Universidad de Granada
Facultad de Ciencias

COHOMOLOGIA VARIETAL

ANTONIO MARTINEZ CEGARRA

Departamento de Algebra y Fundamentos
UNIVERSIDAD DE GRANADA - 1980

...MOLOGIA VARIETAL

por

...ONIO MARTINEZ CEGARRA

Memória realizada en el Depart
de Algebra y Fundamentos de la
tad de Ciencias de la Universi
Granada, bajo la dirección del
Dr. D. Alfredo Rodríguez-Grand
Lopez-Valcarcel,Catedrático de
de la Universidad de Granada,
obtener el Grado de Doctor en
Sección de Matemáticas,por la
sidad de Granada.

Vº Bº
El Director

Aspirante al grado de Doctor

Antonio Martinez Cegarra

T 1/93

COHOMOLOGIA VARIETAL

por

ANTONIO MARTINEZ CEGARRA

Memória realizada en el Departamento de Algebra y Fundamentos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Prof. Dr. D. Alfredo Rodríguez-Grandjean Lopez-Valcarcel, Catedrático de Algebra de la Universidad de Granada, para obtener el Grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por la Universidad de Granada.

Vº Bº

El Director

Alfredo R. Grandjean

Aspirante al grado de Doctor en Ciencias

Antonio Martinez Cegarra

ANTONIO MARTINEZ CEGARRA

COHOMOLOGIA VARIETAL

Departamento de Algebra y Fundamentos

Facultad de Ciencias

Universidad de Granada

INDICE

CAPITULO 3. EJEMPLOS .

INTRODUCCION

Los grupos $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B)$, para módulos A y B sobre un anillo Λ, son isomorfos de forma natural a los grupos de clases de n-extensiones de módulos

$$B \rightarrowtail E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \twoheadrightarrow A$$

con la sumade Baer como operación de adición. [165] .

Esta interpretación es totalmente satisfactoria, y permite introducir los grupos $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A,B)$ sin recurrir a tecnicas de funtores derivados. La sencillez de la situación proviene del caracter abeliano de la categoria de módulos (vease [130]), lo cual se pierde al considerar otras categorias algebraicas de indiscutible interes desde el punto de vista homologico como Grupos , Algebras , etc ...

Numerosos autores han atacado el problema de interpretar los grupos de cohomologia de las teorias desarrolladas en distintas categorias algebraicas en forma analoga al caso de módulos.

Por ejemplo, sean $E\text{-}M^n(R,X)$, $n \geqslant 0$, los grupos de cohomologia de Eilenberg MacLane de un grupo R con coeficientes en un R-módulo X. Es bien conocido que $E\text{-}M^2(R,X)$ es isomorfo al grupo de clases de extensiones singulares de R por X, $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow R$. Gerstenhaber [68], Leedam-Green y MacKay [115], Ratcliffe [140] y Wu [163], ofrecen una interpretación de $E\text{-}M^3(R,X)$ como el grupo de clases de 2-extensiones especiales, $X \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow R$, de R por X. Tambien esta interpretación se sigue de Duskin [37], puesto que se puede probar que el complejo de Moore de sus K(R,2)-Torsor es precisamente una 2-extensión especial. Huebschmann [97] prueba que $E\text{-}M^{n+1}(R,X)$ para $n \geqslant 3$, puede interpretarse como clases de n-extensiones especiales

$$X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow E \longrightarrow B \twoheadrightarrow R$$

que son el producto de Yoneda de una (n-2)-extensión de R-módulos por una 2-extensión especial .

Analogas interpretaciones son conocidas en Algebras de Lie para los grupos $Ch\text{-}E^2(L,X)$ y $Ch\text{-}E^3(L,X)$ de cohomologia de Chevalley-Eilenberg (vease [28] y [68]), en Algebras asociativas para los grupos $Hoch^2(\Lambda,X)$ [28], $Hoch^3(\Lambda,X)$ [68], y $Hoch^n(\Lambda,X)$, $n>3$, [119], de cohomologia de Hochschild, y para el grupo $Shu^2(\Lambda,X)$ de cohomologia de Shukla, [21]; y en algebras conmutativas para los segundos grupos de cohomologia de Quillen y Harrison, [21].

El fin que se persigue en el primer capitulo de èsta memoria es interpretar de una forma uniforme y general , en terminos de extensiones, los grupos de cohomologia de las diversas teorias. Para ello se ha buscado una categoria algebraica suficientemente amplia de forma que englobe las categorias algebraicas usuales, como Grupos , algebras asociativas, algebras de Lie , algebras conmutativas, módulos, variedades de grupos etc ... ; se ha desarrollado en ella una teoria de cohomologia que tiene como ejemplos las clasicas teorias de cohomologia , y se han probado, en esta situación, diversos teoremas sobre clasificación de extensiones por los correspondientes grupos de cohomologia.

La categoria, $\underline{C}$, que se ha considerado es una "Categoria de Interes" , (1.2.1), tal como ha sido definida por Orzech [135]; es decir una variedad de Ω-grupos distributivos donde existe un conjunto de operaciones de ordenes uno y dos que generan el conjunto de operaciones Ω .

Los conceptos de módulo y estructura en $\underline{C}$,(1. 2.3), se establecen como en Gerstenhaber [70]o Orzech [135]; y el concepto de derivación de un objeto R de $\underline{C}$ en un R-módulo X, (1.2.19), como en Orzech [135]o Beck [21]; teniendose el funtor

$$\mathrm{Der}(\ ,X) : (\underline{C}\ ,R)^{o} \longrightarrow \mathrm{Ab} \ \text{(Grupos abelianos)}$$

donde ($\underline{C}$, R) es la categoria coma de morfismos a R en $\underline{C}$.

Para un tratamiento simultaneo de las cohomologias absoluta y relativa, se supone, (1.2.10), que ,eventualmente, se tenga una factorización de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Set} \arrow[d, shift right] \arrow[dd, bend right=60, "F"'] \\ \pounds \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right, "F_{\pounds}"'] \\ \underline{C} \arrow[u, shift right, "U_{\pounds}"'] \arrow[uu, bend right=60, "U\ (\mathrm{Olvido})"'] \end{tikzcd}$$

donde £ es una categoria abeliana. Se tiene entonces en $\underline{C}$ un cotriple $\mathbb{G}$ inducido por la adjunción $F \dashv U$, y ,eventualmente, un cotriple $\mathbb{G}_{\pounds}$ inducido por la adjunción $F_{\pounds} \dashv U_{\pounds}$.[58] .

Entonces para cada R de $\underline{C}$, estos cotriples inducen otros , que denotamos igual, en la categoria coma $(\underline{C},R)$, y siguiendo la tecnica de Barr-Beck [18], para cada R-módulo X definimos los grupos de cohomologia $H^n(R,X)$, para el caso absoluto, y $H^n(R,X)_{\pounds}$, para el caso relativo,(1.3), obtenidos al tomar como funtor de coeficientes el funtor Der(,X).

Notemos que estos funtores $H^n(R,X)_{(\pounds)}$ pueden obtenerse utilizando otras construcciones alternativas al metodo seguido por Barr-Beck. En efecto si por $P_{\mathbb{G}(\pounds)}$ denotamos la subcategoria plena de $(\underline{C},R)$ de objetos $\mathbb{G}(\pounds)$-proyectivos,(1.1.4); el funtor de inclusión $J : P_{\mathbb{G}(\pounds)} \longrightarrow (\underline{C},R)$ induce un funtor $J^* : Ab^{(\underline{C},R)} \longrightarrow Ab^{P_{\mathbb{G}(\pounds)}}$ que tiene un adjunto a la izquierda E_J (Su extension de Kan),[161]. E_J es un funtor aditivo entre categorias abelianas y definimos $H^n(\ ,X)_{(\pounds)}$ como el n-ésimo funtor derivado de E_J calculado en el funtor Der(,X). Esta es claramente una construcción analoga a la dada por Rinehart [143], y se sigue de Ulmer [160] ,[161] ,que es tambien equivalente a la construcción de André [1]y a la aqui considerada de Barr-Beck .

Si $X \rightarrowtail Y \twoheadrightarrow Z$ es una sucesión exacta (escindente en la correspondiente categoria de olvido), esta induce de forma natural una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow Der(R,X) \longrightarrow Der(R,Y) \longrightarrow Der(R,Z) \longrightarrow H^1(R,X)_{(\pounds)} \longrightarrow$$

$$H^1(R,Y)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(R,Z)_{(\pounds)} \longrightarrow H^2(R,X)_{(\pounds)} \longrightarrow \cdots$$

(Prop. (1.3.1)).

Si $L \rightarrowtail A \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} R$ es una sucesión exacta corta en $\underline{C}$ (escindente en la correspondiente categoria de olvido), para cada R-módulo X, existe una sucesión exacta larga, natural en σ y X

$$0 \longrightarrow Der(R,X) \longrightarrow Der(A,X) \longrightarrow Hom_R(\frac{L}{[L,L]}, X) \longrightarrow H^1(R,X)_{(\pounds)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(A,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(\sigma,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^2(R,X)_{(\pounds)} \longrightarrow \cdots$$

(Prop. (1.3.2) y (1.3.4)).

Esta sucesión proviene de una mas general obtenida en (1.1.12) y donde $H^n(\sigma,X)_{(\pounds)}$ son los grupos de cohomologia del epimorfismo σ con coeficientes en el funtor Der(,X), (1.1.10). En el caso de que $\underline{C}$ sea la categoria de módulos sobre un cierto anillo, esta sucesión exacta larga es precisamente la usual en los Ext(,X) inducida por una sucesión exacta corta de módulos en la primera variable. Notese tambien que los cinco primeros puntos de esta sucesión son claramente una generalización de la conocida sucesión exacta de 5-terminos en cohomologia de Grupos [87] .

El primer grupo de cohomologia $H^1(R,X)$ ($H^1(R,X)_{\pounds}$) se interpreta como el grupo de clases de extensiones singulares , $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow R$ (£-escindentes), de R por el R-módulo X, ((1.3.1), Teorema (1.4.6)). Este resultado se puede deducir de los dados por Beck [21] y Duskin [37], ya que es posible probar (aunque es laborioso) que los objetos principales homogeneos corresponden precisamente a las extensiones singulares, asi como que los K(R,1)-Torsor de Duskin son los objetos principales homogeneos de Beck. La demostración directa aqui dada del Teorema (1.4.6) presenta la ventaja de ser, conceptualmente, mucho mas sencilla.

El primer grupo de cohomologia de un epimorfismo $H^1(\sigma,X)$ ($H^1(\sigma,X)_{\pounds}$) clasifica ciertas extensiones de Ker(σ) por X, (1.5.25). Y basandonos en esa interpretación establecemos en el Teorema (1.6.11) que $H^2(R,X)$ ($H^2(R,X)_{\pounds}$) es isomorfo de forma natural al grupo de clases de 2-extensiones especiales de R por X (£-escidentes); es decir extensiones de la forma

$$X \rightarrowtail E \xrightarrow{\Phi} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} R$$

que son de B-estruturas,(1.2.3), donde B lo es por conjugación, (1.2.14), y R y X via σ, (1.2.13) , y tal que

i) $\Phi(e)\cdot e' = e + e' - e$

ii) $\Phi(e) * e' = e * e'$; $e,e' \in E$, para todo $*$ operación de orden dos.

Estas extensiones son una generalización de las "Sucesiones cruzadas " de MacLane-Withehead [127]y de las " Sucesiones admisibles" de Gerstenhaber [68].

Las teorias clasicas de obstrucción tienen, despues de la anterior interpretación, un tratamiento uniforme y alternativo por los resultados que se ofrecen en (1.6.12) y (1.6.13).

Para cada R objeto de $\underline{C}$, la categoria de R-módulos, R-Mod., es abeliana completa,cocompleta y con ungenerador proyectivo, teniendose una adjunción

$$\begin{array}{c} (\underline{C}\ ,R) \\ D_R \downarrow \quad \uparrow J \text{ (Olvido)} \\ R\text{-Mod.} \end{array}$$

(1.2.8). Esta situación nos permite en (1.7) conectar la cohomologia $H^n(R,X)_{(\pounds)}$ con la cohomologia en R-Mod, $Ext^n_R(D_R(R),X)_{(\pounds)}$.

Si los grupos $H^n(R,X)_{(\pounds)}$ se anulan en R-módulos inyectivos (respecto a la clase de monomorfismos correspondiente) entonces existe una equivalencia natural,(1.7.5),

$$H^n(R, \ )_{(\pounds)} = Ext^n_R(D_R(R), \ )_{(\pounds)}$$

(notemos que al particularizar a Grupos , Algebras, etc ..., el módulo $D_R(R)$ es el ideal "aumentación" IR, (vease CAP. 3)).

Este resultado indica que los grupos de cohomologia $H^n(R,X)_{(\pounds)}$ pueden obtenerse calculando el n-ésimo funtor derivado , en el sentido usual, del funtor aditivo entre categorias abelianas Der(R,) : R-Mod. $\longrightarrow$ Ab , (1.7.6). (vease [20]).

Cuando se da esta situación se dice que la categoria $\underline{C}$ es "Equilibrada " (£- equilibrada).

En el caso que la categoria $\underline{C}$ sea (£)equilibrada en (1.8.5) se da una interpretación de $H^n(R,X)_{(\pounds)}$, $n>2$, en terminos de extensiones; concretamente se prueba que este grupo es isomorfo al grupo de clases de n-extensiones especiales

$$X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow E \xrightarrow{\Phi} B \xrightarrow{\sigma} R$$

(£-escindentes) que son el producto de Yoneda de una (n-2)-extensión de R-módulos (£-escidente) por una 2-extensión especial (£-escindente).

Una interpretación mas debil de los grupos $H^n(R,X)_{(\pounds)}$ es dada en (1.8.8), siendo esta una generalización de la dada para Grupos, Algebras de Lie y Algebras asociativas (con la cohomologia de Hochschild) por Barr y Rinehart en [20].

Asi pues para categorias (£)equilibradas quedan interpretados todos los grupos de cohomologia y los grupos uno y dos para las no equilibradas (notese que en las notaciones clasicas estos grupos corresponden a los grupos segundo y tercero de cohomologia). En el capitulo tercero de la presente memoria puede verse con detalle la particularización de estas interpretaciones a distintos casos.

Entre las categorias equilibradas pueden citarse a Grupos (Cohomologia de Eilenberg - MacLane), Algebras de Lie (Chevalley - Eilenberg) , Algebras asociativas (Hochschild), etc ...

Siendo $\underline{C}$ una categoria de interes y $\underline{V} \leq \underline{C}$ una variedad de $\underline{C}$, es decir una subcategoria plena cerrada para subobjetos, objetos cocientes y productos, es inmediato que $\underline{V}$ es tambien una categoria de interes (vease (2.1.3)).

Si A es un objeto de $\underline{V}$ es claro que todo A-módulo (A-estructura) en $\underline{V}$ es un A-módulo (A-estructura) en $\underline{C}$, y mas en general si A es de $\underline{C}$ todo A/VA módulo (A/VA-estructura) en $\underline{V}$ es un A-módulo (A-estructura) en $\underline{C}$, via la proyección canonica $A \twoheadrightarrow A/VA$; esta clase de A-módulos (A-estructuras) (los que son A/VA-módulo (A/VA-estructura) en $\underline{V}$) viene caracterizada como la clase de los $\underline{V}$A-módulos ($\underline{V}$A- estructuras), ((2.1.15), (2.1.23), (2.1.24)).

Si X es un A-módulo, una condición necesaria y suficiente para que X sea un $\underline{V}$A-módulo es que toda extensión singular de A por X sea $\underline{V}$-central. (2.1.26)

En estas condiciones, X un $\underline{V}$A-módulo, toda extensión singular de A/VA por X en $\underline{V}$ induce , por un obvio diagrama cartesiano , una extensión singular de A por X en $\underline{C}$; y entonces, despues de (1.3.5), si $V^n(A/VA,X)$ y $H^n(A,X)$ son los grupos de cohomologia en $\underline{V}$ y $\underline{\mathbb{C}}$ respectivamente , se tiene una aplicación $\phi^1: V^1(A/VA,X) \longrightarrow H^1(A,X)$. Observando, ademas, las interpretaciones de los siguientes grupos de cohomologia, parece logico que se tengan morfismos naturales $\phi^n : V^n(A/VA,X) \longrightarrow H^n(A,X)$ que pongan en conexión los grupos de cohomologia en la variedad con los grupos de cohomologia en $\underline{C}$.(estamos empleando en notación solo la cohomologia absoluta, para simplificar esta).

Esta cuestión ha sido abordada por varios autores entre los que podemos citar a Lue [118], [119], para variedades de Algebras asociativas; Leedam-Green [113],[114],[115], y Stammbach [152],[153], para variedades de

Grupos, etc ...

El segundo capitulo de la memoria trata este problema, llegando a diversas relaciones explicitas entre los grupos de cohomologia en $\underline{V}$ y los grupos de cohomologia en $\underline{C}$.

Estrechamente ligado a la cuestión de conectar los grupos V^n y H^n nos aparece el primer invariante de Baer $\underline{V}_1\underline{C}(A)$,(2.1.12), que es un $\underline{V}A$-módulo, (2.1.27).

A lo largo de (2.1) se exponen una serie de conceptos basicos sobre variedades que se utilizaran en adelante.

Por metodos puramente homologicos se prueba la existencia de morfismos naturales

$$\phi^n_A : V^n(A/VA, X) \longrightarrow H^n(A, X)$$

y

$$\phi^n_\sigma : V^n(\sigma/V\sigma, X) \longrightarrow H^n(\sigma, X)$$

para un epimorfismo $A \xrightarrow{\sigma} B$, de tal forma que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Der(B/VB,X) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi^0_B"] & Der(A/VA,X) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^0_A"] & V^0(\sigma/V\sigma,X) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^0_\sigma"] & V^1(B/VB,X) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^1_B"] & \cdots \\
Der(B, X) \arrow[r, tail] & Der(A,X) \arrow[r] & H^0(\sigma, X) \arrow[r] & H^1(B, X) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

tales morfismos son llamados " morfismos cambio de variedad ", (2.2.6).

En (2.3.1) y (2.3.3) se prueba que ϕ^0_A y ϕ^1_σ son isomorfismos ; y , estudiado en (2.3.4) el comportamiento de ϕ^1_A en terminos de extensiones , se concluye en (2.3.5) que ϕ^1_A es un monomorfismo.

U. Stammbach [154] introduce, para $\underline{C}$ = Grupos y $\underline{V}$ una variedad de grupos un funtor de cohomologia , $\tilde{V}$,en la variedad que generaliza al funtor H^2 de cohomologia de grupos; en (2.3.7) concluimos que este funtor $\tilde{V}$ es precisamente el funtor V^1 de cohomologia aqui considerado.

Para $A \in \underline{V}$, puesto que ϕ^1_A es un monomorfismo, las extensiones singulares de A por un $\underline{V}$A-módulo X en $\underline{V}$ constituyen un subgrupo del grupo de las extensiones de A por X en $\underline{C}$. Cabe preguntarse si, siendo $A \in \underline{V}$ y $X \in \underline{V}$ un A-módulo en $\underline{C}$ ($X \notin A \in \underline{C}$), existen extensiones de A por X en $\underline{V}$) lo que podria dar lugar, en caso afirmativo, a definir un cierto primer grupo de cohomologia relativo a la variedad). En (2.3.10) se prueba que la respuesta es negativa, osea si X no es un $\underline{V}$A-módulo no hay extensiones singulares de A por X en $\underline{V}$.

Una condición suficiente para que ϕ^1_A sea un isomorfismo (con $A \in \underline{V}$) es dada en (2.3.11).

El epigrafe (2.4) (V-A-X-extensiones)tiene como objetivo interpretar para A objeto de $\underline{C}$ el grupo $\mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X)$, siendo X un A-modulo y $\underline{V}_1\underline{C}(A)$ el invariante de Baer, que es un A-módulo tal como se dijo anteriormente, en terminos de ciertas extensiones intimamente ligadas a la variedad considerada.(En el caso $\underline{C}$ = Grupos , Leedam-Green y MacKay [115]conectan estas extensiones con los isologismos en el sentido de P.Hall[78].). Esta interpretación es utilizada en (2.5) para obtener una sucesión exacta y natural

$$V^1(A/VA,X) \overset{\phi^1}{\rightarrowtail} H^1(A,X) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X) \xrightarrow{\eta} V^2(A/VA,X) \xrightarrow{\phi^2} H^2(A,X)$$

para A objeto de $\underline{C}$ y X un $\underline{V}$A-módulo,(2.5.2) .

Si $\underline{C}$ es grupos y $\underline{V}$ una variedad de grupos , la sucesión anterior es obtenida por Leedam-Green y MacKay [115] . Lue [119] obtiene una sucesión exacta cuyos cuatro primeros terminos coinciden con los correspondientes en la anterior, cuando $\underline{C}$ es Algebras asociativas y $\underline{V}$ una variedad de algebras.

Como consecuencia de esta sucesión es posible caracterizar los grupos $\mathrm{Img}(\phi^2_A)$ y $\mathrm{Ker}(\phi^2_A)$ ((2.6.2), (2.6.3)); y una condición necesaria y suficiente para que ϕ^2_A sea un monomorfismo es que la clase de la 2-extensión especial

$$\underline{V}_1\underline{C}(A) \rightarrowtail \frac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{VF} \twoheadrightarrow \frac{A}{VA}$$

inducida por una presentación libre de A en $\underline{C}$, $N \rightarrowtail F \twoheadrightarrow A$, (vease(2.1. 30)), sea cero en el grupo de cohomologia $V^2(A/VA, \underline{V}_1\,\underline{C}(A))$.

A partir de aqui, diversos resultados relacionan los morfismos cambio de variedad extensiones e invariantes de Baer. Entre ellos podemos citar

" ϕ_A^1 es isomorfismo y ϕ_A^2 es monomorfismo para todo $\underline{V}$A-módulo X si y solo si $\underline{V}_1\underline{C}(A) = 0$ ",(2.6.5) .

" $\underline{V}_1\underline{C}(A) = 0$ si y solo si la clase de la 2-extensión especial

$$\underline{V}_1\underline{C}(A) \rightarrowtail \frac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{VF} \twoheadrightarrow \frac{A}{VA}$$

es cero ", (2.6.6) .

" ϕ_A^1 es isomorfismo y ϕ_A^2 monomorfismo para todo $\underline{V}$A-módulo X si y solo si toda extensión (de tres terminos) de A en $\underline{C}$ es $\underline{V}$-marginal",(2.6.8) .

" Si $\underline{C}$ es equilibrada y $A \in \underline{V}$ es tal que todo A-módulo es $\underline{V}$A-módulo entonces

$$V^n(A,X) \cong H^n(A,X) \oplus \mathrm{Ker}(\phi_A^n) \qquad , n \geq 0 .$$

En particular

$$V^1(A,X) \cong H^1(A;X) \quad y \quad V^2(A,X) \cong H^2(A,X) \oplus \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X) \text{ "},$$

(2.6.12) .

" Si $\underline{C}$ y $\underline{V}$ son equilibradas y todo A-módulo es $\underline{V}$A-módulo , entonces

$$\phi_A^n : V^n(A,X) \cong H^n(A,X) \qquad , n \geq o.$$

es un isomorfismo para todo A-módulo X ", (2.6.11).

" Si $\underline{C}$ y $\underline{V}$ son equilibradas y todo A-módulo es $\underline{V}$A-módulo, entonces $\underline{V}_1\underline{C}(A) = 0$ ", (2.6.14) .

Si G es un grupo , es bien conocido que los G-módulos a la izquierda son los módulos a la izquierda sobre el Anillo Grupo Z(G), [126] . Si $\underline{V} = V(\Omega)$ es una variedad de grupos y $G \in \underline{V}$, entonces los G-módulos en $\underline{V}$ ($\underline{V}$G-módulos), son los módulos sobre un anillo cociente de Z(G),[107];explicitamente tal anillo es $\frac{Z(G)}{I_V G}$, donde $I_V G$ es el ideal bilatero de Z(G) generado por los elementos

$$f(\partial_i(\omega)) \ , \ i = 1,2, \ . \ . \ . \quad ; \ \omega \in \Omega \, ; \, f \in \mathrm{Hom}(F_\infty, G)$$

donde ∂_i es la i-ésima derivada de Fox y F_∞ es el grupo libre sobre el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

Este hecho se da en otros ejemplos algebraicos , y surge la cuestión de ofrecer una demostración suficientemente general de esto, de forma que incluya las categorias algebraicas mas usuales.

En (3.1) se considera una categoria de interes $\underline{C}$ tal que existe un funtor

$$\Lambda : \underline{C} \longrightarrow \text{Anillos}$$

de modo que para cada objeto R de $\underline{C}$ exista una equivalencia de categorias

$$R\text{-Mod.} \cong {}_{\Lambda_R}\mathfrak{M}$$

natural en el sentido descrito en (3.1.1),(En el caso de Grupos este funtor seria el funtor " Anillo Grupo", Z( ), (3.2.2); en Algebras asociativas seria el funtor "Algebra Envolvente", $\Gamma \longrightarrow \Gamma^e$,(3.3.2); en Algebras conmutativas seria el funtor identidad $A \longrightarrow A$,(3.4.2); en Algebras de Lie el funtor " Algebra Universal Envolvente", $L \longrightarrow L^e$,(3.5.2); en D-módulos el funtor constante $M \longrightarrow D$,(3.6.1); etc ...). Se considera una variedad $\underline{V}$ de $\underline{C}$ definida por un conjunto de palabras Ω , y para $R \in \underline{V}$ se demuestra en (3.1.8) que los

R-módulos en $\underline{V}$ o $\underline{V}$R-módulos son los módulos sobre el anillo cociente $\dfrac{\Lambda_R}{I_V R}$ donde $I_V R$ es el ideal bilatero del anillo Λ_R generado por los elementos

$$\Lambda_f(\partial_i(\omega))\ ,\ i = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\quad ;\ \omega \in \Omega\ ;\ f \in \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(F_\infty\ ,\ R)$$

siendo F_∞ el objeto de $\underline{C}$ libre sobre el conjunto $\{ x_1, x_2\ , \ldots \}$ y $\partial_i : F \longrightarrow \Lambda F$ la iésima derivada de Fox , (Introducidas en (3.1.3)).

El resto del capitulo tercero es dedicado a obtener resultados en diversas teorias de cohomologia (Eilenberg- MacLane, Hochschild, Shukla , André o Quillen , Harrison, Chevalley- Eilenberg, cohomologia en variedades de grupos, algebras, etc ...) como aplicación de la teoria general desarrollada en la memoria.

Para la notación que se ha utilizado citamos como referencia a [141] .

El Prof. A. R-Grandjean me introdujo en el campo del Algebra Homologica dirigiendo y orientando , desde entonces, mi trabajo. Hago constar, por ello, mi agradecimiento.

1. EXTENSIONES

1.1. SUCESION EXACTA ASOCIADA A UN EPIMORFISMO . INTERPRETACION DE $H^o(\sigma, E)_{\mathbb{G}}$.

(1.1.1) Sean $\underline{B}$ y $\underline{D}$ categorias y supongamos funtores adjuntos

$$\begin{array}{c} \underline{D} \\ F \big\downarrow \big\uparrow U\,(\text{Olvido}) \\ \underline{B} \end{array} \qquad \mu : F \dashv U \,.$$

con $\delta : FU \longrightarrow I_{\underline{B}}$ y $\eta : I_{\underline{D}} \longrightarrow UF$ la unidad y counidad , respectivamente, de la adjunción.

Por esta situación se induce un cotriple , $\mathbb{G} = (G,\delta,\varepsilon)$, en $\underline{B}$, donde

$G = FU : \underline{B} \longrightarrow \underline{B}$

δ es la counidad de la adjunción

$\varepsilon = F\eta U : G \longrightarrow G^2$.

(vease , por ejemplo, [125]).

Siempre supondremos que el funtor de olvido U conserva y refleja epimorfismos.

(1.1.2) LEMA.

Si $\sigma : B \twoheadrightarrow B'$ es un epimorfismo en $\underline{B}$ tal que $U(\sigma)$ escide en $\underline{D}$ (osea existe $s : U(B') \longrightarrow U(B)$ con $U(\sigma)\, s = I$), entonces los morfismos

$$G^n(\sigma) : G^n(B) \longrightarrow G^n(B')$$

son epimorfismos escindentes en $\underline{B}$ para todo $n \geqslant 1$.

Dem.- Para $n = 1$ se tiene que $G(\sigma)\, F(s) = F(\, U(\sigma)\, s) = F(I_{U(B')}) = I_{G(B')}$. Y entonces para $n \geqslant 2$ $G^n(\sigma)\, G^{n-1}(F(s)) = G^{n-1}(\, G(\sigma)\, F(s)) = G^{n-1}(\, I) = I$.

(1.1.3) A los epimorfismos σ en $\underline{B}$ tal que $U(\sigma)$ escinde en $\underline{D}$ les llamaremos epimorfismos $\underline{D}$-escindentes.

(1.1.4) Como en [18, p. 264], un objeto de $\underline{B}$ se dice $\mathbb{G}$-proyectivo si es un retracto de algun G(B), para B objeto de $\underline{B}$. Denotaremos $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$ a la clase de epimorfismos en $\underline{B}$ asociada a esta clase de objetos $\mathbb{G}$-proyectivos.

(1.1.5) PROPOSICION .

La clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$ es la misma que la clase de los epimorfismos $\underline{D}$-escindentes.

Dem.- Supongamos que $\sigma: B \longrightarrow B'$ es $\underline{D}$-escindente, sea $s:U(B') \longrightarrow U(B)$ con $U(\sigma)\, s = I$, y consideremos G(X), para X objeto de $\underline{B}$ arbitrario, y sea $f : G(X) \longrightarrow B'$ un morfismo cualquiera

$$\begin{array}{ccc} & G(X) & \\ & & \searrow^{f} \\ B & \xrightarrow{\sigma} & B' \end{array}$$

Si $\psi = \delta_B F(s)\, G(f)\, \varepsilon_X : G(X) \longrightarrow B$, se tiene $\sigma\, \delta_B F(s)\, G(f)\, \varepsilon_X = \delta_B F(U(\sigma)\, s)$ $G(f)\, \varepsilon_X = \delta_B\; G(f)\, \varepsilon_X = f\; \delta_{G(X)}\, \varepsilon_X = f$, y ψ hace conmutar el triangulo; luego σ esta en $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$.

Reciprocamente, sea $\sigma: B \longrightarrow B'$ en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$; considerando el morfismo $\delta_{B'}: G(B') \longrightarrow B'$, existira $\psi : G(B') \longrightarrow B$ con $\sigma\psi = \delta_{B'}$, y como $\delta_{B'}$ es $\underline{D}$-escindente ($U(\delta_{B'})\, \eta_{U(B')} = I$) es inmediato deducir que σ es $\underline{D}$-escindente.

(1.1.6) Denotaremos $\underline{B}'_{\underline{D}}$, o simplemente $\underline{B}'$ si no hay confusión, a la categoria cuyos objetos son los epimorfismos $\underline{D}$-escindentes y cuyos morfismos son los cuadrados conmutativos en $\underline{B}$

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \twoheadrightarrow & B'_1 \\ h\downarrow & & \downarrow h' \\ B_2 & \twoheadrightarrow & B'_2 \end{array}$$

Y denotaremos $\underline{D}'$ a la categoria de morfismos en $\underline{D}$ que son retracciones, sus morfismos seran los correspondientes cuadrados conmutativos en $\underline{D}$.

Se tienen funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} \underline{D}' \arrow[d, shift right, "F'"'] \\ \underline{B}' \arrow[u, shift right, "U'"'] \end{tikzcd}$$

donde $U'(B \xrightarrow{\sigma} B') = U(B) \xrightarrow{U(\sigma)} U(B')$

$F'(D \xrightarrow{f} D') = F(D) \xrightarrow{F(f)} F(D')$.

En efecto, el isomorfismo de adjunción $\mu': F' \dashv U'$ viene dado por

$$\mu'(h,h') = (\mu(h), \mu(h'))$$

siendo μ el isomorfismo de la adjunción $F \dashv U$, (1.1.1) .

Denotaremos $\mathbb{G}' = (G', \delta', \varepsilon')$ ($\mathbb{G}'_{\underline{D}}$ si hubiera lugar a confusión)al correspondiente cotriple en $\underline{B}'$.

Notemos que

$$G'(B \twoheadrightarrow B') = G(B) \twoheadrightarrow G(B')$$

$$\delta'_{(B \twoheadrightarrow B')} = (\delta_B , \delta_{B'})$$

$$\varepsilon'_{(B \twoheadrightarrow B')} = (\varepsilon_B , \varepsilon_{B'})$$

(1.1.7) Si $E : \underline{B} \longrightarrow Ab$ es un funtor a una categoria abeliana, se induce un funtor

$$E' : \underline{B}' \longrightarrow Ab$$

definido por

$$E'(B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} B') = Ker (E(B) \xrightarrow{E(\sigma)} E(B'))$$

$$E'\begin{pmatrix} B_1 \overset{\sigma_1}{\twoheadrightarrow} B'_1 \\ h \downarrow \quad\quad h' \downarrow \\ B_2 \overset{\sigma_2}{\twoheadrightarrow} B'_2 \end{pmatrix} = E(h)/E'(\sigma) ,$$ es decir el unico morfismo que existe haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} E'(\sigma) & \rightarrowtail & E(B_1) & \longrightarrow & E(B'_1) \\ \downarrow & & \downarrow E(h) & & \downarrow E(h') \\ E'(\sigma') & \rightarrowtail & E(B_2) & \longrightarrow & E(B'_2) \end{array}$$

Si, dualmente, $E : \underline{B}^{o} \longrightarrow Ab$ es un funtor (ó $E : \underline{B} \longrightarrow Ab$ es contravariante), entonces se induce un funtor , $E' : \underline{B'}^{o} \longrightarrow Ab$ definido por

$$E'(B \twoheadrightarrow B') = \mathrm{Coker}(E(B') \longrightarrow E(B)).$$

(1.1.8) Siguiendo la tecnica de Barr-Beck en [18], para cada objeto B de $\underline{B}$ su resolución simplicial (libre) estandard es

$$G_{\bullet}(B) = \cdots G^{n+1}(B) \underset{\delta_0}{\overset{\delta_n}{\vdots}} G^{n}(B) \cdots G^{2}(B) \underset{\delta_0}{\overset{\delta_1}{\rightrightarrows}} G(B) \xrightarrow{\delta} B$$

con $\delta_i = G^{n-i}\delta G^{i}$.

Si $E : \underline{B} \longrightarrow Ab$, es un funtor a una categoria abeliana, aplicando este funtor a la anterior resolución simplicial se tiene el complejo simplicial aumentado en Ab

$$EG_{\bullet}(B) = \cdots EG^{n+1}(B) \underset{E(\delta_0)}{\overset{E(\delta_n)}{\vdots}} EG^{n}(B) \cdots EG^{2}(B) \underset{E(\delta_0)}{\overset{E(\delta_1)}{\rightrightarrows}} EG(B) \xrightarrow{E(\delta)} E(B)$$

que induce en Ab el complejo de cadenas

$$\cdots\ EG^{n+1}(B) \xrightarrow{\partial_n} EG^{n}(B) \ \cdots \ EG^{2}(B) \xrightarrow{\partial_1} EG(B) \longrightarrow 0$$

donde $\partial_n = \sum (-1)^i E(\delta_i)$.

La homologia de este complejo la notamos $H_n(B,E)_{\mathbb{G}}$, $n \geq 0$. Son los grupos de homologia de B concoeficientes en E relativos al cotriple $\mathbb{G}$.

Dualmente , si E es contravariante, obtendriamos en Ab el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow EG(B) \longrightarrow EG^2(B) \longrightarrow EG^3(B) \longrightarrow \cdots$$

cuya cohomologia , $H^n(B,E)_{\mathbb{G}}$, $n \geq 0$, da los grupos de cohomologia de B con coeficientes en el funtor E relativos a $\mathbb{G}$.

La (co)homologia $H(\, , \,)_{\mathbb{G}}$ es funtorial en ambas variables; osea ,respecto a morfismos en $\underline{B}$ y transformaciones naturales entre funtores de coeficientes, (vease, por ejemplo[29]).

(1.1.9) PROPOSICION .

i) $H_o(\, ,EG)_{\mathbb{G}} = EG$ y $H_n(\, ,EG)_{\mathbb{G}} = 0$, $n \geq 1$.

ii) Si $0 \longrightarrow E_o \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$ es una sucesión de funtores $\mathbb{G}$-exacta (es decir, que para cualquier B de $\underline{B}$ la sucesión

$$0 \longrightarrow E_oG(B) \longrightarrow E_1G(B) \longrightarrow E_2G(B) \longrightarrow 0$$

es exacta en Ab) existe una sucesión exacta larga natural

$$\cdots \; H_n(\, ,E_o)_{\mathbb{G}} \longrightarrow H_n(\, ,E_1)_{\mathbb{G}} \longrightarrow H_n(\, ,E_2)_{\mathbb{G}} \longrightarrow H_{n-1}(\, ,E_o)_{\mathbb{G}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_o(\, ,E_2)_{\mathbb{G}} \longrightarrow 0 \, .$$

(Dualmente, para cohomologia, si el funtor de coeficientes es contravariante)

Ademas, estas propiedades caracterizan, salvo equivalencia, a los funtores $H(\, ,E)_{\mathbb{G}}$, como funtores en la segunda variable .

Dem.- [18, pag. 266] .

(1.1.10) Si $E : \underline{B} \longrightarrow Ab$ es un funtor, por (1.1.7),y analogamente a (1.1.8) , para $\sigma : B \twoheadrightarrow B'$ un epimorfismo $\underline{D}$-escindente tendremos su (co)homologia $H(\sigma,E')_{\mathbb{G}'}$ con coeficientes en E' relativa al cotriple $\mathbb{G}'$, (1.1.6), a la que denotaremos simplemante $H(\sigma,E)_{\mathbb{G}}$.

(1.1.11) TEOREMA .

Si $\sigma : B \twoheadrightarrow B'$ es un epimorfismo en $\underline{B}$ $\underline{D}$-escindente y $E : \underline{B} \longrightarrow Ab$ es un funtor, existe una sucesión exacta larga natural

$$\cdots \longrightarrow H_n(\sigma,E)_{\mathbb{G}} \longrightarrow H_n(B,E)_{\mathbb{G}} \longrightarrow H_n(B',E)_{\mathbb{G}} \longrightarrow H_{n-1}(\sigma,E)_{\mathbb{G}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow H_o(B',E)_{\mathbb{G}} \longrightarrow 0 \,.$$

Dem.- La resolución simplicial de σ en $\underline{B}'$ inducida por el cotriple $\mathbb{G}'$ sera

$$\begin{tikzcd}
\cdots\ G^{n+1}(B) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "G^{n+1}(\sigma)"'] & G^n(B) \arrow[d, "G^n(\sigma)"'] & \cdots & G^2(B) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "G^2(\sigma)"'] & G(B) \arrow[r] \arrow[d, "G(\sigma)"'] & B \arrow[d, "\sigma"'] \\
\cdots\ G^{n+1}(B') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G^n(B') & \cdots & G^2(B') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G(B') \arrow[r] & B'
\end{tikzcd}$$

donde $G^n(\sigma)$ escinde , por el lema (1.1.2), para todo $n \geqslant 1$.

Notemos que las filas son precisamente las resoluciones de B y B' , respectivamente , inducidas por el cotriple $\mathbb{G}$.

Aplicando el funtor $E' : \underline{B}' \longrightarrow Ab$, tendremos la sucesión exacta de complejos de cadenas

$$\begin{tikzcd}
\cdots\ E'(G^{n+1}(\sigma)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & E'(G^n(\sigma)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r] & E'(G(\sigma)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
\cdots\ E(G^{n+1}(B)) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & E(G^n(B)) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \cdots \arrow[r] & E(G(B)) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
\cdots\ E(G^{n+1}(B')) \arrow[r] & E(G^n(B')) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E(G(B')) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

que nos induce la sucesión exacta anunciada, (vease, por ejemplo [141]) .

(1.1.12) Como teorema dual al (1.1.11) tendriamos que "Si $E : \underline{B} \longrightarrow Ab$ es un funtor contravariante, entonces existe una sucesión natural ,exacta larga, en cohomologia

$$0 \longrightarrow H^0(B',E)_{\mathbb{G}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^{n-1}(\sigma,E)_{\mathbb{G}} \longrightarrow$$
$$H^n(B',E)_{\mathbb{G}} \longrightarrow H^n(B,E)_{\mathbb{G}} \longrightarrow H^n(\sigma,E)_{\mathbb{G}} \longrightarrow \cdots \text{''}.$$

(1.1.13) LEMA .

Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B_o \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & B'_o \arrow[d] \\ B_1 \arrow[r] & B'_1 \end{tikzcd}$$

en una categoria con cuadrados cartesianos, considerando los pares nucleos de las flechas se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} & B_o \times_{B_1} B_o \arrow[r, dashed, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & B'_o \times_{B'_1} B'_o \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ B_o \times_{B'_o} B_o \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, dashed, "\bar{\beta}"'] & B_o \arrow[r] \arrow[d] & B'_o \arrow[d] \\ B_1 \times_{B'_1} B_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B_1 \arrow[r] & B'_1 \end{tikzcd}$$

Se verifica, entonces, que los objetos pares nucleos de los morfismos inducidos $\bar{\alpha}$ y $\bar{\beta}$ son iguales .

La demostración es simple , aunque tediosa; es omitida.

(1.1.14) LEMA .

Si $\sigma \colon B \twoheadrightarrow B'$ es un epimorfismo escindente en $\underline{B}$, entonces para cualquier funtor $E : \underline{B} \longrightarrow Ab$, la sucesión

$$E(B\times_{B'}B\times_{B'}B) \xrightarrow{E(\pi_0\pi_1)-E(\pi_0\pi_2)+E(\pi_1\pi_2)} E(B\times_{B'}B) \xrightarrow{E(\pi_0)-E(\pi_1)} E(B) \xrightarrow{E(\sigma)} E(B')$$

es exacta.

Dem.- Sea $\tau \colon B' \longrightarrow B$ con $\sigma\tau = I$; considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E(B\times_{B'}B\times_{B'}B) \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, equal] & E(B\times_{B'}B) \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "s_2"'] & E(B) \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "s_1"'] & E(B') \arrow[d, equal] \arrow[dl, "s_0"'] \\
E(B\times_{B'}B\times_{B'}B) \arrow[r] & E(B\times_{B'}B) \arrow[r] & E(B) \arrow[r] & E(B')
\end{tikzcd}$$

donde $s_0 = E(\tau)$, $s_1 = E(\tau\sigma, I_B)$ y $s_2 = E(\tau\sigma\pi_0, \pi_0, \pi_1)$, es facil comprobar que $s_i d_i + s_{i-1} d_{i-1} = I$.

(1.1.15) LEMA .

Sea $\sigma : B \longrightarrow B'$ un epimorfismo $\underline{D}$- escindente, los morfismos f_1 y f_2 inducidos en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G(B)\times_{G(B')}G(B)\times_{G(B')}G(B) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "f_2"] & G(B)\times_{G(B')}G(B) \arrow[r, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] \arrow[d, "f_1"'] & G(B) \arrow[r, "G(\sigma)"] \arrow[d, "\delta_B"'] & G(B') \arrow[d, "\delta_{B'}"'] \\
B\times_{B'}B\times_{B'}B \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & B\times_{B'}B \arrow[r, shift left, "q_0"] \arrow[r, shift right, "q_1"'] & B \arrow[r, "\sigma"] & B'
\end{tikzcd}$$

son epimorfismos $\underline{D}$-escindentes.

Dem.- Consideremos el diagrama anterior en la categoria de olvido; notemos que el funtor de olvido conserva cuadrados cartesianos.

Denotando $s = \eta_{U(B)}$ y $s' = \eta_{U(B')}$, es conocido que $U(\delta_B)\, s = I_{U(B)}$ y $U(\delta_{B'})\, s' = I_{U(B')}$. y ,por la naturalidad de η se tiene que $U(G(\sigma))\, s = s'\, U(\sigma)$. Entonces se tiene $U(G(\sigma))\, s\, U(q_0) = s'\, U(\sigma)\, U(q_0) = s'\, U(\sigma)\, U(q_1) = U(G(\sigma))\, s\, U(q_1)$ y por tanto existe un único morfismo en $\underline{D}$ $g_1 : U(B\times_{B'}B) \longrightarrow U(G(B)\times_{G(B')}G(B))$, el cual es facil ver que verifica $U(f_1)\, g_1 = I$.

Analogo razonamiento prueba que f_2 es $\underline{D}$-escindente .

(1.1.16) LEMA .

Supondremos que la adjunción $F \dashv U$, se factoriza por $\underline{Gr}$ = Grupos, $(\underline{Gr}, G)$ o $(\underline{Gr}, G) \times \underline{Gr}$ para algun grupo G y que $\underline{D}$ es Set = conjuntos una categoria abeliana £ , (Set, S), (£, L), (Set, S)x Set o (£, L) x £ .

Entonces para cualquier objeto B de $\underline{B}$ el morfismo

$$\phi : G^2(B) \longrightarrow G(B)x_B G(B)$$

inducido por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G^2(B) \arrow[r, shift left, "\delta_1"] \arrow[r, shift right, "\delta_0"'] \arrow[dr, dashed, "\phi"'] & G(B) \arrow[r, "\delta_B"] & B \\
& G(B)x_B G(B) \arrow[u, shift left, "\pi_1"] \arrow[u, shift right, "\pi_0"'] &
\end{tikzcd}$$

es un epimorfismo $\underline{D}$-escindente .

Dem.- Consideramos en $\underline{D}$ el morfismo $\bar{s} : U(G(B)x_B G(B)) \longrightarrow U(G^2(B))$ definido como sigue (notemos que $U(G(B)x_B G(B)) = U(G(B))x_{U(B)} U(G(B))$)

$$\bar{s}(\xi, \xi') = \eta_{UG(B)}(\xi') - \eta_{UG(B)} U(\delta_{G(B)}) UF(\eta_{U(B)})(\xi) + UF(\eta_{U(B)})(\xi) .$$

Es mera comprobación probar que $U(\phi)\,\bar{s} = I$.

(1.1.17) DEFINICION .

Un funtor $E : \underline{B} \longrightarrow Ab$ se dice $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$-exacto a la derecha si para todo epimorfismo $\sigma : B \twoheadrightarrow B' \in \mathcal{E}_{\mathbb{G}}$ la sucesión

$$E(Bx_{B'}B) \xrightarrow{E(\pi_0)-E(\pi_1)} E(B) \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} E(B')$$

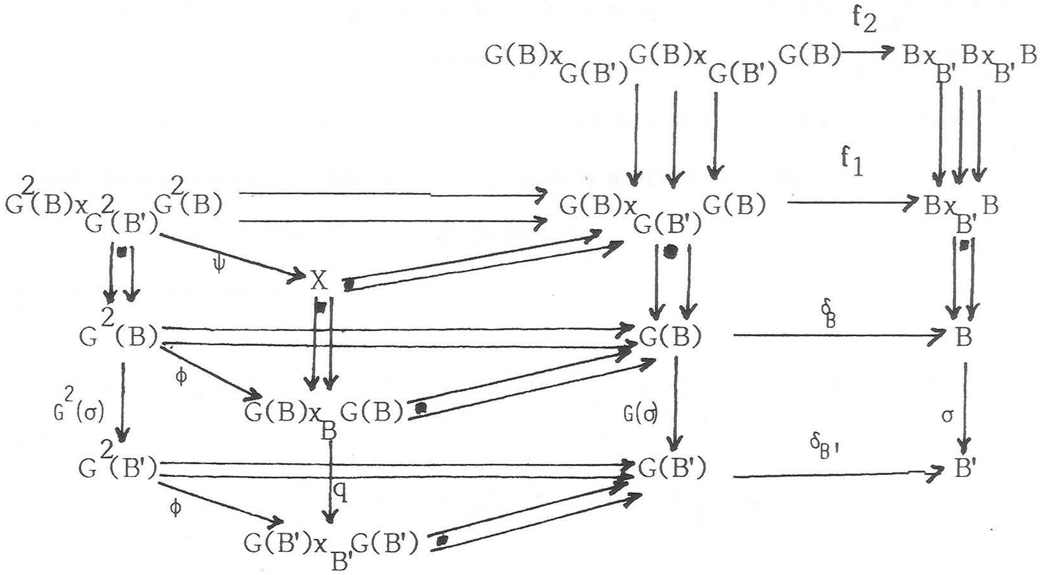
es exacta .

(1.1.18) TEOREMA .

En las condiciones de (1.1.16), si $E : \underline{B} \longrightarrow Ab$ es $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$ -exacto a la derecha, para cualquier $\sigma : B \twoheadrightarrow B'$, epimorfismo $\underline{D}$- escindente, se tiene que

$$H_0(\sigma, E)_{\mathbb{G}} = \mathrm{Coker}\,(\,E(Bx_{B'}Bx_{B'}B) \xrightarrow{d} E(\,Bx_{B'}B)\,) .$$

Dem.- Consideramos el diagrama

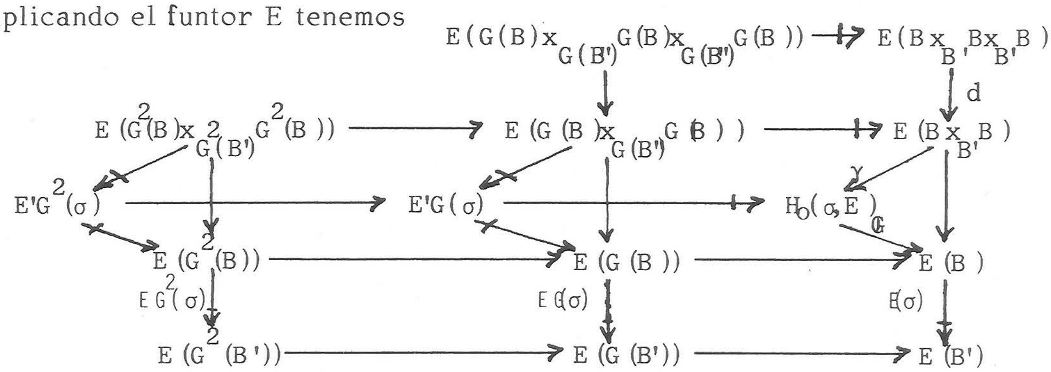


donde X denota el objeto par nucleo de f_1 y q (que son el mismo por (1.1.13))

Los morfismos f_1 y f_2 son $\underline{D}$-escindentes por (1.1.15).

Ademas se tiene $\bar{s} : U(G(B)x_B G(B)) \longrightarrow U(G^2(B))$ con $U(\phi)\,\bar{s} = I$, y correspondientemente $\bar{s}' : U(G(B')x_{B'}G(B')) \longrightarrow U(G^2(B'))$ con $U(\phi)\,\bar{s}' = I$; siendo facil ver que $U(G^2(\sigma))\,\bar{s} = \bar{s}'\,q$,induciendose, en consecuencia, un morfismo $s : U(X) \longrightarrow U(G^2(B)x_{G^2(B')}G^2(B))$ verificando que $U(\psi)\,s = I_X$. Asi ψ es un epimorfismo $\underline{D}$-escindente.

Aplicando el funtor E tenemos



Puesto que E lleva epimorfismos $\underline{D}$-escindentes en epimorfismos el morfismo de la primera fila es un epimorfismo; como $E(X) \longrightarrow E(G(B) x_{GB'} G(B)) \twoheadrightarrow E(B x_{B'} B)$ es exacta y $E(\psi)$ un epimorfismo concluimos que la segunda fila es exacta; Las columnas primera y segunda son exactas por el lema (1.1.14).

Es ya inmediato observar que existe un unico morfismo inducido

$$\gamma : E(B x_{B'} B) \longrightarrow H_o(\sigma, E)_{\mathbb{G}}$$

y que este es el conucleo de d.

(1.1.19) Dualmente, si E es contravariante, en las mismas condiciones, se tendra que

$$H^o(\sigma, E)_{\mathbb{G}} = \mathrm{Ker}(\, E(B x_{B'} B) \longrightarrow E(B x_{B'} B x_{B'} B)\,) .$$

(1.1.20) PROPOSICION .

Un funtor $E : \underline{B} \longrightarrow Ab$ es $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$-exacto a la derecha si y solo si se verifica que $H_o(\ ,E)_{\mathbb{G}} = E$ ($H^o(\ ,E)_{\mathbb{G}} = E$) . (En las condiciones de (1.1.16)).

Dem.- Supongamos que $H_o(\ ,E)_{\mathbb{G}} = E$; sea $\sigma : B \twoheadrightarrow B'$ un epimorfismo $\underline{D}$-escindente, considerando

$$\begin{tikzcd}
 & E(G(B) x_B G(B)) \arrow[r, two heads, "E(f_1)"] \arrow[d] & E(B x_{B'} B) \arrow[d] \\
EG^2(B) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "EG^2(\sigma)"'] & E(G(B)) \arrow[r, two heads, "E(\delta)"] \arrow[d, "EG(\sigma)"'] & E(B) \arrow[d, "E(\sigma)"] \\
EG^2(B') \arrow[r] & EG(B') \arrow[r, two heads, "E(\delta)"] & E(B')
\end{tikzcd}$$

Las filas 2ª y 3ª son exactas y por (1.1.14) lo es la columna central; como f_1 es $\underline{D}$-escindente de (1.1.11) se sigue que $E(f_1)$ es tambien un epimorfismo, claramente $EG^2(\sigma)$ es un epimorfismo.

Es facil concluir, despues de lo anterior, que la columna de la derecha es exacta. Asi E es $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$-exacto a la derecha .

Reciprocamente, si E es $\mathcal{E}_{\mathbb{G}}$-exacto, para cada B de $\underline{B}$ se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
EG^2(B) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "E(\phi)"'] & EG(B) \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & H_o(B,E)_{\mathbb{G}} \arrow[d, "\theta"] \\
E(G(B) x_B G(B)) \arrow[r] & E(G(B)) \arrow[r, two heads] & E(B)
\end{tikzcd}$$

Como es $\underline{D}$-escindente sera $E(\phi)$ un epimorfismo y por tanto Θ es un isomorfismo.

1.2. CATEGORIAS DE INTERES

(1.2.1) Consideramos una "Categoria de interes" tal como en [135] ; esto es, una categoria $\underline{C}$ verificando los siguientes axiomas :

1) Existe un triple T en Set_* (Conjuntos con punto) tal que $\underline{C}$ es equivalente a la categoria de T-algebras Set_*^T .

2) El funtor de olvido $U : \underline{C} \longrightarrow Set_*$ se factoriza por la categoria de Grupos. Asi los objetos de $\underline{C}$ son grupos con estructura adicional .

3) Todas las operaciones en $\underline{C}$ son finitarias .

4) Existe un conjunto Ω que genera las operaciones de $\underline{C}$ formado por operaciones de orden uno $\{\omega\}\cup\{-\}$ y operaciones de orden dos $\{*\}\cup\{+\}$. Supondremos que si $* \in \Omega$ tambien su opuesta $*^\circ$ lo esta .

5) Para todo $*$, $a*(b+c) = a*b + a*c$.

6) Para cada ω y $*$, $\omega(a+b) = \omega(a) + \omega(b)$ y $\omega(a*b) = \omega(a)*b$.

7) Para cada $*$, $a + (b*c) = (b*c) + a$.

8) Para cada par ordenado de operaciones $(*,*')$, existe una palabra w tal que $(a*b)*'c = w(a(bc),a(cb),(bc)a,(cb)a,b(ac),b(ca),(ac)b,(ca)b))$ donde la yuxtaposición representa una operación $*''$.

(1.2.2) PROPOSICION .

Sea A un subobjeto de B en $\underline{C}$, entonces A es un subobjeto normal (Ideal) de B si y solo si se verifica :

a) A es un subgrupo normal de B .

b) $a * b \in A$ para todo $a \in A$ y $b \in B$.

[135, pag. 290] .

(1.2.3) Sea R objeto de $\underline{C}$, una R-estructura en $\underline{C}$ es una sucesión exacta corta escindida por la derecha

$$X \overset{i}{\rightarrowtail} E \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} R \qquad p\,s = I .$$

Un R-módulo es una R-estructura con X singular, es decir X es abeliano como grupo y $X * X = 0$ para todo $*$.

Si $X \overset{i}{\rightarrowtail} E \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} R$ es una R-estructura, considerando $X \subset E$ e i el morfismo de inclusión, se inducen acciones de R en X por :

i) $r \cdot x = s(r) + x - s(r)$

i i) $r * x = s(r) * x$, para cada $*$.

Notemos que si X es un R-módulo, tales acciones no dependen de la escisión elegida s .

(1.2.4) Un morfismo de R-estructuras (R-módulos) es un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "\phi"'] & E \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[d, "\bar{\phi}"] & R \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d, equal] \\ X' \arrow[r, tail, "i'"] & E' \arrow[r, shift left, "p'"] & R \arrow[l, shift left, "s'"] \end{tikzcd}$$

con $\bar{\phi}\, i = i' \phi$, $p' \bar{\phi} = p$ y $\bar{\phi}\, s = s'$.

Tenemos asi la categoria de R-estructuras (R-módulos) .

Observemos que $\phi : X \longrightarrow X'$ verifica

i) $\phi(r \cdot x) = r \cdot \phi(x)$

i i) $\phi(r * x) = r * \phi(x)$ para todo $*$.

y, ademas, $\bar{\phi}$ esta determinado por ϕ pues $\bar{\phi}(x+s(r)) = \phi(x) + s'(r)$. Por otra parte si $\phi : X \longrightarrow X'$ es un morfismo en $\underline{C}$ que verifica i) y i i), entonces considerando $\bar{\phi} : E \longrightarrow E'$ definido por $\bar{\phi}(x+s(r)) = \phi(x) + s'(r)$ es un morfismo en

$\underline{C}$ y el par $(\phi,\bar{\phi})$hace conmutar el diagrama anterior , siendo por tanto un morfis- mo de R-estructuras (R-módulos) .

Concluimos asi que un morfismo de R-estructuras (R-módulos) es un mor - fismo en $\underline{C}$ $\phi : X \longrightarrow X'$ verificando i) y ii), osea que conserva las acciones .

(1.2.5) Supongamos dos R-estructuras (R-módulos) $X \rightarrowtail E \rightleftarrows R$ y $X \rightarrowtail E' \rightleftarrows R$, tales que las acciones inducidas de R en X,respectivamente, coinciden. Entonces se sigue de lo dicho en (1.2.4) que $I_X : X \longrightarrow X$ es un mor- fismo de R-estructuras y obviamente un isomrfismo; esplicitamente se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, shift left, two heads] \arrow[d, "\bar{I}_X"'] & R \arrow[l, shift left] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & E' \arrow[r, shift left, two heads] & R \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

y, asi , $E \cong E'$; concluimos que E esta determinado, salvo isomorfismo, por R , X y las acciones de R en X. Denotamos $E = X \rtimes R$ y le llamaremos PRODUC- TO SEMIDIRECTO de R por X.

Hablaremos de X como R-estructura (R-módulo) suponiendo dado $X \rtimes R$.

(1.2.6) Para $R \in \underline{C}$ la categoria coma $(\underline{C}, R)$ es aquella que tiene como obje- tos los morfismos $A \longrightarrow R$ en $\underline{C}$ y como morfismos los triangulos conmutativos

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dr] & & A' \arrow[dl] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

Un objeto grupo abeliano en $(\underline{C}, R)$ es un objeto $A \longrightarrow R$ tal que el funtor $\mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}(\ ,\ \begin{smallmatrix} A \\ \downarrow \\ R \end{smallmatrix})$ se factoriza por la categoria de Grupos Abelianos; un morfis- mo de grupos abelianos en $(\underline{C}, R)$ es un triangulo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & A' \arrow[dl] \\
& R &
\end{tikzcd}$$

tal que $f^* : \mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}(\ ,\ \begin{smallmatrix} A' \\ \downarrow \\ R \end{smallmatrix}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}(\ ,\ \begin{smallmatrix} A \\ \downarrow \\ R \end{smallmatrix})$ es una transformación natural de funtores a grupos abelianos.(vease[21], o equivalentemente[41]) .

Tenemos asi la categoria $Ga(\underline{C},R)$, de grupos abelianos en $(\underline{C},R)$.

(1.2.7) PROPOSICION .

Existe una equivalencia natural

$$\Phi : Ga(\underline{C},R) \cong R\text{-Mod}.$$

para cada R de $\underline{C}$. (R-Mod. es la categoria de R-módulos como en (1.2.4)).

Dem.- [135, pag. 294] . Destaquemos que si $X \rightarrowtail X \amalg R \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} R$ es un R-módulo, entoncesel correspondiente objeto grupo ableliano en $(\underline{C},R)$ es $X \amalg R \longrightarrow R$, estando definida la suma en $Hom_{(\underline{C},R)}\left(\begin{smallmatrix} A \\ \theta\downarrow \\ R \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} X\amalg R \\ \downarrow \\ R \end{smallmatrix}\right)$ por

$$(\phi+\phi')(a) = \phi(a) - s\theta(a) + \phi'(a) \quad , \quad a \in A .$$

(1.2.8) Como $\underline{C}$ es una categoria exacta, en el sentido de Barr [14] , la categoria coma $(\underline{C},R)$ tambien lo es y $Ga(\underline{C},R)$ es una categoria abeliana, [14]. Asi R-Mod. es una categoria abeliana .

En $\underline{C}$ se verifica que limites directos conmutan con limites finitos [146, Teorema 11.5.7],podemos entonces asegurar que en $(\underline{C},R)$ productos finitos conmutan con limites directos (Notemos que productos en $(\underline{C},R)$ son productos fibrados en $\underline{C}$ y limites en $(\underline{C},R)$ se obtienen como en $\underline{C}$) . Resaltemos tambien que $(\underline{C},R)$ es completa y cocompleta , puesto que $\underline{C}$ lo es al ser tripleable sobre conjuntos [83, Teo. 32.12 y 32.14] .

Se deduce entonces [15,Teo. (7.3) y Cor.(7.5)] que ,siendo

$$J : R\text{-Mod.} = Ga(\underline{C},R) \longrightarrow (\underline{C},R)$$

el obvio funtor inclusión-olvido, este es tripleable . En particular, se tiene una adjunción

$$\begin{array}{c} (\underline{C},R) \\ D_R \Big\downarrow \;\; \Big\uparrow J \\ R\text{-Mod.} \end{array}$$

Deducimos como consecuencia que R-Mod. es una categoria completa.

Puesto que tanto $(\underline{C}, R)$ como R-Mod. son categorias exactas, la clase de epimorfismos regulares y la clase de los monomorfismos constituyen un sistema de factorización, respectivamente en cada una de ellas. Claramente D_R conserva epimorfismos regulares y Barr [14] prueba que J tambien los conserva (es e-exacto), asi J D_R conseva epimorfismos regulares; se sigue de [15] que la categoria R-Mod. es cocompleta.

Podemos asegurar tambien que R-Mod. tiene un generador proyectivo; en efecto, es facil ver que $\left\{ \begin{array}{c} F(r) \\ \downarrow \\ R \end{array}, r \in R \right\}$ es un conjunto generador en $(\underline{C}, R)$, entonces $\left\{ D_R\left(\begin{array}{c} F(r) \\ \downarrow \\ R \end{array} \right), r \in R \right\}$ lo es en R-Mod. y por tanto $\coprod_{r \in R} D_R\left(\begin{array}{c} F(r) \\ \downarrow \\ R \end{array} \right) = D_R\left(\begin{array}{c} FU(R) \\ \downarrow \\ R \end{array} \right)$ es un generador en R-Mod. y claramente proyectivo.

Como consecuencia la categoria R-Mod. tiene suficientes inyectivos respecto a la clase de todos los monomorfismos, (vease, por ejemplo [130, Teo. 3.2]).

(1.2.9) Dada la adjunción

$$\begin{tikzcd} Set_* \arrow[d, shift right, "F"'] \\ \underline{C} \arrow[u, shift right, "U(\text{ olvido})"'] \end{tikzcd}$$

denotaremos $\mathbb{G} = (G, \delta, \varepsilon)$ al correspondiente cotriple inducido en $\underline{C}$.

(1.2.10) En orden a un tratamiento simultaneo de la cohomologia absoluta y relativa, podremos suponer que, eventualmente, se tenga una factorización

$$\begin{tikzcd} Set_* \arrow[d, shift right] \arrow[dd, bend right=60, "F"'] \\ \pounds \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right, "F_\pounds"'] \\ \underline{C} \arrow[u, shift right, "U_\pounds"'] \arrow[uu, bend right=60, "U"'] \end{tikzcd}$$

donde £ es una categoria abeliana (por ejemplo, módulos sobre un anillo).

En este caso denotaremos $\mathbb{G}_\pounds = (G_\pounds, \delta_\pounds, \varepsilon_\pounds)$ al cotriple en $\underline{C}$ inducido por la adjunción $F_\pounds \dashv U_\pounds$.

(1.2.11) Para R objeto de $\underline{C}$, se tienen funtores

$$\begin{tikzcd} (Set_*, U(R)) \arrow[d, shift right, "F_R"'] \\ (\underline{C}, R) \arrow[u, shift right, "U_R"'] \end{tikzcd}$$

con $U_R(A \to R) = U(A) \to U(R)$ y $F_R(S \xrightarrow{g} U(R)) = F(S) \xrightarrow{F(g)} FU(R) \xrightarrow{\delta} R$;

J.BecK [21,pag.60] prueba que estos son adjuntos y U_R es tripleable.

Mas en general, si se da la situación (1.2.10), se tiene la factorización

$$\begin{tikzcd} (Set_*, U(R)) \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "F_R"'] \\ (\mathcal{L}, U_{\mathcal{L}}(R)) \arrow[u] \arrow[d, "F_{\mathcal{L}R}"'] \\ (\underline{C}, R) \arrow[u, "U_{\mathcal{L}R}"'] \arrow[uu, bend right=60, "U_R"'] \end{tikzcd}$$

y $U_{\mathcal{L}R}$ es tambien tripleable.

Denotaremos por $\mathbb{G}_R$ ($\mathbb{G}_{\mathcal{L}R}$) al cotriple en $(\underline{C}, R)$ inducido por la adjunción $F_R \dashv U_R$ ($F_{\mathcal{L}R} \dashv U_{\mathcal{L}R}$).

(1.2.12) De acuerdo con (1.1.4), en $(\underline{C}, R)$ tendremos la clase de epimorfismos $\mathcal{E}_{\mathbb{G}R}$ ($\mathcal{E}_{\mathbb{G}\mathcal{L}R}$), osea la clase de epimorfismos escindentes en la correspondiente categoria de olvido; no presenta dificultad comprobar que $\begin{tikzcd}[column sep=small] A \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$

esta en dicha clase si y solo si $A \twoheadrightarrow B$ es sobre ($\mathcal{L}$-escindente).

En la categoria R-Mod. tendremos la clase $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$) de todos los epimorfismos $\phi: X \twoheadrightarrow Y$ tal que $J(\phi) \in \mathcal{E}_{G_R}$ ($\mathcal{E}_{G\mathcal{L}R}$). Es facil probar que $\phi \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$) si y solo si ϕ es sobre ($\mathcal{L}$-escindente) como morfismo en $\underline{C}$.

Denotaremos $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$) a la clase de monomorfismos en R-Mod. asociada a la clase de epimorfismos $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$), osea $\mathcal{M}$ ($\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$) es la clase de monomorfismos que son nucleos de los epimorfismos de la clase $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$), (vease, por ejemplo, [130]). Es inmediato observar que $\mathcal{M}$ es la clase de todos los monomorfis -

mos y $\mathcal{M}_{£}$ la clase de los monomorfismos de R-módulos £-escindentes (osea que sus correspondientes olvidados son secciones en £), notese , para esto que en R-Mod. todo epimorfismo es regular y el funtor $U_{£R}$ J conserva epimorfismos regulares y al ser £ abeliana todo epimorfismo es conormal .

Tal como se vio en (1.2.8) $\mathcal{M}$ es una clase inyectiva. En algunas cuestiones sera de interes suponer que la clase $\mathcal{M}_{£}$ es tambien inyectiva; asi como que el funtor D_R conserva epimorfismos £-escindentes .

(1.2.13) Sea X una R-estructura (R-módulo) y $f: A \longrightarrow R$ un morfismo en $\underline{C}$, entonces X es una A-estructura (R-módulo) " via f" mediante el diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X \rtimes A \arrow[r, two heads, shift left] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & A \arrow[l, tail, shift left] \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, tail] & X \rtimes R \arrow[r, two heads, shift left] & R \arrow[l, tail, shift left]
\end{tikzcd}$$

siendo las acciones de A en X :

i) $a \cdot x = f(a) \cdot x$

ii) $a * x = f(a) * x$ para todo $*$.

(1.2.14) Sea L un ideal de R en $\underline{C}$, considerando el diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & R \times_{R/L} R \arrow[r, two heads] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & R \arrow[d, two heads] \\
L \arrow[r, tail] & R \arrow[r, two heads] & \frac{R}{L}
\end{tikzcd}$$

se obtiene la sucesion exacta corta escindida a la derecha $L \rightarrowtail R \times_{R/L} R \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} R$ con $s = (I_R, I_R)$.

Asi L es una R-estructura (R-módulo si fuera singular), a la que diremos que es " R-estructura por conjugación"; las acciones de R en L, puede verse sin dificultad , son

i) $r \cdot l = r + l - r$

ii) $r * l = r * l$ en R , para cada $*$.

Notese que L es central en R si y solo si las acciones por conjugación son triviales (es decir $r \cdot l = l$, $r * l = 0$), lo cual es claramente equivalente a que $R \times_{R/L} R = L \times R$.

(1.2.15) Sea L una R–estructura y $f : R \twoheadrightarrow R'$ un epimorfismo sobre tal que Ker(f) actua trivialmente sobre L, entonces L es, de forma inducida, una R'–estructura.

En efecto, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Ker}(f) \arrow[d, tail, "j"] \\
L \arrow[r, tail] & L \rtimes R \arrow[r, two heads, shift left, "p"] \arrow[d, "(s\,j)^c"'] & R \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d] \\
 & E \arrow[r, "p'"] & R'
\end{tikzcd}$$

donde E = Coker(s j) y p' el morfismo inducido por p. Como Ker(f) actua trivialmente sobre L es facil deducir que Ker(f) es un ideal del producto semidirecto $L \rtimes R$, y entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
L \rtimes R \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[d] \\
E \arrow[r] & R'
\end{tikzcd}$$

es bicartesiano. Tenemos asi la sucesión exacta corta $L \rightarrowtail E \underset{s'}{\overset{p'}{\rightleftarrows}} R'$, escindida a la derecha con el morfismo s' inducido por s. Y L es una R'–estructura con $L \rtimes R' = E$.

Es inmediato observar que las acciones de R' en L son :

i) $r' \cdot l = r \cdot l$, si $f(r) = r'$.

ii) $r' * l = r * l$, si $f(r) = r'$, para cada $*$.

(1.2.16) Sean L y L' dos R–estructuras y $\phi: L \longrightarrow L'$ un morfismo de R–estructuras , sean $M = \mathrm{Ker}(\phi)$ y $N = \mathrm{Coker}(\phi)$ en $\underline{C}$; entonces M y N son R–estructuras, y son el nucleo y el conucleo de ϕ en la categoria de R–estructuras (R–

módulos, si L y L' lo fueran).

En efecto, M es R-estructura por la fila superior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail] \arrow[d] & L\rtimes R \times_{L'\rtimes R} R \arrow[r, shift left, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & R \arrow[l, shift left, "(s, I_R)"] \arrow[d, equal] \\
L \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"'] & L\rtimes R \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[d, "\overline{\phi}"'] & R \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d, equal] \\
L' \arrow[r, tail] & L'\rtimes R \arrow[r, shift left] & R \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

Para N, sea I la clausura normal de Img(ϕ) en L', asi Coker(ϕ) = L'/I en $\underline{C}$, facilmente se ve que I es normal en $L'\rtimes R$ y N es R-estructura por la fila inferior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & I \arrow[d, tail] & \\
L' \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & L'\rtimes R \arrow[r, shift left, "p'"] \arrow[d, two heads] & R \arrow[l, shift left, "s'"] \arrow[d, equal] \\
N = \frac{L'}{I} \arrow[r, tail] & \frac{L'\rtimes R}{I} \arrow[r, shift left, "\overline{p}'"] & R \arrow[l, shift left, "\overline{s}'"]
\end{tikzcd}$$

Es trivial comprobar que M y N son , respectivamente, el nucleo y el conucleo de ϕ en la categoria de R-estructuras .

Como consecuencia, una sucesión de R-estructuras (R-módulos)

$$M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3$$

es exacta en la categoria de R-estructuras (R-módulos) si y solo si es exacta en $\underline{C}$.

(1.2.17) Sean L y K subobjetos de B en $\underline{C}$, y $[L, K]$ el subobjeto conmutador correspondiente. Por [84, Teo.15] este es el ideal de $L \vee K$ generado por el conjunto de elementos $\{k+l-k-l\ ,\ k*l\ ;\ l \in L,\ k \in K \text{ y todo } *\}$.

Supongamos que L y K son ideales de B con $L \subset K$; en particular, L es B-es tructura por conjugación y es facil verificar que $[L,K]$ es un ideal de $L\rtimes B$, teniendose por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
{[L,K]} \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & {[L,K]} \arrow[d, tail] & \\
L \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & L\rtimes B \arrow[r, two heads, shift left, "p"] \arrow[d, two heads] & B \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d, equal] \\
\frac{L}{[L,K]} \arrow[r, tail] & \frac{L\rtimes B}{[L,K]} \arrow[r, two heads, shift left, "\bar{p}"] & B \arrow[l, shift left, "\bar{s}"]
\end{tikzcd}$$

que $\frac{L}{[L,K]}$ es un B-módulo (Obviamente es singular) con $\frac{L}{[L,K]}\rtimes B = \frac{L\rtimes B}{[L,K]}$.

(1.2.18) DERIVACIONES .

Sea X un R-módulo; en $X\rtimes R$, siendo $s: R \longrightarrow X\rtimes R$ una escisión de la proyección $p : X\rtimes R \longrightarrow R$ y considerando $X \subset X\rtimes R$, todo elemento se expresa de manera unica en la forma $x + s(r)$ con $x \in X$ y $r \in R$.

Consideremos la aplicación $\xi: X\rtimes R \longrightarrow R$ tal que $\xi(x+s(r)) = x$.

Notemos que en el caso que el funtor de olvido se factorice por la categoria abeliana $\mathcal{L}$, (1.2.10), se tiene claramente $U_{\mathcal{L}}(X\rtimes R) = U_{\mathcal{L}}(X) \oplus U_{\mathcal{L}}(R)$ y ξ es la correspondiente proyección en $\mathcal{L}$ al factor $U_{\mathcal{L}}(X)$; asi ξ es morfismo en $\mathcal{L}$.

Se verifica :

a) $\xi(e+e') = \xi(e) + (e + \xi(e') - e)$

b) $\xi(e*e') = \xi(e)*e' + e*\xi(e')$, para todo $*$.

c) $\xi(\omega(e)) = \omega(\xi(e))$, para todo ω .

para cualesquiera $e, e' \in X\rtimes R$.

En efecto :

$e+e' = \xi(e) + sp(e) + \xi(e') + sp(e') = \xi(e) + sp(e) + \xi(e') - sp(e) + sp(e) + sp(e')$

$= \xi(e) + sp(e) + \xi(e') - sp(e) + sp(e+e')$, luego

$\xi(e+e') = \xi(e) + sp(e) + \xi(e') - sp(e) = \xi(e) + (\xi(e) + (sp(e)+\xi(e') - sp(e)) - \xi(e))$

$= \xi(e) + (e + \xi(e') - e)$.

$e * e' = (\xi(e) + sp(e)) * (\xi(e') + sp(e')) = \xi(e) * sp(e') + sp(e) * \xi(e') + sp(e * e'),$

luego

$\xi(e * e') = \xi(e) * sp(e) + sp(e) * \xi(e') =$

$= \xi(e) * e' + e * \xi(e')$.

Por último , $\omega(e) = \omega(\xi(e) + sp(e)) = \omega(\xi(e)) + sp(\omega(e))$, luego $\xi(\omega(e)) =$ $= \omega(\xi(e))$.

Notemos que X es un $X \rtimes R$-módulo via la proyección p , osea $X \rtimes R$-módulo por conjugación segun (1.2.14). Las propiedades a), b) y c) expresan que ξ es una derivación de $X \rtimes R$ en el módulo X.

(1.2.19) DEFINICION .

Sea X un A-módulo en $\underline{C}$, se define una "derivación" de A en X como una aplicación (morfismo en $\mathcal{C}$) $d : A \longrightarrow X$, tal que

a) $d(a + a') = d(a) + a \cdot d(a')$

b) $d(a * a') = d(a) * a' + a * d(a')$, para cada $*$.

c) $d(\omega(a)) = \omega(d(a))$, para cada ω .

Notaremos $Der(A,X)$ al conjunto de las derivaciones de A en el A-módulo X.

Si d y d' son derivaciones de A en X, su suma $d + d'$ definida por

$$(d + d')(a) = d(a) + d'(a)$$

es tambien una derivación , y el conjunto $Der(A,X)$, con esta operación de adición, es un grupo abeliano.

Ademas, si suponemos X un R-módulo y $A \xrightarrow{\theta} R$ $(\underline{C},R)$, con lo que X es A-módulo via θ , para cualquier morfismo en $(\underline{C},R)$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & A \arrow[dl, "\theta"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

se verifica que $d\,h : B \longrightarrow X$ es una derivación, para cualquier derivación $d : A \longrightarrow X$, siendo evidente que $(d + d')\,h = d\,h + d'\,h$.

Se tiene asi un funtor, para X un R-módulo,

$$\mathrm{Der}(\ ,X) : (\underline{C},R)^{\circ} \longrightarrow Ab \text{ (Grupos Abelianos).}$$

(1.2.20) PROPOSICION .

Existe una equivalencia natural

$$\mathrm{Der}(\ ,X) = \mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\ ,\ \begin{array}{c} X\rtimes R \\ \downarrow \\ R \end{array}\right)$$

de funtores a Grupos abelianos, para X un R-módulo .

Dem.- Sea $A \longrightarrow R \in (\underline{C},R)$, probaremos primero que existe un isomorfismo

$$\mathrm{Der}(A,X) = \mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\begin{array}{c} A \\ \| \\ A \end{array},\ \begin{array}{c} X\rtimes A \\ \downarrow \\ A \end{array}\right).$$

Consideremos $\xi : X\rtimes A \longrightarrow A$, como en (1.2.18). Si $\begin{array}{c} A \xrightarrow{\psi} X\rtimes A \\ \searrow \ \swarrow \\ A \end{array}$ es un morfismo en $(\underline{C},A)$, definimos $d_\psi = \xi\psi : A \longrightarrow X$, que es una derivación de A en X al serlo ξ .

Reciprocamente, si $d : A \longrightarrow X$ es una derivación, sea $\psi_d : A \longrightarrow X\rtimes A$ definido por $\psi_d(a) = d(a) + s(a)$; ψ_d es un morfismo en $\underline{C}$:

$$\psi_d(a+a') = d(a+a') + s(a+a') = d(a) + a\cdot d(a') + s(a) + s(a') =$$

$$= d(a) + s(a) + d(a') + s(a') = \psi_d(a) + \psi_d(a') .$$

$$\psi_d(a * a') = d(a * a') + s(a * a') = d(a) * a' + a * d(a') + s(a) * s(a') =$$

$$= (d(a) + s(a)) * (d(a') + s(a')) = \psi_d(a) * \psi_d(a') .$$

$$\psi_d(\omega(a)) = d(\omega(a)) + s(\omega(a)) = \omega(d(a) + s(a)) = \omega\psi_d(a) .$$

Facilmente se prueba que $d_{\psi_d} = d$ y $\psi_{d_\psi} = \psi$. Ademas $\psi_{d+d'}(a) = d(a) + s(a) - s(a) + d'(a) + s(a) = (\psi_d + \psi_{d'})(a)$; osea $\psi_{d+d'} = \psi_d + \psi_{d'}$.

Ahora, la propiedad universal del diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X\rtimes A \arrow[r, shift left, two heads] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\blacksquare"] & A \arrow[l, shift left, tail] \arrow[d] \\
X & X\rtimes R \arrow[l, tail] \arrow[r, shift left, two heads] & R \arrow[l, shift left, tail]
\end{tikzcd}$$

implica el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\begin{smallmatrix} A \\ \| \\ A \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} X \rtimes A \\ \downarrow \\ A \end{smallmatrix}\right) \cong \mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\begin{smallmatrix} A \\ \downarrow \\ R \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} X \rtimes R \\ \downarrow \\ R \end{smallmatrix}\right)$$

y concluimos que $\quad \mathrm{Der}(A,X) \cong \mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\begin{smallmatrix} A \\ \downarrow \\ R \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} X \rtimes R \\ \downarrow \\ R \end{smallmatrix}\right)$.

$$d \longmapsto \pi\,\psi_d$$

1.3. COHOMOLOGIA $H^n(A,X)_{(\pounds)}$. SUCESIONES EXACTAS .

Sea $\underline{C}$ una categoria de interes, (1.2.1). Siendo R objeto de $\underline{C}$ y X un R-módulo, tenemos el funtor de coeficientes

$$\mathrm{Der}(\ ,X) : (\underline{C},R)^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Ab}.$$

Definimos los funtores de cohomologia absoluta (relativa a conjuntos)

$$H^n(\ ,X) \;=\; H^n(\ ,\mathrm{Der}(\ ,X))_{\mathbb{G}_R} \qquad n \geq 0$$

y ,caso que se de la situación (1.2.10), los funtores de cohomologia relativa a $\pounds$

$$H^n(\ ,X)_{\pounds} \;=\; H^n(\ ,\mathrm{Der}(\ ,X))_{\mathbb{G}_{\pounds R}} \qquad n \geq 0 .$$

Para $A \longrightarrow R \in (\underline{C},R)$, denotaremos a $H^n(\begin{smallmatrix} A \\ \downarrow \\ R \end{smallmatrix},X)_{(\pounds)}$ por $H^n(A,X)_{(\pounds)}$.

Destaquemos que si $\phi : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de R-módulos, este induce una transformación natural $\phi_* : \mathrm{Der}(\ ,X) \longrightarrow \mathrm{Der}(\ ,Y)$; asi $H^n(A,X)_{(\pounds)}$ es funtorial tanto en A como X.

(1.3.1) PROPOSICION .

Si $X \rightarrowtail Y \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} Z$ es una sucesión exacta corta de R-módulos, con $\varepsilon \in \mathcal{E}\ (\mathcal{E}_{\pounds})$ (es decir escindente en la correspondiente categoria de olvido, tal como se vio en (1.2.12)), entonces existe una sucesión exacta larga natural

$$0 \longrightarrow Der(A,X) \longrightarrow Der(A,Y) \longrightarrow Der(A,Z) \longrightarrow H^1(A,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(A,Y)_{(\pounds)} -$$
$$\longrightarrow H^1(A,Z)_{(\pounds)} \longrightarrow H^2(A,X)_{(\pounds)} \longrightarrow \cdots$$

para $A \longrightarrow R \in (\underline{C},R)$.

Dem.- Como la sucesión de funtores

$$0 - Hom_{(\underline{C},R)}\left(\;,\; \begin{matrix} X \updownarrow R \\ \downarrow \\ R \end{matrix}\right) - Hom_{(\underline{C},R)}\left(\;,\; \begin{matrix} Y \updownarrow R \\ \downarrow \\ R \end{matrix}\right) - Hom_{(\underline{C},R)}\left(\;,\; \begin{matrix} Z \updownarrow R \\ \downarrow \\ R \end{matrix}\right) - 0$$

es $\mathbb{G}_{(\pounds)R}$-exacta, la proposición se sigue de (1.1.19), teniendo en cuenta que el funtor $Der(\;,X) = Hom_{(\underline{C},R)}\left(\;,\; \begin{matrix} X \updownarrow R \\ \downarrow \\ R \end{matrix}\right)$ es $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_R}$ ($\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{\pounds R}}$) - exacto a la derecha

(para esto, observemos que si $\sigma : A \twoheadrightarrow B$ es un epimorfismo conormal en $\underline{C}$ el diagrama $A \times_B A \rightrightarrows A \xrightarrow{\sigma} B$ es coigualador) y por tanto $H^0(A,X)_{(\pounds)} = Der(A,X)$, para cualquier R-módulo X .

(1.3.2) PROPOSICION .

Si $\begin{matrix} A \xrightarrow{\sigma} B \\ \searrow R \swarrow \end{matrix}$ es un epimorfismo en la clase $\mathcal{E}_{\mathbb{G}_R}$ ($\mathcal{E}_{\mathbb{G}_{\pounds R}}$) , osea con σ sobre (£-escindente), existe una sucesión exacta larga natural, para cada R-módulo X

$$0 \longrightarrow Der(B,X) \longrightarrow Der(A,X) \longrightarrow H^0(\sigma,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(B,X)_{(\pounds)} -$$
$$\longrightarrow H^1(A,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(\sigma,X)_{(\pounds)} \longrightarrow \cdots$$

Dem.- (1.1.12) .

(1.3.3) PROPOSICION .

Si $\begin{matrix} A \xrightarrow{\sigma} B \\ \searrow R \swarrow \end{matrix}$ es un epimorfismo sobre (£-escindente) y $L = Ker(\sigma)$ se tiene un isomorfismo natural, para cada R-módulo X

$$H^{o}(\sigma, X)_{(\mathcal{E})} = \mathrm{Hom}_{A}(L, X)$$

donde $\mathrm{Hom}_A(L,X)$ es el grupo de los morfismos de A-estructuras de L en X, siendo L A-estructura por conjugación y X via $A \longrightarrow R$.

Dem.- Por (1.1.18) tenemos que

$$H^{o}(\sigma, X)_{(\mathcal{E})} = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\begin{array}{c} A \times_B A \\ \downarrow \\ R \end{array}, \begin{array}{c} X \rtimes R \\ \downarrow \\ R \end{array} \right) \xrightarrow{d^*} \mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\begin{array}{c} A \times_B A \times_B A \\ \downarrow \\ R \end{array}, \begin{array}{c} X \rtimes R \\ \downarrow \\ R \end{array} \right) \right)$$

con $d^* = (\pi_0, \pi_1)^* - (\pi_0, \pi_2)^* + (\pi_1, \pi_2)^*$.

Entonces si $f \in H^{o}(\sigma, X)_{(\mathcal{E})}$, definimos $h_f : L \longrightarrow X$ por

$$h_f(l) = f(l, o)$$

Suponiendo que el R-módulo X es $X \rightarrowtail X R \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} R$ como hasta ahora, se tiene que $p\, f(l,o) = \sigma(l) = o$ de donde $f(l,o) \in X$. Claramente h_f es morfismo en $\underline{C}$ siendolo ademas de A-estructuras :

$h_f(a \cdot l) = f(a \cdot l, o) = f(a+l-a, o)$, pero como $f(a,a) - f(a,a) + f(a,a) = s\sigma(a)$, sera $f(a,a) = s\,\sigma(a)$ para cualquier a de A, entonces $-f(a+l, a) + f(a+l-a, o) =$ $= f(-a,-a) = -s\,\sigma(a)$ de donde $f(a+l-a, o) = f(a+l, a) - s\,\sigma(a)$, y analogamente se ve que $f(a+l, a) = s\,\sigma(a) + f(l,o)$; luego $f(a+l-a, o) = s\,\sigma(a) + f(l,o) - s\,\sigma(a)$. Concluimos asi que $h_f(a \cdot l) = a \cdot h_f(l)$.

$h_f(a * l) = f(a * l, o) = f(a,a) * f(l,o) = s\,\sigma(a) * h_f(l)$.

Reciprocamente, dado $h \in \mathrm{Hom}_A(L,X)$ definimos $f_h : A \times_B A \longrightarrow X \rtimes R$ por

$$f_h(a, a') = h(a - a') + s\,\sigma(a)$$

Es mera rutina comprobar que f_h es morfismo en $\underline{C}$, por ejemplo para cualquier $*$

$$f_h((a,a') * (a_1, a'_1)) = f_h(a * a_1, a' * a'_1) = h(a * a_1 - a' * a'_1) + s\,\sigma(a * a_1) =$$
$$= h(a * a_1 - a' * a_1 + a' * a_1 - a' * a'_1) + s\sigma(a * a_1) = h((a-a') * a_1 + a' * (a_1 - a'_1)) + s\sigma(a * a_1) =$$
$$= h(a-a') * s\,\sigma(a_1) + s\sigma(a') * h(a_1 - a'_1) + s\sigma(a * a_1) = (h(a-a') + s\sigma(a)) * (h(a_1 - a'_1) +$$
$$+ s\sigma(a_1)) = f_h(a,a') * f_h(a_1, a'_1) .$$

Ademas $f_h \in H^{o}(\sigma,X)_{(\pounds)}$ pues

$$d^{*}(f_h)(a_0,a_1,a_2) = f_h(a_0,a_1) - f_h(a_0,a_2) + f_h(a_1,a_2) =$$

$$= h(a_0-a_1) - h(a_0-a_2) + h(a_1-a_2) + s\sigma(a\ ) =$$

$$= s\sigma(a_0) = s\ \pi i\ (a_0,a_1,a_2)\ .$$

Claramente $h_{f+f'} = h_f + h_{f'}$. Y $f_{h_f}(a,a') = f(a-a',o) + s\sigma(a) = f(a,a')$, por tanto $f_{h_f} = f$ y es inmediato que $h_{f_h} = h$. Lo que acaba de demostrar el isomorfismo . La naturalidad es inmediata .

Notemos que tal como se vio en la demostración de (1.1.18) se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\begin{smallmatrix}B\\ \downarrow\\ R\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}X\rtimes R\\ \downarrow\\ R\end{smallmatrix}\right) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\begin{smallmatrix}A\\ \downarrow\\ R\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}X\rtimes R\\ \downarrow\\ R\end{smallmatrix}\right) \arrow[r, "\pi_0^*-\pi_1^*"] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\begin{smallmatrix}A\times_B A\\ \downarrow\\ R\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}X\rtimes R\\ \downarrow\\ R\end{smallmatrix}\right) \\
 & & & H^{o}(\sigma,X)_{(\pounds)} \arrow[u, tail]
\end{tikzcd}$$

y , por consiguiente, el morfismo ϕ sera $\phi(g)(l) = (\pi_0^*-\pi_1^*)(g)(l,o) = g(l) - g(o) = g(l)$; osea que $\phi(g) = g/L : L \longrightarrow X$.

(1.3.4) COROLARIO .

Si $\begin{smallmatrix}A & \xrightarrow{\sigma} & B\\ & \searrow\ \swarrow & \\ & R & \end{smallmatrix}$ es un morfismo en $(\underline{C},R)$ con σ un epimorfismo sobre ($\pounds$-escindente) , $L = \mathrm{Ker}(\sigma)$ y $K = \mathrm{Ker}(A \longrightarrow R)$. Existe una equivalencia natural

$$H^{o}(\sigma,X)_{(\pounds)} = \mathrm{Hom}_{B\text{-Mod}}\left(\frac{L}{[L,K]}, X\right)$$

para cualquier R-módulo X .

Notemos que $\frac{L}{[L,K]}$ es A-módulo por (1.2.17) y en consecuencia B-módulo por (1.2.15).

Dem.- Sea $q: L \twoheadrightarrow \frac{L}{[L,K]}$ la proyección canonica. Es inmediato ver que si $\psi : \frac{L}{[L,K]} \longrightarrow X$ es un morfismo de B-módulos , entonces $\psi q : L \longrightarrow X$ es morfismo de A-estructuras; podemos asi definir la aplicación

$$\mathrm{Hom}_B\left(\frac{L}{[L,K]}, X\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L,X)$$

tal que $\psi \longmapsto \psi q$. Esta es claramente un monomorfismo de grupos abelianos y ademas es sobre, en efecto si $\phi : L \longrightarrow X$ es un morfismo de A-estructuras, entonces

$$\phi(k+l-k-l) = \phi(k+l-k) - \phi(l) = k \cdot \phi(l) - \phi(l) = \sigma(k) \cdot \phi(l) - \phi(l) = \phi(l) - \phi(l) = 0$$

$$\phi(k * l) = k * \phi(l) = \sigma(k) * \phi(l) = 0 * \phi(l) = 0$$

por tanto ϕ se factoriza a traves de q por un morfismo que evidentemente sera de B-módulos .

(1.3.5) COROLARIO . (Sucesión de 5-terminos) .

Dado $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ & \searrow \; R \; \swarrow & \end{array}$ en $(\underline{C},R)$, con σ sobre ($\mathcal{E}$-escindente) y siendo $L = \mathrm{Ker}(\sigma)$ y $K = \mathrm{Ker}(A \longrightarrow R)$, existe una sucesión exacta natural

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(B,X) \longrightarrow \mathrm{Der}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B\left(\frac{L}{[L,K]}, X\right) \longrightarrow H^1(B,X)_{(\mathcal{E})} \longrightarrow H^1(A,X)_{(\mathcal{E})}$$

para cada R-módulo X.

Dem.- Esta es parte de la sucesión larga (1.3.2) , teniendo en cuenta el corolario (1.3.4).

La anterior sucesión de cinco terminos nos va a parmitir mostrar como el grupo de cohomologia $H^1(A,X)$ ($H^1(A,X)_{\mathcal{E}}$) se puede interpretar como un grupo de extensiones. J. Beck en [21] prueba, en un contesto mas general, que este grupo uno de cohomologia es isomorfo al grupo de los " objetos pricipales homogeneos " (K(A,1)-torsores en la terminologia de Duskin , que tambien prueba dicho resultado en [37]) y , se puede demostrar que estos corresponden a las " Extensiones Singulares" que aqui tratamos ,siendo esta demostración bastante laboriosa. La demostracion directa de que el primer grupo de cohomogia clasifica extensiones singulares, que aqui se da, es corta y conceptualmente simple.

1.4. $H^1(A,X)_{(\pounds)}$ y EXTENSIONES SINGULARES .

Sea A objeto de $\underline{C}$ y X un A-módulo; si $X \rightarrowtail E \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$ es una sucesión exacta corta en $\underline{C}$, podemos considerar , en conjuntos, una aplicación $s : A \longrightarrow E$ tal que $\sigma s = I_A$, y definir acciones de A en X por

i) $a \cdot x = s(a) + x - s(a)$

ii) $a * x = s(a) * x$, para cada $*$.

Es facil ver que estas acciones no dependen de la escisión elegida s .

(1.4.1) DEFINICION .

Una " Extensión Singular" de A por el A-módulo X es una sucesión exacta corta

$$X \rightarrowtail E \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A \qquad (\sigma \text{ sobre})$$

tal que las acciones de A en X inducidas por esta, como anteriormente, coincidan con las dadas segun (1.2.3); o dicho de otra forma , que la estructura en X de A-módulo de acuerdo con (1.2.15) y (1.2.14) sea la estructura dada.

En el caso que el funtor de olvido se factorice por $\pounds$, (1.2.10), llamaremos $\pounds$-extensión singular a una extensión singular $X \rightarrowtail E \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$ tal que el epimorfismo σ sea $\pounds$-escindente.

(1.4.2) Dos ($\pounds$)extensiones singulares de A por X , $X \rightarrowtail E_i \twoheadrightarrow A$, i = 1,2 son equivalentes si existe un diagrama en $\underline{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, tail] & E_2 \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}$$

(h sera un isomorfismo).

Denotaremos $[\underline{E}]$ a la clase de la extensión $\underline{E}$, y $E(A,X)$ ($E(A,X)_{(\pounds)}$) al conjunto cociente de clases de extensiones singulares de A por X .

(1.4.3) PROPOSICION .

Sea $[\underline{E} : X \overset{i}{\rightarrowtail} E \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A] \in E(A,X)_{(£)}$; si $f : A' \longrightarrow A$ es un morfismo en $\underline{C}$ y $\phi : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de A-módulos, existen (£)extensiones, únicas salvo equivalencia, $X \rightarrowtail E^f \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A'$ e $Y \rightarrowtail E \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$, de A' por X y de A por Y respectivamente, tales que se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \underline{E}^f : X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E^f \arrow[r, two heads, "\sigma'"] \arrow[d] & A' \arrow[d, "f"] \\ \underline{E} : X \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{E} : X \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"] & E \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] \\ \underline{E}_\phi : Y \arrow[r, tail] & E_\phi \arrow[r, two heads, "\bar{\sigma}"] & A \end{tikzcd}$$

Dem.- Para el primer caso, notemos que cualquier diagrama de ese tipo en $\underline{C}$ es cartesiano (el cuadrado de la derecha) y por consiguiente la unica extensión posible es aquella en que $E^f = E \times_A A'$. Para esta, una escisión en conjuntos de σ' es $s' = (sf, I_{A'})$ si s lo es de σ ; entonces se tiene

i) $a' \cdot x = (sfa', a') + (x, o) - (sfa', a') = (sfa' + x - sfa', o) = f(a') \cdot x$

ii) $a' * x = (sfa', a') * (x, o) = (sfa' * x, o) = f(a') * x$, para todo $*$.

que son precisamente las acciones de A' sobre X (X es A'-módulo via f) .

Es evidente que si $\underline{E}$ es £-escindente $\underline{E}^f$ tambien lo es .

Para el segundo caso, veamos su existencia. Y sera un E-módulo via σ ;

sea $q : Y \rtimes E \twoheadrightarrow E_\phi$ el morfismo coigualador de $\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & E \arrow[dr, tail] & \\ X \arrow[ur, tail, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & & Y \rtimes E \\ & Y \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$, notemos que

al ser ϕ morfismo de A-módulos el conjunto $\{\phi x - \bar{s} i x \ , \ x \in X\}$ es un ideal de $Y \rtimes E$ y $E_\phi = \dfrac{Y \rtimes E}{\{\phi x - \bar{s} i x\}}$.

Se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, tail] \arrow[dd, "\phi"'] & & E \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[dl, "\bar{s}"'] \arrow[dd] & A \arrow[dd, equal] \\ & Y \rtimes E \arrow[ur, "\bar{p}"] \arrow[dr, "q"'] & & \\ Y \arrow[ur, tail] \arrow[rr] & & E_\phi \arrow[r, "\bar{\sigma}"] & A \end{tikzcd}$$

donde $E \longrightarrow E_\phi = E \rightarrowtail Y \rtimes E \twoheadrightarrow E_\phi$; y $Y \longrightarrow E_\phi = Y \rightarrowtail Y \rtimes E \twoheadrightarrow E$;

$\bar{\sigma}$ es el morfismo inducido por $\sigma \bar{p} : Y \rtimes E \longrightarrow A$.

No presenta dificultad comprobar que $\bar{\sigma}$ es sobre (£-escindente) y que la sucesión $Y \rightarrowtail E_\phi \twoheadrightarrow A$ es exacta corta.

Ademas siendo $g = q\,\bar{s}$, es inmediato que $g\,s$ es una escisión de $\bar{\sigma}$, y

i) $gs(a) + y - gs(a) = q(\bar{s}\,s(a) + y - \bar{s}\,s(a)) = q(s(a)\cdot y) = q(a\cdot y) = a\cdot y$

ii) $gs(a) * y = q(\bar{s}\,s(a) * y) = q(a * y) = a * y$, para cada $*$.

Con lo que $Y \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ es una (£)extensión singular de A por Y.

Para su unicidad, si suponemos otra $Y \rightarrowtail \bar{E} \xrightarrow{\bar{\sigma}'} A$ con

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"'] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g'"] & A \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, tail] & \bar{E} \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

conmutativo, definimos $h\colon Y \rtimes E \longrightarrow \bar{E}$ por $h(y + \bar{s}(e)) = y + g'(e)$; es mero cálculo comprobar que h es morfismo en $\underline{C}$, por ejemplo, para cualquier $*$

$$\begin{aligned}
h((y+\bar{s}e)*(y'+\bar{s}e')) &= h(y*\bar{s}e' + \bar{s}e*y' + \bar{s}e*\bar{s}e') = \\
&= y*\bar{s}e' + \bar{s}e*y' + g'e*g'e' = \\
&= y*\sigma e' + \sigma e*y' + g'e*g'e' = \\
&= y*g'e' + g'e*y' + g'e*g'e' = \\
&= (y+g'e)*(y'+g'e') = \\
&= h(y+\bar{s}e)*h(y+\bar{s}e') .
\end{aligned}$$

Y como $hs(x) = g'(x) = \phi(x)$ para cualquier $x\ X$, se induce un morfismo $h'\colon E_\phi \longrightarrow \bar{E}$ con $h'\,q = h$; entonces $\bar{\sigma}'\,h'\,q = \bar{\sigma}\,q$ de donde $\bar{\sigma}'\,h' = \bar{\sigma}$. El diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E_\phi \arrow[r, two heads] \arrow[d, "h'"] & A \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, tail] & \bar{E} \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta y la extensión $Y \rightarrowtail E_\phi \twoheadrightarrow A$ es equivalente a $Y \rightarrowtail \bar{E} \twoheadrightarrow A$.

(1.4.4) (Suma de Baer de extensiones singulares)

Sean $[\underline{E_i} : X \rightarrowtail E_i \xrightarrow{\sigma_i} A]$, i = 1,2, dos clases de (£)extensiones singulares de A por el A-módulo X; considerando el producto fibrado $E_1 x_A E_2$ se tiene la sucesión exacta corta $XxX \rightarrowtail E_1 x_A E_2 \xrightarrow{\sigma} A$ con $\sigma = \sigma_i \pi_i$. siendo π_i las correspondientes proyecciones. El conjunto $\{(x,-x), x \in X\}$ facilmente se ve que es un ideal de $E_1 x_A E_2$ y denotaremos $E_1 x_A^X E_2$ al correspondiente objeto cociente.

Se tiene , entonces, el diagrama de filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, "{(1,-1)}"'] & X \arrow[d] & \\
XxX \arrow[r, tail] \arrow[d, "+"'] & E_1 x_A E_2 \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[d, "c"] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & E_1 x_A^X E_2 \arrow[r, two heads, "\bar{\sigma}"] & A
\end{tikzcd}$$

donde + : $XxX \longrightarrow X$ es el morfismo $+(x,x') = x+x'$. (es morfismo al ser X singular).

La sucesión $X \rightarrowtail E_1 x_A^X E_2 \twoheadrightarrow A$ es una extensión singular de A por X, a la que denotamos $E_1 + E_2$; y definimos $[\underline{E_1}] + [\underline{E_2}] = [E_1 + E_2]$. Esta es una operación de adición en $E(A,X)_{(£)}$ bien definida, es claramente asociativa y conmutativa y es inmediato de comprobación que la clase $0 = [X \rightarrowtail X \rtimes A \rightleftarrows A]$ es un cero para esta adición .

Asi, $E(A,X)_{(£)}$ es un monoide abeliano con elemento neutro 0.

(1.4.5) Es facil probar que, para X un A-módulo y $f : A' \longrightarrow A$ un morfismo en $\underline{C}$, que la aplicación inducida segun (1.4.3) $f^* : E(A,X)_{(£)} \longrightarrow E(A',X)_{(£)}$, tal que $f^*([\underline{E}]) = [\underline{E}^f]$, es morfismo de monoides abelianos con cero; y analogamente, que si $\phi : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de A-módulos la aplicación inducida por (1.4.3) $\phi_* : E(A,X)_{(£)} \longrightarrow E(A;Y)_{(£)}$, tal que $\phi_*([\underline{E}]) = [\underline{E_\phi}]$, es tambien morfismo de monoides abelianos con cero.

Entonces si X es un R-módulo , se tiene un funtor

$$E(\ ,X)_{(\pounds)} : (\underline{C},R)^{o} \longrightarrow \text{Monoides abelianos}$$

tal que a cada $A \longrightarrow R$ $(\underline{C},R)$ le asocia el monoide $E(A,X)_{(\pounds)}$, siendo X A-mo dulo via $A \longrightarrow R$, y a un morfismo $\begin{tikzcd}[column sep=small] A' \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & A \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$ en $(\underline{C},R)$ el morfismo h^{*} , tal como se dijo anteriormente.

Ademas, un morfismo de R-módulos $\phi: X \longrightarrow Y$ induce una transformación natural $\phi_{*}: E(\ ,X)_{(\pounds)} \longrightarrow E(\ ,Y)_{(\pounds)}$.

(1.4.6) TEOREMA .

Para cada R-módulo X y $A \longrightarrow R$ $(\underline{C},R)$, $E(A,X)_{(\pounds)}$ es un grupo abeliano y existe una equivalencia natural

$$\Delta : E(A,X)_{(\pounds)} \cong H^{1}(A,X)_{(\pounds)} .$$

Dem.- Sea $[\underline{E} : X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A] \in E(A,X)_{(\pounds)}$, por (1.3.2) y (1.3.3) se tiene la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{E}(X,X) \xrightarrow{\psi} H^{1}(A,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^{1}(E,X)_{(\pounds)}$$

definimos $\Delta[\underline{E}] = \psi(I_{X})$. La naturalidad de la sucesión implica que $\Delta[\underline{E}]$ no depende del representante tomado en la clase.

Si $v \in H^{1}(A,X)_{(\pounds)}$, consideremos $P \overset{q}{\twoheadrightarrow} A$, una presentación $\mathfrak{G}(\pounds)$-pro yectiva de A, y sea $L = \mathrm{Ker}(q)$; tendremos la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{P}(L,X) \xrightarrow{\psi'} H^{1}(A,X)_{(\pounds)} \longrightarrow 0$$

y por tanto existe $f \in \mathrm{Hom}_{P}(L,X)$ tal que $\psi'(f) = v$. Consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, tail] \arrow[dd, "f"'] & & P \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, tail, shift left] \arrow[dd] & & A \arrow[dd, equal] \\
& X \rtimes P \arrow[ur, two heads, shift left] \arrow[dr, two heads] & & & \\
X \arrow[ur, tail] \arrow[rr, tail] & & E \arrow[rr, two heads] & & A
\end{tikzcd}$$

cuya construcción es analoga a la realizada en la demostración de (1.4.3), Osea $X \rtimes P \twoheadrightarrow E$ es el coiguaiador de $\begin{tikzcd}[row sep=small] & P \arrow[dr] & \\ L \arrow[ur] \arrow[dr, "f"'] & & X \rtimes P \\ & X \arrow[ur] & \end{tikzcd}$, los morfismos de la fila inferior son los correspondientes inducidos y, como alli, $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ es una extensión singular de A por X; y puesto que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_E(X,X) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f^*"'] & H^1(A,X)_{(\pounds)} \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}_P(L,X) \arrow[r, "\psi'"] & H^1(A,X)_{(\pounds)} \end{tikzcd}$$

es conmutativo, se sigue que $\psi(I_X) = \psi' f(I_X) = \psi'(f) = v$. Con lo que $\Delta[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A] = v$ y Δ es sobre.

Si $[\underline{E}_i : X \rightarrowtail E_i \xrightarrow{\sigma_i} A]$, $i = 1,2$, son dos clases de $(\pounds)$extensiones de A por X, se tienen diagramas

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d, "f_i"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "g_i"] & A \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r] & E_i \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

que inducen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{E_i}(X,X) \arrow[r, "\psi i"] \arrow[d, "f_i^*"'] & H^1(A,X)_{(\pounds)} \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}_P(L,X) \arrow[r, "\psi'"] & H^1(A,X)_{(\pounds)} \end{tikzcd}$$

con lo que $\Delta[\underline{E}_i] = \psi'(f_i)$.

Sea $[\underline{E}_1] + [\underline{E}_2] = [X \rightarrowtail E_1 \times_A^X E_2 \xrightarrow{\bar{\sigma}} A]$, como en (1.4.4), los morfismos g_i inducen el morfismo $(g_1, g_2) : P \longrightarrow E_1 \times_A E_2$ y consideremos el morfismo $g = c\,(g_1, g_2) : P \longrightarrow E_1 \times_A^X E_2$, es inmediato que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, equal] \\ E_1 \times_A^X E_2 \arrow[r, "\bar{\sigma}"] & A \end{tikzcd}$$

conmuta y sea $f : L \longrightarrow X$ el morfismo restrcción de g; por la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{E_1 \times_A E_2}(X,X) & \longrightarrow & H^1(A,X)_{(\pounds)} \\ \Big\downarrow f^* & & \Big\| \\ \mathrm{Hom}_P(L,X) & \xrightarrow{\psi} & H^1(A,X)_{(\pounds)} \end{array}$$

se tiene que $\Delta([E_1]+[E_2]) = \psi'(f)$.

Pero $f(l) = c(f_1(l), f_2(l)) = f_1(l) + f_2(l)$, osea $f = f_1 + f_2$ y

$\Delta([\underline{E_1}] + [\underline{E_2}]) = \psi'(f) = \psi'(f_1+f_2) = \psi'(f_1) + \psi'(f_2) = \Delta[\underline{E_1}] + \Delta[\underline{E_2}]$. Con lo que Δ es morfismo de monoides.

Es inmediato que $\Delta(0) = 0$.

Y, si suponenemos que $\Delta[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A] = 0$, considerando la sucesión exacta

$$\mathrm{Der}(E,X) = \mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ A \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} X \natural A \\ \downarrow \\ A \end{smallmatrix}\right) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}_E(X,X) \xrightarrow{\psi} H^1(A,X)_{(\pounds)}$$

como $\psi(I_X) = 0$ existira un morfismo en $(\underline{C},A)$ $\begin{smallmatrix} E & \xrightarrow{h} & X\natural A \\ & \searrow \swarrow & \\ & A & \end{smallmatrix}$ con $\phi(h) = I_X$, osea , segun se vio en (1.3.3), tal que $h/X = I_X$; se tiene entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \rightarrowtail & E & \twoheadrightarrow & A \\ \| & & \Big\downarrow h & & \| \\ X & \rightarrowtail & X\natural A & \twoheadrightarrow & A \end{array}$$

y $[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A] = 0$.

Concluimos entonces que Δ es un isomorfismo de monoides con cero , y , a posteriori $E(A,X)_{(\pounds)}$ es un grupo .

1.5. INTERPRETACION DE $H^1(\sigma,X)_{(\mathcal{E})}$ COMO EXTENSIONES .

La demostración que ofrecemos de como el primer grupo de cohomologia de un epimorfismo con coeficientes en un módulo, Teorema (1.5.26), requiere el estudio de una conveniente teoria de cohomologia en una categoria auxiliar que introducimos a continuación; a ello estan dedicados los apartados desde (1.5.1) hasta (1.5.18).

(1.5.1) Para R objeto de $\underline{C}$ (que como hasta ahora, denota una categoria de interes) se define la categoria $\underline{C}_R^2$ como aquella que tiene por objetos los pares ($A \longrightarrow R, L$) con $A \longrightarrow R$ un morfismo en $\underline{C}$ y L una A-estructura, un morfismo en $\underline{C}_R^2$ es un par $(f,\phi) : (A \longrightarrow R, L) \longrightarrow (A' \longrightarrow R, L')$ donde
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & A' \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$$
es un morfismo en $(\underline{C},R)$ y $\phi : L \longrightarrow L'$ es un morfismo de A-estructuras (donde L' es A-estructura via f), osea tal que

i) $\phi(a \cdot l) = f(a) \cdot \phi(l)$

ii) $\phi(a * l) = f(a) * \phi(l)$, para cada $*$.

Se tiene el funtor de olvido $\hat{U} : \underline{C}_R^2 \longrightarrow (\mathrm{Set}_*, U(R)) \times \mathrm{Set}_*$ definido por

$$\hat{U}(A \longrightarrow R, L) = (U(A) \longrightarrow U(R), U(L)) .$$

Definimos un funtor $\hat{F} : (\mathrm{Set}_*, U(R)) \times \mathrm{Set}_* \longrightarrow \underline{C}_R^2$ por

$$\hat{F}(S \longrightarrow U(R), S') = (F(S) \longrightarrow R, T(S'))$$

donde $T(S') = \mathrm{Ker}\,(F(S+S') \xrightarrow{q} F(S))$, siendo q el unico morfismo tal que $q(s) = s$ y $q(s') = 0$, para cada s S y s' S' ; es decir T(S') es la F(S)-estructura $T(S') \rightarrowtail F(S+S') \underset{\varepsilon}{\overset{q}{\rightleftarrows}} F(S)$ donde la escisión $\varepsilon : F(S) \longrightarrow F(S+S')$ es el morfismo tal que $\varepsilon(s) = s$.

Dado un morfismo en $(\mathrm{Set}_*, U(R)) \times \mathrm{Set}_*$, $(\alpha,\beta) : (S \longrightarrow U(R), S') \longrightarrow (S_1 \longrightarrow U(R), S_1')$, entonces $\hat{F}(\alpha,\beta) = (F(\alpha), T(\beta))$ estando determinado $T(\beta)$ por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(S') \arrow[r, tail] \arrow[d, "T(\beta)"'] & F(S+S') \arrow[r, shift left, two heads] \arrow[d, "F(\alpha+\beta)"] & F(S) \arrow[l, shift left] \arrow[d, "F(\alpha)"] \\
T(S'_1) \arrow[r, tail] & F(S_1+S'_1) \arrow[r, shift left, two heads] & F(S_1) \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

(1.5.2) El funtor $\hat{F}$ es adjunto a la izquierda al funtor $\hat{U}$.

En efecto; sea $(S \longrightarrow U(R), S') \in (Set_*, U(R)) \times Set$ y $(A \longrightarrow R, L)$ objeto de $\underline{C}^2_R$, supongamos $(\alpha,\beta) : (S \longrightarrow U(R), S') \longrightarrow (U(A) \longrightarrow U(R), U(L))$ un morfismo en $(Set_*, U(R)) \times Set_*$. Por ser $F_R \dashv U_R$ adjuntos, (1.2.11), existe un unico morfismo $\begin{tikzcd}[row sep=small] F(S) \arrow[r, "h"] \arrow[dr] & A \arrow[d] \\ & R \end{tikzcd}$ inducido por α; consideremos a L como $F(S)$-estructura via h, y definimos

$$\begin{tikzcd}
T(S') \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"'] & F(S+S') \arrow[r, shift left, "q", two heads] \arrow[d, "\bar{\phi}"'] & F(S) \arrow[l, shift left, "\varepsilon"] \arrow[d, equal] \\
L \arrow[r, tail] & L \rtimes F(S) \arrow[r, shift left, "p", two heads] & F(S) \arrow[l, shift left, "e"]
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{\phi}$ es el unico morfismo en $\underline{C}$ tal que $\bar{\phi}(s') = \beta(s')$ y $\bar{\phi}(s) = e(s)$ para cada s de S y s' de S'; como $p\,\bar{\phi}(s') = p\beta(s') = o$ y $p\,\bar{\phi}(s) = p\,e(s) = s$ deducimos que $p\,\bar{\phi} = q$; analogamente se ve que $\bar{\phi}\,\varepsilon = e$. Asi ϕ es morfismo de $F(S)$-estructuras, siendo tal que $\phi(s') = \beta(s')$ para todo s' de S'.

Ademas ϕ es el unico con esta propiedad : Si suponemos ϕ' es otro, el correspondiente $\bar{\phi}'$ verificara $\bar{\phi}'(s') = \beta(s')$ y $\bar{\phi}'(s) = e(s)$, por tanto sera $\bar{\phi}' = \bar{\phi}$ y de aqui $\phi = \phi'$.

Concluimos que existe un unico $(h,\phi) : \hat{F}(S \longrightarrow U(R), S') \longrightarrow (A \longrightarrow R, L)$ tal que $h/S = \alpha$ y $\phi/S' = \beta$. Esta propiedad universal prueba la adjunción anunciada.

Observemos que la counidad de la adjunción es

$$\hat{\delta} = (\delta, \gamma) : \hat{F}\hat{U}(A \longrightarrow R, L) \longrightarrow (A \longrightarrow R, L)$$

siendo $\bar{\gamma} : F(U(A) + U(L)) \longrightarrow L \rtimes A$ el morfismo tal que $\bar{\gamma}(a) = a$ y $\bar{\gamma}(l) = l$, para cada a de A y l de L.

Y, en particular, si L es un ideal de A y A-estructura por conjugación, sera $\hat{\delta} = (\delta, h/TU(L))$ donde $h : F(U(A) + U(L)) \longrightarrow A$ es el morfismo tal que $h(a) = a$ y $h(l) = l$, en virtud de la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
TU(L) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[ddd, bend right, "h/TU(L)"'] & F(U(A)+U(L)) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\bar{\gamma}"] \arrow[ddd, bend left, "h"] & FU(A) \arrow[d, equal] \\
L \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & L \rtimes FU(A) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & FU(A) \arrow[d, "\delta"] \\
L \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & L \rtimes A \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
L \arrow[r, tail] & A \arrow[r, two heads] & A/L
\end{tikzcd}$$

(1.5.3) La categoria $\underline{C}_R^2$ tiene coigualadores.

En efecto, sean (f,ϕ) y (g,ψ) morfismos en $\underline{C}_R^2$ de $(A \twoheadrightarrow R, L)$ en $(A' \twoheadrightarrow R, L')$; consideremos

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, tail] \arrow[d, shift right, "\phi"'] \arrow[d, shift left, "\psi"] & L \rtimes A \arrow[r, shift left, two heads, "p"] \arrow[d, shift right, "\bar{\Phi}"'] \arrow[d, shift left, "\bar{\Psi}"] & A \arrow[l, shift left, tail, "s"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \\
L' \arrow[r, tail] \arrow[d, "\xi"] & L' \rtimes A' \arrow[r, shift left, two heads, "p'"] \arrow[d, two heads, "c"] & A' \arrow[l, shift left, tail, "s'"] \arrow[d, two heads, "c'"] \\
\bar{L} \arrow[r, tail] & \bar{E} \arrow[r, shift left, two heads, "\bar{p}"] & \bar{A} \arrow[l, shift left, tail, "\bar{s}"]
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{\Phi}(l+sa) = \phi(l) + s'f(a)$ y $\bar{\Psi}(l+sa) = \psi(l) + s'g(a)$ que son morfismos en $\underline{C}$ al ser ϕ y ψ morfismos de A-estructuras, $c = \mathrm{Coig}(\bar{\Phi}, \bar{\Psi})$ y $c' = \mathrm{Coig}(f,g)$, puesto que $c'\,p'\,\bar{\Phi} = c'\,p'\,\bar{\Psi}$ se induce $\bar{p}$ talque $\bar{p}\,c = c'\,p'$, analogamente se induce $\bar{s}$ con $\bar{s}\,c' = c\,s'$ siendo inmediato que $\bar{p}\,\bar{s} = I_{\bar{A}}$, $\bar{L}$ es el nucleo de $\bar{p}$ y $\xi = c/L'$.

Puesto que el cuadrado $\begin{tikzcd} L' \rtimes A' \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & A' \arrow[d, two heads] \\ \bar{E} \arrow[r, two heads] & \bar{A} \end{tikzcd}$ es cocartesiano ξ es un epimorfismo sobre. $\bar{L}$ es $\bar{A}$-estructura con $\bar{L} \rtimes \bar{A} = \bar{E}$ y ξ es morfismo de A'-estructuras, donde $\bar{L}$ es A'-estructura via c'.

Es ya facil comprobar que el diagrama

$$(A \longrightarrow R, L) \underset{(g,\psi)}{\overset{(f,\phi)}{\rightrightarrows}} (A' \longrightarrow R, L') \xrightarrow{(c',\xi)} (\bar{A} \longrightarrow R, \bar{L})$$

es coigualador en $\underline{C}^2_R$.

(1.5.4) La caregoria $\underline{C}^2_R$ tiene cuadrados cartesianos.

En efecto, sean $(f,\phi) : (A' \longrightarrow R, L') \longrightarrow (A \longrightarrow R, L)$ y $(g,\psi) : (A'' \longrightarrow R, L'') \longrightarrow (A \longrightarrow R, L)$ morfismos en $\underline{C}^2_R$. Considerando

$$\begin{tikzcd}
L' \times_L L'' \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & L' \rtimes A' \times_{L \rtimes A} L'' \rtimes A'' \arrow[rr, shift left] \arrow[dr] \arrow[dd] & & A' \times_A A'' \arrow[ll, shift left] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
 & L'' \arrow[rr] \arrow[dd, "\psi"] & & L'' \rtimes A'' \arrow[rr, shift left, "p''"] \arrow[dd, "\bar{\psi}"] & & A'' \arrow[ll, shift left, "s''"] \arrow[dd, "g"] \\
L' \arrow[rr] \arrow[dr, "\phi"'] & & L' \rtimes A' \arrow[rr, shift left, "p'"] \arrow[dr, "\bar{\phi}"] & & A' \arrow[ll, shift left, "s'"] \arrow[dr, "f"] & \\
 & L \arrow[rr] & & L \rtimes A \arrow[rr, shift left, "p"] & & A \arrow[ll, shift left, "s"]
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{\phi}(l'+s'a') = \phi(l') + sf(a')$ y $\bar{\psi}(l''+s''a'') = \psi(l'')+sg(a'')$, se tiene que $L' \times_L L''$ es una $A' \times_A A''$-estructura y es facil ver que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
(A' \times_A A'' \longrightarrow R, L' \times_L L'') \arrow[r] \arrow[d] & (A'' \longrightarrow R, L'') \arrow[d] \\
(A' \longrightarrow R, L') \arrow[r] & (A \longrightarrow R, L)
\end{tikzcd}$$

es cartesiano en $\underline{C}^2_R$.

(1.5.5) Denotaremos $\hat{\mathbb{G}} = (\hat{G}, \hat{\delta}, \hat{\varepsilon})$ al cotriple en $\underline{C}^2_R$ inducido por la adjunción $\hat{F} \dashv \hat{U}$; (1.5.2).

Si $\mathcal{E}_{\hat{\mathbb{G}}}$ es la clase de epimorfismos en $\underline{C}^2_R$ asociada a los objetos $\hat{\mathbb{G}}$-proyectivos (o de epimorfismos $(Set_*, U(R)) \times Set_*$-escindentes, segun (1.1.4)), es claro que $(p,\phi) \in \mathcal{E}_{\hat{\mathbb{G}}}$ si y solo si p y ϕ son sobres.

(1.5.6) Si se da la situación (1.2.10), osea que U se factorice por la categoria abeliana $\pounds$, se tiene la factorización

$$\begin{tikzcd}
(Set_*, U(R)) \times Set_* \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\hat{F}"'] \\
(\pounds, U_\pounds(R)) \times \pounds \arrow[u] \arrow[d, shift right, "\hat{F}_\pounds"'] \\
\underline{C}^2_R \arrow[u, shift right, "\hat{U}_\pounds"'] \arrow[uu, bend right=60, "\hat{U}"']
\end{tikzcd}$$

donde $\hat{U}_\pounds(A \to R, L) = (U_\pounds(A) \to U_\pounds(R), U_\pounds(L))$, y

$\hat{F}_\pounds(M \to U_\pounds(R), M') = (F_\pounds(M) \to R, T_\pounds(M'))$, donde $T_\pounds(M')$ es la $F_\pounds(M)$-estructura

$$T_\pounds(M') \rightarrowtail F_\pounds(M + M') \underset{\varepsilon}{\overset{q}{\rightleftarrows}} F_\pounds(M)$$

siendo q el morfismo tal que $q(m) = m$ y $q(m') = 0$ para todo m de M y m' de M', y ε tal que $\varepsilon(m) = m$ para todo m de M.

Si L es una $F_\pounds(M)$-estructura y $f : M' \to U_\pounds(L)$ es un morfismo en $\pounds$, considerando

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, shift left, tail] \arrow[d, "f"'] & M + M' \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, two heads] \arrow[d, dashed, "g"] & M \arrow[l, shift left, tail] \arrow[d, "\eta_\pounds"] \\
U_\pounds(L) \arrow[r, shift left, tail] & U_\pounds(L \rtimes F_\pounds(M)) \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, two heads] & U_\pounds F_\pounds(M) \arrow[l, shift left, tail]
\end{tikzcd}$$

donde $\eta_\pounds$ es la unidad de la adjunción $F_\pounds \dashv U_\pounds$ y g el determinado por f y $\eta_\pounds$ por la propiedad universal del coproducto ; y utilizando el isomorfismo de adjunción se tiene el diagrama conmutativo en $\underline{C}$

$$\begin{array}{ccccc}
T_{\mathcal{L}}(M') & \rightarrowtail & F_{\mathcal{L}}(M+M') & \rightleftarrows & F_{\mathcal{L}}(M) \\
\gamma \downarrow & & \bar{\gamma} \downarrow & & \| \\
L & \rightarrowtail & L\ F_{\mathcal{L}}(M) & \rightleftarrows & F_{\mathcal{L}}(M)
\end{array}$$

y $\gamma : T_{\mathcal{L}}(M') \longrightarrow L$ es un morfismo de $F_{\mathcal{L}}(M)$-estructuras, unico determinado por f.

Es facil deducir que los $\hat{F}_{\mathcal{L}}$ es adjunto a la izquierda al funtor $\hat{U}_{\mathcal{L}}$. (vease (1.5.2)).

Notaremos $\mathcal{E}_{\hat{\mathbb{G}}_{\mathcal{L}}}$ al correspondiente cotriple en $\underline{C}^2_R$. Claramente un epimorfismo (p,ϕ) es $(\mathcal{L}, U_{\mathcal{L}}(R)) \times \mathcal{L}$-escindente si y solo si p y ϕ son $\mathcal{L}$-escindentes.

(1.5.7) PROPOSICION .

Si X es un R-módulo , denotando $(R = R,X) = (R,X)$, el funtor

$$\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X)) : \underline{C}^2_R \longrightarrow \mathrm{Set}$$

se factoriza por la categoria de grupos abelianos; este funtor es $\mathcal{E}_{\hat{\mathbb{G}}(\mathcal{L})}$-exacto a la derecha.

Dem.- Si $(A \longrightarrow R,L)$ es un objeto de $\underline{C}^2_R$, se tiene que

$$\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}((A \longrightarrow R,L),(R,X)) = \mathrm{Hom}_A(L,X)$$

que es claramente un grupo abeliano . Si $(f,\phi) : (A \longrightarrow R,L) \longrightarrow (A' \longrightarrow R,L')$ es un morfismo, el correspondiente inducido $\phi^* : \mathrm{Hom}_{A'}(L',X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L,X)$ es claramente morfismo de grupos abelianos, y el funtor $\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))$ se factoriza por grupos abelianos.

Ademas, si $(p,\phi) : (A \longrightarrow R,L) \longrightarrow (A' \longrightarrow R,L') \in \mathcal{E}_{\hat{\mathbb{G}}(\mathcal{L})}$ es inmediato ver que la sucesión

$$\mathrm{Hom}_{A'}(L',X) \overset{\phi^*}{\rightarrowtail} \mathrm{Hom}_A(L,X) \xrightarrow{\pi_0^* - \pi_1^*} \mathrm{Hom}_{A \times_{A'} A}(L \times_{L'} L,X)$$

es exacta, siendo por tanto el funtor $\mathcal{E}_{\hat{\mathbb{G}}(\mathcal{L})}$-exacto a la derecha.

(1.5.8) Cohomologia en $\underline{C}^2_R$.

Para cada R-módulo X, tenemos el funtor de coeficientes

$$\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X)) : \underline{C}^2_R \longrightarrow \mathrm{Ab}.$$

Definimos los funtores de cohomologia absoluta (relativa a $(Set_*, U(R)x\ Set_*)$

$$H^n(\ ,(R,X)) = H^n(\ ,\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))_{\hat{\mathbb{G}}}$$

y, caso que se de la situación (1.2.10) y por tanto (1.5.6), los funtores de cohomologia relativa a $(\pounds, U_\pounds(R))\ x\ \pounds$

$$H^n(\ ,(R,X))_\pounds = H^n(\ ,\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))_{\hat{\mathbb{G}}_\pounds}$$

(1.5.9) PROPOSICION .

Si $(p,\phi) : (A \longrightarrow R,L) \longrightarrow (A' \longrightarrow R,L')$ es un epimorfismo en $\underline{C}^2_R$ con p y ϕ sobres (£-escindentes), se tiene un isomorfismo natural

$$H^o((p,\phi),(R,X))_{(\pounds)} = \mathrm{Hom}_{A,L}(M,X)$$

donde $M = \mathrm{Ker}(\phi)$, A-estructura como en (1.2.16) y L-estructura por conjugación, y siendo X A-estrctura via $A \longrightarrow R$ y L-estructura trivial($X \rtimes L = X x L$) $\mathrm{Hom}_{A,L}(M,X)$ denota el grupo abeliano de morfismos $h:M \longrightarrow X$ que son de A-estructuras y de L-estructuras, verificando ademas las siguientes condiciones

Para $l \in L$ y $(a,a') \in A x_{A'} A$

i) $h(a \cdot l - a' \cdot l) = o$

ii) $h(a * l - a' * l) = o$, para cada $*$.

Dem.- Por(1.1.19) y lo dicho en las demostraciones de (1.5.4) y (1.5.7) se tiene

$$H^o((p,\phi),(R,X))_{(\pounds)} = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{A x_{A'} A}(L x_{L'} L, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A x_{A'} A x_{A'} A}(L x_{L'} L x_{L'} L, X))$$

Dado $f \in H^{o}((p,\phi),(R,X))_{(\mathcal{E})}$, definimos $h_f : M \longrightarrow X$ por

$$h_f(m) = f(m,o)$$

Obviamente h_f es morfismo en $\underline{C}$, ademas

$$h_f(a\cdot m) = f(a\cdot m,o) = f((a,a)\cdot(m,o)) = (a,a)\cdot f(m.o) = a\cdot h_f(m)$$

$$h_f(a*m) = f(a*m,o) = f((a,a)*(m,o)) = (a,a)*f(m,o) = a*h_f(m) \quad \text{para cada } *.$$

Con lo que h_f es morfismo de A-estructuras

$$h_f(l+m-l) = f(l+m-l,o) = f(l+m,l) = f(l,l) + f(m,o) = f(m,o) = h_f(m)$$

$$h_f(l*m) = f(l*m,o) = f((l,l)\ (m,o)) = f(l,l)\ f(m,o) = o\ f(m,o) = o \text{ para cada } .$$

Con lo que h_f es morfismo de L-estructuras; y si $(a,a')\ A\times_{A'}A$

$$h_f(a\cdot l-a'\cdot l) = f(a\cdot l-a'\cdot l,o) = f(a\cdot l,a'\cdot l) = f((a,a')\cdot(l,l)) = (a,a')\cdot f(l,l) = (a,a')\cdot o$$
$$= o$$

$$h_f(a*l-a'*l) = f(a*l,a'*l) = (a,a')*f(l,l) = (a,a')*o = o\ .$$

Y $h_f \in \mathrm{Hom}_{A,L}(M,X)$.

Es inmediato que $h_{f+f'} = h_f + h_{f'}$, asi $f \longmapsto h_f$ es morfismo de grupos abelianos.

Reciprocamente, sea $h \in \mathrm{Hom}_{A,L}(M,X)$, definimos $f_h : L\times_{L'}L \longrightarrow X$ por

$$f_h(l,l') = h(l-l')$$

Como

$$\begin{aligned} f_h((l_1,l_2)+(l'_1+l'_2)) &= h(l_1+l'_1-l'_2-l_2) = h(l_1-l_2+l_2+l'_1-l'_2-l_2) = \\ &= h(l_1-l_2) + h(l_2+(l'_1-l'_2)-l_2) = \\ &= h(l_1-l_2) + h(l'_1-l'_2) = \\ &= f_h(l_1,l_2) + f_h(l'_1,l'_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_h((l_1,l_2)*(l'_1,l'_2)) &= h(l_1*l'_1-l_2*l'_2) = h(l_1*l'_1-l_2*l'_1+l_2*l'_1-l_2*l'_2) = \\ &= h((l_1-l_2)*l'_1) + h(l_2*(l'_1-l'_2)) = \\ &= o \end{aligned}$$

tenemos que f_h es morfismo en $\underline{C}$.

Ademas

$$
\begin{aligned}
f_h((a,a')\cdot(l,l')) &= h(a\cdot l - a'\cdot l') = h(a\cdot l - a\cdot l' + a\cdot l' - a'\cdot l') = \\
&= h(a\cdot l - a\cdot l') + h(a\cdot l' - a'\cdot l') = h(a\cdot(l-l')) = \\
&= a\cdot h(l-l') = \\
&= (a,a')\cdot f_h(l,l').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_h((a,a')*(l,l')) &= h(a*l - a'*l') = h(a*l - a*l' + a*l' - a'*l') = \\
&= h(a*l - a*l') + h(a*l' - a'*l') = h(a*(l-l')) = \\
&= a*h(l-l') = \\
&= (a,a')*f_h(l,l') .
\end{aligned}
$$

y f_h es morfismo de $A\times_{A'}A$-estructuras.

Si $(l_0,l_1,l_2) \in L\times_{L'}L\times_{L'}L$, se tiene

$$
\begin{aligned}
f_h(l_0,l_1) - f_h(l_0,l_2) + f_h(l_1,l_2) &= h(l_0-l_1) - h(l_0-l_2) + h(l_1-l_2) = \\
&= -h(l_0-l_2) + h(l_0-l_1) + h(l_1-l_2) = \\
&= h(l_2-l_0+l_0-l_1+l_1-l_2) = 0
\end{aligned}
$$

y por tanto $f_h \in H^0((p,\phi),(R,X))_{(\mathcal{E})}$.

Como $f_{h_f} = f$ y $h_{f_h} = h$, tenemos el isomorfismo buscado.

Notemos que, tal como se vio en (1.1.18), se tiene

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r, dashed] & \mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}((A' \to R, L'),(R,X)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}((A \to R, L),(R,X)) \arrow[r, "\pi_0^* - \pi_1^*"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}((A\times_{A'}A \to R, L\times_{L'}L),(R,X)) \\
& & & H^0((p,\phi),(R,X))_{(\mathcal{E})} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

con lo que el morfismo $\psi : \mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}((A \to R, L),(R,X)) = \mathrm{Hom}_A(L,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A,L}(M,X)$

sera tal que $\psi(f)(m) = f(m) - f(0) = f(m)$, osea que $\psi(f) = f/M : M \longrightarrow X$.

(1.5.10) PROPOSICION .

Si $(p,\phi): (A \to R, L) \longrightarrow (A' \longrightarrow R, L')$ es un epimorfismo en $\underline{C}^2_R$ con p y ϕ sobres ($\mathcal{E}$-escindentes) , existe una sucesión exacta larga natural

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A'}(L',X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A}(L,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A,L}(M,X) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1((A' \longrightarrow R, L'),(R,X))_{(\pounds)} \longrightarrow H^1((A \longrightarrow R, L),(R,X))_{(\pounds)} \longrightarrow \cdots$$

donde $M = \mathrm{Ker}(\phi)$, para cada R-módulo X.

Dem.- Es cosecuencia de (1.1.12), teniendo en cuenta (1.5.7) y (1.5.9).

(1.5.11) Extensiones en $\underline{C}^2_{R}$.

Sea $(A \longrightarrow R, L)$ objeto de $\underline{C}^2_{R}$ y X un R-módulo. Definimos una extensión de $(A \longrightarrow R, X)$ por (R,X) (£-extensión) como una sucesión exacta corta de A-estructuras

$$X \rightarrowtail E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L$$

con v sobre (£-escindente), tal que X es central en E, osea que E actua por cojugación trivialmente sobre X.

Dos (£)extensiones son equivalentes si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "h"] & L \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, tail] & \bar{E} \arrow[r, two heads] & L \end{tikzcd}$$

con h morfismo de A-estructuras.

Denotaremos $E((A \longrightarrow R, L),(R,X))_{(\pounds)}$ al conjunto de clases de equivalencia de tales extensiones.

(1.5.12) PROPOSICION .

Sea $[X \rightarrowtail E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L] \in E((A \longrightarrow R, L),(R,X))_{(\pounds)}$.

Si $(f,\phi) : (A' \longrightarrow R, L') \longrightarrow (A \longrightarrow R, L)$ es un morfismo en $\underline{C}^2_{R}$ existe una extensión , unica salvo equivalencia, $X \overset{i'}{\rightarrowtail} E' \overset{v'}{\twoheadrightarrow} L'$, de $(A' \longrightarrow R, L')$ por (R,X) tal que se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, two heads, "v'"] \arrow[d, "h"] & L' \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads, "v"] & L \end{tikzcd}$$

con h morfismo de A'-estructuras.

Dem.- Puesto que en cualquier diagrama de esa forma el cuadrado de la derecha es cartesiano, la unica , salvo equivalencia, extensión posible es aquella en que $E' = E\times_L L'$. Notemos que $E\times_L L'$ es A'-estructura por

$$E\times_L L' \rightarrowtail E\ Ax_{L\ A'}L'\ A' \rightleftarrows Ax_A A' = A'$$

siendo las acciones

i) $a'\cdot(e,l') = (fa'\cdot e, a'\cdot l')$

ii) $a' * (e,l') = (fa' * e, a' * l')$ para cada $*$.

Es inmediato que i' y v' son morfismos de A'-estructuras, y X es central en E' pues $(e,l') + (x,o) - (e,l') = (e+x-e,o) = (x,o)$

$(e,l') * (x,o) = (e * x,o) = (o,o)$ para cada $*$.

(1.5.13) LEMA .

Sea $(A \longrightarrow R,L) \in \underline{C}^2_{\underline{R}}$, X un R-módulo, $X \overset{i}{\rightarrowtail} E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L$ una (£)extensión de $(A \longrightarrow R,L)$ por (R,X) y $\phi: X \longrightarrow Y$ un morfismo de R-módulos.

Existe un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \overset{i}{\rightarrowtail} & E & \overset{v}{\twoheadrightarrow} & L \\ \phi\downarrow & & \pi\downarrow & & \| \\ Y & \overset{i'}{\rightarrowtail} & E_\phi & \overset{v'}{\twoheadrightarrow} & L \end{array}$$

donde $Y \rightarrowtail E_\phi \twoheadrightarrow L$ es una (£)extensión de $(A \longrightarrow R,L)$ por (R,Y) y π morfismo de A-estructuras, tal que :

Si $\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow\pi' \\ Y & \overset{j}{\rightarrowtail} & E' \end{array}$ es un diagrama en la categoria de A-estructuras con Y central en E', verificando que $\pi' i = j\phi$, entonces existe un unico morfismo de A-estructuras $m': E \longrightarrow E'$ tal que $m' i' = j$ y $m' \pi = \pi'$.

Dem.- La extension $Y \overset{i}{\rightarrowtail} E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L$ es obtenida por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i"] \arrow[dd] & & E \arrow[r, "v"] \arrow[dl, dashed] \arrow[dd, "\pi"] & L \arrow[dd, equal] \\
& Y\times E \arrow[dr, "c"] & & \\
Y \arrow[ur] \arrow[rr, "i'"] & & E_\phi \arrow[r, "v'"] & L
\end{tikzcd}$$

donde $c : Y\times E \longrightarrow E_\phi$ es el coigualador de $\begin{tikzcd}[row sep=small] & E \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] \arrow[dr, "\phi"'] & & Y\times E \\ & Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$. Puesto que el conjunto $\{(\phi x,-x)\ ,\ x\in X\}$ es un ideal de $Y\times E$, al ser X central en E, se tendra que $E_\phi = \dfrac{Y\times E}{(\phi x,-x)}$.

Es facil ver que $Y\times E$ es una A-estructura con acciones

i) $a\cdot(y,e) = (a\cdot y, a\cdot e)$

ii) $a*(y,e) = (a*y, a*e)$ para cada $*$.

y al ser ϕ morfismo de R-módulos, y por tanto de A-módulos, se tiene que

i) $a\cdot(\phi x,-x) = (\phi(a\cdot x),-a\cdot x)$

ii) $a*(\phi x,-x) = (\phi(a*x),-a*x)$ para cada $*$.

de donde deducimos que $\{(\phi x,-x),\ x\in X\}$ es cerrado para las acciones de A y por tanto es un ideal de $Y\times E \rtimes A$. Considerando entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\{(\phi x,-x),\ x\in X\} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \{(\phi x,-x), x\in X\} \arrow[d] & \\
Y\times E \arrow[r] \arrow[d] & Y\times E \rtimes A \arrow[r, shift left] \arrow[d] & A \arrow[l, shift left] \arrow[d, equal] \\
E_\phi \arrow[r] & \dfrac{Y\times E\ A}{(\phi x,-x),x\ X} \arrow[r, shift left] & A \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

tenemos que E_ϕ es una A-estructura.

El morfismo $Y \xrightarrow{i'} E_\phi = Y \longrightarrow Y\times E \xrightarrow{c} E_\phi$ y $E_\phi \longrightarrow L$ es el inducido por $Y\times E \longrightarrow E \longrightarrow L$. No presenta dificultad comprobar que $Y \xrightarrow{i'} E_\phi \xrightarrow{v'} L$ es una sucesión exacta corta con v' sobre ($\mathcal{E}$-escindente) y que i', v' y el morfis $\pi = E \longrightarrow Y\times E \xrightarrow{c} E_\phi$ son de A-estructuras, asi como que Y es central en E .

Sea $\begin{array}{c} E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ Y \xrightarrow{j} E' \end{array}$ en las condiciones del enunciado. Definimos $m: Y x E \longrightarrow E'$ por $m(y,e) = j(y) + \pi'(e)$, utilizando el hacho de que Y es central en E' es facil ver que m es morfismo en $\underline{C}$; y como $m(o,x) = \pi'(x) = j\phi(x) = m(\phi(x),o)$, se induce $m': E_\phi \longrightarrow E'$ tal que $m' c = m$. No presenta dificultad ver que m' es morfismo de A-estructuras y se tiene que $m' i' = j$ y $m' \pi = \pi'$. Ademas es unico pues si m" fuese otro en las mismas condiciones que m', seria $m''c(y,e) = m''c(y,o) + m''c(o,e) = j(y) + \pi'(e)$ y por lo tanto $m'' = m'$.

(1.5.14) COROLARIO .

Sea $[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow L] \in E((A \longrightarrow R, L),(R,X))_{(\pounds)}$ y $\phi: X \longrightarrow Y$ un morfismo de R-módulos . Existe una (£)extensión , unica salvo equivalencia, $Y \rightarrowtail E_\phi \twoheadrightarrow L$, de $(A \longrightarrow R, L)$ por (R,Y) tal que se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \rightarrowtail & E & \twoheadrightarrow & L \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \| \\ Y & \rightarrowtail & E_\phi & \twoheadrightarrow & L \end{array}$$

con π morfismo de A-estructuras.

(1.5.15) Suma de extensiones en $\underline{C}^2_R$.

Sean $[\underline{E}_i : X \rightarrowtail E_i \overset{v_i}{\twoheadrightarrow} L]$, i=1,2, dos clases de (£)extensiones de $(A \longrightarrow R, L)$ por (R,X), para X un R-módulo.

El conjunto $\{(x,-x), x \in X\}$ es un ideal de $E_1 x_L E_2$ (al ser X cetral en E_1 y en E_2), denotaremos por $E_1 \overset{X}{x_L} E_2$ al correspondiente objeto cociente. Notemos que $E_1 x_L E_2$ es una A-estructura con acciones i) $a\cdot(e_1,e_2) = (a\cdot e_1, a\cdot e_2)$ y ii) $a*(e_1,e_2) = (a*e_1, a*e_2)$, para cada $*$, y el cociente $E_1 \overset{X}{x_L} E_2$ lo es con las acciones inducidas por estas.

Si $\pi_i : E_1 x_L E_2 \longrightarrow E_i$ son las correspondientes proyecciones y $v = v_i \pi_i$, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[r, equal] \arrow[d, "{(I,-I)}"'] & X \arrow[d] & \\
& X \times X \arrow[r, tail] \arrow[d] & E_1 \times_L E_2 \arrow[r, two heads, "v"] \arrow[d, "q"] & L \arrow[d, equal] \\
& X \arrow[r, tail, "i'"] & E_1 \overset{X}{\times}_L E_2 \arrow[r, two heads, "v'"] & L
\end{tikzcd}$$

de filas y columnas exactas; como

i) $i'(a\cdot x) = q(a\cdot x,o) = a\cdot q(x,o) = a\cdot i'(x)$

ii) $i'(a * x) = q(a * x,o) = a * q(x,o) = a * i'(x)$

i) $v'(a\cdot q(e_1,e_2)) = v'q(a\cdot e_1,a\cdot e_2) = v(a\cdot e_1,a\cdot e_2) = v_1(a\cdot e_1) = a\cdot v_1(e_1) =$
$= a\cdot v'q(e_1,e_2)$.

ii) $v'(a * q(e_1,e_2)) = v'q(a * e_1,a * e_2) = v(a * e_1,a * e_2) = v_1(a * e_1) = a * v_1(e_1) =$
$= a * v'q(e_1,e_2)$.

tenemos que i' y v' son morfismos de A-estructuras, y como

$q(e_1,e_2) + i'(x) - q(e_1,e_2) = q(e_1+x-e_1,o) = q(x,o) = i'(x)$

$q(e_1,e_2) * i'(x) = q(e_1 * x,o) = q(o,o) = o$

X es central en $E_1 \overset{X}{\times}_L E_2$ y $X \rightarrowtail E_1 \overset{X}{\times}_L E_2 \twoheadrightarrow L$ es una (£)extensión de $(A \longrightarrow R,L)$ por (R,X), a la que denotaremos por $\underline{E}_1+\underline{E}_2$.

Definimos $[\underline{E}_1] + [\underline{E}_2] = [\underline{E}_1+\underline{E}_2]$.

Es una adición bien definida en el conjunto $E((A \longrightarrow R,L),(R,X))_{(£)}$ y claramente conmutativa y asociativa, ademas la clase $0=[X \rightarrowtail X\times L \twoheadrightarrow L]$ actua como cero para esta adición.

Asi $E((A \longrightarrow R,L),(R,X))_{(£)}$ es un monoide abeliano con cero.

(1.5.16) Si X es un R-módulo y $(f,\phi) : (A' \longrightarrow R,L') \longrightarrow (A \longrightarrow R,L)$ es un morfismo en $\underline{C}^2_R$, la aplicación inducida

$$(f,\phi)^*: E((A \longrightarrow R,L),(R,X))_{(£)} \longrightarrow E((A' \longrightarrow R,L'),(R,X))_{(£)}$$

que se sigue de (1.5.12), $(f,\phi)^*[\underline{E}]=[\underline{E}']$, es un morfismo de monoides abelianos con cero.

Y, analogamente, si $\phi\colon X \longrightarrow Y$ es un morfismo de R-módulos , para cada $(A \longrightarrow R,L)$ la aplicación que se sigue de (1.5.14)

$$\phi_*\colon E((A \longrightarrow R,L),(R,X))_{(\mathcal{L})} \longrightarrow E((A \longrightarrow R,L),(R,Y))_{(\mathcal{L})}$$

tal que $\phi_*[\underline{E}] = [E_\phi]$, es un morfismo de monoides.

Realmente se tiene un bifuntor

$$E(\ \ ,(R,\ ))_{(\mathcal{L})}\colon \underline{C}^2_R \longrightarrow \text{Monoides abelianos con cero.}$$

(1.5.17) PROPOSICION .

Existe un isomorfismo natural

$$\Delta\ \colon E((A \longrightarrow R,L),(R,X))_{(\mathcal{L})} = H^1((A \longrightarrow R,L),(R,X))_{(\mathcal{L})}$$

para cada $(A \longrightarrow R,L)$ $\underline{C}^2_R$ y X R-módulo.

Dem.-

Sea $X \rightarrowtail E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L$ una $(\mathcal{L})$extensión de $(A \longrightarrow R,L)$ por (R,X), entonces $(I_A,v)\colon (A \longrightarrow R,E) \longrightarrow (A \longrightarrow R,L) \in \mathcal{E}_{\mathfrak{C}(\mathcal{L})}$ y por (1.5.10) se tiene la sucesion exacta

$$\mathrm{Hom}_A(E,X) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_A(X,X) \xrightarrow{\phi} H^1((A \longrightarrow R,L),(R,X))_{(\mathcal{L})}$$

Definimos $\Delta[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow L] = \phi(I_X)$.

La naturalidad de la sucesión implica que $\Delta[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow L]$ no depende del representante tomado en la clase, y Δ esta bien definida.

La demostración de que Δ es un isomorfismo es esencialmente la misma que la realizada en la demostración del teorema (1.4.6), variando unicamente los detalles; el unico apartado quiza conflictivo es probar la sobreyectividad de Δ y lo haremos entonces:

Sea $(P \longrightarrow R,T) \xrightarrow{(p,q)} (A \longrightarrow R,L)$ una presentación $\mathcal{E}_{\mathfrak{C}(\mathcal{L})}$-proyectiva de $(A \longrightarrow R, L)$ (por ejemplo $\hat{G}_{(\pounds)}(A \longrightarrow R, L)$), sea $M = \mathrm{Ker}(q)$. Se tendra por (1.5.10) la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_P(T,X) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_{P,T}(M,X) \xrightarrow{\phi'} H^1((A \longrightarrow R, L),(R,X))_{(\pounds)} \longrightarrow 0$$

Si $\xi \in H^1((A \longrightarrow R, L),(R,X))_{(\pounds)}$, existira $h \in \mathrm{Hom}_{P,T}(M,X)$ tal que $\phi'(h) = \xi$. Consideremos en $\underline{C}^2_R$ los morfismos

$$(P x_A P \longrightarrow R,\ X x (T x_L T)) \underset{(\pi_1, f_1)}{\overset{(\pi_0, f_0)}{\rightrightarrows}} (P \longrightarrow R,\ X x T)$$

donde π_1, π_0: $P x_A P \longrightarrow P$ son las proyecciones y f_0, f_1 son los morfismos definidos por

$$f_0(x,(t_1,t_2)) = (x,t_1)$$
$$f_1(x,(t_1,t_2)) = (x+h(t_1-t_2),t_2)$$

Si $(z,z') \in P x_A P$ se tiene

$$\begin{aligned}
f_0((z,z')\cdot(x,(t_1,t_2))) &= f_0(z\cdot x,(z\cdot t_1, z'\cdot t_2)) = (z\cdot x, z\cdot t_1) = z\cdot(x,t_1) = \\
&= z\cdot f_0(x,(t_1,t_2)) = \\
&= \pi_0(z,z')\cdot f_0(x,(t_1,t_2)) .\\
f_0((z,z')*(x(t_1,t_2))) &= f_0(z*x,(z*t_1,z'*t_2)) = (z*x, z*t_1) = \\
&= z*(x,t_1) = z*f_0(x,(t_1,t_2)) = \\
&= \pi_0(z,z')*f_0(x,(t_1,t_2)) .\\
f_1((z,z')\cdot(x,(t_1,t_2))) &= f_1(z'\cdot x,(z\cdot t_1, z'\cdot t_2)) = (z'\cdot x+h(z\cdot t_1-z'\cdot t_2), z'\cdot t_2) = \\
&= (z'\cdot x+z'\cdot h(t_1-t_2), z'\cdot t_2) = \\
&= (z'\cdot(x+h(t_1-t_2), z'\cdot t_2) = z'\cdot f_1(x,(t_1,t_2)) = \\
&= \pi_1(z,z')\cdot f_1(x,(t_1,t_2)) .\\
f_1((z,z')*(x,(t_1,t_2))) &= f_1(z'*x,(z*t_1,z'*t_2)) = (z'*x+h(z*t_1-z'*t_2), z'*t_2) = \\
&= (z'*x+z'*h(t_1-t_2), z'*t_2) = \\
&= \pi_1(z,z')*f_1(x,(t_1,t_2)).
\end{aligned}$$

con lo que (π_0,f_0) y (π_1,f_1) son morfismos en $\underline{C}^2_R$.

consideramos ahora el morfismo coigualador de estos dos, segun (1.5.3) sera $(P \longrightarrow R, XxT) \xrightarrow{(p,f)} (A \longrightarrow R, E)$ (notese que en $\underline{C}$ el diagrama $Px_A P \rightrightarrows P \xrightarrow{p} A$ es coigualador al ser p regular), donde E como A-estructura se obtenía por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Xx(Tx_L T) \arrow[r, tail] \arrow[d, shift right, "f_o"'] \arrow[d, shift left, "f_1"] & Xx(Tx_L T)\downharpoonleft Px_A P \arrow[r, shift left, two heads] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & Px_A P \arrow[l, shift left, tail] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\
XxT \arrow[r, tail] \arrow[d, "f"] & XxT\downharpoonleft P \arrow[r, shift left, two heads] \arrow[d] & P \arrow[l, shift left, tail, "s"] \arrow[d, "p"] \\
E \arrow[r, tail, "i"] & E\upharpoonleft A \arrow[r, shift left, two heads] & A \arrow[l, shift left, tail]
\end{tikzcd}$$

, y sera

$E\downharpoonleft A = \dfrac{XxT\downharpoonleft P}{\{(hm,-m)+s(t-t'), m\in M,\ (t,t')\in Px_A P\}}$, de donde $Ker(f) = Ker(i\ f) = \{(hm,-m), m\in M\}$ y al ser f conormal sera $E = \dfrac{XxT}{\{(hm,-m), m\in M\}}$; se tiene entonces que el diagrama $\begin{tikzcd}[row sep=small] & T \arrow[dr] & & \\ M \arrow[ur] \arrow[dr, "h"'] & & XxT \arrow[r, two heads, "f"] & E \\ & X \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$ es coigualador y por tanto el diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, tail] \arrow[dd, "h"'] & T \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "\pi"] \arrow[d] & L \arrow[dd, equal] \\
& XxT \arrow[d, "f"] & \\
X \arrow[r, tail, "i"] \arrow[ur] & E \arrow[r, two heads, "v"] & L
\end{tikzcd}$$

No presenta dificultad comprobar que $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow L$ es una ($\mathcal{E}$)extension de $(A \longrightarrow R, L)$ por (R, X).

Por la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
(P \longrightarrow R, T) \arrow[r, "(p,q)"] \arrow[d, "(p,\pi)"'] & (A \longrightarrow R, L) \arrow[d, equal] \\
(A \longrightarrow R, E) \arrow[r, "(I,v)"] & (A \longrightarrow R, L)
\end{tikzcd}$$

se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_A(X,X) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "h^*"'] & H^1((A \to R, L),(R,X))_{(£)} \arrow[d, equal] & \\ \mathrm{Hom}_{P,T}(M,X) \arrow[r, "\phi'"] & H^1((A \to R, L),(R,X))_{(£)} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y entonces $\Delta[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow L] = \phi(I_X) = \phi' h^*(I_X) = \phi'(h) = \xi$.

Con lo que Δ es sobre .

(1.5.18) Sea $(\underline{C},R)'$ la categoria de epimorfismos en $(\underline{C},R)$ escindentes en Set, y $(\underline{C},R)'_{£}$ la de epimorfismos £-escindentes caso de que se de la situación (1.2.10), por (1.1.6) tendremos funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} (Set, U(R))' \arrow[d, shift right, "F'_R"'] \\ (\underline{C},R)' \arrow[u, shift right, "U'_R"'] \end{tikzcd}$$

y eventualmente

$$\begin{tikzcd} (£, U_{£}(R))' \arrow[d, shift right, "F'_{£R}"'] \\ (\underline{C},R)'_{£} \arrow[u, shift right, "U'_{£R}"'] \end{tikzcd}$$

que induciran cotriples $\mathbb{G}'$ en $(\underline{C},R)'$ y $\mathbb{G}'_{£}$ en $(\underline{C},R)'_{£}$.

Notemos que si $\begin{tikzcd}[column sep=small] A \arrow[rr, "\sigma", two heads] \arrow[dr] & & B \arrow[dl, dashed] \\ & R & \end{tikzcd}$ es un epimorfismo en $(\underline{C},R)$ con σ sobre (£-escindente entonces

$$H^n(\sigma,X)_{(£)} = H^n(\sigma, \mathrm{Der}(\ ,X)')_{\mathbb{G}'_{(£)}} .$$

siendo Der(,X)' como en (1.1.7)

(1.5.19) LEMA .

En $(\underline{C},R)'$ $((\underline{C},R)'_{£})$ el morfismo $(h,h') = h$ $\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & A \arrow[dl] \arrow[dd] \\ & R & \\ B' \arrow[rr, "\sigma'"] \arrow[ur] & & A' \arrow[ul] \end{tikzcd}$ h' es un epimorfismo $(Set, U(R))'$-escindente $((\pounds, U_{\pounds}(R))'$-escindente$)$ si y solo si h' y $h/Ker(\sigma) : Ker(\sigma) \longrightarrow Ker(\sigma)$ son epimorfismos sobres ($\pounds$-escindentes).

Dem.- obsrevemos que (h,h') escinde en la correspondiente categoria de olvido si y solo si existen morfismos en esta s y s' tal que

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "s"'] & A' \arrow[d, "s'"] \\
B \arrow[r, "\sigma"] & A
\end{tikzcd}$$

conmuta y $hs = I$, $h's' = I$.

La necesidad de la condición propuesta es clara. Para ver que es suficiente supongamos $s' : A' \longrightarrow A$ y $t : Ker(\sigma) \longrightarrow Ker(\sigma)$ morfismos en Conjuntos o $\pounds$ respectivamente, tal que $h's' = I$ y $h/Ker(\sigma)\ t = I$. Consideremos

$$\begin{tikzcd}
Ker(\sigma) \arrow[r, tail] \arrow[dd, "\frac{h}{Ker(\sigma)}"'] & B \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dd, "h"'] \arrow[dr, "{(h,\sigma)}"] & & A \arrow[dd, "h'"] \\
& & B'x_{A'}A \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_0"] & \\
Ker(\sigma) \arrow[r, tail] & B' \arrow[rr, "\sigma"] & & A'
\end{tikzcd}$$

y sea $r : A \longrightarrow B$ una escisión de σ en la correspondiente categoria de olvido; si definimos $\bar{s} : B' \longrightarrow B'x_{A'}A$ por

$$\bar{s}(b',a) = t(b'-hr(a)) + r(a)$$

que es claramente una aplicación o morfismo en $\pounds$ $(\bar{s} = t(\pi_0 - hr\pi_1) + r\pi_1)$ segun el caso, verificando que

$$\begin{aligned}
(h,\sigma)\bar{s}(b',a) &= (h\sigma)(t(b'-hr(a)) + r(a)) = \\
&= (ht(b'-hr(a))+hr(a), \sigma t(b'-hr(a)) + \sigma r(a)) = \\
&= (b',a)
\end{aligned}$$

osea $(h,\sigma)\bar{s} = I$. Definiendo entonces $s = \bar{s}\,(I_{B'}, s'\sigma') : B \longrightarrow B'$ se tiene que $h\,s = I$ y $\sigma\,s = s'\,\sigma'$, lo que acaba la demostración .

(1.5.20) Notemos que entonces

$$(\sigma,\sigma') = \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\sigma} & A \\ h\downarrow & & \downarrow h' \\ B' & \xrightarrow{\sigma'} & A' \end{array}$$

es tambien un epimorfismo (Set, U(R))'-escindente ((£, $U_£$(R))'-escindente). En efecto, sea r': $A' \longrightarrow B'$ una escisión de σ' y consideremos $r'' = \bar{s}\,(r'h', I_A)$, es inmediato que $\sigma\, r'' = I_A$ y que $h\, r'' = r'\, h'$.

(1.5.21) Definimos ahora un funtor $H : (\underline{C}, R)'_{(£)} \longrightarrow \underline{C}^2_R$ por

$$H\left(\begin{array}{c} A \xrightarrow{\sigma} B \\ \searrow R \swarrow \end{array}\right) = (A \longrightarrow R, L)$$, donde L = Ker(σ) A-estructura por conjugación

$$H\left(\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ h\downarrow & & \downarrow h' \\ A' & \xrightarrow{\sigma'} & B' \end{array}\right) = (h, h/L) : (A \longrightarrow R, L) \longrightarrow (A' \longrightarrow R, L')$$

puesto que

$$h/L(a \cdot l) = h(a+l-a) = h(a) + h(l) - h(a) = h(a)\cdot h/L(l)$$

$$h/L(a * l) = h(a * l) = h(a) * h(l) = h(a) * h/L(l)$$, para cada $*$.

se verifica que (h, h/L) es un morfismo en $\underline{C}^2_R$.

(1.5.22) PROPOSICION .

El funtor H lleva epimorfismos $(h,h') = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \xrightarrow{\sigma'} & B' \end{array}$ que son (Set, U(R))'-escindentes ((£, $U_£$(R))'-escindentes) en epimorfismos de la clase $\mathcal{E}_{\hat{\mathbb{G}}}$ ($\mathcal{E}_{\hat{\mathbb{G}}_£}$); ademas este funtor conserva pares nucleos de estos epimorfismos.

Dem.- La primera afirmación es evidente. Para la segunda, siendo L y L' los nucleos de σ y σ', consideremos

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[r] \arrow[d, tail] & L' \arrow[d, tail] \\
A x_{A'} A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\sigma x_{\sigma'} \sigma"] & A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma"] & A' \arrow[d, "\sigma'"] \\
B x_{B'} B \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \arrow[r, "h'"] & B'
\end{tikzcd}$$

Puesto que $\mathrm{Ker}(\sigma x_{\sigma'} \sigma) = L x_{L'} L$, sera $H(\sigma x_{\sigma} \sigma) = (A x_{A'} A \longrightarrow R, L x_{L'} L)$ que es precisamente el par nucleo de $(A \longrightarrow R, L) \xrightarrow{H(h,h')} (A' \longrightarrow R, L')$, tal como se vio en (1.5.4).

(1.5.23) LEMA .

Sea $\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] A \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl, dashed] \\ & R & \end{tikzcd}$ un epimorfismo en $(\underline{C}, R)$ con σ sobre($\pounds$-escindente) y

$(h,h') = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] \arrow[dd, "h"'] & & F' \arrow[dl] \arrow[dd, "h'"] \\ & R & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr, "\sigma"] & & B \arrow[ul] \end{tikzcd}$ una presentación $\mathbb{G}'$-proyectiva ($\mathbb{G}'_{\pounds}$-proyectiva) de σ ,

(F y F' seran $\mathbb{G}_{(\pounds)}$-proyectivos y f sobre($\pounds$-escindente), (h,h') escindente en la correspondiente categoria de olvido; por ejemplo puede tomarse $G'(\sigma)$).

Entonces

$$H^{O}((h,h'), \mathrm{Hom}_{\underline{C}_R}2(\ ,(R,X))\ H)_{\mathbb{G}'_{(\pounds)}} = H^{O}(H(h,h'),(R,X))_{(\pounds)} .$$

Dem.- Notemos, en pricipio, que considerando

$$\begin{tikzcd}
G^2(A) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr, "\phi"] \arrow[dd, "G^2(\sigma)"'] & & G(A) \arrow[r, dashed] \arrow[dd, "G(\sigma)"] & A \arrow[dd, "\sigma"] \\
 & G(A) x_A G(A) \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] \arrow[dd, "G\sigma x_{\sigma} G\sigma" near start] & & \\
G^2(B) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr, "\phi'"'] & & G(B) \arrow[r, dashed] & B \\
 & G(B) x_B G(B) \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

el morfismo $(\phi,\phi'):G^2(\sigma) \longrightarrow G(\sigma)x_\sigma G(\sigma)$ es un epimorfismo (Set, U(R))'-escindente ((£, U£(R))'-escindente) tal como se vio en la demostración de (1.1.18).

En consecuencia, el resultado de (1.1.16) para $(\underline{C},R)'_{(£)}$ se verifica y tambien se dara (1.1.19).

Como el funtor $Hom_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))\ H$ es $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'(£)}$-exacto a la derecha segun (1.5.22), entonces utilizando(1.1.19) sera

$$H^0((h,h'),Hom_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))_{\mathbb{G}'(£)} =$$

$$= Ker(Hom_{\underline{C}^2_R}(H(fx_\sigma f),(R,X)) \longrightarrow Hom_{\underline{C}^2_R}(H(fx_\sigma fx_\sigma f),(R,X))) =$$

$$= Ker(Hom_{\underline{C}^2_R}(Fx_A F \longrightarrow R, Tx_L T),(R,X)) \longrightarrow Hom_{\underline{C}^2_R}(Fx_A Fx_A F \longrightarrow R, Tx_L Tx_L T),(R,X))) =$$

$$= Ker(Hom_{\underline{C}^2_R}((F \longrightarrow R,T)x_{(A\rightarrow R,L)}(F \longrightarrow R,T),(R,X)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Hom_{\underline{C}^2_R}((F \longrightarrow R,T)x_{(A\rightarrow R,L)}(F \longrightarrow R,T)x_{(A\rightarrow R,L)}(F \longrightarrow R,T),(R,X))) =$$

$$= H^0((F \longrightarrow R,T) \xrightarrow{(h,h/T)} (A \longrightarrow R,L),(R,X))_{(£)} =$$

$$= H^0(H(h,h'),(R,X))_{(£)} \ . \ (L = Ker(\sigma) \ y \ T = Ker(f)).$$

(1.5.24) COROLARIO .

En las hipotesis de (1.5.23) se tiene que

$$H^1(\sigma,X)_{(£)} = Ker(H^1((A \longrightarrow R,L),(R,X))_{(£)} \xrightarrow{H(h,h')^*} H^1((F \longrightarrow R,T),(R,X))_{(£)})$$

Dem.- Consideremos el funtor de coeficientes

$$Hom_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))\ H = H^0(\ ,X)_{(£)} : (\underline{C},R)'_{(£)} \longrightarrow Ab$$

(la igualdad se da por (1.3.3) y la demostración de (1.5.7)).

Para el epimorfismo (h h') se tendra la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}((F \to R,T),(R,X)) \arrow[r] & H^0((h,h'),\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))\,H\,)_{\mathbb{G}'(\mathcal{E})} \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(\sigma,H^0(\ ,X)_{(\mathcal{E})})_{\mathbb{G}'(\mathcal{E})} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & H^0(H(h.h'),(R,X))_{(\mathcal{E})} \arrow[r] & H^1(\sigma,X)_{(\mathcal{E})} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La igualdad de la izquierda se da por (1.5.23) y la de la derecha por [29, p.67] .

Por otra parte el epumorfismo $H(h,h')$ induce la sucesión exacta

$$\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}((F \to R,T),(R,X)) \longrightarrow H^0(H(h,h'),(R,X))_{(\mathcal{E})} \longrightarrow H^1((A \to R,L),(R,X))_{(\mathcal{E})} \longrightarrow H^1((F \to R,L),(R,X))_{(\mathcal{E})}$$

Y combinando ambas sucesiones exactas se obtiene el resultado anunciado.

(1.5.25) TEOREMA. ($H^1(\sigma,X)_{(\mathcal{E})}$ son extensiones) .

Sea $\begin{smallmatrix} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ & \searrow \ \swarrow & \\ & R & \end{smallmatrix}$ un epimorfismo en $(\underline{C},R)$ con σ sobre($\mathcal{E}$-escindente) y X un R-módulo.

Siendo $L = \mathrm{Ker}(\sigma)$, el grupo $H^1(\sigma,X)$ ($H^1(\sigma,X)_{\mathcal{E}}$) es isomorfo al grupo de clases de extensiones

$$X \xrightarrow{i} E \xrightarrow{v} L$$

con v sobre ($\mathcal{E}$-escindente) , que son de A-estructuras (L es A-estructura por conjugación y X via $A \longrightarrow R$) y tal que la acción de E en si mismo por conjugación coincide con la definida via $E \longrightarrow L \rightarrowtail A$, es decir , tal que

i) $e + e' - e = v(e)\cdot e'$

ii) $e * e' = v(e) * e'$, para cada $*$.

Notese que i) y ii) implican que X es central en E.

Dem.- Seguimos utilizando la notación de (1.5.23) y (1.5.24).

Tomamos en particular $F' = G_{(\mathcal{E})}(A)$, $F = F_{(\mathcal{E})}(U_{(\mathcal{E})}(A) + U_{(\mathcal{E})}(L))$, $f: F \longrightarrow F'$ el morfismo tal que $f(a) = a$ y $f(l) = o$, $l \in L$, $a \in A$, $h : F \longrightarrow A$ es el morfismo tal que $h(a) = a$ y $h(l) = o$, y $h' : F' \longrightarrow B = F' \longrightarrow A \longrightarrow B$.

Notemos que , siendo $T = \mathrm{Ker}(f)$, $(F' \to R, T) = \hat{\mathbb{G}}_{(\pounds)}(A \to R, L) = \hat{\mathbb{G}}_{(\pounds)} H(\sigma)$. (vease (1.5.2) y (1.5.6)), y $(\delta, h/T) = \hat{\delta} : (F' \to R, T) \to (A \to R, L)$ la counidad de la adjunción $\hat{E}_{(\pounds)} \dashv \hat{U}_{(\pounds)}$.

Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, tail] \arrow[d, "\frac{h}{T}"'] & F \arrow[r, two heads] \arrow[d, "h"] & F' \arrow[d, "h'"] \\ L \arrow[r, tail] & A \arrow[r, two heads] & B \end{tikzcd} .$$

Como h y h/T son escindentes en la correspondiente categoria de olvido, segun (1.5.19), (h,h') es un epimorfismo en $(\underline{C}, R)'_{(\pounds)}$ escindente en la categoria de olvido.

Estamos en las hipotesis de (1.5.23) y (1.5.24), con lo que sera

$$H^1(\sigma, X)_{(\pounds)} = \mathrm{Ker}(H^1(A \to R, L), (R, X))_{(\pounds)} \xrightarrow{H(h,h')^*} H^1((F \to R, T), (R, X))_{(\pounds)})$$

Recordemos que $H(h,h') = (h, h/T)$ actua sobre una clase de extensión en la forma $(h, h/T)\,[X \rightarrowtail E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L] = [X \rightarrowtail E' \overset{v'}{\twoheadrightarrow} T]$, obtenida esta por el diama cartesiano

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & T \arrow[d, "h/T"] \\ X \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads] & L \end{tikzcd}$$

(vease (1.5.16)); entonces sera $H(h,h')\,[\underline{E}] = 0$ si y solo si $E' = X\mathrm{x}T$, ahora bien, puesto que X es central en E' es necesario y suficiente para esto que exista un morfismo de F-estructuras $s' : T \to E$ tal que $v'\, s' = 1$, y claramente esto equivale a que exista $g : T \to E$, morfismo de F-estructuras, con $v\, g = h/T$.

Puesto que existira un morfismo en $\underline{C}^2_{R}$ (δ, g) haciendo conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} (F' \to R, T) \arrow[r, "(\delta, h/T)"] \arrow[d, dashed, "(\delta, g)"'] & (A \to R, L) \\ (A \to R, E) \arrow[ur, "(1, v)"'] & \end{tikzcd}$$

Y tendremos $g: T \longrightarrow E$, morfismo de F'-estructuras, con $v\,g = h/T$.

Probaremos que g es morfismo de F-estructuras si y solo si se verifican las condiciones i) y ii) del enunciado.

Sea $\varepsilon: F' \longrightarrow F$ la correspondiente escisión de f que dota a T de F'-estructura, osea el morfismo tal que $\varepsilon(a) = a, a \quad A$,(vease (1.5.1),(1.5.6)). Todo elemento z de F se expresara como $z = t+\varepsilon z'$, para t de T y z' de F'.

Supongamos que se verifican las condiciones i) y ii) del enunciado :

$$\begin{aligned} g(z + t' - z) &= g(t+\varepsilon z'+t'-\varepsilon z'-t) = g(t) + g(z'\cdot t') - g(t) = \\ &= vg(t)\cdot(z'\cdot g(t')) = h(t)\cdot(z'\cdot g(t')) = \\ &= h(t)\cdot(h\varepsilon(z')\cdot g(t')) = h(t+\varepsilon z')\cdot g(t') = \\ &= z\cdot g(t') \;. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(z * t') &= g((t+\varepsilon z') * t') = g(t * t' + \varepsilon z' * t') = g(t) * g(t') + h\varepsilon(z') * g(t') = \\ &= vg(t) * g(t') + h\varepsilon(z') * g(t') = h(t) * g(t') + h\varepsilon(z') * g(t') = \\ &= h(t+\varepsilon z') * g(t') = \\ &= z * g(t') \quad , \text{ para cada } * \;. \end{aligned}$$

y g es morfismo de F-estructuras.

Reciprocamente, supongamos que g es morfismo de F-estructuras :

Todo e de E admite una expresión $e = x+gt$ con $x \quad X$ y $t \quad T$.

$$\begin{aligned} \text{i)}\quad v(e)\cdot e' &= v(e)\cdot(x'+gt') = x' + v(e)\cdot g(t') = x' + h(t)\cdot g(t') = \\ &= x' + g(t+t'-t) = x' + g(t) + g(t') - g(t) = \\ &= x + g(t) + x' + g(t') - g(t) - x = \\ &= e + e' - e \;. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)}\quad v(e) * e' &= v(e) * (x'+gt') = v(e) * g(t') = g(t) * g(t') = \\ &= x * g(t') + g(t) * x' + g(t) * g(t') = \\ &= e * e'. \end{aligned}$$

y se verifican dichas condiciones.

(1.5.26) PROPOSICION .

Sea $\begin{tikzcd}[column sep=small] A \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$ un epimorfismo en $(\underline{C},R)$ con σ sobre (£-escindente), $L = Ker(\sigma)$ y X un R-módulo.

El morfismo $H^1(A,X)_{(\pounds)} \xrightarrow{\phi} H^1(\sigma,X)_{(\pounds)}$ de la sucesión exacta (1.3.2), aplica la extensión $X \rightarrowtail E \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$ en la extensión $X \rightarrowtail K \overset{v}{\twoheadrightarrow} L$, donde $K = Ker(E \rightarrowtail A \twoheadrightarrow B)$, como $X = Ker(p)$ actua trivialmente por conjugación sobre K, segun (1.2.15), K es una A-estructura, estando la extensión inducida por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & K \arrow[r, two heads, "v"] \arrow[d, tail] & L \arrow[d, tail] \\
X \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, two heads] & A \arrow[d, two heads, "\sigma"] \\
& B \arrow[r, equal] & B
\end{tikzcd} .$$

Dem.- No tiene dificultad comprobar que $X \rightarrowtail K \twoheadrightarrow L$ define un elemento de $H^1(\sigma,X)_{(\pounds)}$.

Consideremos, como en (1.5.25), la presentación $\begin{tikzcd} F \arrow[r, two heads] \arrow[d, "h"'] & F' \arrow[d, "h'"] \\ A \arrow[r, two heads, "\sigma"] & B \end{tikzcd}$.

Se tiene entonces la factorización

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, "g"'] \arrow[dd, "h"] & & F' \arrow[dl, "h'"'] \arrow[dd] \\
E \arrow[rr, two heads, "\sigma p"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dr, equal, "I"] & \\
& A \arrow[rr, two heads, "\sigma"] & & B
\end{tikzcd}$$

que nos induce el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
Hom_{\underline{C}^2_R}((F\to R,T),(R,X)) \arrow[r] & H^0((h,h'),Hom_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))H)_{\mathfrak{G}'(\pounds)} \arrow[r] & H^1(\sigma,X)_{(\pounds)} \arrow[r] & 0 \\
Hom_{\underline{C}^2_R}((E\to R,K),(R,X)) \arrow[r] \arrow[u] & H^0((p,I),Hom_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X)H)_{\mathfrak{G}'(\pounds)} \arrow[r] \arrow[u, "(g,h')^*"] & H^1(\sigma,X)_{(\pounds)} \arrow[r] \arrow[u, equal] & H^1(\sigma p,X)_{(\pounds)}
\end{tikzcd}$$

y por la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
(F \to R,T) \arrow[r, "H(h,h')"] \arrow[d, "H(g,h')"'] & (A \to R,L) \arrow[d, equal] \\
(E \to R,K) \arrow[r, "H(p,I)"] & (A \to R,L)
\end{tikzcd}$$

el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}((F\to R,T),(R,X)) \arrow[r] & H^0(H(h,h'),(R,X))_{(\mathcal{E})} \arrow[r] & H^1((A\to R,L),(R,X))_{(\mathcal{E})} \arrow[r] & H^1((F\to R,T),(R,X))_{(\mathcal{E})} \\
\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}((E\to R,K),(R,X)) \arrow[r] \arrow[u] & H^0(H(p,I),(R,X))_{(\mathcal{E})} \arrow[r, "\psi"] \arrow[u, "H(g,h')^*"] & H^1((A\to R,L),(R,X))_{(\mathcal{E})} \arrow[r] \arrow[u, equal] & H^1((E\to R,K),(R,X))_{(\mathcal{E})} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Y puesto que

$$H^0((h,h'),\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))H)_{\mathbb{G}'(\mathcal{E})} = H^0(H(h,h'),(R,X))_{(\mathcal{E})}$$

$$H^0((p,I),\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))H)_{\mathbb{G}'(\mathcal{E})} = H^0(H(p,I),(R,X))_{(\mathcal{E})}$$

(vease (1.5.23)) tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^0((p,I),\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))H)_{G'(\mathcal{E})} \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(\sigma,X)_{(\mathcal{E})} \arrow[d] \\
H^0(H(p,I),(R,X))_{(\mathcal{E})} \arrow[r] & H^1((A\to R,L),(R,X))_{(\mathcal{E})}
\end{tikzcd}$$

Sea $N:(\underline{C},R)'_{(\mathcal{E})} \longrightarrow (\underline{C},R)$ el funtor definido por $N\left(\begin{smallmatrix} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ & \searrow R \swarrow & \end{smallmatrix}\right) = A\to R$.

Se tiene la transformación natural

$$\underline{N}:\mathrm{Hom}_{(C,R)}\left(\ ,\begin{smallmatrix} X\times R \\ \downarrow \\ R\end{smallmatrix}\right)N \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))H$$

tal que para cada $\sigma\in(\underline{C},R)'_{(\mathcal{E})}$

$$\underline{N}(\sigma):\mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\begin{smallmatrix} A \\ \downarrow \\ R\end{smallmatrix},\begin{smallmatrix} X\times R \\ \downarrow \\ R\end{smallmatrix}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}((A\to R,\mathrm{Ker}(\sigma)),(R,X))$$

viene definida por $\underline{N}(\sigma)(f) = f/\mathrm{Ker}(\sigma):\mathrm{Ker}(\sigma)\longrightarrow X$.

Claramente $H^n\left(\sigma,\mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\ ,\begin{smallmatrix} X\times R \\ \downarrow \\ R\end{smallmatrix}\right)N\right)_{\mathbb{G}'(\mathcal{E})} = H^n(A,X)_{(\mathcal{E})}$ y los morfismos inducidos

$$H^n(A,X)_{(\mathcal{E})} \longrightarrow H^n(\sigma,\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X))H)_{\mathbb{G}'(\mathcal{E})} = H^n(\sigma,X)_{(\mathcal{E})}$$

son precisamente los de la sucesión (1.3.2).

Ademas los correspondientes morfismos inducidos hacen conmutar claramente el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^0(E,X)_{(\pounds)} \arrow[r] \arrow[d] & H^0(p,X)_{(\pounds)} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & H^1(A,X)_{(\pounds)} \arrow[r] \arrow[d] & H^1(E,X)_{(\pounds)} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
H^0(\sigma p,X)_{(\pounds)} \arrow[r] & H^0((p,I),\mathrm{Hom}_{\underline{C}^2_R}(\ ,(R,X)))_{(\pounds)} \arrow[r] & H^1(\sigma,X)_{(\pounds)} \arrow[r] & H^1(\sigma p,X)_{(\pounds)} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, es claro que $H^0(H(p,I),(R,X))_{(\pounds)} = \mathrm{Hom}_E(X,X) = H^0(p,X)_{(\pounds)}$, y concluimos con la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
H^0(p,X)_{(\pounds)} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dd, equal] & H^1(A,X)_{(\pounds)} \arrow[d] \\
 & H^1(\sigma,X)_{(\pounds)} \arrow[d] \\
H^0(H(p,I),(R,X))_{(\pounds)} \arrow[r, "\bar{\psi}"] & H^1((A \to R,L),(R,X))_{(\pounds)}
\end{tikzcd}$$

y como $[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A] = \psi(I_X)$, el morfismo $H^1(A,X)_{(\pounds)} \to H^1((A \to R,L),(R,X))_{(\pounds)}$ llevara esa clase de extensión singular en $\bar{\psi}(I_X)$.

La conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
(E \to R,K) \arrow[r, "H(p,I)=(p,v)"] \arrow[d, "(p,I)"'] & (A \to R,L) \arrow[d, equal] \\
(A \to R,K) \arrow[r, "(I,v)"] & (A \to R,L)
\end{tikzcd}$$

nos lleva a la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
H^0((I,v),(R,X))_{(\pounds)} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & H^1((A \to R,L),(R,X))_{(\pounds)} \arrow[d] \\
H^0((p,v),(R,X))_{(\pounds)} \arrow[r, "\bar{\psi}"] & H^1((A \to R,L),(R,L))_{(\pounds)}
\end{tikzcd}$$

y por tanto $\bar{\psi}(I_X) = \psi(I_X) = [X \rightarrowtail K \twoheadrightarrow L]$, segun (1.5.17).

(1.5.27) PROPOSICION .

Dada $[X \overset{i}{\rightarrowtail} E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L] \in H^1(\sigma, X)_{(\pounds)}$. Se tiene que $-[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow L] =$ $= [X \overset{-i}{\rightarrowtail} E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L]$.

Dem.- Por (1.5.15), $[X \overset{i}{\rightarrowtail} E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L] + [X \overset{-i}{\rightarrowtail} E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L] =$
$= [X \overset{i'}{\rightarrowtail} E_1 \overset{X}{\underset{L}{\times}} E_2 \overset{v'}{\twoheadrightarrow} L]$ segun

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "{(I,-I)}"'] & X \arrow[d] & \\
 & X \times X \arrow[r, tail] \arrow[d, "+"'] & E \underset{L}{\times} E \arrow[r, two heads] \arrow[d] & L \arrow[d, equal] \\
 & X \arrow[r, tail, "i'"] & E \overset{X}{\underset{L}{\times}} E \arrow[r, two heads, "v'"] & L
\end{tikzcd}$$

siendo en este caso $E \overset{X}{\underset{L}{\times}} E = \dfrac{E \times_L E}{\{(ix, ix), x \in X\}}$.

Definimos $g \colon E \times_L E \longrightarrow X$ por $g(e, e') = x$ si $i(x) = e - e'$. puesto que X es central en E, g es morfismo en $\underline{C}$, y es inmediato ver que es morfismo de A-estructuras. Como $g(ix, ix) = o$, se induce un unico morfismo $g' \colon E \overset{X}{\underset{L}{\times}} E \longrightarrow X$ tal que $g'\overline{(e, e')} = g(e, e')$; es inmediato que $g' v' = I_X$ y por consiguiente se tiene que $[X \rightarrowtail E \overset{X}{\underset{L}{\times}} E \twoheadrightarrow L] = [X \rightarrowtail X \times L \twoheadrightarrow L] = 0$.

1.6 $H^2(A, X)_{(\pounds)}$ y 2-EXTENSIONES ESPECIALES .

(1.6.1) Sea $\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A \arrow[dl] \\ R \arrow[u] & \end{tikzcd}$ un epimorfismo en $(\underline{C}, R)$ con σ sobre ($\pounds$-escindente). sea X un R-módulo, y $L = \mathrm{Ker}(\sigma)$.

Una "extensión especial" ($\pounds$-extensión especial) de σ por X, es una sucesiexacta

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] & E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "v"'] & & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A \\
 & & L \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

con v sobre ($\pounds$-escindente), que es de B-estructuras (donde B lo es por conjugación y A y X via σ) y tal que

i) $f(e)\cdot e' = e + e' - e$

ii) $f(e) * e' = e * e'$, para cada $*$.

Dos (£)extensiones especiales de σ por X son equivalentes si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & E' \arrow[r, "f'"] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A
\end{tikzcd}$$

con h morfismo de B-estructuras (h sera isomorfismo).

Denotaremos $E^1(\sigma,X)$ ($E^1(\sigma,X)_£$) al conjunto de clases de tales especiales

(1.6.2) PROPOSICION .

Sea $[X \rightarrowtail E \xrightarrow{f} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A] \in E^1(\sigma,X)_{(£)}$.

Si $\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "h"] & A' \arrow[d, "h'"] \\ B \arrow[r, "\sigma"] & A \end{tikzcd}$ es un morfismo en $(\underline{C},R)$ $((\underline{C},R)_£)$ y $\phi: X \longrightarrow Y$ es un morfismo de R-módulos, existen (£)extensiones especiales, unicas salvo equivalencia, $X \rightarrowtail E' \xrightarrow{f'} B' \overset{\sigma'}{\twoheadrightarrow} A'$ de σ' por X y $Y \rightarrowtail E_\phi \xrightarrow{f''} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$ de σ por Y, tal que se tienen diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\pi'"] & B' \arrow[r, two heads, "\sigma'"] \arrow[d, "h"] & A' \arrow[d, "h'"] \\
X \arrow[r, tail] & E \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"] & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, tail] & E_\phi \arrow[r, "f''"] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A
\end{tikzcd}$$

con π' morfismo de B'-estructuras (E lo es via h) y π morfismo de B-estructuras.

Dem.- Para el primer caso, la unica extensión posible es la obtenida con $E' = E\times_L L'$, siendo $L = \mathrm{Ker}(\sigma)$ y $L' = \mathrm{Ker}(\sigma')$, es decir

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dd, equal] & E'=E\times_L L' \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, "\pi"] & & B' \arrow[r] \arrow[dd, "h"] & A' \arrow[dd, "h'"] \\
& & L' \arrow[ur] \arrow[dd, "h|_{L'}"] & & \\
X \arrow[r] & E \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & B \arrow[r] & A \\
& & L \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

y utilizando la demostración de (1.5.12) puede verse que la asi obtenida es una (£)extensión de σ' por X.

Para el segundo, consideramoscomo en (1.5.13)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & E \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r] & E_\phi \arrow[r] & L \end{tikzcd}$$

despues de lo probado alli, no tiene dificultad probar que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] & E_\phi \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & B \arrow[r, two heads] & A \\ & & L \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

es una (£)extensión especial de σ por X, unica salvo equivalencia, que tal que se tiene el diagrama del enunciado.

Podemos, entonces, asegurar que se tiene un bifuntor

$$E^1(\ ,\ )_{(£)} : (\underline{C},R)'_{(£)} \times R\text{-Mod.} \longrightarrow \text{Set} \ .$$

(1.6.3) PROPOSICION .

Existe una equivalencia natural

$$H^1(\sigma,X)_{(£)} = E^1(\sigma,X)_{(£)} \ .$$

Dem.-

Para cada $\begin{tikzcd}[column sep=small] B \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & A \\ & R \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ y X, por el teorema (1.5.25), $H^1(\sigma,X)_{(£)}$ clasifica extensiones $X \rightarrowtail E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L$, de B-estructuras, donde L = Ker(σ) B-estructura por conjugación, tales que

i) $v(e)\cdot e' = e + e' - e$

ii) $v(e)*e' = e*e'$, para cada $*$.

La aplicación $[X \rightarrowtail E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L] \longmapsto [X \rightarrowtail E \xrightarrow{f=iv} B \twoheadrightarrow A]$ (con $E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L \overset{i}{\rightarrow} B$)

establece la biyección, claramente natural, entre $H^1(\sigma,X)_{(£)}$ y $E^1(\sigma,X)_{(£)}$.

(1.6.4) Como consecuencia $E^1(\sigma,X)_{(£)}$ hereda la estructura aditiva del grupo $H^1(\sigma,X)_{(£)}$; asi $E^1(\sigma,X)_{(£)}$ es un grupo abeliano con adición

$$[X \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow A] + [X \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow A] = [X \rightarrowtail E_1 \overset{X}{\underset{L}{\times}} E_2 \longrightarrow B \twoheadrightarrow A].$$

(vease (1.5.15)).

(1.6.5) Consideremos ahora la clase

$$\bigcup_{\sigma} E^1(\sigma, X)_{(\pounds)}$$

con σ un epimorfismo sobre ($\pounds$-escindente) en $(\underline{C}, R)$ a $A \longrightarrow R$, y establecemos en ella una relación de equivalencia, la generada por la relación siguiente:

Dados $[S_i : X \rightarrowtail E_i \xrightarrow{i} B_i \xrightarrow{i} A]$, i=1,2, estos son equivalentes si existe un morfismo $h=(h,I):\sigma_1 \longrightarrow \sigma_2$ en $(\underline{C},R)_{(\pounds)}$ tal que el morfismo inducido $h : E^1(\sigma_2, X)_{(\pounds)} \longrightarrow E^1(\sigma_1, X)_{(\pounds)}$ verifique $h[S_1] = [S_2]$.

Es obvio que esto equivale a que exista un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & A \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

con π morfismo de B_1-estructuras (E_2 es B_1-estructura via h).

Denotaremos $S^2(A,X)$ ($S^2(A,X)_{\pounds}$) al correspondiente conjunto cociente. Sus elementos seran clases $[[S: X \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow A]]$ de ($\pounds$)extensiones especiales de epimorfismos sobres ($\pounds$-escindentes) $\begin{tikzcd}[sep=small] B \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & A \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$ por X, a tales extensiones las llamaremos " 2-extensiones especiales " ($\pounds$-2-extensiones especiales) de A por X.

(1.6.6) Dadas $[[S_i : X \rightarrowtail E_i \xrightarrow{i} B_i \xrightarrow{i} A]] \in S^2(A,X)_{(\pounds)}$, definimos su suma $[[S_1]]+[[S_2]]$ como sigue

Consideramos

$$\begin{tikzcd} B_1 \times_A B_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B_2 \arrow[d, "\sigma_2"] \\ B_1 \arrow[r, "\sigma_1"] & A \end{tikzcd}$$

Si $\sigma = \sigma_i \pi_i$, tendremos los morfismos en $(\underline{C}, R)_{(\pounds)}$

$$\begin{array}{ccc} B_1 x_A B_2 & \xrightarrow{\sigma} & A \\ {\scriptstyle \pi_i=(\pi_i, I)}\downarrow & & \| \\ B_i & \xrightarrow{\sigma_i} & A \end{array}$$

i=1,2, que nos inducen morfismos

$$\pi_i^*: E^1(\sigma_i, X)_{(\pounds)} \longrightarrow E^1(\sigma, X)_{(\pounds)}$$

Definimos $[[S_1]] + [[S_2]] = [\pi_1^*[S_1] + \pi_2^*[S_2]]$.

Explicitamente, tendriamos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E'_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "i"] & B_1 x_A B_2 \arrow[r, "\sigma", two heads] \arrow[d, "\pi_i"] & A \arrow[d, equal] \\ & & L_1 x L_2 \arrow[u] \arrow[d] & \\ X \arrow[r, tail] & E_i \arrow[r] \arrow[dr, "i"] & B_i \arrow[r, "\sigma_i", two heads] & A \\ & & L_i \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

y $\pi_i^*[S_i] = [X \rightarrowtail E'_i \longrightarrow B_1 x_A B_2 \twoheadrightarrow A]$, donde $E'_1 = E_1 x_{L_1} (L_1 x L_2) = E_1 x L2$ y analogamente $E'_2 = E_2 x L_1$; entonces

$$[[S_1]] + [[S_2]] = [[\ X \rightarrowtail (E_1 x L_2) \overset{X}{x}_{L_1 x L_2} (E_2 x L_1) \longrightarrow B_1 x_A B_2 \twoheadrightarrow A\ ]] =$$

$$= [[\ X \rightarrowtail E_1 \overset{X}{x} E_2 \longrightarrow B_1 x_A B_2 \twoheadrightarrow A\ ]] .$$

Esta adición es claramente asociativa y conmutativa, ademas la clase $[[X = X \longrightarrow A = A]] = 0$ es un cero para esta adición, en efecto

$$0 + [[S: X \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow A]] = [[\ X \rightarrowtail E \overset{X}{x} X \longrightarrow B x_A A \twoheadrightarrow A]] = [[S]] .$$

Asi $S^2(A, X)_{(\pounds)}$ es un monoide abeliano con cero.

(1.6.8) La adición en $S^2(A, X)_{(\pounds)}$ es compatible con la adición del grupo $E^1(\sigma, X)_{(\pounds)}$ para cualquier $\begin{tikzcd}[row sep=small] B \arrow[r, "\sigma", two heads] \arrow[dr] & A \\ & R \arrow[u] \end{tikzcd}$ epimorfismo sobre (£-escindente; es decir, la aplicación

$$J : E^1(\sigma, X)_{(\pounds)} \longrightarrow S^2(A, X)_{(\pounds)}$$

tal que $J[S] = [[S]]$ es unmorfismo de monoides.

En efecto, sean $[S_i: X \rightarrowtail E_i \longrightarrow B \twoheadrightarrow A] \in E^1(\sigma, X)_{(\pounds)}$, i = 1,2; consideremos

$$\begin{tikzcd} B\times_A B \arrow[r, "\sigma'=\sigma\pi_i"] \arrow[d, "\pi_i=(\pi_i, I)"'] & A \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "\sigma"] & A \end{tikzcd}$$

es inmediato que $\pi_1^* = \pi_2^* : E^1(\sigma, X)_{(\pounds)} \longrightarrow E^1(\sigma', X)_{(\pounds)}$, y entonces

$$[[S_1]] + [[S_2]] = [\pi_1^*[S_1] + \pi_1^*[S_2]] = [\pi_1^*([S_1] + [S_2])] = [[S_1] + [S_2]].$$

Ademas $J(0) = [X \rightarrowtail X\times L \longrightarrow B \twoheadrightarrow A]$ y como se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X\times L \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[d, "\sigma"] & A \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, equal] & X \arrow[r] & A \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

con π_1 morfismo de B-estructuras, es $J(0) = 0$.

(1.6.9) COROLARIO.

$S^2(A,X)_{(\pounds)}$ e s un grupo abeliano.

Dem.- Sea $[[S: X \overset{i}{\rightarrowtail} E \overset{f}{\longrightarrow} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A]] \in S^2(A,X)_{(\pounds)}$; puesto que $E^1(\sigma, X)_{(\pounds)}$ es un grupo, existe $-[S] \in E^1(\sigma, X)_{(\pounds)}$, entonces $[[S]] + [-[S]] = J([S] - [S])$ $= J(0) = 0$.

Notemos que por (1.5.27), $-[[S]] = [[X \overset{-i}{\rightarrowtail} E \overset{f}{\longrightarrow} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A]]$

(1.6.10) PROPOSICION.

$S^2(A,X)_{(\pounds)}$ es funtorial en $A \longrightarrow R$ y X.

Dem.-

Si $\begin{tikzcd}[cramped] A' \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & A \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$ es un morfismo en $(\underline{C}, R)$ y $\phi: X \longrightarrow Y$ es un morfismo de R-módulos, para cada $[[S: X \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow A]] \in S^2(A,X)_{(\pounds)}$ existen (£)2-extensiones especiales unicas, salvo equivalencia, $S^g: X \rightarrowtail E \longrightarrow B^g \twoheadrightarrow A'$ de A' por X y $S_\phi : Y \rightarrowtail E_\phi \longrightarrow B \twoheadrightarrow A$ de A por Y, tal que se tienen diagramas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & B^g \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, tail] & E \arrow[r] & B \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, tail] & E_\phi \arrow[r] & B \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}$$

con I_E morfismo de B^g-estructuras y π morfismo de B-estructuras.

Dem.- Para el primer caso, observemos que el cuadrado de la derecha es nesariamente cartesiano, en consecuencia esta determinado; el resultado se sigue de (1.6.2). El segundo caso es el correspondiente en (1.6.2).

(1.6.11) TEOREMA .

Para $A \longrightarrow R \in (\underline{C}, R)$ y X un R-módulo, existe un isomorfismo natural

$$S^2(A,X)_{(\pounds)} \cong H^2(A,X)_{(\pounds)} \quad .$$

Dem.-

Definimos $W : S^2(A,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^2(A,X)_{(\pounds)}$ como sigue.

Dado $[[\ S: X \rightarrowtail E \xrightarrow{f} B \twoheadrightarrow A\ ]]$ $S^2(A,X)_{(\pounds)}$, el epimorfismo σ induce la sucesión exacta (1.3.2)

$$H^1(B,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(\sigma,X)_{(\pounds)} \xrightarrow{\psi} H^2(A,X)_{(\pounds)}$$

definimos $W[[S]] = \psi[S]$.

Si suponemos $h = (h,I) : \sigma \longrightarrow \sigma'$, por la naturalidad de la sucesión exacta considerada, el diagrama

$$\begin{tikzcd} H^1(\sigma,X)_{(\pounds)} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "h^*"'] & H^2(A,X)_{(\pounds)} \arrow[d, equal] \\ H^1(\sigma',X)_{(\pounds)} \arrow[r, "\psi'"] & H^2(A,X)_{(\pounds)} \end{tikzcd}$$

conmuta, y $\psi' h^*[S] = \psi[S]$, luego $W[h^*[S]] = W[[S]]$, y W esta bien definida.

Supongamos $t \in H^2(A,X)_{(\pounds)}$; considerando la presentación $G_{(\pounds)}(A) \overset{\delta}{\twoheadrightarrow} A$ se inducira la sucesión exacta

$$H^1(\delta,X)_{(\pounds)} \xrightarrow{\psi} H^2(A,X)_{(\pounds)} \longrightarrow 0$$

y por tanto existira $[S]\in H^1(\delta,X)_{(\pounds)}$ tal que $\psi[S]=t$, osea $W[[S]]=t$. Asi W es sobre.

Dadas $[[S_i: X \rightarrowtail E_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{\sigma_i} A]]\in S^2(A,X)_{(\pounds)}$, $i=1,2$; sea

$$\begin{tikzcd} B_1 \times_A B_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B_2 \arrow[d, "\sigma_2"] \\ B_1 \arrow[r, "\sigma_1"] & A \end{tikzcd}$$

el cuadrado cartesiano de σ_1 y σ_2, y $\sigma=\sigma_i\pi_i$. Entonces $[[S_1]]+[[S_2]]=$ $=[\pi_1^*[S_1]+\pi_2^*[S_2]]$. Ahora, los diagramas

$$\begin{tikzcd} H^1(\sigma_i,X)_{(\pounds)} \arrow[r, "\pi_i^*"] \arrow[d, "\psi"'] & H^1(\sigma,X)_{(\pounds)} \arrow[d, "\psi"] \\ H^2(A,X)_{(\pounds)} \arrow[r, equal] & H^2(A,X)_{(\pounds)} \end{tikzcd}$$

conmutan y entonces $W([[S_1]]+[[S_2]])=\psi\pi_1^*[S_1]+\psi\pi_2^*[S_2] = W[[S_1]]+W[[S_2]]$. con lo que W es morfismo de grupos abelianos.

Supongamos que $W[[S: X \rightarrowtail E \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\sigma} A]]=0$, sea $L=\mathrm{Ker}(\sigma)$; por la exactitud de

$$H^1(B,X)_{(\pounds)} \xrightarrow{\Phi} H^1(\sigma,X)_{(\pounds)} \xrightarrow{\psi} H^2(A,X)_{(\pounds)}\ , \quad \text{existira}$$

$[X \rightarrowtail E' \xrightarrow{p} B]\in H^1(B,X)_{(\pounds)}$, tal que $\Phi[X\rightarrowtail E' \twoheadrightarrow B]=[X\rightarrowtail E \twoheadrightarrow L]$, pero, por (1.5.26), $\Phi[X\rightarrowtail E' \twoheadrightarrow B]=[X\rightarrowtail K \twoheadrightarrow L]$, donde esta última extensión esta determinada por el diagrama de filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & K \arrow[r, two heads, "v"] \arrow[d, tail] & L \arrow[d, tail] \\ X \arrow[r, tail] & E' \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, two heads] & B \arrow[d, two heads, "\sigma"] \\ & A \arrow[r, equal] & A \end{tikzcd}$$

podemos suponer $K=E$, y sera tal que la acción de E' en E por conjugación coincide con la definida via $E' \longrightarrow B$.

Notemos la existencia del diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "p"] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & E \arrow[r] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A
\end{tikzcd} .$$

Consideremos $h : X \times E \longrightarrow E$ tal que $h(x,e) = x+e$; puesto que X es central en E, h es un morfismo en $\underline{C}$, y no presenta dificultad comprobar que es morfismo de E'-estructuras. Se tiene entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X \arrow[rr] & & A \arrow[r, equal] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] \arrow[dd, equal] & X \times E \arrow[rr] \arrow[u, "\pi"] \arrow[dr] \arrow[dd, "h"] & & E' \arrow[r, dashed, two heads, "p"] \arrow[u, "p"] \arrow[dd, "p"] & A \arrow[dd, equal] \\
 & & E \arrow[ur] \arrow[dl, equal] & & \\
X \arrow[r, tail] & E \arrow[rr] & & E \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

con h y π morfismos de E'-estructuras. Por tanto $[[S]] = 0$.

Y W es un isomorfismo.

La cuestión tratada a continuación es es analoga al clasico problema de interpretar los elementos del segundo grupo de cohomologia (tercero en notaciones clasicas) como obstrucciones a la existencia de extensiones de nucleo no abeliano.

(1.6.12) COROLARIO .

Sea $S: X \rightarrowtail E \xrightarrow{f} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$ una (£)2-extensión especial de A por X. Entonces $[[S]] = 0$ en $H^2(A,X)_{(£)}$ si y solo si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "p"] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & E \arrow[r] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A
\end{tikzcd}$$

tal que la acción de E' en E por conjugación coincida con la definida via $E' \rightarrow B$.

Dem.- Esta implicita en la demostración del teorema anterior.

Supuesto se verifican las condiciones del corolario anterior, la extensión $S_o: E \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow A$ y el epimorfismo p no tienen por que ser unicos, el par (S_o, p) se dice que es una "solución" para la (£)2-extensión especial S.

Dos soluciones (S_o, p) y $(\bar{S}_o, \bar{p})$ son equivalentes si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] \\ E \arrow[r, tail] & \bar{E}' \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}$$

(1.6.13) PROPOSICION .

Si $[[S: X \rightarrowtail E \longrightarrow B \xrightarrow{\alpha} A]] = 0$ en $H^2(A,X)_{(£)}$. Entonces el conjunto de clases de equivalencia de soluciones para S constituyen un conjunto principal homogeneo sobre el grupo $H^1(A,X)_{(£)}$.

Dem.-

Notemos , en principio, que tal conjunto es no vacio por(1.6.12).

La acción de $H^1(A,X)_{(£)}$ sobre el conjunto de soluciones viene definida como sigue: Si $H = [X \rightarrowtail H \twoheadrightarrow A]$ $H^1(A,X)_{(£)}$ y $(S_o: E \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow A, p)$ es una solución para S, considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "{(i,-1)}"'] & X \arrow[d, tail] & \\ & ExX \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads, "h"'] & E'x_A H \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "g"] & A \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, tail] & E \arrow[r] & B \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}$$

donde $h: ExX \longrightarrow E$ es el morfismo $h(e,x) = x+e$ (que es morfismo al ser X central en E) y $g: E'x_A H \longrightarrow B = E'x_A H \xrightarrow{\pi} E' \xrightarrow{p} B$; es inmediato que el diagrama conmuta y las filas son exactas asi como la columna de la izquierda. Sea $E'\overset{X}{x}_A H = E'x_A H/X$, y tenemos el diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E'x_A^X H \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\bar{g}"'] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & E \arrow[r] & B \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

como

$$\overline{(e',h)} + (e,o) - \overline{(e',h)} = e' + e - e' = p(e')\cdot e = \bar{g}\overline{(e',h)}\cdot e$$

$$\overline{(e',h)} * (e,o) = e' * e = p(e') * e = \bar{g}\overline{(e',h)} * e \text{ , para cada } * .$$

tenemos asi una nueva solución para S. Definimos

$$H + (S_o, p) = (E \rightarrowtail E'x_A^X H \twoheadrightarrow A, \bar{g}).$$

Si se consideran H y H' dos elementos de $H^1(A,X)_{(\pounds)}$ entonces

$$(H + H') + (S_o, p) = H + (H' + (S_o, p))$$

para ver esto basta observar que $E'x_A^X(Hx_A^X H') = \dfrac{E'x_A Hx_A H}{\{(x,x',x''), x+x'+x''=o\}} =$

$= (E'x_A^X H')x_A^X H.$

Como $E'x_A X \rtimes A = E'xX$ y $E'X_A^X X \rtimes A = E'$, tambien tenemos que

$$0 + (S_o, p) = (S_o, p)$$

Sean (S_o, p_o) y (S_1, p_1) dos soluciones para S; tendremos

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E'_i \arrow[r, two heads] \arrow[d, "p_i"'] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & E \arrow[r] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A
\end{tikzcd} \qquad I=o,1.$$

y siendo $L = Ker(\sigma)$, se induce la sucesión exacta

$$Ex_L E \rightarrowtail E'_o x_B E'_1 \twoheadrightarrow A$$

considerando entonces $E \rightarrowtail Ex_L E$ el morfismo diagonal, $e \longmapsto (e,e)$, e identificando E con su imagen, E es ideal de $E'_o x_B E'_1$, sea $H = E'_o x_B E'_1/E$; claramente $Ex_L E = ExX$ y $Ex_L E/E = X$ y tenemos la sucesión exacta

$$X \rightarrowtail H \twoheadrightarrow A$$

la cual, es facil ver, es una $(\pounds)$extensión singular de A por X, con lo que $H = [X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A] \in H^1(A,X)_{(\pounds)}$. Probaremos que $H + (S_o, p_o) = (S_1, p_1)$, es fa_ cil probar que H es unico, :

$H + (S_0, p_0) = (E \rightarrowtail E'_0 \overset{X}{\times}_A H \twoheadrightarrow A, \bar{g})$ donde $\bar{g}$ es el inducido g

$$\begin{tikzcd}
 & E \times X \arrow[r, tail] \arrow[d, "h"'] & E'_0 \times_A H \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & E \arrow[r] & B \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

siendo $g(e'_0, \overline{(e'_0, e'_1)}) = p_0(e'_0) = p_1(e'_1)$, notemos que todo elemento de $E'_0 \times_A H$ se expresa de manera unica en la forma $(e'_0, \overline{(e'_0, e'_1)})$ para (e'_0, e'_1) $E'_0 \times_B E'_1$, de hecho, la aplicación $(e'_0, e'_1) \longrightarrow (e'_0, \overline{(e'_0, e'_1)})$ es un isomorfismo estre $E'_0 \times_B E'_1$ y $E'_0 \times_A H$; se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X \arrow[rr, equal] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, tail] & & X \arrow[dr, equal] \arrow[dd, tail] & & & \\
 & X \arrow[rr, equal] \arrow[dd, tail] & & X \arrow[dd, tail] & & \\
E \times X \arrow[rr, tail] \arrow[dr, equal] \arrow[dd] & & E'_0 \times_A H \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] \arrow[dd] & & A \arrow[dr, equal] \arrow[dd, equal] & \\
 & E \times X \arrow[rr, tail] \arrow[dd] & & E'_0 \times_B E'_1 \arrow[rr, two heads] \arrow[dd] & & A \arrow[dd, equal] \\
X \arrow[rr, tail] \arrow[dr, equal] & & E'_0 \overset{X}{\times}_A H \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & A \arrow[dr, equal] & \\
 & X \arrow[rr, tail] & & E'_1 \arrow[rr, two heads] & & A
\end{tikzcd}$$

y $H + (S_0, p_0) = (S_1, p_1)$.

1.7. RELACION ENTRE H^n y Ext^n .

Tendremos aqui presente lo dicho en (1.2.8) y (1.2.12); y supondremos, en su caso, que $\mathcal{M}_{\mathfrak{L}}$ es una clase inyectiva en R-Mod. para cualquier R de $\underline{C}$.

(1.7.1) Si R es objeto de $\underline{C}$, En la categoria R-Mod. tendremos los funtores $\mathrm{Ext}_R^{\mathcal{E}}(X, Y) = \mathrm{Ext}_R^{\mathcal{M}}(X, Y)$, a los que denotaremos simplemente por $\mathrm{Ext}_R(X, Y)$, y eventualmente, caso que se de la situación (1.2.10), los funtores relativos $\mathrm{Ext}_R^{\mathcal{E}_{\mathfrak{L}}}(X, Y) = \mathrm{Ext}_R^{\mathcal{M}_{\mathfrak{L}}}(X, Y)$, a los que denotaremos $\mathrm{Ext}_R(X, Y)_{\mathfrak{L}}$.

Las igualdades prcvienen del caracter equilibrado del funtor Ext en categorias abelianas, (vease, por ejemplo [87]).

(1.7.2) Para R de $\underline{C}$, segun (1.2.8), se tiene la adjunción

$$\begin{array}{c} (\underline{C},R) \\ D_R \big\downarrow \; \big\uparrow J \\ R\text{-Mod}. \end{array}$$

donde J es el correspondiente funtor de olvido.

Puesto que el rango del funtor D_R es una categoria abeliana podremos definir los funtores de homologia en $(\underline{C},R)$ con coeficientes en D_R relativos al cotriple $\mathbb{G}$ $(\mathbb{G}_{\pounds})$, $H_n(\ ,D_R)_{\mathbb{G}(\pounds)}$. Denotaremos a $H_n(A \longrightarrow R, D_R)_{\mathbb{G}(\pounds)}$ por $H_n(A,D_R)_{(\pounds)}$.

Estos vendran calculados como el n-ésimo grupo de homologia del complejo

$$\cdots D_R G^{n+1}_{(\pounds)}(A) \longrightarrow D_R G^{n}_{(\pounds)}(A) \longrightarrow D_R G^{n-1}_{(\pounds)}(A) \longrightarrow \cdots$$

(1.7.3) LEMA .

Si $H^n(R,I)_{(\pounds)} = 0$, $n \geq 1$, para todo R-módulo inyectivo ($\mathcal{M}_{\pounds}$-inyectivo), Entonces $H_n(R,D_R)_{(\pounds)} = 0$, $n \geq 1$.

Dem.- Hemos de comprobar la exactitud del complejo descrito anteriormente, para lo cual es suficiente probar que para todo R-módulo inyectivo ($\mathcal{M}_{\pounds}$-inyectivo) el complejo

$$\cdots \operatorname{Hom}_R(D_R G^{n-1}_{(\pounds)}(R),I) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(D_R G^{n}_{(\pounds)}(R),I) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(D_R G^{n-1}_{(\pounds)}(R),I) \cdots$$

es exacto. Pero este complejo, por la adjunción $D_R \dashv J$, es equivalente al complejo

$$\cdots \operatorname{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\begin{array}{c} G^{n-1}_{(\pounds)}(R) \\ \downarrow \\ R \end{array}, \begin{array}{c} I \ltimes R \\ \downarrow \\ R \end{array}\right) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\begin{array}{c} G^{n}_{(\pounds)} \\ \downarrow \\ R \end{array}, \begin{array}{c} I \ltimes R \\ \downarrow \\ R \end{array}\right) \longrightarrow \cdots$$

y, segun (1.2.20), este lo es al complejo

$$\cdots \operatorname{Der}(G^{n-1}_{(\pounds)}(R),I) \longrightarrow \operatorname{Der}(G^{n}_{(\pounds)}(R),I) \longrightarrow \operatorname{Der}(G^{n+1}_{(\pounds)}(R),I) \longrightarrow \cdots$$

cuya cohomologia es $H^n(R,I)_{(\pounds)} = 0$ por hipotesis, y por tanto exacto.

(1.7.4) DEFINICION .

La categoria $\underline{C}$ se dice "Equilibrada " (" £-equilibrada ") si para cualquier R de $\underline{C}$ e I R-módulo inyectivo (£-inyectivo) $H^n(R,I) = 0$, $n \geq 1$ ($H^n(R,I)_{\pounds} = 0$, $n \geq 1$) .

(1.7.5) PROPOSICION .

Si $\underline{C}$ es (£)equilibrada, existe una equivalencia natural

$$H^n(R,\ )_{(\pounds)} \cong \operatorname{Ext}^n_R(D_R(R),\ )_{(\pounds)} \quad n \geq o .$$

Dem.-

Puesto que D_R lleva objetos $\mathfrak{C}_{(\pounds)R}$-proyectivos en R-módulos $\mathcal{E}_{(\pounds)}$-proyectivos, se sigue del lema(1.7.3), que el complejo

$$\cdots D_R G^{n+1}_{(\pounds)}(R) \longrightarrow D_R G^{n}_{(\pounds)}(R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_R G_{(\pounds)}(R) \longrightarrow D_R(R)$$

es una resolución $\mathcal{E}_{(\pounds)}$-proyectiva del R-modulo $D_R(R)$.

Entonces para un R-módulo X los grupos $\operatorname{Ext}^n_R(D_R(R),X)_{(\pounds)}$ vendran dados por la cohomologia del complejo

$$\cdots \operatorname{Hom}_R(D_R G^{n-1}_{(\pounds)}(R),X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(D_R G^{n}_{(\pounds)}(R),X) \longrightarrow \cdots$$

pero, por el mismo razonamiento hechoen la demostración del lema (1.7.3), este es equivalente al complejo

$$\cdots \operatorname{Der}(G^{n-1}_{(\pounds)}(R),X) \longrightarrow \operatorname{Der}(G^{n}_{(\pounds)}(R),X) \longrightarrow \operatorname{Der}(G^{n+1}_{(\pounds)}(R),X) \longrightarrow \cdots$$

cuya cohomologia da los grupos $H^n(R,X)_{(\pounds)}$.

Luego $H^n(R,X)_{(\pounds)} = \operatorname{Ext}^n_R(D_R(R),X)_{(\pounds)}$.

(1.7.6) COROLARIO .

Si $\underline{C}$ es (£)equilibrada, entonces $H^n(R,\ )_{(£)}$ es el n-ésimo funtor $\mathcal{E}_{(£)}$-derivado del funtor aditivo entre categorias abelianas

$$\mathrm{Der}(R,\ ) : R\text{-Mod.} \longrightarrow \mathrm{Ab}\ .$$

Dem.-

Sea X un R-módulo y $X \rightarrowtail \underline{I}$ una resolución $\mathcal{E}_{(£)}$-inyectiva de X; el complejo $\mathrm{Der}(R,\underline{I})$ es equivalente, de forma natural, al complejo $\mathrm{Hom}_R(D_R(R),\underline{I})$ cuya cohomologia dara $\mathrm{Ext}^n_R(D_R(R),X)_{(£)}$ que es $H^n(R,X)_{(£)}$ por (1.7.5) .

(1.7.7) Notemos que, bajo hipotesis de (£)equilibrio , en el isomorfismo de (1.7.5) $H^n(R,X)_{(£)} = \mathrm{Ext}^n_R(D_R(R),X)_{(£)}$, R no puede ser sustituido por un objeto $A \longrightarrow R$ de $(\underline{C},R)$; el isomorfismo solo es funtorial en X.

Si embargo, en el caso de que todo R-módulo $\mathcal{E}_{(£)}$-inyectivo sea tambien A-módulo inyectivo, via $A \longrightarrow R$, entonces el complejo

$$(\mathrm{Hom}_R(D_R G^n_{(£)}(A), I), n \geq o)$$

para I R-módulo $\mathcal{E}_{(£)}$-inyectivo, tendra por grupos de cohomologia $H^n(A,I)_{(£)}$ que seran nulos , y por tanto $(D_R G^n_{(£)}(A), n \geq o)$ es exacto y es una resolución proyectiva de $D_R(A\text{—}R)$; tendriamos asi que

$$H^n(A,\ )_{(£)} = \mathrm{Ext}^n_R(D_R(A \to R),\ )_{(£)}$$

(1.7.8) Para $A \longrightarrow R \in (\underline{C},R)$, denotaremos

$$\hat{H}^n(A,\ )_{(£)} = \mathrm{Ext}^n_R(D_R(A \to R),\ )_{(£)}$$

osea $\hat{H}^n(A,\ )_{(£)}$ es el n-ésimo funtor $\mathcal{E}_{(£)}$-derivado del funtor

$$\mathrm{Der}(A,\ ) : R\text{-Mod.} \longrightarrow \mathrm{Ab}.$$

(1.7.9) Sea $A \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} R$ un epimorfismo sobre ($\pounds$-escindente). Considerando el funtor $D_R : (\underline{C}, R) \longrightarrow R\text{-Mod}$. (que es $\mathcal{E}_{\mathbb{G}(\pounds)R}$-exacto a la derecha), por (1.1.1) se tendra la sucesión exacta

$$\cdots H_1(R, D_R)_{(\pounds)} \longrightarrow H_o(\sigma, D_R)_{(\pounds)} \longrightarrow D_R(A) \longrightarrow D_R(R) \longrightarrow 0$$

donde denotamos $D_R(A \twoheadrightarrow R)$ por $D_R(A)$.

Claramente los funtores $\mathrm{Hom}_R(H_o(\ , D_R)_{(\pounds)}, X) : (\underline{C}, R)^{\flat}_{(\pounds)} \longrightarrow Ab$ y $\mathrm{Hom}_R(D_R(\ ), X) : (\underline{C}, R) \longrightarrow Ab$ son $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'(\pounds)}$ y $\mathcal{E}_{\mathbb{G}(\pounds)R}$ - exactos a la derecha respectivamente. Consideremos la resolucion simplicial truncada de σ en $(\underline{C}, R)^{\flat}_{(\pounds)}$

$$\begin{tikzcd}
G^2_{(\pounds)}(A) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "G^2_{(\pounds)}(\sigma)"'] & G_{(\pounds)}(A) \arrow[r] \arrow[d, "G_{(\pounds)}(\sigma)"] & A \arrow[d, "\sigma"] \\
G^2_{(\pounds)}(R) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_{(\pounds)}(R) \arrow[r] & R
\end{tikzcd}$$

Como las sucesiones

$$H_o(G_{(\pounds)}(\sigma), D_R)_{(\pounds)} \rightarrowtail D_R G_{(\pounds)}(A) \twoheadrightarrow D_R G_{(\pounds)}(R)$$

$$H_o(G^2_{(\pounds)}(\sigma), D_R)_{(\pounds)} \rightarrowtail D_R G^2_{(\pounds)}(A) \twoheadrightarrow D_R G^2_{(\pounds)}(R)$$

son exactas cortas escindidas, el funtor $\mathrm{Hom}_R(\ , X)$ llevara estas en sucesiones exactas cortas escindidas, y tendremos asi

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{Hom}_R(H_o(\sigma, D_R)_{(\pounds)}, X) \arrow[d, tail] \\
\mathrm{Hom}_R(D_R G_{(\pounds)}(R), X) \arrow[r, tail] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(D_R G_{(\pounds)}(A), X) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(H_o(G_{(\pounds)}(\sigma), D_R)_{(\pounds)}, X) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_R(D_R G^2_{(\pounds)}(R), X) \arrow[r, tail] & \mathrm{Hom}_R(D_R G^2_{(\pounds)}(A), X) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Hom}_R(H_o(G^2_{(\pounds)}(\sigma), D_R)_{(\pounds)}, X)
\end{tikzcd}$$

donde las filas son exactas por lo dicho anteriormente y la columna de la derecha por ser $\mathrm{Hom}_R(H_o(\ , D_R)_{(\pounds)}, X)$ $\mathcal{E}_{\mathbb{G}'(\pounds)}$-exacto a la derecha.

Deducimos entonces que

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(H_o(\sigma,D_R)_{(\pounds)},X) &= H^o(\sigma,\mathrm{Hom}_R(D_R(\ ),X))_{(\pounds)} = \\ &= H^o(\sigma,\mathrm{Der}(\ ,X))_{(\pounds)} = \\ &= H^o(\sigma,X)_{(\pounds)} .\end{aligned}$$

(1.7.10) COROLARIO .

Si $\sigma: A \twoheadrightarrow R$, es un epimorfismo sobre (£-escindente), se tiene que

$$H_o(\sigma,D_R)_{(\pounds)} = \frac{L}{[L,L]} .$$

Dem.- Por (1.3.4) se tiene que $H^o(\sigma,X)_{(\pounds)} = \mathrm{Hom}_R(\frac{L}{[L,L]}, X)$, combinando esto con el resultado obtenido en (1.7.9) tenemos que

$$\mathrm{Hom}_R(H_o(\sigma,D_R)_{(\pounds)},\ ) = \mathrm{Hom}_R(\frac{L}{[L,L]},\ ) ;$$

es inmediato concluir el corolario.

(1.7.11) COROLARIO .

Si $\underline{C}$ es (£)equilibrada y $\sigma: A \twoheadrightarrow R$ un epimorfismo sobre (£-escindente), se tiene la sucesión exacta corta en R-Mod.

$$\frac{L}{[L,L]} \rightarrowtail D_R(A) \twoheadrightarrow D_R(R)$$

siendo $L = \mathrm{Ker}(\sigma)$.

Dem.- Puesto que induce la sucesión exacta

$$\cdots H_1(R,D_R)_{(\pounds)} \longrightarrow H_o(\sigma,D_R)_{(\pounds)} \longrightarrow D_R(A) \longrightarrow D_R(R) \longrightarrow 0$$

tal como se dijo en (1.7.9), y al ser $\underline{C}$ (£)equilibrada se tiene que $H_1(R,D_R)_{(\pounds)} = 0$ por (1.7.3), tendremos la sucesión exacta corta

$$H_o(\sigma,D_R)_{(\pounds)} \rightarrowtail D_R(A) \twoheadrightarrow D_R(R)$$

y basta ya utilizar el corolario anterior.

Podemos suponer, sin perder generalidad (vease, por ejemplo [20]), que el funtor D_R conserva epimorfismos £-escindentes.

(1.7.12) PROPOSICION .

Si $\underline{C}$ es equilibrada y σ: A $\twoheadrightarrow$ R un epimorfismo sobre (£-escindente) con nucleo L, existe una sucesión exacta larga natural

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(R,X) \longrightarrow \mathrm{Der}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(\frac{L}{[L,L]},X\right) \longrightarrow H^1(R,X)_{(£)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \hat{H}^1(A,X)_{(£)} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R\left(\frac{L}{[L,L]},X\right)_{(£)} \longrightarrow H^1(R,X)_{(£)} \longrightarrow \cdots$$

para cada R-módulo X.

Dem.- Por (1.7.11) se tiene la sucesión exacta de R-módulos

$$\frac{L}{[L,L]} \rightarrowtail D_R(A) \twoheadrightarrow D_R(R)$$

que induce la sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(D_R(R),X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(D_R(A),X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(\frac{L}{[L,L]},X\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(D_R(R),X)_{(£)} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(D_R(A),X)_{(£)} \longrightarrow \cdots$$

que con las correspondientes identificaciones es la enunciada.

Esta sucesióntiene su precedente en la obtenida por Barr-Rinehart en [20] para grupos, álgebras asociativas y álgebras de Lie; generalizandola de forma clara.

Probaremos ahora que bajo ciertas condiciones la sucesión exacta larga anterior es la misma que la obtenida segun (1.3.2).

(1.7.13) PROPOSICION .

Si σ: A $\twoheadrightarrow$ R es un epimorfismo sobre (£-escindente), y se verifica que todo R-módulo $\mathcal{C}_{(£)}$-inyectivo es , via σ, un A-módulo $\mathcal{C}_{(£)}$-inyectivo, siendo ademas $\underline{C}$ (£)equilibrada, entonces las sucesiones inducidas por σ , segun (1.7.12) y (1.3.2), son iguales.

En particular $H^n(\sigma,X)_{(\pounds)} = \mathrm{Ext}^n_R(\frac{L}{[L,L]},X)_{(\pounds)}$.

Dem.-

En las condiciones delenunciado, por (1.7.7), se tiene que $\hat{H}^n(A,X)_{(\pounds)} =$

$= H^n(A,X)_{(\pounds)}$. Queda, pues, probar que $H^n(\sigma,X)_{(\pounds)} = \mathrm{Ext}^n_R(\frac{L}{[L,L]},X)_{(\pounds)}$:

Si $n = o$, $H^o(\sigma,X)_{(\pounds)} = \mathrm{Hom}_R(\frac{L}{[L,L]},X) = \mathrm{Ext}^o_R(\frac{L}{[L,L]},X)$ por (1.3.4).

Si $n\geqslant 1$, tenemos la sucesión exacta

$$H_n(A,D_R)_{(\pounds)} \longrightarrow H_n(\sigma,D_R)_{(\pounds)} \longrightarrow H_{n+1}(R,D_R)_{(\pounds)}$$

y por ser la categoria (£)equilibrada y todo R-módulo $\iota\mathcal{Y}_{(\pounds)}$-inyectivo A-módulo $\iota\mathcal{Y}_{(\pounds)}$-inyectivo, tenemos que $H_n(A,D_R)_{(\pounds)} = 0 = H_{n+1}(R,D_R)_{(\pounds)}$, luego tambien sera $H_n(\sigma,D_R)_{(\pounds)} = 0$.

Consideremos el funtor $H_o(\ ,D_R)_{(\pounds)} : (\underline{C},R)_{(\pounds)} \longrightarrow$ R-Mod. y la resolución simplicial de

$$\begin{tikzcd}
\cdots G^2_{(\pounds)}(A) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "G^2_{(\pounds)}(\sigma)"] & G_{(\pounds)}(A) \arrow[r] \arrow[d, "G_{(\pounds)}(\sigma)"] & A \arrow[d, "\sigma"] \\
\cdots G^2_{(\pounds)}(R) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_{(\pounds)}(R) \arrow[r] & R
\end{tikzcd}$$

como $G^n_{(\pounds)}(\sigma)$ es escindido, se tiene la sucesión exacta corta escindida

$$H_o(G^n_{(\pounds)}(\sigma),D_R)_{(\pounds)} \rightleftarrows D_R G^n_{(\pounds)}(A) \rightleftarrows D_R G^n_{(\pounds)}(R)$$

y por consiguiente $H_o(G^n_{(\pounds)}(\sigma),D_R)_{(\pounds)}$ es un R-módulo $\mathcal{E}_{(\pounds)}$- proyectivo al ser sumando directo de uno que lo es. Ademas el complejo

$$\cdots H_o(G^2_{(\pounds)}(\sigma),D_R)_{(\pounds)} \longrightarrow H_o(G_{(\pounds)}(\sigma).D_R)_{(\pounds)} \longrightarrow H_o(\sigma,D_R)_{(\pounds)} \longrightarrow 0$$

tiene por homologia $H_n(\sigma,H_o(\ ,D_R)_{(\pounds)})_{\mathcal{G}_{(\pounds)}} = H_n(\sigma,D_R)_{(\pounds)} = 0$ y es exacto; luego es una resolución $\mathcal{E}_{(\pounds)}$-proyectiva de $H_0(\sigma,D_R)_{(\pounds)}$ que es $\frac{L}{[L,L]}$ por (1.7.10). Asi la homologia del complejo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_0(G_{(\pounds)}(\sigma),D_R)_{(\pounds)},X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_0(G^2_{(\pounds)}(\sigma),D_R)_{(\pounds)},X) \longrightarrow \cdots$$

es $\mathrm{Ext}^n_R(\frac{L}{[L,L]},X)_{(\pounds)}$.

Pero $\mathrm{Hom}_R(H_0(G^n_{(\pounds)}(\sigma),D_R)_{(\pounds)},X) = H^0(G^n_{(\pounds)}(\sigma),X)_{(\pounds)}$, y el último complejo es equivalente a

$$0 \longrightarrow H^0(G_{(\pounds)}(\sigma),X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^0(G^2_{(\pounds)}(\sigma),X)_{(\pounds)} \longrightarrow \cdots$$

cuya cohomologia es $H^n(\sigma,H^0(\ ,X)_{(\pounds)})_{\mathbb{G}_{(\pounds)}} = H^n(\sigma,X)_{(\pounds)}$.

Luego $H^n(\sigma,X)_{(\pounds)} = \mathrm{Ext}^n_R(\frac{L}{[L,L]},X)_{(\pounds)}$.

1.8. H^n y n-EXTENSIONES , $n\geq 3$.

(1.8.1) Sea Robjeto de $\underline{C}$ y X un R-módulo.

Para $n\geq 3$, una " n-extensión especial" (£-n-extensión especial, caso que se de la situación (1.2.10)) de R por X es una sucesión exacta

$$S^n:\ X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow E \xrightarrow{f} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} R$$

que es el producto de Yoneda de una 2-extensión especial (£-2-extensión especial) de R por el R-módulo V=Ker(f)

$$V \rightarrowtail E \xrightarrow{f} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} R$$

por una sucesión $\mathcal{E}_{(\pounds)}$-exacta de R-módulos

$$X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-2} \twoheadrightarrow V\ .$$

Dos (£)n-extensiones especiales si existe un diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & \cdots \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, "h_{n-2}"'] & & E \arrow[r] \arrow[dd, "h'"] & B \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "h"] & R \arrow[dd, equal] \\
X \arrow[r, tail] & X'_1 \arrow[r] & \cdots & & V \arrow[ur, tail] \arrow[dd, "g"] & & & \\
& & & X'_{n-2} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & E' \arrow[r] & B' \arrow[r, two heads] & R \\
& & & & V \arrow[ur, tail] & & &
\end{tikzcd}$$

donde $h_1, \ldots, h_{n-2}$ y g son morfismos de R-módulos y h' morfismo de B-estructuras, siendo E' B-estructura via h.

Esta relación engendra una relación de equivalencia en el conjunto de (£)n-extensiones especiales de R por X a cuyo conjunto cociente le denotamos por $S^n(R,X)_{(\pounds)}$.

(1.8.2) PROPOSICION.

$S^n(R,X)_{(\pounds)}$ es un grupo abeliano.

Dem.-

Dadas $[S^n]$ y $[S'^n] \in S^n(R,X)_{(\pounds)}$, definimos $[S^n] + [S'^n] = [S^n + S'^n]$, donde

$$S^n + S'^n = X \rightarrowtail X_1 \overset{X}{\times} X'_1 \longrightarrow X_2 \times X'_2 \longrightarrow \cdots \rightarrow X_{n-2} \times X'_{n-2} \longrightarrow E \times E' \longrightarrow B \times_R B' \twoheadrightarrow R.$$

No presenta dificultad comprobar que, con esta adición, $S^n(R,X)_{(\pounds)}$ es un monoide abeliano con cero la clase $0 = [X = X - 0 - \cdots - 0 - R = R]$

Consideremos $X \rightarrowtail I_1 \longrightarrow I_2 - \cdots \rightarrow I_{n-2} \twoheadrightarrow D$ $\mathcal{E}_{(\pounds)}$-exacta con I_j $\mathcal{E}_{(\pounds)}$-inyectivo, en R-Mod. Y definimos

$$W : S^2(R,X)_{(\pounds)} \longrightarrow S^n(R,X)_{(\pounds)}$$

por $W[[D \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow R]] = [X \rightarrowtail I_1 \longrightarrow \cdots \rightarrow I_{n-2} \xrightarrow{\quad} E \longrightarrow B \twoheadrightarrow R]$, con $I_{n-2} \twoheadrightarrow D \rightarrowtail E$

W es morfismo de monoides con cero y ademas es sobre, pues dada una (£)n-extensión de R por X $S^n : X \rightarrowtail X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_{n-2} \longrightarrow E \longrightarrow B \twoheadrightarrow R$, con $X_{n-2} \twoheadrightarrow V \rightarrowtail E$, existen morfismos de R-módulos haciendo conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
X & \rightarrowtail & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_{n-2} & \twoheadrightarrow & V \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle h_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle h_{n-2}} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\
X & \rightarrowtail & I_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & I_{n-2} & \twoheadrightarrow & D
\end{array}$$

y por (1.6.10), g induce un morfismo $g_*: S^2(R,V)_{(\pounds)} \longrightarrow S^2(R,D)_{(\pounds)}$, que si suponemos es $g_*[[V \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow R]] = [[D \rightarrowtail E_g \longrightarrow B \twoheadrightarrow R]]$, se tendra un diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
V & \rightarrowtail & E & \longrightarrow & B & \twoheadrightarrow & R \\
\downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \| & & \| \\
D & \rightarrowtail & E_g & \longrightarrow & B & \twoheadrightarrow & R
\end{array}$$

con h' morfismo de B-estructuras.

Claramente $W[[D \text{---} E_g \text{---} B \text{---} R]] = [S^n]$.

Como consecuencia , al ser $S^2(R,D)_{(\pounds)}$ un grupo, $S^n(R,X)_{(\pounds)}$ es un grupo.

Notemos que $-[S^n] = W(-[[D \rightarrowtail E_g \longrightarrow B \twoheadrightarrow R]]) =$

$= W[[D \overset{-i}{\rightarrowtail} E_g \longrightarrow B \twoheadrightarrow R]] =$ (por (1.6.9))

$= [X \overset{-i}{\rightarrowtail} X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow E \longrightarrow B \twoheadrightarrow R]$

Destacamos en la siguiente proposición el caracter funtorial de $S^n(R,\ )_{(\pounds)}$, (aunque tambien se da la funtorialidad en la otra variable pasando a la categoria coma).

(1.8.3) PROPOSICION .

Si $\phi: X \longrightarrow Y$ es un morfismo de R-módulos y $[S^n] \in S^n(R,X)_{(\pounds)}$, existe una (£)n-extensión especial de R por Y

$$S^n_\phi : Y \rightarrowtail Y_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow Y_{n-2} \underset{\searrow V' \nearrow}{\longrightarrow} E' \longrightarrow B' \twoheadrightarrow R$$

tal que se tiene un diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"'] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & \cdots \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, "h_{n-2}"] & & E \arrow[r] \arrow[dd, "h'"] & B \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "h"] & R \arrow[dd, equal] \\
& & & & V \arrow[ur, tail] \arrow[dd, "g"] & & & \\
Y \arrow[r, tail] & Y_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_{n-2} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & E' \arrow[r] & B' \arrow[r, two heads] & R \\
& & & & V' \arrow[ur, tail] & & &
\end{tikzcd}$$

con $h_1, \ldots, h_{n-2}$, y g morfismos de R-módulos y h' morfismo de B-estructuras. Todas las S^n_ϕ son equivalentes y se tiene un morfismo de grupos abelianos

$$\phi_*: S^n(R,X)_{(\mathcal{E})} \longrightarrow S^n(R,Y)_{(\mathcal{E})}$$

De esta forma $S^n(R,\ )$ es un funtor.

LA demostración es estandard, (vease por ejemplo [87, p.149]), Notese que entre las posibles S^n_ϕ hay una , que denotaremos $\bar{S}^n_\phi$ determinada por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
S^n: & X \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi"'] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & R \arrow[d, equal] \\
\bar{S}^n_\phi: & Y \arrow[r, tail] & Y_1 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[r] & E \arrow[r] & B \arrow[r, two heads] & R
\end{tikzcd}$$

(el cuadrado de la izquierda sera siempre cocartesiano en R-Mod.) .

(1.8.4) PROPOSICION .

Si I es un R-módulo $\mathcal{Y}_{(\mathcal{E})}$-inyectivo y $n \geqslant 3$, entonces $S^n(R,I)_{(\mathcal{E})} = 0$.

Dem.-

Consideremos el epimorfismo $W : S^2(R,D)_{(\mathcal{E})} \longrightarrow S^n(R,I)_{(\mathcal{E})}$ construido en(1.8.2), ahora, como I es $\mathcal{Y}_{(\mathcal{E})}$-inyectivo, podemos tomar D=0 y por tanto $S^2(R,D)_{(\mathcal{E})} = 0$ y $S^n(R,I)_{(\mathcal{E})} = 0$.

(1.8.5) TEOREMA .

Si $\underline{C}$ es $(\mathcal{E})$equilibrada, existe una equivalencia natural

$$H^n(R,\ )_{(\mathcal{E})} \cong S^n(R,\ )_{(\mathcal{E})}$$

para todo $n \geqslant 2$.

Dem.-

Lo demostraremos por inducción sobre n. Sea X un R-módulo.

Si n = 2, por (1 .6.11), $H^2(R,X)_{(\mathcal{L})} \cong S^2(R,X)_{(\mathcal{L})}$.

Si n> 2, supuesto el resultado para n-1, consideremos $X \rightarrowtail I \overset{v}{\twoheadrightarrow} D$ una presentación $\mathcal{E}_{(\mathcal{L})}$-inyectiva de X en R-Mod. por (1.3.1), se tiene la sucesión exacta

$$0 = H^{n-1}(R,I)_{(\mathcal{L})} \longrightarrow H^{n-1}(R,D)_{(\mathcal{L})} \longrightarrow H^n(R,X)_{(\mathcal{L})} \longrightarrow H^n(R,I)_{(\mathcal{L})} = 0$$

por tanto se tiene el isomorfismo (natural)

$$H^{n-1}(R,D)_{(\mathcal{L})} \cong H^n(R,X)_{(\mathcal{L})}$$

y, por hipotesis de inducción, $H^{n-1}(R,D)_{(\mathcal{L})} \cong S^{n-1}(R,D)_{(\mathcal{L})}$. Combinando estos isomorfismos basta establecer un isomorfismo natural

$$Z : S^{n-1}(R,D)_{(\mathcal{L})} \cong S^n(R,X)_{(\mathcal{L})}$$

Definimos Z como sigue:

Dada S^{n-1}: $D \rightarrowtail X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow E \longrightarrow B \twoheadrightarrow R$, notamos

$$ZS^{n-1}: \ X \rightarrowtail I \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow E \longrightarrow B \twoheadrightarrow R$$

y definimos $Z[S^{n-1}] = [ZS^{n-1}]$.

No tiene dificultad comprobar que Z esta bien definida y es morfismo de grupos abelianos.

Veamos que es sobre:

Sea $[\, S^n: X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B \longrightarrow R\,] \in S^n(R,X)_{(\mathcal{L})}$; por ser

I $\mathcal{E}_{(\mathcal{L})}$-inyectivo existe un diagrama en R-Mod.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "h_1"] & K \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, tail] & I \arrow[r, two heads] & D \end{tikzcd}$$

y g induce un morfismo g_*: $S^{n-1}(R,K) \longrightarrow S^{n-1}(R,D)$, es inmediato, entonces, que $Z(\, g_*[\, K \rightarrowtail X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow B \longrightarrow R\,]) = [S^n]$.

Probaremos que Z is inyectiva; distinguiremos los casos $n=3$ y $n>3$.

Es suficiente probar que se verifica lo enunciado en A) y B) :

A) Si se tienen diagramas

1)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[dd, equal] & X_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "h_1"'] & & E \arrow[r] \arrow[dd, "h"] & B \arrow[r] \arrow[dd, equal] & R \arrow[dd, equal] \\
& & K \arrow[ur] \arrow[dd, "g"] & & & \\
X \arrow[r, tail] & I \arrow[rr] \arrow[dr] & & E_g \arrow[r] & B \arrow[r] & R \\
& & D \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

2)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[dd, equal] & X'_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "h'_1"'] & & E' \arrow[r] \arrow[dd, "h'"] & B' \arrow[r, two heads] \arrow[dd, equal] & R \arrow[dd, equal] \\
& & K' \arrow[ur] \arrow[dd, "g'"] & & & \\
X \arrow[r, tail] & I \arrow[rr] \arrow[dr] & & E'_{g'} \arrow[r] & B' \arrow[r, two heads] & R \\
& & D \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

3)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[dd, equal] & X_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "\phi_1"'] & & E \arrow[r] \arrow[dd, "\pi"] & B \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "\pi'"] & R \arrow[dd, equal] \\
& & K \arrow[ur] \arrow[dd, "\phi"] & & & \\
X \arrow[r, tail] & X'_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "1"'] & & E' \arrow[r] & B' \arrow[r, two heads] & R \\
& & K' \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

con h_1, g, h'_1, g', ϕ_1 y ϕ morfismos de R-módulos, h y π morfismos de B-estructuras y h' morfismo de B'-estructuras; entonces existe $f : E_g \longrightarrow E'_{g'}$ morfismo de B-estructuras tal que

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E_g \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\pi'"] & R \arrow[d, equal] \\
D \arrow[r, tail] & E'_{g'} \arrow[r] & B' \arrow[r, two heads] & R
\end{tikzcd}$$

conmuta.

B) Si se tienen diagramas

1)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[dd, equal] & X_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "1"] \arrow[dd, "h_1"'] & & X_2 \arrow[rr] \arrow[dr, "2"] \arrow[dd, "h_2"] & & X_3 \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \cdots \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[dd, equal] & B \arrow[r, two heads] \arrow[dd, equal] & R \arrow[dd, equal] \\
& & K_1 \arrow[ur] \arrow[dd, "g"] & & K_2 \arrow[ur] \arrow[dd, equal] & & & & & \\
X \arrow[r, tail] & I \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y_2 \arrow[rr, tail] \arrow[dr, "2"] & & X_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E \arrow[r] & B \arrow[r, two heads] & R \\
& & D \arrow[ur] & & K_2 \arrow[ur] & & & & &
\end{tikzcd}$$

2)
$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[dd, equal] & X'_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, "h'_1"'] & & X'_2 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, "h_2"] & & X'_3 \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \cdots \arrow[r] & E' \arrow[r] \arrow[dd, equal] & B' \arrow[r, two heads] \arrow[dd, equal] & R \arrow[dd, equal] \\
& & K'_1 \arrow[ur, tail] \arrow[dd, "g'"] & & K'_2 \arrow[ur, tail] & & & & & \\
X \arrow[r, tail] & I \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & Y'_2 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & X'_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E' \arrow[r] & B' \arrow[r, two heads] & R \\
& & D \arrow[ur, tail] & & K'_2 \arrow[ur, tail] & & & & &
\end{tikzcd}
$$

3)
$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[dd, equal] & X_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, "\phi_1"'] & & X_2 \arrow[r] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd, "\phi_2"] & \cdots \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd] & & E \arrow[r] \arrow[dd, "\pi"] & B \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "\pi'"] & R \arrow[dd, equal] \\
& & K_1 \arrow[ur, tail] \arrow[dd, "\psi_1"] & & K_2 \arrow[dd, "\psi_2"] & & V \arrow[ur, tail] \arrow[dd, "\psi"] & & & \\
X \arrow[r, tail] & X'_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & X'_2 \arrow[r] \arrow[dr, two heads] & \cdots \arrow[r] & X'_{n-2} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & E' \arrow[r] & B' \arrow[r, two heads] & R \\
& & K'_1 \arrow[ur, tail] & & K'_2 & & V' \arrow[ur, tail] & & &
\end{tikzcd}
$$

con $h_1, h_2, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-2}$ y ψ morfismos de R-módulos, y π morfismo de B-estructuras; entonces existe $f : Y_2 \longrightarrow Y'_2$ morfismo de R-módulos tal que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d, "f"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "\phi_3"] & \cdots \arrow[r] & X_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{n-2}"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\pi'"] & R \arrow[d, equal] \\
D \arrow[r, tail] & Y'_2 \arrow[r] & X'_3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X'_{n-2} \arrow[r] & E' \arrow[r] & B' \arrow[r, two heads] & R
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

En efecto, supongamos las hipotesis del caso A) y consideremos las factorizaciones

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r, two heads, "m"] \arrow[d, "h_1"] & K \arrow[r, tail, "n"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "Q"] & E \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & R \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & I \arrow[r, two heads, "v"] & D \arrow[r, tail, "t"] & E_g \arrow[r, "\overline{\beta}"] & B \arrow[r, two heads] & R
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X'_1 \arrow[r, two heads, "m'"] \arrow[d, "h'_1"] & K' \arrow[r, tail, "n'"] \arrow[d, "g'"] & E' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "h'"] & B' \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & R \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & I \arrow[r, two heads, "v"] & D \arrow[r, tail, "t'"] & E'_{g'} \arrow[r, "\overline{\beta}'"] & B' \arrow[r, two heads] & R
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r, two heads, "m"] \arrow[d, "\phi_1"] & K \arrow[r, tail, "n"] \arrow[d, "\phi"] & E \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\pi'"] & R \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & X'_1 \arrow[r, two heads, "m'"] & K' \arrow[r, tail, "n'"] & E' \arrow[r, "\beta'"] & B' \arrow[r, two heads] & R
\end{tikzcd}
$$

donde podemos suponer que $h'_1\ \phi_1 = h_1$ al ser I $\mathcal{M}_{(\pounds)}$-inyectivo; y como

$$g'\ \phi\ m = g'\ m'\ \phi_1 = v\ h'_1 \phi_1 = v\ h_1 = g\ m$$

deducimos que $g'\ \phi = g$.

Ahora , dado el diagrama
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, tail, "n"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "Q"] & E \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend left, "h'\pi"] \\ D \arrow[r, tail, "t"] \arrow[dr, bend right, "t'"'] & E_g \\ & E'_{g'} \end{tikzcd}$$

por (1.5.13) existe un unico morfismo de B-estructuras $f : E_g \longrightarrow E'_{g'}$ tal que $f\ h = h'\ \pi$ y $f\ t = t'$; restaria probar que $\overline{\beta}'\ f = \pi'\ \overline{\beta}$, lo cual se verifica por las igualdades $\overline{\beta}'\ f\ t = o = \pi'\ \overline{\beta}\ t$ y $\overline{\beta}'\ f\ h = \pi'\ \overline{\beta}\ h$.

La demostración del caso B) es enteramente similar, con la variante (y simplificación) que la propiedad universal del correspondiente cuadrado al cuadrado Q es en este caso la propiedad universal de ser el cuadrado cocartesiano en la categoria de R-módulos.

La sucesión (1.7.12) y la conocida interpretación de Yoneda [165] de los grupos abelianos $\mathrm{Ext}^n_R(Y,X)_{(\pounds)}$, para R-módulos X e Y, como los grupos de clases de n-extensiones de R-módulos

$$X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n \twoheadrightarrow Y \qquad (\mathcal{E}_{(\pounds)}\text{-exacta})$$

(vease, por ejemplo, [130]), sugiere y ofrece la posibilidad de obtener una de $H^n(R,X)_{(\pounds)}$ en terminos de clases de n-extensiones (no especiales).

(1.8.6) Sea R objeto de $\underline{C}$ y X un R-módulo.

Una n-extensión (£-n-extensión, caso que paralelamente se de la situación (1.2.10)) de R por X , es una sucesión exacta

$$E^n : X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow E \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} R$$

que es el producto de Yoneda de una extensión singular (£-extensión singular)

$$V = \mathrm{Ker}(\sigma) \rightarrowtail E \twoheadrightarrow R$$

por una sucesión $\mathcal{E}_{(\pounds)}$-exacta de R-módulos

$$X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \twoheadrightarrow V.$$

Dos (£)n-extensiones de R por X son equivalentes si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
E^n: X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & \cdots \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[rr] \arrow[d, "h_{n-1}"] \arrow[dr, two heads] & & E \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[d] & R \arrow[d, equal] \\
E'^n: X \arrow[r, tail] & X'_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & V \arrow[ur, tail] \arrow[d, "g"] & E' \arrow[r, two heads, "\sigma'"] & R \\
& & & & V' \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

con $h_1, \ldots, h_{n-1}$ y g morfismos de R-módulos.

Esta relación genera una de equivalencia en el conjunto de las (£)n-extensionesde R por X, a cuyo conjunto cociente le denotaremos $E^n(R,X)_{(\pounds)}$.

(1.8.7) PROPOSICION.

$E^n(R,X)_{(\pounds)}$ es un grupo abeliano, $n \geqslant 1$.

Dem.-

Dadas $[E^n]$ y $[E'^n]$ (£)n-extensiones de R por X, sea $E^n+E'^n$ la (£)n-extensión

$$E^n+E'^n : X \rightarrowtail X_1 \underset{X}{\times} X'_1 \longrightarrow X_2 \times X'_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \times X'_{n-1} \longrightarrow E \times_R E \twoheadrightarrow R$$

y definimos

$$[E^n]+[E'^n] = [E^n+E'^n].$$

La demostración de que, con esta adición, $E^n(R,X)_{(\pounds)}$ es un grupo abeliano es esencialmente analoga a la dada para $S^n(R,X)_{(\pounds)}$ en (1.8.2).

Notemos que una (£)n-extensión de R por X es obviamente una (£)n-extensión especial de R por X, existiendo un monomorfismo

$$j : E^n(R,X)_{(\pounds)} \rightarrowtail S^n(R,X)_{(\pounds)}$$

Se demostrara que, en condiciones de equilibrio, $E^n(R,X)_{(\pounds)} = H^n(R,X)_{(\pounds)}$ y, aposteriori, j es un isomorfismo; tendremos asi que " En toda clase de (£)n-extensiones especiales existe un representante que es una n-extensión ".

(1.8.8) TEOREMA .

Si $\underline{C}$ es $(\pounds)$equilibrada, existe un isomorfismo

$$E^n(R,X)_{(\pounds)} \cong H^n(R,X)_{(\pounds)}\ ,\quad n\geq 1.$$

Dem.-

Haremos inducción sobre n. Si n=1, el isomorfismo $E^1(R,X)_{(\pounds)} \cong H^1(R,X)_{(\pounds)}$ es dado en (1.4.6). Admitiremos para $n-1, n\geq 2$.

Sea
$$\begin{tikzcd}[E^n: X \arrow[r, tail] & X_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & E \arrow[r, two heads, "\sigma"] & R] \in E^n(R,X)_{(\pounds)}, \\ & & & & V \arrow[ur, tail] & & \end{tikzcd}$$
por (1.7.12), inducida por σ , se tendra la sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow \hat{H}^{n-1}(E,X)_{(\pounds)} \longrightarrow Ext_R^{n-1}(V,X)_{(\pounds)} \xrightarrow{\ \Phi\ } H^n(R,X)_{(\pounds)} \longrightarrow \cdots$$

y considerando $[X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow V] \in Ext_R^{n-1}(V,X)_{(\pounds)}$, definimos

$$W^n[E^n] = \Phi[X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \twoheadrightarrow V]$$

tenemos asi, una aplicación , bien definida debido a la naturalidad de la sucesión exacta considerada,

$$W^n : E^n(R,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^n(R,X)_{(\pounds)}\ .$$

Consideremos $M \rightarrowtail P \xrightarrow{p} R$, una presentación $\mathfrak{C}_{(\pounds)}$-proyectiva de R, utilizando los axiomas de una categoria de interes es inmediato probar que P actua por conjugación trivialmente sobre [M,M], o dicho de otra forma [M,M] es un ideal de P; consideramos, entonces, el diagrama de filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
{[M,M]} \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & {[M,M]} \arrow[d, tail] & \\
M \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & P \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, two heads] & R \arrow[d, equal] \\
\dfrac{M}{[M,M]} \arrow[r, tail] & \dfrac{P}{[M,M]} \arrow[r, two heads, "p'"] & R
\end{tikzcd}$$

denotaremos $V_o = \dfrac{M}{[M,M]}$ y $P_o = \dfrac{P}{[M,M]}$.

Inducida por p, tendremos la sucesión exacta

$$0=\hat{H}^{n-1}(P,X)_{(\pounds)} \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^{n-1}(V_o,X)_{(\pounds)} \xrightarrow{\Phi} H^n(R,X)_{(\pounds)} \longrightarrow \hat{H}^n(P,X)_{(\pounds)}=0$$

($\hat{H}^m(P,X)_{(\pounds)} = \mathrm{Ext}_R^m(D_R(P),X)_{(\pounds)} = 0$, al ser $D_R(P)$ $\mathcal{E}_{(\pounds)}$-proyectivo)

Deducimos asi un isomorfismo

$$\mathrm{Ext}_R^{n-1}(V_o,X)_{(\pounds)} \cong H^n(R,X)_{(\pounds)} .$$

Entonces, para cualqier $a \in H^n(R,X)_{(\pounds)}$ sea $\Phi^{-1}(a) = [X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots$ $\cdots \longrightarrow X_{n-1} \twoheadrightarrow V_o]$, y definimos

$$T^n\colon H^n(R,X)_{(\pounds)} \longrightarrow E^n(R,X)_{(\pounds)}$$

por

$$T^n(a) = [\begin{tikzcd}[column sep=small] X \arrow[r, tail] & X_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_o \arrow[r, two heads] & R \\ & & & & V_o \arrow[ur, tail] & & \end{tikzcd}]$$

Claramente $W^n\, T^n(a) = \Phi\, [X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \twoheadrightarrow V_o] = a$, por la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}_R^{n-1}(V_o,X)_{(\pounds)} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, equal] & H^n(R,X)_{(\pounds)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ \mathrm{Ext}_R^{n-1}(V_o,X)_{(\pounds)} \arrow[r, "\Phi"] & H^n(R,X)_{(\pounds)} \arrow[r] & \hat{H}^n(P_o,X)_{(\pounds)} \arrow[r, dash] & \cdots \end{tikzcd}$$

asi $W^n\, T^n = I$.

Veamos ahora que $T^n\, W^n = I$:

Sea $E^n\colon \begin{tikzcd}[column sep=small] X \arrow[r, tail] & X_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & E \arrow[r, two heads] & R \\ & & & & V \arrow[ur, tail] & & \end{tikzcd}$

y sea $W^n[E^n] = a$. Existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] M \arrow[rr, tail] \arrow[d] \arrow[ddr] & & P \arrow[rr, two heads] \arrow[d] \arrow[ddr, "f"] & & R \arrow[d, equal] \arrow[ddr, equal] & \\ V_o \arrow[rr, tail] \arrow[dr, "g"'] & & P_o \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "f'"] & & R \arrow[dr, equal] & \\ & V \arrow[rr, tail] & & E \arrow[rr, two heads] & & R \end{tikzcd}$$

(f existe por ser P $\mathfrak{E}_{(\pounds)}$-proyectivo, y f' es inducida por f ya que $f[M,M]=0$)

y por la naturalidad de la sucesión obtenida en (1.7.2), se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_R^{n-1}(V,X)_{(\pounds)} & \xrightarrow{\Phi} & H^n(R,X)_{(\pounds)} \\ {\scriptstyle g^*}\downarrow & & \| \\ \mathrm{Ext}_R^{n-1}(V_o,X)_{(\pounds)} & \xrightarrow{\Phi} & H^n(R,X)_{(\pounds)} \end{array}$$

de donde $a = \Phi[X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \twoheadrightarrow V] = \Phi\, g^*[X \rightarrowtail \cdots \twoheadrightarrow V] =$

$= [\, X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow X'_{n-1} \twoheadrightarrow V_o\,]$, estando obtenida esta ultima por la fila superior del diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} X & \rightarrowtail & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_{n-2} & \longrightarrow & X'_{n-1} & \twoheadrightarrow & V_o \\ \| & & \| & & & & \| & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \rightarrowtail & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_{n-2} & \longrightarrow & X_{n-1} & \twoheadrightarrow & V \end{array}$$

asi $T^n(a) = [\, X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_{n-1} \longrightarrow P_o \twoheadrightarrow R\,]$, pero como se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccccc} X & \rightarrowtail & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_{n-2} & \longrightarrow & X'_{n-1} & \longrightarrow & P_o & \twoheadrightarrow & R \\ \| & & \| & & & & \| & & {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & \| \\ X & \rightarrowtail & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_{n-2} & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & E & \twoheadrightarrow & R \end{array}$$

sera $T^n(a) = [E^n]$.

Luego $T^n W^n = I$.

Dados $a, a' \in H^n(R,X)_{(\pounds)}$, sea, mediante el isomorfismo considerado anteriormente, $\Phi^{-1}(a) = [X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \twoheadrightarrow V_o]$ y $\Phi^{-1}(a') = [X \rightarrowtail X'_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_{n-1} \twoheadrightarrow V_o]$; entonces sera

$\Phi^{-1}(a+a') = [\, X \rightarrowtail X_1 \underset{X}{\times} X'_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \times_{V_o} X'_{n-1} \twoheadrightarrow V_o\,]$ y

$T^n(a) = [X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow P_o \twoheadrightarrow R\,]$

$T^n(a') = [\, X \rightarrowtail X'_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X'_{n-1} \longrightarrow P_o \twoheadrightarrow R\,]$

$T^n(a+a') = [\, X \rightarrowtail X_1 \times X'_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \times_{V_o} X'_{n-1} \longrightarrow P_o \twoheadrightarrow R\,]$

y $T^n(a) + T^n(a') = [X \rightarrowtail X_1 \overset{X}{\times} X'_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \times X'_{n-1} \longrightarrow P_o \times_R P_o \twoheadrightarrow R\,]$

Como $(X_{n-1} \times_{V_o} X'_{n-1}) \times_{V_o} (V_o \times V_o) = (X_{n-1} \times_{V_o} X'_{n-1}) \times V_o = X_{n-1} \times_{V_o} (V_o \times X'_{n-1}) =$

$= X_{n-1} \times X'_{n-1}$, se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dd, equal] & X_1 \overset{X}{\times} X'_1 \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \cdots \arrow[r] & X_{n-2} \times X'_{n-2} \arrow[r] \arrow[dd, equal] & X_{n-1} \times X'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] \arrow[dd] & & P_o \times_R P_o \arrow[r] \arrow[dd] & R \arrow[dd, equal] \\
& & & & & V_o \times V_o \arrow[ur, tail] \arrow[dd] & & \\
X \arrow[r] & X_1 \overset{X}{\times} X'_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{n-2} \times X'_{n-2} \arrow[r] & X_{n-1} \times_{V_o} X'_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & P_o \arrow[r] & R \\
& & & & & V_o \arrow[ur, tail] & &
\end{tikzcd}$$

y por tanto $T^n(a+a') = T^n(a) + T^n(a')$.

(1.8.9) COROLARIO .

Si $\underline{C}$ es (£)equilibrada $E^n(R,X)_{(£)} \cong S^n(R,X)_{(£)}$, $n \geqslant 2$.

2. RELACION ENTRE LOS FUNTORES H^n y V^n .

2.1. VARIEDADES .

Consideraremos $\underline{C}$ una categoria de interes,(1.2.1).

Una variedad de $\underline{C}$, $\underline{V}$, es una subcategoria plena de $\underline{C}$ que es cerrada para subobjetos, objetos cocientes y productos.

(2.1.1) Una variedad $\underline{V}$ de $\underline{C}$ es una clase reflexiva, osea existen funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[d, shift right, "P"'] \\ \underline{V} \arrow[u, shift right, "I \text{ (inclusión)}"'] \end{tikzcd}$$

En efecto, sea $A \in \underline{C}$, consideremos la familia de todos los cocientes de A que estén en $\underline{V}$ (no es vacia, pues $0 \in \underline{V}$) y el producto de ellos $\prod A_i$; existe un único morfismo $u: A \longrightarrow \prod A_i$ inducido por los correspondientes epimorfismos $A \longrightarrow A_i$, y denotemos $P(A) = \mathrm{Img}(u)$. Claramente $P(A)$ esta en $\underline{V}$ al ser un subobjeto de $\prod A_i$ que esta en $\underline{V}$, ademas las factorizaciones

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[dr, two heads] & P(A) \arrow[r, tail] \arrow[d] & \prod A_i \arrow[dl] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

prueban que $P(A)$ es el mayor cociente de A que esta en $\underline{V}$.

Ahora, si $f: A \longrightarrow H$ es un morfismo en $\underline{C}$ con H en $\underline{V}$, considerando $A_i =$ $= \mathrm{Img}(f)$, que esta en $\underline{V}$ al ser subobjeto de H, se tendra el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[dr, two heads] & P(A) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ & A_i \arrow[r, tail] & H \end{tikzcd}$$

lo que prueba que $P(A)$ es una $\underline{V}$-replica de A.

(2.1.2) Denotamos $S_\infty = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ y F_∞ al objeto libre de $\underline{C}$ sobre el conjunto S_∞.

Dado un subconjunto Ω de F_∞ sea $\underline{V}(\Omega)$ la subcategoria plena de $\underline{C}$ cuyos objetos vienen definidos por

$$A \in \underline{V}(\Omega) \Leftrightarrow \text{Para todo } g \in \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(F_\infty, A) \text{ y } \omega \in \Omega,\ g(\omega) = 0 .$$

Esta subcategoria es una clase reflexiva de $\underline{C}$; en efecto, sea $A \in \underline{C}$ y consideremos $V_\Omega(A)$ el ideal de A generado por el conjunto $\{g(\omega), g \in \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(F_\infty, A), \omega \in \Omega\}$ se tendra la sucesión exacta corta

$$V_\Omega(A) \rightarrowtail A \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} \frac{A}{V_\Omega(A)} = P_\Omega(A)$$

y es claro que $P_\Omega(A) \in \underline{V}(\Omega)$.

Para cualquier morfismo en $\underline{C}$ $f: A \longrightarrow H$ con $H \in \underline{V}(\Omega)$, se verifica que si $g \in \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(F_\infty, A)$ y $\omega \in \Omega$ entonces $(f\, i)(g(\omega)) = f(g(\omega)) = (f\, g)(\omega) = 0$, y por tanto existe un unico morfismo $f': P_\Omega(A) \longrightarrow H$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & P_\Omega(A) \arrow[d, dashed, "f'"] \\ & H \end{tikzcd}$$

conmuta.

Esto prueba que los funtores
$$\begin{tikzcd} \underline{C} \arrow[d, shift right, "P"'] \\ \underline{V}(\Omega) \arrow[u, shift right, "I(\text{inclusión})"'] \end{tikzcd}$$
son adjuntos.

Ademas $\underline{V}(\Omega)$ es una variedad de $\underline{C}$; para ver esto, supongamos un monomorfismo $j: H' \rightarrowtail H$, con $H \in \underline{V}(\Omega)$, si $g \in \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(F_\infty, H')$ y $\omega \in \Omega$ entonces $g(\omega) = jg(\omega) = 0$, con lo que $H' \in \underline{V}(\Omega)$, y $\underline{V}(\Omega)$ es cerrada para subobjetos. Supongamos que H' es ideal de H y sea $p: H \twoheadrightarrow H/H'$ la proyección canonica, para cualquier morfismo $g: F_\infty \longrightarrow H/H'$ y $\omega \in \Omega$, como F_∞ es libre existira $g': F_\infty \longrightarrow H$ con $p\, g' = g$, y entonces $g(\omega) = p(g'(\omega)) = p(o) = o$, con lo que $\underline{V}(\Omega)$ es cerrada para cocientes. Por último, supongamos $\{H_i\}$ una familia de objetos en $\underline{V}(\Omega)$ y consideremos su producto en $\underline{C}$, H_i con $p_i: \prod H_i \longrightarrow H_i$ las proyecciones correspondientes , si $g \in Hom_{\underline{C}}(F_\infty, H_i)$ y $\omega \in \Omega$, es claro que $p_i(g(\omega)) = o$ para cualquier i, de donde $g(\omega) = o$, y $\prod H_i \in \underline{V}(\Omega)$.

Los elementos $\omega \in \Omega$ seran llamados " palabras " y se dice que $\underline{V}(\Omega)$ es la variedad definida por el conjunto de palabras Ω .

(2.1.3) TEOREMA . (Birkhoff).

Toda variedad viene definida por un conjunto de palabras.

Dem.-

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$.

Consideremos el conjunto

$$\Omega = \left\{ \omega \in F_\infty \text{ tal que } g(\omega) = o \text{ para todo } g \in Hom_{\underline{C}}(F_\infty, H),\ H \in \underline{V} \right\}$$

probaremos que $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$.

Claramente $\underline{V} \subset \underline{V}(\Omega)$.

Sea $A \in \underline{V}(\Omega)$; consideremos una presentación libre de A $f: F \twoheadrightarrow A$ en $\underline{C}$; siendo P el funtor adjunto a la izquierda al funtor de inclusión $I : \underline{V} \longrightarrow \underline{C}$, consideremos

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "q"'] & A \\ P(F) & \end{tikzcd}$$

Es inmediato que los ω tales que $q(\omega) = o$ estan en Ω y por tanto $f(\omega) = o$ al ser $A \in \underline{V}(\Omega)$, asi existe $f' : P(F) \longrightarrow A$ con $f' q = f$; f' es un epimorfismo sobre y $A \in \underline{V}$.

Un estudio mas general puede verse en [73] .

(2.1.4) Supongamos $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ definida por el conjunto de palabras Ω . Denotaremos, si no hay confusión, $V = V_\Omega$.

Sea F_n el objeto de $\underline{C}$ libre sobre el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, a los elementos $\omega \in F_n$ les llamaremos " palabras de longitud n", y si $g \in Hom_{\underline{C}}(F_\infty, A)$ es tal que $g(x_i) = a_i$, denotamos $g(\omega) = \omega(a_1, \ldots, a_n)$.

Entonces, para $A \in \underline{C}$ el subobjeto $V(A)$ sera el ideal de A generado por los elementos $\omega(a_1, \ldots, a_n)$, con $a_i \in A$ y $\omega \in \Omega \cap F_n$, $n \geq 1$.

Es claro que A esta en $\underline{V}$ si y solo si $V(A) = 0$.

(2.1.5) Si Ω es un conjunto de palabras, para cada $\omega \in \Omega$ de longitud n definimos las plabras de longitud n+1, $\omega^*, {}^*\omega$, para cada $*$ y ω_+ por

$$\omega^*(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = x_1 * \omega(x_2, \ldots, x_{n+1})$$

$${}^*\omega(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \omega(x_1, \ldots, x_n) * x_{n+1}$$

$$\omega_+(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = x_1 + \omega(x_2, \ldots, x_{n+1}) - x_1$$

y denotamos $\bar{\Omega} = \Omega \cup \{, \omega^*, {}^*\omega, {}^*(\omega^*), \omega_+\}$.

Es inmediato, por los axiomas que rigen las operaciones de $\underline{C}$, que $\underline{V}(\Omega) = \underline{V}(\bar{\Omega})$.

Podemos, entonces, suponer siempre $\Omega = \bar{\Omega}$.

(2.1.6) Sea $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ una variedad de $\underline{C}$ y $A \in \underline{C}$.

Se define $V^*(A)$ como el conjunto de elementos a de A tales que

1) $\omega(a_1, \ldots, a+a_i, \ldots, a_n) = \omega(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$

2) $\omega(a_1, \ldots, (a' * a)+a_i, \ldots, a_n) = \omega(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$

3) $\omega(a_1, \ldots, \lambda(a)+a_i, \ldots, a_n) = \omega(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$

para cualesquiera $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, n$; operación de orden dos; λ operación de orden uno y $\omega \in \Omega \cap F_n$, $n \geq 1$.

Es obviamente un ideal de A.

(2.1.7) PROPOSICION .

Dada una variedad $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ de $\underline{C}$, para A objeto de $\underline{C}$ se tiene que $A \in \underline{V}$ si y solo si $V^*(A) = A$.

Dem.-

Si $A \in \underline{V}$, entonces $V(A) = 0$ y claramente sera $V^*(A) = A$.

Reciprocamente, si $V^{*}(A) = A$, entonces para cada palabra ω de longitud n que define V se tiene $\omega(a_1, \ldots, a_n) = \omega(o, a_2, \ldots, a_n) = \cdots = \omega(o, \ldots, o) = o$ por consiguiente $V(A) = 0$ y $A \in \underline{V}$.

(2.1.8) Dada $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$, variedad de $\underline{C}$; si B es un ideal de E en $\underline{C}$, se define para cada $\omega \in \Omega \cap F_n$, $n \geq 1$, la función

$$\omega_{(B,E)} : E^n x B^n \longrightarrow B$$

donde $E^n(B^n)$ denota el producto de n copias de E (B), por

$$\omega_{(B,E)}(e_1, \ldots, e_n; b_1, \ldots, b_n) =$$
$$= \omega(e_1 + b_1, \ldots, e_n + b_n) - \omega(e_1, \ldots, e_n)$$

Y definimos $V_1(B,E)$ como el ideal de E generado por el conjunto

$$\{\omega_{(B,E)}(e_1, \ldots, e_n; b_1, \ldots, b_n);\ e_i \in E,\ b_i \in B,\quad \omega \in \Omega \cap F_n,\ n \geq 1\}$$

Este ideal es definido por Frolich [63], y en un tratamiento mas general por Bueso [24]. En el caso de $\underline{C}$ = Grupos y $\underline{V}$ una variedad de grupos este es denotado $BV^{*}E$ por Leedam-Green [115].

(2.1.9) El subobjeto $V_1(B,E)$ es independiente del conjunto de palabras que definen la variedad. Esta conclusión es consecuencia de la siguiente proposición:

Sea I el conjunto de ideales J de E tales que

1) $J \subset V(E)$. Notaremos $p_J : V(E) \twoheadrightarrow V(E)/J$ la correspondiente proyección.

2) Si se tiene un diagrama
$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\ B \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads, "p"] & E/B \end{tikzcd}$$
con $pf = pg$, entonces en el diagrama
$$\begin{tikzcd} & V(A) \arrow[d, shift right, "V(f)"'] \arrow[d, shift left, "V(g)"] & \\ J \arrow[r, tail] & V(E) \arrow[r, two heads, "p_J"] & V(E)/J \end{tikzcd}$$
se tiene $p_J\, V(f) = p_J\, V(g)$.

Se verifica que :

1) $V_1(B,E) \in I$

2) Si $J \in I$, entonces $V_1(B,E) \in J$.

Dem.-

Obviamente $V_1(B,E) \subseteq V(E)$. Sea $p_1 : V(E) \twoheadrightarrow \dfrac{V(E)}{V_1(B,E)}$ la proyección, y supongamos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\ B \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads, "p"] & E/B \end{tikzcd}$$

con $pf = pg$, para cada $\omega \in \Omega \cap F_n$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$, $n \geq 1$, se tiene

$f(\omega(a_1, \ldots, a_n)) = \omega(fa_1, \ldots, fa_n) = \omega(ga_1+b_1, \ldots, ga_n+b_n)$ para ciertos b_i de B

$$= (\omega(ga_1+b_1, \ldots, ga_n+b_n) - \omega(ga_1, \ldots, ga_n)) + $$
$$+\omega(ga_1, \ldots, a_n) =$$
$$= \omega_{(B,E)}(ga_1, \ldots, ga_n; b_1, \ldots, b_n) + g\omega(a_1, \ldots a_n)$$

de donde $p_1\ V(f) = p_1\ V(g)$.

Asi $V_1(B,E) \in I$.

Supongamos ahora $J \in I$. Sea $\omega_{(B,E)}(e_1, \ldots, e_n; b_1, \ldots, b_n)$ un generador de $V_1(B,E)$, consideremos los morfismos $f, g : F_n \longrightarrow E$ tales que

$$f(x_i) = e_i + b_i$$

$$g(x_i) = e_i \ , \quad i = 1, \ldots, n.$$

es claro que $pf = pg$ y por tanto se tendra $p_J\ V(f) = p_J\ V(g)$; pero

$$V(f)(\omega(x_1, \ldots, x_n)) = \omega(e_1+b_1, \ldots, e_n+b_n) \quad \text{y}$$

$$V(g)(\omega(x_1, \ldots, x_n)) = \omega(e_1, \ldots, e_n)$$

y por tanto $V(f)\omega(x_1, \ldots, x_n) - V(g)\omega(x_1, \ldots, x_n) = \omega_{(B,E)}(e_1, \ldots, e_n; b_1, \ldots, b_n) \in J$. Luego $V_1(B,E) \in J$.

(2.1.10) PROPOSICION .

Se verifica, para B ideal de E, :

i) $V(B) \subset V_1(B,E)$

ii) $B * V(E) + V(E) * B \subset V_1(B,E)$, para todo $*$.

iii) $[B,V(E)] \subset V_1(B,E) \subset V(E) \cap B$.

Dem.-

i) Si $\omega \in \Omega \cap F_n$ y $(b_1, \dots , b_n) \in B^n$, entonces $\omega(b_1, \dots , b_n) =$

$= \omega_{(B,E)}(o, \dots , o; b_1, \dots , b_n) \in V_1(B,E)$; luego $V(B) \subset V_1(B,E)$.

ii) Si $\omega \in \Omega \cap F_n$, y $(e_1, \dots , e_n) \in E^n$, entonces para todo b de B se tiene que $b * \omega(e_1, \dots , e_n) = {}^{*}\omega(b,e_1, \dots , e_n) - {}^{*}\omega(o,e_1, \dots , e_n) =$

$= \omega^{*}_{(B,E)}(o,e_1, \dots , e_n; b, o, \dots , o) \in V_1(B,E)$; por lo tanto $B * V(E) \subset V_1(B,E)$.

Analogamente $V(E) * B \subset V_1(B,E)$ y $B * V(E) + V(E) * B \subset V_1(B,E)$.

iii) Considerando $p : E \twoheadrightarrow E/B$ es inmediato que $p(V_1(B,E)) = 0$, y por tanto $V_1(B,E) \subset B$; como es claro que $V_1(B,E) \subset V(E)$, tenemos la inclusión $V_1(B,E) \subset V(E) \cap B$.

El subobjeto $[B,V(E)]$ esta generado por el conjunto

$\{b * \omega(e_1, \dots , e_n),\ b + \omega(e_1, \dots , e_n) - b - \omega(e_1, \dots , e_n);\ \omega \in \Omega \cap F_n,\ e_i \in E,$ $b \in B$, todo $*$, $n \geqslant 1\}$

Segun ii) los elementos $b * \omega(e_1, \dots , e_n)$ estan en $V_1(B,E)$; y dado el elemento $b + \omega(e_1, \dots , e_n) - b - \omega(e_1, \dots , e_n)$, este se puede expresar como $\omega_+(b,e_1, \dots , e_n) - \omega_+(o,e_1, \dots , e_n) = \omega_{+(B,E)}(o,e_1, \dots , e_n,b, o, \dots o)$ que es un generador de $V_1(B,E)$.

Concluimos asi que $[B,V(E)] \subset V_1(B,E)$.

(2.1.11) COROLARIO .

Para cualquier A de $\underline{C}$ se verifica que $[V(A),V^{*}(A)] = 0$.

Dem.-

Considerando el ideal de A, $V^*(A)$, se tendra $[V^*(A),V(A)] \subset V_1(V^*(A),A)$, pero es inmediato observar que $V_1(V^*(A),A) = 0$ y por tanto $[V^*(A),V(A)] = 0$.

(2.1.12) Definimos ahora los invariantes de Baer, $\underline{V_o C}(A)$ y $\underline{V_1 C}(A)$, como en [167], y estudiamos sus propiedades basicas.

Supondremos , como hasta ahora, $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ de $\underline{C}$.

Si $A \in \underline{C}$ y $N \rightarrowtail F \overset{q}{\twoheadrightarrow} A$ una presentación libre de A en $\underline{C}$, sabemos que $V_1(N,F) \subset N \cap V(F)$ y podemos considerar el cociente $\dfrac{N \cap V(F)}{V_1(N,F)}$; notemos que al estar $[N,V(F)] \subset V_1(N,F)$ este cociente es singular.

Si $h: A \longrightarrow B$ es un morfismo en $\underline{C}$ y $N' \rightarrowtail F' \overset{q'}{\twoheadrightarrow} B$ una presentación libre de B, existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail] \arrow[d] & F \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "h'"'] & A \arrow[d, "h"] \\ N' \arrow[r, tail] & F' \arrow[r, two heads, "q'"] & B \end{tikzcd}$$

y considerando la restricción $h': N \cap V(F) \longrightarrow N' \cap V(F')$, como obviamente se tiene que $h'(V_1(N,F)) \subset V_1(N',F')$, este induce un morfismo

$$h'': \frac{N \cap V(F)}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{N' \cap V(F')}{V_1(N',F')}$$

que no depende de la elección de h'; en efecto, si g' fuese otro morfismo tal que $q'\, g' = h\, q$, entonces dado $\omega \in \Omega \cap F_n$ y $(x_1, \ldots, x_n) \in F$ talque $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ pertenece a $N \cap V(F)$ se tiene

$$\begin{aligned} g''(\omega(x_1, \ldots, x_n) + V_1(N,F)) &= \omega(g'x_1, \ldots, g'x_n) + V_1(N',F') = \\ &= \omega(h'x_1+n'_1, \ldots, h'x_n+n'_n) + V_1(N',F') \text{ , para} \end{aligned}$$

ciertos $n'_i \in N'$,

$$\begin{aligned} &= \omega(h'x_1, \ldots, h'x_n) + V_1(N',F') = \\ &= h''(\omega(x_1, \ldots, x_n)) + V_1(N,F). \end{aligned}$$

Es facil comprobar que en la correspondiente situación $h''\, f'' = (h\, f)''$ y $I'' = I$.

Se concluye entonces que $\dfrac{N\cap V(F)}{V_1(N,F)}$ es , salvo isomrfismo, independiente de la presentación proyectiva de A , y le notamos $\underline{V}_1\underline{C}(A)$, siendo claro su caracter funtorial.

Analogamente se comprueba que el cociente $\dfrac{V(F)}{V_1(N,F)}$ solo depende de A y le notamos $\underline{V}_o\underline{C}(A)$.

Son los invariantes de Baer de objetos de $\underline{C}$ respecto a la variedad $\underline{V}$.

Una generalización categorica de estos puede verse en [24] .

Probaremos, mas adelante, que $\underline{V}_1\underline{C}(A)$ es de forma natural un A-módulo y $\underline{V}_o\underline{C}(A)$ una A-estructura.

(2.1.13) Para cada A de $\underline{C}$, se tienen sucesiones exactas naturales

$$\underline{V}_1\underline{C}(A) \rightarrowtail \underline{V}_o\underline{C}(A) \twoheadrightarrow V(A)$$

$$\underline{V}_1\underline{C}(A) \rightarrowtail \underline{V}_o\underline{C}(A) \longrightarrow A \twoheadrightarrow A/V(A) \quad .$$

Dem.-

Dada $N \rightarrowtail F \twoheadrightarrow A$, una presentación libre de A, existe el diagrama conmutativo de filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
N\cap V(F) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & V(F) \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & V(A) \arrow[d, tail] \\
N \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & F \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & A \arrow[d, two heads] \\
\dfrac{N}{N\cap V(F)} \arrow[r, tail] & \dfrac{F}{V(F)} \arrow[r, two heads] & \dfrac{A}{V(A)}
\end{tikzcd}$$

(es claro que el funtor V conserva epimorfismos sobres), y por tanto deducimos que

$$\frac{N}{N\cap V(F)} = \frac{\dfrac{V(F)}{V_1(N,F)}}{\dfrac{N\cap V(F)}{V_1(N,F)}} = V(A)$$

de donde se sigue el resultado .

Como consecuencia, si A esta en $\underline{V}$ entonces $V(A) = 0$ y $\underline{V}_1\underline{C}(A) = \underline{V}_o\underline{C}(A)$.

(2.1.14) LEMA .

Sea $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ una variedad de $\underline{C}$.

Si R es un objeto de $\underline{C}$ y A una R-estructura, son equivalentes:

i) $V(A \rtimes R) \subset R$

ii) $A \subset V^*(A \rtimes R)$.

Dem.-

Consideremos $A \longrightarrow A \rtimes R \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} R$.

Supongamos se verifica i). Sea $\omega \in \Omega \cap F_n$ y $a_i + sr_i \in A \rtimes R$, $i=1, \ldots, n$; se tendra que $\omega(a_1+sr_1, \ldots, a_n+sr_n) = a + s\omega(r_1, \ldots, r_n)$ para algun a de A; pero segun la hipotesis i) sera $a = o$ y $\omega(a_1+sr_1, \ldots, a_n+sr_n) = s\omega(r_1, \ldots, r_n)$ de donde $a_i \in V^*(A \rtimes R)$ y como estos son arbitrarios $A \subset V^*(A \rtimes R)$.

Supongamos se verifica ii). Sea $\omega(a_1+sr_1, \ldots, a_n+sr_n)$ un generador de $V(A \rtimes R)$, en virtud de ii) sera $\omega(a_1+sr_1, \ldots, a_n+sr_n) = s\omega(r_1, \ldots, r_n) \in R$; luego $V(A \rtimes R) \subset R$.

Estas propiedades equivalentes implican obviamente que $V(A \rtimes R) = V(R)$ y que $V(A) = 0$, osea que A esta en $\underline{V}$.

(2.1.15) DEFINICION .

Si A es una R-estructura (R-módulo) en $\underline{C}$ tal que se verifican las condiciones equivalentes del lema anterior, entonces se dice que A es una $\underline{V}$R-estructura ($\underline{V}$R-módulo).

(2.1.16) LEMA .

Sea A un ideal de E en $\underline{C}$. Entonces $A \subset V^*(E)$ si y solo si $V_1(A, E)$ es cero.

Dem.-

Si $A\subset V^{*}(E)$ y $\omega\in\Omega\cap F_n$ se tiene que $\omega_{(A,E)}(e_1, \ldots, e_n; a_1, \ldots, a_n) = o$ y $V_1(A,E) = 0$.

Si $V_1(A,E) = 0$, para cualquier $\omega\in\Omega\cap F_n$, $a\in A$ y $(e_1, \ldots, e_n)\in E^n$ se tiene que $\omega(e_1, \ldots, a+e_i, \ldots, e_n) = \omega_{(A,E)}(e_1, \ldots, e_n; o, \ldots, a, o, \ldots, o) + \omega(e_1, \ldots, e_n) = \omega(e_1, \ldots, e_n)$. Por consiguiente $A\subset V^{*}(E)$.

(2.1.17) Un par (A,E), donde A es un ideal de E, se dice $\underline{V}$-central si se dan las condiciones del lema anterior, osea que $A\subset V^{*}(E)$.

Es usual decir que la extensión $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow E/A$ es $\underline{V}$-central.

Claramente, si (A,E) es $\underline{V}$-central , entonces $V(A) = 0$ y A esta en $\underline{V}$.

Podemos decir tambien que una R-estructura (R-módulo) A es una $\underline{V}$R-estructura ($\underline{V}$R-módulo) si y solo si la extensión $A \rightarrowtail A \rtimes R \underset{\leftarrowtail}{\twoheadrightarrow} R$ es V-Central.

(2.1.18) PROPOSICION .

Una extensión $A \rightarrowtail E \xrightarrow{p} E/A$ es V-central si y solo si se verifica la siguiente propiedad :

Dado un diagrama
$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\ A \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads] & E/A \end{tikzcd}$$
con $pf = pg$, entonces $V(f) = V(g)$.

Dem.- Es consecuencia inmediata de (2.1.9).

(2.1.19) LEMA .

Dado el diagrama en $\underline{C}$, con filas sucesiones exactas cortas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, "h'"] & B' \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads, "p"] & B \end{tikzcd}$$

(el cuadrado de la derecha sera cartesiano) ; si $f,g : C \longrightarrow E'$ son dos morfismos con $p'f = p'g$, entonces $V(f) = V(g)$ si y solo si $V(h'f) = V(h'g)$.

Dem.-

Si $V(f) = V(g)$ es claro que $V(h'f) = V(h'g)$.

Supongamos que $V(h'f) = V(h'g)$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V(C) \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, shift right, "V(f)"'] \arrow[d, shift left, "V(g)"] & C \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \\
V(E') \arrow[r, tail, "j'"] \arrow[d, "V(h')"] & E' \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, "h'"] & B' \arrow[d, "h"] \\
V(E) \arrow[r, tail, "j"] & E \arrow[r, two heads, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

se tiene que $h'j'V(f) = h'j'V(g)$, $p'j'V(f) = p'j'V(g)$ y por tanto sera $j'V(f) = j'V(g)$ y $V(f) = V(g)$.

(2.1.20) COROLARIO .

En las condiciones del lema anterior, si $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow B$ es V-central $A \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow B'$ tambien lo es.

Si h es sobre y $A \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow B'$ es V-central entonces $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow B$ tambien lo es .

Dem.- Si $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow B$ es $\underline{V}$-central y suponemos $f,g : C \longrightarrow E'$ con $p'f = p'g$, tendremos $p\,h'f = p\,h'g$ y por tanto sera $V(h'f) = V(h'g)$ de donde $V(f) = V(g)$; por (2.1.18) deducimos que $A \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow B'$ es $\underline{V}$-central.

Supongamos ahora que h es sobre y que $A \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow B'$ es $\underline{V}$-central. Para cada $\omega \in \Omega \cap F_n$, $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ y $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$, como h' es sobre al serlo h existiran $e'_i \in E'$ tales que $h'(e'_i) = e_i$ y tendremos

$$\begin{aligned}
\omega(a_1+e_1, \ldots, a_n+e_n) &= \omega(a_1+h'e'_1, \ldots, a_n+h'e'_n) = \\
&= \omega(h'(a_1+e'_1), \ldots, h'(a_n+e'_n)) = \\
&= h'(\omega(a_1+e'_1, \ldots, a_n+e'_n)) = \\
&= h'(\omega(e'_1, \ldots, e'_n)) = \\
&= \omega(e_1, \ldots, e_n)
\end{aligned}$$

asi $V_1(A,E) = 0$ y $A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow B$ es $\underline{V}$-central.

(2.1.21) COROLARIO .

Sea A una R-estrctura (R-módulo) en $\underline{C}$ y $h: R' \longrightarrow R$ un morfismo en $\underline{C}$. Consideramos A R'-estructura (R-módulo) via H. Se verifica

i) Si A es $\underline{V}R$-estructura ($\underline{V}R$-módulo) entonces A es $\underline{V}R'$-estructura ($\underline{V}R'$-módulo).

ii) Si h es sobre y A es $\underline{V}R'$-estructura ($\underline{V}R'$-módulo) entonces A es $\underline{V}R$-estructura ($\underline{V}R$-módulo).

Dem.- Basta aplicar (2.1.20) a las extensiones $A \rightarrowtail A \rtimes R \rightleftarrows R$ y $A \rightarrowtail A \rtimes R' \rightleftarrows R'$ que estan relacionadas por el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & A \rtimes R' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & R' \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, tail] & A \rtimes R \arrow[r, two heads] & R \end{tikzcd} .$$

(2.1.22) PROPOSICION .

Sea A una R-estructura (R-módulo) en $\underline{C}$ y $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ una variedad de $\underline{C}$.

Se verifica que A es una R-estrctura (R-modulo) en $\underline{V}$, osea $A \rtimes R \in \underline{V}$, si y solo si $R \in \underline{V}$ y A es una $\underline{V}R$-estructura.

Dem.-

Si A es una R-estructura en $\underline{V}$ se tendra $V^*(A \rtimes R) = A \rtimes R \supset A$ y A es una $\underline{V}R$-estructura. Obviamente sera $R \in \underline{V}$.

Reciprocamente, supongamos $R \in \underline{V}$ y A una $\underline{V}R$-estructura. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} V(A \rtimes R) \arrow[r, two heads, "V(p)"] \arrow[d, tail] & V(R) \arrow[d, tail] \\ A \rtimes R \arrow[r, two heads, "p"] & R \end{tikzcd}$$

al ser VR-estructura sera $V(A \rtimes R) = V(R)$ y $V(p)$ un isomorfismo, pero $V(R) = 0$ y $V(A \rtimes R) = 0$, luego $A \rtimes R \in \underline{V}$.

(2.1.23) COROLARIO .

Si A es una $\underline{V}R$-estructura ($\underline{V}R$-módulo) en $\underline{C}$, entonces A es de forma natural una $R/V(R)$-estructura ($R/V(R)$-módulo) en $\underline{V}$.

Dem.-

Como $V(A \rtimes R) = V(R)$, se tiene el diagrama de filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & V(A\rtimes R) \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & V(R) \arrow[d, tail] \\
A \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & A\rtimes R \arrow[r, two heads, shift left] \arrow[d, two heads] & R \arrow[l, shift left] \arrow[d, two heads] \\
A \arrow[r, tail] & \frac{A\rtimes R}{V(A\rtimes R)} \arrow[r, two heads, shift left] & \frac{R}{V(R)} \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

y A es $R/V(R)$-estructura con $A \rtimes \frac{R}{V(R)} = \frac{A\rtimes R}{V(A\rtimes R)}$.

Notemos que $V(R)$ actuara trivialmente sobre A.

(2.1.24) COROLARIO .

Si A es una $R/VR)$-estructura ($R/V(R)$-módulo) en $\underline{V}$, entonces A es via $R \twoheadrightarrow R/V(R)$ una $\underline{V}R$-estructura ($\underline{V}R$-módulo).

Dem.-

Si A es $R/V(R)$-estructura en $\underline{V}$, sera $V(A \rtimes \frac{R}{V(R)}) = 0 \subset \frac{R}{V(R)}$, asi A es $\underline{V}R/V(R)$- estructura y por (2.1.21) A es $\underline{V}R$-estructura.

(2.1.25) PROPOSICION .

Sea A un subobjeto ideal de R en $\underline{C}$, R-estructura por conjungación. Entonces A es una $\underline{V}R$-estructura si y solo si $A \subset V^{*}(R)$.

Dem.-

De acuerdo con (2.1.17), A sera $\underline{V}R$-estructura si y solo si la extensión $A \rightarrowtail A\rtimes R \twoheadrightarrow R$ es $\underline{V}$-central, pero esta se encuentra relacionada con la extensión $A \rightarrowtail R \twoheadrightarrow R/A$, segun (1.2.14) por el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \rightarrowtail & A\lhd R & \twoheadrightarrow & R \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \rightarrowtail & R & \twoheadrightarrow & \frac{R}{A} \end{array}$$

y utilizando (2.1.20) concluimos que A sera una $\underline{V}R$-estructura si y solo si la extensión $A \rightarrowtail R \twoheadrightarrow R/A$ es $\underline{V}$-central, osea si y solo si $A \subset V^{*}(R)$.

(2.1.25) COROLARIO .

Sea X un R-módulo en $\underline{C}$ y $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow R$ una extensión singular de R por X.

Se verifica que X es un $\underline{V}R$-módulo si y solo si $X \subset V^{*}(E)$.

Dem.-

X es E-modulo via $E \twoheadrightarrow R$, y al ser la extension singular lo sera por conjugación.

Por (2.1.24), X sera $\underline{V}E$-módulo si y solo si $X \subset V^{*}(E)$, pero segun (2.1.21) X es $\underline{V}E$-módulo si y solo si es $\underline{V}R$-módulo.

(2.1.26) COROLARIO .

Sea X un R-módulo en $\underline{C}$.

X es un $\underline{V}R$-modulo si y solo si toda extensión singular de R por X es $\underline{V}$-central.

(2.1.27) PROPOSICION .

Sea $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ una variedad de $\underline{C}$. Para cada R de $\underline{C}$ el invariante $\underline{V}_1\underline{C}(R)$ es un $\underline{V}R$-módulo, y el invariante $\underline{V}_o\underline{C}(R)$ es una $\underline{V}R$-estructura.

Dem.-

Sea $N \rightarrowtail F \overset{q}{\twoheadrightarrow} R$ una presentación proyectiva de R en $\underline{C}$, y consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{N\cap V(F)}{V_1(N,F)} \arrow[r, rightarrowtail] \arrow[d, rightarrowtail] & \dfrac{V(F)}{V_1(N,F)} \arrow[d, rightarrowtail] & \\
\dfrac{N}{V_1(N,F)} \arrow[r, rightarrowtail] & \dfrac{F}{V_1(N,F)} \arrow[r, twoheadrightarrow, "q'"] & R\,.
\end{tikzcd}$$

$\dfrac{N\cap V(F)}{V_1(N,F)}$ y $\dfrac{V(F)}{V_1(N,F)}$ son ideales de $\dfrac{F}{V_1(N,F)}$ y son por tanto $\dfrac{F}{V_1(N,F)}$ - módulo y $\dfrac{F}{V_1(N,F)}$ -estructura , respectivamente, por conjugación.

Es inmediato que las extensiones $\dfrac{N\cap V(F)}{V_1(N,F)} \rightarrowtail \dfrac{F}{V_1(N,F)} \twoheadrightarrow \dfrac{F}{N\cap V(F)}$ y $\dfrac{V(F)}{V_1(N,F)} \rightarrowtail \dfrac{F}{V_1(N,F)} \twoheadrightarrow \dfrac{F}{V(F)}$ son $\underline{V}$-centrales y por (2.1.25) tendremos que $\dfrac{N\cap V(F)}{V_1(N,F)}$ es un $\underline{V}\dfrac{F}{V_1(N,F)}$ - módulo y $\dfrac{V(F)}{V_1(N,F)}$ es una $\underline{V}\dfrac{F}{V_1(N,F)}$ - estructura.

Ademas como $[N,V(F)]\subset V_1(N,F)$ es facil deducir que $\dfrac{N}{V_1(N,F)}$ actua trivialmente sobre $\dfrac{N\cap V(F)}{V_1(N,F)}$ y $\dfrac{V(F)}{V_1(N,F)}$ y utilizando (1.2.15) y (2.1.21) concluimos que estos son $\underline{V}R$-módulo y $\underline{V}R$-estructura respectivamente.

(2.1.28) PROPOSICION .

Si $\underline{V}$ es una variedad de $\underline{C}$, para cada R de $\underline{C}$ la sucesión exacta de (2.1.13)

$$\underline{V}_1\underline{C}(R) \rightarrowtail \underline{V}_o\underline{C}(R) \xrightarrow{f} R \twoheadrightarrow R/V(R)$$

es una 2-extensión especial de $R/V(R)$ por el $R/V(R)$-módulo $\underline{V}_1\underline{C}(R)$.

Dem.-

Los morfismos $\underline{V}_1\underline{C}(R) \rightarrowtail \underline{V}_o\underline{C}(R)$ y $R \twoheadrightarrow R/V(R)$ son claramente morfismos de R-estructuras .

Seguimos considerando, como en (2.1.27), $N \rightarrowtail F \overset{q}{\twoheadrightarrow} R$ una presentación proyectiva de R, con lo que $\underline{V}_1\underline{C}(R) = N \cap V(F)/V_1(N,F)$ y $\underline{V}_o\underline{C}(R) = V(F)/V_1(N,F)$.

Dado $m \in V(F)$ y $r \in R$, sea $x \in F$ con $q(x) = r$; se tiene

$f(r \cdot \bar{m}) = f(\overline{x+m-x}) = q(x+m-x) = r + q(m) - r = r \cdot q(m) = r \cdot f(\bar{m})$.

$f(r * \bar{m}) = f(\overline{x * m}) = q(x * m) = r * q(m) = r * f(\bar{m})$, para cada .

con lo que f es morfismo de R-estructuras.

Ademas, si m, $m' \in V(F)$ se tiene

$f(\bar{m}) \cdot \bar{m}' = q(m) \cdot \bar{m}' = \overline{m+m'-m} = \bar{m} + \bar{m}' - \bar{m}$.

$f(\bar{m}) * \bar{m}' = q(m) * \bar{m}' = \overline{m * m'} = \bar{m} * \bar{m}'$, para cada $*$.

y la extensión es una 2-extensión especial.

(2.1.29) Si, eventualmente, para la categoria $\underline{C}$, se da la situación (1.2.10) podemos definir en $\underline{C}$, dada una variedad suya $\underline{V}$, los invariantes $\underline{V}_o\underline{C}_£(A)$ y $\underline{V}_1\underline{C}_£(A)$ para $A \in \underline{C}$, correspondientes a los invariantes de Baer hasta aqui considerados, pero relativos a considerar en $\underline{C}$ la clase de objetos $G_£$-proyectivos y presentaciones con epimorfismos £-escindentes. Les llamaremos £-invariantes de Baer.

La obtención de estos es esencialmente analoga a la realizada en (2.1.12): Dado $A \in \underline{C}$, sea $N \rightarrowtail F_£ \overset{q}{\twoheadrightarrow} A$ una presentación $G_£$-proyectiva de A. Los cocientes

$$\frac{N \cap V(F_£)}{V_1(N,F_£)} \quad \text{y} \quad \frac{V(F_£)}{V_1(N.F_£)}$$

no dependen de la presentación $G_£$-proyectiva considerada, y les notamos, res pectivamente $\underline{V}_1\underline{C}_{\pounds}(A)$ y $\underline{V}_o\underline{C}_{\pounds}(A)$.

Analogamente a (2.1.13) se tienen sucesiones exactas naturales

$$\underline{V}_1\underline{C}_{\pounds}(A) \rightarrowtail \underline{V}_o\underline{C}_{\pounds}(A) \twoheadrightarrow V(A)$$

$$\underline{V}_1\underline{C}_{\pounds}(A) \rightarrowtail \underline{V}_o\underline{C}_{\pounds}(A) \longrightarrow A \twoheadrightarrow A/V(A).$$

y razonamiento analogo al dado en (2.1.27) prueba que $\underline{V}_1\underline{C}_{\pounds}(A)$ es un $\underline{V}A$-módulo y $\underline{V}_o\underline{C}_{\pounds}(A)$ es una $\underline{V}A$-estructura.

(2.1.30) PROPOSICION .

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$. Si $K \rightarrowtail B \overset{p}{\twoheadrightarrow} A$ es una sucesión exacta corta (p sobre) en $\underline{C}$, se tiene una sucesión exacta inducida

$$\frac{K\cap V(B)}{V_1(K,B)} \rightarrowtail \frac{K}{V_1(K,B)} \longrightarrow \frac{B}{V(B)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)} .$$

$\dfrac{K\cap V(B)}{V_1(K,B)}$ es un $\underline{V}A$-módulo, $\dfrac{K}{V_1(K,B)}$ es una $\underline{V}B$-estructura, y la suce- exacta anterior es una 2-extensión especial de $A/V(A)$ por el $A/V(A)$-módulo $\dfrac{K\cap V(B)}{V_1(K,B)}$.

Dem.-

Del diagrama conmutativo de filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
K\cap V(B) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & V(B) \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] & V(A) \arrow[d, tail] \\
K \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & A \arrow[d, two heads] \\
\frac{K}{K\cap V(B)} \arrow[r, tail] & \frac{B}{V(B)} \arrow[r, two heads] & \frac{A}{V(A)}
\end{tikzcd}$$

se deduce la sucesión exacta anunciada.

Razonamiento analogo al dado en (2.1.27) muestra que $\dfrac{K\cap V(B)}{V_1(K,B)}$ es un

$\underline{V}A$-módulo, y por (2.1.23) un $A/V(A)$-módulo. Claramente $\frac{K}{V_1(K,B)}$ es una $\underline{V}B/V_1(K,B)$-estructura por conjugación y como $\frac{V(B)}{V_1(K,B)}$ actua trivialmente sobre $\frac{K}{V_1(K,B)}$ este sera una $\underline{V}B/V(B)$-estructura, de donde tambien sera una $\underline{V}B$-estructura.

La comprobación de que se trata de una 2-extensión especial es enteramente analoga a la demostración de (2.1.28).

2.2. COHOMOLOGIA V^n. LOS MORFISMOS $\phi^n : V^n \longrightarrow H^n$.

Supondremos $\underline{C}$ una categoria de interes,(1.2.1), y $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ definida por un conjunto de palabras Ω,(vease(2.1.2),(2.1.3)).

Tendremos funtores adjuntos,(2.1.1),

$$\begin{array}{c} \underline{C} \\ P\big\downarrow \ \big\uparrow I \text{ (inclusión)} \\ \underline{V} \end{array}$$

y la sucesión exacta corta funtorial , (vease(2.1.2),(2.1.3)),

$$V \rightarrowtail I_{\underline{C}} \xrightarrow{\theta} I\,P$$

de endofuntores en $\underline{C}$.

En adelante, si $H : \mathcal{A} \longrightarrow \underline{V}$ es un funtor notaremos tambien por $H : \mathcal{A} \longrightarrow \underline{C}$ al funtor $I\,H$.

La composición de adjunciones

$$\begin{array}{c} Set_* \\ F\big\downarrow \ \big\uparrow U \\ \underline{C} \\ P\big\downarrow \ \big\uparrow I \\ \underline{V} \end{array}$$

nos inducira en $\underline{V}$ un cotriple al que denotaremos $G_V = (G_V, \delta_V, \varepsilon_V)$.

Y, eventualmente, si se da la situación (1.2.10), la composición de adjunciones

$$\begin{array}{c} \pounds \\ F_{\pounds}\big\downarrow\big\uparrow U_{\pounds} \\ \underline{C} \\ P\big\downarrow\big\uparrow I \\ \underline{V} \end{array}$$

nos dara en $\underline{V}$ el cotriple $G_{\pounds V} = (G_{\pounds V}, \delta_{\pounds V}, \varepsilon_{\pounds V})$.

(2.2.1) Definimos una transformación natural, en cualesquiera de las situaciones,

$$r : G_{(\pounds)}\cdot I \longrightarrow G_{(\pounds)V}$$

por $r = \theta G_{(\pounds)}I : G_{(\pounds)}\cdot I \longrightarrow I\cdot P\cdot G_{(\pounds)}\cdot I = I\cdot G_{(\pounds)V} = G_{(\pounds)V}$; es decir, para cada $A\in \underline{V}$, sera

$$r_A = \theta_{G_{(\pounds)}(A)} : G_{(\pounds)}(A) \twoheadrightarrow \frac{G_{(\pounds)}(A)}{V(G_{(\pounds)}(A))}$$

Es claro que r_A es un epimorfismo sobre.

Mas en general, para $n\geqslant 1$ definimos inductivamente

$$r_n : G^n_{(\pounds)}\, I \longrightarrow G^n_{(\pounds)V}$$

por $r_1 = r$, $r_{n+1} = rG^n_{(\pounds)V}\cdot Gr_n$, osea la conposición

$$G^{n+1}_{(\pounds)}\cdot I = G_{(\pounds)}\cdot G^n_{(\pounds)}\cdot I \xrightarrow{G_{(\pounds)}r_n} G_{(\pounds)}\cdot I\cdot G^n_{(\pounds)V} \xrightarrow{rG^n_{(\pounds)V}} G_{(\pounds)V}\cdot G^n_{(\pounds)V} = G^{n+1}_{(\pounds)V}$$

(2.2.2) LEMA .

$$r_{n+1} = r_n G_{(\pounds)V}\cdot G^n_{(\pounds)}r \quad \text{, para todo } n\geqslant 1.$$

Dem.-

La igualdad propuesta expresa que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G^{n+1}_{(\pounds)} \arrow[r, "G^{n}_{(\pounds)}r"] \arrow[d, "G_{(\pounds)}r_n"'] & G^{n}_{(\pounds)} \cdot I \cdot G_{(\pounds)V} \arrow[d, "r_n G_{(\pounds)V}"] \\
G_{(\pounds)} \cdot I \cdot G^{n}_{(\pounds)V} \arrow[r, "rG^{n}_{(\pounds)V}"] & G^{n+1}_{(\pounds)V}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Hagamos inducción sobre n.

Si $n=1$, es evidente. Admitamos que $r_n = r_{n-1}G_{(\pounds)V} \cdot G^{n-1}_{(\pounds)}r$, para $n>1$; entonces

$$\begin{aligned}
r_n G_{(\pounds)V} \cdot G^{n}_{(\pounds)}r &= (r_{n-1}G_{(\pounds)V} \cdot G^{n-1}_{(\pounds)}r)G_{(\pounds)V} \cdot G^{n}_{(\pounds)}r = \\
&= (rG^{n-1}_{(\pounds)V} \cdot G_{(\pounds)}r_{n-1})G_{(\pounds)V} \cdot G^{n}_{(\pounds)}r = \\
&= rG^{n}_{(\pounds)V} \cdot G_{(\pounds)}r_{n-1}G_{(\pounds)V} \cdot G^{n}_{(\pounds)}r = \\
&= rG^{n}_{(\pounds)V} \cdot G_{(\pounds)}(r_{n-1}G_{(\pounds)V} \cdot G^{n-1}_{(\pounds)}r) = \\
&= rG^{n}_{(\pounds)V} \cdot G_{(\pounds)}r_n = \\
&= r_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

(2.2.3) Para cada $A \in \underline{V}$ podemos considerar las resoluciones simpliciales de A inducidas por los cotriples dados en $\underline{C}$ y $\underline{V}$, $\mathbb{G}_{(\pounds)\bullet}(A)$ y $\mathbb{G}_{(\pounds)V\bullet}(A)$, respectivamente.

Se verifica que $r_\bullet = (r_n)_{n\geq 1} : \mathbb{G}_{(\pounds)\bullet}(A) \longrightarrow \mathbb{G}_{(\pounds)V\bullet}(A)$ es un morfismo de resoluciones simpliciales,(vease, por ejemplo,[29]); en efecto, se ha de verificar que en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots G^{n+1}_{(\pounds)}(A) \arrow[r, shift left, "\delta_n"] \arrow[r, shift right, "\delta_0"'] \arrow[d, "r_{n+1}"] & G^{n}_{(\pounds)}(A) \arrow[d, "r_n"] \cdots & G^{2}_{(\pounds)}(A) \arrow[r, shift left, "\delta_1"] \arrow[r, shift right, "\delta_0"'] \arrow[d, "r_2"] & G_{(\pounds)}(A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "r_1"] & A \arrow[d, equal] \\
\cdots G^{n+1}_{(\pounds)V}(A) \arrow[r, shift left, "\delta_{Vn}"] \arrow[r, shift right, "\delta_{V0}"'] & G^{n}_{(\pounds)V}(A) \cdots & G^{2}_{(\pounds)V}(A) \arrow[r, shift left, "\delta_{V1}"] \arrow[r, shift right, "\delta_{V0}"'] & G_{(\pounds)V}(A) \arrow[r, "\delta_V"] & A
\end{tikzcd}$$

siendo $\delta_i = G^{n-i}_{(\pounds)}\delta G^{i}_{(\pounds)}$ y $\delta_{Vi} = G^{n-i}_{(\pounds)V}\delta_V G^{i}_{(\pounds)V}$, se tenga $r_n\,\delta_i = \delta_{Vi}\; r_{n+1}$.

Para probarlo, nos apoyaremos en las siguientes propiedades :

a) δ_V es precisamente el morfismo que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_{(\pounds)}(A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "r_1"'] & A \arrow[d, equal] \\
G_{(\pounds)V}(A) \arrow[r, "\delta_V"] & A
\end{tikzcd}$$

b) Por la naturalidad de r_n , dado el morfismo $\delta_V\colon G_{(\pounds)V}(A) \longrightarrow A$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G^{n}_{(\pounds)}\, G_{(\pounds)V}(A) \arrow[r, "G^{n}_{(\pounds)}\delta_V"] \arrow[d, "r_n G_{(\pounds)V}"'] & G^{n}_{(\pounds)}(A) \arrow[d, "r_n"] \\
G^{n+1}_{(\pounds)V}(A) \arrow[r, "G^{n}_{(\pounds)V}\delta_V"] & G^{n}_{(\pounds)V}(A)
\end{tikzcd}$$

c) Por la naturalidad de $G^{m-i}_{(\pounds)}\delta\, G^{i}_{(\pounds)}$, dado r_n , se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G^{m+1}_{(\pounds)}\, G^{n}_{(\pounds)}(A) \arrow[r, "G^{m+1}_{(\pounds)} r_n"] \arrow[d, "G^{m-i}_{(\pounds)}\delta G^{i}_{(\pounds)} \cdot G^{n}_{(\pounds)}"'] & G^{m+1}_{(\pounds)}\, G^{n}_{(\pounds)V}(A) \arrow[d, "G^{m-i}_{(\pounds)}\delta G^{i}_{(\pounds)} \cdot G^{n}_{(\pounds)V}"] \\
G^{m}_{(\pounds)}\, G^{n}_{(\pounds)}(A) \arrow[r, "G^{m}_{(\pounds)} r_n"] & G^{m}_{(\pounds)}\, G^{n}_{(\pounds)V}(A)
\end{tikzcd}$$

Probaremos ahora que $r_n \delta_i = \delta_{v_i} r_{n+1}$, $i=o, \ldots, n$, haciendo inducción sobre n :

Si $n = 1$, se tiene

$$\delta_{v_1} r_2 = \delta_v G_{(\mathcal{L})v} \cdot r_2 = \delta_v G_{(\mathcal{L})v} \cdot r_1 G_{(\mathcal{L})v} \cdot G_{(\mathcal{L})} r_1 =$$

$$= \delta G_{(\mathcal{L})v} \cdot G_{(\mathcal{L})} r_1 = r_1 \cdot \delta G_{(\mathcal{L})} =$$

$$= r_1 \delta_1 .$$

utilizando a) y b) para m=o,n=1.

$$\delta_{v_o} r_2 = G_{(\mathcal{L})v} \delta_v \cdot r_1 G_{(\mathcal{L})v} \cdot G_{(\mathcal{L})} r_1 = r_1 \cdot G_{(\mathcal{L})} \delta_v \cdot G_{(\mathcal{L})} r_1 = r_1 \cdot G_{(\mathcal{L})} \delta =$$

$$= r_1 \delta_o .$$

Admitamos inductivamente que $\delta_{v_i} r_n = r_{n-1} \delta_i$ $i=o, \ldots, n-1$, $n>1$.

Entonces:

Si $i>o$

$$\delta_{v_i} r_{n+1} = G^{n-i}_{(\mathcal{L})v} \delta_v G^{i}_{(\mathcal{L})v} \cdot r_n G_{(\mathcal{L})v} \cdot G^{n}_{(\mathcal{L})} r =$$

$$= (G^{n-i}_{(\mathcal{L})v} \delta_v G^{i-1}_{(\mathcal{L})v} \cdot r_n) G_{(\mathcal{L})v} \cdot G^{n}_{(\mathcal{L})} r =$$

$$= (r_{n-1} \cdot G^{n-i}_{(\mathcal{L})} \delta G^{i-1}_{(\mathcal{L})}) G_{(\mathcal{L})v} \cdot G^{n}_{(\mathcal{L})} r =$$

$$= r_{n-1} G_{(\mathcal{L})v} \cdot G^{n-i}_{(\mathcal{L})} \delta G^{i-1}_{(\mathcal{L})} G_{(\mathcal{L})v} \cdot G^{n}_{(\mathcal{L})} r =$$

$$= r_{n-1} G_{(\mathcal{L})v} \cdot G^{n-1}_{(\mathcal{L})} r \cdot G^{n-i}_{(\mathcal{L})} \delta G^{i-1}_{(\mathcal{L})} G_{(\mathcal{L})} =$$

$$= r_n \delta_i .$$

Si $i=o$

$$\delta_{v_o} r_{n+1} = G^{n}_{(\mathcal{L})v} \delta_v \cdot r_n G_{(\mathcal{L})v} \cdot G^{n}_{(\mathcal{L})} r =$$

$$= r_n \cdot G^{n}_{(\mathcal{L})} \delta_v \cdot G^{n}_{(\mathcal{L})} r = r_n \cdot G^{n}_{(\mathcal{L})} \delta =$$

$$= r_n \delta_o .$$

(2.2.4) COROLARIO .

Para cada A $\underline{C}$, existe un epimorfismo sobre , natural,

$$\phi_\bullet : \mathbb{G}_{(\pounds)\bullet}(A) \longrightarrow \mathbb{G}_{(\pounds)V\bullet}(A/V(A))$$

de resoluciones simpliciales de A y A/V(A), respecto a los correspondientes cotriples.

Dem.-

Dado A $\underline{C}$, consideremos el epimorfismo sobre θ: A — A/V(A) = P(A) y tendremos el epimorfismo inducido entre las resoluciones simpliciales de A y A/V(A) por el cotriple $\mathbb{G}_{(\pounds)}$, (vease, por ejemplo,[29]) :

$$G_{(\pounds)}(\theta)_\bullet = (G^n_{(\pounds)}(\theta))_{n\geqslant 1} : G_{(\pounds)\bullet}(A) \longrightarrow G_{(\pounds)\bullet}(A/V(A))$$

Componiendo este con $r_\bullet : G_{(\pounds)\bullet}(A/V(A)) \longrightarrow G_{(\pounds)V\bullet}(A/V(A))$, obtendremos

$$\phi_\bullet = r_\bullet \; G_{(\pounds)\bullet}(\theta) : G_{(\pounds)\bullet}(A) \longrightarrow G_{(\pounds)V\bullet}(A/V(A)).$$

Explicitamente seria $\phi_n = r_n \; G^n_{(\pounds)}(\theta) : G^n_{(\pounds)}(A) \longrightarrow G^n_{(\pounds)V}(A/V(A))$.

(2.2.5) Cohomologia V^n.

Si $R \in \underline{V}$, como en (1.2.11), se tendran las adjunciones

$$\begin{array}{c}(Set, U(R))\\ F_R \downarrow \; \uparrow U_R\\ (\underline{C}, R)\\ P_R \downarrow \; \uparrow I_R\\ (\underline{V}, R)\end{array}$$

(siendo I_R el funtor inclusión, y P_R definido por $P_R(A \rightarrow R) = P(A) \longrightarrow R)$ y caso que en $\underline{C}$ se de la situación de factorización (1.2.10), tambien las adjunciones

$$\begin{array}{c}(\pounds, U_\pounds(R))\\ F_{\pounds R} \downarrow \; \uparrow U_{\pounds R}\\ (\underline{C}, R)\\ P_R \downarrow \; \uparrow I_R\\ (\underline{V}, R)\end{array}$$

No hay lugar a confusión si denotamos tambien $\mathbb{G}_V$ o respectivamente $\mathbb{G}_{£V}$ al correspondiente cotriple en $(\underline{V},R)$.

Notemos que cualquier variedad $\underline{V}$ de una categoria de interes $\underline{C}$ es obviamente una categoria de interes, por tanto todo lo estudiado en el capitulo 1 sera aplicable tanto a $\underline{C}$ como a $\underline{V}$.

Si X es un R-módulo en $\underline{V}$, considerando el funtor, (1.2.9),

$$\mathrm{Der}(\ ,X) : (\underline{V},R)^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

tendremos los funtores de cohomologia, que en este caso denotaremos V^n para reservar la notación H^n como funtores de cohomologia en $\underline{C}$,

$$V^n(A,X)_{(£)} = H^n(A \longrightarrow R, \mathrm{Der}(\ ,X))_{\mathbb{G}_{(£)V}}$$

$$V^n(\sigma,X)_{(£)} = H^n(\sigma, \mathrm{Der}(\ ,X))_{\mathbb{G}_{(£)V}}$$

para $A \longrightarrow R \in (\underline{V},R)$ y σ un morfismo en $(\underline{V},R)$ que es sobre (£-escindente).

Notemos que para cualquier R-módulo en $\underline{V}$, X, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\underline{C},R)^{\circ} \arrow[dr, "\mathrm{Der}(\ ,X)"] & \\
 & \mathrm{Ab} \\
(\underline{V},R)^{\circ} \arrow[uu] \arrow[ur, "\mathrm{Der}(\ ,X)"'] &
\end{tikzcd}$$

es claramente conmutativo.

Recordemos que, tal como se vio en el epigrafe anterior,((2.1.23),(2.1.24)), la condición necesaria y suficiente para que un R-modulo en $\underline{C}$ sea , de forma inducida, un R/V(R)-modulo en $\underline{V}$ es que sea un $\underline{V}$R-modulo.

A continuación encontraremos morfismos naturales que, para X un $\underline{V}$R-módulo, conectan los grupos de cohomologia $V^n(R/V(R),X)_{(£)}$ y $H^n(R,X)_{(£)}$. En grupos son introducidos por Leedam-Green [113] y les denomina " morfismos cambio de variedad ".

(2.2.6) Los morfismos " cambio de variedad ".

Sea $R \in \underline{C}$ y X un $\underline{V}R$-módulo en $\underline{C}$. Si $A \longrightarrow R$ $(\underline{C},R)$, segun (2.1.26), X es tambien, via $A \longrightarrow R$, un $\underline{V}A$-módulo.

Considerando el epimorfismo natural $\phi_{\bullet A}: G_{(\pounds)_\bullet}(A) \longrightarrow G_{(\pounds)V_\bullet}(A/V(A))$ obtenido en (2.2.4), y aplicando el funtor Der(,X), obtenemos morfismos

$$\phi^n_A : V^n(A/V(A),X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^n(A,X)_{(\pounds)}$$

(vease, por ejemplo, [29]).

Si $r^n: V^n(A/V(A),X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^n(A/V(A),X)_{(\pounds)}$ son los morfismos inducidos por el morfismo de resoluciones $r_\bullet: \mathbb{G}_{(\pounds)_\bullet}(A/V(A)) \longrightarrow \mathbb{G}_{(\pounds)V_\bullet}(A/V(A))$ y $\theta^n: H^n(A/V(A),X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^n(A,X)_{(\pounds)}$ son los inducidos por $\theta: A \longrightarrow A/V(A)$ se tiene obviamente la factorización

$$\begin{tikzcd} V^n(A/V(A),X)_{(\pounds)} \arrow[rr, "\phi^n"] \arrow[dr, "r^n"'] & & H^n(A,X)_{(\pounds)} \\ & H^n(A/V(A),X)_{(\pounds)} \arrow[ur, "\theta^n"'] & \end{tikzcd}$$

Sea ahora $\begin{tikzcd}[column sep=small] A \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$ un morfismo en (C,R) con σ sobre (£-escindente). Denotaremos $\sigma/V(\sigma) = P(\sigma)$, osea el inducido por el diagrama

$$\begin{tikzcd} V(A) \arrow[r, tail] \arrow[d, "V(\sigma)"'] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\sigma"] & A/V(A) \arrow[d, "\sigma/V(\sigma)"] \\ V(B) \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads] & B/V(B) \end{tikzcd}$$

La naturalidad de $\phi_\bullet$ implica claramente la conmutatividad del diagrama de resoluciones simpliciales

$$\begin{tikzcd} G_{(\pounds)_\bullet}(A) \arrow[r, "\phi_{\bullet A}"] \arrow[d, "G_{(\pounds)_\bullet}(\sigma)"'] & G_{(\pounds)V_\bullet}(A/V(A)) \arrow[d, "G_{(\pounds)V_\bullet}(\sigma/V(\sigma))"] \\ G_{(\pounds)_\bullet}(B) \arrow[r, "\phi_{\bullet B}"] & G_{(\pounds)V_\bullet}(B/V(B)) \end{tikzcd}$$

y entonces, para X un $\underline{V}R$-modulo, aplicando el funtor Der(,X) y tomando conucleos obtenemos el diagrama conmutativo de complejos de cadenas en Ab con filas exactas cortas

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}(G_{(\pounds)V}(B/V(B)),X) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\phi^{*}_{\bullet B}"'] & \mathrm{Der}(G_{(\pounds)V}(A/V(A)),X) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi^{*}_{\bullet A}"] & \mathrm{Der}'(G'_{(\pounds)V}(\sigma/V(\sigma)),X) \arrow[d, "\phi^{*}_{\bullet\sigma}"] \\
\mathrm{Der}(G_{(\pounds)}(B),X) \arrow[r, tail, "G_{(\pounds)\bullet}(\sigma)^{*}"] & \mathrm{Der}(G_{(\pounds)}(A),X) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Der}'(G'_{(\pounds)}(\sigma),X)
\end{tikzcd}$$

siendo $\phi^{*}_{\bullet\sigma}$ el correspondiente morfismo inducido en los conucleos, osea seria $\mathrm{Der}'((\phi_{\bullet A},\phi_{\bullet B}),X)$.

inducira morfismos en las cohomologias

$$\phi^{n}_{\sigma} : V^{n}(\sigma/V(\sigma),X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^{n}(\sigma,X)_{(\pounds)}$$

Ademas el diagrama anterior nos lleva a la conmutatividad del diagrama de filas exactas (vease (1.3.2))

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Der}(B/V(B),X) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^{o}_{B}"] & \mathrm{Der}(A/V(A),X) \arrow[r] \arrow[d, "\phi^{o}_{A}"] & V^{o}(\sigma/V(\sigma),X)_{(\pounds)} \arrow[r] \arrow[d, "\phi^{o}_{\sigma}"] & V^{1}(B/V(B),X)_{(\pounds)} \arrow[r] \arrow[d, "\phi^{1}_{B}"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Der}(B,X) \arrow[r] & \mathrm{Der}(A,X) \arrow[r] & H^{o}(\sigma,X)_{(\pounds)} \arrow[r] & H^{1}(B,X)_{(\pounds)} \arrow[r, no head] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Los morfismos ϕ^{n}_{A} y ϕ^{n}_{σ} son llamados "morfismos cambio de variedad".

Notemos que en el caso de que A y σ esten en $\underline{V}$ entonces θ^{n} es la identidad y $\phi^{n}=r^{n}$.

2.3. ESTUDIO DE ϕ^{o} y ϕ^{1} .

Seguiremos en las condiciones de 2.2. (2.2.6).

(2.3.1) PROPOSICION .

El morfismo ϕ^{o}_{A}: $V^{o}(A/V(A),X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^{o}(A,X)_{(\pounds)}$ es un isomorfismo.

Dem.-

Teniendo en cuenta lo establecido en la demostración de (1.3.1) y la definición de ϕ^{o}_{A} se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} V^{o}(A/V(A),X)_{(\pounds)} \arrow[r, "\phi^{o}_{A}"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & H^{o}(A,X)_{(\pounds)} \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\ Der(A/V(A),X) \arrow[r, "\theta^{*}"] & Der(A,X) \end{tikzcd}$$

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X \rtimes A \arrow[r, two heads, shift left] \arrow[d, "h"] & A \arrow[l, tail, shift left] \arrow[d, "\theta"] \\ X \arrow[r, tail] & X \rtimes \frac{A}{V(A)} \arrow[r, two heads, shift left] & \frac{A}{V(A)} \arrow[l, tail, shift left] \end{tikzcd}$$

por ser el cuadrado de la derecha cartesiano, la aplicación

$$f \longmapsto h\, f$$

establece un isomorfismo

$$h_{*}: Hom_{(\underline{C},A)}\left(\begin{matrix} A \\ \| \\ A \end{matrix} , \begin{matrix} X \rtimes A \\ \downarrow \\ A \end{matrix} \right) \cong Hom_{(\underline{C},\frac{A}{V(A)})}\left(\begin{matrix} A \\ \downarrow \\ \frac{A}{V(A)} \end{matrix} , \begin{matrix} X \rtimes \frac{A}{V(A)} \\ \downarrow \\ \frac{A}{V(A)} \end{matrix} \right) .$$

Al ser X un $\underline{V}$A-modulo, se tendra que $X \rtimes \frac{A}{V(A)}$ esta en $\underline{V}$ y por consiguiente todo morfismo $g : A \longrightarrow X \rtimes \frac{A}{V(A)}$ se anula en $V(A)$. Entonces el morfismo

$$\theta^*: \mathrm{Hom}_{(\underline{C},\frac{A}{V(A)})}\left(\begin{array}{c}\frac{A}{V(A)}\\ \| \\ \frac{A}{V(A)}\end{array}, \begin{array}{c}X\rtimes\frac{A}{V(A)}\\ \downarrow\\ \frac{A}{V(A)}\end{array}\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{(\underline{C},\frac{A}{V(A)})}\left(\begin{array}{c}A\\ \downarrow\\ \frac{A}{V(A)}\end{array}, \begin{array}{c}X\rtimes\frac{A}{V(A)}\\ \downarrow\\ \frac{A}{V(A)}\end{array}\right)$$

tal que $\theta^*(g) = g\,\theta$, es un isomorfismo.

Es elemental comprobar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}\left(\frac{A}{V(A)},X\right) \arrow[r, "\theta^*"] \arrow[d, "\wr\|"'] & \mathrm{Der}(A,X) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{(\underline{C},A)}\left(\begin{array}{c}A\\ \|\\ A\end{array}, \begin{array}{c}X\rtimes A\\ \downarrow\\ A\end{array}\right) \arrow[d, "h_*\ \wr\|"] \\
\mathrm{Hom}_{(\underline{C},\frac{A}{V(A)})}\left(\begin{array}{c}\frac{A}{V(A)}\\ \| \\ \frac{A}{V(A)}\end{array}, \begin{array}{c}X\rtimes\frac{A}{V(A)}\\ \downarrow\\ \frac{A}{V(A)}\end{array}\right) \arrow[rr, "\sim"] & & \mathrm{Hom}_{(\underline{C},\frac{A}{V(A)})}\left(\begin{array}{c}A\\ \downarrow\\ \frac{A}{V(A)}\end{array}, \begin{array}{c}X\rtimes\frac{A}{V(A)}\\ \downarrow\\ \frac{A}{V(A)}\end{array}\right)
\end{tikzcd}$$

Y concluimos que θ^* es un isomorfismo , de donde Φ_A^0 tambien lo es.

(2.3.2) Sea $\begin{tikzcd}[sep=small] A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\ & R \end{tikzcd}$ un epimorfismo en $(\underline{V},R)$, con σ sobre ($\mathcal{L}$-escindente), y supongamos que $s: B \longrightarrow A$ es una escisión de σ en la correspondiente categoria de olvido. Entonces, siendo $s_1 = F_{(\mathcal{L})}(s)$: $G_{(\mathcal{L})}(B) \longrightarrow G_{(\mathcal{L})}(A)$ se tiene que $G_{(\mathcal{L})}(\sigma)\ s_1 = I$.

Si consideramos $s_2 = P(s_1)$: $G_{(\mathcal{L})_V}(B) \longrightarrow G_{(\mathcal{L})_V}(A)$, como los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
G_{(\mathcal{L})}(A) \arrow[r, "r_A"] \arrow[d, "G_{(\mathcal{L})}(\sigma)"] & G_{(\mathcal{L})_V}(A) \arrow[d, "G_{(\mathcal{L})_V}(\sigma)"] \\
G_{(\mathcal{L})}(B) \arrow[r, "r_B"] & G_{(\mathcal{L})_V}(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G_{(\mathcal{L})}(B) \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "s_1"] & G_{(\mathcal{L})_V}(B) \arrow[d, "s_2"] \\
G_{(\mathcal{L})}(A) \arrow[r, "r_A"] & G_{(\mathcal{L})_V}(A)
\end{tikzcd}$$

son conmutativos, se tiene $G_{(\mathcal{L})_V}(\sigma)\ s_2\ r_B = G_{(\mathcal{L})_V}(\sigma)\ r_A\ s_1 = r_B\ G_{(\mathcal{L})}(\sigma)\ s_1 =$ $= r_B$ de donde $G_{(\mathcal{L})_V}(\sigma)\ s_2 = I$.

Para este apartado y para el siguiente notaremos $s'_1 = G_{(\mathcal{L})}(s_1)$, $s'_2 = G_{(\mathcal{L})_V}(s_2)$,

$\sigma_1 = G_{(\pounds)}(\sigma)$, $\sigma_2 = G^2_{(\pounds)}(\sigma)$, $\sigma'_1 = G_{(\pounds)V}(\sigma)$ y $\sigma'_2 = G^2_{(\pounds)V}(\sigma)$.

Se verifica que $s'_2\ r_{2B} = r_{2A}\ s'_1$.

En efecto, de la conmutatividad del cuadrado de la derecha, escrito anteriormente, obtenemos que $G_{(\pounds)}(r_A)\ s'_1 = G_{(\pounds)}(s_2)\ G_{(\pounds)}(r_B)$ y la naturalidad de r nos asegura que $r_{G_{(\pounds)}(A)}\ G_{(\pounds)}(s_2) = s'_2\ r_{G_{(\pounds)V}(B)}$. Entonces

$$\begin{aligned} s'_2\ r_{2B} &= s'_2\ r_{G_{(\pounds)V}(B)}\ G_{(\pounds)}r_B = \\ &= r_{G_{(\pounds)V}(A)}\ G_{(\pounds)}(s_2)\ G_{(\pounds)}r_B = \\ &= r_{G_{(\pounds)V}(A)}\ G_{(\pounds)}r_A\ s'_1 = \\ &= r_{2A}\ s'_1 . \end{aligned}$$

(2.3.3) PROPOSICION .

Si $\begin{smallmatrix} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ & \searrow\ R\ \swarrow & \end{smallmatrix}$ es un epimorfismo en $(\underline{V},R)$, con σ sobre (£-escindente), entonces

$$\phi^0_\sigma : V^0(\sigma,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^0(\sigma,X)_{(\pounds)}$$

es un isomorfismo.

Dem.-

Puesto que σ esta en $\underline{V}$, sera $\phi^n = r^n$.

En virtud de lo probado en (2.3.1), tendremos que

$$r_1 : \mathrm{Der}(G_{(\pounds)V}(C),X) \longrightarrow \mathrm{Der}(G_{(\pounds)}(C),X)$$

es un isomorfismo, para todo $C \longrightarrow R \in (\underline{V},R)$.

Estudiamos el diagrama que nos da los grupos 0 de cohomologia del epimorfismo :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathrm{Der}(B,X) \arrow[rr, tail] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G_{(\pounds)}(B),X) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G^2_{(\pounds)}(B),X) \arrow[rr] \arrow[dd, shift left, "\sigma_2^*"] & & \cdots \\
\mathrm{Der}(B,X) \arrow[ur, equal] \arrow[rr, tail] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G_{(\pounds)V}(B),X) \arrow[ur, dashed] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G^2_{(\pounds)V}(B),X) \arrow[ur, tail, "r^*_{2B}"] \arrow[rr] \arrow[dd, shift left, "\sigma'^*_2"] & & \cdots & \\
& \mathrm{Der}(A,X) \arrow[rr, tail] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G_{(\pounds)}(A),X) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G^2_{(\pounds)}(A),X) \arrow[rr] \arrow[uu, shift left, dashed, "s'^*_1"] \arrow[dd, shift left, "h"] & & \cdots \\
\mathrm{Der}(A,X) \arrow[ur, equal] \arrow[rr, tail] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G_{(\pounds)V}(A),X) \arrow[ur, equal] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathrm{Der}(G^2_{(\pounds)V}(A),X) \arrow[ur, "r^*_{2A}"] \arrow[uu, shift left, "s'^*_2"] \arrow[rr] \arrow[dd, shift left, "g"] & & \cdots & \\
& H^0(\sigma,X)_{(\pounds)} \arrow[rr, tail] & & \mathrm{Der}'(\sigma_1,X) \arrow[rr, "\partial"] & & \mathrm{Der}'(\sigma_2,X) \arrow[rr] \arrow[uu, shift left, tail, "t"] & & \cdots \\
V^0(\sigma,X)_{(\pounds)} \arrow[ur, "\phi^0_\sigma"] \arrow[rr, tail] & & \mathrm{Der}'(\sigma'_1,X) \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "\partial_V"] & & \mathrm{Der}'(\sigma'_2,X) \arrow[ur, "r'"] \arrow[uu, shift left, tail, "f"] \arrow[rr] & & \cdots &
\end{tikzcd}
$$

donde hemos denotado $h = \mathrm{Coker}(\sigma_2^*)$, $g = \mathrm{Coker}(\sigma'^*_2)$, $t = \mathrm{Ker}(s'^*_1)$ y $f = \mathrm{Ker}(s'^*_2)$.

Probaremos que $r_{2A}\ f = t\ r'$, utilizando que $\mathrm{Der}(G^2_{(\pounds)}(A),X)$ es el producto de $\mathrm{Der}(G_{(\pounds)}(B),X)$ y $\mathrm{Der}'(\sigma_2,X)$ con proyecciones h y s'_1 :

En efecto, se tiene

$$s'_1\ r_{2A}\ f = r_{2B}\ s'_2\ f = 0 \quad \text{y} \quad s'_1\ t\ r' = 0$$

$$h\ r_{2A}\ f = r'\ g\ f = r' = h\ t\ r' .$$

Como r_{2A} es un epimorfismo sobre, r_{2A} es un monomorfismo y $r_{2A} f = t\ r'$ sera un monomorfismo, luego r' es un monomorfismo . Entonces

$$H^0(\sigma,X)_{(\pounds)} = \mathrm{Ker}(\sigma) = \mathrm{Ker}(r'\partial_V) = \mathrm{Ker}(\partial_V) = V^0(\sigma,X)_{(\pounds)}$$

y ϕ^0_σ es un isomorfismo.

(2.3.4) Estudiaremos en este apartado el comportamiento de ϕ^1_A en terminos de extensiones.

Sea $A \longrightarrow R \in (\underline{C}, R)$ y X un $\underline{V}R$-módulo. Consideramos los elementos del grupo $H^1(A,X)_{(\pounds)}$ como clases de (£)extensiones singulares $[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A]$ de A por el A-módulo X en $\underline{C}$, y los de $V^1(A/V(A),X)_{(\pounds)}$ como clases de (£)extensiones singulares $[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A/V(A)]$ de A/V(A) por el A/V(A)-módulo X en $\underline{V}$,(vease (1.4.6)).

Consideremos el morfismo $\Phi^1 = \Theta^1 r^1 : V^1(A/V(A),X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(A,X)_{(\pounds)}$.

Dada $X \rightarrowtail E \xrightarrow{\sigma} A/V(A)$, una (£)extensión singular de A/V(A) por X en $\underline{V}$, segun (2.2.6) y (2.3.3), se tiene el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
V^0(\sigma,X)_{(\pounds)} & \xrightarrow{\psi} & V^1(A/V(A),X)_{(\pounds)} \\
\| & & \downarrow r^1 \\
H^0(\sigma,X)_{(\pounds)} & \xrightarrow{\psi} & H^1(A/V(A),X)_{(\pounds)}
\end{array}$$

asi $r^1 [X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A/V(A)] = r^1 \psi(I_X) = \psi(I_X) = [X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A/V(A)]$, (vease (1.4.6)), osea que r^1 aplica la clase de la extensión $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A/V(A)$ en la clase de esa misma extensión en $\underline{C}$.

Por otra parte, el morfismo $\Theta^1 : H^1(A/V(A),X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(A,X)_{(\pounds)}$, por (1.4.5) y (1.4.6), es tal que $\Theta^1[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A/V(A)] = [X \rightarrowtail E^{\Theta} \twoheadrightarrow A]$, cuyo representante $X \rightarrowtail E^{\Theta} \twoheadrightarrow A$ es obtenido por el diagrama cartesiano

$$\begin{array}{ccccc}
X & \rightarrowtail & E^{\Theta} & \twoheadrightarrow & A \\
\| & & \downarrow & & \downarrow \Theta \\
X & \rightarrowtail & E & \twoheadrightarrow & \dfrac{A}{V(A)}
\end{array}$$

Concluimos entonces que $\Phi^1[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A/V(A)] = [X \rightarrowtail E^{\Theta} \twoheadrightarrow A]$, obtenida esta por el diagrama anterior.

(2.3.5) PROPOSICION .

$$\phi^1_A : V^1(A/V(A),X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(A,X)_{(\pounds)}$$

es un monomorfismo.

Dem.-

Sea $[X \rightarrowtail E \xrightarrow{\sigma} A/V(A)] \in V^1(A/V(A),X)_{(\pounds)}$ tal que mediante ϕ^1 se aplica en el cero de $H^1(A,X)_{(\pounds)}$.

Se tendra el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, shift left, "\sigma'"] \arrow[d, "h"] & A \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d, "\theta"] \\ X \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads, "\sigma"] & \frac{A}{V(A)} \end{tikzcd}$$

existiendo $s:A \longrightarrow E$ con $\sigma' s = I_A$.

Considerando entonces el morfismo $P(hs) : A/V(A) \longrightarrow E/V(E)=E$, se tendra el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "hs"] \arrow[d, "\theta"'] & E \arrow[d, equal] \\ \frac{A}{V(A)} \arrow[r, "P(hs)"] & E \end{tikzcd}$$

y por tanto $\sigma P(hs)\theta = \sigma h s = \theta \sigma' s = \theta$ de donde sera $\sigma P(hs) = I$.

Luego $[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A/V(A)] = 0$.

Nota: El funtor V^1 tiene importantes precedentes clasicos. Concretamente, si $\underline{C}$ es la categoria de Grupos y $\underline{V}$ es la variedad de Grupos Abelianos el funtor V^1 es Ext^1_Z cuya importancia en el algebra homologica es clara. U. Stammbach [154], para $\underline{C}$ la categoria de Grupos y $\underline{V}$ una variedad de Grupos introduce el funtor $\tilde{V}$ asociado a la variedad cuyo objeto esencial es generalizar el funtor H^2 de cohomologia de Grupos y clasificar extensiones singulares en la variedad Alternativas definiciones de este funtor $\tilde{V}$ son dadas por Gerstenhaber [67] y Knopfmacher [107], [109] .

Se probara a continuación que $\tilde{V} = V^1$ atendiendo a la definicion dada por Stammbach; si bien, apriori, ya podemos afirmar que estos coinciden, pues ambos son isomorfos al grupo de las correspondientes extensiones singulares en la variedad, con la suma de Baer como operación de adición.

No pierde, sin embargo, interes la siguiente proposición, pues permite una introdución alternativa a V^1 a partir de los grupos de cohomologia en $\underline{C}$, H^1, asi como estrechar la relación entre ambos.

(2.3.6) PROPOSICION .

Sea $A \longrightarrow R \in (\underline{C}, R)$, con $A \in \underline{V}$, y X un $\underline{V}R$-módulo.

Si $P \xrightarrow{q} \!\!\!\!\rightarrow A$ es una presentación $\mathbb{G}_{(\pounds)\underline{V}}$-proyectiva de A en $\underline{V}$, entonces

$$V^1(A,X)_{(\pounds)} = \mathrm{Ker}(H^1(A,X)_{(\pounds)} \xrightarrow{q^*} H^1(P,X)_{(\pounds)}) .$$

Dem.-

Dado el epimorfismo $q: P \twoheadrightarrow A$, por (2.2.6), (2.3.1) y (2.3.3), se tiene el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}(A,X) \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \mathrm{Der}(P,X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & V^0(q,X)_{(\pounds)} \arrow[r] \arrow[d, equal] & V^1(A,X)_{(\pounds)} \arrow[r] \arrow[d, tail, "\phi^1"] & V^1(P,X)_{(\pounds)}=0 \\
\mathrm{Der}(A,X) \arrow[r, tail] & \mathrm{Der}(P,X) \arrow[r] & H^0(q,X)_{(\pounds)} \arrow[r] & H^1(A,X)_{(\pounds)} \arrow[r, "q"] & H^1(P,X)_{(\pounds)}
\end{tikzcd}$$

de donde es inmediato deducir que la sucesión

$$V^1(A,X)_{(\pounds)} \overset{\phi^1}{\rightarrowtail} H^1(A,X)_{(\pounds)} \xrightarrow{q} H^1(P,X)_{(\pounds)}$$

es exacta.

(2.3.7) COROLARIO .

Si $\underline{C}$ es la categoria de Grupos y $\underline{V}$ una variedad de Grupos, entonces $V^1(A,X) = \tilde{V}(A,X)$; siendo este último el funtor de cohomologia en la variedad introducido por U. Stammbach en [154] .

Dem.- Se deduce de (2.3.6) y de [154,pag.38].

(2.3.8) Extensiones singulares en $\underline{V}$.

Sea $A\in\underline{V}$. Si X es un A-módulo en $\underline{V}$ ($X\triangleleft A\in\underline{V}$) sabemos que las (£)extensiones singulares de A por X en $\underline{V}$ son clasificadas por el grupo $V^1(A,X)_{(£)}$, (1.4.6). Si X es un A-módulo en $\underline{C}$, cabe preguntarse si existen (£)extensiones singulares de A por X que esten en V, bajo el supuesto de que X no sea un A-módulo en $\underline{V}$, es decir que no sea un $\underline{V}$A-módulo. Obviamente si X no esta en $\underline{V}$ la respuesta es negativa; probaremos que aún estando X en $\underline{V}$, la respuesta es negativa.

(2.3.9) LEMA.

Sea $A\in\underline{V}$ y X un A-módulo en $\underline{C}$.

Consideremos $q^*: H^1(A,X)_{(£)} \longrightarrow H^1(P,X)_{(£)}$ el morfismo inducido por la presentación $\mathbb{G}_{(£)V}$-proyectiva de A $q: P \twoheadrightarrow A$.

Una (£)extensión singular $\underline{E} : X \rightarrowtail E \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$ esta en $\underline{V}$ si y solo si $q^*[\underline{E}]=0$ y $X\triangleleft P\in\underline{V}$.

Dem.-

Consideremos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E^q \arrow[r, two heads, "\sigma'"] \arrow[d] & P \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A \end{tikzcd}$$

Si $\underline{E}$ esta en $\underline{V}$, sera $E\in\underline{V}$ y $ExP\in\underline{V}$, con lo que $E^q\in\underline{V}$ al ser un subobjeto de de ExP; ademas es claro que existira un morfismo $s: P \longrightarrow E^q$ tal que $\sigma's=I_P$, al ser P $\mathbb{G}_{(£)V}$- proyectivo, con lo que $q^*[\underline{E}]=[X \rightarrowtail E^q \twoheadrightarrow P]=0$ y como sera entonces $E^q= X\triangleleft P$ este estara en $\underline{V}$.

Reciprocamente, si $q^*[\underline{E}]=0$ y $X\triangleleft P\in\underline{V}$, entonces σ' escinde y $E^q= X\triangleleft P\in\underline{V}$ de donde tambien E pertenecera a $\underline{V}$ al ser un cociente de E^q y la extensión esta en $\underline{V}$.

(2.3.10) PROPOSICION .

Si X no es un A-módulo en $\underline{V}$ ($\underline{V}$A-modulo) no hay (£)extensiones singulares de A por X en $\underline{V}$.

Dem.-

Supongamos que existe $\underline{E}: X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ en $\underline{V}$; entonces por el lema anterior sera $X \rtimes P \in \underline{V}$, donde $P \xrightarrow{q} A$ es una presentación $\mathbb{G}_{(\pounds)\underline{V}}$-proyectiva de A. Como se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & X \rtimes P \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads, "h"] & P \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, tail] & X \rtimes A \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

sera $X \rtimes A$ un cociente de $X \rtimes P$, y por tanto $X \rtimes A \in \underline{V}$, con lo que X es un A-módulo en $\underline{V}$.

Siendo X un A-módulo en $\underline{V}$, puede plantearse si toda (£)extensión singular de A por X esta en $\underline{V}$, osea si $\phi^1: V^1(A,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(A,X)_{(\pounds)}$ es un isomorfismo. Obviamente la respuesta en general es negativa; daremos a continuación una condición suficiente para ello.

(2.3.11) Si $\underline{W}$ y $\underline{W'}$ son dos variedades de $\underline{C}$, se define la variedad producto $\underline{W}\,\underline{W'}$ como la subcategoria plena de $\underline{C}$ cuyos objetos son los A $\underline{C}$ que verifican $W'(A) \in \underline{W}$, osea $W(W'(A))=0$, (vease,por ejemplo,[132]).

Si $A \in \underline{C}$, denotaremos $\underline{W}_A$ a la menor variedad de $\underline{C}$ que contiene a A, (Claramente existe, es la intersección de las variedades que contienen a A).

Denotaremos $S(\underline{C})$ a la subcategoria plena de $\underline{C}$ de objetos singulares (es decir, como ya sabemos, los que son abelianos como grupos y en los que $*$ es trivial,para todo $*$). $S(\underline{C})$ es claramente una variedad de $\underline{C}$.

LEMA .

Si $\underline{W}$ y $\underline{W'}$ son dos variedades de $\underline{C}$, la variedad producto $\underline{W}\,\underline{W'}$ consiste de los objetos de $\underline{C}$ que puedan expresarse como extensiones de un objeto de $\underline{W'}$ por un objeto de $\underline{W}$.

Dem.-

Supongamos que $E \in \underline{W}\,\underline{W}'$, entonces $W'(E) \in \underline{W}$ y considerando la sucesión exacta corta

$$W'(E) \rightarrowtail E \twoheadrightarrow E/W'(E)$$

tenemos que E se expresa como extensión de $E/W'(E) \in \underline{W}'$ por $W'(E) \in \underline{W}$.

Reciprocamente, sea $E \in \underline{C}$ tal que se tiene la extensión

$$A \rightarrowtail E \twoheadrightarrow C$$

con $C \in \underline{W}'$ y $A \in \underline{W}$.

Se tiene entonces la sucesión exacta corta $A \cap W'(E) \rightarrowtail W'(E) \twoheadrightarrow W'(C)$, pero $W'(C) = 0$ y por tanto $A \cap W'(E) = W'(E)$ de donde $W'(E) \subset A$; pero A esta en $\underline{W}$ y $W'(E)$ tambien lo estara. Asi $E \in \underline{W}\,\underline{W}'$.

(2.3.12) PROPOSICION .

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ tal que $\underline{V} \supset S(\underline{C})\underline{W}_A$, para $A \in \underline{V}$. Entonces para todo $\underline{V}A$-módulo $\phi^1 : V^1(A,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(A,X)_{(\pounds)}$ es un isomorfismo.

Dem.- La hipotesis implica claramente que toda extensión singular de A por X esta en $\underline{V}$.

Mas adelante se generalizara este resultado.

(2.3.13) Estudiaremos ahora el comportamiento del morfismo ϕ^1_σ para un epimorfismo $\begin{smallmatrix} A & \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} & B \\ & \searrow_{R} \swarrow & \end{smallmatrix}$ escindente en la correspondiente categoria de olvido.

Si σ esta en $\underline{V}$, para X un $\underline{V}R$-módulo, utilizando (1.5.24) y un razonamiento analogo al dado en (1.3.4) para la categoria $\underline{C}^2_R$ y $\underline{V}^2_{R/VR}$ (que es una variedad de $\underline{C}^2_R$) se obtiene que

$$\phi^1_\sigma : V^1(\sigma,X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^1(\sigma,X)_{(\pounds)}$$

es tal que $\phi^1_\sigma[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow L] = [X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow L] \in H^1(\sigma,X)_{(\pounds)}$, donde $L = Ker(\sigma)$.

Mas en general, si σ es de $\underline{C}$, segun (2.2.6) tendremos la factorización

$$\begin{tikzcd}
V^1\left(\frac{\sigma}{V(\sigma)}, X\right)_{(\pounds)} \arrow[rr, "\phi^1_\sigma"] \arrow[dr, "r^1_\sigma"'] & & H^1(\sigma, X)_{(\pounds)} \\
& H^1\left(\frac{\sigma}{V(\sigma)}, X\right)_{(\pounds)} \arrow[ur, "\theta^1_\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

y teniendo en cuenta que $\mathrm{Ker}(\sigma/V(\sigma)) = L/L\cap V(A)$ se tendra

$$\phi^1_\sigma\left[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow \frac{L}{L\cap V(A)}\right] = \theta^1\, r^1\left[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow \frac{L}{L\cap V(A)}\right] =$$

$$= \theta^1\left[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow \frac{L}{L\cap V(A)}\right] =$$

$$= [X \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow L]$$

donde el representante esta obtenido por el diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & L \arrow[d, "\theta'"'] \\
X \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads] & \frac{L}{L\cap V(A)}
\end{tikzcd}$$

siendo θ' el morfismo inducido en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, tail] \arrow[d, "\theta'"'] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\theta"'] & B \arrow[d, "\theta"'] \\
\frac{L}{L\ V(A)} \arrow[r, tail] & \frac{A}{V(A)} \arrow[r, two heads] & \frac{B}{V(B)}
\end{tikzcd}$$

(vease (1.5.12), (1.5.17),(1.5.24) y (1.5.25)).

2.4. $\underline{V}$-A-X-EXTENSIONES .

Seguiremos suponiendo, como hasta ahora, $\underline{C}$ una categoria de interes y $\underline{V}=\underline{V}(\Omega)$ una variedad de $\underline{C}$.

Nuestro proposito en este epigrafe es interpretar, de forma natural, para $A\in\underline{C}$, X un $\underline{V}$A-modulo y $\underline{V}_1\underline{C}(A)$ el invariante de Baer, que es un $\underline{V}$A-modulo tal como se vio en (2.1.27), el grupo abeliano $\mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X)$ en terminos de ciertas extensiones, cuya definición esta intimamente ligada a la variedad $\underline{V}$ considerada.

En el caso de $\underline{C}$=Grupos, esta interpretación es obtenida por Leedam-Green y McKay en [115].

Si $K \rightarrowtail B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$ es una sucesión exacta corta en $\underline{C}$, con σ sobre, se verifica que el centro de K

$$Z(K) = \{ k \in K \text{ tal que } k+k'=k'+k \text{ y } k * k'=o \text{ para todo } * \text{ y } k' \in K \}$$

es un ideal de B :

Si $k \in Z(K)$, $b \in B$ y $k' \in K$ se tiene

$$k' + (b + k - b) - k' = b+(-b+k'+b)+k-(-b+k'+b)-b = b+k-b$$

$$k' * (b+k-b) = k' * b + k' * k - k' * b = k' * b - k' * b = o \text{ , para todo } *$$

$$k' + (b * k) - k' = b * k + k' - k' = b * k$$

$$k' *' (b * k) = w((k'b)k, \dots, (kk')b) = o$$

Asi Z(K) es un B-módulo por conjugación,(1.2.14), y como $K = \mathrm{Ker}(\sigma)$ actua trivialmente sobre Z(K) por (1.2.15) Z(K) es un A-módulo.

(2.4.1) DEFINICION .

Sea $A \longrightarrow R \in (\underline{C},R)$ y X un R-modulo en $\underline{C}$.

Una $\underline{V}$-A-X-extensión es una sucesión exacta corta en $\underline{C}$

$$K \rightarrowtail B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A \quad (\sigma \text{ sobre})$$

junto con un monomorfismo de A-modulos $j : X \rightarrowtail Z(K)$, tal que

a) La extensión $K \rightarrowtail B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$ es $\underline{V}$-central.

b) $K \cap V(B) \subset X$ (se entiende j(X)) .

Notemos que en este caso $K \cap V(B) = X \cap V(B)$, y ademas $K \in \underline{V}$ al ser la extensión $\underline{V}$-central,(2.1.17).

Puesto que $[V(B), V^{*}(B)] = 0$,(2.1.11), tambien sera $[V(B) \cap K, K] = 0$ y por tanto $K \cap V(B) \subset Z(K)$.

Por último, destaquemos que $V(B)$ actua trivialmente sobre $Z(K)$ y $Z(K)$ sera un $\underline{V}B$-modulo de donde tambien un $\underline{V}A$-módulo por(2.1.21).

(2.4.2) PROPOSICION .

Existen $\underline{V}$-A-X-extensiones si y solo si X es un $\underline{V}A$-módulo.

Dem.-

Supongamos $(j: X \rightarrowtail Z(K),\ K \rightarrowtail B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A)$ una $\underline{V}$-A-X-extensión. Entonces X, como ideal de B, es un B-módulo por conjugación(coincidiendo esta estructura con la definida via $B \longrightarrow A \longrightarrow R$, al ser j morfismo de módulos) y claramente $X \subset V^{*}(B)$; entonces por (2.1.25) X es un $\underline{V}B$-módulo y $\underline{V}A$-modulo por (2.1.21).

Reciprocamente, si X es un $\underline{V}A$-módulo, el par $(j: X = X.\ X \rightarrowtail X \rtimes A \twoheadrightarrow A)$ es obviamente una $\underline{V}$-A-X-extensión.

(2.4.3) Sean $W_i : (j_i : X \rightarrowtail Z(K_i),\ K_i \rightarrowtail B_i \overset{\sigma_i}{\twoheadrightarrow} A)$ i=1,2 , dos $\underline{V}$-A-X-extensiones.

Se dice que estas son equivalentes si $X \cap V(B_1) = X \cap V(B_2)$, y la expresión de un $x \in X \cap V(B_i)$ como una palabra en B_1 o en B_2 es esencialmente la misma. Mas precisamente, W_1 y W_2 son equivalentes si dado un diagrama conmutativo en conjuntos

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[r, two heads, "\sigma_1"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, equal] \\ B_2 \arrow[r, two heads, "\sigma_2"] & A \end{tikzcd}$$

para todo $\omega \in \Omega F_n$, $n \geq 1$, y $b_1, \ldots, b_n \in B_1$ con $x = \omega(b_1, \ldots, b_n) \in X \cap V(B_1)$ se verifica que

$$\omega(fb_1, \ldots, fb_n) = x \in X \cap V(B_2).$$

Notemos que si esta propiedad es cierta para un f se verifica para cualquier otro; en efecto, si $f':B_1 \longrightarrow B_2$ es otra aplicación con $\sigma_2 f' = \sigma_1$, entonces para cuaquier $b_i \in B_1$ sera $f'(b_i)=k'_i+f(b_i)$ para algun $k'_i \in K_2$ y como $K_2 \subset V^*(B_2)$ se tendra

$$\omega(f'b_1, \ldots, f'b_n) = \omega(k'_1+fb_1, \ldots, k'_n+fb_n) = \omega(fb_1, \ldots, fb_n) = x .$$

Observemos tambien que, como $\sigma_2\omega(fb_1, \ldots, fb_n) = \omega(\sigma_2 fb_1, \ldots, \sigma_2 fb_n) = \omega(\sigma_1 b_1, \ldots, \sigma_1 fb_n) = \sigma_1\omega(b_1, \ldots, b_n) = \sigma_1 x = o$, siempre se da que $\omega(fb_1, \ldots, fb_n) \in K_2 \cap V(B_2) = X \cap V(B_2)$.

Esta relación es claramente reflexiva y transitiva; en cuanto a la simetrica, si suponemos, en la misma situación anterior que

$$\begin{tikzcd} B_2 \arrow[r, two heads, "\sigma_2"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, equal] \\ B_1 \arrow[r, two heads, "\sigma_1"] & A \end{tikzcd}$$

conmuta en conjuntos y $x=\omega(b'_1, \ldots, b'_n) \in X \cap V(B_2)$, en virtud de lo dicho anteriormente, podemos elegir f tal que $f(g(b'_i)) = b'_i$ y tendriamos que

$$\omega(gb'_1, \ldots, gb'_n) = \omega(fgb'_1, \ldots, fgb'_n) = \omega(b'_1, \ldots, b'_n)$$

y W_2 es equivalente a W_1.

Denotaremos $E\underline{V}(A,X)$ al correspondiente conjunto cociente.

(2.4.4) LEMA .

$E\underline{V}(A,X)$ es un monoide abeliano con cero,(X $\underline{V}A$-módulo).

Dem.-

Sean $[W_i:(j_i:X \rightarrowtail Z(K_i), K_i \rightarrowtail B_i \xrightarrow{\sigma_i} A)] \in E\underline{V}(A,X)$ $i=1,2$.

Es inmediato comprobar que el conjunto $\{(j_1x,-j_2x), x \in X\}$ es un ideal de $B_1 \times_A B_2$ y tenemos el diagrama conmutativo de filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "(j_1{,}-j_2)"'] & X \arrow[d, tail] & \\
K_1 \times K_2 \arrow[r, tail] \arrow[d] & B_1 \times_A B_2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "q"'] & A \arrow[d, equal] \\
K_1 \overset{X}{\times} K_2 \arrow[r, tail] & B_1 \overset{X}{\times}_A B_2 \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

y en particular, la extensión $K_1 \overset{X}{\times} K_2 \rightarrowtail B_1 \overset{X}{\times}_A B_2 \twoheadrightarrow A$, que es $\underline{V}$-central pues claramente $K_1 \times K_2 \subset V^*(B_1 \times_A B_2)$ y por consiguiente $K_1 \overset{X}{\times} K_2 \subset V^*(B_1 \overset{X}{\times}_A B_2)$.

Se tiene, ademas, el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, tail, "(I{,}-I)"'] & X \arrow[d, tail, "(j_1{,}-j_2)"] \\
X \times X \arrow[r, tail] \arrow[d, "+"'] & K_1 \times K_2 \arrow[d] \\
X \arrow[r, tail, "j"] & K_1 \overset{X}{\times} K_2
\end{tikzcd}$$

con $j(x) = \overline{(j_1 x, o)} = \overline{(o, j_2 x)}$.

Es facil ver que $j(X) \subset Z(K_1 \overset{X}{\times} K_2)$ y que j es morfismo de A-módulos.

Ademas, si $m \in K_1 \overset{X}{\times} K_2 \cap V(B_1 \overset{X}{\times}_A B_2)$, como $K_i \cap V(B_i) \subset X$, sera de la forma

$m = \overline{(j_1 x, j_2 x')} = \overline{(j_1 x, o)} + \overline{(o, j_2 x')} = \overline{(j_1 x, o)} + \overline{(j_1 x', o)} = \overline{(j_1(x+x'), o)} = j(x+x') \in X$

con lo que $K_1 \overset{X}{\times} K_2 \cap V(B_1 \overset{X}{\times}_A B_2) \subset X$.

Concluimos asi que $W_1 + W_2 : (j : X \rightarrowtail Z(K_1 \overset{X}{\times} K_2),\ K_1 \overset{X}{\times} K_2 \rightarrowtail B_1 \overset{X}{\times}_A B_2 \twoheadrightarrow A)$ es una $\underline{V}$-A-X-extensión.

Definimos $[W_1] + [W_2] = [W_1 + W_2]$.

Veamos que esta suma esta bien definida, osea es indeoendiente de los re - presentantes tomados en las clases de $\underline{V}$-A-X-extensiones:

Supongamos $[W'_1 : (j'_1 : X \rightarrowtail Z(K'_1),\ K'_1 \rightarrowtail B'_1 \overset{\sigma'_1}{\twoheadrightarrow} A)] = [W_1]$ y sea $f : B_1 \longrightarrow B'_1$ con $\sigma'_1 f = \sigma_1$, claramente podemos suponer que $f(x) = x$ para $x \in X$.

Se tiene entonces el diagrama conmutativo en conjuntos

$$\begin{tikzcd}
B_1 \overset{X}{\underset{A}{\times}} B_2 \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, equal] \\
B'_1 \overset{X}{\underset{A}{\times}} B_2 \arrow[r] & A
\end{tikzcd}$$

con g tal que $g(\overline{b_1,b_2}) = \overline{(fb_1,b_2)}$.

Y si $\omega(\overline{(b_1^1,b_1^2)}, \dots, \overline{(b_n^1,b_n^2)}) \subset X \cap V(B_1 \overset{X}{\underset{A}{\times}} B_2)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\omega(g(\overline{b_1^1,b_1^2}), \dots, g(\overline{b_n^1,b_n^2})) &= \omega((\overline{fb_1^1,b_1^2}), \dots, (\overline{fb_n^1,b_n^2})) = \\
&= \overline{(\omega(fb_1^1, \dots, fb_n^1), \omega(b_1^2, \dots, b_n^2))} = \\
&= \overline{(\omega(b_1^1, \dots, b_n^1), \omega(b_1^2, \dots, b_n^2))} = \\
&= \omega((\overline{b_1^1,b_1^2}), \dots, (\overline{b_n^1,b_n^2}))
\end{aligned}$$

ya que $\omega(b_1^1, \dots, b_n^1) \in X \cap V(B_1)$.

Entonces $[W'_1] + [W_2] = [W_1] + [W_2]$.

Es inmediato que esta adición es conmutativa y asociativa.

Sea $0 = [(1_X : X = X, X \rightarrowtail X \times A \twoheadrightarrow A)]$ y $[W:(j: X \rightarrowtail Z(K), K \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A)]$ una clase arbitraria de $\underline{V}$-A-X-extensiones; se tendra que $[W] + 0 = [(j':X \rightarrowtail Z(K_1 \overset{X}{\times} X), K \overset{X}{\times} X \rightarrowtail B \overset{X}{\underset{A}{\times}} X\, A \twoheadrightarrow A)]$, pero se tienen isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "j'"] \arrow[d, equal] & K \overset{X}{\times} X \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \overset{X}{\underset{A}{\times}} X\, A \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\cong"] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail, "j'"] \arrow[d, equal] & K \overset{X}{\times} X \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & B \overset{X}{\times} X \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail, "j"] & K \arrow[r] & B \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

con lo que $[W] + 0 = [W]$. Y 0 es un cero en $E\underline{V}(A, X)$.

Caracterizaremos, como sigue, las $\underline{V}$-A-X-extensiones nulas.

(2.4.5) PROPOSICION .

Sea $[W:(j:X \rightarrowtail Z(K),\ K \rightarrowtail B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A)] \in E\underline{V}(A,X)$. Entonces $[W] = 0$ si y solo si $K \cap V(B) = 0$.

Dem.-

Si $[W] = 0$, sera $K \cap V(B) = X \cap V(B) = X \cap V(X \rtimes A)$, pero al ser X un $\underline{V}$A-módulo $V(X \rtimes A) \subset A$ y $X \cap V(X \rtimes A) = 0$.

Reciprocamente, si $K \cap V(B) = 0$, consideremos el diagrama conmutativo en conjuntos

$$\begin{array}{ccc} X \rtimes A & \twoheadrightarrow & A \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \| \\ B & \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} & A \end{array}$$

si $\omega(t_1, \ldots, t_n) \in X \cap V(X \rtimes A) = 0$, $t_i \in X \rtimes A$, sera $\omega(t_1, \ldots, t_n) = o$ y claramente $\omega(ft_1, \ldots, ft_n) = \omega(t_1, \ldots, t_n) = o$. Asi $[W] \models 0$.

(2.4.6) TEOREMA .

$E\underline{V}(A,X)$ es un grupo abeliano. Existe un isomorfismo natural

$$E\underline{V}(A,X) \cong \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X)$$

para todo $\underline{V}$A-módulo X.

Dem.-

Sea $N \rightarrowtail F \overset{q}{\twoheadrightarrow} A$ una presentación libre de A en $\underline{C}$, sera, (2.1.12),

$$\underline{V}_1\underline{C}(A) = \frac{N \cap V(F)}{V_1(N,F)}\ .$$

Dada $[W:(j:X \rightarrowtail Z(K),\ K \rightarrowtail B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A)] \in E\underline{V}(A,X)$, Existira un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} N & \rightarrowtail & F & \overset{q}{\twoheadrightarrow} & A \\ \downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & & \| \\ K & \rightarrowtail & B & \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} & A \end{array}$$

y al ser $K \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$ $\underline{V}$-central, se inducira el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{N}{V_1(N,F)} \arrow[r, tail] \arrow[d] & \dfrac{F}{V_1(N,F)} \arrow[r, two heads, "q'"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[d, equal] \\
K \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A
\end{tikzcd}$$

El morfismo restringido de g'

$$g'': \frac{N \cap V(F)}{V_1(N,F)} \longrightarrow K$$

tiene, claramente, su imagen en $K \cap V(B) = X \cap V(B)$. Tenemos asi un morfismo

$$g'': \underline{V}_1\underline{C}(A) \longrightarrow X \ .$$

Para ver que este es morfismo de A-módulos, recordemos que $\underline{V}_1\underline{C}(A)$ es un A-módulo con acciones inducidas por las acciones de conjugación de $F/V_1(N,F)$ sobre el,(2.1.27); tengamos en cuenta tambien que B actua, via σ , por conju - gación sobre X.

Si $m \in \underline{V}_1\underline{C}(A)$, y $z \in F$ siendo $q(z) = a$, se tiene

$$g''(a \cdot m) = g''(\bar{z} + m - \bar{z}) = g'(\bar{z}) + g'(m) - g'(\bar{z}) = g(z) \cdot g'(m) = a \cdot g''(m)$$

$$g''(a * m) = g'(\bar{z} * m) = g'(\bar{z}) * g'(m) = g(z) * g'(m) = a * g''(m), \text{ para cada } * .$$

con lo que g'' es morfismo de A-módulos.

Ademas, g'', es independiente de la eleccion de la presentación proyectiva de A y de la elección de g; en efecto, supongamos $N_1 \rightarrowtail F_1 \xrightarrow{q_1} A$ otra presentación proyectiva de A, teniendose el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, tail] \arrow[d] & F_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, equal] \\
K \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads, "\sigma"] & A
\end{tikzcd}$$

que induce, como se ha descrito anteriormente, el morfismo $h'': \underline{V}_1\underline{C}(A) \longrightarrow X$.

Claramente existira un diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail] \arrow[d] & F \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, equal] \\ N_1 \arrow[r, tail] & F_1 \arrow[r, two heads, "q_1"] & A \end{tikzcd}$$ que inducira $$\begin{tikzcd} \frac{N}{V_1(N,F)} \arrow[r, tail] \arrow[d] & \frac{F}{V_1(N,F)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[d, equal] \\ \frac{N_1}{V_1(N_1,F_1)} \arrow[r, tail] & \frac{F_1}{V_1(N_1,F_1)} \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}$$

y la restricción de f' da un isomorfismo

$$f'' : \frac{N \cap V(F)}{V_1(N,F)} = \underline{V}_1\underline{C}(A) \xrightarrow{\sim} \frac{N_1 \cap V(F_1)}{V_1(N_1,F_1)} = \underline{V}_1\underline{C}(A)$$

(vease (2.1.12)).

Claramente $\sigma h f = \sigma g$, y si $\omega(z_1, \ldots, z_n) \in N \cap V(F)$ se tiene

$$h'' f''(\omega(z_1, \ldots, z_n) + V_1(N,F)) = \omega(hfz_1, \ldots, hfz_n) =$$

$$= \omega(k_1 + gz_1, \ldots, k_n + gz_n), \text{ para ciertos}$$

k_i K, $$= \omega(gz_1, \ldots, gz_n) =$$

$$= g''(\omega(z_1, \ldots, z_n) + V_1(N,F)) .$$

Asi el triangulo

$$\begin{tikzcd} \underline{V}_1\underline{C}(A) \arrow[r, "g''"] & X \\ \underline{V}_1\underline{C}(A) \arrow[u, "f''", "\wr"'] \arrow[ur, "h''"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, y g" es unico salvo isomorfismo natural.

Tambien g" es independiente del representante tomado en [W] :

Supongamos que $[W] = [W' : (j' : X \rightarrowtail Z(K'), K' \rightarrowtail B' \xrightarrow{\sigma'} A)]$, y consideremos el diagrama conmutativo en conjuntos

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads, "\sigma"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, equal] \\ B' \arrow[r, two heads, "\sigma'"] & A \end{tikzcd}.$$

Para la presentación libre elegida anteriormente, supongamos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} N & \rightarrowtail & F & \overset{q}{\twoheadrightarrow} & A \\ \downarrow & & \downarrow h & & \| \\ K' & \rightarrowtail & B' & \overset{\sigma'}{\twoheadrightarrow} & A \end{array}$$

y sea $h'':\underline{V}_1\underline{C}(A) \longrightarrow X$ el correspondiente inducido. Para $\omega(z_1, \dots, z_n) \in N \cap V(F)$ sera $g''(\omega(z_1, \dots, z_n) = \omega(gz_1, \dots, gz_n)$ y $h''(\omega(z_1, \dots, z_n) = \omega(hz_1, \dots, hz_n)$ y como $\sigma' f\, g = \sigma' h$, sera $fgz_i = k'_i + hz_i$ para ciertos $k'_i \in K'$; entonces

$$g''(\omega(z_1, \dots, z_n) + V_1(N,F)) = \omega(gz_1, \dots, gz_n) =$$

$$= \omega(k'_1 + hz_1, \dots, k'_n + hz_n) \text{ al ser } \underline{V}\text{-}X\text{-extensiones equivalentes}$$

$$= \omega(hz_1, \dots, hz_n) \text{ al ser } K' \subset V^*(B')$$

$$= h''(\omega(z_1, \dots, z_n) + V_1(N,F)).$$

osea que $g'' = h''$.

(Nota: Puesto que g'' no depende de la presentación libre ni de la elección de g, dada W , podemos elegir F y g tal que $g:F \longrightarrow B$ sea sobre, en cuyo caso para cualquier $x = \omega(b_1, \dots, b_n) \in X \cap V(B) = K \cap V(B)$ siempre existira $z \in V(F)$ con $g(z) = x$; claramente sera $z \in N \cap V(F)$ y si consideramos la clase $\bar{z}$ de z en el cociente $\underline{V}_1\underline{C}(A)$ se tiene que $g''(\bar{z}) = x$.

Concluimos, entonces, que la imagen de $g'':\underline{V}_1\underline{C}(A) \longrightarrow X$ es $X \cap V(B)$.).

Definimos $Z : E\underline{V}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X)$ por $Z[W] = g''$, obtenida esta por la construcción anterior.

Probaremos ahora que Z es morfismo de monoides :

Sean $[W_i:(j_i:X \rightarrowtail Z(K_i),\ K_i \rightarrowtail B_i \overset{\sigma_i}{\twoheadrightarrow} A)] \in E\underline{V}(A,X)$ i=1,2. Sera su suma

$[W_1] + [W_2] = [(j:X \rightarrowtail Z(K_1 \overset{X}{x} K_2),\ K_1 \overset{X}{x} K_2 \rightarrowtail B_1 \overset{X}{\underset{A}{x}} B_2 \twoheadrightarrow A]$, segun (2.4.4).

Consideremos $N \rightarrowtail F \overset{q}{\twoheadrightarrow} A$ una presentación libre de A, y supongamos se tienen los diagramas

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail] \arrow[d] & F \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g_i"] & A \arrow[d, equal] \\ K_i \arrow[r, tail] & B_i \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd} \qquad i=1,2$$

de modo que siendo $g''_i : \underline{V}_1\underline{C}(A) \longrightarrow X$ los correspondientes inducidos, sera

$Z[W_i] = g''_i \;\; i=1,2.$

Ahora, considerando $(g_1,g_2): F \longrightarrow B_1 x_A B_2$ el morfismo inducido en el producto fibrado por g_1 y g_2, y siendo $p: B_1 x_A B_2 \twoheadrightarrow B_1 \overset{X}{x}_A B_2$ la correspondiente proyección se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail] \arrow[d] & F \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, equal] \\ K_1 \overset{X}{x} K_2 \arrow[r, tail] & B_1 \overset{X}{x}_A B_2 \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}$$

con $g = p\,(g_1,g_2)$; si $g'' : \underline{V}_1\underline{C}(A) \longrightarrow X$ es el inducido por g, sera $Z([W_1]+[W_2]) =$

$= g''$.

Pero, si $z \in N \cap V(F)$ y $\bar{z}$ es su clase en el cociente $\underline{V}_1\underline{C}(A)$, se tiene

$$g''(\bar{z}) = p(g_1,g_2)(z) = p(g_1 z, g_2 z) = j(g_1 z + g_2 z) = (g_1+g_2)(\bar{z})$$

osea que $g'' = g_1 + g_2$.

Luego $Z([W_1]+[W_2]) = Z[W_1] + Z[W_2]$.

Ademas $Z[W] = g'' = 0$ si y solo si $Img(g'') = 0$, pero segun la nota anterior $Img(g'') = X \cap V(B) = K \cap V(B)$. Basta utilizar el hecho probado en (2.4.5) para concluir que $Z[W] = 0$ si y solo si $[W] = 0$.

Solo resta probar que Z es sobre.

Supongamos $v \in Hom_A(\underline{V}_1\underline{C}(A), X)$; dada la presentación libre de A $N \rightarrowtail F \overset{q}{\twoheadrightarrow} A$ y la extensión $\underline{V}$-central $\dfrac{N}{V_1(N,F)} \rightarrowtail \dfrac{F}{V_1(N,F)} \overset{q'}{\twoheadrightarrow} A$

notemos que X es $\frac{F}{V_1(N,F)}$ –módulo via q' y $\frac{N}{V_1(N,F)}$ –módulo trivial, y claramente $v:\underline{V}_1\underline{C}(A) \longrightarrow X$ sera tambien morfismo de $\frac{F}{V_1(N,F)}$ y $\frac{N}{V_1(N,F)}$ –módulos.

Construimos los diagramas de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
\underline{V}_1\underline{C}(A) \arrow[rr, tail, "i'"] \arrow[dd, "v"'] & & \frac{F}{V_1(N,F)} \arrow[r, two heads] \arrow[dl, tail, shift right, "s"'] \arrow[dd] & \frac{F}{N\cap V(F)} \arrow[dd, equal] \\
& X \rtimes \frac{F}{V_1(N,F)} \arrow[ur, shift right, "p"'] \arrow[dr, "c"] & & \\
X \arrow[ur, tail, "i"] \arrow[rr, tail] & & B \arrow[r, two heads] & \frac{F}{N\cap V(F)}
\end{tikzcd}$$

donde $c : X \rtimes \frac{F}{V_1(N,F)} \longrightarrow B$ es el coigualador de los morfismos

$$\begin{tikzcd}
 & \frac{F}{V_1(N,F)} \arrow[dr, tail, "s"] & \\
\underline{V}_1\underline{C}(A) \arrow[ur, tail, "i'"] \arrow[dr, "v"'] & & X \rtimes \frac{F}{V_1(N,F)} \\
 & X \arrow[ur, tail, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

y el morfismo $B \longrightarrow \frac{F}{N\cap V(F)}$ es el inducido por $X \rtimes \frac{F}{V_1(N,F)} \xrightarrow{\quad p \quad} \frac{F}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{N\cap V(F)}$; y

$$\begin{tikzcd}
\underline{V}_1\underline{C}(A) \arrow[rr, tail] \arrow[dd, "v"'] & & \frac{N}{V_1(N,F)} \arrow[r, two heads] \arrow[dl, tail, shift right, "s'"'] \arrow[dd, dash] & \frac{N}{N\cap V(F)} \arrow[dd, equal] \\
& X \times \frac{N}{V_1(N,F)} \arrow[ur, shift right, "p'"'] \arrow[dr, "c'"] & & \\
X \arrow[ur, tail] \arrow[rr, tail, "j"] & & K \arrow[r, two heads] & \frac{N}{N\cap V(F)}
\end{tikzcd}$$

de construcción analoga al anterior.

Sea $h = q' p : X \rtimes F/V_1(N,F) \longrightarrow A$, es claramente un epimorfismo sobre; además $h i v = q' p i v = 0$ y $h s i' = q' s i' = q' i' = 0$, por tanto h se factoriza por B existiendo

$$h' : B \longrightarrow A$$

tal que $h' c = h$.

Por otra parte la inclusión $t : X x N/V_1(N,F) \rightarrowtail X \rtimes F/V_1(N,F)$ induce un monomorfismo

$$t' : K \rightarrowtail B$$

siendo facil ver que K es un ideal de B.

La sucesión

$$K \overset{t'}{\rightarrowtail} B \overset{h'}{\twoheadrightarrow} A$$

es exacta; en efecto, $h(x+s\bar{z}) = o$ si y solo si $q'(\bar{z}) = o$ y esto se da si y solo si $\bar{z} \in N/V_1(N,F)$, para cualquier $\bar{z} \in F/V_1(N,F)$, y por consiguiente $Ker(h') = K$.

El monomorfismo $j : X \rightarrowtail K$ tiene su imagen en $Z(K)$ al ser X un $N/V_1(N,F)$-módulo trivial y en consecuencia actuar K trivialmente, por conjugación, sobre X. Ademas j es morfismo de A-módulos :

Para $a \in A$, $x \in X$ y $z \in F$ con $q(z) = a$, se tiene $h'cs(\bar{z}) = q'(\bar{z}) = a$ y

$$a \cdot j(x) = a \cdot c(x) = cs(\bar{z}) + c(x) - cs(\bar{z}) = c(s\bar{z}+x-s\bar{z}) = c(a \cdot x) = j(a \cdot x)$$

$$a * j(x) = a * c(x) = cs(\bar{z}) * c(x) = c(s\bar{z} * x) = c(a * x) = j(a * x), \text{ para cada } * .$$

Puesto que $N/V_1(N,F) \subset V^*(F/V_1(N,F))$ y X es un $\underline{V}F/V_1(N,F)$-módulo y por tanto $X \subset V^*(X \rtimes F/V_1(N,F))$, es inmediato concluir que $K \subset V^*(B)$.

Y si $m \in K \cap V(B)$, como $V(X \rtimes F/V_1(N,F)) = V(F/V_1(N,F))$, sera $m = c(s\omega(\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_r)) = cs(\overline{\omega(n_1, \ldots, n_r)})$ con $\omega(n_1, \ldots n_r) \in V(N) \subset N \cap V(F)$ y como $X = Ker(B \rightarrowtail F/N \cap V(F))$ sera $m \in X$; asi $K \cap V(B) \subset X$.

Concluimos, entonces que $W : (j : X \rightarrowtail Z(K),\ K \overset{t'}{\rightarrowtail} B \overset{h'}{\twoheadrightarrow} A)$ es una V-A-X-extensión.

Ademas de la construcción de W se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads] & F \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, two heads] & A \arrow[d, equal] \\
\dfrac{N\cap V(F)}{V_1(N,F)} \arrow[r, tail] \arrow[d, "v"'] & \dfrac{N}{V_1(N,F)} \arrow[r, tail] \arrow[d, "c's'"] & \dfrac{F}{V_1(N,F)} \arrow[r, two heads, "q'"] \arrow[d, "cs"] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail, "j"] & K \arrow[r, tail, "t'"] & B \arrow[r, two heads, "h'"] & A
\end{tikzcd}$$

que indica que $Z[W] = v$.

Asi Z es sobre y es un isomorfismo. Como consecuencia $E\underline{V}(A,X)$ es un grupo abeliano.

Nota : Dado $[W:(j:X \rightarrowtail Z(K),\ K \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A)] \in E\underline{V}(A,X)$, se tiene que $-[W] = [(-j:X \rightarrowtail Z(K),\ K \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A)]$.

En efecto, con la misma notación que la hasta aqui empleada, supongamos que $Z[W] = g'':\underline{V}_{-1}\underline{C}(A) \longrightarrow X$; se tendra el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\underline{V}_{-1}\underline{C}(A) \arrow[r, tail] \arrow[d, "g''"'] & \dfrac{N}{V_1(N,F)} \arrow[r, tail] \arrow[d] & \dfrac{F}{V_1(N,F)} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail, "j"] & K \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

y por tanto tambien lo sera

$$\begin{tikzcd}
\underline{V}_{-1}\underline{C}(A) \arrow[r, tail] \arrow[d, "-g''"'] & \dfrac{N}{V_1(N,F)} \arrow[r, tail] \arrow[d] & \dfrac{F}{V_1(N,F)} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail, "-j"] & K \arrow[r, tail] & B \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

de donde $Z[(-j:X \rightarrowtail Z(K),\ K \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A)] = -g'' = -Z[W]$. Como Z es un iso morfismo, deducimos el resultado .

2.5. UNA SUESION EXACTA .

Dada una categoria de interes $\underline{C}$ y $\underline{V}=\underline{V}(\Omega)$ una variedad suya, estableceremos para $A\in \underline{C}$ y X un $\underline{V}A$-módulo una sucesión exacta y natural

$$V^1(\frac{A}{V(A)},X) \xrightarrow{\phi^1} H^1(A,X) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X) \xrightarrow{\eta} V^2(\frac{A}{V(A)},X) \xrightarrow{\phi^2} H^2(A,X)$$

siendo ϕ^1 y ϕ^2 los morfismos cambio de variedad,(2.2.6). La condición de que X sea $\underline{V}A$-módulo es inprescindible para que X sea de forma inducida un A/V(A) -módulo,(2.1.23), (2.1.24).

Si $\underline{C}$ es una variedad de Grupos Y $\underline{V}$ otra variedad contenida en $\underline{C}$, esta sucesión corresponde a la obtenida por Leedam-Green y MacKay en[115]; y Lue en [119] obtiene una sucesión exacta larga cuyos cuatro primeros terminos coincidencon los correspondientes en esta, en el caso de que $\underline{C}$ sea la categoria de Algebras asociativas sobre un anillo y $\underline{V}$ una variedad de Algebras.

La construcción se basa enteramente en las interpretaciones , en terminos de extensiones de los puntos de la misma . Comenzaremos estudiando el conportamiento del morfismo ϕ^2 frente a las correspondientes extensiones.

(2.5.1) Sea $A \longrightarrow R\in(\underline{C},R)$ y X un $\underline{V}R$-módulo. Consideremos el morfismo cambio de variedad

$$\phi^2=\theta^2 r^2 : V^2(\frac{A}{V(A)}, X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^2(A,X)_{(\pounds)}$$

obtenido en (2.2.6).

Despues de (1.6.11), podremos considerar los elementos de $H^2(A,X)_{(\pounds)}$ como clases de (£)2-extensiones especiales, $X \rightarrowtail E \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\sigma} A$, de A por X, y los elementos de $V^2(\frac{A}{V(A)},X)_{(\pounds)}$ como clases de (£)2-extensiones especiales $X \rightarrowtail E \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\sigma} A/V(A)$, de A/V(A) por X en $\underline{V}$.

Sea $[[X \rightarrowtail E \xrightarrow{f} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A/V(A)]] \in V^2(\frac{A}{V(A)}, X)_{(\pounds)}$, tendremos el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} V^1(\sigma, X)_{(\pounds)} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "r^1_\sigma"'] & V^2(\frac{A}{V(A)}, X)_{(\pounds)} \arrow[d, "r^2"'] \\ H^1(\sigma, X)_{(\pounds)} \arrow[r, "\psi"] & H^2(\frac{A}{V(A)}, X)_{(\pounds)} \end{tikzcd}$$

en virtud de (2.2.6) y siendo $L = \mathrm{Ker}(\sigma)$ el morfismo r^2 sera

$$\begin{aligned} r^2[[X \rightarrowtail E \longrightarrow B \longrightarrow A/V(A)]] &= r^2\psi[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow L] = \\ &= \psi r^1_\sigma [X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow L] = \\ &= \psi[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow L] = \\ &= [[X \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow A/V(A)]] . \end{aligned}$$

(vease, (1.6.11) y (2.3.13)).

Asi r^2 lleva la clase de una (£)2-extensión especial en $\underline{V}$ en la clase de esa misma extensión en $\underline{C}$.

Por otra parte $\theta^2 : H^2(\frac{A}{V(A)}, X)_{(\pounds)} \longrightarrow H^2(A, X)_{(\pounds)}$ es el morfismo inducido por $\theta : A \longrightarrow A/V(A)$ y sera tal que

$\theta[[X \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow A/V(A)]] = [[X \rightarrowtail E \longrightarrow B^\Theta \twoheadrightarrow A]]$, cuyo representante $X \rightarrowtail E \longrightarrow B^\Theta \twoheadrightarrow A$ viene obtenido por la fila superior del diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & B^\Theta \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, "\Theta"] \\ X \arrow[r, tail] & E \arrow[r] & B \arrow[r, two heads] & A/V(A) \end{tikzcd}$$

(vease (1.6.10) y (1.6.11)).

Luego tenemos en definitiva que $\Phi^2[[X \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow A/V(A)]] =$ $= [[X \rightarrowtail E \longrightarrow B^\Theta \twoheadrightarrow A]]$, obtenida segun el diagrama anterior.

(2.5.2) TEOREMA .

Para $A \longrightarrow R\epsilon(\underline{C},R)$ y X un $\underline{V}R$-módulo existe una sucesión exacta y natural

$$0 \longrightarrow V^1\left(\frac{A}{V(A)},X\right) \xrightarrow{\phi^1} H^1(A,X) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_{-1}\underline{C}(A),X) \xrightarrow{\eta} V^2\left(\frac{A}{V(A)},X\right) \xrightarrow{\phi^2} H^2(A,X)$$

done ϕ^1 y ϕ^2 son los morfismos cambio de variedad definidos en (2.2.6).

Dem.-

En (2.3.5) se probo que ϕ^1 es un monomorfismo.

Definimos $\gamma: H^1(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_{-1}\underline{C}(A),X)$ como sigue:

Por (2.4.6) tenemos el isomorfismo $Z : E\underline{V}(A,X) \cong \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_{-1}\underline{C}(A),X)$; es inme - diato que si $\underline{E}: X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ es una extensión singular de A por X entonces $W_{[\underline{E}]}: (I_X: X = X,\ X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A)$ es una $\underline{V}$-A-X-extensión (la unica cuestión no evidente es que $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ sea $\underline{V}$-central, pero esto lo asegura (2.1.25)).

La aplicación $[\underline{E}] \longmapsto W_{[\underline{E}]}$ es de forma obvia independiente del represen tante tomado en $[\underline{E}]$ y es morfismo de grupos pues $W_{[\underline{E}]} + W_{[\underline{E}']} = (j: X \rightarrowtail Z(X \overset{X}{x} X),\ X \overset{X}{x} X \rightarrowtail E \overset{X}{x}_A E' \twoheadrightarrow A)$ y como se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, equal] & X \overset{X}{x} X \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \overset{X}{x}_A E' \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, tail] & E \overset{X}{x}_A E' \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

sera $[W_{[\underline{E}]}] + [W_{[\underline{E}']}] = [W_{[\underline{E}]} + W_{[\underline{E}']}] = [(I_X: X = X,\ X \rightarrowtail E \overset{X}{x}_A E' \twoheadrightarrow A)] =$

$$= [W_{[\underline{E}] + [\underline{E}']}].$$

Definimos entonces $\gamma: H^1(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_{-1}\underline{C}(A),X)$ por

$$\gamma[E] = Z[W_{[\underline{E}]}]$$

Para probar la exactitud en el punto $H^1(A,X)$ veremos en principio que

$$\mathrm{Img}(\phi^1) = \left\{ [X \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow A],\ \text{tal que } X \cap V(E') = 0 \right\}.$$

En efecto, si $[X \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow A] \in \mathrm{Img}(\phi^1)$ sera porque existe una extensión singular de $A/V(A)$ por X, $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A/V(A)$, y un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, "\theta"'] \\ X \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads] & \frac{A}{V(A)} \end{tikzcd}$$

y como $V(E) = 0$ sera $X \cap V(E') = 0$.

Reciprocamente, dada $X \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow A$ con $X \cap V(E') = 0$, existe el diagrama conmutativo de filas exactas

$$\begin{tikzcd} & V(E') \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & V(A) \arrow[d, tail] \\ X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal, dotted] & E' \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & A \arrow[d, two heads] \\ X \arrow[r, tail] & \frac{E'}{V(E')} \arrow[r, two heads] & \frac{A}{V(A)} \end{tikzcd}$$

siendo facil ver que la 'ultima fila es una extensión singular en $\underline{V}$ de $A/V(A)$ por X y claramente $\phi^1[X \rightarrowtail E'/V(E') \twoheadrightarrow A/V(A)] = [X \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow A]$.

Ahora, como $\gamma[\underline{E}': X \rightarrowtail E' \twoheadrightarrow A] = Z[W_{[\underline{E}']}] = 0$, segun (2.4.5), si y solo si $X \cap V(E') = 0$ y por tanto si y solo si $[\underline{E}']$esta en la imagen de ϕ^1. Concluimos que $\mathrm{Ker}(\gamma) = \mathrm{Img}(\phi^1)$ y la sucesión es exacta en $H^1(A,X)$.

Definimos ahora $\eta: \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A), X) \longrightarrow V^2(\frac{A}{V(A)}, X)$ como sigue:

Dado $v \in \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A), X)$ sea $Z^{-1}(v) = [(j:X \rightarrowtail Z(K),\ K \rightarrowtail B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A)]$ la clase de $\underline{V}$-A-X-extensiones correspondiente mediante el isomorfismo (2.4.6).

Consideramos la sucesión exacta corta

$$K/X \rightarrowtail B/X \overset{\sigma'}{\twoheadrightarrow} A.$$

El epimorfismo $V(\sigma')$: $V(\frac{B}{X}) = \frac{V(B)}{X \cap V(B)} \twoheadrightarrow V(A)$ tiene por nucleo el cociente $\frac{K \cap V(B)}{X \cap V(B)} = 0$ y es por tanto un isomorfismo.

Se induce entonces el diagrama conmutativo de filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & V(B/X) \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & V(A) \arrow[d, tail] \\
\frac{K}{X} \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & \frac{B}{X} \arrow[r, two heads, "\sigma'"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
\frac{K}{X} \arrow[r, tail] & \frac{B/X}{V(B/X)} \arrow[r, two heads] & \frac{A}{V(A)}
\end{tikzcd}$$

y la exactitud de la última fila nos lleva a la sucesión exacta en $\underline{V}$

$$X \rightarrowtail K \xrightarrow{f} \frac{B/X}{V(B/X)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}$$

Como $K \subset V^*(B)$, K es una $\underline{V}$B-estructura por conjugación, ademas $X \subset Z(K)$ actua trivialmente sobre K y segun (1.2.15) y (2.1.21) K sera una $\underline{V}$B/X-estru$\underline{c}$tura, asi concluimos que es una $\dfrac{B/X}{V(B/X)}$-estructura por (2.1.23).

Si $k,k' \in K$ se tiene

$f(k)\cdot k' = (k+X)\cdot k' = k+k'-k$

$f(k) * k' = (k+X) * k' = k * k'$, para cada $*$.

Luego la anterior sucesión exacta es una 2-extensión especial de $\dfrac{A}{V(A)}$ por X; y definimos η por

$$\eta(v) = [[X \rightarrowtail K \longrightarrow \frac{B/X}{V(B/X)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}]]$$

Recordemos que , siendo $N \rightarrowtail F \overset{q}{\twoheadrightarrow} A$ una presentación libre de A en $\underline{C}$, K y B son obtenidos, a partir de v, por los diagramas de la pagina 157 , en la demostración del teorema (2.4.6), y facilmente se ve que $\dfrac{B}{X} = \dfrac{F}{N \cap V(F)}$,

$\dfrac{K}{X} = \dfrac{N}{N \cap V(F)}$ y $\dfrac{B/X}{V(B/X)} = \dfrac{\frac{F}{N \cap V(F)}}{\frac{V(F)}{N \cap V(F)}} = \dfrac{F}{V(F)}$; claramente el núcleo de $F/V(F) \longrightarrow A/V(A)$ es $N/N \cap V(F)$ y se tiene la 2-extensión especial

$$X \rightarrowtail K \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \longrightarrow \frac{A}{V(A)}$$

La existencia del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & \frac{F}{V(F)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\wr"', equal] & \frac{A}{V(A)} \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & K \arrow[r] & \frac{B/X}{V(B/X)} \arrow[r, two heads] & \frac{A}{V(A)}
\end{tikzcd}$$

nos indica que $\eta(v) = [[X \rightarrowtail K \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}]]$.

Por (2.1.30) se tiene la 2-extensión especial en $\underline{V}$

$$\underline{V}_{1}\underline{C}(A) \rightarrowtail \frac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}$$

y si consideramos el morfismo inducido por v

$$v_*: V^2(\frac{A}{V(A)}, \underline{V}_{1}\underline{C}(A)) \longrightarrow V^2(\frac{A}{V(A)}, X)$$

puesto que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\underline{V}_{1}\underline{C}(A) \arrow[r, tail] \arrow[d, "v"'] & \frac{N}{V_1(N,F)} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \frac{F}{V(F)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & \frac{A}{V(A)} \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & K \arrow[r] & \frac{F}{V(F)} \arrow[r, two heads] & \frac{A}{V(A)}
\end{tikzcd}$$

con h morfismo de F/V(F)-estructuras (vease el diagrama de obtención de K en pag. 157) deducimos que

$$v_*[[\underline{V}_{1}\underline{C}(A) \rightarrowtail \frac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}]] = \eta\,(v)$$

(vease (1.6.10)).

Entonces si v, v' $\mathrm{Hom}_A(\underline{V}_{1}\underline{C}(A), X)$ sera

$$\eta(v+v') = (v+v')_* [[V_1 C(A) \rightarrowtail \frac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}]] =$$

$$= v_* [[\underline{V}_{1}\underline{C}(A) \rightarrowtail \frac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}]] +$$

$$+\ v'_{*}\left[\left[\underline{V}_1\underline{C}(A) \rightarrowtail \frac{F}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}\right]\right] = \eta(v) + \eta(v').$$

Y η es morfismo de grupos .

Probaremos la exactitud en $\mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X)$:

Sea $v \in \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X)$, $Z^{-1}(v) = [\,(j\colon X \rightarrowtail Z(K),\ K \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A)]$ y $N \rightarrowtail F \overset{q}{\twoheadrightarrow} A$ una presentación libre de A en $\underline{C}$ como hasta ahora. Tendremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\underline{V}_1\underline{C}(A) \arrow[r, tail] \arrow[d, "v"'] & \dfrac{N}{V_1(N,F)} \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{F}{V_1(N,F)} \arrow[r, two heads, "q'"] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail, "j"] & K \arrow[r] & B \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

y $\eta(v) = \left[\left[X \rightarrowtail K \longrightarrow \dfrac{F}{V(F)} \longrightarrow \dfrac{A}{V(A)}\right]\right]$, segun lo visto anteriormente.

Si $\eta(v) = 0$, sera por que existe un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \dfrac{A}{V(A)} \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & K \arrow[r] & \dfrac{F}{V(F)} \arrow[r, two heads] & \dfrac{A}{V(A)}
\end{tikzcd}$$

con E en $\underline{V}$ y tal que la acción de E sobre K por conjugación coincida con la definida via $E \twoheadrightarrow F/V(F)$, (1.6.12).

Se tiene, entonces, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & K \arrow[r, two heads] \arrow[d, dash] & \dfrac{N}{N \cap V(F)} \arrow[d, dash] \\
X \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \dfrac{F}{V(F)} \arrow[d] \\
 & \dfrac{A}{V(A)} \arrow[r, equal] & \dfrac{A}{V(A)}
\end{tikzcd}$$

Como $E \twoheadrightarrow F/V(F)$ escinde al sea $F/V(F)$ libre en $\underline{V}$ y estar E en $\underline{V}$, sera tambien $K \twoheadrightarrow N/N\cap V(F)$ escindente, y al ser $X\subset Z(K)$ podremos poner $K =$ $= X\times K'$ siendo $K'\cong N/N\cap V(F)$. Es claro que K' es un ideal de B y se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & K' \arrow[d, tail] & \\
K \arrow[r, tail] \arrow[d] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & \frac{B}{K'} \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

y en particular la sucesión exacta $X \rightarrowtail \frac{B}{K'} \twoheadrightarrow A$ que, al ser $j: X \rightarrowtail K$ morfismo de B-estructuras(X B-módulo via $B \longrightarrow A$), es una extensión singular de A por X en $\underline{C}$.

Y puesto que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\underline{V}_1\underline{C}(A) \arrow[r, tail] \arrow[d, "v"'] & \frac{N}{V_1(N,F)} \arrow[r] \arrow[d] & \frac{F}{V_1(N,F)} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail, "j"] \arrow[d, equal] & K \arrow[r, tail] \arrow[d] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, tail] & \frac{B}{K'} \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

sera $\gamma[X \rightarrowtail \frac{B}{K'} \twoheadrightarrow A] = Z[(I_X: X=X,\ X \rightarrowtail \frac{B}{K'} \twoheadrightarrow A)] = v$ (vease(2.4.6))

Asi $\mathrm{Ker}(\eta)\subset \mathrm{Img}(\gamma)$.

Ademas, si $[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A] \in H^1(A,X)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\eta\gamma[X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A] &= \eta Z[(I_X: X=X,\ X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A)] = \\
&= [[\ X = X \longrightarrow \frac{E/X}{V(E/X)} \longrightarrow \frac{A}{V(A)}]] = \\
&= [[\ X = X \longrightarrow \frac{A}{V(A)} = \frac{A}{V(A)}]] = 0
\end{aligned}$$

con lo que $\mathrm{Img}(\gamma)\subset \mathrm{Ker}(\eta)$. Y la sucesión es exacta en $\mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X)$.

Probaremos, por último, la exactitud en $V^2(\frac{A}{V(A)},X)$:

Si $v\in \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X)$ y $Z^{-1}(v) = [(j:X \rightarrowtail Z(K),\ K \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A)]$, entonces $\phi^2\eta(v) = \phi^2\,[[X \rightarrowtail K \longrightarrow \frac{B/X}{V(B/X)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}]] = [[X \rightarrowtail K \longrightarrow \frac{B}{X} \twoheadrightarrow A]]$ ya que se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d, equal] & \frac{B}{X} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, "\theta"'] \\
X \arrow[r, tail] & K \arrow[r] & \frac{B/X}{V(B/X)} \arrow[r, two heads] & \frac{A}{V(A)}
\end{tikzcd}$$

(vease (2.5.1)).

Y como se tiene

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & K \arrow[r] & \frac{B}{X} \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

siendo, obviamente, las acciones de B sobre K por conjugación igual a las acciones via $B \longrightarrow B/X$; por (1.6.12), $[[X \rightarrowtail K \longrightarrow \frac{B}{X} \twoheadrightarrow A]] = 0$, y $\phi^2\eta = 0$.

Asi $\mathrm{Img}(\eta) \subset \mathrm{Ker}(\phi^2)$.

Supongamos, ahora, que $[[X \rightarrowtail K \longrightarrow B \longrightarrow \frac{A}{V(A)}]] \in V^2(\frac{A}{V(A)},X)$ es tal que su imagen por ϕ^2 es nula. Su imagen sera la clase de 2-extensiones especiales que contiene a la fila superior del diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & K \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & B^{\theta} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\pi"'] & A \arrow[d, "\theta"'] \\
X \arrow[r, tail] & K \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, two heads] & \frac{A}{V(A)}
\end{tikzcd}$$

y si es nula, sera por que existe un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "h"] & A \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail, "j"] & K \arrow[r, "f'"] & B^{\theta} \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

con la acción de E sobre K por conjugación igual a la acción via $E \longrightarrow B^{\theta}$,(1.2.16).

Por ser una 2-extensión especial $X \subset Z(K)$ y el monomorfismo $j: X \rightarrowtail Z(K)$ es de A-modulos.

Si $k \in K \cap V(E)$, sera $hi(k) = o$ de donde $f(k) = o$ y $k \in X$, osea $K \cap V(E) \subset X$.

Ademas es elemental que $B = B^{\theta}/V(B^{\theta})$ y K es una $\underline{V}B$ -estructura; tambien sera entonces $\underline{V}E$-estructura via $E \longrightarrow B$ o lo que es igual $\underline{V}E$-estructura por conjugación; por tanto, segun (2.1.25), $K \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ es $\underline{V}$-central.

Concluimos asi que $W:(j: X \rightarrowtail Z(K),\ K \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A)$ es una $\underline{V}$-A-X-extensión

Sea $v = Z[W] \in \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A), X)$. Se tiene

$$\eta(v) = [[X \rightarrowtail K \longrightarrow \frac{E/X}{V(E/X)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}]] =$$

$$= [[X \rightarrowtail K \longrightarrow \frac{B^{\theta}}{V(B^{\theta})} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}]] =$$

$$= [[X \rightarrowtail K \longrightarrow B \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}]] \ .$$

Luego $\mathrm{Ker}(\phi^2) \subset \mathrm{Img}(\eta)$.

Tenemos asi la exactiyud en $V^2(\frac{A}{V(A)}, X)$, y el teorema esta demostrado.

Nota : La sucesión construida en el teorema (2.5.2), para cohomologia absoluta, es posible obtenerla para cohomologia relativa, caso de que se de la situación de factorización (1.2.10), bajo el supuesto de $A \in \underline{V}$. Es decir, existe una sucesión exacta y natural

$$V^1(A,X)_{\pounds} \overset{\phi^1}{\rightarrowtail} H^1(A,X)_{\pounds} \overset{\gamma}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}_{\pounds}(A), X) \overset{\eta}{\longrightarrow} V^2(A,X)_{\pounds} \overset{\phi^2}{\longrightarrow} H^2(A,X)_{\pounds}$$

donde $\underline{V}_1\underline{C}_{\pounds}(A)$ es el £-invariante de Baer, definido y dotado de estructura de

A-módulo en (2.1.29).

Se establece, de forma obvia, el concepto de £-$\underline{V}$-A-X-extensión, el grupo $E\underline{V}(A,X)_{£}$ y el isomorfismo $E\underline{V}(A,X)_{£} \cong Hom_A(\underline{V}_1\underline{C}_{£}(A),X)$.

La construcción de los morfismos γ y η asi como la exactitud de la sucesión es en todo analoga a la dada anteriormente para el caso de cohomologia absoluta.

Para generalizar la sucesión, sin necesidad de suponer A en $\underline{V}$, seria necesaria una hipotesis sobre la variedad que asegurara un comportamiento natural del epimorfismo $A \overset{\theta}{\twoheadrightarrow} A/V(A)$ respecto a la conservación de epimorfismos £-escindentes por el funtor P, adjunto a la izquierda al funtor inclusión de $\underline{V}$ en $\underline{C}$.

2.6. ESTUDIO DE ϕ^n, $n \geq 2$.

Continuaramos en las condiciones de 2.2. y (2.2.6).

(2.6.1) DEFINICION.

Una extensión en $\underline{C}$, $L \rightarrowtail B \twoheadrightarrow A$, se dice $\underline{V}$-marginal si $L \cap V(B) = 0$.

Notemos que, segun se vio en la demostración del teorema (2.5.2), para X un $\underline{V}$A-módulo se verifica que la imagen del morfismo

$$\phi^1 : V^1(\frac{A}{V(A)},X) \longrightarrow H^1(A,X)$$

es el conjunto de clase de extensiones singulares en $\underline{C}$ de A por X $\underline{V}$-marginales.

(2.6.2) PROPOSICION.

Sea X un $\underline{V}$A-módulo y el morfismo cambio de variedad

$$\phi^2 : V^2(\frac{A}{V(A)},X) \longrightarrow H^2(A,X) .$$

Considerando los elementos de V^2 y H^2 como clases de 2-extensiones especiales, se tiene que :

$\mathrm{Img}(\phi^2) = \Big\{ [[X \rightarrowtail E \longrightarrow B' \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A]]$, tal que $\mathrm{Ker}(\sigma) \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow A$ es $\underline{V}$-marginal y E es una $\underline{V}B'$-estructura $\Big\}$.

Dem.-

Sea $[[X \rightarrowtail E \overset{f}{\longrightarrow} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} \frac{A}{V(A)}]] \in V^2(\frac{A}{V(A)}, X)$, supongamos que $L = \mathrm{Ker}(\sigma)$.

Considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, two heads] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "\theta"'] \\ X \arrow[r, tail] & E \arrow[r] & B \arrow[r, two heads] & \frac{A}{V(A)} \end{tikzcd}$$

con el cuadrado de la derecha cartesiano; sera

$\phi^2 [[X \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow A/V(A)]] = [[X \rightarrowtail E \longrightarrow B' \twoheadrightarrow A]]$, segun(2.5.1).

Es claro que $B = B'/V(B')$ y $\mathrm{Ker}(h) = V(B') = V(A)$, de donde es inmediato que $L \cap V(B') = 0$ y $L \rightarrowtail B' \twoheadrightarrow A$ es $\underline{V}$-marginal. Obviamente E es $\underline{V}B'$-estructura al ser B-estructura en $\underline{V}$,(2.1.24).

Reciprocamente, si tenemos $X \rightarrowtail E \longrightarrow B' \overset{\sigma'}{\twoheadrightarrow} A$ una 2-extensión especial de A por X en $\underline{C}$ con $L = \mathrm{Ker}(\sigma') \cap V(B') = 0$ y E una $\underline{V}B'$-estructura, entonces se tiene el diagrama de filas y columnas exactas

$$\begin{tikzcd} & V(B') \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & V(A) \arrow[d, tail] \\ L \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & A \arrow[d, two heads] \\ L \arrow[r, tail] & \frac{B'}{V(B')} \arrow[r, two heads] & \frac{A}{V(A)} \end{tikzcd}$$

siendo el cuadrado de la derecha cartesiano.

Tendremos, entonces, la sucesión exacta

$$X \rightarrowtail E \longrightarrow \frac{B'}{V(B')} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)} .$$

Como E es una $\underline{V}B'$-estructura E estara en $\underline{V}$ y sera ademas una $B'/V(B')$-estructura con las acciones inducidas.

Es inmediato que $X \rightarrowtail E \longrightarrow \dfrac{B'}{V(B')} \twoheadrightarrow \dfrac{A}{V(A)}$ es una 2-extensión especial en $\underline{V}$ de $A/V(A)$ por X; y por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ X \arrow[r, tail] & E \arrow[r] & \dfrac{B'}{V(B')} \arrow[r, two heads] & \dfrac{A}{V(A)} \end{tikzcd}$$

se tiene que $\phi^2\left[\left[X \rightarrowtail E \longrightarrow \dfrac{B'}{V(B')} \twoheadrightarrow \dfrac{A}{V(A)}\right]\right] = [[X \rightarrowtail E \longrightarrow B' \twoheadrightarrow A]]$.

(2.6.3) PROPOSICION .

En las mismas hipotesis que (2.6.2), se tiene que

$$Ker(\phi^2)=\left\{ v_*\left[\left[\underline{V}_1\underline{C}(A) \rightarrowtail \frac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}\right]\right], v\in Hom_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X)\right\}$$

siendo $N \rightarrowtail F \twoheadrightarrow A$ una presentación libre de A en $\underline{C}$, v_* el morfismo inducido por v de $V^2(A/V(A),\underline{V}_1\underline{C}(A))$ en $V^2(A/V(A),X)$, y $\underline{V}_1\underline{C}(A) \rightarrowtail \dfrac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \dfrac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \dfrac{A}{V(A)}$ la 2-extensión especial en $\underline{V}$ inducida segun (2.1.30).

Dem.-

Es consucuencia de la exactitud de la sucesión (2.5.2) y que tal conjunto es precisamente la imagen del morfismo η .

(2.6.4) COROLARIO .

$\phi^2 : V^2(\dfrac{A}{V(A)},X) \longrightarrow H^2(A,X)$ es un monomorfismo para todo $\underline{V}A$-módulo X si y solo si la 2-extensión especial

$$\underline{V}_1\underline{C}(A) \rightarrowtail \frac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}$$

inducida por una presentación libre de A, $N \rightarrowtail F \twoheadrightarrow A$, segun(2.1.30), es nula.

Dem.-

La condición es suficiente de forma obvia.

Si ϕ^2 es un monomorfismo para todo $\underline{V}A$-módulo, lo sera para el $\underline{V}A$-módulo $\underline{V_1 C}(A)$, osea ϕ^2: $V^2(A/V(A), \underline{V_1 C}(A)) \longrightarrow H^2(A, \underline{V_1 C}(A))$ sera un monomorfismo, y por tanto $I_{\underline{V_1 C}(A)_*}[[\underline{V_1 C}(A) \rightarrowtail \frac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}]] =$

$$[[\underline{V_1 C}(A) \rightarrowtail \frac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}]] = 0.$$

(2.6.5) PROPOSICION .

$$\phi^1: V^1(\frac{A}{V(A)}, X) \longrightarrow H^1(A, X) \text{ es un isomorfismo y}$$

$$\phi^2: V^2(\frac{A}{V(A)}, X) \longrightarrow H^2(A, X) \text{ es un monomorfismo, para todo } \underline{V}A\text{-}$$

módulo X, si y solo si $\underline{V_1 C}(A) = 0$.

Dem.-

Si $\underline{V_1 C}(A) = 0$, la sucesión exacta (2.5. 2) implica que ϕ^1 es un isomorfismo y ϕ^2 un monomorfismo para cualquier $\underline{V}A$-módulo X.

Reciprocamente, si ϕ^1 es un isomorfismo y ϕ^2 un monomorfismo para todo $\underline{V}A$-módulo X, particularizando al $\underline{V}A$-módulo $\underline{V_1 C}(A)$, la secesión (2.5.2) nos asegura que $Hom_A(\underline{V_1 C}(A), \underline{V_1 C}(A)) = 0$ de donde $\underline{V_1 C}(A) = 0$.

(2.6.6) COROLARIO .

Si ϕ^1 es un isomorfismo para todo $\underline{V}A$-módulo, entonces $\underline{V_1 C}(A) = 0$ si y solo si la 2-extensión especial

$$\underline{V_1 C}(A) \rightarrowtail \frac{N}{V_1(N,F)} \longrightarrow \frac{F}{V(F)} \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}$$

inducida por una presentación libre de A, $N \rightarrowtail F \twoheadrightarrow A$, segun (2.1.30), es nula.

Dem.- Se sigue de (2.6.4) y (2.6.5).

(2.6.7) Para $A \in \underline{C}$ y $B \in \underline{V}$, denotaremos $\underline{V}$-Ext(A,B) al conjunto de clases de equivalencia (en el sentido obvio) de extensiones , $B \rightarrowtail E \xrightarrow{g} A$, de A por B $\underline{V}$-centrales (se entiende con g sobre). Y denotamos $\mathrm{Ext}_{\underline{V}}(A/V(A),B)$ al conjunto de clases de equivalencia de extensiones en $\underline{V}$, $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A/V(A)$, de A/V(A) por B.

Es obvio que toda extensión en $\underline{V}$ es $\underline{V}$-central; dada la extensión en $\underline{V}$

$$B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow \frac{A}{V(A)}$$

denotamos por $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ a la obtenida por el diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E^{\theta} \arrow[r, two heads] \arrow[d] & A \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads] & \frac{A}{V(A)} \end{tikzcd}$$

que segun (2.1.20) es $\underline{V}$-central.

Queda asi definida una aplicación

$$\mathrm{Ext}_{\underline{V}}\left(\frac{A}{V(A)},B\right) \xrightarrow{\ \Sigma\ } \underline{V}\text{-}\mathrm{Ext}(A,B)$$

Es facil ver que Σ es inyectiva y su imagen es el conjunto de extensiones de A por B $\underline{V}$-marginales.

Se verifica que Σ es una biyección, para todo B de $\underline{V}$, si y solo si $\underline{V}_1\underline{C}(A)$ es cero. En efecto, supongamos que $\underline{V}_1\underline{C}(A) = 0$ y sea $B \rightarrowtail E \xrightarrow{g} A$ una extensión en $\underline{C}$ $\underline{V}$-central; sea $K \rightarrowtail F \xrightarrow{f} E$ una presentación libre de E en $\underline{C}$, $h = g\,f : F \twoheadrightarrow A$ y $N = \mathrm{Ker}(h)$; tendremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, tail] \arrow[d] & F \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, tail] & E \arrow[r, two heads, "g"] & A \end{tikzcd}$$

que por ser $B \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ $\underline{V}$-central inducira el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{N}{V_1(N,F)} & \rightarrowtail & \dfrac{F}{V_1(N,F)} & \twoheadrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow f' & & \| \\ B & \rightarrowtail & E & \twoheadrightarrow & A \end{array}$$

y la restricción de f' nos da un morfismo

$$f'' : \frac{N}{V_1(N,F)} \cap V\left(\frac{F}{V_1(N,F)}\right) = \underline{V}_1\underline{C}(A) \longrightarrow B \cap V(E)$$

que sera claramente sobre y al ser $\underline{V}_1\underline{C}(A) = 0$ concluimos que $B \cap V(E) = 0$ y la extensión es $\underline{V}$-marginal, perteneciendo por tanto a la imagen de Σ .

Reciprocamente, si Σ es sobre, osea toda extensión $\underline{V}$-central es $\underline{V}$-marginal, para $N \rightarrowtail F \twoheadrightarrow A$, una presentación libre de A , la extensión $\underline{V}$-central

$$\frac{N}{V_1(N,F)} \rightarrowtail \frac{F}{V_1(N,F)} \twoheadrightarrow A$$

sera $\underline{V}$-marginal y

$$\frac{N}{V_1(N,F)} \cap V\left(\frac{F}{V_1(N,F)}\right) = \underline{V}_1\underline{C}(A) = 0 .$$

Un estudio mas general de lo dicho en el apartado (2.6.7) puede verse en [24] .

(2.6.8) COROLARIO .

Sea A $\underline{C}$. Los morfismos $\phi^1 : V^1\left(\frac{A}{V(A)}, X\right) \longrightarrow H^1(A,X)$ y $\phi^2 : V^2\left(\frac{A}{V(A)}, X\right) \longrightarrow H^2(A,X)$ son isomorfismos y monomorfismos, respectivamente, para todo $\underline{V}A$-módulo X, si y solo si toda extensión de A en $\underline{C}$ $\underline{V}$-central es $\underline{V}$-marginal.

Dem.-

Es consecuencia de (2.6.5) y (2.6.7).

(2.6.9) PROPOSICION .

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$, y $R\in\underline{V}$ tal que $\underline{V}\supset S(\underline{C})\underline{W}_R$; entonces la categoria de R-módulos en $\underline{C}$ coincide con la categoria de R-módulos en $\underline{V}$, es decir, todo R-módulo en $\underline{C}$ es $\underline{V}R$-módulo.

Dem.-

Si X es un R-módulo en $\underline{C}$, como $\underline{V}\supset S(\underline{C})\underline{W}_R$, la extensión

$$X \rightarrowtail X\rtimes R \twoheadrightarrow R$$

estara en $\underline{V}$, (vease (2.3.11)), y X sera un R-módulo en $\underline{V}$.

Notemos que en este caso, todo R-módulo es un $\underline{V}R$-módulo, se tiene el diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd}
(\underline{C},R) \arrow[d, shift right, "P_R"'] \arrow[dd, bend right=60, "D_R"'] \\
(\underline{V},R) \arrow[u, shift right, "I_R"'] \arrow[d, shift right, "D_{\underline{V}R}"'] \\
R\text{-Mod.} \arrow[u, shift right, "J"'] \arrow[uu, bend right=60, "J"']
\end{tikzcd}$$

(vease (1.2.8)). Y para todo $A \longrightarrow R\in(\underline{V},R)$ sera $D_R(A) = D_{\underline{V}R}(A)$.

(2,6,10) PROPOSICION .

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ y R objeto de $\underline{V}$ tal que todo R-módulo en $\underline{C}$ es un $\underline{V}R$-módulo . Si $\underline{C}$ es equilibrada, (1.7.4), entonces los morfismos cambio de variedad

$$\phi^n : V^n(R,X) \longrightarrow H^n(R,X)$$

son epimorfismos escindentes para todo $n\geq 0$ y todo R-módulo X.

Dem.-

Consideremos el morfismo de resoluciones simpliciales

$$\begin{tikzcd}
G(R)_\bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi_\bullet"'] & R \arrow[d, equal] \\
G_v(R)_\bullet \arrow[r, two heads] & R
\end{tikzcd}$$

obtenido en (2.2.4).

Aplicando el funtor D_R obtenemos en R-Mod el morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
\cdots\ D_RG^{n+1}(R) \arrow[r] \arrow[d] & D_RG^n(R) \arrow[r] \arrow[d, "D_R(\phi_n)"] & \cdots \arrow[r] & D_RG(R) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "D_R(\phi_1)"] & D_R(R) \arrow[d, equal] \\
\cdots\ D_RG_v^{n+1}(R) \arrow[r] & D_RG_v^n(R) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & D_RG_v(R) \arrow[r, two heads] & D_R(R)
\end{tikzcd}$$

y tanto $D_RG^n(R)$ como $D_RG_v^n(R)$ seran proyectivos en R-Mod.

Se sigue de (1.7.3) que el conplejo de la fila superior es exacto, y es por tanto una resolución proyectiva del R-módulo $D_R(R)$.

Como el complejo de la fila inferior es proyectivo, por resultados elementa les de algebra homologica en categorias abelianas (vease, por ejemplo,[86]) existe un morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
\cdots\ D_RG_v^{n+1}(R) \arrow[r] \arrow[d] & D_RG_v^n(R) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_n"] & \cdots \arrow[r] & D_RG_v(R) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"] & D_R(R) \arrow[d, equal] \\
\cdots\ D_RG^{n+1}(R) \arrow[r] & D_RG^n(R) \arrow[r] & \cdots \arrow[r, dash] & D_RG(R) \arrow[r] & D_R(R)
\end{tikzcd}$$

levantamiento de la identidad en $D_R(R)$.

Entonces la composición

$$\begin{tikzcd}
\cdots\ D_RG^{n+1}(R) \arrow[r] \arrow[d] & D_RG^n(R) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_nD_R(\phi_n)"] & \cdots \arrow[r] & D_RG(R) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\psi_1D_R(\phi_1)"] & D_R(R) \arrow[d, equal] \\
\cdots\ D_RG^{n+1}(R) \arrow[r] & D_RG^n(R) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & D_RG(R) \arrow[r, two heads] & D_R(R)
\end{tikzcd}$$

es un morfismo de complejos homotopico a I.

Para X un R-módulo, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_R(\ ,X)$ obtenemos en Ab los morfismos de complejos

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \mathrm{Hom}_R(D_R G^n(R),X) & \to & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(D_R G(R),X) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \psi_n & & & & \downarrow \psi_1 & & \\
\cdots \mathrm{Hom}_R(D_R G^n_v(R),X) & \to & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(D_R G_v(R),X) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow D_R(\phi_n) & & & & \downarrow D_R(\phi_1) & & \\
\cdots \mathrm{Hom}_R(D_R G^n(R),X) & \to & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(D_R G(R),X) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

siendo $D_R(\phi_n)\psi_n \simeq I$, y por tanto esta composición inducira isomorfismos el los correspondientes grupos de cohomologia.

Puesto que se tienen isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}_R(D_R G^n(R),X) \cong \mathrm{Der}(G^n(R),X)$$

$$\mathrm{Hom}_R(D_R G^n_v(R),X) \cong \mathrm{Der}(G^n_v(R),X)$$

al ser D_R adjunto al funtor J y (1.2.20), concluimos con la existencia del triangulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
H^n(R,X) & \xrightarrow{\phi^n} & V^n(A,X) \\
& \searrow^{=} & \downarrow \psi^n \\
& & H^n(A,X)
\end{array}$$

para todo $n \geqslant 0$, osea $\phi^n \psi^n = I$.

Notemos que esta proposición es valida para cohomologia relativa, caso que se de la situación (1.2.10), (la demostración seria identica a la realizada para cohomologia absoluta, cambiando G por $G_{\mathfrak{L}}$).

Si ademas $\underline{V}$ fuera equilibrada, por los mismos razonamientos anteriores, el complejo $\cdots D_R G^n_v(R) \to \cdots \longrightarrow D_R G_v(R) \longrightarrow D_R(R)$ es exacto y tendriamos que el morfismo de complejos $(D_R(\phi_n))_{n\geq 1}$ seria homotopico a la identidad, e inducirία un isomorfismo en los grupos de cohomologia.

Tenemos asi

(2.6.11) PROPOSICION .

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ y $R\in\underline{V}$ tal que todo R-módulo en $\underline{C}$ es un $\underline{V}$R-módulo. Si $\underline{C}$ y $\underline{V}$ son equilibradas, entonces los morfismos cambio de variedad

$$\phi^n : V^n(R,X) \cong H^n(R,X)$$

son isomorfismos para todo n y todo R-módulo X.

Destaquemos tambien que esta proposición es valida para cohomologia relativa, cambiando la hipotesis de equilibrio por la de $\mathcal{E}$-equilibrio.

(2.6.12) COROLARIO .

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ y R $\underline{V}$ tal que todo R-módulo en $\underline{C}$ sea un $\underline{V}$R-modulo. Si $\underline{C}$ es equilibrada, entonces para todo R-módulo X, se tiene

$$V^n(R,X) \cong H^n(R,X) \oplus \mathrm{Ker}(\phi^n) \qquad n\geq 0$$

y en particular

$$V^1(R,X) \cong H^1(R,X)$$
$$V^2(R,X) \cong H^2(R,X) \oplus \mathrm{Hom}_R(\underline{V}_1\underline{C}(R),X) .$$

Dem.-

El caso general es consecuencia de (2.6.10).

Para n=1, se deduce de (2.3.5).

Para n=2, es consecuencia de la sucesión exacta (2.5.2) que induce en este caso la sucesión exacta corta escindida de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}_R(\underline{V}_1\underline{C}(R),X) \overset{n}{\rightarrowtail} V^2(R,X) \overset{\phi^2}{\twoheadrightarrow} H^2(R,X) .$$

(2.6.13) COROLARIO .

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ y R $\underline{V}$ tal que todo R-módulo en $\underline{C}$ es un $\underline{V}$R-módulo. Supondremos $\underline{C}$ equilibrada. Entonces se verifica que $\phi^2 : V^2(R,X) \longrightarrow H^2(R,X)$ es un isomorfismo para todo R-módulo X si y solo si $\underline{V}_1\underline{C}(R) = 0$.

Dem.-

Puesto que en las condiciones del enunciado ϕ^1 es siempre un isomorfismo, el corolario se deduce de (2.6.5) .

(2.6.14) COROLARIO .

Sea $\underline{V}$ una variedad de $\underline{C}$ y R V tal que todo R-módulo en $\underline{C}$ es un $\underline{V}$R-módulo. Si $\underline{C}$ y $\underline{V}$ son equilibradas entonces $\underline{V}_1\underline{C}(R) = 0$.

Dem.-

Por (2.6.11) ϕ^2 es un isomorfismo y por (2.6.13) $\underline{V}_1\underline{C}(R) = 0$.

Notemos que la condición $\underline{V}_1\underline{C}(R) = 0$ es equivalente a que toda extensión $\underline{V}$-central este en $\underline{V}$ ((2.6.7) y el hecho de que al estar R en $\underline{V}$ las extensiones $\underline{V}$-marginales de R son las extensiones en $\underline{V}$) .

3. EJEMPLOS .

3.1. EL ANILLO $\dfrac{\Lambda_R}{I_V R}$.

Consideremos la categoria de Grupos, $\underline{Gr}$. Si $G \in \underline{Gr}$, es bien conocido que los G-módulos (izquierda o derecha) son los módulos sobre el Anillo Grupo Z(G), (vease, por ejemplo, [87]). Dada una variedad de grupos $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$, si G es un grupo en $\underline{V}$ entonces los G-módulos en $\underline{V}$ (G-módulos con producto semidirecto en $\underline{V}$) son los módulos sobre un anillo cociente de Z(G); explicitamente tal anillo es $\dfrac{Z(G)}{I_V G}$, donde $I_V G$ es el ideal bilatero de Z(G) generado por los elementos

$$f(\partial_i(\omega)),\ i=1,2,\ \dots\ ;\ \omega \in \Omega\ ;\ f \in \mathrm{Hom}(F_\infty, G)$$

siendo ∂_i la correspondiente i-ésima derivada de Fox, (vease, por ejemplo, [154]).

Este hecho, de que los módulos en una variedad son los módulos sobre un determinado anillo cociente, hemos observado se da en otras categorias algebraicas como Algebras de Lie, Algebras asociativas sobre un anillo, Algebras conmutativas, etc ...

Daremos una demostración que establecera esto de forma suficientemente general.

(3.1.1) Sea $\underline{C}$ una categoria de interes como en (1.2.1).
Supondremos existe un funtor

$$\Lambda : \underline{C} \longrightarrow \text{Anillos (unitarios)}$$

de modo que para cada $R \in \underline{C}$ exista una equivalencia de categorias

$$R\text{-Mod.} \cong {}_{\Lambda_R}\mathfrak{M}$$

donde R-Mod. denota la categoria de R-módulos en el sentido de (1.2.3) y ${}_{\Lambda_R}\mathfrak{M}$ es la categoria de Λ_R-módulos a la izquierda(el el sentido usual).

Supondremos que la equivalencia es natural en el sentido siguiente :

Si $f : R' \longrightarrow R$ es un morfismo en $\underline{C}$, segun (1.2.13) todo R-módulo es un R'-módulo via f; se induce asi un funtor

$$U^{f} : R\text{-Mod.} \longrightarrow R'\text{-Mod.}$$

por otra parte el morfismo de anillos $\Lambda_f : \Lambda_{R'} \longrightarrow \Lambda_R$ induce el funtor "cambio de Anillo"

$$U^{\Lambda f} : {}_{\Lambda_R}\mathfrak{M} \longrightarrow {}_{\Lambda_{R'}}\mathfrak{M}$$

(vease, por ejemplo,[87,pag.162]).

Se supone, entonces, que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
R\text{-Mod.} \arrow[r, "U^{f}"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & R'\text{-Mod.} \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\
{}_{\Lambda_R}\mathfrak{M} \arrow[r, "U^{\Lambda f}"] & {}_{\Lambda_{R'}}\mathfrak{M}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo .

Por último, supondremos que se verifica la siguiente condición :

Si X es un R-módulo y U(X) denota el correspondiente conjunto olvidado, se tiene el funtor de olvido $U : R\text{-Mod.} \longrightarrow \text{Set}$. Tambien se tendra el correspondiente funtor de olvido $U : {}_{\Lambda_R}\mathfrak{M} \longrightarrow \text{Set}$.

Se supone que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \text{Set} & \\
R\text{-Mod.} \arrow[ur, "U"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & {}_{\Lambda_R}\mathfrak{M} \arrow[u, "U"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Sea $\mu : F \dashv U$ el isomorfismo de la adjunción $\begin{tikzcd} \text{Set} \arrow[d, shift right, "F"'] \\ \underline{C} \arrow[u, shift right, "U"'] \end{tikzcd}$, y supongamos que

$P \in \underline{C}$ es libre sobre el conjunto $S = \{x_i, i \in I\}$ y sea $j = \mu(I_P) : S \longrightarrow UF(S) =$ $= U(P)$.

Tal como se vio en (1.2.11) y (1.2.7) se tienen adjunciones

$$\begin{tikzcd} (Set, U(P)) \arrow[d, shift right, "F_P"'] \\ (\underline{C}, P) \arrow[u, shift right, "U_P"'] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} (\underline{C}, P) \arrow[d, shift right, "D_P"'] \\ P\text{-Mod} \arrow[u, shift right, "J"'] \end{tikzcd}$$

sean $\mu_P : F_P \dashv U_P$ y $\mu_o : D_P \dashv J$ los correspondientes isomorfismos de adjunción.

Claramente $F_P(j) = I_P$ de donde $D_P(F_P(j)) = D_P(P)$, y para cada $A \longrightarrow R$ objeto de $(\underline{C}, R)$ la biyección natural

$$\mu_P : \mathrm{Hom}_{(\underline{C},P)}\left(\begin{array}{c} P \\ \| \\ P \end{array}, \begin{array}{c} A \\ \downarrow \\ P \end{array} \right) \cong \mathrm{Hom}_{(Set, U(P))}\left(\begin{array}{c} S \\ \downarrow j \\ U(P) \end{array}, \begin{array}{c} U(A) \\ \downarrow \\ U(P) \end{array} \right)$$

sera dada por

$$\mu_P(f) = U(f)\, j\ .$$

Consideremos ahora el isomorfismo natural

$$\mu_o : \mathrm{Hom}_P(D_P(P), D_P(P)) \cong \mathrm{Hom}_{(\underline{C},P)}\left(\begin{array}{c} P \\ \| \\ P \end{array}, \begin{array}{c} D_P(P) \rtimes P \\ \downarrow \\ P \end{array} \right)$$

y notemos $\varepsilon' = \mu_o(1) : P \longrightarrow D_P(P) \rtimes P$; sea $\varepsilon = \xi\varepsilon' : P \longrightarrow D_P(P)$ la derivación correspondiente a ε' por el isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{(\underline{C},P)}\left(\begin{array}{c} P \\ \| \\ P \end{array}, \begin{array}{c} D_P(P) \rtimes P \\ \downarrow \\ P \end{array} \right) \cong \mathrm{Der}(P, D_P(P))$$

(vease (1.2.20)).

Entonces para un P-módulo X el isomorfismo

$$\mu_o : \mathrm{Hom}_P(D_P(P),X) \cong \mathrm{Hom}_{(\underline{C},P)}\left(\begin{array}{c} P \\ \| \\ P \end{array}, \begin{array}{c} X\rtimes P \\ \downarrow \\ P \end{array} \right)$$

sera tal que $\mu_o(\psi) = J(\psi)\,\varepsilon'$.

Y el isomorfismo composición

$$\theta = \mu_P\,\mu_o \;:\; \mathrm{Hom}_P(D_P(P),X) \cong \mathrm{Hom}_{(Set,U(P))}\left(\begin{array}{c} S \\ \downarrow j \\ U(P) \end{array}, \begin{array}{c} U(X\rtimes P) \\ \downarrow \\ U(P) \end{array} \right)$$

vendra dado por $\theta(\psi) = U(J(\psi)\;\varepsilon')\,j$.

Ahora, es obvio $U(X\rtimes P) = U(X)xU(P)$ y por consiguiente se tiene la biyección natural

$$\xi_*: \mathrm{Hom}_{(Set,U(P))}\left(\begin{array}{c} S \\ \downarrow j \\ U(P) \end{array}, \begin{array}{c} U(X\rtimes P) \\ \downarrow \\ U(P) \end{array} \right) \cong \mathrm{Hom}_{Set}(S,U(X))$$

dada por $\xi_*(h) = \xi\, h$, (ξ como en (1.2.18)).

Concluimos con la existencia de una biyección natural

$$\theta' : \mathrm{Hom}_P(D_P(P),X) \cong \mathrm{Hom}_{Set}(S,U(X))$$

tal que $\theta'(\psi) = \xi\, U(J(\psi)\,\varepsilon')\,j$, pero $\xi\, U(J(\psi)\,\varepsilon') = U(\psi)\,\varepsilon$ y por tanto sera

$$\theta'(\psi) = U(\psi)\,\varepsilon\, j .$$

Dicho en otros terminos, tenemos que para cualquier R-módulo X y cualquier aplicación $s : S \longrightarrow U(X)$ existe un unico morfismo de R-módulos $\psi: D_P(P) \longrightarrow X$ tal que $U(\psi)\varepsilon\, j = s$.

Podemos suponer que $j: S \rightarrowtail P$ es una inclusión y tenemos asi

(3.1.2) PROPOSICION .

Si $P\in\underline{C}$ es libre sobre el conjunto $\{x_i,\ i\in I\}$ entonces $D_P(P)$ es un P-módulo libre sobre el conjunto $\{\varepsilon x_i, i\in I\}$, donde $\varepsilon: P \longrightarrow D_P(P)$ es la derivación considerada anteriormente .

(3.1.3) Derivadas de Fox.

Sigamos considerando P libre sobre el conjunto $\{x_i, i\in I\}$, entonces por las hipotesis establecidas en (3.1.1) se tienen los isomorfismos

$$\mathrm{Der}(P,\Lambda_P) = \mathrm{Hom}_P(D_P(P),\Lambda_P) = \mathrm{Hom}_{\Lambda_P}(D_P(P),\Lambda_P)$$

siendo, como se dijo anteriormente, el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_P(D_P(P),\Lambda_P) \cong \mathrm{Der}(P,\Lambda_P)$$

tal que $\psi \longmapsto U(\psi)\,\varepsilon$.

Ahora, $D_P(P)$ es un P-módulo libre sobre el conjunto $\{\varepsilon x_i, i\in I\}$, y por la tercera hipotesis de (3.1.1), tambien $D_P(P)$ sera un Λ_P-módulo libre sobre el conjunto $\{\varepsilon x_i, i\in I\}$; en consecuencia sera $D_P(P) = \coprod_{i\in I} \Lambda_P$.

Si $\pi_i : \coprod_{i\,I} \Lambda_P \longrightarrow \Lambda_P$ es la i-ésima proyección, definimos la i-ésima "derivada de Fox" $\partial_i : P \longrightarrow \Lambda_P$ como la derivación correspondiente, mediante el anterior isomorfismo, a dicha proyección .

Es decir, sera $\partial_i = U(\pi_i)\,\varepsilon$.

Claramente, entonces, si $x\in P$ y εx se expresa en función de la base por

$$\varepsilon x = \sum_{i\in I} t_i\, \varepsilon x_i$$

sera $\partial_i(x) = t_i$.

Podemos expresar esto mediante la formula

$$(3.1.4) \qquad \varepsilon(x) = \sum_{i\in I} \partial_i(x)\,\varepsilon x_i\ , \quad x\in P\,.$$

(3.1.5) Consideremos $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ una variedad de $\underline{C}$.

Para R $\underline{V}$, probaremos que, supuesto la categoria de R-módulos en $\underline{C}$ equivalente a la de módulos sobre el anillo Λ_R (hipotesis (3.1.1)), entonces la de R-módulos en $\underline{V}$ ($\underline{V}$R-módulos) es equivalente a la de módulos sobre un determi nado anillo cociente de $\bigwedge_R$.

Recordemos que un R-módulo X estara en $\underline{V}$ si y solo si $X \rtimes R \in \underline{V}$.

Consideremos F_∞ el objeto de $\underline{C}$ libre sobre el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots\}$ como en (2.1.2). Si $f : F_\infty \longrightarrow R$ es un morfismo en $\underline{C}$, tendremos el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{(\underline{C},R)}\left(\begin{array}{c} F_\infty \\ \downarrow f \\ R \end{array}, \begin{array}{c} X \rtimes R \\ \downarrow \\ R \end{array} \right) \cong \mathrm{Der}(F_\infty, X)$$

para cada R-módulo X, tal que si $d : F_\infty \longrightarrow X$ es una derivación el correspondiente morfismo h es dado por $h(x) = d(x) + sf(x)$, (1.2.20).

$$\begin{tikzcd} & F_\infty \arrow[dl, dashed, "d"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[r, tail] & X \rtimes R \arrow[r, two heads, shift left] & R \arrow[l, tail, shift left, "s"] \end{tikzcd}$$

Ahora, si X es un R-módulo en $\underline{V}$, todo morfismo $h : F_\infty \longrightarrow X \rtimes R$ se anula en $V(F_\infty)$, osea en toda palabra de Ω ; y en consecuencia sera $d(\omega) = o$ para todo $\omega \in \Omega$.

Reciprocamente, supongamos que para todo morfismo $f : F_\infty \longrightarrow R$ cualquier derivación $d : F_\infty \longrightarrow X$ se anula en las palabras definidoras de la variedad. Entonces para cualquier $h : F_\infty \longrightarrow X \rtimes R$, como este sera de la forma $h(x)=d(x)+sf(x)$ para una cierta derivación $d : F_\infty \longrightarrow X$, se tendra que $h(\omega) = d(\omega) + sf(\omega) = o$ para todo $\omega \in \Omega$; asi $V(X \rtimes R) = 0$ y $X \rtimes R \in \underline{V}$.

Tenemos pues

(3.1.6) PROPOSICION .

Si R $\underline{V}$ y X es un R-módulo en $\underline{C}$, entonces X es un R-módulo en $\underline{V}$ si y solo si para cualquier morfismo $f : F_\infty \longrightarrow R$, toda derivación $d : F_\infty \longrightarrow X$ (siendo X F_∞-módulo via f) se anula en Ω .

(3.1.7) COROLARIO .

Si $R\in\underline{V}$ y X es un R-módulo en $\underline{C}$, entonces X es un R-módulo en $\underline{V}$ si y solo si para cualquier morfismo $f : F_\infty \longrightarrow R$, considerando el correspondiente morfismo de anillos $\Lambda_f : \Lambda_{F_\infty} \longrightarrow \Lambda_R$, se verifica que los elementos

$$\Lambda_f(\partial_i(\omega))\ i=1,2,\ \dots\ ;\ \omega\in\Omega ,$$

actuan como cero sobre X.

Dem.-

Consideremos el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{F_\infty}(D_{F_\infty}(F_\infty), X) \cong \mathrm{Der}(F_\infty, X)$$

que asocia a un morfismo $\Psi: D_{F_\infty}(F_\infty) \longrightarrow X$ la derivación $d=\Psi\varepsilon: F_\infty \longrightarrow X$.

Tendremos para cada $\omega\in\Omega$, segun (3.1.4) , que

$$d(\omega) = \Psi\varepsilon(\omega) = \Psi\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \partial_i(\omega)\,\varepsilon(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\Lambda_f(\partial_i(\omega))\,\Psi\varepsilon(x_i)$$

y sera $d(\omega)=0$ para todo ω y para cualquier d si y solo si $\sum_{i=1}^{\infty}\Lambda_f(\partial_i(\omega))\,\Psi\varepsilon(x_i) = 0$ para cualquier morfismo de Λ_{F_∞}-módulos Ψ ; pero $D_{F_\infty}(F_\infty)$ es Λ_{F_∞}-módulo libre sobre el conjunto $\{\varepsilon x_i ,\ i=1,2,\ \dots\}$, segun (3.1.2), y por tanto lo anterior se dara si y solo si $\Lambda_f(\partial_i(\omega))\, x = o$ para todo $i=1,2,\ \dots ,\ \omega\in\Omega$ y $x\in X$. Despues de (3.1.6) el corolario esta probado.

Sea $I_V R$ el ideal bilatero del anillo Λ_R generado por el conjunto de elementos

$$\Lambda_f(\partial_i(\omega))\ i = 1,\ 2,\ \dots\ ;\ \omega\in\Omega\ ;\ f\in \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(F_\infty, R)$$

(3.1.8) PROPOSICION .

Dado $R\in\underline{V}$, la categoria de R-módulos en $\underline{V}$ ($\underline{V}$R-módulos) es equivalente a la categoria de módulos a la izquierda sobre el anillo cociente $\dfrac{\Lambda_R}{I_V R}$.

Dem.- Es consecuencia inmediata de (3.1.7) .

3.2. GRUPOS .

La categoria de Grupos, Gr , constituye un primer claro ejenplo de categoria de interes. En este caso no habra operaciones de orden 2, salvo la adición + del grupo, y de orden 1 solamente tendremos la operación − .

Los objetos singulares en Gr, (1.2.3), son claramente los grupos abelianos.

Para un grupo R denotamos ${}_R\mathcal{M}$ la categoria de R-módulos a la izquierda, (es decir, $X \in {}_R\mathcal{M}$ si y solo si X es un grupo abeliano junto con una aplicación $R x X \longrightarrow X$ tal que $r\cdot(x+x') = r\cdot x + r\cdot x'$, $(r+r')\cdot x = r\cdot(r'\cdot x)$ y $o\cdot x = x$; un morfismo en ${}_R\mathcal{M}$ $h : X \longrightarrow Y$ es un morfismo de grupos abelianos tal que $h(r\cdot x) = r\cdot h(x)$).

Y R-Mod. denota, como hasta ahora, la categoria de R-módulos en el sentido de (1.2.3).

(3.2.1) PROPOSICION .

Existe una equivalencia natural

$$R\text{-Mod} = {}_R\mathcal{M} \ .$$

Dem.-

Si $X \rightarrowtail X \rtimes R \underset{s}{\rightleftarrows} R \in$ R-Mod. , segun (1.2.3), se tiene una acción inducida de R en X por

$r\cdot x = s(r) + x - s(r)$, $r \in R$, $x \in X$.

Se nos define asi una aplicación $R x X \longrightarrow X$ que verifica :

$r\cdot(x+x') = s(r) + x + x' - s(r) = s(r) + x - s(r) + s(r) + x' - s(r) = r\cdot x + r\cdot x'$

$(r+r')\cdot x = s(r) + s(r') + x - s(r') - s(r) = r\cdot(r'\cdot x)$

$o\cdot x = o + x - o = x$

Asi X es un R-módulo a la izquierda.

Definimos K: R-Mod. $\longrightarrow {}_R\mathcal{M}$ por $K(X \rightarrowtail X \rtimes R \rightleftarrows R) = X$.

Si h : X $\longrightarrow$ Y es un morfismo en R-Mod. como en (1.2.4) es inmediato que h es tambien morfismo de r-módulos a la izquierda; definimos K(h) = h .

Reciprocamente, si X es un R-módulo a la izquierda, sea $X x_{\bullet} R$ el grupo " producto semidirecto " de X y R, (es decir, el conjunto XxR con adición $(x,r) + (x',r') = (x+r\cdot x', r+r')$),(vease, por ejemplo [87,pag.195], o [126,pag 1o5]) se tiene la sucesión exacta corta escindida a la derecha

$$X \overset{i}{\rightarrowtail} X x_{\bullet} R \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} R$$

donde i(x) = (x,o), p(x,r) = r y s(r) = (o,r).

Definimos A: ${}_{R}\mathfrak{M} \longrightarrow$ R-Mod. por $A(X) = X \overset{i}{\rightarrowtail} X x_{\bullet} R \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} R$.

Es inmediato que A K $\cong$ I y K A $\cong$ I .

Si para el grupo R, Z(R) denota el correspondiente " Anullo grupo " es conocido que un grupo abeliano X es un R-módulo a la izquierda si y solo si X es de forma natural un Z(R)-módulo a la izquierda.

Concluimos asi que existe una equivalencia natural :

(3.2.2) $\qquad$ R-Mod. $\cong {}_{Z(R)}\mathfrak{M}$.

Se verifican por tanto las hipotesis de (3.1.1), siendo en este caso el funtor Λ: Gr $\longrightarrow$ Anillos dado por $\Lambda_R = Z(R)$.

(3.2.3) Es claro que una derivación d : R $\longrightarrow$ X, de un grupo R en un R-módulo X, en el sentido de (1.2.9) corresponde exactamente a una derivación de R en el R-módulo a la izqyuierda X (tambien llamados "homomorfismos cruzados").

Si ε: Z(R) $\longrightarrow$ Z es el epimorfismo aumentación ($\varepsilon(r) = 1$, $r \in R$) e IR = Ker(ε) es el ideal aumentación, es conocido que IR representa al funtor Der(R,), es decir se tiene un isomorfismo natural

$$\mathrm{Der}(R,X) \cong \mathrm{Hom}_R(IR,X)$$

para cada R-módulo X.

Entonces si $A \to R \in (\underline{Gr},R)$ se tendran los isomorfismos naturales

$$\mathrm{Der}(A,X) \cong \mathrm{Hom}_A(IA,X) \cong \mathrm{Hom}_R(Z(R)\otimes_{Z(A)} IA,X)$$

y por (1.2.20)

$$\mathrm{Der}(A,X) = \mathrm{Hom}_{(\underline{Gr},R)}\left(\begin{array}{c} A \\ \downarrow \\ R \end{array}, \begin{array}{c} X \lhd R \\ \downarrow \\ R \end{array}\right).$$

Combinando estos, resulta que en la adjunción (1.2.8)

$$\begin{tikzcd} (\underline{Gr},R) \arrow[d, shift right, "D_R"'] \\ R\text{-Mod.} \arrow[u, shift right, "J"'] \end{tikzcd}$$

el funtor $D_R : (\underline{Gr},R) \longrightarrow R\text{-Mod.}$ es, salvo equivalencia, definido por

$$D_R(A \to R) = Z(R)\otimes_{Z(A)} IA$$

y en particular $D_R(R) = IR$.

La derivación ε: $R \longrightarrow D_R(R) = IR$ considerada en (3.1.1), viene en este caso dada por $\varepsilon(r) = r-1$, (vease [87,pag.194]), Entonces (3.1.2) es el conocido resultado: " Si F es un grupo libre sobre el conjunto $\{x_i, i\in I\}$, entonces IF el F-módulo libre sobre el conjunto $\{x_i-1, i\in I\}$",(vease, por ejemplo, [154, Proposición 2.1]).

(3.2.4) En [19] se prueba que, para $A \longrightarrow R \in (\underline{Gr},R)$ y X un R-módulo, se tienen isomorfismos naturales

$$H^n(A,X) = \begin{cases} \mathrm{Der}(A,X) & n=0 \\ E\text{-}M^{n+1}(A,X) & n>0 \end{cases}$$

donde $H^n(A,X)$ denota el n-ésimo grupo de cohomologia como en 1.3. y $E\text{-}M^n(A,X)$ es el n-ésimo grupo de cohomologia de Eilenberg-MacLane de A con coeficientes en el A-módulo X.

(3.2.5) Numerosos autores han atacado el problema de la interpretación, como clases de extensiones, de los grupos de cohomologia de grupos de Eilenberg -MacLane.

Cartan-Eilenberg [28,pag.299] , MacLane [126,pag.112], Hilton-Stammbach [87,pag.206] , y con mas generalidad J.Beck[21] y Duskin [37] , ofrecen diversas demostraciones de como $H^1(A,X)$ es isomorfo al grupo de clases de extensiones singulares, $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$, de A por X.

El teorema (1.4.6) Particularizado a $\underline{C} = \underline{Gr}$ es una demostración de este hecho.

La particularización del teorema (1.6. 11) nos asegura que el grupo $H^2(A,X)$ clasifica clases de extensiones

$$X \rightarrowtail E \xrightarrow{f} B \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$$

de B-grupos (notemos una B-estructura es en este caso un B-grupo, esto es inmediato de ver de forma analoga a (3.2.1)),donde B lo es por conjugación y A y X via σ , tal que $f(e)\cdot e' = e+e'-e$ para todos $e,e' \in E$.

Este hecho tambien tiene un amplio desarrollo historico. Gerstenhaber[68], Leedam-Green y MacKay [115] y mas recientemente J.Wu[163] y Huebschmann [97],[98] ofrecen distintas demostraciones de esto.

Notemos que estas extensiones son conocidas por diversos nombres en los distintos autores, como " sucesiones cruzadas " o " modulos cruzados " por

MacLane y Whitehead [127]y Huebschmann[97], "extensiones admisibles " por Gerstenhaber [68],"2-extensiones especiales" por J.Wu [163] [164], etc ...

Los resultados contenidos en (1.6.12) y (1.6.13) ofrecen un tratamiento alternativo al problema de la Obstrucción para extensiones no abelianas de grupos (vease[126]). Destacamos como ventaja de nuestra demostración, frente a la tambien general dada por Orzech[135] , el ser categorica y evita el siempre engorroso calculo de cociclos .

Puesto que los grupos de cohomologia de Eilenberg-MacLane se anulan cuando el módulo de los coeficientes es inyectivo, podemos decir que la categoria de Grupos es equilibrada, (1.7.4). Entonces la proposición (1.7.5) se particulariza a la conocida relación

$$H^n(A,X) = \mathrm{Ext}^n_A(IA,X)$$

y la cohomologia de grupos puede obtenerse derivando el funtor derivaciones

$$\mathrm{Der}(A,\ ) : A\text{-Mod.} \longrightarrow Ab\ .$$

Trabajando en esta linea, Barr y Rinehart en[20] prueban una interpretación de $H^n(A,X)$, para $n\geq 2$, como clases de n-extensiones de A por X

$$E^n : X \rightarrowtail X_1 \to \cdots \to X_{n-1} \longrightarrow E \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} A$$

donde $X \rightarrowtail X_1 \to \cdots \to X_{n-1} \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(\sigma)$ es una (n-1)-extensión de A-módulos y $\mathrm{Ker}(\sigma) \rightarrowtail E \twoheadrightarrow A$ una extensión singular.

Este resultado se sigue del teorema probado en (1.8.8).

La particularización del teorema (1.8.5) al caso de grupos, prueba que el grupo $H^n(A,X)$, $n\geq 3$, es isomorfo al grupo de clases de n-extensiones especiales de A por X

$$S^n : X \rightarrowtail X_1 \to \cdots \to X_{n-2} \longrightarrow E \xrightarrow{f} B \twoheadrightarrow A$$

donde $X \rightarrowtail X_1 \to \cdots \to X_{n-2} \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(f)$ es una (n-2)-extensión de A-módulos y $\mathrm{Ker}(f) \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow A$ una 2-extensión especial de grupos.

Este resultado ha sido probado en 1978 por Huebschmann [97] y en 1979 por Holt [94].

(3.2.6) Se sigue de (1.3.5) que dado un epimorfismo $\begin{smallmatrix} A & \xrightarrow{\sigma} & B \\ & \searrow_{R} \swarrow & \end{smallmatrix}$ en ($\underline{Gr}$, R) se tiene una sucesión exacta y natural

$$Der(B,X) \rightarrowtail Der(A,X) \longrightarrow Hom_B\left(\frac{L}{[L,K]}, X\right) \longrightarrow H^1(B,X) \longrightarrow H^1(A,X)$$

donde $L = Ker(A \longrightarrow B)$ y $K = Ker(A \longrightarrow R)$, para cada R-módulo X.

Esta es la conocida sucesión exacta de 5 terminos de Hochschild-Serre (vease, por ejemplo,[87], [152], [126]).

Diversos autores se han preocupado del alargamientode esta sucesión. Aqui se ha obtenido esta formando parte de la sucesión exacta larga

$$Der(B,X) \rightarrowtail Der(A,X) \longrightarrow Hom_B\left(\frac{L}{[L,K]},X\right) \longrightarrow H^1(B,X) \longrightarrow H^1(A,X) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(\sigma,X) \longrightarrow H^2(B,X) \longrightarrow H^2(A,X) \longrightarrow H^2(\sigma,X) \longrightarrow \cdots$$

que se obtiene al particularizar a grupos (1.3,2).

Huebschmann en [99], Loday en [117] , y J. Wu en [164] , prueban la existencia de una sucesión exacta y natural de 8 terminos

$$Der(B,X) \rightarrowtail Der(A,X) \longrightarrow Hom_B\left(\frac{L}{[L,K]},X\right) \longrightarrow H^1(B,X) \longrightarrow H^1(A,X) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Sext^1_A(L,X) \longrightarrow H^2(B,X) \longrightarrow H^2(A,X) .$$

donde $Sext^1_A(L,X)$ es el grupo de clases de extensiones de A-grupos

$$X \rightarrowtail E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L$$

tales que $v(e)\cdot e' = e+e'-e$ para todo $e,e' \in E$.

Ahora,segun el teorema (1.5.25) se tiene que $Sex^1_A(L,X)$ es precisamente el grupo de cohomologia $H^1(\sigma,X)$. Por consiguiente la anterior sucesión exacta de 8 terminos, obtenida por los autores citados, es parte de nuestra sucesión exacta larga inducuda por el epimorfismo .

Tambien A.Gut y U. Stammbach en[77]prueban, usando metodos suficiente - mente generales que permiten un analogo para otras categorias como Algebras de Lie, la existencia de una sucesión exacta y natural inducida por una sucesión exacta de grupos $L \rightarrowtail A \xrightarrow{\sigma} R$, para cada R-módulo X,

$$\mathrm{Der}(R,X) \xrightarrow{\sigma^*} \mathrm{Der}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\left(\frac{L}{[L,L]},X\right) \longrightarrow H^1(R,X) \xrightarrow{\sigma^*}$$

$$\longrightarrow H^1(A,X) \xrightarrow{\varepsilon_1^*} \mathrm{Coker}(\varepsilon_0^* : H^2(A,X) \longrightarrow H^2(L\ A,X))$$

donde los morfismos $\varepsilon_0, \varepsilon_1 : L \rtimes A \longrightarrow A$ vienen dados por $\varepsilon_0(l+sa) = a$ y $\varepsilon_1(l+sa) =$
$= l+a$.

Es decir, ε_0 y ε_1 no son sino las correspondientes proyecciones en el dia grama cartesiano

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & L \rtimes A \arrow[r, two heads, shift left, "\varepsilon_0"] \arrow[d, "\varepsilon_1"] & A \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[d, "\sigma"] \\ L \arrow[r, tail] & A \arrow[r, two heads, "\sigma"] & R \end{tikzcd}$$

(vease (1.2.4)).

Probaremos que, si bien el termino ampliación de la sucesión de 5 terminos obtenido por Gut-Stammbach no forma parte de nuestra sucesión exacta larga, esta sucesión exacta de 6 terminos puede deducirse facilmente de la sucesión larga citada anteriormente.

En efecto, el diagrama cartesiano anterior y la naturalidad de la sucesión (1.3.2) nos lleva al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Der}(R,X) \arrow[r, tail, "\sigma^*"] \arrow[d, "\sigma^*"] & \mathrm{Der}(A,X) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_1^*"] & \mathrm{Hom}_R\left(\frac{L}{[L,L]},X\right) \arrow[r] \arrow[d, equal, "I=(\varepsilon_1,\sigma)^*"] & H^1(R,X) \arrow[r, "\sigma^*"] \arrow[d, "\sigma^*"] & H^1(A,X) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_1^*"] & H^1(\sigma,X) \arrow[r, dash] \arrow[d, "(\varepsilon_1,\sigma)^*"] & \cdots \\ \mathrm{Der}(A,X) \arrow[r, tail, "\varepsilon_0^*"] & \mathrm{Der}(L\ A,X) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathrm{Hom}_A\left(\frac{L}{[L,L \times L]},X\right) \arrow[r, tail] & H^1(A,X) \arrow[r, "\varepsilon_0^*"] & H^1(L\ A,X) \arrow[r] & H^1(\varepsilon_0,X) \arrow[r, dash] & \cdots \end{tikzcd}$$

(para la identidad, basta observar que $[L,LxL]=[L,L]$). Como ε_o es un epimorfismo escindido los inducidos el los grupos de cohomologia ε_o^* seran monomorfismos escindidos (secciones) de donde se tendra la sucesión exacta corta escindida

$$H^1(A,X) \overset{\varepsilon_o^*}{\rightarrowtail} H^1(L\,A,X) \twoheadrightarrow H^1(\varepsilon_o,X)$$

con lo que $\mathrm{Coker}(\varepsilon_o^*: H^1(A,X) \longrightarrow H^1(L\triangleleft A,X)) = H^1(\varepsilon_o,X)$.

Ahora, utilizando el teorema de interpretación (1.5.25), (vease tambien (1.5.12)), es inmediato que el morfismo $(\varepsilon_1,\sigma)^*:H^1(\sigma,X) \longrightarrow H^1(\varepsilon_o,X)$ actua sobre extensiones en la forma

$$(\varepsilon_1,\sigma)^*[X \rightarrowtail E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L]=[X \rightarrowtail E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L]$$

y ademas si existe un morfismo de $L\triangleleft A$-grupos $h:L \longrightarrow E$ con $v\,h = I_L$ es trivial que h tambien seria morfismo de A-grupos. En consecuencia $(\varepsilon_1,\sigma)^*$ es un monomorfismo; de donde la sucesión

$$H^1(R,X) \overset{\sigma^*}{\longrightarrow} H^1(A,X) \longrightarrow H^1(\varepsilon_o,X)$$

es exacta. Lo que prueba la sucesión exacta de Gut-Stammbach, (vease tambien [133]).

Notemos que a partir de esta sucesión puede probarse, para el caso de L central en A y X R-módulo trivial, la exactitud de la sucesión

$$\mathrm{Der}(R,X) \rightarrowtail \mathrm{Der}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L,X) \longrightarrow H^1(R,X) \longrightarrow H^1(A,X) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(L,X)$$

y esta, segun apuntan Gut y Stammbach, es equivalente a la obtenida por Ganea en[64 , Teo.5.4] .

(3.2.7) Si $L \rightarrowtail A \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} R$ es una sucesión exacta de grupos, se probo en (1.7.11) la existencia de la sucesión exacta de R-módulos

$$\frac{L}{[L,L]} \rightarrowtail D_R(A) \twoheadrightarrow D_R(R)$$

y segun hemos visto en (3.2.2) es $D_R(R) = IR$ y $D_R(A) = Z(R)\otimes_{Z(A)}IA$; tenemos asi obtenida la conocida sucesión exacta de R-módulos

$$L_{ab} \rightarrowtail Z(R) \otimes_{Z(A)} IA \twoheadrightarrow IR$$

inducida por la sucesión exacta corta de grupos $L \rightarrowtail A \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} R$, (vease [87,pagina 198]).

(3.2.8) A partir de la sucesión anterior,(1.7.11), particularizando a grupos la sucesión exacta obtenida en (1.7.12) se tiene la sucesión exacta

$$\mathrm{Der}(R,X) \rightarrowtail \mathrm{Der}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L_{ab},X) \longrightarrow H^1(R,X) \longrightarrow \hat{H}^1(A,X) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(L_{ab},X) \longrightarrow H^2(R,X) \longrightarrow \cdots$$

Y esta sucesión, con el correspondiente cambio de notación ($\hat{H}^n(A,X) = $ $= H^n_\sigma(A,X)$), es la obtenida por Barr y Rinehart en [20] .

Notemos que , utilizando (1.7.13), si Z(R) es plano como Z(A)-módulo entonces esta sucesión coincide con la expresada en (3.2.6) .

(3.2.9) Consideremos $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ una variedad de Grupos.

Dado $R \in \underline{V}$, los R-módulos (que segun (3.2.1) son los R-módulos a la izquierda en el sentido usual) en $\underline{V}$ forman la categoria que es llamada por Stammbach la " categoria de nucleos abelianos " y la denotaremos $\underline{V}$R-Mod. Puesto que la categoria de Grupos , segun (3.2.2), esta en las hipotesis de (3.1.1) , sera valido el resultado expresado en (3.1.7), es decir existe una equivalencia natural

$$\underline{V}R\text{-Mod.} \cong {}_{\frac{Z(R)}{I_V R}}\mathcal{M}$$

siendo $I_V R$ el ideal bilatero del anillo grupo Z(R) generado por los elementos

$$f(\partial_i(\omega)) \; i=1,2, \;\ldots\; ; \; \omega \in \Omega; \; f \in \mathrm{Hom}(F_\infty, R)$$

Resultado dado por Knopfmacher en [107], (vease tambien [154]).

Notemos que utilizando la terminologia de (2.1.15) los R-módulos en $\underline{V}$ son los $\underline{V}R$-módulos .

(3.2.10) Podemos tambien dar explicitamente el funtor D_{vR} de la adjunción (1.2.8)

$$\begin{array}{c} (\underline{V},R) \\ D_{VR}\Big\downarrow \ \Big\uparrow J \\ \underline{V}R\text{-Mod.} \end{array}$$

Para X un $\underline{V}R$-módulo y $A \longrightarrow R \in (\underline{V},R)$ se tienen los isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}_{(\underline{V},R)}\left(\begin{array}{c}A\\ \downarrow\\ R\end{array}, \begin{array}{c}X \rtimes R\\ \downarrow\\ R\end{array}\right) = \mathrm{Der}(A,X) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{Z(R)}(Z(R)\otimes_{Z(A)} IA, X) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\frac{Z(R)}{I_v R}}\left(\frac{Z(R)}{I_v R}\otimes_{Z(A)} IA, X\right)$$

y por consiguiente, salvo equivalencia, sera

$$D_{vR}(A) = \frac{Z(R)}{I_v R}\otimes_{Z(A)} IA .$$

(3.2.11) Toda variedad $\underline{V}$ de grupos es una categoria de interes, y la teoria desarrollada en el capitulo 1 sera aplicable para los grupos de cohomologia $V^n(R,X)$, donde estamos empleando la notación que se dijo en (2.2.5).

Asi, para un $\underline{V}R$-módulo X, $V^1(R,X)$ es isomorfo al grupo de clases de extensiones singulares de grupos , $X \rightarrowtail E \twoheadrightarrow R$, con $E \in \underline{V}$; $V^2(R,X)$ es isomorfo al grupo de clases de 2-extensiones especiales de R por X

$$X \rightarrowtail E \longrightarrow B \twoheadrightarrow R$$

en $\underline{V}$, (es decir, 2-extensiones especiales de grupos con E y $B \in \underline{V}$ y con E un $\underline{V}B$-grupo). Estos resultados para la cohomologia en variedades de grupos han sido obtenidos por Leedam-Green y MacKay en [115].

No es cierto, en general , que una variedad de grupos sea equilibrada, osea los grupos de cohomologia V^n no se anulan en modulos inyectivos. Un contrae - jemplopara esto se obtiene al considerar la variedad de todos los grupos nilpo - tentes de clase 2 y R el grupo de Klein, Leedam-Green [113] prueba que $V^1(R,I)$ no es cero para algun R-módulo en la variedad inyectivo. Un ejemplo de variedad de grupos equilibrada es la variedad de los grupos abelianos, en cuyo caso $V^n = \mathrm{Ext}^n_Z$. Asi los funtores $V^n(R,\ )$ y $\mathrm{Ext}^n_{\frac{Z(R)}{I_V R}}(\frac{IR}{IR \cdot_V IR},\ )$ no seran, en general, equivalentes .

Logicamente los resultados (1.8.5) y (1.8.8) sobre interpretación de los grupos V^n tendran aplicación para aquellas variedades de Grupos que sean equilibradas.

(3.2.12) Destacamos, como en el caso de grupos, la sucesión exacta larga

$$\mathrm{Der}(B,X) \rightarrowtail \mathrm{Der}(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(\frac{L}{[L,K]}, X) \longrightarrow V^1(B,X) \longrightarrow V^1(A,X) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow V^1(\sigma,X) \longrightarrow V^2(B,X) \longrightarrow V^2(A,X) \longrightarrow \cdots$$

inducida por un epimorfismo en $(\underline{V},R)$ $\begin{tikzcd} A \arrow[rr, two heads, "\sigma"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$, donde $L = \mathrm{Ker}(A \longrightarrow B)$ y $K = \mathrm{Ker}(A \longrightarrow R)$, obtenida como aplicación de (1.3.2).

Los 5 primeros terminos de esta sucesión constituyen precisamente la sucesión de 5 terminos para la cohomologia en una variedad de grupos obtenida por U.Stammbach en [154], (vease (2.3.7)) .

Observemos tambien que, por (1.5.25), $V^1(\sigma,X)$ es el grupo de clases de extensiones

$$X \rightarrowtail E \xrightarrow{v} L$$

de $\underline{V}A$-grupos, tales que $v(e) \cdot e' = e+e'-e$ para todo $e, e' \in E$. Asi los primeros 8 terminos de la anterior sucesión constituyen una generalización de la sucesión exacta de 8 terminos obtenida en [99],[117], [164] para la variedad de todos los grupos .

(3.2.13) Poniendonos en la situación 2.2. para $\underline{C}$ y $\underline{V}$ dos variedades de grupos, los morfismos cambio de variedad

$$\phi^n : V^n(R/V(R), X) \longrightarrow H^n(R, X)$$

son estudiados por Leedam-Green, Hurley, McKay en [113], [114], [115] y Stammbach [154]. Es trivial que estos morfismos son precisamente los obtenidos en (2.2.6) para esta situación.

Todos los resultados obtenidos a lo largo de 2.3., 2.4., 2.5., y 2.6. se aplican a este caso, pasando facilmente del contexto general de una categoria de interes al caso de variedades de grupos.

3.3. ALGEBRAS ASOCIATIVAS.

Consideraremos K un anillo conmutativo y unitario. Denotaremos K-Alg a la categoria de álgebras asociativas sobre el anillo K.

K-Alg es un ejemplo de categoria de interes, donde + es conmutativa y hay dos operaciones de dos $*$ y $*^o$, que aqui denotaremos por simple yuxtaposición, (las acciones del anillo K seran las operaciones de orden uno).

Es claro que los objetos singulares en K-Alg son los K-módulos con multiplicación trivial.

Para Λ un K-álgebra asociativa y unitaria sea ${}_\Lambda\mathfrak{M}_\Lambda$ la categoria de Λ-Λ-bimodulos, (es decir, $X \in {}_\Lambda\mathfrak{M}_\Lambda$ si X es un K-módulo sobre el que actua Λ a izquierda y derecha con la condición $(\lambda x)\lambda' = \lambda(x\lambda')$ y $kx = xk$, para todos $x\ X$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, $k \in K$; un morfismo $h : X \longrightarrow Y$ en ${}_\Lambda\mathfrak{M}_\Lambda$ es un morfismo de K-modulos tal que $h(\lambda x \lambda') = \lambda h(x)\lambda'$.); y sea Λ-Mod. la categoria de Λ-módulos en el sentido de (1.2.3).

(3.3.1) PROPOSICION .

Existe una equivalencia natural

$$\Lambda\text{-Mod} = {}_{\Lambda}\mathcal{M}_{\Lambda} .$$

Dem.-

Sea $X \rightarrowtail X\rfloor\Lambda \underset{s}{\rightleftarrows} \Lambda$ un Λ-módulo. Entonces X es un K-módulo y las acciones inducidas por (1.2.3)

ii) $\lambda x = s(\lambda) x$

ii) $x \lambda = x\, s(\lambda)$

es inmediato que dotan a X de estructura de Λ-Λ-bimodulo.

Si, ahora, X es un Λ-Λ-bimodulo, Sea $X\underset{\bullet}{\times}\Lambda$ el K-álgebra que es el K-módulo $X\oplus\Lambda$ con producto

$$(x,\lambda)(x',\lambda') = (x\lambda' + \lambda x', \lambda\lambda')$$

(no presenta dificultad comprobar que $X\oplus\Lambda$ es un K-álgebra con esa operación y unitaria con unidad (o,1)). Se tiene la sucesión exacta corta de K-álgebras escindida a la derecha

$$X \overset{i}{\rightarrowtail} X\underset{\bullet}{\times}\Lambda \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \Lambda$$

donde $i(x) = (x,o)$, $p(x,\lambda) = \lambda$, y $s(\lambda) = (o,\lambda)$.

De esta forma $X \rightarrowtail X\underset{\bullet}{\times}\Lambda \rightleftarrows \Lambda$ es un Λ-módulo, siendo las acciones inducidas precisamente

$$s(\lambda)x = (o,\lambda)(x,o) = (\lambda x, o) = \lambda x$$

$$x\, s(\lambda) = (x,o)(o,\lambda) = (x\lambda, o) = x\lambda .$$

Es inmediato pues que los funtores

$$X \leftarrowtail X\rfloor\Lambda \rightleftarrows \Lambda \longrightarrow X$$

$$X \longrightarrow X \rightarrowtail X\underset{\bullet}{\times}\Lambda \rightleftarrows \Lambda$$

establecen la equivalencia enunciada .

Si para el K-álgebra Λ, Λ^e denota el "Algebra envolvente" de Λ, osea $\Lambda^e = \Lambda \otimes_K \Lambda^o$, donde Λ^o es el K-álgebra opuesta de Λ, es conocido (e inmediato) que los Λ-Λ-bimódulos son los Λ^e-módulos a la izquierda.

Tenemos asi la equivalencia natural

(3.3.2) $\quad \Lambda\text{-Mod.} = {}_{\Lambda^e}\mathcal{M}$.

Y se dan las hipotesis de (3.1.1) con el funtor $\Lambda \longrightarrow \Lambda^e$.

(3.3.3) El concepto de derivación (1.2.9) para este caso es precisamente el de derivación de un K-álgebra Λ en un Λ-Λ-bimodulo ,(vease,por ejemplo, [28]), es decir un morfismo de K-módulos $d : \Lambda \longrightarrow X$ tal que

$$d(\lambda \lambda') = \lambda d(\lambda') + d(\lambda) \lambda' \; .$$

Si $\rho : \Lambda^e \longrightarrow \Lambda$ es el morfismo de Λ^e-módulos tal que $\rho(\lambda \times \lambda') = \lambda \cdot \lambda'$, e $I\Lambda$ es su nucleo, osea el " Ideal aumentación", en [28, pag. 168] se prueba que existe un isomorfismo natural

$$\mathrm{Der}(\Lambda, X) = \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(I\Lambda, X)$$

para cada Λ^e-módulo.

Entonces si $\Gamma \longrightarrow \Lambda \in (K\text{-Alg}, \Lambda)$ y X es un Λ^e-módulo, se tendra

$$\mathrm{Hom}_{(K\text{-Alg},\ )}\left(\begin{matrix}\Gamma \\ \downarrow \\ \Lambda\end{matrix}, \begin{matrix}X \rtimes \Lambda \\ \downarrow \\ \Lambda\end{matrix}\right) = \mathrm{Der}(\Gamma, X) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\Gamma^e}(I\Gamma, X) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda^e \otimes_{\Gamma^e} I\Gamma, X)$$

y el funtor D_Λ , adjunto a la izquierda al funtor de olvido

$$J : \Lambda\text{-Mod} \longrightarrow (K\text{-Alg}, \Lambda)$$

sera, salvo equivalencia, dado por

$$D_{\Lambda}(\Gamma) = \Lambda^{e} \otimes_{\Gamma^{e}} I\Gamma = \Lambda \otimes_{\Gamma} I\Gamma \otimes_{\Gamma} \Lambda .$$

teniendose en particular $D_{\Lambda}(\Lambda) = I\Lambda$.

La derivación canonica $\varepsilon : \Lambda \longrightarrow I\Lambda$ de (3.1.1) es en este caso dada por $\varepsilon(\lambda) = 1 \otimes \lambda - \lambda \otimes 1$, y por (3.1.2) podemos asegurar que "Si Λ es un K-álgebra libre sobre $\{x_i ,\ i \in I\}$ entonces $I\Lambda$ es un Λ^{e}-módulo libre sobre $\{x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i\}$", (vease [28]).

(3.3.4) Si denotamos $\pounds = {}_{K}\mathcal{M}$ la categoria de K-módulos, el funtor de olvido $U : K\text{-Alg} \longrightarrow Set$ se factoriza por la categoria $\pounds$, teniendose el diagrama de funtores adjuntos

$$\begin{tikzcd}
Set \arrow[d, shift right] \arrow[dd, bend right=60, "F"'] \\
\pounds \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right, "F_{\pounds}"'] \\
K\text{-Alg} \arrow[u, shift right, "U_{\pounds}"'] \arrow[uu, bend right=60, "U"']
\end{tikzcd}$$

donde F(S), para un conjunto S es el K-álgebra de polinomios en las variables los elementos del conjunto S (sin conmutar respecto al producto); y $F_{\pounds}(M)$, para un K-módulo M, es dado por

$$F_{\pounds}(M) = K + M + M \otimes_K M + \cdots + M \otimes_K \overset{n}{\cdots} \otimes_K M + \cdots$$

con producto definido por $(a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_n})(a_{j_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_m}) = a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{j_m}$.

Este es pues un ejemplo de la situación (1.2.10) y como en 1.3. tendremos en K-Alg dos teorias de cohomologia. La cohomologia absoluta (relativa a conjuntos) y la relativa a $\pounds$ = K-módulos , que como alli denotaremos respectivamente $H^n(\ ,\ )$ y $H^n(\ ,\ )_{\pounds}$.

(3.3.5) En [19] se prueba que, para $\Gamma \longrightarrow \Lambda \in (K\text{-}Alg, \Lambda)$ y X un Λ^e-módulo se tiene que

$$H^n(\Gamma, X)_{\pounds} = \begin{cases} Der(\Gamma, X) & n=0 \\ Hoch^{n+1}(\Gamma, X) & n>0 \end{cases}$$

donde $Hoch^n(\Gamma, X)$ denota el n-ésimo grupo de cohomologia de Γ con coeficientes en el Γ^e-módulo (via $\Gamma \longrightarrow \Lambda$) introducidos por Hochschild [88] .

(3.3.6) Es conocido que si I es un Λ^e-módulo $\mathcal{E}_{\pounds}$-inyectivo (con la notación de (1.2.12))entonces $H^n(\Lambda, I)_{\pounds} = 0$, $n \geq 1$, (vease, por ejemplo, [126, pag 287]). Asi K-Alg es £-equilibrada y por (1.7.5) tenemos la equivalencia de funtores

$$H^n(\Lambda, \ )_{\pounds} = Ext^n_{\Lambda^e}(I\Lambda, \ )_{\pounds}$$

(3.3.7) Aplicando a este caso los teoremas sobre clasificación de extensiones; por (1.4.6), tendremos que $H^1(\Lambda, X)_{\pounds} = Hoch^2(\Lambda, X)$ se puede interpretar de forma natural como el grupo de clases de extensiones singulares de Λ por el Λ-Λ-bimodulo X

$$X \rightarrowtail \Gamma \twoheadrightarrow \Lambda$$

que son escindentes en K-módulos, (vease, por ejemplo,[28],[88], [126]).

Facilmente se observa que una Λ-estructura $\Sigma \rightarrowtail \Sigma \triangleleft \Lambda \underset{\leftarrowtail}{\twoheadrightarrow} \Lambda$ en el sentido de (1.2.3) es equivalente a un K-álgebra Σ que es un Λ-Λ-bimodulo y tal que $\lambda(\sigma\sigma') = (\lambda\sigma)\sigma'$, $(\sigma\sigma')\lambda = \sigma(\sigma'\lambda)$ que es la condición para que el K-módulo $\Sigma \oplus \Lambda$ con producto $(\sigma,\lambda)(\sigma',\lambda') = (\sigma\sigma' + \sigma\lambda' + \lambda\sigma', \lambda\lambda')$ sea un K-álgebra asociativa y unitaria.

Aplicando ahora el teorema (1.6.11), tenemos que el grupo $H^2(\Lambda, X)_{\pounds} = Hoch^3(\Lambda, X)$ clasifica extensiones K-escindentes

$$X \rightarrowtail \Sigma \xrightarrow{f} \Gamma' \twoheadrightarrow \Lambda$$

de Γ'-estructuras tales que $\sigma\sigma' = f(\sigma)\sigma' = \sigma f(\sigma')$. Notemos que, por esta última condición, en tales extensiones la multiplicación en Σ esta determinado por su condición de Γ'-Γ'-bimódulo ; podemos decir que son extensiones con Σ un Γ'-Γ'-bimodulo tal que $f(\sigma)\sigma' = \sigma f(\sigma')$.

Este resultado fuedado por Gerstenhaber en [68].

Por lo dicho en (3.3.6), se verifian las hipotesis del teorema (1.8.5) y particularizando este tenemos que $H^n(\Lambda, X)_{\pounds} = Hoch^{n+1}(\Lambda, X), n \geq 3$, es isomorfo al grupo de clases de extensiones

$$X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdot \cdot \cdot \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow \Sigma \xrightarrow{f} \Gamma' \twoheadrightarrow \Lambda$$

donde $Ker(f) \rightarrowtail \Sigma \longrightarrow \Gamma' \twoheadrightarrow \Lambda$ es una 2-extensión especial del tipo anterior y $X \rightarrowtail X_1 \rightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-2} \twoheadrightarrow Ker(f)$ es una sucesión exacta escindente en K-módulos de Λ-Λ-bimodulos .

La interpretación de $H^n(\Lambda, X)_{\pounds} n \geq 2$, dad por Barr-Rinehart en [20], en terminos de n-extensiones $X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \Gamma' \xrightarrow{\sigma} \Lambda$, donde $X \rightarrowtail X_1 - \cdots \longrightarrow X_{n-1} \twoheadrightarrow Ker(\sigma)$ es una sucesión exacta de Λ-Λ-bimodulos, K-escindente, y $Ker(\sigma) \rightarrowtail \Gamma' \twoheadrightarrow \Lambda$ es una extensión singular K-escindida, se deduce del teorema (1.8.8) .

(3.3.8) Segun (1.2.2), si $\Gamma' \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} \Lambda$ es un epimorfismo escindente en K-módulos, para cada Λ^e-módulo X, se tiene la sucesión exacta, siendo $L=Ker(\sigma)$,

$$Der(\Lambda, X) \rightarrowtail Der(\Gamma', X) \longrightarrow Hom_{\Lambda^e}(\frac{L}{L^2}, X) \longrightarrow Hoch^2(\Lambda, X) \longrightarrow Hoch^2(\Gamma', X) -$$

$$\longrightarrow Hoch^2(\sigma, X) \longrightarrow Hoch^3(\Lambda, X) \longrightarrow Hoch^3(\Gamma', X) \longrightarrow \cdot \cdot \cdot$$

Los 5 primeros terminos constituyen un analogo a la sucesión exacta de 5 ter minos de Hochschild-Serre para la cohomologia de grupos.

Por (1.5.25) $Hoch^2(\sigma, X)$ es el grupo de clases de extensiones de Λ^e-módulos

$$X \rightarrowtail \Sigma \overset{v}{\twoheadrightarrow} L$$

escindentes en K-módulos y tales que $v(\sigma)\sigma' = \sigma v(\sigma')$, (este resultado es anunciado por Rinehart en [143]).

De esta forma los 8 primeros terminos de la sucesión anterior son una sucesión para los grupos de cohomologia de Hochschild analoga a la obtenida para la cohomologia de Eilenberg-MacLane de grupos por Huebschmann, Loday y Wu.

Tambien, (1.7.11) nos da la exactitud de la sucesión

$$\frac{L}{L^2} \rightarrowtail \Lambda^e \otimes_{\Gamma^e} I\Gamma \twoheadrightarrow I\Lambda$$

que es obtenida originalmente en [20] y es la correspondiente en K-Alg a la sucesión exacta de 3 terminos para grupos.

(3.3.9) Para los grupos de cohomologia absoluta, M.Barr en [9] prueba que, para $\Gamma \longrightarrow \Lambda \in (K\text{-Alg}, \Lambda)$ y X un Λ^e-módulo, se tiene

$$H^n(\Gamma, X) = \begin{cases} Der(\Gamma, X) & n=0 \\ \\ Shu^{n+1}(\Gamma, X) & n>0 \end{cases}$$

donde $Shu^n(\Gamma, X)$ denota el n-ésimo grupo de cohomologia introducido por Shukla [147] de Γ con coeficientes en X.

Destaquemos que si K es un cuerpo los grupos de cohomologia de Shukla coinciden con los de Hochschild; y si K es el anillo de los enteros Z se tiene la teoria de cohomologia de Anillos (Z-Algebras) desarrollada por MacLane en [122].

(3.3.10) Los teoremas (1.4.6) y (1.6.11) prueban que $Shu^2(\Lambda, X)$ clasifica extensiones singulares

$$X \rightarrowtail \Gamma \twoheadrightarrow \Lambda$$

de Λ por el Λ-Λ-bimodulo X; y $Shu^3(\Lambda, X)$ clasifica extensiones

$$X \rightarrowtail \Sigma \xrightarrow{f} \Gamma \twoheadrightarrow \Lambda$$

donde Σ es un Γ^e-módulo tal que $f(\sigma)\sigma' = \sigma f(\sigma')$.

No es conocido que $Shu^n(\Lambda, X) = 0$ $n>o$, si X es un Λ^e-módulo inyectivo. Podemos seguir considerando vigente la conjetura de Gerstenhaber en [67] que afirma este hecho.

Si tal conjetura es confirmada seran validas las interpretaciones que se siguen de (1.8.5) y (1.8.8); asi como que $Shu^{n+1}(\Lambda, \ ) = Ext^n_{\Lambda^e}(I\Lambda, \ )$.

(3.3.11) Particularizando (1.3.2) a este caso, para cada sucesión exacta corta de K-álgebras $L \rightarrowtail \Gamma \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} \Lambda$ y cada Λ^e-módulo X , se tiene la sucesión exacta larga natural

$$Der(\Lambda, X) \rightarrowtail Der(\Gamma, X) \longrightarrow Hom_{\Lambda^e}(\frac{L}{L^2}, X) \longrightarrow Shu^2(\Lambda, X) \longrightarrow Shu^2(\Gamma, X) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow Shu^2(\sigma, X) \longrightarrow Shu^3(\Lambda, X) \longrightarrow \cdots$$

donde, segun (1.5.25), $Shu(\sigma, X)$ es el grupo de clases de extensiones de Γ^e-módulos

$$X \rightarrowtail \Sigma \overset{v}{\twoheadrightarrow} L$$

tales que $v(\sigma)\sigma' = \sigma v(\sigma')$. Pudiendose hacer analogos comentarios que los hechos en (3.3.7) para la cohomologia de Hochschild .

(3.3.12) Notemos que los resultados (1.6.12) y (1.6.13) llevan implicita la interpretación de los grupos $Hoch^3(\Lambda, X)$ y $Shu^3(\Lambda, X)$ como obstrucciones a extensiones no abelianas (K-escindentes o no respectivamente), incluyendo el caso de Anillos,(vease [123], [126], [68]).

(3.3.13) Supongamos, ahora, $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ una variedad de K-Alg.

Dado $\Lambda \in \underline{V}$, siguiendo la notación establecida en el caso de grupos, denotaremos $\underline{V}\Lambda$-Mod a la categoria de Λ-módulos en $\underline{V}$.

Se sigue de (3.3.2) y (3.1.7) que existe una equivalencia natural

$$\underline{V}\Lambda\text{-Mod} = {}_{\frac{\Lambda^e}{I_v\Lambda}}\mathfrak{M}$$

siendo $I_v\Lambda$ el ideal bilatero del álgebra envolvente Λ^e generado por los elementos

$$f^e(\partial_i(\omega))\ i=1,2,\ \dots\ ;\ \omega\in\Omega\ \ ;\ f : F_\infty \longrightarrow \Lambda$$

donde $\partial_i : F_\infty \longrightarrow F_\infty^e$ son las correspondientes derivadas de Fox, F_∞ el K-álgebra libre sobre $\{x_1, x_2, \dots\}$ y $f^e : F_\infty^e \longrightarrow \Lambda^e$ el morfismo inducido por $f : F_\infty \longrightarrow \Lambda$.

Y para un K-álgebra Λ los $\underline{V}\Lambda$-módulos seran los módulos a la izquierda sobre el anillo

$$\frac{\left(\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}\right)^e}{I_v\left(\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}\right)}\ .$$

(3.3.14) Dado $\Lambda \in \underline{V}$ y $\Gamma \longrightarrow \Lambda \in (\underline{V}, \Lambda)$, se tendran los isomorfismos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{(\underline{V},\Lambda)}\left(\begin{smallmatrix}\Gamma\\ \downarrow\\ \Lambda\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}X]\Lambda\\ \downarrow\\ \Lambda\end{smallmatrix}\right) &= \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\Lambda^e \otimes_{\Gamma^e} I\Gamma, X) = \\ &= \mathrm{Hom}_{\frac{\Lambda^e}{I_v\Lambda}}\left(\frac{\Lambda^e}{I_v\Lambda} \otimes_{\Gamma^e} I\Gamma, X\right)\end{aligned}$$

y en la adjunción de (1.2.8) el funtor

$$D_{v\Lambda} : \underline{V}\Lambda\text{-Mod} \longrightarrow (\underline{V}, \Lambda)$$

adjunto a la izquierda al funtor J de olvido, sera

$$D_{V/\Lambda}(\Gamma) = \frac{\Lambda^e}{I_V\Lambda} \otimes_{\Gamma^e} I\Gamma \ .$$

(3.3.15) Como en (2.2.5), para $\Lambda \in \underline{V}$ y X un Λ-módulo en $\underline{V}$, tendremos los grupos de cohomologia absoluta $V^n(\Lambda, X)$ y la relativa a K-módulos $V^n(\Lambda, X)_{\pounds}$.

Si $\underline{V}$ es (£)-equilibrada se dara

$$V^n(\Lambda, X)_{(\pounds)} = \mathrm{Ext}^n_{\frac{\Lambda^e}{I_V\Lambda}}\left(\frac{I\Lambda}{I_V\Lambda \cdot I\Lambda}, X\right)_{(\pounds)} \ .$$

En cualquier caso, seran validos los teoremas (1.4.6) y (1.6.11) que interpretan $V^1(\Lambda, X)_{(\pounds)}$ y $V^2(\Lambda, X)_{(\pounds)}$ como clases de extensiones singulares (K-escindentes) y 2-extensiones especiales (K-escindentes) en $\underline{V}$, respectivamente; y en situación de equilibrio seran validos las interpretaciones que se siguen de (1.8.5) y (1.8.8).

(3.3.16) Respecto a una variedad $\underline{V}$ de K-Alg , A.Lue en [119] define una 2-extensión especial $\underline{V}$-central (" admisible " en su terminologia) de un K-álgebra Λ por un $\underline{V}\Lambda$-módulo X como una 2-extensión especial

$$X \rightarrowtail \Sigma \xrightarrow{f} \Gamma \twoheadrightarrow \Lambda$$

tal que Σ es una $\underline{V}\Gamma$-estructura (osea con $\Sigma \subset V^*(\Sigma \triangleleft \Gamma)$, (2.1.15)).

Es facil comprobar que las clases de 2-extensiones especiales $\underline{V}$-centrales constituyen un subgrupo del grupo $S^2(\Lambda, X)$, de todas las las 2-extensiones especiales de Λ por X, que siguiendo la notación de Lue denotamos $\underline{V}\text{-Ext}^2(\Lambda, X)$. Tenemos un monomorfismo de inclusión $\underline{V}\text{-Ext}^2(\Lambda, X) \rightarrowtail H^2(\Lambda, X)$.

Tambien este autor denota $\mathrm{Ext}^1_V(\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}, X)$ al grupo de clases de extensiones singulares de $\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}$ por X, y al grupo de 2-extensiones especiales de $\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}$

por X en $\underline{V}$ $\mathrm{Ext}_V^2(\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}, X)$ y $\underline{V}$-$\mathrm{Ext}^1(\Lambda, X)$ al grupo de las extensiones singulares de Λ por X que son $\underline{V}$-centrales.

Ahora bien, al ser X un $\underline{V}\Lambda$-módulo, por (2.1.26), toda extensión singular de Λ por X es $\underline{V}$-central; y asi $\underline{V}$-$\mathrm{Ext}^1(\Lambda, X) = H^1(\Lambda, X)$.

Considerando la sucesión exacta (2.5.2) para este caso, se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V^1(\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}, X) \arrow[r, tail, "\phi^1"] \arrow[d, equal] & H^1(\Lambda, X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\underline{V}_{\underline{1}}C(\Lambda), X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & V^2(\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}, X) \arrow[r, "\phi^2"] \arrow[d, equal] & H^2(\Lambda, X) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}_V^1(\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}, X) \arrow[r, tail] & \underline{V}\text{-}\mathrm{Ext}^1(\Lambda, X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\underline{V}_{\underline{1}}C(\Lambda), X) \arrow[r] & \mathrm{Ext}_V^2(\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}, X) \arrow[r] & H^2(\Lambda, X)
\end{tikzcd}$$

Y por (2.6.2) el morfismo $\phi^2 : \mathrm{Ext}_V^2(\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}, X) \longrightarrow H^2(\Lambda, X)$ se factoriza por el subgrupo $\underline{V}$-$\mathrm{Ext}^2(\Lambda, X)$, y en consecuencia se tiene la sucesión exacta

$$\mathrm{Ext}_V^1(\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}, X) \rightarrowtail \underline{V}\text{-}\mathrm{Ext}^1(\Lambda, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\underline{V}_{\underline{1}}C(\Lambda), X) \longrightarrow \mathrm{Ext}_V^2(\frac{\Lambda}{V(\Lambda)}, X) \rightarrow \underline{V}\text{-}\mathrm{Ext}^2(\Lambda, X).$$

Sucesión exacta obtenida por Lue en [119]. Queremos notar que en ese mismo trabajo tal sucesión es prolongada indefinidamente; si bien los terminos siguientes persiguen otro fin distinto al de conectar los grupos de cohomologia V^n y H^n.

(3.3.17) Todos los resultados del capitulo 2 pueden aplicarse para estudiar comparativamente los grupos de cohomologia (tanto absoluta como relativa a K-módulos) respecto de dos variedades $\underline{V} \subset \underline{W}$ de K-álgebras asociativas .

3.4. ALGEBRAS ASOCIATIVAS y CONMUTATIVAS; ANILLOS CONMUTATIVOS .

Una importante variedad de K-Alg (seguiremos empleando la notación del ejemplo anterior, 3.3.) es la formada por la clase de todas las K-álgebras asociativas y conmutativas, a la que denotaremos $\underline{Vc}$.

Esta variedad de K-Alg viene viene definida por la palabra

$$\omega = x_1 x_2 - x_2 x_1 .$$

Siendo F_∞ el K-álgebra libre sobre el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, tal como se dijo en (3.3.3) la derivación canonica $\varepsilon : F_\infty \longrightarrow IF_\infty$ sera tal que

$$\varepsilon(x_i) = 1 \otimes x_i - x_i \otimes 1$$

y estos elementos constituyen una base del F_∞^e-módulo IF_∞ .

Entonces

$$\varepsilon(\omega) = 1 \otimes (x_1 x_2 - x_2 x_1) - (x_1 x_2 - x_2 x_1) \otimes 1 =$$

$$= 1 \otimes x_1 x_2 - 1 \otimes x_2 x_1 - x_1 x_2 \otimes 1 + x_2 x_1 \otimes 1 =$$

$$= (1 \otimes x_1)(1 \otimes x_2 - x_2 \otimes 1) + (1 \otimes x_2)(x_1 \otimes 1 - 1 \otimes x_1) +$$

$$+ (x_2 \otimes 1)(1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1) + (x_1 \otimes 1)(x_2 \otimes 1 - 1 \otimes x_2)$$

Y las derivadas de Fox, (3.1.3), sobre ω seran

$$\partial_1(\omega) = 1 \otimes x_2 - x_2 \otimes 1$$

$$\partial_2(\omega) = 1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1$$

$$\partial_i(\omega) = 0 \quad i > 2 .$$

Y, como en (3.3.13), si A es un K-álgebra conmutativa y unitaria el ideal $I_{Vc}A$ estara generado por los elementos $1 \otimes a - a \otimes 1$ con $a \in A$; pero estos elementos generan el ideal aumentación $IA = \mathrm{Ker}(A \otimes_K A \longrightarrow A)$, (vease, por ejemplo, [28, pag. 168]), y en consecuencia sera $I_{Vc}A = IA$.

Tenemos asi

(3.4.1) PROPOSICION .

Existe una equivalencia natural

$$\underline{Vc}A\text{-Mod.} \cong {}_A\mathcal{M} .$$

donde la categoria de la derecha es la de A-módulos a la izquierda en el sentido usual.

Dem.-

Por (3.3.13) La categoria $\underline{Vc}A$-Mod. es equivalente a la de módulos a la izquierda sobre el anillo cociente $\dfrac{A^e}{I_{Vc}A}$, pero segun vimos antes $I_{Vc}A = IA$ y $\dfrac{A^e}{IA} = A$.

Tambien es claro que para un K-álgebra Λ los $\underline{Vc}\Lambda$-módulos son los módulos sobre el anillo cociente de Λ por el ideal bilatero generado por el conjunto $\{\lambda\lambda'-\lambda'\lambda,\ \lambda,\lambda'\in\Lambda\}$.

(3.4.2) Particularizando (3.3.14) tendremos que en la adjunción

$$\begin{tikzcd} (\underline{Vc},A) \arrow[d, shift right, "D_A"'] \\ {}_A\mathcal{M} \arrow[u, shift right, "J"'] \end{tikzcd}$$

el fintor D_A sera $D_A(B \to A) = \dfrac{A^e}{IA} \otimes_{B^e} IB$.

Y en particular

$$D_A(A) = \frac{A^e}{IA} \otimes_{A^e} IA = \frac{IA}{IA\ IA} = \frac{IA}{IA^2} ,$$ (conocido como el A-módulo de Kaehler)

Y como consecuencia tenemos el conocido resultado del isomorfismo natural

$$\mathrm{Der}(A,X) \cong \mathrm{Hom}_A\left(\frac{IA}{IA^2}, X\right)$$

(vease, por ejemplo, [2]).

(3.4.3) Como para cualquier variedad de K-Alg tendremos en $\underline{Vc}$ la cohomologia absoluta $Vc^n(A,X)$ y la relativa a K-módulos $Vc^n(A,X)_{\mathcal{L}}$, (3.3.15) . Destaquemos que en este caso estas cohomologias son calculadas respecto a los cotriples inducidos por las adjunciones

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Set} \arrow[d, shift right] \arrow[dd, bend right=60, "F"'] \\
\mathcal{L} \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right, "F_{\mathcal{L}}"'] \\
\underline{Vc} \arrow[u, shift right, "U_{\mathcal{L}}"'] \arrow[uu, bend right=60, "U"']
\end{tikzcd}$$

donde, segun (3.3.4), los funtores libres son

$F(S) = K[S]$, el K-álgebra de polinomios en las variables los elementos de S, (conmutando respecto al producto) .

y

$$F_{\mathcal{L}}(M) = K + M + \frac{M \otimes_K M}{S(2)} + \frac{M \otimes_K M \otimes_K M}{S(3)} + \cdots$$

siendo $S(i)$ los correspondientes grupos simetricos .

(3.4.4) Se deduce de [161] y [18] que $Vc^n(A,X) = And^n(A,X)$, donde $And^n(A,X)$ denota el n-ésimo grupo de cohomologia de A con coeficientes en el A-módulo X introducido por Andre, [1], [2].

Y es claro que $And^n(A,X) = D^n(A,X)$, denotando por estos últimos los grupos de cohomologia introducidos por D.Quillen, [139].

Para la cohomologia relativa, si K es un cuerpo de carasteristica 0, M.Barr en [11] prueba que

$$Vc^n(A,X)_{\mathcal{L}} = \begin{cases} Der(A,X) & n=0 \\ Harr^{n+1}(A,X) & n>0 \end{cases}$$

siendo $Harr^n(A,X)$ los grupos de cohomologia introducidos por Harrison,[80].

(3.4.5) Se sigue de (1.4.6) que $And^1(A,X)$ y $Harr^2(A,X)$ clasifican extensiones singulares $X \rightarrowtail B \xrightarrow{\sigma} A$ de A por X, que en este caso seran sucesiones exactas cortas tal que $bx = \sigma(b)x$, (por supuesto cuando hablemos de la cohomologia de Harrison suponemos que K es cuerpo de carasteristica 0), y que en general $\underline{Vc}^1(A,X)_{\mathfrak{X}}$ clasifica extensiones singulares de álgebras conmutativas de A por el A-módulo X que son escintentes en K-módulos .

Y de (1.6.11) que $And^2(A,X)$ y $Harr^3(A,X)$ clasifican extensiones de álgebras conmutativas

$$X \rightarrowtail E \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\sigma} A$$

que son de B-módulos y tales que $ee' = f(e)e'$. ($\underline{Vc}^2(A,X)_{\mathfrak{X}}$ aquellas que son K-escindentes).

(3.3.6) M.Gerstenhaber en [69] asocia a un epimorfismo de K-álgebras conmutativas $B \xrightarrow{\sigma} A$ una sucesión exacta natural, (podemos suponer K cuerpo de carasteristica 0),

$$0 \longrightarrow Harr^1(A,X) \longrightarrow Harr^1(B,X) \longrightarrow Hom_B(L,X) \longrightarrow Harr^2(A,X) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Harr^2(B,X) \longrightarrow C \longrightarrow Harr^3(A,X) \longrightarrow Harr^3(B,X)$$

donde L es el ideal nucleo de σ y C un conveniente subgrupo de $Ext^1_B(L.X)$, para cada A-módulo X.

Utilizando (1.3.2) obtenemos la sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow Der(A,X) \longrightarrow Der(A,X) \longrightarrow Hom_B(L,X) \longrightarrow Harr^2(A,X) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Harr^2(B,X) \longrightarrow Harr^2(\sigma,X) \longrightarrow Harr^3(A,X) \longrightarrow Harr^3(B,X) \longrightarrow \cdots$$

donde segun (1.5.25) $Harr^2(\sigma,X)$ es el grupo de clases de extensiones de B-módulos

$$X \rightarrowtail E \overset{v}{\twoheadrightarrow} L$$

tales que $v(e)e' = e\,v(e')$, las cuales constituyen obviamente un subgrupo de $\mathrm{Ext}^1_B(L,X)$.

De esta manera la sucesión de 8 terminos obtenida por Grstenhaber y la formada por los 8 primeros puntos de la larga expresada anteriormente son sucesiones equivalentes, pues si bien se diferencian en los dos primeros terminos es posible (y facil) pasar de una a otra .

Notemos que analogas sucesiones exactas largas se deducen de (1.3.2) para la cohomologia de Andre y cohomologia relativa a K-módulos sin ser K un cuerpo .

(3.4.7) Dentro de (1.6.12) y (1.6.13) se engloban los resultados de M.Barr [13]y de MacLane[123], sobre la teoria de obstruccion a extensiones de álgebras conmutativas y anillos .

(3.4.8) La variedad $\underline{Vc}$ de k-álgebras conmutativas no es, en general, equilibrada ni para la cohomologia absoluta ni para la relativa.

Por ejemplo, M.Beck en [21] prueba que si $A = K[x]/(x^2)$ y X=A como A-módulo entonces $\mathrm{Harr}^1(A,X) \neq 0$ aun siendo X A-módulo inyectivo. Para la cohomologia absoluta un contraejemplo es dado en [2].

(3.4.9) Podemos aplicar lo estudiado sobre los morfismos cambio de variedad a la situación $\underline{Vc} \subset$ K-Alg. Supondremos K cuerpo de carasteristica 0.

Considerando la cohomologia relativa a K-módulos , tendremos los morfismos

$$\phi^{n-1} : \mathrm{Harr}^n(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hoch}^n(A,X)$$

para A un K-álgebra conmutativa y X un A-módulo (A^e-módulo via $A^e \longrightarrow A$), (vease (2.2.6), (3.3.5) y (3.4.4)).

Como Barr en[11]prueba que ϕ^n es un monomorfismo escindente para todo n, se sigue entonces de la sucesión exacta que se deduce al particularizar (2.5.2) (vease la nota última a tal teorema)

$$\mathrm{Harr}^2(A,X) \xrightarrow{\phi^1} \mathrm{Hoch}^2(A,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X) \longrightarrow \mathrm{Harr}^3(A,X) \xrightarrow{\phi^2} \mathrm{HOch}^3(A,X)$$

que

$$\mathrm{Hoch}^2(A,X) \cong \mathrm{Harr}^2(A,X) \oplus \mathrm{Hom}_A(\underline{V}_1\underline{C}(A),X).$$

Y una condición necesaria y suficiente para que $\mathrm{Hoch}^2(A,X) \cong \mathrm{Harr}^2(A,X)$ para todo A-módulo X es que el invariante de Baer $\underline{V}_1\underline{C}(A)$ sea nulo .

Podemos dar una condición suficiente para que $\mathrm{Harr}^n(A,X) = 0$ $n \geq 1$, si X es un A-módulo inyectivo. Esta es, " Si A es un K-álgebra conmutativa tal que A como A^e-modulo (via $\rho: A^e \longrightarrow A$) es plano, entonces $\mathrm{Harr}^n(A,X) = 0$ para todo A-módulo inyectivo, $n \geq 1$ ". En efecto, la hipotesis implica que todo A-módulo inyectivo sera un A^e-módulo inyectivo en cuyo caso $\mathrm{Hoch}^n(A,X) = 0$ y por tanto tambien $\mathrm{Harr}^n(A,X) = 0$.

Notemos tambien que si A es un K-álgebra tal que todo A-A-bimodulo es simetrico ($ax = xa$) entonces , como K-Alg es equilibrada respecto de K-módulos, se dan las hipotesis de (2.6.10) y los morfismos ϕ^n seran epimorfismos para todo n, de donde concluimos que

$$\mathrm{Harr}^n(A,X) \cong \mathrm{Hoch}^n(A,X) \quad n \geq 0$$

para cualquier A-módulo X.

Con respecto a la cohomologia absoluta, los morfismos cambio de variedad conectaran los grupos de cohomologia de Andre (Quillen) con los de Shukla

$$\phi^n : \mathrm{And}^n(A,X) \longrightarrow \mathrm{Shu}^{n+1}(A,X)$$

a los cuales se les podra aplicar las conclusiones obtenidas a lo largo del capitulo segundo de la presente memoria .

3.5. ALGEBRAS DE LIE .

Sea $\underline{L}_K$ la categoria de álgebras de Lie sobre el cuerpo K.

Este es un ejemplo de categoria de interes con una operación de orden 2 no asociativa, $[\,,\,]$.

Los objetos singulares en $\underline{L}_K$ son claramente los K-módulos con producto trivial,(osea $[x,y] = o$).

Para L un K-álgebra de Lie denotaremos por ${}_L\mathfrak{M}$ la categoria de L-módulos a la izquierda, (es decir, $X \in {}_L\mathfrak{M}$ si X es un K-módulo sobre el que L actua a la izquierda en la forma $l \cdot x$, K-bilinealmente y tal que $[l,l'] \cdot x = l \cdot (l' \cdot x) - l' \cdot (l \cdot x)$; un morfismo $h : X \longrightarrow Y$ en ${}_L\mathfrak{M}$ es un morfismo de K-módulos tal que $h(l \cdot x) = l \cdot h(x)$).

Y sea L-Mod la categoria de L-módulos como en (1.2.3).

(3.5.1) PROPOSICION .

Existe una equivalencia natural

$$\text{L-Mod.} \cong {}_L\mathfrak{M} \; .$$

Dem,-

Sea $X \rightarrowtail X \rtimes L \underset{s}{\rightleftarrows} L$ un L-módulo. Entonces X es un K-módulo y como en (1.2.3) se tiene la acción de L en X

$$l \cdot x = [sl, x] = -[x, sl]$$

que obviamente es K-bilineal y

$$\begin{aligned}
[l,l'] \cdot x &= [s[l,l'],x] = [[sl,sl'],x] = -[[sl',x],sl] - [[x,sl],sl'] = \\
&= [sl,[sl',x]] - [sl',[sl,x]] = \\
&= l \cdot (l' \cdot x) - l' \cdot (l \cdot x)
\end{aligned}$$

con lo que X es un L-módulo a la izquierda .

Reciprocamente, si $X \in {}_L\mathcal{M}$ consideramos el K-módulo $X \oplus L$ y definimos en él el producto corchete

$$[(x,l),(x',l')] = (\,l \cdot x' - l' \cdot x, [l,l']\,)$$

se tiene asi un K-álgebra de Lie que denotamos $X \times_{\bullet} L$, y una sucesión exacta corta escindida a la derecha

$$X \overset{i}{\rightarrowtail} X \times_{\bullet} L \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} L$$

donde $i(x) = (x,o)$, $p(x,l) = l$, y $s(l) = (o,l)$.

Entonces $X \rightarrowtail X \times_{\bullet} L \rightleftarrows L$ es un L-módulo, con acciones inducidas de L en X, segun (1.2.3), tal que

$$[s(l),(x,o)] = [(l,o),(x,o)] = (l \bullet x, o) = l \bullet x \ .$$

Los funtores

$$X \rightarrowtail X \,\mathrm{J}\, L \rightleftarrows L \longrightarrow X$$

$$X \longrightarrow X \rightarrowtail X \times_{\bullet} L \rightleftarrows L$$

establecen claramente la equivalencia .

Si T(L) denota el K-álgebra asociativa libre sobre el K-módulo L, (vease (3.3.4)), y denotamos L^e al cociente de T(L) por el ideal generado por los ele - mentos de la forma $l \otimes l' - l' \otimes l - [l,l']$, con $l, l' \in L$, entonces L^e es conocida como el " K-álgebra universal envolvente " del K-álgebra de Lie L; y es bien conocido que los L-módulos a la izquierda son precisamente los L^e-módulos a la izquierda,(vease, por ejemplo, [87, pag. 232]) .

Concluimos asi con la equivalencia natural

(3.5.2) $\qquad$ L-Mod. $= {}_{L^e}\mathcal{M}$.

dandose, por tanto, las hipotesis de (3.1.1) para el funtor $L \longrightarrow L^e$.

(3.5.3) Para un $\mathbb{L}$-módulo X, una derivación de L en X, segunse definió en (1.2.9), es un morfismo de K-módulos $d: L \longrightarrow X$ tal que

$$d([l,l']) = d(l)\cdot l' + l\cdot d(l') = l\cdot d(l') - l'\cdot d(l)$$

que es el concepto usual de derivación , (vease, por ejemplo,[87,pag. 232]).

Si $IL = \mathrm{Ker}(L^e \longrightarrow K)$ es el ideal aumentación, es conocido que este L-módulo representa al funtor derivaciones, es decir se tiene un isomorfismo natural

$$\mathrm{Der}(L,X) = \mathrm{Hom}_{L^e}(IL,X)$$

([87,pag. 234]), para cada L-módulo X.

Entonces, si $L' \longrightarrow L \in (\underline{L}_K, L)$ y X es un L-módulo se tendra

$$\mathrm{Hom}_{(\underline{L}_K,L)}\left(\begin{smallmatrix} L' \\ \downarrow \\ L\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} X \rtimes L \\ \downarrow \\ L\end{smallmatrix}\right) = \mathrm{Der}(L',X) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{L'^e}(IL',X) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{L^e}(L^e \otimes_{L'^e} IL', X)$$

Se tiene asi la adjunción, (1.2.8),

$$\begin{array}{c}(\underline{L}_K, L) \\ D_L \big\downarrow \;\big\uparrow J \\ L\text{-Mod}\end{array}$$

con $D_L(L' \longrightarrow L) = L^e \otimes_{L'^e} IL'$, y en particular $D_L(L) = IL$.

La derivación canonica de (3.1.1), $\varepsilon: L \longrightarrow IL$ es en este caso dada por $\varepsilon(l) = l$, (vease [87, pag, 234]). Y (3.1.2) prueba el conocido resultado

" Si L es un K-álgebra de Lie libre sobre el conjunto $\{x_i,\ i \in I\}$, entonces IL es un L^e-módulo libre sobre ese mismo conjunto " .

(3.5.4) El funtor de olvido $U: \underline{L}_K \longrightarrow \mathrm{Set}$ se factoriza por la categoria de K-módulos, que seguimos denotando $\mathfrak{L}$, teniendose la adjunción

$$\begin{array}{c} \pounds \\ F_{\pounds}\big\downarrow \big\uparrow U_{\pounds} \\ \underline{L}_K \end{array}$$

siendo en este caso $F_{\pounds}(M) = \sum_{n\geq 1} F^n_{\pounds}(M)$, donde $F^1_{\pounds}(M) = M$ e inductivamente $F^n_{\pounds}(M) = \sum_{0<i<n} F^i_{\pounds}(M) \times_K F^{n-i}_{\pounds}(M)$, $n>1$, (vease[28,pag. 285]) .

Sea $\mathbb{G}_{\pounds}$ el correspondiente cotriple en $\underline{L}_K$. Y como caso particular de 1.3. tendremos los funtores de cohomologia $H^n(L,X)_{\pounds}$, para un K-álgebra de Lie L y un L-módulo X.

Probaremos que estos grupos coinciden con los definidos por Chevalley-Eilenberg en [31].

Sea $S \rightarrowtail P \overset{q}{\twoheadrightarrow} L$ una presentación $\mathbb{G}_{\pounds}$-proyectiva de L; como en (1.7.9) tendremos la sucesión exacta

$$0 = H_1(P,D_L)_{\pounds} \longrightarrow H_1(L,D_L)_{\pounds} \longrightarrow H_o(q,D_L)_{\pounds} \longrightarrow D_L(P) \twoheadrightarrow D_L(L)$$

y por (1.7.10) $H_1(q,D_L) = S_{ab}$.

Ahora, en [87, pag. 237] y en[20] se prueba que la sucesión

$$S_{ab} \rightarrowtail L^e \otimes_{P^e} IP \twoheadrightarrow IL$$

es exacta . En consecuencia $H_1(L,D_L)_{\pounds} = 0$.

A partir de aqui se puede deducir , por ejemplo como en [143, prop. 5.7] , que $H_n(L,D_L)_{\pounds} = 0$ para $n\geq 1$.

Entonces el complejo

$$\cdots D_L G^n_{\pounds}(L) \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_L(G_{\pounds}(L)) \longrightarrow D_L(L) \longrightarrow 0$$

es exacto y es por tanto una resolución proyectiva del L-módulo $D_L(L) = IL$.

Para un L-módulo X, el complejo

$$Hom_{L^e}(IL,X) \rightarrowtail Hom_{L^e}(D_L G_{\pounds}(L),X) \longrightarrow Hom_{L^e}(D_L(G^2_{\pounds}(L),X) \longrightarrow \cdots$$

tendra por grupos de cohomologia $\mathrm{Ext}^{n}_{L^e}(IL, X)$.

Por otra parte el complejo anterior es equivalente al complejo

$$\mathrm{Der}(L,X) \rightarrowtail \mathrm{Der}(G_{\mathcal{L}}(L),X) \longrightarrow \mathrm{Der}(G^2_{\mathcal{L}}(L),X) \longrightarrow \cdots$$

cuya cohomologia es $H^n(L,X)_{\mathcal{L}}$.

Entonces tenemos

$$(3.5.5) \qquad H^n(L,X)_{\mathcal{L}} = \mathrm{Ext}^{n}_{L^e}(IL,X) .$$

Ademas, en [28] se prueba mediante el conocido teorema de Poincaré--Birkoff - Witt que

$$\mathrm{Ext}^{n+1}_{L^e}(K,X) = \mathrm{Ch\text{-}E}^{n+1}(L,X)$$

donde $\mathrm{Ch\text{-}E}^n$ denota la cohomologia de Chevalley- Eilenberg.

Y la sucesión exacta $IL \rightarrowtail L^e \twoheadrightarrow K$ implica que

$$\mathrm{Ext}^{n+1}_{L^e}(K,X) = \mathrm{Ext}^{n}_{L^e}(IL,X)$$

Concluimos entonces

$$(3.5.6) \qquad H^n(L,X)_{\mathcal{L}} = \begin{cases} \mathrm{Der}(L,X) & n=0 \\ \mathrm{Ch\text{-}E}^{n+1}(A,X) & n>0 \end{cases} .$$

Notemos que este resultado se puede obtener directamente por el procedimiento estandard de modelos aciclicos, (vease [19]), utilizando las resoluciones obtenidas en [28,pag. 279] .

(3.5.7) De (1.4.6) se sigue que $\mathrm{Ch\text{-}E}^2(L,X)$ clasifica extensiones singulares $X \rightarrowtail L' \twoheadrightarrow L$ de L por el L-módulo X, (vease, por ejemplo, [28, pag. 279]), y de (1.6.11) que $\mathrm{Ch\text{-}E}^3(L,X)$ es isomorfo al grupo de clases de extensiones

$$X \rightarrowtail L'' \xrightarrow{f} L' \twoheadrightarrow L$$

que son de L'-módulos y tal que $[l''_1, l''_2] = f(l''_1)\cdot l''_2 = - f(l''_2)\cdot l''_1$.

Este resultado ha sido obtenido por Gerstenhaber en [68] .

Por la igualdad expresada en (3.5.5) se deduce que los grupos de cohomologia se anulan en módulos de coeficientes inyectivos; es decir $\underline{L}_K$ es equilibrada (notemos que al estar suponiendo K cuerpo la clase de todos los epimorfismos en $\underline{L}_K$ y la clase de todos los epimorfismos K-escindentes son la misma, en consecuencia la teoria de cohomologia absoluta y la relativa coinciden), y se sigue de (1.8.5) que $Ch\text{-}E^n(L,X)$, $n \geq 4$, clasifica extensiones

$$X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-2} \longrightarrow L'' \xrightarrow{f} L' \twoheadrightarrow L$$

donde $X \rightarrowtail X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{n-2} \twoheadrightarrow Ker(f)$ es una sucesión exacta de L-módulos y $Ker(f) \rightarrowtail L'' \longrightarrow L' \twoheadrightarrow L$ es una 2-extensión especial del tipo anterior .

En cada clase de equivalencia de estas extensiones hay un representante con L" singular, por (1.8.9).

(3.5.8) La interpretación de los elementos de $Ch\text{-}E^3(L,X)$, estudiada por Hochschild en [89], y con mas generalidad por Orzech en [135], es consecuencia de los resultados obtenidos en (1.6.12) y (1.6.13) .

(3.5.9) En relación con sucesiones exactas en cohomologia de álgebras de Lie , destacamos la que se sigue de (1.3.2); es decir, si $S \rightarrowtail L' \overset{\sigma}{\twoheadrightarrow} L$ es una sucesión exacta corta en $\underline{L}_K$, para cada L-módulo X existe una sucesión exacta y natural

$$Der(L,X) \rightarrowtail Der(L',X) \longrightarrow Hom_L(S_{ab},X) \longrightarrow Ch\text{-}E^2(L,X) \longrightarrow Ch\text{-}E^2(L',X) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Ch\text{-}E^2(\sigma,X) \longrightarrow Ch\text{-}E^3(L,X) \longrightarrow Ch\text{-}E^3(L',X) \longrightarrow \cdots$$

donde, por (1.5.25), $Ch\text{-}E^2(\sigma,X)$ es el grupo de clases de extensiones

$$X \rightarrowtail S' \overset{v}{\twoheadrightarrow} S$$

de L'-módulos, tales que $v(l'_1)\cdot l'_2 = -v(l'_2)\cdot l'_1$.

Este es, claramente, un subgrupo de $\mathrm{Ext}^2_{L'^e}(S,X)$.

Notemos tambien que la sucesión exacta larga que se deduce de (1.7.12) coincide con la obtenida por Barr y Rinehart en [20] para la cohomologia de álgebras de Lie; y que esta y la anterior coinciden en el caso de que L^e sea plano como L'^e-módulo tal como se deduce de (1.7.13).

(3.5.10) Abandonando la hipotesis de K cuerpo, es decir, suponiendo K un anillo conmutativo y unitario, y considerando la adjunción

$$\begin{array}{c} \mathrm{Set} \\ F \downarrow \;\; \uparrow U \\ \underline{L}_K \end{array}$$

tendremos una teoria de cohomologia absoluta , $H^n(L,X)$, para un K-álgebra de Lie L y un L-módulo X.

Conclusiones analogas a las establecidas en (3.5.7) se tienen para los grupos $H^1(L,X)$,(clasifica estensiones singulares), y $H^2(L,X)$, (clasifica 2-extensiones especiales, y sus elementos se pueden interpretar como obstrucciones).

Se tendra tambien una sucesión exacta larga analoga a la dada en (3.5.9).

Dixmier en [35] introduce una teoria de cohomologia absoluta para anillos de Lie, (K = Z),. Nonos es conocido si $H^n(L,X)$ y $\mathrm{Dix}^{n+1}(L,X)$ son funtores equivalentes. Si podemos asegurar que $H^1(L,X) = \mathrm{Dix}^2(L,X)$, al clasificar ambos las extensiones singulares de L por X . Parece logico que esto se de en dimensiones superiores, y pensamos que, por el metodo de modelos aciclicos, comparando la resolución construida por Dixmier en el mismo trabajo y la resolución del cotriple, se podria establecer este hecho .

Tampoco es conocido si $\underline{L}_K$ es equilibrada (relativamente a conjuntos) .

(3.5.11) Para cualquier variedad $\underline{V}$ de K-álgebras de Lie, de forma analoga a los ejemplos anteriores, se tendra que, para $L \in \underline{V}$, los L-módulos en $\underline{V}$ seran los modulos a la izquierda sobre el K-álgebra cociente, $\frac{L^e}{I_v L}$, del álgebra universal envolvente, por el ideal correspondiente $I_v L$, (vease (3.1.7)).

Asi como que en la adjunción de (1.2.8)

$$\begin{array}{c} (\underline{V},L) \\ D_{VL} \downarrow \; \uparrow J \\ \underline{V}L\text{-Mod} \end{array}$$

el funtor D_{vL} viene dado por $D_{vL}(L' \longrightarrow L) = \frac{L^e}{I_v L} \otimes_{L'^e} IL$.

Tendremos, para L $\underline{V}$ y X un $\underline{V}L$-módulo, los grupos de cohomologia relativa $V^n(L,X)_{\pounds}$ y los absolutos $V^n(L,X)$.

De (1.4.6) y (1.6.11) se deduce que $V^1(L,X)_{(\pounds)}$ y $V^2(L,X)_{(\pounds)}$ clasifican, respectivamente, extensiones singulares (K-escindentes) y 2-extensiones especiales (K-escindentes) en $\underline{V}$; y en condiciones de equilibrio seran validas las interpretaciones que se siguen de (1.8.5) y (1.8.8).

Para $\underline{V} \subset \underline{W}$ dos variedades de $\underline{L}_K$ se tendran los morfismos de conexión

$$\phi^n : V^n(L,X)_{(\pounds)} \longrightarrow W^n(L,X)_{(\pounds)}$$

(el caso mas interesante sera cuando $\underline{W} = \underline{L}_K$); trasladandose a esta situación los resultados obtenidos a lo largo del capitulo 2 .

Podemos destacar, entre las variedades de álgebras de Lie mas interesantes para aplicarles esta teoria, las nilpotentes, nilpotentes de clase < k, y resolubles de longitud 1 .

3.6. MODULOS .

Consideremos ${}_D\mathfrak{M}$ la categoria de D-módulos a la izquierda , para un anillo unitario D.

Es esta una categoria de interes, abeliana, sin operaciones de orden dos y donde todo objeto es singular.

(3.6.1) PROPOSICION .

Existe una equivalencia natural, para cada D-módulo M,

$$M\text{-Mod.} = {}_D\mathfrak{M} \ .$$

Dem.-

Si $M' \rightarrowtail M' \lhd M \mathrel{\substack{\twoheadrightarrow \\ \leftarrowtail}} M$ es un M-módulo es obvio que $M' \lhd M = M' \oplus M$. Y para cualquier D-módulo M', M' es un M-módulo con $M' \lhd M = M' \oplus M$.

La correspondencia

$$M' \rightarrowtail M' \oplus M \mathrel{\substack{\twoheadrightarrow \\ \leftarrowtail}} M \longrightarrow M'$$

establece, claramente, la equivalencia.

Podemos decir que todos los M-módulos son triviales y son todos los D-módulos .

Es inmediato, tambien, que para cualesquiera D-módulos M y M' , se tiene que $\mathrm{Der}(M,M') = \mathrm{Hom}_D(M,M')$; osea, en este caso, una derivación no es sino un morfismo de D-módulos.

Considerando la adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Set} \arrow[d, shift right, "F"'] \\ {}_D\mathfrak{M} \arrow[u, shift right, "U"'] \end{tikzcd}$$

es facil comprobar que los correspondientes grupos de cohomologia, $H^n(M,M')$, obtenidos como en 1.3. son los clasicos $\mathrm{Ext}^n_D(M,M')$, (vease,por ejemplo, [29, pag 82]).

Y si $f: D' \longrightarrow D$ es un morfismo de anillos unitarios, se tiene la factorización

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Set} \arrow[d, shift right] \\
{}_{D'}\mathfrak{M} = \pounds \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right, swap, "D\otimes_{D'}-"] \\
{}_{D}\mathfrak{M} \arrow[u, shift right, swap, "U^f"]
\end{tikzcd}$$

teniendose que $H^n(M,M')_{\pounds} = \mathrm{Ext}^n_{(D,D')}(M,M')$, cohomologia relativa de Hochschid ([29, pag. 85]) .

Es inmediato que una extensión singular de M por M' es en este caso una sucesión exacta corta de D-módulos

$$M' \rightarrowtail M'' \twoheadrightarrow M$$

sin mas condiciones. Y una 2-extensión especial de M por M' no es sino una 2-extensión de D-módulos

$$M' \rightarrowtail M_1 \longrightarrow M_2 \twoheadrightarrow M$$

De esta forma, los teoremas (1.4.6) y (1.6.11)expresan que $\mathrm{Ext}^1_D(M,M')$ clasifica extensiones de D-módulos de M por M', y $\mathrm{Ext}^2_D(M,M')$ 2-extensiones de D-módulos. Correspondientemente, los relativos $\mathrm{Ext}^1_{(D,D')}(M,M')$ y $\mathrm{Ext}^2_{(D,D')}(M,M')$ clasifican extensiones y 2-extensiones, respectivamente, de D-módulos.

Tambien es inmediato que una n-extensión especial de M por M' es precisamente una n-extensión de D-módulos

$$M' \rightarrowtail M_1 \longrightarrow \cdot \cdot \cdot \longrightarrow M_n \twoheadrightarrow M$$

de M por M'; entonces (1.8.5) prueba, en este caso, que $Ext^n_D(M,M')$ es el grupo de las clases de n-extensiones de D-módulos de M por M' y correspondientemente $Ext^n_{(D,D')}(M,M')$ el de aquellas que son escindentes como extensiones de D'-módulos. Es decir las conocidas interpretaciones de Yoneda, [165], [166].

Es conocido que los funtores Ext constituyen una sucesión conectada de funtores en ambas variables.

La sucesión natural exacta larga inducida por una sucesión exacta corta de D-módulos en la segunda variable es exactamente la que se sigue de (1.3.1).

Respecto a la primera variable, si $M' \rightarrowtail M'' \xrightarrow{\sigma} M$ es una sucesión exacta corta de D-módulos, utilizando (1.3.2), se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Hom_D(M,M_1) \longrightarrow Hom_D(M'',M_1) \longrightarrow Hom_D(M',M_1) \longrightarrow Ext^1_D(M\ ,M_1) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow Ext^1_D(M'',M_1) \longrightarrow Ext^1_D(\sigma,X) \longrightarrow Ext^2(M,M_1) \longrightarrow \quad \cdots$$

Ahora, es claro que se dan las hipotesis de (1.7.13) y por tanto

$$Ext^n_D(\sigma,M) = Ext^n_D(M',M)$$

con lo que la sucesión anterior es la usual sucesión exacta inducida por una sucesión exacta corta en la primera variable .

(3.6.2) Sea F_∞ el D-módulo libre sobre el conjunto $\{x_1, x_2, \dots\}$; es decir

$$F_\infty = \left\{ \sum d_i x_i \ , \ d_i \in D, \ d_i = o \text{ para casi todo } i \right\}$$

Es inmediato que particularizando (3.1.3) las correspondientes derivadas de Fox son en este caso las proyecciones

$$\pi_i : F_\infty \longrightarrow D.$$

Sea $\underline{V} = \underline{V}(\Omega)$ una variedad de D-módulos ; y supongamos que

$$\Omega = \left\{ \omega_j = \sum d^j_i x_i \ , \ j \in J \right\} .$$

Dado $M \in \underline{V}$, deducimos de (3.1.7) que la categoria $\underline{V}$M-Mod, de M-módulos en $\underline{V}$, es precisamente la categoria de módulos sobre el anillo cociente D/I , siendo I el ideal bilatero de D generado por el conjunto $\left\{ d_i^j \text{ , } j \in J, \ i=1,2, \ldots \right\}$. Por otra parte $\underline{V}$M-Mod es la clase de los D-módulos M' tales que $M \oplus M' \in \underline{V}$, la cual es, evidentemente, la propia variedad $\underline{V}$.

Tenemos asi que : " Las variedades de la categoria de D-módulos son las categorias de D/I-módulos, (D-módulos via la proyección), para D/I un anillo cociente de D ".

Siguiendo con la variedad $\underline{V}$ considerada, el funtor P, adjunto a la izquierda al funtor de inclusión $I : \underline{V} = {}_{D/I}\mathcal{M} \longrightarrow {}_{D}\mathcal{M}$, sera en este caso tal que a un D-módulo M le hace corresponder el cociente M/V(M) , donde V(M) sera el submodulo de M generado por el conjunto $\left\{ d_i^j m_i \text{ , } j \in J, \ m_i \in M, \ i=1,2, \ldots \right\}$ que es precisamente el submodulo producto del ideal I por M, IM. Entonces P(M) = $\frac{M}{IM} = \frac{D}{I} \otimes_D M$; es decir, P es el conocido adjunto a la izquierda al funtor cambio de Anillo $U^p : {}_{D/I}\mathcal{M} \longrightarrow {}_{D}\mathcal{M}$, donde $p: D \longrightarrow D/I$ es la correspondiente proyección.

Es ya inmediato observar que los morfismos cambio de variedad de (2.2.6)

$$\phi^n : \mathrm{Ext}^n_{D/I}\left(\frac{D}{I} \otimes_D M, M'\right) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_D(M,M')$$

para cualquier D/I-módulo M', son precisamente los morfismos correspondientes al cambio de anillo $D \longrightarrow D/I$, (vease, por ejemplo,[28,pag 116] ,[87, pag 164]).

A estos puede aplicarse, entonces, los resultados obtenidos a lo largo del capitulo 2 de la presente memoria .

BIBLIOGRAFIA

1.- ANDRE,M. Méthode simpliciale en algébre homologique et algebre commutative. Lecture Notes in Math. 32. Springer. (1967).

2.- ANDRE,M. Homologie des algbres commutatives. Springer. (1974).

3.- ANDRE,M. On the vanishing of the second cohomology group of a commutative algebra. Lecture Notes in Math. 61. Springer. (1968).

4.- ANDRE,M. Homology of simplicial objects. Proc.Symp. Pure Math. 17,15-36. (1970).

5.- AZNAR,E.G. Suma de Baer de extensiones singulares en una categoria de Ω-grupos. Revista matematica de la Universidad de Santander. Numero 2,parte II. (1979).

6.- APPELGATE,H. Categories With models. Lecture Notes in Math. 80. Spriger. (1969).

7.- BAER,R. Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen. Math. Z. 38. (1934).

8.- BARR,M. A cohomology theory for commutative algebras. I,II. Proc. AMS,16. 1379-1384,1385-1391. (1965).

9.- BARR,M. Shukla cohomology and Triples. J. Algebra 5,222-231. (1967)

10.- BARR,M. Cohomology in tensored categories. Proc. of the La Jolla conference in Categorical Algebra. Springer,Berlin. (1966).

11.- BARR,M. Harrison homology, Hochschild homology and Triples. J. Algebra 8,314-323. (1968).

12.- BARR,M. A note on commutative algebra cohomology. Bull. AMS 16,310-313. (1965).

13.- BARR,M. Cohomology and obstructions. Commutative Algebras. Lecture Notes in Math. 80. Springer. (1969).

14.- BARR,M. Exact categories and categories of sheaves. Lecture Notes in Math. 236. Springer. (1971).

15.- BARR,M. coequalizers and free triples. Math. Zeit. 116, 307-322. (1970) .

16.- BARR,M. What is the center ?. Lecture Notes in Math. 106. Springer, Berlin. (1969).

17.- BARR,M. Composite cotriples and derived functors. Lecture Notes in Math. 80. Springer. (1969).

18.- BARR,M. BECK,J. Homology and standard constructions. Lecture Notes in Math. 80. Springer. (1969).

19.- BARR,M. BECK,J. Aciclic models and Triples. Proc. Conference in categorical Algebra. La Jolla. Springer. (1966).

20.- BARR,M. RINEHART,G. Cohomology as the derived functor of derivations. Trans. AMS 122,416-426. (1966).

21.- BECK,J. Triples, algebras and cohomology. Dissertation. Columbia. (1964-67).

22.- BRYANT,RM. Some infinitely based varieties of groups. J. Austral. Math. Soc. 16, 29-32. (1973).

23.- BUCHSBAUM,D.A. Satellites and Universal functors. Ann. of Math. 71 (1960).

24.- BUESO,J.L. Invariantes de Baer en una categoria de Kurosh. Tesis . Universidad de Granada. (1980).

25.- BURGIN,M.S. Central extensions in γ-categories. Soviet. M. Dokl. (1972).

26.- CARTAN,H. Sur la cohomologie des espaces oú opére un groupe. C. R. Acad. Sci. Paris. 226. (1948).

27.- CARTAN,H. Sur les groupes d'Eilenberg-MacLane H(π,n): I. Méthode des constructions, II. Proc. NAS USA 40. (1954).

28.- CARTAN ,H. EILENBERG,S. Homological Algebra. Priceton. (1956).

29.- CEGARRA,A.M. Homologia y Triples. Alxebra 24. Universidad de Santiago de Compostela. (1978).

30.- CEGARRA,A.M. R-GRANDJEAN,A. Extensions and cohomology in categories of interes. Por publicar. (1980).

31.- CHEVALLEY,C. EILENBERG,S. Cohomology theoryof Lie groups and Lie algebras. Trans. AMS 63. (1948).

32.- CONRAD,B. Central kernels and the homology of groups. J. Pure and Applied Algebra. 12, 65-77. (1978).

33.- COHN,P.M. Universal algebra. Harper and Row. (1965).

34.- DEDECKER,P. Cohomologie non abelianne . Seminaire de Topologie et Geometrie Differentielle. Fac Sci. de Lille. (1964).

35.-DIXMIER,J. Homologie des anneux de Lie. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 74,25-83. (1957).

36.- DOLD,A. PUPPE,D. Homologie nicht-additiver funktorem . Anwendungen Ann. Inst. Fourier 11, 201-312. (1961).

37.- DUSKIN,J. Simplicial methods and the interpretation of triple cohomology. Mem. AMS . (1975).

38.- DUSKIN,J. Non-abelian Triple cohomology. Extensions and obstructions Not. AMS 19. (1972).

39.- DUSKIN,J. Higher dimensional torsors and the cohomology of topoi: The Abelian Theory. Por publicar. (1977).

40.- ECKMAN,B. HILTON,P. Homotopy groups of maps and exacts sequences Comment. Math. Helv. 34, 271-304. (1960).

41.- ECKMAN,B. HILTON,P. Group-Like structures in general categories,I. Math. Ann. 145, 227-255. (1962).

42.- ECKMAN,B. HILTON,P. STAMMBACH, U. On the homology theory of central group extension. I,II. Comment. Math. Helv. 47,102-122,171-178. (1972).

43.- ECKMAN,B. HILTON,P. On Central group extensions and homology. Comment. Math. Helv. 46, 345-355. (1971).

44.- ECKMAN,B. STAMMBACH,U. Homologie et differentielles. Suites exactes C.R. Acad. Sci. Paris 265,11-13. (1967).

45.- ECKMAN,B. STAMMBACH,U. On exact sequences in the homology of groups and algebras. Ill. J. Math. 14,205-215. (1970).

46.- ECKMAN,B. STAMMBACH,U. Homologie et differentielles. Basses dimensions ; cas speciaux. C.R. Acad. Sci. Paris 265,46-48. (1967).

47.- EILENBERG,S. Extensions of general Algebras. Ann. Soc. Polon. Math 21. (1948).

48.- EILENBERG,S. MACLANE,S. Group extensions and Homology. Ann. of Math. 43,757-831. (1942).

49.- EILENBERG,S. MACLANE,S. Cohomology theory of Abelian groups and homotopy theory, I. Proc. NAS USA 36,443-447. (1950).

50.- EILENBERG,S. MACLANE,S. Cohomology theory in abstract groups, I,II. Ann. Math. 48,51-78,326-341. (1947).

51.- EILENBERG,S. MACLANE,S. Homology theories for multiplicative Systems. Trans. AMS 71, 294-330. (1951).

52.- EILENBERG,S. MACLANE,S. Aciclic Models. Am. J. Math. 189-199. (1953).

53.- EILENBERG,S. MACLANE,S. On the groups H(Π,n),I. Ann. of Math. 58,55-106. (1953).

54.- EILENBERG,S. MACLANE,S. On the groups $H(\pi,n)$,II. Methods of computation. Ann. of Math. 60 , 49-139. (1954).

55.- EILENBERG,S. MACLANE,S. On the groups $H(\Pi,n)$,III. Operations and obstructions. Ann. of Math. 60, 513-557. (1954).

56.- EILENBERG,S. MACLANE,S. Algebraic cohomology and Loops. Duke Math. J. 14, 435-463. (1947).

57.- EILENBERG;S. MOORE,J.C. Fundations of relative homological algebra Mem. AMS 55. (1965).

58.- EILENBERG,S. MOORE,J.C. Adjoint functors and Triples. Ill. J. Math 9. (1965).

59.- FOX,R.m. Free differential calculus,I. Ann. Math. 57,547-560. (1953).

60.- FURTADO-COELHO,J. Homology and generalized Baer invariants. J. of Algebra 40, 596-609. (1976).

61.- FREYD,P. Abelian categories. Harper and Row. New York. (1964).

62.- FROLICH,A. Non Abelian Homological Algebra.I. Derived Functors and Satellites. Proc. London Math. Soc. (3) 11,239-275. (1961).

63.- FROLICH,A. Non Abelian Homological Algebra.II. Varieties. Proc. London Math. SOc. (3)12,1-28. (1961).

64.- GANEA,T. Homologie et extensions centrales de groupes. C.R. Acad. Sc. Paris 266, 556-558. (1968).

65.- GANEA, T. Baer-invariants of algebras. Trans. AMS 109,221-244. (1963).

66.- GABRIEL,P. Des categories abeliannes. Bull. Soc. Math. France 90, 323-448. (1962).

67.- GERSTENHABER,M. A uniform cohomology theory for algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 51, 626-629. (1964).

68.- GERSTENHABER,M. On the deformation of rings and algebras,II. Ann. Math. 84, 1-19. (1966).

69.- GERSTENHABER,M. The third cohomology group of a ring and the commutative cohomology theory. Bull. AMS 73, 950-954. (1967).

70.- GERSTENHABER,M. A categorical setting for the Baer extension theory Proc. of Symp. in Pure Math. XVII. AMS. (1970).

71.- GIRAUD,J. Cohomologie non abelianne. Die Grund lehren der mathematischen Wisseaschaftenin Einzeldarstell ungen,Band 179. Springer-Verlag. (1971).

72.- GOLDBERG,S.I. Extensions of Lie algebras and the third cohomology group. Canadian J. Math. 5. (1953).

73.- GRATZER,G. Universal algebra. Von Nostrand.(1968).

74.- GROTHENDIECK,A. Sur quelques points d'algebre homologique. Tohoku Math. J. 9, 119-221. (1957).

75.- GRUENBERG,K.W. Cohomological topics in group theory. Lecture Notes in Math. 143. Springer. (1970).

76.- GUT,A. A ten-term exact sequence in the homology of a group extension J. Pure and Applied Algebra 8,243-260. (1976).

77.- GUT,A. STAMMBACH,U. On exact sequences in homology associated with a group extension. J. Pure and Applied Algebra 7, 15-34. (1976).

78.- HALL,P. Verbal and marginal subgroups. J. Reine Angew Math. 182, 156-157 (1940).

79.- HARRIS,B. Cohomology of Lie Triple Systems and Lie algebras with involution. Trans. AMS 98, 148-162. (1961).

80.- HARRISON,D.K. Commutative Algebras and Cohomology. Trans. AMS 104,191-204. (1962).

81.- HARRISON,D.K. Infinite Abelian groups and homological methods.Ann.of Math. 69, 366-391. (1959); 71,197.(1960).

82.- HELLER,A. Homological algebra in Abelian Categories.Ann. of Math. 68, 484-525. (1958).

83.- HERRLICH,H. STRECKER,G. Category theory. Allyn and Bacon. (1973).

84.- HIGGINS,B.Groups with multiple operators. Proc. London Math. Soc. (3) 6. (1956).

85.- HILL,R.O. A natural algebraic interpretation of the group cohomology group $H^n(Q,A)$, n>3. Not. AMS 25, A-351. (1978).

86.- HILTON,P.J. Lectures in homological Algebra. AMS. (1970).

87.- HILTON,P,J, STAMMBACH,U. A course in homological algebra. Graduate texts in Math. 4. Springer. (1971).

88.- HOCHSCHILD,G. On the cohomology groups of an Associative Algebras. Duke M. J. 14, 568- 579. (1946).

89.- HOCHSCHILD,G. Lie Algebra kernels and cohomology. Am. J. Math. 76 698-716. (1954).

90.- HOCHSCHILD,G. Relative Homological Algebra. Trans. AMS 82, 246-269. (1956).

91.- HOCHSCHILD,G. Cohomology of restricted Lie algebras. Am. J. Math. 76,555-580. (1954).

92.- HOCHSCHILD,G. On the cohomology theory for associative algebras. Ann. of Math. (2) 47. (1946).

93.- HOCSCHILD,G. SERRE,J.P. Cohomology of group extensions. Trans. AMS 74, 110-134. (1953).

94.- HOLT,D.F. Cohomology groups $H^n(G,M)$. J. of Algebra 60, 307-320. (1979).

95.- HOPF,H. Fundamental gruppe und zweite Bettische Gruppe. Comment. Math. Helv. 14, 257-309. (1942).

96.- HU,S. Introduction to homological algebra. San Francisco Holden-Day. (1968).

97.- HUEBSCHMANN , J. . N-fold extension of group. Colloquium Lectures at Louvain, May 1977.

98.- HUEBSCHMANN,J. Crossed n-fold extension. Not. AMS 25, A-6.(1978).

99.- HUEBSCHMANN,J. Extensions de groupes et paires croisés. C.R. Acad Sc. Paris 285. Série A. 993-995.

100.- IWAI ,A. Simplicial cohomology and n-term extensions of algebras. J. Math. Kyoto Univ. 9, 449-470. (1969).

101.- JACOBSON,N. Structure of rings. AMS. Providence. 1956.

102.- JACOBSON,N. Lie Algebras. New York. John-Wiley & Sons. 1962.

103.- JOHNSON,K. Varietal generalizations of Schurs multipliers, stem extensions and stem covers. J. Reine Angew. Math. 270, 169-183. (1974).

104.- KAN,D.M. Adjoint Functors. Trans. AMS 87,294-329. (1958).

105.- KAPLANSKY,I. On the Dimension of Modules and Algebras. Nagoya Math. J. 13, 85-88. (1958).

106.- KEUNE,F.J. Homotopical algebra and algebraic K-theory. Tesis. Univ. of Amsterdam. (1972).

107.- KNOPFMACHER,J. Extensions in varieties of groups and algebras. Acta Math. 115, 17-50. (1966).

108.- KNOPFMACHER,J. Universal envelopes for non-associative algebras. Quart. J. Math. Oxford 13, 264-282. (1962).

109.- KNOPFMACHER,J. Homology and presentations of algebras. Proc. AMS 17, 1424-1428. (1966).

110.- KOSZUL,J. Homologie et cohomologie des algebres de Lie. Bull. soc. Math. France. 78, 65-127. (1950).

111.- LANG,S. Rapport sur la cohomologie des groupes. Benjamin. (1966).

112.- LAWVERE, F.W. Functorial semanties of algebraic theories. Proc. NAS USA 50,869-872. (1963).

113.- LEEDHAM-GREEN,C. Homology in varieties of groups. I,II,III. Trans. AMS 162,1-34. (1971).

114.- LEEDHAM-GREEN,C.HURLEY,T.C. Homology in varieties of groupes. IV. Trans. AMS 170, 293-303. (1972).

115.- LEEDHAM-GREEN,C. McKAY,S. Baer-invariants, isologism, varietal laws and homology. Acta Math. 137. (1976).

116.- LINTON,F.E.J. Some aspects of equational categories. COCA. (La Jolla) Springer. (1966).

117.- LODAY,J.-L. Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs. J. Algebra 54. (1978).

118.- LUE,A. S.-T. Baer-invariants and extensions relative to a variety. Proc. Cambridge Philos. Soc. 63, 569-578. (1967).

119.- LUE,A. S.-T. Cohomology of algebras relative to a variety. Math. Z. 121, 220-232. (1971).

120.- LUE,A. S.-T. Connected Algebras and universal covering. Comment. Math. Helv. 48,70-375. (1973).

121.- LYNDON,R.C. The cohomology theory of groups extensions. Harvard University. Tesis. 1946.

122.- MACLANE,S. Homologie des Anneaux et des Modules. Colloque de topologie álgèbrique, Lovain. 1956.

123.- MACLANE,S. Extensions and obstructions for rings. Ill. J. Math. 2, 316-345. (1948).

124.- MACLANE,S. Categorical Algebra. Bull. AMS 71, 40-106. (1965).

125.- MACLANE,S. Categories for the working mathematicien. Springer. (1971).

126.- MACLANE,S. Homology. Springer. (1973).

127.- MACLANE,S. WHITEHEAD,J.H.C. On 3-type of a complex. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 30, 41-48. (1956).

128.- MANES,E. Algebraic Theories. Springer. (1976).

129.- MAY,P. Simplicial objects in algebraic topology. Princeton: Von Nostrand. 1967.

130.- MITCHELL,B. Theory of categories. Academic Press. 1965.

131.- MOORE,J.C. Seminar on algebraic homotopy theory. Priceton. (1956).

132.- NEUMAN,H. Varieties of groups. Springer. (1967).

133.- NOMURA,Y. The Whithey Join and its Dual. Osaka J. Math. 7, 353-373. (1970).

134.- NORTHCOTT,D.G. An introduction to homological Algebra. Cambridge Univ. Press. London. (1962).

135.- ORZECH,G. Obstruction theory in algebraic categories.I,II. J. Pure Appl. Algebra 2,287-340. (1972).

136.- PAREGIS,B. Kategorien und Funktoren. Stuttgart: Teubner. (1969).

137.- PAREGIS,B. Cohomology of groups in arbitrary categories. Proc, AMS 15. (1964).

138.- QUILLEN,D. Homotopical Algebra. Lecture Notes in Math. 43. Heidelberg : Springer. (1967).

139.- QUILLEN,D. On the homology of commutative rings. Proc. Symp. Pure Math. 17, 65-87. (1970).

140.- RATCLIFFE,J. Crosed modules. Por publicar. (1979).

141.- R-GRANDJEAN,A. Homologia en categorias exactas. Alxebra 4. Univ. de Santiago de Compostela. (1970).

142.- R-GRANDJEAN,A. CEGARRA,A.M. Cohomologia respecto a una variedad de una categoria. Pendiente de publicacion.

143.- RINEHART,G.S. Satellites and cohomology. J. Algebra 12, 295-329. (1969).

144.- ROSE,I.-H. On the cohomology theory for Associative Algebras. Trans AMS 82, 85-99. (1956).

145.- SEGAL,G. Cohomology of topological groups. Symp. Math. Vol. IV. (INDAM, Rome. 1968/69), 377-387. Acad. Press. London. (1970).

146.- SCHUBERT,H. Kategorien,I,II. Springer. (1970).

147.-SHUKLA,U. Cohomologie des Algébres Associatives. Ann. Sci. École Norm. Sup. 78,163-209. (1961).

148.- SHUKLA,U. An interpretation of $\mathrm{Ext}^2_{\Lambda^e}(\Lambda,M)$. Math. Z. 92. (1966).

149.- SHUKLA,U. A relative cohomology for associative algebras. Proc. AMS 15. (1964).

150.- SHUKLA,U. A cohomology for Lie Algebras. J. Math. Soc. Japan. 18 (1966).

151.- SMITH,J.D.H. Malcev Varieties. Lecture Notes in Math. 554. Springer Verlag, New York. (1976).

152.- STAMMBACH,U. Homological methods in group. Varieties. Comment. Math. Helv. 45, 287-298. (1970).

153.- STAMMBACH,U. Varietal homology and parafree groups. Math. Z. 128 153-167. (1972).

154.- STAMMBACH,U. Homology in group theory. Lecture Notes in Math. 359. (1973).

155.- TAKASU,S. On the change of rings in the homological algebra. J. Math. Soc. Japan. 9. (1957).

156.- TARAZONA,D. Homologia respecto a una variedad de Algebras de Lie. Alxebra 23. Universidad de Santiago. (1978).

157.- TAYLOR,R.L. Compound groups extensions I,II,III. Trans. AMS 75 (1953).

158.- TIERNEY,M. VOGEL,W. Simplicial resolutions and derived functors. Math. Z. 111, 1-14. (1969).

159.- ULMER,F. Properties of dense and relative adjoint functors. J. Algebra 8, 77-95. (1968).

160.- ULMER,F. On Cotriple and André (Co)homology. Their relationship with clasical homological algebra. Lecture Notes in Math. 80. Springer. 1969

161.- ULMER,F. Kan extensions , cotriples and André (co)homology. Lecture Notes in Math. 92. Springer. (1969).

162.- WHITEHEAD,J.H.C. A certain exact sequence. Ann. of Math. 52, 51-110. (1950).

163.- WU,Y.-C. $H^3(G,A)$ and obstruction of group extension. J. Pure Appl. Algebra 12, 93-100. (1978).

164.- WU,Y.-C. Some Applications of group obstructions. Por publicar.. (1979).

165.- YONEDA,N. On the cohomology theory of modules. J. Fac. Sci. Tokyo Sec. I 7, 193-227. (1954).

166.- YONEDA,N. On Ext and exact sequences. J. Fac. Sci. Tokyo. Sec. 8 507-526. (1960).

167.- FRÖHLICH,A. Baer-invariants of algebras. Trans. AMS 109, 221-244. (1963) .

155.- TAKASU, S. On the change of rings in the homological algebra. J. Math. Soc. Japan 9. (1957).

156.- TARAZONA, C. Homología relativa a una variedad de Álgebras de Lie. Alxebra 25. Universidad de Santiago. (1978).

157.- TAYLOR, R.L. Compound group extensions I,II,III. Trans. AMS 75 (1953).

158.- TIERNEY, M., VOGEL, W. Simplicial resolutions and derived functors. Math. Z. 111, 1-14. (1969).

159.- ULMER, F. Properties of dense and relative adjoint functors. J. Algebra 8, 77-95. (1968).

160.- ULMER, F. On cotriple and André (co)homology. Their relationship with classical homological algebra. Lecture Notes in Math. 80. Springer. 1969

161.- ULMER, F. Kan extensions, cotriples and André (co)homology. Lecture Notes in Math. 92. Springer. (1969).

162.- WHITEHEAD, J.H.C. A certain exact sequence. Ann. of Math. 52. 51-110. (1950)

163.- WU, Y.-C. $H^3(G,A)$ and obstruction of group extension. J. Pure Appl. Algebra 12, 93-100. (1978).

164.- WU, Y.-C. Some Applications of group obstructions. Por publicar. (1979).

165.- YONEDA, N. On the cohomology theory of modules. J. Fac. Sci. Tokyo Sec. I 7, 193-227. (1954).

166.- YONEDA, N. On Ext and exact sequences. J. Fac. Sci. Tokyo. Sec. 8 507-526. (1960).

167.- FROHLICH, A. Baer-invariants of algebras. Trans. AMS 109. 221-244. (1963).