

Notas sobre Mecánica de Materiales Compuestos

Manuel Chiachío Ruano, Juan Chiachío Ruano¹

Noviembre de 2015

¹Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica. Universidad de Granada.

Prefacio

Estas notas han sido preparadas como apoyo a los estudiantes del Máster en Ingeniería de Estructuras de la UGR, con el objetivo de que encuentren en ellas un manual básico para adentrarse en el cálculo de materiales compuestos. Los materiales compuestos han experimentado un desarrollo espectacular desde los años 70 del siglo pasado, pasando de aplicaciones meramente aerospaciales a un amplio rango de aplicaciones en ingeniería. Baste con mencionar el uso masivo que la industria eólica está haciendo de estos materiales desde las últimas dos décadas para entender la relevancia que estos materiales han adquirido en el espectro de materiales de ingeniería. En este estado de la técnica, debería esperarse que un posgrado en Ingeniería de Estructuras o en general, en Ingeniería Mecánica, proporcionara contenidos acerca de estos materiales, sin embargo, desafortunadamente, solo algunos planes de estudio contemplan esta formación, normalmente, en el contexto de la titulación de Ingeniería Aeroespacial. Parece por tanto claro que existe la necesidad docente de introducir estos materiales y sus métodos básicos de cálculo a un grupo más amplio de estudiantes de titulaciones técnicas. Con esta motivación han surgido estas notas, que aspiran en posteriores ediciones ampliadas a convertirse en un manual docente.

Los autores de estos apuntes son los hermanos Juan y Manuel Chiachío Ruano, Doctores Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos por la Universidad de Granada. Desde su graduación en 2006 como ingenieros de Caminos trabajaron en diversas empresas de ingeniería españolas, donde tuvieron la oportunidad de conocer la tecnología del material compuesto a nivel profesional. En 2010 se incorporan como investigadores predoctorales a la Universidad de Granada, tras haber ganado sendas becas FPU del Ministerio de Educación, donde profundizan en aspectos específicos como la fiabilidad y el daño por fatiga en materiales compuestos. Durante esta etapa como investigadores predoctorales los autores realizan varias estancias de investigación en distintos centros de prestigio internacional, como el Instituto Tecnológico de California (CALTECH), el centro de investigación Ames de la NASA (San Francisco, USA) y los laboratorios de dinámica de materiales compuestos de Airbus en la Universidad Tecnológica de Hamburgo (Alemania). Tras doctorarse en 2014, ocupan sendas posiciones de investigadores y profesores en el Centro de Fiabilidad y Riesgo de la Universidad de Nottingham (Reino Unido).

Índice general

1. Introducción a los materiales compuestos	1
1.1. Introducción	1
1.1.1. Materiales constituyentes	2
1.1.2. Motivación	2
1.1.3. Espectro de materiales constituyentes	3
1.2. Composites de fibras sintéticas	5
1.2.1. Fabricación	6
1.2.2. Fibras sintéticas	8
1.2.3. Matriz	9
2. Mecánica de Láminas	11
2.1. Ecuación general de gobierno	11
2.1.1. Matriz elástica en láminas ortotrópicas	13
2.1.2. Matriz elástica en láminas transversalmente isotrópicas	13
2.1.3. Micromecánica	14
2.2. Ecuaciones de gobierno en tensión plana	15
2.2.1. Invariantes de rigidez	16
2.2.2. Constantes cuasi-isotrópicas	18
2.2.3. Ejercicio práctico	19
3. Mecánica de laminados	21
3.1. Introducción	21
3.1.1. Codificación de laminados	22
3.1.2. Homogeneización de Laminados	22
3.2. Ecuaciones de gobierno en tensión plana	22
3.2.1. Deformación plana en laminados	22
3.2.2. Métodos de integración de la matriz de rigidez	23
3.2.3. Matrices de rigidez y flexibilidad normalizadas	24
3.2.4. Constantes de ingeniería del laminado	24
3.2.5. Ejemplo práctico	25

Capítulo 1

Introducción a los materiales compuestos

Índice

1.1. Introducción

1.1.1. Materiales constituyentes

1.1.2. Motivación

1.1.3. Espectro de materiales constituyentes

1.2. Composites de fibras sintéticas

1.2.1. Fabricación

1.2.2. Fibras sintéticas

1.2.3. Matriz

1.1. Introducción

Esta sección pretende introducir conceptos básicos sobre materiales compuestos con objeto de permitir al alumno conocer las propiedades constitutivas de estos materiales, que son útiles para entender la formulación mecánica expuesta en secciones posteriores. Aunque inicialmente se dan nociones generales sobre *materiales avanzados* para uso estructural, este texto se centra principalmente en el material compuesto, también conocido frecuentemente como “composite”.

1.1.1. Materiales constituyentes

Típicamente se denomina composite al material formado por la combinación dos materiales que funcionan solidariamente a nivel tensional. En este sentido, el hormigón armado es también un material compuesto, sin embargo, en estas notas se centran en los materiales compuestos de fibras sintéticas y matrices polémicas. Las fibras son generalmente filamentos largos de carbono, vidrio, basalto, kevlar, etc, de diámetro del orden de las micras, y son las encargadas de resistir la práctica totalidad de la carga. Esto es debido a su elevada resistencia a tracción, en relación a la baja resistencia de la matriz polimérica. La matriz envuelve y protege a las fibras así como también transfiere la tensión entre fibras. Existen diversos tipos de matrices en el mercado, siendo las epoxy las más usadas en aplicaciones estructurales por su estabilidad termoquímica. Típicamente, las matrices se suelen clasificar en *termoestables* y *termoplásticas*. Las termoestables, como el epoxy, son, con amplia diferencia, las más utilizadas en ingeniería mecánica.

El porcentaje volumétrico de fibras en un material compuesto suele ser del 60 % o incluso mayor, es decir, normalmente menos del 40 % del material es un polímero, es por ello por lo que los autores prefieren no usar la denominación habitual de los materiales compuestos como "polímeros reforzados con fibras", ya realmente son "fibras embebidas en polímero".

1.1.2. Motivación

Desde la aparición del hormigón pretensado no se han experimentado avances significativos en ingeniería civil/mecánica en cuanto a nuevos materiales estructurales, aunque sí que se ha profundizado en el conocimiento de los materiales tradicionales (hormigón-acero). Son relevantes las mejoras conseguidas para la obtención y ejecución de hormigones de alta resistencia y los avances obtenidos en acero estructural, en particular, las altas resistencias conseguidas en los aceros activos. Esto último ha impactado positivamente en ciertas aplicaciones estructurales del acero, como por ejemplo, en obras subterráneas (anclajes activos para túneles que discurren bajo nivel freático), obras marítimas (armaduras para cajones portuarios, muelles, etc), edificación industrial (edificios para industrias químicas), por citar algunos ejemplos. Sin embargo, pese a las notorias mejoras conseguidas, se ha destacar que las propiedades mecánicas intrínsecas de estos materiales tradicionales no han sufrido una mejoría significativa, entendida como disruptiva. Es éste el matiz que usamos los autores para proponer una clasificación del material estructural como avanzado o no avanzado. Específicamente, atendemos al cumplimiento de, al menos, dos de las siguientes prestaciones, para clasificar

un material como material avanzado:

- relación resistencia/peso alta o muy alta
- estabilidad química y ambiental,
- fiabilidad, comportamiento predecible.

Basándonos en la anterior clasificación, diversos materiales estructurales (típicamente nuevos) surgen como candidatos a ser clasificados como avanzados. Éste es el caso del titanio, grafeno, composites, etc. En el caso particular de los composites, es meritorio de mención el importante aumento de las aplicaciones de materiales compuestos en estructuras de ingeniería civil en las últimas dos décadas: puentes, pasarelas peatonales, estructuras de arquitectura singular y estructuras off-shore. Sólo en Estados Unidos se contabiliza la inversión en composites para aplicaciones en ingeniería civil en miles de millones de dólares. Países como Japón, Suiza y Dinamarca, entre otros países tecnológicamente avanzados, cuentan ya con varios puentes y estructuras de ingeniería realizadas íntegramente con estos materiales, aunque por la ausencia de normativas de diseño, son normalmente realizaciones de escasa luz¹. Así mismo, en algunos de estos países se ha creado una red empresarial en torno a los nuevos materiales, que está suponiendo en ciertos casos un importante impulso económico y una renovación en el sector de la construcción (véase como ejemplo el Composite Park, situado en Francia <http://www.composite-park.fr/en/index.php>).

En España aún se contabilizan escasas realizaciones: pasarela en fibra de vidrio sobre la línea de alta velocidad Madrid-Barcelona en Lérida (Cataluña), pasarela sobre el Río Manzanares, pasarela peatonal de Sant Fruitós de Bages (Cataluña) o la pasarela sobre la ría de Narrondo en Zumaia (País Vasco). Todas ellas están basadas en diseños heredados de los materiales tradicionales, algo que es poco recomendado en las recientes publicaciones del estado del arte. Al contrario, la literatura especializada recomienda la búsqueda de formas óptimas que aprovechen al máximo las características anisótropas de estos materiales en su uso para ingeniería civil y estructural, cumpliendo con los estándares de servicio y seguridad establecidos.

1.1.3. Espectro de materiales constituyentes

La tabla 1.1.3 muestra sinópticamente algunas de las propiedades mecánicas de una selección de materiales avanzados. Es importante notar que las propiedades que se proporcionan no corresponden a valores exactos, sino a

¹Puede consultarse más información en <http://www.tech.plym.ac.uk/sme/composites/bridges.htm>.

valores medios o rangos de valores obtenidos de la literatura. El lector debe referirse a los datos de un fabricante en concreto, o bien a literatura específica de un determinado material avanzado, para obtener información más precisa.

Clase	Material	Resistencia a tracción [MPa]	Resistencia última [GPa]	Módulo de Young [GPa]	Peso específico °C
Aleaciones metálicas	Acero	770 – 2200		180 – 210	7,8 – 7,85
	Aluminio	260 – 700		69 – 72	2,7 – 2,85
	Titanio	1000 – 1200		110	4,5
	Magnesio	260		40	1,8
	Niquel	400 – 500		200	8,9
resinas termoestables	Epoxy	60 – 90		2,4 – 4,2	1,2 – 1,3
	Polyester	30 – 70		2,8 – 3,8	1,2 – 1,35
	Phenol-formaldeina	40 – 70		7 – 11	1,2 – 1,3
	Poliamidas	55 – 110		3,2	1,3 – 1,43
	Bismaleimida	80		4,2	1,2
resinas termoplásticas	Poliéster	60		2,5	1,32
	Teflón	15 – 35		3,5	2,3
	Nylons	80		2,8	1,14
	Polietileno	20 – 45		6 – 8,5	0,95
	Polieteretercetona (PEEK)	90 – 100		3,1 – 3,8	1,3
	Polisulfatos (PSU)	70		2,7	1,24
	Polifenoles sulfuros (PPS)	80		3,5	1,36
fibras sintéticas	Carbono HM	2700		850	1,78
	Carbono HS	7000		300	1,75
	Vidrio	3100 – 5000		72 – 95	2,4 – 2,6
	Cuarzo	6000		74	2,2
	Basalto	3000 – 3500		90	2,7 – 3,0
	Aramida	3500 – 5500		140 – 180	1,4 – 1,47
	Boron	2500 – 3700		390 – 420	2,5 – 2,6
	Polipropileno	730 – 930		4,4	0,9
hilos metálicos	Acero	1500 – 4400		180 – 200	7,8
	Alumino	290		69	2,70
	Titanio	1400 – 1500		120	4,5
	Molibdeno	1800 – 2200		360	10,2

Cuadro 1.1: Propiedades mecánicas de algunos materiales avanzados destacados.

1.2. Composites de fibras sintéticas

La tecnología de los materiales compuestos emergió a mitad del S.XX, en un contexto de aplicaciones aeroespaciales mayoritariamente. Las elevadas relaciones resistencia/peso y rigidez/peso resultaban muy beneficiosas a este sector, a pesar del elevado coste de estos materiales. Como se ha citado anteriormente en la sección 1.1, el composite está formado por la combinación dos materiales que funcionan solidariamente a nivel tensional. Sin embargo, la idea de combinar dos materiales de distintas propiedades para generar un material con propiedades mejoradas ha sido típicamente usada en construcción a lo largo de la historia. Ese es el caso del adobe reforzado con cañas naturales (por ejemplo, de bambú u otros vegetales), del hormigón armado, como se citaba anteriormente, e incluso de multitud de tejidos que encontramos en el cuerpo humano. Estas notas se centran en materiales estructurales compuestos por fibras largas sintéticas (no orgánicas) embebidas en una matriz o resina polimérica termoestable.

En la literatura, pueden encontrarse diversas formas de clasificar los composites. De manera general, pueden encontrarse clasificados según:

- **tipo de fibra**

$$\begin{array}{l} \text{longitud} \left\{ \begin{array}{l} \text{fibra corta} \\ \text{fibra larga} \end{array} \right. \\ \\ \text{procedencia} \left\{ \begin{array}{l} \text{natural} \\ \text{sintética} \end{array} \right. \end{array}$$

- **tipo de matriz**

$$\text{constituyentes} \left\{ \begin{array}{l} \text{metálica} \\ \text{cementicia} \\ \text{polimérica} \end{array} \right.$$

- **fabricación**

$$\text{apilado} \left\{ \begin{array}{l} \text{unidireccional} \\ \text{Lámina cruzada (cross-ply)} \\ \text{Quasi-isotópico (Quasi isotropic)} \\ \text{Lámina-girada (Angle-ply)} \\ \text{Tejido (woven)} \end{array} \right.$$

Una de las características mecánicas más representativas del composite es su comportamiento elástico anisótropo, lo que supone una diferencia clara con respecto a los metales (como ejemplo clásico de material isótropo). El origen de la anisotropía radica en la diferencia de rigidez entre la matriz y la fibra y en direccionamiento particular de las mismas. La resistencia mecánica de la matriz es, a grandes rasgos, un orden de magnitud menor que la de las fibras. En consecuencia, los materiales compuestos tienen la mayor rigidez y resistencia en la dirección de las fibras, y la mínima en dirección transversal a la fibra. Esta característica, pese a que supone una mayor complejidad para el cálculo tensional, constituye una ventaja competitiva cuando se sabe explotar el diseño del material.

Las excelentes propiedades mecánicas de los materiales constituyentes, junto a la versatilidad de diseño intrínseco del material, permiten explorar nuevos campos formales en la ingeniería civil que hasta ahora han sido imposibles o prohibitivos. Baste decir que la relación resistencia/peso es normalmente entre 3 y 5 veces superior a la del acero estructural.

La Figura 1.1 muestra de forma comparativa la características de resistencia y rigidez de algunos de los materiales compuestos más usados en la industria en relación a las del acero y aluminio. Se observa con claridad la alta eficiencia que se puede llegar a obtener incluso con los materiales compuestos menos eficaces (fibra de vidrio y resina).

1.2.1. Fabricación

La forma en la que se fabrica generalmente un material compuesto es mediante el apilado de finas capas o láminas unidireccionales de fibras. De aquí la denominación típica de *laminado*. El material resultante tendrá unas propiedades mecánicas que dependerán de la secuencia de apilado, junto a las propiedades intrínsecas de las fibras y la matriz. Esto hace que dos laminados fabricados con el mismo tipo de fibra y resina, y exactamente con el mismo espesor, puedan tener resistencias y rigideces completamente dispares en función de la secuencia de apilamiento adoptada en cada caso. Por ello, diseñar estructuras con materiales compuestos pasa por una primera fase de diseño y configuración del propio material. Estos apuntes pretenden proporcionar herramientas para entender y dominar esta primera fase del diseño del material.

A lo anterior, se ha de añadir una tercera variable que es el proceso de fabricación, que influye significativamente en la calidad final del composite (y por ende, en sus propiedades mecánicas) ante igualdad de materiales e incluso ante igualdad de secuencia de apilado. Existen diversos procedimientos de fabricación (RTM, transferencia de resina en vacío, fabricación median-

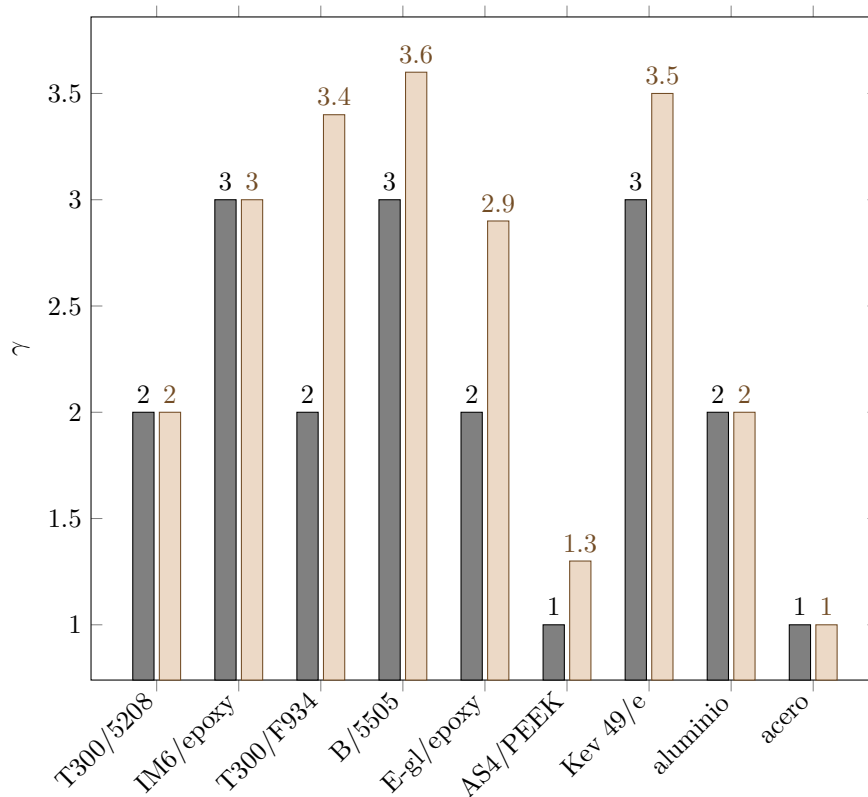


Figura 1.1: Rigidez (barras color gris) y resistencia (barras color marrón) específicas de materiales avanzados versus acero y aluminio.

te *pre-impregnados*, etc). Sin embargo, el tema de la fabricación, que como tal constituye aún hoy un campo de investigación muy activo, sale fuera del alcance de estas notas.

Para finalizar esta primera parte, a continuación se proporciona de forma sinóptica una serie de datos y nociones básicas sobre materiales constituyentes.

1.2.2. Fibras sintéticas

Vidrio

Tipo	Rango de aplicación	Nota
E-Glass	Aplicaciones generales.	Buena resistencia eléctrica y térmica.
S-Glass	Mayor resistencia que anterior.	Buen comportamiento frente a los ácidos
C-Glass		Ambientes con agresividad química
N-Glass	Para composites con matriz de cemento.	Resistencia al álcali
T-Glass		Producto mejorado mecánicamente respecto al E-Glass
R-Glass		Mayor resistencia que E-Glass. Alta resistencia a fatiga
A-Glass		Elevada agresividad química y alta demanda mecánica
ECR-Glass		Mejora al E-Glass con propiedades de resistencia química
AR-Glass		Mejora del N-Glass

Carbono

- Resistencia y rigidez alta. Alta estabilidad a fatiga.
- Alto precio (Economía de escala).
- Degradación ambiental y reacción entre ellas mismas (tratamiento)
- Fabricación dependiente del precursor (Alto consumo energético²)
 1. Ryon: No se usa por falta de eficacia en la carbonización de la celulosa.
 2. PATH³ Mayormente usado. Alta resistencia y deja la superficie sin defectos.
 3. PITCH. Basado en residuos del petróleo (Asfalto)

Precursor	Nota
Hysol Grafil Apollo IM (PAM)	
HM (PAM)	High Modulus. Muy usadas
HS	High Strength
BASF Celion G-40-700	
Gy80	
Hercules AS-6	Usadas
Torayca T-300	Muy usadas
Torayca T-700	Muy usadas
Thornel T-40	
Thornel T-50	
Union Carbide P120	
P100	
P75-S	
P55-S	
P25-W	

²Oxidación a 300C aprox. y calentamiento a 1500C aprox. en atmósfera de nitrógeno

³Polyacrylomitile Precursors

1.2.3. Matriz

- Protege mecánica y ambientalmente a las fibras.
- Conduce las cargas entre fibras.
- Soporta parte de las tensiones.
- Tipos (esquema general):
 1. Metálicas.
 - 1.1 Aluminio (Excelente por ligereza y adhesión)
 - 1.2 Titanio (Caras).
 - 1.3 Magnesio (No demasiado usadas).
 2. Cementicias.
 3. **Poliméricas**
 - 1.1 Termo-estables. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Alta temp. de fabricación (curado)} \\ \text{Estable (a altas temperaturas)} \\ \text{Irreversible y rotura frágil.} \end{array} \right.$
 - 1.2 Termo-plásticas. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Temperatura de fusión} \rightarrow \text{ Moldeo reversible} \\ \text{Comportamiento menos frágil.} \\ \text{Reciclables.} \end{array} \right.$

Capítulo 2

Mecánica de Láminas

Índice

2.1. Ecuación general de gobierno

2.1.1. Matriz elástica en láminas ortotrópicas

2.1.2. Matriz elástica en láminas transversalmente isotrópicas

2.1.3. Micromecánica

2.2. Ecuaciones de gobierno en tensión plana

2.2.1. Invariantes de rigidez

2.2.2. Constantes cuasi-isotrópicas

2.2.3. Ejercicio práctico

En este capítulo se expone la formulación básica de la Elasticidad Lineal para láminas (o "plies", en inglés), que servirá como base para entender la mecánica de laminados en materiales compuestos. Se empezará exponiendo las ecuaciones de la elasticidad para materiales anisótropos, es decir, aquellos que su comportamiento mecánico es diferente según la dirección del espacio considerada. Posteriormente se particularizará dicha ecuación para el caso de materiales ortotrópos, es decir, aquellos cuyas propiedades mecánicas pueden ser distintas en un plano determinado, pero iguales en la dirección perpendicular a dicho plano. Las láminas que conforman un material compuesto, son un ejemplo de material ortótropo. Para la lectura de este capítulo, se asume que el alumno conoce los fundamentos de la Elasticidad Lineal.

2.1. Ecuación general de gobierno

Supongamos un punto determinado de un sólido rígido en equilibrio, cuyo estado tensional es el representado en la Figura 2.1, donde σ_{ij} es la tensión

en la dirección i y normal al plano j .

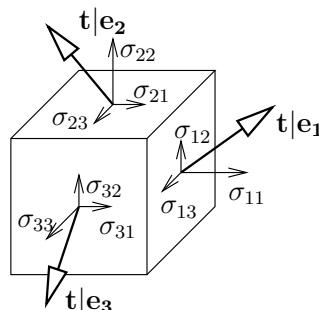


Figura 2.1: Estado tensional.

Por simplicidad, adoptamos la *notación contraída*, que es típica en la literatura de materiales compuestos:

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \sigma_2 = \sigma_{22}, \sigma_3 = \sigma_{33}, \sigma_4 = \sigma_{23}, \sigma_5 = \sigma_{31}, \sigma_6 = \sigma_{12}$$

Análogamente, se puede establecer una notación contraída para el tensor de deformaciones, como sigue:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{31}, \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12}$$

Con esta notación, la ecuación general de la Elasticidad General se formula como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde C_{ij} es el elemento (i, j) -ésimo de la matriz de rigidez del material.

Conocidos los elementos de esta matriz, y las deformaciones unitarias en el punto de estudio ε_i , $i = 1, \dots, 6$ (pueden medirse experimentalmente), puede obtenerse el estado tensional del sólido en el punto considerado. Puede observarse en la Ecuación (2.1) que para resolver un problema de Elasticidad es necesario conocer las 36 constantes de la matriz de rigidez. Este es el caso de los materiales anisótropos, es decir, aquellos en los que no existe una simetría en su comportamiento mecánico, en ninguna de las direcciones del espacio.

2.1.1. Matriz elástica en láminas ortotrópicas

Los materiales compuestos están formados mediante el apilamiento de láminas en las que las fibras están alineadas según una determinada dirección. Generalmente se conocen como "láminas unidireccionales", y es usual apilar un laminado por grupos de láminas unidireccionales. Estas láminas, o grupos de láminas unidireccionales, tienen dos planos de simetría mutuamente ortogonales, y por lo tanto el plano perpendicular a estos dos planos es también un plano de simetría. Estas láminas son materiales ortotrópicos, y en estos, el número de constantes elásticas desconocidas se reduce a 12. La ecuación de la elasticidad queda de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & 0 & 0 \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & 0 & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La ecuación anterior puede reescribirse usando las constantes elásticas de ingeniería, usando la relación inversa deformación-tensión, como sigue:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

donde E_1 , E_2 , E_3 son los módulos de Young en las tres direcciones de simetría del material (1: dirección de fibras, 2: dirección perpendicular a fibras, 3: dirección perpendicular al plano de la lámina (1-2)), ν_{ij} , $i \neq j$, son los seis coeficientes de Poisson, definidos como $\nu_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$, y G_{12} , G_{23} , G_{31} son los módulos de cizalla en los planos $x_1 - x_2$, $x_2 - x_3$ y $x_1 - x_3$, respectivamente. Debe notarse que experimentalmente se ha determinado que el módulo de cizalla fuera del plano se obtiene como $G_{23} = E_2/2(1 + \nu_{23})$.

2.1.2. Matriz elástica en láminas transversalmente isotrópicas

Anteriormente se ha afirmado que las láminas unidireccionales son generalmente materiales ortotrópicos. Sin embargo, puede hacerse una simplificación adicional, ya que estas láminas no sólo son ortotrópicas, sino también

transversalmente isotrópicas. Esto es, sus propiedades elásticas son iguales en un plano perpendicular a la dirección de las fibras ($x_1 - x_2$), por tanto la ecuación anterior se simplifica de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2/2(1+\nu_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Como se observa en la Ecuación (2.4), un material transversalmente isotrópico, y por tanto, una lámina de material compuesto, queda definido elásticamente mediante las siguientes cinco constantes elásticas: E_1 , E_2 , ν_{23} , ν_{12} y G_{12} . Estas constantes elásticas se pueden obtener a partir de los módulos de Young y los coeficientes de Poisson de los materiales constituyentes, es decir, fibras y matriz, mediante formulaciones de Micromecánica.

2.1.3. Micromecánica

La Micromecánica es el área de la Mecánica de Sólidos que se encarga de predecir las propiedades elásticas nativas del sólido basándose en las propiedades de los materiales constituyentes y la configuración geométrica de los mismos. En el contexto de los materiales compuestos, la micromecánica constituye una de las áreas en las que más se sigue investigando y realizando avances científicos significativos, principalmente con el objetivo de poder incorporar los fenómenos de fractura que experimentan estos materiales durante su vida útil. En estas notas, se proporcionan las relaciones micromecánicas básicas, asumiendo un comportamiento elástico lineal del material, y la ausencia de cualquier defecto o daño.

Sean E_f y E_m los módulos de Young de las fibras y de la matriz, respectivamente; ν_f y ν_m los coeficientes de Poisson de fibras y matriz; G_f y G_m los módulos de cizalla de fibras y matriz; y V_f y V_m la fracción volumétrica de fibras y matrices, tal que $V_f + V_m = 1$. Las siguientes expresiones relacionan estas propiedades de ingeniería de los materiales constituyentes (fibra,

matriz), con las propiedades de ingeniería de una lámina unidireccional:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (2.5)$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \quad (2.8)$$

Se observa por tanto que conociendo las propiedades mecánicas de las fibras y la matriz (normalmente proporcionadas por el fabricante) y las relaciones volumétricas, pueden derivarse las propiedades elásticas nativas de las láminas, y por ende, la mecánica de todo el laminado, como se verá en las secciones siguientes.

2.2. Ecuaciones de gobierno en tensión plana

No son infrecuentes los casos en los que un laminado está sometido a un estado de tensión plana, es decir, sus tensiones en equilibrio resultan estar dentro del plano medio del laminado. En estos casos, la formulación del comportamiento elástico del material se simplifica notablemente. En particular, la ecuación de la elasticidad lineal puede formularse como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

donde

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{66} &= G_{12} \\ \nu_{21} &= \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}, & Q_{12} &= \nu_{12} Q_{22} = \nu_{21} Q_{11} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Alternativamente, la ecuación de gobierno puede venir dada a la inversa, es decir, usando la *matriz de deformación*, en lugar de la matriz de rigidez, como sigue:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

donde

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{12} &= \frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu_{21}}{E_2} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Debe notarse que las ecuaciones anteriores están referidas a un sistema de referencia alineado con el material, es decir, el eje x_1 coincide con la dirección de las fibras, el eje x_2 corresponde a la dirección perpendicular, y el eje x_3 es el perpendicular al plano $x_1 - x_2$. Este sistema de referencia suele denominarse en inglés como el sistema *on-axis*, o *sistema material*. Sin embargo, las tensiones y/o deformaciones del material pueden ser requeridos en un sistema de referencia XYZ diferente, en el que el eje x forme un ángulo θ con la dirección de las fibras. En este caso, la ecuación de elasticidad de la lámina en este sistema arbitrario se denota como sigue:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

donde las constantes \bar{Q}_{ij} son desconocidas. Por tanto, se observa como se ha pasado de un problema de 5 incógnitas usando un sistema de referencia *on-axis*, a un sistema de 9 incógnitas usando un sistema *off-axis*. Afortunadamente puede obtenerse una relación directa entre las constantes de ambos sistemas mediante transformaciones algebraicas, como sigue:

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ m^3n & -mn^3 & mn^3 - m^3n & 2(mn^3 - m^3n) \\ mn^3 & -m^3n & m^3n - mn^3 & 2(m^3n - mn^3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

donde $m = \cos \theta$ y $n = \sin \theta$. Conocida la matriz de cambio mostrada en la ecuación anterior, pueden trasladarse directamente los resultados desde un sistema *on-axis* a otro *off-axis* y viceversa.

2.2.1. Invariantes de rigidez

En vista de lo expuesto en el apartado anterior, se observa que para referir los resultados del cálculo con materiales compuestos es imprescindible especificar el sistema de referencia sobre el que se realiza dicho cálculo. Esto es

inevitable al tratarse de materiales no-isotrópicos. Sin embargo, es conveniente notar que existen una serie de *invariantes de rigidez*, es decir, funciones de las constantes de cualquier matriz elástica (independientemente del sistema de referencia al que esté referida), cuyos valores son siempre iguales. Se verá posteriormente que estos invariantes de rigidez son la base para obtener las denominadas *constantes cuasi-isotrópicas*, que resultan de interés en fase de prediseño.

Si se desarrollan trigonométricamente los elementos de la matriz de cambio de la Ecuación (2.14), se obtiene:

$$\begin{aligned} m^4 &= \frac{3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8}, & m^3n &= \frac{2\sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{8} \\ m^2n^2 &= \frac{1 - \cos(4\theta)}{8}, & mn^3 &= \frac{2\sin(2\theta) - \sin(4\theta)}{8} \\ n^4 &= \frac{3 - 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8} \end{aligned}$$

Introduciendo estos elementos en la Ecuación (2.14), se obtiene la formulación alternativa siguiente:

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & 0 & 0 \\ U_1 & -U_2 & U_3 & 0 & 0 \\ U_4 & 0 & -U_3 & 0 & 0 \\ U_5 & 0 & -U_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}U_2 & U_3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}U_2 & -U_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\theta) \\ \cos(4\theta) \\ \sin(2\theta) \\ \sin(4\theta) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{3}{8}Q_{11} + \frac{3}{8}Q_{22} + \frac{1}{4}Q_{12} + \frac{1}{2}Q_{66} \\ U_2 &= \frac{1}{2}Q_{11} - \frac{1}{2}Q_{22} \\ U_3 &= \frac{1}{8}Q_{11} + \frac{1}{8}Q_{22} - \frac{1}{4}Q_{12} - \frac{1}{2}Q_{66} \\ U_4 &= \frac{1}{8}Q_{11} + \frac{1}{8}Q_{22} + \frac{3}{4}Q_{12} - \frac{1}{2}Q_{66} \\ U_5 &= \frac{1}{8}Q_{11} + \frac{1}{8}Q_{22} - \frac{1}{4}Q_{12} + \frac{1}{2}Q_{66} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Se observa de la Ecuación (2.15) que U_1, U_4 y U_5 son independientes de θ , por tanto son *invariantes de la lámina*. Además, de la Ecuación (2.16) se desprende que $U_1 = U_4 + 2U_5$. La combinación de dos invariantes constituye

otro invariante, por tanto se definen los invariantes adicionales:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2(U_1 + U_4) = Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} \\ I_2 &= 2(U_1 + U_5) = Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{66} \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.2.2. Constantes cuasi-isotrópicas

Actualmente los sistemas modernos de cálculo computacional permiten realizar cálculos muy precisos con materiales compuestos a un coste computacional relativamente bajo. Estos sistemas han contribuido a la extensión de estos materiales en ingeniería, al poder simular en un ordenador una pieza completa sin necesidad de testarla mediante ensayos destructivos. Sin embargo, estos programas no son apropiados para la fase de prediseño o de selección de material, ya que requieren unos inputs de información que frecuentemente no se disponen en esa fase inicial de proyecto. En estos casos, es conveniente recurrir al uso de *constantes cuasi-isotrópicas*. Estas constantes proporcionan información útil acerca de la idoneidad de un tipo particular de matriz o fibra, antes de conocer la alineación definitiva de las mismas, y por tanto la secuencia de apilado concreta.

Conocidas las propiedades nativas de una lámina $(E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12})$, las matrices de rigidez y deformación cuasi-isotrópicas se obtienen como:

$$Q^{(iso)} = \begin{bmatrix} U_1 & U_4 & 0 \\ U_4 & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & U_5 \end{bmatrix}, \quad S^{(iso)} = \begin{bmatrix} \frac{U_1}{D} & -\frac{U_4}{D} & 0 \\ -\frac{U_4}{D} & \frac{U_1}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{U_5} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

donde $D = U_1^2 - U_4^2$. Por tanto, se pueden obtener las constantes cuasi-isotrópicas de ingeniería de la lámina como:

$$\begin{aligned} E^{(iso)} &= \frac{D}{U_1} \\ G^{(iso)} &= U_5 \\ \nu^{(iso)} &= \frac{U_4}{U_1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Estas constantes de ingeniería asimilan la lámina transversalmente isotrópica real a una lámina isótropa. Es por tanto directo obtener las propiedades mecánicas de un laminado de espesor h a partir de estas constantes de lámina. Por tanto, estas constantes permiten realizar cálculos de tanteo del espesor de laminado y del tipo de fibras y matriz a emplear. Se reitera que su uso es muy recomendado en fase de prediseño.

2.2.3. Ejercicio práctico

Dadas las siguientes características mecánicas del ply T300/N5208:

- $E_x = 181GPa$, $E_y = 10,3GPa$, $E_s = 7,17GPa$, $\nu_x = 0,28$
- Volumen fibra: 0.70
- $h_0 = 0,125mm$

Calcular:

1. Matrix de rigidez Q para $\theta \in [0, 180]$
2. Invariantes de tensión
3. Constantes cuasi-isotrópicas
4. Constantes de ingeniería para $\theta \in [0, 180]$

Capítulo 3

Mecánica de laminados

Índice

3.1. Introducción

3.1.1. Codificación de laminados

3.1.2. Homogeneización de Laminados

3.2. Ecuaciones de gobierno en tensión plana

3.2.1. Deformación plana en laminados

3.2.2. Métodos de integración de la matriz de rigidez

3.2.3. Matrices de rigidez y flexibilidad normalizadas

3.2.4. Constantes de ingeniería del laminado

3.2.5. Ejemplo práctico

3.1. Introducción

A diferencia de otros materiales de ingeniería, el material compuesto en su forma laminada se diseña *ad-hoc* para cada aplicación específica. El número láminas y la dirección de las fibras en las mismas determinan las propiedades elásticas del laminado y su resistencia. En este capítulo se proporciona la metodología para obtener la matriz de rigidez (y, por tanto, de flexibilidad) de un laminado completo a partir de las matrices de rigidez de una lámina. Antes de ello, se expone un método habitual de identificación o *codificación* de laminados, y algunas notas sobre diseño.

3.1.1. Codificación de laminados

Un laminado es normalmente identificado mediante la especificación de la orientación de sus láminas unidireccionales según una cierta secuencia de apilamiento. Existen típicamente tres modos distintos de codificación, denominados *laminado total*, *laminado simétrico* y *porcentual*. El primero de ellos especifica la secuencia de láminas del laminado completo, normalmente de arriba a abajo. Ejemplo: $[0/90_2/45/ - 45_2/45/90_2/0]_T$. Si la distribución de láminas y su orientación es simétrica respecto al plano medio del laminado, la codificación usada es la de laminado simétrico, que especifica la secuencia hasta el eje de simetría, también de arriba a abajo. Un ejemplo sería $[0/90_2/45/ - 45]_S$. Rara vez se utiliza la codificación porcentual, en la que primero se especifican las direcciones de las láminas y seguidamente se proporciona información del porcentaje de las mismas que ocupa la sección. Ejemplo: $0, \pm 45, 90$: $[20/40/40]$. Nótese cómo se usan los sub-índices T y S para indicar que se trata de una codificación de laminado total o laminado simétrico, respectivamente.

3.1.2. Homogeneización de Laminados

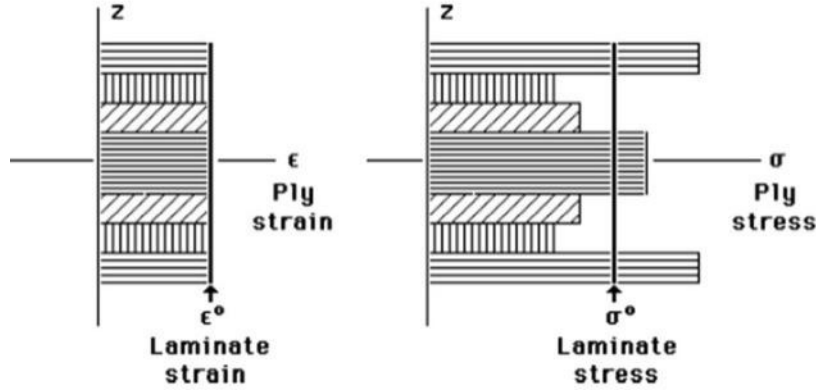
La resistencia y la tolerancia al daño de un laminado aumentan cuando sus láminas están distribuidas siguiendo unos patrones específicos. Concretamente, utilizando patrones repetitivos de apilamiento mediante sub-laminados y evitando utilizar más de 4 familias de ángulos. Esto se conoce tradicionalmente como *homogeneización*. Un ejemplo de laminado homogeneizado es el siguiente: $[0/90]_{rS}$ $r = 10$, donde el laminado simétrico se consigue repitiendo 10 veces el sub-laminado $[0/90]$.

3.2. Ecuaciones de gobierno en tensión plana

3.2.1. Deformación plana en laminados

Dado un laminado simétrico, asumiendo las hipótesis (1) de placa delgada ($h \ll a, b$; donde h = espesor, a = longitud, b = anchura), y (2) de deformación ϵ del laminado constante a través del espesor h , y por tanto igual para todas las láminas o piletas, la ecuación de gobierno se obtiene mediante el siguiente equilibrio de fuerzas:

$$N_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i(z) dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z) \cdot \epsilon dz = \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z) dz}_{A_{ij}} \cdot \epsilon \quad (3.1)$$



donde, N_i y σ_i es la fuerza y la tensión en la i -ésima lámina, respectivamente, y $Q_{ij}(z)$ es el elemento (i, j) de la matriz de rigidez de la lámina a la altura z . Es claro que la dificultad en la ecuación anterior reside en obtener la integral de dicha matriz de rigidez. Existen varios métodos, que se exponen a continuación.

3.2.2. Métodos de integración de la matriz de rigidez

En vista de la ecuación anterior, la ecuación de gobierno requiere la resolución de la siguiente integral $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z) dz$, que puede obtenerse numéricamente como:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}(z) dz = \sum_k Q_{ij}^{(k)} \Delta h^{(k)} \quad (3.2)$$

donde $\Delta h^{(k)}$ es el espesor de cada grupo de láminas o sub-laminado.

Se usan típicamente dos métodos para computar la Ecuación (3.2):

- Método de la “caja registradora”:

Conocido el espesor h_0 del ply y asumiendo que todos los piles tienen el mismo espesor, se tiene que:

$$A_{ij} = \sum_k Q_{ij}^{(k)} \Delta h^{(k)} = \sum_k \underbrace{Q_{ij}^{(k)} h_0}_{A_{ij}^0} n^{(k)} \quad (3.3)$$

- “Regla de las mezclas”:

Útil cuando la matriz de rigidez A_{ij} se usa en formato normalizado $A_{ij}^* = \frac{1}{h} A_{ij} \implies$

$$A_{ij}^* = \sum_k Q_{ij}^{(k)} \Delta h^{(k)} \frac{1}{h} = \sum_k Q_{ij}^{(k)} \alpha^{(k)} \quad (3.4)$$

donde $\alpha^{(k)}$ es la proporción de plies en la dirección k .

3.2.3. Matrices de rigidez y flexibilidad normalizadas

Dividiendo A_{ij} por el espesor total del laminado se obtiene la matriz A_{ij}^* normalizada. A partir de ella, se puede pasar de deformaciones a tensiones medias (en el plano medio del laminado) y viceversa, es decir:

$$\begin{aligned}\sigma_i^0 &= \frac{1}{h} A_{ij} \epsilon_j^0 = A_{ij}^* \epsilon_j^0 \\ \epsilon_i^0 &= a_{ij}^* \sigma_j^0\end{aligned}\quad (3.5)$$

donde a_{ij}^* es la matriz de flexibilidad normalizada: $[a^*] = [A^*]^{-1}$. Al ser normalizadas son independientes del espesor del laminado, por tanto tienen las mismas unidades que las matrices de lámina $[Q]$ y $[S]$, y por tanto pueden ser útiles para comparar entre distintas configuraciones de laminados.

3.2.4. Constantes de ingeniería del laminado

A partir de la matriz de flexibilidad normalizada $[a^*]$ se pueden obtener las propiedades mecánicas “medias” del laminado, entendidas como aquellas que aplicadas en el plano medio del laminado producen un campo de deformaciones ϵ . Se obtienen mediante las siguientes expresiones.

$$\begin{aligned}E_1^0 &= \frac{1}{a_{11}^*} & E_2^0 &= \frac{1}{a_{22}^*} & G_{12}^0 &= \frac{1}{a_{66}^*} \\ \nu_{21}^0 &= -\frac{a_{21}}{a_{11}} & \nu_{12}^0 &= -\frac{a_{12}}{a_{22}} & \nu_{61}^0 &= \frac{a_{61}}{a_{11}} \\ \nu_{16}^0 &= \frac{a_{16}}{a_{66}} & \nu_{62}^0 &= \frac{a_{62}}{a_{22}} & \nu_{26}^0 &= \frac{a_{26}}{a_{66}}\end{aligned}\quad (3.6)$$

En resumen, el cálculo de un laminado requiere calcular las tensiones medias $\sigma_{\{1,2,3\}}^0$ a partir de las fuerzas $N_{\{1,2,3\}}$ y repetir lámina por lámina (o sub-laminado) lo siguiente:

1. Transformar deformaciones medias $\epsilon_{\{1,2,3\}}^0$ en los ejes del laminado en deformaciones en los ejes de cada ply o sublaminado $\epsilon_{\{x,y,z\}}^0$.
2. Pasar de deformaciones “on-axis” $\epsilon_{\{x,y,s\}}$ en tensiones “on-axis” $\sigma_{\{x,y,s\}}$
3. Transformar las tensiones “on-axis” $\sigma_{\{x,y,s\}}$ en tensiones “off-axis”, en los ejes del laminado $\sigma_{\{1,2,3\}}$

3.2.5. Ejemplo práctico

Calcular las matrices de rigidez $[A]$ y $[A^*]$ para un laminado T300/N5208 $[0/90/45_2]_s$.

Datos: $h_0 = 0,125mm$			
$[A^0]$	0	90	± 45
11	22.73	1.29	7.08
22	1.29	22.73	7.08
12	0.36	0.36	5.29
66	0.90	0.90	5.82
16	0	0.00	± 5.36

Se resuelve por el método de la caja registradora, como sigue:

$$n = (1 + 1 + 2) \times 2 = 8; \quad h = n \times h_0 = 0,001m.$$

$$A_{11} = 2 \times (22,73 + 1,29 + 2 \times 7,08) = 76,36MN/m$$

$$A_{22} = 2 \times (1,29 + 22,73 + 2 \times 7,08) = 76,36MN/m$$

$$A_{12} = 2 \times (0,36 + 0,36 + 2 \times 5,29) = 22,6MN/m$$

$$A_{16} = 2 \times (0 + 0 + 5,36 - ,36) = 0MN/m$$

$$A_{66} = 2 \times (0,90 + 0,90 + 2 \times 5,82) = 26,88MN/m$$

$$A_{11}^* = \frac{1}{h} \times A_{11} = 1000 \times A_{11} = 76,36GPa$$

$$A_{22}^* = 1000 \times A_{22} = 76,36GPa$$

$$A_{12}^* = 1000 \times A_{12} = 22,6GP$$

$$A_{16}^* = 1000 \times A_{16} = 0GPa$$

$$A_{66}^* = 1000 \times A_{66} = 26,88GPa$$

