Universidad de Granada
Facultad de Ciencias

COHOMOLOGIA DE ALGEBRAS

ANTONIO RODRIGUEZ GARZON

DEPARTAMENTO DE ALGEBRA Y FUNDAMENTOS

Universidad de Granada - 1981

Tesis doctoral dirigida por el Prof. Dr. Antonio Martinez Cegarra que fue leida el 17 de diciembre de 1981 ante el tribunal formado por los profesores: Sancho Sanroman, Esteban Carrasco, Vicente Córdoba Recio Muñiz y Miranda Palacios obteniendo la calificación de sobresaliente "cum laude".

R = 25.147

COHOMOLOGIA DE ALGEBRAS

por

ANTONIO RODRIGUEZ GARZON

Memoria realizada en el Departamento de Algebra y Fundamentos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada , bajo la dirección del Prof. Dr. Antonio Martinez Cegarra , para obtener el Grado de Doctor en Ciencias , Seccion de Matemáticas por la Universidad de Granada .

Vº Bº
El Ponente

L. Esteban

Dr. Luis Esteban Carrasco

Vº Bº
El Director

Aspirante al grado de Doctor en Ciencias

Antonio Rodriguez Garzón

ANTONIO RODRIGUEZ GARZON

COHOMOLOGIA DE ALGEBRAS

Departamento de Algebra y Fundamentos

Facultad de Ciencias

Universidad de Granada

Memoria realizada para optar al grado de Doctor en Ciencias , Sección de Matemáticas , realizada bajo la dirección del profesor Dr. A. Martinez Cegarra.

a Mª José

INDICE

INTRODUCCION

Los ya clásicos ejemplos de Grupos , Algebras asociativas y Algebras de Lie pusieron de manifiesto , desde la introducción en los años cuarenta de los grupos de (co)-homología de Eilenberg-MacLane , Hochschild y Chevalley-Eilenberg respectivamente , la incontestable utilidad de asignar a una estructura algebraica una conveniente buena noción de grupos de (co)homología. Esto supuso la formalización de la teoria de extensiones de grupos de Schreier , Baer y Fitting asi como la visualización de como esta teoria se podía desarrollar en términos análogos en otros ejemplos algebraicos como el caso de Algebras asociativas y Algebras de Lie . El posterior desarrollo de estas teorias de cohomología , ya con entidad propia y desvinculadas de sus orígenes topológicos , ha mostrado su eficacia para la obtención de numerosos hechos concernientes a las propias teorias de grupos o álgebras , teniendo además incidencia en otras areas del Algebra (piénsese por ejemplo en las aplicaciones de la cohomología de Eilenberg-MacLane a la teoria de clases de cuerpos) .

En el año 1956 , MacLane construye una teoria de cohomología para un anillo en la que se vuelven a dar los tópicos generales que se daban en las cohomologias antes citadas : sucesiones exactas largas, clasificación de extensiones singulares, tratamiento de la teoria de obstrucción a extensiones de anillos , constituir invarianza frente a resoluciones ajustadas a la categoria de anillos , etc. En 1961 Gray pone de manifiesto la aplicación de resultados obtenidos con esta cohomologia al estudio de haces de anillos. Shukla (1961) extiende esta cohomología para anillos (Z-álgebras) al caso de álgebras sobre un anillo conmutativo y unitario arbitrario cuyas propiedades resultan mas refinadas que las de la cohomología de Hochschild , básicamente debido al hecho de que esta última solo funciona convenientemente sobre álgebras que son proyectivas como módulos sobre el anillo base, esto es , las extensiones han de ser sistematicamente linealmente escindidas.

A partir de estos ejemplos , la amplia labor de investigación desarrollada durante las dos últimas decadas en orden a introducir apropiadas teorias de cohomología para diversos tipos de sistemas algebraicos y su utilización para el estudio de ellos hay que juzgarla hoy dia bajo un principio esencial que se nos muestra decisorio sobre la idoneidad de una teoria de cohomología y que exponemos seguidamente . Si $\underline{V}$ es una variedad de álgebras universales , esto es , los objetos de $\underline{V}$ son conjuntos con operaciones algebraicas sujetos a condiciones ecuacionales (Grupos , Anillos ,Algebras de Jordan , Lie , ...) el criterio de tripleabilidad de Beck, [77], pone de manifiesto que la adjunción

$$\begin{tikzcd} \text{Conjuntos} \arrow[d, shift right, "F"'] \\ \underline{V} \arrow[u, shift right, "U"'] \end{tikzcd}$$

donde U es el funtor de olvido y F el funtor $\underline{V}$-álgebra libre , es tripleable y consecuentemente $\underline{V}$ está caracterizada como la categoría de $\mathbf{T}$-álgebras para $\mathbf{T}$ el triple en conjuntos inducido por la adjunción $F \dashv U$. En particular , esto nos asegura que el funtor F caracteriza a $\underline{V}$ (U está determinado salvo equivalencia por ser adjunto a la derecha de F) , en otras palabras , las $\underline{V}$-álgebras libres caracterizan a $\underline{V}$. Esto nos lleva a sentar el principio que ha de verificar una teoria de cohomología en $\underline{V}$ para poder considerarla oportuna " La teoria de cohomología debe ser dada exclusivamente en función de las $\underline{V}$-álgebras libres ".

Hemos de resaltar sin embargo que este criterio no se ha tenido como referencia en el desarrollo del Algebra Homologica sustituyéndose en muchos casos por la referncia a los tópicos que las cohomologias clásicas de Eilenberg-MacLane , Hochschild o Chevalley-Eilenberg verificaban . Es asi que autores como Glassman en 1970 , [38] , Seibt en 1975 , [92], o Gerstenhaber , [35] , introducen grupos de cohomología para un álgebra que ciertamente pudieran parecer oportunos en función de las propiedades que verifican y que sin embargo , basta afinar un poco para observar que , salvo en aquellos casos en que se da una peculiar propiedad , el equilibrio en el sentido que mas adelante comentaremos, éstas se muestran inconsistentes.

El principio a que nos hemos referido ha estado , por otra parte , latente entre los algebristas de la última década que se han ocupado del tema. Asi autores como Andre, [2] , o Quillen , fundamentalmente al estudiar la variedad de álgebras asociativas conmutativas y unitarias , la necesidad de sustituir los métodos unificadores de Cartan-Eilenberg, [17], que se basan exclusivamente en la teoria de funtores derivados entre categorías de módulos por métodos simpliciales que se apoyen en resoluciones intrínsecas a la categoría de tales álgebras ; Stammbach, [99] , y Leedham-Green , [68] , ponen de manifiesto como es necesario introducir "de otra forma " grupos de cohomología para variedades de grupos ; y básicamente Rinehart, [88] , y Barr-Beck , [13] , que movidos por el deseo de introducir teorias de cohomología generales que sean oportunas a la vista de todos los ejemplos anteriores , en el sentido de que sean ejemplos de su teoria , consiguen desarrollar una técnica general de definir grupos de cohomología que se van a mostrar fieles al principio antes referido y donde todos los tópicos usuales se tendrán por añadidura.

Situados en el contexto de una variedad de álgebras $\underline{V}$ sobre un anillo conmutativo y unitario R el diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{array}{c} \text{Conjuntos} \\ \downarrow\uparrow \\ R^{M} \\ \downarrow\uparrow \\ \underline{V} \end{array}$$

determina en $\underline{V}$ dos modelos de objetos , las $\underline{V}$ álgebras proyectivas respecto a la clase de todas las sobreyecciones en $\underline{V}$, $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$, y las proyectivas respecto a la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_R}$ de todos los epimorfismos en $\underline{V}$ R-escindentes. Si $\mathbb{G}$ y $\mathbb{G}_R$ son los correspondientes cotriples en $\underline{V}$ estos inducen de forma natural resoluciones simpliciales $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)}}$ -proyectivas sobre cualquier $\underline{V}$-álgebra A y permiten asociarle grupos de cohomología $H^n(A,M)_{(R)}$, $n \geqslant 0$, tomando como coeficientes el funtor derivaciones a cualquier A-módulo M en $\underline{V}$. Estos grupos constituyen lo que en esta memoria será llamada la teoria de cohomología del cotriple en $\underline{V}$, absoluta o relativa a R-módulos segun se considere $\mathbb{G}$ o $\mathbb{G}_R$; quede claro sin embargo que estos solo dependen de la clase proyectiva de epimorfismos $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)}}$ y que las resoluciones standar pueden en todo momento sustituirse por otras , es decir cualquier otra teoria general determinaria los mismos grupos $H^n(A,M)$ (véase [13] y [103]) . En el primer capítulo son expuestas las diversas peculiaridades de estos grupos de cohomología (sucesiones exactas , interpretaciones , etc) procediendo unicamente a ofrecer algunas demostraciones que serán ilustrativas y oportunas para el desarrollo del resto del contenido de la memoria. Asimismo los conceptos básicos (módulos en la variedad y álgebras envolventes, derivaciones , diferenciales , derivadas de Fox , etc.) son recordados y expuestos con el mismo criterio.

Los grupos de cohomología del cotriple serán los que se manifiesten idóneos de acuerdo con las consideraciones anteriores. Cabe definir, por otra parte , otras dos teorias de cohomología en cada variedad $\underline{V}$. Extrayendo la definición dada por Barr-Rinehart,[15] ,para ciertos casos particulares , en 1975 Seibt asocia a un $\underline{V}$-álgebra A junto con un A-módulo en $\underline{V}$, M , grupos $\overline{H}^n(A,M)_{(R)}$ definidos mediante los funtores derivados del funtor aditivo entre categorías abelianas $Der(A,-) : A\text{-Mod} \longrightarrow G.\,Ab.$. Esta teoria que establecemos en la memoria bajo el nombre de cohomología equilibrada , debido a la información que conlleva sobre los A-módulos inyectivos en $\underline{V}$, teniéndose de hecho que ésta coincide con la cohomología del cotriple si y solo si la variedad $\underline{V}$ es equilibrada . Esta teoria es conceptual y operativamente muy sencilla , sin embargo, aun teniendo caracteristicas generales usuales (sucesiones exactas largas ,etc) presenta graves inconvenientes ; por un lado la pérdida de información respecto a la variedad de álgebras en cuestión , pues su cálculo se remite exclusivamente a la categoría de A-módulos, y por otro no clasifica todas las extensiones singulares como es puesto de manifiesto en (2.3.4) . Su estudio se nos manifiesta de interes , aparte de las razones históricas , fundamentalmente por la cierta información que esta ofrece sobre la cohomología del cotriple al estar conectadas mediante morfismos naturales que son encontrados en 2.4. y que comentaremos mas adelante . En cualquier caso dejemos claro que esta teoria , como exhaustivamente se pone de manifiesto en la memoria , solo tendrá interés por si misma sobre variedades en las que la cohomología del cotriple se anula en módulos de coeficientes inyectivos. La otra teoria a la que nos referíamos fue inicialmente apuntada por Gerstenhaber en 1964, [35] ,viniéndole sugerida esencialmente por sus trabajos en la teoria de deformación de anillos y álgebras y el problema de clasificación de extensiones siendo posteriormente (1970) estudiada mas exhaustivamente por Glassman, [38] , [39] ; ésta es recogida en la memoria bajo el nombre de Cohomología de Extensiones , sugerido por su propia definición; asi para un $\underline{V}$-álgebra A y un A-módulo M se definen los grupos de cohomología de extensiones $\tilde{H}^n(A,M)_{(R)}$ como los grupos de clases de equivalencia de extensiones que son el producto de Yoneda de extensiones singulares $L \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ por extensiones de A-módulos en $\underline{V}$ $M \rightarrowtail M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{n-1} \twoheadrightarrow L$.

De nuevo , como en el caso anterior , esta teoria presenta sucesiones exactas largas y por su propia definición clasifica extensiones ; sin embargo se hace aun mas patente para esta teoria la pérdida de información sobre la variedad que ahora llega incluso a desligarse de la propia categoría de A-módulos en $\underline{V}$ ($\tilde{H}^1$ no tiene porque anularse en módulos de coeficientes inyectivos). Las relaciones de estos grupos de cohomologia con los grupos de cohomología equilibrada , y bajo condiciones de equilibrio con la cohomología del cotriple , además de las razones históricas antes mencionadas sugieren la conveniencia de su estudio. Las propiedades generales de estos son expuestos en el primer capítulo.

Definiendo una variedad equilibrada como aquella en la que los grupos de cohomología del cotriple $H^n(A,I)$ se anulan en dimensiones positivas para cualquier A-módulo inyectivo I (relativamente equilibrada si se consideran los grupos de cohomología relativos) y movidos por el deseo de buscar condiciones bajo las cuales las tres teorias de cohomología coincidan , nos encontramos precisamente con el problema de la búsqueda de condiciones que caractericen a dichas vriedades equilibradas , pues como se observa en (2.4.12) la condición de equilibrio es necesaria y suficiente para tal fin .

El concepto de equilibrio fue introducido inicialmente para variedades de grupos por Leedham-Green y Mckay en 1976, [70] , resaltando dichos autores en tal trabajo la importancia de atacar el problema de caracterizar a las variedades de álgebras universales equilibradas, siendo en 1980 cuando Cegarra [18] da un primer tratamiento riguroso a la cuestión de equilibrio en el contexto de ciertas variedades de Ω-grupos si bien el tema es tratado como material auxiliar para otros fines. Hay que hacer notar sin embargo que ya en 1964 Gerstenhaber, [35] , intuyendo que la condición de anulación en módulos inyectivos era esencial para la consistencia de la teoria por él desarrollada llega a conjeturar que asi ocurre en varios tipos de variedades de álgebras a los que haremos referencia al comentar el tercer capítulo.

En una variedad de álgebras $\underline{V}$ la condición de equilibrio nos aparece estrechamente ligada a las propiedades de exactitud del correspondiente funtor de diferenciales , D ; esta conexión es estudiada y puesta de manifiesto a lo largo del apartado 2.1. . Asi , por ejemplo , se prueba que , para cada $n \geq 1$, la anulación del n-esimo grupo de cohomologia del cotriple de un $\underline{V}$-álgebra A al tomar coeficientes en módulos inyectivos es equivalente a que el correspondiente n-ésimo grupo de homología del funtor D_A sea cero , (2.1.3) ; recogiendo el concepto de funtor aditivo de Rinehart, [88] , para un funtor con rango una categoria abeliana y estableciendo una generalización local del hecho probado en [88] pag.319 donde se ofrece un criterio global para funtores preservando productos fibrados, logramos probar que " Son equivalentes : i) $H_1(A,D_A)=0$ ii) D_A es acíclico en A iii) $H_n(A,D_A)=0$ $n \geq 1$ " , (2.1.14) , que combinando con el hecho anterior nos permite concluir que a su vez esas tres condiciones son equivalentes a iv) $H^1(A.I)=0$ si I es un A-módulo inyectivo en $\underline{V}$ y v) $\underline{V}$ es equilibrada en A .

Estos hechos constituyen la base fundamental para el estudio que a continuación se lleva a cabo en 2.2. en orden a la obtención de criterios de equilibrio. La observación de ejemplos como grupos y álgebras asociativas o de Lie sobre un cuerpo nos muestra la característica común de existir asociada a una sucesion exacta corta $L \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ una sucesión exacta corta de A-módulos , en el correspondiente sentido , $L_{ab} \rightarrowtail A^e \otimes_{B^e} IB \twoheadrightarrow IA$ (donde A^e y B^e denotan las correspondientes álgebras envolventes) , en tanto que en otros ejemplos como álgebras asociativas conmutativas se tiene tambien una sucesión análoga pero no siendo el morfismo de la izquierda inyectivo . Todo esto , unido al hecho probado en [19] de que en condiciones de equilibrio siempre se da la correspondiente sucesión exacta corta (la sucesión de tres términos) , nos sugirió la posibilidad de que la existencia de tal sucesión fuese factor determinante de la condición de equilibrio . Las investigaciones para esta conjetura han sido totalmente fructíferas , asi se concluye en el teorema (2.2.4) que una variedad de álgebras $\underline{V}$ es equilibrada si y solo si se da la sucesión de tres términos . Como se pone de manifiesto a lo largo del capítulo tercero este criterio es sumamente práctico pudiéndose utilizar con relativa facilidad para decidir el equilibrio o no de una variedad. Otros criterios , como el concerniente al comportamiento de los grupos de homología sobre módulos de coeficientes proyectivos , son tambien expuestos (véase (2.2.9)) . Una muestra de la utilidad de estos resultados la ofrecemos dentro del propio apartado 2.2. al preocuparnos de la influencia que pueda tener , para una situación $\underline{W} \subseteq \underline{V}$, el hecho de que $\underline{V}$ sea equilibrada para que tambien lo sea $\underline{W}$.

Como apuntabamos anteriormente la cohomología equilibrada se nos va a manifestar de interés en orden a extraer consecuencias sobre la cohomología del cotriple y a posteriori sobre el equilibrio de la variedad que se trate. Mas concretamente, definiendo en una variedad $\underline{V}$ una "extensión singular equilibrada" como aquella que induce la sucesión de tres términos, éstas constituyen un subgrupo del grupo de todas las extensiones singulares y éste es precisamente el clasificado por el primer grupo de cohomología equilibrada $\bar{H}^1$, (2.3.4), que a posteriori aparece asi como un subgrupo de H^1. Resulta asi que $\bar{H}$ será una "buena" teoria de cohomología si y solo si $\bar{H}^1 = H^1$ lo cual a su vez es equivalente a que la variedad sea equilibrada en cuyo caso $H = \bar{H}$. Se obtienen además respuestas a cuestiones naturales ; por ejemplo , si $\underline{V}$ no es equilibrada hay extensiones singulares con nucleo inyectivo no nulas ¿ cuales son éstas ? Utilizando los hechos antericres podemos contestar : Las que no inducen la sucesión de tres términos , (2.3.5) . Tambien se deducen algunos criterios de equilibrio , por ejemplo : basta que toda extensión singular con nucleo inyectivo induzca la sucesión de tres términos , (2.3.8).

La existencia de morfismos de conexión entre las distintas teorias de cohomología que manejamos en una variedad $\underline{V}$ es el objeto del apartado 2.4. . En principio se relacionan los grupos del cotriple absolutos y relativos mediante morfismos $r^n : H^n(A,M)_R \longrightarrow H^n(A,M)$, (2.4.4) , cuya obtención y propiedades recuerdan en todo momento a los morfismos cambio de variedad (véase [18]) existiendo tambien morfismos de este tipo para las otras teorias. Asimismo se encuentran morfismos $t^n : \bar{H}^n(A,M)_{(R)} \longrightarrow H^n(A,M)_{(R)}$ por técnicas homológicas que son isomorfismos bajo condiciones de equilibrio , (2.4.12). La interpretación llevada a cabo en 2.3. para los grupos $\bar{H}^n$ en términos de extensiones equilibradas permite tambien definir morfismos naturales $\rho^n : \bar{H}^n \longrightarrow \tilde{H}^n$

que a su vez serán isomorfismos en condiciones de equilibrio.

Finalizamos los aspectos puramente teóricos de esta memoria con el contenido del apartado 2.5. . En éste mostramos esencialmente como los grupos de cohomología equilibrada pueden ser formalmente obtenidos como grupos de cohomología con coeficientes en el funtor derivaciones respecto a un cierto cotriple $\mathbb{G}'$ en una conveniente subcategoría. Esta es , como sugieren los resultados anteriores , constituida por los epimorfismos que inducen la sucesión de tres términos resultando que esta nueva situación será equivalente a la de partida si y solo si la variedad es equilibrada . Se ve a partir de esto lo inadecuada , en general , que resulta la cohomología equilibrada sobre una variedad que no lo sea.

Encauzada ya la memoria en sus aspectos puramente prácticos hemos de mencionar lo que desde un principio constituyó la referencia hacia la que concretar nuestras investigaciones ; desde 1964 se mantiene vigente la conjetura enunciada por Gerstenhaber en [35] acerca de la anulación en módulos de coeficientes inyectivos de los grupos de cohomología de MacLane de un anillo o mas en general de Shukla para álgebras asociativas sobre un anillo base arbitrario asi como los de Dixmier para el caso de álgebras de Lie. Nuestro objetivo ha sido siempre probar estas conjeturas.

En todos los casos antes mencionados existen propiedades , históricamente bien conocidas , las cuales permiten asegurar que cuando el anillo base es un cuerpo se verifica automaticamente la condición de equilibrio . Ello nos hizo pensar en la posible utilidad de métodos de localización para intentar reducir el problema al menos cuando el anillo base sea un dominio de integridad por paso a su cuerpo de cocientes.

Si S es un subconjunto multiplicativo del anillo base R se observa facilmente que en condiciones muy generales cada $\underline{V}$-álgebra tiene asociado un

$\underline{V}_S$-álgebra $S^{-1}A$ donde $\underline{V}_S$ es la variedad de $S^{-1}R$-álgebras definida por el mismo conjunto de identidades que $\underline{V}$, determinándose asi un funtor $S^{-1}: \underline{V} \longrightarrow \underline{V}_S$. Este funtor presenta la peculiaridad de conmutar con la homología del funtor de diferenciales (véase (3.1.8) y (3.1.10)) obteniéndose a partir de este hecho sutiles consecuencias como las explicitadas en (3.1.11) y (3.1.12) : " Si $\underline{V}$ es equilibrada en A , $\underline{V}_S$ es equilibrada en $S^{-1}A$ " y que nos lleva a concluir que la condición de equilibrio en un álgebra es local como muestra el teorema (3.1.13) : " Si A es un $\underline{V}$-álgebra son equivalentes i) $\underline{V}$ es equilibrada en A ii) $\underline{V}_\pi$ es equilibrada en A_π para cualquier primo π de R iii) $\underline{V}_\mu$ es equilibrada en A_μ para cualquier maximal μ de R " y en el caso de que R sea un dominio de integridad probamos con total generalidad que si una variedad de álgebras sobre un cuerpo es equilibrada entonces la correspondiente variedad sobre el anillo tambien lo es.

Tomando en particular las variedades de álgebras asociativas y de Lie sobre un dominio de integridad podemos contestar afirmativamente a laconjetura de Gerstenhaber (véase (3.2.9) y (3.3.6)) ; mas aún , utilizando el hecho de ser el equilibrio una condición local la respuesta sigue siendo afirmativa para otros muchos casos de anillos base como son los anillos regulares , anillos normales, etc. (véase con mas detalle el desarrollo de los apartados (3.2) y (3.3)).

El apartado 3.4. está dedicado exclusivamente al desarrollo de las tres teorias de cohomología definidas en el primer capítulo al caso de una variedad de la categoría de álgebras con (anti)automorfismo de periodo dos lo cual está justificado , a la vista de todo lo dicho anteriormente, por la necesidad de introducir y estudiar con detalle la teoria de cohomología del cotriple en estas variedades dado que clásicamente solo han sido consideradas las correspondientes cohomologías de extensiones y equilibrada ([38], [44] , [45]) siendo éstas no oportunas salvo en condiciones de equilibrio . Probamos en el caso de la variedad de algebras asociativas con involución o de Lie con automorfismo de periodo dos que si el anillo base es un cuerpo se dan las condiciones de equilibrio y mas en general, si el anillo base se trata de un dominio de integridad , anillo normal , etc . A estas conclusiones se llega tras observar el desplazamiento del problema al caso de algebras asociativas o de Lie. Lo establecido para variedades de algebras asociativas con involución nos permite a lo largo del apartado 3.5. sacar conclusiones acerca del equilibrio en la variedad de álgebras de Jordan. Esta es una variedad no equilibrada siendo en consecuencia la cohomología del cotriple la de mas interés a considerar, sin embargo , se da la condición de equilibrio localmente en ciertas algebras de Jordan como son por ejemplo las álgebras de Jordan de matrices de orden $n \geq 4$, (3.5.6) , sobre las cuales si coincidirán consecuentemente las tres teorias de cohomología.

Queremos manifestar finalmente que algunos ejemplos como por ejemplo el de la variedad de álgebras asociativas conmutativas no ha sido incluido en la exposición de ejemplos al existir una amplia bibliografia sobre ella y concretamente sobre el problema de su equilibrio ; en [16] , [38] , [92] pueden encontrarse extensiones singulares de álgebras asociativas conmutativas con núcleo inyectivo que no son nulas , siendo en consecuencia una variedad no equilibrada.

Como referencia fundamental para la notación y aspectos que se hayan eludido en la exposición de la memoria , [18] , constituye la referencia oportuna.

Quiero expresar por último mi agradecimiento al Prof. Dr. A. Martinez Cegarra por su estímulo y ayuda en todo momento, sin la cual, no hubiera sido posible la realización de esta memoria . El agradecimiento lo hago extensivo a todos los miembros del Departamento de Algebra y Fundamentos de la Universidad de Granada .

CAPITULO 1 . TEORIAS DE COHOMOLOGIA EN VARIEDADES DE ALGEBRAS

1.1. MODULOS , DERIVACIONES Y DIFERENCIALES EN VARIEDADES DE ALGEBRAS .

(1.1.1) Notación y definiciones previas.

Sea R un anillo conmutativo y unitario y denotemos ${}_R M$ a la categoría de módulos sobre el anillo R.

Un álgebra sobre el anillo R , ó un R-álgebra , es un R- módulo A junto con una aplicación bilineal llamada la multiplicación

$$\mu_0 : A x A \longrightarrow A$$

Es claro que dar esta aplicación bilineal es equivalente a dar un morfismo de R- módulos

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A$$

al cual nos seguiremos refiriendo como la multiplicación sobre A .

Un R- álgebra A se dice unitaria si tiene un neutro "e" para la multiplicación, lo cual puede ser expresado en términos de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & \\ A \arrow[ur, "\otimes e"] \arrow[r, "1"'] & A & A \arrow[ul, "e\otimes"'] \arrow[l, "1"] \end{tikzcd}$$

donde: $\otimes e : a \longrightarrow a\otimes e$ y $e\otimes : a \longrightarrow e\otimes a$

A lo largo de la memoria denotaremos indistintamente por $\underline{C}$ a cualquiera de las categorías :

R - Alg o categoría de R- álgebras

UR- Alg o categoría de R- álgebras unitarias.

(1.1.2) Consideremos el funtor R-módulo libre sobre un conjunto

$$F_2 : \text{Sets} \longrightarrow {}_R M$$

y los funtores de olvido

$$U_2 : {}_R M \longrightarrow \text{Sets}$$

$$U_1 : \underline{C} \longrightarrow {}_R M$$

$$U : \underline{C} \longrightarrow \text{Sets}$$

Puesto que para cualquier variedad de Ω -álgebras (Ω representa el dominio de operadores) , el funtor de olvido a conjuntos es algebraico (véase por ejemplo, [79]), se tendrá para $\underline{C}$ un funtor

$$F : \text{Sets} \longrightarrow \underline{C}$$

cuya construcción explícita puede verse en [83] .

Disponemos pues de la situación

$$\begin{tikzcd}
\text{Sets} \arrow[d, shift right, "F_2"'] \arrow[dd, bend right=60, "F"'] \\
{}_R M \arrow[u, shift right, "U_2"'] \\
\underline{C} \arrow[u, "U_1"'] \arrow[uu, bend right=60, "U"']
\end{tikzcd}$$

donde $F_2 \dashv U_2$ y $F \dashv U$

Consideremos el diagrama conmutativo de funtores

$$\begin{tikzcd}
\underline{C} \arrow[rr, "U_1"] \arrow[dr, "U"'] & & {}_R M \arrow[dl, "U_2"] \\
& \text{Sets} &
\end{tikzcd}$$

El funtor U_2 es algebraico (${}_R M$ es tripleable sobre conjuntos) y la categoría $\underline{C}$ tiene coigualadores (es tripleable sobre conjuntos y por tanto completa y co-completa (véase [79])). Entonces, puesto que U tiene un adjunto a la izquierda U_1 tambien lo tiene ("Sandwich theorem" [79]).

Se tiene pues el diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sets} \arrow[d, shift right, "F_2"'] \arrow[dd, bend right=60, "F"'] \\
{}_R M \arrow[u, shift right, "U_2"'] \arrow[d, shift right, "F_1"'] \\
\underline{C} \arrow[u, shift right, "U_1"'] \arrow[uu, bend right=60, "U"']
\end{tikzcd}$$

(1.1.3) DEFINICION

Dado $A \in \underline{C}$, un A-módulo es un epimorfismo escindido en $\underline{C}$

$$E \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} A \qquad\qquad ps = I$$

con nucleo en R-Alg., M, singular, esto es, con multiplicación trivial.

En esta situación se inducen acciones (independientes de la escisión elegida s) de A en M , a izquierda y derecha por

i) $a.m = s(a).m$

ii) $m.a = m.s(a)$ $\qquad a \in A$; $m \in M$

habiéndolas denotado, y lo seguiremos haciendo cuando ello no se preste a confusión , como el producto en E.

(1.1.4) Un morfismo de A-módulos es un diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & E \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[d, "\bar{\phi}"'] & A \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d, equal] \\
M' \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, shift left, "p'"] & A \arrow[l, shift left, "s'"]
\end{tikzcd}$$

con $\bar{\phi} i = i' \phi$; $p' \bar{\phi} = p$; $\bar{\phi} s = s'$

y puede probarse facilmente que un morfismo de A-módulos es un morfismo de R-álgebras entre los nucleos que conserva las acciones.

Tenemos asi la categoría de A-módulos a la que denotaremos A-Mod.

(1.1.5) Si $A \in \underline{C}$, dados dos A-módulos $M \rightarrowtail E \rightleftarrows A$ y $M \rightarrowtail E' \rightleftarrows A$ tales que las acciones inducidas de A en M respectivamente coincidan, se tiene que $1_M : M \longrightarrow M$ es un isomorfismo de A-módulos y por tanto $E \cong E'$, esto es , E está determinado por A , M y las acciones de A en M.

Denotaremos $E = M \rtimes A$ y le llamaremos "Producto Semidirecto" de A por M , y hablaremos de un A-módulo M suponiendo dado $M \rtimes A$

(1.1.6) Para $A \in \underline{C}$, si consideramos la comacategoría de morfismos a A , $(\underline{C}, A)$, denotaremos $G_a(\underline{C}, A)$ a la categoría de objetos grupo abeliano en $(\underline{C}, A)$ (véase [16]), que es la categoría cuyos objetos son los morfismos $B \longrightarrow A$ tales que el funtor $\mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\;,\; \begin{smallmatrix} B \\ \downarrow \\ A \end{smallmatrix} \right)$ se factorice por la categoría de Grupos Abelianos.

Un morfismo en $G_a(\underline{C}, A)$ es un triángulo conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B' \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

tal que

$$f^*: \mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\;,\; \begin{smallmatrix} B' \\ \downarrow \\ A \end{smallmatrix} \right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\;,\; \begin{smallmatrix} B \\ \downarrow \\ A \end{smallmatrix} \right)$$

sea una transformación natural a grupos abelianos.

(1.1.7) PROPOSICION

Existe una equivalencia natural para cada $A \in \underline{C}$

$$G_a(\underline{C}, A) \cong A\text{-Mod}$$

(Explicitamos a continuación en $\underline{C}$ la demostración de este hecho probado por

Orzech en [84] , en el contexto, introducido por ella, de una "categoría de interés").

Demostración:

Supongamos que $M \xrightarrow{i} M \rtimes A \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} A$ es un A-módulo y veamos que el correspondiente objeto grupo abeliano en $(\underline{C}, A)$ es $M \rtimes A \xrightarrow{p} A$.

Para $B \in \underline{C}$ sean f y f' pertenecientes a $\mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\begin{smallmatrix}B\\ \downarrow t\\ A\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}M\rtimes A\\ \downarrow p\\ A\end{smallmatrix}\right)$ esto es se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "f'"'] \arrow[dr, "t"'] & & M\rtimes A \arrow[dl, "p"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \text{con} \qquad pf = t \qquad \text{y} \qquad pf' = t$$

Definimos la suma en $\mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\begin{smallmatrix}B\\ \downarrow\\ A\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}M\rtimes A\\ \downarrow\\ A\end{smallmatrix}\right)$ por:

$(f+f')(b) = f(b) - st(b) + f'(b) \qquad b \in B$

Se verifica que $f+f'$ es morfismo de R-álgebras. En efecto:

i) $(f+f')(b+b') = f(b+b') - st(b+b') + f'(b+b') =$

$= f(b) + f(b') - st(b) - st(b') + f'(b) + f'(b') =$

$= (f+f')(b) + (f+f')(b')$

ii) $(f+f')(rb) = r(f+f')(b) \qquad r \in R$, de forma evidente.

iii) $(f+f')(bb') = f(bb') - st(bb') + f'(bb') =$

$= f(b)f(b') - st(b)st(b') + f'(b)f'(b')$

Por otro lado se tiene

$[(f+f')(b)][(f+f')(b')] = [f(b) - st(b) + f'(b)][f(b') - st(b') + f'(b')] =$

$= f(b)f(b') + f(b)f'(b') - f(b)st(b') + f'(b)f(b') + f'(b)f'(b') -$

$- f'(b)st(b') - st(b)f(b') - st(b)f'(b') + st(b)st(b')$

de modo que se trata de probar la igualdad siguiente

$f(b)f'(b') - f(b)st(b') + f'(b)f(b') - f'(b)st(b') - st(b)f(b') -$

$- st(b)f'(b') + st(b)st(b') = - st(b)st(b')$

Ahora bien , $f(b)$ será de la forma $f(b) = m_1 + spf(b) = m_1 + st(b)$ y análogamente :

$f(b') = m_1' + st(b') \quad ; \quad f'(b) = m_2 + st(b) \quad ; \quad f'(b') = m_2' + st(b')$

por lo que se tiene:

$$f(b)f'(b')-f(b)st(b')+f'(b)f(b')-f(b)st(b')-st(b)f(b')-$$
$$-st(b)f'(b')+st(b)st(b')=m_1\,st(b')+st(b)m'_2+st(b)\,st(b')-$$
$$-m_1\,st(b')-st(b)\,st(b')+m_2\,st(b')+s\,t(b)m'_1+st(b)\,st(b')-$$
$$-m_2\,st(b')-st(b)\,st(b')-st(b)m'_1-st(b)\,st(b')-st(b)\,m'_2-$$
$$-st(b)\,st(b')+st(b)\,st(b')=-st(b)st(b')$$

Además es claro que $f+f'$ es morfismo de álgebras unitarias si f y f' lo son, de modo que $f+f'$ es un morfismo en $\underline{C}$.

El cero de este grupo es st ya que

$$(f+st)(b)=f(b)-st(b)+st(b)=f(b)$$

Veamos por último que el inverso de f es $\bar{f}$ definido $\bar{f}(b)=-\xi f(b)+st(b)$ donde $\xi : M\nabla A \longrightarrow A$ tal que $\xi(m+s(a))=m$ es un morfismo de R-módulos como puede comprobarse fácilmente. (Obsérvese que hemos utilizado el el hecho de que en $M\nabla A$ todo elemento se expresa de forma única $m+s(a)$ con $m\in M$ y $a\in A$).

En efecto, si $f(b)=m_1+st(b)$ y $f(b')=m'_1+st(b')$ es fácil probar que ξ verifica $\xi(f(b)f(b'))=m_1\,st(b')+st(b)m'_1$ y como consecuencia $\bar{f}$ es morfismo de álgebras. Es claro de nuevo que $\bar{f}$ es morfismo en $\underline{C}$ al serlo f. ($\bar{f}(1)=-\xi f(1)+st(1)=-\xi(0+1)+1=1$)

Además expresando $f(b)=m+st(b)$ se tiene

$$(f+\bar{f})(b)=f(b)-st(b)+\bar{f}(b)=f(b)-st(b)-\xi f(b)+st(b)=f(b)-\xi f(b)=$$
$$=m+st(b)-m=st(b)$$

Recíprocamente, supongamos ahora que $p:B \longrightarrow A \in (\underline{C},A)$ es un objeto grupo abeliano.

Existirá entonces un morfismo cero en el grupo $\mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\begin{smallmatrix}A\\ \parallel\\ A\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix}B\\ \downarrow\\ A\end{smallmatrix}\right)$ al que denotamos $s:A \longrightarrow B$ y que verificará $ps=I_A$

Si M es el nucleo en R-Alg. de $p : B \longrightarrow A$ se tiene el diagrama (sucesión exacta corta escindida por la derecha en R-Alg.)

$$M \overset{i}{\rightarrowtail} B \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} A$$

Probemos que M es singular.

Puesto que $p : B \longrightarrow A$ es un objeto grupo abeliano en $(\underline{C}, A)$ se tendrá un morfismo

$$\begin{tikzcd} B \times_A B \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr] & B \arrow[d, "p"] \\ & A \end{tikzcd}$$

(véase por ejemplo [77]) , verificando:

$$\mu(\mu, I_B) = \mu(I_B, \mu) \;;\quad \mu(I_B, sp) = I_B \;;\quad I_B(sp, I_B) = \mu$$

donde sp es el morfismo cero en $\mathrm{Hom}_{(\underline{C}, A)}\left(\begin{smallmatrix} B \\ \downarrow p \\ A \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} B \\ \downarrow p \\ A \end{smallmatrix}\right)$.

Si $g : B \longrightarrow B \times_A B$ es el único morfismo inducido por el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, "I_B"] \arrow[ddr, "sp"'] & & \\ & B \times_A B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ & B \arrow[r] & A \end{tikzcd} \qquad g = (I_B, sp)$$

será $g(m + s(a)) = (m + s(a), s(a))$ y $\mu g = I_B$ y entonces

$\mu g(m + s(a)) = \mu(m + s(a), s(a)) = m + s(a)$

$\mu g(m + s(a)) = \mu(sp, I_B)(m + s(a)) = \mu(s(a), m + s(a)) = m + s(a)$

de forma que:

$$m_1 m_2 = \mu(m_1 m_2, 0) = \mu[(m_1, 0)(m_2, 0)] = \mu(m_1, 0)\mu(m_2, 0) =$$
$$= \mu(m_1, 0)\mu(0, m_2) = \mu[(m_1, 0)(0, m_2)] = \mu(0, 0) = 0$$

Es claro por último, que ambas construcciones son inversas una de la otra asi como la naturalidad de la biyección establecida.

(1.1.8) Sea $A \in \underline{C}$ y denotemos A_0 al R-módulo subyacente, esto es $A_0 = U_1(A)$ (véase (1.1.1)).

Considerando el R-módulo $\overset{*}{A} = A_0 \oplus A_0$, sea $T(A)$ el álgebra tensorial sobre el R-módulo A^*, esto es, $T(A) = R \oplus \sum_{n \geq 1} \otimes_R^n A^*$

Destaquemos que el álgebra (asociativa y unitaria) $T(A)$ es el R-álgebra universal para homomorfismos de R-módulos de A^* en R-álgebras asociativas y unitarias.

(1.1.9) PROPOSICION

Sea M un R-módulo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes para $A \in \underline{C}$.

i) M es un A-módulo.

ii) Existen acciones R-bilineales am y ma de A en M y $M \oplus A_0$ con el producto

$$(m, a)(m', a') = (ma' + am', aa')$$

es un objeto de $\underline{C}$ al que denotamos $M x_0 A$

iii) Existen acciones R-bilineales am y ma de A en M.

Demostración:

i)$\Rightarrow$ii) Si M es un A-módulo se tiene $M \xrightarrow{i} M \natural A \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} A$ y entonces se inducen acciones de A en M según (1.1.3)

$$am = s(a)m \quad ; \quad ma = ms(a)$$

Dichas acciones son R-bilineales. En efecto:

$$(a_1 + a_2)m = s(a_1 + a_2)m = [s(a_1) + s(a_2)]m = s(a_1)m + s(a_2)m = a_1 m + a_2 m$$
$$a(m_1 + m_2) = s(a)(m_1 + m_2) = s(a)m_1 + s(a)m_2 = am_1 + am_2$$

$$(ra)m = s(ra)m = (rs(a))m = r(s(a)m) = r(am) = r(s(a)m) =$$
$$= s(a)(rm) = a(rm)$$

Análogamente para ma.

Veamos que $M \oplus A_0$ es un R-álgebra con el producto anteriormente definido:

$$[(m_1, a_1) + (m_2, a_2)](m, a) = (m_1 + m_2, a_1 + a_2)(m, a) =$$

$= (m_1 a + m_2 a + a_1 m + a_2 m \, , \, a_1 a + a_2 a) = (m_1 a + a_1 m \, , \, a_1 a) + (m_2 a + a_2 m \, , \, a_2 a) =$
$= (m_1 \, , \, a_1)(m \, , \, a) + (m_2 \, , \, a_2)(m \, , \, a)$

Análogamente la distributividad por la izquierda.

En cuanto a la seudoasociatividad tenemos

$$r[(m_1 , a_1)(m_2 , a_2)] = r(m_1 a_2 + a_1 m_2 , a_1 a_2) = (r(m_1 a_2) + r(a_1 m_2) , r(a_1 a_2)) =$$
$$= ((r m_1) a_2 + (r a_1) m_2 , (r a_1) a_2) = (r m_1 , r a_1)(m_2 , a_2) =$$
$$= [r(m_1 , a_1)](m_2 , a_2)$$

Análogamente se demuestra $r[(m_1 , a_1)(m_2 , a_2)] = (m_1 , a_1)[r(m_2 , a_2)]$

Además $M \times_0 A$ es un R-algebra unitaria caso de que A lo sea con unidad el par $(0 , 1)$.

ii) $\Rightarrow$ i) De forma trivial.

iii) $\Rightarrow$ i) Supongamos dadas acciones R-bilineales am y ma de A en M.

Definimos $M \xrightarrow{i} M \times_0 A \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} A$ por:

$$i(m) = (m , 0) \quad ; \quad p(m , a) = a \quad ; \quad s(a) = (0 , a)$$

que son claramente morfismos de R-módulos

Además son morfismos de R-álgebras ya que

$i(m m') = i(0) = (0 , 0) = i(m) \, i(m')$

$p[(m , a)(m' , a')] = p(m a' + a m' , a a') = a a' = p(m , a) \, p(m' , a')$

$s(a a') = (0 , a a') = (0 , a)(0 , a') = s(a) \, s(a')$

(nótese que p y s son morfismos de R-álgebras unitarias caso de que A lo sea)

Vemos por último que las acciones que se inducen de A en M son precisamente las dadas, pues denotándolas por "o" tenemos

$a o m = s(a) m = (0 , a)(m , 0) = (a m , 0) = i(a m)$

$m o a = m \, s(a) = (m , 0)(0 , a) = (m a , 0) = i(m a)$

Concluimos así que M es un A-módulo.

(1.1.10) PROPOSICION

Para cada $A \in \underline{C}$ existe una equivalencia natural

$$A\text{-Mod} = {}_{T(A)}\text{Mod}$$

(${}_{T(A)}\text{Mod}$ denota la categoría de módulos por la izquierda en el sentido usual sobre $T(A)$ (1.1.8)).

Demostración:

Si M es un A-módulo , por (1.1.9) esto es equivalente a tener morfismos R-bilineales de A en M y esto por la propiedad universal del coproducto A^* es equivalente a tener un morfismo de R-módulos

$$A^* \longrightarrow \text{End}_R M$$

La universalidad de $T(A)$ para R-homomorfismos de A^* en R-álgebras (asociativas y unitarias) implica la existencia de un único morfismo de $T(A)$ en $\text{End}_R M$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A^* \arrow[r] \arrow[dr] & T(A) \arrow[d, dotted] \\ & \text{End}_R M \end{tikzcd}$$

el cual convierte a M en un $T(A)$-módulo por la izquierda.

(1.1.11) DERIVACIONES

Si $A \in \underline{C}$ y M es un A-módulo , una derivación de A en M es un morfismo de R-módulos $\quad d : A \longrightarrow M \quad$ tal que

$$d(aa') = a\,d(a') + d(a)a' \qquad a, a' \in A$$

Nótese que si A es unitaria se tiene que $d(1) = 0$

Si denotamos $\text{Der}(A, M)$ al conjunto de las derivaciones de A en el A-módulo M y definimos en él la suma

$$(d+d')(a) = d(a)+d'(a) \qquad d, d' \in \text{Der}(A, M)\ ;\ a \in A$$

se comprueba fácilmente que $\text{Der}(A, M)$ adquiere estructura de grupo abeliano.

Si $B_1 \xrightarrow{f} A \in (\underline{C}, A)$ y M es un A-módulo , dada una derivación $d: B_1 \longrightarrow M$, donde M es un B_1-módulo vía f , y cualquier morfismo en la comacategoría $(\underline{C}, A)$

$$\begin{tikzcd} B_2 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & B_1 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

se verifica que $dh: B_2 \longrightarrow M$ es una derivación.

Se tiene así, para un A-módulo M el funtor

$$\mathrm{Der}(\ \ ,M): (\underline{C}, A)^{o} \longrightarrow \mathrm{Gr.\ Abel.}$$

(1.1.12) Si M es un A-módulo , esto es , se tiene $M \rightarrowtail M \veebar A \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} A$, en $M \veebar A$ todo elemento se expresa de forma única $m + s(a)$ $m \in M$, $a \in A$

Considerando la aplicación $\xi : M \veebar A \longrightarrow A$ definida por $\xi(m + s(a)) = m$ es fácil probar que ξ es una derivación de $M \veebar A$ en M , donde M es un $M \veebar A$--módulo vía la proyección $M \veebar A \xrightarrow{p} A$

(1.1.13) PROPOSICION

Para cada $A \in \underline{C}$ y un A-módulo M existe una biyección

$$\mathrm{Der}(A, M) \cong \mathrm{Hom}_{(\underline{C}, A)}\left(\begin{array}{c} A \\ \| \\ A \end{array} , \begin{array}{c} M \veebar A \\ \downarrow \\ A \end{array} \right)$$

Demostración:

Dado
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, equal] & & M \veebar A \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$
un morfismo en $(\underline{C}, A)$,

definimos $d_f : A \longrightarrow M$ por $d_f = \xi d$ donde ξ es la derivación definida en (1.1.12) . Se tiene entonces que d_f es una derivación al serlo ξ

Recíprocamente , si $d: A \longrightarrow M$ es una derivación , sea f_d el morfismo de R-módulos de A en $M \veebar A$ definido por $f_d(a) = d(a) + s(a)$ $a \in A$

f_d es morfismo de R-álgebras pues

$$f_d(aa') = d(aa') + s(aa') = a\,d(a') + d(a)a' + s(a)s(a') =$$
$$= [d(a) + s(a)]\,[d(a') + s(a')] = f_d(a)\, f_d(a')$$

(Si A es unitaria $f_d(1) = d(1) + s(1) = (0, 1)$).

Además , ambas construcciones anteriores son inversas una de la otra. En efecto:

$$d_{f_d}(a) = (\xi f_d)(a) = \xi[d(a)+s(a)] = d(a) \qquad a\in A$$

$$f_{d_f}(a) = d_f(a)+s(a) = \xi[f(a)]+s(a) = \xi[m+s(a)]+s(a) = m+s(a) = f(a)$$

(habiendo expresado $f(a) = m+s(a)$) .

(1.1.14) PROPOSICION

Si $A\in \underline{C}$ y M es un A-módulo , existe una equivalencia natural de funtores a la categoría de Grupos abelianos

$$\mathrm{Der}(\;,M) \cong \mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\;,\begin{array}{c} M\rtimes A \\ \downarrow \\ A \end{array}\right)$$

Demostración:

Para cada $h: B \longrightarrow A \in (\underline{C},A)$ se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dl] \arrow[d, equal] \arrow[ddl] \\
M \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & M\rtimes B \arrow[r, shift left, two heads] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[l, shift left] \arrow[d, "h"] \\
M \arrow[r, tail] & M\rtimes A \arrow[r, shift left, two heads] & A \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

donde la propiedad universal del cuadrado cartesiano nos induce la biyección

$$\mathrm{Hom}_{(\underline{C},B)}\left(\begin{array}{c} B \\ \| \\ B \end{array}, \begin{array}{c} M\rtimes B \\ \downarrow \\ B \end{array}\right) \cong \mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\begin{array}{c} B \\ \downarrow h \\ A \end{array}, \begin{array}{c} M\rtimes A \\ \downarrow p \\ A \end{array}\right)$$

y teniendo en cuenta (1.1.13) se tiene

$$\mathrm{Der}(B,M) \cong \mathrm{Hom}_{(\underline{C},B)}\left(\begin{array}{c} B \\ \| \\ B \end{array}, \begin{array}{c} M\rtimes B \\ \downarrow \\ B \end{array}\right) \cong \mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\begin{array}{c} B \\ \downarrow h \\ A \end{array}, \begin{array}{c} M\rtimes A \\ \downarrow \\ A \end{array}\right)$$

de modo que a una derivación d le hace corresponder el morfismo πf_d

La naturalidad se comprueba facilmente.

(1.1.15) El funtor Der(, M) como acabamos de ver es un funtor correpresentable. Dicho funtor es tambien representable como veremos en la siguiente proposición. Para ello , si $A \in \underline{C}$ y M es un A-módulo , llamamos

$$IA = \frac{T(A) \otimes_R A}{P}$$

siendo P el submódulo de $T(A) \otimes_R A$ generado por el conjunto de elementos

$$\{(a_1, 0) \otimes a_2 - 1 \otimes a_1 a_2 + (0, a_2) \otimes a_1 \quad / \quad a_1 , a_2 \in A\}$$

(1.1.16) PROPOSICION

Para cada $A \in \underline{C}$ y cada A-módulo M , existe un isomorfismo de grupos abelianos

$$\mathrm{Der}(A, M) \cong \mathrm{Hom}_A(IA, M)$$

Demostración:

Sea $f : IA \longrightarrow M \in \mathrm{Hom}_A(IA, M)$. Definimos una aplicación $d_f : A \longrightarrow M$ por $d_f(a) = f(\overline{1 \otimes a})$ que será un morfismo de R-módulos al serlo f .

Para ver que d_f es una derivación, notemos en principio que si M es un A-módulo se tienen acciones según (1.1.3)

$${}_a p : A \times M \longrightarrow M \qquad y \qquad p_a : M \times A \longrightarrow M$$

es decir morfismos:

$$A \longrightarrow \mathrm{End}_R M \quad \text{tal que} \quad a \longmapsto L_a : \begin{array}{c} m \\ \downarrow \\ am \end{array}$$

$$A \longrightarrow \mathrm{End}_R M \quad \text{tal que} \quad a \longmapsto R_a : \begin{array}{c} m \\ \downarrow \\ ma \end{array}$$

y por tanto un morfismo $A^* \xrightarrow{(L_a, R_a)} \mathrm{End}_R M$ donde $A^* = A_0 \oplus A_0$ como en (1.1.8) y tal que

$$(a, a') \longmapsto (L_a, R_a)(a, a') : \begin{array}{c} m \\ \downarrow \\ am + ma' \end{array}$$

Se tiene entonces por la universalidad de $T(A)$ el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A^{*} \arrow[r] \arrow[dr, "{(L_a, R_a)}"'] & T(A) \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\ & \mathrm{End}_R M \end{tikzcd}$$

tal que:

$$\Phi(a,0) = L_a : \begin{array}{c} m \\ \downarrow \\ am \end{array} \qquad \text{y} \qquad \Phi(0,a) = R_a : \begin{array}{c} m \\ \downarrow \\ ma \end{array}$$

de modo que:

$(a,0)m = \Phi(a,0)(m) = am$

$(0,a)m = \Phi(0,a)(m) = ma$

$(a,a')m = \Phi(a,a')(m) = am + ma'$

$[(a_1,a_1')\otimes(a_2,a_2')]m = \Phi[(a_1,a_1')\otimes(a_2,a_2')](m) = [\Phi(a_1,a_1')\,\Phi(a_2,a_2')](m) =$

$= \Phi(a_1,a_1')(a_2 m + m a_2') = a_1 a_2 m + a_1 m a_2' + a_2 m a_1' + m a_2' a_1'$

Entonces:

$d_f(a_1 a_2) = f(\overline{1\otimes a_1 a_2}) = f\left[\overline{(a_1,0)\otimes a_2 + (0,a_2)\otimes a_1}\right] =$

$= f\left[\overline{(a_1,0)\otimes a_2}\right] + f\left[\overline{(0,a_2)\otimes a_1}\right] =$

$= f\left[\overline{(a_1,0)(1\otimes a_2)}\right] + f\left[\overline{(0,a_2)(1\otimes a_1)}\right] =$

$= (a_1,0)\,f(\overline{1\otimes a_2}) + (0,a_2)\,f(\overline{1\otimes a_1}) = (a_1,0)\,d_f(a_2) + (0,a_2)\,d_f(a_1) =$

$= a_1 d_f(a_2) + d_f(a_1) a_2$

y por tanto d_f es una derivación.

Sea ahora $d \in Der(A,M)$. Definimos $f'_d : T(A)\otimes_R A \longrightarrow M$ por:

$f'_d(1\otimes a) = d(a)$

$f'_d[(a_1,a_1')\otimes a] = a_1 d(a) + d(a) a_1'$

$f'_d[((a_1,a_1')\otimes(a_2,a_2'))\otimes a] = a_1 a_2 d(a) + a_1 d(a) a_2' + a_2 d(a) a_1' + d(a) a_2' a_1'$

y se extiende por linealidad.

Puesto que al ser d una derivación se tiene :

$$f'_d\,[(a_1\,,0)\otimes a_2 - 1\otimes a_1 a_2 + (0\,,a_2)\otimes a_1] =$$
$$= f'_d\,[(a_1\,,0)\otimes a_2] - f'_d(1\otimes a_1 a_2) + f'_d\,[(0\,,a_2)\otimes a_1] =$$
$$= a_1\,d(a_2) - d(a_1 a_2) + d(a_1)\,a_2 = 0$$

se verifica que f'_d se anula sobre los generadores del submódulo P definido en (1.1.15) lo que nos proporciona un morfismo de A-módulos $f_d : IA \longrightarrow M$

Por último , las construcciones anteriores (que son claramente morfismos de grupos abelianos) , son inversas una de la otra. En efecto:

$$d_{f_d}(a) = f_d(\overline{1\otimes a}) = d(a)$$
$$f_{d_f}(\overline{1\otimes a}) = d_f(a) = f(\overline{1\otimes a})$$

(1.1.17) Considerando el funtor de inclusión-olvido $J : A\text{-Mod} \longrightarrow (\underline{C}\,,A)$, $J(M) = M \rtimes A \longrightarrow A$ (véase (1.1.5)), éste es tripleable y en particular se tiene una adjunción

$$\begin{array}{c} (\underline{C}\,,A) \\ D_A \Big\downarrow \Big\uparrow J \\ A\text{-Mod} \end{array}$$

Si $B \longrightarrow A \in (\underline{C}\,,A)$, teniendo en cuenta la adjunción asociada al cambio de anillo $T(B) \longrightarrow T(A)$ (véase por ejemplo [49]) y (1.1.10), (1.1.14) y (1.1.16) se tendrá :

$$\mathrm{Hom}_{(\underline{C}\,,A)}\left(\begin{array}{c} B \\ \downarrow \\ A \end{array} , \begin{array}{c} M\rtimes A \\ \downarrow \\ A \end{array} \right) \cong \mathrm{Der}(B\,,M) \cong \mathrm{Hom}_B(IB\,,M) \cong \mathrm{Hom}_A(T(A)\otimes_{T(B)} IB\,,M)$$

de modo que el funtor D_A llamado " Funtor de Diferenciales " estará dado salvo equivalencia por :

$$D_A\left(\begin{array}{c} B \\ \downarrow \\ A \end{array} \right) = T(A)\otimes_{T(B)} IB$$

y en particular $D_A\left(\begin{smallmatrix}A\\ \| \\ A\end{smallmatrix}\right) = I\,A$

Denotaremos en lo que sigue , si no hay lugar a confusión, $D_A(B) = D_A\left(\begin{smallmatrix}B\\ \downarrow \\ A\end{smallmatrix}\right)$

(1.1.18) Considerando la adjunción $F \dashv U$, (1.1.2) , se tienen funtores adjuntos (véase [16]) para $A \in \underline{C}$

$$\begin{tikzcd} (Sets, \bar{A}) \arrow[d, shift right, "F_A"'] \\ (\underline{C}, A) \arrow[u, shift right, "U_A"'] \end{tikzcd}$$

donde F_A y U_A son los funtores inducidos por F y por U en la comacategoría y $\bar{A} = U(A)$ es el conjunto olvidado de A.

Supongamos que A es el R-álgebra (unitaria) libre sobre el conjunto S, esto es , $A = F(S)$, y sea $j : S \longrightarrow UF(S) = \bar{A}$ la unidad de la adjunción $F \dashv U$ (1.1.2) .

Se tiene claramente $F_A(j) = \begin{smallmatrix}A\\ \| \\ A\end{smallmatrix}$ de donde $D_A F_A(j) = D_A(A)$

La adjunción $D_A \dashv J$ nos da el isomorfismo natural

$$Hom_A(D_A(A), D_A(A)) \overset{\Phi}{\cong} Hom_{(\underline{C},A)}\left(\begin{smallmatrix}A\\ \| \\ A\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}D_A(A)\nabla A\\ \downarrow \\ A\end{smallmatrix}\right)$$

y denotemos $\varepsilon' := \Phi(1) : A \longrightarrow D_A(A)\nabla A$.

Puesto que , por (1.1.13) , se tiene

$$Hom_{(\underline{C},A)}\left(\begin{smallmatrix}A\\ \| \\ A\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}D_A(A)\nabla A\\ \downarrow \\ A\end{smallmatrix}\right) \cong Der(A, D_A(A))$$

la derivación correspondiente a ε' por este isomorfismo será $d_{\varepsilon'} = \xi\,\varepsilon'$ a la que denotaremos ε .

Entonces , para un A-módulo M , el isomorfismo de la adjunción $D_A \dashv J$,(1.1.17) ,

$$\mathrm{Hom}_A(D_A(A),M) \overset{\Phi}{\cong} \mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\begin{array}{c}A\\ \|\\ A\end{array}, \begin{array}{c}M\,\mathfrak{I}\,A\\ \downarrow\\ A\end{array}\right)$$

será tal que $\Phi(f) = J(f)\varepsilon'$ y componiéndolo con el isomorfismo de la adjunción $F_A \dashv U_A$

$$\mathrm{Hom}_A(D_A(A),M) \cong \mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\begin{array}{c}A\\ \|\\ A\end{array}, \begin{array}{c}M\,\mathfrak{I}\,A\\ \downarrow\\ A\end{array}\right) \cong \mathrm{Hom}_{(Sets,\bar{A})}\left(\begin{array}{c}S\\ \downarrow j\\ \bar{A}\end{array}, \begin{array}{c}\overline{M\,\mathfrak{I}\,A}\\ \downarrow\\ \bar{A}\end{array}\right)$$

se tendrá el isomorfismo dado por $\Theta(f) = \overline{J(f)\varepsilon'}\; j$

Como se tiene claramente que $\overline{M\,\mathfrak{I}\,A} = M \times A$, se da la biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{(Sets,\bar{A})}\left(\begin{array}{c}S\\ \downarrow\\ \bar{A}\end{array}, \begin{array}{c}\overline{M\,\mathfrak{I}\,A}\\ \downarrow\\ \bar{A}\end{array}\right) \overset{\xi_*}{\cong} \mathrm{Hom}_{Sets}(S,\bar{M})$$

dada por $\xi_*(h) = \xi h$ donde ξ es la aplicación definida en (1.1.12)

Uniendo ambos resultados anteriores , se tiene pues una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_A(D_A(A),M) \overset{\Theta'}{\cong} \mathrm{Hom}_{Sets}(S,\bar{M})$$

dada por $\Theta'(f) = \xi\,\overline{J(f)\varepsilon'}\; j = \bar{f}\,\varepsilon\, j$.

Tenemos pues que para cualquier A-módulo M y cualquier aplicación $s: S \longrightarrow \bar{M}$ existe un único morfismo de A-módulos $f: D_A(A) \longrightarrow M$ tal que $\bar{f}\,\varepsilon\, j = s$.

Si suponemos que $j: S \longrightarrow A$ es la inclusión tenemos :

(1.1.19) " Si A es el R-álgebra (unitaria) libre sobre el conjunto $\{a_i \,/\, i \in I\}$ entonces $D_A(A)$ es un A-módulo libre sobre el conjunto $\{\varepsilon a_i \,/\, i \in I\}$ donde $\varepsilon: A \longrightarrow D_A(A)$ es la derivación correspondiente a la unidad de la adjunción considerada anteriormente."

(1.1.20) "Derivadas de Fox"

Si A es libre sobre el conjunto $S = \{ a_i \ / \ i \in I \}$ y teniendo en cuenta (1.1.10) y (1.1.19) se tendrá que $D_A(A) \cong \bigoplus_{i \in I} T(A)$.

Si $\pi_i : \bigoplus_{i \in I} T(A) \longrightarrow T(A)$ es la i-ésima proyección, definimos la i-ésima derivada de Fox $\partial_i : A \longrightarrow T(A)$ como la derivación correspondiente a dicha proyección mediante el isomorfismo (1.1.16) para $M = T(A)$ es decir , mediante el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_A(D_A(A), T(A)) = \mathrm{Der}(A, T(A))$$

Será por tanto $\partial_i = \pi_i \varepsilon$ y entonces para cualquier a de A , si $\varepsilon(a)$ se expresa en función de la base por $\varepsilon(a) = \Sigma t_i \varepsilon(a_i)$ será $\partial_i(a) = t_i$

Obtenemos pues que para cualquier "a" perteneciente a A

$$\varepsilon(a) = \sum_{i \in I} \partial_i(a) \varepsilon(a_i) \ .$$

(1.1.21) VARIEDADES

Sea X_∞ el conjunto numerable consistente de los elementos $x_1, x_2, \ldots x_i \ldots$ y denotemos F_∞ al R-álgebra (unitaria) libre sobre el conjunto X_∞ , esto es , $F_\infty = F(X_\infty)$ (véase (1.1.2)).

Un elemento $f \in F_\infty$ es una identidad sobre un R-álgebra (unitaria) A , o dicho de otra forma , A satisface la identidad f (estrictamente hablando $f=0$) , si cualquier homomorfismo de R-álgebras(unitarias) de F_∞ en A lleva f en cero.

Sea S un conjunto de elementos de F_∞ . Entonces la clase $\underline{V}$ de todas las R-álgebras (unitarias) satisfaciendo cualquier $f \in S$ se llama la variedad de R-álgebras(unitarias) determinada por S , $\underline{V}(S)$.

Definiendo una clase cerrada de R-álgebras (unitarias) como una clase de R-álgebras(unitarias) que es una subcategoría plena de $\underline{C}$ cerrada para subobjetos, objetos cocientes y productos es conocido el teorema de Birkhoff que afirma que una clase de $\underline{C}$ es una variedad si y solo si es una clase cerrada de R-álgebras (unitarias). (Véase [83] o para un estudio mas general [41]).

(1.1.22) PROPOSICION

Dada una variedad $\underline{V}$ de $\underline{C}$ existen funtores adjuntos

$$\begin{array}{c} \underline{C} \\ P \downarrow\uparrow I \text{ (inclusión)} \\ \underline{V} \end{array}$$

(esto es, $\underline{V}$ es una clase reflexiva de $\underline{C}$)

Demostración :

Véase por ejemplo [83]

(1.1.23) DEFINICION

Si $\underline{V}$ es una variedad de $\underline{C}$ y A pertenece a $\underline{V}$, un A-módulo M está en $\underline{V}$ si el producto semidirecto $M \rtimes A$ pertenece a $\underline{V}$.

Si denotamos $\underline{V}$A-Mod a la categoría de A-módulos en $\underline{V}$, la siguiente proposición nos da la equivalencia entre ésta y la de módulos sobre un determinado anillo cociente de T(A) (definido en (1.1.8))

(1.1.24) PROPOSICION

Dado $A \in \underline{V}$, la categoría $\underline{V}$A-Mod es equivalente a la categoría de módulos a la izquierda sobre el anillo cociente $\dfrac{T(A)}{I_V A}$

donde $I_V A$ es el ideal bilátero del anillo T(A) generado por el conjunto

$$\left\{ T(\psi)(\partial_i f) \ / \ i = 1, 2, \ldots; \ f \in S \ ; \ \psi \in \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(F, A) \right\}$$

siendo ∂_i las derivadas de Fox (1.1.20))

Demostración:

Véase [64] y [18]

(1.1.25) Si $\underline{V}$ es una variedad de $\underline{C}$ y $A \in \underline{V}$ tenemos la situación

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
(\underline{V}, A) \arrow[d, shift right, "D_{VA}"'] \arrow[r, shift right, "I"'] & (\underline{C}, A) \arrow[l, shift right, "P"'] \arrow[d, shift right, "D_A"'] \\
{}_{\frac{T(A)}{I_V A}}\mathrm{Mod} \cong \underline{V}A\text{-Mod} \arrow[u, shift right, "J_V"'] & {}_{T(A)}\mathrm{Mod} \cong A\text{-Mod} \arrow[u, shift right, "J"']
\end{tikzcd}$$

donde hemos denotado de nuevo $P \dashv I$ a la adjunción inducida en la coma-categoría por la dada en (1.1.22) y D_{VA} al funtor de Diferenciales en $\underline{V}$ (que será el adjunto a la izquierda del funtor inclusión-olvido J_V que es tripleable).

Si M es un VA-módulo, es un A-módulo mediante el cambio de anillo $T(A) \longrightarrow \frac{T(A)}{I_V A}$ y podemos así calcular explicitamente el valor del funtor D_{VA} sobre $(\underline{V}, A)$. En efecto, si $B \longrightarrow A \in (\underline{V}, A)$, teniendo en cuenta (1.1.14) y (1.1.16) y las adjunciones asociadas a los cambios de anillo

$$T(B) \longrightarrow \frac{T(B)}{I_V B} \quad \text{y} \quad \frac{T(B)}{I_V B} \longrightarrow \frac{T(A)}{I_V A}$$

se tiene:

$$\mathrm{Hom}_{(\underline{V}, A)}\left(\begin{array}{c} B \\ \downarrow \\ A \end{array}, \begin{array}{c} M \rtimes A \\ \downarrow \\ A \end{array} \right) \cong \mathrm{Der}(B, M) \cong \mathrm{Hom}_B(IB, M) \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{VB}\left(\frac{T(B)}{I_V B} \otimes_{T(B)} IB, M \right) \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{VA}\left(\frac{T(A)}{I_V A} \otimes_{\frac{T(B)}{I_V B}} \left(\frac{T(B)}{I_V B} \otimes_{T(B)} IB \right), M \right) \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{VA}\left(\frac{T(A)}{I_V A} \otimes_{T(B)} IB, M \right)$$

de modo que $D_{VA}(B)$ estará dado , salvo equivalencia por:

$$D_{VA}(B) = \frac{T(A)}{I_V A} \otimes_{T(B)} I\,B$$

y en particular

$$D_{VA}(A) = \frac{T(A)}{I_V A} \otimes_{T(A)} I\,A$$

(1.1.26) Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ y $A \in \underline{V}$.

Considerando las adjunciones inducidas en la comacategoría por las de (1.1.2) se tiene el diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Sets}, \bar{A}) \arrow[d, shift right, "F_{2A}"'] \arrow[dd, bend right=60, "F_A"'] \\
({}_R M, A) \arrow[u, shift right, "U_{2A}"'] \arrow[d, shift right, "F_{1A}"'] \\
(\underline{C}, A) \arrow[u, shift right, "U_{1A}"'] \arrow[uu, bend right=60, "U_A"'] \arrow[d, shift right, "P"'] \\
(\underline{V}, A) \arrow[u, shift right, "I"']
\end{tikzcd}$$

que proporciona , por composición, el nuevo diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Sets}, \bar{A}) \arrow[d, shift right, "F_{2A}"'] \arrow[dd, bend right=60, "F_{VA}"'] \\
({}_R M, A) \arrow[u, shift right, "U_{2A}"'] \arrow[d, shift right, "F_{1VA}"'] \\
(\underline{V}, A) \arrow[u, shift right, "U_{1VA}"'] \arrow[uu, bend right=60, "U_{VA}"'] \arrow[d, shift right, "D_{VA}"'] \\
V\,A\text{-Mod} \arrow[u, shift right, "J_V"']
\end{tikzcd}$$

Denotaremos $\mathbb{G}_A$ al cotriple en $(\underline{V}, A)$ inducido por la adjunción $F_{VA} \dashv U_{VA}$ y $\mathbb{G}_{RA}$ al inducido por la adjunción $F_{1VA} \dashv U_{1VA}$ (véase por ejmplo [77]).

En $(\underline{V}, A)$ tendremos la clase de epimorfismos escindentes en $(\text{Sets}, \bar{A})$ a la que denotaremos $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_A}$ y la clase de epimorfismos escindentes en $({}_R M, A)$ a la que denotaremos $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{RA}}$.

Se prueba fácilmente que

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, two heads, "\varepsilon"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

es un epimorfismo perteneciente a $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_A}$ ($\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{RA}}$) si y solo si ε es sobre (R-escindente).

En la categoría $\underline{V}A$-Mod tendremos la clase $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}_R$) de todos los epimorfismos $\phi : M \longrightarrow N$ tales que $J_V(\phi)$ pertenezca a $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_A}$ ($\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{RA}}$) y se puede probar fácilmente que $\phi \in \mathcal{E}(\mathcal{E}_R)$ si y solo si ϕ es sobre (R-escindente) como morfismo en $\underline{V}$.

Denotaremos $\mathcal{M}(\mathcal{M}_R)$ a la clase de monomorfismos en $\underline{V}A$-Mod asociada a la clase de epimorfismos $\mathcal{E}(\mathcal{E}_R)$, es decir, $\mathcal{M}(\mathcal{M}_R)$ es la clase de monomorfismos que son nucleos de los epimorfismos de la clase $\mathcal{E}(\mathcal{E}_R)$. (Véase [49]).

Es inmediato que $\mathcal{M}$ es la clase de todos los monomorfismos y esta es una clase inyectiva (véase por ejemplo [81]).

Es claro tambien que la clase $\mathcal{M}_R$ es la clase de monomorfismos de $\underline{V}A$-módulos que son R-escindentes, es decir, sus olvidados son secciones en ${}_R M$.

(1.1.27) PROPOSICION

$\mathcal{M}_R$ es una clase inyectiva , esto es , existen suficientes inyectivos respecto a esta clase de monomorfismos en $\underline{V}A$-Mod

(Véase desde un punto de vista mas general [52])

Demostración :

Considerando la composición $R \longrightarrow T(A) \longrightarrow \frac{T(A)}{I_V A}$ tenemos que todo $\underline{V}A$-módulo (módulo por la izquierda sobre $\frac{T(A)}{I_V A}$) es un R-módulo via la composición.

Veamos que $\mathrm{Hom}_R(\frac{T(A)}{I_V A}, N) \in {}_{\frac{T(A)}{I_V A}}\mathrm{Mod}$ es inyectivo respecto a $\mathcal{M}_R$ para cualquier $N \in {}_R M$. Para ello si $L_1 \overset{j}{\rightarrowtail} L_2$ es un monomorfismo de $\underline{V}A$-módulos R-escindente y dado cualquier morfismo $L_1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\frac{T(A)}{I_V A}, N)$ tendrá que existir $L_2 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\frac{T(A)}{I_V A}, N)$ haciendo conmutativo el triángulo

$$\begin{tikzcd}
L_1 \arrow[r, tail] \arrow[d] & L_2 \arrow[dl, dashed] \\
\mathrm{Hom}_R(\frac{T(A)}{I_V A}, N) &
\end{tikzcd}$$

Por la adjunción asociada al cambio de anillo $R \longrightarrow \frac{T(A)}{I_V A}$ se tendrán isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_R(L_1, N) \cong \mathrm{Hom}_{VA}(L_1, \mathrm{Hom}_R(\frac{T(A)}{I_V A}, N))$$

$$\mathrm{Hom}_R(L_2, N) \cong \mathrm{Hom}_{VA}(L_2, \mathrm{Hom}_R(\frac{T(A)}{I_V A}, N))$$

Ahora bien, puesto que $j: L_1 \rightarrowtail L_2$ es R-escindente, existe un morfismo j' de R-módulos $j': L_2 \longrightarrow L_1$ tal que $j'j = I_{L_1}$ y definiendo:

$$\theta: \mathrm{Hom}_R(L_2, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L_1, N)$$

por $\theta(h) = hj$, es claro que θ es sobre pues para cada $g: L_1 \longrightarrow N$ se tiene que $\theta(gj') = g$.

Entonces, teniendo en cuenta los isomorfismos anteriores, se deduce que

$$\mathrm{Hom}_{\underline{V}A}(L_2, \mathrm{Hom}_R(\frac{T(A)}{I_V A}, N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{V}A}(L_1, \mathrm{Hom}_R(\frac{T(A)}{I_V A}, N))$$

es sobre y consecuentemente $\mathrm{Hom}_R(\frac{T(A)}{I_V A}, N)$ es $\mathcal{M}_R$-inyectivo.

Identificando ahora cualquier $\underline{V}A$-módulo M con el $\underline{V}A$-módulo $\mathrm{Hom}_{\underline{V}A}(\frac{T(A)}{I_V A}, M)$, se obtiene un monomorfismo $M \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_R(\frac{T(A)}{I_V A}, M)$ que es R-escindente, esto es, que pertenece a $\mathcal{M}_R$. En efecto, definiendo

$$\mathrm{Hom}_R(\frac{T(A)}{I_V A}, M) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}_{\underline{V}A}(\frac{T(A)}{I_V A}, M) \cong M$$

por $\phi(h) = h(1)$, se tiene que ϕ es un homomorfismo de R-módulos y además:

$$(\phi\psi)(m) = \phi[\psi(m)] = \psi(m)(1) = 1m = m \quad .$$

1.2. COHOMOLOGIA DEL COTRIPLE. COHOMOLOGIA EQUILIBRADA. COHOMOLOGIA DE EXTENSIONES.

(1.2.1) " Cohomología del cotriple "

Si $\underline{V}$ es una variedad de $\underline{C}$ y $A \in \underline{V}$ podemos considerar en la coma-categoría $(\underline{V}, A)$ los cotriples $\mathbb{G}_A$ y $\mathbb{G}_{RA}$, inducidos por las adjunciones $F_{VA} \dashv U_{VA}$ y $F_{1VA} \dashv U_{1VA}$ respectivamente, como en (1.1.26).

Siguiendo la técnica de Barr-Beck en [13] para cada objeto $B \longrightarrow A$ de $(\underline{V}, A)$ tendremos su resolución simplicial (libre) standar

$$\mathbb{G}_{\bullet(R)A}(B) = \;\ldots\; G^{n+1}_{(R)A}(B) \;\vdots\; G^{n}_{(R)A}(B) \;\cdots\cdots\; G^{2}_{(R)A}(B) \rightrightarrows G_{(R)A}(B) \longrightarrow B$$

Si M es un A-módulo en $\underline{V}$, considerando el funtor (véase (1.1.11))

$$\mathrm{Der}(\ , M) : (\underline{V}, A)^{\circ} \longrightarrow \text{G. Abel.}$$

como funtor de coeficientes, tendremos funtores de cohomología

$$H^n(\ ,M)_{(R)} = H^n(\quad , Der(\ ,M))_{\mathbb{G}_{(R)A}} \qquad n \geq 0$$

Para $B \longrightarrow A \in (\underline{V}, A)$ denotaremos $H^n(\begin{smallmatrix} B \\ \downarrow \\ A \end{smallmatrix}, M)_{(R)}$ por $H^n(B, M)_{(R)}$

Destaquemos que la cohomología $H(\ ,\ )_{(R)}$ es funtorial en ambas variables (véase [13]).

Si σ es un epimorfismo en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$ (véase (1.1.26)) tendremos tambien su cohomología

$$H^n(\sigma, M)_{(R)} = H^n(\sigma, Der(\ ,M))_{\mathbb{G}_{(R)A}}$$

(Para mas detalle véase [18])

Especificaremos a continuación , sin demostración , los resultados generales que atañen a estos grupos de cohomología y que utilizaremos en los siguientes capítulos .

(1.2.2) PROPOSICION

Si
$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$
es un epimorfismo en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$

existe una sucesión exacta larga natural para cada A-módulo M

$$0 \longrightarrow Der(B_2, M) \longrightarrow Der(B_1, M) \longrightarrow H^0(\sigma, M)_{(R)} \longrightarrow$$
$$H^1(B_2, M)_{(R)} \longrightarrow \dots \quad H^{n-1}(\sigma, M)_{(R)} \longrightarrow H^n(B_2, M)_{(R)} \longrightarrow \dots$$

Demostración:

Vease por ejemplo [18] y téngase en cuenta que el funtor $Der(\ ,M)$ es $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$-exacto por la derecha.

(1.2.3) PROPOSICION

Si $L \rightarrowtail N \xrightarrow{\varepsilon} M$ es una sucesión exacta corta de $\underline{V}A$-módulos con $\varepsilon \in \mathcal{E}_{(R)}$ (véase (1.1.26)) , existe entonces una sucesión exacta larga natural para $B \longrightarrow A \in (\underline{V}, A)$

$$0 \longrightarrow Der(B,L) \longrightarrow Der(B,N) \longrightarrow Der(B,M) \longrightarrow H^1(B,L)_{(R)} \longrightarrow H^1(B,N)_{(R)} \longrightarrow H^1(B,M)_{(R)} \longrightarrow H^2(B,L)_{(R)} \cdots$$

Demostración:

Véase por ejemplo [18]

(1.2.4) PROPOSICION

Si
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[d] & A \arrow[dl, equal] \\ A & \end{tikzcd}$$
es un epimorfismo en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}(R)A}$ y suponemos que $L = Ker\ \sigma$, se tiene un isomorfismo natural para cada $\underline{V}A$-módulo M

$$H^0(\sigma, M)_{(R)} = Hom_{VA}(\frac{L}{L^2}, M)$$

Demostración:

Es un caso particular de la realizada en [18]

Teniendo en cuenta (1.2.3) y (1.2.4) se tiene la sucesión de cinco términos:

(1.2.5) $$0 \longrightarrow Der(A,M) \longrightarrow Der(B,M) \longrightarrow Hom_{VA}(\frac{L}{L^2}, M) \longrightarrow H^1(A,M)_{(R)} \longrightarrow H^1(B,M)_{(R)}$$

(1.2.6) Si $A \in \underline{V}$ y M es un A-módulo en $\underline{V}$, dado un epimorfismo sobre (R-escindente) $E \xrightarrow{\sigma} A$ en $\underline{V}$ con nucleo en R-Alg M , existe una aplicación (morfismo de R-módulos) $s : A \longrightarrow E$ tal que $\sigma s = I_A$ y podemos definir entonces acciones de A en M (que no dependerán de la escisión elegida s) por:

i) $am = s(a)m$

ii) $ma = m\,s(a)$

(1.2.7) DEFINICION

Si $A \in \underline{V}$, una (R)-extensión singular de A por el $\underline{V}$A-módulo M , es un epimorfismo sobre (R-escindente) $E \xrightarrow{\sigma} A$ en $\underline{V}$ con núcleo en R-Alg M y tal que las acciones de A en M inducidas como en (1.2.6) coincidan con las dadas según (1.1.3) .

Representaremos una (R)-extensión singular de A por M mediante el diagrama $M \rightarrowtail E \xrightarrow{\sigma} A$

(1.2.8) Dos (R)-extensiones singulares de A por M , $M \rightarrowtail E_i \twoheadrightarrow A$ $i = 1, 2$ son equivalentes si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f"] & A \arrow[d, equal] \\ M \arrow[r, tail] & E_2 \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}$$

siendo f un morfismo en $\underline{V}$ (que será un isomorfismo)

Denotando $E(A, M)_{(R)}$ al conjunto cociente de clases de (R)-extensiones singulares de A por M , se tiene.

(1.2.9) TEOREMA

Para cada A-módulo M y $B \longrightarrow A \in (\underline{V}, A)$ existe una equivalencia natural

$$H^1(B, M)_{(R)} \cong E(B, M)_{(R)}$$

Demostración:

Véase [16] ó equivalentemente [18]

(1.2.10) " La cohomología equilibrada "

Si $\underline{V}$ es una variedad de $\underline{C}$ y $A \in \underline{V}$ tenemos el funtor

$$\operatorname{Der}(A\,,\ ):\ \underline{V}A\text{-Mod} \longrightarrow \text{G.Abel}.$$

donde $\operatorname{Der}(A\,,M)$, para $M \in \underline{V}A\text{-Mod}$, es el grupo abeliano de derivaciones de A en M.

Definimos el n-ésimo grupo de cohomología equilibrada

$$\bar{H}^n(A\,,\ )_{(R)} \qquad n \geqslant 0$$

como el n-ésimo funtor $\mathcal{E}_{(R)}$- derivado por la derecha del funtor aditivo entre categorías abelianas $\operatorname{Der}(A\,,\ )$ (Véase [15] y [92])

La denominación de equilibrados para estos grupos de cohomología es debida a la anulación de ellos cuando el módulo de coeficientes es $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo como se sigue de su definición y será justificada en el siguiente capítulo.

Puesto que para cada $\underline{V}A$-módulo M y según (1.1.25) se dispone del isomorfismo $\operatorname{Der}(A\,,M) \cong \operatorname{Hom}_{VA}(D_{VA}(A)\,,M)$ se tendrá el isomorfismo natural :

$$(1.2.11) \qquad \bar{H}^n(A\,,\ )_{(R)} \cong \operatorname{Ext}^n_{\frac{T(A)}{I_V A}}(D_{VA}(A)\,,\ )_{(R)} \qquad n \geqslant 0$$

(1.2.12) En orden a establecer la funtorialidad de los grupos de cohomología equilibrada en la primera variable, observemos que dado un morfismo $B \xrightarrow{f} A$ en $\underline{V}$ y considerando el morfismo de anillos inducido $\dfrac{T(B)}{I_V B} \longrightarrow \dfrac{T(A)}{I_V A}$

y el isomorfismo natural (1.2.11) se tiene una transformación natural

$$\bar{H}^n(A\,,\ )_{(R)} \cong \operatorname{Ext}^n_{\frac{T(A)}{I_V A}}(D_{VA}(A)\,,\ )_{(R)} \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_{\frac{T(B)}{I_V B}}(D_{VA}(A)\,,\ )_{(R)}$$

Teniendo en cuenta ahora el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_B"'] & A \arrow[d, "d_A"] \\ D_{VB}(B) \arrow[r, "h"] & D_{VA}(A) \end{tikzcd}$$

siendo d_B y d_A las derivaciones correspondientes a la unidad de la adjunción $D_{VA} \dashv J_V$ y h el único morfismo inducido por el isomorfismo

$Der(B, D_{VA}(A)) \cong Hom_{VB}(D_{VB}(B), D_{VA}(A))$, se tendrá la transformación natural

$$Ext^n_{\frac{T(B)}{I_V B}}(D_{VA}(A), \ )_{(R)} \longrightarrow Ext^n_{\frac{T(B)}{I_V B}}(D_{VB}(B), \ )_{(R)} \cong \bar{H}^n(B, \ )_{(R)}$$

que junto con la encontrada anteriormente establece la funtorialidad de la cohomología equilibrada en la primera variable.

(1.2.13) PROPOSICION

Si $A \in \underline{V}$ y $L \rightarrowtail N \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$ es una sucesión exacta corta de $\underline{V}A$-módulos con $\varepsilon \in \mathcal{E}_{(R)}$ existe una sucesión exacta larga natural

$$0 \to Der(A, L) \to Der(A, N) \to Der(A, M) \to \bar{H}^1(A, L)_{(R)} \to$$
$$\bar{H}^1(A, N)_{(R)} \to \bar{H}^1(A, M)_{(R)} \to \bar{H}^2(A, L)_{(R)} \to \cdots$$

Demostración:

Esta es la serie larga del funtor Ext en la segunda variable despues del isomorfismo (1.2.11)

(1.2.14) La interpretación de los grupos de cohomología equilibrada será estudiada con todo detalle en el segundo capítulo. Por ahora , el isomorfismo (1.2.11) nos permite la interpretación del grupo $\bar{H}^{1}(A, M)_{(R)}$ como el grupo de clases de equivalencia de (R)-extensiones de $\underline{V}A$-módulos

$$M \rightarrowtail N \twoheadrightarrow D_{VA}(A)$$

y mas en general, la interpretación del grupo $\bar{H}^{n}(A, M)_{(R)}$ como el grupo de clases de equivalencia de (R)-n-extensiones de $\underline{V}A$-módulos

$$M \rightarrowtail N_n \longrightarrow \cdots\cdots\cdots \longrightarrow N_1 \twoheadrightarrow D_{VA}(A)$$

(para mas detalle véase por ejemplo [49])

(1.2.15) "La cohomología de extensiones"

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$, $A \in \underline{V}$ y M un $\underline{V}A$-módulo.

Se define una (R)-1-extensión de A por M como una (R)-extensión singular de A por M (1.2.7)

Para $n > 1$, una (R)-n-extensión de A por M es una sucesión exacta

$$M \rightarrowtail M_1 \longrightarrow \cdots\cdots\cdots \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow E \twoheadrightarrow A$$

que es el producto de Yoneda o yuxtaposición de una (R)-extensión singular

$$L \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$$

por una sucesión $\mathcal{E}_{(R)}$-exacta de $\underline{V}A$-módulos

$$M \rightarrowtail M_1 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow M_{n-1} \twoheadrightarrow L$$

Dos (R)-n-extensiones de A por M son equivalentes si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail] \arrow[dd, equal] & M_1 \arrow[r] \arrow[dd, "h_1"'] & \cdots \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, "h_{n-1}"'] & & E \arrow[r, two heads] \arrow[dd] & A \arrow[dd, equal] \\
& & & & L \arrow[ur, tail] \arrow[dd, "g"'] & & \\
M \arrow[r, tail] & M'_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & E' \arrow[r, two heads] & A \\
& & & & L' \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

con $h_1, \dots, h_{n-1}$ y g morfismos de $\underline{V}A$-módulos.

El conjunto cociente, bajo la relación de equivalencia generada por esta relación, de clases de (R)-n-extensiones de A por M es un grupo abeliano con la clásica suma de Baer [6].

Definimos entonces, para $n\geq 1$, el n-ésimo grupo de cohomología de extensiones $\tilde{H}^n(A, M)_{(R)}$ como el grupo de clases de equivalencia de (R)-n-extensiones de A por M.

Estos grupos de cohomología tienen caraćter funtorial en ambas variables como puede verse en [38].

(1.2.16) PROPOSICION

Si $L \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ es una (R)-extensión singular en $\underline{V}$ se tiene para cada $\underline{V}A$-módulo M la sucesión exacta

$$Der(A, M) \rightarrowtail Der(B, M) \longrightarrow Hom_{\underline{V}A}(L, M) \longrightarrow \tilde{H}^1(A, M)_{(R)} \longrightarrow \tilde{H}^1(B, M)_{(R)}$$

Demostracion: ([38])

Nótese que, después de (1.2.9), $\tilde{H}^1(A, M)_{(R)} = H^1(A, M)_{(R)}$, y esta sucesión coincide con la sucesión de cinco términos (1.2.5)

(1.2.17) PROPOSICION

Si $M' \rightarrowtail M \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M''$ es una sucesión exacta corta de $\underline{V}A$-módulos para $A\in\underline{V}$ con $\varepsilon\in\mathcal{E}_{(R)}$, existe una sucesión exacta larga natural

$$0 \longrightarrow Der(A, M') \longrightarrow Der(A, M) \longrightarrow Der(A, M'') \longrightarrow \tilde{H}^1(A, M')_{(R)} \longrightarrow \tilde{H}^1(A, M)_{(R)} \longrightarrow \tilde{H}^1(A, M'')_{(R)} \longrightarrow \tilde{H}^2(A, M')_{(R)} \longrightarrow \cdots$$

Demostración: ([38])

Nótese que los seis primeros puntos de esta sucesión exacta larga, son los mismos , salvo isomorfismo , que los de (1.2.3) para $B=A$.

(1.2.18) PROPOSICION

Dado $A\in \underline{V}$ y M un $\underline{V}A$-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo se tiene que

$$\tilde{H}^n(A,M)_{(R)}=0 \qquad n\geq 2$$

Demostración:

Basta tener en cuenta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[r] \arrow[d, "s"] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\sigma"] & A \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, equal] & M \arrow[r, "0"] & A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

donde s existe por ser M $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo.

CAPITULO 2 . VARIEDADES EQUILIBRADAS

2.1. LA HOMOLOGIA DEL FUNTOR DE DIFERENCIALES Y SU INCIDENCIA EN LA COHOMOLOGIA DEL COTRIPLE

(2.1.1) Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ y $A \in \underline{V}$.

Considerando la comacategoría $(\underline{V}, A)$ se tiene un par de funtores adjuntos (1.1.25)

$$\begin{tikzcd} (\underline{V}, A) \arrow[d, shift right, "D_A"'] \\ A\text{-Mod} \arrow[u, shift right, "J"'] \end{tikzcd}$$

donde por comodidad , hemos denotado A-Mod a la categoría de A-módulos en $\underline{V}$ (esto es $\underline{V}$A-Mod) y D_A al funtor de diferenciales en la variedad D_{VA} .

Puesto que el rango del funtor D_A es una categoría abeliana , podemos definir funtores de homología en $(\underline{V}, A)$ con coeficientes en D_A relativos al cotriple $\mathbb{G}_{(R)A}$ (definido en (1.1.26))

$$H_n(\ \ , D_A)_{\mathbb{G}_{(R)A}} \qquad n \geq 0$$

y que para $B \longrightarrow A \in (\underline{V}, A)$ vendrán calculados como el n-ésimo grupo de homología del complejo

$$\cdots \longrightarrow D_A G^{n+1}_{(R)A}(B) \longrightarrow D_A G^{n}_{(R)A}(B) \longrightarrow D_A G^{n-1}_{(R)A}(B) \longrightarrow \cdots$$

Para simplificar , denotaremos $H_n(\begin{smallmatrix} B \\ \downarrow \\ A \end{smallmatrix}, D_A)_{\mathbb{G}_{(R)A}}$ por $H_n(B, D_A)_{(R)}$ y $G_{(R)A}$ por $G_{(R)}$.

(2.1.2) Si $B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$ es un epimorfismo sobre (R-escindente) y considerando el funtor D_A que es $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$ -exacto por la derecha, se tendrá la sucesión exacta larga natural (véase por ejemplo [18])

$$\cdots \longrightarrow H_1(A\,,D_A)_{(R)} \longrightarrow H_0(\sigma\,,D_A)_{(R)} \longrightarrow D_A(B) \longrightarrow D_A(A) \longrightarrow 0$$

Puesto que según (1.2.4) , $H^0(\sigma, M)_{(R)} \cong \mathrm{Hom}_A(\frac{L}{L^2}, M)$

siendo $L = \mathrm{Ker}\,\sigma$ y M cualquier A-módulo, puede demostrarse ([18]) que entonces

$$H_0(\sigma\,,D_A)_{(R)} \cong \frac{L}{L^2}$$

de modo que la sucesión exacta larga anterior proporciona la sucesión exacta

$$\frac{L}{L^2} \longrightarrow D_A(B) \longrightarrow D_A(A) \longrightarrow 0$$

Podemos suponer en adelante, sin perder generalidad, que el funtor D_A conserva epimorfismos R-escindentes al considerar la cohomología relativa (véase por ejemplo [15]).

(2.1.3) PROPOSICION

Para cada $n \geq 1$, $H^n(A\,,I)_{(R)} = 0$ para todo A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo I si y solo si $H_n(A\,,D_A)_{(R)} = 0$

($\mathcal{M}_{(R)}$ es la clase de monomorfismos definida en (1.1.26))

Demostración:

Supongamos que $H^n(A\,,I)_{(R)} = 0$. Probemos entonces que el complejo

$$(1) \qquad \cdots \longrightarrow D_A G^{n+1}_{(R)}(A) \longrightarrow D_A G^{n}_{(R)}(A) \longrightarrow D_A G^{n-1}_{(R)}(A) \longrightarrow \cdots$$

es exacto. Bastará para ello probar que para todo A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo I el complejo siguiente es exacto

$$(2) \qquad \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(D_A G^{n-1}_{(R)}(A)\,,I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(D_A G^{n}_{(R)}(A)\,,I) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(D_A G^{n+1}_{(R)}(A)\,,I) \cdots$$

Ahora bien , considerando la adjunción $D_A \dashv J$ citada en (1.2.1) este complejo es equivalente al:

$$(3) \quad \cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{(\underline{V},A)}\left(\begin{array}{c} G^{n-1}_{(R)}(A) \\ \downarrow \\ A \end{array} , \begin{array}{c} I \rtimes A \\ \downarrow \\ A \end{array} \right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{(\underline{V},A)}\left(\begin{array}{c} G^{n}_{(R)}(A) \\ \downarrow \\ A \end{array} , \begin{array}{c} I \rtimes A \\ \downarrow \\ A \end{array} \right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{(\underline{V},A)}\left(\begin{array}{c} G^{n+1}_{(R)}(A) \\ \downarrow \\ A \end{array} , \begin{array}{c} I \rtimes A \\ \downarrow \\ A \end{array} \right) \cdots$$

y éste , teniendo en cuenta (1.1.14), lo es al:

$$(4) \quad \cdots \longrightarrow \mathrm{Der}(G^{n-1}_{(R)}(A), I) \longrightarrow \mathrm{Der}(G^{n}_{(R)}(A), I) \longrightarrow \mathrm{Der}(G^{n+1}_{(R)}(A), I) \longrightarrow \cdots$$

y este es exacto pues su homología es $H^n(A, I)_{(R)} = 0$

Recíprocamente, si suponemos que $H_n(A, D_A)_{(R)} = 0$, se tiene que el complejo (1) es exacto y por tanto lo son tambien los complejos (2) , (3) y (4) de modo que $H^n(A, I)_{(R)} = 0 \quad n \geq 1$

(2.1.4) DEFINICION

Sea $\mathcal{L}$ una categoría y $\mathcal{E}$ una clase de epimorfismos en $\mathcal{L}$. Si suponemos que existen productos fibrados de éstos , entonces , un funtor $F : \mathcal{L} \longrightarrow Ab$, donde Ab es una categoría abeliana , se dice aditivo si dados morfismos

$$C \twoheadrightarrow B \in \mathcal{E} \quad ; \quad X \longrightarrow B \quad y \quad f_i : X \longrightarrow C \qquad i = 1,2,3,4$$

haciendo conmutativos los diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dash, "f_i"] \arrow[dr] & C \arrow[d, two heads] \\ & B \end{tikzcd}$$

en $\mathrm{Hom}_{Ab}(F(X), F(C \times_B C))$ se verifica:

$$F(f_1, f_2) + F(f_3, f_4) = F(f_1, f_4) + F(f_3, f_2)$$

Esta definición de funtor aditivo , debida a Rinehart ([88]) , generaliza el concepto usual de aditividad para un funtor entre categorías abelianas que conserve el cero.

(2.1.5) PROPOSICION

El funtor de diferenciales $D_A : (\underline{V}, A) \longrightarrow A\text{-Mod}$ es aditivo (en el sentido de (2.1.4)) respecto a la clase de todos los epimorfismos sobre.

Demostración:

Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{(\underline{V},A)}(C\times_B C\,,\,JD_A(C\times_B C)) \arrow[r, phantom, "\overset{\eta}{\cong}"] \arrow[d, "(f_i\,,f_j)^*"'] & \mathrm{Hom}_A(D_A(C\times_B C)\,,\,D_A(C\times_B C)) \arrow[d, "{[D_A(f_i\,,f_j)]^*}"] \\
\mathrm{Hom}_{(\underline{V},A)}(X\,,\,JD_A(C\times_B C)) \arrow[r, phantom, "\overset{\eta'}{\cong}"] & \mathrm{Hom}_A(D_A(X)\,,\,D_A(C\times_B C))
\end{tikzcd}$$

obtenido a partir del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "(f_i\,,f_j)"] \arrow[drr, "f_i \quad i=1,2,3,4"] \arrow[ddr, "f_j \; j=1,2,3,4"'] & & \\
& C\times_B C \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
& C \arrow[r, two heads] & B
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo $C \twoheadrightarrow B$ es un epimorfismo en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_A}$ ((1.1.26))

Es fácil ver que el funtor $\mathrm{Hom}_{(\underline{V},A)}(\quad, JD_A(C\times_B C))$ es aditivo (pues $JD_A(C\times_B C)$ es grupo abeliano en $(\underline{V}, A)$) y se tendrá consecuentemente

$$(f_1\,,f_2)^* + (f_3\,,f_4)^* = (f_1\,,f_4)^* + (f_3\,,f_2)^*$$

de donde

$$\eta'(f_1\,,f_2)^* + \eta'(f_3\,,f_4)^* = \eta'(f_1\,,f_4)^* + \eta'(f_3\,,f_2)^*$$

y por la conmutatividad del diagrama anterior

$$[D_A(f_1,f_2)]^* \eta + [D_A(f_3,f_4)]^* \eta = [D_A(f_1,f_4)]^* \eta + [D_A(f_3,f_2)]^* \eta$$

Por otro lado , existe $h \in \mathrm{Hom}_{(\underline{V},A)}(C x_B C \ , \ J D_A(C x_B C))$ tal que

$\eta(h) = I_{D_A(C x_B C)}$, de modo que

$$\eta(h)\, D_A(f_1,f_2) + \eta(h)\, D_A(f_3,f_4) = \eta(h)\, D_A(f_1,f_4) + \eta(h)\, D_A(f_3,f_2)$$

es decir:

$$D_A(f_1,f_2) + D_A(f_3,f_4) = D_A(f_1,f_4) + D_A(f_3,f_2)$$

y por tanto el funtor D_A es aditivo .

Siendo $F:(\underline{V},A) \longrightarrow Ab$, con Ab una categoría abeliana , denotaremos en lo que sigue $H_n(\ ,F)_{(R)}$ al n-ésimo grupo de homología con coeficientes en el funtor F y relativo al cotriple $\mathbb{G}_{(R)A}$

(2.1.6) LEMA (Rinehart)

Si $F:(\underline{V},A) \longrightarrow Ab$, siendo Ab abeliana , es un funtor $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$-exacto por la derecha y aditivo y $\sigma: B \twoheadrightarrow A$ es un epimorfismo sobre (R-escindente) se tiene

$$H_0(\sigma, F)_{(R)} = \mathrm{Coker}\left[F(1,1): F(B) \longrightarrow F(B x_A B)\right]$$

Demostración:

Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B x_A B x_A B \arrow[drr, "f_i \quad i=1,2,3,4"] & & \\
& B x_A B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
& B \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

donde $f_1 = \pi_0$; $f_2 = f_3 = \pi_1$; $f_4 = \pi_2$ y teniendo en cuenta que por hipótesis F es aditivo , se tiene:

$$F(\pi_0,\pi_1)+F(\pi_1,\pi_2)=F(\pi_0,\pi_2)+F(\pi_1,\pi_1)$$

Puesto que $H_0(\sigma, F) = \text{Coker}\ [F(\pi_0,\pi_1) - F(\pi_0,\pi_2) + F(\pi_1,\pi_2)]$

(véase para ello [18]) y ya que:

$$F(\pi_0,\pi_1)-F(\pi_0,\pi_2)+F(\pi_1,\pi_2)=F(\pi_1,\pi_1)=F[(1,1)\pi_1]=F(1,1)\,F\pi_1$$

se tendrá:

$$H_0(\sigma, F)_{(R)} = \text{Coker}\ [F(1,1)\,F\pi_1] = \text{Coker}\ F(1,1)$$

ya que al tomar conúcleos pueden despreciarse las partes épicas del principio .

(2.1.7) PROPOSICION

Si $F:(\underline{V},A) \longrightarrow Ab$, siendo Ab una categoría abeliana, es un funtor $\mathcal{E}_{\mathfrak{G}(R)A}$ - exacto por la derecha y aditivo, se tiene que si $H_1(A,F)_{(R)} = 0$ entonces F conserva productos fibrados de epimorfismos sobre (R-escindentes) $B \twoheadrightarrow A$

Demostración:

Sea $\sigma : B \twoheadrightarrow A$ un epimorfismo sobre (R-escindente) y consideremos la sucesión exacta larga asociada en los grupos de homología con coeficientes en el funtor F

$$\cdots \longrightarrow H_1(B,F)_{(R)} \longrightarrow H_1(A,F)_{(R)} \longrightarrow H_0(\sigma,F)_{(R)} \longrightarrow FB \twoheadrightarrow FA$$

Puesto que por hipótesis $H_1(A,F)_{(R)} = 0$, tendremos la sucesión exacta corta

$$H_0(\sigma,F)_{(R)} \rightarrowtail FB \twoheadrightarrow FA$$

siendo $H_0(\sigma,F)_{(R)} = \text{Coker}\ [F(1,1) : FB \longrightarrow F(B\times_A B)]$ por (2.1.6)

Consideremos ahora el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
H_0(\sigma,F)_{(R)} \arrow[rrrdd, bend left, tail] \arrow[rrddd, bend right, tail] & & & \\
& F(B\times_A B) \arrow[ul] \arrow[dr, dashed, "(F\pi_0,F\pi_1)"] \arrow[rrd, shift left, "F\pi_1"] \arrow[rdd, shift right, "F\pi_0"'] & & \\
& & FB\times_{FA}FB \arrow[r, two heads, "p_1"] \arrow[d, "p_0"] & FB \arrow[d] \arrow[llu, shift left, "F(1,1)"'] \arrow[l, shift left, "(F1,F1)"] \\
& & FB \arrow[r, two heads] \arrow[luu, shift right, "F(1,1)"] & FA
\end{tikzcd}$$

Puesto que $F(1,1)$ escinde por $F\pi_0$ se tiene que

$$F(B\times_A B) \cong H_0(\sigma, F)_{(R)} \oplus FB$$

Además, p_1 escinde por $(F1,F1)$ y el núcleo de p_1 ha de ser de nuevo $H_0(\sigma, F)_{(R)}$ pues p_1 es opuesta a $FB \twoheadrightarrow FA$ en un cuadrado cartesiano.

Por tanto:
$$FB\times_{FA}FB \cong H_0(\sigma, F)_{(R)} \oplus FB \cong F(B\times_A B)$$

y así F conserva productos fibrados de dichos epimorfismos.

(2.1.8) PROPOSICION

Si $F:(\underline{V}, A) \longrightarrow Ab$, siendo Ab abeliana, es un funtor $\mathcal{E}_{\mathbb{G}(R)A}$-exacto por la derecha y aditivo, entonces F conserva productos fibrados de epimorfismos que son retracciones.

Demostración:

Sea
$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\
& A &
\end{tikzcd}$$
un epimorfismo en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}(R)A}$ que además es una retracción.

Considerando la sucesión exacta larga asociada en los grupos de homología con coeficientes en el funtor F

$$\cdots \longrightarrow H_1(B_1, F)_{(R)} \xrightarrow{u} H_1(B_2, F)_{(R)} \longrightarrow H_0(\sigma, F)_{(R)} \longrightarrow FB_1 \longrightarrow FB_2 \longrightarrow 0$$

el morfismo u será escindido ya que σ lo es y se tendrá por tanto la sucesión exacta corta

$$H_0(\sigma, F)_{(R)} \rightarrowtail FB_1 \twoheadrightarrow FB_2$$

Un razonamiento análogo al realizado en (2.1.7) prueba ahora que

$$F(B_1 x_{B_2} B_1) \cong FB_1 x_{FB_2} FB_1$$

(2.1.9) PROPOSICION

Si $F:(\underline{V}, A) \longrightarrow Ab$, siendo Ab abeliana, es un funtor $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$ -exacto por la derecha y aditivo y $H_1(A, F)_{(R)} = 0$ entonces F conserva productos fibrados múltiples de epimorfismos sobre (R-escindentes) $B \twoheadrightarrow A$

Demostración:

Es consecuencia de (2.1.7) y (2.1.8) teniendo en cuenta que, por ejemplo, $Bx_ABx_AB = (Bx_AB)x_B(Bx_AB)$ y como $Bx_AB \longrightarrow B$ es retracción, tendríamos:

$$F(Bx_ABx_AB) = F(Bx_AB)x_{FB}F(Bx_AB) = FBx_{FA}FBx_{FA}FB$$

(2.1.10) DEFINICION

Considerando $(\underline{V}, A)$ y la clase de epimorfismos $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$, un funtor $F:(\underline{V}, A) \longrightarrow Ab$, con Ab abeliana, se dice $\mathbb{G}_{(R)A}$- acíclico en A si para cada epimorfismo $B \twoheadrightarrow A$ de $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$ y cada $n \geq 1$ el n-ésimo grupo de homología del complejo:

$$\cdots \longrightarrow F(B\times_A B\times_A B) \xrightarrow{\partial_2} F(B\times_A B) \xrightarrow{\partial_1} F(B) \longrightarrow 0$$

con operador borde $\quad \partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \ldots \pi_n) \quad n \geq 1$

al que denotamos $\quad C_n(B \twoheadrightarrow A, F)_{(R)} \quad$ es cero .

(2.1.11) LEMA

Si $\delta_{(R)A}: G_{(R)}A \twoheadrightarrow A$ es el epimorfismo correspondiente a la counidad del cotriple $\mathbb{G}_{(R)A}$, entonces $H_0(A, F)_{(R)} \cong C_0(\delta_{(R)A}, F)_{(R)}$

Demostración:

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G^2_{(R)}(A) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\phi"'] & G_{(R)}(A) \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, equal] \\
G^2_{(R)}(A) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_{(R)}(A) \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

donde ϕ, que es el único morfismo inducido por la propiedad universal de $G_{(R)}(A)\times_A G_{(R)}(A)$, es un epimorfismo en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$ (véase [18]).

Para cualquier funtor $F:(\underline{V}, A) \longrightarrow Ab$, siendo Ab una categoría abeliana se tiene el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
FG^2_{(R)}(A) \arrow[r] \arrow[d, "F(\phi)"'] & FG_{(R)}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_0(A, F)_{(R)} \arrow[d, two heads, "\psi_F"] \\
F[G_{(R)}(A)\times_A G_{(R)}(A)] \arrow[r] & FG_{(R)}(A) \arrow[r] & C_0(\delta_{(R)A}, F)_{(R)}
\end{tikzcd}$$

donde ψ_F es obtenido por la exactitud de la fila superior y es un epimorfismo al ser el segundo morfismo de una composición que lo es .

Además , si $F' = \mathrm{Ker}(FG_{(R)} \twoheadrightarrow F)$, se tendrá asociado a esta sucesión exacta corta de funtores , un diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_1(A,F)_{(R)} \arrow[r] & H_0(A,F')_{(R)} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{F'}"'] & H_0(A,FG_{(R)})_{(R)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & H_0(A,F)_{(R)} \arrow[d, "\psi_F"'] \\
\cdots \arrow[r] & C_1(\delta_{(R)A},F)_{(R)} \arrow[r] & C_0(\delta_{(R)A},F')_{(R)} \arrow[r] & C_0(\delta_{(R)A},FG_{(R)})_{(R)} \arrow[r] & C_0(\delta_{(R)A},F)_{(R)}
\end{tikzcd}$$

donde $H_0(A,FG_{(R)})_{(R)} = C_0(\delta_{(R)A},FG_{(R)})_{(R)} = FG_{(R)}A$ pues $FG_{(R)}$ es $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$-exacto por la derecha ([18]).

Del diagrama anterior se deduce ahora que ψ_F es un isomorfismo .

(2.1.12) PROPOSICION

Si $F:(\underline{V},A) \longrightarrow Ab$, siendo Ab abeliana , es un funtor $\mathbb{G}_{(R)A}$-acíclico en A entonces $H_n(A,F)_{(R)} = 0$ $n \geq 1$

Demostración :

Sea $F' = \mathrm{Ker}(FG_{(R)} \twoheadrightarrow F)$. Después de (2.1.11) se tendrá , asociado a esta sucesión exacta corta de funtores , un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_1(\delta_{(R)A},F)_{(R)} \arrow[r] & C_0(\delta_{(R)A},F')_{(R)} \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & C_0(\delta_{(R)A},FG_{(R)})_{(R)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & C_0(\delta_{(R)A},F)_{(R)} \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\cdots H_1(A,FG_{(R)}) \arrow[r] & H_1(A,F)_{(R)} \arrow[r] & H_0(A,F')_{(R)} \arrow[r] & H_0(A,FG_{(R)})_{(R)} \arrow[r, two heads] & H_0(A,F)_{(R)}
\end{tikzcd}$$

y puesto que $H_1(A,FG_{(R)})_{(R)} = 0$ y por hipótesis $C_1(\delta_{(R)A},F)_{(R)} = 0$ se tiene que $H_1(A,F)_{(R)} = 0$.

Además F' es $\mathbb{C}_{(R)A}$-acíclico en A. En efecto, considerando la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}(B \longrightarrow A, F)_{(R)} \longrightarrow C_n(B \longrightarrow A, F')_{(R)} \longrightarrow C_n(B \longrightarrow A, FG_{(R)})_{(R)} \longrightarrow \cdots$$

y teniendo en cuenta que $FG_{(R)}$ es $\mathbb{C}_{(R)A}$-proyectivo en la categoría de funtores $\mathcal{E}_{\mathbb{C}_{(R)A}}$-exactos por la derecha ([13]), se tiene que $C_n(B \longrightarrow A, FG_{(R)})_{(R)} = 0$ (véase [88]) y entonces la sucesión anterior nos da $C_n(B \longrightarrow A, F')_{(R)} = 0$ $n \geq 1$

Considerando ahora la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, FG_{(R)})_{(R)} \longrightarrow H_n(A, F)_{(R)} \longrightarrow H_{n-1}(A, F')_{(R)} \longrightarrow H_{n-1}(A, FG_{(R)})_{(R)} \longrightarrow \cdots$$

y utilizando inducción sobre "n" se tendrá

$$H_n(A, F)_{(R)} \cong H_{n-1}(A, F') = 0 \qquad n \geq 2$$

Utilizando los resultados anteriores, el teorema siguiente nos va a permitir demostrar como la anulación del primer grupo de homología con coeficientes en el funtor de diferenciales D_A es condición necesaria y suficiente para la anulación del n-ésimo grupo de homología con $n \geq 1$.

(2.1.13) TEOREMA

Sea $F:(\underline{V}, A) \longrightarrow Ab$, siendo Ab una categoría abeliana, un funtor $\mathcal{E}_{\mathbb{C}_{(R)A}}$-exacto por la derecha y aditivo. Entonces son equivalentes:

i) $H_1(A, F)_{(R)} = 0$

ii) F es $\mathbb{C}_{(R)A}$-acíclico en A.

iii) $H_n(A, F)_{(R)} = 0$ $\quad n \geq 1$

Demostración :

i) $\Rightarrow$ ii) Es consecuencia inmediata de (2.1.9) .

ii) $\Rightarrow$ iii) (2.1.12)

iii) $\Rightarrow$ i) Evidente .

(2.1.14) COROLARIO

Son equivalentes

i) $H_1(A, D_A)_{(R)} = 0$

ii) D_A es $\mathfrak{C}_{(R)A}$-acíclico en A .

iii) $H_n(A, D_A)_{(R)} = 0 \quad n \geq 1$

Demostración :

D_A es un funtor $\mathcal{E}_{\mathfrak{C}_{(R)A}}$-exacto por la derecha y aditivo (2.1.5) .

(2.1.15) TEOREMA

Para cualquier A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo I , $H^n(A, I)_{(R)} = 0$ $n \geq 1$ si y solo si $H^1(A, I)_{(R)} = 0$

Demostración :

La condición $H^1(A, I)_{(R)} = 0$ es evidentemente necesaria . Probemos que es suficiente.

Si $H^1(A, I)_{(R)} = 0$ para cualquier I $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo , se tiene por (2.1.3) que $H_1(A, D_A)_{(R)} = 0$ y por tanto que $H_n(A, D_A)_{(R)} = 0$ segun (2.1.14) . Utilizando de nuevo (2.1.3) se concluye que $H^n(A, I)_{(R)} = 0$ $n \geq 1$ para cualquier I $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo .

2.2 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

(2.2.1) DEFINICION

Una variedad $\underline{V}$ de $\underline{C}$ se dice (R)-equilibrada en $A\in\underline{V}$ si para cualquier A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo se tiene

$$H^n(A, I)_{(R)} = 0 \qquad n\geq 1$$

Una variedad $\underline{V}$ de $\underline{C}$ es (R)-equilibrada si lo es en cada $A\in\underline{V}$.

Este concepto de variedad equilibrada fue introducido inicialmente por Leedham-Green para una variedad de grupos ([70]) y posteriormente por Cegarra en el contexto de una categoría de interés en el sentido de Orzech ([18]).

En (2.4) se pondrá de manifiesto el enriquecimiento que supone el hecho de que una variedad sea equilibrada en relación con las propiedades de su cohomología.

Nuestro objetivo a continuación será encontrar condiciones que caractericen a las variedades de $\underline{C}$ que sean (R)-equilibradas.

(2.2.2) PROPOSICION

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ y $A\in\underline{V}$. Son equivalentes:

i) $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A.

ii) $H^1(A, I)_{(R)} = 0$ para cada A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo I

iii) $H_1(A, D_A)_{(R)} = 0$

iv) $H_n(A, D_A)_{(R)} = 0 \quad n\geq 1$

v) D_A es $\mathbb{G}_{(R)A}$-acíclico en A

Demostración:

(2.1.3), (2.1.14), (2.1.15).

(2.2.3) COROLARIO

Si $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en $A \in \underline{V}$, se tiene la sucesión exacta corta

$$\mathrm{Der}(A, I) \rightarrowtail \mathrm{Der}(B, I) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_A\left(\frac{L}{L^2}, I\right)$$

para cada epimorfismo sobre (R-escindente) $B \twoheadrightarrow A$ con núcleo L y cada A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo.

Demostración:

Basta considerar la sucesión de cinco términos (1.2.5) y la condiciön de equilibrio ii) dada en la proposición anterior.

Considerando la sucesión exacta $\frac{L}{L^2} \longrightarrow D_A(B) \twoheadrightarrow D_A(A)$ encontrada en (2.1.2) , la proposición (2.2.2) nos permitirá a continuación caracterizar las variedades (R)-equilibradas de $\underline{C}$ en función de que dicha sucesión sea exacta corta.

(2.2.4) TEOREMA

Una variedad $\underline{V}$ de $\underline{C}$ es (R)-equilibrada en $A \in \underline{V}$ si y solo si para cualquier epimorfismo sobre (R-escindente) $\sigma : B \twoheadrightarrow A$ con núcleo L se tiene la sucesión exacta corta de A-módulos

$$\frac{L}{L^2} \overset{u}{\rightarrowtail} D_A(B) \xrightarrow{D_A(\sigma)} D_A(A)$$

(Dicha sucesión la conoceremos con el nombre de " Sucesión de tres términos)

Demostracion:

Supongamos que $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en $A \in \underline{V}$.

Considerando la sucesión exacta $L \rightarrowtail B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$ se tiene para cada A-módulo M la sucesión exacta larga natural ((1.2.2) y (1.2.4))

$$\mathrm{Der}(A,M) \rightarrowtail \mathrm{Der}(B,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A\left(\frac{L}{L^2}, M\right) \longrightarrow H^1(A,M)_{(R)} \longrightarrow \cdots$$

que es , después de (1.1.25), equivalente a

$$\mathrm{Hom}_A(D_A(A),M) \rightarrowtail \mathrm{Hom}_A(D_A(B),M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A\left(\frac{L}{L^2}, M\right) \longrightarrow H^1(A,M)_{(R)} \longrightarrow \cdots$$

cuyos tres primeros puntos , según el lema de Yoneda ([49]) , son precisamente inducidos por la sucesión exacta

$$(1) \qquad \frac{L}{L^2} \xrightarrow{\ u\ } D_A(B) \xrightarrow{D_A(\sigma)} D_A(A)$$

que constituye precisamente los tres puntos últimos de la sucesión exacta larga encontrada en (2.1.2) .

Puesto que $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A , para cualquier A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo I , se tiene , por (2.2.2) que $H^1(A,I)_{(R)}=0$ y entonces la sucesión exacta larga anterior proporciona la sucesión exacta corta

$$(2) \qquad \mathrm{Hom}_A(D_A(A),I) \rightarrowtail \mathrm{Hom}_A(D_A(B),I) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_A\left(\frac{L}{L^2}, I\right)$$

Considerando ahora la sucesión exacta (1) y tomando una presentación $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectiva del A-módulo $\frac{L}{L^2}$ se tiene

$$\begin{tikzcd} \frac{L}{L^2} \arrow[r, "u"] \arrow[dr, tail] & D_A(B) \arrow[d, dashed] \\ & I \end{tikzcd}$$

donde el morfismo $D_A(B) \longrightarrow I$ se obtiene teniendo en cuenta la sucesión exacta (2) .

La conmutatividad del diagrama anterior asegura que el morfismo u es inyectivo y por tanto la existencia de la sucesión de tres términos.

Recíprocamente , supongamos que se da la sucesión de tres términos. Considerando la sucesión exacta corta

$$L \rightarrowtail G_{(R)}(A) \twoheadrightarrow A$$

tendremos según (2.1.2) , la sucesión exacta larga

$$\cdots\ H_1(G_{(R)}(A),\, D_A)_{(R)} \longrightarrow H_1(A\,,D_A)_{(R)} \longrightarrow \frac{L}{L^2} \longrightarrow D_A(G_{(R)}(A)) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

Puesto que claramente $H_1(G_{(R)}(A)\,,D_A)_{(R)}=0$ y por hipótesis el morfismo $\frac{L}{L^2} \longrightarrow D_A(G_{(R)}(A))$ es un monomorfismo se concluye $H_1(A\,,D_A)_{(R)}=0$ y por tanto , segun (2.2.2) , $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A.

Teniendo en cuenta la elección del epimorfismo realizada en esta última demostración podemos afirmar

(2.2.5) COROLARIO

$\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A si y solo si dada una presentación $\mathbb{C}_{(R)A}$-proyectiva de A , ésta induce la sucesión de tres términos.

La existencia de la sucesión de tres términos juega así un importante papel respecto a la cohomología en cualquier variedad de álgebras (unitarias).

(2.2.6) Para razonamientos posteriores es oportuno ahora hacer explícito el morfismo $\frac{L}{L^2} \longrightarrow D_A(B)$.

Considerando la derivación canónica $d: B \longrightarrow D_A(B)$ el morfismo en cuestión es el único morfismo inducido por la derivación

$$d': L \longrightarrow B \xrightarrow{d} D_A(B)$$

que al ser $D_A(B)$ un L-módulo trivial , se anula sobre L^2 .

(2.2.7) PROPOSICION

Si $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A , existe una equivalencia natural

$$H^n(A\,,\ )_{(R)} \cong \overline{H}^n(A\,,\ )_{(R)} \qquad n \geq 0$$

donde $\overline{H}^n(A\,,\ )_{(R)}$ es el n-ésimo grupo de cohomología equilibrada definido en (1.2.10)

Demostración:

Véase [18] y téngase en cuenta $\overline{H}^n(A\,,\ )_{(R)} \cong \mathrm{Ext}^n_A(D_A(A)\,,\ )_{(R)}$

(2.2.8) Veremos a continuación como la definición de variedad (R)-equilibrada , dada en (2.2.1) puede ofrecerse de forma alternativa en términos de anulación en proyectivos.

Notemos en principio que $A\text{-Mod} \cong {}_{\frac{T(A)}{I_V A}}\mathrm{Mod} \cong \mathrm{Mod}_{\frac{T(A)}{I_V A}}$ pues $T(A) \cong T(A)^{o}$

Para $A \in \underline{V}$ y un A-módulo M , podemos considerar el funtor composición

$$(\underline{V}\,, A) \xrightarrow{D_A} A\text{-Mod} \xrightarrow{-\otimes_A M} G.Ab.$$

y definir entonces funtores de homología relativos al cotriple $\mathbb{G}_{(R)A}$

$$H_n(\quad , D_A(\ ) \otimes_A M)_{\mathbb{G}_{(R)A}}$$

Si $B \longrightarrow A \in (\underline{V}\,, A)$ denotaremos $H_n(\begin{smallmatrix} B \\ \downarrow \\ A \end{smallmatrix}\,, D_A(\ ) \otimes_A M)_{\mathbb{G}_{(R)A}}$ por $H_n(B\,, M)_{(R)}$.

Demostramos ahora que es equivalente el hecho de que los grupos de cohomología $H^n(A\,, I)_{(R)}$ $n \geq 1$ se anulen , siendo I cualquier A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo , a que los grupos de homología $H_n(A\,, P)_{(R)}$ $n \geq 1$ se anulen, siendo P cualquier A-módulo $\mathcal{E}_{(R)}$- proyectivo.

En efecto, considerando la resolución libre standar

$$\cdots\cdots \rightrightarrows G^n_{(R)}(A) \rightrightarrows \cdots\cdots \rightrightarrows G^2_{(R)}(A) \rightrightarrows G_{(R)}(A) \twoheadrightarrow A$$

y si $H^n(A, I)_{(R)} = 0$ para cualquier I $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo, se tendrá que el complejo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(G_{(R)}(A), I) \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \mathrm{Der}(G^n_{(R)}(A), I) \longrightarrow \cdots$$

es exacto, y teniendo en cuenta (1.1.25) también lo será el complejo equivalente

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(D_A(G_{(R)}(A)), I) \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(D_A(G^n_{(R)}(A)), I) \longrightarrow \cdots$$

La exactitud de este complejo, para cualquier I $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo, implica ahora la del complejo

$$\cdots \longrightarrow D_A(G^n_{(R)}(A)) \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_A(G_{(R)}(A)) \longrightarrow 0$$

y consecuentemente, para P $\mathcal{E}_{(R)}$-proyectivo, la del complejo

$$\cdots \longrightarrow D_A(G^n_{(R)}(A)) \otimes_A P \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_A(G_{(R)}(A)) \otimes_A P \longrightarrow 0$$

de modo que

$$H_n(A, P)_{(R)} = 0 \qquad n \geq 1$$

Recíprocamente, si $H_n(A, P)_{(R)} = 0$ para cualquier A-módulo $\mathcal{E}_{(R)}$- proyectivo P y $n \geq 1$, basta invertir el razonamiento anterior para obtener que $H^n(A, I)_{(R)} = 0$ para cualquier I $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo $n \geq 1$ (Tómese por ejemplo $P = \dfrac{T(A)}{I_V A}$).

Teniendo en cuenta (2.2.2) y (2.2.8) obtenemos ahora

(2.2.9) PROPOSICION

Si $\underline{V}$ es una variedad de $\underline{C}$ y $A \in \underline{V}$ son equivalentes :

i) $\underline{V}$ es (R)- equilibrada en A

ii) $H_n(A, \frac{T(A)}{I_V A})_{(R)} = 0 \qquad n \geq 1$

iii) $H_1(A, \frac{T(A)}{I_V A})_{(R)} = 0$

Dada una variedad $\underline{V}$ de $\underline{C}$ y una subvariedad suya $\underline{W}$, estudiamos a continuación , bajo que condiciones el hecho de que $\underline{V}$ sea (R)-equilibrada puede suponer el que $\underline{W}$ tambien lo sea .

(2.2.10) Si $A \in \underline{W}$, seguiremos denotando como en (2.1.1) D_A al funtor de diferenciales en $(\underline{V}, A)$ y A-Mod a la categoría de A-módulos en $\underline{V}$ mientras que denotaremos D_{WA} y $\underline{W}$A-Mod a dicho funtor y dicha categoría en la variedad $\underline{W}$.

Teniendo en cuenta (1.1.24) sabemos que

$$A\text{-Mod} \cong {}_{\frac{T(A)}{I_V A}}\text{Mod} \qquad \text{y} \qquad \underline{W}A\text{-Mod} \cong {}_{\frac{T(A)}{I_W A}}\text{Mod}$$

Puesto que $\underline{W} \subset \underline{V}$ se tiene claramente que $I_V A \subseteq I_W A$ de modo que

$$\frac{\frac{T(A)}{I_V A}}{\frac{I_W A}{I_V A}} \cong \frac{T(A)}{I_W A}$$

y por tanto puede considerarse la categoría $\underline{W}$A-Mod como la categoría de módulos por la izquierda sobre un anillo cociente del anillo $\frac{T(A)}{I_V A}$

Considerando la proyeccion $\quad \gamma : \dfrac{T(A)}{I_{\underline{V}}A} \twoheadrightarrow \dfrac{T(A)}{I_{\underline{W}}A}$

se tendrán funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} A\text{-Mod} \arrow[d, shift right, "\frac{T(A)}{I_{\underline{W}}A} \otimes_{\frac{T(A)}{I_{\underline{V}}A}} -"'] \\ \underline{W}A\text{-Mod} \arrow[u, shift right, "U^{\gamma}"'] \end{tikzcd}$$

donde U^{γ} es el funtor cambio de anillo , y podremos considerar el diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} (\underline{W}, A) \arrow[d, shift right, "D_{\underline{W}A}"'] \arrow[r, shift right, "I"'] & (\underline{V}, A) \arrow[l, shift right, "P"'] \arrow[d, shift right, "D_A"'] \\ \underline{W}A\text{-Mod} \arrow[u, shift right, "J_{\underline{W}}"'] \arrow[r, shift right, "U^{\gamma}"'] & A\text{-Mod} \arrow[u, shift right, "J"'] \arrow[l, shift right, "\frac{T(A)}{I_{\underline{W}}A} \otimes_{\frac{T(A)}{I_{\underline{V}}A}} -"'] \end{tikzcd}$$

de forma análoga a la situación de (1.1.25)

Puesto que claramente se tiene $\quad I\, J_{\underline{W}} = J\, U \quad$ se deduce (véase por ejemplo [49]) que:

$$D_{\underline{W}A}\; P = \left(\frac{T(A)}{I_{\underline{W}}A} \otimes_{\frac{T(A)}{I_{\underline{V}}A}} - \right) D_A$$

(2.2.11) Si $\quad B \twoheadrightarrow A \quad$ es un epimorfismo en $\underline{W}$ sobre (R-escindente) con núcleo L , que suponemos singular , se tendrá la sucesión exacta de $\underline{W}A$-módulos

$$L \xrightarrow{u} D_{\underline{W}A}(B) \twoheadrightarrow D_{\underline{W}A}(A)$$

que es parte de la sucesión exacta larga (2.1.2) .

Considerando la sucesión exacta $L \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ en la variedad $\underline{V}$ mediante el funtor inclusión I , supongamos que se tiene la sucesión de tres términos

$$L \rightarrowtail D_A(B) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

(lo cual podría asegurarse siempre , teniendo en cuenta (2.2.4) , si $\underline{V}$ fuera (R)-equilibrada en A)

Utilizando la conmutatividad del diagrama anterior en (2.2.10) obtenemos

$$D_{WA}(B) = \frac{T(A)}{I_W A} \otimes_{\frac{T(A)}{I_V A}} D_A(B) \cong \frac{D_A(B)}{\left(\frac{I_W A}{I_V A}\right) D_A(B)}$$

y en particular:

$$D_{WA}(A) = \frac{T(A)}{I_W A} \otimes_{\frac{T(A)}{I_V A}} D_A(A) \cong \frac{D_A(A)}{\left(\frac{I_W A}{I_V A}\right) D_A(A)}$$

y construyendo el lema de la cruz ([86]) para los monomorfismos

$$L \rightarrowtail D_A(B) \quad \text{y} \quad \left(\frac{I_W A}{I_V A}\right) D_A(B) \rightarrowtail D_A(B)$$

se tiene el diagrama conmutativo de filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
L \cap \left[\left(\frac{I_W A}{I_V A}\right) D_A(B)\right] \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & \left(\frac{I_W A}{I_V A}\right) D_A(B) \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & \left(\frac{I_W A}{I_V A}\right) D_A(A) \arrow[d, tail] \\
L \arrow[r, tail] \arrow[dr, "u"'] & D_A(B) \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & D_A(A) \arrow[d, two heads] \\
 & D_{WA}(B) \arrow[r, two heads] & D_{WA}(A)
\end{tikzcd}$$

Tenemos así que u es un monomorfismo si y solo si se verifica

$$L \cap \left[\left(\frac{I_W A}{I_V A} \right) D_A(B) \right] = 0$$

lo cual es claramente equivalente a que $\left(\frac{I_W A}{I_V A} \right) D_A(B) \cong \left(\frac{I_W A}{I_V A} \right) D_A(A)$

Concluimos así, teniendo en cuenta (2.2.4),

(2.2.12) PROPOSICION

Si $\underline{V}$ es una variedad de $\underline{C}$, (R)-equilibrada en A, una subvariedad suya $\underline{W}$ es (R)-equilibrada en A si y solo si para cualquier epimorfismo en $\underline{W}$ $\sigma: B \twoheadrightarrow A$ sobre (R-escindente) con núcleo L singular, se tiene alguna de las condiciones equivalentes

i) $L \cap \left[\left(\frac{I_W A}{I_V A} \right) D_A(B) \right] = 0$

ii) $\left(\frac{I_W A}{I_V A} \right) D_A(B) \cong \left(\frac{I_W A}{I_V A} \right) D_A(A)$

Además, y según (2.2.5), la hipótesis de tomar cualquier epimorfismo puede sustituirse por el hecho de que se de para una presentacion $\mathbb{G}_{(R)A}$-proyectiva de A en $\underline{W}$.

(2.2.13) COROLARIO

Sean $\underline{W} \subset \underline{V}$ variedades de $\underline{C}$ y $A \in \underline{W}$. Si $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A y para cualquier A-módulo M, el producto semidirecto $M \rtimes A \in \underline{W}$, entonces $\underline{W}$ es (R)-equilibrada en A.

Demostración:

Si $M \rtimes A \in \underline{W}$ se tiene $I_W A = I_V A$ de donde se deduce inmediatamente cualquiera de las condiciones equivalentes de la proposición anterior.

(2.2.14) COROLARIO

Sean $\underline{W} \subset \underline{V}$ variedades de $\underline{C}$ y $A \in \underline{W}$. Si $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A y para cualquier epimorfismo sobre (R-escindente) $B \twoheadrightarrow A$ en $\underline{W}$ se tiene $\frac{I_W A}{I_V A} \subseteq Ann(D_A(B))$, entonces $\underline{W}$ es (R)-equilibrada en A

Demostración:

La condición dada implica $(\frac{I_W A}{I_V A}) D_A(B) = 0$ de donde se deduce inmediatamente i) de (2.2.12) .

(2.2.15) Puesto que la condición i) de (2.2.12) implica claramente que $\frac{I_W A}{I_V A} \subseteq Ann(L)$ se tiene que una condición suficiente para que una subvariedad de una variedad (R)-equilibrada no lo sea , es que exista $A \in \underline{W}$ tal que $\frac{I_W A}{I_V A} \nsubseteq Ann(L)$.

En orden a obtener condiciones afirmativas de equilibrio relacionadas con Ann(L) obtenemos .

(2.2.16) PROPOSICION

Sean $\underline{W} \subset \underline{V}$ variedades de $\underline{C}$ y sea $A \in \underline{W}$ tal que $D_A(A)$ es un A-módulo plano y existe una presentación $\mathbb{G}_{(R)A}$-proyectiva en $\underline{W}$ $B \twoheadrightarrow A$ con nucleo L y con $D_A(B)$ plano. Entonces , si $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A $\underline{W}$ lo es , si y solo si $\frac{I_W A}{I_V A} \subseteq Ann(L)$

Demostración:

Si $\underline{W}$ es (R)-equilibrada en A se tiene por (2.2.12) $L \cap \left[(\frac{I_W A}{I_V A})D_A(B)\right] = 0$ y por tanto $\frac{I_W A}{I_V A} \subseteq Ann(L)$.

Recíprocamente , puesto que tanto $D_A(A)$ como $D_A(B)$ son A-módulos

planos se tiene que L es un submódulo puro de $D_A(B)$ (véase por ejemplo [32])
esto es , que $\left(\frac{I_W A}{I_V A}\right) L = L \cap \left[\left(\frac{I_W A}{I_V A}\right) D_A(B)\right]$
en cuyo caso y teniendo en cuenta que por hipótesis $\frac{I_W A}{I_V A} \subseteq \mathrm{Ann}(L)$
será dicha interseccion nula y por (2.2.12) será $\underline{W}$ (R)-equilibrada en A .

Aprovechando los resultados concernientes a los "morfismos cambio de variedad" ([18]) se tiene

(2.2.17) PROPOSICION

Sean $\underline{W} \subseteq \underline{V}$ variedades de $\underline{C}$ y $A \in \underline{W}$. Si $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A y $\frac{T(A)}{I_W A}$ es plano como $\frac{T(A)}{I_V A}$-módulo entonces $\underline{W}$ es (R)-equilibrada en A .

Demostración:

Considerando el morfismo cambio de variedad a nivel uno , que es un monomorfismo,

$$\phi^1 : H^1_W(A, M)_{(R)} \rightarrowtail H^1_V(A, M)_{(R)}$$

y teniendo el par de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} A\text{-Mod} \arrow[d, shift right, "\frac{T(A)}{I_W A} \otimes_{\frac{T(A)}{I_V A}}"'] \\ WA\text{-Mod} \arrow[u, shift right, "U^\gamma"'] \end{tikzcd}$$

donde U^γ es el funtor cambio de anillo para $\gamma : \frac{T(A)}{I_V A} \twoheadrightarrow \frac{T(A)}{I_W A}$
la proyección canónica , se deduce , por las hipótesis impuestas que el funtor $\frac{T(A)}{I_W A} \otimes_{\frac{T(A)}{I_V A}}$ es exacto y que por tanto ([49]) todo $\frac{T(A)}{I_W A}$-módulo

$\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo pasa a ser un $\frac{T(A)}{I_V A}$-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo de modo que $H^1_W(A, I)_{(R)} = 0$ para cualquier $\frac{T(A)}{I_W A}$-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo y teniendo en cuenta (2.2.2) $\underline{W}$ es (R)-equilibrada en A.

2.3. INTERPRETACION DE LA COHOMOLOGIA EQUILIBRADA. APLICACIONES A LA COHOMOLOGIA DEL COTRIPLE.

Los grupos de cohomología equilibrada $\bar{H}^n(A, M)_{(R)}$ definidos en (1.2.10) admiten, según su definición, la interpretación de Yoneda como grupos de clases de (R)-n-extensiones de módulos de $D_A(A)$ por M. Pretendemos en este punto la interpretación de dichos grupos de cohomología en términos de ciertas extensiones de A por M tales que en el caso de que la variedad sea (R)-equilibrada, dicha interpretación sea precisamente la dada para los grupos de cohomología del cotriple $H^n(A, M)_{(R)}$ bajo hipótesis de equilibrio en [18].

(2.3.1) LEMA

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$. Si $B \xrightarrow{h} A$ es un morfismo en $\underline{V}$ y $d: B \longrightarrow D_A(B)$ la derivación correspondiente a la unidad de la adjunción $D_A \dashv J$, se tiene:

i) Para cada (R)-extensión de A-módulos en $\underline{V}$,

$E: M \overset{j}{\rightarrowtail} M' \overset{p}{\twoheadrightarrow} D_A(B)$ existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} M & \overset{i}{\rightarrowtail} & \Sigma_B & \overset{f}{\twoheadrightarrow} & B \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle d'} & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ M & \overset{j}{\rightarrowtail} & M' & \overset{p}{\twoheadrightarrow} & D_A(B) \end{array}$$

donde $s^E: M \overset{i}{\rightarrowtail} \Sigma_B \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$ es una (R)-extensión singular de B por el B-módulo M (via h) y d' es una derivación de Σ_B en el Σ_B-módulo M' (via hf)

ii) El cuadrado de la derecha en el diagrama anterior verifica la siguiente propiedad universal. Dado cualquier morfismo $\Sigma' \xrightarrow{g} B$ en $\underline{V}$ y cualquier derivación $e : \Sigma' \longrightarrow M'$ tales que $dg = pe$, existe un único morfismo $t : \Sigma' \longrightarrow \Sigma_B$ verificando $d't = e$ y $ft = g$.

iii) La extensión s^E es única salvo equivalencia .

Demostración:

i) Definimos Σ_B como el subconjunto de $M' \nabla B$ formado por

$$\{(m', b) \in M' \times B \quad / \quad p(m') = d(b)\}$$

y se comprueba facilmente que es un subobjeto .

Sean f y d' las restricciones de las correspondientes proyecciones e "i" la inclusión obvia . Se tiene así claramente la conmutatividad del diagrama y la exactitud (en R-Alg) de la fila superior. Además , ésta es una (R)-extensión singular de B por M . En efecto , dados $b \in B$ y $m \in M$ se tiene que

$(0, b)(m, 0) = (bm, 0) = i(bm)$

$(m, 0)(0, b) = (mb, 0) = i(mb)$

Por último d' es una derivación pues

$$\begin{aligned} d'\,(m_1', b_1)(m_2', b_2) &= d'(m_1' b_2 + b_1 m_2', b_1 b_2) = m_1' b_2 + b_1 m_2' = \\ &= (m_1', 0)(m_2', b_2) + (m_1', b_1)(m_2', 0) = \\ &= (m_1', b_1)\, d'(m_2', b_2) + d'(m_1', b_1)(m_2', b_2) \end{aligned}$$

ii) Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Sigma' \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "e"'] & & \\ & \Sigma_B \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "d'"] & B \arrow[d, "d"] \\ & M' \arrow[r, two heads, "p"] & D_A(B) \end{tikzcd}$$

donde hemos definido $t : \Sigma' \longrightarrow \Sigma_B$ por $t(x) = (e(x), g(x))$ $x \in \Sigma'$

y se tiene que t es un morfismo haciendo conmutativos los triángulos siendo además obviamente el único en tales condiciones .

iii) Si $M \overset{i_1}{\rightarrowtail} \Sigma' \overset{f_1}{\twoheadrightarrow} B$ es una (R)-extensión singular de B por M , tal que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "i_1"] \arrow[d, equal] & \Sigma' \arrow[r, two heads, "f_1"] \arrow[d, "d_1"] & B \arrow[d, "d"] \\
M \arrow[r, tail, "j"] & M' \arrow[r, two heads, "p"] & D_A(B)
\end{tikzcd}$$

con d_1 una derivación , considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma' \arrow[dr, two heads, "f_1"] \arrow[dd, bend left, "d_1"] & \\
M \arrow[ur, tail, "i_1"] \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & \Sigma_B \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "d'"'] & B \arrow[d, "d"] \\
M \arrow[r, tail, "j"'] & M' \arrow[r, two heads, "p"'] & D_A(B)
\end{tikzcd}$$

y teniendo en cuenta ii) existirá un único morfismo $t : \Sigma' \longrightarrow \Sigma_B$ tal que $d' t = d_1$ y $f t = f_1$

Además considerando los morfismos $t i_1$ e i , que entran en Σ_B se tiene $f t i_1 = f_1 i_1 = 0 = f i$; $d' t i_1 = d_1 i_1 = j = d' i$

y de nuevo por ii) será $t i_1 = i$.

Entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "i_1"] \arrow[d, equal] & \Sigma' \arrow[r, two heads, "f_1"] \arrow[d, "t"] & B \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, tail, "i"] & \Sigma_B \arrow[r, two heads, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

nos da que t es un isomorfismo y se tiene iii) .

En el caso particular de tomar en el lema anterior $h = 1_A$ obtendríamos para cada (R)-extensión de A-módulos

$$E : M \rightarrowtail M' \twoheadrightarrow D_A(A)$$

una (R)-extensión singular

$$s^E : M \rightarrowtail \Sigma_A \twoheadrightarrow A$$

con las mismas propiedades establecidas allí . Además en este caso particular la extensión s^E tiene la importante propiedad que expresamos en la siguiente proposición .

(2.3.2) PROPOSICION

La (R)-extensión singular $s^E : M \rightarrowtail \Sigma_A \twoheadrightarrow A$ induce la sucesión de tres términos $M \rightarrowtail D_A(\Sigma_A) \twoheadrightarrow D_A(A)$

y ésta es equivalente a la extensión de A-módulos E .

Demostración :

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail, "i"] \arrow[dd, equal] & \Sigma_A \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "\bar{d}"'] \arrow[dd, bend left=40, "d'"] & A \arrow[dd, "d"] \\
 & D_A(\Sigma_A) \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "D_A(f)"] & \\
M \arrow[r, tail, "j"'] \arrow[ur, "u"] & M' \arrow[r, two heads, "p"'] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{d}$ es la derivación correspondiente a la unidad de la adjunción $D_A \dashv J$ y g es el morfismo inducido por d' , que será tal que $g\,\bar{d} = d'$

Se trata de probar que u es un monomorfismo. Ahora bien, teniendo en cuenta por (2.2.6) que $u = \bar{d}\, i$, será, $g\, u = g\, \bar{d}\, i = d'\, i = j$ de donde se deduce que u es un monomorfismo por ser el primer morfismo de una composición que lo es.

Por otro lado, puesto que $p\, g\, \bar{d} = D_A(f)\, \bar{d}$, se tiene por la propiedad universal de $\bar{d}$ que $p\, g = D_A(f)$.

Concluimos entonces que g es un isomorfismo y por tanto, la equivalencia de la sucesión de tres términos y la extensión E.

(2.3.3) DEFINICION

Una (R)-extensión singular de A por el A-módulo M,

$$M \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$$

se dice " equilibrada " si induce la sucesión de tres términos

$$M \rightarrowtail D_A(B) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

Teniendo en cuenta (1.2.9), para cada $A \in \underline{V}$ y cada A-módulo M el primer grupo de cohomología $H^1(A, M)_{(R)}$ clasifica todas las (R)-extensiones de A por M, esto es, es isomorfo al grupo de clases $E(A, M)_{(R)}$

Se observa inmediatamente que las clases de (R)-extensiones singulares equilibradas constituyen un subgrupo del grupo $E(A, M)_{(R)}$. (Por ejemplo, la demostración de que la extensión nula es equilibrada es la siguiente. Dado $M \rightarrowtail M \daleth A \xrightarrow{p} A$, p induce la ducesión exacta larga ((2.1.2))

$$\cdots\; H_1(M \daleth A, D_A)_{(R)} \xrightarrow{v} H_1(A, D_A)_{(R)} \longrightarrow M \xrightarrow{u} D_A(M \daleth A) \longrightarrow D_A(A) \longrightarrow 0$$

de modo, que al ser p escindido tambien lo es v y consecuentemente u es un monomorfismo).

A dicho grupo le llamaremos el grupo de (R)-extensiones singulares equilibradas y le denotaremos $E_Q(A, M)_{(R)}$

(2.3.4) TEOREMA

Dado $A \in \underline{V}$, para cada A-módulo M en $\underline{V}$, existe un isomorfismo natural en M

$$\bar{H}^1(A, M)_{(R)} \overset{\theta}{\cong} E_Q(A, M)_{(R)}$$

Demostración:

(Consideraremos identificado $\bar{H}^1(A, M)_{(R)}$, mediante el isomorfismo (1.2.11), con el grupo de (R)-extensiones de A-módulos E de $D_A(A)$ por M).

Definimos una aplicación

$$\theta : \bar{H}^1(A, M)_{(R)} \longrightarrow E_Q(A, M)_{(R)}$$

por $\theta([E]) = [s^E]$ según (2.3.1) para $h = I_A$

Teniendo en cuenta (2.3.2) , $[s^E]$ pertenece a $E_Q(A, M)_{(R)}$ y θ está bien definida por iii) de (2.3.1) . Además es inyectiva y sobreyectiva como consecuencia de (2.3.2) .

Para la naturalidad , considerando la extensión $E : M \rightarrowtail M' \twoheadrightarrow D_A(A)$ ésta induce el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(D_A(A), M') \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & \mathrm{Hom}_A(D_A(A), D_A(A)) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal, "d^*"', "\wr"] & \bar{H}^1(A, M)_{(R)} \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Der}(A, M') \arrow[r] & \mathrm{Der}(A, D_A(A)) \arrow[r, "\psi'"] & H^1(A, M)_{(R)} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Sabemos que $[E] = \psi(I_{D_A(A)})$ ([49]) y será

$$\psi' d^*(I_{D_A(A)}) = \psi'(d) = [s^E] = \theta([E])$$

Por tanto $\theta([E]) = \psi'(d)$, de modo que θ es natural respecto de las anteriores sucesiones .

En orden a probar que θ es morfismo de grupos , considerando una pre-

sentación $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectiva del A-módulo M , $M \rightarrowtail I \twoheadrightarrow M''$,
ésta induce el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(D_A(A), I) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(D_A(A), M'') & \xrightarrow{\phi} & \bar{H}^1(A, M)_{(R)} & \longrightarrow & 0 & \\
& \Big\| \wr & & d_1^* \Big\| \wr & & \Big\downarrow \theta & & & \\
\cdots \longrightarrow & \mathrm{Der}(A, I) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(A, M'') & \xrightarrow{\phi'} & H^1(A, M)_{(R)} & \longrightarrow & H^1(A, I)_{(R)} & \cdots
\end{array}$$

Dadas $[E]$, $[E'] \in \bar{H}^1(A, M)_{(R)}$, existirán h, $h' \in \mathrm{Hom}_A(D_A(A), M'')$
tales que $\phi(h) = [E]$ y $\phi(h') = [E']$ verificándose además que
$\phi(h + h') = [E] + [E']$. Entonces :

$$\theta([E] + [E']) = \phi' d_1^*(h+h') = \phi' d_1^*(h) + \phi' d_1^*(h') =$$

$$= \theta\phi(h) + \theta\phi(h') = \theta([E]) + \theta([E'])$$

y asi θ es un isomorfismo de grupos .

Obsérvese que se tiene así un monomorfismo

$$\bar{H}^1(A, M)_{(R)} \rightarrowtail H^1(A, M)_{(R)}$$

que será estudiado, con mas generalidad , en cualquier dimensión posteriormente.

Cabe hacer notar tambien que , caso de que la variedad $\underline{V}$ sea (R)-equilibrada en A , se obtiene en el teorema anterior, de forma alternativa y equivalente, una demostración de la existencia de la sucesión de tres términos para cualquier (R)-extensión singular de A por M en $\underline{V}$.

Explicitamos a continuación algunas consecuencias importantes que se deducen del teorema precedente .

(2.3.5) COROLARIO

Sea $A \in \underline{V}$ e I un A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo . Entonces una (R)-extensión singular de A por I es nula si y solo si induce la sucesión de tres términos.

Demostración:

Si $s : I \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ induce la sucesión de tres términos se tiene que $s \in E_Q(A, I)_{(R)} \cong \bar{H}^1(A, I)_{(R)} = 0$

(2.3.6) COROLARIO

Sea $A \in \underline{V}$ tal que $D_A(A)$ es un A-módulo $\mathcal{E}_{(R)}$-proyectivo . Entonces , para cualquier A-módulo M , una (R)-extensión singular de A por M es nula si y solo si induce la sucesión de tres términos .

Demostración:

Si $s : M \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ induce la sucesión de tres términos y $D_A(A)$ es $\mathcal{E}_{(R)}$-proyectivo se tiene

$$s \in E_Q(A, M)_{(R)} \cong \bar{H}^1(A, M)_{(R)} \cong \mathrm{Ext}^1_A(D_A(A), M)_{(R)} = 0$$

(2.3.7) COROLARIO

Sea $A \in V$ tal que $D_A(A)$ es un A-módulo $\mathcal{E}_{(R)}$-proyectivo. Entonces $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A si y solo si $H^n(A, -)_{(R)} = 0 \quad n \geq 1$

Demostración:

Téngase en cuenta el isomorfismo (2.2.7)

En función de los resultados anteriores podemos encontrar ahora una nueva condición que caracterice el (R)-equilibrio en un objeto A de una variedad $\underline{V}$ de $\underline{C}$

(2.3.8) TEOREMA

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ y $A \in \underline{V}$. $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A si y solo si para cualquier (R)-extensión singular de A por un A-módulo I $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo se tiene la sucesión de tres términos .

Demostración:

Si para cualquier $s : I \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ se tiene que $s \in E_Q(A,I)_{(R)}$ entonces por (2.3.5) , s es la extensión nula , esto es , $H^1(A, I)_{(R)} = 0$ para cualquier I $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo , y por (2.2.2) $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A.

Obsérvese después de este teorema , y teniendo en cuenta (2.2.4) , que es suficiente que se de la sucesión de tres términos para (R)-extensiones singulares de A por I , siendo I un A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo , para que se de dicha sucesión para cualquier epimorfismo sobre (R-escindente) a A , y por lo tanto, para que se de dicha sucesión para cualquier (R)-extensión singular de A por un A-módulo M .

(2.3.9) " Interpretación de $\overline{H}^n(A, M)_{(R)}$ $n \geq 2$ "

Definimos una (R)-n-extensión equilibrada de $A \in \underline{V}$ por un A-módulo M, con $n \geq 2$, como una sucesión exacta

$$M \rightarrowtail M_1 \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow E \twoheadrightarrow A$$

que es la yuxtaposición de una (R)-extensión singular equilibrada

$$L \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$$

y una sucesión $\mathcal{E}_{(R)}$-exacta de A-módulos

$$M \rightarrowtail M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{n-1} \twoheadrightarrow L$$

Dos (R)-n-extensiones equilibradas de A por M son equivalentes si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail] \arrow[dd, equal] & M_1 \arrow[r] \arrow[dd, "h_1"] & \cdots \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, "h_{n-1}"'] & & E \arrow[r, two heads] \arrow[dd] & A \arrow[dd, equal] \\
& & & & L \arrow[ur, tail] \arrow[dd, "g"] & & \\
M \arrow[r, tail] & M'_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & E' \arrow[r, two heads] & A \\
& & & & L' \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

con $h_1, \dots, h_{n-1}, g$ morfismos de A-módulos .

Al conjunto cociente bajo la relación de equivalencia generada por esta relación lo denotaremos por $E^n_Q(A, M)_{(R)}$.

Sea
$$s = \left[\begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&] M \arrow[r, tail] \& M_1 \arrow[r] \& \cdots \& M_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \& \& B \arrow[r, two heads] \& A \\ \& \& \& \& L \arrow[ur, tail] \& \& \end{tikzcd}\right] \in E^n_Q(A,M)_{(R)}$$

Se tendrá entonces la sucesión exacta corta de A-módulos

$$L \rightarrowtail D_A(B) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

la cual inducirá la sucesión exacta larga ([49])

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_A(D_A(B), M)_{(R)} \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_A(L, M)_{(R)} \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Ext}^n_A(D_A(A), M)_{(R)} \longrightarrow \cdots$$

Siendo $s' = [M \rightarrowtail M_1 \longrightarrow \cdots \twoheadrightarrow L] \in \mathrm{Ext}^{n-1}_A(L, M)_{(R)}$

definimos $\Omega^n : E^n_Q(A, M)_{(R)} \longrightarrow \bar{H}^n(A, M)_{(R)} \cong \mathrm{Ext}^n_A(D_A(A), M)_{(R)}$

por $\Omega^n(s) = \Delta(s')$.

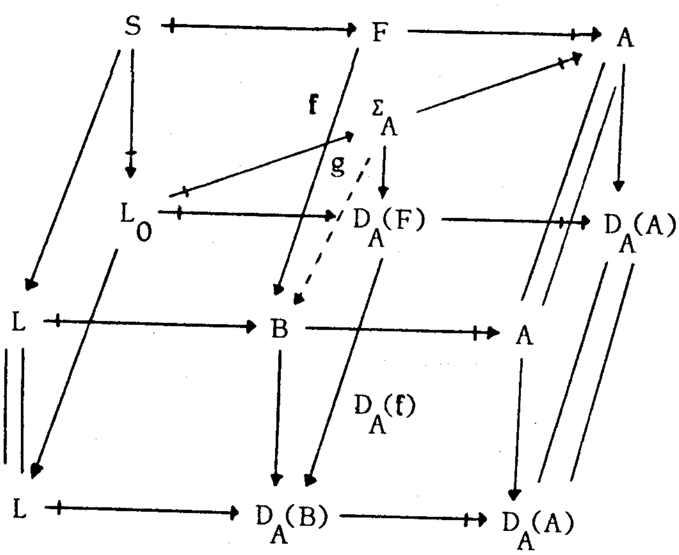
Debido a la naturalidad de la sucesión exacta larga anterior Ω^n está bien definida .

Sea $L \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ una (R)-extensión singular perteneciente a $E_Q(A,L)_{(R)}$ y $S \rightarrowtail F \twoheadrightarrow A$ una presentación $\mathfrak{E}_{(R)A}$-proyectiva de A. Esta induce ((2.1.2)) la sucesión exacta

$$S \longrightarrow D_A(F) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

y sea $L_0 = \mathrm{Ker}\,(D_A(F) \longrightarrow D_A(A))$.

Podemos entonces considerar el diagrama



donde la cara posterior es obtenida como en (2.3.1) para la sucesión de A-módulos $L_0 \rightarrowtail D_A(F) \twoheadrightarrow D_A(A)$, f existe por ser F $\mathfrak{E}_{(R)A}$-proyectivo y g por la propiedad universal de B (véase (2.3.1)).

Se tiene pues el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L_0 \arrow[r, tail] \arrow[d] & \Sigma_A \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, equal] \\
L \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd} \qquad (1)$$

(obsérvese que el cuadrado de la izquierda es conmutativo utilizando la propiedad universal de B para los dos morfismos que entran en él) y dicho diagrama nos demuestra que la (R)-extensión singular

$$L_0 \rightarrowtail \Sigma_A \twoheadrightarrow A$$

es genérica ([35]) entre las (R)-extensiones singulares para las que se da la sucesión de tres términos .

Definimos ahora $\chi^n : \bar{H}^n(A,M)_{(R)} \longrightarrow E^n_Q(A,M)_{(R)}$

Para ello considerando la sucesión exacta corta

$$L_0 \rightarrowtail D_A(F) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

se tendrá , asociada a ella , la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_A(D_A(F),M)_{(R)} \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n-1}_A(L_0,M)_{(R)} \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(D_A(A),M)_{(R)} \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_A(D_A(F),M)_{(R)} \cdots$$

de donde $\mathrm{Ext}^{n-1}_A(L_0,M)_{(R)} \overset{\psi}{\cong} \mathrm{Ext}^n_A(D_A(A),M)_{(R)}$ pues $\mathrm{Ext}^i_A(D_A(F),M)_{(R)} = 0$ con $i \geq 1$ ya que $D_A(F)$ es un A-módulo $\mathcal{E}_{(R)}$-proyectivo .

Si $a \in \mathrm{Ext}^n_A(D_A(A),M)_{(R)}$ sea $\psi^{-1}(a) = \theta = [M \rightarrowtail M_1 \to \cdots \to M_{n-1} \twoheadrightarrow L_0]$

y definimos entonces

$$\chi^n(a) = \left[\begin{tikzcd}[column sep=small] M \arrow[r, tail] & M_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & \Sigma_A \arrow[r, two heads] & A \\ & & & & L_0 \arrow[ur, tail] & & \end{tikzcd}\right]$$

Se tiene que Ω^n y χ^n son inversas una de la otra. En efecto:

$\Omega^n \chi^n(a) = \psi(\theta) = \psi\psi^{-1}(a) = a$, esto es , $\Omega^n \chi^n = 1$

Para ver que $\chi^n \Omega^n = 1$ sea

$$b = \left[\begin{tikzcd}[column sep=small] M \arrow[r, tail] & M_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & B \arrow[r, two heads] & A \\ & & & & L \arrow[ur, tail] & & \end{tikzcd}\right]$$

un elemento de $E^n_Q(A,M)_{(R)}$ y sea $a = \Omega^n(b)$

Considerando el diagrama inducido por (1)

$$\begin{tikzcd}
L_0 \arrow[r, tail] \arrow[d, "h"] & D_A(\Sigma_A) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "D_A(g)"] & D_A(A) \arrow[d, equal] \\
L \arrow[r, tail] & D_A(B) \arrow[r, two heads] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

se tendrá , por la naturalidad de la serie larga del funtor Ext^i_A en la primera variable , el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^{n-1}_A(L,M)_{(R)} \arrow[r, dash, "\Delta"] \arrow[d, "h^*"] & \mathrm{Ext}^n_A(D_A(A),M)_{(R)} \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^{n-1}_A(L_0,M)_{(R)} \arrow[r, dash, "\psi"] & \mathrm{Ext}^n_A(D_A(A),M)_{(R)}
\end{tikzcd}$$

Entonces $a = \Delta(b') = \psi h^*(b')$ siendo $b' = [\, M \rightarrowtail M_1 \cdots M_{n-1} \twoheadrightarrow L \,]$

y por tanto $\chi^n(a) = \chi^n \psi h^*(b')$.

Como $h^*(b') = [\, M \rightarrowtail M_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_{n-2} \longrightarrow M'_{n-1} \twoheadrightarrow L_0 \,]$

obtenida por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & M_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & M'_{n-1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "u"] & L_0 \arrow[d, "h"] \\
M \arrow[r, dash] & M_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_{n-2} \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[r, two heads] & L
\end{tikzcd}$$

se tendrá :

$$\begin{tikzcd}
\chi^n(a) = [\, M \arrow[r, tail] & M_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & \Sigma_A \arrow[r, two heads] & A \,] \\
& & & & L_0 \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

y puesto que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & M_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & M'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, "u"] & & \Sigma_A \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "g"] & A \arrow[dd, equal] \\
& & & & & L_0 \arrow[ur, tail] \arrow[dd, "h"] & & \\
M \arrow[r, tail] & M_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_{n-2} \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & B \arrow[r, two heads] & A \\
& & & & & L \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

será $\quad \chi^n \Omega^n(b) = b \quad$, esto es , $\chi^n \Omega^n = 1$

Se tiene establecida así una biyección que además puede comprobarse fácilmente que se trata de un morfismo de grupos.

Si ponemos $\quad E_Q(A,M)_{(R)} = E^1_Q(A,M)_{(R)}$ y tenemos en cuenta (2.3.4) podemos concluir

(2.3.10) TEOREMA

Existe un isomorfismo

$$E^n_Q(A,M)_{(R)} \cong \overline{H}^n(A,M)_{(R)} \qquad n \geq 1$$

2.4. RELACION ENTRE LAS TEORIAS DE COHOMOLOGIA

Nuestro objetivo en este punto será encontrar morfismos naturales que conecten las distintas teorias de cohomología definidas en 1.2. para una variedad de $\underline{C}$ y terminaremos exponiendo la condición sobre la variedad que permi- uniformizar el estudio de dichas teorias de cohomología .

Considerando la factorización , para cualquier variedad de $\underline{C}$, del diagrama de funtores adjuntos en (1.1.26) , nos preocupamos inicialmente de las conexiones existentes entre los grupos de cohomología del cotriple inducido por la adjunción a conjuntos y la relativa a módulos.

(2.4.1) Teniendo en cuenta las adjunciones de (1.1.2) y (1.1.22) se tiene el diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sets} \arrow[d, shift right, "F_2"'] \arrow[dd, bend right=60, "F_V"'] \\
{}_R M \arrow[u, shift right, "U_2"'] \arrow[d, shift right, "F_{1V}"'] \\
\underline{V} \arrow[u, shift right, "U_{1V}"'] \arrow[uu, bend right=60, "U_V"']
\end{tikzcd}$$

Sea $\mathbb{G} = (G, \delta, \varepsilon)$ el cotriple inducido en $\underline{V}$ por la adjunción $F_V \dashv U_V$ donde:

$$G = F_V U_V : \underline{V} \longrightarrow \underline{V} \quad ; \quad \delta : F_V U_V \longrightarrow I_{\underline{V}} \quad ; \quad \varepsilon = F_V \eta U_V : G \longrightarrow G^2$$

siendo $\eta : I_{Sets} \longrightarrow U_V F_V$ la unidad de la adjunción , y sea $\mathbb{G}_R = (G_R, \delta_R, \varepsilon_R)$ el inducido en $\underline{V}$ por la adjunción $F_{1V} \dashv U_{1V}$ donde :

$$G_R = F_{1V} U_{1V} : \underline{V} \longrightarrow \underline{V} \; ; \; \delta_R : F_{1V} U_{1V} \longrightarrow I_{\underline{V}} \quad y$$

$\varepsilon_R = F_{1V} \eta_R U_{1V} : G_R \longrightarrow G_R^2$ siendo η_R la unidad de la adjunción.

En ${}_R M$ se inducirá también un cotriple por la adjunción $F_2 \dashv U_2$ cuya counidad denotaremos δ' .

(2.4.2) Definimos una transformación natural
$$\begin{tikzcd} \underline{V} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G_R"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow r"] & \underline{V} \end{tikzcd}$$
por

$r = F_{1V} \; \delta' \; U_{1V}$, es decir , para cada $A \in \underline{V}$ será

$r_A = F_{1V} \delta'_{U_{1V} A} : GA \longrightarrow G_R A$, que es claramente un epimorfismo sobre y en general , para $n > 1$ definimos inductivamente :

$r_1 = r$ y r_{n+1} como la composición horizontal

$$\begin{tikzcd} \underline{V} \arrow[r, bend left, "G^n"] \arrow[r, bend right, "G_R^n"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow r_n"] & \underline{V} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G_R"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow r"] & \underline{V} \end{tikzcd}$$

de modo que
$$r_{n+1_A} = (r\, r_n)_A = G_R r_{n_A} \; r_{n_{GA}} = r_{n_{G_R A}} \; G r_{n_A}$$

Podemos definir r_{n+1} tambien , como la composición horizontal

$$\begin{tikzcd} \underline{V} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G_R"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow r"] & \underline{V} \arrow[r, bend left, "G^n"] \arrow[r, bend right, "G^n_R"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow r_n"] & \underline{V} \end{tikzcd}$$

esto es , $\quad r_{n+1_A} = (r_n\, r)_A = G^n_R r_A\; r_{n_{GA}} = r_{n_{G_R A}}\; G^n r_A$

pues $\quad r_{n+1} = r G^n_R\; Gr_n = r_n G_R\; G^n r \qquad n \geq 1$. En efecto :

n= 1 $\quad rG_R\; Gr = G_R r\; rG = rG_R\; Gr$

n> 1 $\quad r_n G_R\; G^n r = (\, r_{n-1} G_R\; G^{n-1} r\,)\, G_R\; G^n r = (\, rG^{n-1}_R\; Gr_{n-1})\, G_R\; G^n r =$

$$= rG^n_R\; Gr_{n-1} G_R\; G^n r = rG^n_R\; G(\, r_{n-1} G_R\; G^{n-1} r) = rG^n_R\; Gr_n$$

(2.4.3) Si consideramos las resoluciones simpliciales de $A \in \underline{V}$ inducidas por los cotriples $\mathbb{G}$ y $\mathbb{G}_R$, que denotaremos respectivamente , $\mathbb{G}_\bullet(A)$ y $\mathbb{G}_{R\bullet}(A)$ se tiene un epimorfismo de resoluciones simpliciales

$$r_\bullet = (\, r_n\,)_{n \geq 1} : \mathbb{G}_\bullet(\;\;) \longrightarrow \mathbb{G}_{R\bullet}(\;\;)$$

lo cual quiere decir , que en el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G}_\bullet(A) = \arrow[d, "r_\bullet"] & \cdots\; G^{n+1}(A) \arrow[r, shift left, "\delta_n"] \arrow[r, shift right, "\delta_0"'] \arrow[d, "r_{n+1}"] & G^n(A) \arrow[d, "r_n"] & \cdots\; G^2(A) \arrow[r, shift left, "\delta_1"] \arrow[r, shift right, "\delta_0"'] \arrow[d, "r_2"] & G(A) \arrow[r, two heads, "\delta"] \arrow[d, "r_1"] & A \arrow[d, equal] \\ \mathbb{G}_{R\bullet}(A) = & \cdots\; G^{n+1}_R(A) \arrow[r, shift left, "\partial_n"] \arrow[r, shift right, "\partial_0"'] & G^n_R(A) & \cdots\; G^2_R(A) \arrow[r, shift left, "\partial_1"] \arrow[r, shift right, "\partial_0"'] & G_R(A) \arrow[r, two heads, "\delta_R"] & A \end{tikzcd}$$

donde $\quad \delta_i = G^{n-i}\delta G^i \qquad$ y $\qquad \partial_i = G^{n-i}_R\, \delta_R\, G^i_R$

se ha de verificar $\qquad r_n \delta_i = \partial_i\, r_{n+1} \qquad i = 0, \ldots, n$

Para ello tengamos en cuenta en principio las siguientes propiedades .

(a) δ_R es precisamente el morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G(A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "r_1"'] & A \arrow[d, equal] \\
G_R(A) \arrow[r, "\delta_R"] & A
\end{tikzcd}$$

$$\delta_{RA}\, r_{1A} = \delta_{RA}\, F_{1V}\, \delta'_{U_{1V}A} : \begin{tikzcd}
F_{1V}F_2U_2U_{1V}(A) \arrow[r, "F_1\delta' U_{1V}A"] \arrow[d, equal] & F_{1V}U_{1V}A \arrow[r, "\delta_{RA}"] & A \\
GA \arrow[urr, "\delta_A"'] & &
\end{tikzcd}$$

(b) Dado el morfismo $\delta_R : G_R A \longrightarrow A$, por la naturalidad de r_n se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G^n G_R A \arrow[r, "G^n\delta_R"] \arrow[d, "r_n G_R"'] & G^n A \arrow[d, "r_n"] \\
G_R^{n+1} A \arrow[r, "G_R^n \delta_R"] & G_R^n A
\end{tikzcd}$$

(c) Por la naturalidad de $G^{m-i}\delta G^i$, dado r_n se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G^{m+1}G^n A \arrow[r, "G^{m+1}r_n"] \arrow[d, "G^{m-i}\delta G^i G^n"'] & G^{m+1}G_R^n A \arrow[d, "G^{m-i}\delta G^i G_R^n"] \\
G^m G^n A \arrow[r, "G^m r_n"] & G^m G_R^n A
\end{tikzcd}$$

Entonces , haciendo inducción sobre n , tenemos :

$n = 1$ $\quad \partial_1 r_2 = \delta_R G_R \cdot r_2 = \delta_R G_R \cdot r_1 G_R \cdot G r_1 = \delta G_R \cdot G r_1 = r_1 \cdot \delta G = r_1\, \delta_1$

Utilizando (a) y (b) para $m=0$, $n=1$

$$\partial_0 r_2 = G_R\delta_R . r_1 G_R . Gr_1 = r_1 . G\delta_R . Gr_1 = r_1 . G\delta = r_1\delta_0$$

Supongamos que $\partial_i r_n = r_{n-1}\delta_i$ $\quad i=0,\dots,n-1$, $n>1$. Entonces:

Si $i>0$

$$\partial_i r_{n+1} = G_R^{n-i}\delta_R G_R^{i} . r_n G_R . G^n r =$$

$$= (G_R^{n-i}\delta_R G_R^{i} r_n) G_R . G^n r = (r_{n-1} G^{n-i}\delta G^{i-1}) G_R . G^n r =$$

$$= r_{n-1} G_R . G^{n-i}\delta G^{i-1} G_R . G^n r = r_{n-1} G_R . G^{n-1} r . G^{n-i}\delta G^{i-1} G =$$

$$= r_n \delta_i$$

Si $i=0$

$$\partial_0 r_{n+1} = G_R^n\delta_R . r_n G_R . G^n r = r_n . G^n\delta_R . G^n r = r_n . G^n\delta = r_n\delta_0$$

(2.4.4) " Morfismos cambio de cotriple Relativo-Absoluto "

Por comodidad , denotaremos en lo que sigue $\mathbb{G}$ y $\mathbb{G}_R$ a los correspondientes cotriples en $(\underline{V}, A)$ inducidos por $\mathbb{G}$ y $\mathbb{G}_R$ en $\underline{V}$ y definidos en (2.4.1).

Entonces , si $A \in \underline{V}$, M es un A-módulo en $\underline{V}$ y $B \longrightarrow A$ es un objeto de la comacategoría $(\underline{V}, A)$, considerando el morfismo de resoluciones simpliciales inducido por $r_\bullet : \mathbb{G}_\bullet \longrightarrow \mathbb{G}_{R\bullet}$ ((2.4.3)) y aplicando el funtor $\operatorname{Der}(\ , M)$, obtenemos morfismos naturales

$$r_B^n : H^n(B, M)_R \longrightarrow H^n(B, M)$$

entre los grupos de cohomología definidos en (1.2.1)

Sea ahora
$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$
un epimorfismo perteneciente a la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{RA}}$ (y por tanto a $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_A}$) .

La naturalidad de $r_\bullet$ implica la conmutatividad del diagrama de resoluciones simpliciales

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{G}_\bullet(B_1) \arrow[dl, "r_{\bullet B_1}"'] \arrow[dd, "\mathbb{G}_\bullet(\sigma)" near start] \arrow[rr, dotted, no head] & & G^2(B_1) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & G(B_1) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & B_1 \arrow[dl, equal] \arrow[dd] \\
\mathbb{G}_{R\bullet}(B_1) \arrow[dd, "\mathbb{G}_{R\bullet}(\sigma)"'] \arrow[rr, dotted, no head] & & G_R^2(B_1) \arrow[rr] \arrow[dd] & & G_R(B_1) \arrow[rr] \arrow[dd] & & B_1 \arrow[dd] & \\
 & \mathbb{G}_\bullet(B_2) \arrow[dl, "r_{\bullet B_2}"] \arrow[rr, dotted, no head] & & G^2(B_2) \arrow[rr] \arrow[dl] & & G(B_2) \arrow[rr] \arrow[dl] & & B_2 \arrow[dl, equal] \\
\mathbb{G}_{R\bullet}(B_2) \arrow[rr, dotted, no head] & & G_R^2(B_2) \arrow[rr] & & G_R(B_2) \arrow[rr] & & B_2 &
\end{tikzcd}$$

Si M es un A-modulo , aplicando el funtor $\mathrm{Der}(\ \ ,M)$ y tomando conúcleos , obtenemos el diagrama conmutativo de complejos de cadenas en grupos abelianos , con filas exactas cortas

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}(G_R(B_2),M) \arrow[r, tail] \arrow[d, "r^*_{\bullet B_2}"] & \mathrm{Der}(G_R(B_1),M) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "r^*_{\bullet B_1}"] & \mathrm{Der}^{\#}(G_R^{\#}(\sigma),M) \arrow[d, "r^*_{\bullet\sigma}"] \\
\mathrm{Der}(G(B_2),M) \arrow[r, tail] & \mathrm{Der}(G(B_1),M) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Der}^{\#}(G^{\#}(\sigma),M)
\end{tikzcd}$$

donde denotamos $\mathbb{G}^{\#}_{(R)}$ y $\mathrm{Der}^{\#}(\ \ ,M)$ al cotriple y al funtor inducidos, en la categoría cuyos objetos son los epimorfismos pertenecientes a $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$, por $\mathbb{G}_{(R)A}$ y $\mathrm{Der}(\ \ ,M)$ (Para mas detalle véase [18]) , y donde $r^*_{\bullet\sigma}$ es el correspondiente morfismo inducido en los conúcleos , el cual inducirá a su vez morfismos

$$r^n_\sigma : H^n(\sigma, M)_R \longrightarrow H^n(\sigma, M)$$

entre los grupos de cohomología definidos en (1.2.1).

Además , el diagrama anterior nos lleva a la conmutatividad del diagrama de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & Der(B_2, M) & \longrightarrow & Der(B_1, M) & \longrightarrow & H^0(\sigma, M)_R & \longrightarrow & H^1(B_2, M)_R & \longrightarrow \cdots \\ & \| & & \| & & \wr\| & & \downarrow r^1_{B_2} & \\ 0 \longrightarrow & Der(B_2, M) & \longrightarrow & Der(B_1, M) & \longrightarrow & H^0(\sigma, M) & \longrightarrow & H^1(B_2, M) & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

donde r^0_σ es un isomorfismo por (1.2.4).

A los morfismos r^n_B y r^n_σ les llamaremos morfismos cambio de co-triple " relativo-absoluto " .

Puede apreciarse el paralelismo formal entre dichos morfismos y los morfismos "cambio de variedad" introducidos por Leedham-Green en ([68]) y estudiados exhaustivamente por Cegarra en ([18]) , en el contexto de una categoría de interés .

La siguiente proposición , que nos demuestra que el morfismo $r^1_B : H^1(B, M)_R \longrightarrow H^1(B, M)$ es un monomorfismo , nos permite tambien la introducción de $H^1(B, M)_R$ a partir de los grupos de cohomología absolutos.

(2.4.5) PROPOSICION

Si $B \longrightarrow A \in (\underline{V}, A)$ y M es un A-módulo en $\underline{V}$ y si

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\sigma} & B \\ & \searrow \; \swarrow & \\ & A & \end{array}$$

es una presentación $\mathbb{G}_{RA}$-proyectiva de $B \longrightarrow A$ entonces

$$H^1(B, M)_R = \operatorname{Ker}(\, H^1(B, M) \xrightarrow{\sigma^*} H^1(P, M))$$

Demostración:

Dado el epimorfismo σ se tiene por (2.4.4) el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^0(\sigma, M)_R \arrow[r] \arrow[d, equal, "\wr"] & H^1(B, M)_R \arrow[r] \arrow[d, "r_B^1"] & H^1(P, M)_R \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^0(\sigma, M) \arrow[r] & H^1(B, M) \arrow[r] & H^1(P, M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

y teniendo en cuenta que $H^1(P, M)_R = 0$, se deduce la exactitud de la sucesión

$$H^1(B, M)_R \xrightarrow{r_B^1} H^1(B, M) \longrightarrow H^1(P, M)$$

Puede observarse , de forma natural , que el monomorfismo r_B^1 se comporta, en términos de extensiones , aplicando una clase de R-extensiones singulares en la misma clase considerada en $E(B, M)$ ((1.2.8)) .

(2.4.6) Encontramos tambien ahora morfismos naturales que conectan los grupos de cohomología equilibrada $\overline{H}^n(A, M)_R$ y $\overline{H}^n(A, M)$ definidos en (1.2.10)

En efecto , podemos considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots & P_n \arrow[r] \arrow[d, "\phi_n"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"] & P_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi_0"] & D_A(A) \arrow[d, equal] \\
\cdots & P_{n_R} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{1_R} \arrow[r] & P_{0_R} \arrow[r, two heads] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

donde la fila superior es una resolución $\mathcal{E}$-proyectiva de $D_A(A)$, la fila inferior una resolución $\mathcal{E}_R$-proyectiva de $D_A(A)$ y los morfismos ϕ_n , que constituyen una aplicación de cadenas entre ambos complejos , son obtenidos teniendo en cuenta que $\mathcal{E}_R \subseteq \mathcal{E}$ y la fila inferior es acíclica .

Para cualquier A-módulo M , aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(\ ,M)$ al diagrama anterior tenemos

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0, M)_R \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0^*"] & \mathrm{Hom}_A(P_1, M)_R \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1^*"] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_n, M)_R \arrow[r] \arrow[d, "\phi_n^*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_0, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_1, M) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_n, M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

que induce morfismos naturales :

$$\phi^n : \bar{H}^n(A, M)_R \longrightarrow \bar{H}^n(A, M)$$

(2.4.7) PROPOSICION

$\phi^1 : \bar{H}^1(A, M)_R \longrightarrow \bar{H}^1(A, M)$ es un monomorfismo .

Demostración :

Sea $L \rightarrowtail P_R \twoheadrightarrow D_A(A)$ una presentación $\mathcal{E}_R$- proyectiva de $D_A(A)$. Asociada a esta sucesión exacta corta se tiene el diagrama conmutativo para cada A-módulo M

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(D_A(A), M) \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_A(P_R, M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_A(L, M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1_A(D_A(A), M)_R \arrow[r] \arrow[d, "\phi^1"] & \mathrm{Ext}^1_A(P_R, M)_R \cdots \\
\mathrm{Hom}_A(D_A(A), M) \arrow[r, tail] & \mathrm{Hom}_A(P_R, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(L, M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(D_A(A), M) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(P_R, M) \cdots
\end{tikzcd}$$

y puesto que $\mathrm{Ext}^1_A(P_R, M)_R = 0$, se deduce la exactitud de la sucesión

$$\mathrm{Ext}^1_A(D_A(A), M)_R \rightarrowtail \mathrm{Ext}^1_A(D_A(A), M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(P_R, M)$$

esto es , $\bar{H}^1(A, M)_R = \mathrm{Ker}(\bar{H}^1(A, M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(P_R, M))$

Es claro por otra parte , después de la interpretación de los grupos $\overline{H}^n(A, M)_{(R)}$ como grupos de (R)-n-extensiones de módulos ((1.2.14)) , el comportamiento de ϕ^1 en terminos de extensiones .

(2.4.8) En orden a relacionar los grupos $\tilde{H}^n(A, M)_R$ y $\tilde{H}^n(A, M)$ definidos en (1.2.15) observemos que a nivel uno , según (2.4.5) y (1.2.9) se tiene un monomorfismo

$$\tilde{H}^1(A, M)_R \longrightarrow \tilde{H}^1(A, M)$$

En general , para cualquier $n \geq 1$, si $E \in \tilde{H}^n(A, M)_R$ definimos

$$\psi^n : \tilde{H}^n(A, M)_R \longrightarrow \tilde{H}^n(A, M)$$

por $\psi(E) = E$, considerada la R-n-extensión E como n-extensión despues de tener en cuenta la inclusión entre las clases de epimorfismos $\mathcal{E}_R \subseteq \mathcal{E}$.

Se obtienen así morfismos naturales ψ^n conectando dichos grupos de cohomología y como observabamos anteriormente ψ^1 es un monomorfismo que coincide con r_A^1 ((2.4.4)).

Una vez estudiados los morfismos naturales entre los grupos de cohomología relativos y absolutos para cada teoría de cohomología definida en 1.2. pretendemos a continuación relacionar entre si a dichas teorías de cohomología.

(2.4.9) PROPOSICION

Para cada $A \in \underline{V}$ y cada A-módulo M existen morfismos naturales en M

$$t^n_{(R)} : \overline{H}^n(A, M)_{(R)} \longrightarrow H^n(A, M)_{(R)}$$

Demostración :

Puesto que el funtor D_A lleva objetos $\mathfrak{G}_{RA}$-proyectivos en A-módulos $\mathcal{E}_{(R)}$-proyectivos , en el complejo

$$\cdots \longrightarrow D_A G^{n+1}_{(R)}(A) \longrightarrow D_A G^{n}_{(R)}(A) \longrightarrow \cdots \qquad \longrightarrow D_A G_{(R)}(A) \longrightarrow 0$$

cada punto es un A-módulo $\mathcal{E}_{(R)}$-proyectivo .

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & D_A G^{n}_{(R)}(A) \arrow[r] \arrow[d, "t_n"] & D_A G^{n-1}_{(R)}(A) \arrow[r] \arrow[d, "t_{n-1}"] & \cdots \quad \arrow[r] & D_A G_{(R)}(A) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "t_1"] & D_A(A) \arrow[d, equal] \\
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \cdots \quad \arrow[r] & P_1 \arrow[r, two heads] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

donde la fila inferior es una resolución $\mathcal{E}_{(R)}$-proyectiva de $D_A(A)$ y los morfismos t_i constituyen una aplicación de cadenas entre los complejos dados , obtenida teniendo en cuenta que en el diagrama anterior , la fila superior es proyectiva y la de abajo acíclica .

Para cualquier A-módulo M , aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_A(\ \ ,M)$ se tendrá el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_1, M) \arrow[r] \arrow[d, "t_1^*"] & \cdots \quad \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(P_{n-1}, M) \arrow[r] \arrow[d, "t_{n-1}^*"] & \mathrm{Hom}_A(P_n, M) \arrow[r] \arrow[d, "t_n^*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(D_A G_{(R)}(A), M) \arrow[r] & \cdots \quad \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(D_A G^{n-1}_{(R)}(A), M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(D_A G^{n}_{(R)}(A), M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

El complejo superior nos da los grupos $\overline{H}^n(A, M)_{(R)}$ y teniendo en cuenta que la fila inferior es equivalente , despues de (1.1.25) , a la

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(G_{(R)}(A), M) \longrightarrow \cdots \qquad \longrightarrow \mathrm{Der}(G^{n-1}_{(R)}(A), M) \longrightarrow \mathrm{Der}(G^{n}_{(R)}(A), M) \longrightarrow \cdots$$

dicha fila nos da los grupos $H^n(A,M)_{(R)}$, obteniéndose asi morfismos naturales en M

$$t^n_{(R)}: \bar{H}^n(A,M)_{(R)} \longrightarrow H^n(A,M)_{(R)}$$

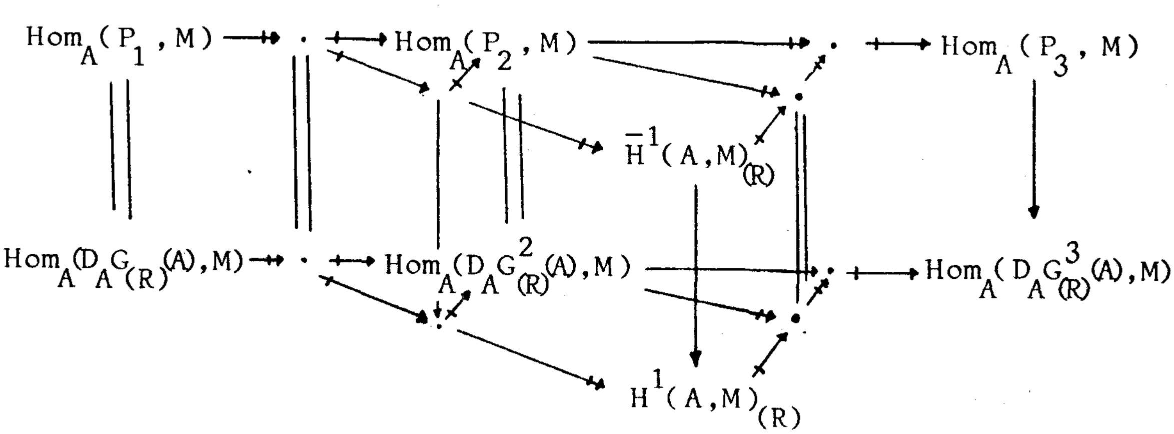
(2.4.10) PROPOSICION

$t^1_{(R)}: \bar{H}^1(A,M)_{(R)} \longrightarrow H^1(A,M)_{(R)}$ es un monomorfismo .

Demostración:

Puesto que $D_AG^2_{(R)}(A) \longrightarrow D_AG_{(R)}(A) \twoheadrightarrow D_A(A)$ es exacta , podemos tomar $P_1 = D_AG_{(R)}(A)$, $P_2 = D_AG^2_{(R)}(A)$ de forma que dicha sucesión constituya los dos primeros puntos de una resolución $\mathcal{E}_{(R)}$-proyectiva de $D_A(A)$.

Explicitando entonces el diagrama que da el morfismo $t^1_{(R)}$



se concluye que es un monomorfismo como primer morfismo de una composición que lo es .

(2.4.11) Encontraremos , por último , morfismos naturales conectando los grupos de cohomología equilibrada con los grupos de cohomología de extensiones, definidos ambos en 1.2.

Para ello , teniendo en cuenta la interpretación de los grupos $\overline{H}^n(A, M)_{(R)}$ en (2.3.10) y si $s \in E_Q^n(A, M)_{(R)}$ definimos

$$\rho^n_{(R)}: \overline{H}^n(A,M)_{(R)} \longrightarrow \tilde{H}^n(A,M)_{(R)} \qquad n \geq 1$$

por $\rho^n_{(R)}(s) = s$ considerada meramente como R-n-extensión de A por M .

Es rutinario comprobar ahora que $\rho^n_{(R)}$ es un morfismo de grupos natural en M , y obsérvese que a nivel uno , después de (1.2.9) , el morfismo $\rho^1_{(R)}$ coincide con el monomorfismo $t^1_{(R)}$ establecido en (2.4.10)

La condición de (R)-equilibrio para una variedad de $\underline{C}$ dada en (2.2.1) y caracterizada en (2.2.2) y en (2.2.4) es la condición que permite uniformizar el estudio de las tres teorias de cohomología definidas sobre ella en 1.2. como veremos a continuación .

(2.4.12) PROPOSICION

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$, $A \in \underline{V}$ y M un A-módulo en $\underline{V}$. Si $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A , entonces se tienen isomorfismos

$$H^n(A, M)_{(R)} \cong \overline{H}^n(A, M)_{(R)} \cong \tilde{H}^n(A, M)_{(R)} \qquad n \geq 1$$

Demostración :

$H^n(A, M)_{(R)} \cong \overline{H}^n(A, M)_{(R)}$ por (2.2.7) y $H^n(A, M)_{(R)} \cong \tilde{H}^n(A,M)_{(R)}$ pues a nivel uno coinciden según (1.2.9) y ambos se anulan cuando el módulo de coeficientes es $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo (hipótesis y (1.2.18)) de modo que ambos son el n-ésimo $\mathcal{E}_{(R)}$-satélite del funtor $H^1(A, \ )_{(R)}$ (véase [49]) .

(2.4.13) PROPOSICION

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$, $A\in\underline{V}$ y M un A-módulo en $\underline{V}$. Si $H^1(A,M)_{(R)} \cong \bar{H}^1(A,M)_{(R)}$ entonces $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A .

Demostración:

Para cualquier A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo I se tiene claramente que $\bar{H}^1(A,I)_{(R)}=0$ y por tanto $H^1(A,I)_{(R)}=0$. Utilizando ahora la condición de equilibrio (2.2.2) se concluye que $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A .

(Equivalentemente , $t^1_{(R)}$ en (2.4.10) es un isomorfismo y por (1.2.9), (2.2.4) y (2.3.4) se deduce que $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A)

(2.4.14) PROPOSICION

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$, $A\in\underline{V}$ y M un A-módulo en $\underline{V}$. Si $H^1(A,M)_{(R)} \cong \bar{H}^1(A,M)_{(R)}$ entonces se tienen isomorfismos

$$\bar{H}^n(A,M)_{(R)} \cong H^n(A,M)_{(R)} \cong \tilde{H}^n(A,M)_{(R)} \qquad n\geq 1$$

Demostración:

(2.4.12) , (2.4.13)

2.5. LA COHOMOLOGIA EQUILIBRADA OBTENIDA POR COTRIPLES

Si $\underline{V}$ es una variedad de $\underline{C}$, estudiaremos en este apartado como los grupos de cohomología equilibrada $\overline{H}^n(A,M)_{(R)}$ definidos en (1.2.10) pueden obtenerse como grupos de cohomología en el sentido de Barr-Beck ([13]) respecto a un cierto cotriple y de forma que los morfismos de conexión obtenidos en (2.4.9), $t^n_{(R)} : \overline{H}^n(A,M)_{(R)} \longrightarrow H^n(A,M)_{(R)}$, corresponderán precisamente a los morfismos cambio de cotriple inducidos por el cotriple usual en $(\underline{V}, A)$, $\mathbb{G}_{(R)A}$, y el construido, en este punto, en una subcategoría de $(\underline{V}, A)$.

Para simplificar notación, si $\underline{V}$ es una variedad de $\underline{C}$ y $A \in \underline{V}$, denotaremos $\mathbb{G}_{(R)} = (G_{(R)}, \delta_{(R)}, \varepsilon_{(R)})$ al cotriple $\mathbb{G}_{(R)A}$ inducido en la comacategoría $(\underline{V}, A)$ ((1.1.26)).

(2.5.1) Sea $G_{(R)}(A) \xrightarrow{\delta_{(R)A}} A$ la presentación $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)}}$-proyectiva de A correspondiente a la counidad y supongamos que tiene núcleo L.

La sucesión exacta $L \rightarrowtail G_{(R)}(A) \twoheadrightarrow A$ induce tal como se vio en (2.1.2) la sucesión exacta de A-módulos

$$\frac{L}{L^2} \xrightarrow{u} D_A(G_{(R)}(A)) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

Descomponiendo el morfismo u a través de la imagen

$$\begin{tikzcd} \frac{L}{L^2} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, twoheadrightarrow] & & D_A(G_{(R)}(A)) \\ & L_1 \arrow[ur, rightarrowtail] & \end{tikzcd}$$

tendremos la sucesión exacta corta de A-módulos

$$L_1 \rightarrowtail D_A(G_{(R)}(A)) \twoheadrightarrow D_A(A) \qquad (1)$$

Si $d : A \longrightarrow D_A(A)$ es la derivación correspondiente a la unidad de la adjunción $D_A \dashv J$, por (2.3.1) , existirá salvo equivalencia , una única (R)-extensión singular de A por L_1 , $L_1 \rightarrowtail \Sigma_A \twoheadrightarrow A$, de manera que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, tail] \arrow[dd] & G_{(R)}(A) \arrow[r, two heads, "\delta_{(R)A}"] & A \arrow[dd, "d"] \\
 & \Sigma_A \arrow[ur, two heads] \arrow[d] & \\
L_1 \arrow[r, tail] \arrow[ur, tail] & D_A(G_{(R)}(A)) \arrow[r, two heads] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

Además según (2.3.2) , esta (R)-extensión singular induce la sucesión de tres términos

$$L_1 \rightarrowtail D_A(\Sigma_A) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

y ésta es equivalente a la (R)-extensión de A-módulos (1) . En particular se tendrá $D_A(\Sigma_A) \cong D_A(G_{(R)}(A))$

Considerando en el diagrama anterior el morfismo $\delta_{(R)A}$ y la derivación $G_{(R)}(A) \longrightarrow D_A(G_{(R)}(A))$ correspondiente a la unidad de la adjunción $D_A \dashv J$, la propiedad universal expresada en (2.3.1) implica la existencia de un único morfismo $\theta_A : G_{(R)}(A) \longrightarrow \Sigma_A$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_{(R)}(A) \arrow[r, two heads, "\delta_{(R)A}"] \arrow[d, dashed, "\theta_A"] \arrow[dd, bend right] & A \arrow[dd, "d"] \\
\Sigma_A \arrow[ur, two heads] \arrow[d] & \\
D_A(G_{(R)}(A)) \arrow[r, two heads] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

Por otra parte , el diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & G_{(R)}(A) \arrow[d, "\theta_A"] \\
\frac{L}{L^2} \arrow[d, two heads] & \Sigma_A \arrow[d] \\
L_1 \arrow[r, tail] & D_A(G_{(R)}(A))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo ya que el morfismo $\frac{L}{L^2} \longrightarrow D_A(G_{(R)}(A))$ es el único inducido por la derivación $d' : L \longrightarrow G_{(R)}(A) \longrightarrow \Sigma_A \longrightarrow D_A(G_{(R)}(A))$ (véase (2.2.6)).

Entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & G_{(R)}(A) \arrow[d, "\theta_A"] \\
L_1 \arrow[r, tail] & \Sigma_A
\end{tikzcd}$$

es conmutativo por la propiedad universal de Σ_A , (2.3.1) , y consecuentemente se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & G_{(R)}(A) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\theta_A"] & A \arrow[d, equal] \\
L_1 \arrow[r, tail] & \Sigma_A \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

de donde se deduce además que θ_A es un epimorfismo al ser el cuadrado de la izquierda cartesiano .

(2.5.2) Para $A \in \underline{V}$, sea $\mathcal{E}_A$ la subcategoria plena de $(\underline{V}, A)$ cuyos objetos son los epimorfismos sobre (R-escindentes) con núcleo singular , $B \twoheadrightarrow A$ y tales que inducen la sucesión de tres términos (véase (2.2.4)).

Observando que si $B \twoheadrightarrow A \in \mathcal{L}_A$, en el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, twoheadrightarrow] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
D_A(B) \arrow[r, twoheadrightarrow] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

B tiene la propiedad universal expresada en (2.3.1) para morfismos a A y derivaciones a $D_A(B)$, y considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_{(R)}(B) \arrow[r, twoheadrightarrow, "\delta_{(R)B}"] & B \arrow[r, twoheadrightarrow] \arrow[dd] & A \arrow[dd] \\
\Sigma_B \arrow[ur, twoheadrightarrow] \arrow[d] & & \\
D_A(G_{(R)}(B)) \arrow[r, twoheadrightarrow] & D_A(B) \arrow[r, twoheadrightarrow] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

donde Σ_B es obtenido como en (2.3.1) , es fácil probar que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_B \arrow[r, twoheadrightarrow] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
D_A(G_{(R)}(B)) \arrow[r, twoheadrightarrow] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

verifica de nuevo la propiedad universal expresada en (2.3.1) para morfismos a A y derivaciones a $D_A(G_{(R)}(B))$, de manera que si $L = \mathrm{Ker}\,(G_{(R)}(B) \twoheadrightarrow A)$ se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[r, tail] \arrow[dl, twoheadrightarrow] \arrow[dd] & G_{(R)}(B) \arrow[r, twoheadrightarrow] & B \arrow[r, twoheadrightarrow] \arrow[dd] & A \arrow[dd] \\
\frac{L}{L^2} \arrow[dr, twoheadrightarrow] & & \Sigma_B \arrow[ur, twoheadrightarrow] \arrow[d] & & \\
 & L_1 \arrow[r, tail] \arrow[ur, tail] & D_A(G_{(R)}(B)) \arrow[r, twoheadrightarrow] & D_A(B) \arrow[r, twoheadrightarrow] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

siendo $L_1 \rightarrowtail \Sigma_B \twoheadrightarrow A$ una (R)-extensión singular de A por L_1 que induce , por (2.3.2) , la sucesión de tres términos

$$L_1 \rightarrowtail D_A(\Sigma_B) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

siendo ésta equivalente a la (R)-extensión de A-módulos

$$L_1 \rightarrowtail D_A(G_{(R)}(B)) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

teniéndose en particular que $D_A(\Sigma_B) \cong D_A(G_{(R)}(B))$

Considerando en el diagrama anterior el morfismo $G_{(R)}(B) \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow A$ y la derivación $G_{(R)}(B) \longrightarrow D_A(G_{(R)}(B))$ correspondiente a la unidad de la adjunción $D_A \dashv J$, la propiedad universal de Σ_B implica la existencia de un único morfismo $\theta_B \colon G_{(R)}(B) \longrightarrow \Sigma_B$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_{(R)}(B) \arrow[rr, two heads] \arrow[d, "\theta_B"] \arrow[dd, bend right=40] & & A \arrow[dd] \\
\Sigma_B \arrow[d] & & \\
D_A(G_{(R)}(B)) \arrow[rr, two heads] & & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

y análogamente a (2.5.1) se tendrá el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, tail] \arrow[d] & G_{(R)}(B) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\theta_B"] & A \arrow[d, equal] \\
L_1 \arrow[r, tail] & \Sigma_B \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

de donde se deduce que θ_B es un epimorfismo .

(2.5.3) Definimos ahora en $\mathcal{E}_A$ un cotriple $\mathbb{G}'_{(R)} = (G'_{(R)} , \delta'_{(R)} , \epsilon'_{(R)})$ como sigue :

Dado $B \twoheadrightarrow A \in \mathcal{E}_A$ ponemos $G'_{(R)}(B \twoheadrightarrow A) = \Sigma_B \twoheadrightarrow B \twoheadrightarrow A$ como en (2.5.2) , y para simplificar denotaremos $G'_{(R)}(B \twoheadrightarrow A) = G'_{(R)}(B) = \Sigma_B$

Si $\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\sigma_1"'] & & B_2 \arrow[dl, "\sigma_2"] \\ & A & \end{tikzcd}$ es un morfismo en $\mathcal{E}_A$ tendremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & G_{(R)}(B_2) \arrow[rr, two heads, "\delta_{B_2}"] \arrow[d, "\theta_{B_2}"] & & B_2 \arrow[rr, two heads, "\sigma_2"] \arrow[dddd] & & A \arrow[dddd] \\
 & \Sigma_{B_2} \arrow[urr, two heads] \arrow[ddd] & & & & \\
G_{(R)}(B_1) \arrow[uur, "G_{(R)}(h)"] \arrow[rr, two heads, "\delta_{B_1}"] \arrow[d, "\theta_{B_1}"] & & B_1 \arrow[uur, "h"] \arrow[rr, two heads, "\sigma_1"] \arrow[ddd, no head] & & A \arrow[uur, equal] \arrow[ddd] & \\
\Sigma_{B_1} \arrow[uur, "\Sigma_h"] \arrow[urr, two heads] \arrow[dd] & & & & & \\
 & D_A(G_{(R)}(B_2)) \arrow[rr, two heads, "D_A(\delta_{(R)B_2})"] & & D_A(B_2) \arrow[rr, two heads, "D_A(\sigma_2)"] & & D_A(A) \\
D_A(G_{(R)}(B_1)) \arrow[ur, "D_A G_{(R)}(h)"] \arrow[rr, two heads, "D_A(\delta_{(R)B_1})"'] & & D_A(B_1) \arrow[ur, "D_A(h)"] \arrow[rr, two heads, "D_A(\sigma_1)"'] & & D_A(A) \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo Σ_h es obtenido por la propiedad universal de Σ_{B_2} considerando el morfismo $\Sigma_{B_1} \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_2$ y la derivación

$\Sigma_{B_1} \longrightarrow D_A(G_{(R)}B_1) \longrightarrow D_A(G_{(R)}B_2)$.

Definimos entonces $G'_{(R)}(h) = \Sigma_h$, esto es ,

$$G'_{(R)}\left(\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd} \right) = \begin{tikzcd} \Sigma_{B_1} \arrow[rr, "\Sigma_h"] \arrow[d] & & \Sigma_{B_2} \arrow[d] \\ B_1 \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

El carácter funtorial de $G'_{(R)}(\ )$ es claro de modo que tenemos ya definido el endofuntor del cotriple .

Definimos la counidad $\delta'_{(R)} : G'_{(R)} \longrightarrow I_{\mathcal{E}_A}$

tal que para cualquier $B \twoheadrightarrow A \in \mathcal{E}_A$, $\delta'_{(R)B} : G'_{(R)}(B) = \Sigma_B \twoheadrightarrow B$

es el morfismo obtenido como en (2.3.1) a partir de la derivación canónica

$B \longrightarrow D_A(B)$ y el morfismo $D_A(\delta_{(R)B})$.

$\delta'_{(R)}$ es una transformación natural . En efecto , dado $\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$

en $\mathcal{E}_A$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Sigma_{B_1} \arrow[r, two heads, "\delta'_{(R)B_1}"] \arrow[d, "\Sigma_h"] & B_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "h"] & A \arrow[d, equal] \\ \Sigma_{B_2} \arrow[r, two heads, "\delta'_{(R)B_2}"'] & B_2 \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}$$

es conmutativo , pues Σ_h es obtenido precisamente de forma que así lo sea .

Definimos por último la comultiplicación $\varepsilon'_{(R)} : G'_{(R)} \longrightarrow G'^{2}_{(R)}$

Para ello consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G^{2}_{(R)}B \arrow[r, shift right, two heads, "G_{(R)}\delta_B"'] \arrow[d, "G_{(R)}\theta_B"'] & G_{(R)}B \arrow[l, shift right, "\varepsilon_B"'] \arrow[r, two heads, "\delta_B"] \arrow[d, "\theta_B"] & B \arrow[r, two heads] \arrow[ddd] & A \arrow[ddd] \\
G_{(R)}\Sigma_B \arrow[ur, two heads, "G_{(R)}\delta'_B"] \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\theta_{\Sigma_B}"'] & \Sigma_B \arrow[ur, two heads, "\delta'_B"'] \arrow[dd, "t"] & & \\
\Sigma_{\Sigma_B} \arrow[ur, two heads] \arrow[d, "s"'] & & & \\
D_A(G_{(R)}\Sigma_B) \arrow[r, shift left, two heads, "D_AG_{(R)}\delta'_B"] & D_A(G_{(R)}B) \cong D_A(\Sigma_B) \arrow[l, shift left, "D_A(G_{(R)}\theta_B\,\varepsilon_B)"] \arrow[r, two heads] & D_A(B) \arrow[r, two heads] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

Puesto que $D_A(G_{(R)}\delta'_B) . D_A(G_{(R)}\theta_B . \varepsilon_B) = D_A(G_{(R)}\delta'_B . G_{(R)}\theta_B . \varepsilon_B) =$

$$= D_A(G_{(R)}(\delta'_B . \theta_B) . \varepsilon_B) = D_A(G_{(R)}\delta_B . \varepsilon_B) = D_A(I_{G_{(R)}B}) = I_{D_A(G_{(R)}B)}$$

en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_B \arrow[drr, equal, "I_{\Sigma_B}"] \arrow[ddr, "D_A(G_{(R)}\theta_B . \varepsilon_B) . t"'] & & \\
& \Sigma_{\Sigma_B} \arrow[r, two heads, "\delta'_{\Sigma_B}"'] \arrow[d, "s"] & \Sigma_B \arrow[d, "t"] \\
& D_A(G_{(R)}\Sigma_B) \arrow[r, two heads, "D_A(G_{(R)}\delta'_B)"'] & D_A(G_{(R)}B) \cong D_A(\Sigma_B)
\end{tikzcd}$$

se tiene $\quad D_A(G_{(R)}\delta'_B).D_A(G_{(R)}\theta_B\,\epsilon_B).t = t$

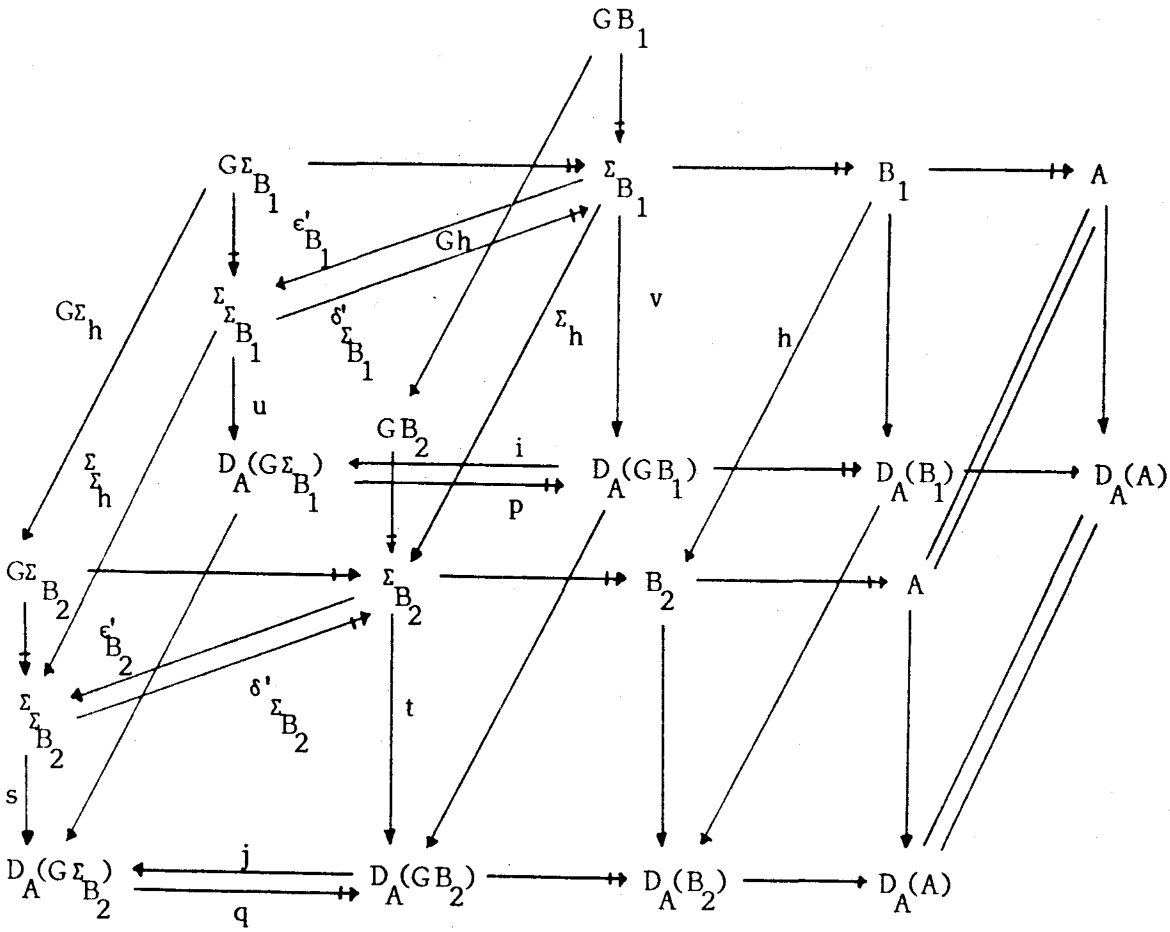
y entonces la propiedad universal de Σ_{Σ_B} implica la existencia de un único morfismo $\epsilon'_B : \Sigma_B \longrightarrow \Sigma_{\Sigma_B}$ tal que se tienen las igualdades

$$\delta'_{\Sigma_B}.\epsilon'_B = I_{\Sigma_B} \quad ; \quad s.\epsilon'_B = D_A(G_{(R)}\theta_B.\epsilon_B).t$$

La naturalidad de $\epsilon'_{(R)}$ equivale a probar la conmutatividad del siguiente diagrama para
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] B_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$
en $\pounds_A$

$$\begin{tikzcd} \Sigma_{\Sigma_{B_1}} \arrow[d, "\Sigma_{\Sigma_h}"'] & \Sigma_{B_1} \arrow[l, "\epsilon'_{B_1}"'] \arrow[d, "\Sigma_h"] \arrow[r, "\shortmid" marking] & A \arrow[d, equal] \\ \Sigma_{\Sigma_{B_2}} & \Sigma_{B_2} \arrow[l, "\epsilon'_{B_2}"] \arrow[r, "\shortmid" marking] & A \end{tikzcd}$$

y para ello consideramos el siguiente diagrama



donde $p = D_A(G\delta'_{B_1})$; $i = D_A(G\theta_{B_1}\epsilon_{B_1})$; $q = D_A(G\delta'_{B_2})$; $j = D_A(G\theta_{B_2}\epsilon_{B_2})$

Utilizamos ahora la propiedad universal de $\Sigma_{\Sigma_{B_2}}$ para probar que los dos morfismos $\epsilon'_{B_2}.\Sigma_h$ y $\Sigma_{\Sigma_h}.\epsilon'_{B_1}$ son iguales , esto es , teniendo en cuenta que $q.j.t.\Sigma_h = t.\Sigma_h$, y puesto que :

$\delta'_{\Sigma_{B_2}}.\epsilon'_{B_2}.\Sigma_h = \Sigma_h$; $s.\epsilon'_{B_2}.\Sigma_h = j.t.\Sigma_h$ y tambien ,

$$\delta'_{\Sigma_{B_2}} . \Sigma_{\Sigma_h} . \epsilon'_{B_1} = \Sigma_h . \delta'_{\Sigma_{B_1}} . \epsilon'_{B_1} = \Sigma_h$$

$$s.\Sigma_{\Sigma_h} . \epsilon'_{B_1} = D_A(G\Sigma_h).u.\epsilon'_{B_1} = D_A(G\Sigma_h).i.v = j.D_A(Gh).v = j.t.\Sigma_h$$

se tiene finalmente la igualdad requerida .

Para probar por último que $\mathbb{G}'_{(R)}$ es un cotriple , hemos de ver que $\delta'_{(R)}$ y $\epsilon'_{(R)}$ son transformaciones naturales verificando

i) $G'_{(R)}\delta'_{(R)} . \epsilon'_{(R)} = \delta'_{(R)}G'_{(R)} . \epsilon'_{(R)} = I_{G'_{(R)}}$

ii) $\epsilon'_{(R)} G'_{(R)} . \epsilon'_{(R)} = G'_{(R)}\epsilon'_{(R)} . \epsilon'_{(R)}$

En i) claramente se tiene por construcción de $\epsilon'_{(R)}$ que $\delta'_{(R)}G'_{(R)}.\epsilon'_{(R)} = I_{G'_{(R)}}$

Por otro lado la naturalidad de $\delta'_{(R)}$ da el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_B \arrow[r, "\delta'_B"] & B \\
\Sigma_{\Sigma_B} \arrow[u, "\Sigma_{\delta_B} = G'\delta'_B"] \arrow[r, "\delta'_{\Sigma_B}"'] & \Sigma_B \arrow[u, "\delta'_B"']
\end{tikzcd}$$

y entonces la propiedad universal de Σ_B en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_B \arrow[dr, shift left, "I_{\Sigma_B}"] \arrow[dr, shift right, "G'\delta'_B\epsilon'_B"'] \arrow[drr, bend left, "\delta'_B"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & \\
& \Sigma_B \arrow[r, "\delta'_B"] \arrow[d, "t"] & B \arrow[d, "1"] \\
& D_A(GB) \arrow[r, "\pi"] & D_A(B)
\end{tikzcd}$$

teniendo en cuenta que

$$\delta'_B . G'\delta'_B . \epsilon'_B = \delta'_B . \delta'_{\Sigma_B} . \epsilon'_B = \delta'_B . I_{\Sigma_B} = \delta'_B$$

$$t . G'\delta'_B . \epsilon'_B = D_A(\mathbb{G}\,\delta'_B) . s . \epsilon'_B = D_A(G\,\delta'_B) . D_A(G\theta_B . \epsilon_B) . t = t$$

nos da $\quad G'\delta'_B . \epsilon'_B = I_{\Sigma_B}$

ii) se obtiene de forma análoga utilizando la propiedad universal de $\Sigma_{\Sigma_{\Sigma_B}}$ para los morfismos $\epsilon'_{\Sigma_B} . \epsilon'_B$ y $G'\epsilon'_B . \epsilon'_B$ de Σ_B en $\Sigma_{\Sigma_{\Sigma_B}}$.

(2.5.4) Si denotamos $\mathcal{E}_{G'_{(R)A}}$ a la clase de epimorfismos asociada a la clase de objetos $\mathbb{G}'_{(R)}$-proyectivos se tiene que $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'_{(R)A}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$. En efecto , sea

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

perteneciente a $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'_{(R)A}}$

Considerando el morfismo $\delta'_{B_2} : \Sigma_{B_2} \twoheadrightarrow B_2$ existirá un morfismo $f: \Sigma_{B_2} \longrightarrow B_1$ tal que $\sigma . f = \delta'_{B_2}$ y como claramente $\delta'_{B_2} \in \mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$ es inmediato deducir que tambien $\sigma \in \mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)A}}$.

En la categoría de A-módulos tendremos de forma análoga a (1.1.26), la clase $\mathcal{E}'_{(R)}$ de epimorfismos que al olvidar por el funtor J pertenezcan a $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'_{(R)A}}$ y la clase de monomorfismos , $\mathcal{M}'_{(R)}$, asociada a dicha clase de epimorfismos.

(2.5.5) LEMA

Las clases de epimorfismos $\mathcal{E}_{(R)}$ y $\mathcal{E}'_{(R)}$ coinciden.

Demostración:

La inclusión $\mathcal{E}'_{(R)} \subseteq \mathcal{E}_{(R)}$ se tiene de forma evidente .

Para demostrar que $\mathcal{E}_{(R)} \subseteq \mathcal{E}'_{(R)}$ observemos que para cualquier A-módulo M existe una presentación $P \xrightarrow{\sigma} M$ con $\sigma \in \mathcal{E}'_{(R)}$ y P $\mathcal{E}_{(R)}$-proyectivo, pues considerando el epimorfismo $\delta'_{(R)M\daleth A} : \Sigma_{M\daleth A} \twoheadrightarrow M\daleth A$ la presentación buscada es la dada por la composición

$$D_A(\Sigma_{M\daleth A}) \xrightarrow[D_A(\delta'_{M\daleth A})]{} D_A(M\daleth A) = D_A J M \twoheadrightarrow M$$

(nótese que $D_A(\Sigma_{M\daleth A})$ es $\mathcal{E}_{(R)}$-proyectivo debido al isomorfismo con $D_A(G(M\daleth A))$).

Entonces dado $M' \xrightarrow{f} M \in \mathcal{E}_{(R)}$ y considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & D_A(\Sigma_{M\daleth A}) \cong D_A(G(M\daleth A)) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "\sigma"] \\
M' \arrow[r, two heads, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

puesto que $\sigma \in \mathcal{E}'_{(R)}$ se tiene que $f \in \mathcal{E}'_{(R)}$.

(2.5.6) Si $A \in \underline{V}$ y M es un A-módulo en $\underline{V}$, considerando la restricción del funtor Der(, M) a $\mathcal{L}_A$, podemos definir funtores de cohomología relativos al cotriple $\mathbb{G}'_{(R)}$ siguiendo la técnica de Barr-Beck en [13]

$$H^n(\ , M)_{\mathbb{G}'_{(R)}} = H^n(\ , \mathrm{Der}(\ , M))_{\mathbb{G}'_{(R)}} \qquad n \geq 0$$

Tendremos por tanto, respecto de estos grupos de cohomología, sucesiones exactas largas asociadas a una sucesión exacta corta de A-módulos

$L \rightarrowtail N \xrightarrow{\varepsilon} M$ con $\varepsilon \in \mathcal{E}'_{(R)}$, y a un epimorfismo
$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$
en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'_{(R)}A}$, a saber :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(B,L) \longrightarrow \mathrm{Der}(B,N) \longrightarrow \mathrm{Der}(B,M) \longrightarrow H^1(B,L)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \longrightarrow H^1(B,N)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \longrightarrow \cdots$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(B_2,M) \longrightarrow \mathrm{Der}(B_1,M) \longrightarrow H^0(\sigma,M)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \longrightarrow H^1(B_2,M)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \longrightarrow H^1(B_1,M)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \longrightarrow \cdots$$

Análogamente , teniendo en cuenta que el rango del funtor D_A es una categoría abeliana y considerando la restriccion de dicho funtor a $\pounds_A$, podremos definir en $\pounds_A$ funtores de homología con coeficientes en D_A relativos al cotriple $\mathbb{G}'_{(R)}$, $H_n(\ \ ,D_A)_{\mathbb{G}'_{(R)}}$ $n \geq 0$.

Tendremos entonces para
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma"'] & A \arrow[d, equal] \\ & A \end{tikzcd}$$
en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'_{(R)}A}$ una sucesión exacta larga natural

$$\cdots \longrightarrow H_1(A,D_A)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \longrightarrow H_0(\sigma,D_A)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \longrightarrow D_A(B) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

(2.5.7) PROPOSICION

Sea $B \xrightarrow{\sigma} A \in \pounds_A$. Considerando el epimorfismo
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[dr, "\sigma"'] & A \arrow[d, equal] \\ & A \end{tikzcd}$$
en $\pounds_A$, éste es un epimorfismo en $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'_{(R)}A}$.

Demostración :

Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & G'_{(R)}T \arrow[d, two heads, "f"] \\
L \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[d] & A \arrow[d, "d"] \\
L \arrow[r, tail] & D_A(B) \arrow[r, two heads, "h"] & D_A(A)
\end{tikzcd}$$

la sucesión exacta corta de A-módulos induce la sucesión exacta larga

$$Der(G'T,L) \rightarrowtail Der(G'T, D_A(B)) \xrightarrow{h_*} Der(G'T, D_A(A)) \longrightarrow H^1(G'T,L)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \longrightarrow \cdots$$

y como $H^1(G'T,L)_{\mathbb{G}'_{(R)}} = 0$ se deduce que h es un epimorfismo.

Teniendo en cuenta la derivación $d\,f : G'T \longrightarrow D_A(A)$, obtenemos una derivación $d' : G'T \longrightarrow D_A(B)$ tal que $h_*(d') = h.d' = d.f$.

Entonces por la propiedad universal de B en el cuadrado de la derecha (véase (2.3.1)) se obtiene un morfismo $g : G'T \longrightarrow B$ tal que $\sigma.g = f$ y por tanto $\sigma \in \mathcal{E}_{\mathbb{G}'_{(R)}A}$.

(2.5.8) Nuestro objetivo a continuación será conectar los grupos de cohomología en $(\underline{V}, A)$ y $\pounds_A$ respecto de los cotriples $\mathbb{G}_{(R)}$ y $\mathbb{G}'_{(R)}$.

Definimos una transformación natural

$$\begin{tikzcd}
\pounds_A \arrow[r, bend left=40, "G_{(R)}\cdot I"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "G'_{(R)}"'{name=D}] & (\underline{V}, A)
\arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

(siendo I el funtor de inclusión de $\pounds_A$ en $(\underline{V}, A)$)

de forma , que para $B \twoheadrightarrow A \in \pounds_A$, $\theta_{B \twoheadrightarrow A}$ al que denotaremos θ_B

es el morfismo $G_{(R)}(B) \twoheadrightarrow G'_{(R)}(B)=\Sigma_B$ encontrado en (2.5.2) .

Dado un morfismo
$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, two heads] & & B_2 \arrow[dl, two heads] \\ & A & \end{tikzcd}$$
la naturalidad equivale a demostrar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} GB_1 \arrow[r, "Gh"] \arrow[d, two heads, "\theta_{B_1}"'] & GB_2 \arrow[d, two heads, "\theta_{B_2}"] \\ \Sigma_{B_1} \arrow[r, "\Sigma_h"'] & \Sigma_{B_2} \end{tikzcd}$$

Para ello consideremos el diagrama :

$$\begin{tikzcd}
 & GB_2 \arrow[rr, two heads, "\delta_{B_2}"] \arrow[d, two heads, "\theta_{B_2}"] & & B_2 \arrow[rr, two heads] \arrow[ddd, "d_{B_2}"] & & A \arrow[ddd] \\
 & \Sigma_{B_2} \arrow[urr, two heads, "\delta'_{B_2}"] \arrow[dd, "n"'] & & & & \\
GB_1 \arrow[uur, "Gh"] \arrow[rr, two heads, "\delta_{B_1}"] \arrow[d, two heads, "\theta_{B_1}"] & & B_1 \arrow[rr, two heads] \arrow[uur, "h"] \arrow[dd, "d_{B_1}"] & & A \arrow[uur, equal] \arrow[dd] & \\
\Sigma_{B_1} \arrow[uur, "\Sigma_h"] \arrow[urr, two heads, "\delta'_{B_1}"] \arrow[d, "m"] & D_A(GB_2) \arrow[rr, two heads, "D_A\delta_{B_2}"] & & D_A(B_2) \arrow[rr, two heads] & & D_A(A) \\
D_A(GB_1) \arrow[ur, "D_AG(h)"] \arrow[rr, two heads, "D_A\delta_{B_1}"] & & D_A(B_1) \arrow[ur, "D_A(h)"] \arrow[rr, two heads] & & D_A(A) \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

Considerando el morfismo $\delta_{B_2} . Gh : GB_1 \longrightarrow B_2$

y la derivación $D_A G(h). m. \theta_{B_1} : GB_1 \longrightarrow D_A(GB_2)$, se tiene

$$D_A \delta_{B_2} . D_A Gh.m.\theta_{B_1} = D_A \delta_{B_2} . n.\theta_{B_2} . Gh = d_{B_2} . \delta'_{B_2} . \theta_{B_2} . Gh = d_{B_2} . \delta_{B_2} . Gh$$

y entonces , puesto que :

$$\delta'_{B_2} . \theta_{B_2} . G(h) = \delta_{B_2} . G(h) \quad ; \quad n.\theta_{B_2} . G(h) = D_A G(h).m.\theta_{B_1} \qquad \text{y}$$

$$\delta'_{B_2} . \Sigma_h . \theta_{B_1} = h.\delta'_{B_1} . \theta_{B_1} = h.\delta_{B_1} = \delta_{B_2} . G(h) \; ; \quad n.\Sigma_h . \theta_{B_1} = D_A G(h).m.\theta_{B_1}$$

la propiedad universal de Σ_{B_2} implica la conmutatividad requerida , esto es , que $\theta_{B_2} . G(h) = \Sigma_h . \theta_{B_1}$

Definimos ahora inductivamente para $n \geqslant 1$ transformaciones naturales como sigue :

$\theta_1 = \theta$ y supuesta definida θ_n definimos θ_{n+1} como la composicion

$$G^{n+1}_{(R)} . I = G_{(R)} . G^{n}_{(R)} . I \xrightarrow{G_{(R)}\theta_n} G_{(R)} . I . G'^{n}_{(R)} \xrightarrow{\theta G'^{n}_{(R)}} G'_{(R)} . G'^{n}_{(R)} = G'^{n+1}_{(R)}$$

es decir , $\theta_{n+1} = \theta G'^{n}_{(R)} . G_{(R)} \theta_n$

Un cálculo facil por inducción sobre n prueba que θ_{n+1} puede definirse tambien como la composición

$$\theta_{n+1} = \theta_n G'_{(R)} . G^{n}_{(R)} \theta$$

Para $B \twoheadrightarrow A \in \mathcal{E}_A$ podemos considerar las resoluciones simpliciales inducidas por los cotriples $\mathbb{G}_{(R)}$ y $\mathbb{G}'_{(R)}$ en $(\underline{V}, A)$ y $\mathcal{E}_A$ respectivamente a las que denotaremos $\mathbb{G}_{(R)\bullet}(B)$ y $\mathbb{G}'_{(R)\bullet}(B)$, y puede comprobarse de forma análoga al proceso realizado en (2.4.3) que

$$\theta_\bullet = (\theta_n)_{n \geqslant 1} : \mathbb{G}_{(R)\bullet}(B) \longrightarrow \mathbb{G}'_{(R)\bullet}(B)$$

es un morfismo de resoluciones simpliciales.

Entonces si $A \in \underline{V}$, M es un A-módulo y $B \twoheadrightarrow A \in \mathcal{E}_A$ considerando dicho morfismo de resoluciones simpliciales y aplicando el funtor Der(,M) obtenemos morfismos

$$\theta^n_B : H^n(B,M)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \longrightarrow H^n(B,M)_{(R)}$$

Por otro lado , si
$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$
es un epimorfismo en $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'_{(R)}A}$,

la naturalidad de $\theta_\bullet$ implica la conmutatividad del diagrama de resoluciones simpliciales

$$\begin{tikzcd} G_{(R)\bullet}(B_1) \arrow[r, "\theta_{\bullet B_1}"] \arrow[d, "G_{(R)\bullet}(\sigma)"'] & G'_{(R)\bullet}(B_1) \arrow[d, "G'_{(R)\bullet}(\sigma)"] \\ G_{(R)\bullet}(B_2) \arrow[r, "\theta_{\bullet B_2}"'] & G'_{(R)\bullet}(B_2) \end{tikzcd}$$

Si aplicamos ahora el funtor Der(, M) y tomamos conucleos, obtenemos el diagrama conmutativo de complejos de cadenas en grupos abelianos con filas exactas cortas

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Der}(G'_{(R)}(B_2),M) & \rightarrowtail & \mathrm{Der}(G'_{(R)}(B_1),M) & \twoheadrightarrow & \overset{\#}{\mathrm{Der}}(\overset{\#}{G'_{(R)}}(\sigma),M) \\
\downarrow{\scriptstyle \theta^*_{\cdot B_2}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^*_{\cdot B_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta^*_{\cdot\sigma}} \\
\mathrm{Der}(G_{(R)}(B_2),M) & \rightarrowtail & \mathrm{Der}(G_{(R)}(B_1),M) & \twoheadrightarrow & \overset{\#}{\mathrm{Der}}(\overset{\#}{G_{(R)}}(\sigma),M)
\end{array}$$

donde denotamos $\overset{\#}{\mathbb{G}'_{(R)}}$ y $\overset{\#}{\mathrm{Der}}(\ ,M)$ al cotriple y al funtor inducidos por $\mathbb{G}'_{(R)}$ y $\mathrm{Der}(\ ,M)$ en la categoría cuyos objetos son los epimorfismos pertenecientes a $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'_{(R)A}}$ y donde $\theta^*_{\cdot\sigma}$ es el correspondiente morfismo inducido en los conucleos , el cual inducirá a su vez morfismos en las cohomologías

$$\theta^n_\sigma : H^n(\sigma,M)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \longrightarrow H^n(\sigma,M)_{(R)}$$

(2.5.9) PROPOSICION

Para cualquier $B \twoheadrightarrow A \in \mathcal{E}_A$ el morfismo

$$\theta^*_1 : \mathrm{Der}(G'_{(R)}(B),M) \longrightarrow \mathrm{Der}(G_{(R)}(B),M)$$

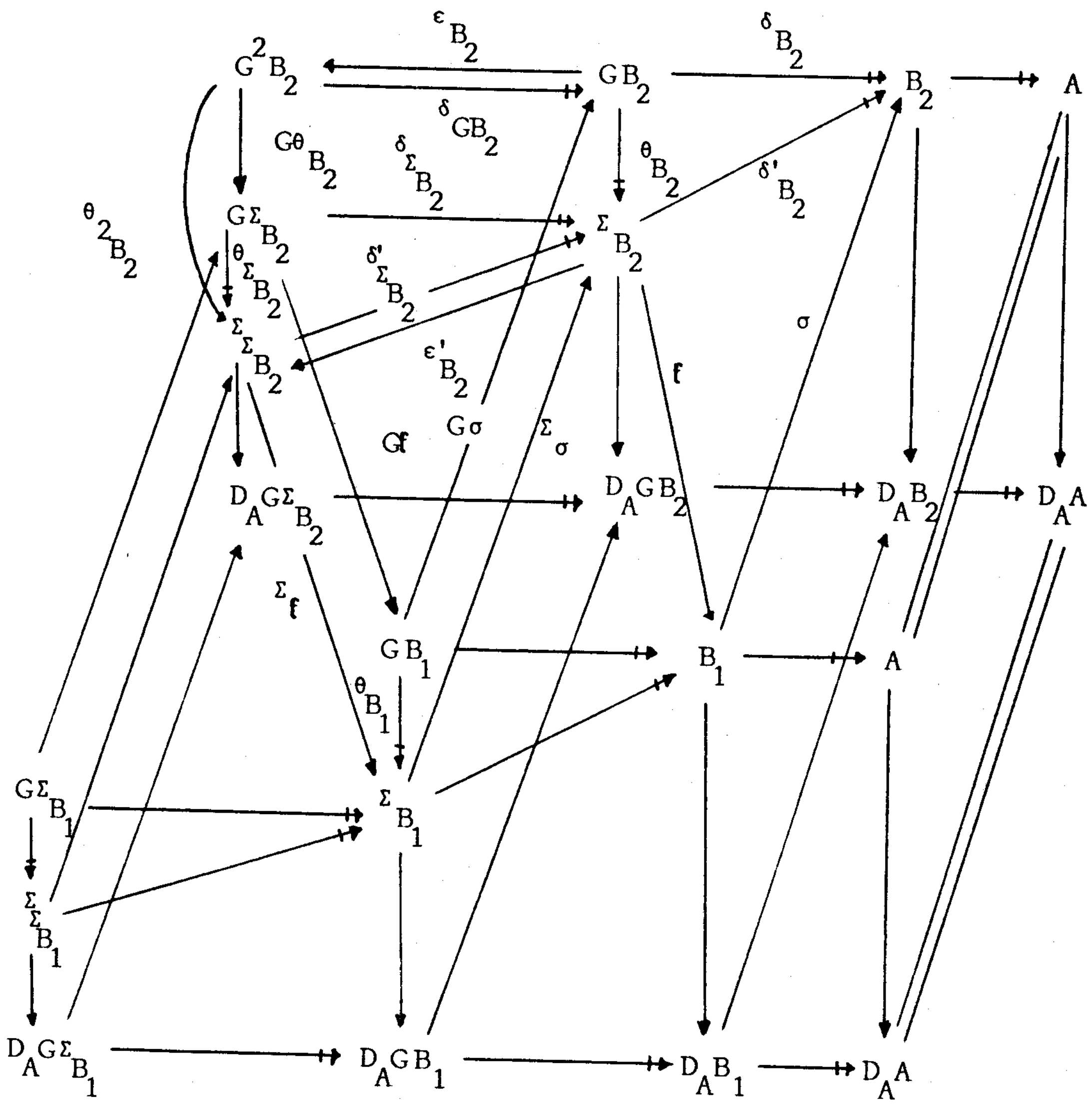
es un isomorfismo para cada A-módulo M

Demostración :

Como se vio en (2.5.2) $D_A(\Sigma_B) \cong D_A(G_{(R)}(B))$ y por tanto se tiene

$$\mathrm{Der}(\Sigma_B,M) \cong \mathrm{Hom}_A(D_A\Sigma_B,M) \cong \mathrm{Hom}_A(D_AG_{(R)}(B),M) \cong \mathrm{Der}(G_{(R)}(B),M)$$

(2.5.10) Sea
$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$
un epimorfismo en $\mathcal{L}_A$ perteneciente a la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'\circledR A}$. Entonces considerando la counidad $\delta'_{B_2} : \Sigma_{B_2} \twoheadrightarrow B_2$ existirá un morfismo $f : \Sigma_{B_2} \longrightarrow B_1$ tal que $\sigma . f = \delta'_{B_2}$ y se tendrá el diagrama



y puesto que :

$$\theta_{B_1} . Gf . G\theta_{B_2} . \varepsilon_{B_2} = \Sigma_f . \theta_{\Sigma_{B_2}} . G\theta_{B_2} . \varepsilon_{B_2} = \Sigma_f . \theta_{2_{B_2}} . \varepsilon_{B_2} = \Sigma_f . \varepsilon'_{B_2} . \theta_{B_2}$$

se tienen los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
GB_2 \arrow[rr, "Gf . G\theta_{B_2} . \varepsilon_{B_2}"] \arrow[d, "\theta_{B_2}"'] & & GB_1 \arrow[r, "G\sigma"] \arrow[d, "\theta_{B_1}"] & GB_2 \arrow[d, "\theta_{B_2}"] \\
B_2 \arrow[rr, "\Sigma_f . \varepsilon'_{B_2}"'] & & B_1 \arrow[r, "\Sigma_\sigma"'] & B_2
\end{tikzcd}$$

donde además :

$$G\sigma . Gf . G\theta_{B_2} . \varepsilon_{B_2} = G(\sigma . f . \theta_{B_2}) . \varepsilon_{B_2} = G\delta_{B_2} . \varepsilon_{B_2} = I_{GB_2}$$

$$\Sigma_\sigma . \Sigma_f . \varepsilon'_{B_2} = \Sigma_{\sigma . f} . \varepsilon'_{B_2} = \Sigma_{\delta'_{B_2}} . \varepsilon'_{B_2} = G'\delta'_{B_2} . \varepsilon'_{B_2} = I_{G'B_2}$$

Denotaremos $s_1 = Gf . G\theta_{B_2} . \varepsilon_{B_2}$; $s_2 = Gs_1$; $s'_1 = \Sigma_f . \varepsilon'_{B_2}$; $s'_2 = G's'_1$

Entonces se verifica que $s'_2 . \theta_{2_{B_2}} = \theta_{2_{B_1}} . s_2$. En efecto , el cuadrado de la izquierda anterior nos da $G\theta_{B_1} . s_2 = Gs'_1 . G\theta_{B_2}$ y la naturalidad de θ para el morfismo s'_1 da la igualdad $\theta_{\Sigma_{B_1}} . Gs'_1 = s'_2 . \theta_{\Sigma_{B_2}}$

Entonces :

$$s'_2 . \theta_{2_{B_2}} = s'_2 . \theta_{\Sigma_{B_2}} . G\theta_{B_2} = \theta_{\Sigma_{B_1}} . Gs'_1 . G\theta_{B_2} = \theta_{\Sigma_{B_1}} . G\theta_{B_1} . s_2 = \theta_{2_{B_1}} . s_2$$

(2.5.11) PROPOSICION

Si
$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & B_2 \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$
es un epimorfismo en $\mathcal{E}_A$ perteneciente a la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'(R)A}$ el morfismo $\theta^0_\sigma : H^0(\sigma, M)_{\mathbb{G}'(R)} \longrightarrow H^0(\sigma, M)_{(R)}$ es un isomorfismo.

Demostración :

(Llamaremos $\sigma_1 = G\sigma$; $\sigma_2 = G^2\sigma$; $\sigma'_1 = G'\sigma$; $\sigma'_2 = G'^2\sigma$ y tendremos en cuenta la notación de (2.5.10)).

Considerando el diagrama que da los grupos cero de cohomología del epimorfismo y teniendo en cuenta (2.5.9) dicho diagrama es

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{Der}(B_2,M) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dl, equal] & & \mathrm{Der}(GB_2,M) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dl, equal] & & \mathrm{Der}(G^2B_2,M) \arrow[dd, shift right, "\sigma_2^*"'] \arrow[dd, leftarrow, shift left, "s_2^*"] \\
\mathrm{Der}(B_2,M) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G'B_2,M) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G'^2B_2,M) \arrow[ur, "\theta^*_{2_{B_2}}"] \arrow[dd, shift right, "\sigma'^*_2"'] \arrow[dd, leftarrow, shift left, "s'^*_2"] & \\
 & \mathrm{Der}(B_1,M) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dl, equal] & & \mathrm{Der}(GB_1,M) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dl, equal] & & \mathrm{Der}(G^2B_1,M) \arrow[dd, shift right, "v"'] \arrow[dd, leftarrow, shift left, "n"] \\
\mathrm{Der}(B_1,M) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G'B_1,M) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G'^2B_1,M) \arrow[ur, "\theta^*_{2_{B_1}}"] \arrow[dd, shift right, "u"'] \arrow[dd, leftarrow, shift left, "m"] & \\
 & H^0(\sigma,M)_{\mathbb{G}'(R)} \arrow[rr] & & \mathrm{Der}^{\#}(\sigma_1,M) \arrow[rr, "\partial_\sigma"] \arrow[dl, equal] & & \mathrm{Der}^{\#}(\sigma_2,M) \\
H^0(\sigma,M)_{(R)} \arrow[rr] \arrow[ur, "\theta^0_\sigma"] & & \mathrm{Der}^{\#}(\sigma'_1,M) \arrow[rr, "\partial'_\sigma"] & & \mathrm{Der}^{\#}(\sigma'_2,M) \arrow[ur, "\theta^*_{2_\sigma}"] &
\end{tikzcd}$$

donde $u = \mathrm{coker}\, \sigma'^*_2$; $v = \mathrm{coker}\, \sigma^*_2$; $m = \mathrm{Ker}\, s'^*_2$; $n = \mathrm{Ker}\, s^*_2$

Utilizando el hecho de que $Der(G^2B_1, M)$ es el producto de $Der(G^2B_2, M)$ y $Der(\sigma_2^{\#}, M)$ con proyecciones s_2^* y v , y puesto que

$$s_2^* . \theta^*_{2_{B_1}} . m = \theta^*_{2_{B_2}} . s'^*_2 . m = 0 \quad ; \quad s_2^* . n . \theta^*_{2_\sigma} = 0$$

$$v . \theta^*_{2_{B_1}} . m = \theta^*_{2_\sigma} . u . m = \theta^*_{2_\sigma} = v . n . \theta^*_{2_\sigma}$$

se tiene que $\theta^*_{2_{B_1}} . m = n . \theta^*_{2_\sigma}$ lo cual implica que $\theta^*_{2_\sigma}$ es un monomorfismo y por tanto :

$$H^0(\sigma, M)_{\mathbb{G}'_{(R)}} = Ker\ \partial_\sigma = Ker\ (\theta^*_{2_\sigma} . \partial'_\sigma) = Ker\ \partial'_\sigma = H^0(\sigma, M)_{(R)}$$

(2.5.12) Dado $A \in \underline{V}$, es claro que $A = A \in \mathcal{E}_A$ y considerando entonces un epimorfismo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & A \arrow[d, equal] \\ & A \end{tikzcd}$$

en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'_{(R)}A}$ se tendrá según (1.2.4) y (2.5.11) que

$$H^0(\sigma, M)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \cong Hom_A(L\ ,\ M)\ , \qquad L = Ker\ \sigma$$

y por un razonamiento análogo al realizado en ([18] pag 94) se concluye que

$$H_0(\sigma\ ,\ D_A)_{\mathbb{G}'_{(R)}} = L$$

Considerando la sucesion exacta larga asociada al epimorfismo σ en los grupos de homologia con coeficientes en el funtor D_A y relativos al cotriple $\mathbb{G}'_{(R)}$ (véase (2.5.6)) y teniendo en cuenta el isomorfismo anterior se deduce que la sucesión exacta , $L \longrightarrow D_A(B) \twoheadrightarrow D_A(A)$ (véase (2.1.2)) obtenida de las series largas respecto de los cotriples $\mathbb{G}_{(R)}$ y $\mathbb{G}'_{(R)}$ es la misma en ambos casos.

Probaremos a continuación que dado $A \in \underline{V}$ y un A-módulo M , y considerando la subcategoría $\mathcal{L}_A$ definida en (2.5.2) los grupos de cohomología equilibrada $\overline{H}^n(A,M)_{(R)}$ son isomorfos a los grupos de cohomología del cotriple $H^n(A,M)_{\mathbb{G}'_{(R)}}$ definidos en (2.5.6)

(2.5.13) Sea $\delta'_{(R)A} : \Sigma_A \twoheadrightarrow A = A$ el epimorfismo correspondiente a la counidad del cotriple $\mathbb{G}'_{(R)}$.

Asociada a él , se tendrá la sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H_1(\Sigma_A, D_A)_{G'_{(R)}} \longrightarrow H_1(A,D_A)_{G'_{(R)}} \longrightarrow L \xrightarrow{u} D_A(\Sigma_A) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

y como $H_1(\Sigma_A, D_A)_{\mathbb{G}'_{(R)}} = 0$ y u es un monomorfismo se tiene $H_1(A,D_A)_{\mathbb{G}'_{(R)}} = 0$

Entonces , para cualquier epimorfismo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & A \arrow[dl, equal] \\ & A \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'_{(R)}A}$ con núcleo L' , puesto que $H_1(A,D_A)_{\mathbb{G}'_{(R)}} = 0$ y utilizando de nuevo la sucesión exacta larga anterior para este epimorfismo , se obtiene la sucesión de tres términos

$$L' \rightarrowtail D_A(B) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

Además , puesto que $H_1(A,D_A)_{\mathbb{G}'_{(R)}} = 0$, un razonamiento análogo al realizado en (2.2.2) prueba que $H^n(A,I)_{\mathbb{G}'_{(R)}} = 0$ para cualquier A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo (téngase en cuenta (2.5.5)) y por tanto se obtiene que $\mathcal{L}_A$ es (R)-equilibrada respecto del cotriple $\mathbb{G}'_{(R)}$. Consecuentemente , en virtud de (2.2.7) y (2.5.5) existirá una equivalencia natural

$$H^n(A, \ )_{\mathbb{G}'_{(R)}} \cong \overline{H}^n(A, \ )_{(R)} \qquad n \geq 0$$

Teniendo en cuenta ahora (2.3.10), para cada A-módulo M , será

$$H^n(A,M)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \cong E^n_Q(A,M)_{(R)}$$

Puede observarse además , por razones de naturalidad , que los morfismos $t^n_{(R)} : \overline{H}^n(A,M)_{(R)} \longrightarrow H^n(A,M)_{(R)}$ encontrados en (2.4.9) , no son mas que los morfismos cambio de cotriple $\theta^n_A : H^n(A,M)_{\mathbb{G}'_{(R)}} \longrightarrow H^n(A,M)_{(R)}$ estudiados en (2.5.8) .

CAPITULO 3 . EJEMPLOS

3.1. EL EQUILIBRIO DE UNA VARIEDAD DE ALGEBRAS COMO PROPIEDAD LOCAL .

Una de las propiedades especiales de cualquier variedad de álgebras como una clase de sistemas algebraicos es las conexiones que existen entre álgebras sobre diferentes dominios de operadores y haremos uso , en este apartado, de estas relaciones para estudiar implicaciones en las condiciones de equilibrio entre ellas.

A lo largo de este punto , S denotará un subconjunto multiplicativamente cerrado del anillo conmutativo y unitario R y por razones de notación Ω representará el conjunto de identidades definiendo a cualquier variedad de $\underline{C}$.

Considerando el anillo de fracciones $S^{-1}R$, si A es un R-álgebra (unitaria) , el $S^{-1}R$-módulo $S^{-1}A = S^{-1}R \otimes_R A$ es de forma obvia un $S^{-1}R$-álgebra (unitaria) con multiplicación inducida por la de A.

(3.1.1) Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ definida por un conjunto Ω de identidades.

Considerando el morfismo canónico $\psi : R \longrightarrow S^{-1}R$ y si F_∞ y $F_{S\infty}$ denotan respectivamente el R-álgebra (unitaria) libre y el $S^{-1}R$-álgebra (unitaria) libre sobre el conjunto $\{ x_1 , x_2 , \dots , x_i , \dots \}$ podemos considerar la variedad de $S^{-1}R$-álgebras (unitarias) $\underline{V}_S = \underline{V}(\psi_\infty(\Omega))$ siendo $\psi_\infty : F_\infty \longrightarrow F_{S\infty}$ el morfismo de R-álgebras (unitarias) inducido por ψ .

Nótese que en el caso de que el anillo base R sea un dominio de integridad o bien ψ_∞ sea inyectivo sobre las identidades definiendo a $\underline{V}$ se tiene que $\underline{V}_S$ estará definida por el mismo conjunto de identidades que $\underline{V}$.

En condiciones mas generales de tomar una extensión de anillos $R \longrightarrow R'$

dado $A \in \underline{V}$, podemos considerar por extensión de escalares el R'-álgebra (unitaria) $A_{R'}$ y la variedad $\underline{V}_{R'}$ definida por Ω . No es cierto en general que $A_{R'} \in \underline{V}_{R'}$ como puede observarse con la variedad de álgebras Booleanas sobre el cuerpo de dos elementos pues para cualquier extensión propia de dicho cuerpo se tiene que la variedad obtenida por el mismo conjunto de identidades y extendiendo los operadores es trivial (véase [83]).

Ahora bien , volviendo a nuestro caso particular , si cualquier identidad $\omega \in \Omega$ es una expresión homogenea en las x_i , el $S^{-1}R$-álgebra (unitaria) $S^{-1}A$ pertenece a $\underline{V}_S$. En efecto , se trata de probar que para cualquier morfismo de $S^{-1}R$-álgebras (unitarias) $F_{S\infty} \xrightarrow{f} S^{-1}A$ se tiene que $f(\psi_\infty(\omega)) = 0$.

Si suponemos $\omega = \omega(x_1, \dots, x_n)$ y $f : F_{S\infty} \longrightarrow S^{-1}A$ es tal que $f(x_i) = \dfrac{a_i}{s_i}$ tendremos :

$$f(\psi_\infty(\omega)) = \psi_\infty(\omega)\left(\frac{a_1}{s_1}, \dots , \frac{a_n}{s_n}\right) = \psi_\infty(\omega)\left(\frac{a'_1}{s}, \dots, \frac{a'_n}{s}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{s}\right)^m \psi_\infty(\omega)\left(\frac{a'_1}{1}, \dots, \frac{a'_n}{1}\right)$$

donde hemos denotado $a'_i = s_1 \dots \hat{s}_i \dots s_n a_i$ (el circunflejo significa el elemento que hay que excluir en la multiplicación) y $s = s_1 \dots s_n$ habiendo tenido en cuenta para la última igualdad que ω es homogenea de grado m . Considerando ahora que F_∞ es el R-álgebra (unitaria) libre sobre el conjunto $\{x_1, \dots, x_i \dots\}$ existirá un único morfismo de R-álgebras (unitarias) $g: F_\infty \longrightarrow A$ tal que $g(x_i) = a'_i$ y entonces si ψ_A es el morfismo canónico de A en $S^{-1}A$ tendremos

$$f(\psi_\infty(\omega)) = \left(\frac{1}{s}\right)^m \psi_\infty(\omega)\left(\frac{a'_1}{1}, \dots, \frac{a'_n}{1}\right) = \left(\frac{1}{s}\right)^m \psi_A\, g(\omega) =$$

$$= \left(\frac{1}{s}\right)^m \psi_A(\omega(a'_1, \dots, a'_n)) = \left(\frac{1}{s}\right)^m \frac{\omega(a'_1, \dots, a'_n)}{1} = 0$$

ya que $A \in \underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ y $\omega \in \Omega$

Tenemos asi asegurado que si Ω es un conjunto de identidades homogeneas y $\underline{V}$ es la variedad de $\underline{C}$ determinada por Ω , el $S^{-1}R$-álgebra (unitaria) $S^{-1}A$ pertenece a $\underline{V}_S$, siendo en particular esto cierto para los casos mas importantes de variedades de álgebras (unitarias) como lo son las variedades de álgebras Asociativas , Alternativas , de Lie , de Jordan , etc.

En cualquier caso , supondremos que el par (R, Ω) tiene la propiedad de que $S^{-1}A \in \underline{V}_S$ para cada A de $\underline{V}$ y cada subconjunto multiplicativamente cerrado S de R.

(3.1.2) Teniendo en cuenta lo anterior, podemos definir un funtor

$$S^{-1}: \underline{V} \longrightarrow \underline{V}_S$$

tal que para cada $A \in \underline{V}$, $S^{-1}A$ es el $S^{-1}R$-módulo $S^{-1}R \otimes_R A$ enriquecido de estructura con multiplicación inducida por la de A y tal que dado un morfismo $f: A \longrightarrow A'$, $S^{-1}f: S^{-1}A \longrightarrow S^{-1}A'$ es el morfismo inducido en los módulos, que ahora lo es de $S^{-1}R$-álgebras (unitarias) .

Si consideramos ahora $B \in \underline{V}_S = \underline{V}(\psi_\infty(\omega))$ y el morfismo canónico $\psi : R \longrightarrow S^{-1}R$, B es de forma obvia via ψ, un R-álgebra (unitaria) y además $B \in \underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ pues dado cualquier morfismo de R-álgebras (unitarias) $f : F_\infty \longrightarrow B$ y teniendo en cuenta el diagrama

$$\begin{tikzcd} F_\infty \arrow[rr, "\psi_\infty"] \arrow[dr, "f"'] & & F_{S\infty} \arrow[dl, "g"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

donde $g(\psi_\infty(x_i)) = f(x_i)$, se verifica que para cualquier ω de Ω

$f(\omega) = g(\psi_\infty(\omega)) = 0$. Tenemos asi definido un funtor $U^\psi : \underline{V}_S \longrightarrow \underline{V}$

(3.1.3) PROPOSICION

El funtor S^{-1} es adjunto a la izquierda al funtor U^{ψ}

Demostración :

Si $A \in \underline{V}$ y $B \in \underline{V}_S$ se trata de probar que existe una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{\underline{V}_S}(S^{-1}A, B) \overset{\eta}{\cong} \mathrm{Hom}_{\underline{V}}(A, U^{\psi}B)$$

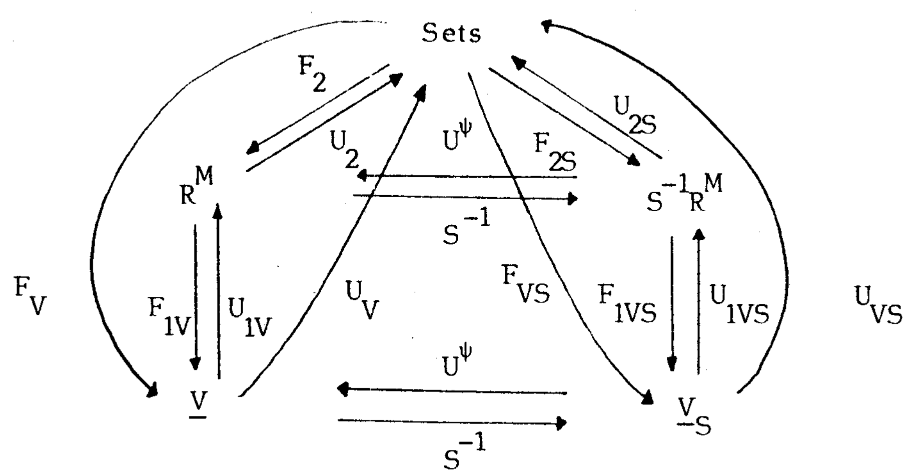
Definiendo $\eta(h)(a) = h(\frac{a}{1})$ es claro que $\eta(h)$ es un morfismo de R-álgebras (unitarias) . Inversamente , dado $h' : A \longrightarrow U^{\psi}B$ y definiendo $\eta'(h')(\frac{a}{s}) = \frac{h'(a)}{s}$ se tiene tambien de forma clara que $\eta'(h')$ es un morfismo de $S^{-1}R$-álgebras (unitarias). Además,

$$\eta'\eta(h)(\frac{a}{s}) = \frac{\eta(h)(a)}{s} = \frac{h(\frac{a}{1})}{s} = h(\frac{a}{s})$$

$$\eta\ \eta'(h')(a) = \eta'(h')(\frac{a}{1}) = \frac{h'(a)}{1} = h'(a)$$

de modo que η' es la inversa de η y la naturalidad se comprueba facilmente.

(3.1.4) Después de la proposición anterior , podemos considerar el diagrama de funtores adjuntos (véase (1.1.2) y (1.1.22))



y puesto que claramente se tiene $\quad U^{\psi}\cdot U_{1VS} = U_{1V}\cdot U^{\psi} \quad$ y $\quad U_V\cdot U^{\psi} = U_{VS}$

será (véase por ejemplo [49]) $\quad S^{-1}\cdot F_{1V} = F_{1VS}\cdot S^{-1} \quad$ y $\quad S^{-1}\cdot F_V = F_{VS}$

Nos planteamos a continuación el estudio del funtor de diferenciales en la variedad $\underline{V}_S$ asi como su relación con el funtor de diferenciales en $\underline{V}$.

(3.1.5) Dado $A\in\underline{V}$, si $\underline{V}_S\, S^{-1}A\text{-Mod}$ es la categoría de $S^{-1}A$-módulos en $\underline{V}_S$, (1.1.23), se tendrá, como en (1.1.25) un par de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} (\underline{V}_S\, ,\, S^{-1}A) \arrow[d, shift right, "D_{S^{-1}A}"'] \\ \underline{V}_S\, S^{-1}A\text{-Mod} \arrow[u, shift right, "J_S"'] \end{tikzcd}$$

donde $\quad \underline{V}_S\, S^{-1}A\text{-Mod} = {}_{\frac{T(S^{-1}A)}{I_{VS}S^{-1}A}}M \quad$ según (1.1.24)

Ahora bien, es conocido y facil de probar que existe un isomorfismo natural $T(S^{-1}A) \cong S^{-1}(T(A))$, identificándose mediante él, el ideal $I_{VS}S^{-1}A$ con $S^{-1}I_VA$, de modo que se tiene $\quad \dfrac{T(S^{-1}A)}{I_{VS}S^{-1}A} \cong S^{-1}\left(\dfrac{T(A)}{I_VA}\right)$

isomorfismo que además induce en el $S^{-1}R$-módulo $S^{-1}\left(\dfrac{T(A)}{I_VA}\right)$ una estructura de $S^{-1}R$-álgebra asociativa y unitaria y en particular de anillo.

Componiendo la inyección canónica $\quad R \longrightarrow T(A) \quad$ (que es precisamente el morfismo de estructura de T(A) como R-álgebra) con la proyección a $\frac{T(A)}{I_V A}$ y considerando la imagen de S mediante dicha composición $R \xrightarrow{f} \frac{T(A)}{I_V A}$, a la que denotamos $\bar{S}$, se tendrá que el conjunto $\bar{S}^{-1}(\frac{T(A)}{I_V A})$ adquiere estructura de anillo ya que $\bar{S}$ está contenido en el centro de $\frac{T(A)}{I_V A}$ y por tanto se cumple la condición de Ore (véase por ejemplo [100]).

Además puede observarse que dicha estructura no es mas que la inducida por el anillo $S^{-1}(\frac{T(A)}{I_V A})$ mediante la biyección $S^{-1}(\frac{T(A)}{I_V A}) \overset{\theta}{\cong} \bar{S}^{-1}(\frac{T(A)}{I_V A})$ definida por $\theta(\frac{a}{s}) = \frac{a}{f(s)}$ con $a \in \frac{T(A)}{I_V A}$

Se concluye pues que $\underline{V}_S\ S^{-1}A\text{-Mod} \cong {}_{\bar{S}^{-1}(\frac{T(A)}{I_V A})}\text{Mod}$.

(3.1.6) El razonamiento anterior nos permite definir un funtor

$$\bar{S}^{-1} : {}_{\frac{T(A)}{I_V A}}\text{Mod} \longrightarrow {}_{\bar{S}^{-1}(\frac{T(A)}{I_V A})}\text{Mod}$$

asociado al morfismo canónico $\frac{T(A)}{I_V A} \longrightarrow \bar{S}^{-1}(\frac{T(A)}{I_V A})$

esto es , si $M \in {}_{\frac{T(A)}{I_V A}}\text{Mod}$, definimos $\bar{S}^{-1}M = \bar{S}^{-1}(\frac{T(A)}{I_V A}) \otimes_{\frac{T(A)}{I_V A}} M$

y este funtor nos permitirá ver a continuación como los funtores de diferenciales en las variedades $\underline{V}$ y $\underline{V}_S$ están estrechamente relacionados.

Para ello consideremos el diagrama :

$$\begin{tikzcd}
(\underline{V}, A) \arrow[r, "S^{-1}"] \arrow[d, "D_A"'] & (\underline{V}_S, S^{-1}A) \arrow[d, "D_{S^{-1}A}"] \\
\left(\frac{T(A)}{I_V A}\right)^{Mod} \arrow[r, "\bar{S}^{-1}"] & \bar{S}^{-1}\left(\frac{T(A)}{I_V A}\right)^{Mod}
\end{tikzcd}$$

donde hemos denotado de nuevo S^{-1} al funtor inducido en las comacategorias por el definido en (3.1.2).

Este diagrama es conmutativo. En efecto :

Dado $B \longrightarrow A \in (\underline{V}, A)$ y teniendo en cuenta (1.1.25) será

$$\bar{S}^{-1}(D_A(B)) = \bar{S}^{-1}\left(\frac{T(A)}{I_V A}\right) \otimes_{\frac{T(A)}{I_V A}} \frac{T(A)}{I_V A} \otimes_{T(B)} IB = \bar{S}^{-1}\left(\frac{T(A)}{I_V A}\right) \otimes_{T(B)} IB$$

Por otra parte, si S_1 es la imagen de S mediante la inyección canónica $R \longrightarrow T(B)$ y teniendo en cuenta los razonamientos realizados en (3.1.5) será $T(S^{-1}B) \cong S^{-1}(T(B)) \cong S_1^{-1}(T(B))$ y entonces

$$D_{S^{-1}A}(S^{-1}B) = \bar{S}^{-1}\left(\frac{T(A)}{I_V A}\right) \otimes_{T(S^{-1}B)} I_S S^{-1}B = \bar{S}^{-1}\left(\frac{T(A)}{I_V A}\right) \otimes_{S_1^{-1}(TB)} \frac{S_1^{-1}T(B) \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}B}{P_S}$$

$$= \bar{S}^{-1}\left(\frac{T(A)}{I_V A}\right) \otimes_{S_1^{-1}TB} \frac{S_1^{-1}T(B) \otimes_R B}{P_S} =$$

$$= \bar{S}^{-1}\left(\frac{T(A)}{I_V A}\right) \otimes_{S_1^{-1}TB} \frac{S_1^{-1}(T(B) \otimes_R B)}{P_S} =$$

$$= \bar{S}^{-1}\left(\frac{T(A)}{I_V A}\right) \otimes_{S_1^{-1}TB} S_1^{-1} I B = \bar{S}^{-1}\left(\frac{T(A)}{I_V A}\right) \otimes_{TB} I B$$

donde hemos utilizado que P_S que es el submódulo generado por el conjunto

$$\left\{ \left(\frac{a_1}{s_1}, 0\right) \otimes \frac{a_2}{s_2} - 1 \otimes \frac{a_1}{s_1}\frac{a_2}{s_2} + \left(0, \frac{a_2}{s_2}\right) \otimes \frac{a_1}{s_1} \;\; / \;\; a_1 , a_2 \;\; A \; ; \; s_1 , s_2 \in S \right\}$$

se identifica con $S^{-1}P$.

(3.1.7) Para $A \in \underline{V}$, puesto que $S^{-1}A \in \underline{V}_S$, tendremos el diagrama de funtores adjuntos inducidos en la comacategoría

$$\begin{tikzcd}
(Sets , S^{-1}A) \arrow[d, shift right, "F_{2SA}"'] \arrow[dd, bend right=60, "F_{VSA}"'] \\
({}_{S^{-1}R}M , S^{-1}A) \arrow[u, shift right, "U_{2SA}"'] \arrow[d, shift right, "F_{1VSA}"'] \\
(\underline{V}_S , S^{-1}A) \arrow[u, shift right, "U_{1VSA}"'] \arrow[uu, bend right=60, "U_{VSA}"']
\end{tikzcd}$$

Denotaremos $\mathbb{G}_{(R)SA}$ al cotriple en $(\underline{V}_S , S^{-1}A)$ inducido por la adjunción $F_{VSA} \dashv U_{VSA}$ ($F_{1VSA} \dashv U_{1VSA}$) .

Entonces , ya que el funtor $D_{S^{-1}A}$ tiene rango una categoría abeliana podemos definir funtores de homología en $(\underline{V}_S , S^{-1}A)$ relativos al cotriple $\mathbb{G}_{(R)SA}$ con coeficientes en $D_{S^{-1}A}$, $H_n(\; , D_{S^{-1}A})_{\mathbb{G}_{(R)SA}}$.

Para $B \longrightarrow S^{-1}A \in (\underline{V}_S , S^{-1}A)$ y para simplificar denotaremos

$H_n\left(\begin{array}{c} B \\ \downarrow \\ S^{-1}A \end{array} , D_{S^{-1}A} \right)_{\mathbb{G}_{(R)SA}}$ por $H_n(B , D_{S^{-1}A})_{(S^{-1}R)}$

La relación encontrada en (3.1.6) entre los funtores D_A y $D_{S^{-1}A}$ nos va a permitir a continuación , en condiciones generales , conectar los grupos de homología concoeficientes en dichos funtores respecto de los cotriples relativos a módulos , mientras que en el caso absoluto , tomando los cotriples relativos a conjuntos , necesitaremos condiciones adicionales sobre el R-álgebra A de $\underline{V}$ para encontrar relaciones del mismo tipo.

(3.1.8) PROPOSICION

Para cada $A \in \underline{V}$ y S un subconjunto multiplicativamente cerrado de R existe un isomorfismo

$$\bar{S}^{-1} H_n(A, D_A)_R \cong H_n(S^{-1}A, D_{S^{-1}A})_{S^{-1}R} \qquad n \geq 0$$

Demostración:

El caso $n=0$ es consecuencia inmediata de la conmutatividad del diagrama en (3.1.6) .

Sea ahora $n \geq 1$. $H_n(A,D_A)_R$ viene calculado en el complejo

$$\cdots \longrightarrow D_A G_R^{n+1} A \longrightarrow D_A G_R^n A \longrightarrow D_A G_R^{n-1} A \longrightarrow \cdots \qquad (1)$$

y $H_n(S^{-1}A, D_{S^{-1}A})_{S^{-1}R}$ en el complejo

$$\cdots \longrightarrow D_{S^{-1}A} G_{RS}^{n+1} S^{-1}A \longrightarrow D_{S^{-1}A} G_{RS}^n S^{-1}A \longrightarrow D_{S^{-1}A} G_{RS}^{n-1} S^{-1}A \longrightarrow \cdots \quad (2)$$

Puesto que según (3.1.4) , $S^{-1}.F_{1V} = F_{1VS}.S^{-1}$ y además se tiene claramente $U_{1VS}.S^{-1} = S^{-1}U_{1V}$ será :

$$S^{-1}.G_R = S^{-1}.F_{1V}.U_{1V} = F_{1VS}.S^{-1}.U_{1V} = F_{1VS}.U_{1VS}.S^{-1} = G_{RS}.S^{-1}$$

y supuesto cierto para $n-1$, $S^{-1}.G_R^{n-1} = G_{RS}^{n-1}.S^{-1}$, se tendrá

$$S^{-1}.G_R^{n} = S^{-1}.G_R^{n-1}.G_R = G_{RS}^{n-1}.S^{-1}.G_R = G_{RS}^{n-1}.G_{RS}.S^{-1} = G_{RS}^{n}.S^{-1}$$

Por tanto , el complejo (2) es equivalente al

$$\cdots \longrightarrow \bar{S}^{-1} D_A G_R^{n+1} A \longrightarrow \bar{S}^{-1} D_A G_R^{n} A \longrightarrow \bar{S}^{-1} D_A G_R^{n-1} A \longrightarrow \cdots$$

y éste no es mas (1) tras aplicarle el funtor $\bar{S}^{-1}$, de donde se deduce inmediatamente el resultado anunciado .

(3.1.9) Si tomamos $A \in \underline{V}$ libre de torsión (esto es , libre de torsión como R-módulo) se tendrá que el morfismo canónico $A \longrightarrow S^{-1}A$ es un monomorfismo y por tanto card (A) $\leq$ card ($S^{-1}A$) donde "card" denota la cardinalidad del conjunto olvidado . Suponiendo que R es infinito se tiene card (A) = card($S^{-1}A$) pues card ($S^{-1}A$) $\leq$ card(R) card (A) y como

$\aleph_0 \leq$ card(R) $\leq$ card (A) será card (R) card(A) = card(A) de modo que card ($S^{-1}A$) $\leq$ card(A) .

Entonces , teniendo en cuenta (3.1.4) $S^{-1}.F_V = F_{VS}$ y por tanto

$$S^{-1}.G(A) = S^{-1}F_V U_V(A) = F_{VS}(U_V(A)) = F_{VS}(U_{VS}S^{-1}(A)) = F_{VS}U_{VS}S^{-1}(A) = G_S.S^{-1}(A)$$

con lo cual un mismo razonamiento que en (3.1.8) nos permite concluir

(3.1.10) PROPOSICION

Si $A \in \underline{V}$ es un R-álgebra libre de torsión y R es de característica cero , para cada subconjunto multiplicativamente cerrado S de R se tiene un isomorfismo

$$\bar{S}^{-1} H_n(A, D_A) \cong H_n(S^{-1}A, D_{S^{-1}A}) \qquad n \geq 0$$

Las proposiciones (3.1.8) y (3.1.10) nos permiten ya , teniendo en cuenta (2.2.2) , encontrar relaciones en las condiciones de equilibrio en $\underline{V}$ y $\underline{V}_S$ respecto a A . Mas explicitamente, podemos enunciar

(3.1.11) PROPOSICION

Si $\underline{V}$ es R-equilibrada en A , entonces $\underline{V}_S$ es $S^{-1}R$-equilibrada en $S^{-1}A$.

Demostración:

Por hipótesis , $H^n(A,I)_R = 0$ $n \geq 1$ para cualquier A-módulo $\mathcal{M}_{(R)}$-inyectivo I . Entonces según (2.2.2) se tiene que $H_n(A, D_A)_R = 0$ $n \geq 1$ y consecuentemente $S^{-1}H_n(A, D_A)_R = 0$. Ahora (3.1.8) nos da $H_n(S^{-1}A , D_{S^{-1}A})_{S^{-1}R} = 0$ $n \geq 1$ y volviendo a aplicar (2.2.2) se concluye que $\underline{V}_S$ es $S^{-1}R$-equilibrada en $S^{-1}A$.

Un razonamiento del mismo tipo nos llevaria en las condiciones restrictivas de (3.1.10) a un resultado análogo en el caso absoluto . Ahora bien , un argumento indirecto basado en la existencia de la sucesión de tres términos nos permite obtener dicho resultado con total generalidad. Esto es

(3.1.12) PROPOSICION

Si $\underline{V}$ es equilibrada en A entonces $\underline{V}_S$ es equilibrada en $S^{-1}A$

Demostración:

Si $B \longrightarrow A$ es una presentación $\mathfrak{C}_A$-proyectiva de A con núcleo L singular , $S^{-1}B \longrightarrow S^{-1}A$ es una presentación $\mathfrak{C}_{SA}$ - proyectiva de $S^{-1}A$ (téngase en cuenta (3.1.3)) con núcleo $S^{-1}L$ que tambien será singular.

Teniendo en cuenta la hipótesis y (2.2.4) de dará la sucesión de tres términos de A-módulos $L \rightarrowtail D_A(B) \twoheadrightarrow D_A(A)$

y por tanto tambien se tendrá la sucesión exacta de $\bar{S}^{-1}(\frac{T(A)}{I_V A})$-módulos por la izquierda $\bar{S}^{-1}L \rightarrowtail \bar{S}^{-1}D_A(B) \twoheadrightarrow \bar{S}^{-1}D_A(A)$

Utilizando ahora la conmutatividad del diagrama en (3.1.6) la sucesión anterior se convierte en

$$S^{-1}L \rightarrowtail D_{S^{-1}A}(S^{-1}B) \twoheadrightarrow D_{S^{-1}A}(S^{-1}A)$$

de modo que se da la sucesión de tres términos para una presentación $\mathbb{C}_{SA}$-proyectiva de $S^{-1}A$ y consecuentemente según (2.2.5) $\underline{V}_S$ será equilibrada en $S^{-1}A$.

Obsérvese que este mismo razonamiento sería válido en el caso relativo de la proposición (3.1.11) .

Los resultados anteriores nos permitiran a continuación probar que la condición de equilibrio en una variedad de $\underline{C}$ es una condición local.

(3.1.13) TEOREMA

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ y $A \in \underline{V}$. Entonces son equivalentes

i) $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A.

ii) $\underline{V}_S$ es (R_π)-equilibrada en A_π con $S = R - \pi$ y π cualquier ideal primo de R.

iii) $\underline{V}_S$ es (R_μ)-equilibrada en A_μ con $S = R - \mu$ y μ cualquier ideal maximal de R .

Demostración :

i) $\Rightarrow$ ii) (3.1.11) y (3.1.12)

ii) $\Rightarrow$ iii) Evidente .

iii) $\Rightarrow$ i) Sea $B \longrightarrow A$ una presentación $\mathbb{C}_{(R)A}$-proyectiva de A en $\underline{V}$ con nucleo singular L. Se tendrá entonces, según (2.1.2), la sucesión exacta de A-módulos $L \xrightarrow{u} D_A(B) \twoheadrightarrow D_A(A)$ y se trata de probar que u es un monomorfismo.

Considerando por otro lado la sucesión exacta en $\underline{V}_S$, $S^{-1}L \rightarrowtail S^{-1}B \twoheadrightarrow S^{-1}A$, que es una presentación $\mathfrak{C}_{(R)SA}$-proyectiva de $S^{-1}A$, ésta inducirá la sucesión de tres términos de $S^{-1}A$-módulos

$$\bar{S}^{-1}L \rightarrowtail \bar{S}^{-1}D_A(B) \twoheadrightarrow \bar{S}^{-1}D_A(A)$$

que puede pensarse como la sucesión exacta de $S^{-1}R$-módulos

$$S^{-1}L \xrightarrow{u'} S^{-1}D_A(B) \twoheadrightarrow S^{-1}D_A(A)$$

donde $u' = S^{-1}(u)$ es un monomorfismo para cualquier $S = R - \mu$ con μ un ideal maximal de R. Puesto que la condición de ser un monomorfismo es una propiedad local ,se tiene que u es un monomorfismo y asi concluimos la implicación requerida.

En orden a obtener información del equilibrio en la variedad $\underline{V}$ es importante desde un punto de vista práctico como veremos mas adelante el recíproco de las proposiciones (3.1.11) y (3.1.12).

(3.1.14) PROPOSICION

Dado $A \in \underline{V}$, si $\underline{V}_S$ es $(S^{-1}R)$-equilibrada en $S^{-1}A$ para algún S subconjunto multiplicativamente cerrado de un dominio de integridad R, entonces $\underline{V}$ es (R)-equilibrada en A.

Demostración:

Sea $L \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ una presentación $\mathfrak{C}_{(R)A}$- libre con nucleo L singular. Entonces B es libre como R-módulo (nótese que B es esencialmente el R-módulo libre sobre el grupoide (monoide) libre del conjunto sobre el cual se ha construido B en el caso absoluto o bien es , dado un R-módulo el R-módulo libre sobre el grupoide (monoide) libre del conjunto olvidado del módulo dado) y por tanto , ya que R es un dominio de integridad , será L libre de torsión.

Si S es un subconjunto multiplicativo de R tal que $\underline{V}_S$ es $(S^{-1}R)$-equilibrada en $S^{-1}A$,considerando el funtor S^{-1}, (3.1.2) , y aplicándolo a la presentación dada, tendremos la sucesión exacta en $\underline{V}_S$, $S^{-1}L \rightarrowtail S^{-1}B \twoheadrightarrow S^{-1}A$ que es claramente una presentación $\mathfrak{C}_{(R)SA}$-proyectiva de $S^{-1}A$ con núcleo singular $S^{-1}L$, que inducirá la sucesión de tres términos

$$S^{-1}L \rightarrowtail D_{S^{-1}A}(S^{-1}B) \twoheadrightarrow D_{S^{-1}A}(S^{-1}A)$$

o equivalentemente , según (3.1.6) , la sucesión

$$S^{-1}L \rightarrowtail \overline{S}^{-1}D_A(B) \twoheadrightarrow \overline{S}^{-1}D_A(A)$$

Teniendo en cuenta ahora que si M es un $\dfrac{T(A)}{I_V A}$ -módulo se tiene $S^{-1}M \cong \overline{S}^{-1}M$ como $S^{-1}R$-módulos , la sucesión anterior puede escribirse en la forma

$$S^{-1}L \rightarrowtail S^{-1}D_A(B) \longrightarrow S^{-1}D_A(A)$$

interpretándola como una sucesión exacta corta de $S^{-1}R$-módulos.

Ahora bien , como L es libre de torsión , el morfismo canónico $L \longrightarrow S^{-1}L$ será un monomorfismo , y considerando el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\ u\ } & D_A(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{-1}L & \xrightarrow{S^{-1}(u)} & S^{-1}D_A(B) \end{array}$$

u será un monomorfismo por ser el primer morfismo de una composición mónica.

Concluimos pues que la sucesión $L \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ induce la sucesión de tres términos, y por tanto , según (2.2.5) , $\underline{V}$ es (R) -equilibrada en A.

Obsérvese pues que si R es un dominio de integridad y en relación con el teorema (3.1.13) , basta con que exista un primo (maximal) de R tal que $\underline{V}_S$ sea (R_π)-equilibrada en A_π para que $\underline{V}$ sea (R)-equilibrada en A.

Los resultados anteriores nos van a permitir tambien , como veremos a continuación , demostrar que bajo la hipótesis de que R sea un dominio de integridad las condiciones de equilibrio y R-equilibrio son equivalentes.

(3.1.15) PROPOSICION

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ con R un dominio de integridad y $A \in \underline{V}$. Entonces $\underline{V}$ es equilibrada en A si y solo si $\underline{V}$ es R-equilibrada en A .

Demostración:

Considerando $S = R-\{0\}$ tenemos que $S^{-1}R$ es el cuerpo de fracciones de R y en $\underline{V}_S$ se tendrá por tanto que coincidirán las clases de epimorfismos $\mathcal{E}_{\mathbb{C}_{RSA}}$ y $\mathcal{E}_{\mathbb{C}_{SA}}$, o dicho de otra forma , en $\underline{V}_S$ los conconceptos de equilibrio absoluto y relativo son equivalentes .

Entonces , si $\underline{V}$ es equilibrada en A , por (3.1.12) será $\underline{V}_S$ equilibrada en $S^{-1}A$ o equivalentemente $S^{-1}R$-equilibrada en $S^{-1}A$ y ahora aplicando (3.1.14) se deduce que $\underline{V}$ es R-equilibrada en A.

Recíprocamente , si $\underline{V}$ es R-equilibrada en A , por (3.1.11) será $\underline{V}_S$ $S^{-1}R$-equilibrada en $S^{-1}A$ o equivalentemente equilibrada en $S^{-1}A$ y de nuevo aplicando (3.1.14) se tiene que $\underline{V}$ es equilibrada en A .

3.2. ALGEBRAS ASOCIATIVAS . EQUILIBRIO DE LA COHOMOLOGIA DE SHUKLA

Considerando la categoría UR-Alg. de álgebras unitarias sobre un anillo conmutativo R , nos ocupamos ahora de la variedad suya $\underline{V}$ definida por la identidad $f=(xy)z-x(yz)$ o variedad de álgebras asociativas.

Estudiaremos a lo largo de este apartado en que forma se traducen en $\underline{V}$ resultados anteriores. Ofrecemos tambien una nueva demostración de que la variedad de álgebras asociativas es R-equilibrada , mientras que en el caso absoluto se resuelve el problema de su equilibrio , esto es , la anulación de los grupos de cohomología de Shukla en módulos de coeficientes inyectivos , en condiciones suficientemente amplias , problema éste planteado y conjeturado afirmativamente por Gerstenhaber en [35] .

(3.2.1) Dado $A \in \underline{V}$, la categoría A-Mod de A-módulos en $\underline{V}$, (1.1.23), es equivalente a la categoría de módulos a la izquierda sobre el álgebra envolvente , (1.1.24) , que en este caso se particulariza al álgebra $A^e = A \otimes_R A$.

Para cada A-módulo M tendremos el isomorfismo natural

$$\mathrm{Der}(A,M) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(D_A(A), M)$$

Es por otro lado bien conocido que el A^e-módulo $IA = \mathrm{Ker}(A^e \longrightarrow A)$ donde $A^e \longrightarrow A$ es el morfismo de multiplicación , este ideal aumentación representa al funtor derivaciones y por tanto , salvo isomorfismo, será $D_A(A)= IA$. Mas en general , para cualquier $B \longrightarrow A \in (\underline{V}, A)$, el funtor de diferenciales vendrá dado salvo equivalencia por $D_A(B)= A^e \otimes_{B^e} IB$, (1.1.25) .

Como en (1.2.1) tendremos para la variedad en cuestión , grupos de cohomología del cotriple absolutos y relativos , $H^n(A,M)$ y $H^n(A,M)_R$ respectivamente.

Asimismo tendremos definidos los grupos de cohomología equilibrada $\bar{H}^n(A,M)$ ó $\bar{H}^n(A,M)_R$ y de extensiones $\tilde{H}^n(A,M)$ ó $\tilde{H}^n(A,M)_R$.

Notemos que las clases de epimorfismos en A-Mod , $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}_R$, son precisamente la clase de todos los epimorfismos y la de epimorfismos R-escindentes de A^e-módulos respectivamente .

(3.2.2) LEMA

Si $B \xrightarrow{\sigma} A$ es un epimorfismo R-escindente de álgebras asociativas, éste induce la sucesión de tres términos , esto es , la sucesión exacta corta de A^e-módulos

$$\frac{L}{L^2} \rightarrowtail A^e \otimes_{B^e} IB \twoheadrightarrow IA$$

siendo $L = \operatorname{Ker} \sigma$

Demostración :

([15] pag. 419)

(3.2.3) COROLARIO

La variedad de R-álgebras asociativas y unitarias es R-equilibrada.

Demostración:

(2.2.4)

(3.2.4) COROLARIO

Existen isomorfismos naturales

$$H^n(A,M)_R \cong \bar{H}^n(A,M)_R \cong \tilde{H}^n(A,M)_R$$

Demostración:

(2.4.12)

El segundo de estos isomorfismos fue demostrado en ([15] ,teorema 3.10)

(3.2.5) COROLARIO

Si para cada álgebra asociativa A y cada A^e-módulo M , $Hoch^n(A,M)$ denota el correspondiente grupo de cohomología de A con ceficientes en M introducidos por Hochschild (Ann. of Math. [46](1945)) se tienen isomorfismos naturales

$$H^n(A,M)_R = \begin{cases} Der(A,M) & n=0 \\ Hoch^{n+1}(A,M) & n>0 \end{cases}$$

Demostración:

En [17] pag. 174 se prueba que $Hoch^m(A,M) = Ext^m_{A^e}(A,M)$ $m>0$; La sucesión exacta $IA \rightarrowtail A^e \twoheadrightarrow A$ induce isomorfismos naturales

$$Ext^{m+1}_{A^e}(A,M) \cong \overline{H}^m(A,M) \qquad m>0$$

y el hecho se sigue del corolario anterior .

Resaltemos que la existencia de los isomorfismos del corolario anterior fue demostrada por Barr- Beck en [14].

En virtud de los hechos anteriores podremos aplicar , para los grupos de cohomología de Hochschild , todoslos resultados obtenidos a lo largo de toda la memoria concernientes a variedades equilibradas .

En 1967 Barr [8] , prueba que los grupos de cohomología de un álgebra asociativa A con coeficientes en un A^e-módulo M introducidos por Shukla [93] , $Shu^n(A,M)$, coinciden con los definidos mediante el cotriple absoluto , mas explícitamente

(3.2.6) PROPOSICION

Para cada álgebra asociativa A y cada A-módulo M se tienen isomorfismos naturales

$$H^n(A,M) = \begin{cases} Der(A,M) & n=0 \\ \\ Shu^{n+1}(A,M) & n>0 \end{cases}$$

En el año 1964 Gerstenhaber en [35] conjetura la anulación de los grupos de cohomología de Shukla en dimensiones positivas cuando el módulo de coeficientes es inyectivo , o lo que es equivalente con nuestra terminología , que la variedad de álgebras asociativas es equilibrada.

En algunos casos tal hecho se deduce del equilibrio relativo , en efecto

(3.2.7) PROPOSICION

Si A es un álgebra asociativa proyectiva como R-módulo entonces se da el equilibrio en A .

Demostración:

Todo epimorfismo $B \longrightarrow A$ será R-escindente y por el lema (3.2.2) inducirá la sucesión de tres términos . Consecuentemente en virtud de (2.2.4) se concluye la tesis requerida .

(3.2.8) COROLARIO

Si el anillo R es semisimple la variedad de R-álgebras asociativas es equilibrada.

Demostración :

Si R es semisimple todo R-módulo es proyectivo .

Hemos de notar sin embargo que bajo esta hipótesis de ser R semisimple las teorias de cohomología absoluta y relativa coinciden . en efecto , las clases $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_R}$ y $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$ son la misma .

Como aplicación directa de los resultados de 3.1. obtenemos la primera resolución parcial importante de la conjetura de Gerstenhaber.

(3.2.9) TEOREMA

Si R es un dominio de integridad , la variedad de álgebras asociativas es equilibrada .

Demostración:

Sea $S = R - \{0\}$, entonces $S^{-1}R$ es el cuerpo de cocientes de R , obviamente semisimple y por (3.2.8) la variedad de $S^{-1}R$-álgebras asociativas es equilibrada . Entonces según (3.1.14) la variedad en cuestión sobre R es tambien equilibrada.

Obsérvese tambien por otro lado que (3.1.15) da de forma inmediata el resultado requerido.

Destaquemos que en el caso particular de que el anillo R sea el anillo de los enteros Z , podemos concluir que los grupos de cohomología de un anillo introducidos por Mac-lane , [74] , se anulan cuando el módulo de coeficientes es inyectivo . Por tanto , como consecuencia de (2.4.12) estos grupos serán isomorfos a los correspondientes grupos de cohomología equilibrada y de extensiones.

Siguiendo la terminología de 3.1. , si π es un ideal primo de R y A es un R-álgebra asociativa , $A_\pi = R_\pi \otimes_R A$ es de nuevo un R_π-álgebra asociativa. Como consecuencia del teorema (3.1.13) tendremos ahora

(3.2.10) PROPOSICION

Sea A un R-álgebra asociativa. Entonces son equivalentes :

i) $Shu^n(A, M) = 0$ para cualquier A -módulo inyectivo M , $n \geq 2$

ii) $Shu^n(A_\pi, M') = 0$ para cualquier A_π-módulo inyectivo M' , $n \geq 2$ y todo ideal primo π de R .

donde $Shu^n(A_\pi, M')$ denota los correspondientes grupos de cohomología en la variedad de R_π- álgebras asociativas.

(3.2.11) TEOREMA

Si R es un anillo normal entonces la variedad de R-álgebras asociativas es equilibrada .

Demostración:

Si R es normal entonces para todo primo π de R , el anillo local R_π es un dominio de integridad y por tanto según el teorema (3.2.9) la variedad de R_π -álgebras asociativas es equilibrada dándose por consiguiente la hipótesis ii) de (3.2.10) lo que concluye la demostración .

Observemos que en la demostración solo hemos utilizado el hecho de que los localizados R_π sean dominios de integridad y por tanto la condición de normalidad sobre el anillo base R puede sustituirse por tal hipótesis menos restrictiva .

(3.2.12) COROLARIO

Si R es regular (en el sentido de Von-Neuman) la variedad de R-álgebras asociativas es equilibrada.

Demostracion:

la condición de regularidad implica que A_π es un cuerpo para todo primo π de R .

(3.2.13) COROLARIO

Si R es un anillo conmutativo noetheriano de dimensión global finita entonces la variedad de R-álgebras asociativas es equilibrada.

Demostración:

Observemos en principio que estos anillos son tambien llamados regulares (véase por ejemplo [89] ó Matsumura (Commutative Algebra. Benjamin 1980)).

Es bien conocido que la hipótesis de dimensión global finita es equivalente a la condición de que R_π sea un anillo local regular para todo primo π de R (Teorema de Serre. Véase por ejemplo [89] pag. 262) y según el teorema de Auslander- Nagata- Buchsbaum todo anillo local regular es un dominio de factorización única. Por tanto se tiene que R es un anillo normal y basta aplicar el teorema anterior.

Destaquemos que los únicos anillos que verifican simultaneamente los dos últimos corolarios, esto es, que son regulares en el sentido de Von-Neumann y son noetherianos de dimensión global finita son los anillos de dimensión global cero, esto es, los anillos semisimples.

Es oportuno hacer finalmente referencia a la amplia lista de anillos que son cubiertos por las hipótesis de los teoremas y corolarios precedentes, sobre los cuales la correspondiente variedad de álgebras asociativas es equilibrada, esto es, en ella los grupos de cohomología de Shukla se anulan en módulos de coeficientes inyectivos, a los cuales puede aplicárseles toda la teoria desarrollada anteriormente, como cuestiones de interpretación, posibilidad de ser definidos como funtores derivados en la segunda variable (es decir, su coincidencia con los grupos de cohomología equilibrada), etc. Asi, anillos de Prufer, Bezout, de enteros algebraicos, etc. son ejemplos de dominios de integridad; anillos como Z_n con n libre de cuadrados ó $K[G]$ (álgebra de grupo) para G un grupo finito y K un cuerpo de característica no dividiendo al orden de G son ejemplos de anillos semisimples, anillos de Boole son tambien ejemplos de anillos regulares Von-Neumann y los numerosos ejemplos de anillos regulares que surgen en Geometria Algebraica asi como tambien de anillos normales.

3.3. ALGEBRAS DE LIE

La variedad de álgebras de Lie sobre un anillo conmutativo y unitario R es la variedad de la categoría R-Alg. definida por el conjunto de identidades $\{f, g\}$ donde :

$$f = x^2 \quad ; \quad g = (xy)z + (yz)x + (zx)y \quad (\text{ Identidad de Jacobi})$$

A lo largo de este apartado $\underline{V}$ representará a la variedad de álgebras de Lie .

Si $A \in \underline{V}$ y $a, b \in A$, entonces puede deducirse facilmente que $ab = -ba$, y que , consecuentemente , la identidad $f_1 = xy + yx$ junto con la identidad de Jacobi g definen de forma equivalente a la variedad $\underline{V}$.

(3.3.1) Definiendo para $A \in \underline{V}$ un A-módulo en $\underline{V}$ como en (1.1.23) y considerando la categoría A-Mod , se tendrá según (1.1.24) una equivalencia natural

$$A\text{-Mod} \cong {}_{\frac{T(A)}{I_V A}}\text{Mod}$$

donde $\frac{T(A)}{I_V A}$, que es isomorfo , ([64]) , al cociente del álgebra tensorial sobre el R-módulo A_0 por el ideal generado por todos los tensores de la forma $ab - a \otimes b + b \otimes a$, $a, b \in A_0$, es llamado usualmente el álgebra universal envolvente del álgebra de Lie A , al que denotaremos por A^e.

Como en (1.1.25) , para la variedad $\underline{V}$ en cuestión , el funtor derivaciones es representable , esto es , existe un isomorfismo natural para cada A-módulo M

$$\text{Der}(A, M) \cong \text{Hom}_{A^e}(D_A(A), M)$$

Por otro lado , en el caso de que el anillo base sea un cuerpo K, es conocido ([49]) que el A^e-módulo $IA = \mathrm{Ker}\,(A^e \longrightarrow K)$ (ideal aumentacion) representa al funtor derivaciones de modo que se tendrá , salvo isomorfismo que $D_A(A) = IA$.

Mas en general , el funtor de diferenciales podrá ser calculado explicitamente como en (1.1.25) obteniéndose para $B \longrightarrow A \in (\underline{V}, A)$, $D_A(B) = A^e \otimes_{B^e} D_B(B)$.

Teniendo en cuenta la factorización del diagrama de funtores adjuntos expresada en (1.1.26) para el caso que nos atañe de la variedad de álgebras de Lie y considerando los cotriples inducidos por dichas adjunciones podremos definir como en (1.2.1) grupos de cohomología relativos a ambos cotriples , que para $B \longrightarrow A \in (\underline{V}, A)$ y un A-módulo M , seguiremos denotando $H^n(B, M)_{(R)}$.

Si $\mathcal{E}_{(R)}$ es la clase de epimorfismos en A^e-Mod definida en (1.1.26) tendremos tambien como en (1.2.10) y (1.2.15) grupos de cohomología equilibrada $\bar{H}^n(A, M)_{(R)}$ y grupos de extensiones $\tilde{H}^n(A, M)_{(R)}$.

(3.3.2) Si $B \twoheadrightarrow A$ es un epimorfismo en $\underline{V}$ R-escindente con nucleo L , teniendo en cuenta (2.1.2) se dispone de la sucesión exacta

$$\frac{L}{L^2} \xrightarrow{u} A^e \otimes_{B^e} D_B(B) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

la cual como se demuestra en [15] es una sucesión exacta corta , pues el morfismo u admite una escisión R-lineal y por tanto es un monomorfismo.

Con la terminología de (2.2) se tiene pues que para cualquier epimorfismo $B \twoheadrightarrow A$ en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{RA}}$ se da la sucesión de tres términos y se concluye por tanto , en función de las condiciones de equilibrio expresadas en (2.2.2) y (2.2.4) que $H^n(A, I)_R = 0$ para cualquier I A-módulo $\mathcal{M}_R$-inyectivo . Se tiene asi

(3.3.3) TEOREMA

La variedad $\underline{V}$ de álgebras de Lie sobre un anillo conmutativo R es R-equilibrada .

Como consecuencia , se tiene una interpretación uniforme para las tres teorias de cohomología en el caso relativo , esto es

(3.3.4) COROLARIO

Para un álgebra de Lie A y un A^e-módulo M , existen isomorfismos naturales

$$H^n(A,M)_R \cong \overline{H}^n(A,M)_R \cong \tilde{H}^n(A,M)_R \qquad n \geq 1$$

Demostración :

(2.4.12) .

(El segundo de estos isomorfismos , como para el caso de algebras asociativas fue demostrado en [15] , teorema 3.10).

En el caso particular de tomar como anillo un cuerpo K y considerando los grupos de cohomología definidos por CHevalley-Eilenberg en [21] , $CH\text{-}E^{n+1}(A,M)$, éstos según se probó en [17] son isomorfos con los grupos $\mathrm{Ext}^{n+1}_{A^e}(K,M)$ y considerando la sucesion exacta corta

$$IA \rightarrowtail A^e \twoheadrightarrow K$$

se tienen isomorfismos $\mathrm{Ext}^{n+1}_{A^e}(K,M) \cong \mathrm{Ext}^n_{A^e}(IA,M)$, de modo que despues de (3.3.4) se concluye

PROPOSICION

Existen isomorfismos naturales $H^n(A,M)_K \cong \begin{cases} \mathrm{Der}(A,M) & n=0 \\ CH\text{-}E^{n+1}(A,M) & n>0 \end{cases}$

Volviendo al hecho de considerar la variedad de álgebras de Lie sobre un anillo R , nos ocupamos a continuación de los grupos de cohomología absolutos $H^n(A,M)$.

El estudio realizado en (3.1) nos permite concluir inmediatamente

(3.3.6) TEOREMA

Si R es un dominio de integridad la variedad de álgebras de Lie es equilibrada .

Demostración :

(3.3.3) y (3.1.15)

De forma análoga al proceso realizado en la variedad de álgebras asociativas , podemos encontrar una gran cantidad de anillos que tomados como anillos base para la variedad $\underline{V}$ de álgebras de Lie , permitan afirmar el equilibrio de ésta , es decir , la anulación de los grupos de cohomología absolutos enmódulos de coeficientes inyectivos. Tenemos asi

(3.3.7) TEOREMA

Si R es un anillo normal , la variedad de álgebras de Lie es equilibrada.

Demostración :

Puesto que R_π es un dominio de integridad para cualquier ideal primo π , la variedad de R_π - álgebras de Lie , según (3.3.6), es equilibrada y entonces por el teorema (3.1.13) $\underline{V}$ es equilibrada.

De nuevo , como en (3.2.12) y (3.2.13) la condición de equilibrio absoluto para $\underline{V}$ es válida cuando el anillo base R es un anillo regular en el sentido de Von-Neumann y tambien cuando el anillo R es un anillo noetheriano de dimensión global finita .

Dixmier en [23] introduce una teoria de cohomología absoluta para anillos de Lie y fue conjeturado por Gerstenhaber en [35] la anulación de dichos grupos de cohomología en módulos de coeficientes inyectivos.

Admitiendo como se prevee en [18] pag. 223 la equivalencia entre los grupos de cohomología del cotriple absoluto y los definidos por Dixmier, concluimos despues de (3.3.6) y (3.3.7) la conjetura de Gerstenhaber en condiciones suficientemente amplias como son las de que el anillo base sea un dominio de integridad o un anillo normal

3.4. VARIEDADES DE ALGEBRAS CON (ANTI)-AUTOMORFISMO DE PERIODO DOS

Supondremos a lo largo de este apartado que R es un anillo conmutativo y unitario de característica distinta de 2 .

Nuestro objetivo en principio es mostrar que se puede realizar un estudio paralelo al desarrollado en el primer capítulo en el contexto actual de álgebras con (anti)-automorfismo de periodo dos.

Observando posteriormente que el equilibrio en cualquier variedad de dichas categorias puede estudiarse en función del equilibrio en la variedad de $\underline{C}$ definida por el mismo conjunto de identidades , nos ocuparemos de la variedad de álgebras asociativas con involucción (esto es , con antiautomorfismo de periodo dos) y de la variedad de álgebras de Lie con automorfismo de periodo dos y de los grupos de cohomología clasicamente establecidos para ellas por Harris en [44] y [45] .

(3.4.1) Denotaremos en lo que sigue por $\mathcal{L}$ a cualquiera de las categorias

(U)IR-Alg o categoría de R-álgebras (unitarias) con involucción

(U)AR-Alg o categoría de R-álgebras (unitarias) con automorfismo de periodo dos.

Destaquemos que en cualquiera de ellas , los morfismos no son mas que morfismos de R-álgebras (unitarias) conmutando con las involucciones o con los automorfismos de periodo dos.

Un razonamiento análogo al realizado en (1.1.2) nos permite disponer de nuevo de un diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sets} \arrow[d, shift right, "F_2"'] \arrow[dd, bend right=60, "F"'] \\
R^M \arrow[u, shift right, "U_2"'] \arrow[d, shift right, "F_1"'] \\
\mathcal{L} \arrow[u, shift right, "U_1"'] \arrow[uu, bend right=60, "U"']
\end{tikzcd}$$

en cualquiera de los casos reseñados para $\mathcal{L}$.

(3.4.2) DEFINICION

Sea $(A, r_A) \in \mathcal{L}$. Un (A, r_A)-módulo es un epimorfismo escindido en $\mathcal{L}$

$$(E, r_E) \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (A, r_A) \qquad p.s = I_A$$

con núcleo en R-Alg. M singular , esto es , con multiplicación trivial.

Obsérvese que entonces , se induce , según el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "r_M"'] & E \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[d, "r_E"'] & A \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d, "r_A"] \\
M \arrow[r, "i"] & E \arrow[r, shift left, "p"] & A \arrow[l, shift left, "s"]
\end{tikzcd}$$

un morfismo de R-módulos $r_M : M \longrightarrow M$ tal que $r_E.i = i.r_M$ verificando además que es de periodo dos pues para cualquier $m \in M$ se tiene

$i.r_M^2(m) = r_E^2.i(m) = i(m)$ y al ser i un monomorfismo se deduce que $r_M^2(m) = m$ de modo que $r_M^2 = I_M$

Si $(M, r_M) \xrightarrow{i} (E, r_E) \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (A, r_A)$ es un (A, r_A)-módulo

se inducen acciones (independientes de la escisión elegida) de A en M a izquierda y derecha como en (1.1.3).

Un morfismo de (A, r_A)-módulos es un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} (M, r_M) & \xrightarrow{i} & (E, r_E) & \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} & (A, r_A) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \bar{\phi} & & \| \\ (M', r_{M'}) & \xrightarrow{i'} & (E', r_{E'}) & \underset{s'}{\overset{p'}{\rightleftarrows}} & (A, r_A) \end{array}$$

con $\bar{\phi}.i = i'.\phi$; $p'.\bar{\phi} = p$; $\bar{\phi}.s = s'$ y tal que ϕ y $\bar{\phi}$ conmutan con las involucciones (automorfismos de periodo dos).

Puede probarse facilmente que un morfismo de (A, r_A)-módulos es un morfismo de R-álgebras entre los nucleos que conserva las acciones (es decir es un morfismo de A-módulos) y que conmuta con las involucciones o con los automorfismos de periodo dos.

Tenemos asi la categoria de módulos para un algebra con involucción o con automorfismo de periodo dos (A, r_A), a la que denotaremos (A, r_A)-Mod.

(3.4.3) Si $(A, r_A) \in \mathcal{L}$, dados dos (A, r_A)-módulos

$$(M, r_M) \rightarrowtail (E, r_E) \rightleftarrows (A, r_A) \quad \text{y} \quad (M, r_M) \rightarrowtail (E', r_{E'}) \rightleftarrows (A, r_A)$$

tales que las acciones inducidas de A en M respectivamente coincidan, se tiene que $I_{(M, r_M)} : (M, r_M) \longrightarrow (M, r_M)$ es un isomorfismo de (A, r_A)-módulos y por tanto $(E, r_E) \cong (E', r_{E'})$, de modo que (E, r_E) esta determinado salvo isomorfismo por (A, r_A), (M, r_M) y las acciones de A en M.

Denotaremos (E, r_E) por $(M \rtimes A, r_{M \rtimes A})$ y le llamaremos producto semidirecto de (A, r_A) por (M, r_M) y hablaremos de un (A, r_A)-módulo suponiendo dado $(M \rtimes A, r_{M \rtimes A})$.

Considerando el R-álgebra (unitaria) $M \times_0 A$ definida en (1.1.9) y en relación con la proposición establecida en dicho número , hacemos ahora , en nuestro nuevo contexto , las siguientes observaciones.

a) Si $(A,r_A) \in \mathfrak{L}$ y (M,r_M) es un (A,r_A)-módulo , entonces el R-álgebra (unitaria) $M \times_0 A$ es un objeto de $\mathfrak{L}$ bajo la involucción (automorfismo de periodo dos)

$$r(m,a) = (r_M(m), r_A(a)) \qquad (m,a) \in M \times_0 A$$

b) Recíprocamente , si existen acciones R-bilineales am y ma de A en M y el R-álgebra (unitaria) $M \times_0 A$ pertenece a $\mathfrak{L}$ con una involucción (automorfismo de periodo dos) r tal que $r(0,a) = (0, r_A(a))$, entonces (M, r_M) es un (A,r_A)-módulo con $r_M(m) = r(m,0)$

(3.4.4) Si $(A,r_A) \in \mathfrak{L}$, una derivación de (A,r_A) en un (A,r_A)-módulo (M,r_M) es una derivación de A en el A-módulo M que conmuta con las involucciones (automorfismos de periodo dos).

Tenemos asi el conjunto

$$\mathrm{Der}((A,r_A),(M,r_M)) = \left\{ d \in \mathrm{Der}(A,M) \;/\; r_M d = d r_A \right\}$$

el cual se comprueba facilmente que es un subgrupo del grupo abeliano de derivaciones de A en M , Der(A,M) .

Podremos entonces considerar el funtor

$$\mathrm{Der}(\ \ ,(M,r_M)) : (\mathfrak{L}, (A,r_A))^{\circ} \longrightarrow \mathrm{G.Ab.}$$

demostrándose además de forma análoga a (1.1.14) su equivalencia natural con el funtor $\quad \mathrm{Hom}_{(\pounds,(A,r_A))}\left(\quad , \begin{array}{c} (M \wr A, r_{M \wr A}) \\ \downarrow \\ (A, r_A) \end{array} \right).$

(3.4.5) Si $\underline{V}$ es una variedad de $\pounds$ y $(A,r_A) \in \underline{V}$, entonces un (A,r_A)-módulo (M,r_M) está en $\underline{V}$ si $(M \wr A, r_{M \wr A})$ está en $\underline{V}$.

Denotando $\underline{V}(A,r_A)$-Mod a la categoría de (A,r_A)-módulos en $\underline{V}$, se tiene , como en (1.1.25) una adjunción

$$\begin{array}{c} (\underline{V},(A,r_A)) \\ D_{(A,r_A)} \big\downarrow \quad \big\uparrow J_{r_A} \\ \underline{V}(A,r_A)\text{-Mod} \end{array}$$

donde $D_{(A,r_A)}$ es el funtor de diferenciales para el álgebra con involuccion (automorfismo de periodo dos) (A,r_A) en $\underline{V}$, siendo la categoría $\underline{V}(A,r_A)$-Mod naturalmente equivalente a la de módulos a la izquierda , en el sentido usual , sobre el álgebra universal envolvente con involucción (automorfismo de periodo dos) para (A,r_A) , esto es ,

$$\underline{V}(A,r_A)\text{-Mod} \cong {}_{\left(\frac{T(A)}{I_V A}, \bar{r}\right)}\mathrm{Mod}$$

con $\left(\frac{T(A)}{I_V A}, \bar{r}\right) = \frac{T(A)}{I_V A} \oplus \bar{r}\, \frac{T(A)}{I_V A}$ (Véase [38] y téngase en cuenta (1.1.24)).

(3.4.6) Sea V una variedad de $\pounds$ y $(A,r_A) \in \underline{V}$. Considerando las adjunciones inducidas en la comacategoría por las de (3.4.1) y teniendo en cuenta la adjunción expresada en el punto anterior , se tendrá , como en (1.1.26) el diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Sets}\ ,\ A) \arrow[d, shift right, "F_{2A}"'] \arrow[dd, bend right=60, "F_{Vr_A}"'] \\
({}_R M\ , A) \arrow[u, shift right, "U_{2A}"'] \arrow[d, shift right, "F_{1Vr_A}"'] \\
(\underline{V}\ ,(A, r_A)) \arrow[u, shift right, "U_{1Vr_A}"'] \arrow[uu, bend right=60, "U_{Vr_A}"'] \arrow[d, shift right, "D_{(A,r_A)}"'] \\
\underline{V}(A, r_A)\text{-Mod} \arrow[u, shift right, "J_{r_A}"']
\end{tikzcd}$$

Denotaremos $\mathbb{G}_{r_A}$ al cotriple en $(\underline{V}\ , (A, r_A))$ inducido por la adjunción $F_{Vr_A} \dashv U_{Vr_A}$, y $\mathbb{G}_{Rr_A}$ al inducido por la adjunción $F_{1Vr_A} \dashv U_{1Vr_A}$.

Entonces , si (M, r_M) es un (A, r_A)-módulo en $\underline{V}$ y considerando el funtor de coeficientes $\mathrm{Der}(\ \ , (M, r_M)) : (\underline{V}\ , (A, r_A))^{o} \longrightarrow G.Ab.$ podremos definir funtores de cohomología como en (1.2.1)

$$H^n(\ \ , (M, r_M))_{(R)r_A} = H^n(\ \ , \mathrm{Der}(\ \ , (M, r_M))_{\mathbb{G}_{(R)r_A}} \qquad n \geq 0$$

En $(\underline{V},(A,r_A))$ tendremos la clase de epimorfismos escindentes en (Sets, A) a la que denotaremos $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{r_A}}$ y la clase de epimorfismos escindentes en $({}_R M, A)$ a la que denotaremos $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{Rr_A}}$.

En $\underline{V}(A,r_A)$-Mod tendremos la clase $\mathcal{E}_{(R)r_A}$ de todos los epimorfismos que mediante J_{r_A} pertenezcan a $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{(R)r_A}}$.

Entonces, de forma análoga a (1.2.10) y (1.2.15) y considerando las clases de epimorfismos $\mathcal{E}_{(R)r_A}$, podremos definir tambien en $\underline{V}$, para $(A,r_A)\in \underline{V}$ y un (A,r_A)-módulo (M,r_M) en $\underline{V}$, grupos de cohomología equilibrada $\bar{H}^n((A,r_A),(M,r_M))_{(R)r_A}$ $n\geq 0$

y grupos de cohomología de extensiones $\tilde{H}^n((A,r_A),(M,r_M))_{(R)r_A}$ $n\geq 1$

(3.4.7) Si $(L,r_L) \rightarrowtail (B,r_B) \twoheadrightarrow (A,r_A)$ es una (R)-extensión singular de (A,r_A) por el (A,r_A)-módulo (L,r_L) (véase (1.2.7) con las modificaciones naturales) ésta induce, considerando la sucesión exacta larga en los grupos de homología con coeficientes en $D_{(A,r_A)}$ y relativos al cotriple $G_{(R)r_A}$, la sucesión exacta

$$(L,r_L) \longrightarrow D_{(A,r_A)}((B,r_B)) \twoheadrightarrow D_{(A,r_A)}((A,r_A)) \qquad (1)$$

Es facil de probar entonces que si se tiene la sucesion exacta corta

$$L \rightarrowtail D_A(B) \twoheadrightarrow D_A(A)$$

(sucesión de tres términos en la variedad de $\underline{C}$ definida por el mismo conjunto de identidades), la sucesión exacta (1) es también exacta corta pues $D_A(B)$ es un sumando de $D_{(A,r_A)}(B,r_B)$ (véase [44] y [92]) y por tanto como consecuencia de (2.2.4) se puede concluir que una variedad $\underline{V}$ de $\pounds$ es (R)-equilibrada en (A,r_A) si la variedad de $\underline{C}$ definida por el mismo conjunto de identidades es (R)-equilibrada en A .

(3.4.8) " Algebras asociativas unitarias con involucción. Cohomología de Harris "

Traduciendo todos los resultados anteriormente citados al caso de la variedad de algebras asociativas unitarias con involucción y teniendo en cuenta que por (3.2.3) la variedad de álgebras asociativas unitarias es R-equilibrada se concluye despues de (3.4.7)

(3.4.9) TEOREMA

La variedad de R-álgebras asociativas unitarias con involucción es R-equilibrada.

(3.4.10) COROLARIO

Existen isomorfismos naturales

$$H^n((A,r_A),(M,r_M))_{Rr_A} \cong \bar{H}^n((A,r_A),(M,r_M))_{Rr_A} \cong \tilde{H}^n((A,r_A),(M,r_M))_{Rr_A}$$

Demostración : (2.4.12)

En el caso de tomar la cohomología absoluta obtenemos despues de (3.2.9) y (3.2.11) y teniendo en cuenta de nuevo (3.4.7)

(3.4.11) TEOREMA

Si R es un dominio de integridad o bien es un anillo normal , la variedad de R-algebras asociativas unitarias con involuccion es equilibrada .

Para la variedad en cuestión , cuando el anillo base es un cuerpo de característica distinta de 2 , fueron definidos por Harris en [45] grupos de cohomología , los cuales , como prueba Glassman en [38] coinciden con los grupos de extensiones.

Teniendo en cuenta entonces (3.4.10) podemos afirmar

(3.4.12) TEOREMA

Si (A,r_A) es un álgebra asociativa y unitaria con involucción y (M,r_M) es un (A,r_A)-módulo se tienen isomorfismos naturales

$$H^n((A,r_A),(M,r_M)) = \begin{cases} \mathrm{Harr}^{n+1}((A,r_A),(M,r_M)) & n>0 \\ \mathrm{Der}((A,r_A),(M,r_M)) & n=0 \end{cases}$$

donde $\mathrm{Harr}^{n+1}(\ ,\ )$ denota los grupos de cohomología definidos por Harris

(3.4.13) Para la variedad de álgebras de Lie con automorfismo de periodo dos podemos obtener de nuevo , teniendo en cuenta (3.4.7) y los resultados ofrecidos en el apartado (3.3) consecuencias análogas a (3.4.9) , (3.4.10) y (3.4.11) sobre el equilibrio de dicha variedad .

Cuando el anillo base es un cuerpo de caracteŕitica distinta de 2 , Harris en [44] define tambien , para un álgebra de Lie con automorfismo de periodo dos (A,r_A) y un (A,r_A)-módulo , grupos de cohomología que coinciden como se demuestra en [38] con los grupos de extensiones , pudiéndose concluir por tanto como en (3.4.12) la equivalencia de los grupos definidos por Harris con los definidos en (3.4.6) para la variedad en cuestión .

3.5. ALGEBRAS DE JORDAN

Consideramos en este punto la variedad de UR-Alg. definida por el conjunto de identidades $\{ f , g \}$ donde

$$f = xy - yx \quad ; \quad g = x^2(yx) - (x^2y)x$$

que es la variedad de álgebras de Joran unitarias a la que denotaremos Jord.

(3.5.1) Si A Jord. , se tendrá como en (1.1.26) un diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Sets}, A) \arrow[d, shift right] \arrow[dd, bend right=60, "F_A"'] \\
({}_R M, A) \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right] \\
(\mathrm{Jord}, A) \arrow[u, shift right] \arrow[uu, bend right=60, "U_A"'] \arrow[d, shift right, "D_A"'] \\
A\text{-Mod} \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

donde el funtor F_A es el inducido en la comacategoría por el funtor $F : \mathrm{Sets} \longrightarrow \mathrm{Jord}$ el cual hace corresponder a cada conjunto , el R-álgebra de Jordan libre y unitaria sobre dicho conjunto , esto es , el R-álgebra no asociativa y unitaria libre sobre el conjunto dado , módulo el ideal generado por todos los elementos de la forma $ab-ba$; $a^2(ba)-(a^2b)a$. ([61] pag 40)

La categoría de A-módulos en Jord. será según (1.1.24) equivalente a la de módulos a la izquierda sobre el anillo $\frac{T(A)}{I_V A}$. Si A_0 representa el R-módulo subyacente de A , puede probarse en este caso ([64] y [61]) que $\frac{T(A)}{I_V A}$ es isomorfo al cociente del álgebra tensorial sobre A_0 por el ideal generado por todos los tensores de la forma

$$a^2 \otimes a - a \otimes a^2 \quad ; \quad a^2 b + 2a \otimes b \otimes a - b \otimes a^2 - 2a \otimes ab \qquad a,b \in A_0$$

Según el diagrama anterior y tal como se hizo en el primer capítulo , en la variedad de álgebras de Jordan podremos definir grupos de cohomología para cada una de las tres teorias alli estudiadas , a los que seguiremos denotando para $A \in$ Jord y un A-módulo M

$$H^n(A,M)_{(R)} \quad ; \quad \bar{H}^n(A,M)_{(R)} \quad ; \quad \tilde{H}^n(A,M)_{(R)}$$

(3.5.2) En [38] Glassman define grupos de cohomología para cualquier variedad de álgebras como grupos de extensiones (en el sentido de (1.2.3) tras renumeración) y en [39] estudia de forma particular estos grupos de cohomología para ciertos objetos de la variedad de álgebras de Jordan sobre un cuerpo de característica distinta de 2 , a saber las álgebras de Jordan de matrices de grado $n \geqslant 4$.

Mas concretamente , si (A,r) es un álgebra asociativa y unitaria con involuccion , considera el álgebra A_n de matrices $n \times n$, $n \geqslant 4$, con entradas de A (con las operaciones usuales de suma ,producto y producto escalar) que es de nuevo un álgebra asociativa y unitaria con involuccion (involucción canónica J_a) .

Teniendo en cuenta el par de funtores adjuntos ([61] pag 79)

$$\begin{array}{c} \text{Jord.} \\ E \big\downarrow \big\uparrow S \\ \text{UIR-Asoc.} \end{array}$$

(asociativas unitarias con involuccion)

donde , para $(A,r)\in$ UIR-Asoc , $S(A,r)$ es el algebra de Jordan de los elementos simétricos bajo r , se tiene que $S(A_n, J_a)$ es un álgebra de Jordan (álgebra de Jordan de matrices) , siendo para este tipo de álgebras de Jordan con $n\geqslant 4$, a las que se dedica el estudio realizado en [39] .

Apoyándose en el hecho básico probado por Jacobson en [61] pag. 144 de la equivalencia entre las categorías de módulos para un álgebra de Jordan de matrices $S(A_n, J_a)$ $n\geqslant 4$, y la de módulos con involucción para el álgebra de coeficientes (A,r) y denotando $\Gamma(M,r_M)$ al correspondiente $S(A_n, J_a)$-módulo (mediante dicha equivalencia) para el (A,r)- módulo (M,r_M) se tiene

(3.5.3) PROPOSICION

Sea J cualquier involucción canónica . Entonces (M,r_M) es un (A,r)-módulo inyectivo si y solo si $\Gamma(M,r_M)$ es un $S(A_n, J)$-módulo inyectivo .
Demostración : ([39])

(3.5.4) PROPOSICION

Si J es cualquier involucción canónica

$$\tilde{H}^k(S(A_n, J), \Gamma(M,r_M)) = \tilde{H}^k((A,r),(M,r_M)) \qquad k\geqslant 1$$

Demostración : ([39]) tras renumeración.

Ambas proposiciones nos permiten ahora, teniendo en cuenta (3.4.9),obtener

(3.5.5) PROPOSICION

Para cualquier involucción canónica J y cualquier $S(A_n, J)$-módulo inyectivo I se tiene $\tilde{H}^1(S(A_n,J), I) = 0$

Puesto que según (1.2.9), $H^1(A,M) \cong \tilde{H}^1(A,M)$ para cualquier álgebra de Jordan A y cualquier A-módulo M , y teniendo en cuenta la condición de equilibrio dada en (2.2.2) podemos afirmar despues de (3.5.5)

(3.5.6) TEOREMA

La variedad de álgebras de Jordan unitarias es equilibrada en cualquier álgebra de Jordan de matrices $n \geq 4$, sobre un cuerpo de característica distinta de 2 .

(3.5.7) COROLARIO

Si A es un álgebra de Jordan de matrices $n \geq 4$, sobre un cuerpo de característica distinta de 2 , se tienen isomorfismos

$$H^n(A,M) \cong \bar{H}^n(A,M) \cong \tilde{H}^n(A,M)$$

Demostración : (2.4.12)

(3.5.8) Sin embargo , como se demuestra en [92] , si $A = K[\varepsilon]$ es el álgebra de los números duales sobre K y considerándola como álgebra de Jordan unitaria se tiene que $\tilde{H}^1(A, A^e) = 0$ donde A^e , el álgebra universal envolvente de A , es un A^e-módulo inyectivo.

Por tanto, según (1.2.9) se tendrá que $H^1(A, A^e) = 0$, es decir el primer grupo de cohomología del cotriple no se anula en módulos de coeficientes inyectivos y por tanto concluimos

(3.5.9) TEOREMA

La variedad de álgebras de Jordan unitarias no es equilibrada (ni absoluta ni relativamente) .

Como consecuencia de ello , para cualquier álgebra de Jordan A y un A-módulo M las tres teorias de cohomología , (3.5.1) , darán lugar a grupos no siempre isomorfos teniéndose según (3.3) interpretación en terminos de extensiones equilibradas para los grupos $\bar{H}^n(A , M)_{(R)}$ y según (3.4) morfismos de conexión entre ellas .

BIBLIOGRAFIA

1.- ANDRE,M. Méthode simpliciale en algébre homologique et algebre commutative. Lecture Notes in Math. 32 . Springer. (1967)

2.- ANDRE,M. Homologie des algebres commutatives. Springer. (1974)

3.- ANDRE,M. On the vanishing of the second cohomology group of a commutative algebra. Lecture Notes in Math. 61. Springer. (1969)

4.- AZNAR,E. Cohomologia no abeliana en categorías de interés. Tesis Doctoral.

5.- APPELGATE,H. Categories with models. Lecture Notes in Math. 80. Springer. (1969)

6.- BAER,R. Erweiterung von Gruppen und ihren isomorphismen. Math. Z. 38. (1934)

7.- BARR,M. A cohomology theory for commutative algebras. I,II . Proc. AMS, 16. 1379-1384, 1385-1391. (1965)

8.- BARR,M. Shukla cohomology and Triples. J. Algebra 5, 222-231. (1967)

9.- BARR,M. Cohomology in tensored categories. Proc. of the La Jolla conference in Categorical Algebra. Springer, Berlin. (1966)

10.- BARR,M. Harrison homology, Hochschild homology and Triples. J. Algebra 8, 314-323. (1968)

11.- BARR,M. A note on commutative algebra cohomology. Bull. AMS 16 , 31o-313. (1965)

12.- BARR,M. Composite cotriples and derived functors. Lecture Notes in Math. 80. Springer. (1969)

13.- BARR,M. BECK,J. Homology ans standard constructions. Lecture Notes in Math. 80. Springer. (1969)

14.- BARR,M. BECK,J. Aciclic models and Triples. Conference in Categorical Algebra. La Jolla. Springer. (1969)

15.-BARR,M. RINEHART,G. Cohomology as the derived functor of derivations Trans. AMS 122, 416-426. (1966)

16.- BECK,J. Triples, algebras and cohomology. Dissertation. Columbia. (1964-67)

17.- CARTAN,H. EILENBERG,S. Homological Algebra. Princeton. (1956)

18.- CEGARRA,A.M. Cohomologia Varietal. Alxebra 32. 1980

19.- CEGARRA,A.M. La sucesión de tres términos en Categorías Algebraicas. Pendiente de publicación.

20.- CEGARRA,A.M. GARZON,A.R. Categorias equilibradas y la sucesión de tres términos. Por aparecer en las Actas de las VIII Jornadas Matematicas Hispano-Lusas, 1981

21.- CHEVALLEY,C. EILENBERG,S. Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras. Trans. AMS 63 . (1948)

22.- COHN,P.M. Universal Algebra. Harper and Row. (1965)

23.- DIXMIER,J. Homologie des anneaux de Lie. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 74, 25-83. (1957)

24.- DUSKIN,J. Simplicial methods and the interpretation of triple cohomology. Mem. AMS . (1975)

25.- DUSKIN,J. Non -abelian Triple cohomology. Extensions and obstructions. Not. AMS 19 . (1972)

26.- ECKMAN,B. STAMMBACH,U. Homologie et differentielles. Suites exactes C.R. Acad. Sci. Paris 265, 11-13. (1967)

27.- ECKMAN,B. STAMMBACH,U. On exact sequences in the homology of groups and algebras. III. J. Math. 14, 205-215. (1970)

28.- EILENBERG,S. Extensions of general algebras. Ann. Soc. Polon. Math. 21. (1948)

29.- EILENBERG,S. MACLANE,S. Group extensions and homology. Ann.of Math. 43, 757-831. (1942)

30.- EILENBERG,S. MOORE,J.C. Fundations of relative homological algebra Mem. AMS 55. (1965)

31.- EILENBERG,S. MOORE,J.C. Adjoint functors and Triples. III. J.Math. 9. (1965)

32.- FAITH,C. Algebra: Rings,Modules and Categories I. Springer. (1973)

33.- FOX,R.M. Free differential calculus, I. Ann. Math. 57, 547-560 (1953)

34.- GANEA,T. Homologie et extensions centrales de groupes. C.R.Acad. Sc. Paris 266, 556-558. (1968)

35.- GERSTENHABER,M. A uniform cohomology theory for algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 51, 626-629. (1964)

36.- GERSTENHABER,M. On the deformation of rings and algebras, II. Ann. Math. 84. 1-19. (1966)

37.- GERSTENHABER,M. The third cohomology group of a ring and the commutative cohomology theory. Bull. AMS 73, 950-954. (1967)

38.- GLASSMAN,N. Cohomology of nonassociative algebras. Pacific. J. Math. 33. (1970)

39.- GLASSMAN,N. Cohomology of Jordan algebras.J. Algebra 15 (1970)

40.- GOLDBERG,S.I. Extensions of Lie algebras and the third cohomology group. Canadian J. Math. 5. (1953)

41.- GRAETZER,G. Universal algebra. Von Nostrand. (1968)

42.- GRUENBERG,K.W. Cohomological topics in group theory. Lecture Notes in Math. 143. Springer. (1970)

43.- GUT,A. STAMMBACH,U. On exact sequences in homology associated with a group extension. J. Pure and Applied Algebra 7, 15-34. (1976)

44.- HARRIS,B. Cohomology of Lie Triple Systems and Lie algebras with involution. Trans. AMS 98, 148-162. (1961)

45.- HARRIS,B. Derivations of Jordan algebras. Pacific. J. Math. 9 459-512. (1959)

46.- HARRISON,D.K. Commutative Algebras and Cohomology. Trans. AMS 104. 191-204. (1962)

47.- HERRLICH,H. STRECKER,G. Category theory. Allyn and Bacon (1973)

48.- HILL,R.O. A natural algebraic interpretation of the group cohomology $H^n(Q,A)$, n>3. Not. AMS 25, A-351. (1978)

49.- HILTON,P.J. STAMMBACH,U. A course in homological algebra. Graduate texts in Math. 4. Springer. (1971)

50.- HOCHSCHILD,G. On the cohomology groups of an associative algebra. Amer. J. Math. 46. 58-67. (1946)

51.- HOCHSCHILD,G. Lie algebra kernels and cohomology. Amer. J. Math. 76. 698-716. (1954)

52.- HOCHSCHILD,G. Relative Homological Algebra. Trans. AMS 82 246-269. (1956)

53.- HOCHSCHILD,G. Cohomology of restricted Lie algebras. Amer. J. Math. 76. 555-580. (1954)

54.- HOCHSCHILD,G. On the cohomology theory for associative algebras. Ann. of Math. 47. 568-579. (1946)

55.- HOLT,D.F. Cohomology groups $H^n(G,M)$. J. Algebra 60. 307-320. (1979)

56.- HUEBSCHMANN,J. N-fold extensions of group. Colloquium Lectures at Louvain, May 1977

57.- HUEBSCHMANN,J. Crossed n-fold extension. Not. AMS 25. A-6 (1978)

58.- IWAI,A. Simplicial cohomology and n-term extensions of algebras. J. Math. Kyoto Univ. 9. 449-470. (1969)

59.- JACOBSON,N. Structure of rings. AMS. Providence. 1956

60.- JACOBSON,N. Lie algebras. John-Wiley& Sons. 1962

61.-JACOBSON,N. Structure and representations of Jordan algebras. AMS Coll. Publ. Providence 1968

62.- KEUNE,F.J. Homotopical algebra and algebraic K-theory. Tesis. Univ. of Amsterdam. (1972)

63.- KNOPFMACHER,J. Extensions in varieties of groups and algebras. Acta Math. 115. 17-50. (1966)

64.- KNOPFMACHER,J. Universal envelopes for non-associative algebras. Quart. J. Math. Oxford 13. 264-282. (1962)

65.- KNOPFMACHER,J. Homology and presentations of algebras. Proc. AMS 17. 1424-1428. (1966)

66.- KOSZUL,J. Homologie et cohomologie des algebres de Lie. Bull. soc. Math. France. 78. 65-127. (1950)

67.- LAWVERE,F.W. Functorial semanties of algebraic theories. Proc. NAS USA 50. 869-872. (1963)

68.- LEEDHAM-GREEN,C. Homology in varieties of groups. I,II,III. Trans. AMS 162. 1-34. (1971)

69.- LEEDHAM-GREEN,C. HURLEY,T.C. Homology in varieties of groups. IV. Trans. AMS 170. 293-303. (1972)

70.- LEEDHAM-GREEN,C. McKAY,S. Baer-invariants, isologism, varietal laws an homology. Acta Math. 137. (1976)

71.- LINTON,F.E.J. Some aspects of equational categories. COCA. (La Jolla) Springer. (1966)

72.- LUE,A.S.T. Cohomology of algebras relative to a variety. Math. Z. 121 220-232. (1971)

73.- LUE,A.S.T. Connected algebras and universal covering. Comment. Math. Helv. 48. 70-375. (1973)

74.- MACLANE,S. Homologie des Anneaux et des modules. Colloque de topologie algèbrique. Lovain. 1956

75.- MACLANE,S. Extensions and obstructions for rings. III. J. Math. 2. 316-345. (1948)

76.- MACLANE,S. Categorical Algebra. Bull.AMS 71. 40-106. (1965)

77.- MACLANE,S. Categories for the working mathematicien. Springer. (1971)

78.- MACLANE,S. Homology. Springer. (1973)

79.- MANES,E. Algebraic theories. Springer. (1976)

80.- MAY,P. Simplicial objects in algebraic topology. Princeton: Von Nostrand 1967

81.- MITCHELL,B. Theory of categories. Academic Press. 1965

82.-NEUMAN,H. Varieties of groups. Springer. (1967)

83.- OSBORN,J.M. Varieties of algebras. Adv. in Math. 8. 163-369. (1972)

84.- ORZECH,G. Obstructions theory in algebraic categories. I,II. J. Pure Appl. Algebra 2. 287-340. (1972)

85.- QUILLEN,D. On the homology of commutative rings. Proc. Symp. Pure Math. 17. 65-87. (1970)

86.- R-GRANDJEAN,A. Homología en categorías exactas. Alxebra 4. Univ. de Santiago de Compostela. (1970)

87.- R-GRANDJEAN,A. CEGARRA,A.M. Cohomología respecto a una variedad de una categoría. Collectanea Mathematica. XXXI. (1980)

88.- RINEHART,G.S. Satellites and cohomology. J. Algebra 12. 295-329. (1969)

89.- ROTMAN,J. An introduction to homological algebra. Academic Press. 1979

90.- SCHAFER,R. An introduction to non-associative algebras. Academic Press. 1966

91.- SCHAFER,R. Structure and representation of nonassociative algebras. Bull. AMS 61. 469-484. (1955)

92.- SEIBT,P. Cohomology of algebras and triple systems. Communic. in Algebra. 3 (12). 1097-1120. (1975)

93.- SHUKLA,U. Cohomologie des algebres associatives. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 78. 163-209. (1961)

94.- SHUKLA,U. An interpretation of $\mathrm{Ext}^{2}_{e}(,M)$. Math. Z. 92. (1966)

95.- SHUKLA,U. A relative cohomology for associative algebras. Proc. AMS 15. (1964)

96.- SHUKLA,U. A cohomology for Lie algebras. J. Math. soc. Japan 18 (1966)

97.- STAMMBACH,U. Homological methods in group. Varieties. Comment. Math. Helv. 45. 287-298. (1970)

98.- STAMMBACH,U. Varietal homology and parafree groups. Math. Z.128 153-167. (1972)

99.- STAMMBACH,U. Homology in group theory. Lecture Notes in Math. 359. (1973)

100.- STENSTROM,B. Rings of Quotients. Springer. 1975

101.- TIERNEY,M. VOGEL,W. Simplicial resolutions and derived functors. Math. Z. 111. 1-14. (1969)

102.- ULMER,F. On cotriple and Andre (co)homology. Their relationship with classical homological algebra. Lecture Notes in Math. 80. Springer. 1969

103.- ULMER,F. Kan extensions, cotriple and André (co)homology. Lecture Notes in Math. 92. Springer. 1969

104.- WU,Y.-C. $H^3(G,A)$ and obstructions of group extension. J. Pure Appl. Algebra 12. 93-100. (1978)

105.- YONEDA,N. On the cohomology theory of modules. J. Fac. Sci. Tokyo Sec. I 7. 193-227. (1954)

106.- YONEDA,N. On Ext and exact sequences. J. Fac. Sci. Tokyo. Sec 8 507-526. (1960)