risk management: some models and numerics*, Math. Model. Anal. **8** (2003), 143–154.
- [16] K. Maleknejad, K. Nedaiasl, *Application of sinc-collocation method for solving a class of nonlinear Fredholm integral equations*, Comput. Math. Appl. **62** (2011), 3292–3303.
- [17] N.N. Nefedov, A.G. Nikitin, *The Cauchy problem for a singularly perturbed integro–differential Fredholm equation*. Comput. Math. Math. Phys. **47** (2007), 629–637.
- [18] K. Parand, J.A. Rad, *Numerical solution of nonlinear Volterra–Fredholm–Hammerstein integral equations via collocation method based on radial basis functions*, Appl. Math. Comput. **218** (2012), 5292–5309.
- [19] A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, Boston, 2007.
- [20] G. Pittaluga, L. Sacripante, *An algorithm for solving Fredholm integro–differential equations*, Numer. Algorithms **50** (2009), 115–126.
- [21] M. Rabbani, K. Maleknejad, *Using orthonormal wavelet basis in Petrov–Galerkin method for solving Fredholm integral equations of the second kind*, Kybernetes **41** (2012), 465–481.
- [22] J. Rak, *The Numerical Solution of Singular Fredholm Integral Equations of the Second Kind*, WDS’10 Proceedings of Contributed Papers, Part I, 157–164, 2010.
- [23] Z. Semadeni, *Product Schauder bases and approximation with nodes in spaces of continuous functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. **11** (1963), 387–391.

- [24] M. Shakourifar, M. Dehghan, *On the numerical solution of nonlinear systems of Volterra integro–differential equations with delay arguments*, Computing **82** (2008), 241–260.
- [25] S. Shaw, J.R. Whiteman, *Optimal long-time $L_p(0, T)$ stability and semi-discrete error estimates for the Volterra formulation of the linear quasi-static viscoelasticity problem*, Numer. Math. **88** (2001), 743–770.
- [26] K. Wang, Q. Wang, *Lagrange collocation method for solving Volterra–Fredholm integral equations*, Appl. Math. Comput. **219** (2013), 10434–10440.
- [27] K. Wang, Q. Wang, K. Guan, *Iterative method and convergence analysis for a kind of mixed nonlinear Volterra–Fredholm integral equation*, Appl. Math. Comput. **225** (2013), 631–637.
- [28] E. Yusufoglu, *Improved homotopy perturbation method for solving Fredholm type integro–differential equations*, Chaos Solitons Fractals **41** (2009), 28–37.
- [29] S.A. Yousefi, A. Lotfi, M. Dehghan, *He’s variational iteration method for solving nonlinear mixed Volterra–Fredholm integral equations*, Comput. Math. Appl. **58** (2009), 2172–2176.
- [30] X.Q. Zhao, *Dynamical Systems in Population Biology*, CMS Books in Mathematics **16**, Springer, 2003.
- [31] X.C. Zhong, *A new Nyström-type method for Fredholm integral equations of the second kind*, Appl. Math. Comput. **219** (2013), 8842–8847.