

# Sistemas Estocásticos en las Ciencias Naturales

## RESUMEN

En este artículo se formulan los modelos de espacio de estados como herramienta matemática para representar la

evolución temporal de un fenómeno. El análisis se centra en los modelos lineales, describiéndose un algoritmo,

denominado filtro de Kalman, que permite realizar predicciones de forma recursiva a medida que se van procesando

nuevas observaciones. Finalmente se aborda el caso no lineal introduciendo un método aproximado de resolución.

**PALABRAS CLAVE:** Modelo de espacio de estados, filtro de Kalman, filtro extendido.

## ABSTRACT

In this article state-space models as a mathematical tool for representing the time evolution of a phenomenon

are formulated in this paper. The analysis is focused on linear models and the Kalman filter as an algorithm to perform

forecasting as new

observations are recorded is described. Finally, the non-linear case is developed and an approximated method for

resolution is introduced.

**KEYWORDS:** State-space models, Kalman filter, widespread filter.

existen unos ciclos o tendencias que se repiten con carácter anual, presentando cada año unas desviaciones respecto a dichos patrones superiores a las que puedan originarse al estudiar el experimento físico anterior. Por el contrario, en una elección de números al azar no existe patrón alguno que regule la aparición de nuevos números, por lo que no tiene sentido esforzarse en modelizar este fenómeno.

Al margen del grado de aleatoriedad de un suceso, estos pueden tener naturaleza estática o dinámica. Los primeros representan situaciones en un instante fijo, mientras que los segundos situaciones que evolucionan a lo largo del tiempo. Es decir, un fenómeno estático es como un fotograma de la película que corresponde al suceso dinámico. En el presente artículo nos centramos en el estudio de una clase importante de modelos de naturaleza dinámica que, como se ha expresado anteriormente, tratan de explicar el desarrollo temporal de un fenómeno, así como en los métodos para predecirlo. Concretamente, describiremos los denominados

modelos de espacio de estados, centrando nuestro estudio en el caso lineal, y la técnica predictiva conocida como filtrado de Kalman.

De tal forma, tras una breve reseña histórica, el trabajo contiene un apartado en el que se formulan tales modelos, analizando posteriormente con más detalle los de tipo discreto. A continuación se desarrolla el algoritmo de filtrado de Kalman, que, a partir de modelos lineales de espacio de estados, permite obtener predicciones de forma recursiva, es decir, actualizar la última predicción realizada en base a una nueva observación sin necesidad de realizar todos los cálculos desde el inicio. Finalmente, se aborda el caso no lineal, introduciéndose un método aproximado, conocido como filtro extendido de Kalman, que permite tratar el sistema en términos de uno lineal equivalente. Como aplicación se presenta un problema biomédico en el que se pretende estimar la velocidad de movimiento de una célula cardiaca como consecuencia de los impulsos eléctricos que recibe.

## RESEÑA HISTORICA

Aunque desde tiempos inmemoriales el hombre ha estado interesado en interpretar y describir, aún de forma muy empírica, las leyes de la Naturaleza a partir de la observación y experimentación, el comienzo formal de la teoría de la Estimación es a principios del siglo XVII, cuando Galileo Galilei intenta minimizar varias funciones de error para estimar la posición de los satélites de Júpiter, así como otras cuestiones astronómicas. A su vez, puede considerarse a Newton como el precursor de los modelos dinámicos, pues enunció por primera vez las leyes de la Mecánica y de la Gravitación Universal, quedando recogidas sus teorías científicas en la obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, que data de 1687.

Un hito importante en la teoría de la Estimación fue el desarrollo matemático del *método de mínimos cuadrados* por parte de Karl F. Gauss en 1795, si bien el primero en publicarlo fue Legendre en 1805. De hecho, el descubrimiento del planeta Ceres en 1801 y su posterior pérdida por ocultación tras el Sol después de haberlo contemplado tan solo una cuadragésima parte de su órbita, permitió a Gauss aplicar el método de mínimos cuadrados y estimar su órbita con tanta

precisión que el planeta fue encontrado de nuevo. Igualmente, en 1821, Gauss desarrolló una variante recursiva de este método que hacía posible corregir un estimador calculado previamente tras obtener una observación adicional y sin tener que repetir los cálculos completos desde el principio.

Las primeras aplicaciones de este método a la modelización dinámica datan de la primera mitad del siglo XX. Así, Kolmogorov (1939) proporcionó un tratamiento completo del problema de predicción para modelos estacionarios en tiempo discreto, siendo extendida por Krein (1945) esta metodología al caso continuo. Independientemente de ellos, Wiener (1942) desarrolló el problema de predicción lineal en tiempo continuo, obteniendo una fórmula explícita para el predictor óptimo mediante cálculo variacional. En la misma línea, Bode y Shannon (1950) publicaron una derivación distinta a la obtenida por Wiener que era más accesible para las aplicaciones en ingeniería. Igualmente, Zadeh y Ragazzini (1950) extendieron esta teoría a modelos no estacionarios con intervalos de observación finitos.

Sin embargo, todos los trabajos anteriores presentaban el doble inconveniente de su difi-

cultad de implementación, siendo necesario resolver complicadas ecuaciones diferenciales, así como la necesidad de repetir todos los cálculos a medida que aumentaba el intervalo de observación. Todo ello supuso una grave limitación cuando, al comienzo de la carrera espacial en los años cincuenta, la teoría de predicción quiso aplicarse a la determinación de la posición y velocidad de satélites, pues en este tipo de problemas se presentaban generalmente observaciones vectoriales con un gran volumen de datos que se iban incrementando secuencialmente. En la resolución de estos problemas merecen destacarse los trabajos pioneros de Swerling (1959),

Kalman (1960) y principalmente de Kalman y Bucy (1961) que supuso el inicio de una nueva metodología en el campo de los sistemas estocásticos.

A partir de entonces es numerosísima la bibliografía desarrollada sobre aspectos teóricos y prácticos del filtro de Kalman, en particular dentro de las Ciencias Naturales, siendo sus principales áreas de aplicación la Climatología (ver, por ejemplo, el artículo de Visser y Molenaar 1995), la Hidrología (Cooper 1982, Ruiz-Molina y Valderrama 1995), la Cinética Química (Ingram y Bloch 1984, Valderrama y Ruiz-Molina 1996) y la Fisiología (Ruiz-Fuentes, 1999).

### SISTEMAS ESTOCÁSTICOS Y MODELOS DE ESPACIO DE ESTADOS

Según McGarty (1974) un *sistema* es un conjunto de elementos organizados, susceptible de ser externamente influenciado y cuyo comportamiento puede ser, en cierta medida, monitorizado. Si un sistema evoluciona en función del tiempo se dice que es de tipo *dinámico* y si dicha evolución no se rige por leyes exactas, sino que, aunque ajustándose a un cierto patrón, es incierta, nos encontramos ante un *sistema estocástico*. Tal situación es usual en el estudio de la fisiología del cuerpo humano; por ejemplo, al analizar el sistema digestivo, ante una dosis de alimento éste funciona por sí solo y su comportamiento puede ser observado y medido, pero también podemos actuar sobre él variando la composición de la dieta.

La descripción del sistema en un cierto instante se realiza mediante el denominado *vector de estados*, cuyas coordenadas temporales representan diversas características del sistema en cuestión en función del tiempo:  $\mathbf{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t))^T$ . La dinámica propia del sistema se representa matemáticamente mediante la *ecuación de estados*:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t,\mathbf{u}(t)) + \mathbf{w}(t)$$

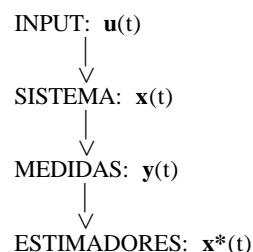
donde  $\mathbf{w}(t)$  es la perturbación o *ruido* del modelo, es decir, la desviación de la realidad respecto al modelo teórico y es, por tanto, un término aleatorio, y  $\mathbf{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\dots,u_k(t))^T$  denota el *input* o influencia externa realizada sobre el sis-

tema, que no tiene por qué tener la misma dimensión que el vector de estados. Así, para poner en funcionamiento determinados sistemas es necesaria la presencia del input, mientras que en otros no lo es, como por ejemplo el sistema circulatorio. A su vez, las observaciones realizadas experimentalmente sobre el fenómeno se materializan en otro vector:  $\mathbf{y}(t)=(y_1(t),y_2(t),\dots,y_m(t))^T$ , que tampoco tiene por qué tener la misma dimensión que el vector de estados, y verifica la denominada *ecuación de medidas*:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t),t,\mathbf{u}(t)) + \mathbf{v}(t)$$

siendo nuevamente  $\mathbf{v}(t)$  un término aleatorio que representa el error en la toma de datos.

En consecuencia, para describir completamente un sistema estocástico de forma matemática es necesario formular tanto la ecuación de estados como la de medidas. Esta representación del sistema en términos de ambas ecuaciones se denomina *modelo de espacio de estados*. El objetivo de la Teoría de Sistemas consiste en estimar el vector de estados a partir de las medidas realizadas sobre el sistema. Esquemáticamente lo podemos representar de la forma:



Como ejemplo supongamos que se quieren prevenir las inundaciones causadas en una zona geográfica debidas al desbordamiento de un río, para lo cual se precisa estimar su caudal, midiendo con unas horas de antelación las precipitaciones que se producen en un punto clave de la cuenca. El modelo escalar propuesto por Moore y Weiss (1980) expresa la dinámica de conversión de las precipitaciones en caudal mediante la siguiente ecuación simplificada:

$$\frac{dc(t)}{dt} = a[ku(t)-c(t)]c^b(t) + w(t)$$

donde  $c(t)$  representa el caudal del río en el instante  $t$ ,  $u(t)$  el input de precipitaciones en el instante  $t$ ,  $k$  es un coeficiente constante que representa las pérdidas producidas al convertirse las precipitaciones en caudal,  $a$  y  $b$  son valores constantes que rigen la naturaleza de la respuesta dinámica del caudal por las precipitaciones y que supondremos conocidos y  $w(t)$  es la perturbación aleatoria del modelo. Por otra parte, si pudiéramos medir directamente el caudal del río en cada instante, la ecuación de medidas, que también sería escalar, vendría dada por:

$$y(t) = c(t) + v(t).$$

Como una segunda aplicación consideremos un proceso químico de segundo orden en el que dos sustancias reactivas A y B se combinan para formar un compuesto C:  $A + B \rightarrow C$ . La tasa de obtención de C está gobernada por la ecuación diferencial escalar:

$$c'(t) = k[a_0 - \alpha c(t)][b_0 - \beta c(t)], \quad t \geq 0$$

donde  $a_0$  y  $b_0$  denotan las cantidades iniciales de las sustancias A y B,  $\alpha c$  y  $\beta c$  son las unidades de A y B respectivamente que combinan para formar  $c$  unidades de producto C ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ ) y  $k > 0$  es una constante de la reacción. Como coordenadas del vector de estados tomaremos:  $x_1(t) = k$  y  $x_2(t) = c(t)$ , con lo cual la ecuación de estados, libre de perturbaciones, vendrá dada por:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1(t)[a_0 - \alpha x_2(t)][b_0 - \beta x_2(t)] \end{pmatrix}$$

## MODELOS LINEALES DE ESPACIO DE ESTADOS

Dentro de los sistemas estocásticos tienen especial relevancia aquéllos cuyas ecuaciones de estado y de medida pueden factorizarse de la forma siguiente:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{L}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$$

donde  $\mathbf{F}(t)$  es la matriz del sistema de orden  $n \times n$ ,  $\mathbf{L}(t)$  es la matriz de control o input de orden  $n \times p$ ,  $\mathbf{H}(t)$  es la matriz de medidas o output de orden  $m \times n$  y  $\mathbf{B}(t)$  es una matriz de orden  $m \times p$ .

Tales sistemas se denominan *lineales*, y si todas las matrices implicadas son constantes, es decir no dependen del instante  $t$ , se dice que el sistema lineal es *invariante en el tiempo*.

Uno de los aspectos más interesantes en la modelización en espacio de estados consiste en analizar la transición de un estado inicial a otro

posterior. Para ello consideremos un modelo lineal de espacio de estados representado por las ecuaciones dadas en (1). Si en la ecuación de estados no hubiera input ni término aleatorio de perturbación, existiría para la ecuación diferencial  $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t)$ ,  $t \geq t_0$  una matriz diferenciable  $\Phi(t,s)$ , denominada *matriz de transición de estados*, verificando:  $\mathbf{x}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0)$ , es decir, nos permitiría obtener a partir de un instante inicial  $t_0$  el estado del sistema en cualquier instante posterior. En caso de considerar la ecuación de estados completa, es decir, con término de input  $\mathbf{u}(t)$ , la transición de estados vendría dada por la expresión integral siguiente:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t,s)\mathbf{L}(s)\mathbf{u}(s)ds \quad (2)$$

La matriz de transición verifica igualmente una ecuación diferencial del tipo:

$\Phi'(t, t_0) = F(t)\Phi(t, t_0)$ , que se resuelve mediante transformadas de Laplace.

Como aplicación analicemos un sistema de segundo orden que representa la caída de un cuerpo en un campo constante sin rozamiento ni ruidos perturbadores, el cual responde a la ecuación escalar:  $h'' = -g, t \geq 0$ . A fin de identificar el vector de estados denotemos la posición del cuerpo en el instante  $t$  mediante  $x_1(t) = h$  y la velocidad de caída en  $t$  por  $x_2(t) = h'$ . Así el vector:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

verifica la ecuación de estados:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} g$$

en la cual el input  $u(t) = g$  es constante. Mediante transformadas de Laplace se obtiene la siguiente matriz de transición:

$$\Phi(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que la ecuación de transición de estados (2) sería:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} ds = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t_0) - g \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Así, por ejemplo, si partimos de  $t_0 = 0$  y es  $\mathbf{x}(0) = (-1, 2)^T$ , el estado del sistema en el instante  $t = 5$  será:

$$\mathbf{x}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-g/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para introducir los modelos en tiempo discreto supongamos que el input es un vector que

toma valores constantes en subintervalos:  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_k)$  para  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ; entonces, la ecuación (2) se expresaría para  $t_0 = t_k$  y  $t = t_{k+1}$  de la forma:

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) \mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) L(s) ds \quad (3)$$

de manera que, denotando:

$$F(k) = \Phi(t_{k+1}, t_k), \quad L(k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, s) L(s) ds, \quad k = 0, 1, \dots$$

y considerando, por simplificar, que los nodos de observación son puntos equidistantes en una unidad, es decir:  $t_0 = 0, t_1 = 1, \dots, t_k = k$ , el modelo de espacio de estados queda reducido a la siguiente formulación discreta:

$$\mathbf{x}(k+1) = F(k)\mathbf{x}(k) + L(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(t) \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(k) = H(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(t)$$

Si nos referimos a la aplicación anterior de caída de un cuerpo en campo constante, la versión discreta de la ecuación de estados se obtendría haciendo  $t_0 = k$  y  $t = k+1$ , de manera que sería:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} g$$

En la práctica, aunque el sistema objeto de estudio sea por naturaleza continuo, es usual tratar su versión discreta debido a la imposibilidad en la mayoría de los casos de tomar muestras de forma continua a lo largo del tiempo, así como a la dificultad de cálculo que conlleva el modelo en tiempo continuo.

Indiquemos, para concluir esta introducción a los modelos de espacio de estados, que existen dos propiedades de gran importancia a la hora de estudiar el comportamiento de un sistema estocástico. Una es el *control*, que va asociado al input del

sistema y mediante el cual, como se indicó al comienzo, podemos influir sobre el comportamiento futuro del sistema. La otra propiedad es la de *observabilidad*, que va asociada a la ecuación de

medidas y nos proporciona la información que podemos extraer del sistema a partir de las observaciones. Un estudio detallado de ambas puede consultarse en Valderrama y Ruiz-Molina (1996).

## FILTRADO DE KALMAN

Consideremos un sistema estocástico representado por el modelo discreto de espacio de estados dado por las ecuaciones (4) y supongamos que tanto  $\mathbf{w}(t)$  como  $\mathbf{v}(t)$  son *ruidos blancos*, es decir, tienen media igual a cero, covarianza nula para dos instantes distintos y varianzas constantes e iguales a  $Q$  y  $R$  respectivamente. Supongamos así mismo que  $\mathbf{w}(t)$  y  $\mathbf{v}(t)$  son incorrelados en todo instante  $t$ . Sobre esta base, Kalman introdujo en 1960 un algoritmo recursivo que permite obtener la predicción de  $\mathbf{x}(t)$  en el instante  $k+1$  a partir de observaciones tomadas hasta el instante  $k$ . Para exponerlo denotaremos  $\mathbf{x}^*(k/k)$  al estimador del estado en el instante  $k$  a partir de muestras tomadas hasta dicho instante, y

$$\mathbf{x}^*(k+1/k) = F(k)\mathbf{x}^*(k/k) \quad (5)$$

Igualmente,  $P(k/k)$  y  $P(k+1/k)$  serán las matrices de varianzas-covarianzas de los errores de estimación asociados a  $\mathbf{x}^*(k/k)$  y  $\mathbf{x}^*(k+1/k)$  respectivamente, es decir los errores que se cometen al considerar estos estimadores como valores de  $\mathbf{x}(k)$  y  $\mathbf{x}(k+1)$ . Pues bien, una vez recogida una nueva observación  $\mathbf{y}(k+1)$  (la correspondiente al instante  $k+1$ ), la fórmula para el cálculo del estimador del estado en el instante  $k+1$ , que denotaremos  $\mathbf{x}^*(k+1/k+1)$  es la siguiente:

$$\mathbf{x}^*(k+1/k+1) = F(k)\mathbf{x}^*(k/k) + G(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - H(k+1)F(k+1)\mathbf{x}^*(k/k)] \quad (6)$$

donde la matriz  $G(k)$ , llamada *ganancia del filtro*, es de orden  $n \times m$  y está determinada por las relaciones:

$$G(k+1) = P(k+1/k)H^T(k+1)[H(k+1)P(k+1/k)H^T(k+1) + R]^{-1} \quad (7)$$

donde, a su vez

$$P(k+1/k) = F(k)P(k/k)F^T(k) + Q \quad (8)$$

$$P(k+1/k+1) = [I - G(k+1)H(k+1)]P(k+1/k) \quad (9)$$

siendo  $I$  la matriz identidad, es decir formada por 1 en la diagonal principal y siendo nulos los restantes elementos. El término  $\mathbf{y}(k+1) - H(k+1)F(k+1)\mathbf{x}^*(k/k)$ , que representaremos abreviadamente por  $\mathbf{n}(t)$  se denomina *innovación del filtro* y representa la información proporcionada por la nueva observación  $\mathbf{y}(k+1)$  que no estaba previamente recogida en el modelo.

Para comenzar el proceso iterativo del filtro de Kalman es necesario disponer de las condiciones iniciales dadas por  $\mathbf{x}(0)$  así como su matriz de covarianzas asociada que denotaremos  $P(0)$ . Veamos con un ejemplo el funcionamiento del algoritmo descrito. Consideremos el siguiente modelo lineal de espacio de estados sin input:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k)$$

$$y(k) = (1 \ 1)\mathbf{x}(k) + v(k)$$

donde  $\mathbf{w}(k)$  y  $v(k)$  son ruidos blancos incorrelados de varianzas  $Q=I$  y  $R=1$ . Supongamos que las características del estado inicial del sistema son:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y que la observación correspondiente al siguiente periodo es  $y(1)=15$ . Mediante filtrado de Kalman vamos a obtener la estimación  $\mathbf{x}^*(1/1)$ , así como la matriz de covarianzas del error de estimación:  $P(1/1)$ . Comenzaremos calculando el estimador adelantado una etapa, dado por la ecuación (5), así como la covarianza de su error, dada en (8):

$$\mathbf{x}^*(1/0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$P(1/0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

A continuación, la matriz de ganancia (7) será:

$$G(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} [(1 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1]^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 9/5 \end{pmatrix}$$

y la innovación del filtro:

$$n(1) = 15 - (1 \ 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \end{pmatrix} = 27$$

Por tanto el estimador buscado, dado en (6), será:

$$\mathbf{x}^*(1/1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 9/5 \end{pmatrix} 27 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y la covarianza del error de estimación, cuya expresión viene dada en (9)

$$P(1/1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 9/5 \end{pmatrix} (1 \ 1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -2/3 & 11/9 \end{pmatrix}$$

### SISTEMAS NO LINEALES Y FILTRADO EXTENDIDO DE KALMAN

En numerosos problemas de tipo práctico, el modelo lineal no representa de forma adecuada la evolución temporal del fenómeno objeto de estudio, siendo preciso recurrir a modelos no lineales, lo que supone, por otra parte, una mayor complejidad en el cálculo matemático asociado. Uno de los procedimientos más simples para el tratamiento de un sistema no lineal consiste en intentar buscar un sistema lineal que se aproxime a él de forma óptima, manteniendo al menos las propiedades estocásticas básicas, ya que ello supone además la posibilidad de desarrollar un algoritmo de fácil implementación. Una de tales aproximaciones es la denominada *filtro extendido de Kalman*, que utiliza desarrollos en serie de Taylor para linealizar sistemas.

Partiremos de un sistema no lineal sin término de input, con objeto de simplificar, que evoluciona según una ecuación diferencial estocástica del tipo:

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t) + \mathbf{w}(t), \quad t \geq t_0 \tag{10}$$

donde  $\mathbf{f}(\times)$  es una función vectorial no lineal de dimensión  $n$  y la perturbación aleatoria  $\mathbf{w}(t)$  un ruido blanco con covarianza  $Q$ . Además, el estado inicial del sistema  $\mathbf{x}(t_0)$  es un vector aleatorio de media cero y matriz de covarianzas  $P(t_0)$ . Supongamos que puede generarse una función muestral o trayectoria de referencia  $\mathbf{x}_a(t)$  verificando:

$$\mathbf{x}'_a(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_a(t),t), \quad t \geq t_0; \quad \mathbf{x}_a(t_0) = \mathbf{0}.$$

La diferencia  $-\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_a(t)$  se denomina *desviación* de la trayectoria de referencia y verifica la ecuación diferencial:

$$-\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_a(t),t) + \mathbf{w}(t), \quad t \geq t_0 \tag{11}$$

siendo  $-\mathbf{x}(t_0)$  un vector aleatorio de media cero y covarianza  $P(t_0)$ . Si las desviaciones de la trayectoria son de orden bajo, podemos realizar un desarrollo en serie de Taylor de primer orden de la forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_a(t),t) \approx F(\mathbf{x}_a(t),t) - \mathbf{x}(t)$$

siendo  $F(\mathbf{x}_a(t),t)$  la matriz de derivadas parciales de  $\mathbf{f}$  evaluadas en la trayectoria de referencia. De tal forma, la ecuación diferencial (11) se aproxima mediante:

$$-\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}_a(t),t) - \mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t), \quad t \geq t_0. \tag{12}$$

De manera similar se procede con la ecuación de medidas que inicialmente viene determinada por:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t),t) + \mathbf{v}(t)$$

Considerando una observación de referencia de la forma:  $\mathbf{y}_a(t) = \mathbf{h}(\mathbf{y}_a(t),t)$  se tiene una *desviación* de la medida de referencia:  $-\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_a(t)$ , y llevando a cabo una linealización similar a la anterior, la ecuación de medidas linealizada es:

$$-\mathbf{y}(t) = H(t) - \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \tag{13}$$

donde  $H(t)$  es igualmente la matriz de derivadas parciales de  $\mathbf{h}$  evaluadas en la observación de referencia.

Si el sistema no lineal inicial contuviera un término de input, el desarrollo teórico se realizaría de manera análoga al realizado, considerando en tal caso un input de referencia  $u_a(t)$  y definiendo la desviación  $-u(t)=u(t)-u_a(t)$ .

La aplicación de la técnica de filtrado extendido de Kalman a los fenómenos propuestos en el apartado dedicado a *Sistemas Estocásticos y Modelos de Espacio de Estados* nos proporciona las siguientes funciones para el ejemplo del caudal de un río:

$$F(t) = a[bku_a(t)-(b+1)c_a(t)]c_a^{b-1}(t), \quad L(t) = akx_a^b(t)$$

y la siguiente matriz para el ejemplo de cinética química:

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ [a_0 - ax_{a2}(t)][b_0 - \beta x_{a2}(t)] - x_{a1}(t)\{\beta[a_0 - ax_{a2}(t)] + a[b_0 - \beta x_{a2}(t)]\} & \end{pmatrix}$$

### MODELO DE OSCILACION EN EL TEJIDO CARDIACO

Guevara y Glass (1985) proponen el siguiente modelo dinámico para analizar la posición y velocidad de una célula cardiaca en movimiento oscilatorio como consecuencia de impulsos eléctricos:

$$y_t'' + 2\beta w_0 y_t' + w_0^2 y_t + \frac{c}{m} y_t^2 y_t' = u_t \tag{14}$$

donde  $m$  representa la masa,  $c$  una constante,  $w_0$  es la frecuencia natural de una oscilación no amortiguada y  $\beta$  es un factor de amortiguación. De no existir el término  $(c/m)y_t^2 y_t'$ , la respuesta  $y_t$  del sistema a un estímulo o input  $u_t$  estaría gobernada por una ecuación diferencial lineal. El sistema dado por la ecuación (14) se denomina también *modelo de Van-der-Pol*.

A fin de construir un modelo de espacio de estados para representar dicho sistema, definamos las siguientes componentes:

$$x_1(t) = y_t, \quad x_2(t) = y_t'$$

Así, el modelo no lineal asociado sería:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & -2\beta w_0 - (c/m)x_1^2(t) \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ u_t \end{pmatrix} \quad t \geq 0$$

Mediante filtrado extendido de Kalman nuestro objetivo consiste en estimar la posición y velocidad celular mediante observaciones discretas realizadas directamente sobre la célula, aunque sujetas a un posible error aleatorio:

$$y(k) = (1 \ 0)x(k) + v_k, \quad k=1,2,\dots$$

Por simplificar los cálculos supondremos la siguiente situación:

$$w_0 = 1, \quad \beta = 1/2, \quad m=c$$

Así mismo, partiremos de las siguientes condiciones iniciales:

$$x^*(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir, en el instante inicial la partícula se encuentra en reposo y en la posición  $y_0=2$ , siendo incorrelados los errores de estimación de ambas coordenadas y con varianzas unitarias. Siguiendo el proceso de linealización descrito en el apartado anterior, se obtienen los siguientes resultados:



Número de Iteración	Observación realizada en k	Posición estimada en k	Velocidad estimada en k
1	1.9676	1.9673	-0.3017
2	1.8920	1.8914	-0.4818
3	1.8225	1.8179	-0.6801
4	1.7420	1.7336	-0.8703
5	1.6598	1.6450	-1.0763
6	1.5721	1.5491	-1.2990
7	1.4326	1.4079	-1.4839
8	1.2212	1.2015	-1.6353
9	0.9275	0.9158	-1.8194
10	0.5858	0.5738	-2.1121
11	0.2094	0.1815	-2.5196
12	-0.2237	-0.2795	-3.0761

Los resultados gráficos del procedimiento para la posición y velocidad tras 50 iteraciones se muestran en las Figuras 1 y 2 respectivamente:

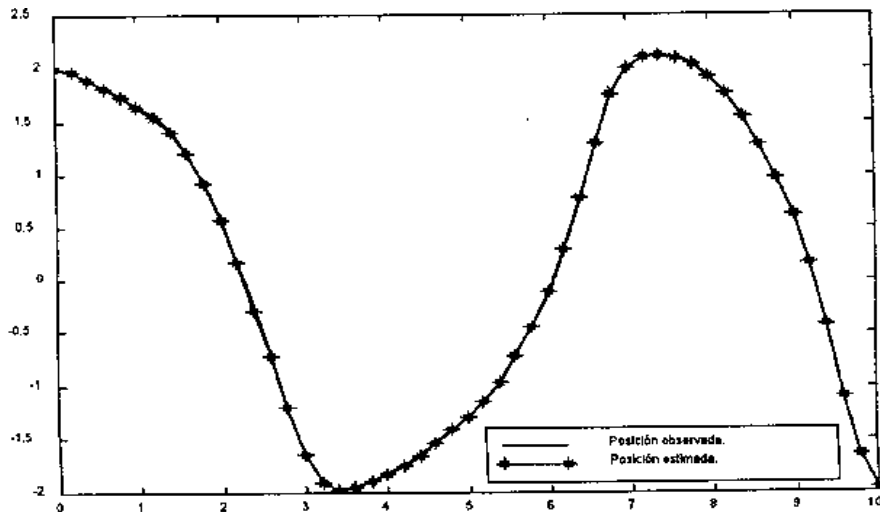


FIGURA 1.- Posición observada y estimada.

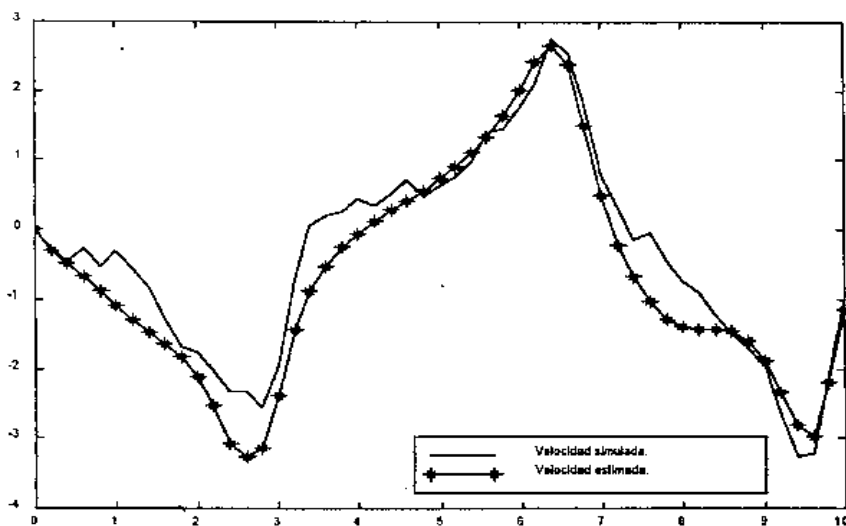


FIGURA 2.- Velocidad simulada y estimada.

## LINEAS ABIERTAS DE TRABAJO

La aproximación lineal de sistemas no lineales ha sido una de las técnicas más utilizadas para el tratamiento de este tipo de sistemas, debido a su sencillez algorítmica desde un punto de vista práctico. Sin embargo, el enfoque lineal, exacto o aproximado, no conduce a modelos adecuados para determinados fenómenos, siendo preciso abordar métodos alternativos para su tratamiento. Uno de ellos, continuación inmediata del filtro extendido de Kalman de orden uno, consiste en considerar desarrollos polinómicos de segundo orden o superiores, en la línea emprendida por Geweke (1989) y Poor (1994), si bien este procedimiento, además de la complejidad de cálculo, conduce a estimadores por lo general insesgados, que deben tratarse asintóticamente.

Una línea más actual se basa en la aproximación de la función de densidad con objeto de obtener estimadores de las variables de estado

que sean minimamente insesgados, cabiendo destacar el trabajo de Carlin et al. (1992) en el que la aproximación de la densidad se logra mediante una técnica de integración tipo Monte-Carlo, denominada *muestreo de Gibbs*. Otras aportaciones en este mismo sentido se deben a Brown y Mariano (1989), Zeger y Karim (1991), Tanizaki (1993) e Iyer y Andrews (1999).

Por último, cabe reseñar la dificultad que en numerosas ocasiones presenta el problema de identificar un modelo dinámico en base a una serie de datos temporales. A tal fin se han desarrollado algunos métodos que permiten aproximar la estructura del sistema de forma simplificada, haciendo uso de desarrollos ortogonales, así como la obtención de filtros subóptimos pero fácilmente implementables. En esta línea se encuentran los trabajos de Ruiz-Molina et al. (1995) y Ruiz-Molina y Valderrama (1996).

## BIBLIOGRAFIA:

- Bode H.W., Shannon C.E. (1950). A simplified derivation of linear least square smoothing and prediction theory. *Proceed. IRE*, 38: 417-425.
- Brown B.W., Mariano R.S. (1989). Measures of deterministic prediction bias in non-linear models. *Internat. Econ. Rev.*, 30: 667-684.
- Carlin B.P., Polson N.G., Stoffer D.S. (1992). A Monte-Carlo approach to nonnormal and nonlinear state space modeling. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 87: 493-500.
- Cooper D.M. (1982). Adaptive parameter estimation for non-linear hydrological models with general loss functions. *J. Hydrol.*, 58: 29-45.
- Geweke J. (1989). Modeling with normal polynomial expansions. In: Barnett et al. (eds) *Economic Complexity: Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity*, Cambridge University Press.
- Guevara M.R., Glass A. (1985). Phase locking, period-doubling bifurcations and irregular dynamics in periodically stimulated cardiac cells. *Science*, 214: 1350-1353.
- Ingram D., Bloch R. (1984). *Mathematical Methods in Medicine, Part 1: Statistical and Analytical Techniques*. Wiley, Chichester.
- Iyer S., Andrews R.L. (1999). Forecasting with latent structure time series models. *J. Forecast.*, 18: 395-409
- Kalman R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Trans. ASME, J. Basic Engineer.*, 82D: 35-45
- Kalman R.E., Bucy R.S. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *Trans. ASME, J. Basic Engineer.*, 83D: 366-368.
- Kolmogorov A.N. (1939). Sur L'interpolation et Extrapolation des Suites Stationaries. *C.R. Acad. Sci.*, vol. 208
- Krein M.G. (1945). On a Problem of Extrapolation of A.N. Kolmogorov. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 46: 306-309.
- McGarty T.P. (1974). *Stochastic Systems and State Estimation*. Wiley, New York.
- Moore R.J., Weiss G. (1980). Real-time parameter estimation of a non-linear catchment model using extended Kalman filters. In: Wood E.F., Szollosi-Nagy A. (eds) *Real-time Forecasting/Control of Water Resource Systems, IIASA Proceedings*, vol. 8, Pergamon, Oxford, pp. 139-151.
- Poor H.V. (1994). *An Introduction to Signal Detection and Estimation*. Springer-Verlag, New York.
- Ruiz-Fuentes N. (1999). *Predicción en Sistemas Estocásticos no Lineales*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- Ruiz-Molina J.C., Valderrama M.J. (1994). A state-space stochastic model for hydrological data. In: Gutiérrez R., Valderrama M.J. (eds) *Selected Topics on Stochastic Modelling*, World Scientific, Singapore, pp. 153-163.
- Ruiz-Molina J.C., Valderrama M.J., Gutiérrez R. (1995). Kalman filtering on approximate state-space models. *J. Optim. Theory and Appl.*, 84: 415-431.
- Ruiz-Molina J.C., Valderrama M.J. (1996). On the derivation of a suboptimal filter for signal estimation. *Statist. Probab. Letters*, 28: 239-243

- Swerling P. (1959). First-order error propagation in a stagewise smoothing procedure for satellite observations. *J. Astronaut. Sci.*, 6: 46-52.
- Tanizaki H. (1993). *Nonlinear Filters. Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, Berlin.
- Valderrama M.J., Ruiz-Molina J.C. (1996). *Filtrado de Kalman. Aplicaciones en Economía e Ingeniería*. EUB, Barcelona.
- Visser H., Molenaar J. (1995). Trend estimation and regression analysis in climatological time series: An application of structural time series models and the Kalman filter. *J. Climate*, 8: 969-979.
- Wiener N. (1942). *The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*. Wiley, New York.
- Zadeh L.A., Ragazzini J.R. (1959). An extension of Wiener's theory of prediction. *J. Appl. Phys.*, 21: 645-655.
- Zeger S.L., Karim M.R. (1991). Generalized linear models with random effects: A Gibbs sampling approach. *J. Amer. Stat. Associat.*, 86: 79-86.