

**ESTUDIOS NUMERICOS DE PROBLEMAS
DE FRACTURA ELASTODINAMICA**

RAFAEL CALLEGO SEVILLA

Junio, 1990

TESIS

ESTUDIOS NUMERICOS DE PROBLEMAS DE FRACTURA ELASTODINAMICA

por

Rafael Gallego Sevilla

**Ingeniero Industrial por la E.T.S.I.I.
de la Universidad de Sevilla**

**presentada en la Universidad de Sevilla para la obtención del
GRADO DE DOCTOR INGENIERO INDUSTRIAL**

Junio 1990

Deseo agradecer al Profesor José Domínguez Abascal, su incansable apoyo, estímulo y consejo, durante la realización de esta Tesis. Su ayuda científica ha sido inestimable, y su ejemplo como investigador, un continuo acicate.

Quiero agradecer también la ayuda prestada por los profesores de la cátedra de Estructuras, Ramón Abascal y Fernando Medina.

A mis colegas "precarios" de investigación, y a los profesores de la cátedra de Cinemática, quiero agradecerles todo el aliento y colaboración prestados.

Antes de Antes fue Spyrakos**.*
Antes de Spyrakos fue la Nada
Ella no desarrolló nada, murió joven
Así es como lo conocemos
En el Mundo de las Nadas-Numéricas.
Antes vengó a la Nada,
Y subió a la Luz de los Triunfadores.
*Ahora R.G.S.*** ha confirmado*
Lo que siempre habíamos sospechado:
! Ambos Usaron los Mismos Métodos
Para LLegar a Diferentes Resultados !
Por fin podrá hacerse justicia cuando se
Confirme que ambos en esencia
Hicieron lo mismo.

Nuestro Eterno Agradecimiento a R.G.S.
Por su Labor por la Justicia.

(Herminia, 25 de Noviembre de 1988)

* Antes, 1985

** Spyrakos, 1984

*** Gallejo y Domínguez, 1990

1.-INTRODUCCION

- Introducción.....	3
- Mecánica de la Fractura Elastico-Lineal.....	4
- Mecánica de la Fractura Elastodinámica-Lineal.....	6
- Aspectos Básicos de la Mecánica de la Fractura Dinámica.....	8
- Métodos Numéricos de Resolución de Problemas de la Dinámica de la Fractura.....	14
- El Método de los Elementos de Contorno: Origenes y Desarrollo.....	18
- Desarrollo del Metodo de los Elementos de Contorno en Elastodinámica.....	21
- Aplicaciones del Método de los Elementos de Contorno a la Mecánica de la Fractura.....	22
- Objeto y Objetivo de la Tesis.....	24

2.- EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

<u>2.1.- Ecuaciones Generales de la Elastodinámica.....</u>	29
- Ecuaciones de Navier. Ecuaciones de Compatibilidad y Comportamiento. Potenciales de Lamé.....	29
- Teorema de Reciprocidad en Elastodinámica.....	35
- Solución Fundamental de la Elastodinámica.....	37
- Representación Integral de un Estado Elastodinámico.....	45

<u>2.2.- Formulación Unificada para el Tratamiento Numérico</u> <u>de las Ecuaciones Integrales.....</u>	54
- Formulación Basada en la Ecuación en Función del Estado de Stokes.....	55
- Formulación Basada en el Producto de Convolución.....	66
- Unificación de Ambas Formulaciones.....	82
- Ejemplo Numérico.....	86
- Conclusiones sobre las Formulaciones.....	92
 <u>2.3.- Análisis de las Singularidades de los Núcleos.....</u>	 94
 <u>2.4.- Aspectos Numericos Generales del Método.....</u>	 103
- Integrales en el Contorno.....	103
- Comparación de Interpolaciones y Relación Lapso/Elemento.	104
- Conclusiones.....	126

3.- CALCULO DE FACTORES DE INTENSIDAD DE TENSION EN GRIETAS SOMETIDAS A CARGAS DINAMICAS TRANSITORIAS.

<u>3.1. Introducción.....</u>	129
 <u>3.2. Solución del Campo Elastodinámico en las</u> <u>Inmediaciones del Vértice de una Grieta que se</u> <u>Propaga con Velocidad C.....</u>	 129
 <u>3.3.- Cálculo de F.I.T. Dinámicos con el M.E.C.....</u>	 145
- Elementos Parabólicos a Un Cuarto.....	145
- Determinación del FIT a partir de las Variables Nodales.....	149

<u>3.4.- Problemas de Grietas en Modo simples. Modo I y II.....</u>	154
- FIT dinámico transitorio de una grieta finita en un medio elástico infinito, causado por la incidencia de una onda P.....	154
- FIT dinámico transitorio de una grieta finita en un medio elástico infinito, causado por la incidencia de una onda S.....	164
- Placa rectangular con grieta centrada.....	167
<u>3.5.- Problemas de Grietas en Modo Mixto.....</u>	176
- Placa con Grieta Centrada Oblicua.....	179
- Lámina con Grieta Asimétrica Inclínada 45°.....	185
- Grieta Finita en un Medio Infinito Sometida a una Onda Dilatacional Incidente a 60°.....	191

4.- ANALISIS DE LA PROPAGACION DE GRIETAS EN MATERIALES FRAGILES SOMETIDOS A SOLICITACIONES DINAMICAS.

<u>4.1.- Introducción.....</u>	199
<u>4.2.- Remallado Automático del Contorno.....</u>	201
<u>4.3.- Formulación del M.E.C. para Elementos de Contorno Móviles.....</u>	210
<u>4.4.- Núcleo Añadido a la Solución Fundamental en los Elementos Móviles.....</u>	233

<u>4.5.- Propagación de una Grieta Semi-Infinita en un Medio Infinito..</u>	249
Notas sobre la Solución Analítica.....	249
Resolución Mediante el M.E.C.....	254
<u>4.6.- Lamina Rectangular Finita con Grieta Centrada.....</u>	259
5.- CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS	
<u>5.1.- Conclusiones.....</u>	265
<u>5.2.- Desarrollos futuros.....</u>	270
REFERENCIAS.....	273

APENDICE A: Obtención del núcleo de tensiones de η_n constante por derivación del núcleo de desplazamientos de μ_n constante.

APENDICE B: Obtención del núcleo de tensiones de η_n constante por integración teniendo en cuenta la expresión singular de η_n .

CAPITULO I.-

INTRODUCCION

1.- Introducción

En ninguna estructura ingenieril, por la propia naturaleza de los materiales y la construcción, puede evitarse completamente la existencia de defectos tales como las grietas. Al mismo tiempo, el constante incremento en la demanda de energía y las aplicaciones cada vez más exigentes de la ingeniería, han conducido a que el diseño estructural se haga con cada vez más precisión, esto es con menores factores de mayoración. El diseño adecuado de los elementos estructurales, eliminando grandes concentradores de tensiones, así como un mantenimiento cuidadoso para reparar y/o sustituir los componentes defectuosos, han sido razonablemente efectivos en el pasado para evitar fallos catastróficos. Sin embargo, dos hechos recomiendan cambiar esta estrategia.

Primeramente, el desarrollo de las técnicas experimentales no-destructivas ha permitido encontrar defectos cuyo existencia era indetectable en el pasado. Por otra parte, la existencia de defectos en forma de grieta no siempre significa que el elemento esté al final (ni siquiera cerca) de su vida útil de servicio. El costo de la reparación y/o sustitución debe ser comparado con la posibilidad de que la continuidad en servicio conduzca a un fallo.

La Mecánica de la Fractura nació para dar respuesta a problemas como la correlación entre la capacidad de carga de un elemento estructural con la longitud, posición y forma, de una grieta que contenga en su interior dicho elemento; también se ocupa del problema de predecir la velocidad con que una grieta alcanza su longitud crítica creciendo por fatiga o por condiciones ambientales adversas. Puede ser usada la Mecánica de Fractura para predecir

los cambios de dirección en el crecimiento de una grieta, la posibilidad de bifurcación, y el estudio de la propagación rápida de grietas y su posible detención en el crecimiento.

Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal

Cuando se calculan mediante la Teoría de la Elasticidad Lineal los campos de tensiones y desplazamientos en las inmediaciones del vértice de una grieta, la solución obtenida predice unas tensiones infinitas justo en el vértice de la misma, cuya variación con la distancia a éste es de la forma $1/\sqrt{r}$. En la práctica esto no es posible, pues la mayoría de los materiales se deforman plásticamente una vez que se supera cierta combinación de tensiones crítica. Por tanto cerca del vértice existirá una región en la que el material se encontrará plastificado, y a continuación de esta el material trabajará en régimen elástico.

El modelo de Irwin (1958) para un material elasto-plástico ideal, permite aprovechar la solución elástica suponiendo una grieta de longitud mayor que la verdadera. Las tensiones cerca del vértice de esta grieta varían con $1/\sqrt{r}$ y se pueden calcular mediante la Teoría de la Elasticidad Lineal. Esta es la llamada Mecánica de la Fractura Elástico-Lineal (MFEL), dentro de cuyo ámbito se encuentra el trabajo desarrollado en esta tesis.

Cuando la deformación plástica que experimenta el material abarca una zona pequeña, es decir cuando el llamado radio plástico que caracteriza el tamaño de esta región es pequeño, la solución predicha con el modelo de Irwin es suficientemente aproximada. Esto es cierto en muchas situaciones bien por

la naturaleza frágil del material en estudio, o bien por las condiciones de carga que impiden que se desarrolle una extensa zona plástica.

En los casos en que la zona plástica sea suficientemente grande como para afectar significativamente al campo elástico adyacente, es necesario recurrir a la Mecánica de la Fractura Elasto-Plástica (MFEP). Si la zona plástica fuera aún mayor sería necesario un análisis mediante la Teoría de la Plasticidad.

El campo elástico de tensiones cerca de una grieta viene caracterizado por un parámetro llamado Factor de Intensidad de Tensiones (FIT). En general para las tensiones y desplazamientos se puede escribir,

$$\sigma = K f(\theta) / \sqrt{r}$$

$$u = K g(\theta) \cdot \sqrt{r}$$

donde r y θ son unas coordenadas polares centradas en el vértice de la grieta, f y g son dos funciones universales del ángulo θ , y K es el parámetro que se ha denominado FIT, y que recoge todos los aspectos relativos a la longitud, forma y posición de la grieta, geometría y propiedades físicas del material, así como condiciones de carga del problema en estudio.

Cada material, a su vez queda caracterizado por una magnitud llamada Factor de Intensidad Crítico o Tenacidad, K_{IC} , que es el FIT máximo que puede haber en una grieta incluida en dicho material antes de que se produzca la rotura.

La MFEL se basa en la hipótesis de que dos grietas distintas, en dos dominios de geometrías diferentes, de materiales con la misma Tenacidad, sometidos a cargas diversas, pero cuyos FIT resulten ser iguales, se encontrarán igualmente cerca o lejos del fallo por fractura.

Mecánica de la Fractura Elastodinámica Lineal

La Mecánica de la Fractura Elastodinámica Lineal (MFEDL) es una rama relativamente nueva de la MFEL, la cual trata del análisis de sólidos y estructuras fisurados teniendo en cuenta el efecto de las fuerzas de inercia. Los problemas que caen dentro del marco de esta disciplina pueden agruparse fenomenológicamente en, problemas de iniciación repentina, de propagación, de bifurcación y de detención de grietas. Bajo otro punto de vista, la Fractura Elastodinámica estudia:

- a) dominios con grietas estacionarias sometidas a cargas dinámicas, y el momento de su posible propagación,
- b) dominios con grietas propagándose rápidamente, sujetos a cargas cuasi-estáticas o dinámicas y el proceso de crecimiento y detención.

La importancia de los efectos de inercia en ciertos tipos de problemas ha sido demostrada por diversos autores (p.e. Hahn et al., 1973; Achenbach, 1974; François, 1979; Kalthoff, 1985; Kaninen y Popelar, 1985).

Existen diversas soluciones analíticas o semi-analíticas de problemas de

Fractura Dinámica, que ayudan a comprender los fenómenos involucrados en este tipo de problemas. Estas, sin embargo, están limitadas, a condiciones de carga simples, materiales simples y dominios planos de geometrías infinitas al menos, en una dirección.

El primer análisis dinámico relacionado con problemas de concentración de tensiones se remonta al trabajo de Clebsch (1863), que analizó la difracción de ondas elásticas por una inclusión esférica. Ya en este siglo De Hoop (1958) estudio la difracción de un pulso plano por una grieta semiinfinita en un medio infinito bidimensional. Sih y Loeber (1969) calcularon los factores de intensidad de tensión en una grieta de longitud finita en un dominio bidimensional infinito sometida a la incidencia de ondas armónicas dilatacionales y/o transversales procedentes del infinito. Thau y Lu (1971) estudiaron el mismo problema en el dominio del tiempo, hallando la solución para el intervalo de tiempo comprendido entre la incidencia de la onda original en un vértice, hasta el momento en que las ondas difractadas en dicho vértice inciden en segundo vértice y, nuevamente difractadas, retornan al primero. Otros investigadores obtuvieron el año siguiente la solución de este problema para un intervalo de tiempo mayor, aunque con menor precisión (Sih, Embley y Ravera, 1972). Freund (1973) presentó un método de resolución alternativo al problema de De Hoop, utilizando el concepto de dislocación. Itou resolvió el caso de dos grietas coplanarias tanto bajo condiciones de carga armónicas, el dominio de la frecuencia, como en el dominio del tiempo (Itou, 1978 y 1980). Angel y Achenbach (1983) analizaron en el dominio de la frecuencia el problema de una grieta de ancho finito, en un semi-espacio bidimensional, paralela a la superficie del mismo. Lin, Keer y Achenbach (1984) resolvieron el problema anterior para el caso más general en que la grieta está inclinada respecto a la superficie del semi-plano.

El análisis de dominios finitos fisurados, con materiales complicados y sujetos a tipos de cargas generales, sólo pueden acometerse con la ayuda de métodos numéricos, los cuales han visto ampliarse grandemente el rango de su aplicaciones en los últimos quince años. Antes de revisar las contribuciones más importantes en este campo, vamos a presentar unas breves notas sobre algunos aspectos básicos del problema que se pretende resolver.

Aspectos Básicos de la Mecánica de la Fractura Dinámica

La revisión que se presenta a continuación se refiere a dominios elásticos bidimensionales (Beskos, 1987).

Los campos de tensiones y desplazamientos junto al vértice de una grieta estacionaria bajo condiciones de cargas cualesquiera, tienen la forma, similar a la estática,

$$\sigma_{ij} = \sum_{\mathbf{M}} \frac{K_{\mathbf{M}}(t)}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{\mathbf{M}}(\theta) \quad (1)$$

$$u_i = \sum_{\mathbf{M}} \frac{K_{\mathbf{M}}(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^{\mathbf{M}}(\theta) \quad (2)$$

donde M=I, II, III denotan los modos de fractura, r y θ son coordenadas polares con origen en el vértice de la grieta y $K_M(t)$ es el Factor de Intensidad de Tensión Dinámico (FITD), el cual depende del tiempo, la longitud de la grieta, la velocidad de variación de la carga σ y las condiciones de contorno. Las tensiones y desplazamientos correspondientes a una grieta propagándose son,

$$\sigma_{ij} = \sum_M \frac{K_M(t, \dot{a})}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^M(\theta, \dot{a}) \quad (3)$$

$$u_i = \sum_M \frac{K_M(t, \dot{a})}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i^M(\theta, \dot{a}) \quad (4)$$

donde \dot{a} indica la velocidad del vértice de la grieta, r y θ son unas coordenadas polares móviles con el vértice y $K_M(t, \dot{a})$ son los FITD's de una grieta móvil. Estos factores pueden expresarse como (Freund, 1973; Kostrov, 1975; Rose, 1976),

$$K_M(t, \dot{a}) = k_M(\dot{a}) K_M^*(t) \quad (5)$$

donde $k_M(\dot{a})$ son los factores de velocidad y $K_M(t)$ son los FITD's correspondientes a la longitud de grieta instantánea.

Para una grieta propagandose conservando su forma, bajo condiciones bidimensionales, la variación de la energía liberada viene dada por,

$$G = \frac{\dot{a}_k}{a} G_k, \quad G_k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} [(W + K) n_k - p_i u_{i,k}] dS \quad (6)$$

siendo \dot{a}_k la componente según el eje global X_k ($k=1, 2$) de la velocidad, G_k es la energía liberada debida a un crecimiento unidad a lo largo del eje X_k , Γ_ϵ es un contorno arbitrario cerrado alrededor del vértice de la grieta, $W=1/2 \cdot \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij}$ es la densidad de energía de deformación, $K = 1/2 \cdot u_i \cdot u_i$ la densidad de energía cinética, n_k son las componentes de la normal al contorno de integración, y p_i y u_i son las componentes de las tracciones y desplazamientos a lo largo del contorno Γ_ϵ , respectivamente. Sustituyendo las tensiones singulares (3) y sus desplazamientos asociados (4) en la ecuación (6) resulta,

$$G_I = \frac{1}{2\mu} \left[K_I^2(t, \dot{a}) A_I(\dot{a}) + K_{II}^2(t, \dot{a}) A_{II}(\dot{a}) + K_{III}^2(t, \dot{a}) A_{III}(\dot{a}) \right]$$

$$G_2 = - \frac{1}{\mu} K_I(t, \dot{a}) K_{II}(t, \dot{a}) A_{IIV}(\dot{a}) \quad (7)$$

donde $A_I(\dot{a}) - A_{IIV}(\dot{a})$ son funciones universales de la velocidad de crecimiento, cuya expresión explícita puede encontrarse en Nishioka y Atluri (1983a). Las relaciones anteriores son válidas para grietas estacionarias cuando $\dot{a} \rightarrow 0$.

Las integrales independientes del camino de integración, juegan un papel muy importante en la resolución de problemas de Mecánica de la Fractura Dinámica por métodos numéricos, principalmente en el conocido Método de los Elementos Finitos. Nishioka y Atluri (1983a) desarrollaron una integral de este tipo, J_k para grietas propagándose elastodinámicamente, la cual es equivalente a la variación de la energía liberada G_k . Esta integral viene definida por el límite,

$$J_k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma + \Gamma_\epsilon} [(W + K) n_k - p_i u_{i,k}] dS + \int_{V_{\Gamma + V_\epsilon}} [\rho \ddot{u}_i u_{i,k} - \dot{u}_i \dot{u}_{i,k}] dS \quad (8)$$

Para un material cuyo comportamiento sea elástico, los criterios que gobiernan la iniciación, propagación y detención de una grieta, suelen basarse en el concepto del FITD's, cuando por las condiciones de carga el problema está regido por uno sólo de los factores K_M , es decir en los problemas de modos puros o simples. Así, el criterio de iniciación del crecimiento de una grieta estacionaria sometida a cargas dinámicas es,

$$K = K_d(\dot{\sigma}) \quad (9)$$

donde K_d es la tenacidad dinámica a la iniciación, mientras que para una grieta que se está propagando dinámicamente bajo cargas cuasi-estáticas o dinámicas,

$$K = K_D(\dot{a}) \quad (10)$$

siendo K_D la tenacidad dinámica a la propagación. La detención de la grieta ocurrirá cuando

$$K \leq K_D(\dot{a} = 0) = K_D(0) \quad (11)$$

donde $K_D(0)$ denota la tenacidad dinámica de detención de fractura del material. Los valores K_d , $K_D(\dot{a})$ y $K_D(0)$ se obtiene experimentalmente. Los criterios de fractura pueden escribirse en función de la magnitud G utilizando las ecuaciones (7). En algunos casos muy simples se han usado criterios basados en tensiones críticas (p.e. Das y Aki, 1977) los cuales son una extensión inmediata al caso dinámico de la teoría de fractura de Irwin (Irwin, 1958).

Para problemas bidimensionales de modo mixto, es decir, en los que

interviene más de un FITD , puede usarse el criterio basado en la densidad de energía de deformación, para predecir tanto la velocidad de crecimiento de la grieta como su dirección (Sih, 1977; Ramulu y Kobayashi, 1983; Valliappan y Murti, 1985). Se basa en el factor de densidad de deformación S , definido como el producto de la densidad de energía de defomación W y el radio r_0 de una región interna centrada alrededor del vértice de la grieta y que tiene la forma

$$S = A_{ij}(\theta) K_i K_j \quad i, j = I, II \quad (12)$$

La iniciación de la propagación tiene lugar en una dirección θ_0 determinada por las condiciones de mínimo de S , es decir,

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} \geq 0 \quad (13)$$

mientras que la extensión ocurre cuando S en $\theta = \theta_0$ alcanza un valor crítico S_c que depende del material.

En general, los estudios de propagación de grietas en Dinámica de la Fractura pueden ser o bien, 'directos' o de 'generación', o bien 'inversos' , de 'propagación' o 'aplicación' (Kanninen, 1978; Kobayashi, 1979; Nishioka y Atluri, 1980). El primer tipo de estudios se ocupa de la determinación de los FITD's para una grieta propagandose con velocidad prescrita (no

necesariamente constante), sometida a cargas, en general dinámicas, mientras que el segundo tipo trata de la determinación de la historia de propagación del vértice de la grieta, bajo cargas dinámicas, para una resistencia a la fractura dinámica $K_D(\dot{a})$ conocida.

Métodos Numéricos de Resolución de Problemas de la Dinámica de la Fractura

Existen aproximaciones numéricas específicas para ciertos tipos de problemas de la Fractura Dinámica, sin embargo aquí se van a considerar los tres métodos de más amplia aplicación en la Mecánica de los Medios Continuos como son, el Método de las Diferencias Finitas (MDF), el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC) dentro del cual se encuadra el trabajo realizado en esta tesis.

El Método de las Diferencias Finitas es el más antiguo de los mencionados. Su principal ventaja reside en la simplicidad conceptual de su planteamiento, pues se basa en aproximar, sustituyendo las derivadas por diferencias finitas, las ecuaciones diferenciales que rigen el problema considerado, en una malla de puntos escogidos en el dominio en estudio. Su principal desventaja se encuentra en la dificultad de modelar problemas de geometría complicada. Chen y Wilkins emplearon el MDF para la resolución de diversos problemas de Fractura Dinámica, tanto bi- como tridimensional utilizando un programa de ordenador originalmente desarrollado por Wilkins (1964). Chen (1975) resolvió problemas de grietas estacionarias bidimensionales bajo carga dinámica. Chen y Wilkins (1976, 1977) calcularon los FITD's de diversos problemas de grietas estacionarias en dominios tridimensionales y cilíndricos. También resolvieron problemas dinámicos

bidimensionales con grietas estacionarias, pero considerando un comportamiento elasto-plástico del material. Para la resolución de problemas de propagación de grietas mediante el MDF se han propuesto diversas alternativas. Shmuley y Alterman (1973) emplearon una malla estacionaria y se simulaba el crecimiento de la grieta eliminando las ligaduras entre los nodos adyacentes situados junto al vértice de la grieta. Aboudí (1976) y Aboudi y Achenbach (1981) estudiaron problemas bidimensionales elásticos y elasto-viscoplásticos, respectivamente, mediante una malla de puntos que se movía como un todo a la vez que lo hacía el vértice de la grieta. El principal inconveniente de esta técnica es la imposibilidad de estudiar fisuras en dominios finitos. Shmuely, Perl y Betser en diversas publicaciones (Shmuely y Perl, 1978; Perl, 1980; Perl, Shmuely y Betser, 1980) presentaron una técnica con todas las ventajas de las dos anteriores y sin sus inconvenientes, dividiendo el dominio en dos zonas, una centrada alrededor del vértice de la grieta y que se mueve con éste, y otra, que abarca el resto del dominio que permanece estacionaria.

El Método de los Elementos Finitos es el más popular de los métodos mencionados (MDF, MEF, MEC) por la relativa facilidad con que pueden tenerse en cuenta geometrías y comportamientos del material complicados.

El estudio del campo de tensiones elastodinámicas alrededor de una grieta estacionaria y la determinación del correspondiente FITD ha sido acometido de muy diversas maneras dentro del MEF. Podemos mencionar las siguientes:

a) Elementos singulares alrededor del vértice de la grieta:

Los elementos singulares están desarrollados a partir de la solución asintótica de los campos de tensiones y desplazamientos alrededor del vértice de una grieta, bien estática, o bien dinámica, y pretenden contener en su formulación un número suficiente de términos de este desarrollo para simular el campo singular de tensiones. Los factores K_M aparecen como coordenadas generalizadas del problema y se obtienen directamente como parte de la solución. Pueden mencionarse los trabajos pioneros de Morgan, Anderson y King (1974) y Anderson, Aberson y King (1975). Mall (1980) empleó un elemento isoparamétrico degenerado (elemento a un cuarto), que aunque recoge solamente el primer término del desarrollo asintótico de los desplazamientos, proporciona a partir de estos una aceptable aproximación de los FITD's, teniendo en cuenta el bajo costo computacional que supone. Murti y Valliappan (1986) aplican esta técnica en un exhaustivo estudio, que incluye problemas tanto de modos simples como mixtos.

b) Elementos convencionales alrededor del vértice de la grieta.

Los factores de intensidad de tensión se calculan mediante algún tipo de calibración estática o con integrales dinámicas independientes del contorno de integración. El primer método ha sido usado con cierto éxito por Bazant y Celep (Bazant, 1978; Bazant y Celep, 1980), mientras que el segundo ha sido usado, entre otros, por Mall (1980), Kishimoto, Aoki y Sakata (1980) y Ostlund y Gudmundson (1987).

Los métodos de resolución mediante el MEF de los problemas de propagación de grietas bidimensionales pueden encuadrarse en tres categorías:

a) Malla móvil con elementos finitos regulares:

Bazant, Glaziz y Achenbach (1978) y Ostlund y Gudmundson (1987) emplean este método calculando el FITD calibrándolo a partir del valor estático conocido. Igual que ocurría en el caso del MDF esta técnica no permite estudiar geometrías finitas en la dirección de propagación de la grieta.

b) Malla estacionaria con elementos regulares y mecanismos de liberación de nodos.

Es similar en su concepción al método presentado para el MDF. Keegstra (1976) propuso una liberación gradual de los nodos situados en el vértice de la grieta, relacionando linealmente la fuerza que los liga con su separación normal al eje de la fisura, lo cual reduce las oscilaciones producidas por la liberación brusca y consecutiva de nodos conforme la grieta avanza. El FITD puede calcularse a partir de la velocidad de liberación de energía G , que puede computarse con el trabajo realizado por las fuerzas de relajación entre nodos en el vértice de la grieta (Rydholm et al., 1978), o bien a partir de ciertas integrales dinámicas independientes del contorno que pueden relacionarse con los FITD's (Nakamura, Shih y Freund, 1985; Aoki, Kisimoto y Sakata, 1987).

c) Malla estacionaria y elementos móviles en el vértice.

Estos elementos móviles pueden ser regulares o singulares. En el primer caso el cálculo del FITD puede realizarse con alguna de las técnicas expuestas anteriormente (Kishimoto, Aoki y Sakata, 1987), mientras que en el segundo el FITD se obtiene directamente del cálculo, o bien, en el caso de elementos a un cuarto, a partir de los desplazamientos (p. e., Aoki, Kisimoto, Kondo y

Sakata, 1978; Nishioka y Atluri, 1980).

Murti y Valliappan (1986) han considerado el caso general de propagación en modo mixto, en el cual tanto la velocidad como la dirección de propagación han de ser determinadas como parte de la solución.

Por estar enmarcada la presente tesis dentro del ámbito del Método de los Elementos de Contorno, antes de describir las contribuciones a la Fractura Dinámica, obtenidas hasta la fecha utilizando este método, va a revisarse brevemente su desarrollo histórico y aspectos básicos del mismo.

El Método de los Elementos de Contorno: Orígenes y Desarrollo.

Las primeras referencias en las que aparece el Método de los Elementos de Contorno, en una forma muy similar a la que hoy conocemos se remontan a menos de 30 años (Jawson, 1963; Kupradze, 1963). En ellas se trataba el problema de resolver la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \omega = 0 \tag{14}$$

en un dominio D , bajo ciertas condiciones de contorno en ω o en el flujo $\partial\omega/\partial n$.

El problema anterior puede ser expresado en forma integral mediante,

$$\pi \omega(p) - \int_L \left[\omega(q) \frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \omega(q)}{\partial \mathbf{n}} \ln r \right] dL(q) \quad (15)$$

donde p es un punto del contorno (se supone que existe una única normal en cada punto del mismo), y r es la distancia entre dicho punto p y los puntos q de integración.

En cada punto q , es conocido a priori, o bien el potencial ω o bien su derivada respecto a la normal $\partial\omega/\partial\mathbf{n}$. Se puede 'resolver' la ecuación (15), considerada como una ecuación integral para la parte desconocida ω o $\partial\omega/\partial\mathbf{n}$ en cada punto. Hecho esto la ecuación (15) puede particularizarse para un punto p del interior del dominio (el factor que multiplica a $\omega(p)$ en el primer miembro, es en este caso 2π), con lo cual puede calcularse $\omega(p)$ mediante una mera cuadratura.

La principal característica de este planteamiento es que reduce efectivamente en uno la dimensión del problema a tratar. Un problema bidimensional conduce a una ecuación integral monodimensional y uno tridimensional a una bidimensional.

En la práctica, es normalmente imposible llevar a cabo el método de resolución descrito por medios puramente analíticos.

Es interesante resaltar que aunque la misma ecuación puede obtenerse a partir de conceptos como residuos ponderados, mínimos cuadrados o principios variacionales (p.e. Brebbia y Dominguez, 1989), los cuales pueden ser ilustrativos para ciertos aspectos del método y su relación con otros

métodos, no deben enmascarar el hecho de que no es necesaria ninguna aproximación para reducir el problema del dominio al contorno.

Rizzo (1967) extendió este planteamiento integral al caso de la Teoría de la Elasticidad bidimensional, en ausencia de fuerzas de dominio partiendo del teorema de Betti (1872). Los primeros resultados numéricos de un problema de elasticidad obtenidos a partir de esta representación integral aparecieron también en esa temprana publicación del año 1967. Cruse publicó los primeros resultados aplicados a problema elásticos tridimensionales (Cruse, 1969), así como una formulación para el problema elasto-dinámico (Cruse y Rizzo, 1968).

Con rapidez se extendieron las aplicaciones del método basado en la formulación integral (denominado por entonces Método de las Ecuaciones Integrales de Contorno, BIEM en sus siglas inglesas). Cruse y sus colaboradores lo aplicaron con éxito a problemas tridimensionales de concentración de tensiones y de grietas en particular (Cruse y Vanburen, 1971) y a problemas tridimensionales de comportamiento elasto-plástico (Cruse y Swedlow, 1971). Rizzo y Shippy hicieron rápidos progresos en aplicaciones bidimensionales en conducción de calor, elasticidad anisótropa, problemas de inclusiones y viscoelasticidad (Rizzo y Shippy, 1968, 1970a y b, 1971).

Lachat y Watson dieron un impulso definitivo a la difusión, flexibilidad y eficiencia del Método de los Elementos de Contorno, incorporando en él procedimientos sistemáticos de representación de funciones, empleando las llamadas funciones de forma, de uso ya extendido en el Método de los Elementos Finitos (Lachat y Watson, 1976).

El nombre de Método de los Elementos de Contorno con que hoy se conoce a esta técnica, se originó en Southampton alrededor de 1976, y el éxito de su elección se demuestra por su rápida difusión y aceptación.

Desarrollo del Método de los Elementos de Contorno en la Elasto-Dinámica

Aunque la formulación integral elastodinámica era bien conocida desde bastante tiempo atrás, el desarrollo del MEC en elastodinámica es relativamente reciente. El primer trabajo en este campo se debe a Banaugh y Goldsmith (1963) para problemas planos en el dominio de la frecuencia. En el trabajo citado de Cruse y Rizzo (1968), los autores resolvieron un problema de propagación de ondas en el semi-espacio infinito utilizando la transformada de Laplace. Niwa, Kobayashi y Azuma (1975) resolvieron diversos problemas elastodinámicos planos en el dominio de la frecuencia y calcularon la respuesta en el tiempo mediante la transformada de Fourier. Domínguez (1978a y b) fue el primero en emplear esta técnica para el estudio de la respuesta dinámica en el dominio de la frecuencia de cimentaciones rígidas superficiales y enterradas. En el mismo campo son de destacar los trabajos posteriores de Apsel (1979), Abascal y Domínguez (1984) y Karabalis y Beskos (1984). Cole, Kosloff y Minster (1978) presentaron por primera vez, una formulación general del MEC en el dominio del tiempo, aunque la aplicaron únicamente a problemas elastodinámicos anti-planos. Niwa, Fukio, Kato y Fujiki (1980) fueron los primeros en presentar y aplicar el MEC en el dominio del tiempo para problemas bidimensionales, mientras que Karabalis y Beskos (1984) hacían lo propio para el caso tridimensional.

Nardini y Brebbia (1983, 1985) han desarrollado una formulación del

MEC en elastodinámica (método de la reciprocidad dual o método de la matriz de masa equivalente), basándose en la solución fundamental estática. El atractivo de esta formulación es que se llega a una ecuación similar a la del MEF para el problema dinámico, $M\ddot{x} + Kx = F(t)$, de menor orden que en este último método, pues las incógnitas sólo están en el contorno, aunque las matrices M y K no son en general simétricas.

Aplicación del MEC a la Mecánica de la Fractura

El planteamiento de integrales sobre el contorno en que se basa el MEC conduce a un sistema de ecuaciones mal condicionado si se intenta aplicar directamente al problema de una grieta infinitamente delgada, debido a la superposición física de ambas superficies de la fisura. Este problema se resuelve fácilmente para situaciones con simetría alrededor de un eje o plano que contenga a la grieta, mientras que en el caso general se soluciona seccionando el dominio con un contorno ficticio que pasa a través de la grieta, como se verá en las aplicaciones en la Fractura Dinámica de esta tesis.

Es conveniente resaltar que en la formulación integral de la que procede el MEC, las tracciones en el contorno forman parte de la solución que hay que obtener, y no se derivan por diferenciación de los desplazamientos, como ocurre en los otros dos métodos de dominio (MDF y MEF), lo cual aumenta la precisión en el cálculo de estas variables.

Para el cálculo del FIT mediante el MEC se pueden emplear algunas técnicas similares a las utilizadas en el MDF y el MEF, y otras particulares de este método. Sin embargo, muchas de ellas se hayan aún por desarrollar en el

campo de la Fractura Dinámica.

Existen diversas formulaciones integrales especialmente diseñadas para problemas de Fractura Dinámica desarrolladas entre otros por Kobayashi (1986) y Niwa y Hirose (1986).

Dentro del estudio de concentraciones de tensión Benitez (1984a y b) fue el primero en considerar el problema dinámico en el dominio de la transformada de Laplace de un espécimen con dos entallas centrales, aunque no calculó la respuesta en el tiempo, anti-transformando la solución obtenida.

En el campo de la difracción de ondas pueden citarse los trabajos de Achenbach y Brind (1981) y Chirino y Domínguez (1989). Estos últimos utilizaron el MEC estándar en el dominio de la frecuencia, en conjunción con un elemento singular a un cuarto para representar la evolución de las tensiones en las inmediaciones del vértice, a partir del cual se obtiene directamente el FITD con excelentes resultados. Mediante la anti-transformada de Fourier de su solución estos autores resolvieron una serie de problemas en el dominio del tiempo. El elemento de contorno singular a un cuarto fue desarrollado para la Fractura Estática por Blandford, Ingraffea y Liggett (1981), mientras que Martínez y Domínguez (1984) ofrecieron un procedimiento alternativo más eficiente de cálculo del FIT a partir de la solución obtenida para las variables del elemento singular. El método propuesto por estos autores es el seguido en esta tesis empleando la formulación del MEC en el dominio del tiempo.

Sládek y Sládek (1986) han desarrollado un procedimiento basado en el MEC convencional en el dominio de la transformada Laplace para la

determinación del FITD para grietas estacionarias en dominios planos elásticos o visco-elásticos.

Recientemente, Geis (1989), ha publicado un trabajo en el que presenta la aplicación de un método de la matriz de masa equivalente, similar al de Nardini y Brebbia (1983,1985), junto a un elemento de contorno a un cuarto no singular para representar los desplazamientos de los labios de la grieta. Para resolver problemas de modo mixto Geis no divide el dominio en dos, como se propone en esta tesis, sino que para evitar la singularidad que supone para el MEC una grieta infinitamente delgada, considera una pequeña distancia ϵ entre ambas caras de la fisura.

Se han desarrollado diversas formulaciones integrales en el dominio del tiempo, para problemas de propagación de grietas en dominios elásticos bi- y tridimensionales, pero exclusivamente de dimensiones infinitas. Burridge (1969) fue el primero en resolver de esta forma, problemas de propagación de grietas en dominios planos. Sin embargo, su análisis se limitó al caso de velocidad de propagación constante. Das y Aki (1977) resolvieron problemas antiplanos de propagación de grietas utilizando técnicas de liberación de nodos. Das y Aki (1980, 1981) extendieron este método a problemas tridimensionales. Posteriores desarrollos de esta metodología, limitados siempre a dominios infinitos, pueden encontrarse en Andrews (1985), Das (1985) y Das y Kostrov (1987).

Objeto y Objetivo de la Tesis.

Como se ha puesto de manifiesto en los apartados anteriores, el Método

de los Elementos de Contorno es una técnica relativamente reciente con aplicaciones algunas perfectamente establecidas y otras muy prometedoras. La formulación del MEC en el campo de la Elastodinámica en el dominio del tiempo, es conocida de antiguo, y sin embargo, en sus aplicaciones prácticas existe cierta confusión acerca de los núcleos de la expresión integral en que se basa el método. De hecho, existen publicaciones que comparan formulaciones aparentemente distintas, que resultan ser las mismas como se demostrará en el segundo capítulo de esta tesis (Manolis, 1983; Spyrakos y Antes, 1988).

En ese mismo capítulo se analizarán los resultados del MEC para diferentes problemas elastodinámicos bidimensionales, a fin de establecer relaciones y recomendaciones sobre las discretizaciones espacial y temporal.

En el campo de la Mecánica de la Fractura el MEC posee ciertas ventajas respecto a otros métodos numéricos aparte de las generales inherentes a su planteamiento de contorno, a partir de soluciones fundamentales conocidas. Al formar parte del sistema de ecuaciones las tensiones del contorno, la aproximación en éstas puede ser del orden deseado, sin tener que depender de la interpolación escogida para los desplazamientos. Estas tensiones pueden servir de base para algún procedimiento extrapolatorio de cálculo del FIT más directo que a partir de los desplazamientos.

Los ya citados trabajos de Martínez y Domínguez (1984) y Chirino y Domínguez (1989) demostraron que el uso del elemento singular a un cuarto para calcular el FIT en problemas de concentración de tensiones, en combinación con el MEC convencional, producía resultados excelentes, tanto en estática como en dinámica del dominio de la frecuencia. Teniendo en cuenta que la singularidad en tensiones es la misma en el caso de la Fractura

Dinámica en el dominio del tiempo, en esta tesis se propone el uso de este elemento singular para este tipo de problemas.

En el tercer capítulo se estudia el problema general de la Fractura Dinámica, de una grieta propagándose con velocidad variable C . A continuación se estudiarán diversos problemas, tanto finitos como infinitos, de fisuras estacionarias ($C = 0$) bajo cargas dinámicas, en modos simples y mixtos de fractura, con la formulación del MEC en elastodinámica plana junto al elemento singular propuesto.

En el cuarto capítulo se dedica al más complicado problema de propagación de grietas. En él se describirán las técnicas de remallado adoptadas y los cambios que aparecen en las ecuaciones integrales para tener en cuenta el movimiento de los grados de libertad del sistema. Se resolverán algunos problemas de propagación de grietas en modo I para ilustrar la calidad de la formulación desarrollada.

CAPITULO II.-

EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

2.1.- Ecuaciones Generales de la Elastodinámica

En este apartado van a revisarse brevemente las ecuaciones generales que gobiernan los campos dinámicos de desplazamientos y tensiones en un medio bidimensional elástico, lineal, isótropo y homogéneo. Un desarrollo completo de la formulación que aquí se resume puede encontrarse en el libro de Eringen y Suhubi (1975).

Ecuaciones de Navier. Ecuaciones de Compatibilidad y de Comportamiento. Potenciales de Lamé

La ecuación de equilibrio de la elasticidad bajo fuerzas dinámicas, expresada en función de los desplazamientos, es la llamada ecuación de Navier:

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1)$$

donde λ es la constante de Lamé, μ el módulo de rigidez transversal, \mathbf{u} el vector de desplazamientos dependiente de la posición y del tiempo, \mathbf{f} el vector de fuerzas de dominio, también variable en general con la posición y el tiempo, y ρ la densidad del medio. Cada punto sobre una variable, en este caso \mathbf{u} , representa una derivación parcial de la variable respecto al tiempo. El símbolo ∇ , representa el operador vectorial diferencial llamado nabla, que en coordenadas cartesianas bidimensionales, aplicado sobre una función vectorial cualquiera \mathbf{f} , de componentes f_x y f_y , viene dado por la igualdad, $\nabla(\mathbf{f}) = \mathbf{i} \partial(f_x)/\partial x + \mathbf{j} \partial(f_y)/\partial y$, siendo \mathbf{i} y \mathbf{j} los vectores unitarios en dirección de los ejes cartesianos x e y , respectivamente.

Esta ecuación de equilibrio rige el campo de desplazamientos en la región Ω de contorno Γ , ocupada por el cuerpo. Para completar el planteamiento matemático del problema, es necesario considerar restricciones adicionales. Estas son, las condiciones iniciales, y las condiciones de contorno. Las primeras son ecuaciones de la forma:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

siendo \mathbf{u}_0 y \mathbf{v}_0 funciones vectoriales conocidas, dependientes únicamente de la posición.

Las condiciones en el contorno, en un caso de condiciones mixtas, vienen dadas por las ecuaciones,

$$u_i(\mathbf{x},t) = \bar{u}_i(\mathbf{x},t) \quad i = 1, 2 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (3.1)$$

$$p_i(\mathbf{x},t) = \bar{p}_i(\mathbf{x},t) \quad i = 1, 2 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (3.2)$$

siendo Γ_1 y Γ_2 porciones disjuntas del contorno total Γ , tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$; la letra p_i , se utiliza para las componentes de la tensión en el contorno, en vez de la habitual t , que se reserva para denominar a la variable tiempo, a fin de evitar confusiones; u_i representa cada una de las componentes del vector \mathbf{u} ; Las funciones vectoriales \mathbf{u} y \mathbf{p} conocidas, están definidas,

solamente, en los subcontornos correspondientes, y varían, en general, con las coordenadas espaciales sobre dichos subcontornos y el tiempo.

El tensor de deformaciones se expresa mediante la ecuación:

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

donde una variable seguida de una coma y de un índice, significa la derivada parcial de dicha variable respecto de la coordenada espacial correspondiente a ese índice. El tensor de deformaciones es de segundo orden y simétrico, como se desprende de la ecuación anterior.

A partir de este tensor de deformaciones, es posible calcular el tensor de tensiones, mediante las ecuaciones de comportamiento o ley de Hooke, que relacionan linealmente los términos de estos dos tensores,

$$\sigma_{ij} = 2 \mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} \quad (5)$$

con μ y λ , las constantes elásticas introducidas al principio del apartado; se ha empleado el criterio de adición de Einstein, que establece que dos índices repetidos significa el sumatorio extendido a todo el rango de variación de dichos índices; en el caso bidimensional los índices varían entre 1 y 2; δ_{ij} simboliza la delta de Kronecker, que se define como $\delta_{ij}=0$, si $i \neq j$, y $\delta_{ij}=1$, si $i=j$. Tanto las componentes del tensor de deformaciones como las del tensor de tensiones, dependen de la posición y el tiempo en un problema general elastodinámico.

Si se sustituyen las deformaciones definidas por la ecuación (4) en esta última, se obtiene una relación directa entre el campo de tensiones, y el campo de desplazamientos,

$$\sigma_{ij} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{m,m} \delta_{ij} \quad (6)$$

Conocido el tensor de tensiones, por equilibrio puede calcularse el vector de tensiones en un punto del contorno, en el que la normal sea \mathbf{n} , mediante la fórmula:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (7)$$

ecuación en la que se emplea de nuevo el criterio de adición de Einstein, y donde p_i representa las componentes del vector tensión, y n_j , las componentes de la normal \mathbf{n} . Finalmente, sustituyendo la expresión del tensor de tensiones en función de los desplazamientos, en la ecuación anterior, se obtiene la relación directa entre éstos y las tensiones en el contorno,

$$p_i = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda u_{m,m} n_i \quad (8)$$

La integración de estas ecuaciones en desplazamientos, después de imponer las condiciones iniciales y de contorno, para obtener el vector \mathbf{u} , a

partir del cual pueden calcularse el resto de variables del problema, es un problema usualmente muy difícil. El proceso de integración puede simplificarse sometiendo a la variable dependiente \mathbf{u} , a una transformación adecuada, la cual convierta las ecuaciones en otras menos complejas y familiares. La más útil y simple de estas transformaciones es la llamada de los potenciales de Lamé, que se resume a continuación para poner de manifiesto la forma en que las ondas se transmiten en el dominio elástico y que será de utilidad a la hora de obtener la llamada 'solución fundamental', como se verá más adelante.

Esta transformación se basa en que todo vector \mathbf{f} suficientemente suave puede representarse como suma de una componente irrotacional y otra solenoidal. Así el vector de fuerzas de dominio \mathbf{f} se puede escribir como:

$$\mathbf{f} = \nabla f + \nabla \times \mathbf{F} \quad (9)$$

El primer término representa la componente irrotacional pues, por las propiedades del operador nabla, $\nabla \times \nabla f = 0$, mientras que el segundo es solenoidal, ya que $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$.

Aplicando esta descomposición al campo de desplazamientos \mathbf{u} ,

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \Psi \quad (10)$$

donde las funciones $\phi(\mathbf{x},t)$ y $\Psi(\mathbf{x},t)$ son, respectivamente, escalar y vectorial, y dependen de la posición y el tiempo.

Introduciendo estas descomposiciones en la ecuación de Navier (1), el cumplimiento de la misma se asegura si los potenciales ϕ y Ψ , satisfacen las ecuaciones:

$$c_1^2 \nabla^2 \phi + f = \ddot{\phi} \quad (11.1)$$

$$c_2^2 \nabla^2 \Psi + F = \ddot{\Psi} \quad (11.2)$$

donde c_1 y c_2 , tienen dimensiones de velocidad y tienen un sentido físico concreto, representando respectivamente, la velocidad a que viajan las ondas dilatacionales o irrotacionales, y la velocidad con que se propagan en el medio las ondas transversales. Estas cantidades son características del material y se relacionan con sus constantes elásticas y su densidad por las ecuaciones $c_1 = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}$, $c_2 = (\mu/\rho)^{1/2}$. Puede observarse que se cumple siempre que $c_1 > c_2$, por lo cual las ondas dilatacionales reciben también el nombre de ondas P, del latín *primae* y las transversales, ondas S, de *secundae*. El operador diferencial escalar ∇^2 , que se lee, nabra cuadrado, viene dado, en coordenadas cartesianas por la expresión $\nabla^2(.) = \partial^2(.)/\partial x^2 + \partial^2(.)/\partial y^2$. Hay que señalar que, con la representación mediante las funciones ϕ y Ψ , se ha aumentado en uno el número de incógnitas; esto permite introducir una relación adicional entre ϕ y Ψ . Esta ecuación suele ser que el vector Ψ sea solenoidal, es decir, que tenga divergencia nula. La demostración de que la representación mediante las ecuaciones (11), y esta condición adicional, es completamente equivalente a la ecuación de Navier, puede encontrarse en la referencia citada (Eringen y Suhubi, 1975)

Teorema de Reciprocidad en Elastodinámica.

El teorema que se va a enunciar a continuación, constituye una extensión del teorema de reciprocidad clásico de Betty-Rayleigh de la elastostática. El teorema establece una relación que han de cumplir cualquier par de estados elastodinámicos definidos sobre el mismo dominio.

Llamamos un estado elastodinámico, definido en un dominio Ω , de contorno Γ , y en un intervalo de tiempo T , a un par ordenado $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}]$, siendo \mathbf{u} un campo de desplazamientos y $\boldsymbol{\sigma}$, un tensor de tensiones, definidos en $\Omega \times T$, correspondientes a unas fuerzas de volumen \mathbf{f} , densidad ρ , una velocidad de ondas P, c_1 , y una velocidad de ondas S, c_2 , y lo simbolizamos con:

$$S(\mathbf{f}, \rho, c_1, c_2; \Omega \times T) = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}] \quad (12)$$

si se cumplen:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \mathbf{u} \in C^{2,2}(\Omega \times T) \cap C^{1,1}(\Gamma \times T), \quad \boldsymbol{\sigma} \in C^{0,0}(\Omega \times T), \quad \mathbf{f} \in C^{0,0}(\Omega \times T), \\ & \rho > 0, \\ & 0 < 2/\sqrt{3} c_2 < c_1 \end{aligned}$$

b) $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{f}, \rho, c_1, c_2$, satisfacen las ecuaciones de equilibrio en el dominio (1), y comportamiento-compatibilidad (6).

Dados dos estados elastodinámicos, tal como se ha definido, sobre un mismo dominio, con iguales características físicas,

$$S(f, \rho, c_1, c_2; \Omega \times T) = [u, \sigma] \quad (13.1)$$

$$S'(f', \rho, c_1, c_2; \Omega \times T) = [u', \sigma'] \quad (13.2)$$

y con condiciones iniciales,

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x) \quad (14.1)$$

$$u'(x,0) = u'_0(x) \quad \dot{u}'(x,0) = v'_0(x) \quad (14.2)$$

entonces, para todo $t > 0$, se cumple la igualdad,

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{p} * \mathbf{u}') d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \{ (\mathbf{f} * \mathbf{u}') + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}}' \} d\Omega =$$

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{p}' * \mathbf{u}) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \{ (\mathbf{f}' * \mathbf{u}) + \mathbf{v}'_0 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}'_0 \cdot \dot{\mathbf{u}} \} d\Omega \quad (15)$$

donde \mathbf{p} y \mathbf{p}' , son los vectores de tensiones sobre el contorno Γ , de los estados S y S' , respectivamente, que se relacionan con los tensores de tensiones correspondientes, mediante las ecuaciones de equilibrio (7); el operador $*$ entre dos vectores representa la suma del producto de convolución de sus componentes, es decir, $\mathbf{a} * \mathbf{b} = a_i * b_i$, definiendo la convolución de funciones escalares como,

$$f * g = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) f(t-\tau) d\tau = g * f \quad (16)$$

El teorema de reciprocidad, establecido entre un estado elastodinámico cualquiera, y otro convenientemente elegido, va a proporcionarnos la representación integral en la que se basa la presente formulación.

Solución Fundamental de la Elastodinámica

A fin de establecer más adelante una representación integral de la solución de las ecuaciones de la elastodinámica, va a considerarse una solución particular de las mismas, correspondiente al caso de un dominio plano infinito sometido a una carga concentrada en un punto ξ , que llamamos, punto de colocación, aplicada en dirección e , y que varía con el tiempo según una función $f(t)$, partiendo dicho dominio de condiciones iniciales de velocidad y desplazamiento, nulas. En definitiva, buscamos la solución de las ecuaciones de Navier para unas fuerzas másicas de dominio dadas por la expresión:

$$\rho f(\mathbf{x}, t) = f(t) \delta(\mathbf{x} - \xi) e \quad (17)$$

donde la función δ , es la función impulso, o delta de Dirac, $f(t)$ es una función arbitraria del tiempo, tal que $f(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, y e un vector unitario. La

solución de este problema es conocida como solución de Stokes, al cual se debe la misma (Stokes, 1849). Un desarrollo detallado de su obtención, que aquí se resume, puede encontrarse en la referencia citada al principio de este capítulo (Eringen y Suhubi, 1975).

Se va a obtener, en primer lugar la solución tridimensional, y mediante la integración de ésta a lo largo del eje normal al plano en consideración, se obtendrá la solución fundamental bidimensional.

Las fuerzas de dominio pueden descomponerse según la fórmula (9) como,

$$\rho \mathbf{f} = \nabla F + \nabla \times \mathbf{F} \quad (18)$$

que se diferencia de la citada (9), en que se incorpora a la descomposición, la densidad, que es un factor constante, para simplificar el desarrollo.

Además $\rho \mathbf{f}$ dado por (17), proviene de un potencial, en el sentido de que puede expresarse mediante la laplaciana de una función escalar como,

$$\rho \mathbf{f} = -f(t)/4\pi \nabla^2(1/r) \mathbf{e} \quad (19)$$

donde $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$, es la distancia entre el punto de colocación $\boldsymbol{\xi}$, y el punto de estudio \mathbf{x} .

Utilizando la siguiente identidad diferencial del operador nabla,

$$\nabla^2(\cdot) \mathbf{e} = \nabla \nabla \cdot (\cdot \mathbf{e}) - \nabla \times \nabla \times (\cdot \mathbf{e})$$

el vector de fuerzas másicas puede expresarse,

$$\rho \mathbf{f} = f(t) (-\nabla \nabla \cdot (\mathbf{e}/4\pi r) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{e}/4\pi r)) \quad (20)$$

Comparando las expresiones (18) y (20) podemos identificar,

$$\mathbf{F} = -f(t) \nabla \cdot (\mathbf{e}/4\pi r) \quad \mathbf{F} = f(t) \nabla \times (\mathbf{e}/4\pi r) \quad (21)$$

A su vez, el desplazamiento \mathbf{u} , se puede expresar en función de sus componentes equivoluminal e irrotacional, a través de dos potenciales vectoriales $\mathbf{A}^{(1)}$ y $\mathbf{A}^{(2)}$, respectivamente, de la forma,

$$\mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}^{(1)} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}^{(2)} \quad (22)$$

Sustituyendo esta descomposición y la del vector de fuerzas dada por las ecuaciones (18) y (21), en las ecuaciones de Navier (1), se llega a dos ecuaciones iguales,

$$c_\alpha^2 \nabla^2 A^{(\alpha)} - \partial^2 A^{(\alpha)} / \partial t^2 = e f(t)/(4\pi r) \quad \alpha = 1, 2 \quad (23)$$

y escribiendo $\mathbf{A}^{(\alpha)} = A^{(\alpha)} \mathbf{e}$, se concluye,

$$c_\alpha^2 \nabla^2 A^{(\alpha)} - \partial^2 A^{(\alpha)} / \partial t^2 = f(t)/(4\pi r) \quad \alpha = 1, 2 \quad (24)$$

En definitiva, el problema original se ha reducido a la resolución de un par de ecuaciones de onda escalares no-homogéneas, en una región infinita, sin ninguna condición inicial impuesta, exactamente iguales (salvo el valor de c_α). La solución de este problema puede expresarse en forma integral, mediante la ecuación,

$$A^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t) = - \frac{1}{16\pi^2 \rho c_\alpha^2} \int_{E_3} \frac{f[t - (|\mathbf{y} - \mathbf{x}|)]}{|\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}| |\mathbf{y} - \mathbf{x}|} d\Omega(\mathbf{y}) \quad (25)$$

donde E_3 representa el espacio tridimensional completo. Expresando esta integral en unas coordenadas esféricas escogidas con centro en el punto $\boldsymbol{\xi}$, y eje polar en la dirección $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$, tras algunas transformaciones, se llega a,

$$A^{(\alpha)} = - \frac{r}{4\pi\rho} \left[\int_0^{1/c_\alpha} \lambda f(t - \lambda r) d\lambda + \int_{1/c_\alpha}^\infty f(t - \lambda r) d\lambda \right] \quad (26)$$

Con estas expresiones de $A^{(\alpha)}$ se puede calcular el vector \mathbf{u} , mediante la ecuación (22), teniendo en cuenta que $\mathbf{A}^{(\alpha)} = A^{(\alpha)} \mathbf{e}$. Podemos expresar cada componente u_j de esta solución mediante el sumatorio $u_j = u_{ij} e_i$. El tensor u_{ij} representa el desplazamiento en dirección j debido a una carga concentrada de la forma (17) aplicada en la dirección i . La expresión que se obtiene para u_{ij} es,

$$u_{ij} = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \int_0^\infty v [f(t - r/c_1 - v) - f(t - r/c_2 - v)] dv \right) + \frac{\delta_{ij}}{rc_2^2} f(t - r/c_2) \right\} \quad (27)$$

La solución fundamental para el caso bidimensional será la correspondiente a una línea de fuerzas a lo largo del eje x_3 , perpendicular al plano en estudio (ver figura 1). Por tanto, la solución bidimensional u_{ij} se expresa por,

$$u_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{ij}^{(3D)}(\mathbf{x}_3, t; \xi | f(t)) d\mathbf{x}_3$$

(28)

El superíndice (3D) indica que se trata de la solución fundamental del dominio tridimensional dada por (27).

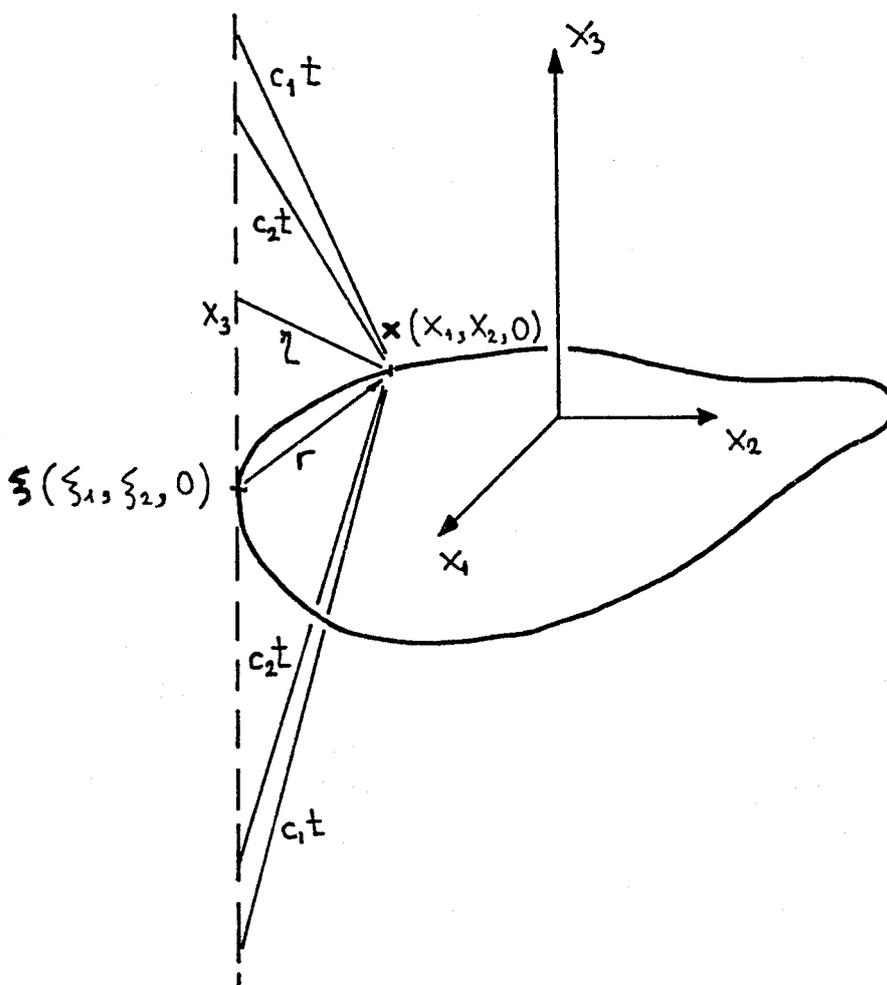


Figura 1

Teniendo en cuenta que se $f(\tau) = 0$ para $\tau < 0$ se obtiene,

$$\begin{aligned}
 u_{ij} = \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \left[H(t - r/c_1) \int_r^{c_1 t} \frac{d\eta}{(\eta^2 - r^2)^{1/2}} \int_0^{t-\eta/c_1} v f(t - r/c_1 - v) dv - \right. \right. \\
 \left. \left. H(t - r/c_2) \int_r^{c_2 t} \frac{d\eta}{(\eta^2 - r^2)^{1/2}} \int_0^{t-\eta/c_2} v f(t - r/c_2 - v) dv \right] + \right. \\
 \left. \frac{\delta_{ij}}{c_2^2} H(t - r/c_2) \int_r^{c_2 t} f(t - \eta/c_2) \frac{d\eta}{(\eta^2 - r^2)^{1/2}} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

donde $H(\cdot)$ es la función escalón o de Heavyside, definida como $H(x) = 0$ para $x < 0$ y $H(x) = 1$ si $x \geq 0$; la derivada segunda $\partial^2(\cdot)/\partial x_i \partial x_j$ de la expresión de u_{ij} (27) se ha sustituido por $\partial^2(\cdot)/\partial \xi_i \partial \xi_j$, que es equivalente; $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ es, ahora, la distancia en el plano, en el que están tanto el punto \mathbf{x} como el $\boldsymbol{\xi}$.

La expresión (29) nos da los desplazamientos buscados. Por derivación de éstos, mediante la fórmula (8), se obtienen las tensiones en cualquier punto de un contorno Γ , según su normal \mathbf{n} .

Obtendremos, finalmente los tensores:

$u_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | f)$: componente j del desplazamiento que hay en el punto \mathbf{x} , en el instante de tiempo t , debido a una carga concentrada en el punto ξ aplicada en dirección i , que tiene una variación en el tiempo dada por la función $f(t)$.

$p_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | f)$: componente j de la tensión que hay en el punto \mathbf{x} , del contorno Γ donde la normal es \mathbf{n} , en el instante de tiempo t , debido a una carga concentrada en el punto ξ aplicada en dirección i , que tiene una variación en el tiempo dada por la función $f(t)$.

El estado elastodinámico $S^j = [u_j(\mathbf{x}, t; \xi | f(t)), \sigma_j(\mathbf{x}, t; \xi | f(t))]$ lo denominamos, estado de Stokes.

La solución fundamental posee las siguientes propiedades:

(i) causalidad:

$$u_j(\mathbf{x}, t; \xi | f) = 0 \quad \text{si } c_1 t < |\mathbf{x} - \xi| \quad (30.1)$$

(ii) reciprocidad

$$u_j(\mathbf{x}, t; \xi | f(t)) = u_j(\xi, t; \mathbf{x} | f) \quad (30.2)$$

(iii) translación temporal

$$u_j(\mathbf{x}, t+\tau; \xi | f(t+\tau)) = u_j(\mathbf{x}, t; \xi | f) \quad (30.3)$$

(iv) simetría

$$u_{jk}(\mathbf{x}, t; \xi | f) = u_{kj}(\mathbf{x}, t; \xi | f) \quad (30.4)$$

También se cumple, por la linealidad de las ecuaciones el principio de superposición, propiedad de la que se hará uso más adelante:

$$S^j(\mathbf{x}, t; \xi | f+g) = S^j(\mathbf{x}, t; \xi | f) + S^j(\mathbf{x}, t; \xi | g) \quad (30.5)$$

Representación Integral de un Estado Elastodinámico.

Sea un estado elastodinámico cualquiera definido en un dominio Ω de contorno Γ , $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}] = S(f, \rho, c_1, c_2; \Omega \times T)$, con condiciones iniciales prescritas, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$, y se elige como estado segundo, $[\mathbf{u}', \boldsymbol{\sigma}'] = S'(f', \rho, c_1, c_2; \Omega \times T)$, el formado por los campos de desplazamientos y tensiones que hay sobre el dominio Ω , supuesto embebido en un dominio infinito, correspondientes a la solución singular fundamental debida a una fuerza concentrada f' , aplicada en dirección i , esto es:

$$\rho f'_j(\mathbf{x}, t) = \delta(t) \delta(\mathbf{x} - \xi) \delta_{ij} \quad (31)$$

Es decir, con la notación introducida en el apartado anterior,

$$u'_j = u_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | \delta(t)) \delta_{ij}; \quad p'_j = p_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | \delta(t)) \delta_{ij} \quad (32)$$

En las expresiones anteriores no se aplica, para el índice j , el criterio de Einstein.

Para este estado singular emplearemos la notación simplificada, U_{ij} , para los desplazamientos y T_{ij} , para las tensiones, y suponemos que parte del reposo, esto es, $U_{ij} = 0$ y $T_{ij} = 0, \forall t < 0$.

$$U_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) = u_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi} | \delta(t)) ; T_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) = p_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi} | \delta(t)) \quad (33)$$

La expresión de U_{ij} , puede obtenerse sustituyendo en la expresión general de u_{ij} dado por la ecuación (29), las ocurrencias de la función $f(t)$, por la distribución $\delta(t)$, y realizando las integrales definidas que en aquella quedaban indicadas, obteniéndose,

$$\begin{aligned} U_{ij} = U_{ij}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) &= U_{ij}^{(1)} + U_{ij}^{(2)} = \\ &H(c_1 t - r) g_{ij}^{(1)} + H(c_2 t - r) g_{ij}^{(2)} = \\ &\frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{1}{c_1} \frac{H(c_1 t - r)}{r^2} \left[\left(2R_1 + \frac{r^2}{R_1} \right) r_i r_j - R_1 \delta_{ij} \right] - \right. \\ &\left. \left[\frac{1}{c_2} \frac{H(c_2 t - r)}{r^2} \left[\left(2R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) r_i r_j - \left(R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) \delta_{ij} \right] \right] \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

que se ha expresado como suma de dos términos, uno para cada tipo de onda, ondas P ($\alpha=1$), y otro para las S ($\alpha=2$); $r = | \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} |$ es la distancia entre el punto de colocación de la carga $\boldsymbol{\xi}$ y el punto de estudio, \mathbf{x} , donde se calcula el tensor; la función R_α viene dada por $R_\alpha = (c_\alpha^2 t^2 - r^2)^{1/2}$

A partir de U_{ij} , puede calcularse el tensor de tensiones, empleando la ley de Hooke, y con éste, el valor de T_{ij} (Mansur, 1983). Definimos los siguientes tensores,

$$A_{ij} = \mu (2\theta n_j r_{,i} + \delta_{ij} \partial r / \partial \mathbf{n} + n_i r_{,j})$$

$$B_{ij} = -2\mu/r^3 (\delta_{ij} \partial r / \partial \mathbf{n} - 4 \partial r / \partial \mathbf{n} r_{,i} r_{,j} + n_j r_{,i} + n_i r_{,j})$$

$$D_{ij} = -2\mu/r^2 (\theta n_j r_{,i} + \partial r / \partial \mathbf{n} r_{,i} r_{,j})$$

siendo $\theta = \lambda/2\mu = (c_1^2 - c_2^2) / c_2^2 = 1/(1-2\nu)$.

Con estas definiciones, la expresión del tensor T_{ij} es,

$$T_{ij} = T_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi) = T_{ij}^{(1)} + T_{ij}^{(2)} =$$

$$\frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{H(c_1 t - r)}{c_1} \left[-B_{ij} \left(2R_1 + \frac{r^2}{R_1} \right) - D_{ij} \frac{r^3}{R_1^3} \right] + \right.$$

$$\frac{\delta(c_1 t - r)}{c_1} D_{ij} \left(2R_1 + \frac{r^2}{R_1} \right) + \sqrt{c_1^2 t^2 - r^2}$$

$$\frac{H(c_2 t - r)}{c_2} \left[A_{ij} \frac{r}{R_2^3} + B_{ij} \left(2R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) + D_{ij} \frac{r^3}{R_2^3} \right] -$$

$$\frac{\delta(c_2 t - r)}{c_2} \left[A_{ij} \frac{1}{R_2} + D_{ij} \left(2R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) \right] \Bigg\}$$

(35)

Si establecemos el teorema de reciprocidad (15), entre los dos estados elastodinámicos así definidos, y teniendo en cuenta las propiedades de la función delta de Dirac, al integrar en el tiempo y en el espacio (Jones, 1966), se llega a la expresión (Wheeler y Stenberg, 1968):

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi, t) = \int_{\Gamma} (U_{ij} * p_j - T_{ij} * u_j) d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} U_{ij} * f_j d\Omega + \int_{\Omega} \rho (v_{jo} U_{ij} - u_{jo} \dot{U}_{ij}) d\Omega$$

(36)

donde $c_{ij}(\xi)$, vale δ_{ij} si $\xi \in \Omega$, es nulo si $\xi \notin \Omega \cup \Gamma$. El caso en que $\xi \in \Gamma$, requiere atención especial, pues la primera integral del segundo miembro, se convierte en singular, al encontrarse el punto de aplicación de la carga dentro del contorno de integración.

Esta singularidad puede extraerse realizando un proceso de límite de la siguiente forma: se sustituye el contorno Γ por uno aproximado, que evita la singularidad. Este contorno se integra en dos tramos, $\Gamma - \Gamma_\epsilon$ y Γ_ϵ , como se muestra en la figura 2.

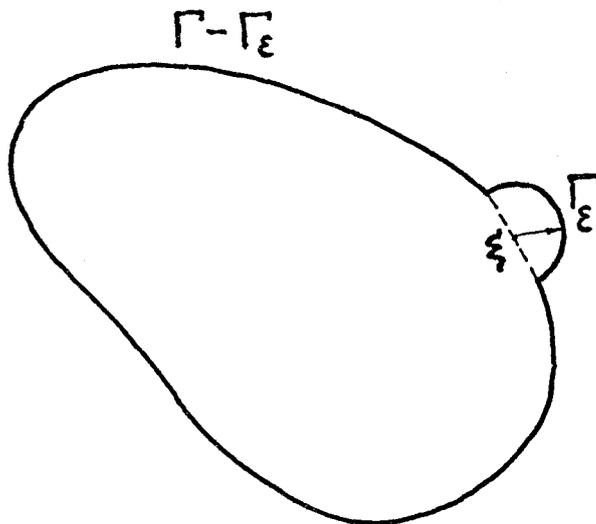


Figura 2

Si se hace $\varepsilon \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{ij} * p_j d\Gamma_\varepsilon = 0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{ij} * u_j d\Gamma_\varepsilon = d_{ij} u_j$$

(37)

El valor de las constantes d_{ij} dependen, como se comprueba después de realizar la integración, exclusivamente de la geometría del contorno en el entorno del punto ξ , en concreto, del ángulo β , que formen las tangentes a cada lado del punto ξ entre sí, (ver figura 3), y de los ángulos que forman las normales con los ejes cartesianos elegidos. d_{ij} se pueden expresar por:

$$d_{11} = -1/2 (1 - \beta/\pi) + A_1 (\text{sen } 2\theta_B - \text{sen } 2\theta_A)$$

$$d_{22} = -1/2 (1 - \beta/\pi) - A_1 (\text{sen } 2\theta_B - \text{sen } 2\theta_A) \quad (38)$$

$$d_{12} = d_{21} = d_{11} = A_1 (\cos 2\theta_A - \cos 2\theta_B)$$

donde A_1 es una constante que depende del módulo de Poisson del medio,

$$A_1 = 1/[8\pi(1-\nu)]$$

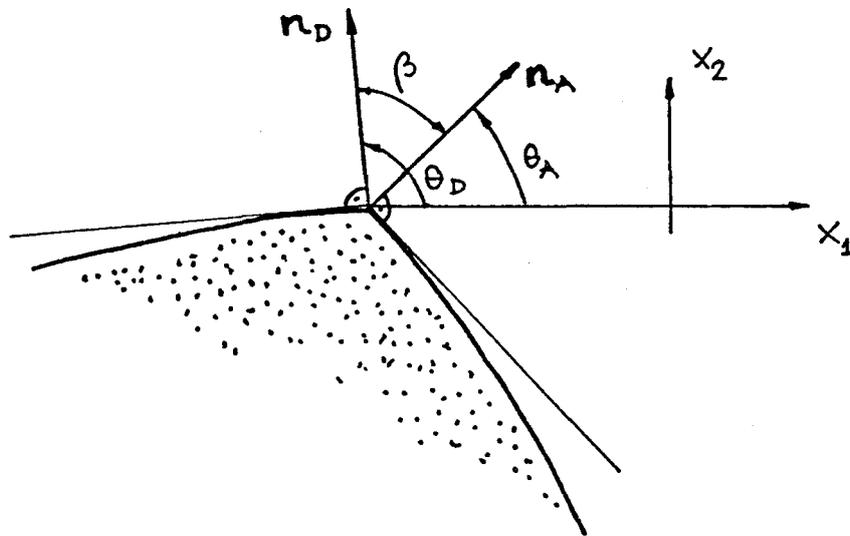


Figura 3

Estas expresiones son las mismas que se obtienen en el desarrollo del teorema similar para el caso de la elasticidad estática (Dominguez, 1989). Esta igualdad se justificará más adelante al estudiar el tipo de singularidad de las soluciones fundamentales.

Por tanto, la ecuación (36) es válida para un punto $\xi \in \Gamma$, siendo en este caso $c_{ij}(\xi) = 1 + d_{ij}(\xi)$, cuyo valor, para el caso de que el contorno sea suave en ese punto ξ ($\beta = \pi$), es $c_{ij} = 0.5 \delta_{ij}$, teniendo en cuenta que la integral del segundo miembro, hay que entenderla en el sentido del valor principal de Cauchy.

Si se observa la expresión del campo de desplazamientos del estado de Stokes, para una carga con variación temporal cualquiera $f(t)$, y por otra

parte, se opera el producto $U_{ij} * f$, se comprueba que ambas expresiones son iguales. Esto puede asimilarse a lo que representa la integral de Duhamel utilizada para obtener la respuesta de un sistema dinámico a una excitación cualquiera $f(t)$, conociendo su respuesta al impulso $\delta(t)$ (Clough y Penzein, 1975). Se llega de esta forma a las siguientes igualdades:

$$U_{ij} * p_j = u_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | p_j(\mathbf{x}, t)) \quad (39.1)$$

$$U_{ij} * f_j = u_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | f_j(\mathbf{x}, t)) \quad (39.2)$$

$$T_{ij} * u_j = u_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | p_j(\mathbf{x}, t)) \quad (39.3)$$

Haciendo uso de las mismas, puede reescribirse la anterior expresión integral (36) como,

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi, t) = \int_{\Gamma} [u_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | p_j(\mathbf{x}, t)) - p_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | u_j(\mathbf{x}, t))] d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} u_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | f_j(\mathbf{x}, t)) d\Omega + \int_{\Omega} \rho (v_{j0} U_{ij} - u_{j0} \dot{U}_{ij}) d\Omega \quad (40)$$

Si consideramos el caso de un estado elastodinámico con condiciones iniciales nulas, y fuerzas de dominio también nulas, las dos representaciones anteriores se simplifican notablemente. Esta simplificación, no supone ninguna restricción significativa de la formulación, ya que los términos que contienen las fuerzas de dominio y las condiciones iniciales, son integrales

completamente conocidas. Se obtienen las expresiones siguientes:

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi, t) = \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | p_j(\mathbf{x}, t)) - p_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | u_j(\mathbf{x}, t))] d\Gamma \quad (41)$$

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi, t) = \int_{\Gamma} [U_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi) * p_j(\mathbf{x}, t) - \Gamma_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi) * u_j(\mathbf{x}, t)] d\Gamma \quad (42)$$

Estas representaciones del desplazamiento en un punto cualquiera ξ , y en un instante t , relacionan éste con los valores del mismo y de las tensiones en los puntos del contorno Γ , exclusivamente. Si se consideran los puntos $\xi \in \Gamma$, cualquiera de las dos expresiones anteriores, añadiéndole las condiciones de contorno, proporciona una formulación cerrada del problema para calcular las variables \mathbf{u} y \mathbf{p} , sobre dicho contorno Γ .

La resolución analítica de estas ecuaciones integrales es imposible, salvo en contados casos muy simples. La importancia que tienen en el presente trabajo, es la de ser punto de partida para el Método de los Elementos de Contorno para Elasticidad Dinámica Plana en el Dominio del Tiempo, un método numérico de resolución de las mismas, y por tanto del problema elastodinámico general. Este tratamiento numérico se presenta en el siguiente apartado.

2.2 Formulación Unificada para el Tratamiento Numérico de las Ecuaciones Integrales

En este capítulo van a mostrarse dos alternativas aparentemente diferentes (Spyrakos y Antes, 1986), para la resolución numérica de las ecuaciones integrales que se presentaron en el capítulo anterior. La primera de ellas se basa en la representación integral (41), y puede encontrarse en (Spyrakos, 1984; Spysrakos y Beskos, 1986), mientras que la segunda, parte de la expresión equivalente (42), y se encuentra desarrollada, para el caso la ecuación de ondas y de la elastodinámica bidimensional en (Mansur, 1983), y para este último caso, de forma más condensada y completa, en (Antes, 1985).

En ambas formulaciones se pretende calcular, las variables en el contorno Γ del dominio Ω . A partir de ellas, cuando y donde sea necesario, se podrán calcular los desplazamientos en cualquier punto del interior del dominio, sin más que realizar las integrales sobre el contorno, del segundo miembro de las ecuaciones (41) ó (42), donde todo será conocido.

Para la resolución numérica de estas ecuaciones integrales en el contorno, el primer paso consiste en sustituir las funciones incógnitas $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ y $\mathbf{p}(\mathbf{x},t)$, para $\mathbf{x} \in \Gamma$, por un conjunto finito de valores a partir de los cuales aproximarlas. Esto implica un proceso de discretización de las variables, tanto en el tiempo como en el espacio.

A continuación se presentan las dos alternativas antedichas, en el desarrollo de las cuales, se han uniformizado las notaciones de ambas, para poner de manifiesto su semejanza.

Formulación Basada en la Ecuación en Función del Estado de Stokes

Como primer paso para la resolución numérica de la ecuación integral (41), se discretizan las variables en el tiempo. Se va a considerar el intervalo de tiempo $(0-t)$, dividido, en una serie de N pequeños lapsos, a lo largo de los cuales el valor de las tensiones y los desplazamientos se consideran constantes, esto es,

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= u_i^n(\mathbf{x}) & \forall t \in [(n-1)\Delta t, n\Delta t] \\ p_i(\mathbf{x}, t) &= p_i^n(\mathbf{x}) & \forall t \in [(n-1)\Delta t, n\Delta t] \end{aligned} \quad (43)$$

donde n es un índice entero que varía entre 1 y N , y Δt es la magnitud de cada uno de estos lapsos. Para un instante cualquiera $t < N\Delta t$, pueden aproximarse las variables del problema por el sumatorio,

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=1}^N u_i^n(\mathbf{x}) s^n(t) \\ p_i(\mathbf{x}, t) &= \sum_{n=1}^N p_i^n(\mathbf{x}) s^n(t) \end{aligned} \quad (44)$$

siendo $s^n(t) = H(t - (n-1)\Delta t) - H(t - n\Delta t)$. La función H representa la función escalón o de Heavyside. Puede observarse que la función $s^n(t)$, se anula cuando, $t \notin [(n-1)\Delta t, n\Delta t]$, mientras su valor es 1 para $t \in [(n-1)\Delta t, n\Delta t]$. En

la figura 4 se representa la función pulso $s^n(t)$.

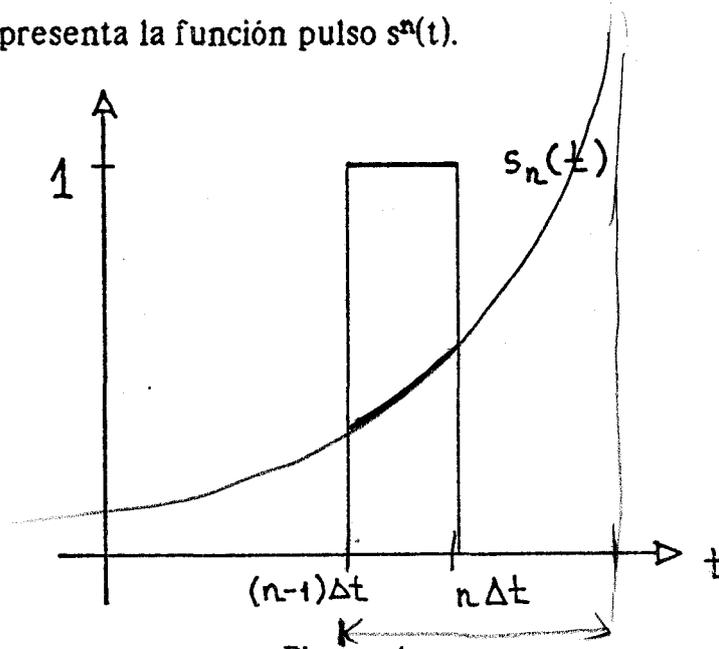


Figura 4

Si se sustituyen estas aproximaciones (44) en el integrando de la expresión (41), y se tiene en cuenta el principio de superposición, expresado en (30.5), se obtiene,

$$u_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | p_j(\mathbf{x}, t)) = \sum_{n=1}^N u_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | s^n(t)) p_j^n(\mathbf{x})$$

$$p_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | u_j(\mathbf{x}, t)) = \sum_{n=1}^N p_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | s^n(t)) u_j^n(\mathbf{x})$$

(45)

Las diversas funciones $s^n(t)$, son superponibles, es decir, se pueden

obtener una de otra sin más que realizar una traslación temporal. En concreto se cumple, $s^n(t) = s^1(t - (n-1)\Delta t)$. Teniendo en cuenta esta igualdad, y la propiedad de traslación temporal del estado de Stokes enunciada en el apartado anterior con la ecuación (30.3), se obtiene,

$$\begin{aligned} u_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | s^n(t)) &= u_{ij}(\mathbf{x}, t - (n-1)\Delta t; \xi | s^1(t)) \\ p_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi | s^n(t)) &= p_{ij}(\mathbf{x}, t - (n-1)\Delta t; \xi | s^1(t)) \end{aligned} \quad (46)$$

Estas ecuaciones permiten conocer la respuesta a cualquier pulso s^n , en un instante t , conociendo la respuesta al pulso s^1 , en el instante $t - (n-1)\Delta t$.

Interesa imponer la ecuación (41) en los instantes sucesivos en que se ha dividido el dominio temporal. Así, para el paso de tiempo N , es decir, el instante de tiempo $N\Delta t$, suponemos que el valor de las variables en el contorno es precisamente, $\mathbf{u}^N(\mathbf{x})$ y $\mathbf{p}^N(\mathbf{x})$, y estableciendo la notación,

$$U_{ij}^n = U_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = u_{ij}(\mathbf{x}, t - (n-1)\Delta t; \xi | s^1)$$

$$T_{ij}^n = T_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = p_{ij}(\mathbf{x}, t - (n-1)\Delta t; \xi | s^1)$$

se llega a la siguiente relación:

$$c_{ij} u_j^N(\xi) + \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma} T_{ij}^n(\mathbf{x}, m\Delta t; \xi) u_j^n(\mathbf{x}) d\Gamma -$$

$$\sum_{n=1}^N \int_{\Gamma} U_{ij}^n(\mathbf{x}, m\Delta t; \xi) p_j^n(\mathbf{x}) d\Gamma$$

(47)

siendo $m = N - n + 1$.

La obtención de los de los núcleos U_{ij}^n y T_{ij}^n , se muestra en el apéndice A. El núcleo U_{ij}^n se calcula a partir de la expresión del estado de Stokes general, que viene dado la ecuación (29), sustituyendo las ocurrencias de la función $f(t)$, por la función $s^1(t)$. Las integrales definidas que aparecen en esta expresión se realizan analíticamente, consiguiéndose la siguiente representación:

$$U_{ij}^n = \sum_{\alpha=1}^2 U_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \xi) =$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{4\pi\rho c_{\alpha}^2} \left[\delta_{ij} L_{\alpha} + (-)^{\alpha} (\delta_{ij} - 2 r_{,i} r_{,j}) D_{\alpha} \right]$$

(48.1)

siendo,

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi\rho c_1^2} \left(L_1 + \frac{c_1^2}{c_2^2} L_2 \right) \right]}_{E1} \delta_{ij} + \underbrace{\left[\frac{1}{4\pi\rho c_1^2} \left(D_1 - \frac{c_1^2}{c_2^2} D_2 \right) \right]}_{E2} (2r_{,i}r_{,j} - \delta_{ij})$$

$$L_\alpha = \text{Ln} \left(\frac{\left[1 + \sqrt{1 - \eta_\alpha^2} \right] \theta_\alpha}{\left[1 + \sqrt{1 - \theta_\alpha^2} \right] \eta_\alpha} \right)$$

$$t = \Delta t \quad L_\alpha = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \eta_\alpha^2}}{\eta_\alpha} \right)$$

$$D_\alpha = \frac{\sqrt{1 - \eta_\alpha^2}}{\eta_\alpha} - \frac{\sqrt{1 - \theta_\alpha^2}}{\theta_\alpha}$$

$$\begin{matrix} t = \Delta t \\ r \rightarrow 0 \end{matrix} \quad D_\alpha = \frac{\sqrt{1 - \eta_\alpha^2}}{\eta_\alpha} \rightarrow \frac{1}{\eta_\alpha} - \frac{1}{2} = \frac{c_\alpha^2 \Delta t^2}{r^2} - \frac{1}{2}$$

donde,

$$\begin{aligned} \eta_\alpha &= r / c_\alpha t & \text{si } r < c_\alpha t & \quad \text{y} \quad \eta_\alpha = 1 & \text{si } r \geq c_\alpha t \\ \theta_\alpha &= r / c_\alpha (t - \Delta t) & \text{si } r < c_\alpha (t - \Delta t) & \quad \text{y} \quad \theta_\alpha = 1 & \text{si } r \geq c_\alpha (t - \Delta t) \end{aligned}$$

A partir del desplazamiento U_{ij}^n , empleando la ecuación de compatibilidad-comportamiento-equilibrio (8), tras laborioso proceso, se obtiene el tensor de tensiones en el contorno, T_{ij}^n (ver apéndice A). La expresión de éste es,

$$\begin{aligned} T_{ij}^n &= \sum_{\alpha=1}^2 T_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \xi) = \frac{\mu}{\pi r c_\alpha^2} \frac{1}{r} n_j v_{,i} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{c_\alpha^2}{r^2} - 1 \right) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \\ &\quad + \frac{\mu}{\pi r c_\alpha^2} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \eta} 2 v_{,i} v_{,j} \left(-\frac{2}{2} \left(\frac{c_\alpha^2}{r^2} - 1 \right) + \frac{c_\alpha^2}{2c_\alpha^2} \right) = \frac{1}{2(1-\nu)} \\ &\quad T_{ij}^n = \sum_{\alpha=1}^2 T_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \xi) = \frac{\mu}{\pi r c_\alpha^2} \frac{1}{r} n_j v_{,i} \left(\frac{-1}{2} \frac{1}{2(1-\nu)} + \frac{1}{2} \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right) = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \frac{-1+2\nu}{4(1-\nu)} \end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\mu}{4\pi r c_\alpha} \left[A_{ij}^{(\alpha)} D_\alpha - B_{ij}^{(\alpha)} E_\alpha \right] =$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{r} \left(\delta_{ij} \frac{\partial v}{\partial \eta} + n_i v_{,j} \right) \left[\frac{-\mu}{\pi r c_\alpha^2} D_1 + \frac{\mu}{\pi r c_\alpha^2} D_2 - \frac{\mu}{2\pi r c_\alpha^2} E_2 \right] \quad (48.2)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \eta} 2 v_{,i} v_{,j} \left[\frac{2\mu}{\pi r c_\alpha^2} D_1 - \frac{2\mu}{\pi r c_\alpha^2} D_2 + \frac{\mu}{2\pi r c_\alpha^2} E_1 - \frac{\mu}{2\pi r c_\alpha^2} E_2 \right]$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{r} n_j v_{,i} \left[\frac{-\mu}{\pi r c_\alpha^2} D_1 + \frac{\mu}{\pi r c_\alpha^2} D_2 + \frac{\mu}{2\pi r c_\alpha^2} \frac{1}{\mu} E_1 \right]$$

donde, D_α es el mismo que en la expresión de U_{ij}^n ,

$$\begin{aligned}
 E_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_\alpha^2}} && \text{para } c_\alpha(t - \Delta t) \leq r < c_\alpha t \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_\alpha^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \theta_\alpha^2}} && \text{para } r < c_\alpha(t - \Delta t) \quad \begin{matrix} t = \Delta t \\ r \rightarrow 0 \end{matrix} \quad E_\alpha \rightarrow 1 \\
 &= 0 && \text{en otros casos}
 \end{aligned}$$

y

$$A_{ij}^{(\alpha)} = 4 (-)^\alpha [\partial r / \partial \mathbf{n} (\delta_{ij} - 4 r_{,i} r_{,j}) + r_{,i} n_{,j} + r_{,j} n_{,i}]$$

$$B_{ij}^{(1)} = -4 \partial r / \partial \mathbf{n} r_{,i} r_{,j} + 2 \lambda / \mu r_{,i} n_{,j}$$

← errata! ?

$$B_{ij}^{(2)} = 2 [\partial r / \partial \mathbf{n} (\delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j}) + r_{,j} n_{,i}]$$

Hay que señalar que en estas expresiones y en las definiciones de η_α y θ_α , la variable t debe entenderse como $t - (n-1)\Delta t$, pues se ha aplicado la traslación en el tiempo (46).

Es interesante observar, que estos núcleos son nulos a partir de una cierta distancia, medida desde el punto de aplicación de la carga ξ . Efectivamente, por el principio de causalidad, para todo $r = |\mathbf{x} - \xi|$, tal que $r > c_1 m \Delta t$, $U_{ij}^n(\mathbf{x}, m \Delta t; \xi) = 0$, e igualmente $T_{ij}^n(\mathbf{x}, m \Delta t; \xi) = 0$, condición que será tenida en cuenta, a la hora de evaluar las integrales a lo largo de los puntos \mathbf{x} del contorno.

La expresión de U_{ij}^n coincide, salvo diferencias de notación, en todas las

referencias consultadas (Spyrakos, 1984; Eason, Fulton y Sneddon, 1956), con la que se deduce aquí. Sin embargo no ocurre así con el T_{ij}^n que se muestra en (48), que es diferente al que se obtendría a partir de los resultados de la referencia (Spyrakos, 1984), aunque es difícil decirlo con seguridad, pues en ella no se dan las expresiones finales de T_{ij}^n , sino las de $\partial U_{ij}^n / \partial x_k$. Estas están muy poco simplificadas y contienen, además, errores dimensionales, que podrían ser meramente tipográficos, que hacen imposible llegar a las expresiones finales de T_{ij}^n que se seguirían de estos $\partial U_{ij}^n / \partial x_k$ empleando la ecuación de compatibilidad-comportamiento-equilibrio (8). Las expresiones obtenidas aquí, coinciden con las que se obtendrían de la solución que se encuentra (Eason, Fulton y Sneddon, 1956) para una carga variable como $f(t)=H(t)$, sumando ésta y la correspondiente a $f(t)=-H(t-\Delta t)$. Además, también se obtiene el mismo resultado, mediante la segunda alternativa que se presenta más adelante, (Mansur, 1983; Antes, 1985; Spyrakos y Antes, 1986). Todo hace pensar que el núcleo de tensiones de (Spyrakos, 1984), está equivocado. Al final de este apartado, se presentan unos resultados numéricos que reafirman lo dicho en este párrafo.

Con la ecuación (47) culmina el primer paso de la discretización, con la que se ha eliminado la dependencia en el tiempo de las variables originales, reduciéndolas a una sucesión de funciones, variables sólo en el contorno, una función incógnita diferente, para cada variable, en cada paso de tiempo.

En este punto, el proceso de discretización espacial, que sigue, es semejante, al que se efectúa en otras formulaciones del Método de los Elementos de Contorno. Para una exposición detallada del mismo ver (Brebbia y Domínguez, 1989).

Las integrales sobre el contorno van a realizarse interpolando las variables del problema a partir del valor de las mismas en Q puntos escogidos, llamados nodos, a través de unas funciones, ϕ^q , de pequeño soporte, es decir, de valor no nulo, solamente en unas reducidas porciones

del contorno, Γ_q , que queda dividido de esta forma en los elementos que dan nombre al método. Dentro de cada uno de estos elementos,

$$\begin{aligned}
 u_i^n(\mathbf{x}) &= \sum_q \phi^q(\mathbf{x}) u_i^{nq} \\
 p_i^n(\mathbf{x}) &= \sum_q \phi^q(\mathbf{x}) p_i^{nq}
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

La geometría, en algunos casos podrá aproximarse, por medio de las mismas funciones de interpolación,

$$\mathbf{x}_i = \sum_q \phi^q(\mathbf{x}) \mathbf{x}_i^q$$

Para que u_i^{nq} y p_i^{nq} sean, efectivamente, los valores en el nodo q de las variables $u_i^n(\mathbf{x})$ y $p_i^n(\mathbf{x})$, las funciones de interpolación han de cumplir,

$$\phi^q(\mathbf{x}^p) = \delta_{pq}$$

es decir, ϕ^q se anula en todos los nodos del contorno, excepto, en el nodo q , en el cual vale 1.

Sustituyendo estas aproximaciones en la expresión (47), se llega a,

$$c_{ij} u_j^N(\xi) + \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q \int_{\Gamma'_q} u_j^{nq}(\phi^q T_{ij}^n) d\Gamma - \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q \int_{\Gamma'_q} p_j^{nq}(\phi^q U_{ij}^n) d\Gamma \quad (50)$$

En esta tesis se han considerado dos tipos de elementos (ver figura 5).

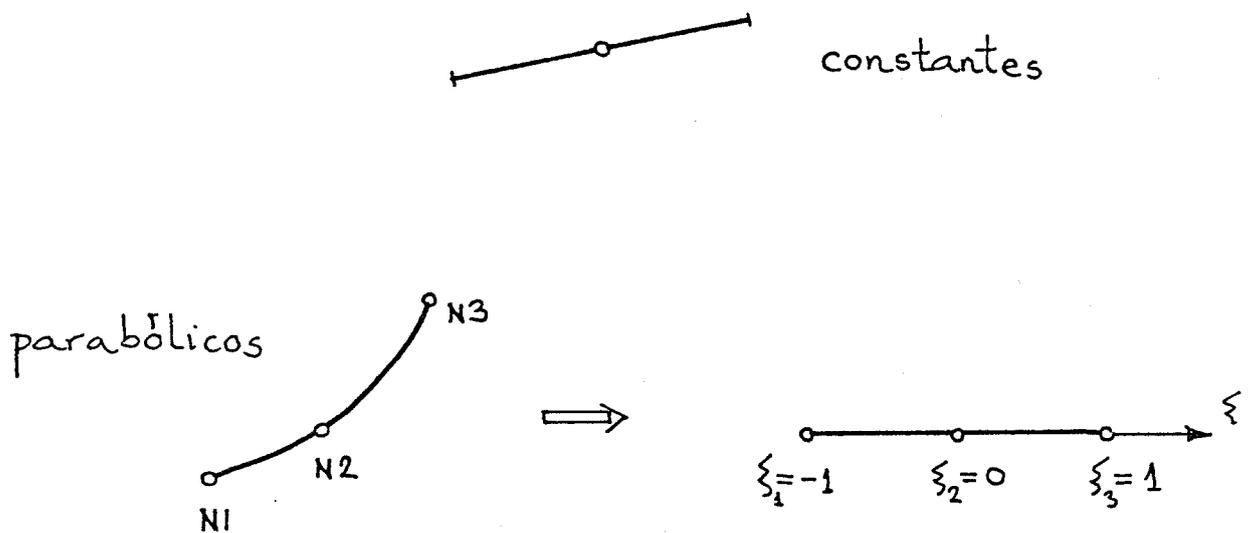


Figura 5

En los elementos constantes, de geometría recta, las magnitudes permanecen invariables, iguales al valor en su punto medio, en el cual se sitúa un nodo; en los elementos parabólicos, la geometría y la variación de las magnitudes se definen a partir de tres nodos, uno en cada extremo y el

tercero intermedio, mediante unas funciones de interpolación, que son cuadráticas en una variables auxiliar ξ , llamada coordenada natural del elemento, cuyo rango de variación es el intervalo $[-1,1]$. Estas tres funciones de interpolación, que se representan en la figura 6, son:

$$\phi_1 = -1/2 \xi(1 - \xi)$$

$$\phi_2 = (1 - \xi^2) \tag{51}$$

$$\phi_3 = 1/2 \xi(1 + \xi)$$

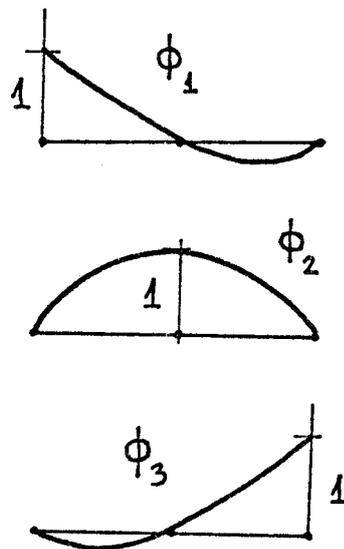


Figura 6

Empleando la notación siguiente:

$$\begin{aligned}
 H_{ij}^{mq} &= \int_{\Gamma'_q} \phi^q T_{ij}^n(x, m\Delta t; \xi) d\Gamma_q \\
 G_{ij}^{mq} &= \int_{\Gamma'_q} \phi^q U_{ij}^n(x, m\Delta t; \xi) d\Gamma_q
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

donde el punto de colocación para la solución fundamental es el nodo P del contorno; $m = N - n + 1$; Γ'_q es la porción del contorno en que ϕ^q es distinta de cero. Para elementos constantes, coincide con el elemento Γ_q en que se encuentra el nodo q, siendo entonces, $\phi^q = 1$. En los elementos parabólicos Γ'_q es el elemento Γ_q si el q es el nodo central del mismo, o bien, los dos elementos adyacentes a los que pertenece el nodo, si éste está en un extremo. La ecuación (50), para el nodo p, queda reducida a:

$$c_{ij}^{mp} u_j + \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q H_{ij}^{mq} u_j = \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q G_{ij}^{mq} p_j
 \tag{53}$$

ecuación aproximada discreta de (41), a partir de la cual podemos establecer un algoritmo paso a paso de resolución, que será analizado más adelante, cuando se presente la siguiente formulación alternativa.

Formulación Basada en el Producto de Convolución

Se parte de la ecuación (42), en la cual sustituimos los productos convolución por su expresión explícita, como integrales a lo largo del tiempo,

$$c_{ij} u_j(\xi) - \int_0^{t^+} \left[\int_{\Gamma} (T_{ij}(\mathbf{x}, t'; \xi) u_j(\mathbf{x}, \tau)) d\Gamma \right] d\tau - \\ \int_0^{t^+} \left[\int_{\Gamma} (U_{ij}(\mathbf{x}, t'; \xi) p_j(\mathbf{x}, \tau)) d\Gamma \right] d\tau$$

(54)

donde t^+ , representa $t+\epsilon$, siendo ϵ , un valor arbitrariamente pequeño. De esta forma se evita terminar la integración, justo en el punto de aplicación de una delta de Dirac, y como resultado del principio de causalidad (30.1), la solución fundamental se anula para $\tau = t^+$. De esto se hace uso para llegar a esta expresión integral mediante residuos ponderados (Mansur, 1983), y también más adelante al integrar por partes algunos términos del integrando; $t' = t - \tau$, es el intervalo de tiempo transcurrido desde el instante de aplicación de la carga, τ , hasta el instante de tiempo en consideración, t .

Puede observarse que la expresión de T_{ij} dada en la ecuación (35), contiene términos de la forma,

$$\frac{1}{\sqrt{c_{\alpha}^2 t'^2 - r^2}} \delta(c_{\alpha} t' - r) \quad (55)$$

Por tanto, se tiene el producto de una función que es singular en $r = c_{\alpha} t'$, por una función delta de Dirac cuyo argumento se anula en ese mismo punto. Estos términos son intratables directamente, si nuestro objetivo es realizar el proceso de resolución numéricamente. Estas funciones delta, provienen de la derivación espacial de las funciones de Heavyside $H(c_{\alpha} t' - r)$ que existen en el núcleo de desplazamientos U_{ij} . Por la definición de la función de Heavyside, su derivada espacial es (Jones, 1966),

$$\frac{\partial}{\partial x_k} H(c_{\alpha} t' - r) = -r_{,k} \delta(c_{\alpha} t' - r) \quad (56)$$

Comparando la expresión de las derivadas de U_{ij} respecto a las variables espaciales, con la derivada de estos mismos desplazamientos respecto a la variables temporal τ , se observa que ambas contienen términos singulares semejantes. Efectivamente, la derivada de U_{ij} , respecto a x_k viene dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} U_{ij} = \sum_{\alpha=1}^2 \left[H(c_{\alpha} t' - r) \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}^{(\alpha)} - r_{,k} \delta(c_{\alpha} t' - r) g_{ij}^{(\alpha)} \right] \quad (57)$$

mientras que la derivada respecto a τ , es:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U_{ij} = \sum_{\alpha=1}^2 \left[H(c_{\alpha} t' - r) \frac{\partial}{\partial \tau} g_{ij}^{(\alpha)} - c_{\alpha} \delta(c_{\alpha} t' - r) g_{ij}^{(\alpha)} \right] \quad (58)$$

ya que la derivada de $H(c_{\alpha} t' - r)$ respecto a τ viene dada por la ecuación,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} H(c_{\alpha} t' - r) = -c_{\alpha} \delta(c_{\alpha} t' - r)$$

Si despejamos los términos singulares de (58) y sustituimos su valor en función de la derivada temporal de U_{ij} en la expresión (57), se llega a,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} U_{ij} = \sum_{\alpha=1}^2 \left[H(c_{\alpha} t' - r) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}^{(\alpha)} - \frac{\Gamma_{,k}}{c_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \tau} g_{ij}^{(\alpha)} \right) + \frac{\Gamma_{,k}}{c_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \tau} U_{ij}^{(\alpha)} \right] \quad (59)$$

La expresión de T_{ij} contendrá unos términos en función de derivadas de U_{ij} , respecto a τ ; estos términos pueden ser integrados por partes, trasvasando las derivadas de la solución fundamental, a derivadas de los desplazamientos del estado elastodinámico incógnita $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}]$. Mediante esta operación, teniendo en cuenta que se han considerado condiciones iniciales nulas para el estado $[\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}]$, obtenemos,

$$\int_0^{t^+} T_{ij} u_j d\tau = \int_0^{t^+} (Z_{ij} u_j - J_{ij} v_j) d\tau \quad (60)$$

siendo,

$$\begin{aligned} Z_{ij} &= \sum_{\alpha=1}^2 Z_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t'; \xi) = \\ &= \rho \sum_{\alpha=1}^2 H(c_\alpha t' - r) \left[(c_1^2 - 2c_2^2) \delta_{jk} \left(g_{il,l}^{(\alpha)} - \frac{r_{,l}}{c_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} g_{il}^{(\alpha)} \right) + \right. \\ &\quad \left. c_2^2 \left(g_{ij,k}^{(\alpha)} - \frac{r_{,k}}{c_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} g_{ij}^{(\alpha)} + g_{ik,j}^{(\alpha)} - \frac{r_{,j}}{c_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} g_{ik}^{(\alpha)} \right) \right] n_k \\ J_{ij} &= \sum_{\alpha=1}^2 J_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t'; \xi) = \\ &= \rho \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{c_\alpha} [(c_1^2 - 2c_2^2) \delta_{jk} r_{,l} U_{il}^{(\alpha)} + c_2^2 (r_{,k} U_{ij}^{(\alpha)} + r_{,j} U_{ik}^{(\alpha)})] n_k \end{aligned} \quad (61.2)$$

Ambos núcleos Z_{ij} y J_{ij} , como consecuencia de la expresión de U_{ij} , se han expresado como suma de dos términos, uno para cada tipo de onda. La variable v_j es la derivada parcial de los desplazamientos respecto al tiempo.

Desarrollando estas expresiones de Z_{ij} y J_{ij} , se llega a:

$$Z_{ij} = \sum_{\alpha=1}^2 Z_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t; \xi)$$

donde,

$$Z_{ij}^{(1)} = Z_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, t; \xi) =$$

$$\frac{\mu}{2\pi\rho c_1} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[\delta_{ij} \left(\frac{2}{r R_1} + \frac{4 R_1}{r^3} \right) - 2 r_{,i} r_{,j} \left(\frac{c_1 t' - r}{R_1^3} + \frac{4}{r R_1} + \frac{8 R_1}{r^3} \right) \right] + \right.$$

$$\left. n_{,i} r_{,j} \left(\frac{2}{r R_1} + \frac{4 R_1}{r^3} \right) + n_{,j} r_{,i} \left(-\frac{\lambda}{\mu} \frac{c_1 t' - r}{R_1^3} + \frac{2}{r R_1} + \frac{4 R_1}{r^3} \right) \right\}$$

(62.1)

$$\frac{2}{r R_1} + \frac{4 R_1}{r^3} = \frac{2}{r^3} \left(\frac{r^2}{R_1} + 2 R_1 \right) =$$

$$= \frac{2}{R_1 r^3} (r^2 + 2 c^2 t'^2 - 2 r^2) = \dots$$

$$R_2 = \sqrt{c^2 t'^2 - r^2} = c_2 \sqrt{t'^2 - (r/c_2)^2}$$

$$\frac{c_1 t' - r}{R_1^3} = \frac{c_1 t' - r}{(c^2 t'^2 - r^2)^{3/2}} = \frac{c_1 t' - r}{(c_1 t' - r)^{3/2} (c_1 t' + r)^{3/2}} = \frac{1}{(c_1 t' + r) \sqrt{c_1 t' - r}}$$

=

$$Z_{ij}^{(2)} = Z_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t'; \boldsymbol{\xi}) =$$

$$\frac{\mu}{2\pi\rho c_2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left[-\delta_{ij} \left(\frac{2}{r R_2} + \frac{4 R_2}{r^3} + \frac{c_2 t' - r}{R_2^3} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. 2 r_{,i} r_{,j} \left(\frac{c_2 t' - r}{R_2^3} + \frac{4}{r R_2} + \frac{8 R_2}{r^3} \right) \right] - \right.$$

$$\left. n_{,i} r_{,j} \left(\frac{2}{r R_2} + \frac{4 R_2}{r^3} + \frac{c_2 t' - r}{R_2^3} \right) - n_{,j} r_{,i} \left(\frac{2}{r R_2} + \frac{4 R_2}{r^3} \right) \right\}$$

(62.2)

E igualmente,

$$J_{ij} = \sum_{\alpha=1}^2 J_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t'; \boldsymbol{\xi})$$

siendo,

$$J_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, t'; \boldsymbol{\xi}) = \frac{\mu}{2\pi\rho c_1^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left[2 r_{,i} r_{,j} + \frac{\lambda}{\mu} r_{,i} n_{,j} \right] \frac{1}{R_1} \right.$$

(62.3)

$$J_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t; \xi) = \frac{\mu}{2\pi\rho c_2^2} \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (\delta_{ij} - 2 r_{,i} r_{,j}) + r_{,j} n_{,i} \right] \frac{1}{R_2} \tag{62.4}$$

Hay que señalar que estas expresiones no coinciden con las se dan en la referencia (Mansur, 1983) para Z_{ij} y J_{ij} a pesar de que el planteamiento y el tratamiento de la ecuación integral parece ser el mismo. La explicación de ello es la siguiente: no todos los términos que multiplican a las funciones delta $\delta(c_\alpha(t-\tau)-r)$, que surgen de derivar las funciones de Heavyside, son singulares en $c_\alpha(t-\tau) = r$. Es más, los que no son singulares, se anulan en $c_\alpha(t-\tau) = r$, como puede comprobarse observando la fórmula (35). La contribución de uno cualquiera de estos últimos términos, llamemosle X, en la integral (60), es nula ya que:

$$\int_0^{t^+} \delta(c_\alpha t' - r) X u_j d\tau = X u_j \Big|_{c_\alpha t' = r} = 0 \tag{63}$$

Abundando más en esta idea, sería posible sumar cualquier expresión X_{ij} , que se anule en $c_\alpha(t-\tau) = r$, multiplicada por $\delta(c_\alpha(t-\tau)-r)$, al tensor T_{ij} , de forma que, el valor de la integral (60), permanecerá invariable. Si tomamos un X_{ij} formalmente igual a los desplazamientos de la solución fundamental $X_{ij} = K (X \delta_{ij} + Y r_{,i} r_{,j})$ donde K es una constante y X e Y son funciones de r y t', que se anulan en $c_\alpha(t-\tau) = r$, su contribución a los núcleos $Z_{ij}^{(\alpha)}$ y $J_{ij}^{(\alpha)}$ viene dada, respectivamente, por,

$$\Delta Z_{ij}^{(\alpha)} = -\mu K \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left(\delta_{ij} \frac{\partial X}{\partial c_{\alpha} \tau} + 2r_{,i} r_{,j} \frac{\partial Y}{\partial c_{\alpha} \tau} \right) + \eta_{,i} r_{,j} \frac{\partial X}{\partial c_{\alpha} \tau} + \eta_{,j} r_{,i} \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial X}{\partial c_{\alpha} \tau} + \frac{\partial Y}{\partial c_{\alpha} \tau} \right) \right\} \quad (64.1)$$

$$\Delta J_{ij}^{(\alpha)} = \mu \frac{K}{c_{\alpha}} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} (\delta_{ij} X + 2r_{,i} r_{,j} Y) + \eta_{,i} r_{,j} X + \eta_{,j} r_{,i} \frac{\lambda}{\mu} (X + Y) \right\} \quad (64.2)$$

donde puede observarse que,

$$\Delta Z_{ij}^{(\alpha)} = -\frac{\partial \Delta J_{ij}^{(\alpha)}}{\partial \tau}$$

Las expresiones de X e Y, pueden escogerse de forma que se simplifiquen al máximo, en algún sentido, los núcleos finales Z_{ij} y J_{ij} . Esto es lo que se ha hecho, eliminando el máximo de términos del núcleo J_{ij} , o lo que es lo mismo integrando por partes sólo los términos singulares en $r = c_{\alpha} t$ de los que multiplican las funciones delta y no los que se anulan en ese punto. Estas ideas pueden ayudar a aclarar las discrepancias existentes entre las expresiones que se puedan encontrar en diferentes referencias.

Sin embargo, si se suponen unas aproximaciones de los desplazamientos y velocidades congruentes, es decir, que la aproximación de las velocidades en el tiempo sea la derivada temporal de la aproximación, en el tiempo, de los desplazamientos, el resultado final es el mismo. Esto es fácil de justificar calculando el valor de la contribución total del tensor arbitrario X_{ij} , que es,

$$\int_0^{t^+} (\Delta Z_{ij} u_j - \Delta J_{ij} v_j) d\tau = - \int_0^{t^+} \left(\frac{\partial \Delta J_{ij}}{\partial \tau} u_j + \Delta J_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial \tau} \right) d\tau \quad (65)$$

El integrando del segundo miembro es la derivada del producto $(\Delta J_{ij} u_j)$ y por tanto el valor de la integral es,

$$\int_0^{t^+} \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta J_{ij} u_j) d\tau = [\Delta J_{ij} u_j]_{t=0}^{t=t^+} = 0 \quad (66)$$

que se anula, pues, ΔJ_{ij} es cero en t^+ , por causalidad, y u_j se anula en 0.

De esta manera se llega a la ecuación integral,

$$c_{ij} u_j - \int_0^{t^+} \left[\int_{\Gamma} U_{ij} p_j d\Gamma \right] d\tau - \int_0^{t^+} \left[\int_{\Gamma} (Z_{ij} u_j - J_{ij} \dot{u}_j) d\Gamma \right] d\tau \quad (67)$$

en la que se han eliminado las fuertes singularidades de la ecuación inicial

(54).

La implementación numérica de esta ecuación, al igual que la formulación anterior requiere la consideración de un conjunto discreto de puntos $q = 1, \dots, Q$, en el contorno Γ , y un conjunto de instantes de tiempo t_n , $n = 1, \dots, N$. Las magnitudes variables $u_i(\mathbf{x}, t)$, $v_i(\mathbf{x}, t)$, $p_i(\mathbf{x}, t)$, se pueden aproximar a partir de los valores de las mismas en esta malla de puntos en que se ha discretizado el tiempo y el contorno espacial, a través de unas funciones de interpolación escogidas adecuadamente. Así, se puede escribir:

$$u_j(\mathbf{x}, t) = \sum_q \sum_n \psi^q(\mathbf{x}) \eta_n(\tau) u_j^{nq}$$

$$\dot{u}_j(\mathbf{x}, t) = \sum_q \sum_n \psi^q(\mathbf{x}) \dot{\eta}_n(\tau) u_j^{nq}$$

$$p_j(\mathbf{x}, t) = \sum_q \sum_n \phi^q(\mathbf{x}) \mu_n(\tau) p_j^{nq}$$

(68)

siendo u_j^{nq} y p_j^{nq} , los valores del desplazamiento y la tensión respectivamente, en el instante n -ésimo, $\tau_n = n \cdot \Delta t$, y el nodo q . Para asegurar esto, las funciones de interpolación, han de cumplir,

$$\psi^q(\mathbf{x}^p) \eta_n(\tau_m) = \delta_{qp} \delta_{mn}$$

$$\phi^q(\mathbf{x}^p) \mu_n(\tau_m) = \delta_{qp} \delta_{mn}$$

Las funciones $\phi^q(r)$ y $\psi^q(r)$ son similares a las utilizadas en la aproximación espacial de la formulación anterior (49). Igual que en aquella, en esta formulación se considerarán dos tipos de funciones de forma, constantes y parabólicas.

Las funciones $\mu_n(\tau)$ y $\eta_n(\tau)$, interpolan las variables en el tiempo. A la vista de la interpolación para las velocidades, para que $\eta_n(\tau)$ sea distinto de cero, es necesario que la función $\eta_n(\tau)$, sea al menos, lineal. En cualquier caso, estas funciones se escogen también de pequeño soporte en el tiempo, de forma que sean nulas fuera del intervalo $[\tau_n^-, \tau_n^+]$, que contiene al instante τ_n , como se muestra en la figura 7.

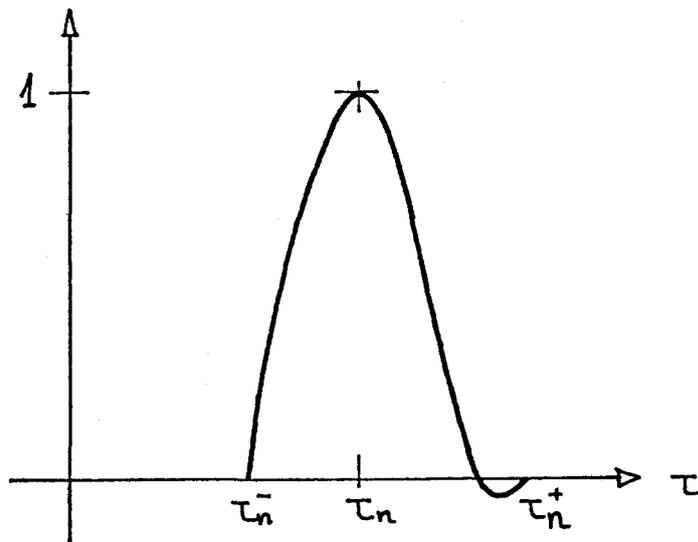


Figura 7

Sustituyendo estas aproximaciones (68) en la ecuación integral (67), particularizada en el instante N, en un nodo p del contorno, se llega a,

$$c_{ij} u_j^{Np} + \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q u_j^{nq} \int_{\Gamma'_q} \left(\int_{\tau_n}^{\tau_n^+} (Z_{ij} \eta_n - J_{ij} \dot{\eta}_n) d\tau \right) \psi_q d\Gamma =$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q p_j^{nq} \int_{\Gamma'_q} \left(\int_{\tau_n}^{\tau_n^+} U_{ij} \mu_n d\tau \right) \phi_q d\Gamma$$

(69)

Se escogen funciones de forma superponibles en el tiempo, es decir que se puedan obtener una de otra mediante una traslación temporal,

$$\mu_n(\tau) = \mu_{n-s}(\tau - \tau_s) \quad \text{con } \tau_s = s \Delta t \tag{70.1}$$

y en concreto,

$$\mu_n(\tau) = \mu_1(\tau - (n-1) \Delta t) \tag{70.2}$$

Haciendo uso de la propiedad de traslación del estado de Stokes, (30.3), y de la igualdad anterior, se define,

$$U_{ij}^n = \sum_{\alpha=1}^2 U_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \xi) = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\tau_1}^{\tau_1^+} U_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t-(n-1)\Delta t - \tau; \xi) \mu_1(\tau) d\tau =$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \int_{\tau_n}^{\tau_n^+} U_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t - \tau; \xi) \mu_n(\tau) d\tau$$

(71.1)

y de forma similar,

$$T_{ij}^n = \sum_{\alpha=1}^2 T_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \xi) = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\tau_1}^{\tau_1^+} (Z_{ij}^{(\alpha)} \eta_1 - J_{ij}^{(\alpha)} \eta_1) d\tau$$

(71.2)

En el presente trabajo se han considerado, para las funciones de interpolación en el tiempo, diferentes posibilidades. Para $\mu_n(\tau)$ se han desarrollado las expresiones (71), para el caso constante y para el lineal a trozos, mientras que para $\eta_n(\tau)$, sólo se considera, en principio, el caso lineal,

debido a la necesidad de que su derivada sea no-nula. Las funciones de tiempo consideradas se muestran en la figura 8.

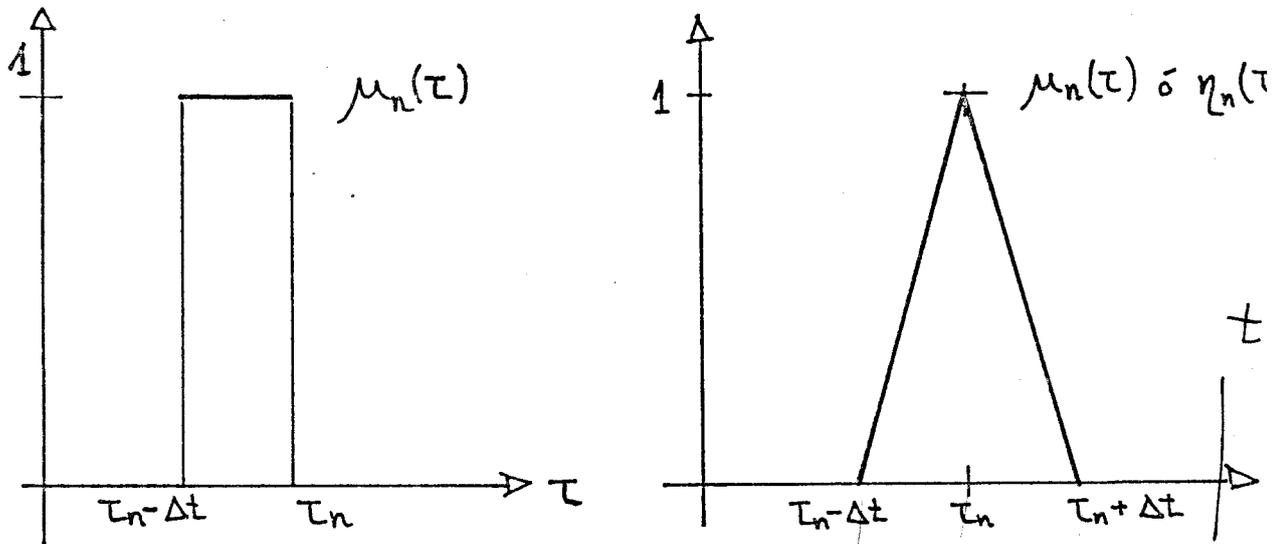
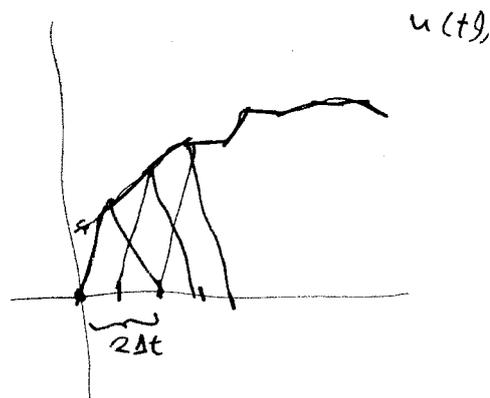


Figura 8

Las integrales (71) se hacen analíticamente y el proceso se muestra en el apéndice B. Los núcleos que se obtienen para las diversas función de forma se listan a continuación.

Función de interpolación de tensiones $\mu_n(\tau)$ constante.

Se obtiene el mismo U_{ij}^n de la ecuación (48.1) de la formulación anterior.



Función de interpolación de tensiones $u_n(\tau)$ lineal.

$$U_{ij}^n = \sum_{\alpha=1}^2 U_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \xi) = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{4\pi r c_{\alpha}^2} \left[\delta_{ij} (L'_{\alpha} - D'_{\alpha}) + (-)^{\alpha} (\delta_{ij} - 2 r_{,i} r_{,i}) F_{\alpha} \right] \quad (72)$$

siendo,

$$L'_{\alpha} = \frac{t}{\Delta t} \text{Ln} \frac{1 + \sqrt{1 - \eta_{\alpha}^2}}{\eta_{\alpha}} - 2 \frac{t - \Delta t}{\Delta t} \text{Ln} \frac{1 + \sqrt{1 - \theta_{\alpha}^2}}{\theta_{\alpha}} +$$

$$\frac{t - 2\Delta t}{\Delta t} \text{Ln} \frac{1 + \sqrt{1 - \beta_{\alpha}^2}}{\beta_{\alpha}}$$

$$D'_{\alpha} = \frac{t}{\Delta t} \sqrt{1 - \eta_{\alpha}^2} - 2 \frac{t - \Delta t}{\Delta t} \sqrt{1 - \theta_{\alpha}^2} + \frac{t - 2\Delta t}{\Delta t} \sqrt{1 - \beta_{\alpha}^2}$$

$$F_{\alpha} = \frac{t}{3\Delta t} \frac{\sqrt{(1 - \eta_{\alpha}^2)^3}}{\eta_{\alpha}^2} - 2 \frac{t - \Delta t}{3\Delta t} \frac{\sqrt{(1 - \theta_{\alpha}^2)^3}}{\theta_{\alpha}^2} + \frac{t - 2\Delta t}{3\Delta t} \frac{\sqrt{(1 - \beta_{\alpha}^2)^3}}{\beta_{\alpha}^2}$$

donde, η_{α} y θ_{α} están definidos como en las fórmulas (48),

$$\frac{\sqrt{(1 - \frac{1}{\alpha^2})^3}}{\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{(1 - \frac{1}{\alpha^2})^{3/2}}{1/\alpha^2} = \alpha^2 \frac{(\alpha^2 - 1)^{3/2}}{\alpha^3} = \frac{(\alpha^2 - 1)^{3/2}}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{1}{\eta}$$

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha} &= r / c_{\alpha} t & \text{si } r < c_{\alpha} t & \quad \text{y} \quad \eta_{\alpha} = 1 & \text{si } r \geq c_{\alpha} t \\ \theta_{\alpha} &= r / c_{\alpha} (t - \Delta t) & \text{si } r < c_{\alpha} (t - \Delta t) & \quad \text{y} \quad \theta_{\alpha} = 1 & \text{si } r \geq c_{\alpha} (t - \Delta t) \end{aligned}$$

y de manera similar,

$$\beta_{\alpha} = r / c_{\alpha} (t - 2\Delta t) \quad \text{si } r < c_{\alpha} (t - 2\Delta t) \quad \text{y} \quad \beta_{\alpha} = 1 \quad \text{si } r \geq c_{\alpha} (t - 2\Delta t)$$

Función de interpolación de desplazamientos $\eta_n(\tau)$ lineal.

$$\begin{aligned} T_{ij}^n &= \sum_{\alpha=1}^2 T_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \xi) = \\ & \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\mu}{4\pi\rho c_{\alpha}} \frac{1}{r} \left[A_{ij}^{(\alpha)} F_{\alpha} - B_{ij}^{(\alpha)} D'_{\alpha} \right] \end{aligned} \tag{73}$$

donde, D'_{α} y F_{α} son los mismos que en la expresión (72) de U_{ij}^n , y los factores $A_{ij}^{(\alpha)}$ y $B_{ij}^{(\alpha)}$ coinciden con los dados para el tensor T_{ij}^n de la formulación anterior, en la ecuación (48.2).

El núcleo U_{ij}^n de la fórmula (72), obtenido con funciones de forma lineales en tensiones, se presenta por primera vez en esta tesis.

En estas expresiones y en las definiciones de η_{α} , θ_{α} y β_{α} , la variable t debe entenderse de nuevo como $t - (n-1)\Delta t$.

Si se emplea una nomenclatura similar a la usada en la formulación anterior,

$$\begin{aligned}
 H_{ij}^{mq} &= \int_{\Gamma'_q} \psi^q T_{ij}^n(\mathbf{x}, (N-n+1)\Delta t; \mathbf{x}^p) d\Gamma_q \\
 G_{ij}^{mq} &= \int_{\Gamma'_q} \phi^q U_{ij}^n(\mathbf{x}, (N-n+1)\Delta t; \mathbf{x}^p) d\Gamma_q
 \end{aligned}
 \tag{74}$$

donde $m = N - n + 1$, se obtiene la ecuación,

$$c_{ij}^{mp} u_j^{mp} + \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q H_{ij}^{mq} u_j^{nq} = \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q G_{ij}^{mq} p_j^{nq}
 \tag{75}$$

formalmente igual a la ecuación (53), diferenciándose exclusivamente en el camino empleado para obtener los núcleos U_{ij}^n y T_{ij}^n .

Unificación de Ambas Formulaciones

Tal como se han presentado aquí, aunque la forma de alcanzar la ecuación discreta final, es muy distinta, las similitudes entre ambas alternativas, destacan más que las diferencias. Efectivamente, ambas parten

de ecuaciones integrales diferentes, (41) y (42), pero que en realidad son dos formas de decir exactamente lo mismo, como ponen de manifiesto las igualdades (39). En la primera formulación se discretiza el intervalo de tiempo considerado y se suponen constantes las variables en los pequeños lapsos en que éste se divide, y más adelante se discretiza el contorno en elementos; mientras que, en la segunda formulación, la discretización en tiempo y espacio se realiza simultáneamente, pudiéndose escoger la interpolación de las magnitudes, tanto en el tiempo como en el espacio. Sin embargo al final, el resultado es el mismo, se han escogido una serie de puntos del contorno, nodos, y una serie de instantes en el tiempo, pasos, y a partir de los valores discretos, en esa malla en el tiempo y el espacio se interpolan las magnitudes variables del problema. Todo apunta a que la formulación primera, más restringida en cuanto a la interpolación temporal, pueda obtenerse a partir de la segunda.

Efectivamente, en la primera formulación las magnitudes se consideran constantes a lo largo del intervalo $[t-(n-1)\Delta t, t-n\Delta t]$, es decir que se adoptan para las tensiones y los desplazamientos funciones de forma $\mu_n(\tau)$ y $\eta_n(\tau)$ constantes. De hecho la expresión de U_{ij}^n es la misma en los dos casos, pues es lo mismo el estado de Stokes correspondiente a la función pulso de ancho Δt , $s^1(t)$, que el producto de convolución del estado de Stokes para la función impulso $\delta(t)$, por la función pulso, $\mu_1(\tau)$, como indicaban las ecuaciones (39). Sin embargo, al establecer la ecuación integral (67) se apuntaba la necesidad de que la función de interpolación temporal de las variables u_j , tuviera derivada no-nula, para poder representar las velocidades con funciones constantes, al menos. Si, a pesar de esta recomendación, adoptamos una función $\eta_n(\tau) = H(t-(n-1)\Delta t) - H(t-n\Delta t)$, su derivada no será realmente nula, sino que vendrá dada por, $\eta_n(\tau) = \delta(t-(n-1)\Delta t) - \delta(t-n\Delta t)$, (ver figura 9), con lo que el núcleo T_{ij}^n se obtendrá con la ecuación,

$$T_{ij}^n = \sum_{\alpha=1}^2 T_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \xi) = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\tau_1^-}^{\tau_1^+} Z_{ij}^{(\alpha)} dt = \sum_{\alpha=1}^2 \left(J_{ij}^{(\alpha)+} - J_{ij}^{(\alpha)-} \right) \quad (76)$$

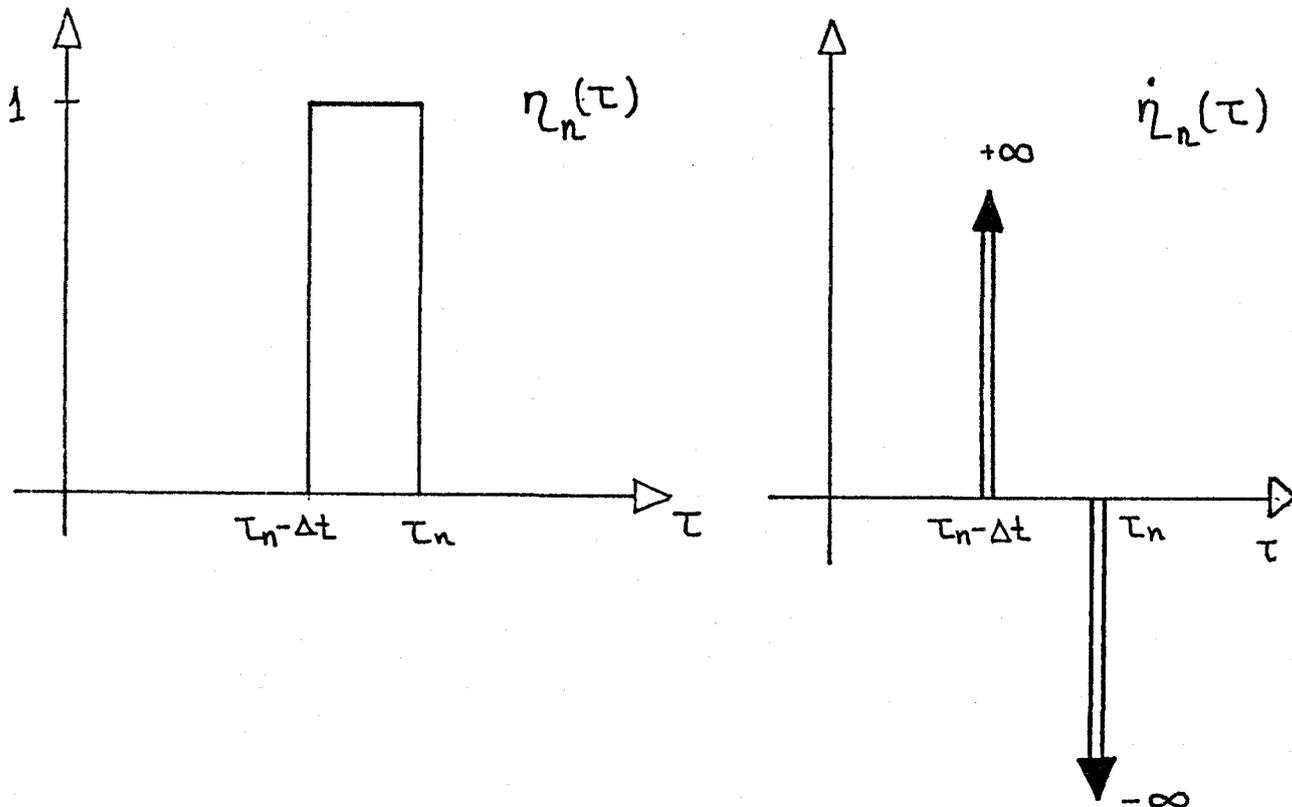


Figura 9

Si se opera en esta expresión, sustituyendo los tensores Z_{ij} y J_{ij} , dados por (62), se obtiene una expresión de T_{ij}^n , exactamente igual a la de la ecuación (48.2), que se había obtenido del núcleo U_{ij}^n , de la primera formulación, (48.1), aplicando las ecuaciones de compatibilidad, comportamiento y equilibrio en el contorno, resumidas en la relación (8).

El uso de una función de interpolación $\eta_n(\tau)$ constante, que da lugar a una interpolación singular de las velocidades, va a tener consecuencias muy negativas en las singularidades que van a darse en el núcleo T_{ij}^n así obtenido, cuestión que se analiza en el apartado siguiente.

Independientemente del proceso seguido, y de las funciones de interpolación adoptadas, ambas formulaciones, unificadas ahora en la segunda, llegan a la ecuación discreta (75). Si esta ecuación se escribe para las dos direcciones de todos los nodos, se llega a la ecuación matricial,

$$\mathbf{c} \mathbf{u}^N + \sum_{n=1}^N \mathbf{H}^m \mathbf{u}^n = \sum_{n=1}^N \mathbf{G}^m \mathbf{p}^n \quad , m = N - n + 1 \quad (77)$$

donde los vectores \mathbf{u}^n y \mathbf{p}^n , contienen los desplazamientos y tensiones en las dos direcciones, de los Q puntos del contorno, en el paso n ; las matrices \mathbf{H}^m y \mathbf{G}^m contienen los elementos H_{ij}^{mq} y G_{ij}^{mq} definidos en las ecuaciones (74).

Si cambiamos ligeramente la notación y llamamos \mathbf{H}^1 , a la suma $\mathbf{C} + \mathbf{H}^1$, se puede escribir,

$$\mathbf{H}^1 \mathbf{u}^N = \mathbf{G}^1 \mathbf{p}^N + \mathbf{a}^N \quad (78)$$

$$\text{donde } \mathbf{a}^N = \sum_{n=2}^N (\mathbf{H}^m \mathbf{u}^n - \mathbf{G}^m \mathbf{p}^n) \quad , m = N - n + 1$$

vector que representa la contribución de los pasos anteriores sobre el actual y que es conocido, supuestos conocidos los valores de las tensiones y desplazamientos en instantes anteriores al N-ésimo,

Las variables en el contorno del instante N, serán una parte incógnitas, \mathbf{x}^N , y otra parte datos \mathbf{y}^N . Reordenando el sistema (78) se llega a,

$$\mathbf{A} \mathbf{x}^N = \mathbf{B} \mathbf{y}^N + \mathbf{a}^N \quad (79)$$

La matriz \mathbf{A} , del sistema no cambia si no cambian de naturaleza las condiciones de contorno, es decir, si en un nodo la incógnita es en todos los pasos, o bien la tensión, o bien el desplazamiento; en consecuencia, sólo es necesario invertir o triangularizar el sistema una vez.

A partir de la ecuación (79) puede establecerse un algoritmo que, partiendo del instante inicial, vaya calculando paso a paso las incógnitas de cada instante de tiempo. En cada paso N no se calculan todas las matrices \mathbf{H}^m y \mathbf{G}^m , sino \mathbf{H}^N y \mathbf{G}^N , exclusivamente; después de este cálculo, se realiza el sumatorio de convolución \mathbf{a}^N y se calculan las incógnitas \mathbf{x}^N de ese instante, premultiplicando el vector $(\mathbf{B}\mathbf{y}^N + \mathbf{a}^N)$ por la matriz \mathbf{A}^{-1} que estará calculada del primer paso de tiempo.

Ejemplo Numérico

El mismo ejemplo numérico presentado en la referencia (Spyrakos y Antes, 1986) va a ser analizado en este apartado, para ilustrar la equivalencia de ambas formulaciones, así como, corroborar que los núcleos de tensiones de la referencia (Spyrakos, 1984), no son correctos.

Sea una cimentación rígida superficial de 1.525 m de anchura, considerada sin masa, sujeta a un pulso de fuerza en dirección vertical de intensidad 2626.92 kN/m, (ver figura 10). La cimentación descansa sobre un semi-espacio elástico lineal, caracterizado por un módulo de elasticidad $E = 1.24 \times 10^{11}$ N/m², una densidad $\rho = 5362.45$ kg/m³ y un módulo de Poisson $\nu = 1/3$. Se suponen las llamadas condiciones de contorno relajadas tal como se hacen Spyrakos y Antes (1986), (ver Domínguez, 1978a), según las cuales los movimientos de cabeceo y vertical de la cimentación, están desacoplados con el horizontal. Bajo estas condiciones, sólo es necesario discretizar la porción del semiespacio, que hay justo bajo la cimentación. Esta interfase se ha discretizado con ocho elementos constantes, igual que en las referencias (Spyrakos, 1984; Spyrakos y Antes, 1986).

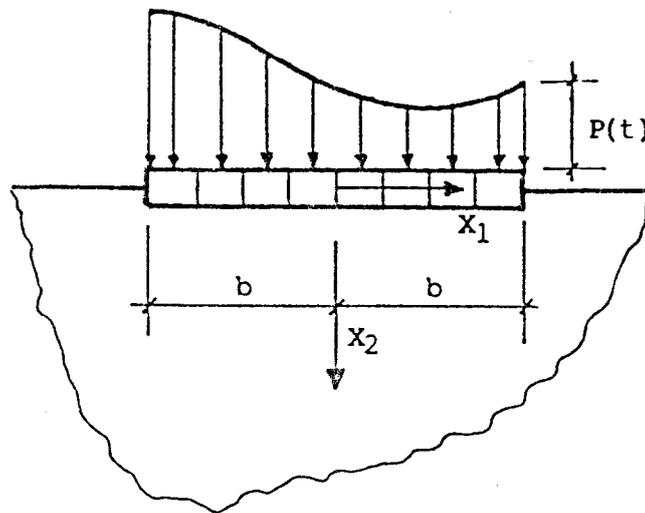


Figura 10

Los resultados para la respuesta al pulso de la cimentación obtenida con las dos formulaciones ha de ser idéntica, si se usa la misma función de interpolación en el tiempo para las tensiones, independientemente de la

interpolación usada para los desplazamientos. Esto, que está en desacuerdo con la referencia (Spyrakos y Antes, 1986), puede probarse fácilmente. Cuando se escribe la ecuación (43) para los nodos de la discretización, y se suponen condiciones de contorno relajadas, la segunda integral del miembro de la derecha es nulo, para cualquier instante n , y cualquier elemento q , pues por ser el contorno recto $T_{ij}^n = 0$ si $i = j$, mientras que, por las condiciones de contorno relajadas se hace $T_{ij}^n = 0$ para $i \neq j$. Como la aproximación en el tiempo para las tensiones, se está suponiendo que es la misma, constante en ambos casos, la ecuación obtenida en cada paso de tiempo, para u_j , es la misma para ambas formulaciones y, por lo tanto, lo será también, el movimiento de la cimentación.

La figura 11 muestra el desplazamiento vertical obtenido con el programa desarrollado para esta tesis, utilizando funciones de interpolación constantes en el tiempo, para tensiones y desplazamientos, tomando para la aproximación en el tiempo un intervalo $\Delta t = 16 \mu s$, y los resultados que se presentan en Spyrakos (1984) y Spyrakos y Antes (1986), obtenidos con el mismo paso de tiempo, con la primera formulación. Como puede observarse, las diferencias son sustanciales.

En las figuras 12 y 13 se muestran, la respuesta a un pulso horizontal de intensidad 2626.92 kN/m, y a un pulso de momento de intensidad 801.21 kN. Igual que en Spyrakos (1984) y Spyrakos y Beskos (1986) se toma para estos casos, un módulo de Poisson $\nu = 1/4$ y un paso de tiempo $\Delta t = 18 \mu s$. En las figuras, se representan con línea discontinua, los movimientos obtenidos en Spyrakos (1984). Como puede observarse, las diferencias son aún más notables. En concreto, la respuesta horizontal, copiada de la referencia Spyrakos (1984) que aparece en la figura 12, resulta muy poco creíble, teniendo en cuenta el fenómeno físico que pretende representar.

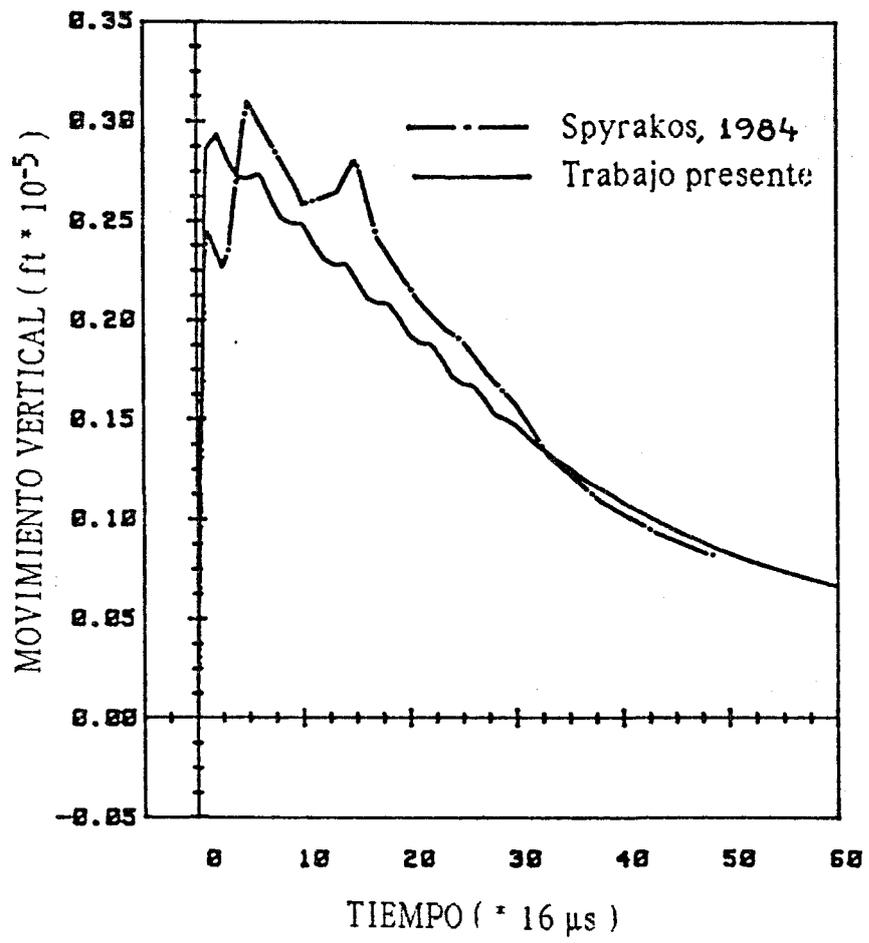


Figura 11

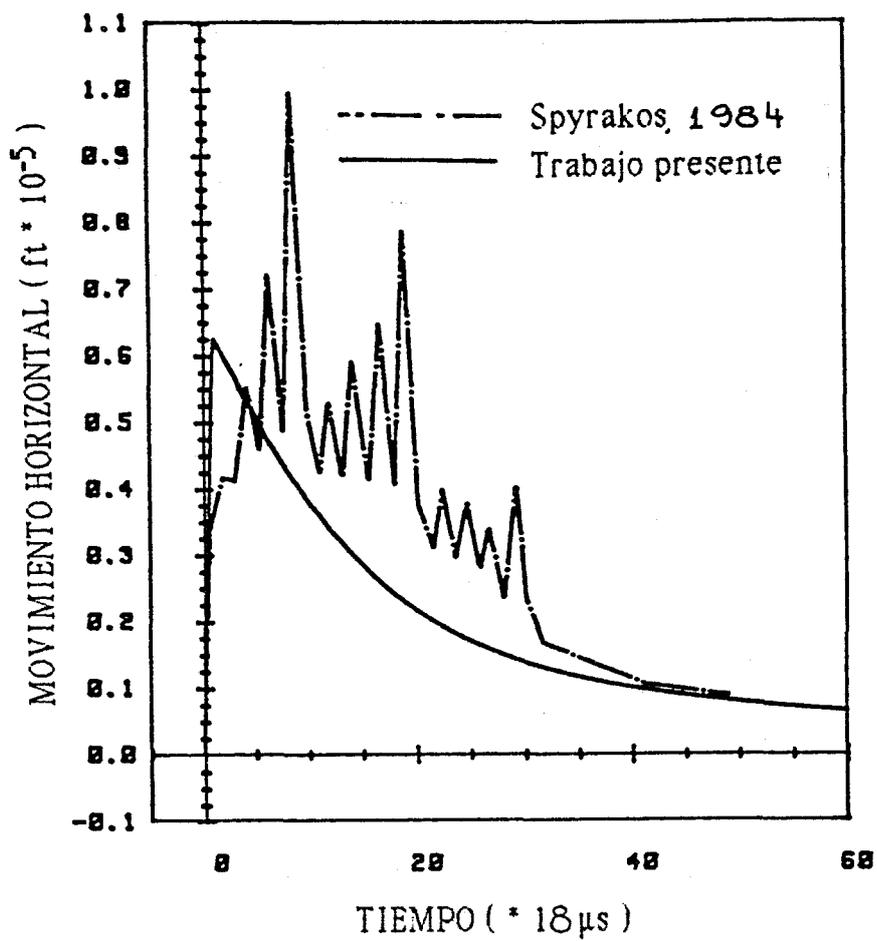


Figura 12

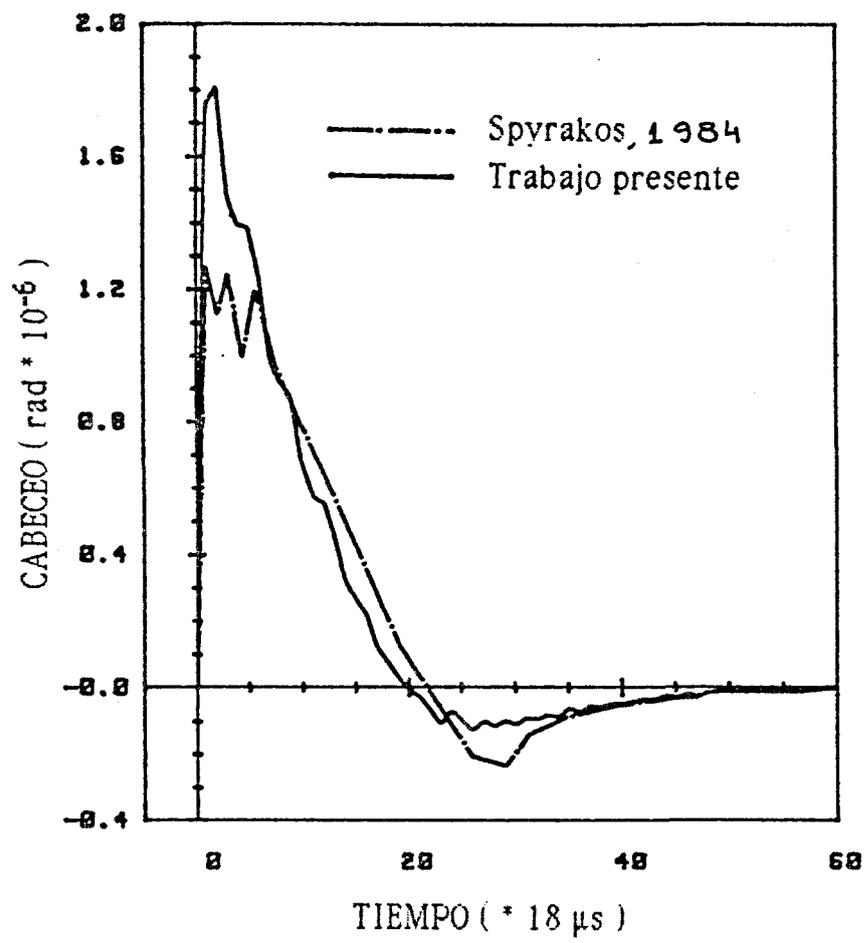


Figura 13

Conclusiones Sobre las Formulaciones

De los argumentos presentados en este capítulo, pueden extraerse las siguientes conclusiones, respecto a las dos formulaciones del método de los elementos de contorno, aparentemente distintas, que habían aparecido recientemente:

a) Ambas formulaciones son iguales. La única diferencia es que la función de interpolación temporal de los desplazamientos es constante en la primera, y en la segunda se tomó lineal, para poder interpolar las velocidades con funciones, al menos, constantes a trozos.

b) Los núcleos de la primera formulación, que corresponden a un estado de Stokes, provocado por un pulso de intensidad unidad y anchura Δt , son iguales a los de la segunda formulación, obtenidos de la convolución de la solución fundamental, debida a una delta de Dirac, con unas funciones de interpolación constantes.

c) El núcleo T_{ij}^n , correspondiente a una función de interpolación de los desplazamientos constante, puede obtenerse por derivación espacial del núcleo U_{ij}^n , obtenido con la misma función constante, tal como se hace en la referencia (Spyrakos, 1984), o bien, realizando las operaciones dadas en la ecuación (76), que se obtiene teniendo en cuenta que las velocidades son singulares. Esto se ha hecho por los dos caminos, obteniendo igual resultado, no coincidiendo éste con el de Spyrakos (1984). El hecho de que por ambos caminos se llegue a iguales resultados, y las diferencias enormes que se observan en la respuesta del problema de la cimentación mostrado anteriormente, indica que los núcleos de Spyrakos (1984) son incorrectos.

d) La respuesta de una cimentación superficial rígida bajo un pulso de fuerza, cuando se consideran condiciones de contorno relajadas, debería ser la misma con ambas formulaciones. Los resultados obtenidos con el programa

desarrollado, usando ambas interpolaciones de los desplazamientos, coinciden entre sí, y están de acuerdo con los debidos a Antes en (Spyrakos y Antes, 1986).

2.3.- Análisis de las singularidades de los núcleos $U_{ij}^{(\alpha)n}$ y $T_{ij}^{(\alpha)n}$ para $r \rightarrow 0$ y $r \rightarrow c_\alpha t'$

Si se observan las expresiones de $U_{ij}^{(\alpha)n}$ y $T_{ij}^{(\alpha)n}$, dadas por las ecuaciones (48.1), (48.2), (72) y (73), parecen fuertemente singulares, tanto para $r \rightarrow 0$, como $r \rightarrow c_\alpha t'$.

Analicemos el comportamiento de estos núcleos para $r \rightarrow 0$. En el tensor de desplazamientos $U_{ij}^{(\alpha)n}$ de la ecuación (48.1), aparecen términos de orden r^{-2} , y otros del tipo $\ln(r)$. Para el caso de interpolación temporal de las tensiones lineal, la ecuación de $U_{ij}^{(\alpha)n}$, (72), contiene igualmente términos de orden r^{-2} y $\ln(r)$. El núcleo $T_{ij}^{(\alpha)n}$, dado en la ecuación (48.2), obtenido a partir de una interpolación constante de los desplazamientos, contiene términos aún más singulares; del orden de r^{-3} , y otros de orden r^{-1} . La expresión de $T_{ij}^{(\alpha)n}$, obtenida con η_n lineal, ecuación (73), también contiene fuertes singularidades aparentes, de orden r^{-3} y r^{-1} .

Si se considera un instante de tiempo, tal que $\eta_\alpha < 1$, $\theta_\alpha < 1$ y $\beta_\alpha \leq 1$, para todo r , es decir, para todo $t' \geq 2 \Delta t$, las componentes singulares en $r \rightarrow 0$ se cancelan, combinando los términos de ambas ondas elásticas.

Sin embargo, para el primer instante de tiempo, $t' = \Delta t$, sólomente son distintos de cero, los términos correspondientes al "frente" de las ondas P y S, es decir, los que dependen de la variable η_α . En este caso los núcleos son efectivamente singulares, pudiendose aislar dicha singularidad. Esta resulta ser exactamente la solución fundamental de la elastostática.

Operando para $t' = \Delta t$, se llega a, las siguientes expresiones

Función de forma μ_n constante

$$\begin{aligned}
 U_{ij}^n(\mathbf{x}, \Delta t; \boldsymbol{\xi}) &= U_{ij}^{(est)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) + \\
 &\frac{1 + \nu}{4\pi E (1 - \nu)} \left\{ \delta_{ij} \left[(3 - 4\nu) \left(\text{Ln } \Delta t + \text{Ln} \left[c_1^\kappa \left(1 + \sqrt{1 - \eta_1^2} \right)^\kappa \right] + \right. \right. \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. \text{Ln} \left[c_2^{1-\kappa} \left(1 + \sqrt{1 - \eta_2^2} \right)^{1-\kappa} \right] \right] - \frac{1}{2} \right] - \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. \left(\delta_{ij} - 2 r_i r_j \right) \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \eta_1^2} + \sqrt{1 - \eta_2^2}} - \frac{1}{2} \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{80}$$

donde $\kappa = (1 - 2\nu)/(3 - 4\nu)$

Función de forma μ_n lineal

$$U_{ij}^n(\mathbf{x}, \Delta t; \boldsymbol{\xi}) = U_{ij}^{(est)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) +$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1+\nu}{4\pi E(1-\nu)} \left\{ \delta_{ij} \left[(3-4\nu) \left(\text{Ln } \Delta t + \text{Ln} \left[c_1^\kappa \left(1 + \sqrt{1-\eta_1^2} \right)^\kappa \right] + \right. \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. \text{Ln} \left[c_2^{1-\kappa} \left(1 + \sqrt{1-\eta_2^2} \right)^{1-\kappa} \right] \right] - \frac{1}{2} - \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. (1-2\nu) \sqrt{1-\eta_1^2} - 2(1-\nu) \sqrt{1-\eta_2^2} \right] - \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. (\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) \left[\frac{\sqrt{1-\eta_1^2} + \sqrt{1-\eta_2^2} - 2}{3} + \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. \frac{1/6 \sqrt{1-\eta_1^2} \left(1 - \sqrt{1-\eta_1^2} \right)}{\sqrt{1-\eta_1^2} + \sqrt{1-\eta_2^2}} + \frac{1/6 \sqrt{1-\eta_2^2} \left(1 - \sqrt{1-\eta_2^2} \right)}{\sqrt{1-\eta_1^2} + \sqrt{1-\eta_2^2}} \right] \right\} \quad (81)
 \end{aligned}$$

Función de forma η_n constante

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^n(\mathbf{x}, \Delta t; \boldsymbol{\xi}) &= T_{ij}^{(est)}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) + \\
 & \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left(\delta_{ij} Y_1 + 2r_{,i}r_{,j} Y_2 \right) + n_{,i}r_{,j} Y_1 + r_{,i}r_{,j} Y_3 \right\} \quad (82)
 \end{aligned}$$

siendo,

$$Y_1 = X^* - 2(1 - \nu) X^2$$

$$Y_2 = -2 X^* - (1 - 2\nu) X^1 + 2(1 - \nu) X^2$$

$$Y_3 = X^* - 2\nu X^1$$

donde, a su vez,

$$X^* = \frac{X^1 \sqrt{1 - \eta_1^2} + X^2 \sqrt{1 - \eta_2^2}}{\sqrt{1 - \eta_1^2} + \sqrt{1 - \eta_2^2}}$$

y

$$X^\alpha = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \eta_\alpha^2}} - 1 \right) = \frac{\frac{r}{c_\alpha \Delta t^2}}{\sqrt{1 - \eta_\alpha^2} \left(1 + \sqrt{1 - \eta_\alpha^2} \right)}$$

Función de forma η_n lineal

$$T_{ij}^n(\mathbf{x}, \Delta t; \xi) = T_{ij}^{(est)}(\mathbf{x}; \xi) +$$

$$\frac{1}{4\pi(1 - \nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left(\delta_{ij} Y_1 + 2 r_{,i} r_{,j} Y_2 \right) + n_{,i} r_{,j} Y_1 + r_{,i} r_{,j} Y_3 \right\}$$

(83)

siendo, igual que en la anterior,

$$Y_1 = X^* - 2(1 - \nu) X^2$$

$$Y_2 = -2 X^* - (1 - 2\nu) X^1 + 2(1 - \nu) X^2$$

$$Y_3 = X^* - 2\nu X^1$$

pero, en esta ocasión,

$$X^* = 1/3 (X^1 + X^2) + 1/3 \frac{X^1 \sqrt{1 - \eta_1^2} + X^2 \sqrt{1 - \eta_2^2}}{\sqrt{1 - \eta_1^2} + \sqrt{1 - \eta_2^2}}$$

y

$$X^\alpha = \frac{1}{r} \left(1 - \sqrt{1 - \eta_\alpha^2} \right) = - \frac{\frac{r}{c_\alpha} \Delta t^2}{\left(1 + \sqrt{1 - \eta_\alpha^2} \right)}$$

En las fórmulas anteriores $U_{ij}^{(est)}$ y $T_{ij}^{(est)}$ representan los desplazamientos y tensiones de la solución fundamental estática, que viene dados por las expresiones, (p.e. Domínguez, 1989),

$\kappa = \frac{2\nu}{1-\nu}$

$$U_{ij}^{(est)} = \frac{1+\nu}{4\pi E (1-\nu)} \left[(3-4\nu) \delta_{ij} \ln \frac{1}{r} + r_{,i} r_{,j} \right] = \frac{1}{4\pi \mu} \left[(1+\kappa) \delta_{ij} \ln \frac{1}{r} + (1-\kappa) r_{,i} r_{,j} \right]$$

$$T_{ij}^{(est)} = \frac{-1}{4\pi (1-\nu)} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j} \right] + (1-2\nu) (n_{,i} r_{,j} - n_{,j} r_{,i}) \right)$$

$$= \frac{-1}{2\pi r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} (\kappa \delta_{ij} + 2(1-\kappa) r_{,i} r_{,j}) + \kappa (n_{,i} r_{,j} - n_{,j} r_{,i}) \right] \quad (84)$$

$$z_1 = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \cdot (1-2\nu)$$

$$z_2 = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \cdot 2$$

$$z_3 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} (1-2\nu)$$

$$\kappa = \frac{2\nu}{1-\nu} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

$$1+\kappa = \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)}$$

$$1-\kappa = \frac{1}{2(1-\nu)}$$

Puede comprobarse que, para el caso de las tensiones T_{ij}^n , (82) y (83), conforme se hace tender Δt a ∞ , la componente dinámica de estas expresiones tiende cero. Sin embargo, la componente dinámica de los núcleos U_{ij}^n , contiene términos que no se anulan al hacer tender Δt a infinito. Este término representa, para cada Δt , una constante añadida a la solución fundamental, que no afecta a la representación integral obtenida, si las tensiones que solicitan al dominio en estudio están en equilibrio. De hecho, ya en la solución estática hay una constante indeterminada, por la existencia del $\ln(r)$.

La conclusión de estas igualdades es que, cualquiera que sea la interpolación escogida, para un problema cuasi-estático, en el que la variación de la magnitudes fuera muy lenta, y por ello se pudiera escoger un intervalo de tiempo Δt muy grande, la solución obtenida sería muy aproximadamente la que se alcanzaría utilizando la solución estática, y más similar, cuanto mayor fuera el Δt adoptado.

Un análisis detallado del problema similar que se presenta, en la elastodinámica en el dominio de la frecuencia, al hacer tender ésta a cero, puede encontrarse en Abascal (1984). No se va a insistir más en este tema pues la descomposición anterior va emplearse para realizar las integrales singulares con más facilidad, pero, en general, no va a ser necesario aproximar un problema estático mediante la solución dinámica para $\Delta t \rightarrow \infty$.

Analizando lo que ocurre para $r = c_\alpha t'$, se comprueba que para cualquier instante $t' \neq 0$, todos los núcleos son no singulares, es más, nulos, excepto el de tensiones, T_{ij}^n , (48.2), obtenido en la primera formulación, que correspondía a una interpolación de los desplazamientos constante, y singular en las velocidades, desde el punto de vista de la segunda formulación. Este núcleo contiene los términos E_α , que varían como $(c_\alpha^2 t'^2 - r^2)^{-1/2}$. Esta singularidad se presenta para todo instante t' , en el "frente", es decir en los

puntos \mathbf{x} , tales que su distancia r al punto de colocación ξ , sea $r \equiv c_\alpha t'$, y también en la "cola", puntos \mathbf{x} del contorno donde $r \equiv c_\alpha (t' - \Delta t)$, de las ondas S y P. Para un t' determinado, al calcular las integrales espaciales (52), encontraremos unas singularidades de orden $r'^{-1/2}$, siendo $r' = c_\alpha t' - r$. Estas integrales consideradas como impropias, tienen un valor finito, pero la dificultad mayor que presenta su cálculo, es que la singularidad se encontrará en puntos diferentes en cada paso de tiempo, y en general, podrá existir, más de una, en un elemento determinado, con lo que la localización, e identificación de los puntos singulares, a fin de integrar precisamente la singularidad, acumulando abscisas de integración en sus cercanías, por ejemplo, se convierte en una tarea engorrosa y costosa.

Desde el punto de vista de la segunda formulación, se puede justificar que el término singular $(c_\alpha^2 t'^2 - r^2)^{-1/2}$ aparezca en la expresión final de T_{ij}^n , pues después de haber manipulado la expresión de $T_{ij} \cdot u_j$, para obtener $Z_{ij} \cdot u_j - J_{ij} \cdot v_j$ libre de funciones delta de Dirac, que producían singularidades no-integrables, se introduce una función de interpolación en el tiempo, cuya expresión es una suma de funciones delta.

En las figuras 14 se representan algunos términos de los núcleos obtenidos. La forma de los mismos sugiere la integración por trozos de la onda, para poder obtener integrales más precisas. Este tema se tratará en el siguiente apartado.

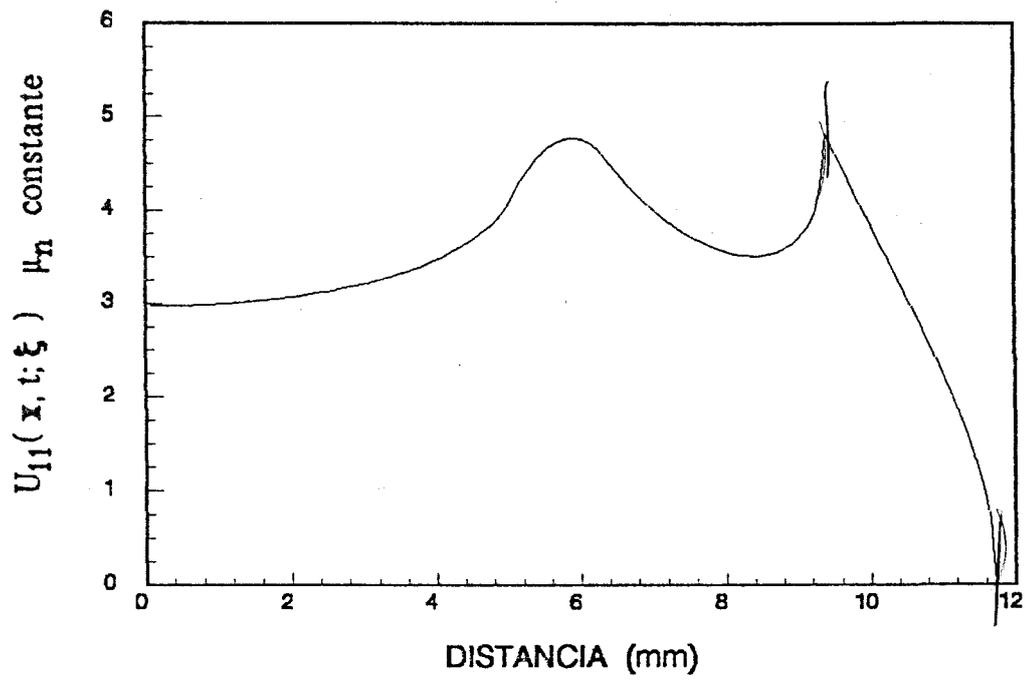


Figura 14(a). Desplazamientos * 10^{13}

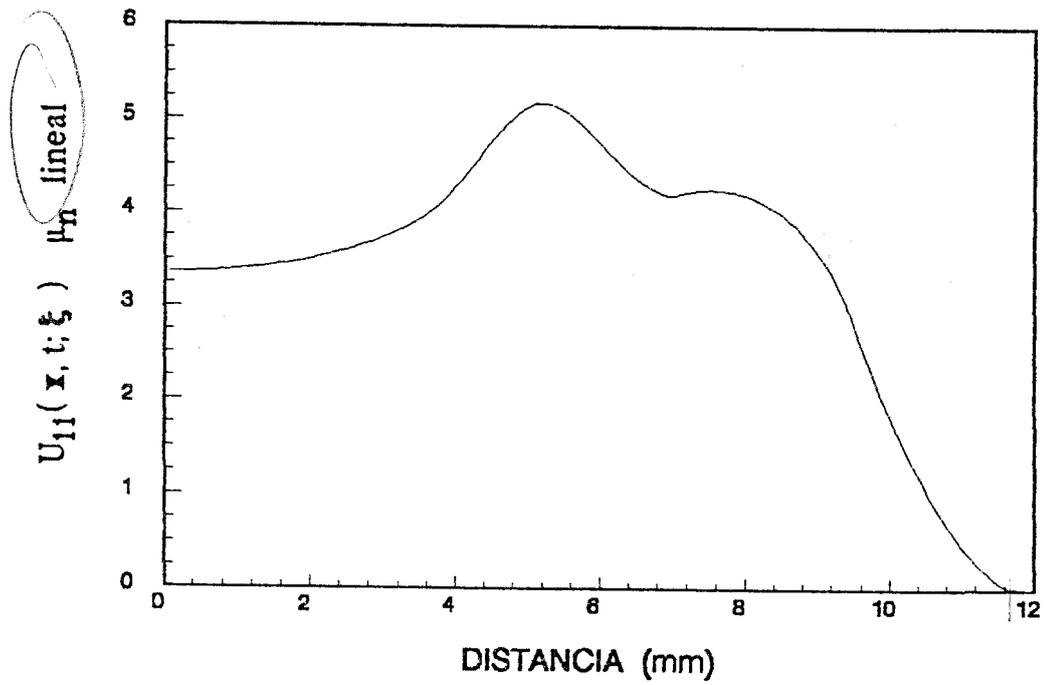


Figura 14(b). Desplazamientos * 10^{13}

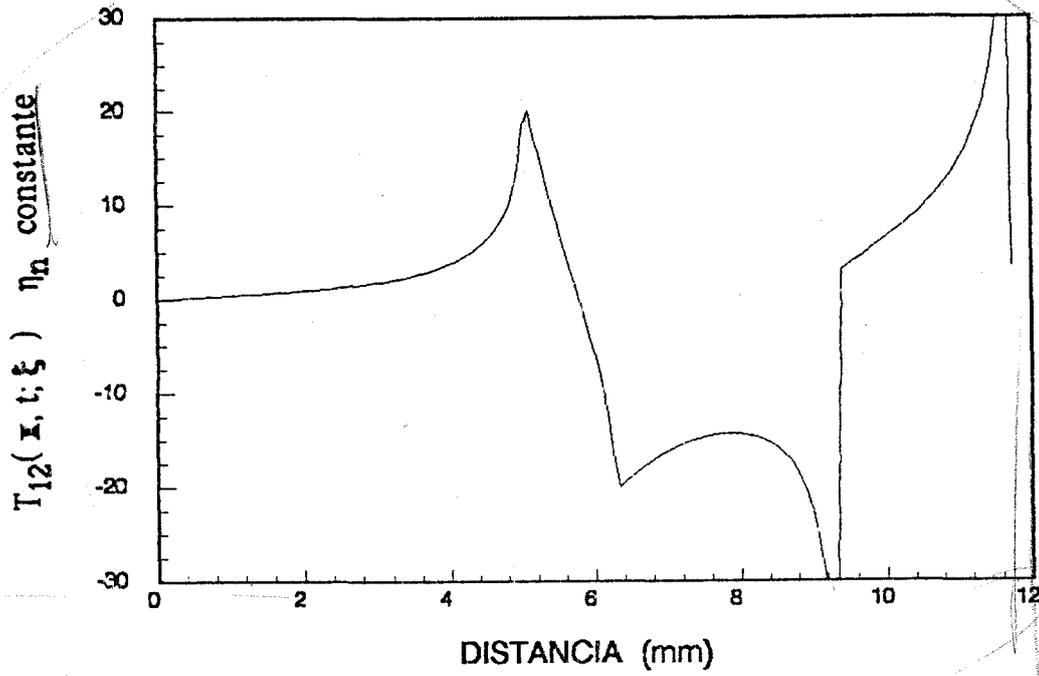


Figura 14(c)

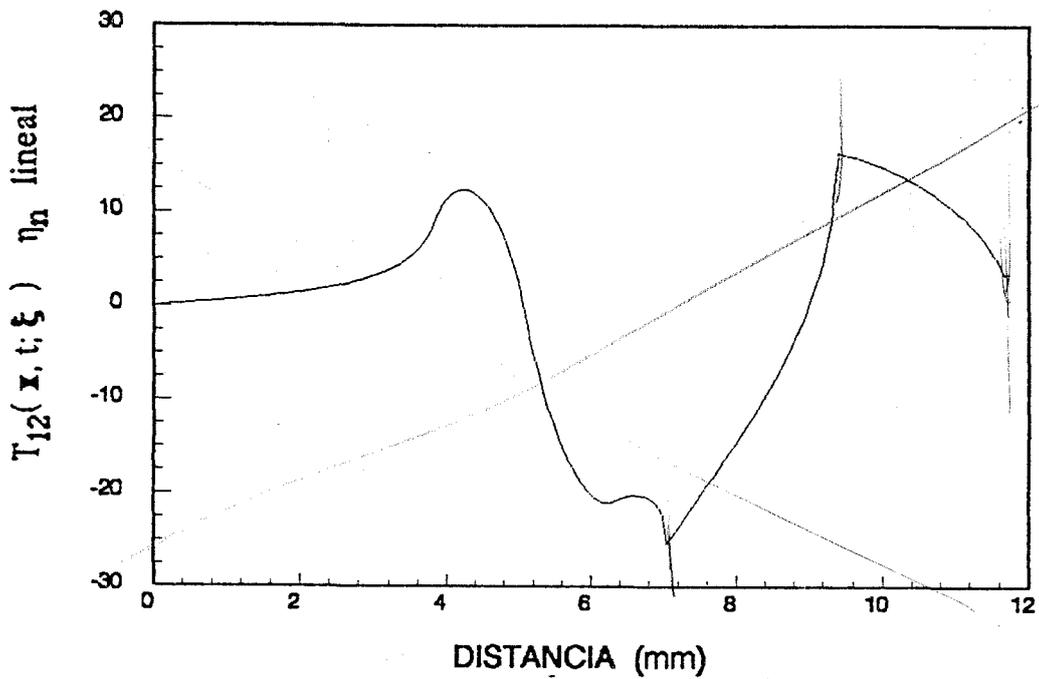


Figura 14(d)

2.4.- Aspectos Numéricos Generales del Método

Se expone a continuación, de forma breve, las técnicas empleadas para realizar las integrales en el contorno de los núcleos de tensiones y desplazamientos, según sean singulares o no. A continuación, se someten a un análisis detallado, las diversas posibles interpolaciones, en tiempo y espacio, a fin de comparar la idoneidad de las mismas para diferentes tipos de problemas.

Integrales en el Contorno

Las integrales indicadas en las ecuaciones (52) y (74), se calculan, en general, numéricamente mediante una cuadratura de Gauss con 10 puntos. Para mejorar la precisión de estas integrales, el elemento se integra hasta donde haya llegado la onda, o por trozos, en el caso de que varios "frentes" de onda se encuentren en el mismo (ver figura 15). En este caso cada trozo se integra con 16 puntos de Gauss, pues la función a integrar tiene peor comportamiento, como se observa en la figura 14.

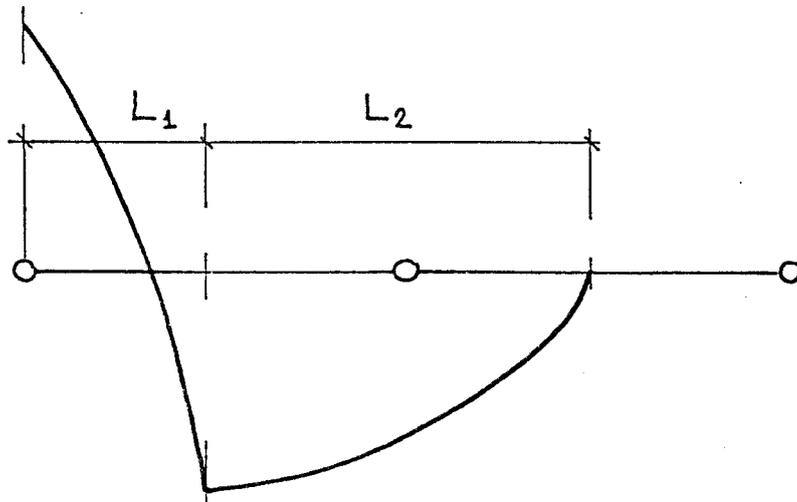
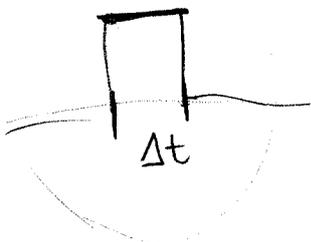


Figura 15



Para el caso de $t' = \Delta t$, y $p = q$, esto es, es el instante inicial y el punto de colocación está en el elemento en que integramos, las integrales anteriores son singulares para $r \rightarrow 0$. Para los elementos constantes, estas integrales se han hecho totalmente analíticas, por la simplicidad de la función de forma. Las integrales para tiempos posteriores también se han realizado analíticamente, a pesar de no ser singulares.

Para los elementos parabólicos estas integrales se han hecho semi-analíticamente. Se ha integrado analíticamente la parte singular de los núcleos, la estática, a lo largo de la parte del elemento afectada por las ondas, y numéricamente, la parte dinámica no singular.

Comparación de Interpolaciones y Relación Lapso/Elemento

En orden a evaluar las ventajas relativas de las diferentes funciones de interpolación en tiempo y espacio, además de analizar el efecto del tamaño del paso de tiempo Δt , se han estudiado dos problemas elastodinámicos, usando la formulación expuesta anteriormente.

El primer problema, corresponde a una banda bidimensional infinita de altura $H = 4$ m, sometida a una tracción uniforme aplicada en un extremo, cuya variación temporal es una función escalón, estando el otro extremo fijo en dirección de la carga y libre en el otro sentido. En la figura 16 se muestra la geometría y condiciones de contorno, del dominio en estudio, así como el modelo equivalente que se analiza.

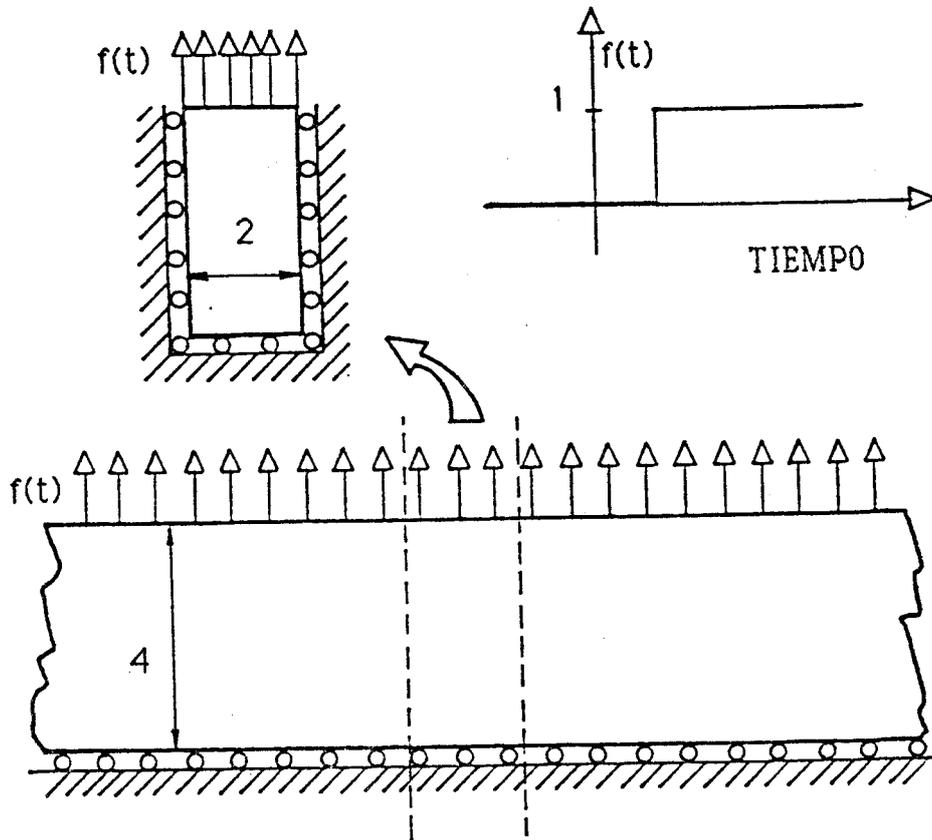


Figura 16

Las propiedades físicas del material son:

Módulo de Poisson	$\nu = 0.25$
Módulo de Elasticidad Transversal	$\mu = 4 \cdot 10^4 \text{ Pa}$
Velocidad de las ondas P	$C_p = 346.41 \text{ m/s}$
Velocidad de las ondas S	$C_s = 200.00 \text{ m/s}$

$$\rho = \frac{\mu}{C_s^2} = 1$$

En el segundo problema se estudia el comportamiento de una placa rectangular de altura $H = 4$ m, y ancho $B = 2$ m, sometida a una carga cortante en su extremo superior, con variación triangular en el tiempo, y empotrada en el otro extremo, (ver figura 17). Las propiedades del material son las mismas que en el problema anterior.

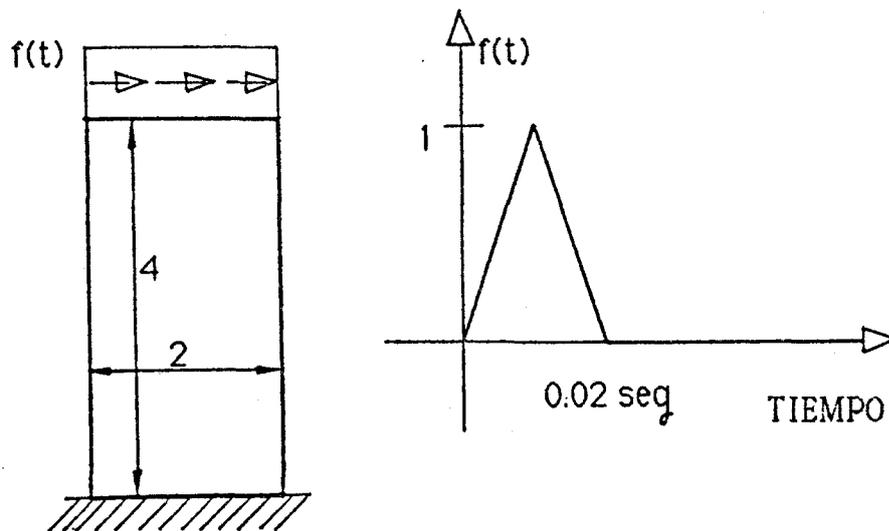


Figura 17

Ambos problemas se han analizado con la misma geometría rectangular de 4m x 2m, y las cuatro discretizaciones que se muestran en la figura 18:

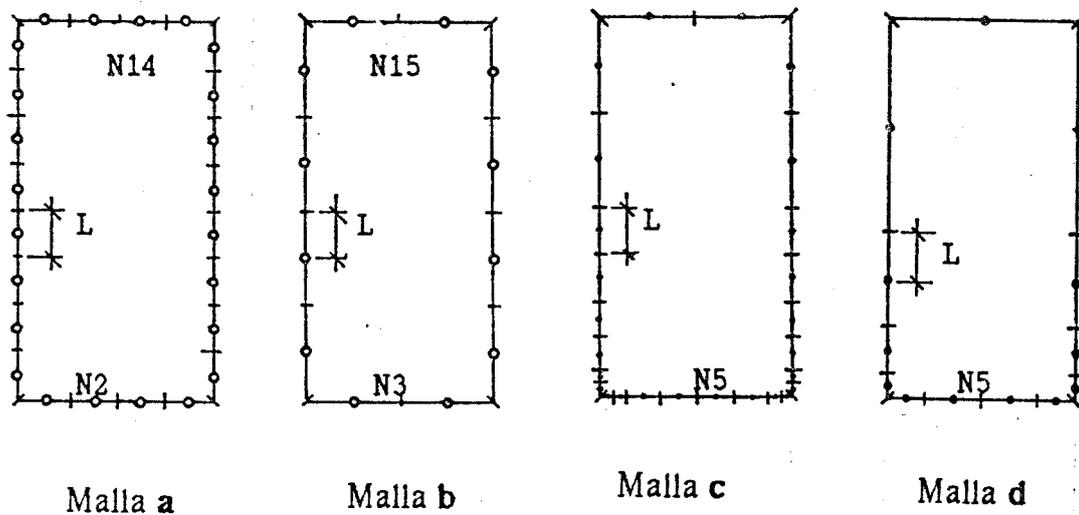


Figura 18

- (a) elementos constantes de igual tamaño
- (b) elementos parabólicos de igual tamaño
- (c) elementos constantes de tamaño variable
- (d) elementos parabólicos de tamaño variable

Para comparar la malla espacial con la temporal se define un parámetro, que denominamos β , mediante la ecuación,

$$\beta = \frac{c_1 \Delta t}{L}$$

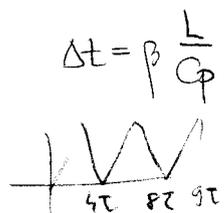
El valor de L adoptado para cada discretización se muestra en la figura 18. En

las mallas uniformes L es la distancia entre nodos de elementos contiguos, y un valor medio de ésta, en las mallas variables. El parámetro β proporciona una medida de lo grande que es el paso de tiempo frente a la discretización espacial escogida.

Los distintos casos que se estudian se resumen en la tabla siguiente:

Caso	Función de forma	Interpolación para u	Interpolación para p	Malla espacial	$\beta = C_p \Delta t / L$
1	constante	constante	constante	a	0.25
2	constante	constante	constante	a	0.5
3	constante	constante	constante	a	1.
4	constante	constante	constante	a	1.5
5	constante	constante	constante	a	2.
6	constante	lineal	constante	a	0.25
7	constante	lineal	constante	a	0.5
8	constante	lineal	constante	a	1.
9	constante	lineal	constante	a	1.5
10	constante	lineal	constante	a	2.
11	parabólica	lineal	constante	b	0.25
12	parabólica	lineal	constante	b	0.5
13	parabólica	lineal	constante	b	1.
14	parabólica	lineal	constante	b	1.5
15	parabólica	lineal	constante	b	2.
16	constante	lineal	constante	c	0.5
17	constante	lineal	constante	c	1.

$L = 0,5$
 $C_p = 346,46$



β	Δt	N_{step} para $9\tau (\tau = \frac{L}{C_p})$
0,25	$3,6084e4$	288
0,5	$7,2169e4$	144
1	$1,4434e3$	72
1,5	$2,1651e3$	48
2	$2,8868e3$	36

$\tau = 1,1547e2$

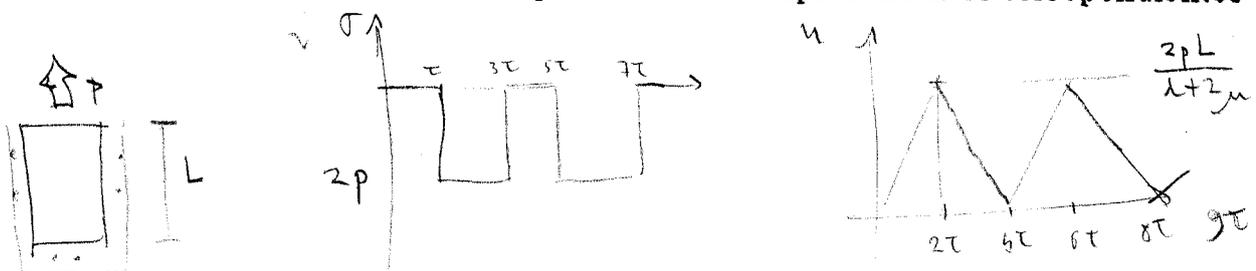
18	constante	lineal	constante	c	1.5
19	parabólica	lineal	constante	d	0.5
20	parabólica	lineal	constante	d	1.
21	parabólica	lineal	constante	d	1.5
22	constante	lineal	constante	a	1.
23	parabólica	lineal	constante	b	1.

Los 21 casos primeros corresponden al problema primero, en el cual se han ensayado, las diferentes funciones de interpolación y forma. Los casos de 1 a 5 corresponden a unas funciones de interpolación constantes en el tiempo y también en el contorno. Como se indica en la tabla, el valor del parámetro va desde $\beta = 0.25$, para el caso 1, hasta $\beta = 2$, para el caso 5. Los casos 6 a 10 son similares a los anteriores, salvo que la función de interpolación temporal de los desplazamientos, es lineal. Los casos 11 a 15, son como estos últimos, pero con elementos parabólicos. En los casos 16 a 21 la geometría se discretiza con elementos de longitud variable para estudiar el efecto de estas mallas, habituales en los problemas reales, sobre la solución obtenida. No se considera la posibilidad de interpolar las tensiones linealmente, pues por la forma de la solución teórica de este problema, que es una onda cuadrada, los resultados no pueden esperarse muy buenos, y por las consideraciones que hacen Cole, Koslof y Minster (1978) acerca de la relación que han de cumplir las funciones de interpolaciones de tensiones y desplazamientos, donde se pone de manifiesto el carácter inestable del algoritmo numérico, cuando se utilizan funciones de forma lineales para ambas magnitudes, como efectivamente ocurre. Los dos últimos casos, 22 y 23, corresponden al problema segundo.

En la figura 19 se representa el valor de la tensión normal, para el

problema primero, en el extremo fijo, (nodo 2 de la discretización **a**), para los casos 1 a 5 (figuras 19_a hasta 19_e, respectivamente), frente a la solución teórica exacta que aparece en línea discontinua (Eringen y Suhubi, 1975). También se representa el desplazamiento normal en el extremo libre (nodo 14) frente a la solución teórica. Puede observarse que la aproximación utilizada en estos casos 1 a 5, no produce resultados aproximados en ningún caso. Para $\beta < 1$ la solución se vuelve rápidamente inestable, pocos pasos de tiempo después de que haya llegado la onda dilatacional al extremo fijo. Sólo para $\beta \geq 1$, la solución es estable durante un cierto tiempo, pero en estos casos (3 a 5), la solución numérica no es capaz de seguir los saltos de la solución teórica. El desplazamiento calculado para el extremo libre que se representa en la figura 19_f, que corresponde al caso 3, $\beta = 1$, es algo más aproximado, como podría esperarse del hecho de que la solución exacta en esa variable, tiene una variación mucho más suave con el tiempo; pero también se deteriora y se hace inestable al avanzar el tiempo.

Cuando se adopta una función lineal, para la interpolación temporal de los desplazamientos, casos 6 a 10, la solución obtenida mejora muy notablemente, (ver figura 20). Para $\beta = 0.25$, caso 6, la respuesta es, igualmente, inestable y se deteriora a los pocos pasos de tiempo de llegar las ondas al extremo fijo. Sin embargo para $\beta = 0.50$, caso 7, la solución numérica es muy precisa, aunque, cuando la tensión ha de ir a cero por segunda vez, el resultado se vuelve inestable. Para los valores de $\beta \geq 1.00$, casos 8, 9 y 10, la solución numérica obtenida permanece estable, para todo el periodo de tiempo representado. La respuesta calculada se vuelve más redondeada conforme el parámetro β crece, representando con precisión decreciente los saltos de la solución teórica en tensiones. Conforme β crece, aumenta el amortiguamiento ficticio de la solución obtenida. Los desplazamientos normales del extremo libre se representan bien con valores del parámetro $\beta \geq 1.00$, y también para $\beta \leq 1.00$, casos 6 y 7, mientras la solución se mantiene estable. En la figura 20_f se representan los desplazamientos correspondientes



a $\beta = 1.00$, caso 8, cuya precisión, como se observa en la gráfica, es excelente.

Cuando se consideran elementos parabólicos en el contorno en vez de constantes, la solución obtenida mejora. En las figuras 21 se muestran los resultados para los casos 11 al 15. Las tensiones normales en el centro del extremo fijo, (nodo 3 de la discretización **b**), tienen claramente un comportamiento mejor en los casos 11 y 12 ($\beta = 0.25$ y $\beta = 0.50$), que en los equivalentes 6 y 7 de elementos constantes. Sin embargo la mejora es pequeña para los casos 13, 14 y 15, ($\beta \geq 1.00$), al compararlos con sus casos correspondientes 8, 9 y 10. La solución en los casos 14 y 15, de elementos parabólicos, ($\beta > 1.00$), muestra un menor amortiguamiento conforme pasa el tiempo, que la correspondiente a los casos 9 y 10 en que se utilizaban funciones de forma constantes en el contorno. En contraposición, usando elementos parabólicos aparecen más oscilaciones en la parte constante de las tensiones que utilizando los elementos constantes. El desplazamiento normal en el extremo libre, (nodo 15 de la discretización **b**), se representa frente al tiempo, en la figura 21_f, para el caso 13 ($\beta = 1$). La solución numérica es inmejorable, confundiendo prácticamente con la teórica.

Las discretizaciones no-uniformes, **c** de elementos constantes y **d** de elementos parabólicos, se usan, respectivamente, para los casos 16 al 18 y 19 al 21. Estas discretizaciones se analizan, no porque sean necesarias para resolver el problema aquí considerado, sino porque mallas como estas serán necesarias para problemas con geometría o condiciones de contorno más complicadas.

En la figura 22 se representa la tensión normal en el centro del extremo fijo, (nodo 5 de la discretización **c**), frente al tiempo, para los casos 16 al 21. Los valores de β menor y mayor usados anteriormente, han sido eliminados, pues no pueden esperarse buenos resultados para esos valores del parámetro. El efecto de aumentar el valor del parámetro es similar al que se daba en las

$$p=1 \quad L=4 \quad \mu=4e4 \quad \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1}{3} \rightarrow \lambda + 3\mu = 3\mu = 12e4$$

$$\frac{2pL}{\lambda + 2\mu} = \frac{8}{12e4} = 6,6e5$$

discretizaciones uniformes, redondeándose la solución, más, conforme mayor es β . Hay que señalar que para un β dado, calculado con el valor de L medio que se muestra en la figura 18, el valor equivalente calculado con la longitud del menor elemento es $4 \cdot \beta$, y $\beta/2$ calculándolo con la longitud del mayor.

Comparando los casos 16 a 18 y 19 a 21, se observa que los resultados son similares, y que, por tanto, no parece necesario el uso de los elementos cuadráticos más complicados, para resolver un problema de este tipo. Esto también se ponía de manifiesto al comparar las figuras 20 y 21 donde, para $\beta \geq 1.00$, los elementos constantes en el contorno, ofrecían unos resultados muy aceptables.

La cuestión es en que tipo de problemas, si existen, es necesario utilizar elementos más complejos que los constantes. Para responder a esta cuestión se estudia el segundo problema en que el comportamiento a flexión es determinante.

Se analizan dos casos (22 y 23). Se utiliza la discretización uniforme de elementos constantes (malla **a** de la figura 18), para el 22, y la discretización uniforme de elementos parabólicos (malla **b** de la misma figura), para el caso 23. Para ambos caso se utiliza el valor de $\beta = 1.00$, con interpolación constante de las tensiones en el tiempo, y lineal de los desplazamientos.

El desplazamiento tangencial del punto medio del extremo libre se compara en la figura 23 con el obtenido mediante el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.), utilizando una malla de 440 grados de libertad (Nardini y Brebbia, 1983). Puede observarse en la figura 23, que los resultados obtenidos con la discretización espacial parabólica, con sólo 12 elementos, acuerdan excelentemente con los resultados del M.E.F. Por el contrario, la solución obtenida con elementos constantes muestra grandes diferencias con las otras dos.

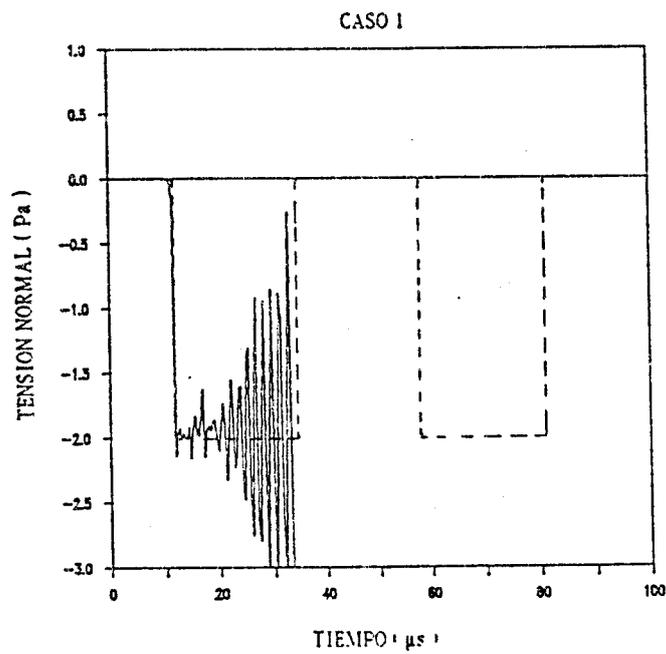


Figura 19(a)

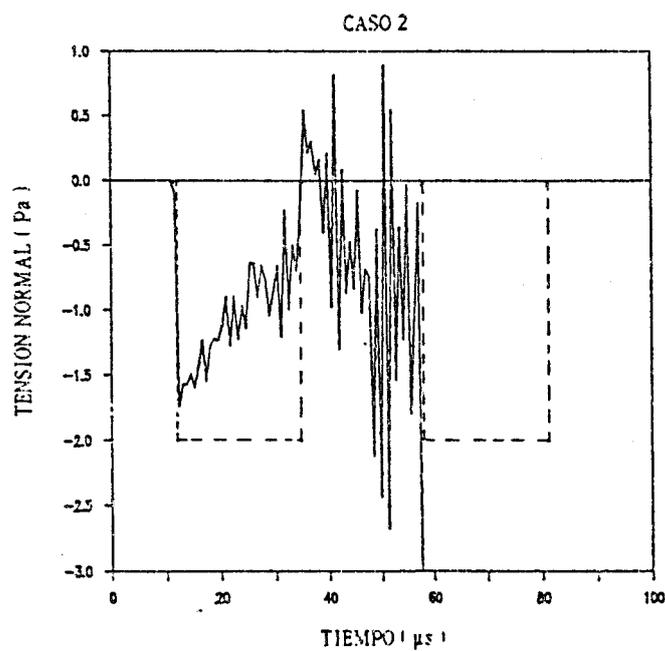


Figura 19(b)

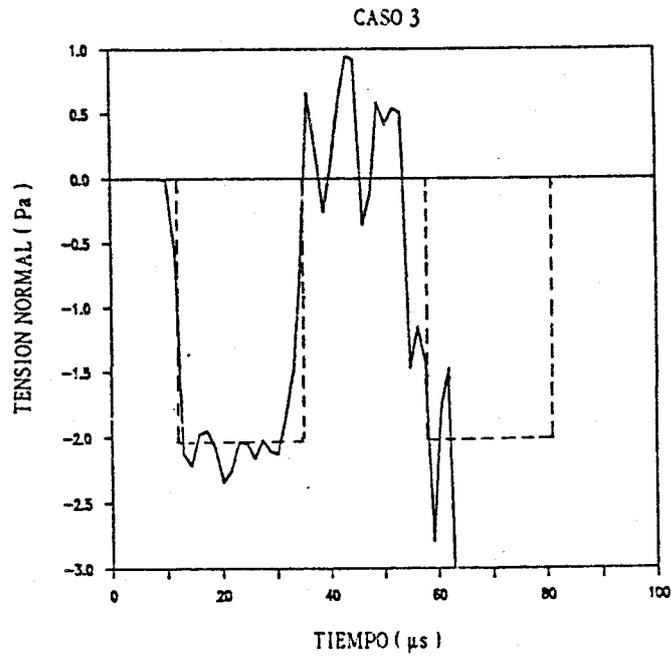


Figura 19(c)

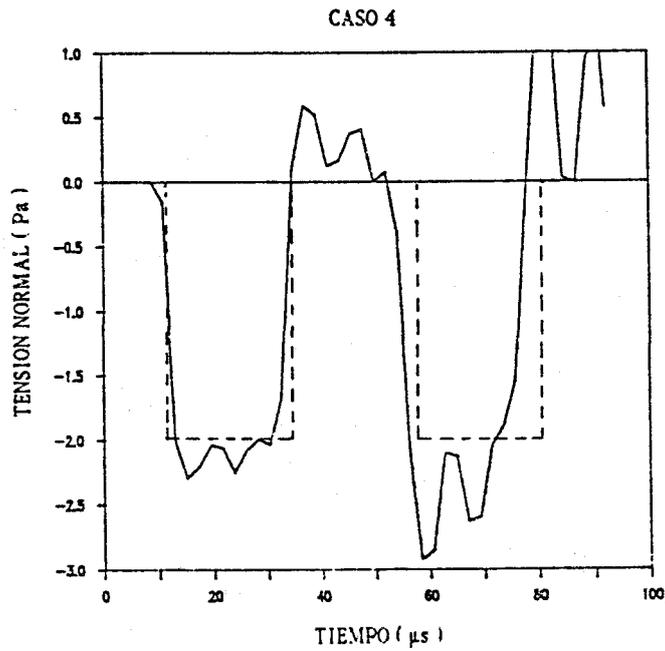


Figura 19(d)

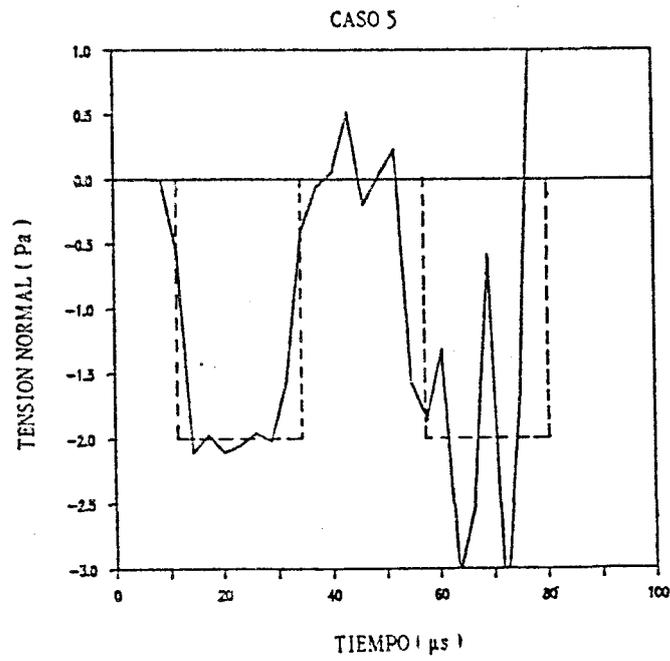


Figura 19(e)

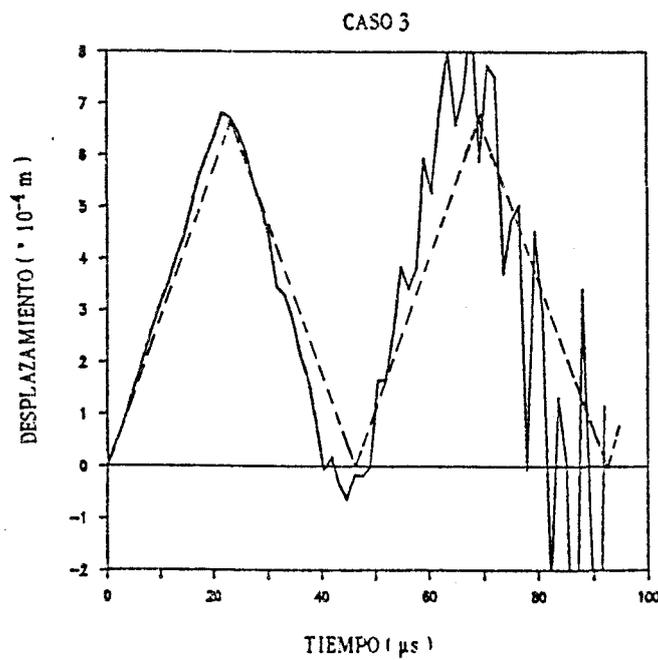


Figura 19(f)

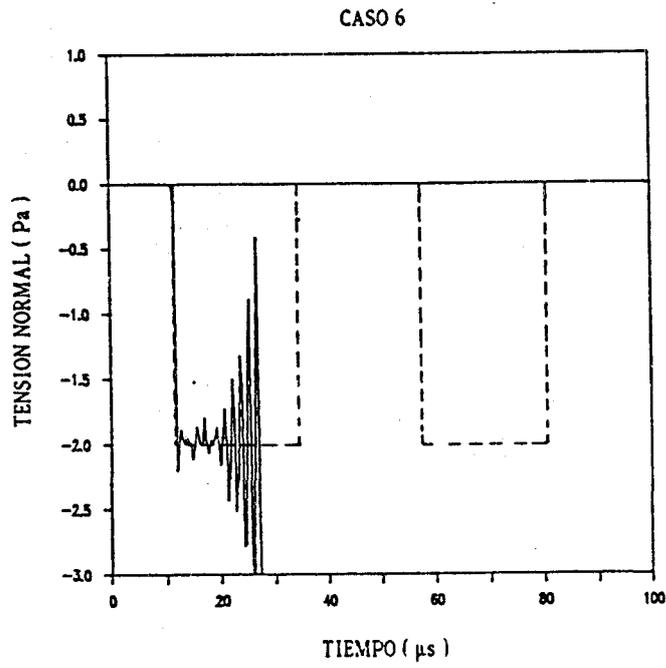


Figura 20(a)

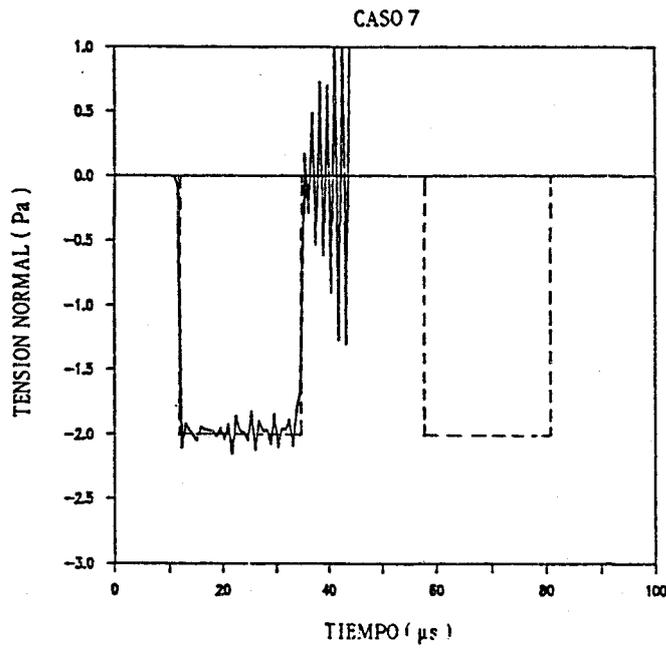


Figura 20(b)

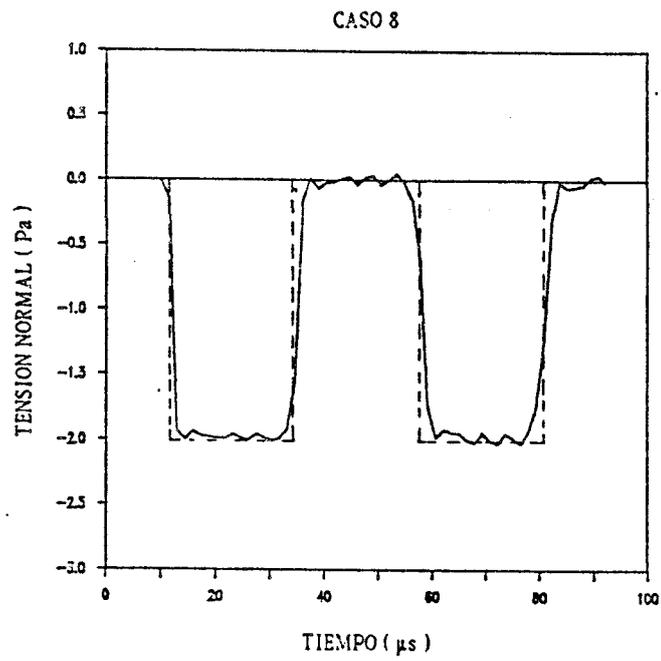


Figura 20(c)

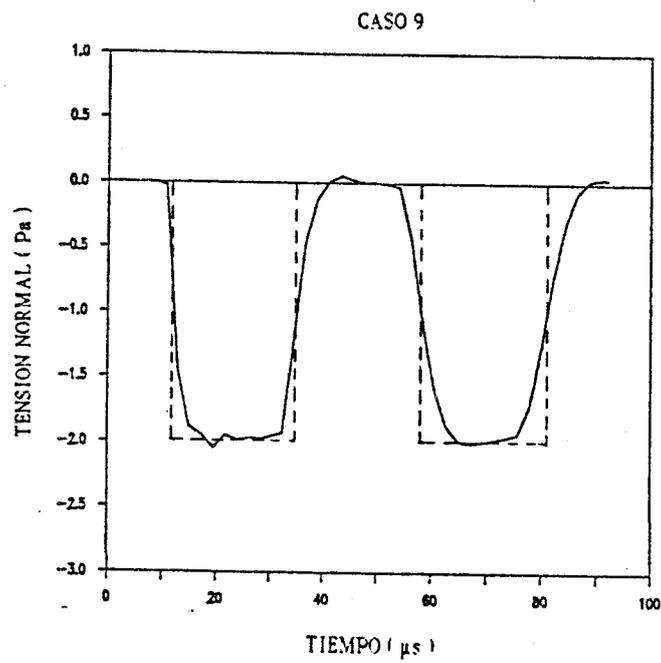


Figura 20(d)

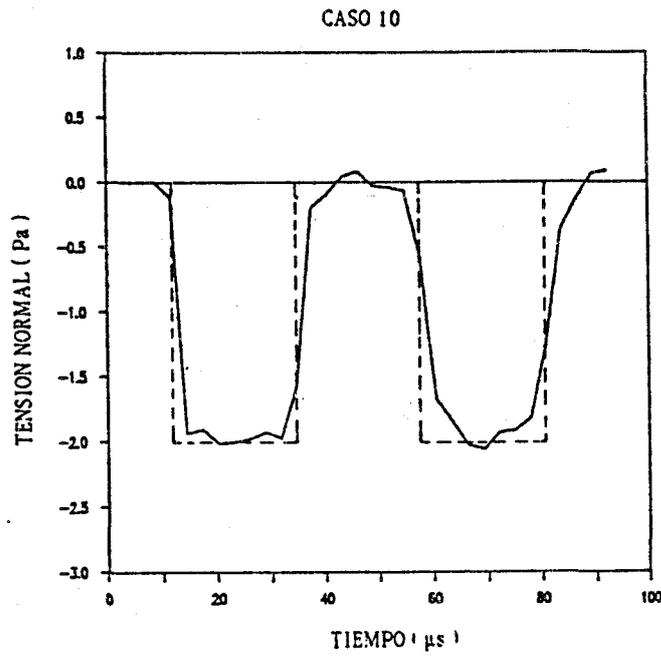


Figura 20(e)

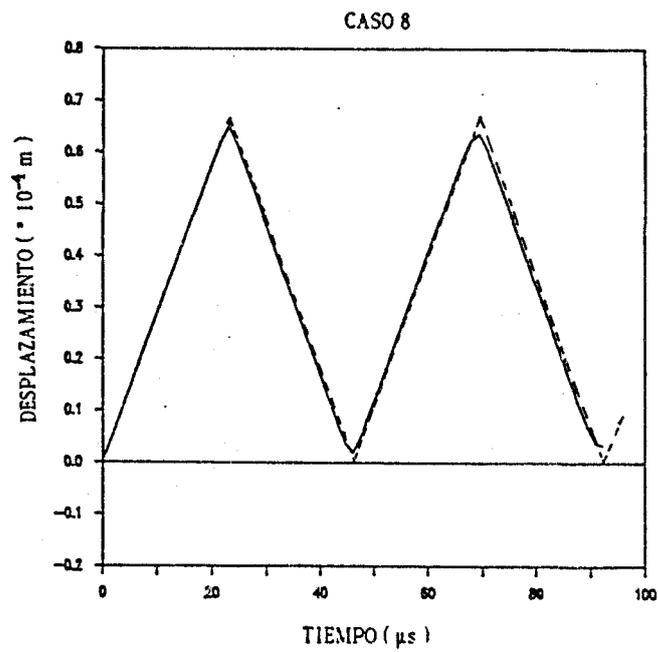


Figura 20(f)

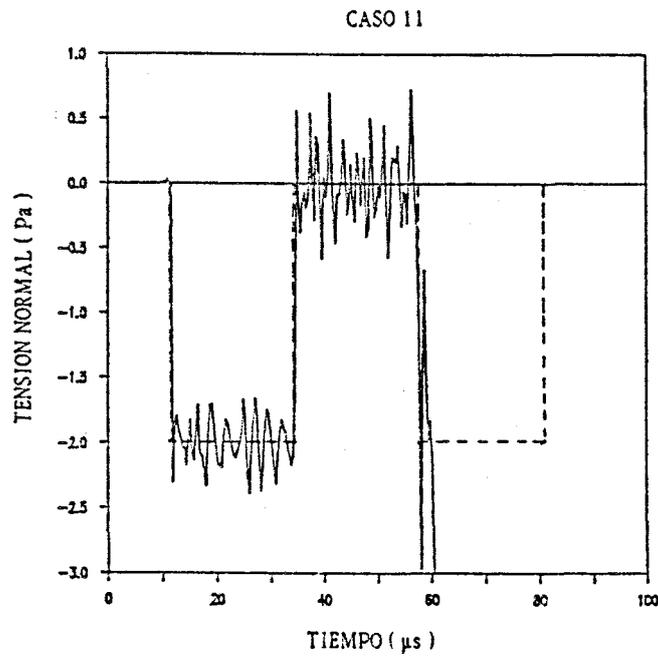


Figura 21(a)

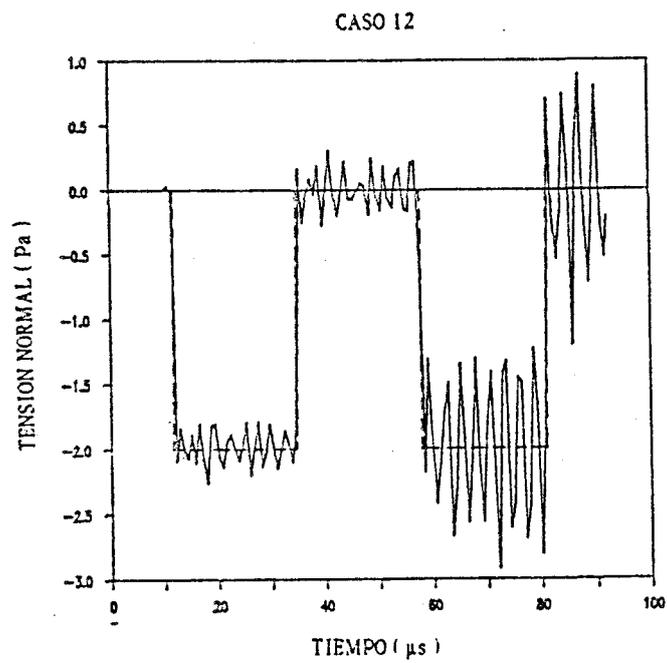


Figura 21(b)

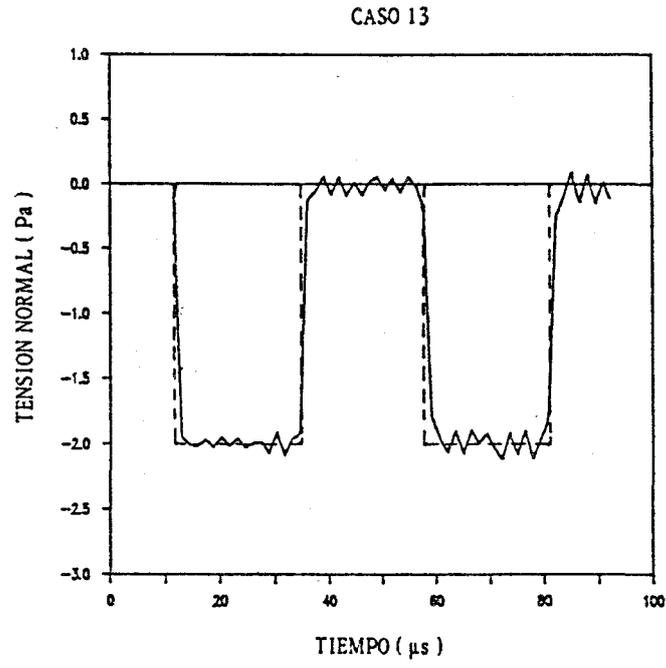


Figura 21(c)

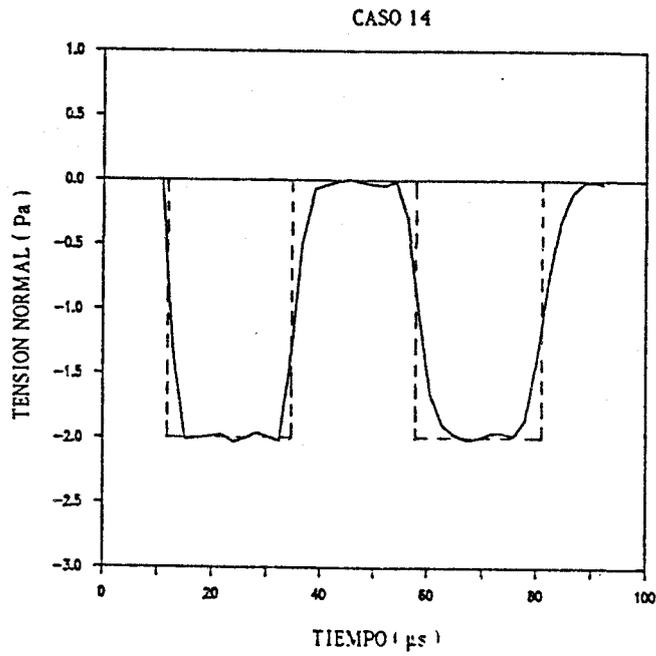


Figura 21(d)

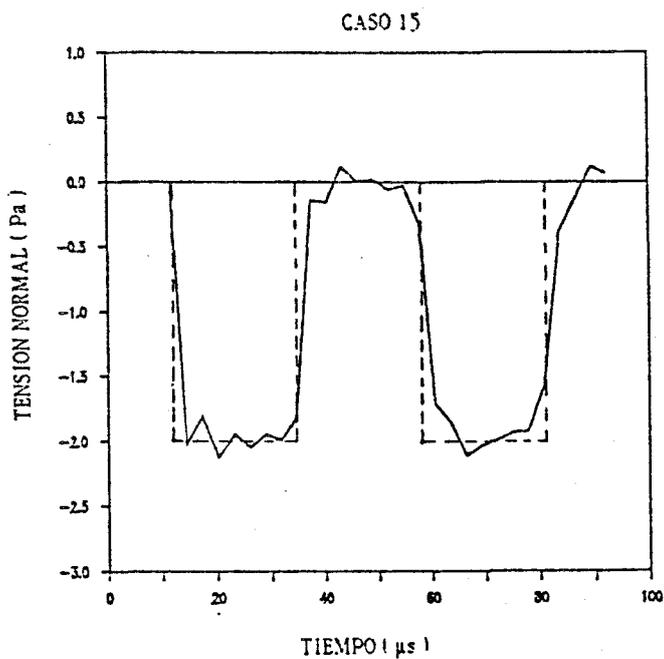


Figura 21(e)

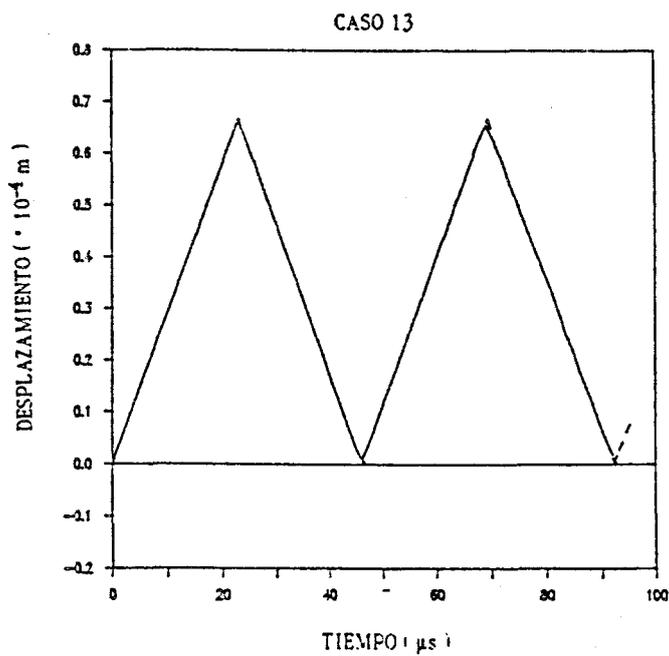


Figura 21(f)

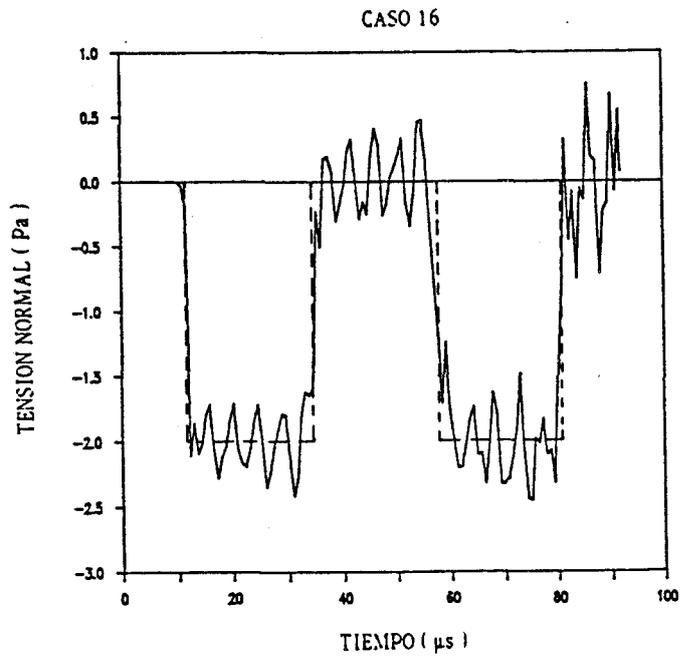


Figura 22(a)

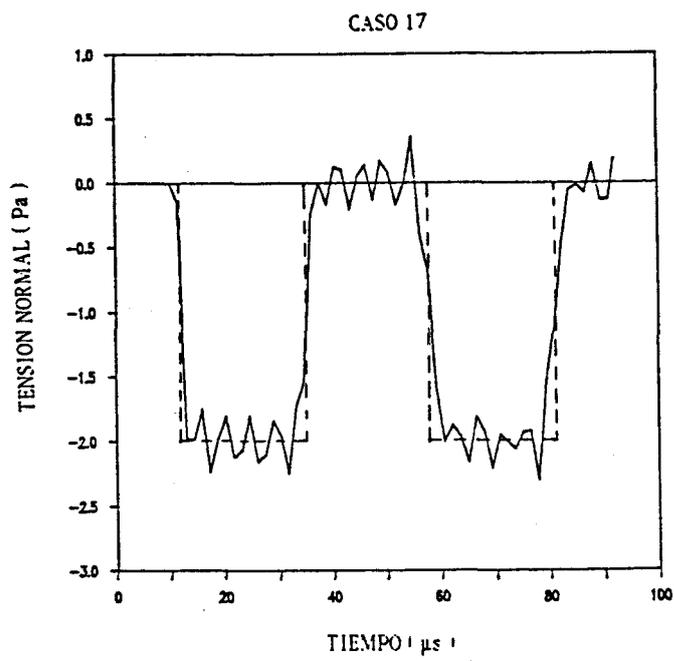


Figura 22(b)

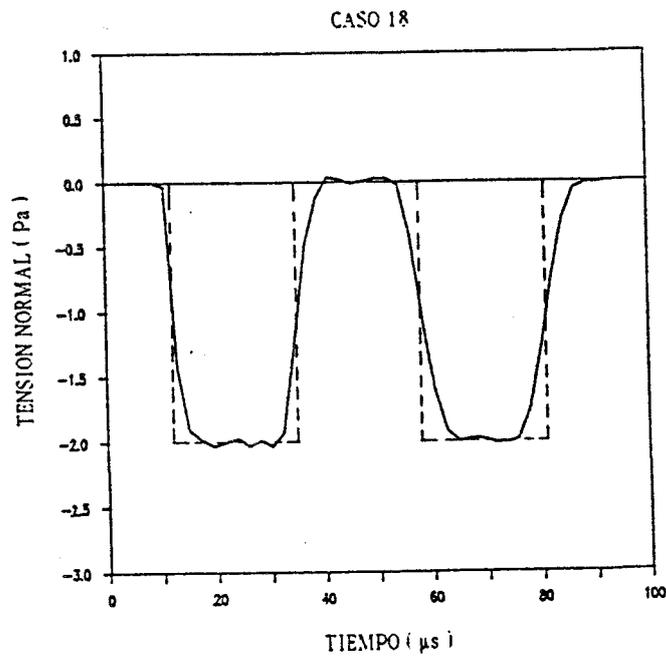


Figura 22(c)

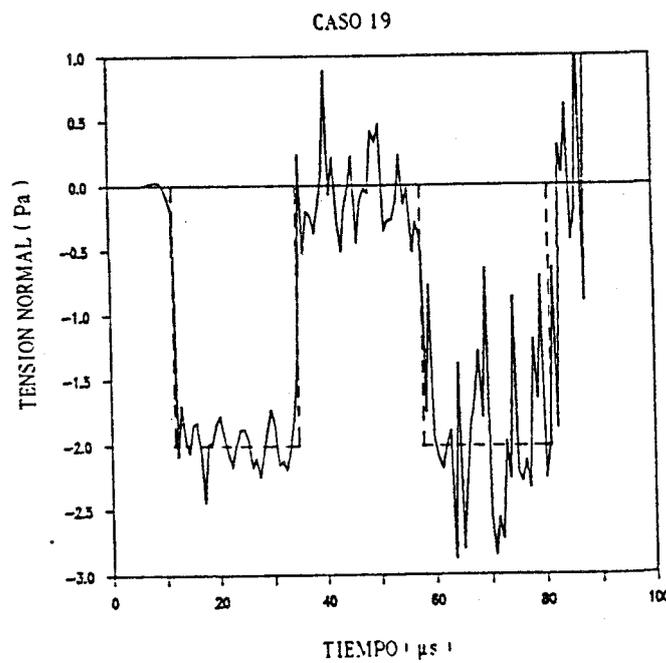


Figura 22(d)

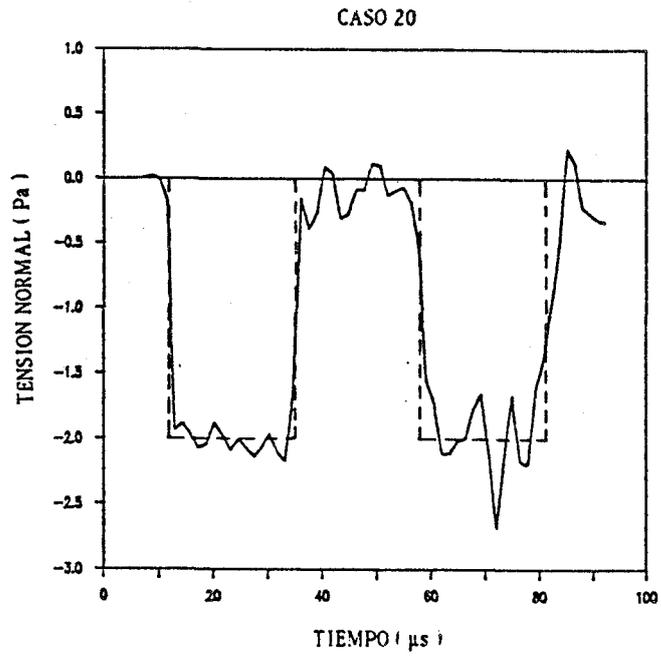


Figura 22(e)

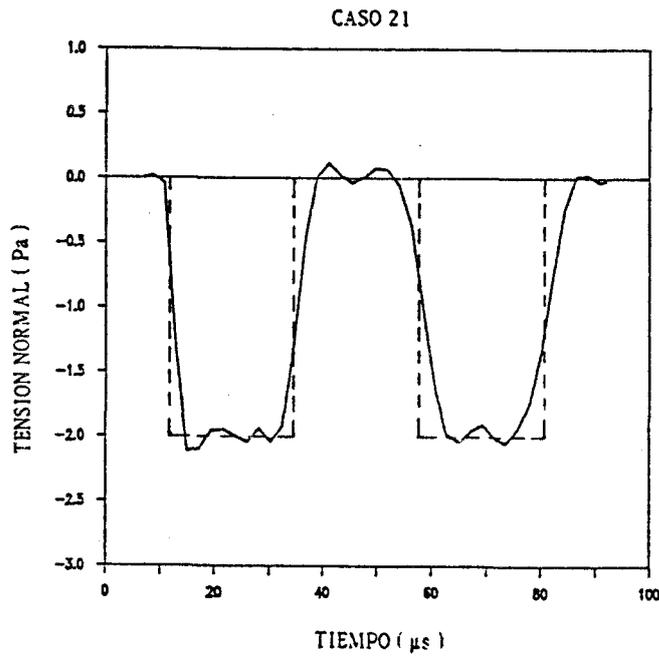


Figura 22(f)

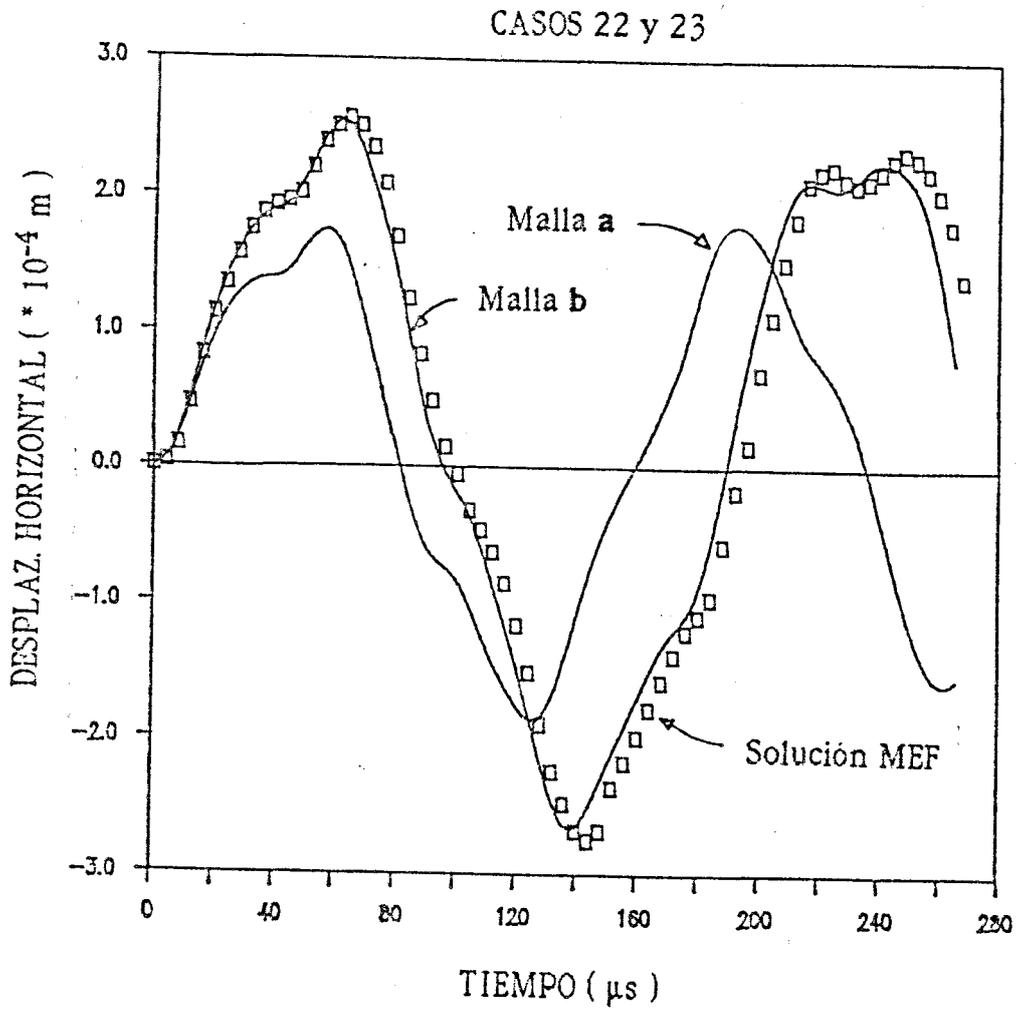


Figura 23

Conclusiones.

Del análisis anterior, considerando todos los casos estudiados, puede concluirse lo siguiente:

a) El uso de una función de interpolación lineal en el tiempo para los desplazamientos produce una mejora muy importante de los resultados en comparación con los obtenidos con funciones constantes. El esfuerzo computacional es en ambos casos , prácticamente el mismo.

b) Para discretizaciones uniformes se recomienda el uso de valores del paso de tiempo que den lugar a un valor del parámetro β cercano a uno. Valores menores conducen a soluciones inestables, mientras que valores demasiado altos dan resultados que no pueden representar bien los saltos rápidos de la solución exacta. Cuando la discretización no es uniforme, el valor de $\beta = 1.00$, debe referirse a un elemento de tamaño intermedio.

c) Los problemas que no presenten deformaciones de flexión importantes, se pueden resolver utilizando elementos constantes en el contorno.

d) Los problemas que presenten deformaciones de flexión, requieren el uso de funciones de interpolación espacial de orden mayor. Se ha mostrado que el uso de elementos parabólicos, produce buenos resultados. Esto concuerda con la conclusión similar que se alcanza analizando problemas elastostáticos (Brebbia y Domínguez, 1989).

CAPITULO III.-

CALCULO DE FACTORES DE INTENSIDAD DE
TENSION EN GRIETAS SOMETIDAS A CARGAS
DINAMICAS TRANSITORIAS.

3.1. Introducción

En este capítulo se va a exponer, primeramente, la solución general de los campos de desplazamientos y tensión elastodinámicos, en un dominio bidimensional, en el cual se propaga una grieta con velocidad C , para observar la forma a que tienden dichos campos, en función de los llamados Factores de Intensidad de Tensión, cuando la distancia al vértice de la misma, se acerca a cero (Radok, 1956; Nishioka y Atluri, 1983a). Los problemas analizados en este capítulo, corresponden al caso particular de grietas estacionarias, $C = 0$, pero se presenta aquí el caso general, pues es similar en su desarrollo al particular, y engloba los casos estudiados en éste y en el siguiente capítulo. A continuación, se describe un elemento de contorno parabólico recto, con su nodo medio situado a un cuarto de la longitud total, y con funciones de forma singulares en el espacio, y la forma de obtener a partir de los valores nodales del mismo, los Factores de Intensidad de Tensión. Se analizan con la formulación presentada, casos de fractura dinámica en modo I y modo II simples, para un medio infinito, y para medios finitos. También se analizan, en el último apartado, diversos problemas de fractura en modo mixto.

3.2.- Solución General Elastodinámica Alrededor de una Grieta Propagandose.

Va a considerarse el problema de una grieta propagandose con una velocidad constante C en un medio bidimensional, elástico, isótropo, lineal y homogéneo (Nishioka y Atluri, 1983a). Sean X e Y las coordenadas cartesianas fijas en el plano del dominio en estudio, y Z la coordenada perpendicular al mismo, de manera que $Y=0$ define el plano de la grieta (ver figura 1). Suponemos que los campos de tensiones y desplazamientos son independientes de la coordenada Z . Introducimos el sistema de coordenadas móviles x, y, z , el cual permanece fijo respecto al vértice de la grieta móvil, definiendo $x = X - Ct$ como se observa en la figura 1. En este sistema es posible reducir el problema real elastodinámico, a un problema de cálculo de

potenciales complejos. Las tensiones y desplazamientos se relacionan con estos potenciales a través de las expresiones,

$$\sigma_x = -\operatorname{Re} \left[\left(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2 \right) \phi'(z_1) + \psi'(z_2) \right]$$

$$\sigma_y = \operatorname{Re} \left[\left(1 + \beta_2^2 \right) \phi'(z_1) + \psi'(z_2) \right]$$

$$\sigma_{xy} = \operatorname{Im} \left[2\beta_1 \phi'(z_1) + \frac{(1 + \beta_2^2)}{\beta_2} \psi'(z_2) \right]$$

$$\sigma_{xz} = \operatorname{Re} \left[\Omega'(z_2) \right]$$

$$\sigma_{yz} = -\operatorname{Im} \left[\beta_2 \Omega'(z_2) \right]$$

$$\sigma_z = 0 \quad : \text{ en tensión plana}$$

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad : \text{ en deformación plana}$$

$$\mu u = -\operatorname{Re} \left[\phi(z_1) + \psi(z_2) \right]$$

$$\mu v = \operatorname{Im} \left[\beta_1 \phi(z_1) + \frac{1}{\beta_2} \psi(z_2) \right]$$

$$\mu w = \operatorname{Re} \left[\Omega(z_2) \right]$$

(1)

donde $\phi(z_1)$, $\psi(z_1)$ y $\Omega(z_2)$ son potenciales complejos, los cuales son función de las variables complejas $z_j = x + i\beta_j y = r_j e^{i\theta_j}$, siendo $i = \sqrt{-1}$, la unidad imaginaria y $\beta_1^2 = 1 - (C/c_1)^2$, $\beta_2^2 = 1 - (C/c_2)^2$, y c_1 y c_2 son las velocidades de las ondas dilatacionales y transversales, respectivamente.

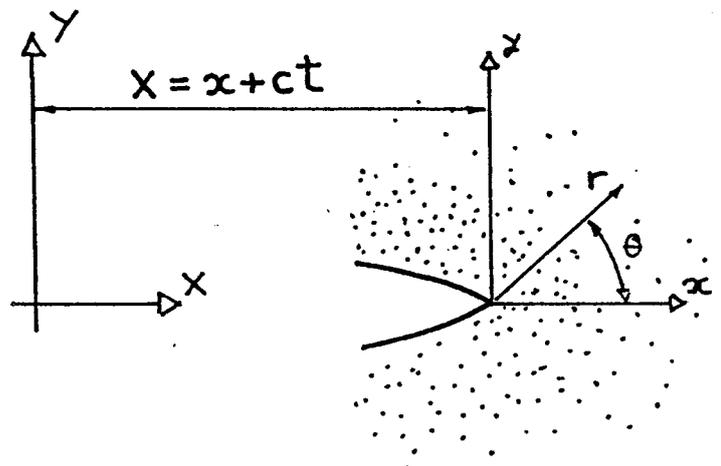


Figura 1

Las expresiones ϕ' , ψ' y Ω' indican la derivada de los potenciales respecto a la variable compleja z_j correspondiente. Los potenciales complejos $\phi(z_1)$ y $\psi(z_1)$, están relacionados con las componentes del campo de movimientos alrededor de la grieta, en el plano x-y, que se puede descomponer en Modo I (modo de abertura plano; ver figura 2), y Modo II (modo de deslizamiento plano). El potencial complejo $\Omega(z_2)$, está relacionado únicamente con el movimiento antiplano de la grieta, llamado Modo III (modo de deslizamiento antiplano; ver figura 2).

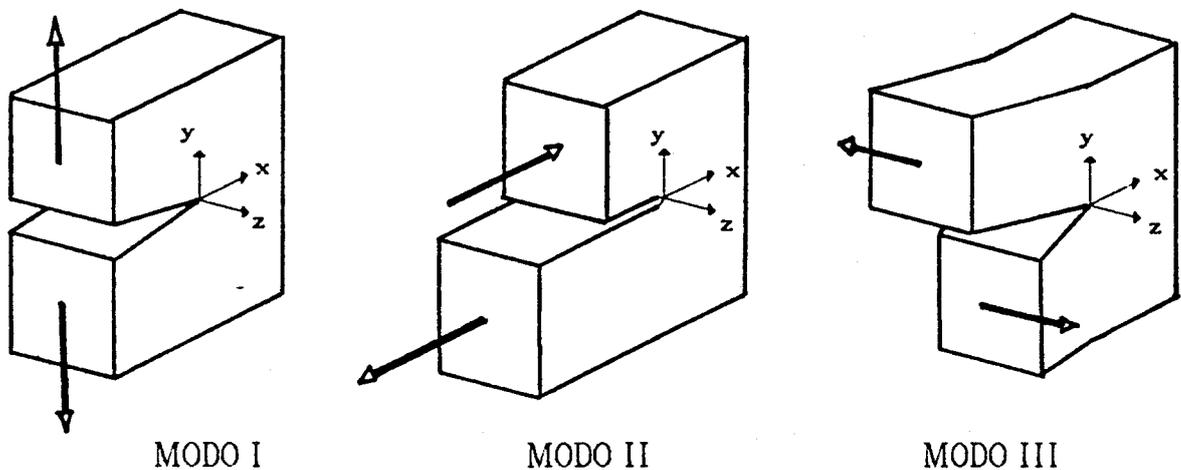


Figura 2

Para encontrar la solución general de los tres modos de fractura, que satisfagan las condiciones de tensión nula ($\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0$), en las superficies internas de la grieta ($\theta = \pm \pi$), expresamos éstas en función de los potenciales complejos,

$$\begin{aligned} \sigma_y + i\sigma_x &= D_1 \phi' + D_2 \bar{\phi}' + D_3 \psi' + D_4 \bar{\psi}' = 0 & \text{en } \theta = \theta_1 = \theta_2 = \pm \pi \\ \sigma_y + i\sigma_x &= -\frac{\beta_2}{2i} (\Omega' - \bar{\Omega}') = 0 & \text{en } \theta = \theta_2 = \pm \pi \end{aligned} \quad (2)$$

donde el guión ($\bar{}$), sobre una función, indica su complejo conjugado. Las expresiones D_j son constantes y vienen dadas por,

$$\begin{aligned} D_1 &= 1 + \beta_2^2 + 2\beta_1, & D_2 &= 1 + \beta_2^2 - 2\beta_1 \\ D_3 &= 2 + \frac{1 + \beta_2^2}{\beta_2}, & D_4 &= 2 - \frac{1 + \beta_2^2}{\beta_2} \end{aligned} \quad (3)$$

Supongamos una solución para los potenciales complejos en forma de desarrollo en serie de potencias de z_j , como,

$$\begin{aligned} \phi(z_1) &= \sum_n A_n z_1^{\lambda_n} = \sum_n (A_n^o + i A_n^i) r_1 e^{i\lambda_n \theta_1} \\ \psi(z_2) &= \sum_n B_n z_2^{\lambda_n} = \sum_n (B_n^o + i B_n^i) r_2 e^{i\lambda_n \theta_2} \end{aligned}$$

$$\Omega(z_2) = \sum_n C_n z_2^{\lambda_n} = \sum_n (C_n^0 + i C_n^*) r_2 e^{i\lambda_n \theta_2} \quad (4)$$

siendo λ_n autovalores reales que serán determinados más adelante; A_n , B_n y C_n constantes complejas indeterminadas, y A_n^0 y A_n^* , etc, denotan, respectivamente, la parte real e imaginaria de dichas constantes. Sustituyendo las soluciones (4) en las condiciones de contorno (2), se llega a las siguientes ecuaciones para el movimiento plano,

$$\begin{aligned} e^{+i\lambda_n \pi} (D_1 A_n + D_3 B_n) + e^{-i\lambda_n \pi} (D_2 \bar{A}_n + D_4 \bar{B}_n) &= 0 \\ e^{-i\lambda_n \pi} (D_1 A_n + D_3 B_n) + e^{+i\lambda_n \pi} (D_2 \bar{A}_n + D_4 \bar{B}_n) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

y para el antiplano,

$$\begin{aligned} e^{+i\lambda_n \pi} C_n - e^{-i\lambda_n \pi} \bar{C}_n &= 0 \\ e^{-i\lambda_n \pi} C_n - e^{+i\lambda_n \pi} \bar{C}_n &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Para que exista una solución no trivial de estas ecuaciones, el determinante de las mismas, ha de ser nulo. Para ambos casos se tiene,

$$\begin{bmatrix} e^{+i\lambda_n \pi} & \pm e^{-i\lambda_n \pi} \\ e^{-i\lambda_n \pi} & \pm e^{+i\lambda_n \pi} \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

la cual se puede reducir a,

$$\sin(2\pi\lambda_n) = 0 \quad (8)$$

Las soluciones de esta ecuación son los autovalores del problema. Estos son $\lambda_n = n/2$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Como los autovalores negativos conducirían a desplazamientos infinitos en el vértice de la grieta, los únicos autovalores válidos son,

$$\lambda_n = n/2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (9)$$

El autovalor $\lambda_1 = 1/2$ da el campo de tensiones singular de orden $1/\sqrt{r}$, bien conocido en mecánica de la fractura elástica lineal. El autovalor $\lambda_0 = 0$, representa un movimiento de sólido rígido. Si se llevan estos autovalores a las ecuaciones (5) y (6), se encuentran las siguientes relaciones entre las constantes complejas del desarrollo en serie,

$$B_n^0 = -h(n) A_n^0$$

$$B_n^* = -h(\bar{n}) A_n^*$$

$$C_n = -i C_n^+ \quad : \text{ si } n \text{ es par}$$

$$C_n = C_n^+ \quad : \text{ si } n \text{ es impar}$$

(10)

siendo

$$\begin{aligned}
 h(n) &= \frac{2\beta_1\beta_2}{1+\beta_2^2} && : \text{ si } n \text{ es par} \\
 h(n) &= \frac{1}{2}(1+\beta_2^2) && : \text{ si } n \text{ es impar}
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

con $\bar{n} = n + 1$, y C_n^+ unas constantes reales indeterminadas.

Los factores de intensidad de tensión pueden ser definidos, como es habitual, con las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}
 K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y |_{\theta=0} \\
 K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{xy} |_{\theta=0} \\
 K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{yz} |_{\theta=0}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Usando las ecuaciones anteriores, se obtienen las siguientes relaciones entre las constantes y los factores dinámicos de intensidad de tensión,

$$\begin{aligned}
 K_I &= -\sqrt{2\pi} \frac{4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2^2)}{2(1+\beta_2^2)} A_1^o \\
 K_{II} &= \sqrt{2\pi} \frac{4\beta_1\beta_2 - (1+\beta_2^2)}{4\beta_2} A_1^*
 \end{aligned}$$

$$K_{III} = \sqrt{2\pi} \frac{\beta_2}{2} C_1^+ \quad (13)$$

Se definen unas funciones de la velocidad B_M ($M = I, II, III$) mediante las ecuaciones,

$$\begin{aligned} B_I(C) &= \frac{1 + \beta_2^2}{D} \\ B_{II}(C) &= \frac{2\beta_2}{D} \\ B_{III}(C) &= \frac{1}{\beta_2} \end{aligned} \quad (14)$$

donde $D(C) = 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2$. La ecuación $D(C)=0$ es conocida como la ecuación de Rayleigh y sus raíces son $C=0$ y C_R (velocidad de las ondas superficiales de Rayleigh). A partir de estas funciones B_M , se pueden normalizar las constantes A_n^0 , A_n^* y C_n^+ con las expresiones,

$$\begin{aligned} A_n^0 &= -\frac{n+1}{\sqrt{2\pi}} B_I(C) K_n^0 \\ A_n^* &= \frac{n+1}{\sqrt{2\pi}} B_{II}(C) K_n^* \\ C_n^+ &= \frac{n+1}{\sqrt{2\pi}} B_{III}(C) K_n^+ \end{aligned} \quad (15)$$

de forma que los coeficientes del desarrollo para $n=1$ sean los factores dinámicos de intensidad de tensión ($K_I^0 = K_I$, $K_I^* = K_{II}$, $K_I^+ = K_{III}$).

Sustituyendo las constantes así normalizadas en los desarrollos de los potenciales complejos (4), y éstos en las ecuaciones (1) que relacionan los potenciales con las tensiones y desplazamientos, se obtienen los términos de los desarrollos en serie de estos últimos,

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \frac{K_n^0 B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ (1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) r_1^{(n/2)-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 - \right. \\ & \left. 2 h(n) r_2^{(n/2)-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} + \\ & \frac{K_n^+ B_{II}(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ (1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) r_1^{(n/2)-1} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 - \right. \\ & \left. 2 h(\bar{n}) r_2^{(n/2)-1} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} \end{aligned}$$

(16a)

$$\begin{aligned} \sigma_{yn} = \frac{K_n^0 B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ - (1 + \beta_2^2) r_1^{(n/2)-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 + \right. \\ \left. 2 h(n) r_2^{(n/2)-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} + \\ \frac{K_n^* B_{II}(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ - (1 + \beta_2^2) r_1^{(n/2)-1} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 + \right. \\ \left. 2 h(\bar{n}) r_2^{(n/2)-1} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} \end{aligned} \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xyn} = \frac{K_n^0 B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ -2\beta_1 r_1^{(n/2)-1} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 + \right. \\ \left. \frac{1 + \beta_2^2}{\beta_2} h(n) r_2^{(n/2)-1} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} + \\ \frac{K_n^* B_{II}(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \left\{ 2\beta_1 r_1^{(n/2)-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_1 - \right. \\ \left. \frac{1 + \beta_2^2}{\beta_2} h(\bar{n}) r_2^{(n/2)-1} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right) \theta_2 \right\} \end{aligned} \quad (16c)$$

$$\sigma_{xzn} = \frac{K_n^+ B_{III}(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} r_2^{(n/2)-1} \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta_2 : n \text{ par} \\ \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta_2 : n \text{ impar} \end{cases} \quad (16d)$$

$$\sigma_{yzn} = \frac{K_n^+ B_{III}(C)}{\sqrt{2\pi}} \frac{n(n+1)}{2} \beta_2 r_2^{(n/2)-1} \begin{cases} \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta_2 : n \text{ par} \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta_2 : n \text{ impar} \end{cases} \quad (16e)$$

$$\sigma_{zn} = \begin{cases} 0 & : \text{tensión plana} \\ v(\sigma_{xn} + \sigma_{yn}) & : \text{deformación plana} \end{cases} \quad (16f)$$

$$u_n = \frac{K_n^0 B_I(C)}{2\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1) \left\{ r_1^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_1 - h(n) r_2^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_2 \right\} + \frac{K_n^* B_{II}(C)}{2\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1) \left\{ r_1^{n/2} \operatorname{sen} \frac{n}{2} \theta_1 - h(\bar{n}) r_2^{n/2} \operatorname{sen} \frac{n}{2} \theta_2 \right\} \quad (16g)$$

$$v_n = \frac{K_n^0 B_I(C)}{2\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1) \left\{ -\beta_1 r_1^{n/2} \operatorname{sen} \frac{n}{2} \theta_1 - \frac{h(n)}{\beta_2} r_2^{n/2} \operatorname{sen} \frac{n}{2} \theta_2 \right\} + \frac{K_n^* B_{II}(C)}{2\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1) \left\{ \beta_1 r_1^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_1 - \frac{h(\bar{n})}{\beta_2} r_2^{n/2} \cos \frac{n}{2} \theta_2 \right\} \quad (16h)$$

$$w_n = \frac{K_n^+ B_{III}(C)}{2\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1) r_2^{n/2} \begin{cases} \text{sen} \frac{n}{2} \theta_2 : n \text{ par} \\ \text{cos} \frac{n}{2} \theta_2 : n \text{ impar} \end{cases} \quad (16i)$$

Las componentes singulares del campo de tensiones y el campo correspondiente de desplazamientos, vienen dados por los términos de $n=1$, en los cuales el exponente de r_i es $(n/2)-1 = -1/2$, para las tensiones y $n/2 - 1/2$, para los desplazamientos,

$$\sigma_x = \frac{K_I B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ (1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) \frac{\cos \frac{1}{2} \theta_1}{r_1^{1/2}} - \frac{4\beta_1 \beta_2}{1 + \beta_2^2} \frac{\cos \frac{1}{2} \theta_2}{r_2^{1/2}} \right\} + \frac{K_{II} B_{II}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) \frac{\text{sen} \frac{1}{2} \theta_1}{r_1^{1/2}} + (1 + \beta_2^2) \frac{\text{sen} \frac{1}{2} \theta_2}{r_2^{1/2}} \right\} \quad (17a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -(1 + \beta_2^2) \frac{\cos \frac{1}{2} \theta_1}{r_1^{1/2}} + \frac{4\beta_1 \beta_2}{1 + \beta_2^2} \frac{\cos \frac{1}{2} \theta_2}{r_2^{1/2}} \right\} + \frac{K_{II} B_{II}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ (1 + \beta_2^2) \frac{\text{sen} \frac{1}{2} \theta_1}{r_1^{1/2}} - (1 + \beta_2^2) \frac{\text{sen} \frac{1}{2} \theta_2}{r_2^{1/2}} \right\} \quad (17b)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 2\beta_1 \frac{\text{sen} \frac{1}{2}\theta_1}{r_1^{1/2}} - 2\beta_1 \frac{\text{sen} \frac{1}{2}\theta_2}{r_2^{1/2}} \right\} + \frac{K_{II} B_{II}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 2\beta_1 \frac{\cos \frac{1}{2}\theta_1}{r_1^{1/2}} - \frac{(1 + \beta_2^2)}{2\beta_2} \frac{\cos \frac{1}{2}\theta_2}{r_2^{1/2}} \right\} \quad (17c)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{K_{III} B_{III}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -\frac{\text{sen} \frac{1}{2}\theta_2}{r_2^{1/2}} \right\} \quad (17d)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III} B_{III}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \beta_2 \frac{\cos \frac{1}{2}\theta_2}{r_2^{1/2}} \right\} \quad (17e)$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{: tensión plana} \\ \frac{K_I B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ 2\nu(\beta_1^2 - \beta_2^2) \frac{\cos \frac{1}{2}\theta_1}{r_1^{1/2}} \right\} + \frac{K_{II} B_{II}(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ -2\nu(\beta_1^2 - \beta_2^2) \frac{\text{sen} \frac{1}{2}\theta_1}{r_1^{1/2}} \right\} & \text{: deformación plana} \end{cases} \quad (17f)$$

$$u = \frac{K_I B_I(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ r_1^{1/2} \cos \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{2\beta_1 \beta_2}{1 + \beta_2} r_2^{1/2} \cos \frac{1}{2} \theta_2 \right\} +$$

$$\frac{K_{II} B_{II}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ r_1^{1/2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1 + \beta_2^2}{2} r_2^{1/2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta_2 \right\}$$

(17g)

$$v = \frac{K_I B_I(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ -\beta_1 r_1^{1/2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta_1 + \frac{2\beta_1}{1 + \beta_2} r_2^{1/2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta_2 \right\} +$$

$$\frac{K_{II} B_{II}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \beta_1 r_1^{1/2} \cos \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1 + \beta_2^2}{2\beta_2} r_2^{1/2} \cos \frac{1}{2} \theta_2 \right\}$$

(17h)

$$w = \frac{K_{III} B_{III}(C)}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} r_2^{1/2} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta_2$$

(17i)

Para problemas en Modo I, Nilsson (1974) ha mostrado que tanto las ecuaciones diferenciales como las condiciones de contorno del problema de una grieta moviéndose con velocidad variable cualquiera, coinciden con las del problema de crecimiento uniforme considerado aquí. La conclusión de esta observación es que la solución obtenida es válida también para el caso de crecimiento no uniforme, sin más que sustituir la velocidad que se había supuesto constante, por el valor instantáneo de la misma. Esta misma conclusión puede extenderse a los otros modos de fractura.

Para el caso de $C=0$, pueden obtenerse las expresiones del campo singular de tensiones y sus correspondientes desplazamientos a partir de las fórmulas

(17), sustituyendo C por 0, $r_1 = r_2$ por r y $\theta_1 = \theta_2$ por θ , obteniéndose, después de simplificar las expresiones,

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \quad (18a)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (18b)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \quad (18c)$$

$$\sigma_{xz} = - \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (18d)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \quad (18e)$$

$$\sigma_z = \begin{cases} 0 & \text{: tensión plana} \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} 2\nu \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} 2\nu \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \text{: deformación plana} \end{cases} \quad (18f)$$

$$u = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (18g)$$

$$v = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (18h)$$

$$w = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (18i)$$

La solución general de la grieta estacionaria, que es la que se va a estudiar en este capítulo, cuya parte singular viene dada por las ecuaciones (18) contiene los términos correspondientes a, tensiones nulas con un movimiento de sólido rígido ($n=0$), tensiones singulares de orden $r^{-1/2}$ y sus correspondientes movimientos que van con $r^{1/2}$ ($n=1$), tensiones constantes y desplazamientos lineales en r ($n=2$), y términos de orden superior ($n \geq 3$). Los términos más significativos de estos desarrollos pueden incorporarse al Método de los Elementos de Contorno en el dominio del tiempo, mediante un elemento de contorno singular, lo cual va a permitirnos resolver una amplia gama de problemas de fractura elastodinámica, con una muy buena precisión. Este elemento ha sido usado con anterioridad, con excelentes resultados, en el campo de la fractura elastostática (Blandford, Ingraffea y Liggett, 1981; Martínez y Domínguez, 1984), y en el campo de la fractura elastodinámica en el dominio de la frecuencia (Chirino y Domínguez, 1989).

3.3 Cálculo de F.I.T. dinámicos con el M.E.C.

Elementos Parabólicos a Un Cuarto.

Se expone a continuación, la formulación de los elementos a un cuarto y a un cuarto singular, con los que se pretende representar el mayor número de términos del desarrollo en serie de las tensiones y desplazamientos en el entorno del vértice de una grieta, dentro de la formulación del método de los elementos de contorno.

La geometría, desplazamientos y tracciones en el caso de elementos parabólicos (ver figura II.6), se interpolan a lo largo del elemento con:

$$f_i = f_i^1 \phi_1 + f_i^2 \phi_2 + f_i^3 \phi_3 \tag{19}$$

donde ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 son los polinomios cuadráticos dependientes de la coordenada natural ξ , dados por las fórmulas (II.51) en el capítulo anterior; f_i representa una coordenada cartesiana, un desplazamiento o una tracción, y f_i^j sus valores nodales.

Sea un elemento cuadrático rectilíneo, con su nodo central colocado a un cuarto de la longitud a partir de uno de los extremos, y sea r la distancia de un punto cualquiera de coordenada ξ , al extremo llamado 1 en la figura 3. La relación entre estas dos variables viene dada por,

$$\bar{r} = \frac{L}{2} \left\{ \left(\frac{\xi}{2} + 1 \right) \xi + \frac{1}{2} \right\} \quad \text{o la relación inversa} \quad \xi = 2 \sqrt{\frac{\bar{r}}{L}} - 1 \tag{20}$$

$$\frac{L}{4} (\xi^2 + 2\xi + 1) =$$

$$\bar{r} = \frac{L}{4} (\xi + 1)^2$$

$$\bar{r} = \frac{L}{4} (\xi - 1)^2$$

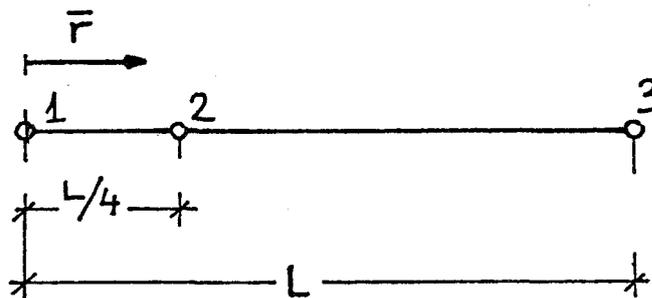



Figura 3

Sustituyendo esta relación en la expresión de f_i , la ecuación (19) se transforma en:

$$f_i = a_i^1 + a_i^2 \sqrt{r/L} + a_i^3 \bar{r}/L \quad (21)$$

siendo:

$$\begin{aligned} a_i^1 &= f_i^1 \\ a_i^2 &= -3f_i^1 + 4f_i^2 - f_i^3 \\ a_i^3 &= 2f_i^1 - 4f_i^2 + 2f_i^3 \end{aligned}$$

La geometría del elemento da lugar, pues, a una variación de la magnitud f_i en función de \bar{r} , que es capaz de representar el comportamiento de tipo \sqrt{r} de los desplazamientos. Para ello únicamente hay que hacer coincidir \bar{r} a lo largo del elemento con r a lo largo de los labios de la grieta. Este elemento, similar al desarrollado en el método de los elementos finitos, es el llamado, elemento a un cuarto, al que se hará referencia en lo sucesivo con la

expresión, $E1/4N$.

En el método de los elementos de contorno las tensiones se calculan directamente, como variables independientes, y no por derivación, a partir de los desplazamientos. Estas variables, no están correctamente representadas mediante la ecuación (21), pues no contiene el término singular $1/\sqrt{r}$, el más importante del desarrollo de las mismas en las inmediaciones del vértice de una grieta. Se puede obtener una representación adecuada de las tensiones utilizando para las mismas unas funciones de forma singulares, iguales a la habituales, multiplicadas por el factor $\sqrt{(L/\bar{r})}$,

$$p_i = \hat{p}_i^1 \phi_1 \sqrt{L/\bar{r}} + \hat{p}_i^2 \phi_2 \sqrt{L/\bar{r}} + \hat{p}_i^3 \phi_3 \sqrt{L/\bar{r}}$$

$$p_i = \hat{p}_i^1 \hat{\phi}_1 + \hat{p}_i^2 \hat{\phi}_2 + \hat{p}_i^3 \hat{\phi}_3$$

(22)

Puesto que las funciones de forma singulares no cumplen la condición $\hat{\phi}_j(\xi_i) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, siendo $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$, los \hat{p}_i^j no son los valores nodales de p_i , sino éstos divididos por los valores nodales de $\hat{\phi}_j$,

$$\hat{p}_i^1 = \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} p_i^1 \sqrt{\frac{\bar{r}}{L}}$$

$$\hat{p}_i^2 = \frac{p_i^2}{2}$$

$$\hat{p}_i^3 = p_i^3$$

(23)

El hecho de que sea $\hat{p}_i^3 = p_i^3$, implica que se cumple la compatibilidad interelemental, tanto en tensiones como en desplazamientos, y por lo tanto a continuación de un elemento singular es posible colocar uno normal; no es necesario desarrollar elementos especiales de transición, como ocurre en muchas formulaciones de elementos singulares del método de los elementos finitos

La ecuación (21) en términos de \bar{r} es:

$$p_i = \hat{a}_i^1 \sqrt{\frac{L}{\bar{r}}} + \hat{a}_i^2 + \hat{a}_i^3 \sqrt{\frac{\bar{r}}{L}}$$

siendo:

$$\begin{aligned} \hat{a}_i^1 &= \hat{a}_i^1 \\ \hat{a}_i^2 &= -3p_i^1 + 4p_i^2 - 3p_i^3 \\ \hat{a}_i^3 &= 2p_i^1 - 4p_i^2 + 2p_i^3 \end{aligned}$$

que tiene tres términos correctos del desarrollo de las tensiones ($n=0,1,2$) dado en (18).

El elemento así generado, en el que la geometría y los desplazamientos se interpolan con las funciones de forma habituales ϕ_i , y las tensiones mediante las funciones singulares ϕ_i , es el llamado elemento a un cuarto singular, al cual nos referiremos a partir de ahora con la notación E1/4S. Este elemento permite una representación con tres términos correctos del desarrollo, tanto de los desplazamientos como de las tracciones.

Determinación del F.I.T. a Partir de las Variables Nodales.

Establecida estas representaciones, los factores de intensidad de tensión pueden determinarse de diversas formas a partir de las variables nodales.

Sea el elemento a un cuarto de la figura 3, y supongamos que el nodo 1 se encuentra en el vértice de una grieta, mientras que los nodos 2 y 3 están situados en una de las caras de la misma. La ecuación (21) para la componente normal a la fisura de los desplazamientos en este elemento podemos escribirla como,

$$v-v_1 = \left[-(v_3-v_1) + 4(v_2-v_1) \right] \sqrt{r/L} + \left[2(v_3-v_1) - 4(v_2-v_1) \right] \bar{r}/L \quad (24)$$

donde al restar v_1 , referimos los desplazamientos al vértice de la grieta.

Por otra parte, el primer término del desarrollo asintótico de esta componente, después del término de sólido rígido, en una grieta en modo I de fractura, y para un ángulo $\theta = \pi$, es, [ecuación (18)],

$$v' = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} 2(1 - v) \quad (25)$$

Igualando los términos de orden $r^{1/2}$ de ambas ecuaciones, teniendo en cuenta que, por la disposición del elemento, $\bar{r} = r$, se obtiene la relación,

$$K_I = \frac{\mu}{2(1 - v)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} (4v'_2 - v'_3) \quad (26)$$

siendo $v'_2 = v_2 - v_1$ y $v'_3 = v_3 - v_1$ los desplazamientos relativos al vértice.

Esta es la llamada fórmula bipuntual de cálculo del F.I.T., pues éste se calcula a partir de los desplazamientos de los dos nodos adyacentes al vértice.

Se puede obtener una fórmula unipuntual igualando el movimiento que da la ecuación (25), en $\bar{r} = L/4$, con el valor v'_2 , calculado en ese punto. Esto lleva a la ecuación,

$$K_I = \frac{\mu}{(1 - v)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} v'_2 \quad K_{III} = \quad (25)$$

Unas ecuaciones similares pueden escribirse para el F.I.T. del Modo II, sustituyendo los desplazamientos v por los u .

El F.I.T. puede calcularse de una forma directa mediante el valor nodal de

la 'tracción' en el vértice de un elemento E1/4S. Sea un E1/4S que partiendo del vértice de la grieta y formando un ángulo θ con el plano de la misma, se adentra en el medio formando parte de un contorno interno que divide al dominio en dos subregiones (ver figura 4).

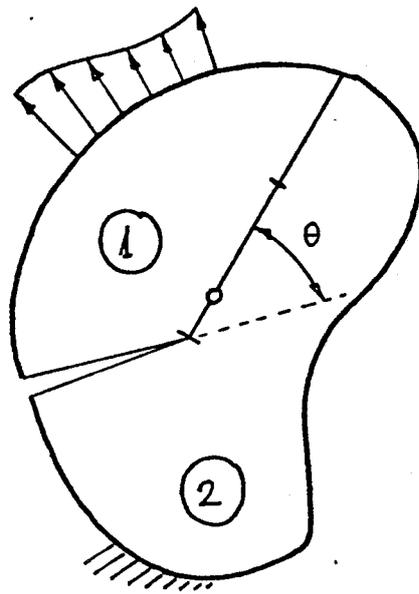


Figura 4

Teniendo en cuenta, la relación existente entre los valores nodales p_1 , y las tensiones reales p_1 , dada por la primera de las ecuaciones (23), y poniendo éstas en función del tensor de tensiones singular, dado por las ecuaciones (18), siendo las componentes de la normal unitaria en el elemento $n_x = \text{sen}\theta$ y $n_y = -\text{cos}\theta$, se llega a las siguientes relaciones,

$$\sqrt{2\pi L} \begin{bmatrix} \hat{1} \\ p_x \\ \hat{1} \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix} \quad (28)$$

donde la matriz $A=(a_{ij})$ viene dada por las expresiones,

$$a_{11} = -\operatorname{sen}\theta \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} \right) + \operatorname{cos}\theta \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}$$

$$a_{12} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \left(2 + \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} \right) + \operatorname{cos}\theta \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} \right)$$

$$a_{21} = -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2} + \operatorname{cos}\theta \cos\frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} \right)$$

$$a_{22} = -\operatorname{sen}\theta \cos\frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} \right) + \operatorname{cos}\theta \cos\frac{\theta}{2} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \cos\frac{3\theta}{2}$$

(29)

La resolución de este sistema permite expresar los F.I.T. de modo I y II en función de las variables nodales p_1 , cualquiera que sea la posición relativa del E1/4S respecto al plano de la grieta. Para el caso más simple y común de que el elemento forme un ángulo $\theta=0^\circ$ con el plano de la grieta, estas

expresiones se simplifican enormemente, reduciéndose a,

$$K_I = \sqrt{2\pi L} \hat{p}_y^1$$

$$K_{II} = \sqrt{2\pi L} \hat{p}_x^1$$

(30)

Estas últimas expresiones relacionan los factores de intensidad de tensión con los valores nodales de 'tensión' en el vértice del nodo 1 del E1/4S. Una correspondencia directa como esta, podía esperarse observando las relaciones tan similares de K_{II} y p_1 con las tensiones en las inmediaciones del vértice, [ecuaciones (12) y (23) respectivamente].

3.4.- Problemas de grietas en modos puros. Modo I y Modo II

Se presentan a continuación una serie de problemas de cálculo de factores dinámicos de intensidad de tensión, en los que por las condiciones de carga y de contorno, sólo se provoca un modo de fractura en la grieta considerada. Así, el campo de tensiones y desplazamientos en las inmediaciones del vértice vendrá determinado por un único factor de intensidad de tensiones, bien el K_I , como ocurre en el primero y el tercer problema, o bien el K_{II} , en el segundo. En todos ellos y en los del capítulo siguiente, se emplearán elementos cuadráticos para la discretización espacial, y funciones de interpolación lineal para los desplazamientos y constante para las tensiones, pues es la combinación de funciones de aproximación que mejores resultados ha dado para el tipo de problemas que se pretende analizar.

F.I.T. dinámico transitorio en una grieta finita en un medio elástico infinito, causada por la incidencia de una onda P.

Se trata de calcular el factor dinámico de intensidad de tensión en una grieta de longitud $2a$, dentro de un medio bidimensional infinito, cuando una onda dilatacional, onda P, incide en la grieta, formando un ángulo $\alpha=90^\circ$, con el plano de la misma (ver figura 5) (Thau y Lu, 1971).

El problema puede plantearse en función de los potenciales de onda dilatacional $\phi(x,y,t)$ y transversal $\psi(x,y,t)$, tomando las coordenadas adimensionales $x = X/(2a)$, $y = Y/(2a)$; la variable temporal también se adimensionaliza, dividiendo el tiempo real, entre el tiempo que tardan las ondas dilatacionales en recorrer la grieta, $t_0 = 2a/c_1$. Los desplazamientos se pueden expresar en función de estos potenciales como,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

(31)

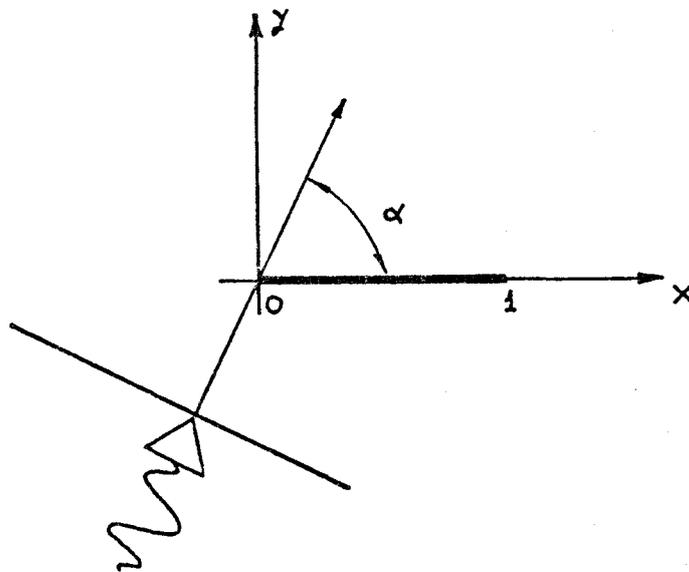


Figura 5

Con el sistema de coordenadas elegido, las ecuaciones del movimiento, teniendo en cuenta que no hay fuerzas de volumen, se convierten en,

$$\nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \psi - \kappa \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

(32)

donde $\kappa^2 = 2(1-\nu)/(1-2\nu) = (c_1/c_2)^2$. En las coordenadas adimensionales, la velocidad c_1 de las ondas dilatacionales es 1, y c_2 , la de las ondas transversales, $1/\kappa$.

La onda dilatacional incidente, con superíndice 'i', viene dada por los potenciales,

$$\phi^{(i)} = f(t - x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha)$$

$$\psi^{(i)} = 0$$

(33)

siendo f idénticamente cero cuando su argumento es negativo, y una función cualquiera en otro caso. El instante $t = 0$, es el instante en que la onda alcanza el extremo $x=0$. En este caso, en que $\alpha = 90^\circ$, la onda llega simultáneamente a todos los puntos de la grieta. Por delante del frente de la onda el medio permanece sin perturbar.

Los desplazamientos provocados por la onda, vienen dados por las ecuaciones (31),

$$u = -\dot{f} \cos \alpha$$

$$v = -\dot{f} \operatorname{sen} \alpha$$

(34)

donde el punto sobre f indica su derivada respecto a t

A partir de los desplazamientos, empleando la ley de comportamiento-compatibilidad (II.6), se obtiene el tensor de tensiones del campo incidente,

$$\sigma_x^{(i)} = \left(\kappa^2 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha \right) \ddot{f}$$

$$\sigma_y^{(i)} = \left(\kappa^2 - 2 \cos^2 \alpha \right) \ddot{f}$$

$$\sigma_{xy}^{(i)} = \operatorname{sen} 2\alpha \ddot{f}$$

(35)

En el presente apartado se va a resolver el caso en que $\ddot{f}(\tau) = H(\tau)$, siendo H la función escalón de Heavyside.

Para resolver este problema, es conveniente hacer uso del principio de superposición, el cual se esquematiza en la figura 6.

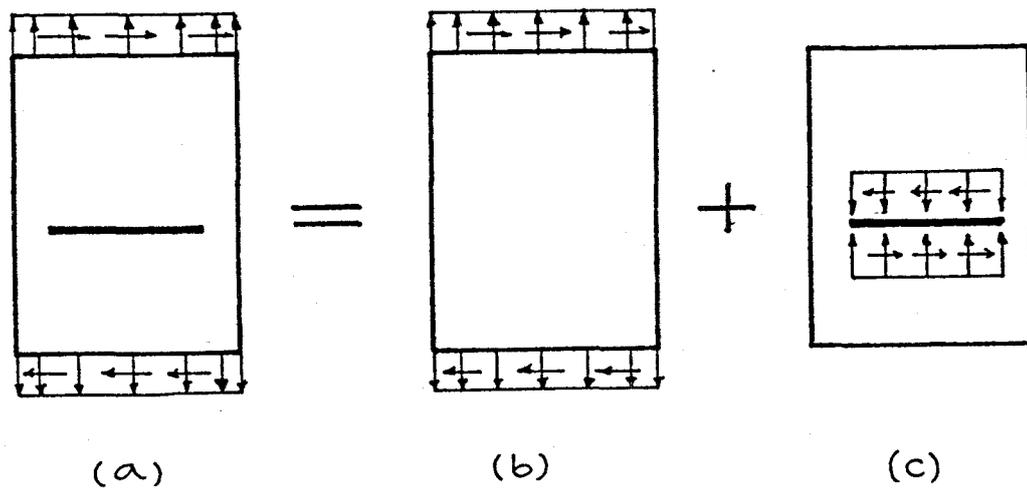


Figura 6

La composición del problema (b) y el (c), nos da el (a). Sin embargo, el problema incidente (b), no contiene ninguna singularidad, y, por lo tanto, el F.I.T. del problema difractado (c) es el mismo que el del problema original (a). Con el subíndice 'i' nos referiremos al campo incidente, y con el 's' al difractado.

El problema del campo difractado está determinado por las ecuaciones (32) y las siguientes condiciones de contorno,

$$\sigma_y^{(s)} = \sigma_y^{(i)} \text{ para } y = 0, 0 < x < 1$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = -\sigma_{xy}^{(i)} \text{ para } y = 0, 0 < x < 1$$

(36)

La ventaja de esta descomposición, desde el punto de vista de los elementos de contorno, es que el campo difractado cumple las condiciones de radiación, lo cual permite la discretización únicamente de los contornos

interiores. El problema que se va a modelar numéricamente, y las condiciones de contorno a emplear son las representadas en la figura 7, donde se ha aplicado la condición de simetría respecto al eje x . Las cargas a aplicar en los labios de la grieta vienen dadas por las ecuaciones (35).

La discretización a lo largo del eje x , habría que prolongarla, teóricamente, hasta el infinito; sin embargo, si se busca la solución hasta un cierto instante $t - \tau$ la discretización en el eje x , puede cortarse a una distancia tal, que el tiempo que empleen las ondas P en recorrerla desde el extremo de la discretización hasta un vértice, sea mayor que el periodo de interés, de manera que las ondas reflejadas no afecten a la solución. La discretización empleada se muestra en la figura 8, quedando discretizada cada semi-grieta con dos elementos iguales. Los elementos adyacentes a los vértices de la grieta, situados en el interior de la misma, son $E1/4N$, mientras que los situados hacia fuera de la grieta son $E1/4S$ para representar correctamente, el campo singular de tensiones.

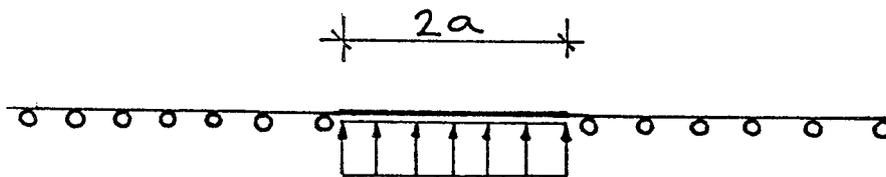


Figura 7

Las propiedades elásticas del medio se han tomado de forma que se obtengan las velocidades de onda adimensionales, con un valor $\kappa^2 = 3$.

Módulo de Poisson	$\nu=0.25$
Módulo de Elasticidad Transversal	$\mu=1.0 \text{ Pa}$

Densidad

$$\rho = 3.0 \text{ kg/m}^3$$

con las cuales las velocidades de las ondas son $c_1 = 1.0 \text{ m/s}$ y $c_2 = 1/\sqrt{3} \text{ m/s}$.

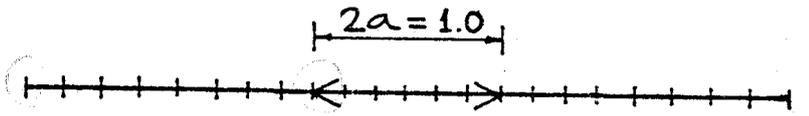


Figura 8

El valor del incremento de tiempo adoptado es $\Delta t = 0.125$, de manera que el parámetro $\beta = c_1 \cdot \Delta t / (h)$, referido a los elementos de la grieta, es exactamente $\beta = 1$, que como se vió en el apartado anterior, resulto ser el óptimo.

Thau y Lu (1971) resolvieron el problema del campo difractado, dado por las ecuaciones (32) junto a las condiciones de contorno (36), para el caso particular de \ddot{f} igual a la función escalón, descomponiendolo en dos problemas, simétrico y antisimétrico, y aplicando a cada uno la transformada de Laplace en el tiempo, y la transformada de Fourier en el espacio, para llegar a una ecuación generalizada de Wiener-Hopf (Noble, 1958). Esta conduce a un par de ecuaciones integrales acopladas las cuales se resuelven de forma iterativa, obteniendose la solución con el grado de precisión deseado. La solución obtenida en cualquier iteración es aproximada en el dominio de la transformada de Laplace, pero exacta en el dominio del tiempo, aumentando el intervalo en que la solución es válida conforme crece el numero de iteraciones empleadas. La solución de orden 0, es exacta mientras no haya interacción entre las ondas difractadas en cada vértice, es decir hasta $t = 1$. Esta es la solución calculada por Baker (1962) para una grieta semi-infinita. En la referencia citada se calcula la solución de primer

orden, que es exacta hasta que las ondas difractadas en un vértice sean difractadas en el otro y regresen al primero, es decir hasta $t=2$, que es el tiempo que tardan las ondas P, las más rápidas, en ese proceso. Para esta aproximación de primer orden, después de un complejo desarrollo se obtiene la solución en el dominio transformado. La anti-transformada de Fourier de la parte singular de las tensiones, de la cual se obtiene el F.I.T., puede realizarse analíticamente, mientras que la subsiguiente anti-transformada de Laplace contiene la integral de convolución de dos funciones del tiempo, que hay que realizar numéricamente, y que es singular para valores del tiempo mayores de γ , siendo $c_R = 1/\gamma$, la velocidad de las ondas de Rayleigh.

Como puede verse, la obtención del F.I.T. dinámico no es un problema fácil, siendo necesario un gran bagaje matemático, y una refinada técnica de programación para resolver numéricamente las integrales singulares, en función de las cuales queda la solución teórica. Además, desarrollos similares, sólo son posibles, en casos de geometría y condiciones de contorno muy simples.

En las gráficas que se presentan a continuación, se representa el valor del F.I.T. dinámico adimensionalizado con el valor estático del mismo. El F.I.T. estático vale, para una grieta de longitud $2a$,

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

donde σ es el valor de la tensión aplicada en los labios de la grieta, que, en este caso, es constante en el tiempo y vale 1.

La figura 9, representa el valor adimensionalizado del F.I.T. de modo I de este problema, calculado con la fórmula directa a partir de la 'tensión' en el vértice de un E1/4S [ecuación (30)], K_I , junto con la curva obtenida por Thau y Lu (1971). Puede comprobarse el excelente acuerdo de los resultados obtenidos con el M.E.C. junto al E1/4S, con la solución de analítica, sin

necesidad de utilizar una discretización demasiado fina. En la figura 10 se representa de nuevo el F.I.T. de modo I adimensionalizado calculado con la fórmula unipuntual de desplazamientos (27) llamado K_{u1s} , con la fórmula bipuntual de desplazamientos (26), llamado K_{u2s} . Los resultados son también bastante buenos.

El máximo de K_T se da en $t = \gamma$, que para el valor de v considerado vale $\gamma = 1.8839$ y es el instante en que las ondas de Rayleigh generadas en un vértice de la grieta alcanzan el otro. Este máximo es del orden de 1.30 veces el valor estático, lo cual está de acuerdo con los resultados de Sih y Loeber (1969) para una onda dilatacional armónica incidente con un ángulo $\alpha = 90^\circ$, e indica la importancia de los efectos dinámicos de inercia en el campo de tensiones.

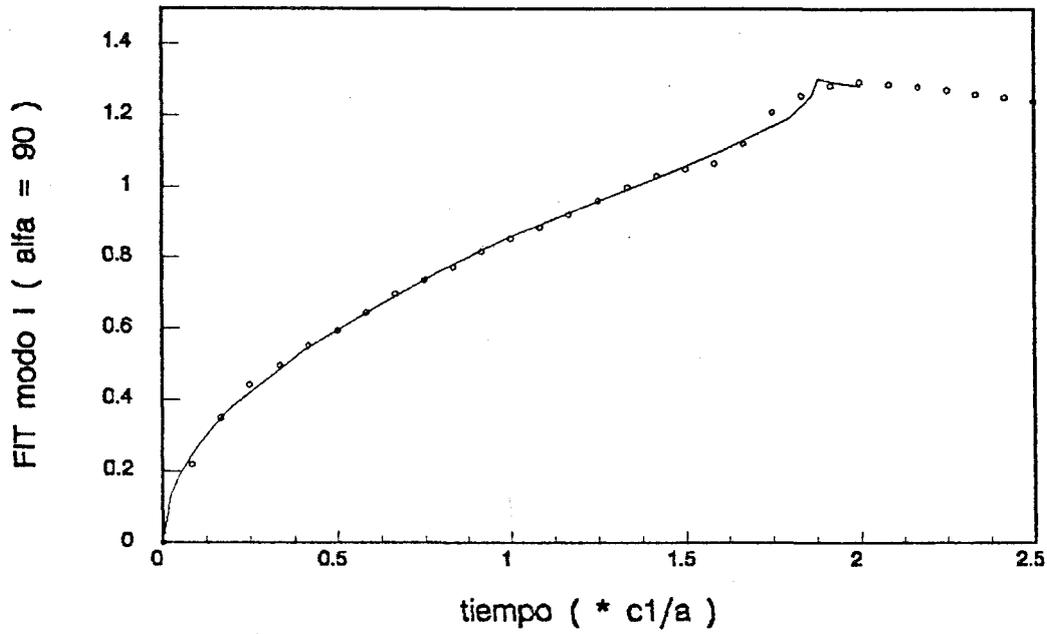


Figura 9. ($\circ K_t$; — Thau y Lu, 1971)

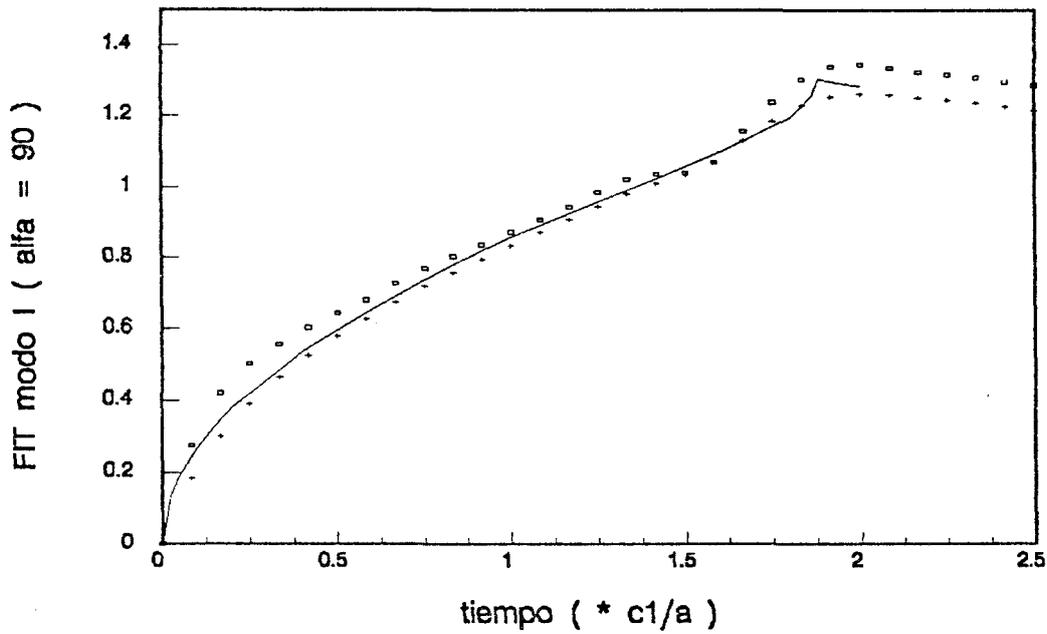


Figura 10. ($+ K_{u1s}$; $\square K_{u2s}$; — Thau y Lu, 1971)

F.I.T. dinámico transitorio en una grieta finita en un medio elástico infinito, causada por la incidencia de una onda S.

Se trata de calcular el factor de intensidad de tensión en una grieta de longitud $2a$, dentro de un medio bidimensional infinito, cuando una onda transversal, onda S, incide en la grieta, formando la dirección de propagación de dicha onda, un ángulo $\alpha=90^\circ$, con el plano de la misma (ver figura 5). Este problema es similar al anterior, excepto que ahora la solución en las inmediaciones del vértice de la grieta corresponde al Modo II de fractura y depende por tanto, del factor K_{II} .

En este caso, los potenciales de onda incidentes vienen dados por las ecuaciones,

$$\phi^{(i)} = 0$$

$$\psi^{(i)} = \frac{1}{2}(t - \kappa y)^2$$

(37)

A partir de ellos pueden calcularse los desplazamientos, y de éstos las tensiones incidentes.

El problema difractado viene dado por las ecuaciones diferenciales (32) y las condiciones de contorno (36), con las tensiones del campo incidente correspondientes a este problema. Thau y Lu (1971) lo resolvieron de una forma similar al anterior.

Para la resolución numérica mediante el M.E.C., se han empleado las mismas propiedades del material, la misma discretización y el mismo paso de tiempo. Las condiciones de contorno del problema se representan en la figura

11, en la que se ha tenido en cuenta la antimetría del mismo respecto al eje x .

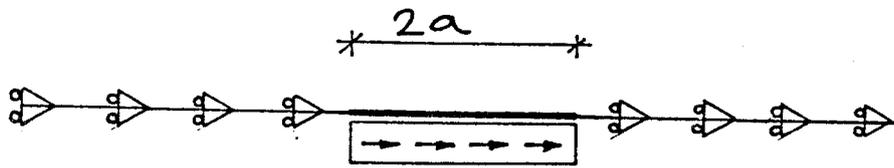


Figura 11

La figura 12, representa el valor del F.I.T. de modo II adimensionalizado con el valor estático $\tau \sqrt{\pi a}$, calculado, con la 'tensión' tangencial del E1/4S, K_t , junto con la curva obtenida para este problema por Thau y Lu (1971). La solución numérica obtenida con el M.E.C. es prácticamente indistinguible de la analítica. En la figura 13 se representan los FIT's calculados que se han denominado K_{u1s} y K_{u2s} frente a la solución analítica. Los resultados son algo peores que los obtenidos con K_t .

El máximo de K_{II} , vuelve a darse en $t-\gamma$, alcanzándose un valor del orden del 20% por encima del valor estático. Esto coincide prácticamente, con los resultados de Sih y Loeber (1969) para una onda transversal armónica incidente con un ángulo $\alpha = 90^\circ$.

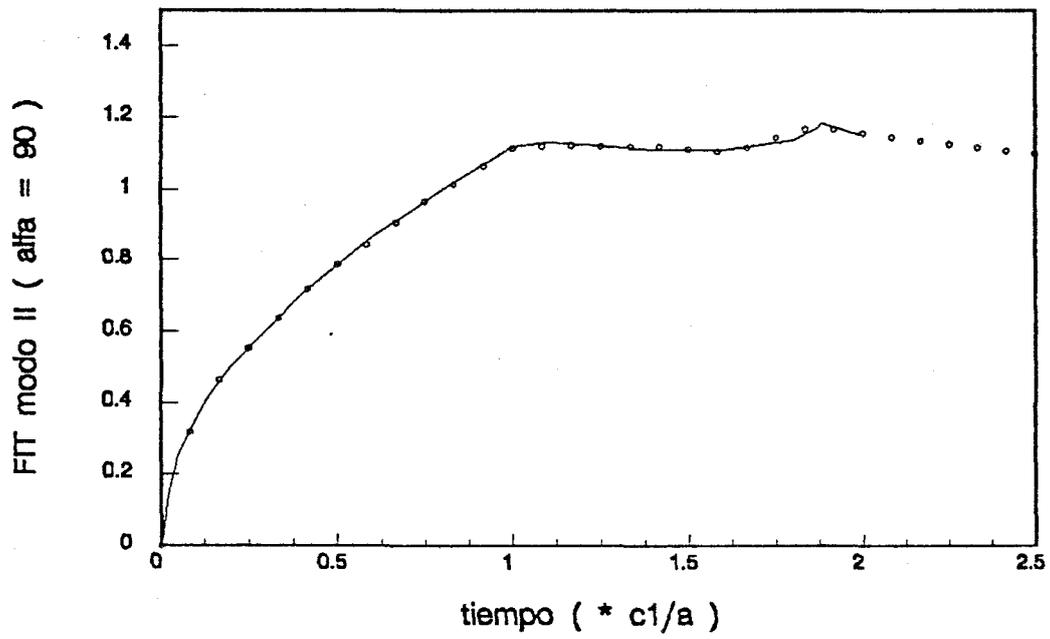


Figura 12. ($\circ K_t$; — Thau y Lu, 1971)

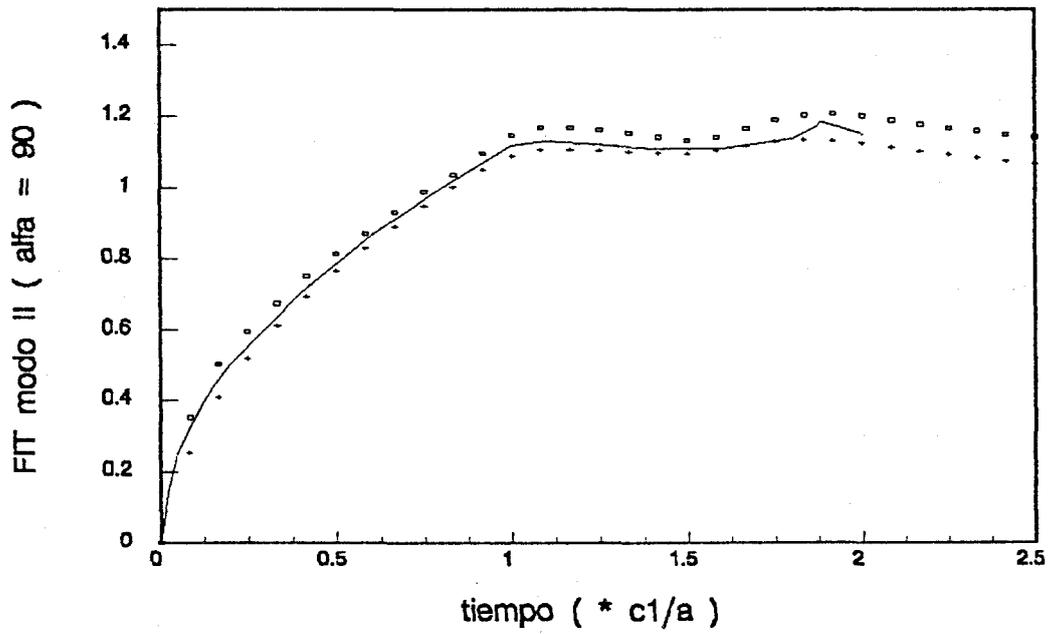


Figura 13. ($+ K_{u1s}$; $\square K_{u2s}$; — Thau y Lu, 1971)

Placa rectangular con grieta centrada.

El problema que se trata a continuación ha sido ya utilizado como ejemplo de validación de diversos métodos de cálculo de F.I.T. dinámicos en dominios finitos y su resolución mediante el Método de las Diferencias Finitas es debida a Chen (1975). Aunque la solución conocida fue obtenida mediante un método numérico, se utiliza con frecuencia como referencia por no disponerse de otra más fiable, analítica o semi-analítica. Esta solución fue obtenida con una malla de 5000 puntos.

Se trata de una placa rectangular de ancho $W = 20$ mm y altura $H = 40$ mm, que contiene una grieta de longitud $2a = 4.8$ mm, centrada y paralela a los lados menores. En éstos se aplica en $t=0$ una tensión constante de tracción de valor $P(t) = 0.4$ GPa. La geometría y condiciones de contorno del problema se muestran en la figura 14. Puede observarse, por la simetría del problema, que se trata de un caso de fractura en modo I simple.

Las propiedades elásticas del medio son:

Módulo de Poisson	$\nu = 0.3$
Módulo de Elasticidad Transversal	$\mu = 76923$ GPa
Densidad	$\rho = 5000$ kg/m ³ ,

obteniendose las velocidades de ondas, $c_1 = 7338$ m/s y $c_2 = 3922$ m/s

Por la simetría de la geometría y las cargas, el problema es equivalente al de la figura 15. La discretización de elementos de contorno empleada, para este problema, se muestra en figura 16. El incremento de tiempo escogido, $\Delta t = 0.32$ μ s es tal, que las ondas P recorren, aproximadamente, la longitud de la semi-grieta, en un paso de tiempo. El valor del parámetro β referido a los elementos mayores, de longitud $L=5$ mm, es $\beta = c_1 \Delta t / (h) = 0.93$, y referido a los elementos de la semi-grieta de longitud $L=1.2$ mm, $\beta = 3.88$.

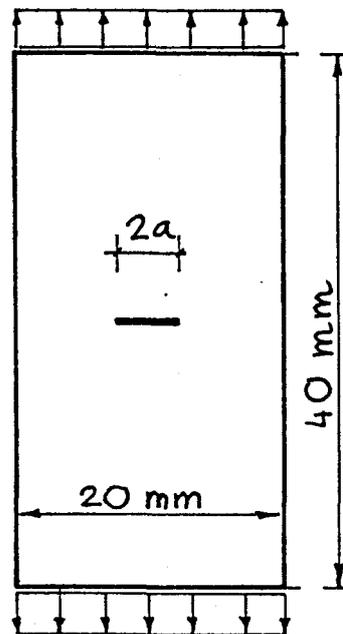


Figura 14

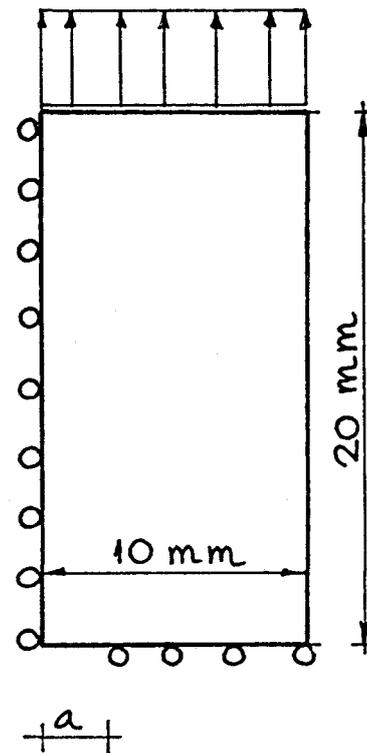


Figura 15

Como se observa en la figura 16, se emplean dos elementos para la semi-grieta. Se han considerado dos posibles modelizaciones de la grieta; en ambas, el elemento adyacente al vértice de la grieta, en el labio de la misma, es un E1/4N. Sin embargo, el elemento adyacente al vértice, hacia fuera de la grieta se ha tomado o bien singular E1/4S, o bien normal E1/4N, a fin de comparar los resultados obtenidos con ambos. Cuando se utiliza un E1/4N en la parte que contiene la singularidad de tensiones, éstas no quedan correctamente representadas, sin embargo, la distorsión que esta incorrección introduce en el sistema, puede no ser demasiado grande, con lo cual, el factor calculado con los desplazamientos del elemento del borde de la grieta, que si están correctamente representados con el E1/4N, puede ser bastante aproximado.

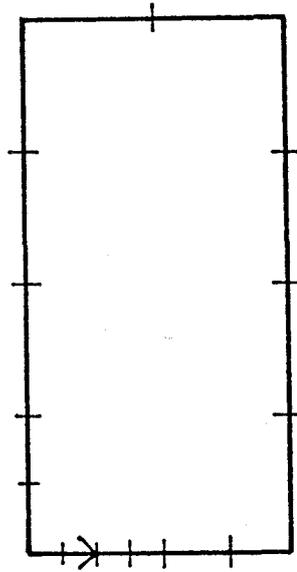


Figura 16

En la figura 17 se representa frente al tiempo, el F.I.T. normalizado con $P(t)\sqrt{\pi a}$. El valor de K_I ha sido obtenido directamente del valor nodal de la 'tensión' del elemento singular del vértice de la grieta según la ecuación (30) (K_I). Como se puede apreciar la aproximación a los resultados de Chen es muy grande. El mismo factor K_I pero calculado en función de los desplazamientos a lo largo de los bordes de la fisura, se representa en la figura 18 calculado según la ecuación (26) (K_{u2s}) y en la figura 19 calculado según la ecuación (27) (K_{u1s}). Análogamente, se representan los valores obtenidos con las ecuaciones (26) y (27) en las figuras 20 y 21 pero empleando elementos cuadráticos con nodo a un cuarto sin función de forma singular, $E1/4N$, en la parte del interior del dominio (K_{u2n} y K_{u1n} , respectivamente). Puede apreciarse que los resultados de K_I y K_{u2s} (figuras 17 y 18, respectivamente), son los que menos difieren de los de Chen (1975).

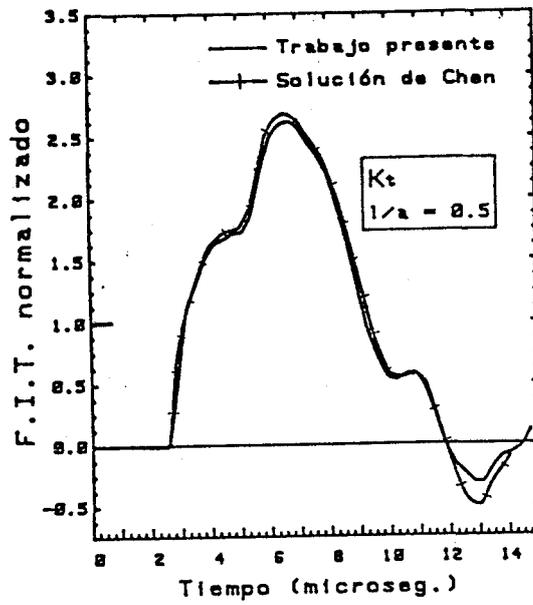


Figura 17

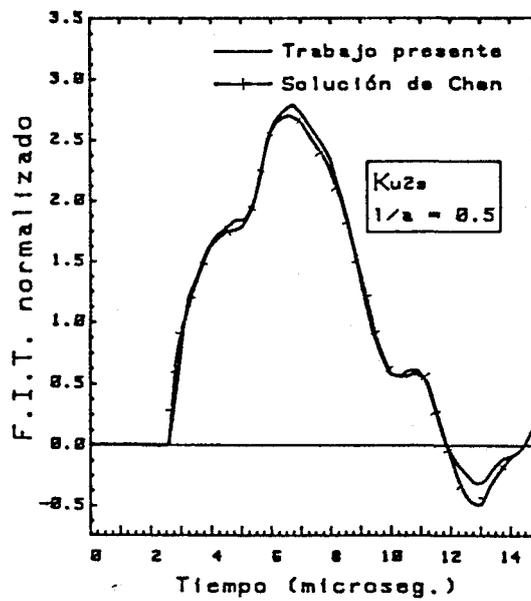


Figura 18

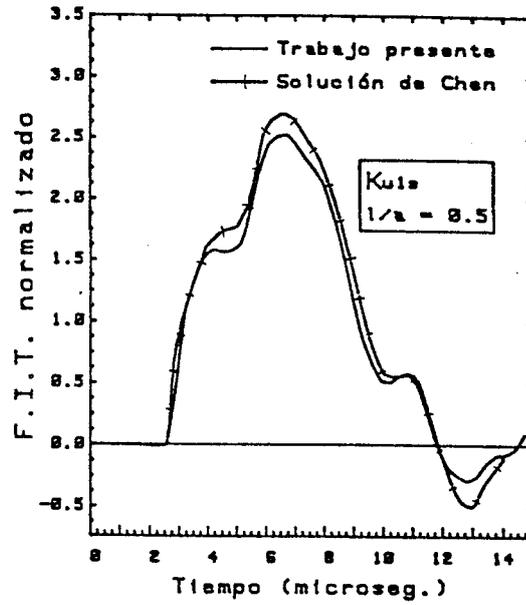


Figura 19

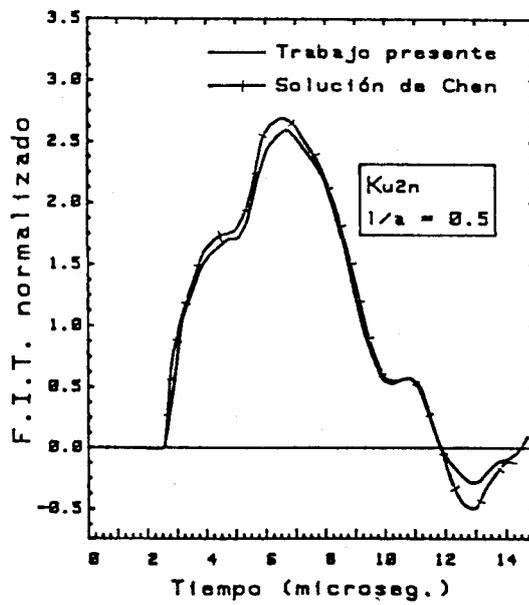


Figura 20

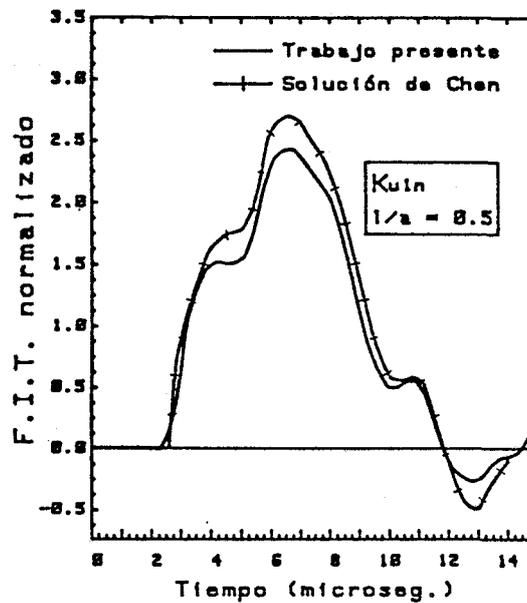


Figura 21

Todos los resultados de las figuras 17 a 21 se obtuvieron con la discretización de la figura 16, en la que la longitud L , de los elementos a un cuarto, adyacentes al vértice de la grieta, dividida entre la semi-longitud de la grieta, a , vale 0.5. La longitud relativa de los elementos adyacentes al vértice, respecto a la longitud de la misma influirá en el resultado obtenido. En la figura 22 se representa el F.I.T. normalizado cuando los elementos adyacentes al vértice son de longitud $L = 0.3 \cdot a$ y los siguientes de longitud $L = 0.7 \cdot a$, permaneciendo el resto de la discretización igual que la del caso anterior, obtenido a partir de las 'tensión' nodal (K_1). Los resultados de la figura 22 muestran la buena fiabilidad del método respecto al tamaño de los elementos empleados.

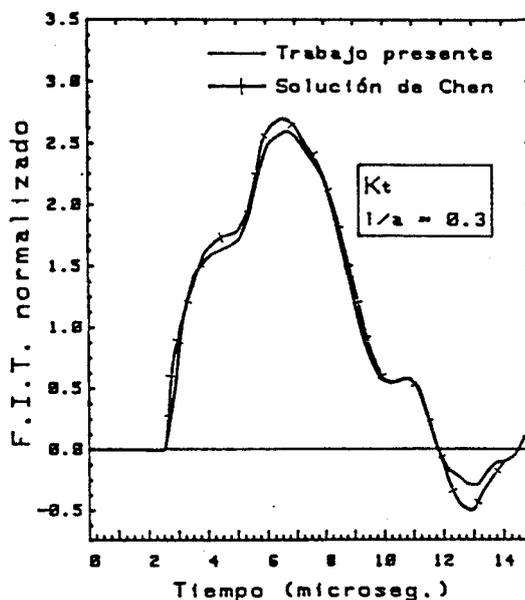


Figura 22

Para tener idea más completa de esta fiabilidad, se han obtenido resultados con los cinco procedimientos de las figuras 17 a 21 y diversas longitudes L de los elementos adyacentes al vértice, desde $L = 0.2 \cdot a$, hasta $L = 0.9 \cdot a$. La discrepancia entre cada curva obtenida, $K_L(t)$ y la solución de Chen, $K_{I.Chen}(t)$, se ha medido mediante la diferencia media cuadrática integral calculada con la expresión,

$$\text{Dif.} = \frac{1}{T} \left[\int_0^T (K_L(t) - K_{I.Chen}(t))^2 dt \right]^{1/2}$$

(38)

En la figura 23 se muestra este error medio para diferentes valores de L/a , para cada uno de los cinco procedimientos indicados.

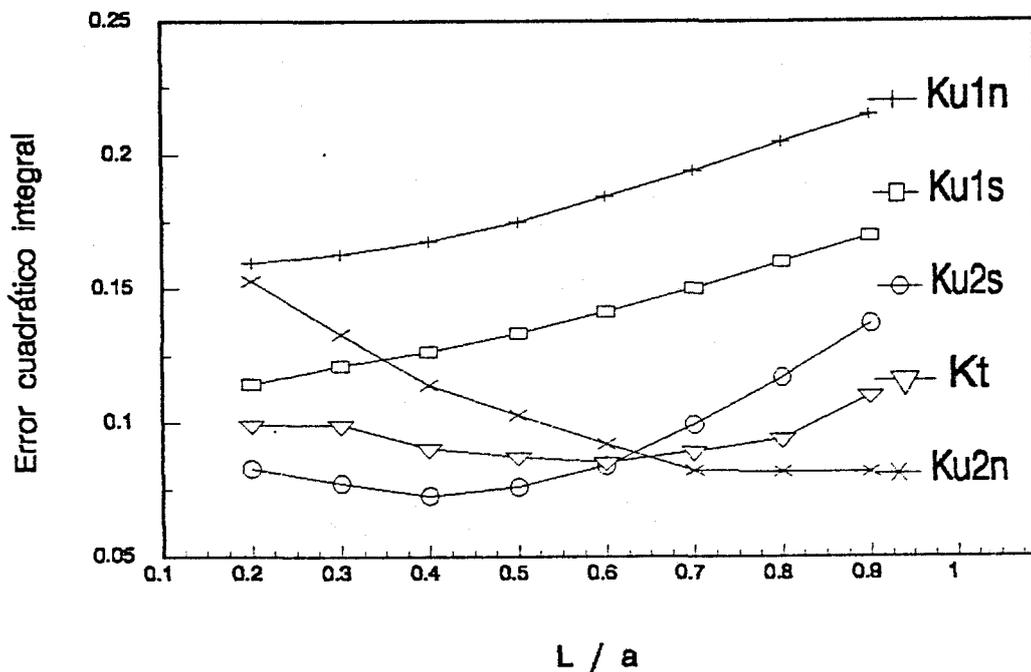


Figura 23

Aunque se obtienen buenos resultados con los cinco métodos, el procedimiento menos sensible a la discretización es el que hace uso del valor nodal de \hat{p}_1^1 en el vértice (K_t); los procedimientos menos fiables son, como cabría esperar, los que hacen uso de elementos con nodo a un cuarto no singulares en el interior del dominio (K_{u1n} y K_{u2n}). Debe indicarse aquí que los resultados de Chen fueron obtenidos numéricamente, mediante un método extrapolatorio, a partir de la solución obtenida en el dominio en la vecindad del vértice de la grieta, encontrando discrepancias del orden del 5%, según la dirección radial de extrapolación que se adoptara. Con esto se quiere señalar que las pequeñas diferencias existentes entre las curvas obtenidas aquí y la de Chen, no necesariamente son debidas a imprecisiones del método propuesto en esta tesis.

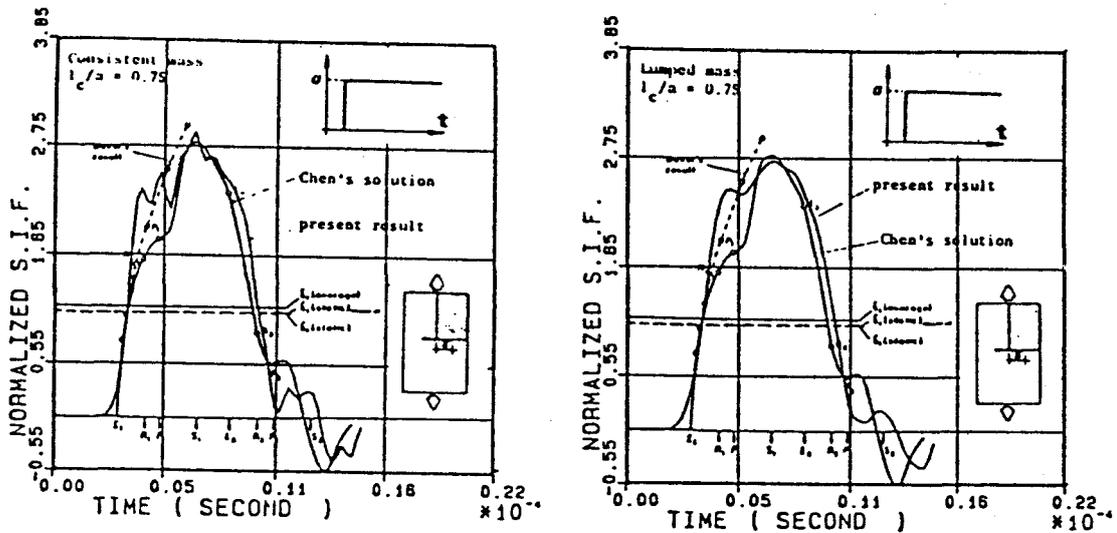


Figura 24

Con objeto de comparar con resultados obtenidos con otros métodos numéricos, se muestra en la figura 24 el factor de intensidad de tensión normalizado que obtuvieron recientemente Murti y Valliappan (1986) mediante el Método de los Elementos Finitos, con elementos a un cuarto y una malla de elementos cuadráticos rectangulares con el doble de nodos sobre el contorno que la empleada aquí, y con un paso de tiempo similar. Como puede verse los resultados, tanto para masa consistente como concentrada, están menos de acuerdo con los de Chen (1975) que los del presente tesis, además de presentar oscilaciones sensibles. Las curvas reproducidas aquí son probablemente las más suaves y precisas de cuantas presentan Murti y Valliappan (1986) que hacen en su artículo un estudio del importante efecto oscilatorio no deseado que presenta la solución del M.E.F., dependiendo de la discretización y paso de tiempo escogido (Bazant, 1978). En el caso del M.E.C., como se ve en las figuras 17 a 22, estos efectos no se producen, pudiendo existir elementos de diferentes longitudes sin que esto produzca reflexiones y/o refracciones ficticias.

3.5.- Problemas de Grietas en Modo Mixto

Introducción

En este apartado se van a considerar una serie de problemas de fractura elastodinámica, en los que la grieta estudiada se encuentra sometida a tensiones de abertura y de deslizamiento en su plano, y por ello, los campos de tensiones y desplazamientos, vendrán determinados por la combinación del Modo I y el Modo II de fractura en la vecindad del vértice (figura 2).

En los problemas resueltos en el apartado anterior, por las posibilidades de aplicar simetrías o antimetrías, la grieta quedaba colocada en el contorno del problema que discretizábamos, y en el elemento contiguo a la grieta, cuando se colocaba un E1/4S, se obtenía, a través de la 'tensión' nodal en el vértice, el factor dinámico de intensidad de tensión, de Modo I, o Modo II, o bien, calculábamos estos FIT's a partir de los desplazamientos del E1/4N situado en el labio de la grieta, junto al vértice.

En un problema general de modo mixto no es posible aplicar estas simetrías (ver figura 25; se ha representado la grieta como una entalla para resaltarla, pero el problema que se estudia es el de una grieta de espesor nulo). Tampoco es posible, discretizar directamente, el contorno real del problema, pues, si se quiere representar una grieta ideal de espesor nulo, los elementos y nodos de ambas caras de la grieta coincidirían, y por tanto, las ecuaciones para nodos distintos, a cada lado de la grieta, pero con iguales coordenadas, serían exactamente las mismas, con lo que la solución para esos nodos sería también, la misma, y no representarían la diferencia de desplazamientos que debe haber, entre esos dos puntos, por la existencia de la fisura en el dominio. Si se modelara la grieta con un pequeño espesor para que los nodos de ambas caras no coincidieran, aparte de que el problema no sería exactamente el mismo, y la complicación de realizar integrales cuasi-singulares de la solución fundamental, cuando la carga está en un nodo muy cercano a un elemento, sin pertenecer a él, el sistema obtenido no

estaría bien condicionado pues en la matriz resultante existirían términos de orden similar a los términos de la diagonal, bastante alejados de ésta (Geis, 1989).

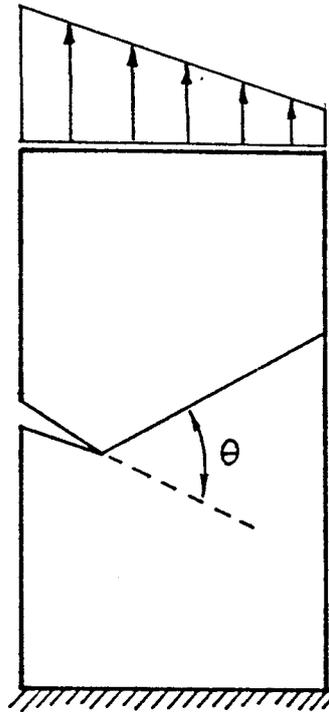


Figura 25

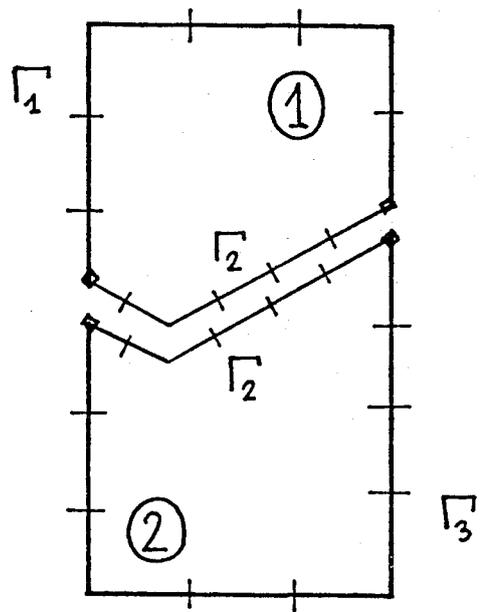


Figura 26

La alternativa que se emplea en esta tesis, consiste en dividir el dominio en dos subregiones, mediante un contorno interno que parte del vértice de la grieta (figura 26). Para un instante cualquiera de tiempo, se establecen las ecuaciones del método, en ambas subregiones,

$$H_1^{(1)} u_1^{(1)} + H_2^{(1)} u_2^{(1)} = G_1^{(1)} p_1^{(1)} + G_2^{(1)} p_2^{(1)} + a^{(1)}$$

$$H_2^{(2)} u_2^{(2)} + H_3^{(2)} u_3^{(2)} = G_2^{(2)} p_2^{(2)} + G_3^{(2)} p_3^{(2)} + a^{(2)}$$

(39)

donde los superíndices se refieren a la subregión y los subíndices a cada subcontorno. Se han eliminado los índices relativos al paso de tiempo, para simplificar la notación.

Las variables del subcontorno común a las dos subregiones, están relacionadas, por las siguientes ecuaciones de compatibilidad y equilibrio,

$$u_2^{(1)} = u_2^{(2)} = u_2$$

$$p_2^{(1)} = -p_2^{(2)} = p_2$$

(40)

supuestas las variables en coordenadas globales.

El sistema completo, escrito matricialmente quedaría,

$$\begin{bmatrix} H_1^{(1)} & H_2^{(1)} & 0 \\ 0 & H_2^{(2)} & H_3^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2 \\ u_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^{(1)} & G_2^{(1)} & 0 \\ 0 & -G_2^{(2)} & G_3^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2 \\ p_3^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Resolviendo este sistema, después de aplicar las condiciones de contorno, obtendríamos las tensiones (y desplazamientos) en el interior del dominio, en las inmediaciones del vértice, según un contorno de normal \mathbf{n} que forma un ángulo θ con el eje de la grieta, a partir de las cuales, es inmediato calcular los factores dinámicos de intensidad de tensión $K_I(t)$ y $K_{II}(t)$ empleando las ecuaciones (28). El ángulo puede tomarse igual a 0° , con lo que los F.I.T. se expresan directamente a partir de las 'tensiones' nodales (ecuaciones 30). También podemos emplear los desplazamientos de los labios de la grieta obtenidos de cada subregión, referirlos a los ejes locales de la grieta, restandolos calcular los desplazamientos de abertura y deslizamiento plano en las inmediaciones del vértice, y mediante las fórmulas (26) ó (27), del primero se obtiene el factor del modo I, $K_I(t)$, y con fórmulas similares, en función del deslizamiento plano, el factor del modo II, $K_{II}(t)$.

A continuación se presenta la solución de una serie de problemas de fractura elastodinámica en modo mixto.

Placa con grieta centrada oblicua.

Se considera el caso de una placa rectangular de ancho $W = 30$ mm y altura $H = 60$ mm, que contiene una grieta de longitud $2a = 14.14$ mm, centrada e inclinada 45° , respecto a los lados del dominio. En ambos lados

menores, se aplica en $t=0$ una tensión constante de tracción, $P(t) = 0.4 \text{ GPa}$. La geometría y condiciones de contorno del problema se muestran en la figura 27. Debido a la inclinación de la fisura, se trata de un problema donde se producirá comportamiento de fractura en modo mixto.

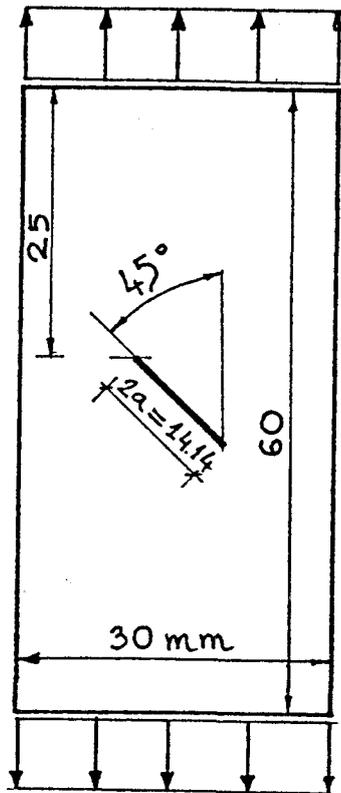


Figura 27

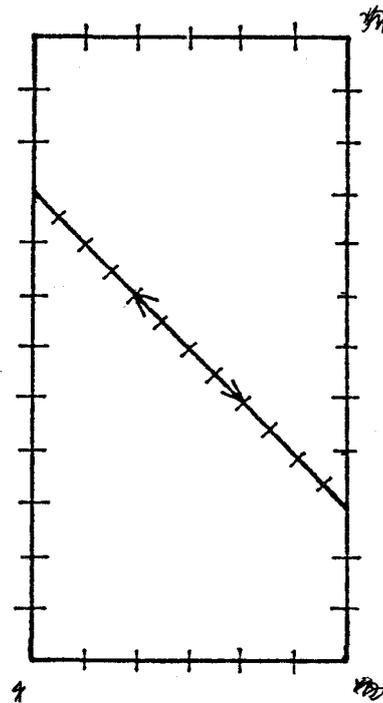


Figura 28

Las propiedades elásticas del medio son las mismas que en el problema de la grieta no-inclinada considerada en el apartado anterior:

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| Módulo de Poisson | $\nu = 0.3$ |
| Módulo de Elasticidad Transversal | $\mu = 76923 \times 10^6 \text{ Pa}$ |
| Densidad | $\rho = 5\,000 \text{ kg/m}^3$ |

obteniéndose las velocidades de ondas, $c_1 = 7338$ m/s y $c_2 = 3922$ m/s

Este problema, a pesar de la simetría de las cargas, no es posible simplificarlo, debido a la oblicuidad de la grieta. El dominio se divide en dos subregiones mediante un contorno inclinado 45° respecto a los lados de la placa, que pasa por la grieta. La discretización empleada para ambas subregiones se muestra en figura 28. El incremento de tiempo escogido es, $\Delta t = 0.35$ μ s. Con este paso de tiempo el valor del parámetro β referido a los elementos mayores, de longitud $L=5$ mm, ($h = L/2 = 2.5$ mm), es $\beta = c_1 \Delta t / (h) = 1.03$, y referido a los elementos menores de la grieta, cuya longitud es $L=3.54$ mm, $\beta = 1.45$.

Se han empleado dos elementos para cada semi-grieta como en el problema simétrico del apartado anterior. Para modelar las tensiones y desplazamientos se utiliza la opción que mejor resultado dio en el segundo problema del apartado anterior. Es decir, los cuatro elementos que parten de ambos vértices de la grieta y modelan los labios de la misma son $E1/4N$, mientras que los que se adentran en el medio, a lo largo de los subcontornos que dividen el dominio son $E1/4S$.

En la figura 29 se representa frente al tiempo, el F.I.T. de modo 1 normalizado con $P(t)\sqrt{\pi a}$, obtenido en cualquiera de los dos vértices (los dos vértices están sometidos a la misma sollicitación). El valor de K_I ha sido obtenido directamente del valor nodal de la 'tensión' del elemento singular del vértice de la grieta según la primera de las ecuaciones de (30) (K_{IT}). Se representa también el mismo factor calculado por Chen y Wilkins (1977) mediante diferencias finitas, así como el calculado por Murti y Valliappan (1986) utilizando elementos finitos; el resultado de estos últimos oscila alrededor de la solución obtenida con el M.E.C. A la vista de estas curvas, la conclusión es que los resultados de Chen y Wilkins (1977) son erróneos, corroborando la afirmación que hacen Murti y Valliappan (1986) en su artículo.

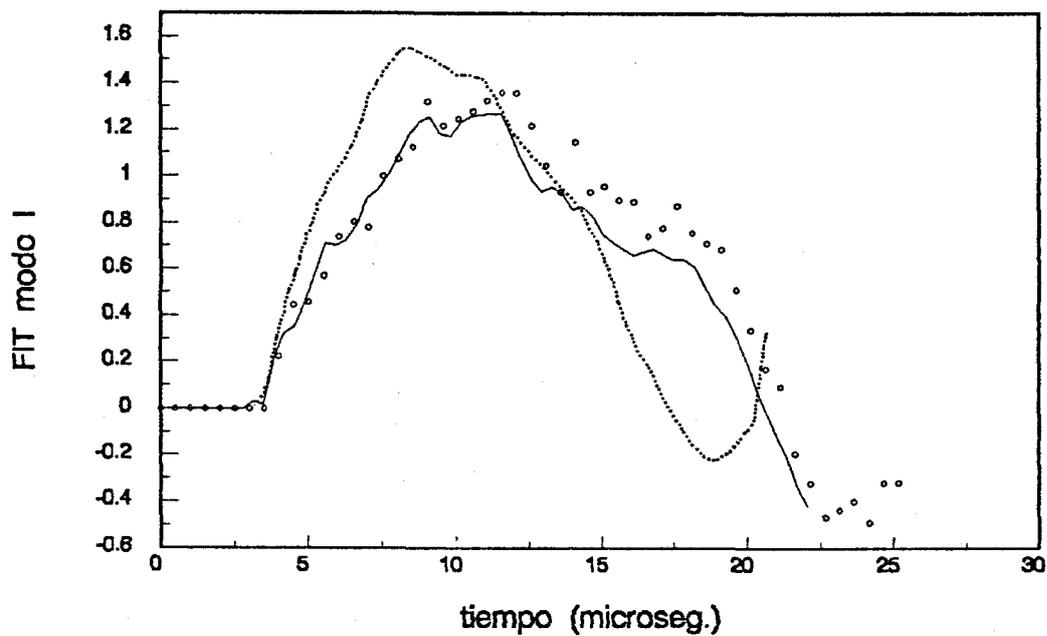


Figura 29. (— K_{It} ; $\circ\circ\circ$ Murti et al., 1986; \cdots Chen et al., 1975)

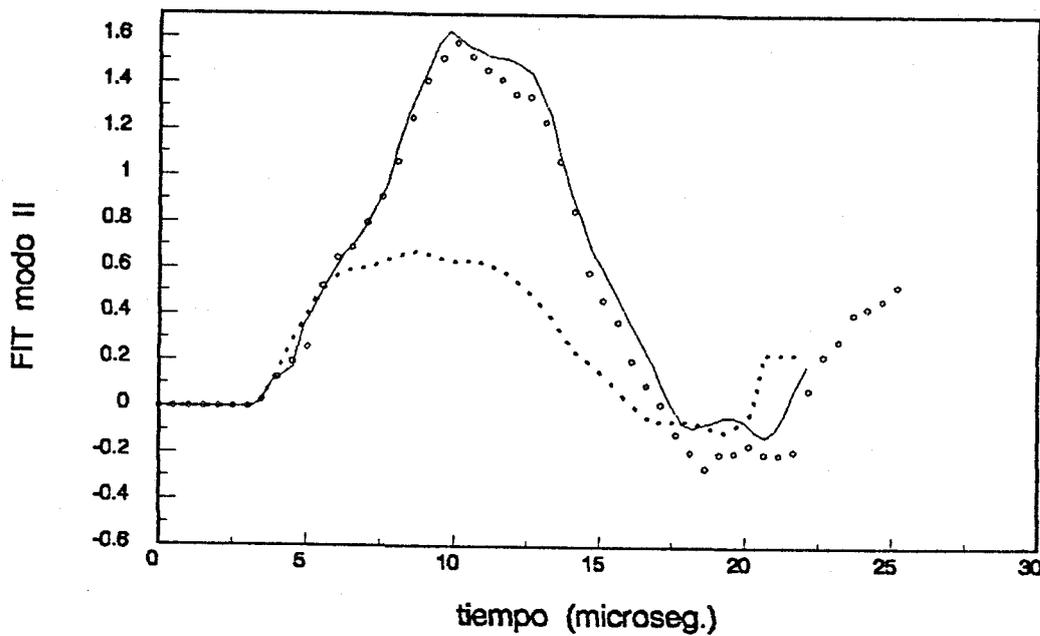


Figura 30. (— K_{II} ; $\circ\circ\circ$ Murti et al., 1986; \cdots Chen et al., 1975)

Igual ocurre con el factor de intensidad de tensión de modo II, como puede comprobarse en la figura 30, donde se representa frente al tiempo, normalizado con $P(t)\sqrt{\pi a}$, el factor K_{II} , calculado con el M.E.C. con la segunda fórmula (30), junto a los resultados de Chen y Wilkins (1977) y Murti y Valliappan (1986), respectivamente. La curva obtenida por Chen vuelve a estar en desacuerdo con las obtenidas en la referencia (Murti y Valliappan, 1986) y en esta tesis, que en este caso son más parecidas entre sí que para el modo I.

En las dos figuras siguientes (31 y 32) se representan los FIT's calculados con el M.E.C. con los tres procedimientos expuestos en el apartado 3.3. K_{Mu1s} , K_{Mu2s} , K_{Mt} , $M=I, II$. Los F.I.T. calculados de estas tres formulas no difieren excesivamente, a pesar de haber empleado una discretización del dominio poco refinada. El factor K_{Mt} tiene en todo el intervalo de tiempo considerado un valor intermedio a los calculados con uno o dos desplazamientos, K_{Iu1s} y K_{Iu2s} , respectivamente. La relación $K_{Mu1s}(t) < K_{Mt}(t) < K_{Mu2s}(t)$, suele cumplirse en los problemas resueltos. Para el factor de modo II, representado en la figura 32, esta relación es cierta para el primer tramo de las curvas, mientras que en la bajada final $K_{IIu1s}(t)$ y $K_{IIu2s}(t)$ coinciden en una curva de valores menores a los de K_{II} ; sin embargo, las diferencias son pequeñas.

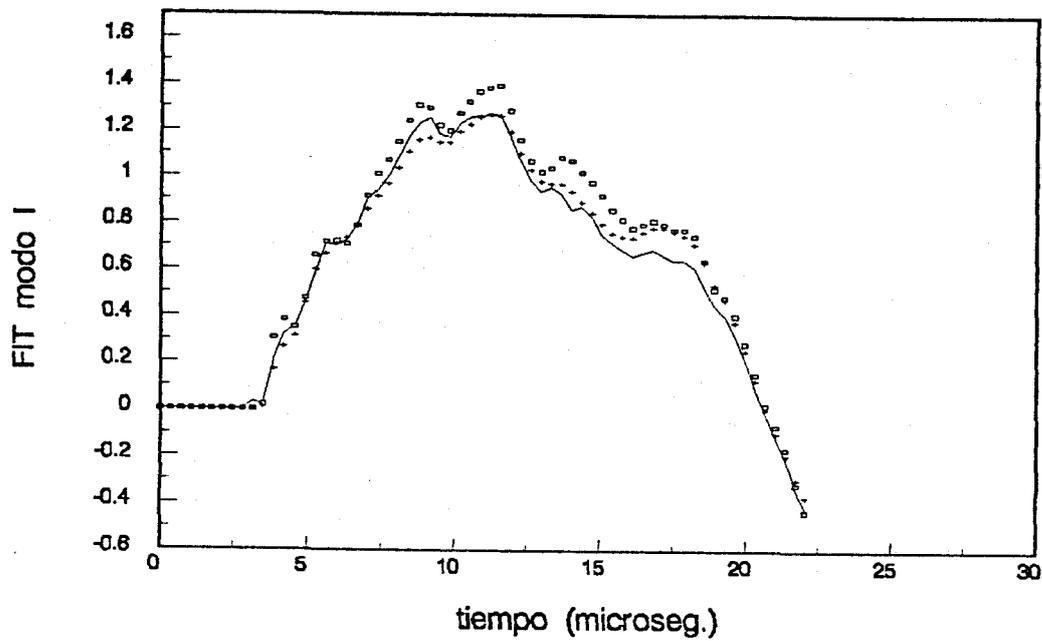


Figura 31. (— K_{I1t} ; \square K_{I1u2s} ; + K_{I1u1s})

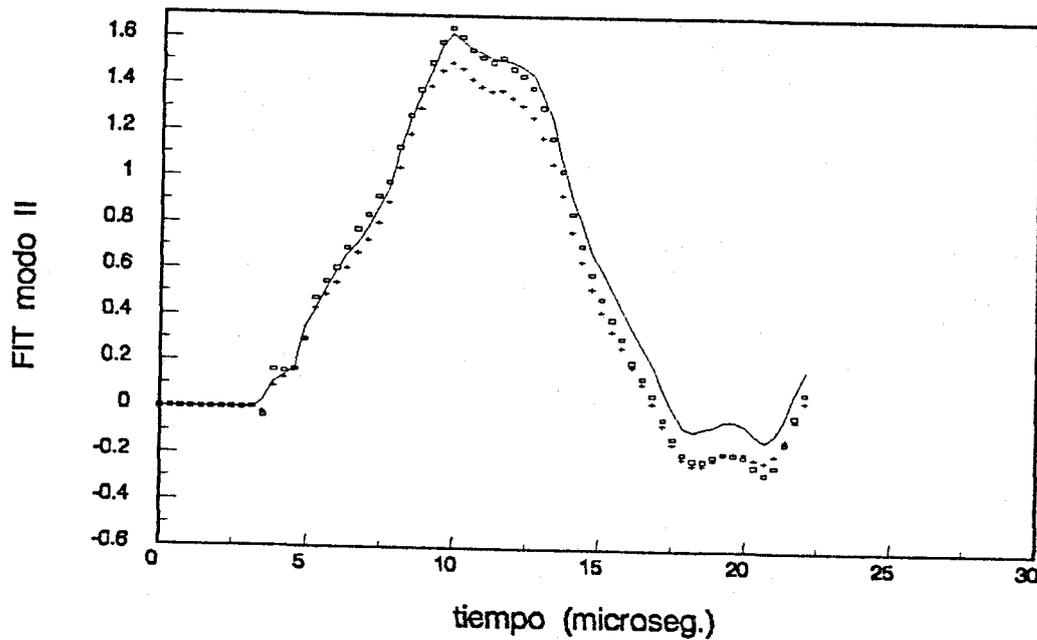


Figura 32. (— K_{II1t} ; \square K_{II1u2s} ; + K_{II1u1s})

Lámina con grieta asimétrica inclinada a 45°.

El siguiente problema resuelto consiste en una lámina rectangular de ancho $W = 32$ mm y altura $H = 44$ mm, que contiene una grieta de longitud $a_0 = 16\sqrt{2}$ mm = 22.63 mm, inclinada 45° respecto a los lados del dominio. La grieta parte de un punto situado en uno de los lados mayores, a 6 mm de una esquina, y acaba con su vértice en el centro de la lámina. La geometría y condiciones de contorno se representan en la figura 33. La tensión uniforme aplicada en el lado menor tiene una variación en el tiempo según una función escalón de Heavyside. A la vista de las condiciones de carga y geometría, al no existir simetrías de ningún tipo, puede deducirse que se producirán tensiones y desplazamientos de modo I y modo II.

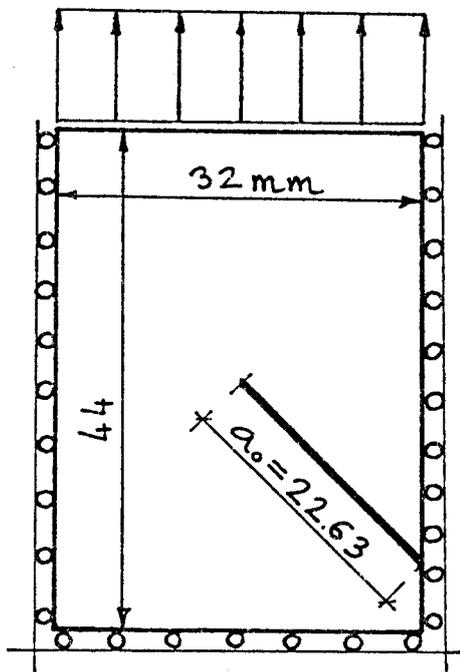


Figura 33

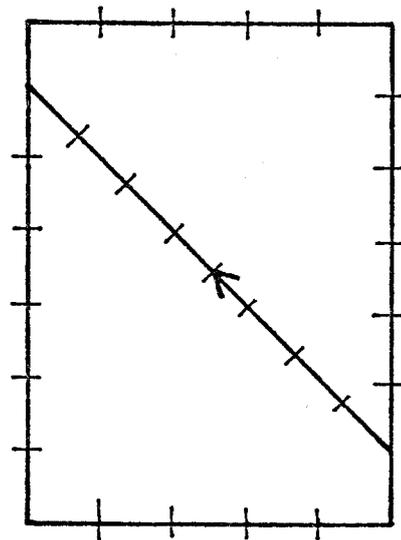


Figura 34

Las propiedades elásticas del medio son:

Módulo de Poisson	$\nu = 0.286$
Módulo de Elasticidad Transversal	$\mu = 29.4 \times 10^9 \text{ Pa}$
Densidad	$\rho = 2450 \text{ kg/m}^3$

Las velocidades de ondas que se obtienen son, $c_1 = 6328 \text{ m/s}$ y $c_2 = 3464 \text{ m/s}$.

Aplicando la técnica descrita en la introducción y empleada en el apartado anterior, el dominio se divide en dos subregiones mediante un contorno inclinado 45° respecto a los lados de la placa, que pasa por la grieta. La discretización de elementos de contorno empleada se muestra en figura 34. El incremento de tiempo escogido es $\Delta t = 0.4 \mu\text{s}$, con el cual el valor del parámetro β varía desde $\beta = 0.79$ para los elementos mayores ($L=6.4 \text{ mm}$), hasta $\beta = 1.09$ para los menores ($L=4.63 \text{ mm}$), que parten del vértice de la fisura.

La grieta se ha discretizado de nuevo con cuatro elementos, colocando dos E1/4N en los labios de la grieta y un E1/4S adyacente al vértice, en el subcontorno del interior del dominio.

El problema descrito en los párrafos precedentes se ha tomado de la referencia (Kishimoto, Aoki y Sakata, 1980). Los autores de este artículo resolvieron el problema mediante el método de los elementos finitos con elementos convencionales, en combinación con una cierta integral de línea, independiente del contorno de integración. Tomando un camino de integración con forma de rectángulo de lados $\epsilon \times \delta$, centrado en el vértice de la grieta, se pueden relacionar estas integrales J_k' y los factores de intensidad de tensión K_M , $M=I, II, III$, mediante un proceso de límite haciendo tender ϵ y δ a cero. Kishimoto et al., emplearon en su artículo una malla uniforme de 704 elementos triangulares.

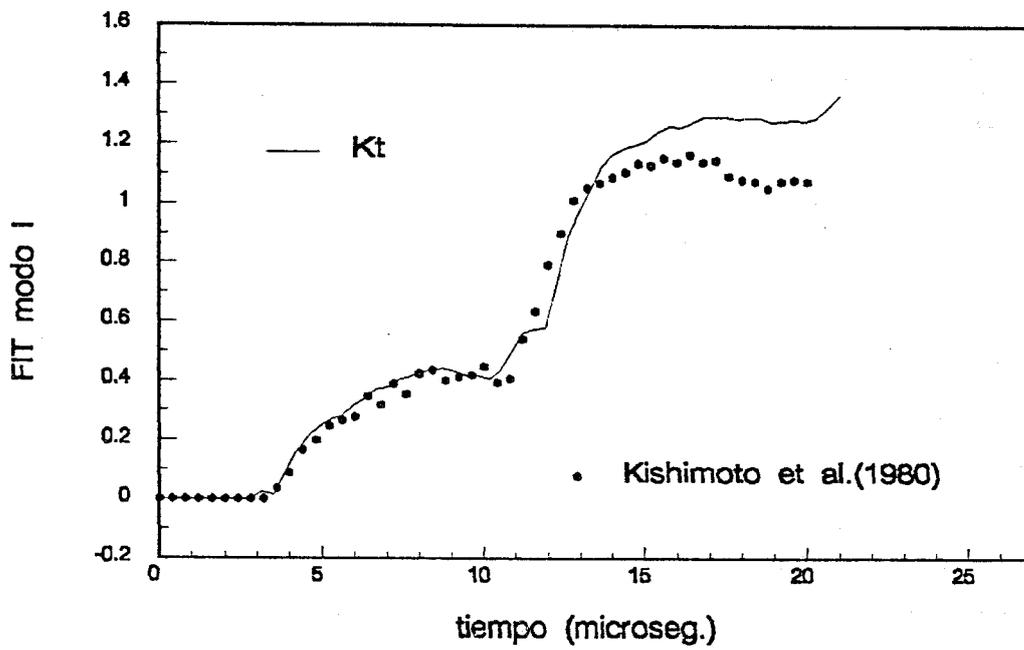


Figura 35

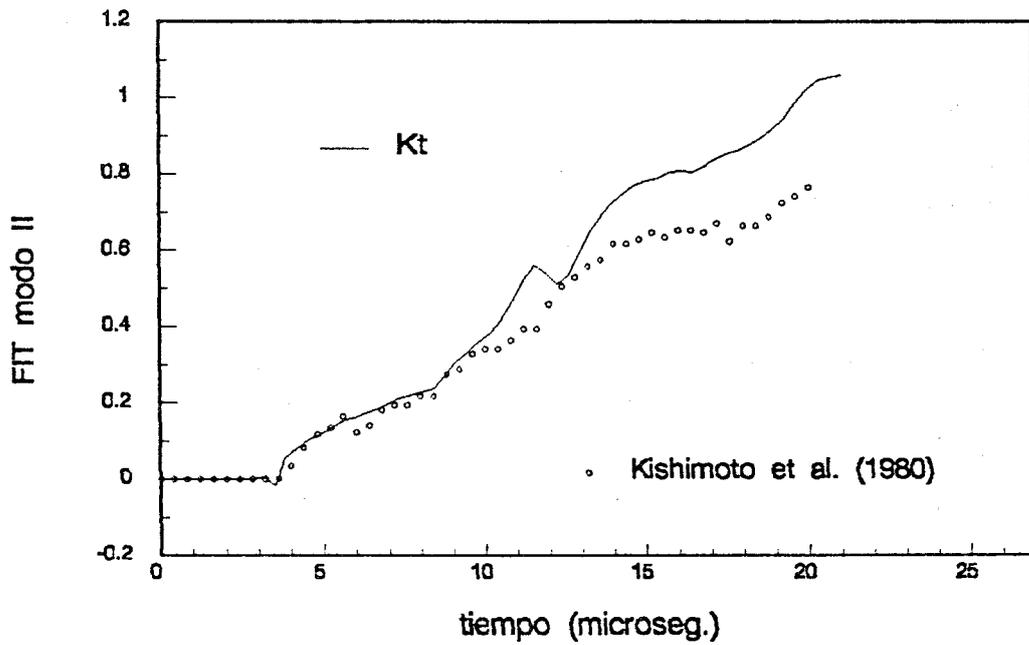


Figura 36

En la figura 35 se representa el factor de intensidad de modo I, adimensionalizado con $\sigma\sqrt{\pi a_0}$, calculado en la referencia citada, junto con el mismo factor obtenido con la 'tensión' nodal obtenida con el M.E.C. (K_{It}). La solución de Kishimoto et al. y el factor K_{It} calculado aquí concuerdan bastante aproximadamente, más en los primeros microsegundos donde la grieta se comporta como si estuviera en un medio infinito, y menos en el último tramo, cuando la grieta interactúa con las ondas reflejadas por las paredes del dominio, en el que la solución de Kishimoto et al. queda algo por debajo de la obtenida con el M.E.C. Igual que ocurría con la solución obtenida por Murti y Valliappan (1986) para el problema de la placa finita con la grieta centrada, del apartado 3.4, el F.I.T. calculado por Kishimoto et al. (1980) contiene, sobretodo en los primeros 10 μs , oscilaciones espúreas debidas a reflexiones y refracciones de las ondas en la malla del dominio.

Algo similar ocurre con el factor de intensidad de tensión de modo II representado en la figura 36 frente al tiempo. Excepto por las oscilaciones de la solución de elementos finitos, ambas curvas concuerdan en el primer tramo, mientras que a partir de $t = 10 \mu s$ aproximadamente, el F.I.T. $K_{II t}$ toma valores mayores. El máximo relativo que alcanza el factor $K_{II t}$ aproximadamente en $t = 11.5 \mu s$ no aparece en la solución de Kishimoto et al. (1980).

Sin embargo, Murti y Valliappan (1986) obtuvieron un máximo similar al resolver este mismo problema utilizando elementos finitos a un cuarto rodeando el vértice de la grieta, y elementos cuadrados de ocho nodos en el resto del dominio. Las figuras 37 están tomadas de la referencia citada; en ellas se representan los factores calculados por los autores con cuadrados negros, y los obtenidos por Aoki, Kishimoto, Izumihara y Sakata (1980) en línea discontinua. La solución de estos últimos es muy similar a la de Kishimoto et al. (1980) pues usa exactamente la misma malla de elementos finitos, exceptuando los elementos alrededor del vértice que están sustituidos por un elemento especial singular. En estas figuras se observa en la solución de Murti y Valliappan (1986) el mismo máximo relativo en $t = 11.5 \mu s$, así como unos valores mayores para los F.I.T. en el último tramo del

periodo de tiempo considerado, que los calculados por Kishimoto et al. (1980) o Aoki et al. (1980), en consonancia con los resultados presentados en esta tesis.

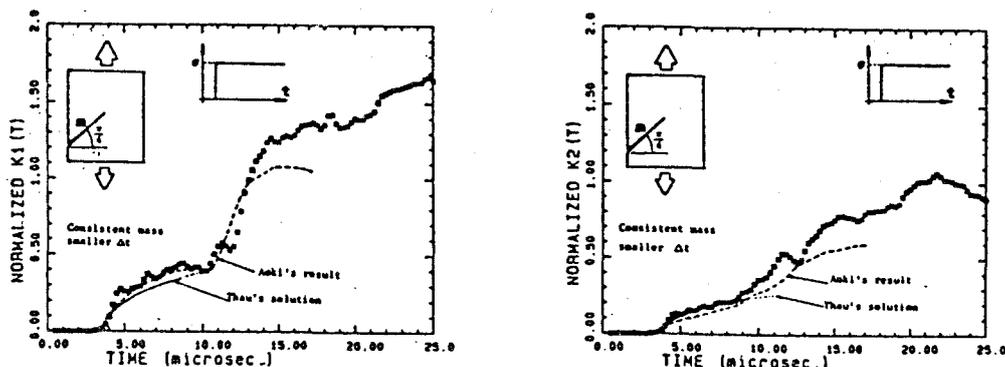


Figura 37

En las dos figuras siguientes (38 y 39) se representan, también para este problema, los F.I.T. calculados con el M.E.C. con los tres procedimientos expuestos en el apartado 3.3, K_{Mu1s} , K_{Mu2s} , K_{Mt} , $M=1$, II. Estos tres F.I.T. difieren aún menos que en problemas anteriores. En este caso, tanto el factor de modo I K_{It} como el K_{Mt} , calculados con las 'tensiones' nodales, tienen en todo el intervalo de tiempo considerado (excepto muy cortos periodos), un valor intermedio a los calculados con uno o dos desplazamientos, K_{Mu1s} y K_{Mu2s} , respectivamente. En estática también el factor K_{Mt} suele dar un valor intermedio entre K_{Mu1s} y K_{Mu2s} (Martínez y Domínguez, 1984); en muchos casos estos dos últimos acotan la solución exacta, por lo que el F.I.T. calculado con la 'tensión' nodal es una aproximación mejor que los calculados con los desplazamientos.

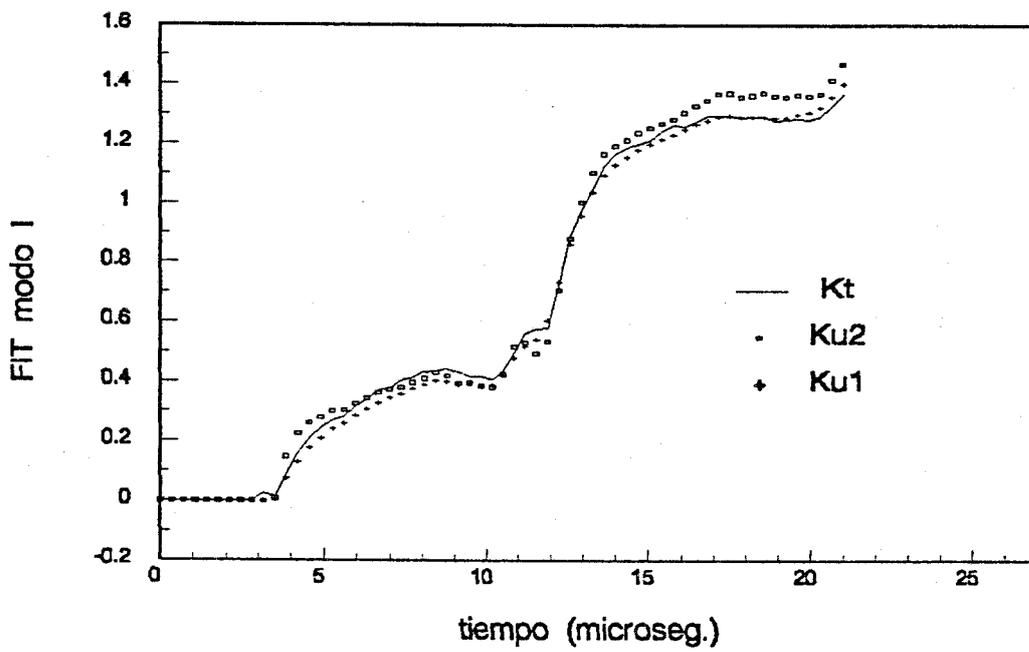


Figura 38

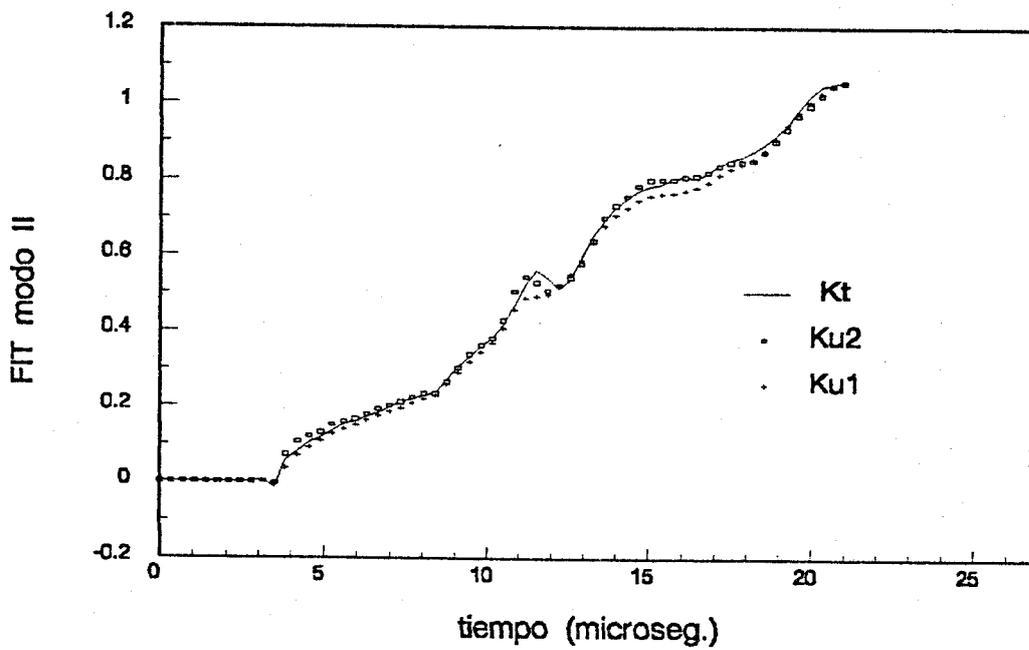


Figura 39

Grieta finita en un medio infinito sometida a una onda dilatacional incidente a 60°.

El problema que trata de resolver a continuación, es el primero descrito en el apartado anterior. Consiste en una grieta de longitud unidad en un medio infinito sobre la que incide una onda dilatacional, cuya dirección de propagación forma 60° con el eje de dicha grieta.

El cálculo de los F.I.T. de este problema se podía hacer resolviendo el llamado problema del campo difractado, como se vio en el apartado anterior. Para este problema las condiciones de contorno serían,

$$\sigma_y^{(s)} = 2.5 H\left(t - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \quad \text{para } y = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$\sigma_{xy}^{(s)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} H\left(t - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \quad \text{para } y = 0, \quad 0 < x < 1$$

(42)

Estas condiciones se obtienen de las ecuaciones (36), donde se han sustituido las tensiones dadas por (35). Se ha considerado $\hat{f}(\tau) = H(\tau)$, así como $\kappa^2 = 3$, igual que en los problemas similares del apartado 3.4. El resto de propiedades físicas del medio se toman también iguales: $\nu = 0.25$, $\mu = 1.0$ Pa, $\rho = 3.0$ kg/m³.

A diferencia de los problemas del apartado anterior, en los que la onda incidía normalmente al eje de la grieta, en este caso el problema no es simétrico ni antisimétrico respecto al eje x . Es necesario estudiar el dominio completo en vez del semiespacio. Esto puede hacerse considerando dos

subregiones, separadas por la grieta y dos subcontornos a ambos lados de ella, (ver figura 40).

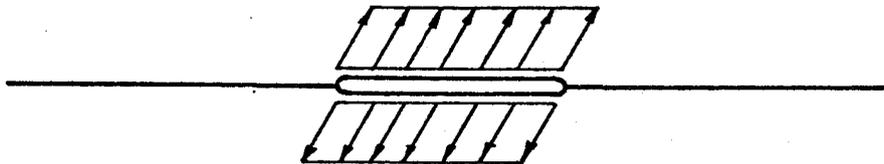


Figura 40

La discretización y paso de tiempo empleado son los mismos de los problemas infinitos anteriores.

En las figuras 41 y 42 se representan los factores de intensidad de tensión de modo I y II, respectivamente, del vértice izquierdo de la grieta, que es el primero en ser alcanzado. La solución obtenida mediante el M.E.C. y la 'tensión' nodal (K_{II} y K_{III}) se compara con la solución analítica de Thau y Lu (1971). En las siguientes figuras, 43 y 44, se representan estos mismos factores obtenidos en el vértice derecho. En todos los casos el acuerdo de las soluciones numéricas con las analíticas es excelente.

En las figuras 45, 46, 47 y 48, se representan los F.I.T. de modo I y II de ambos vértices calculados con el M.E.C. mediante los desplazamientos de las caras de la grieta, junto a la solución analítica de Thau y Lu (1971).

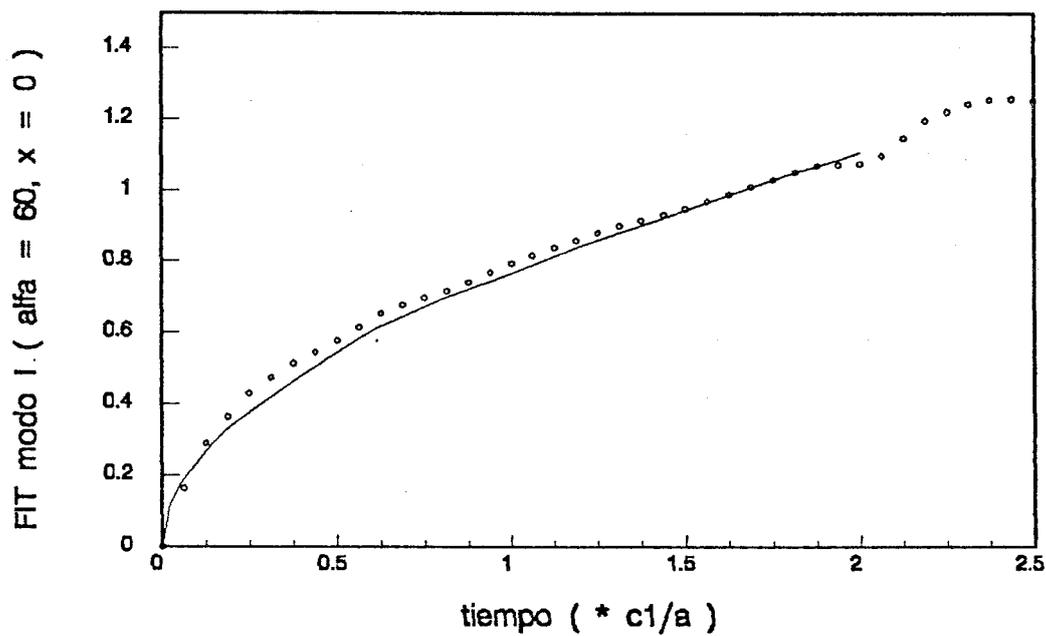


Figura 41. ($\circ\circ\circ K_{I1}(0)$; — Thau y Lu, 1971)

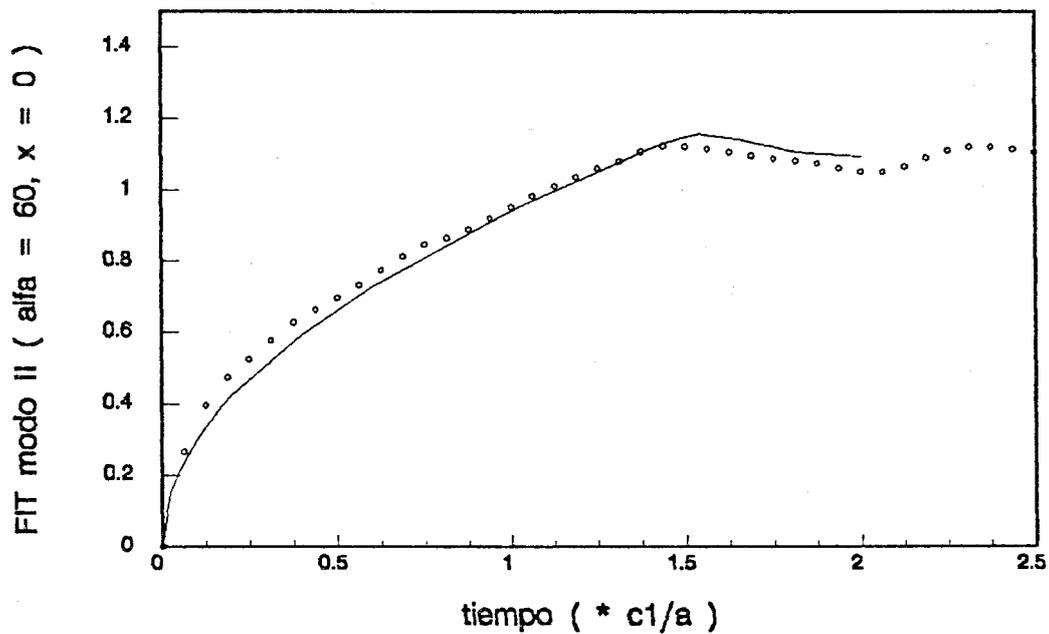


Figura 42. ($\circ\circ\circ K_{II1}(0)$; — Thau y Lu, 1971)

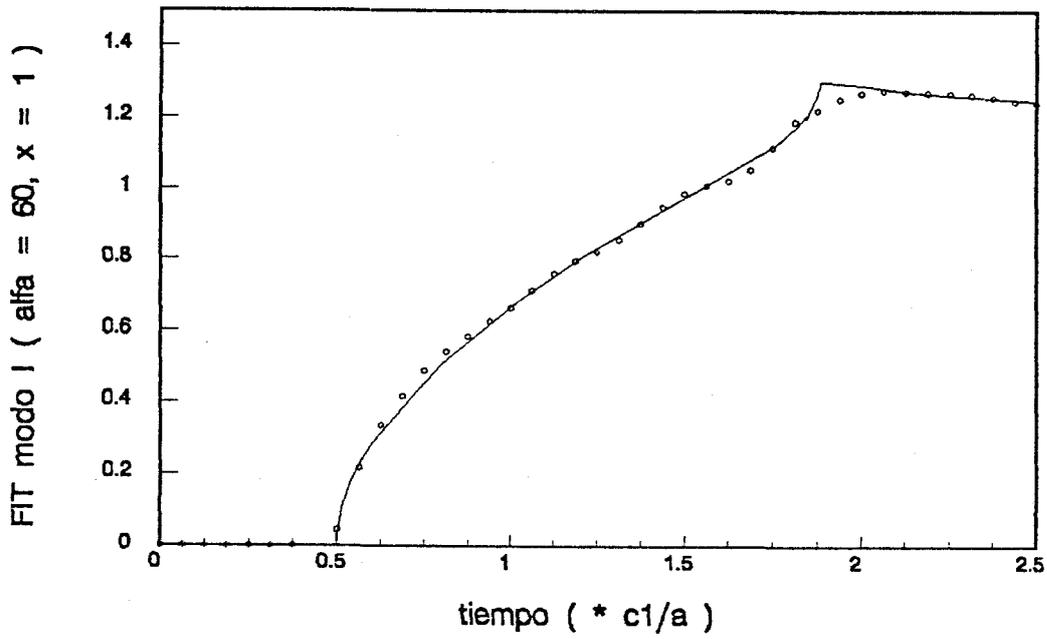


Figura 43. ($\circ\circ\circ K_{II}(1)$; — Thau y Lu, 1971)

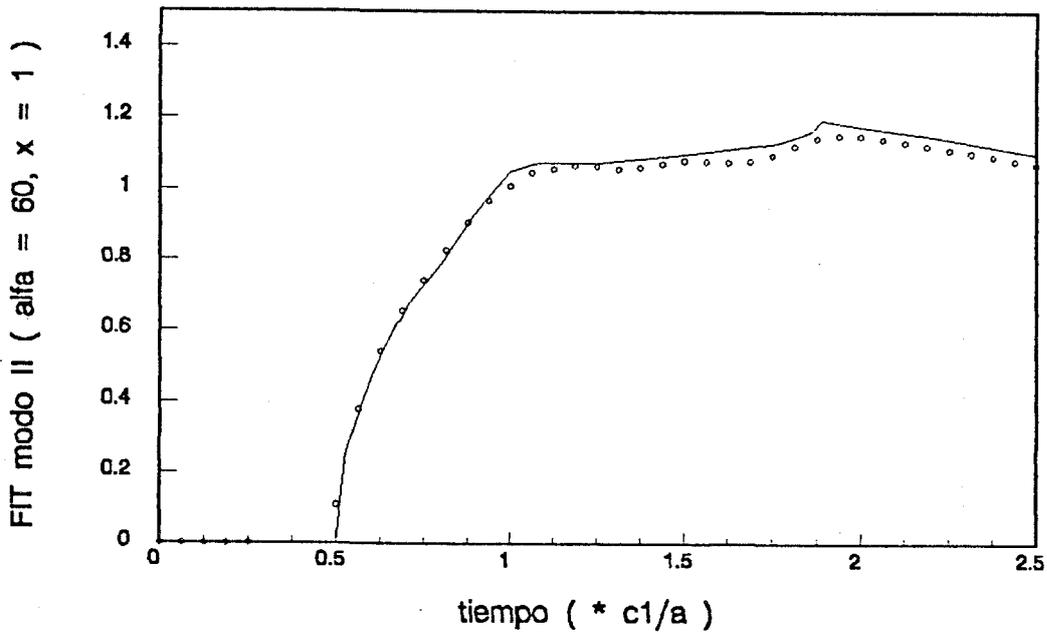


Figura 44. ($\circ\circ\circ K_{III}(1)$; — Thau y Lu, 1971)

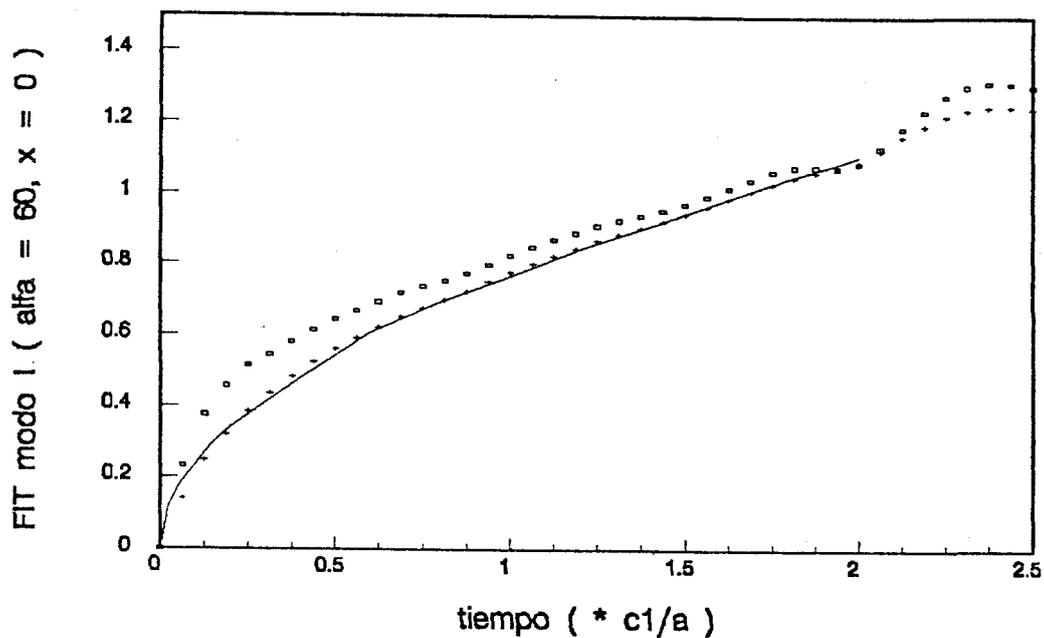


Figura 45. (— Thau y Lu, 1971 ; \square $K_{Iu2s}(0)$; $+$ $K_{Iu1s}(0)$)

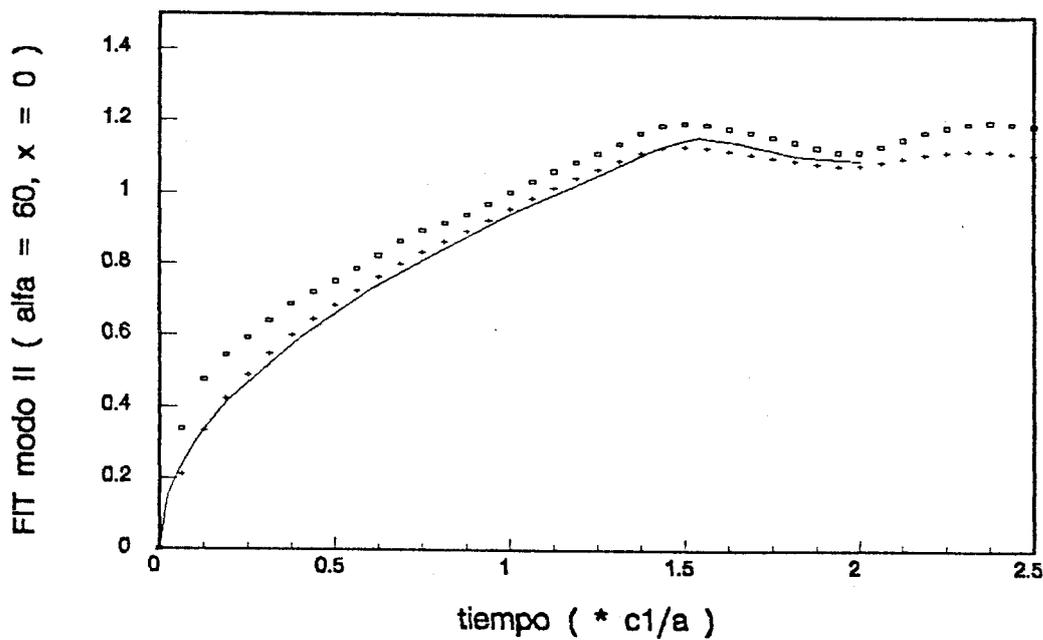


Figura 46. (— Thau y Lu, 1971 ; \square $K_{IIu2s}(0)$; $+$ $K_{IIu1s}(0)$)

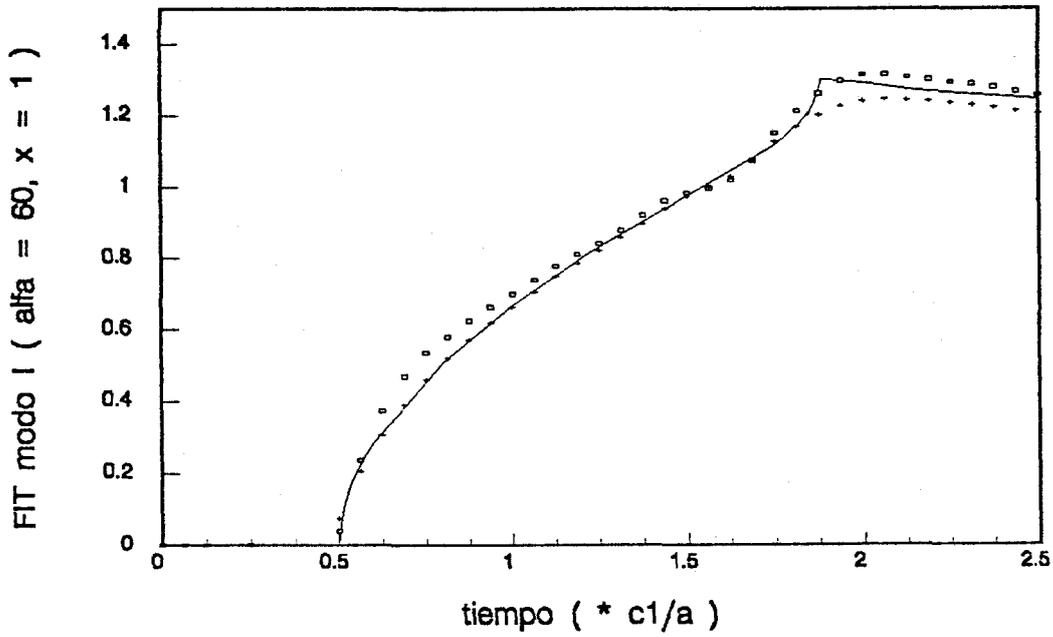


Figura 47. (— Thau y Lu, 1971; \square $K_{Iu2s}(1)$; \circ $K_{Iu1s}(1)$)

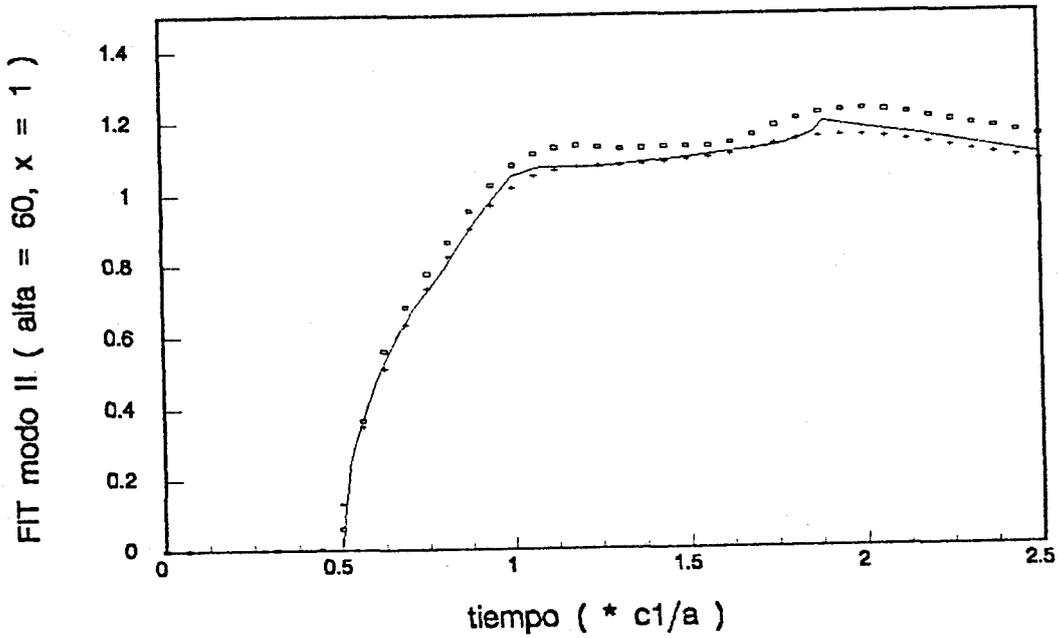


Figura 48. (— Thau y Lu, 1971; \square $K_{IIu2s}(1)$; \circ $K_{IIu1s}(1)$)

CAPITULO IV.-

ANALISIS DE LA PROPAGACION DE GRIETAS EN
MATERIALES FRAGILES SOMETIDOS A SOLICI-
TACIONES DINAMICAS.

4.1.- Introducción

En este capítulo se van a tratar problemas de propagación de grietas por fractura frágil. En estos casos de fractura, la velocidad de propagación del vértice de la grieta es muy rápida, la zona plástica desarrollada alrededor del vértice pequeña y su influencia sobre el comportamiento de la fisura despreciable, por lo cual la solución obtenida con las ecuaciones de la elastodinámica lineal, mediante el M.E.C., es una aproximación suficientemente buena.

Se van a considerar problemas de propagación en modo I, en los que la dirección de propagación es conocida. La solución general de este problema es la desarrollada en el apartado 3.2 del capítulo anterior; los términos generales de su desarrollo en serie vienen dados por las fórmulas (III.16), mientras que los términos singulares de este desarrollo, correspondientes a $n = 1$ se muestran en las ecuaciones (III.17). Considerese la parte singular de la componente 'y' del tensor de tensiones dado por (III.17b); en un punto cercano al vértice en que $y = 0$ y $x > 0$ se tiene, que $r_1 = r_2 = x = r$, y $\theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$, que sustituido en (III.17b) conduce a,

$$\sigma_y = \frac{K_I B_I(C)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{4\beta_1 \beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2}{(1 + \beta_2^2) \sqrt{r}} \right\} \quad (1)$$

donde los parámetros β_j se definieron como, $\beta_j = 1 - (C/c_j)^2$.

Teniendo en cuenta la definición de la constante $B_I(C)$ dada por la primera de las ecuaciones (III.14), la relación anterior se reduce a,

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2)$$

Esta relación se cumple necesariamente por la definición del factor de intensidad de tensión K_I dada en la primera de las ecuaciones (12).

El desplazamiento normal al eje de la grieta de un punto situado en los labios de la misma, se obtiene de la ecuación (III.17h) sustituyendo $r_1 = r_2 = -x = r$, y $\theta_1 = \theta_2 = \pi$; el resultado es,

$$v = \frac{K_I F(C)}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} 2(1 - \nu) \quad (3)$$

siendo,

$$F(C) = \frac{1}{1 - \nu} \frac{\beta_1 (1 - \beta_2^2)}{4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2} \quad (4)$$

El factor de intensidad de tensiones de modo I puede calcularse directamente de la 'tensión' nodal del vértice de un E1/4S con la misma fórmula (III.30) que en los problemas de grietas estacionarias, ya que la relación (2) es independiente de la velocidad. Sin embargo, la relación del F.I.T. con los desplazamientos calculados será diferente, pues la ecuación (3) depende, a través del factor $F(C)$ de la velocidad de propagación de la grieta, y habrá que considerarlo.

A continuación, en el primer apartado de este capítulo se describe el proceso de adecuación de la malla de elementos de contorno a las diferentes posiciones ocupadas por el vértice de la grieta. En el siguiente, se presenta la aproximación adoptada para tener en cuenta que las funciones de forma en el contorno, al moverse los nodos sobre el mismo, dependen no solamente de la variable espacial, sino también del tiempo; la función de forma variable se linealiza en el tiempo. Se obtienen unos núcleos adicionales, provenientes de las integrales de la solución fundamental multiplicada por un factor proveniente de la función de forma linealizada. En el apartado siguiente se muestra el proceso de obtención de estos núcleos y se comprueba que no son singulares, ni en $r \rightarrow 0$ ni en $(c_\alpha t' - r) \rightarrow 0$, ni en ningún otro punto. En el último apartado se resuelven algunos problemas con las técnicas desarrolladas en los apartados precedentes.

4.2 Remallado automático del contorno.

Considerese el problema simétrico de modo I de la figura 1. Para resolver este problema puede simplificarse el dominio en estudio aplicando condiciones de simetría, (ver figura 2). El vértice de la grieta aparece señalado con la letra V en esta figura.

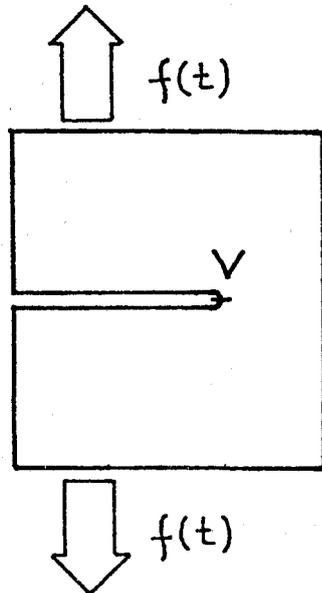


Figura 1

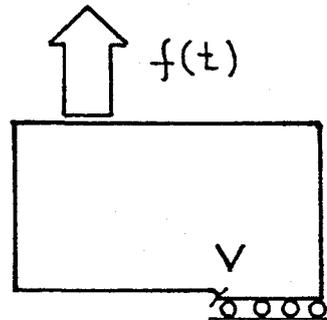


Figura 2

Los dos subcontornos rectos de ambos lados del vértice estarán discretizados cada uno mediante un elemento un cuarto, singular o no, junto al vértice, y una serie de elementos normales a continuación, (figura 3a).

Supongamos que en un instante de tiempo determinado la grieta está creciendo con velocidad instantánea C . Para el siguiente paso de tiempo el vértice ocupará una posición adelantada una cantidad igual a $C\Delta t$, siendo Δt el paso de tiempo escogido, (figura 3b). Al moverse el vértice de la grieta, se desplazan los nodos y elementos de los subcontornos adyacentes a dicho vértice. Esto se hace así por diversas razones: primeramente, para

aprovechar la precisión en el cálculo de los F.I.T. del método desarrollado en el capítulo anterior, los dos elementos a un cuarto colocados a ambos lados del borde de grieta han de seguir en su movimiento al vértice, para que el nodo común a estos elementos esté situado en todo instante de tiempo en el borde de la fisura. Por otra parte, el avance del vértice puede ser una cantidad cualquiera, y no está fijado por la discretización escogida, ni hay que introducir fuerzas de liberación ficticias para simular este avance.

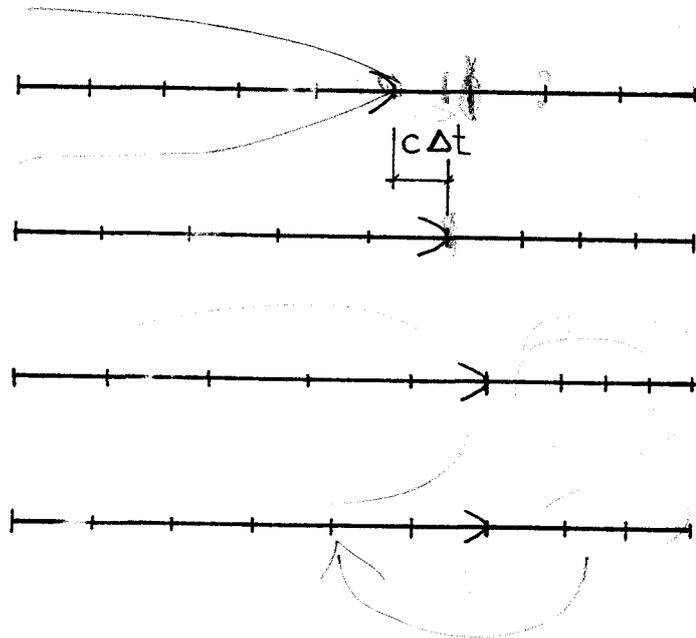


Figura 3

Los elementos a la izquierda del vértice van creciendo de tamaño conforme la grieta avanza, mientras que los de la derecha se van reduciendo. De este proceso se excluyen los dos elementos a un cuarto que contienen al

borde de grieta, pues por precisión y uniformidad a lo largo del tiempo, es conveniente que ambos permanezcan iguales entre si, e invariables en el tiempo. Por tanto estos elementos se mueven rígidamente unidos al vértice de la grieta y su longitudes no cambian durante el cálculo.

Después de un cierto tiempo el vértice puede haberse movido hacia la derecha, dejando los elementos de su izquierda excesivamente grandes y demasiado pequeños los de su derecha, (figura 3c). Para evitar esto, cuando la razón entre la longitud de los elementos de la izquierda y la de los elementos de la derecha supera un cierto valor, (que se ha tomado igual a $5/3$), se redefinen los elementos a un lado y otro del vértice de la grieta, añadiendo un elemento al lado izquierdo y eliminandolo del lado derecho, (figura 3d); esta redefinición tampoco afectará a los elementos a un cuarto. De esta manera se hace avanzar el vértice manteniendo la malla lo más uniforme posible, acomodandola a cada posición del vértice en su avance.

Estudiemos a continuación como afecta este remallado a las matrices del sistema. Para ello agrupemos los nodos del contorno en dos conjuntos, F para los nodos que permanecen fijos y S , para los móviles. Consideremos a continuación la ecuación integral discretizada [ecuación (II.75)], en el paso N , tanto para un nodo móvil 'r', como para uno fijo 'g'.

Para un nodo $r \in S$,

$$\begin{aligned}
 C_{ij} U_j^{Nr} + \sum_{n=1}^N \left[\sum_{f \in F}^{Q_f} H_{ij}^{Nf}(r,n) U_j^{nf} + \sum_{s \in S}^{Q_s} H_{ij}^{Ns}(r,n) U_j^{ns} \right] = \\
 \sum_{n=1}^N \left[\sum_{f \in F}^{Q_f} G_{ij}^{Nf}(r,n) P_j^{nf} + \sum_{s \in S}^{Q_s} G_{ij}^{Ns}(r,n) P_j^{ns} \right]
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Y para un nodo $g \in F$,

$$\begin{aligned}
 C_{ij} U_j^{Ng} + \sum_{n=1}^N \left[\sum_{f \in F}^{Q_f} H_{ij}^{Nf}(g,n) U_j^{nf} + \sum_{s \in S}^{Q_s} H_{ij}^{Ns}(g,n) U_j^{ns} \right] = \\
 \sum_{n=1}^N \left[\sum_{f \in F}^{Q_f} G_{ij}^{Nf}(g,n) P_j^{nf} + \sum_{s \in S}^{Q_s} G_{ij}^{Ns}(g,n) P_j^{ns} \right]
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Los sumatorios extendidos a los nodos del contorno, se han dividido en dos, uno para los nodos móviles y otro para los fijos. Hay que destacar los

cambios de índices de los elementos de las matrices \mathbf{G} y \mathbf{H} , respecto a los utilizados en la ecuación (II.75). En ésta, el superíndice temporal, llamado m , es igual a $N - n + 1$. Esto proviene del hecho de que debido a la propiedad de traslación de estado de Stokes (II.30.3), la solución fundamental calculada en el instante N , debida a una carga en el instante n , es igual a la solución fundamental en el instante $N - n + 1$, cuando la carga se aplica en el primer paso. Esta igualdad se hace extensiva a las integrales en el contorno que es lo que representan los elementos de \mathbf{G} y \mathbf{H} de las ecuaciones anteriores. Es por ello que en la formulación general se prescinde de uno de los índices, pues éstos no son independientes; la carga siempre se supone colocada en el paso inicial y se calcula en el paso $m = N - n + 1$. Sin embargo, en la formulación que se presenta, es necesario reflejar en qué instante se calcula la integral y en cuál se coloca la carga. El superíndice N de los elementos de las matrices \mathbf{G} y \mathbf{H} indica el instante en que se calcula la solución, mientras que el segundo de los subíndices entre paréntesis, sirve para indicar cual es el paso de tiempo sobre el que se integra la solución fundamental [ver ecuaciones (II.71.1), (II.71.2) y (II.74)]. Por otra parte, el primero de los subíndices entre paréntesis señala cual es el nodo de colocación de la ecuación, que como se verá a continuación, también es importante destacarlo. Estos subíndices se omitieron en la formulación general pues no eran muy necesarios para comprender el significado de estas variables, sin embargo son necesarios para explicar la formulación que sigue a continuación.

Consideremos cada uno de los términos de las matrices $\mathbf{G}_{(n)}^N$ y $\mathbf{H}_{(n)}^N$ que aparecen en estas ecuaciones.

- $G_{ij}^{Ni}(x,n)$ y $H_{ij}^{Ni}(x,n)$ son las integrales siguientes,

$$H_{ij}^{Ni}(x,n) = \int_{\Gamma_f'} \psi^f T_{ij}^n(\mathbf{x}, N\Delta t; \mathbf{x}^{(r,N)}) d\Gamma_f \quad (7)$$

$$G_{ij}^{Ni}(x,n) = \int_{\Gamma_f'} \phi^f U_{ij}^n(\mathbf{x}, N\Delta t; \mathbf{x}^{(r,N)}) d\Gamma_f \quad (8)$$

Los superíndices (r,N) de \mathbf{x} , remarcan cuál es el nodo y cuál el instante en que se consideran las coordenadas del mismo, pues estas varían con el tiempo.

El punto de colocación 'r', pertenece al conjunto de nodos móviles, mientras que la integración se realiza sobre un elemento fijo al que pertenece el nodo 'r'. Como las coordenadas del nodo 'r' varían con el tiempo, las integrales realizadas desde este nodo en pasos de tiempo anteriores, sobre el mismo elemento Γ_f' , aunque esté fijo, no serán iguales. A diferencia del método general descrito en el apartado segundo del capítulo II, cuando se integra con el punto de colocación en un nodo móvil en el instante N, sobre uno fijo en el n, el valor de la integral no sólo depende de la diferencia $N - n + 1$, a causa de la propiedad de traslación en el tiempo del estado de Stokes,

[ecuación II.30.3)], sino del valor concreto de N, pues en cada instante $\mathbf{x}^{(r,N)}$ será diferente.

- $G_{ij}^{Ns}(x,n)$ y $H_{ij}^{Ns}(x,n)$ son las integrales,

$$H_{ij}^{Ns}(x,n) = \int_{\Gamma_s} \psi^s T_{ij}^n(\mathbf{x}, N \Delta t; \mathbf{x}^{(r,N)}) d\Gamma_s \quad (9)$$

$$G_{ij}^{Ns}(x,n) = \int_{\Gamma_s} \phi^s U_{ij}^n(\mathbf{x}, N \Delta t; \mathbf{x}^{(r,N)}) d\Gamma_s \quad (10)$$

Todo lo dicho para las anteriores integrales es cierto para estas, aún con más razón, pues no sólo cambia el punto de colocación 'r' para cada instante N, sino que el elemento de integración 's', también es móvil.

- Algo similar ocurre con $G_{ij}^{Ns}(g,n)$ y $H_{ij}^{Ns}(g,n)$ en las que el punto de colocación es fijo, mientras que el elemento de integración es diferente según sea el instante n.

- $G_{ij}^{Nf}(g,n)$ y $H_{ij}^{Nf}(g,n)$ son como las del caso general descrito en el capítulo II pues tanto el nodo 'g' como el intervalo Γ_f permanecen fijos en el tiempo.

Si escribimos el sistema matricial completo del problema dado por la ecuación (II.77), diferenciando los grados de libertad fijos y móviles, tenemos,

$$\sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} H_{ff}^N & H_{fs}^N \\ H_{sf}^N & H_{ss}^N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_f^n \\ u_f^n \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^N \begin{bmatrix} G_{ff}^N & G_{fs}^N \\ G_{sf}^N & G_{ss}^N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_f^n \\ p_f^n \end{pmatrix} \quad (11)$$

En el instante de tiempo N , hay que calcular las matrices $G_{(n)}^N$ y $H_{(n)}^N$ de ese paso, como se hace en el algoritmo paso a paso general y además los elementos de las matrices de pasos anteriores correspondientes a integrales de la solución fundamental cuando el punto de colocación esté en un nodo móvil o/y extendidas sobre un elemento móvil, es decir cualquiera de las submatrices con algún subíndice igual a 's' en la ecuación (11).

Las matrices que antes se llamaban G^1 y H^1 , y son ahora $G_{(N)}^N$ y $H_{(N)}^N$ cambiarán en parte de un instante N a otro, y por tanto, aunque no cambien las condiciones de contorno, variará también la matriz A del sistema. En consecuencia, cada vez que cambien de posición los nodos móviles, será necesario recalcular la matriz A^{-1} teniendo en cuenta las porciones de la matriz A que han sido actualizadas.

4.3.- Formulación del M.E.C. para Elementos de Contorno Móviles.

Si se implementa el algoritmo presentado en el apartado anterior en un programa de ordenador, los resultados obtenidos no son buenos. Sólo usando pasos de tiempo muy pequeños se obtienen soluciones numéricas algo aceptables, pero que se deterioran rápidamente por el efecto del parámetro β que se estudió en el capítulo II. La razón de esto es que en el planteamiento general del método, existe un aspecto contradictorio con el procedimiento de remallado desarrollado en el apartado anterior. Efectivamente, las variables del problema $u_j(\mathbf{x}, t)$, $\dot{u}_j(\mathbf{x}, t)$ y $p_j(\mathbf{x}, t)$, se aproximan a partir de los valores de las mismas en un conjunto discreto de puntos, mediante unas funciones de interpolación adecuadas. La primera de estas ecuaciones (II.68), es,

$$u_j(\mathbf{x}, t) = \sum_q \sum_n \psi^q(\mathbf{x}) \eta_n(\tau) u_j^{nq}$$

Esta ecuación implica, que a lo largo de cada paso de tiempo la variación de u_j puede descomponerse en dos funciones de variables separadas, es decir, una que depende de \mathbf{x} exclusivamente, y otra que sólo depende de τ . En la figura 4 se representa una variación de este tipo.

Sin embargo, la aproximación antes descrita no puede representar correctamente la variación de las magnitudes asociadas a un grado de libertad $q = V$ colocado en el vértice de la fisura, y que se mueve con éste. Para un nodo como éste, la aproximación debería tener la forma que se muestra en la figura 5.

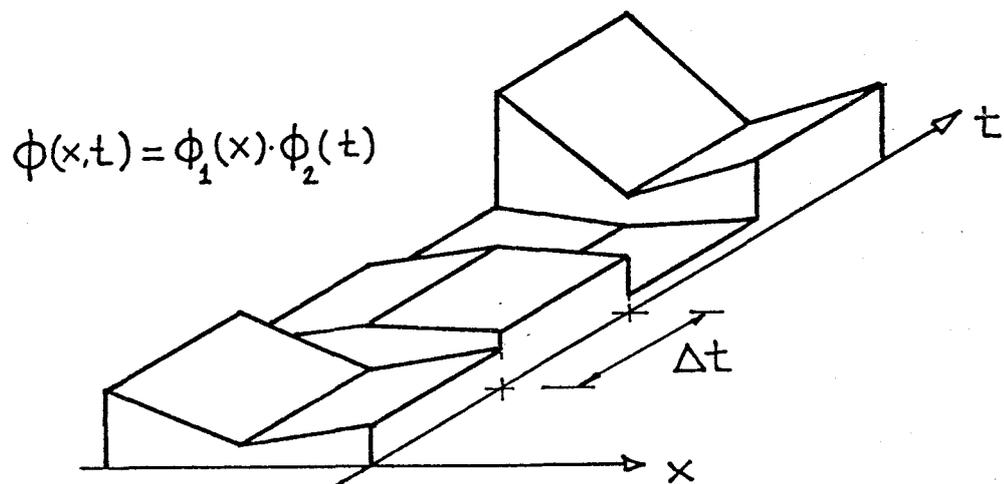


Figura 4

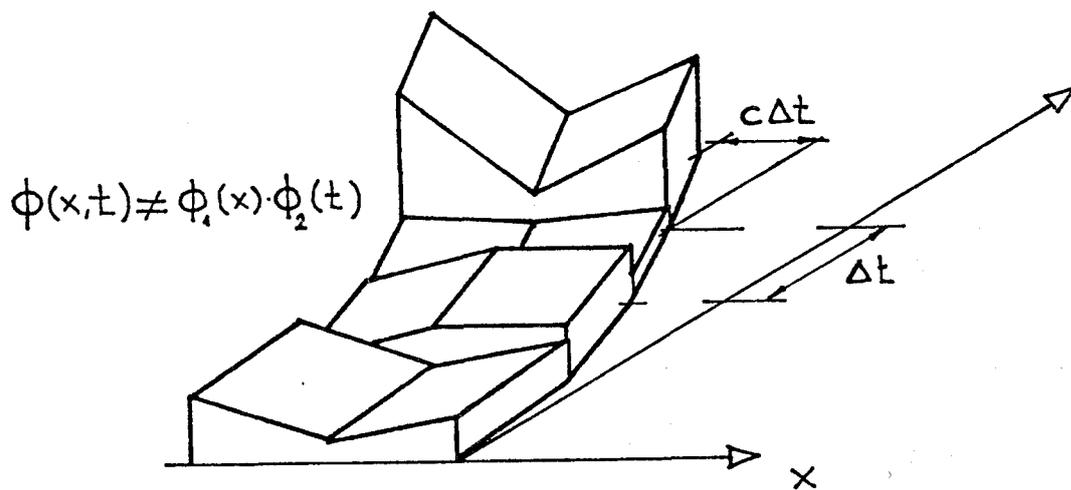


Figura 5

La función de forma ϕ^q que pondera en las ecuaciones (II.68), el valor de una magnitud en el contorno, deberá moverse con el movimiento del nodo al que está asociada. Por tanto la aproximación de las variables a de escogerse de forma más general que la dada por las fórmulas (II.68). Se adoptará una interpolación de la forma siguiente,

$$u_j(\mathbf{x}, t) = \sum_q \sum_n \psi^q(\mathbf{x}, \tau) \eta_n(\tau) u_j^{nq}$$

$$p_j(\mathbf{x}, t) = \sum_q \sum_n \phi^q(\mathbf{x}, \tau) \eta_n(\tau) p_j^{nq}$$

(12.1)

Para obtener la aproximación de las velocidades $v_j(\mathbf{x}, t)$ hay que tener en cuenta que hay que derivar no sólo la función $\eta_n(\tau)$ sino también $\psi^q(\mathbf{x}, \tau)$. Así, para $v_j(\mathbf{x}, t)$ se toma,

$$v_j(\mathbf{x}, t) = \sum_q \sum_n \left[\psi^q(\mathbf{x}, \tau) \dot{\eta}_n(\tau) + \frac{\partial \psi^q(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \eta_n(\tau) \right] u_j^{nq}$$

(12.2)

Sustituyendo estas aproximaciones en la ecuación integral (II.67), se

llega a,

$$c_{ij} u_j^{Np} +$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q u_j^{nq} \int_{\Gamma_q} \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} \{ [Z_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \eta_n(\tau) - J_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \dot{\eta}_n(\tau)] \psi^q(\mathbf{x}, \tau) -$$

$$J_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \dot{\eta}_n(\tau) \frac{\partial \psi^q(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \} dt d\Gamma =$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q p_j^{nq} \int_{\Gamma_q} \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} U_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \mu_n(\tau) \phi^q(\mathbf{x}, \tau) dt d\Gamma$$

(13)

Las funciones de forma $\phi^q(\mathbf{x}, \tau)$ y $\psi^q(\mathbf{x}, \tau)$ al depender del tiempo, no pueden sacarse de las integrales sobre esta variable, extendidas entre τ_n^- y τ_n^+ . La posibilidad de eliminar las funciones de aproximación en el espacio de las integrales en el tiempo era una característica muy importante de la formulación desarrollada en el capítulo II, pues ello permitía realizar la integración temporal analíticamente [integrales (II.71.1) y (II.71.2)], mientras que la integral restante, extendida al contorno, se realizaba con las técnicas habituales en otras formulaciones del método de los elementos de

contorno.

Para obtener una formulación de características similares, teniendo en cuenta que el intervalo de integración $[\tau_n^-, \tau_n^+]$ es pequeño, pues las funciones de interpolación consideradas son de pequeño soporte, se van a aproximar linealmente en el tiempo las funciones de forma $\phi^q(\mathbf{x}, \tau)$ y $\psi^q(\mathbf{x}, \tau)$. Así, en cada intervalo se sustituyen $\phi^q(\mathbf{x}, \tau)$ y $\psi^q(\mathbf{x}, \tau)$ por,

$$\phi^q(\mathbf{x}, \tau) = \phi^q(\mathbf{x}, \tau_n) + \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} \Lambda^q(\mathbf{x}, \tau_n)$$

$$\psi^q(\mathbf{x}, \tau) = \psi^q(\mathbf{x}, \tau_n) + \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} \Omega^q(\mathbf{x}, \tau_n)$$

(14)

$\phi^q(\mathbf{x}, \tau_n)$ y $\psi^q(\mathbf{x}, \tau_n)$ representan el valor de estas funciones de forma en la posición que ocupan en el instante n -ésimo. Las funciones $\Lambda^q(\mathbf{x}, \tau_n)$ y $\Omega^q(\mathbf{x}, \tau_n)$ están relacionadas con las pendientes en dirección de la variable τ de $\phi^q(\mathbf{x}, \tau)$ y $\psi^q(\mathbf{x}, \tau)$, respectivamente.

Consideremos en primer lugar la integral en el tiempo que multiplica al valor p_j^{nq} del sumatorio del lado derecho de la ecuación (13), y sustituyamos en ella la aproximación lineal de $\phi^q(\mathbf{x}, \tau)$ dada en (14). Se obtiene,

$$\int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} U_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \mu_n(\tau) \phi^q(\mathbf{x}, \tau) d\tau =$$

$$\int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} \left[U_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \mu_n(\tau) \phi^q(\mathbf{x}, \tau_n) + U_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \mu_n(\tau) \frac{\tau - \tau_n}{\tau} \Lambda^q(\mathbf{x}, \tau) \right] d\tau$$

Las funciones $\phi^q(\mathbf{x}, \tau_n)$ y $\Lambda^q(\mathbf{x}, \tau_n)$ no dependen de la variable τ y pueden ser sacadas de la integral,

$$\phi^q(\mathbf{x}, \tau_n) \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} U_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \mu_n(\tau) d\tau +$$

$$\Lambda^q(\mathbf{x}, \tau) \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} U_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \mu_n(\tau) \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} d\tau =$$

$$\phi^q(\mathbf{x}, \tau_n) U_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) + \Lambda^q(\mathbf{x}, \tau_n) V_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) \quad (15)$$

siendo,

$$U_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} U_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \mu_n(\tau) d\tau$$

$$V_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} U_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \mu_n(\tau) \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} d\tau$$

(16)

La integral U_{ij}^n es la misma que aparecía en la formulación general, y venía dada por las ecuaciones (II.71.1). La integral V_{ij}^n aparece en esta formulación a consecuencia de la linealización de la función de forma.

Algo similar hay que hacer con las integrales en el tiempo que multiplican a los desplazamientos u_j^{nq} en la fórmula (13), aunque al aparecer las derivadas de la función de forma $\psi^q(\mathbf{x}, \tau)$ las expresiones son más

complejas.

Si suponemos $\psi^q(\mathbf{x}, \tau)$ aproximada con la fórmula lineal (14) su derivada temporal en el intervalo considerado, viene dada por,

$$\frac{\partial \psi^q(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \Omega^q(\mathbf{x}, \tau_n) \frac{1}{\Delta t} \tag{17}$$

Así,

$$\int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} \left\{ [Z_{ij} \eta_n - J_{ij} \dot{\eta}_n] \psi^q - J_{ij} \eta_n \frac{\partial \psi^q}{\partial \tau} \right\} d\tau =$$

$$\int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} \left\{ [Z_{ij} \eta_n - J_{ij} \dot{\eta}_n] \left(\psi^q + \Omega^q \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} \right) - J_{ij} \eta_n \frac{1}{\Delta t} \Omega^q \right\} d\tau =$$

$$\int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} \left\{ \left[Z_{ij} \eta_n - J_{ij} \dot{\eta}_n \right] \psi^q + \left[\left(Z_{ij} \eta_n - J_{ij} \dot{\eta}_n \right) \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} - J_{ij} \eta_n \frac{1}{\Delta t} \right] \Omega^q \right\} d\tau \quad (18)$$

(por simplificar la notación, se han eliminado las variables de que dependen cada una de las funciones de las ecuaciones anteriores).

Como en el caso anterior, las funciones $\psi^q(\mathbf{x}, \tau_n)$ y $\Omega^q(\mathbf{x}, \tau_n)$ no dependen de la variable τ y pueden ser sacadas de la integral, quedando,

$$\psi^q(\mathbf{x}, \tau_n) T_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) + \Omega^q(\mathbf{x}, \tau_n) S_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) \quad (19)$$

siendo,

$$T_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} (Z_{ij} \eta_n - J_{ij} \dot{\eta}_n) dt$$

$$S_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} \left[(Z_{ij} \eta_n - J_{ij} \dot{\eta}_n) \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} - J_{ij} \eta_n \frac{1}{\Delta t} \right] dt$$

(20)

De nuevo aparece una integral T_{ij}^n , igual que la de la formulación general [ecuación (II.71.2)] más una nueva componente proveniente de la linealización de la función de forma, que se ha denominado S_{ij}^n .

Si sustituimos las expresiones obtenidas para las integrales en el tiempo, dadas por las expresiones (15) y (19), en la ecuación integral discreta (13), se obtiene,

$$\begin{aligned}
c_{ij} u_j^{Np} + \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q u_j^{nq} \int_{\Gamma'_q} \left[\psi^q T_{ij}^n + \Omega^q S_{ij}^n \right] d\Gamma = \\
\sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q p_j^{nq} \int_{\Gamma'_q} \left[\phi^q U_{ij}^n + \Lambda^q V_{ij}^n \right] d\Gamma
\end{aligned}
\tag{21}$$

Podemos identificar las integrales extendidas sobre los elementos del contorno como los elementos de las matrices \mathbf{G}^m y \mathbf{H}^m ,

$$\begin{aligned}
H_{ij}^{mq} &= \int_{\Gamma'_q} \left[\psi^q T_{ij}^n + \Omega^q S_{ij}^n \right] d\Gamma \\
G_{ij}^{mq} &= \int_{\Gamma'_q} \left[\phi^q U_{ij}^n + \Lambda^q V_{ij}^n \right] d\Gamma
\end{aligned}
\tag{22}$$

Observese que se ha vuelto a prescindir de los índices adicionales que se introdujeron en el apartado anterior. Esto es posible, pues el principio de traslación del estado Stokes permite referir cualquier paso de tiempo al primero. Lo que ocurrirá es que si los nodos y elementos se han movido, el cálculo habrá que hacerlo independientemente para cada paso de tiempo, y

no se podrán aprovechar las matrices de pasos anteriores, como ocurría en la formulación sin remallado.

Si se sustituyen las anteriores definiciones (22) en la ecuación (21), se llega a,

$$C_{ij} u_j^{Np} + \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q H_{ij}^{mq} u_j^{nq} = \sum_{n=1}^N \sum_{q=1}^Q G_{ij}^{mq} p_j \quad (23)$$

con $m = N - n + 1$.

De nuevo, la ecuación obtenida es formalmente igual a la ecuación (11.75) [igual, a su vez, a la ecuación (11.53)]. La diferencia reside en la definición de los elementos de las matrices \mathbf{G}^m y \mathbf{H}^m , que en el caso presente contienen un término añadido al de la formulación con nodos no-móviles.

Los tensores V_{ij}^n y S_{ij}^n están definidos mediante la segunda integral de las ecuaciones (16) y (20), respectivamente. Estas integrales pueden hacerse analíticamente igual que ocurre con las integrales correspondientes a U_{ij}^n y T_{ij}^n , aunque las primeras son algo más complejas. El desarrollo de las expresiones que definen V_{ij}^n y S_{ij}^n se detalla en el apartado siguiente.

En las definiciones de los elementos \mathbf{G}^m y \mathbf{H}^m aparecen bajo el signo integral, unas funciones de la posición, que se han denominado $\Lambda^q(\mathbf{x}, \tau_n)$ y $\Omega^q(\mathbf{x}, \tau_n)$ y que tenían relación con la derivada parcial respecto al tiempo, de las funciones de forma $\phi^q(\mathbf{x}, \tau)$ y $\psi^q(\mathbf{x}, \tau)$ respectivamente. En la figura 6 se

representan dos posiciones consecutivas ocupadas por un elemento parabólico junto con la función de forma $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ correspondiente a un nodo extremo. Se representa en primer plano la posición ocupada por el elemento en el instante de tiempo $\tau_n - \Delta t$. Durante el intervalo Δt los nodos se adelantan en la dirección del movimiento una distancia igual a $C\Delta t$, siendo C la velocidad media a lo largo del lapso considerado. La posición ocupada por el elemento y la función asociada al mismo se representan en el instante $\tau = \tau_n$. Para un punto de coordenada x_1 en el instante τ_n aparece representada la línea tangente a la superficie $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ cuya pendiente es la derivada parcial de $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ respecto a la variable τ .

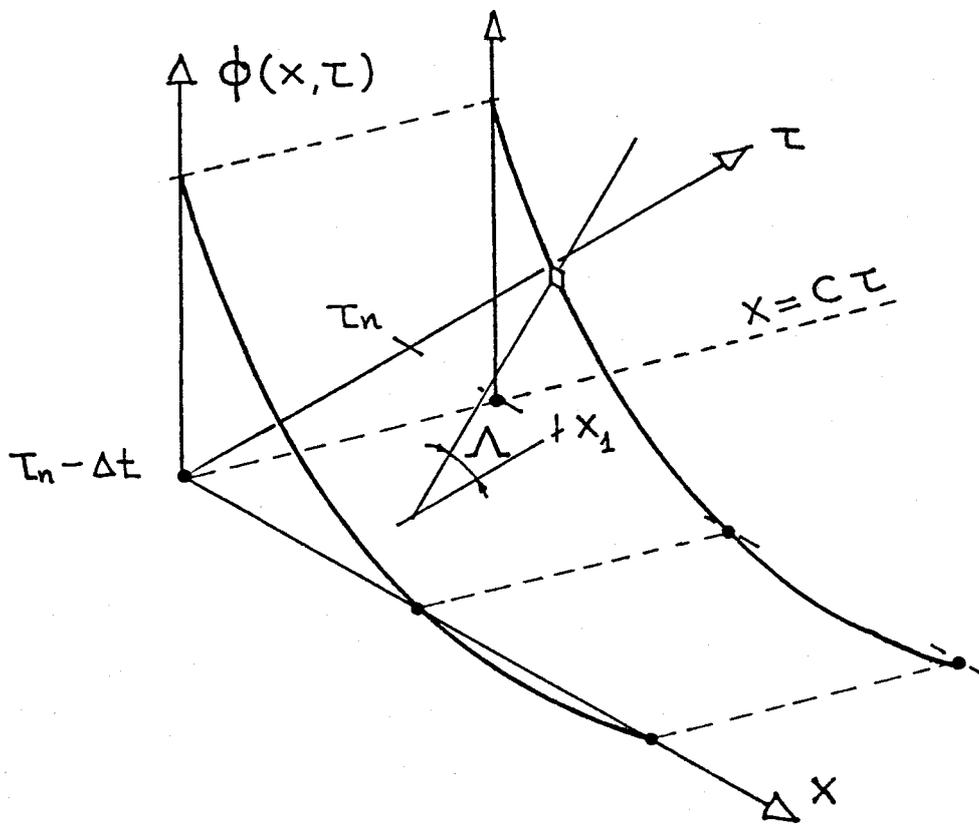


Figura 6

Por una parte se ha definido, [ecc. (14)],

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \phi(\mathbf{x}, \tau_n) + \Lambda(\mathbf{x}, \tau_n) \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t}$$

mientras que, si se escribe el desarrollo de Taylor alrededor del instante τ_n de la función $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ truncado a partir del segundo término, se tiene,

$$\phi(\mathbf{x}, \tau) = \phi(\mathbf{x}, \tau_n) + \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau = \tau_n} (\tau - \tau_n)$$

Identificando términos de ambas igualdades se llega a,

$$\Lambda(\mathbf{x}, \tau_n) = \Delta t \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau = \tau_n} \quad (24)$$

Por otra parte, durante el intervalo considerado, se supone una velocidad constante C . Así, la función $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ es equivalente a una función de una variable $\phi(y)$ cuyo argumento sea $y = \mathbf{x} - C(\tau - \tau_n)$. La derivada parcial respecto al tiempo de $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ puede relacionarse fácilmente con la derivada de la función $\phi(y)$. Partiendo de la definición de la derivada parcial,

$$\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\substack{\tau = \tau_n \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_1}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{x}_1, \tau_n) - \phi(\mathbf{x}_1, \tau_n - \Delta t)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{x}_1 - C\Delta t) - \varphi(\mathbf{x}_1)}{\Delta t} = -C \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{x}_1 - C\Delta t) - \varphi(\mathbf{x}_1)}{-C\Delta t} =$$

$$-C \left. \frac{d\varphi(y)}{dy} \right|_{y = y_1}$$

Con esta última igualdad y la ecuación (24), obtenemos,

$$\Lambda(\mathbf{x}, \tau_n) = -C\Delta t \left. \frac{d\varphi(y)}{dy} \right|_{y = y_1} \quad (25)$$

La función $\varphi(y)$ es cualquiera de las funciones de forma habituales. Para el caso de elementos parabólicos, que son los que se van a emplear en estos problemas, estas funciones de forma venían dadas por las ecuaciones (II.51), en el caso general. Al menos uno de los elementos móviles a un cuarto colocados en el vértice de la grieta es un elemento singular E1/4S. Las funciones de forma singulares para estos elementos se obtienen de las funciones normales multiplicándolas por el factor $\sqrt{(L/\bar{r})}$ [eccs. (III.20) y (III.22)]. Puestas en función de la coordenada natural del elemento ξ sus

expresiones son,

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\xi(\xi - 1)}{\xi + 1}$$

$$\hat{\phi}_2 = 2(1 - \xi)$$

$$\hat{\phi}_3 = \xi$$

(26)

Para calcular la derivada de una función φ respecto a la variable espacial 'y', se puede aplicar la regla de la cadena de la siguiente forma,

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\xi} \Big/ \frac{dx}{d\xi}$$

(27)

Teniendo en cuenta la expresión de x en función de ξ [ecuación (19)], la derivada es,

$$\frac{dx}{d\xi} = (x_1 - 2x_2 + x_3)\xi + \frac{x_3 - x_1}{2}$$

(28)

Para un elemento cuyo nodo central esté colocado en el medio, está derivada es constante y de valor $(x_3 - x_1)/2$, mientras que para un elemento con el nodo a un cuarto la derivada vale $(\xi + 1)(x_3 - x_1) / 2$; si el nodo central está colocado a un cuarto de longitud de distancia del nodo 3, en vez del 1, la derivada es $(1 - \xi)(x_3 - x_1) / 2$.

La función de forma singular correspondiente al vértice de la grieta (nodo 1), tiene una evolución del tipo $y^{-1/2}$ para puntos cercanos a $y=0$, (' y ' es la distancia al vértice a lo largo del elemento; es la variable que en el capítulo 3 se llamo \bar{r}). Esta singularidad es integrable en el sentido de integral impropia. La derivada respecto a ' y ' de esta función es de orden $y^{-3/2}$ en $y \rightarrow 0$, singularidad demasiado fuerte para una integral monodimensional ($3/2 > 1$, que es el exponente máximo que puede tener la variable ' y ' en el denominador para que exista la integral impropia). Sin embargo si analizamos más detenidamente el problema podemos observar que la función de forma es en realidad del tipo $H(y) y^{-1/2}$, donde $H(y)$ es la función escalón de Heavyside. Teniendo en cuenta esto puede justificarse informalmente que la integral sí existirá en este caso, (para una demostración y definición rigurosa a partir de la definición de las llamadas funciones generalizadas vease Jones, 1966). En efecto,

$$\int_0^a \frac{d}{dy} \frac{H(y)}{\sqrt{y}} dy = \int_0^a \left[\frac{\delta(y)}{\sqrt{y}} - \frac{1/2}{\sqrt{y^3}} \right] dy -$$

$$\frac{\delta(y)}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \Bigg|_0^a - \frac{1}{\sqrt{a}} + \left[\frac{1}{\sqrt{0}} - \frac{1}{\sqrt{0}} \right] - \frac{1}{\sqrt{a}}$$

(29)

También puede justificarse intuitivamente, que desaparezca el infinito de la integral de la derivada de la función de forma singular, pues, si bien en el entorno de 0^+ (puntos cercanos a 0 por la derecha), la pendiente es infinita (y negativa), en el entorno de 0^- la función da un salto, pasando de 0 a infinito, lo que equivale a un salto también infinito de la derivada.

El efecto de considerar el factor $H(y)$ en la función de forma singular, es que al hacer la integral definida de la derivada singular sólo se sustituye el límite superior. Esto es lo que se conoce con el nombre de parte finita de una integral singular.

La parte finita de una integral puede definirse de manera simple, a partir de las siguientes reglas (Kutt, 1975):

R1.- La parte finita de una integral (PFI) es una extensión congruente del concepto de integral definida regular, (es decir la PFI es igual a su valor habitual si este existe).

R2.- La PFI es aditiva respecto a la unión de intervalos de integración, e

invariante con respecto a la traslación:

$$\text{p.f.} \int_s^x F(x) dx = \text{p.f.} \int_{s+\varepsilon}^{x+\varepsilon} F(x-\varepsilon) dx$$

El prefijo p.f. delante del signo integral indica su parte finita.

R3.- La PFI es un operador lineal y continuo en la función integrando, (se preservan así la linealidad de la integral regular además de la convergencia de la parte finita de funciones integrables).

$$\text{R4.- p.f.} \int_0^\infty x^{-\lambda} dx = 0 \text{ para } \lambda > 1 \text{ y } \text{p.f.} \int_0^1 x^{-1} dx = 0$$

A partir de estas reglas puede desarrollarse una expresión general de la parte finita de una integral. Si llamamos,

$$I_\lambda = \text{p.f.} \int_s^x \frac{f(x)}{(x-s)^\lambda} dx, \quad \lambda \text{ real y } \lambda \geq 1$$

(30)

donde $f(x)$ es una función real de variable real continua en el intervalo $[s,r]$ y continua y de derivada continua hasta la de orden $[\lambda]$ en un entorno de s , ($[\lambda]$ es la parte entera de λ).

Para calcular la integral (30) se desarrolla la función $f(x)$ en serie de Taylor,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{[\lambda]-1} (x-s)^i \frac{f^{(i)}(s)}{i!} + R_{[\lambda]-1} \quad (31)$$

siendo $R_{[\lambda]-1}$ el resto de la serie de Taylor.

Sustituyendo esta serie en la expresión de I_λ se llega a,

$$I_\lambda = \sum_{i=0}^{[\lambda]-1} \frac{f^{(i)}(s)}{i!} \int_s^x (x-s)^{i-\lambda} dx + \int_s^x R_{[\lambda]-1} (x-s)^{-\lambda} dx \quad (32)$$

La última de las integrales es regular, como puede comprobarse sustituyendo en ella la expresión $R_{[\lambda]-1}$ en función de la derivada $[\lambda]$ -ésima,

$$R_{[\lambda]-1} = (x-s)^\lambda \frac{f^{([\lambda])}(y)}{[\lambda]!}$$

donde $y \in [s, r]$.

Las integrales del sumatorio primero de la ecuación (32) pueden calcularse empleando las reglas R1 a R4, mientras que la última integral se puede escribir explícitamente con la representación integral del resto $R_{[\lambda] - 1}$. Finalmente se llega a,

$$I_\lambda = \frac{f^{(\lambda-1)}(s)}{(\lambda-1)!} \ln(r-s) + \sum_{i=0}^{\lambda-2} \frac{(r-s)^{i+1-\lambda}}{i!(i+1-\lambda)!} f^{(i)}(s) + \frac{(-)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} \int_s^r \frac{dx}{(x-s)^\lambda} \int_s^x f^{(\lambda)}(y) (y-x)^{\lambda-1} dy$$

(33)

para el caso de que λ sea entero; en otro caso,

$$I_\lambda = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(r-s)^{i+1-\lambda}}{i!(i+1-\lambda)!} f^{(i)}(s) + \frac{(-)^{k-1}}{(k-1)!} \int_s^r \frac{dx}{(x-s)^\lambda} \int_s^x f^{(k)}(y) (y-x)^{k-1} dy$$

(34)

con $\lambda - k + \mu$, $k = [\lambda]$ y $0 < \mu < 1$.

A partir de las fórmulas (33) y (34) pueden establecerse fórmulas para calcular numéricamente el valor de la parte finita de una integral; esto es necesario para realizar las integrales de las derivadas de las funciones singulares espaciales por los núcleos V_{ij}^n y S_{ij}^n , cuyas expresiones son demasiados complejas para pretender hacerlas analíticamente. Las expresiones buscadas serán del tipo,

$$I_\lambda \cong \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

Al igual que en las integrales regulares pueden derivarse fórmulas de dos clases básicamente (Kutt, 1975),

(a) Fórmulas con las abcisas x_i espaciadas regularmente y fijadas de antemano.

(b) Las abcisas x_i y los parámetros de ponderación w_i se escogen para que la fórmula sea óptima en el sentido de las cuadraturas gaussianas.

Las de tipo (a) son exactas para polinomios de grado menor o igual a $N-1$, mientras que las de clase (b) lo son hasta los de grado $2N - 1$. Sin embargo, las abcisas y parámetros de ponderación para estas últimas fórmulas de tipo Gauss no son tan adecuados como los obtenidos para las integrales regulares. De hecho las x_i pueden salir fuera del intervalo $[s, r]$; es más, tanto x_i como w_i pueden ser números complejos y lo son en concreto para el caso de $\lambda = 3/2$ del que nos ocupamos.

En esta tesis se han usado una fórmula de tipo (a) semi-cerrada, (una de

las abcisas de integración se coloca en el punto s , pero no se coloca ninguna en el punto r). Utilizando sólo 10 puntos de integración, a pesar de que los parámetros de ponderación oscilan de positivo a negativo de un punto a otro y sus valores absolutos varían de 0.8180 para el último punto, a $0.4341 \cdot 10^5$ en un punto intermedio, el cálculo de la parte finita de integrales con singularidades de orden $y^{-3/2}$, alcanza una muy buena precisión.

4.4.- Núcleo Añadido a la Solución Fundamental en los Elementos Móviles

En este apartado se detalla la obtención de los tensores V_{ij}^n y S_{ij}^n que denominaremos núcleos añadidos a la solución fundamental. Las expresiones de estos núcleos eran,

$$V_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} U_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \mu_n(\tau) \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} d\tau \quad (35)$$

$$S_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = \int_{\tau_n^-}^{\tau_n^+} \left[\left(Z_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \eta_n(\tau) - J_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \dot{\eta}_n(\tau) \right) \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} - J_{ij}(\mathbf{x}, t; \xi, \tau) \frac{\dot{\eta}_n(\tau)}{\Delta t} \right] d\tau \quad (36)$$

Para los problemas de propagación de grietas se van a considerar solamente la combinación de funciones de interpolación que mejor resultado ha dado de las ensayadas, esto es, interpolación $\mu_n(\tau)$ constante para las tensiones y $\eta_n(\tau)$ lineal a trozos para los desplazamientos.

Para simplificar el cálculo se va a denominar,

$$ct = x$$

$$ct = a$$

$$ct' = c(t - \tau) = y$$

$$R = \sqrt{c^2 (t - \tau)^2 - r^2} = \sqrt{x^2 - 2ax + (a^2 - r^2)}$$

$$LN = \ln(2y - 2R) = \ln[(2y + 2R)/r^2]$$

Para calcular los núcleos añadidos, con las funciones de interpolación escogidas es necesario realizar una serie de integrales indefinidas. Observando las expresiones de los núcleos U_{ij} , Z_{ij} y J_{ij} dados en las ecuaciones (II.34), (II.62.1) y (II.62.2) respectivamente, se encuentran las diez integrales simples que a continuación se listan, seguidas de su resultado (Gradshteyn y Ryzhik, 1965).

$$\underline{1} = \int \frac{dx}{R} = LN \tag{37a}$$

$$\bar{1} = \int \frac{xdx}{R} = R + a LN \tag{37b}$$

$$\bar{1} = \int \frac{x^2 dx}{R} = \left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}a\right)R + \left(a^2 + \frac{r^2}{2}\right)LN \quad (37c)$$

$$\bar{2} = \int R dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2}\right)R - \frac{r^2}{2}LN \quad (37d)$$

$$\bar{2} = \int xR dx = \frac{1}{3}R^3 + a\left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2}\right)R - \frac{ar^2}{2}LN \quad (37e)$$

$$\bar{2} = \int x^2 R dx = \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{12}a\right)R^3 + \left(a^2 + \frac{r^2}{4}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2}\right)R - \left(a^2 + \frac{r^2}{4}\right)\frac{r^2}{2}LN \quad (37f)$$

$$\bar{3} = \int \frac{1}{R^3} dx = -\frac{1}{2} \frac{(x-a)}{r} \frac{1}{R} \quad (37g)$$

$$\bar{3} = \int \frac{x}{R^3} dx = \frac{1}{2} \frac{(a^2 - r^2 - ax)}{r} \frac{1}{R} \quad (37h)$$

$$\bar{\bar{3}} = \int \frac{x^2}{R^3} dx = \frac{1}{r^2} \left[(a^2 - r^2) a - (a^2 + r^2) x \right] \frac{1}{R} + LN \tag{37i}$$

$$\bar{\bar{\bar{3}}} = \int \frac{x^3}{R^3} dx = R - \left[\left(3 + \frac{a^2}{r^2} \right) a x - (a^2 - r^2) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \frac{1}{R} + 3a LN \tag{37j}$$

Para calcular el tensor V_{ij}^n vamos a expresar el núcleo U_{ij} agrupando los términos del mismo que dependan de la variable τ . Así escribimos,

$$V_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = \sum_{\alpha=1}^2 V_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \xi) = \sum_{\alpha=1}^2 \left[V1_{ij}^{(\alpha)} \frac{1}{R_\alpha} + V2_{ij}^{(\alpha)} \frac{R_\alpha}{r^2} \right] \tag{38}$$

Los tensores $V1_{ij}^{(\alpha)}$ y $V2_{ij}^{(\alpha)}$ no dependen de la variable τ más que a través de unas funciones de Heavyside con argumento $c_\alpha(t - \tau) - r$. Estas funciones sólo se tendrán en cuenta al establecer los límites de integración de la

ecuación (35). Obviando las funciones de Heavyside los tensores antedichos se escriben como,

$$V1_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2\pi\rho c_1} r_{,i} r_{,j} \quad (39.1)$$

$$V1_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2\pi\rho c_2} (\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}) \quad (39.2)$$

$$V2_{ij}^{(\alpha)} = \frac{(-1)^\alpha}{2\pi\rho c_\alpha} (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) \quad (39.3)$$

Teniendo en cuenta que la función de interpolación μ_n vale uno en todo el intervalo de integración, las integrales que hay que calcular pueden expresarse en función de las dadas en las ecuaciones (37) como,

$$I = \int \frac{r - r_n}{\Delta t} \frac{1}{R} dt = \frac{1}{c^2 \Delta t} [\bar{1} + n \underline{1}] \quad (40)$$

$$II = \int \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} \frac{R}{r^2} d\tau = \frac{1}{c^2 \Delta t r^2} [\bar{2} + n \underline{2}] \tag{41}$$

La letra 'n' representa la distancia $c\tau_n$.

Los límites de integración en la definición (35) son, en principio, el inferior $\tau_n^- = \tau_n - \Delta t$ y el superior $\tau_n^+ = \tau_n$, pues este es el intervalo en que la función de interpolación μ_n es no nula. Sin embargo, como se comentó anteriormente, existen en la definición de U_{ij} unas funciones de Heavyside de la forma $H [c(t - \tau) - r] - H(ct - r - ct) - H(a - r - x)$, que pueden hacer que el límite superior sea $\tau_n^+ = ct - r$ en vez de $\tau_n^+ = \tau_n$, si ocurriera que el primero sea menor que el último. Las integrales I y II se anulan para $\tau = ct - r$, como puede comprobarse por simple sustitución, y por tanto, definiendo convenientemente las expresiones finales se pueden tener en cuenta estas funciones de Heavyside sin ninguna dificultad.

Sustituyendo los límites τ_n y $\tau_n - \Delta t$ en las integrales I y II, se llega a:

$$I \Big|_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n} = \frac{a - n}{c^2 \Delta t} [D_0 - L_0] - \frac{a - n + d}{c^2 \Delta t} \left[D_1 - \frac{a - n}{a - n - d} L_1 \right] \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II} \left| \begin{array}{l} \tau_n \\ \tau_n - \Delta t \end{array} \right. &= \frac{(a-n)^3}{c^2 \Delta t r^2} \left[\frac{1}{3} D_0^3 - \frac{1}{2} D_0 - \frac{r^2}{2(a-n)^2} L_0 \right] - \\
 &\frac{(a-n+d)^3}{c^2 \Delta t r^2} \left[\frac{1}{3} D_1^3 - \frac{1}{2} \frac{a-n}{a-n+d} D_1 - \frac{r^2}{2(a-n+d)^2} \frac{a-n}{a-n+d} L_1 \right]
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

donde se ha llamado $d = c\Delta t$, $D_p = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a-n+pd}\right)^2}$ y $L_p = \text{Ln} \frac{1+D_p}{r/a-n+pd}$

Se obtienen dos expresiones de este tipo para cada valor α , es decir para cada onda, P o S. Denominandolas I_α y II_α , se puede escribir el tensor V_{ij}^n como,

$$V_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = \sum_{\alpha=1}^2 \left(V1_{ij}^{(\alpha)} I_\alpha + V2_{ij}^{(\alpha)} II_\alpha \right)
 \tag{44}$$

La expresión anterior puede reordenarse para escribir V_{ij}^n de forma similar a como se expresó el núcleo U_{ij}^n en las ecuaciones (II.48.1) y (II.72),

llegándose a,

$$V_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = \sum_{\alpha=1}^2 V_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \xi) =$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{4\pi r c_{\alpha}^2} \left[\delta_{ij} (L''_{\alpha} - D''_{\alpha}) + (-)^{\alpha} (\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) F''_{\alpha} \right]$$

(45)

donde,

$$L''_{\alpha} = \frac{t}{\Delta t} \operatorname{Ln} \frac{1 + \sqrt{1 - \eta_{\alpha}^2}}{\eta_{\alpha}} - \frac{t - \Delta t}{\Delta t} \operatorname{Ln} \frac{1 + \sqrt{1 - \theta_{\alpha}^2}}{\theta_{\alpha}}$$

$$D''_{\alpha} = \frac{t}{\Delta t} \sqrt{1 - \eta_{\alpha}^2} - \frac{t - \Delta t}{\Delta t} \sqrt{1 - \theta_{\alpha}^2}$$

$$F''_{\alpha} = \frac{t}{\Delta t} \left[\frac{2}{3} \frac{\sqrt{(1 - \eta_{\alpha}^2)^3}}{\eta_{\alpha}^2} + \sqrt{1 - \eta_{\alpha}^2} - \frac{t - \Delta t}{t} \frac{\sqrt{1 - \eta_{\alpha}^2}}{\eta_{\alpha}^2} \right]$$

$$\frac{t - \Delta t}{\Delta t} \left[\frac{2}{3} \frac{\sqrt{(1 - \theta_\alpha^2)^3}}{\theta_\alpha^2} + \sqrt{1 - \theta_\alpha^2} - \frac{\sqrt{1 - \theta_\alpha^2}}{\theta_\alpha^2} \right]$$

(46)

donde, igual que en el capítulo II,

$$\begin{aligned} \eta_\alpha &= r / c_\alpha t & \text{si } r < c_\alpha t & & \text{y} & & \eta_\alpha = 1 & \text{si } r \geq c_\alpha t \\ \theta_\alpha &= r / c_\alpha (t - \Delta t) & \text{si } r < c_\alpha (t - \Delta t) & & \text{y} & & \theta_\alpha = 1 & \text{si } r \geq c_\alpha (t - \Delta t) \end{aligned}$$

El mismo proceso seguimos para calcular el tensor S_{ij}^n . Expresamos el subintegrando, agrupando los términos que dependen de la variable τ . Así escribimos,

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[\left(Z_{ij}^{(\alpha)} \eta_n - J_{ij}^{(\alpha)} \eta_n \right) \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} - J_{ij}^{(\alpha)} \eta_n \frac{1}{\Delta t} \right] =$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left[S1_{ij}^{(\alpha)} \kappa 1^{(\alpha)} + S2_{ij}^{(\alpha)} \kappa 2^{(\alpha)} \right]$$

(46)

donde,

$$S1^{(\alpha)} = \left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{2 R_\alpha}{r^2} \right) \eta_n \frac{x - n}{d} \tag{47.1}$$

$$S2^{(\alpha)} = \left(\frac{a - x - r}{R_\alpha^3} \eta_n + \frac{1}{c_\alpha R_\alpha} \dot{\eta}_n \right) \frac{x - a}{d} + \frac{1}{d R_\alpha} \eta_n \tag{47.2}$$

Las expresiones $S1_{ij}^{(\alpha)}$ y $S2_{ij}^{(\alpha)}$ contienen también funciones de Heavyside y se tienen en cuenta de igual forma que en el caso de V_{ij}^n . Estos tensores, excluyendo estas funciones de Heavyside, viene dados por las fórmulas,

$$S1_{ij}^{(\alpha)} = \frac{-(-)^{\alpha} \mu}{\pi r c_\alpha r} \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left(\delta_{ij} - 4 r_{,i} r_{,j} \right) + r_{,i} n_{,j} + r_{,j} n_{,i} \right] \tag{48.1}$$

$$S2_{ij}^{(1)} = \frac{-\mu}{2\pi r c_1} \left(2 \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} r_{,i} r_{,j} + \frac{\lambda}{\mu} r_{,i} n_{,j} \right) \tag{48.2}$$

$$S2_{ij}^{(2)} = \frac{-\mu}{2\pi\rho c_2} \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) + r_{,j} n_{,i} \right] \quad (48.3)$$

Hay que integrar las dos funciones $\aleph 1^{(\alpha)}$ y $\aleph 2^{(\alpha)}$ que son bastante más complejas que en la ocasión anterior. La función de interpolación η_n tiene una expresión diferente según el intervalo de integración de que se trate. En concreto, esta función de interpolación es,

$$\eta_n = \begin{cases} \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} + 1 & \text{para } \tau \in [\tau_n - \Delta t, \tau_n] \\ -\frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} + 1 & \text{para } \tau \in [\tau_n, \tau_n + \Delta t] \end{cases}$$

y por tanto, su derivada con respecto al tiempo, que también aparece en las expresiones que hay que integrar, es,

$$\dot{\eta}_n = \begin{cases} 1 & \text{para } \tau \in [\tau_n - \Delta t, \tau_n] \\ -1 & \text{para } \tau \in [\tau_n, \tau_n + \Delta t] \end{cases}$$

Así, para cada onda, las integrales resultantes podemos expresarlas en función de las integrales dadas por las ecuaciones (37),

$$III = \int \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} \left(\frac{1}{R} + \frac{2R}{r^2} \right) d\tau = \frac{1}{c^2 \Delta t} \left[\left(\bar{1} + \frac{2}{r^2} \bar{2} \right) - n \left(\frac{1}{r^2} \bar{2} \right) \right] \quad (49)$$

$$IV = \int \left(\frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} \right)^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{2R}{r^2} \right) d\tau = \frac{1}{c^3 \Delta t} \left[\left(\bar{1} + \frac{2}{r^2} \bar{2} \right) - 2n \left(\frac{1}{r^2} \bar{2} \right) + n^2 \left(\frac{1}{r^2} \bar{2} \right) \right] \quad (50)$$

$$V = \int \left(\frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} \frac{a-x}{R^3} + \frac{1}{c\Delta t R} \right) d\tau = \frac{1}{c^2 \Delta t} \left[\bar{1} - \alpha n \bar{3} + (m + \alpha) \bar{3} - \bar{3} \right] \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
 VI = \int \left(\frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} \frac{a - x}{R^3} + \frac{2}{c\Delta t R} \right) \frac{\tau - \tau_n}{\Delta t} d\tau = \\
 \frac{1}{c^3 \Delta t^2} \left[-2n \underline{1} + 2 \bar{1} + \alpha n^2 \underline{3} - n(n + 2\alpha) \bar{3} + (n + 2\alpha) \bar{\bar{3}} - \bar{\bar{\bar{3}}} \right]
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Con los límites de integración en la definición (36) ocurre igual que para el núcleo V_{ij}^n , el inferior es $\tau_n^- = \tau_n - \Delta t$, mientras que el superior es $\tau_n^+ = \tau_n + \Delta t$, o bien $\tau_n^+ = ct - r$, según cual de ellos sea menor. Esto puede tenerse en cuenta fácilmente igual que en el caso anterior con la definición de las funciones finales. Las integrales definidas de $\kappa 1^{(\alpha)}$ y $\kappa 2^{(\alpha)}$ hay que dividir las en dos intervalos, al ser diferente la expresión de η_n , y también de su derivada, según sea τ mayor o menor que τ_n .

Así,

$$VII_\alpha = \int_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n + \Delta t} \kappa 1^{(\alpha)} d\tau = III \left|_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n + \Delta t} + IV \left|_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n} - IV \left|_{\tau_n}^{\tau_n + \Delta t}
 \right.
 \right.
 \tag{53}$$

$$VIII_{\alpha} = \int_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n + \Delta t} \kappa 2^{(\alpha)} d\tau = V \left| \begin{array}{c} \tau_n + \Delta t \\ \tau_n - \Delta t \end{array} \right. + VI \left| \begin{array}{c} \tau_n \\ \tau_n - \Delta t \end{array} \right. - VI \left| \begin{array}{c} \tau_n + \Delta t \\ \tau_n \end{array} \right. \quad (54)$$

La simplificación de las expresiones (53) y (54) es un proceso laborioso que conduce a una fórmula más o menos compacta para VII_{α} y a la conclusión de que $VIII_{\alpha} = 0$ para cualesquiera t , Δt y r . Al sustituir estos resultados en la definición de S_{ij}^n se obtiene para el mismo la expresión,

$$S_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha=1}^2 S_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) =$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \frac{-(-)^{\alpha} \mu}{4\pi\rho c_{\alpha}^3 \Delta t} \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) + r_{,j} n_i + r_{,i} n_j \right] \right.$$

$$\left. \left[\frac{t}{\Delta t} \eta_{\alpha} \operatorname{Ln} \frac{1 + \sqrt{1 - \eta_{\alpha}^2}}{\eta_{\alpha}} - 2 \frac{t - \Delta t}{\Delta t} \theta_{\alpha} \operatorname{Ln} \frac{1 + \sqrt{1 - \theta_{\alpha}^2}}{\theta_{\alpha}} + \right.$$

$$\left. \frac{t - 2\Delta t}{\Delta t} \beta_{\alpha} \operatorname{Ln} \frac{1 + \sqrt{1 - \beta_{\alpha}^2}}{\beta_{\alpha}} \right] -$$

$$\left[\frac{t}{\Delta t} \frac{\sqrt{1 - \eta_{\alpha}^2}}{\eta_{\alpha}} - 2 \frac{t - \Delta t}{\Delta t} \frac{\sqrt{1 - \theta_{\alpha}^2}}{\theta_{\alpha}} + \frac{t - 2\Delta t}{\Delta t} \frac{\sqrt{1 - \beta_{\alpha}^2}}{\beta_{\alpha}} \right] +$$

$$\left[\frac{2}{3} \left(\frac{t}{\Delta t} + 2 \right) \frac{\left(\sqrt{1 - \eta_{\alpha}^2} \right)^3}{\eta_{\alpha}^3} - \frac{4}{3} \frac{t - \Delta t}{\Delta t} \frac{\left(\sqrt{1 - \theta_{\alpha}^2} \right)^3}{\theta_{\alpha}^3} +$$

$$\left. \frac{2}{3} \left(\frac{t - 2\Delta t}{\Delta t} - 2 \right) \frac{\left(\sqrt{1 - \beta_{\alpha}^2} \right)^3}{\beta_{\alpha}^3} \right] \Bigg\}$$

(55)

Los parámetros η_α y θ_α son como los definidos para la ecuación (45) de V_{ij}^n , mientras que β_α es el que se definió para el tensor U_{ij}^n dado por la ecuación (II.72),

$$\beta_\alpha = r / c_\alpha(t-2\Delta t) \quad \text{si } r < c_\alpha(t-2\Delta t) \quad \text{y} \quad \beta_\alpha = 1 \quad \text{si } r \geq c_\alpha(t-2\Delta t)$$

Tanto en las expresiones finales del núcleo V_{ij}^n como en las de S_{ij}^n se ha adoptado $\tau_n = \tau_1 = \Delta t$, pues por el principio de traslación temporal del estado de Stokes (II.30.3) se cumple,

$$V_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = V_{ij}^1(\mathbf{x}, t - n\Delta t + \Delta t; \xi)$$

$$S_{ij}^n(\mathbf{x}, t; \xi) = S_{ij}^1(\mathbf{x}, t - n\Delta t + \Delta t; \xi)$$

(56)

En consecuencia, en las expresiones (45) y (55) de V_{ij}^n y S_{ij}^n y en las definiciones de η_α , θ_α y β_α , la variable t , debe entenderse como $t - (n-1)\Delta t$, pues ya se ha aplicado la propiedad de traslación antedicha. Lo mismo ocurría en los núcleos U_{ij}^n y T_{ij}^n [ecuaciones (48.1), (48.2), (72) y (73)].

Los núcleos V_{ij}^n y S_{ij}^n son aparentemente singulares en $r \rightarrow 0$. V_{ij}^n tiene términos de orden $\ln r$ y r^{-2} , mientras que S_{ij}^n tiene singularidades aparentes de orden r^{-1} y r^{-3} . Sin embargo, combinando los términos con expresiones del mismo orden que aparecen en ambos núcleos, estas singularidades aparentes desaparecen, para todo instante de tiempo, incluso para el intervalo $[0, \Delta t]$.

4.5.- Propagación de una Grieta Semi-infinita en un Medio Infinito

Notas sobre la Solución Analítica

Se considera a continuación el problema de una grieta que se propaga con velocidad uniforme C en un dominio infinito, sobre la que incide una onda dilatacional cuyo frente es paralelo a las caras de la fisura. El perfil de tensiones incidente se varía como una función escalón. Baker (1969) resolvió el problema de una grieta semi-infinita que aparecía repentinamente en el dominio infinito, y comenzaba a propagarse desde ese instante con velocidad uniforme C , bajo la acción de una presión interna invariable e uniforme. Achenbach y Nuismer (1971) señalaron que ambos problemas tienen la misma solución. Freund (1972a) generalizó la solución para el caso de una presión no-uniforme.

El procedimiento empleado por Freund (1972a) se basaba en resolver primeramente un problema más simple, denominado por el Solución Fundamental. Esta corresponde al caso que se esquematiza en la figura 7.

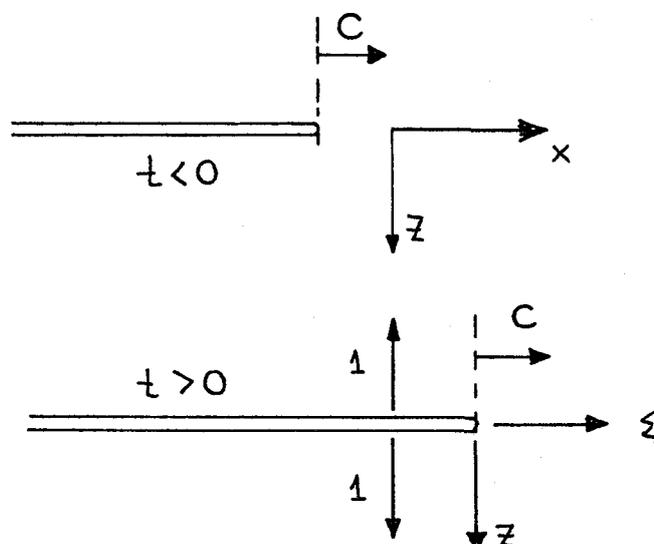


Figura 7

En el instante $t = 0$ el vértice de la fisura pasa por $x = 0$, y aparecen en el mismo, dos cargas concentradas, una en cada cara de la grieta en dirección de la normal saliente. El vértice continúa moviéndose con velocidad uniforme C , pero las cargas permanecen aplicadas en la coordenada $x = 0$. Otra forma de considerar el problema es suponiendo que existen dos cargas opuestas aplicadas en un mismo punto, previamente al paso de la grieta por $x = 0$. Este sistema de cargas está auto-equilibrado y no produce ningún efecto hasta que el paso de la grieta en $t = 0$ separa en dos el punto de aplicación de las cargas.

Freund (1972a) plantea el problema en función de los potenciales de onda ϕ y ψ con un sistema de coordenadas móvil (ξ, z) con origen en el vértice de la fisura, tal como se muestra en la figura 7.

De esta forma se llega a dos ecuaciones de onda iguales, de la forma,

$$\left(1 - \frac{C^2}{c_\alpha^2}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{2C}{c_\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial t} - \frac{1}{c_\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (35)$$

donde c_α son las velocidades de las ondas características del medio ($\alpha = 1, 2$).

La solución del problema se obtiene de la forma habitual, haciendo uso de la transformada de Laplace en el tiempo para eliminar la dependencia de la variable t y la de Fourier en el espacio para eliminar ξ . El resultado es una ecuación diferencial ordinaria en la variable z , que tras resolverla, aplicando las condiciones de contorno en el dominio transformado, conduce a una ecuación del tipo de Wiener-Hopf estándar.

De la resolución de esta ecuación (Noble, 1958) se obtienen los potenciales de desplazamientos ϕ y ψ , y a partir de ellos las tensiones en el dominio.

El comportamiento de las mismas en las inmediaciones del vértice viene caracterizado para este problema por,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \left[(2\pi\xi)^{1/2} \sigma_{zz}(\xi, 0, t) \right] = \frac{(2\pi)^{1/2}}{S_+(C) \left(1 + \frac{C}{h_2}\right) \left(1 - \frac{C}{c_1}\right)^{1/2}} \frac{1}{(Ct)^{1/2}} \quad (36)$$

donde $h_2 = c_R - C$, siendo c_R la velocidad de las ondas de Rayleigh.

La expresión de $S_+(C)$, que es muy compleja, depende exclusivamente del módulo de Poisson y de la relación entre la velocidad de propagación y una de las velocidades características (Freund, 1972a; Baker, 1969). $S_+(\chi)$ viene dado por la ecuación,

$$S_{\pm}(\chi) = \exp \left(-\frac{1}{\pi} \int_{a_{\pm}}^{b_{\pm}} \arctan \left[\frac{4\eta^2 |\alpha| \cdot |\beta|}{(-2\eta^2 + b^2 + C^2 b^2 \eta^2 \pm 2Cb^2\eta)^2} \right] \frac{\chi d\eta}{\chi\eta \pm 1} \right) \quad (37)$$

donde,

$$\begin{aligned} a_+ &= 1/(C - c_1); & a_- &= 1/(C + c_1) \\ b_+ &= 1/(C - c_2); & b_- &= 1/(C + c_2) \\ b &= 1/c_2 \\ \alpha &= (1/c_1)^2 \cdot [1 - (c_1/\chi)^2 + (C/\chi)^2 - 2C/\chi]^{1/2} \\ \beta &= (1/c_2)^2 \cdot [1 - (c_2/\chi)^2 + (C/\chi)^2 - 2C/\chi]^{1/2} \end{aligned}$$

El miembro de la derecha de la ecuación (36) es el Factor de Intensidad de Tensión Dinámico para este problema, pues el límite de la izquierda es justo la definición del mismo [ecuación (III.12)].

Utilizando esta solución fundamental y aplicando superposición, Freund (1973), calcula el FIT dinámico del problema de la onda plana incidente sobre la grieta en $t = 0$. El factor obtenido es,

$$K(t, C) = 2(2/\pi)^{1/2} \sigma \omega_0 k(C) \sqrt{t} \quad (38)$$

donde σ es el valor de la tensión de la onda incidente; ω_0 es una magnitud que depende sólo del módulo de Poisson y que se obtiene a partir de la función $S_+(C)$, mediante,

$$\omega_0 = \omega_+^0(0)$$

con

$$\omega_+^0(\chi) = \frac{1 + \chi/c_1}{1 + \chi/c_R} \frac{1}{S_+^0(\chi)} \quad (39)$$

siendo $S_+^0(\chi)$ la función $S_+(\chi)$ definida anteriormente para $C = 0$.

El factor $k(C)$ viene dado por la expresión,

$$k(C) = \frac{1}{S_+(d) \left(1 + \frac{C}{h_2}\right) \left(1 - \frac{C}{c_1}\right)^{1/2}}$$
(40)

El problema de difracción de una onda debido a una grieta estacionaria, puede resolverse también haciendo uso de la solución fundamental de Freund (1972a), obteniéndose un FIT igual a,

$$K(t, 0) = 2(2/\pi)^{1/2} \sigma \omega_0 \sqrt{t}$$
(39)

Es decir, el factor de intensidad de tensión en la grieta móvil $K(t, C)$, igual al de la grieta estacionaria $K(t, 0)$ por una función universal de la velocidad $k(C)$.

$$K(t, C) = k(C) K(t, 0)$$
(40)

La función $k(C)$ depende además del módulo de Poisson y decrece monótonamente de $k = 1$, para $C = 0$, hasta $k = 0$ para $C = c_R$. En la figura 8 se representa $k(C)$ para dos valores del módulo ν en función de la relación entre la velocidad de propagación y la velocidad de las ondas de Rayleigh.

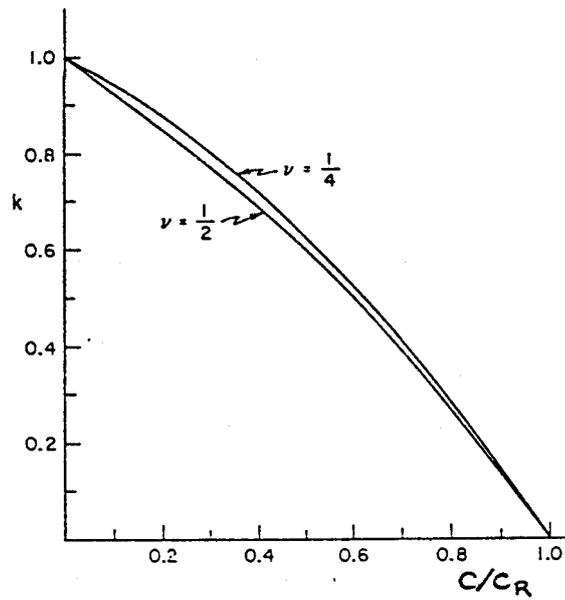


Figura 8

Resolución mediante el Método de los Elementos de Contorno

El problema en consideración se ha modelado mediante dos contornos finitos, con las condiciones de contorno que se muestran en la figura 9.

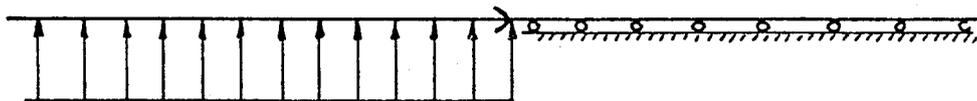


Figura 9

Se han utilizado únicamente 13 elementos para modelar cada sub-

contorno a ambos lados del vértice de la grieta. Junto a este existen dos elementos a un cuarto de longitud $L = 3.2$ mm. Los elementos de longitud mayor miden 5 mm.

Las propiedades elásticas del dominio son,

Módulo de Poisson	$\nu = 0.3$
Módulo de elasticidad transversal	$\mu = 2.42 \times 10^{10}$ Pa
Densidad	$\rho = 2450$ kg/m ³

con las cuales se obtiene, $c_1 = 5880$ m/s y $c_2 = 3143$ m/s.

Se han resuelto el problema con dos velocidades de propagación diferentes, el primero con $C = 0.2 c_2 = 629$ m/s, y el segundo con $C = 0.4 c_2 = 1257$ m/s.

Para ambos problemas se ha tomado un lapso $\Delta t = 0.27$ μ s. El factor β con este intervalo de tiempo varía desde $\beta = 0.99$ para los elementos del vértice, hasta $\beta = 0.64$ para los elementos mayores. Según las conclusiones del apartado 4 del capítulo II, el intervalo de tiempo óptimo sería algo mayor. Sin embargo, la relación entre el tamaño de los elementos a un cuarto que flanquean al vértice, y el desplazamiento experimentado por el mismo en un paso de tiempo no debe ser demasiado grande, para que la aproximación lineal de las funciones de forma, que da lugar a los núcleos añadidos, sea suficientemente buena. Con el paso de tiempo escogido la grieta avanza cada paso $\Delta v = C\Delta t = 0.17$ mm para la velocidad $0.2 c_2$ y $\Delta v = C\Delta t = 0.34$ mm para la velocidad $0.4 c_2$. El mayor de ellos representa un 10% del tamaño del $E1/4S$, que puede establecerse como un límite superior relativo del avance por paso del vértice de la fisura para este problema.

En las figuras 10 y 11 se representa los FIT's adimensionalizados con $\sigma/(\pi 60 \times 10^{-3})$, calculados con el MEC frente al analítico $K(t, C)$, para $C = 629$ m/s. En las figuras 12 y 13 se hace lo propio para el caso de $C = 1257$ m/s. También se representa el FIT analítico de la grieta estacionaria.

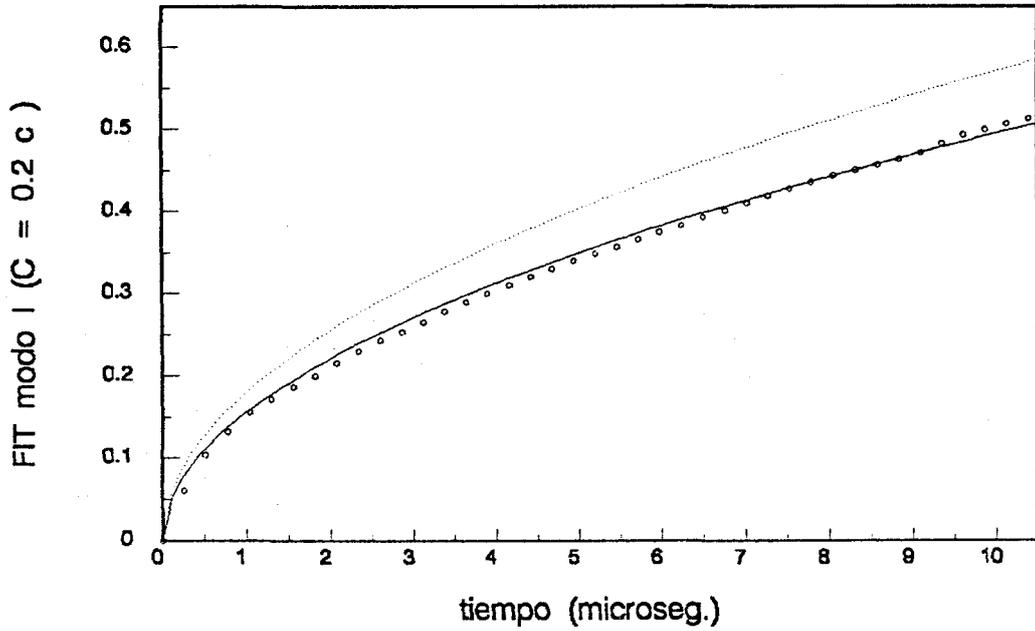


Figura 10. (\circ K_t ; — $K(t, 0.2 c_2)$; $K(t, 0)$)

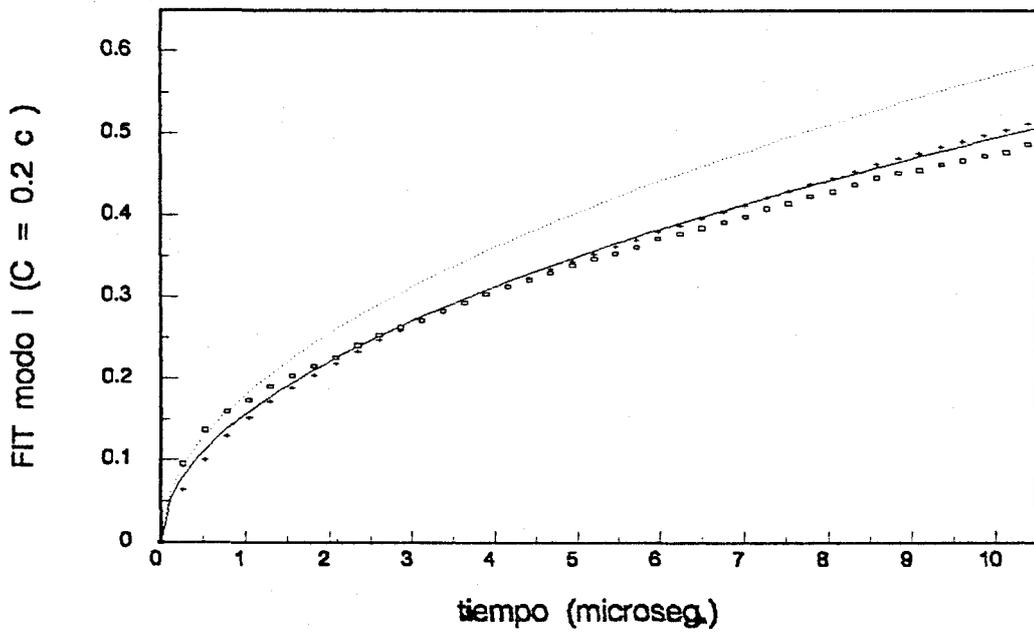


Figura 11. (\square K_{u2} ; + K_{u1} ; — $K(t, 0.2 c_2)$; $K(t, 0)$)

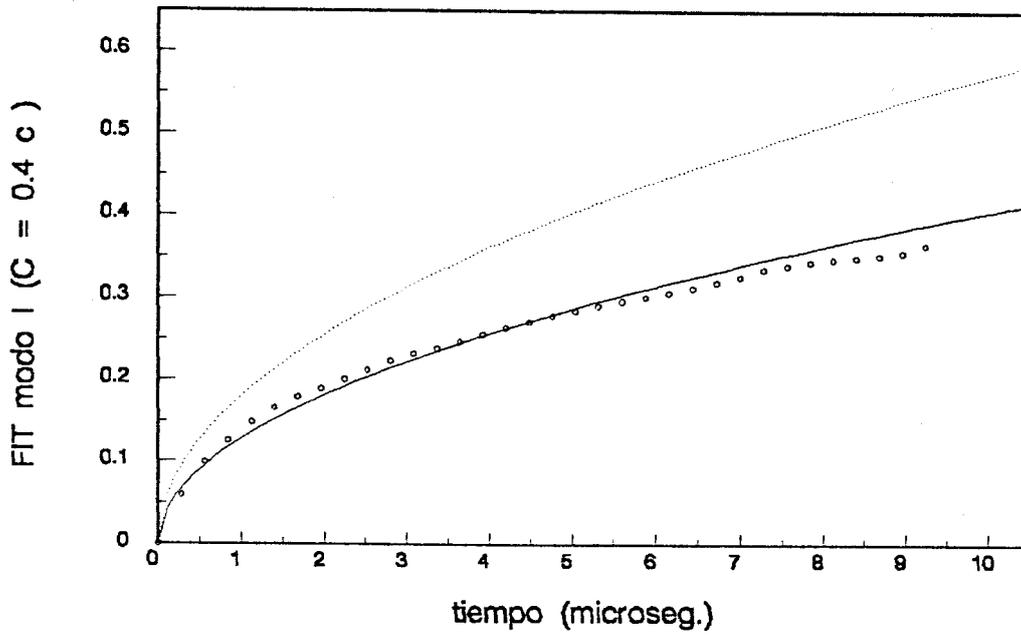


Figura 12. ($\circ K_t$; — $K(t, 0.4 c_2)$; $K(t, 0)$)

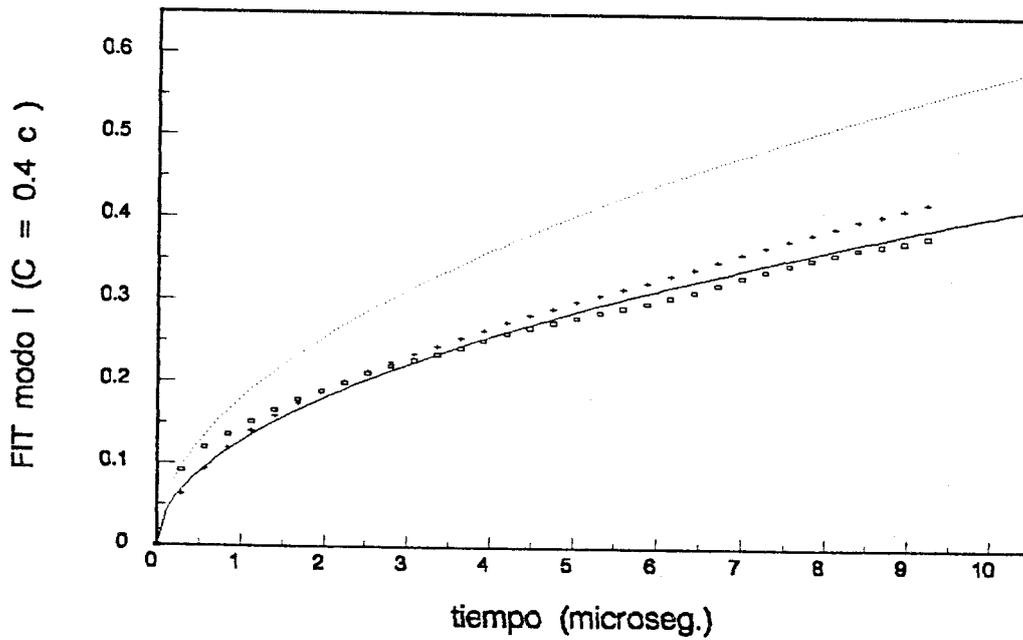


Figura 13. ($\square K_{u2}$; + K_{u1} ; — $K(t, 0.4 c_2)$; $K(t, 0)$)

Las curvas anteriores demuestran la precisión del método para tener en cuenta el movimiento a altas velocidades del vértice de la fisura.

Para la velocidad menor se obtienen, como era de esperar, resultados mejores, pues la aproximación lineal de las funciones de forma es más precisa cuanto menor es el avance del elemento singular.

El factor calculado mediante la 'tensión' (K_t) da excelentes resultados tanto para $C = 0.2 c_2$ como para $C = 0.4 c_2$, aunque los factores calculados con los desplazamientos (K_{u1} , K_{u2}) son tan buenos como aquel.

4.5.- Lámina Rectangular Finita con Grieta Centrada

Se trata de resolver el problema de una placa rectangular de ancho $2W = 104$ mm y alto $2H = 40$ mm, que contiene una fisura centrada de longitud $2a_0 = 24$ mm. En $t = 0$ se aplica súbitamente una tracción constante en los lados mayores de la placa, lo cual genera una onda dilatacional que avanza hacia la fisura. La grieta permanece estacionaria bajo la acción de las ondas de tensión hasta el instante $\tau > t_{LL} = H/c_1$, que es el que emplean las ondas dilatacionales provenientes del contorno en alcanzar la fisura. A partir de ese instante τ la fisura se propaga simétricamente con velocidad constante $C = 1000$ m/s.

Las velocidades de propagación de las ondas de dominio son $c_1 = 6328$ m/s, y $c_2 = 3464$ m/s, que se obtienen de las siguientes propiedades elásticas del material,

Módulo de Poisson	$\nu = 0.286$
Módulo de elasticidad transversal	$\mu = 2.94 \times 10^{10}$ Pa
Densidad	$\rho = 2450$ kg/m ³

Con esto, $t_{LL} = H/c_1 = 3.16$ μ s, habiéndose tomado $\tau = 4.4$ μ s.

La geometría y condiciones de contorno del problema se muestran en la figura 14. Por la simetría del problema sólo es necesario resolver un cuarto del mismo. La discretización de éste se representa en la figura 15, que consta de 38 elementos cuadráticos.

La fisura se ha modelado con cuatro elementos, siendo el del vértice de longitud $L = 1.5$ mm. Al otro lado del vértice se dispone un E1/4S de igual longitud. A continuación de los elementos a un cuarto van dos elementos de 2.5 mm, siendo el resto de la malla de elementos iguales de longitud 4 mm.

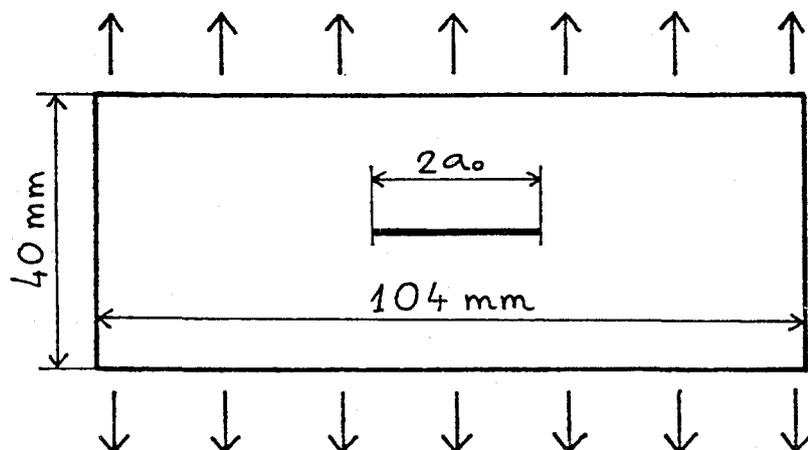


Figura 14

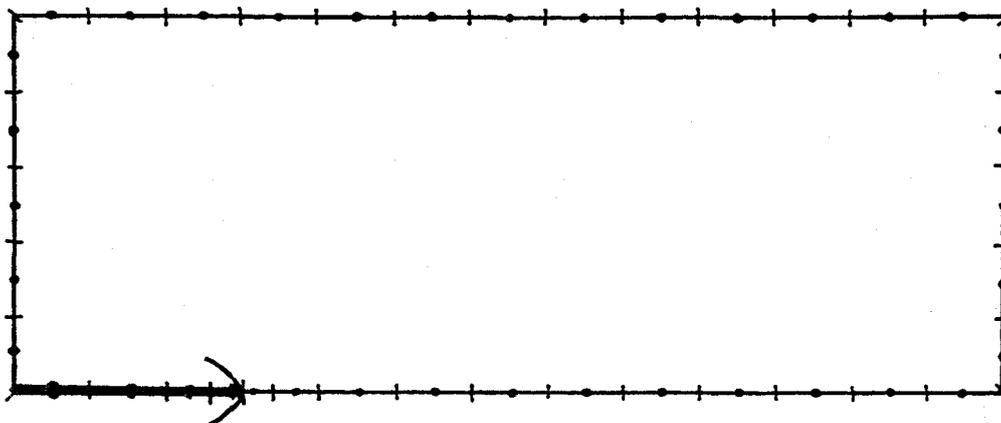


Figura 15

El intervalo de tiempo adoptado es $\Delta t = 0.34 \mu s$, de forma que el parámetro β vale 2.87 para los elementos más pequeños ($L/2 = 0.75 \text{ mm}$), mientras que $\beta = 1.08$, para los mayores con que se modela casi todo el contorno ($L/2 = 2.0 \text{ mm}$).

El vértice avanza cada paso de tiempo, a partir de $t = \tau$, la cantidad $C\Delta t = 0.34 \text{ mm}$. Está representa un 11% de la longitud de los elementos a un cuarto

que flanquean el vértice.

La relación entre la velocidad de propagación de la fisura y la velocidad de las ondas transversales es $C/c_2 = 1000/3464 = 0.29$. Con esta relación y el módulo de Poisson $\nu = 0.286$ se puede obtener el factor de intensidad de tensiones para el caso de una grieta semi-infinita en un medio infinito [ecuación (38)]. Freund (1973) mostró que si una fisura estacionaria en un dominio infinito sobre la que incidía una onda de dilatacional (con su frente paralelo a la fisura) a partir de $t = 0$, comenzaba a propagarse con velocidad uniforme C , a partir de $t = \tau > 0$, el FIT a partir de ese instante vendría dado por la ecuación (38), independientemente del instante τ en que la grieta hubiera comenzado a propagarse. Por tanto, la solución pasará de ser la dada por la fórmula (41) a la (38) súbitamente.

En las figuras 16 y 17 se representan los factores de intensidad de tensión de modo I del problema planteado adimensionalizados con $\sigma\sqrt{\pi a_0}$, calculados por los métodos propuestos en el apartado 3 del capítulo III, junto a la solución analítica del dominio infinito, válida durante un cierto intervalo de tiempo. También se representa la solución obtenida para este problema por Nishioka y Atluri (1980) utilizando el MEF junto a un elemento singular.

El FIT calculado con la 'tensión' nodal del E1/4S (K_t), reproduce casi con exactitud la evolución teórica del FIT durante el periodo en que esta es válida. A partir de entonces el FIT K_t y el de Nishioka y Atluri (1980) acuerdan bastante bien, salvo algunas oscilaciones presentes en el FIT obtenido mediante el MEC.

Los factores calculados mediante los desplazamientos (K_{u1s} y K_{u2s}) también dan valores muy próximos, aunque algo por encima, al de los citados autores.

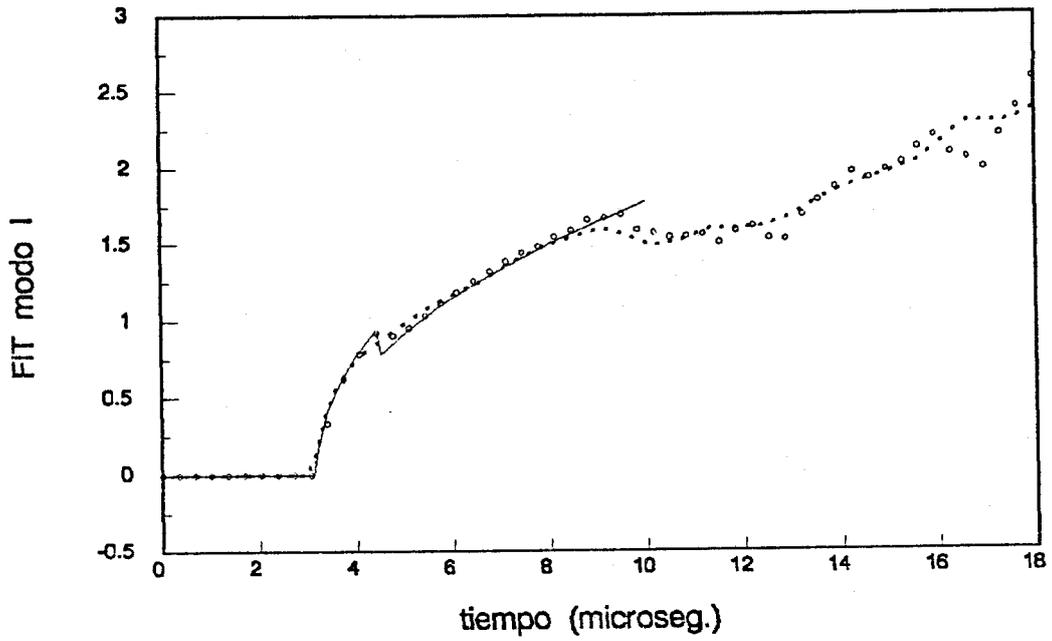


Figura 16. (\circ K_t ; — Freund, 1973; $\cdot\cdot$ Nishioka y Atluri, 1980)

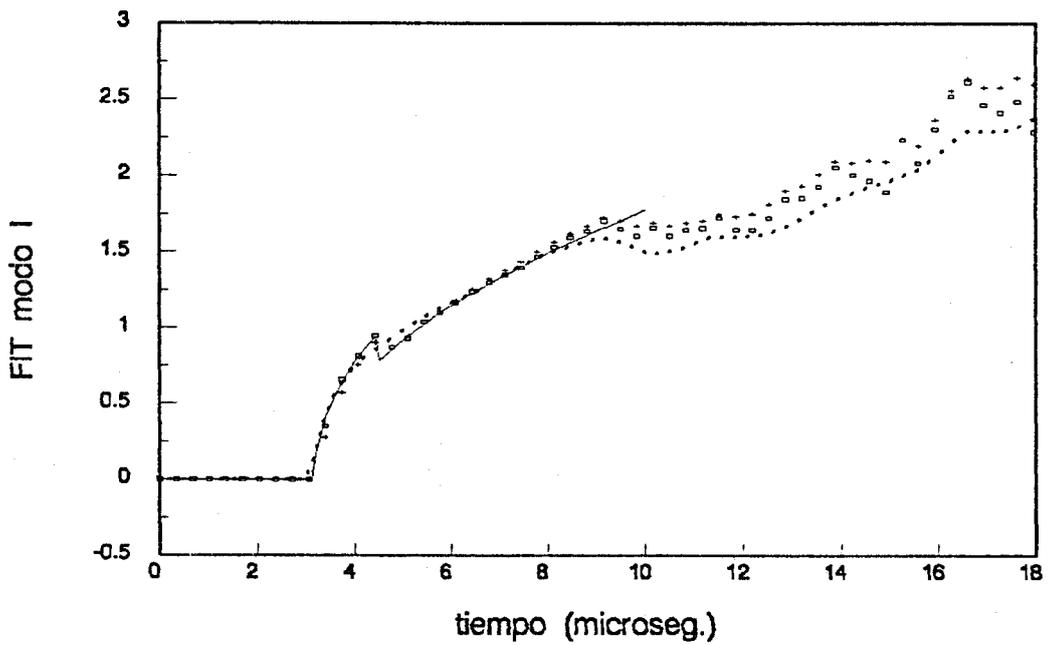


Figura 17. (\square K_{u2} ; + K_{u1} ; — Freund, 1973; $\cdot\cdot$ Nishioka y Atluri, 1980)

CAPITULO V.-

CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

5.1 Conclusiones

Para alcanzar los objetivos marcados al principio de esta tesis, referidos al estudio de problemas de Fractura Dinámica en el dominio del tiempo, se eligió para los análisis numéricos el Método de los Elementos de Contorno por su precisión y versatilidad demostrada en muchas aplicaciones y concretamente, en aquellas en que aparecen grandes concentraciones de tensiones, como es el caso de las grietas. En el desarrollo de la tesis se han cumplido estos objetivos marcados respecto a los problemas de fractura, y además, para ello, fue necesario esclarecer, primeramente, la propia formulación del MEC en elastodinámica en el dominio del tiempo.

Las aportaciones principales de esta tesis pueden resumirse en tres puntos, el primero referido al desarrollo del MEC en elastodinámica en el dominio del tiempo, y los dos últimos, a su aplicabilidad al problema concreto de la Fractura Dinámica:

a) Se ha contribuido a esclarecer la formulación del Método de los Elementos de Contorno en elastodinámica en el dominio del tiempo, demostrando que dos formulaciones presentes en la bibliografía, aparentemente distintas, pueden unificarse siendo la más antigua un caso particular de la otra.

b) Se ha demostrado la precisión y efectividad del uso del MEC junto al elemento de contorno a un cuarto singular para problemas de Fractura Dinámica en el dominio del tiempo, para el caso de grietas estacionarias sometidas a cargas variables.

c) Se ha presentado por primera vez un método eficaz de resolución de problemas de propagación dinámica de grietas con el Método de los Elementos de Contorno, aplicable a dominios finitos y también a dominios infinitos.

En cuanto a la formulación del MEC en elastodinámica en el dominio del tiempo la presente tesis contribuye, además del punto a), con otras aportaciones.

Se ha puesto de manifiesto por qué siguiendo la misma formulación (Mansur, 1983; Antes, 1985) se obtienen resultados intermedios diferentes ($Z_{ij}^{(\alpha)}$ y $J_{ij}^{(\alpha)}$), y como el resultado final (T_{ij}^n), ha de ser el mismo, si la interpolación en el tiempo de las velocidades se obtiene por derivación la interpolación temporal de los desplazamiento, como, en principio, parece ser la elección correcta.

Se publica por primera vez en esta tesis el núcleo de desplazamientos U_{ij}^n , proveniente de una interpolación temporal de las tensiones lineal a trozos. No se hace uso del mismo en las aplicaciones numéricas, pues como ha sido demostrado (Cole, Kosloff y Minster, 1978) la interpolación en desplazamientos es conveniente que sea de un orden superior a la de las tensiones para asegurar la estabilidad del algoritmo. Desarrollos ulteriores permitirán, utilizar el núcleo aquí publicado, junto al de tensiones (T_{ij}^n), obtenido mediante interpolaciones de segundo orden para los desplazamientos.

En el tercer apartado del capítulo II se estudian todos los núcleos de tensiones y desplazamientos obtenidos con las diferentes funciones de interpolación, analizando el orden de sus singularidades en el tiempo y el espacio. Se encuentra que todos los núcleos son singulares para el intervalo de

tiempo $[0, \Delta t]$ cuando $r \rightarrow 0$. Se demuestra que la singularidad es la misma que en el caso de la solución fundamental de la elastostática, de forma que ésta puede extraerse de los núcleos singulares a la hora de integrar sobre el contorno, integrando la parte no singular mediante simples cuadraturas de Gauss, y la parte singular analíticamente, aunque podría hacerse por alguna técnica numérica desarrollada para el caso de la estática.

Excepto el núcleo T_{ij}^n , obtenido mediante una interpolación constante de los desplazamientos, el resto no contienen singularidades para ningún otro instante de tiempo. Aunque aparentemente esto no es así, una reordenación y simplificación adecuada de los términos que componen los núcleos conduce a este resultado, como se muestra en el mismo apartado del capítulo II.

El núcleo T_{ij}^n , para desplazamientos constantes, es singular en todo instante de tiempo en varios puntos. Estos son las posiciones ocupadas por los frentes de las ondas P y S en el instante t , así como sus 'colas' es decir las posiciones ocupadas por estos frentes en el instante $t - \Delta t$. Esto se pone de manifiesto gráficamente en la figura II.14, en la que se representan frente a la distancia r , algunas componentes de estos núcleos.

Se ha analizado la dependencia de las discretizaciones espacial y temporal adoptadas. Esta se ha caracterizado mediante el parámetro $\beta = c_1 \Delta t / L$ que mide la proporción de longitud de un elemento recorrida por las ondas P durante un paso de tiempo. Tanto para una discretización espacial de elementos constantes, como de elementos parabólicos, se ha encontrado que los resultados más estables y precisos se obtienen para valores de β cercanos a la unidad. Se han estudiado mallas no uniformes de elementos encontrándose el mismo óptimo, referido a la longitud de un elemento medio.

También se ha comprobado que, igual que ocurre en otros problemas de la elasticidad, en el caso de la elastodinámica en el dominio del tiempo, los elementos parabólicos son ventajosos frente a los constantes para problemas en que aparezcan deformaciones de flexión, pues representan éstas con mayor precisión y menor coste computacional.

Respecto al análisis de problemas de Fractura Dinámica con el MEC, se ha demostrado la adecuación y versatilidad del método para este tipo aplicaciones resolviendo una serie de problemas muy diversos, de dominios finitos e infinitos, en modos puros o mixtos, y bajo diversas condiciones de contorno. Para el cálculo de los FITD's se ha comprobado que el procedimiento basado en la 'tensión' nodal del elemento a un cuarto singular (K_t) ofrece, en general, mas precisión y estabilidad frente a cambios en la discretización, que aquellos basados en los desplazamientos de los labios de la grieta (K_{u1s} , K_{u2s} , K_{u1n} y K_{u2n}) aunque con éstos también se obtienen muy buenos resultados.

Se han resuelto tres problemas con dominios infinitos, dos de modos simples y uno de modo mixto. La comparación de la solución obtenida mediante el MEC y la analítica de Thau y Lu (1971), demuestra claramente la precisión de la técnica numérica desarrollada.

Para el problema de la lámina finita simétrica en modo I, resuelto por Chen (1975) mediante el MDF, se ha estudiado la solución obtenida con el MEC y diferentes procedimientos de cálculo del FIT (K_t , K_{u1s} , K_{u2s} , K_{u1n} y K_{u2n}). La precisión con todos ellos es muy buena, encontrándose que el factor calculado con la 'tensión' nodal de un E1/4S es el menos sensible a las variaciones de la discretización local de la grieta.

Se han resuelto dos problemas de modo mixto en dominios finitos. Con la

solución obtenida para el primero se corrobora la afirmación hecha por Murti y Valliappan (1986), sobre los resultados erróneos de Chen y Wilkins (1976) para este mismo problema, pues los obtenidos mediante el MEC están claramente de acuerdo con los de los primeros. Igual ocurre con los FIT calculados para el segundo problema de modo mixto. Los calculados mediante el MEC concuerdan con los obtenidos por Murti y Valliappan (1986) mediante el MEF y elementos a un cuarto, pero discrepan, aunque mucho menos que en el caso de los FIT's calculados por Chen y Wilkins (1976) para el problema anterior, con los hallados por Kishimoto, Aoki y Sakata (1980).

En el capítulo IV se presenta una técnica de remallado desarrollada por el autor de esta tesis. En unión de ésta, se estudia la influencia que tiene sobre la ecuación de un grado de libertad el hecho de que el nodo al que pertenece se mueva con velocidad C . Se aproxima linealmente la función de forma móvil, lo que conduce a la existencia de dos nuevos núcleos que se añaden a los existentes en la formulación sin remallado del MEC. La obtención de estos núcleos, definidos por primera vez en esta tesis, se muestra con detalle. Finalmente, se ilustra la bondad del método con algunas aplicaciones de propagación de grietas en modo I, uno sobre un dominio infinito y otro en uno finito.

5.2.- Desarrollos futuros

A partir de la técnica desarrollada en esta tesis pueden abordarse sin dificultad una serie de problemas de gran interés que aún no están totalmente resueltos. Se pueden realizar estudios paramétricos de diferentes configuraciones de dominos fisurados finitos o infinitos. También es de destacar su inmediata aplicación, gracias al procedimiento de las subregiones, a casos de fisuras en dominios que contengan materiales de diferentes propiedades mecánicas. Dentro de los problemas de propagación, puede aplicarse a estudios sísmicos de simulación de generación de terremotos. así como a problemas de 'propagación' o 'aplicación', es decir aquellos en los que la velocidad instantánea de la grieta se determina a partir de un criterio de fractura en función de la tenacidad del material. También es inmediato implementar en el código desarrollado la posibilidad de ciertas no linealidades geométricas a lo largo del tiempo.

Las posibilidades de desarrollo del trabajo presentado en esta tesis son muy variadas y prometedoras. Dentro de la formulación del MEC elastodinámico en el dominio del tiempo para problemas planos puede acometerse la deducción de núcleos fundamentales utilizando funciones de interpolación de orden superior. También es necesario encontrar procedimientos de truncamiento de la influencia de los pasos anteriores sobre al actual, en el algoritmo paso a paso desarrollado, para disminuir el coste computacional. Existe una publicación muy reciente (Silva, 1989) que estudia esta posibilidad en la formulación del MEC para la ecuación de ondas. El autor de esta tesis ha comenzado ya algunos estudios sobre este tema.

La formulación para problemas de propagación de grietas puede mejorarse desarrollando en el tiempo la función de forma móvil en serie hasta

su término de segundo orden. Con esta aproximación, la formulación sería, en cierto sentido, exacta pues, si la función de forma es parabólica en la variable espacial, también lo será en la temporal si la velocidad lo es durante cada paso de tiempo.

La ampliación de esta formulación al caso tridimensional es necesaria para estudiar una serie de aspectos de radical interés en la Mecánica de la Fractura, como son los efectos de la forma del borde de grieta y las condiciones mixtas de deformación y tensión plana que aparecen en los puntos del frente de la grieta en los especímenes reales. Con la formulación tridimensional se podrían abordar problemas más realistas de la Fractura Dinámica que aparecen en la Ingeniería.

Es de interés el estudio y desarrollo de formulaciones alternativas del MEC para problemas de propagación de grietas, considerando como solución fundamental la correspondiente a una carga móvil en el espacio bi- y/o tridimensional. También es prometedor, para este objetivo, el concepto de densidad de dislocaciones (Crouch, 1981) desarrollado para el caso de Fractura Estática.

REFERENCIAS

- Abascal,R. (1984), Estudio de Problemas Dinámicos en Interacción Suelo-Estructura por el Método de los Elementos de Contorno, Tesis Doctoral, Escuela Sup. Ingenieros Industriales, Universidad de Sevilla.
- Abascal,R., Domínguez,J. (1984), Dynamic Behavior of Strip Footings on Non-Homogeneous Viscoelastic Soils, *Dynamic soil-structure interaction*, D.E.Beskos, T.Krauthammer, I.Vardoulakis, eds., A.A.Balkema, Rotterdam, 25-35.
- Aboudi,J. (1976), Numerical Solution of Dynamic Stresses Induced by Moving Cracks, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **9**, 123-137.
- Aboudi,J., Achenbach, J.D. (1981), Arrest of Mode-III Fast Fracture by a Transition from Elastic to Viscoplastic Materials Properties, *J. Appl. Mech.*, **48**, 509-514.
- Achenbach,J.D. (1974), Dynamic Effects in Brittle Fracture, *Mechanics Today*, **1**, S.Nemat y Nasser, eds., Pergamon Press, New York, 1-57.
- Achenbach,J.D., Brind,R.J. (1981), Elastodynamics Stress-Intensity Factors for a Crack Near a Free Surface, *J. Appl. Mech.*, **48**, 539-542.
- Anderson,J.M., Aberson,J.A., King,W.W. (1975), Finite Element Analysis of Cracked Structures Subjeted to Shock Loads, *Computational Fracture Mechanics*, E.F.Rybicki, S.E.Banzley, eds., ASME, New York, 173-184.
- Andrews,D.J. (1985), Dynamic Plane-Strain Shear Rupture with a Slip-Weaking Friction Law Calculated by a Boundary Integral Method, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **75**, 10-21.

- Angel, Y.C., Achenbach, J.D. (1985), Stress Intensity Factors for 3-D Dynamic Loading of a Cracked Half-Space. *J. of Elasticity*, **15**, 89-102.
- Antes, H. (1985), A Boundary Element Procedure for Transient Wave Propagation in Two-Dimensional Isotropic Elastic Media, *Finite Elem. Anal. Des.*, **1**, 313-322.
- Aoki, S., Kishimoto, K., Kondo, H., Sakata, M. (1978), Elastodynamic Analysis of Crack by Finite Element Method Using Singular Element, *Int. J. Fract.*, **14**, 56-68.
- Aoki, S., Kishimoto, K., Izumihara, Y., Sakata, M. (1980), Dynamic Analysis of Cracked Linear Viscoelastic Solids by Finite Element Method Using Singular Element, *Int. J. Fract.*, **16**, 97-109.
- Aoki, S., Kishimoto, K., Sakata, M. (1987), Finite Element Computation of Dynamic Stress Intensity Factors for Rapidly Propagating Crack Using J-integral, *Computational Mechanics*, **2**, 54-62.
- Apse, R.J. (1979), Dynamic Green's Function for Layered Media and Applications to Boundary-Value Problems, *Ph. D. Thesis* University of California.
- Atluri, S.N., Nishioka, T. (1985), Numerical Studies in Dynamic Fracture Mechanics. *Int. J. Fract.*, **27**, 245-261.
- Baker, B.R. (1962), Dynamic Stresses Created by a Moving Crack, *J. Appl. Mech.*, **29**, 449-454.

- Banaugh,R.P., Goldsmith,W., Diffraction of Steady Acoustic Waves by Surfaces of Arbitrary Shape, *J. Acoust. Soc. Am.*, **35**, No. 10, 1590-1601.
- Bazant,Z.P. (1978), Spurious Reflection of Elastic Waves in Nonuniform Finite Element Grids, *Comp. Meth. Appl. Eng.*, **16**, 91-100.
- Bazant,Z.P., Celep,Z. (1980), Spurious Reflection of Elastic Waves in Nonuniform Meshes of Constant and Linear Strain Finite Element, *Comput. Struct.*, **15**, 451-459.
- Bazant,Z.P., Glaziz Jr.,J.L., Achenbach,J.D. (1978), Elastodynamic Fields Near Running Cracks by Finite Elements, *Comput. Struct.*, **8**, 193-198.
- Blandford,G.E., Ingraffea,A.R., Liggett,J.A. (1981), Two Dimensional Stress Intensity Factor Computations Using the Boundary Element Method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **17**, 387-404.
- Benítez,F.G. (1984a), Some Considerations on Dynamic BIEM-I: A Dynamic Program for Two-Dimensional Fracture Mechanics Problems, *Engng. Fract. Mech.*, **20**, 599-611.
- Benítez,F.G. (1984b), Some Considerations on Dynamic BIEM-II: Applications to Two-Dimensional Fracture Mechanics Problems, *Engng. Fract. Mech.*, **20**, 613-622.

- Beskos,D.E. (1987), Numerical Method in Dynamic Fracture Mechanics, *EUK 11300 EN, Commission of the European Communities* Joint Research Centre, Ispra Establishment.
- Betti,E. (1872), Teoria dell Elasticita, *Il Nuovo Cimento*, t. 7-10.
- Brebbia,C.A., Domínguez,J. (1989), Boundary Elements: An Introductory Course, *CMP McGraw-Hill*
- Burridge,R. (1969), The Numerical Solution of Certain Integral Equations with Non-Integrable Kernels arising in the Theory of Crack Propagation and Elastic Wave Diffraction, *Proc. Roy. Soc., London, A* **265**, 353-381.
- Clebsch,A. (1863), Uber die Reflexion an Einer Kugelflache, *Journal fur die Reine und Auge Wandte Mathematic*, Bd. **61**, S.195.
- Clough,R.W., Penzein,J. (1975), *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill.
- Cole,D.M., Kosloff,D.D., Minster,J.B. (1978), A Numerical Boundary Integral Equation Method for Elastodynamics I, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **68**, 1331-1357.
- Cruse,T.A. (1968), Numerical Solution in Three Dimensional Elastostatic, *Int. J. Solids Struc.*, **5**, 1259-1274.
- Cruse,T.A., Rizzo, F.J. (1968), A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem. I, *J. Math. Anal. and Appl.*, **22**, No. 1, 244-259.

- Cruse, T.A., Swedlow, J.L. (1971), Formulation of Boundary Integral Equations of Three Dimensional Elasto-Plastic Flow, *Int. J. Solids Struct.*, **7**, 1673-1683.
- Cruse, T.A., Vanburen, W. (1971), Three Dimensional Elastic Stress Analysis of a Fracture Specimen with an Edge Crack, *Int. J. Frac. Mech.* **7**, No. 1, 1-15.
- Chen, Y.M. (1975), Numerical Computation of Dynamic Stress Intensity Factors by a Lagrangian Finite-Difference Method (the HEMP code), *Engng. Fract. Mech.*, **7**, 653-660.
- Chen, Y.M., Wilkins, M.L. (1976), Fracture Analysis with a Three-Dimensional Time-Dependent Computer Program, *Int. J. Fract.*, **12**, 607-617.
- Chen, Y.M., Wilkins, M.L. (1977), Numerical Analysis of Dynamic Crack Problems, *Elastodynamic Crack Problems*, Vol. 4 of Mechanics of Fracture, G.C. Sih, ed., Noordhoff, Leyden, 295-345.
- Chirino, F., Domínguez, J. (1989), Dynamic Analysis of Cracks Using Boundary Element Method, *Engng. Fract. Mech.*, **34**, No. 5/6, 1051-1061.
- Das, S. (1980), A Numerical Method for Determination of Source Time Functions for General Three Dimensional Rupture Propagation, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **62**, 591-604.
- Das, S. (1981), Three Dimensional Spontaneous Rupture Propagation and Implications for the Earthquake Source Mechanics, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **67**, 375-393.

- Das,S. (1985), Application of Dynamic Shear Crack Models to the Study of the Earthquake Faulting Process, *Int. J. Fract.*, **27**, 263-276.
- Das,S., Aki,K. (1977), A Numerical Study of Two-Dimensional Spontaneous Rupture Propagation, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **50**, 643-668.
- Das,S., Kostrov,B.V. (1987), On the Numerical Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Dynamic Shear Crack Problems, *J. Appl. Mech.*, **54**, 99-104.
- De Hoop (1959), Representations Theorems for the Displacement in an Elastic Solid and Their Applications to Elastodynamics Diffraction Theory. *Ph.D. Thesis*, Technische Hogeschool, Delft.
- Domínguez,J. (1978a), *Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations*, Report. No. R78-20, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge MA.
- Domínguez,J. (1978b), *Response of Embedded Foundations to Traveling Waves* Report. No. R78-24, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge MA.
- Domínguez,J. (1989), *Elastostatics* Boundary Element Methods in Structural Analysis, D.E.Beskos, ed. American Society of Civil Engineers.
- Domínguez,J., Gallego,R. (1989a), On the Time Domain Element Method for Elastodynamic Problems, *Computer & Mathematics with Applications* (en prensa).

- Domínguez,J., Gallego,R. (1989b), Factores Dinámicos de Intensidad de Tensión en Problemas Elásticos Transitorios, *Actas VI Encuentro del Grupo Español de Fractura* J.Domínguez, J.García-Lomas, A.Navarro, eds., Sevilla, 183-192.
- Domínguez,J., Gallego,R. (1989c), Time Boundary Element: A Comparative Study, *Proc. 11th Int. Conf. on Boundary Element Method*, Advances in Boundary Element, C.A.Brebbia, J.J.Connor, eds., CMP & Springer-Verlag, Southampton-Berlin, 3, 319-329.
- Domínguez,J., Gallego,R. (1989d), Time Boundary Element Analysis of Two-Dimensional Crack Problems, *Int. Symp. on Boundary Element Methods* Advances in Solids and Fluids Mechanics (en prensa).
- Eason,G., Fulton,J., Sneddon,I.N. (1956), The Generation of Waves in an Infinite Elastic Solid by Variable Body Forces, *Philos. Trans. Roy. Soc.*, London, Ser. A248, 575-607.
- Eringen,A.C., Suhubi,E.S. (1975), *Elastodynamics* Vol. II: 'Linear Theory', Academic Press, New York.
- François,D. (1979), Dynamic Crack Propagation and Arrest, en Developments in Pressure Vessel Technology-1: Flaw Analysis, *Applied Science*, R.W. Nichols, ed., London,151-167.
- Freund,L.B. (1972), Crack Propagation in an Elastic Solid Subjected to General Loading - I: Constant Rate of Extension, *J. Mech. Phys. Solids* 20, 129-140.

- Freund, L.B. (1972), Crack Propagation in an Elastic Solid Subjected to General Loading - II: Non-Uniform Rate of Extension, *J. Mech. Phys. Solids*, **20**, 141-152.
- Freund, L.B. (1973), Crack Propagation in an Elastic Solid Subjected to General Loading - III: Stress Wave Loading, *J. Mech. Phys. Solids*, **21**, 47-61.
- Freund, L.B. (1976), Dynamic Crack Propagation, *Mech. of Fract.*, AMD, **19**.
- Freund, L.B. (1976), The Analysis of Elastodynamic Crack Tip Stress Fields, *Mechanics Today*, **3**, S.Nemat y Nasser, eds., Pergamon Press, New York, 55-91.
- Gallego, R., Domínguez, J. (1988), Análisis Mediante Elementos de Contorno Constantes de Problemas Elastodinámicos Bidimensionales en el Dominio del Tiempo, *VII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Anales de Ingeniería Mecánica, **6**, No.3, 85-90.
- Gallego, R., Domínguez, J. (1989), Factores de Intensidad de Tensión Dinámicos en Modo Mixto, *VIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Anales de Ingeniería Mecánica, **7**(3), 113-117.
- Gallego, R., Domínguez, J. (1990), A Unified Formulation of Two Existing Time-Domain Boundary-Element Approaches, *Commun. Appl. Numer. Meth.*, **6**, 17-25.
- Geis, M. (1989), Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode, *Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum*.

- Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M. (1965), *Tables of Integrals, Series and Products* Academic Press Inc., London.
- Hahn, G.T., Hoagland, R.G., Kanninen, M.F., Rosenfield, A.R. (1973), The Characterization of Fracture Arrest in a Structural Steel, *Pressure Vessel Technology*, Part II, ASME, New York, 981-994
- Irwin, G.R. (1958), *Fracture*, Handbuch der Physik, Vol.6, S. Flugge ed., Springer-Verlag, Berlin, 551-590.
- Itou, S. (1978), Dynamic Stress Concentration Around Two Coplanar Griffith Cracks in an Infinite Elastic Medium, *J. Appl. Mech.*, **45**, 803-806.
- Itou, S. (1980), Transient Analysis of Stress Waves Around Two Coplanar Griffith Cracks Under Impact Load, *Engng. Fract. Mech.*, **13**, 349-356.
- Jawson, M.A. (1963), Integral Equation Methods in Potential Theory, I, *Proc. Royal Soc. A*, Vol. **275**, 23-32.
- Jones, D.S. (1966), *Generalized Functions* McGraw-Hill, London.
- Kalthoff, J.F. (1985), On the Mechanics of Dynamic Fracture Phenomena, *Elastic-Plastic Fracture Mechanics*, L.H. Larsson, ed., D.Reidel Publ. Co., Dordrecht, 479-507
- Kaninen, M.F. (1978), A Critical Appraisal of Solution Techniques in Dynamic Fracture Mechanics. *Proc. 1st. Int. Conf. of Numerical Methods in Fracture Mechanics*, A.R. Luxumore, D.R. J. Owen, eds., Quadrant, Swansea, 612-633.

- Kanninen, M.F., Popelar, C.H. (1985), *Advanced Fracture Mechanics*, Oxford Univ. Press, New York
- Karabalis, D.L., Beskos, D.E. (1984), Earthquake response of 3-D Foundations by the Boundary Element Method, *Proc. of the 8th World Conf. on Earthquake Eng.*, San Francisco CA.
- Keegstra, P.N.R. (1976), A Transient Finite Element Crack Propagation Model for Nuclear Reactor Pressure Vessel Steels, *J. Inst. Nucl. Engrs.*, **17**(4), 89-96.
- Kishimoto, K., Aoki, S., Sakata, M. (1980), Dynamic Stress Intensity Factors Using J-integral and Finite Element Method, *Eng. Frac. Mech.*, **13**, 387-394.
- Kobayashi, S. (1979), Dynamic Fracture Analysis by Dynamic Finite Element Method - Generation and Propagation Analyses, *Nonlinear and Dynamic Fracture Mechanics*, ASME, New York, 19-36.
- Kobayashi, S. (1986), Some Applications of Boundary Element Method to Geodynamics, *Computational Mechanics '86*, G.Yagawa, S.N.Atluri, eds., Springer-Verlag, Tokyo, XI.9-XI.14.
- Kuprazde, V.D. (1963), Potential Methods in the Theory of Elasticity, *translated from Russian by Israel Program for Scientific Translation*, Jerusalem.
- Kutt, H.R. (1975), Quadrature Formulae for Finite-Part Integrals, *CSIR Special Report, WISK 178*, National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria, Republic of South Africa.

- Lachat,J.C., Watson,J.O. (1976), Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations: a Formulation for Three Dimensional Elastostatics, *Int. J. Mech. Eng.*, **10**, 991-1005.
- Lin,W., Keer,L.M., Achenbach,J.D. (1984), Dynamic Stress Intensity Factor for an Inclined Subsurface Crack. *J. Appl. Mech.*, **51**, 773-779.
- Love,A.E.H. (1944), *A Teatrise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York.
- Mall,S. (1980), Finite Element Analysis of Stacionary Cracks in Time Dependent Stress Fields, *Proc. 2nd Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, D.R.J.Owen, A.R.Luxumore, eds., Pineridge Press, Swansea, 539-551.
- Manolis,G.D. (1983), A Comparative Study on Three Boundary Element Method Approaches to Problem in Elastodynamics, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **19**, 73-91.
- Mansur,W.J. (1983), A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method, *Ph. D. Thesis* University of Southampton, U.K.
- Mansur,W.J., Brebbia,C.A. (1983), Transient Elastodynamics Using a Time-Stepping Technique, *Boundary Elements*, C.A.Brebbia, ed., Springer-Verlag, Berlin, 667-698.

- Martínez,J., Domínguez,J. (1984), On the Use of Quarter Point Boundary Elements for Intensity Factor Computations, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **20**, 1941-1950.
- Morgan,J.D., Anderson,J.M., King,W.W. (1974), Elastodynamics of Cracked Structures Using Finite Elements, *AIAA J.*, **12**, 1767-1769.
- Murti,V., Valliappan,S. (1986), The Use of Quarter Point Element in Dynamic Crack Analysis, *Engng. Fract. Mech.*, **23**, 585-614.
- Nakamura,T., Shih,C.F., Freund,L.B. (1985), Computational Methods Based on an Energy Integral in Dynamic Fracture, *Int. J. Fract.*, **27**, 229-243.
- Nardini,D., Brebbia,C.A. (1983), Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method, *Boundary Element*, C.A.Brebbia, T.Futagami, M.Tanaka, eds., Springer-Verlag, Berlin, 719-730.
- Nardini,D., Brebbia,C.A. (1985), Boundary Integral Formulation of Mass Matrices for Dynamic Analysis, *Topics in Boundary Element Research 2*, C.A.Brebbia, ed., Springer-Verlag, Berlin, 191-208.
- Nilsson,F. (1974), A Note on the Stress Singularity at Non-Uniform Moving Crack Tip, *J. Elasticity*, **4**(1), 73-75.
- Nilsson,F., Brickstad,B. (1983), *Dynamic Fracture Mechanics - Rapid Crack Growth in Linear and Nonlinear Materials*. Report N.49, The Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden; también en *Elastic-Plastic Fracture Mechanics*, L.H. Larsson, ed., D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 427-478.

- Nishioka,T., Atluri,S.N. (1980), Numerical Modelling of Dynamic Crack Propagation in Finite Bodies by Moving Singular Elements, Part I: Formulation; Part II: Results, *J. Appl. Mech.*, **47**, 570-576 & 577-582.
- Nishioka,T., Atluri,S.N. (1983a), Path-Independent Integrals, Energy-Release Rates, and General Solutions of Near-Tip Fields in Mixed-Modes Dynamic Fracture Mechanics. *Engng. Fract. Mech.*, **18**, 1-22.
- Nishioka,T., Atluri,S.N. (1983b) A Numerical Study of the Use of Path Independent Integrals in Elastodynamic Crack Propagation. *Engng. Fract. Mech.*, **18**, 23-33.
- Nishioka,T., Stonesifer,R.B., Atluri,S.N. (1981), An Evaluation of Several Moving Singularity Finite Element Method Procedures for Analysis of Fast Fracture, *Engng. Fract. Mech.*, **15**,205-215.
- Niwa,Y., Fukui,T., Kato,S., Fujiki,K. (1980), An Application of the Integral Equation Method to Two-Dimensional Elastodynamics, *Theoretical and Applied Mechanics* **28**, University of Tokyo Press, Tokyo, 281-290.
- Niwa,Y., Hirose,S. (1985), Three Dimensional Analysis of Ground Motion by Integral Equation Method in Wave Number Domain, *Numerical Methods in Geomechanics Nagoya 1985*, T.Kawamoto, Y.Ichikawa, eds., A.A.Balkema, Rotterdam, 143-149.
- Niwa,Y., Kobayashi,S., Azuma,N. (1975), An Analysis of Transient Stress Produced Around Cavities of Arbitrary Shape during the Passage of traveling Waves, *Memoirs Fac. Eng. Kyoto University*, **37**, 28-46.

- Noble,B. (1958), *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique*, Pergamon Press.
- Ostlund,S., Gudmundson,P. (1987), The Application of Moving Finite Elements for the Study of Crack Propagation in Linear Elastic Solids, *Comput. Struc.*, **25**, 765-774.
- Perl,M. (1980), An Improved Dynamic Analysis of an Initiating and Fast-Running Griffith Crack in a Finite Rectangular Plate, *Proc. 2nd Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, D.R.J.Owen, A.R.Luxumore, eds., Pineridge Press, Swansea, 509-523.
- Perl,M., Shmuley,M., Betser,A.A. (1980), On the Dynamic Propagation of a Griffith Crack in a Finite Rectangular Plate, *Engng. Fract. Mech.*, **14**, 143-153.
- Ramulu,M., Kobayashi,S. (1983), Strain Energy Density Fracture Criterion in Elastodynamic Mixed Mode Crack Propagation. *Engng. Fract. Mech.*, **23**, 145-157.
- Radok,J.R.M. (1956), On the Solution of Problems in the Dynamic Plane Elasticity, *Q. Appl. Math.*, **14**, 289-298.
- Rizzo,F.J. (1967), An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics, *Q. Appl. Math.*, **25**, 83-95.
- Rizzo,F.J., Shippy,D.J. (1968), A Formulation and Solution Procedure for the General Non-homogeneous Elastic Inclusion Problem, *Int. J. Solids Struct.*, **4**, 1161-1179.

- Rizzo,F.J., Shippy,D.J. (1970a), A Method of Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies, *J. Compos. Mater.*, **4**, 36-61.
- Rizzo,F.J., Shippy,D.J. (1970b), A Method of Solution for Certain Problems of Transient Heat Conduction, *AIAA Journal*, **8**, No. 11, 2004-2009.
- Rizzo,F.J., Shippy,D.J. (1971), An Application of the Correspondence Principle of Linear Viscoelasticity Theory, *SIAM J. Appl. Math.*, **21**, No. 2, 321-330.
- Rydholm,G., Fredriksson,B., Nilsson,F. (1978), Numerical Investigations of Rapid Crack Propagation, *Proc. 1st Int. Conf. on Numerical Methods in fracture Mechanics* A.R.Luxmore, D.R.J.Owen, eds., Quadrant, Swansea, 660-672.
- Shmuley,M., Alterman,Z.S. (1973), Crack Propagation Analysis by Finite Difference, *J. Appl. Mech.*, **40**, 902.
- Shmuley,M., Perl,M. (1978), A Semi-Moving Grid Based Finite Difference Scheme (the SMF2D code) for Proper Simulation of Crack Propagation, *Int. J. Fract.*, **14**, R205-R208.
- Sih,G.C. (1977), Dynamic Crack Problems: Strain Energy Density Fracture Theory. *Elastodynamic Crack Problems*, Vol.4 of the Mechanics of Fracture, G.C.Sih, ed., Noordhoff, Leyden, 17-47.
- Sih,G.C., Embley,G.T., Ravera,R.S. (1972), Impact Response of a Finite Crack in Plane Extension, *Int. J. Solids Struc.*, **8**,977-993.

- Sih, G.C., Loeber, J.F. (1969), Wave Propagation in an Elastic Solid with a Line of Discontinuity or Finite Crack, *Q. Appl. Math.*, **27**, 193-213.
- Silva Jr., W.L. (1989), Um Esquema Eficiente para a Análise Dinâmica Transiente com o Método dos Elementos de Contorno, *Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro*, Brasil.
- Sladek, J., Sladek, V. (1986), Dynamic Stress Intensity Factors Studied by Boundary Integro-Differential Equations, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **23**, 919-928.
- Sladek, J., Sladek, V. (1987), A Boundary Integral Equation Method for Dynamic Crack Problems, *Engng. Fract. Mech.*, **27**, No. 3, 269-277.
- Spyrakos, C.C. (1984), Dynamic Response of Strip-Foundations by the Time Domain BEM-FEM Method, *Ph. D. Thesis* University of Minnesota, Minn.
- Spyrakos, C.C., Beskos, D.E. (1986), Dynamic Response of Rigid Strip-Foundations by the Time-Domain Boundary Element Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **23**, 1547-1565.
- Spyrakos, C.C., Antes, H. (1986), Time Domain Boundary Element Method Approaches in Elastodynamics: A Comparative Study, *Comput. Struct.*, **24**, 529-535.
- Stokes, G.G. (1849), On the dynamical Theory of Diffraction, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **9**, 793-797.

- Thau, S.A. y Lu, T.H. (1971), Transient Stress Intensity Factors for a Finite Crack in an Elastic Solid Caused by a Dilatational Wave, *Int. J. Solids Struct.*, **7**, 731-750.
- Valliappan, S., Murti, V. (1985), Automatic Remeshing Technique in Quasi-static and Dynamic Crack Propagation, *Proc. Int. Conf. Adv. Series on Numerical Methods: Theory and Applications* (NUMETA 85), Swansea, 107-116.
- Wilkins, M.L. (1964), Calculation of Elastic-Plastic Flow, *Methods in Computational Physics* B. Alder, S. Fernbach, M. Rotenberg, eds., Vol. 3, Academic Press, New York, 211-262.
- Wheeler, L.T., Stenberg, E. (1968), Some Theorems in Classical Elastodynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **31**, 51-90.

APENDICE A

OBTENCION DEL NUCLEO DE TENSIONES POR
DERIVACION DEL NUCLEO DE DESPLAZAMIENTOS

Se trata de obtener el núcleo de tensiones T_{ij}^n a partir del de desplazamientos U_{ij}^n obtenido con funciones de interpolación μ_n constantes, mediante la aplicación de la relación de compatibilidad-comportamiento-equilibrio (II.8), que podemos reescribirla como,

$$T_{ij}^n = \lambda U_{im,m}^n n_j + \mu U_{ij,k}^n n_k + m U_{ik,j}^n n_k \quad (1)$$

Vamos a aplicar esta fórmula a un desplazamiento genérico de la forma,

$$D_{ij} = K \left[A \delta_{ij} + B (2 r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) \right] \quad (2)$$

donde K es una constante, y A y B son dos funciones cualesquiera de \mathbf{x} y de t.

Así, podemos derivar para obtener,

$$D_{ij,k} n_k = K \left\{ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left[\delta_{ij} \left(\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial r} \right) + 2 r_{,i} r_{,j} \left(\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{2B}{r} \right) \right] + \frac{2B}{r} (n_i r_{,j} + n_j r_{,i}) \right\} \quad (3)$$

$$D_{ik,j} n_k = K \left\{ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left[\delta_{ij} \frac{2B}{r} + 2 r_{,i} r_{,j} \left(\frac{\partial B}{\partial r} - \frac{2B}{r} \right) \right] + \frac{2B}{r} n_j r_{,i} + \left(\frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial r} \right) n_i r_{,j} \right\} \quad (4)$$

$$D_{im,m} n_j = K \left(\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{2B}{r} \right) n_j r_{,i} \quad (5)$$

Para derivar estas expresiones se ha utilizado la regla de la cadena teniendo en cuenta que,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = r_{,k} \frac{\partial}{\partial r} \quad ; \quad r_{,k} = \frac{x_k}{r}$$

Sumando (3), (4) y (5) obtenemos la expresión final de F_{ij} ,

$$F_{ij} = \mu K \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[\delta_{ij} Y_1 + 4 r_{,i} r_{,j} Y_2 \right] + Y_3 n_j r_{,i} + Y_1 n_i r_{,j} \right\} \quad (6)$$

donde,

$$Y_1 = \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{2B}{r}$$

$$Y_2 = \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{2B}{r}$$

$$Y_3 = \frac{4B}{r} + \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{2B}{r} \right)$$

(7)

Hecho esto, si observamos la expresión (II.48.1) del núcleo de desplazamientos, se comprueba que cada uno de los términos correspondientes a las dos ondas de dominio del medio, se puede descomponer en dos, formalmente iguales, relativos al frente y la cola de cada onda. De forma general todos estos términos se escriben como,

$$D_{ij}(x) = \frac{1}{4\pi c^2} \left[\text{Ln} \frac{1+R}{x} \delta_{ij} + \frac{R}{x^2} (2 r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) \right]$$

(8)

donde c , es cualquiera de las ondas características del medio, $x = r / (ct)$ y R es $(1 - x^2)^{1/2}$.

Es fácil calcular las derivadas respecto a r de las funciones A y B de este

caso particular. Así,

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1+R}{x} = \frac{-1}{rR}$$

$$\frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{x^2} = \frac{-1}{rR} - \frac{2R}{rx^2}$$

y por tanto, a partir de las ecuaciones (7), se llega a,

$$Y_1 = \frac{4R}{rx^2}$$

$$Y_2 = -\frac{1}{rR} - \frac{4R}{rx^2}$$

$$Y_3 = \frac{4R}{rx^2} - \frac{\lambda}{\mu} \frac{2}{rR}$$

De esta forma se llega a una expresión del tensor $F_{ij}(x)$, que puede reordenarse, agrupando los términos que multipliquen a R , por un lado, y a $1/R$ por el otro.

Haciendo esto se llega a,

$$F_{ij} = \frac{\mu}{4\pi\rho c^2} \frac{1}{r} \left[A_{ij} \frac{R}{x^2} - B_{ij} \frac{1}{R} \right]$$

(9)

siendo

$$A_{ij} = 4 \left[\partial r / \partial \mathbf{n} \left(\delta_{ij} - 4 r_{,j} r_{,i} \right) + n_{,j} r_{,i} + r_{,j} n_{,i} \right]$$

$$B_{ij} = 4 \partial r / \partial \mathbf{n} r_{,j} r_{,i} + 2 \lambda / \mu n_{,j} r_{,i}$$

Si se repite este proceso partiendo de un D'_{ij} cuya A sea la misma que la de D_{ij} y cuya B sea la misma cambiada de signo se obtiene, un F'_{ij} igual al anterior salvo que en este caso los tensores que multiplican a R/x^2 y $1/R$ son,

$$A'_{ij} = -4 \left[\partial r / \partial \mathbf{n} \left(\delta_{ij} - 4 r_{,j} r_{,i} \right) + n_{,j} r_{,i} + r_{,j} n_{,i} \right]$$

$$B'_{ij} = 2 \left[\partial r / \partial \mathbf{n} \left(\delta_{ij} - 2 r_{,j} r_{,i} \right) + n_{,i} r_{,j} \right]$$

El desplazamiento $U_{ij}^{\mathbf{n}}$ puede ponerse como,

$$U_{ij}^{\mathbf{n}} = D_{ij}(\eta_1) - D_{ij}(\theta_1) + D'_{ij}(\eta_2) - D'_{ij}(\theta_2)$$

y por tanto, la tensión vendrá dada por,

$$T_{ij}^{\mathbf{n}} = F_{ij}(\eta_1) - F_{ij}(\theta_1) + F'_{ij}(\eta_2) - F'_{ij}(\theta_2)$$

Si se agrupan en esta expresión los términos que multiplican a los tensores A_{ij} , B_{ij} , A'_{ij} y B'_{ij} el tensor de tensiones en el contorno T_{ij}^n se puede escribir como,

$$T_{ij}^n = \sum_{\alpha=1}^2 T_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) =$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\mu}{4\pi\rho c_{\alpha}} \frac{1}{r} \left[A_{ij}^{(\alpha)} D_{\alpha} - B_{ij}^{(\alpha)} E_{\alpha} \right]$$

donde $A_{ij}^{(\alpha)}$, $B_{ij}^{(\alpha)}$, D_{α} y E_{α} , son exactamente los dados en el capítulo II, en la fórmula (II.48.2).

APENDICE B

OBTENCION DEL NUCLEO DE TENSIONES POR
INTEGRACION TENIENDO EN CUENTA LA FORMA
SINGULAR DE LA INTERPOLACION DE VELOCIDADES

Se trata de obtener el núcleo de tensiones T_{ij}^n a partir de la expresión (II.76), como integral del tensor Z_{ij} más el J_{ij} particularizado en los extremos del intervalo de integración.

La expresión que hay que operar es,

$$T_{ij}^n = \sum_{\alpha=1}^2 T_{ij}^{(\alpha)n}(\mathbf{x}, t; \xi) = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n} Z_{ij}^{(\alpha)} d\tau + \sum_{\alpha=1}^2 \left[J_{ij}^{(\alpha)}(\tau_n) - J_{ij}^{(\alpha)}(\tau_n - \Delta t) \right] \quad (1)$$

la cual procede de la ecuación general (II.71.2) particularizada para el caso de función de forma constante.

El tensor $Z_{ij}^{(\alpha)}$ puede escribirse de la siguiente forma,

$$Z_{ij}^{(\alpha)} = Z1_{ij}^{(\alpha)} \left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{2R_\alpha}{r^2} \right) + Z2_{ij}^{(\alpha)} \frac{c_\alpha t' - r}{R_\alpha^3} \quad (2)$$

donde,

$$Z1_{ij}^{(\alpha)} = \frac{-(-)^{\alpha} \mu}{\pi r c_{\alpha} r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (\delta_{ij} - 4 r_{,i} r_{,j}) + n_{,i} r_{,j} + r_{,i} n_{,j} \right\}$$

$$Z2_{ij}^{(1)} = \frac{-\mu}{2\pi r c_1} \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} 2 r_{,i} r_{,j} + \frac{\lambda}{\mu} r_{,i} n_{,j} \right]$$

$$Z2_{ij}^{(2)} = \frac{\mu}{2\pi r c_2} \left[\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (-\delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j}) - n_{,i} r_{,j} \right]$$

Las integrales que hay que hacer se pueden poner en función de las ya resultas en el capítulo IV (ecuaciones 37a-37j), como

$$I = \int_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n} \left(\frac{1}{R} + \frac{2R}{r^2} \right) d\tau = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{r} + \frac{2}{r^2} \underline{2} \right]_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n} = \left[-\frac{t'}{r^2} R \right]_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n}$$

$$II = \int_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n} \frac{c(t-t) - r}{R^3} d\tau = \frac{1}{c} \left[(ct - r) \underline{3} - \underline{3} \right]_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n} = \left[\frac{1}{cR} - \frac{t'}{rR} \right]_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n}$$

Por otra parte el tensor $J_{ij}^{(\alpha)}$ particularizado en los extremos de

integración da, precisamente,

$$J_{ij}^{(\alpha)}(\tau_n) - J_{ij}^{(\alpha)}(\tau_n - \Delta t) = -Z2_{ij}^{(\alpha)} \frac{1}{c_\alpha R_\alpha} \Bigg|_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n}$$

Sumando estos términos a los que provienen de la integral del tensor $Z_{ij}^{(\alpha)}$, se obtiene,

$$T_{ij}^{(\alpha)} = Z1_{ij}^{(\alpha)} \frac{-t' R_\alpha}{r^2} \Bigg|_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n} + Z2_{ij}^{(\alpha)} \frac{-t'}{r R_\alpha} \Bigg|_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n}$$

(3)

Teniendo en cuenta las definiciones de las variables η_α y θ_α , podemos escribir,

$$\frac{-t' R_\alpha}{r^2} \Bigg|_{\tau_n - \Delta t}^{\tau_n} = \frac{\sqrt{1 - \eta_\alpha^2}}{c_\alpha \eta_\alpha^2} - \frac{\sqrt{1 - \theta_\alpha^2}}{c_\alpha \theta_\alpha^2}$$

$$\frac{-t'}{r R_\alpha} \begin{vmatrix} \tau_n \\ \tau_n - \Delta t \end{vmatrix} = \frac{1}{r \sqrt{1 - \eta_\alpha^2}} - \frac{1}{r \sqrt{1 - \theta_\alpha^2}}$$

Sustituyendo estas igualdades en la ecuación (3) y con la definición dada de los tensores $Z1_{ij}^{(\alpha)}$ y $Z2_{ij}^{(\alpha)}$ se obtiene de nuevo el tensor $T_{ij}^{(\alpha)}$ de la ecuación (II.48.2).