Universidad de Granada

Facultad de Ciencias de la Educación

LA DIVISIÓN TRAS *ENUNCIADOS PROBLEMÁTICOS*: ERRORES Y DIFICULTADES

Grado en Maestro en Educación Primaria

Profundización en el currículo básico

Juan Jesús Fernández Sánchez

Trabajo fin de grado

Junio 2014

La división tras *enunciados problemáticos*: errores y dificultades

Juan Jesús Fernández Sánchez

Universidad de Granada

Resumen:

En el presente trabajo realizamos una revisión a nivel teórico de los aspectos que influyen en el aprendizaje de la división como una de las operaciones básicas así como de las dificultades y errores que implica dicho aprendizaje.

Tal como argumenta Jonassen (2004), aprender a resolver problemas es la destreza más importante que los estudiantes han de aprender, y por ello el objetivo de este trabajo se orienta, primero, a descubrir las dificultades con las que se encuentran los alumnos en el intento de dar solución a un contexto problemático para poder, después, encontrar los errores que subyacen tras este peculiar algoritmo de división.

Para ello se realizó una exploración en base a la metodología de investigación educativa, obteniendo información de diversos alumnos pertenecientes al cuarto curso de Educación Primaria que permitieron la detección y el análisis de dificultades y errores.

Lo anterior favoreció para la formulación de conclusiones, las cuales pretenden mostrar que las dificultades halladas trabajando con *enunciados problemáticos* superan a los errores detectados en el desarrollo del algoritmo de la división. Así mismo las dificultades no son puramente matemáticas, sino que en este campo la lingüística adquiere gran importancia junto con la madurez del alumno y las experiencias vividas por este.

Palabras clave: sentido numérico, resolución de problemas, algoritmo de la división, dificultades, errores.

ÍNDICE

1. Introducción al concepto y su problemática

De entre todas las operaciones básicas hay una que resalta sobre todas por su complejidad, tanto en el concepto como a la hora de realizar su algoritmo. Este es el caso de la división.

La división es una operación matemática inversa a la multiplicación cuyo fin consiste en conseguir un reparto equitativo. Para ello se parte de una cantidad inicial conocida como dividendo que se distribuye de forma equilibrada entre otro de connotación más abstracta conocido como divisor, que da, como resultado o cociente, el valor de dicho reparto.

Como argumentan Castro, Rico, y Castro (1987), la complejidad que supone la adquisición del concepto de la división viene determinado por el doble papel que puede representar el divisor – como cantidad fija que se reparte hasta formar un determinado número de partes (división cuotitiva), o como número de partes en que se divide una cantidad inicial (división partitiva) –, siendo un valor abstracto que los aprendices han de interpretar. Además la mecanización de su algoritmo supone una dificultad añadida, pues aúna las demás operaciones básicas y que, a diferencia de estas, se ha de resolver de izquierda a derecha. Podemos hablar, por tanto, de un semi-algoritmo, ya que se resuelve de forma diferente e implica un proceso que obliga a realizar tanteos, estimaciones y a rehacer alguna de sus partes si la estimación no resulta correcta, lo que exige tener que conocer esta serie de estrategias.

Onrubia, Rochera, y Barberá (1990), distinguen dos tipos de conocimiento matemático que son necesarios para conseguir un correcto aprendizaje: declarativo (conocer qué o el conocimiento de los *hechos* y *conceptos* matemáticos) y procedimental (conocer cómo o el conocimiento de los algoritmos y cuándo aplicarlos). Según estos mismos autores el conocimiento declarativo no es una condición suficiente para que se dé un conocimiento procedimental pero es necesario para que se pueda poner en funcionamiento. Ambos tipos de conocimiento, por tanto, son indispensables y deben ser enseñados de manera explícita.

Es cierto que es necesario enseñarles tanto hechos, conceptos como el procedimiento para poder llevar a cabo la división: algoritmo, estrategias, etc., pero también se debe enseñar a usar el *factor condicional*, es decir, saber cómo y cuándo actuar para poder dar solución a un determinado enunciado de problema matemático. "A no ser que los alumnos sepan resolver problemas, los hechos, conceptos y procedimientos que conozcan son de poco uso" (NTCM, 2003, p.186).

En este sentido el error que cometen muchos de los docentes es centrar su atención en un enfoque meramente conductual, por el cual se dice que un alumno ha aprendido a dividir si es capaz de realizar correctamente las divisiones. Sin embargo, se deja de lado el hecho de que saber dividir no implica necesariamente saber resolver el algoritmo. Esto es lo que defiende el enfoque cognitivo, por el cual un alumno puede haber aprendido el concepto de división sin que necesariamente realice correctamente las divisiones (Flores, 2001).

Se ha de buscar, por tanto, una metodología que combine ambos enfoques y conseguir la competencia matemática en resolución de problemas; objetivo al cual se dirigen todos los aprendizajes de las matemáticas tal como reflejan los siguientes documentos:

> "Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje matemático, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática" (Real Decreto 1513/2006, p. 43096).

> La resolución de problemas debe entenderse como la esencia fundamental del pensamiento y el saber matemático, y en ese sentido ha de impregnar e inspirar todos los conocimientos que se vayan construyendo en esta etapa educativa, considerándose como eje vertebrador de todo el aprendizaje matemático y orientándose hacia la reflexión, el análisis, la concienciación y la actitud crítica ante la realidad que nos rodea en la vida cotidiana (Orden de 10 de agosto de 2007, p. 19).

> Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo. (…) La resolución de problemas constituye una parte integral de todo el aprendizaje de las matemáticas, y por eso no debería ser una parte aislada del programa de esta disciplina (NTCM, 2003, p. 55).

“Se entiende por problemas una situación en la que se quiere conseguir alcanzar una meta y hay algún obstáculo para alcanzarla” (Castro et al., 1987, p. 59). A partir de esta definición podemos interpretar que el aprendizaje de las matemáticas constituye un proceso continuo en términos de resolución de problemas, razón por la que debe ser trabajada de modo simultaneo al aprendizaje de los hechos.

Castro, Rico, y Castro (1995), son de la opinión de que la habilidad para resolver problemas no puede enseñarse, pero puede desarrollarse resolviendo problemas. En este aspecto la heurística y la propuesta de Polya (1945) resulta ser una opción muy acertada para ir consiguiendo la competencia deseada. Sin embargo Cerdán (2007) considera que esto no es suficiente pues, si bien es cierto que las estrategias heurísticas son necesarias, también lo es el análisis estructural de los problemas y de métodos que puedan ser usados en la resolución. Además Fernández (1997) añade que los contextos de los problemas deben ser lo más reales y cercanos al entorno escolar como sea posible para que el estudiante se sienta comprometido con ellos de alguna forma. Algo que corrobora y amplifica el proyecto PISA 2000, argumentando que los alumnos se enfrentan regularmente a situaciones problemáticas cuando hacen planes, presupuestan y compran, viajan, se alimentan, cocinan, etc., enfrentándose a problemas cotidianos de la más variada naturaleza.

El problema de fondo es que la competencia en resolución de problemas no es trabajada lo suficiente en las aulas y esto causa un importante inconveniente en los escolares, los cuales conocen, como se ha dicho anteriormente, los hechos, conceptos y los procedimientos pero no el factor condicional.

Sin embargo conocer ese factor condicional no asegura el éxito del proceso pues también se necesita, recapitulando el trabajo de Onrubia et al. (1990), el aprendizaje del procedimiento, razón por la que el discente ha de conocer el algoritmo de la división.

Para Gómez (1988) un algoritmo es “una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de datos, para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedad) en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos” (p. 105). Las propiedades que este procedimiento ha de tener son, según Castro et al. (1987), las siguientes:

a. Nitidez. Propiedad que permite la realización del algoritmo de modo mecánico.
b. Eficacia. Conducir a un resultado en el menor número de pasos posible.
c. Universalidad. Cada algoritmo es aplicable a todos los problemas de su clase.

El algoritmo de la división, a diferencia del resto cuyo procedimiento está basado en el valor posicional de las cifras, requiere de una colocación diferente de estas; se colocan unas junto a otras y separadas por una caja. Además se opera de izquierda a derecha, excepto en las operaciones intermedias en donde se sigue el esquema de derecha a izquierda propio de las demás operaciones. Pero el algoritmo de la división no solo difiere del resto en la colocación y el sentido de la realización de las operaciones, sino también en el resultado, dado que la división tiene dos: cociente y resto (Roa, 2001).

Para la realización de este procedimiento se necesita conocer obligatoriamente la estructura del sistema de numeración decimal, sumar, restar y multiplicar. El rápido uso de estas operaciones junto con el dominio de las tablas de multiplicar facilita enormemente la realización del proceso pues, si no es así, los errores derivados en una de las operaciones básicas se trasladan a la división.

Por tanto, debido a su complejidad y necesidad de las demás operaciones básicas, la enseñanza de la división se lleva a cabo en último lugar, necesitando una reorganización de los conceptos ya aprendidos con la multiplicación, pues se trata de la operación inversa (Castro, 2001).

En cualquier caso, el aprendizaje del algoritmo de la división es el más difícil de todos, encontrándose una serie de dificultades y errores tanto para afrontar los *enunciados problemáticos*, como para ejecutar el algoritmo.

Socas (2007) señala que “las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores” (p.31). Por su parte, Matz (1980), define los errores como “intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación” (p.94).

A continuación se exponen las dificultades y los errores argumentados por diversos autores:

Dificultades propuestas por Gómez (1991) (pp. 125-127)	Dificultades propuestas por Cid, Godino y Batanero (2004) (pp. 210-212)
1) La «inversión» de la multiplicación. 2) La propiedad distributiva y el sistema decimal. 3) El tamaño del dividendo y del divisor. 4) Tamaño relativo de la primera cifra del dividendo y el divisor. 5) La presencia de ceros. 6) La división exacta e inexacta.	1) Vocabulario y conceptos. 2) Nivel de abstracción. 3) Dificultades en operaciones. 4) Solución de problemas.

Errores propuestos por Roa (2001) (p.141)	Errores propuestos por Socas (2007)
1) Dejar restos intermedios iguales o mayores que el divisor y omitir ceros en el cociente. 2) Restas de números grandes, normalmente, de dos cifras y que debe realizar de forma mental. 3) Los errores y dificultades que el alumno tenga en la resta y el producto se van a reproducir en la división con mayor fuerza y, asimismo, la lentitud en el automatismo de las citadas operaciones va a constituir, con mucha frecuencia, una fuente de error en la división. 4) Los errores en la tabla de multiplicar dan lugar a errores de todo tipo en el algoritmo de la división.	1) Los que tienen su origen en un obstáculo. 2) Los que tienen su origen en una ausencia de sentido. a. Errores de álgebra que tienen su origen en la Aritmética. b. Errores de procedimiento. c. Errores del álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. 3) Los que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

Queda reflejado, por tanto, que la división es la más complicada de las operaciones, cuya enseñanza ha de cuidarse minuciosamente para que los escolares asuman de forma efectiva su concepto y procedimiento. Así mismo, el trabajar en resolución de problemas no ha de ser una opción, sino parte fundamental en el proceso de enseñanza que permita a los jóvenes ser capaces de aplicar las estrategias en el desarrollo de la división y hacer frente a estos problemas y contextos mediante su algoritmo pues, tal como refleja el NTCM (2003), al resolver problemas matemáticos los estudiantes adquieren formas de pensar, hábitos de persistencia y curiosidad y confianza al enfrentarse a situaciones nuevas que les servirán fuera del aula.

Esta tarea no siempre resulta satisfactoria, pues los discentes tienen multitud de dificultades a la hora de lidiar con un problema y cometen excesivos errores con el algoritmo.

Es por ello que, teniendo en consideración lo expuesto anteriormente, el objetivo de este trabajo sea descubrir cuáles son las dificultades que presentan los alumnos y cuáles son los errores que comenten a la hora de resolver problemas de división.

2. Método

Para ello se ha llevado a cabo una investigación sobre un grupo de alumnos del colegio granadino *Inmaculada Niña* (perteneciente a la congregación *Divina Infantita)* ubicado al este de la localidad. Dicho centro es un colegio religioso-concertado que se levanta en una zona que está sufriendo un elevado crecimiento demográfico en los últimos años y donde se asientan familias de clase media bien estructuradas cuyos progenitores tienen un buen nivel de formación.

A. Participantes.

La prueba ha sido realizada por un grupo de alumnos pertenecientes al cuarto curso de Educación Primaria con edades comprendidas entre los nueve y diez años. El aula se compone de 26 alumnos, sin embargo la muestra está realizada sobre 23 alumnos ya que tres de ellos faltaron a clase ese día.

Se trata de un grupo de alumnos compuesto por catorce niñas y doce niños con una calificación media en matemáticas de siete puntos sobre diez. Es preciso decir que el área de matemáticas presenta peores calificaciones que el resto de asignaturas, siendo las niñas las que obtienen mejores puntuaciones.

B. Instrumento de valoración.

El instrumento utilizado para llevar a cabo esta investigación ha sido una prueba escrita entregada a los alumnos para que se resolviera de forma individual a modo de examen. Dicha prueba, impresa a doble cara, consistía en seis enunciados de problemas (tres en cada una de las caras) siendo el primer ejercicio igual al cuarto, el segundo igual al quinto y el tercero igual al sexto en lo que a proceso de resolución se refiere. A pesar de que esta combinación de ejercicios se resuelven de forma idéntica, difieren en su redacción, pues el objetivo de hacer esto no es otro que comprobar si efectivamente la forma de enunciar los problemas, su extensión, posición de la incógnita e intercambio de los datos dentro del enunciado suponen una dificultad a la hora de su interpretación y resolución.

A continuación se presentan estos enunciados:

Cara A	**Cara B**
1) Beatriz compraba 4 tomos por semana para conseguir una colección completa de libros que tiene 24 tomos. Todos los tomos le costaron 192€ pero, ¿cuánto dinero se gastaba cada semana? ¿Cuántas semanas tardó en hacerse con la colección completa? ¿Cuánto le costó cada tomo?	4. Beatriz gastó 192 € en una enciclopedia muy completa que consta de 24 tomos. ¿Cuánto cuesta cada tomo? Ella compraba 4 tomos por semana, ¿cuánto gastaba cada semana? ¿Durante cuántas semanas estuvo comprándolos?

2) Luis quiere partir su huerto en partes iguales para poder plantar en cada parte pepinos, tomates, lechugas, ajos y patatas. Si su huerto tiene una longitud de 150 metros, ¿cuánto medirá cada una de esas partes?

5. ¿Qué tamaño tienen que tener las parcelas de Luis si su huerto tiene 150 metros y quiere plantar la misma cantidad de pepinos, tomates, lechugas, ajos y patatas?

3) Jessica ha invitado a 14 amigos a su cumpleaños y quiere compartir sus 156 chocolatinas con ellos, ¿cuántas chocolatinas les podrá dar? ¿Podrá llevarse ella algunas para comérselas en el colegio?

6. Jessica ha comprado una bolsa de chocolatinas con 156 unidades para su cumpleaños. Como ha invitado a 14 amigos, ¿cuántas chocolatinas le dará a cada amigo? Si le sobra alguna quiere llevárselas al colegio y comérselas en el recreo. ¿Cuántas se podrá llevar?

Se puede observar que los problemas de la cara B ofrecen los datos en el orden en el que el alumno los van a necesitar, pudiendo hacer una *integración directa* de los mismos. Además, en el caso concreto del problema número 4, el orden de las preguntas está diseñado para que el alumno siga una secuencia ordenada a la hora de realizar las operaciones, es decir, respondiendo positivamente a la primera cuestión el alumno hallará el dato necesario para dar respuesta a la cuestión siguiente y así sucesivamente.

C. Procedimiento.

La prueba se realizó en la segunda hora del horario escolar de estos alumnos correspondiente a la clase de matemáticas. La prueba duró una hora.

Antes de repartir el documento se les comunicó cual era el objetivo de la misma: comprobar en qué fallaban para poder dar solución a esos errores. Dado que muchos de los alumnos preguntaron si la prueba contaba para su calificación en la asignatura, se les trató de tranquilizar diciéndoles que todo aquel que intentara solucionarlo recibiría un premio: un dibujo. Sabiendo que la prueba carecía de calificación los alumnos se tranquilizaron y recibieron de buena gana el documento.

Una vez repartido se procedió a leer en voz alta y con calma cada uno de los enunciados. Al llegar al segundo problema los alumnos manifestaron que ese problema no se podía hacer debido a que solo había un dato: 150m.

Se siguió leyendo los problemas y cuando se dio la vuelta al documento (cara B) los alumnos comenzaron a decir en voz alta que se trataban de los mismos ejercicios pero escritos de forma diferente. A este comentario se les dijo: «puede que sí, o puede que no».

Una vez leído todo el documento se les pidió que comenzaran a resolverlo sin tener ninguna prisa y que analizaran los problemas tranquilamente. Sin embargo los alumnos no parecían entender ninguno de los enunciados. Así que, tras dejar los primeros cinco minutos y ver que ninguno de los alumnos había comenzado a resolver la prueba, se volvió a *leer* los enunciados pero esta vez con palabras propias del docente, otorgando una serie de pautas y pistas para que pudieran comprenderlos. (Incluimos dicha conversación en Anexo 1). Aun así, algunos de los alumnos se agobiaron y no dejaban de repetir que no sabían hacerlo, por lo que desistieron en realizar la actividad.

D. *Tipo de análisis.*

Para realizar el estudio se han propuesto nuevas categorías de análisis necesarias para clasificar los obstáculos encontrados por los discentes. Son las siguientes:

1. *Dificultad en el proceso de traducción del enunciado, (D1).*

En situaciones de división la terminología usada responde a sinónimos como *repartir*, *agrupar*, *disminuir*, *decrecer*, *a cada uno*, *para cada uno*, *distribuir*, etc. La dificultad surge debido a que estos vocablos tienen una connotación que no ha sido trabajada por los alumnos anteriormente. Este hecho tiene una importancia enorme pues, para resolver un problema, es necesaria la construcción de una representación interna del enunciado y si no se comprende, no se puede saber qué operación se ha de realizar. Además esto se complica aún más dependiendo de la estructura semántica usada, la cantidad de información, la posición de la pregunta y si el problema exige una o varias etapas para su resolución.

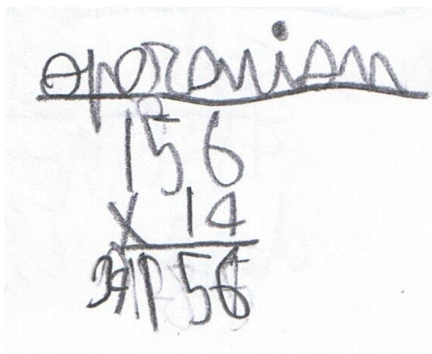


Imagen de P3

2. *Dificultad en el proceso de integración, (D2).*

Consiste en la integración directa o literal de los datos de un problema en el orden en el que aparecen. Por ejemplo: si una malla de naranjas de 5kg cuesta 3 euros, ¿cuánto costará un kilo? En este caso los alumnos tienden a realizar 5: 3 = 1,66 €. De igual forma es habitual que dividan el dato de mayor valor entre el dato de menor valor que encuentran en el enunciado.

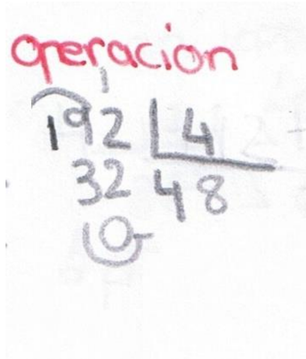


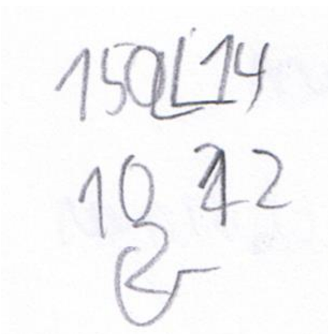
Imagen de P1

3. *Dificultad en la operación, (D3).*

Cid, Godino y Batanero (2004) señalan que una de las primeras dificultades atribuidas a la división, que suele pasar desapercibida, está determinada por el hecho de que una división se compone por la combinación enlazada y escalonada de más divisiones.

Así por ejemplo, una división como 180:15 se compone de otras divisiones parciales: 18:15 y 30:15. A este proceso, además, hay que añadir la fase de tanteo y la aplicación de manera coordinada de las operaciones de suma, resta y multiplicación que quedan ocultas tras el algoritmo habitual al suprimir estos pasos intermedios. Hay que procurar la suficiente automatización del resto de operaciones para lograr liberar recursos cognitivos y dedicarlos al control de la ejecución de la división.

```
 1 8 0  | 15
-1 5     ----
  0 3 0   1 2
  - 3 0
     0 0
```



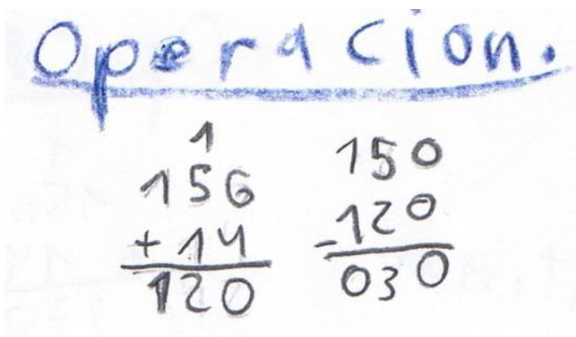


Imagen de P6 *Imagen de P6*

4. *Dificultad en interpretar el resultado (D4).*

Se halla esta dificultad cuando el escolar es incapaz de contestar a las preguntas del enunciado debido a que no sabe interpretar la cifra obtenida, es decir, no sabe qué ha hallado. De igual modo, es posible que el alumno si de respuesta a las preguntas pero no se detenga a razonar si la cifra se ajusta con una respuesta lógica.

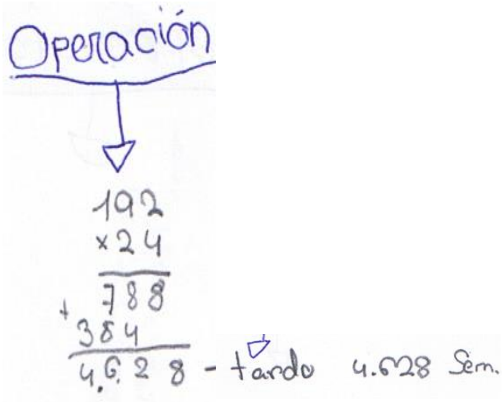


Imagen de P1

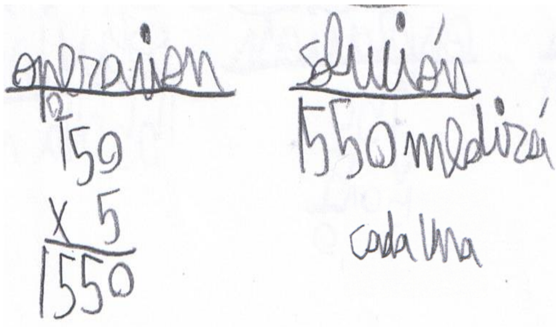


Imagen de P2

Por otra parte, los errores vienen determinados principalmente por un mal aprendizaje del proceso, de manera que, los estudiantes, para dar resolución a la situación, tienden a inventar una regla inadecuada durante el proceso resolutivo. A continuación se exponen los principales:

1. *Errores por dejar un resto mayor o igual que el divisor, (E1).*

Este es un error muy extendido, tanto en las divisiones parciales como en la división final, pues si este error se comete durante el desarrollo de la división provocará que todas las operaciones posteriores estén mal. Los alumnos cometen este error por realizar un mal tanteo (cálculo estimado erróneo), asignando una determinada cifra al cociente que, al operar, da un resto igual o superior al del divisor.

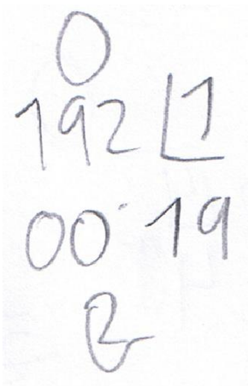


Imagen de P4

2. *Errores por un mal aprendizaje de las tablas multiplicativas, (E2).*

También puede suceder que exista un mal aprendizaje o una mala memorización de las tablas de multiplicar, en cuyo caso, por ejemplo, el alumno que quiera dividir 20: 5 puede pensar que 5x5 son 20 y, por ende, el resultado de la anterior división, aunque erróneo, sea 5.

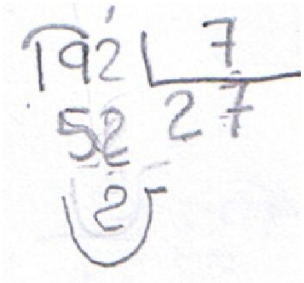


Imagen de P1

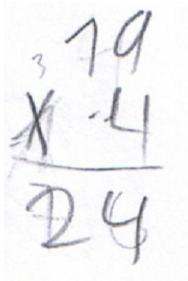


Imagen de P4

3. *Errores debidos al posicionamiento numérico, (E3).*

Al igual que las demás operaciones básicas, la división ha de guardar un correcto orden en la colocación de sus cifras pues una mala posicionalidad de estas llevará, inevitablemente, a cometer un error fatal en su desarrollo.

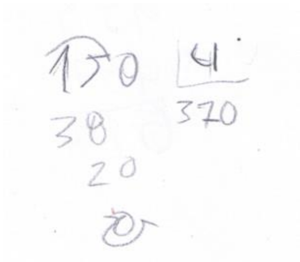


Imagen de P2

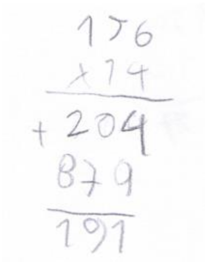


Imagen de P3

4. *Errores por ejecutar el algoritmo de derecha a izquierda, (E4).*

Debido a que la división es la única operación básica que se resuelve de izquierda a derecha los alumnos pueden cometer el error de realizarla en sentido inverso.

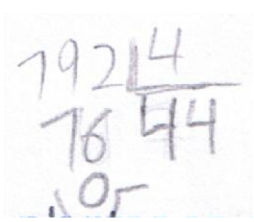


Imagen de P1

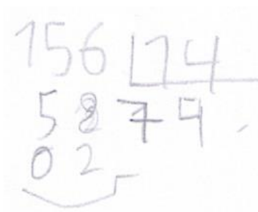


Imagen de P3

5. *Errores por inventar datos y no utilizar los obtenidos, (E5).*

Este error lo cometen los alumnos cuando llegan a un punto del proceso resolutivo en el que no saben cómo continuar. Para ello inventan un dato, que a su juicio necesitan, para poder seguir con el proceso. De igual modo, y muy en relación con la dificultad en interpretar el resultado, los alumnos pueden haber hallado el dato necesario para seguir operando y, dado que no saben qué han obtenido, no son conscientes de que esa misma cifra es la requerida para poder seguir con el proceso resolutivo.

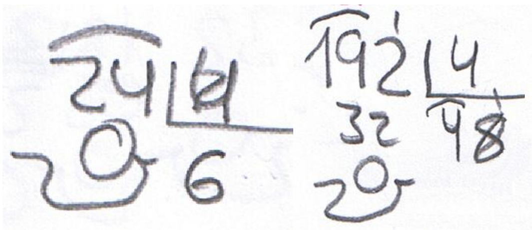


Imagen de P5
(no utiliza el dato hallado)

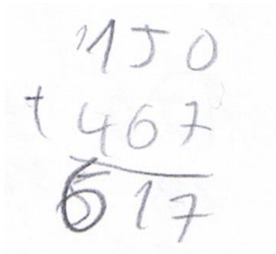


Imagen de P1
(inventa datos)

6. *Errores en la comprobación, (E6).*

Dado que la división es la inversa a la multiplicación podemos recurrir a esta para comprobar si se ha realizado correctamente una división; lo que se conoce como "*la prueba de la división*". La realización de este *truco* puede que salga bien o no, pues uno de los errores es no sumarle la cantidad sobrante, es decir, la que queda en el resto.

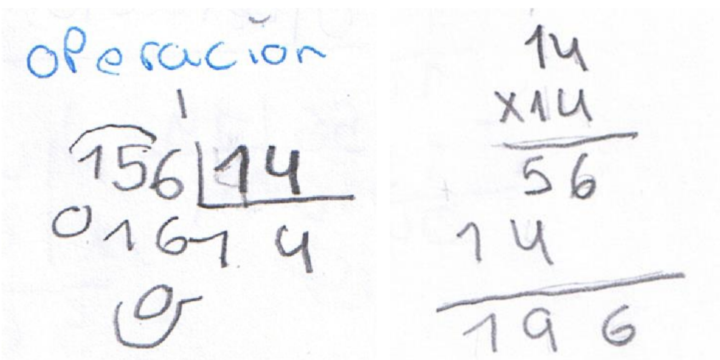
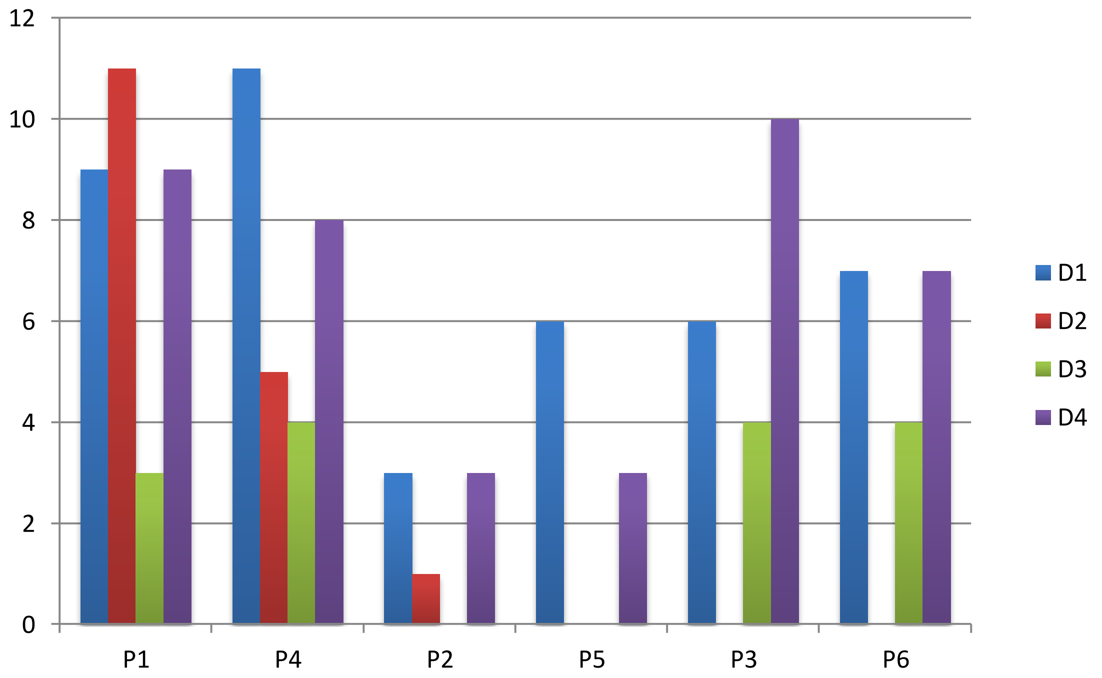


Imagen de P3

3. Resultados

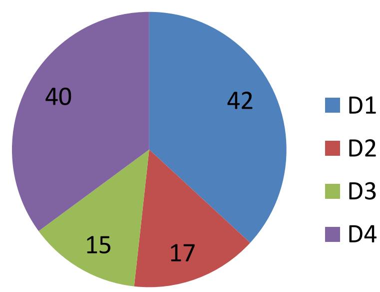
Una vez clasificados los resultados de las pruebas[1] y, para poder dar respuesta al objetivo que persigue esta investigación, se han realizado una serie de tablas en donde se ilustra la cantidad de alumnos que manifiestan dificultades e incurren en errores.

A) Dificultades:



Esta gráfica muestra las dificultades encontradas por los alumnos en los diferentes problemas, la cual muestra que la dificultad de mayor incidencia es la D1 (dificultad en la traducción del enunciado), donde alcanzan los mayores valores en P1 y P4.

Ordenando estas dificultades teniendo en cuenta el número de casos hallados en los diferentes ejercicios problemáticos, obtenemos el siguiente gráfico:



Si de igual modo establecemos un orden para los problemas atendiendo al número de alumnos que encuentran dificultades, la secuencia sería la siguiente: P1, P4, P3, P6, P2 y por último P5.

[1] Los resultados de las pruebas se incluyen en Anexo 2.

El problema P1 es que mayor dificultad provoca a los alumnos debido principalmente al proceso de integración (11/20), seguido muy de cerca por la dificultad en la traducción del enunciado (9/20) y la dificultad en interpretar el resultado (9/20); siendo la dificultad en la operación de dividir la de menor incidencia (3/20).

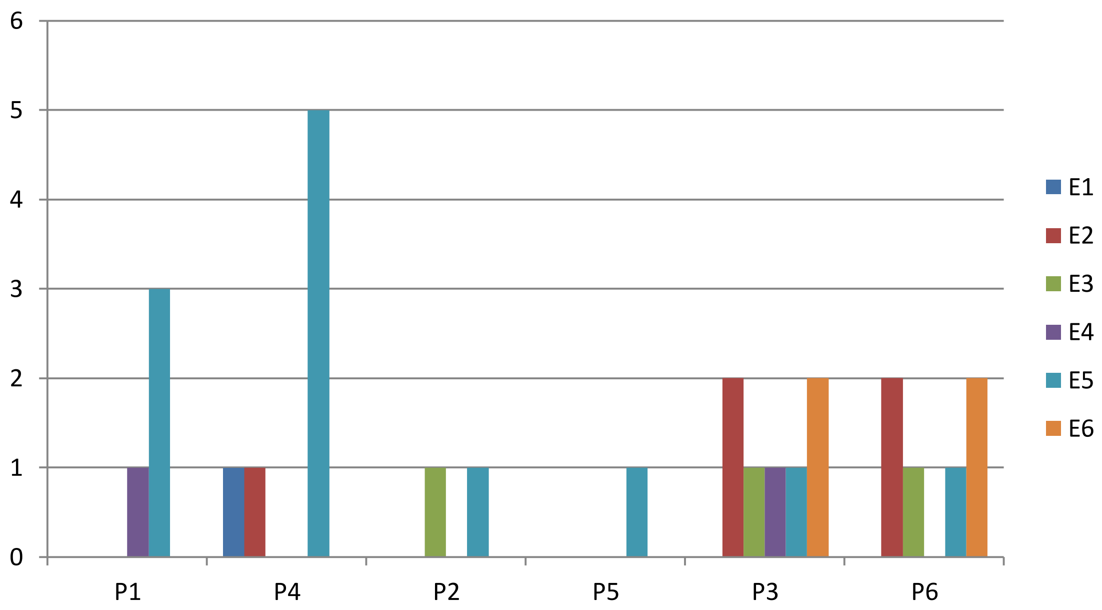
La actividad correspondiente a P4 muestra que la mayor dificultad es la de traducción del enunciado (11/20), seguida por la dificultad en interpretar los resultados (8/20), proceso de integración (5/20) y por último, la dificultad en la operación (4/20).

En el problema P3, sin embargo, los alumnos encuentran mayor dificultad a la hora de interpretar el resultado (10/20) que a la hora de la traducción del enunciado (6/20), seguido de cerca por la dificultad a la hora de realizar la operación de dividir (4/20).

El problema P6 muestra que los alumnos tienen la misma dificultad en el proceso de traducción del enunciado como en la interpretación del resultado (7/20). No obstante la dificultad respecto a la operación de dividir sigue teniendo la misma incidencia que en el problema similar P3 (4/20).

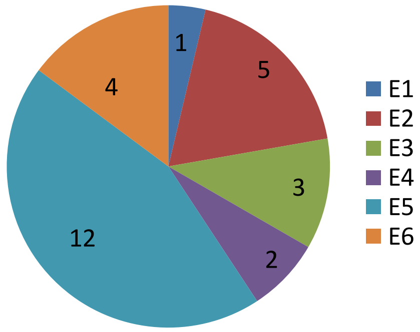
Por último, los problemas análogos P2 y P5 son los que menores dificultades manifiestan. En P2 la traducción del enunciado y la interpretación del resultado ofrecen la misma dificultad para los alumnos (3/20), mientras que en P5 el interpretar el enunciado (6/20) supone el doble de dificultad que en interpretar el resultado (3/20).

B) Errores:



Esta otra gráfica muestra los errores cometidos por los alumnos en los diferentes problemas, de los cuales el error por inventar datos y no utilizar los obtenidos supone el de mayor valor.

Ordenando los errores teniendo en cuenta el número de casos hallados en los diferentes ejercicios problemáticos, obtenemos el siguiente gráfico:



Si de igual modo establecemos un orden para los problemas atendiendo al número de alumnos que cometen los diferentes errores, la secuencia sería la siguiente: P4 o P3, seguidos por P6, P1, P2 y por último P5.

En el problema P4, si bien es cierto que tan solo se cometen tres de los errores estudiados, el error por inventar datos y no utilizar los obtenidos es el que mayor incidencia presenta (5/20). Este mismo error también se halla en P1 con un número menor de casos (3/20). Además, en P1 se comete el error de ejecutar el algoritmo de derecha a izquierda (1/20); error que no se comete en P4 pero que, en cambio, sí que se cometen los errores por dejar un resto mayor o igual que el divisor y el error por un mal aprendizaje de las tablas multiplicativas.

En el problema P3 los alumnos cometen cinco de los seis errores analizados. En primer lugar encontramos el error cometido por un mal aprendizaje de las tablas multiplicativas y el error en la comprobación, presentándose en cada uno de ellos 2 casos sobre 20. En segundo lugar hallamos los errores correspondientes al posicionamiento numérico (1/20), por ejecutar el algoritmo de derecha a izquierda (1/20) y el error por inventar datos y no utilizar los obtenidos (1/20). Dado que el problema P3 y P6 son análogos, los errores cometidos en uno se presentan también en el otro tal como presenta la gráfica, a excepción del error por ejecutar el algoritmo de derecha a izquierda que tan solo se comete en P3.

Los problemas análogos P2 y P5 son los que menores errores presentan. En P2 se dan dos errores: error debido al posicionamiento numérico y error por inventar datos y no utilizar los obtenidos, ambos con 1 caso sobre 20. En cambio, en P5 tan solo se da el error por inventar datos y no utilizar los obtenidos (1/20).

4. Discusión y conclusiones

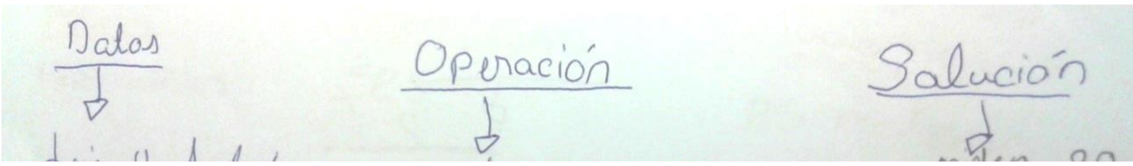
Según muestran los datos recogidos en el epígrafe anterior el número de alumnos que fallan en la resolución de problemas viene determinado, más que por los errores propios del algoritmo de la división, por las dificultades que se presentan a la hora de la traducción, integración de datos y la interpretación de los datos obtenidos. Esto es así puesto que en la resolución de problemas, tal como manifiesta el R.D. 1513/2006 "se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas como leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo, comprobar la solución y comunicar de forma verbal los resultados" (p. 43096). Sin embargo, los errores se pueden presentar tanto en *enunciados problemáticos* como en ejercicios en donde tan solo hay que resolver el algoritmo propuesto y dependen exclusivamente de la capacidad matemática del individuo.

Según lo anterior, una de las primeras conclusiones es, sin duda, la gran dificultad que presentan los discentes al hacer frente a un enunciado problemático. Dificultad que se presentó nada más entregar la actividad y que, de no haberla solventado mediante las explicaciones del docente, hubiera provocado que estos alumnos no hubieran podido dar solución a las tareas propuestas o, al menos, no de un modo positivo. Aun así ciertos alumnos dejaron muchos de los problemas sin resolver pues, aun arriesgo de llegar a conclusiones demasiado aventuradas, la traba que provoca que los alumnos disientan en el intento de resolver la actividad podría corresponder, según Lester (1983), a la falsa creencia de que si la tarea no puede hacerse fácilmente entonces no puede hacerse en absoluto. Según este mismo autor, la resolución de problemas requiere el fracaso inicial por parte de los estudiantes, manifestando que esta componente no es solamente una buena cosa sino parte necesaria de la resolución de problemas. Desgraciadamente muchos de los profesores no tienen en cuenta lo anteriormente argumentado por Lester y que, por temor a provocar la desconfianza de los alumnos, se opta a no proponer problemas que supongan una verdadera situación problemática.

Por ende, la dificultad en el proceso de traducción del enunciado es, según los datos recogidos, la componente que más se ha de trabajar en las aulas ya que condiciona la siguiente: elegir la operación necesaria para resolver el enunciado. Si un alumno no ha entendido perfectamente el enunciado no va a poder dilucidar qué operación nos dirige a hallar la solución. No son pocos los alumnos analizados que tienen dificultad en este punto y que, en consecuencia, no identifican la estructura operatoria a seguir. Esto está condicionado por un gran número de variables: estructura semántica, cantidad de información, posición de la pregunta, etc.

La segunda gran dificultad es atribuida a la problemática en interpretar el resultado ya que, aun consiguiendo la traducción del lenguaje verbal de los enunciados en lenguaje matemático y de elegir la operación correcta para llevar a cabo la resolución del problema, muchos de los alumnos son incapaces de dar una respuesta por escrito del resultado obtenido: *a)* por no saber qué han hallado o *b)* por ser una respuesta totalmente ilógica. En el primer caso los discentes cogen los datos del problema, eligen la división como operación requerida, operan y hallan un resultado pero, sin embargo, no dan respuesta a lo que se pide en el enunciado. Esto supone un claro ejemplo de que los alumnos no están acostumbrados a lidiar con problemas, pues solo atienden a la ejecución del algoritmo.

Es preciso indicar a estos alumnos que la ejecución del algoritmo no implica que el problema esté resuelto de manera satisfactoria ya que han de dar una respuesta por escrito a las preguntas formuladas en el enunciado. En este aspecto resulta curioso comprobar como el 100% de los alumnos dividen el espacio reservado para el ejercicio en tres columnas: Datos, operación y solución; pero pocos reflexionan sobre cuál es verdaderamente la solución.



Otros muchos alumnos tienen dificultades en el proceso de integración de los datos debido a que, a pesar de identificar qué operación se esconde tras el enunciado, no son capaces de razonar que cifras han de dividir. Ello les lleva a incurrir en el fallo de tomar la cifra de mayor valor y dividirla por la de menor valor pensando que así hallaran el resultado a una de las preguntas planteadas. Un gran número de alumnos incurren en este error tanto en P1 como en P4, ya que realizan 192:4 sin razonar que realizando dicha operación no obtienen absolutamente nada. Esta dificultad de interpretación de los datos la podemos atribuir, como argumenta Castro et al. (1987), al nivel de abstracción que implica la división en el aprendizaje de su concepto.

Por último, existe un número reducido de alumnos que presentan dificultad en la operación por no tener bien afianzado el procedimiento del algoritmo de la división, por lo que, en consecuencia, inventan reglas inapropiadas e incurren en una serie de errores.

La razón de que los errores se presenten en menor grado que las dificultades es debido a que los errores son propios del proceso algorítmico, y dado que la metodología más extendida dentro del aula es la de trabajar ejercicios de cálculo y no en resolución de problemas, los alumnos están mucho más familiarizados con el procedimiento algorítmico que con el factor condicional.

De tal manera podemos concluir, dando respuesta al objetivo marcado en el presente trabajo, que los alumnos presentan un mayor número de dificultades que de errores. A su vez, y como objetivo secundario, podemos afirmar que la traducción y la interpretación de datos son las dificultades que más se manifiestan en los escolares, siendo las componentes que más se han de trabajar en las aulas pues, tal como aquí se declara, los alumnos tienen serias dificultades en esta misión.

Dado que la competencia en resolución de problemas no puede enseñarse por no seguir un patrón fijo, la única manera de adquirir esta habilidad es resolviendo problemas, pues no cabe ninguna duda de que esta competencia se adquiere con la práctica.

5. Bibliografía

BOE (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. En *Boletín Oficial del Estado* de 8 de diciembre de 2006, nº 293. (pp. 43053-4310). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

BOJA (2007). ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. En *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía* de 30 de agosto de 2007, nº 171. (pp. 4-23). Sevilla: Junta de Andalucía.

Castro, E., (2001). Multiplicación y división. En Castro, E. (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria.* (pp. 203-230). Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1987). *Números y operaciones: fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cerdán, F. (2007). *Estudios sobre la Familia de Problemas Aritméticos-Algebraicos.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Valencia.

Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos. En Godino, J. D. (Dir.), *Didáctica de las matemáticas para maestros.* (pp.155-270). Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas Universidad de Granada.

Fernández, F. (1997). *Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra.* Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas. (14), 75-91.

Flores, P. (2001). Aprendizaje y evaluación. En Castro, E. (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas en la Educación Primaria.* (pp. 41-59). Madrid: Síntesis.

Gómez, B. (1988). *Numeración y cálculo.* Madrid: Síntesis.

Gómez, C. M. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división*. Madrid: Síntesis.

Jonassen, D. H. (2004). *Learning to solve problems. An instructional design guide*. San Francisco, California: Pfeiffer.

Lester, F. K. (1983). Trends and issues in mathematical problem solving research. En Lesh, R. y Landau, M. (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* (pp. 229-261). London: Academic Press.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166.

National Council of Teahcers of Mathematics (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Thales.

Onrubia, J., Rochera, M. J. y Barberá, E. (1990). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. (Eds.). Vol.2. *Desarrollo psicológico y educación.* (pp. 487-508). Madrid: Alianza Editorial.

Pajares, R., Sanz, Á. y Rico, L. (2004). *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*. Madrid: Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Polya, G. (1990). *Como plantear y resolver problemas.* (16ª ed). México: Trillas.

Roa, R. (2001). Algoritmos de cálculo. En Castro, E. (Ed.), *Didáctica de las matemáticas en la Educación Primaria.* (pp. 232-256). Madrid: Síntesis.

Socas, M (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En Flores, M., y Bolea, M. P. (coord.) (2008) *Investigación en educación matemática XI.* (pp. 19-52). Tenerife: Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM.

ANEXOS

Anexo 1:

conversación previa a la realización de la actividad.

- A ver chicos, veo que ninguno habéis empezado. ¿Qué pasa, no los entendéis?
- Profe es que… por ejemplo, el ejercicio dos solo tiene un dato entonces… o sea… ¿Qué operación hay que hacer si solo hay un dato?
- ¿Seguro? Vamos a leerlo todos de nuevo. *(Se lee el problema).* Ahora vamos a decirlo con nuestras propias palabras, ¿vale? Tenemos a un señor que tiene un huerto, ¿verdad?
- Sí.
- Ese huerto tiene… ¿Cuánto? 150 metros, ¿no?
- Sí.
- Y, ¿qué quiere plantar?
- Pepinos, tomates, lechugas ajos y patatas.
- Entonces si quiere dividir esos 150m para plantar todo eso, ¿qué operación habrá que hacer?
- Dividir profe. Pero, ¿150 entre qué?
- Pues si quiere hacer partes iguales para plantar *(haciendo movimientos con las manos marcando las partes)* pepinos *(primer movimiento de manos)*, tomates *(segundo movimiento)*, lechugas *(tercero)*, ajos *(cuarto)* y patatas *(quinto movimiento)*…
- ¡Ah! ¡Qué fácil profe!
- Ok. Ahora el ejercicio uno. Tenemos una enciclopedia que vale 192€ pero Beatriz, como no tiene mucho dinero, lo va comprando poco a poco. La primera semana compra cuatro libros; las segunda semana otros cuatro y así hasta tenerlos todos. Entonces, lo primero que yo tengo que saber es cuánto vale un libro, ¿no?
- Claro.
- Muy bien. Si todos juntos valen 192€ y son 24 libros, ¿qué hay que hacer?
- ¿Dividirlo?
- Claro. Vale, entonces lo dividimos y con eso, ¿qué averiguo?
- El precio de un libro.
- Entonces cuando tenga lo que vale un libro, puedo saber lo que valen cuatro, ¿verdad?
- Vale profe, ahora si lo entiendo.

Anexo 2:

resultados de las pruebas.

En el empeño de dar respuesta al objetivo perseguido en este trabajo, se han clasificado los datos atendiendo a las categorías de análisis propuestas. Para ello se ha procedido a codificar a los alumnos de la siguiente manera: A1, A2, A3, A4…A26[2].

1.1. Dificultades en el proceso de traducción del enunciado: En este apartado incluimos a todos los alumnos que realizaron la prueba pues, como se dijo anteriormente, necesitaron la traducción de todos los enunciados por parte del docente para poder empezar a realizar la prueba ya que por sí solos no eran capaces. Aun así, los siguientes alumnos no eligieron la división como la operación requerida para dar solución a los problemas o dejaron desiertos los ejercicios:

- Problema 1: A2, A6, A8, A10, A15, A19, A22, A23 y A18.
- Problema 4: A2, A6, A7, A10, A14, A15, A17, A18, A19, A22 y A22.
- Problema 2: A10, A19 y A22.
- Problema 5: A6, A10, A14, A19, A22 y A23.
- Problema 3: A6, A7, A8, A10, A14 y A22.
- Problema 6: A6, A7, A8, A10, A14, A22 y A23.

1.2. Dificultad en el proceso de integración.

- Problema 1: A1, A7, A11, A14, A17, A25 y A26. Los alumnos A11, A14, A25 y A26 obvian alguno de los datos del enunciado por lo que no dan respuesta a todas las preguntas del enunciado.
- Problema 4: A6, A11, A23 y A26. De igual forma el alumno A26 no utiliza todos los datos del problema.
- Problema 2: A6.

[2] No aparecerán los alumnos A5, A16 ni A21 debido a que sus pruebas han sido descartadas por no haber resuelto los enunciados o por no arrojar datos de utilidad en este análisis.

1.3. Dificultad en la operación.

- Problema 1: A17, A22 y A26.
- Problema 4: A6, A10, A22 y A26.
- Problema 3: A6, A8, A24 y A26.
- Problema 6: A6, A8, A24 Y A26.

1.4. Dificultad en interpretar el resultado.

- Problema 1: A2, A7, A8, A17, A19, A20, A22, A23 y A26.
- Problema 4: A2, A6, A8, A10, A19, A22, A24 y A26.
- Problema 2: A7, A14 y A22.
- Problema 5: A2, A7 y A22.
- Problema 3: A1, A2, A6, A8, A10, A14, A18, A19, A22 y A26.
- Problema 6: A2, A6, A8, A10, A18, A22 y A26.

2.1. Errores por dejar un resto mayor o igual al divisor.

- Problema 4: A26.

2.2. Errores por un mal aprendizaje de las tablas multiplicativas.

- Problema 4: A26.
- Problema 3: A6 y A22.
- Problema 6: A6 y A22.

2.3. Errores debidos al posicionamiento numérico.

- Problema 2: A6.
- Problema 3: A6.
- Problema 6: A6.

2.4. Errores por ejecutar el algoritmo de derecha a izquierda.

- Problema 1: A23.
- Problema 3: A23.

2.5. Errores por inventar datos y no utilizar los obtenidos.

- Problema 1: A1, A10 y A22.
- Problema 4: A1, A2, A8, A10 y A20.
- Problema 2: A6.
- Problema 5: A6.
- Problema 3: A2.
- Problema 6: A2.

2.6. Errores en la comprobación de la división.

- Problema 3: A8 y A26.
- Problema 6: A8 y A26.

3. Resolución positivas de los ejercicios.

- Problema 1: A9, A12 y A24.
- Problema 4: A9, A12, A24 y A24.
- Problema 2: A1, A2, A7, A8, A9, A11, A12, A15, A17, A18, A20, A23, A24, A25 y A26.
- Problema 5: A1, A2, A7, A8, A9, A11, A12, A15, A17, A18, A20, A24, A25 y A26.
- Problema 3: A1, A9, A11, A12, A15, A17, A18, A19, A20 y A25.
- Problema 6: A1, A9, A11, A12, A15, A17, A18, A19, A20 y A25.

Tan solo los alumnos A9 y A12 resuelven positivamente la totalidad de los enunciados.