

UNIVERSIDAD DE GRANADA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

TESIS DOCTORAL

APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE
CONTORNO A LA RESOLUCION DEL PROBLEMA
INVERSO EN PLASMODINAMICA

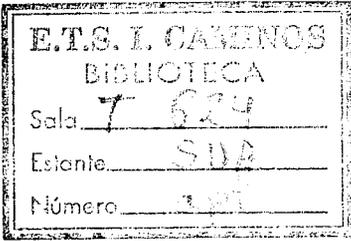
PROFESOR TITULAR: Prof. FRANCISCO J. TER SUAREZ MONTANA

DIRECCION: Prof. RAFAEL C. FIGUEROA SEVILLA

GRANADA, NOVIEMBRE 1988

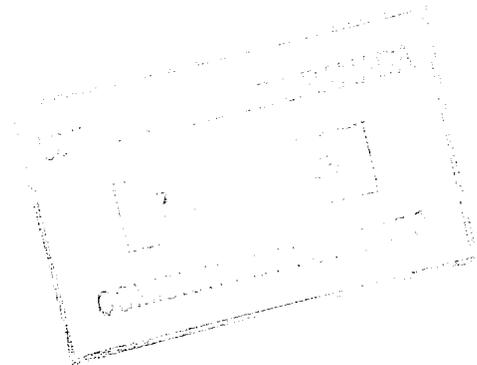
Francisco J. Suarez Montaña

98/99



TESIS DOCTORAL

APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO A LA RESOLUCION DEL PROBLEMA INVERSO EN ELASTODINAMICA



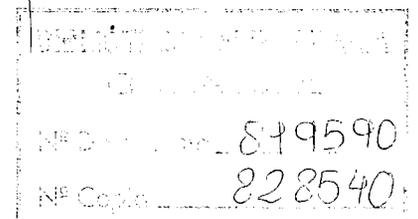
PRESENTADA POR: **Prof. FRANCISCO JAVIER SUAREZ MEDINA**

DIRIGIDA POR: **Prof. RAFAEL GALLEGO SEVILLA**

Handwritten signature of Francisco Javier Suarez Medina

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA CIVIL
UNIVERSIDAD DE GRANADA

GRANADA, NOVIEMBRE 1998



INDICE

1.- INTRODUCCION AL PROBLEMA INVERSO

- 1.1.- Nociones generales.
- 1.2.- La ecuación integral de Abel.
- 1.3.- Problemas inversos en mecánica del sólido.
 - 1.3.1.- Tomografía.
- 1.4.- Problemas mal planteados.
- 1.5.- Planteamiento inverso de los problemas de potencial.

2.- FORMULACION INTEGRAL DE LOS PROBLEMAS DE POTENCIAL

- 2.1.- Primera identidad de Green.
- 2.2.- Segunda identidad de Green.
- 2.3.- Funciones armónicas.
- 2.4.- Solución fundamental.
 - 2.4.1.- Estudio de la función $1/r$ en dominios tridimensionales.
 - 2.4.2.- Estudio de la función $\ln(1/r)$ en dominios bidimensionales.
 - 2.4.3.- La solución fundamental es una función armónica.
- 2.5.- Tercera identidad de Green.
 - 2.5.1.- Dominios tridimensionales.
 - 2.5.2.- Dominios bidimensionales.
- 2.6.- Fórmula de Green.
- 2.7.- Propiedad fundamental de las funciones armónicas.
- 2.8.- Teoremas de unicidad.
 - 2.8.1.- Teorema 1.
 - 2.8.2.- Teorema 2.
- 2.9.- Problemas interiores de contorno.
 - 2.9.1.- Problema de Dirichlet.
 - 2.9.2.- Problema de Neumann.

3.- ELASTODINAMICA LINEAL

- 3.1.- Ecuaciones básicas de la elastodinámica lineal.
 - 3.1.1.- Ecuación del movimiento.
 - 3.1.2.- Relaciones cinemáticas.
 - 3.1.3.- Dilatación cúbica.
 - 3.1.4.- Vector rotación.

- 3.1.5.- Ecuaciones constitutivas.
- 3.2.- El problema elastodinámico.
 - 3.2.1.- Ecuaciones básicas.
 - 3.2.2.- Condiciones de contorno.
 - 3.2.3.- Condiciones iniciales.
 - 3.2.4.- Ecuación de Navier.
 - 3.2.5.- Constantes de Stokes.
 - 3.2.6.- Expresión de la ecuación de Navier en función de las constantes de Stokes.
 - 3.2.7.- Ondas elásticas.
- 3.3.- Teorema de reciprocidad.
 - 3.3.1.- Producto de convolución.
 - 3.3.2.- Teorema de reciprocidad.
- 3.4.- Estados bidimensionales.
 - 3.4.1.- Movimiento plano.
 - 3.4.2.- Movimiento antiplano.
- 3.5.- Estados elastodinámicos armónicos en el tiempo.
 - 3.5.1.- Variable compleja.
 - 3.5.2.- Estados armónicos en el tiempo.
 - 3.5.3.- Teorema de reciprocidad en elastodinámica armónica en el tiempo.
 - 3.5.4.- Estados antiplanos armónicos en el tiempo.
 - 3.5.5.- Teorema de reciprocidad en elastodinámica antiplana armónica en el tiempo.
- 3.6.- Estado elastodinámico fundamental.
 - 3.6.1.- Solución fundamental.
 - 3.6.2.- Teorema de reciprocidad. Ecuación integral.
- 3.7.- Ecuación integral del Método de los elementos de contorno.

4.- EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

- 4.1.- Ecuación integral del Método de los Elementos de Contorno.
- 4.2.- Ecuación integral en el contorno.
- 4.3.- Aproximación del contorno mediante elementos cuadráticos.
- 4.4.- Discretización de la ecuación integral del MEC.

5.- FORMULACION INTEGRAL PARA LA RESOLUCION DEL PROBLEMA INVERSO.

- 5.1.- Planteamiento del problema inverso de identificación.
- 5.2.- Consideraciones geométricas.
- 5.3.- Desarrollos en serie.

- 5.4.- Ecuación integral de las variaciones en el contorno.
- 5.5.- Ecuación integral en el contorno.
 - 5.5.1.- Ecuación integral cuando el nodo de colocación pertenece al contorno conocido.
 - 5.5.2.- Ecuación integral cuando el nodo de colocación pertenece al contorno variable.
- 5.6.- Condiciones de contorno del problema inverso.
- 5.7.- Ecuación integral de las variaciones en el contorno.

6.- DISCRETIZACION DE LA ECUACION INTEGRAL.

- 6.1.- Introducción.
- 6.2.- Parametrización de la evolución geométrica impuesta al contorno variable.
 - 6.2.1.- Análisis de deformaciones.
 - 6.2.2.- Campo de deformaciones homogéneo.
 - 6.2.3.- Formación de la matriz paramétrica.
 - 6.2.4.- Parametrización de la variación geométrica en el nodo de colocación.
 - 6.2.5.- Parametrización de la variación de m.
 - 6.2.6.- Grados de libertad.
- 6.3.- Discretización de los términos de la ecuación integral.
 - 6.3.1.- Formación de la matriz H.
 - 6.3.2.- Formación de la matriz delta.
- 6.4.- Formación de un sistema lineal de ecuaciones.

7.- INTEGRACION DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES.

- 7.1.- Introducción.
- 7.2.- Descomposición en partes estática y dinámica de las funciones *solución fundamental*.
- 7.3.- Integración de las funciones elementales.
 - 7.3.1.- Análisis de singularidades.

8.- APLICACIONES NUMERICAS.

- 8.1.- Introducción.
- 8.2.- Aplicaciones numéricas.
 - 8.2.1.- Función residuo.
 - 8.2.2.- Aplicaciones numéricas 01-05.
 - 8.2.3.- Aplicaciones numéricas M1,M2,M3.

9.- CONCLUSIONES

- 9.1.- Introducción.**
- 9.2.- Principales contribuciones de esta tesis.**
- 9.3.- Futuras líneas de investigación.**

APENDICE A.- CALCULO INTEGRAL

- A.1.- Cálculo de integrales regulares.**
 - A.1.1.- Integración numérica mediante el empleo de fórmulas de cuadratura por puntos de Gauss.**
 - A.1.2.- Fórmula de Gauss-Legendre.**
 - A.1.3.- Fórmula logarítmica de Gauss.**
- A.2.- Integrales impropias de segunda especie.**
 - A.2.1.- Integrales impropias.**
 - A.2.2.- Integrales impropias de segunda especie.**
 - A.2.3.- Valor principal de Cauchy.**
 - A.2.4.- Integrales p de segunda especie.**
 - A.2.5.- Análisis de integrales impropias de segunda especie.**
 - A.2.6.- Regularización de integrales.**
- A.3.- Integrales hipersingulares.**
 - A.3.1.- Integrales hipersingulares.**
 - A.3.2.- Parte finita de una integral hipersingular.**
 - A.3.3.- Integrales hipersingulares en el Método de los Elementos de Contorno.**
 - A.3.4.- Regularización de integrales hipersingulares.**

Capítulo 1

INTRODUCCION AL PROBLEMA INVERSO

Pretendemos en el primer capítulo de esta tesis, hacer una rápida exposición sobre el doble planteamiento, directo e inverso, de algunos problemas de la ciencia; exponer algunos ejemplos de aplicación práctica de los planteamientos inversos, especialmente en el campo de los ensayos no destructivos para el análisis de materiales, y, analizar el carácter de *problemas mal planteados* de los problemas inversos. Por último, comentaremos distintas alternativas para hacer el planteamiento inverso de los problemas de potencial, siendo una de estas alternativas el tema desarrollado en esta tesis doctoral.

1.1 Nociones generales.

La mayoría de los problemas matemáticos en ciencia y tecnología, son problemas invertibles, es decir, susceptibles de un planteamiento inverso. Generalmente, el estudio del planteamiento inverso de un problema dado es la única vía para el análisis de los resultados experimentales disponibles. A menudo, estos problemas tratan de la determinación de propiedades en regiones inaccesibles a la observación, como ocurre en geofísica y medicina. Actualmente, uno de los principales problemas de la física matemática consiste en estudiar la información contenida en un problema invertible, es decir, encontrar qué parámetros internos de un sistema inaccesible de medir pueden ser determinados únicamente por mediciones.

En la ciencia aplicada, la interpretación de las observaciones experimentales es una tarea de fundamental importancia. La mayor parte de los parámetros físicos f no se prestan por sí mismos a la medición directa, y el efecto g es a menudo el único valor medible. Entre f y g existen relaciones basadas en leyes físicas que podrán ser expresadas como ecuaciones de primera o segunda especie: $Af = g$, o $Af + f = g$, con f a determinar por cálculo.

El cálculo de Af , dando datos de f es el problema directo. Típicamente no ofrece mayores dificultades, y es posible aplicar los métodos matemáticos. La determinación de f en la relación $Af = g$, dando g , se denomina problema inverso.

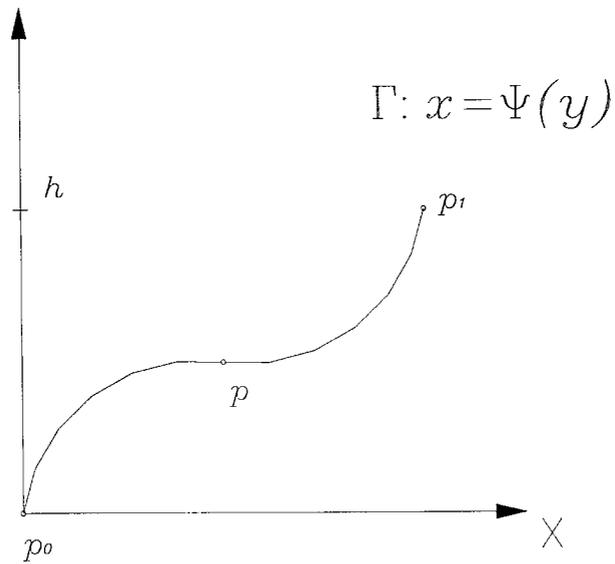
Utilizando el símil empleado por el francés Paul Germain en el prefacio de la obra de H.D. Buy titulada *INTRODUCTION AUX PROBLÈMES INVERSES EN MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX*, referencia bibliográfica [8], obra en la que se exponen de forma clara los problemas inversos más frecuentemente planteados en la mecánica de sólidos, el planteamiento inverso de un problema trata de determinar las propiedades físicas de un sistema considerado como una *boîte noire* que no se puede abrir, a partir de las respuestas de este sistema sometido a sollicitaciones conocidas. ¿Es ello posible?. ¿Cómo hacerlo de la forma más económica?. ¿Cómo elegir las sollicitaciones a ejercer?. La respuesta a estas preguntas constituye en la actualidad el objetivo de numerosas líneas de investigación.

1.2 La ecuación integral de Abel.

El primer problema inverso plasmado en una ecuación integral de primera especie fue resuelto por N.H. Abel en 1823. Supongamos que deslizamos una partícula por una pendiente sin rozamiento, desde una altura h y medimos el tiempo $t(h)$. *¿Podremos determinar el perfil Γ de la pendiente?*

El planteamiento directo del problema consiste en la determinación del tiempo $t(h)$ conocido el perfil Γ . El planteamiento inverso consiste en determinar la curva Γ , a partir de un número m de medidas del tiempo para diferentes alturas, $t_1(h_1), t_2(h_2), \dots, t_m(h_m)$.

Si la función $V = V(s)$, siendo V la energía potencial de la partícula en una posición genérica s , es una función estrictamente creciente, el problema planteado puede ser resuelto aplicando las leyes de la mecánica del punto material.



Figura~1-1:

Aplicando el principio de conservación de la energía

$$E + V = cte. \quad (1.1)$$

obtenemos la expresión de la velocidad instantánea,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2g(h-y)} \quad (1.2)$$

y por lo tanto la expresión de dt ,

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}} \quad (1.3)$$

suponiendo la curva Γ parametrizada

$$x = \psi(y) \Rightarrow ds = -\sqrt{1 + \psi'(y)^2} dy \quad (1.4)$$

el tiempo total empleado será

$$t = t(h) = \int_{p_1}^{p_0} \frac{ds}{v} = \int_0^h \sqrt{\frac{(1 + \psi'(y)^2)}{2g(h-y)}} dy \quad (1.5)$$

si llamamos

$$\varphi(y) = \sqrt{1 + \psi'(y)^2} \quad (1.6)$$

y llamamos $f(h)$ a la función conocida

$$f(h) = t(h) \sqrt{2g} \quad (1.7)$$

la resolución del problema inverso consistirá en determinar la función desconocida φ , a partir de la Ecuación Integral de Abel:

$$\int_0^h \frac{\varphi(y)}{\sqrt{h-y}} dy = f(h), \quad h > 0 \quad (1.8)$$

Si la pendiente tiene un máximo y un mínimo, el problema no puede resolverse con unicidad. Una exposición detallada de la Ecuación Integral de Abel la podemos encontrar en las referencias bibliográficas [12] y [2].

Otros problemas inversos se formulan mediante la Ecuación Integral de Abel; por ejemplo, la determinación de la forma de una montaña a través de mediciones de luz (ondas electromagnéticas). La zona oculta de la montaña no puede ser identificada desde un punto de observación.

En el campo de la óptica son frecuentes igualmente los problemas inversibles. Frente al problema directo consistente en el cálculo de emisiones, dispersiones y propagación de una radiación basándonos en parámetros conocidos, se plantea el problema inverso, consistente en la determinación de los parámetros requeridos, difusores o propagación media, mediante la medida de la radiación recibida por un detector.

1.3 Problemas inversos en la mecánica del sólido.

En el campo de conocimiento de la mecánica del sólido, el planteamiento de problemas inversos es de gran utilidad para la determinación mediante procedimientos no destructivos de las propiedades del material. La detección de heterogeneidades en el espesor de una cuba de reactor nuclear, la determinación de la carga crítica de deformación lateral de una estructura mediante el análisis de los cambios de la frecuencia de vibración bajo carga creciente, . . . son ejemplos de aplicación práctica del planteamiento inverso en la mecánica de sólidos.

En la obra de Buy, referencia [8], se exponen los problemas inversos más frecuentemente planteados en la mecánica de sólidos. A continuación comentaremos, de forma somera, los principios teóricos de la tomografía, por tratarse del problema inverso más significativo en el campo de la experimentación no destructiva de materiales, y ofrecernos una primera aproximación al carácter de *problema mal planteado*, de los problemas inversos.

1.3.1 Tomografía.

La radiografía por *rayos X* es uno de los procedimientos utilizados para el control de materiales y estructuras, a fin de detectar la presencia de defectos de soldadura, fisuras, inclusiones, etc. Es un procedimiento eficaz para materiales no metálicos como los materiales compuestos, y posiblemente para algunos aceros ferríticos, pero hay que recurrir a rayos más potentes, como los *rayos γ* o los neutrones, para examinar la sección de una cuba de reactor nuclear de 30cm de espesor.

El examen radiológico de la imagen proyectada por los rayos sobre una placa fotográfica puede ser suficiente a los ojos de un experto que sabe reconocer ciertos resultados. Sin embargo, la información obtenida por una sola proyección no permite siempre reconstruir el objeto con todos los detalles. Hay que disponer de un gran número de proyecciones en varias direcciones.

Cuando un rayo L atraviesa el cuerpo, la atenuación a_L del rayo puede ser medida experimentalmente y depende de la naturaleza física del medio atravesado, más precisamente de la absorción local $\mu(x)$ y de la longitud de trayecto del rayo. Podemos expresar por tanto,

$$a_L = \int_L \mu(x) ds \equiv A\mu \quad (1.9)$$

La posición de L en un plano de recorrido del haz, depende de dos parámetros ρ y θ (ecuación $x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta - \rho = 0$).

La transformación $\mu(x_1, x_2) \rightarrow a_L(\rho, \theta)$ cuyo valor en (ρ, θ) viene dado por la integral 1.9, se llama *transformación de Radon*. La identificación de $\mu(x)$ con la ayuda de las magnitudes observables $a_L(\rho, \theta)$, para diferentes rayos L , es el objeto de la tomografía.

Problemas discretos.

Con el fin de examinar los problemas matemáticos y numéricos que se plantean en el problema inverso tomográfico, estudiemos un modelo simple. Se trata de reconstituir la función característica $\mu(x)$ de la letra T formada por cinco pequeños cuadrados, colocados en el interior de un gran cuadrado 3×3 . Para ello, disponemos de las informaciones deducidas de los rayos verticales, horizontales e inclinados $\pm 45^\circ$, pasando por los centros de los pequeños cuadrados, proporcionando al máximo 16 atenuaciones a_i . Utilicemos la aproximación de las funciones constantes a trozos en cada pequeño cuadrado.

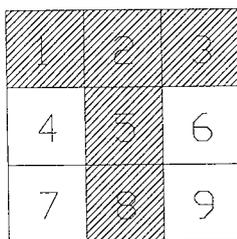


Figura 1-2:

Se trata de determinar las nueve incógnitas $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_9$ conociendo las a_i . En principio, se necesitan al menos 9 rayos distintos. Tomando los tres primeros rayos horizontales, luego los tres siguientes verticales, y por último tres rayos inclinados -45° , se tiene el sistema lineal,

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 3 \quad (1.10)$$

$$\mu_4 + \mu_5 + \mu_6 = 1 \quad (1.11)$$

$$\mu_7 + \mu_8 + \mu_9 = 1 \quad (1.12)$$

$$\mu_1 + \mu_4 + \mu_7 = 1 \quad (1.13)$$

$$\mu_2 + \mu_5 + \mu_8 = 3 \quad (1.14)$$

$$\mu_3 + \mu_6 + \mu_9 = 1 \quad (1.15)$$

$$\mu_7 = 0 \quad (1.16)$$

$$\mu_1 + \mu_5 + \mu_9 = 2 \quad (1.17)$$

$$\mu_3 = 1 \quad (1.18)$$

Nos damos cuenta de que el determinante es nulo, porque la suma de los tres primeros miembros ($\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_9$) es la misma que la de los tres primeros miembros siguientes. Nuestra elección de los rayos que se van a utilizar para la inversión no es del todo juiciosa, puesto que la reconstrucción en este ejemplo es imposible, aunque los datos sean exactos y compatibles.

La compatibilidad de la que se trata es la ortogonalidad del vector segundo miembro con los vectores soluciones de la ecuación homogénea adjunta, relación que se satisface en el ejemplo. En los casos encontrados en práctica, hay que contar siempre con las incertidumbres de las medidas experimentales, que no siempre son compatibles. Por otro lado, en el mejor de los casos (determinante no nulo), el sistema lineal invertible está muy mal condicionado. Todas estas distintas razones indican que el problema inverso tomográfico está mal planteado.

Cuasi soluciones

En presencia de las incertidumbres de los datos experimentales, se construyen cuasi soluciones por diferentes métodos. En la práctica, las soluciones aproximadas en el sentido de los mínimos cuadrados están entre las más utilizadas (M es el conjunto de las μ admisibles). El método de los mínimos cuadrados ponderados es igualmente muy utilizado en los problemas inversos.

Tomografía sísmica: escaner de la tierra.

Una aplicación importante del problema inverso tomográfico es la utilización de las ondas sísmicas P, S y ondas de superficie (Rayleigh, Love) para examinar el manto y el núcleo de la Tierra. Las fuentes sísmicas son naturales, provienen de los seismos aparecidos un poco por

todas partes en el mundo, bajo el manto superficial de la corteza terrestre. Las estaciones de registro de las señales sísmicas están repartidas en el globo y mismo bajo los océanos. El conjunto de las estaciones, completamente sincronizadas, constituye la red GEOSCÓPICA colocada por los geofísicos.

El objetivo de esta operación planetaria es estudiar la estructura del manto profundo, hasta 1000 km, sobre todo las anomalías térmicas, las zonas calientes convectivas que suben de la interfase núcleo-manto, y las inestabilidades termomecánicas.

Los fenómenos físicos utilizados son diversos: variación de la velocidad de las ondas P y S en función de la temperatura y de la densidad, dispersión (variación de velocidad con la frecuencia). La velocidad de propagación de las ondas aumenta en las regiones más frías y disminuye en las regiones más calientes, siguiendo leyes conocidas.

El principio tomográfico consiste entonces en medir el tiempo de recorrido T_{AB} de la onda desde la fuente A hasta la fuente B, dada por la integral de la lentitud

$$T_{AB} = \int_{AB} \frac{1}{c(x)} ds \quad (1.19)$$

La diferencia con la tomografía habitual, por rayos x o γ , es que el trayecto del rayo no es rectilíneo, sino curvo a causa de la inhomogeneidad del medio, trayecto de aumento desconocido. El problema inverso es aún más difícil porque es tridimensional. El problema inverso de la ecuación de las ondas elásticas en un medio no homogéneo sólo puede considerarse por métodos de inversión robustos (poco sensibles a los errores de modelización).

1.4 Problemas mal planteados.

Según Keller, se dice que dos problemas son inversos si la formulación de cada uno de ellos requiere el conocimiento entero o parcial del otro. Según esta definición es obvio que es arbitrario cuál de los dos problemas es el directo y cual de ellos es el inverso. Normalmente uno de los problemas se ha estudiado antes y quizá en más detalle. A este se le suele llamar problema directo, mientras que al otro se le llama inverso.

Hadamard afirma que la modelización matemática de un problema físico está bien planteada

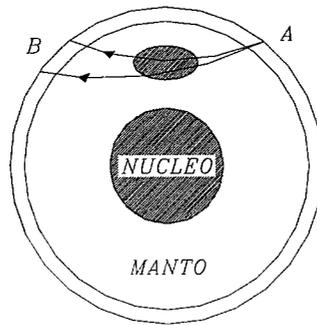


Figura 1-3:

cuando se cumplan estas tres propiedades:

- 1.- Exista una solución del problema (**existencia**).
- 2.- Exista como máximo una solución del problema (**unicidad**).
- 3.- La solución depende continuamente de los datos (**estabilidad**).

Matemáticamente, la existencia de una solución puede ser forzada ampliando el espacio de la solución.

Si un problema tiene más de una solución, entonces es que falta información sobre el modelo. En este caso se añaden propiedades, tales como condiciones en los signos.

El requisito de estabilidad es el más importante. Si un problema carece de la propiedad de estabilidad, entonces es prácticamente imposible calcular la solución porque las medidas o cálculos están afectados por errores inevitables. Si la solución del problema no depende continuamente de los datos, entonces en general la solución calculada no tiene mucho que ver con la verdadera solución.

1.5 Planteamiento inverso de los problemas de potencial.

En el capítulo siguiente se hace una exposición teórica detallada de los problemas de potencial. De forma resumida, podemos exponer el planteamiento directo de un *problema de potencial*, como la determinación de la función potencial $u(\mathbf{x})$, que verifica la ecuación de Laplace en el dominio Ω , de frontera Γ , sometido a condiciones de contorno esenciales y/o naturales:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}) = 0; \quad \mathbf{x} \in \tilde{\Omega} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ q &= \bar{q} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2 \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

siendo

\mathbf{x} : vector de posición de un punto perteneciente a $\tilde{\Omega}$

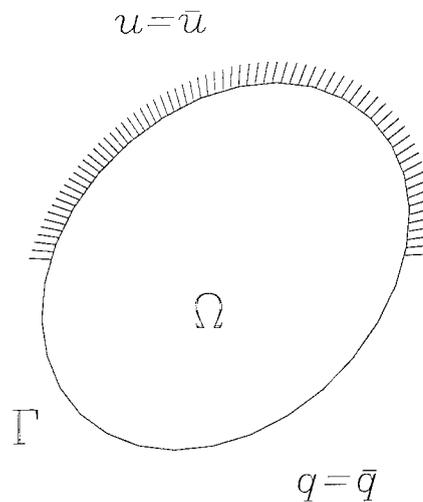
$u(\mathbf{x})$: función potencial

$q(\mathbf{x}) = \mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$: función flujo de potencial

$\mathbf{n}(\mathbf{y})$: vector normal exterior a Γ , en el punto $\mathbf{y} \in \Gamma$.

$\psi(\mathbf{x})$: fuente de potencial, que consideraremos nula, lo que no resta generalidad al problema.

\bar{u}, \bar{q} : valores conocidos de las funciones.



El problema de potencial, tal como se ha expuesto, admite diferentes planteamientos inversos. Siguiendo la publicación de Saigal, podemos considerar dos formas principales de plantear

el problema inverso, el *problema inverso de identificación* y el *problema inverso de reconstrucción*.

En el problema inverso de identificación, una porción del contorno Γ que llamaremos Γ_H es desconocida. Usualmente Γ_H representa el contorno de un hueco en el interior del dominio Ω , cuya posición y geometría no conocemos. Para determinar la posición y geometría de Γ_H , es necesario disponer junto a las condiciones de contorno, de datos adicionales, en forma de medidas experimentales en la parte conocida de Γ , que llamaremos Γ_C .

La resolución del problema inverso de identificación consiste en determinar la posición y geometría de Γ_H a partir de mediciones experimentales en el contorno conocido Γ_C .

Disponemos por tanto de $M = M_u + M_q$ mediciones experimentales de *potencial* y *flujo de potencial* en Γ_C :

M_u : mediciones de potencial.

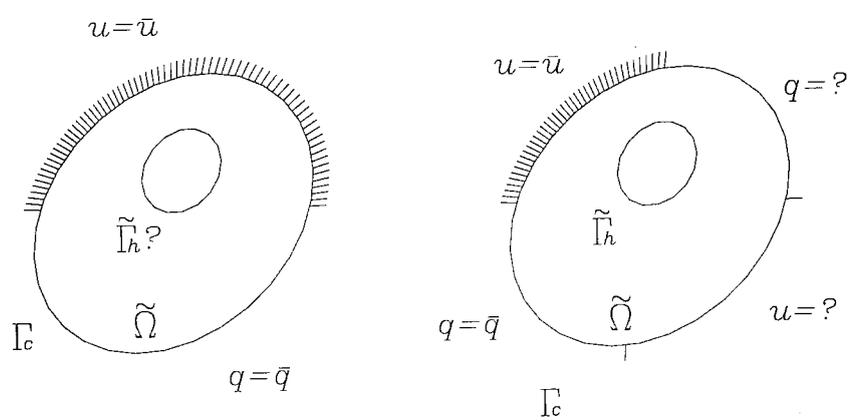
M_q : mediciones de flujo.

De esta forma el *potencial* resulta conocido en algunos puntos de Γ_{C_q} y el *flujo de potencial* resulta conocido en algunos puntos de Γ_{C_u} :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}_\alpha) &= \bar{u}(\mathbf{x}_\alpha), \quad \mathbf{x}_\alpha \in \Gamma_{C_q} \quad \alpha = 1, 2, \dots, M_u \\ q(\mathbf{x}_\beta) &= \bar{q}(\mathbf{x}_\beta), \quad \mathbf{x}_\beta \in \Gamma_{C_u} \quad \beta = 1, 2, \dots, M_q \end{aligned} \quad (1.22)$$

En el problema inverso de reconstrucción, la geometría del problema es determinada, es decir conocemos Γ en su totalidad, pero no conocemos algunas de las condiciones de contorno. El problema surge en casos en los que una porción del contorno es expuesta a condiciones ambientales que no pueden ser valoradas por dificultades físicas o simplemente por inaccesibilidad geométrica. El objetivo del problema inverso de reconstrucción, es la determinación de las condiciones de contorno no conocidas, contando con medidas experimentales suplementarias en el contorno Γ o incluso en el dominio Ω .

En la figura 1-4 se representan ambos planteamientos inversos de los problemas de potencial.



Figura~1-4:

Capítulo 2

FORMULACION INTEGRAL DE LOS PROBLEMAS DE POTENCIAL

2.1 Primera identidad de Green.

Sean u y w funciones escalares uniformes diferenciables de 2º orden en un dominio Ω cuyo contorno es Γ , superficie cerrada, orientable y lisa.

Aplicamos el teorema de la divergencia a la función vectorial diferenciable $u\nabla w$:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u\nabla w) d\Omega = \int_{\Gamma} u\nabla w \cdot d\mathbf{S} \quad (2.1)$$

desarrollando los dos términos de 2.1,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u\nabla w) d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w + u\nabla^2 w) d\Omega = \quad (2.2)$$

$$= \int_{\Gamma} u\nabla w \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Gamma} u \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (2.3)$$

siendo \mathbf{n} el vector normal unitario en los puntos de Γ .

Obtenemos de esta forma la primera identidad de Green:

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w + u \nabla^2 w) d\Omega = \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (2.4)$$

2.2 Segunda identidad de Green.

Aplicando la primera identidad de Green a las funciones w y u obtenemos,

$$\int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla u + w \nabla^2 u) d\Omega = \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (2.5)$$

restando las expresiones 2.4 y 2.5, obtenemos la segunda identidad de Green:

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 w - w \nabla^2 u) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} - w \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \quad (2.6)$$

2.3 Funciones armónicas.

Decimos que una función escalar u diferenciable de segundo orden, es armónica si verifica la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.7)$$

2.4 Solución fundamental.

Se llama *solución fundamental* en dominios tridimensionales y bidimensionales respectivamente a las siguientes funciones:

- Solución fundamental en dominios tridimensionales

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.8)$$

- Solución fundamental en dominios bidimensionales:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \quad (2.9)$$

siendo r la distancia a un punto fijo O llamado *polo*.

Estudiamos a continuación las funciones radiales $\frac{1}{r}$ y $\ln\left(\frac{1}{r}\right)$. Ambas son consideradas como funciones auxiliares que facilitan el estudio de las funciones armónicas.

2.4.1 Estudio de la función $1/r$ en dominios tridimensionales.

Si establecemos el origen del sistema de referencia $OX_1X_2X_3$ en O podemos expresar

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (2.10)$$

de donde

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{-x_i}{r^2} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3x_i^2 - r^2}{r^5} \quad (2.13)$$

teniendo en cuenta la expresión 2.13 podemos expresar

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0 \quad (2.14)$$

salvo cuando $r = 0$, que su valor es indefinido.

2.4.2 Estudio de la función $\ln(1/r)$ en dominios bidimensionales.

Si establecemos el origen del sistema de referencia OX_1X_2 en O podemos expresar

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (2.15)$$

de donde

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) = \frac{-x_i}{r^2} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) = \frac{2x_i^2 - r^2}{r^4} \quad (2.18)$$

teniendo en cuenta la expresión 2.18 podemos expresar

$$\nabla^2 \left(\ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) = \frac{2r^2 - 2r^2}{r^4} = 0 \quad (2.19)$$

salvo cuando $r = 0$, que su valor es indefinido.

2.4.3 La solución fundamental es una función armónica.

Segun hemos visto en las expresiones 2.14 y 2.19, la solución fundamental es una función armónica en su dominio de definición, salvo el el *polo* ($r = 0$), que es un punto de singularidad:

$$\nabla^2 u^* = 0; \quad \text{salvo en el punto } r = 0 \quad (2.20)$$

2.5 Tercera identidad de Green.

Aplicando la segunda identidad de Green a las funciones u y u^* obtenemos la tercera identidad de Green.

2.5.1 Dominios tridimensionales.

Distinguimos dos casos:

- El polo es exterior a Ω :

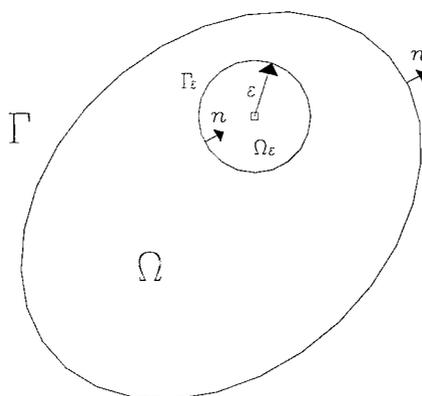
En este caso la función $\frac{1}{r}$ no presenta singularidades y por lo tanto podemos aplicar la expresión 2.6:

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{4\pi r} \nabla^2 u d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.21)$$

- El polo es interior a Ω :

La función $\frac{1}{r}$ presenta una singularidad en el polo, y no podemos aplicar la segunda identidad de Green.

Consideramos un subdominio esférico infinitesimal Ω_ϵ en el entorno del polo, tal como se indica en la figura 1. La función $\frac{1}{r}$ no presenta puntos de singularidad en el dominio reducido $\Omega - \Omega_\epsilon$, por lo que podemos plantear la segunda identidad de Green. El contorno del dominio reducido será el contorno ampliado $\Gamma + \Gamma_\epsilon$.



Figura~2-1:

Mediante una operación de paso al límite obtendremos la solución de nuestro problema

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \left(-\frac{1}{4\pi r} \nabla^2 u \right) d\Omega \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma + \Gamma_\epsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \right\} \quad (2.22)$$

Calculamos las integrales aparecidas en la expresión 2.22:

- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \left(-\frac{1}{4\pi r} \nabla^2 u \right) d\Omega \right\} = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{4\pi r} \nabla^2 u \right) d\Omega$
- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma$
- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \right\} :$

En los puntos de Γ_ϵ podemos expresar

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \nabla r \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = -1 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \quad (2.24)$$

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_\epsilon} \left(u \left(\frac{1}{4\pi r^2} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.25)$$

Para desarrollar el segundo miembro de 2.25 vamos a trabajar en coordenadas esféricas

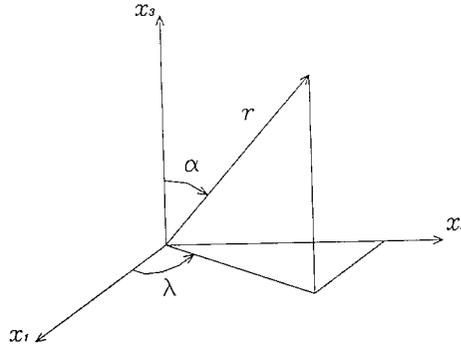


Figura ~2-2:

$$d\Gamma = r^2 \sin \alpha d\alpha d\lambda \quad (2.26)$$

sustituyendo en el segundo miembro de la igualdad 2.25

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\epsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma &= \iint_{\Gamma_\epsilon} \left(u \left(\frac{1}{4\pi \epsilon^2} \right) - \frac{1}{4\pi \epsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \epsilon^2 \sin \alpha d\alpha d\lambda = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_\epsilon} \left(u - \epsilon \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \sin \alpha d\alpha d\lambda = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_\epsilon} u \sin \alpha d\alpha d\lambda - \frac{1}{4\pi} \epsilon \iint_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \sin \alpha d\alpha d\lambda \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \right\} = \\
& = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \iint_{\Gamma_\varepsilon} u \sin \alpha d\alpha d\lambda \right\} - \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \iint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \sin \alpha d\alpha d\lambda \right\} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

dato el caracter infinitesimal de Γ_ε , podemos considerar la función u constante en Γ_ε e igual al primer término de su desarrollo en serie

$$u = u^o + TOS \Rightarrow u \simeq u^o \quad (2.29)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \iint_{\Gamma_\varepsilon} u \sin \alpha d\alpha d\lambda \right\} = u^o \iint_{\Gamma_\varepsilon} \sin \alpha d\alpha d\lambda \quad (2.30)$$

por ser la función $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ regular en el dominio Γ_ε , la expresión $\iint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \sin \alpha d\alpha d\lambda$ tendrá un valor finito, por lo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \iint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \sin \alpha d\alpha d\lambda \right\} = 0 \quad (2.31)$$

queda por tanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \right\} = \frac{1}{4\pi} u^o \iint_{\Gamma_\varepsilon} \sin \alpha d\alpha d\lambda \quad (2.32)$$

calculando

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon} \sin \alpha d\alpha d\lambda = 8 \int_{\lambda=0}^{\lambda=\pi/2} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/2} \sin \alpha d\alpha d\lambda = 4\pi \quad (2.33)$$

obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \right\} = u^o \quad (2.34)$$

la tercera identidad de Green en dominios tridimensionales queda por tanto,

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{1}{4\pi r} \nabla^2 u \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) - \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma + u^o \quad (2.35)$$

2.5.2 Dominios bidimensionales.

Distinguimos dos casos:

- El polo es exterior a Ω :

En este caso la función $\ln \left\{ \frac{1}{r} \right\}$ no presenta singularidades y por lo tanto podemos aplicar la expresion 2.6:

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \nabla^2 u d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.36)$$

- El polo es interior a Ω :

La función $\ln \left\{ \frac{1}{r} \right\}$ presenta una singularidad en el polo, y no podemos aplicar la segunda identidad de Green.

Consideramos un subdominio circular infinitesimal Ω_ε en el entorno del polo. La función $\ln \left\{ \frac{1}{r} \right\}$ no presenta puntos de singularidad en el dominio reducido $\Omega - \Omega_\varepsilon$, por lo que podemos plantear la segunda identidad de Green. El contorno del dominio reducido será el contorno ampliado $\Gamma + \Gamma_\varepsilon$.

Mediante una operación de paso al límite obtendremos la solución de nuestro problema

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \nabla^2 u \right) d\Omega \right\} = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma + \Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Calculamos las integrales aparecidas en la expresión 2.37:

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \nabla^2 u \right) d\Omega \right\} = \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \nabla^2 u \right) d\Omega$
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma$
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \right\} :$

En los puntos de Γ_ε podemos expresar

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \nabla r \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = -1 \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) = \frac{1}{r} \quad (2.39)$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \left(\frac{1}{r} \right) - \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.40)$$

trabajamos en coordenadas polares

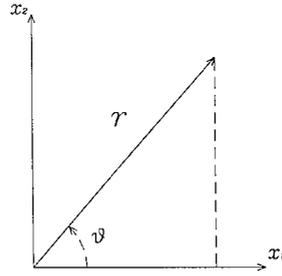


Figura 2-3:

$$d\Gamma = r d\theta$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) - \ln \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) \varepsilon d\theta \quad (2.41)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u d\theta \right\} - \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \ln \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \right\} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\theta \right\} \quad (2.42)$$

dado el carácter infinitesimal de Γ_ε , podemos considerar la función u constante en Γ_ε e igual al primer término de su desarrollo en serie

$$u = u^\circ + TOS \Rightarrow u \simeq u^\circ \quad (2.43)$$

por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u d\theta \right\} = 2\pi u^\circ \quad (2.44)$$

por ser la función $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ regular en el dominio Γ_ε , la expresión $\int \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\theta$ será igual a un valor finito, por lo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \ln \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \varepsilon d\theta \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \varepsilon \ln \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \right\} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\theta \right\} = 0 \quad (2.45)$$

la tercera identidad de Green en dominios bidimensionales queda por tanto,

$$- \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \nabla^2 u \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma + u^\circ \quad (2.46)$$

2.6 Formula de Green.

Según las expresiones 2.21, 2.36 y 2.35, 2.46 la tercera identidad de Green es:

- El polo es exterior a Ω :

$$- \int_{\Omega} u^* \nabla^2 u d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} - u^* \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.47)$$

- El polo es interior a Ω :

$$- \int_{\Omega} u^* \nabla^2 u d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} - u^* \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma + u^\circ \quad (2.48)$$

Se denomina fórmula de Green a la aplicación de la tercera identidad de Green a las funciones armónicas.

Sea u una función armónica

$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.49)$$

Aplicando a u las expresiones 2.47 y 2.48 obtenemos la fórmula de Green:

- El polo es exterior a Ω :

$$\int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} - u^* \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma = 0 \quad (2.50)$$

- El polo es interior a Ω :

$$u^o = \int_{\Gamma} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \quad (2.51)$$

2.7 Propiedad fundamental de las funciones armónicas.

Considerando una función armónica u y aplicando la segunda identidad de Green a las funciones u y $w = 1$, obtenemos

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (2.52)$$

2.8 Teoremas de unicidad.

Siendo u una función armónica y haciendo $w = u$ en la primera identidad de Green, obtenemos

$$\int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega = \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (2.53)$$

2.8.1 Teorema 1.

Según 2.53,

Si $u = 0$ en $\Gamma \Rightarrow \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega = 0 \Rightarrow u = \text{cte. en } \Omega. \Rightarrow u = 0$ en Ω .

Considerando la diferencia de dos funciones armónicas u_1, u_2 :

Si $u_1 - u_2 = 0$ en $\Gamma \Rightarrow u_1 - u_2 = 0$ en Ω . Podemos por tanto afirmar

Una función armónica en el dominio Ω queda unívocamente determinada en Ω por sus valores en el contorno Γ .

2.8.2 Teorema 2.

Según 2.53,

Si $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$ en $\Gamma \Rightarrow \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega = 0 \Rightarrow u = \text{cte. en } \Omega$.

Considerando la diferencia de dos funciones armónicas u_1, u_2 :

Si $\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial \mathbf{n}} = 0$ en $\Gamma \Rightarrow u_1 - u_2 = \text{cte. en } \Omega$. Podemos afirmar por tanto

Una función armónica en el dominio Ω queda determinada a menos de una constante aditiva en Ω , por los valores de su derivada según la normal en el contorno Γ .

2.9 Problemas interiores de contorno.

La fórmula de Green, expresión 2.51, parece indicar que una función armónica u queda determinada en Ω prefijando los valores de u y $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ en Γ . Pero esto no es así, pues se tiene que cumplir

- Los valores de $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ han de cumplir la expresión 2.52

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = 0 \quad (2.54)$$

- Según los teoremas de unicidad, la función u está determinada en Ω , conociendo en Γ los valores de u o de $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ (determinada a menos de una constante aditiva en este caso), pero no los de ambos.

Los problemas interiores de contorno consisten pues, en, dadas unas condiciones de contorno en un dominio Ω limitado por Γ :

1. Demostrar la existencia de una función u armónica en Ω . Si existe dicha función, según el teorema 1, esta será única.
2. Calcularla a partir de la fórmula de Green, expresión 2.51.

Según estén dadas las condiciones de contorno, distinguiremos los siguientes tipos de problemas:

2.9.1 Problema de Dirichlet.

Se conocen los valores de u en el contorno Γ o condiciones de contorno *esenciales*.

2.9.2 Problema de Neumann.

Se conocen los valores de $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ en el contorno Γ , o condiciones de contorno *naturales*.

Los problemas interiores de contorno también se conocen como problemas de potencial, y regulan numerosos fenómenos físicos, entre otros, los problemas de distribución de temperatura, la determinación de la función de alabeo en una barra cilíndrica de sección recta llena, de forma cualquiera, según las hipótesis de Saint-Venant, la presión hidrostática en el terreno, y el problema elastodinámico antiplano.¹

Capítulo 3

ELASTODINAMICA LINEAL

En el presente capítulo haremos una exposición de los conceptos generales de la elastodinámica lineal y del planteamiento del problema elástodinámico; para ello partiremos de la teoría del *producto de convolución de funciones de la que* deducimos el teorema de reciprocidad para estados elastodinámicos, y mediante su aplicación a la componente antiplana del problema elastodinámico armónico en el tiempo, deduciremos la ecuación integral del Método de los Elementos de Contorno. Se hace referencia al carácter ondulatorio de la solución del problema elastodinámico. Un tratamiento mas detallado del tema lo podemos encontrar en las obras de Dominguez y Achenbach, referencias bibliográficas [10], y [9].

3.1 Ecuaciones básicas de la elastodinamica lineal.

3.1.1 Ecuación del movimiento.

A partir del principio de conservación del momento lineal se deduce la ecuación del movimiento para los puntos del medio continuo,

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.1)$$

siendo

σ_{ij} : tensor de tensiones.

ρ : densidad.

b_i : campo de fuerzas másicas.

u_i : campo de desplazamientos.

El principio de conservación del momento angular nos permite deducir la simetría del tensor de tensiones,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.2)$$

3.1.2 Relaciones cinemáticas.

Consideremos la descomposición en sus partes simétrica y antimétrica del *gradiente de desplazamiento* en un punto de un medio continuo en movimiento,

$$u_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (3.3)$$

Suponiendo valores del desplazamiento y del gradiente del desplazamiento suficientemente pequeños, se define el tensor de deformación lineal como la parte simétrica de la expresión 3.3,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (3.5)$$

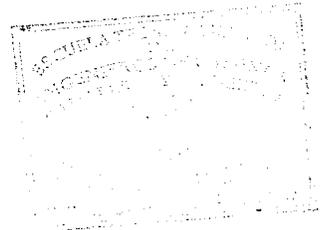
y el tensor de giro como la parte antimétrica,

$$w_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (3.6)$$

$$w_{ij} = -w_{ji} \quad (3.7)$$

3.1.3 Dilatación cúbica.

Se define la dilatación cúbica, θ , en un punto de un medio continuo sometido a un estado de deformaciones, ε_{ij} , como el aumento unitario de volumen de un paralelepípedo rectangular diferencial considerado en el punto.



En un sistema de referencia cuyos ejes coincidan con los lados del paralelepípedo, podemos expresar,

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\Delta V_o}{V_o} = \frac{(1 + E_{X_1})(1 + E_{X_2})(1 + E_{X_3}) dX_1 dX_2 dX_3 - dX_1 dX_2 dX_3}{dX_1 dX_2 dX_3} = \\ &= E_{X_1} + E_{X_2} + E_{X_3} + E_{X_1}E_{X_2} + E_{X_2}E_{X_3} + E_{X_1}E_{X_3} + E_{X_1}E_{X_2}E_{X_3}\end{aligned}\quad (3.8)$$

siendo $E_{X_1}, E_{X_2}, E_{X_3}$ las elongaciones según los ejes coordenados.

Considerando valores pequeños de la deformación, la aproximación de primer orden de la expresión 3.8 es,

$$\theta = E_{X_1} + E_{X_2} + E_{X_3} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{kk}\quad (3.9)$$

La dilatación cúbica es un invariante del estado de deformaciones.

3.1.4 Vector rotación.

En un campo de desplazamientos para el cual el tensor de deformación lineal ε_{ij} , es nulo en las proximidades del punto P_o , el desplazamiento relativo a P_o de los puntos del entorno será una rotación infinitesimal de cuerpo rígido. Esta rotación infinitesimal se expresa por el *vector rotación*, cuya expresión utilizando notación indicial es,

$$w_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} w_{kj}\quad (3.10)$$

siendo ε_{ijk} el símbolo de permutación o tensor alternante.

Utilizando notación vectorial la expresión del vector rotación es,

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u})\quad (3.11)$$

3.1.5 Ecuaciones constitutivas.

La elasticidad lineal supone para el medio continuo un modelo de comportamiento basado en el cumplimiento de la Ley de Hooke, la cual establece proporcionalidad entre tensiones y

deformaciones.

La aplicación de la Ley de Hooke a estados tensionales generalizados, *Ley de Hooke generalizada*, nos permite expresar las componentes del tensor de tensiones como combinación lineal de las componentes del tensor de deformaciones,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (3.12)$$

siendo C_{ijkl} el tensor de las constantes elásticas, de 4^o orden.

Dada la simetría de los tensores σ_{ij} y ε_{ij} , podemos expresar C_{ijkl} como el producto de dos tensores simétricos de 2^o orden, siendo por tanto igual a 36 el número de constantes que determinan el comportamiento elástico del medio continuo.

A partir de la expresión 3.12, imponiendo condiciones de isotropía elástica, podemos razonar que el número de constantes que determinan el comportamiento elástico de un medio continuo se reduce de 36 a 2. Podemos ver un tratamiento detallado en las referencias bibliográficas [14] y [16].

Las constantes elásticas, que dependen de la constitución del medio continuo, se pueden tomar de distintas formas, dando lugar a las distintas expresiones de las ecuaciones constitutivas del medio elástico lineal

Constantes de Lamé.

La Ley de Hooke para medios continuos isótropos, en función de las constantes de Lamé, se expresa,

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (3.13)$$

siendo

λ, μ : constantes elásticas de Lamé.

Constantes de ingeniería.

Se llaman constantes de ingeniería a las siguientes,

E : módulo de Young.

ν : constante de Poisson.

Dependen de la constitución del medio. Podemos encontrar una explicación detallada del sentido físico de ambas constantes en las referencias bibliográficas [15] y [11]. Están relacionadas con las constantes de Lamé según las siguientes expresiones,

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.14)$$

La ley de Hooke o ecuación constitutiva de la elasticidad lineal, se expresa en función de las constantes de ingeniería, de la siguiente forma,

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \delta_{ij} \right) \quad (3.15)$$

3.2 El problema elastodinámico.

El objetivo de la Elastodinámica es la determinación del campo de desplazamientos u_i en un dominio Ω , de frontera Γ , incluido en un medio continuo homogéneo e isótropo en movimiento, sometido a la acción de un campo de fuerzas másicas \mathbf{b} , que suponemos conocido, supuestas unas *condiciones de contorno* y unas *condiciones iniciales*.

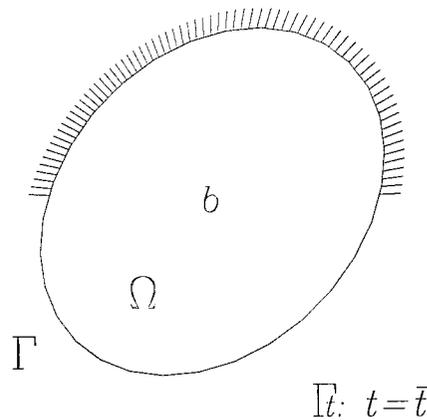


Figura ~3-1:

3.2.1 Ecuaciones básicas.

Para la resolución del problema elastodinámico tomaremos como ecuaciones básicas, la ecuación del movimiento, expresión 3.1,

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.16)$$

las relaciones cinemáticas, expresión 3.4,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.17)$$

y las ecuaciones constitutivas, expresión 3.13,

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.18)$$

El problema elastodinámico queda constituido de esta forma, por un sistema de 15 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas con 15 incógnitas

La solución (integración) de este sistema de ecuaciones conlleva la generación de constantes de integración que se deben determinar aplicando las condiciones de contorno y condiciones iniciales del problema.

3.2.2 Condiciones de contorno.

El caso más general de condiciones de contorno correspondería a la situación en la que en una parte del contorno Γ_t se conociera el vector tensión, en otra parte Γ_u se conociera el desplazamiento y en una tercera Γ_{ut} se produjera una solución mixta,

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_t, \quad t_i(\mathbf{x}, t) = \bar{t}_i \quad (3.19)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad u_i(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_i \quad (3.20)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{ut}, \quad \begin{cases} t_i(\mathbf{x}, t) = \bar{t}_i \\ u_j(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_j \end{cases} \quad (3.21)$$

$$\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t + \Gamma_{ut} \quad (3.22)$$

siendo \mathbf{t} el vector tensión asociado al vector unitario normal exterior a Γ , \mathbf{n} , según la siguiente expresión,

$$t_i = \sigma_{ji}n_j \quad (3.23)$$

El problema elastodinámico puede plantearse, por tanto, de las tres formas siguientes,

- Problema de contorno de primer grado ($\Gamma_t = \Gamma$): se conoce el vector tensión en todos los puntos del contorno; las incógnitas son los desplazamientos.

$$t_i(\mathbf{x}, t) = \bar{t}_i, \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.24)$$

- Problema de contorno de segundo grado ($\Gamma_u = \Gamma$): se conoce el desplazamiento en todos los puntos del contorno; las incógnitas son las tensiones.

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_i, \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3.25)$$

- Problema mixto: para el resto de los casos; coexistencia de Γ_u, Γ_t o existencia de Γ_{ut} .

3.2.3 Condiciones iniciales.

Conocemos el valor del desplazamiento o de su derivada en el instante inicial t_o ,

$$u_i(\mathbf{x}, t_o) = \bar{u}_i \quad \text{ó} \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, t_o) = \bar{\dot{u}}_i \quad (3.26)$$

3.2.4 Ecuación de Navier.

La ecuación de Navier resuelve el problema elástodinámico en términos de desplazamientos, es decir, el problema de contorno de primer grado.

Para deducirla sustituimos la expresión 3.17 en 3.18 obtenemos

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.27)$$

aplicamos la expresión 3.16 a 3.27, calculando previamente la derivada de la dilatación cúbica θ ,

$$\theta = \varepsilon_{kk} = u_{k,k} \Rightarrow \theta_{,j} = u_{k,kj} \quad (3.28)$$

$$\sigma_{ij,j} = \lambda u_{k,kj} \delta_{ij} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) = \quad (3.29)$$

$$= \lambda u_{k,ki} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) = \quad (3.30)$$

$$= (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} \quad (3.31)$$

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.32)$$

cuya expresión vectorial es,

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (3.33)$$

reordenando la expresión 3.32 podemos expresar,

$$(\lambda + 2\mu) u_{j,ji} - \mu (u_{j,ji} - u_{i,jj}) + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.34)$$

teniendo en cuenta la expresión del triple producto vectorial,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (3.35)$$

deducimos fácilmente la expresión vectorial de 3.34,

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})) + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (3.36)$$

las ecuaciones 3.34 ó 3.36 representan un conjunto de 3 ecuaciones en derivadas parciales acopladas con tres incógnitas: las componentes del campo de desplazamientos. Representan la condición necesaria y suficiente que ha de cumplir un campo de desplazamientos para que pueda

ser solución de un problema elástodinámico, además de cumplir las condiciones de contorno e iniciales.

3.2.5 Constantes de Stokes.

El comportamiento elástico de un medio isótropo de densidad ρ queda determinado conociendo las constantes de Stokes, definidas por las siguientes expresiones,

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (3.37)$$

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.38)$$

Las constantes de Stokes son características del material y tienen dimensiones de velocidad,

$$|c_1^2| = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}} = L^2T^{-2} \Rightarrow |c_1| = LT^{-1} \quad (3.39)$$

$$|c_2^2| = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{ML^{-3}} = L^2T^{-2} \Rightarrow |c_2| = LT^{-1} \quad (3.40)$$

estando relacionadas por la constante de Poisson por la expresión,

$$\frac{c_1^2}{c_2^2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \quad (3.41)$$

3.2.6 Expresión de la ecuación de Navier en función de las constantes de Stokes.

La expresión de la ecuación de Navier en función de las constantes de Stokes, permite obtener ecuaciones diferenciales simplificadas en función de términos con un claro significado físico: la dilatación y el vector de rotación.

- Aplicamos el operador divergencia en ambos términos de la expresión 3.36, y teniendo en cuenta que la divergencia de un rotacional es igual a cero, podemos expresar,

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\nabla \mathbf{u}) + \rho \nabla \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (3.42)$$

dividiendo por ρ , sustituyendo la expresión de c_1^2 , y teniendo en cuenta la expresión de la dilatación cúbica, obtenemos,

$$c_1^2 \nabla^2 \theta + \nabla \mathbf{b} = \ddot{\theta} \quad (3.43)$$

- Aplicamos el operador rotacional en ambos términos de la expresión 3.36,

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \times (\nabla (\nabla \mathbf{u})) - \mu \nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})) + \rho (\nabla \times \mathbf{b}) = \rho (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (3.44)$$

considerando que el rotacional de un gradiente es igual a cero, $\nabla \times (\nabla (\nabla \mathbf{u})) = 0$, y la definición del vector rotación $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$,

$$-\frac{\mu}{\rho} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{w}) + \nabla \times \mathbf{b} = \nabla \times \ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{w}} \quad (3.45)$$

$$\frac{\mu}{\rho} (\nabla^2 (\mathbf{w}) - \nabla (\nabla \mathbf{w})) + \nabla \times \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{w}} \quad (3.46)$$

teniendo en cuenta $\nabla \mathbf{w} = \mathbf{0}$ y la expresión de c_2^2 , podemos expresar,

$$c_2^2 \nabla^2 \mathbf{w} + \nabla \times \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{w}} \quad (3.47)$$

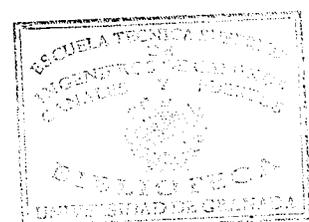
3.2.7 Ondas elásticas.

Recordando la *ecuación de ondas*, o ecuación diferencial que rige la propagación a velocidad c de una perturbación de la magnitud física, η , en un medio continuo,

$$\nabla^2 \eta = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (3.48)$$

y contrastando con las expresiones 3.43 y 3.47, podemos concluir el carácter de fenómeno ondulatorio de la dilatación y la rotación en un medio continuo sometido a un estado elastodinámico

En efecto, de la expresión 3.43 deducimos que, en ausencia de fuerzas másicas, la dilatación en un medio continuo se propaga ordenadamente, en forma de onda, siendo la velocidad de



propagación, que llamaremos *velocidad irrotacional*, igual a c_1 . Este tipo de ondas es conocido como *ondas P*, o bien *ondas elásticas longitudinales*.

Igualmente, de la expresión 3.47 se deduce que, en ausencia de fuerzas másicas, la rotación en un medio continuo se propaga ordenadamente en forma de onda, siendo la velocidad de propagación, que llamaremos *velocidad de onda equivolumétrica*, igual a c_2 . Este tipo de ondas es conocido como *ondas S*, o bien *ondas elásticas transversales*.

Un tratamiento extenso del tema de ondas elastodinámicas lo encontramos en las referencias bibliográficas [10], y [9].

3.3 Teorema de reciprocidad.

El teorema de reciprocidad en elastodinámica, conocido como teorema de Graffi, es una extensión del teorema de Betti, o teorema de reciprocidad en elastostática. Incluimos aquí su demostración para lo cual es necesario recordar previamente los conceptos básicos de la teoría del *producto de convolución* de funciones.

3.3.1 Producto de Convolución.

Convolución de funciones escalares.

Consideremos dos funciones escalares $g(\mathbf{x}, t)$ y $h(\mathbf{x}, t)$, continuas en el espacio (Ω, T^+) siendo Ω : dominio de definición.

T^+ : intervalo de tiempo $[0, \infty]$

llamamos *producto de convolución* de ambas funciones, a la función definida por la expresión integral siguiente,

$$\begin{aligned} g * h &= \int_0^t g(\mathbf{x}, t - \tau) h(\mathbf{x}, \tau) d\tau; \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in (\Omega, T^+) \\ g * h &= 0; \quad \forall(\mathbf{x}, t) \in (\Omega, T^-) \end{aligned} \tag{3.49}$$

La expresión 3.49 es función del límite de integración superior t y puede considerarse como un *producto generalizado* de funciones.

El producto de convolución se utiliza para el cálculo de transformadas inversas de Laplace y Fourier. Se puede disponer de información detallada en las referencias bibliográficas [18] y [20].

Propiedades del producto de convolución.

Incluimos las siguientes propiedades del producto de convolución de funciones escalares; podemos consultar su demostración en las referencias bibliográficas del párrafo anterior.

1. $g * h = h * g$
2. $\frac{\partial}{\partial t}(g * h) = \frac{\partial g}{\partial t} * h + g(\mathbf{x}, 0)h(\mathbf{x}, t)$
3. $\frac{\partial}{\partial x_k}(g * h) = \frac{\partial g}{\partial x_k} * h + g * \frac{\partial h}{\partial x_k}$

Convolución de funciones vectoriales.

Se define el producto de convolución de dos funciones vectoriales $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ continuas en el espacio (Ω, T^+) , como la función escalar resultante de realizar el *producto de convolución contraído* de las funciones componentes de \mathbf{g} y de \mathbf{h} ,

$$\mathbf{g} * \mathbf{h} = g_1 * h_1 + g_2 * h_2 + g_3 * h_3 = g_i * h_i \quad (3.50)$$

Convolución de funciones tensoriales.

Se define el producto de convolución de dos funciones tensoriales $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ y $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ continuas en el espacio (Ω, T^+) , como la función escalar resultante de realizar el *producto de convolución doblemente contraído* de las funciones componentes de $\boldsymbol{\sigma}$ y de $\boldsymbol{\varepsilon}$,

$$\boldsymbol{\sigma} * \boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_{11} * \varepsilon_{11} + \sigma_{12} * \varepsilon_{12} + \dots + \sigma_{33} * \varepsilon_{33} = \sigma_{ij} * \varepsilon_{ij} \quad (3.51)$$

Convolución de una función tensorial y otra vectorial.

Se define el producto de convolución de una función tensorial $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ y una función vectorial $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ continuas en el espacio (Ω, T^+) , como la función escalar resultante de realizar el *producto*

de convolución contraído de las funciones componentes de σ y de \mathbf{g} . La contracción se puede realizar en ambos índices de σ , por lo que se pueden definir dos productos de convolución entre σ y \mathbf{g} , que coincidirán cuando el tensor σ sea simétrico,

$$\sigma * \mathbf{g} = \sigma_{i1} * g_1 + \sigma_{i2} * g_2 + \sigma_{i3} * g_3 = \sigma_{ij} * g_j \quad (3.52)$$

$$\sigma * \mathbf{g} = \sigma_{1i} * g_1 + \sigma_{2i} * g_2 + \sigma_{3i} * g_3 = \sigma_{ji} * g_j \quad (3.53)$$

3.3.2 Teorema de reciprocidad.

Supongamos un dominio Ω , de frontera Γ , en un medio elástico lineal sobre el que consideramos dos estados elastodinámicos que llamaremos (1), y (2), consecuencia de la actuación de dos sistemas de fuerzas másicas, $b_i^{(1)}$, $b_i^{(2)}$.

ESTADO (1): $b_i^0, \sigma_{ij}^0, u_i^0$

ESTADO (2): $b_i^0, \sigma_{ij}^0, u_i^0$

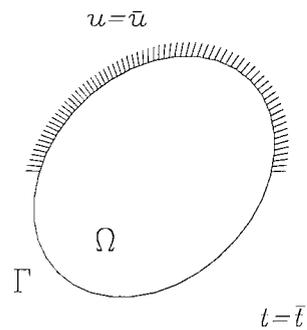


Figura ~3-2:

La solución del problema elastodinámico, expresiones 3.16, 3.17 y 3.18, para cada uno de los estados (1) y (2) es,

$$b_i^{(1)} \Rightarrow \sigma_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)} \quad (3.54)$$

$$b_i^{(2)} \Rightarrow \sigma_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)} \quad (3.55)$$

Consideremos la ecuación del movimiento aplicada al estado (1),

$$\sigma_{ij,j}^{(1)} + \rho b_i^{(1)} = \rho \ddot{u}_i^{(1)} \quad (3.56)$$

calculamos el producto de convolución de ambos términos de 3.56 y la función vectorial $u_i^{(2)}$,

$$\sigma_{ij,j}^{(1)} * u_i^{(2)} + \rho b_i^{(1)} * u_i^{(2)} = \rho \ddot{u}_i^{(1)} * u_i^{(2)} \quad (3.57)$$

la expresión 3.57 se verifica para cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$, por lo que podemos plantear la integral de ambos términos en Ω ,

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,j}^{(1)} * u_i^{(2)} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\rho b_i^{(1)} * u_i^{(2)} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\rho \ddot{u}_i^{(1)} * u_i^{(2)} \right) d\Omega \quad (3.58)$$

que podemos expresar reordenando,

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,j}^{(1)} * u_i^{(2)} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \left(b_i^{(1)} * u_i^{(2)} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \left(\ddot{u}_i^{(1)} * u_i^{(2)} \right) d\Omega = 0 \quad (3.59)$$

Consideremos el siguiente desarrollo vectorial,

$$\nabla \left(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} * \mathbf{u}^{(2)} \right) = \nabla \left(\sigma_{ij}^{(1)} * u_j^{(2)} \right) = \left(\sigma_{ij}^{(1)} * u_j^{(2)} \right)_{,i} = \sigma_{ij,i}^{(1)} * u_j^{(2)} + \sigma_{ij}^{(1)} * u_{j,i}^{(2)} \quad (3.60)$$

la expresión 3.60 se verifica en cada punto de Ω por lo que, de la expresión integral,

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} * \mathbf{u}^{(2)} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \left(\sigma_{ij}^{(1)} * u_j^{(2)} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,i}^{(1)} * u_j^{(2)} + \sigma_{ij}^{(1)} * u_{j,i}^{(2)} \right) d\Omega \quad (3.61)$$

aplicando el teorema de la divergencia en el primer término de 3.61, y llamando n_i a las componentes del vector normal exterior, \mathbf{n} , obtenemos,

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} * \mathbf{u}^{(2)} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} * \mathbf{u}^{(2)} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(\sigma_{ij}^{(1)} * u_j^{(2)} \right) n_i d\Gamma \quad (3.62)$$

teniendo en cuenta la relación entre el tensor de tensiones y el vector tensión en un punto

de Γ cuya normal exterior es n_i ,

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (3.63)$$

podemos expresar,

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} * \mathbf{u}^{(2)} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\sigma_{ij}^{(1)} * u_j^{(2)} \right) n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} \left(t_j^{(1)} * u_j^{(2)} \right) d\Gamma \quad (3.64)$$

sustituyendo en 3.61,

$$\int_{\Gamma} \left(t_j^{(1)} * u_j^{(2)} \right) d\Gamma = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,i}^{(1)} * u_j^{(2)} + \sigma_{ij}^{(1)} * u_{j,i}^{(2)} \right) d\Omega \quad (3.65)$$

reordenando la expresión 3.65 concluimos la siguiente expresión para la integración por partes del producto de convolución,

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,i}^{(1)} * u_j^{(2)} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^{(1)} * u_{j,i}^{(2)} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(t_j^{(1)} * u_j^{(2)} \right) d\Gamma \quad (3.66)$$

Consideremos el siguiente desarrollo,

$$\sigma_{ij}^{(2)} * u_{i,j}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)} * \left(\varepsilon_{ij}^{(1)} + w_{ij}^{(1)} \right) = \sigma_{ij}^{(2)} * \varepsilon_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} * w_{ij}^{(1)} \quad (3.67)$$

teniendo en cuenta que el producto doblemente contraído de un tensor simétrico por un tensor antimétrico es igual a cero, llegamos a,

$$\sigma_{ij}^{(2)} * u_{i,j}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)} * \varepsilon_{ij}^{(1)} \quad (3.68)$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones constitutivas,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)} * u_{i,j}^{(1)} &= \sigma_{ij}^{(2)} * \varepsilon_{ij}^{(1)} = \left(\lambda \theta^{(2)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) * \varepsilon_{ij}^{(1)} = \\ &= \lambda \theta^{(2)} \left(\delta_{ij} * \varepsilon_{ij}^{(1)} \right) + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(2)} * \varepsilon_{ij}^{(1)} = \\ &= \lambda \theta^{(2)} \theta^{(1)} + 2\mu \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} * \varepsilon_{ij}^{(1)} \right) = \\ &= \lambda \left(\delta_{ij} * \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) \theta^{(1)} + 2\mu \left(\varepsilon_{ij}^{(2)} * \varepsilon_{ij}^{(1)} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\lambda \delta_{ij} \theta^{(1)} + 2\mu \varepsilon_{ij}^{(1)} \right) * \varepsilon_{ij}^{(2)} = \\
&= \sigma_{ij}^{(1)} * \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(1)} * u_{i,j}^{(2)}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

podemos concluir,

$$\sigma_{ij}^{(2)} * u_{i,j}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)} * u_{i,j}^{(2)} \tag{3.70}$$

Considerando las expresiones 3.66 y 3.70 obtenemos,

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^{(1)} * u_{j,i}^{(2)} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^{(2)} * u_{j,i}^{(1)} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,i}^{(1)} * u_j^{(2)} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(t_j^{(1)} * u_j^{(2)} \right) d\Gamma \tag{3.71}$$

y, teniendo en cuenta nuevamente las expresiones 3.66 3.70, llamando estado (1) al que antes llamabamos estado (2) y viceversa, obtenemos,

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^{(1)} * u_{j,i}^{(2)} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^{(2)} * u_{j,i}^{(1)} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,i}^{(2)} * u_j^{(1)} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(t_j^{(2)} * u_j^{(1)} \right) d\Gamma \tag{3.72}$$

reordenando la expresión 3.72 obtenemos,

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\sigma_{ij}^{(2)} * u_j^{(1)} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,i}^{(2)} * u_j^{(1)} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij}^{(2)} * u_{j,i}^{(1)} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(t_j^{(2)} * u_j^{(1)} \right) d\Gamma \tag{3.73}$$

sustituyendo 3.72 en 3.66 obtenemos una segunda expresión de integración por partes para el producto de convolución,

$$\int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,i}^{(1)} * u_j^{(2)} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij,i}^{(2)} * u_j^{(1)} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(t_j^{(2)} * u_j^{(1)} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \left(t_j^{(1)} * u_j^{(2)} \right) d\Gamma \tag{3.74}$$

Para los términos que contienen la aceleración consideramos el siguiente desarrollo, teniendo en cuenta las propiedades del producto de convolución,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u_k^{(1)} * u_k^{(2)} \right) = \dot{u}_k^{(1)} * u_k^{(2)} + u_{ok}^{(1)} u_k^{(2)} \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_k^{(1)} * u_k^{(2)} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{u}_k^{(1)} * u_k^{(2)} \right) + u_{ok}^{(1)} \dot{u}_k^{(2)} = \ddot{u}_k^{(1)} * u_k^{(2)} + v_{ok}^{(1)} u_k^{(2)} + u_{ok}^{(1)} \dot{u}_k^{(2)} \quad (3.76)$$

donde hemos llamado,

$$\begin{aligned} u_{ok} &= u_{ok}(\mathbf{x}, 0) \\ v_{ok} &= \dot{u}_{ok}(\mathbf{x}, 0) \end{aligned} \quad (3.77)$$

de igual forma,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u_k^{(2)} * u_k^{(1)} \right) = \ddot{u}_k^{(2)} * u_k^{(1)} + v_{ok}^{(2)} u_k^{(1)} + u_{ok}^{(2)} \dot{u}_k^{(1)} \quad (3.78)$$

teniendo en cuenta la propiedad conmutativa del producto de convolución y las expresiones 3.76 y 3.78, podemos concluir la siguiente expresión,

$$\ddot{u}_k^{(1)} * u_k^{(2)} = \ddot{u}_k^{(2)} * u_k^{(1)} + v_{ok}^{(2)} u_k^{(1)} + u_{ok}^{(2)} \dot{u}_k^{(1)} - v_{ok}^{(1)} u_k^{(2)} - u_{ok}^{(1)} \dot{u}_k^{(2)} \quad (3.79)$$

Sustituyendo en la expresión 3.59 las expresiones 3.74 y 3.79 obtenemos,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\sigma_{ji,j}^{(2)} * u_i^{(1)} \right) d\Omega - \int_{\Gamma} \left(t_i^{(2)} * u_i^{(1)} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \left(t_i^{(1)} * u_i^{(2)} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \left(b_i^{(1)} * u_i^{(2)} \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} \rho \left(\ddot{u}_i^{(2)} * u_i^{(1)} + v_{oi}^{(2)} u_i^{(1)} + u_{oi}^{(2)} \dot{u}_i^{(1)} - v_{oi}^{(1)} u_i^{(2)} - u_{oi}^{(1)} \dot{u}_i^{(2)} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.80)$$

teniendo en cuenta la ecuación del movimiento en el estado (2),

$$\sigma_{ij,j}^{(2)} + \rho b_i^{(2)} = \rho \ddot{u}_i^{(2)} \Rightarrow \sigma_{ij,j}^{(2)} - \rho \ddot{u}_i^{(2)} = -\rho b_i^{(2)} \quad (3.81)$$

sustituyendo en la expresión 3.80 obtenemos la expresión integral del teorema de reciproci-

dad entre los estados elastodinámicos (1) y (2),

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left(t_i^{(1)} * u_i^{(2)} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \left(b_i^{(1)} * u_i^{(2)} + u_{oi}^{(1)} \dot{u}_i^{(2)} + v_{oi}^{(1)} u_i^{(2)} \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} \left(t_i^{(2)} * u_i^{(1)} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \left(b_i^{(2)} * u_i^{(1)} + u_{oi}^{(2)} \dot{u}_i^{(1)} + v_{oi}^{(2)} u_i^{(1)} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.82)$$

3.4 Estados bidimensionales.

La resolución del problema elastodinámico en el campo tridimensional resulta compleja dado que se tienen que satisfacer condiciones de simplicidad tanto en la geometría como en las condiciones de contorno para poder encontrar una expresión analítica de desplazamientos, deformaciones y tensiones que satisfazga las ecuaciones 3.16, 3.17 y 3.18, así como las condiciones de contorno y condiciones iniciales del problema en estudio.

Existen muchos problemas en la ingeniería en los que la configuración inicial de la geometría y de las cargas permite establecer a priori el valor nulo de algunas variables o al menos la independencia de alguna de ellas con respecto a alguna coordenada, lo que simplifica la resolución del problema. Este proceso de simplificación puede ser sistemáticamente aplicado en situaciones que se agrupan bajo la denominación común de *estados bidimensionales*.

Decimos que el dominio Ω de frontera Γ , en un medio continuo en movimiento, está sometido a un *estado bidimensional*, si las fuerzas exteriores, la geometría y las condiciones de contorno, son independientes de una de las coordenadas.

Evidentemente, si fuerzas exteriores, geometría y condiciones de contorno son independientes de x_3 , todas las variables de campo del problema elastodinámico también serán independientes de x_3 .

La consideración de *estados bidimensionales*, nos permite la descomposición del movimiento del medio continuo en dos estados independientes, el estado plano y el estado antiplano.

Teniendo en cuenta la variación de los índices,

$$i, j, \dots \in I_3 \quad (3.83)$$

$$\alpha, \beta, \dots \in I_2 \quad (3.84)$$

podemos considerar las ecuaciones del movimiento descompuestas en dos sistemas de ecuaciones desacoplados que regulan el *movimiento plano* y el *movimiento antiplano* del medio continuo.

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + \rho b_1 = \rho \ddot{u}_1 \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + \rho b_2 = \rho \ddot{u}_2 \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + \rho b_3 = \rho \ddot{u}_3 \end{cases} \Rightarrow \quad (3.85)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha; & \text{MOVIMIENTO PLANO} \\ \sigma_{3\beta,\beta} + \rho b_3 = \rho \ddot{u}_3; & \text{MOVIMIENTO ANTIPLANO} \end{cases} \quad (3.86)$$

3.4.1 Movimiento plano.

El campo de desplazamientos en el movimiento plano es de la forma,

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2, t) \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2, t) \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.87)$$

siendo la relación cinemática,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \quad (3.88)$$

la ecuación constitutiva,

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (3.89)$$

y la ecuación del movimiento,

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} + \rho b_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha \quad (3.90)$$

Sustituyendo la expresión 3.88 en 3.89, y aplicando la 3.90 obtenemos la ecuación de Navier

para estados bidimensionales:

$$\mu u_{\alpha,\beta\beta} + (\lambda + \mu) u_{\beta,\beta\alpha} + \rho b_{\alpha} = \rho \ddot{u}_{\alpha} \quad (3.91)$$

o bien en forma vectorial,

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (3.92)$$

3.4.2 Movimiento antiplano.

El campo de desplazamientos en el estado antiplano es,

$$u_3 = u_3(x_1, x_2, t) \quad (3.93)$$

teniendo en cuenta las relaciones cinemáticas obtenemos el tensor de deformaciones,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{u_{3,1}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{u_{3,2}}{2} \\ \frac{u_{3,1}}{2} & \frac{u_{3,2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

teniendo en cuenta las ecuaciones constitutivas determinamos el tensor de tensiones,

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu u_{3,1} \\ 0 & 0 & \mu u_{3,2} \\ \mu u_{3,1} & \mu u_{3,2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

que podemos expresar,

$$\sigma_{3\beta} = \mu u_{3,\beta} \quad (3.96)$$

las ecuaciones del movimiento, como hemos visto, quedan reducidas a,

$$\sigma_{3\beta,\beta} + \rho b_3 = \rho \ddot{u}_3 \quad (3.97)$$

aplicando 3.97 a 3.96, y teniendo en cuenta la expresión de c_2 , obtenemos la ecuación

diferencial que rige el movimiento antiplano del medio continuo,

$$c_2^2 u_{3,\beta\beta} + b_3 = \ddot{u}_3 \quad (3.98)$$

la analogía de las expresiones 3.48 y 3.98, nos permite deducir que el movimiento antiplano se transmite en forma de onda.

Por ser

$$\nabla \mathbf{u} = 0 \quad (3.99)$$

se trata de ondas equivolúmetricas cuya dirección de propagación es perpendicular al desplazamiento.

3.5 Estados elastodinámicos armónicos en el tiempo.

Un caso particular de estados elastodinámicos es el de aquellos en los que las fuerzas másicas y las condiciones de contorno tienen variación temporal periódica. Cuando esta variación temporal periódica es combinación lineal de funciones trigonométricas se denominan *estados elastodinámicos armónicos en el tiempo*.

En este apartado vamos a introducir las ecuaciones básicas de los *estados elastodinámicos antiplanos, armónicos en el tiempo*. Para ello es necesario recordar previamente algunos conceptos de la teoría de funciones de *variable compleja*.

3.5.1 Variable compleja.

La representación matemática de cargas o excitaciones periódicas, se simplifica notablemente mediante la utilización de la teoría de funciones de *variable compleja*.

Utilizaremos números complejos, cuya forma polar es del tipo, $e^{i\omega t}$, función que para cada valor de t representa una posición del vector unidad girando alrededor del origen, siendo ω la velocidad angular expresada en radianes/segundo,

La fórmula de Euler nos permite obtener las partes real e imaginaria de un número complejo a partir de su forma polar,

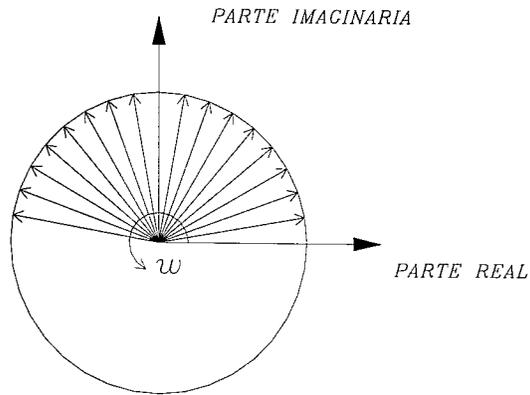


Figura ~3-3:

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (3.100)$$

El número complejo $e^{i\alpha}$ puede ser considerado como un operador, pues la multiplicación de un número complejo genérico z cuya forma polar es $re^{i\theta}$, por $e^{i\alpha}$, equivale a un giro antihorario de z , de valor α . En efecto,

$$z \cdot e^{i\alpha} = re^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = re^{i(\alpha+\theta)} \quad (3.101)$$

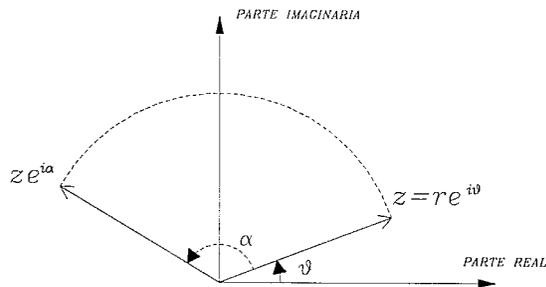


Figura ~3-4:

La representación en variable compleja de magnitudes físicas periódicas facilita la visualización del desfase temporal entre excitaciones y respuestas; así por ejemplo, para una excitación

periódica de la forma $A \cos \omega t = \text{Re} [Ae^{i\omega t}]$ la expresión genérica de la respuesta es de la forma $a \cos \omega t + b \sin \omega t$, podemos expresar,

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \omega t + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \omega t \right) \quad (3.102)$$

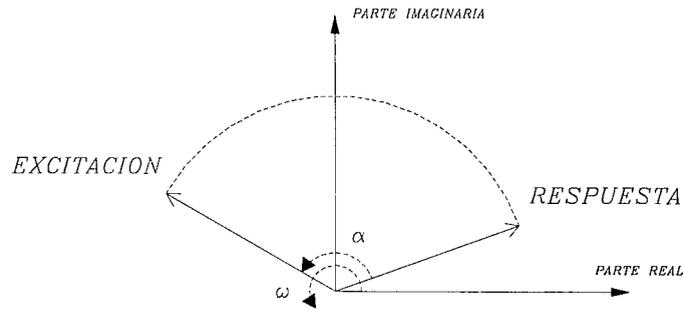


Figura 3-5:

siendo

$$\alpha = \arctan \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \quad (3.103)$$

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos \omega t + \sin \alpha \sin \omega t) = \quad (3.104)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos (\omega t - \alpha)) = \text{Re} \left[\sqrt{a^2 + b^2} e^{i\omega t} e^{-i\alpha} \right] \quad (3.105)$$

3.5.2 Estados armónicos en el tiempo.

Se denomina *estado elastodinámico armónico en el tiempo*, aquel en el que las cargas másicas responden a una expresión del tipo,

$$\mathbf{b}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} \quad (3.106)$$

El caracter periódico de la *fuerza forzante*, nos indica que el campo de desplazamientos, solución general del problema, será de la forma,

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} + \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t) \quad (3.107)$$

distinguiendo una componente estacionaria y una componente transitoria; esta última, debido a la existencia de amortiguamiento, se anula para valores crecientes del tiempo.

3.5.3 Teorema de reciprocidad en elastodinámica armónica en el tiempo.

Para la aplicación del teorema de reciprocidad a la elastodinámica armónica en el tiempo, consideramos dos estados elastodinámicos con variación armónica en el tiempo, (1) y (2), ambos con el mismo valor de la frecuencia ω .

Considerando el término estacionario del campo de desplazamientos, tenemos,

ESTADO (1) :

$$\mathbf{b}'^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} \quad (3.108)$$

$$\mathbf{u}'^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} \quad (3.109)$$

ESTADO (2) :

$$\mathbf{b}'^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}^{(2)}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} \quad (3.110)$$

$$\mathbf{u}'^{(2)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, \omega) e^{i\omega t} \quad (3.111)$$

aplicando la expresión 3.82 a los estados (1) y (2), obtenemos,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left(t_i'^{(1)} * u_i'^{(2)} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \left(b_i'^{(1)} * u_i'^{(2)} + u_{oi}'^{(1)} \dot{u}_i'^{(2)} + v_{oi}'^{(1)} u_i'^{(2)} \right) d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} \left(t_i'^{(2)} * u_i'^{(1)} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \left(b_i'^{(2)} * u_i'^{(1)} + u_{oi}'^{(2)} \dot{u}_i'^{(1)} + v_{oi}'^{(2)} u_i'^{(1)} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.112)$$

desarrollando el producto de convolución, el resultado es la ecuación integral del teorema de reciprocidad para estados elastodinámicos armónicos en el tiempo de la misma frecuencia,

$$\int_{\Gamma} \left(t_i^{(1)} u_i^{(2)} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \left(b_i^{(1)} u_i^{(2)} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(t_i^{(2)} u_i^{(1)} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \left(b_i^{(2)} u_i^{(1)} \right) d\Omega \quad (3.113)$$

siendo $t_i^{(1)}, u_i^{(1)}, b_i^{(1)}, t_i^{(2)}, u_i^{(2)}, b_i^{(2)}$ funciones de \mathbf{x} y w .

3.5.4 Estados antiplanos armónicos en el tiempo.

Se denomina *estado antiplano armónico en el tiempo*, aquel estado elastodinámico en el que las cargas másicas responden a una expresión del tipo,

$$b'_3(x_1, x_2, t) = b_3(x_1, x_2, w) e^{i\omega t} \quad (3.114)$$

El carácter periódico de la *fuerza forzante*, nos indica que el campo de desplazamientos, solución general del problema, será de la forma,

$$u'_3(x_1, x_2, t) = u_3(x_1, x_2, w) e^{i\omega t} + u_t(x_1, x_2, t) \quad (3.115)$$

distinguiendo una componente estacionaria y una componente transitoria, que debido a la existencia de amortiguamiento se anula para valores crecientes del tiempo.

Aplicando la ecuación del movimiento antiplano, expresión 3.98, a la componente estacionaria del desplazamiento,

$$u'_3(x_1, x_2, t) = u_3(x_1, x_2, w) e^{i\omega t} \quad (3.116)$$

obtenemos,

$$c_2^2 u'_{3,\beta\beta} + b'_3 = \ddot{u}'_3 \quad (3.117)$$

eliminando los términos $e^{i\omega t}$ en ambos miembros de la igualdad, obtenemos la ecuación diferencial del movimiento antiplano con variación armónica en el tiempo,

$$\nabla^2 u_3 + \frac{w^2}{c_2^2} u_3 + \frac{1}{c_2^2} b_3 = 0 \quad (3.118)$$

expresión en la que u_3 , b_3 son funciones del tipo,

$$u_3 = u_3(x_1, x_2, w) \quad (3.119)$$

$$b_3 = b_3(x_1, x_2, w) \quad (3.120)$$

3.5.5 Teorema de reciprocidad en elastodinámica antiplana armónica en el tiempo.

La aplicación de la expresión 3.113 a dos estados elastodinámicos antiplanos armónicos en el tiempo resulta,

$$\int_{\Gamma} \left(t_3^{(1)} u_3^{(2)} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \left(b_3^{(1)} u_3^{(2)} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(t_3^{(2)} u_3^{(1)} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho \left(b_3^{(2)} u_3^{(1)} \right) d\Omega \quad (3.121)$$

siendo $t_3^{(1)}, u_3^{(1)}, b_3^{(1)}, t_3^{(2)}, u_3^{(2)}, b_3^{(2)}$ funciones de x_1, x_2 y w .

3.6 Estado elastodinámico fundamental.

Para la aplicación del teorema de reciprocidad vamos a considerar como estado (2), el estado elastodinámico antiplano armónico en el tiempo de carácter auxiliar que llamamos *estado elastodinámico fundamental*, definido como el resultante de la actuación sobre el dominio Ω de frontera Γ de un sistema de cargas másicas que responden a una expresión del tipo,

$$\rho b_3^* = \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \delta(t) e^{i\omega t} \quad (3.122)$$

siendo

$\delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$: distribución delta de Dirac; el origen de la distribución delta de Dirac, $\boldsymbol{\xi}$, lo llamaremos en lo sucesivo *polo*.

$\delta(t)$: distribución delta de Dirac aplicada a la variable tiempo, siendo el origen de la distribución el instante $t = 0$.

La expresión 3.122 es la modelización matemática de la aplicación periódica con frecuencia w , de una fuerza instantánea puntual en ξ , en la dirección de OX_3 .

Las componentes del *estado elastodinámico fundamental* se caracterizan con el superíndice $*$.

3.6.1 Solución fundamental.

Aplicando la ecuación del movimiento, expresión 3.118, y eliminando los términos e^{iwt} , obtenemos

$$\nabla^2 u_3^* + \frac{w^2}{c_2^2} u_3^* + \frac{1}{\mu} \delta(\mathbf{x}; \xi) \delta(t) = 0 \quad (3.123)$$

teniendo en cuenta

$$\delta(\mathbf{x}; \xi) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \xi \quad (3.124)$$

podemos expresar,

$$\nabla^2 u_3^* + \frac{w^2}{c_2^2} u_3^* = 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \xi \quad (3.125)$$

calculando el operador ∇^2 en coordenadas polares, siendo $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ obtenemos,

$$\frac{\partial u_3^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_3^*}{\partial r} + \frac{w^2}{c_2^2} u_3^* = 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \xi \quad (3.126)$$

consideramos el cambio de variable,

$$\begin{cases} r = \frac{\rho}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial u_3^*}{\partial r} = \frac{\partial u_3^*}{\partial \rho} \lambda \\ \lambda = \frac{\omega}{c_2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial r^2} = \frac{\partial u_3^*}{\partial \rho^2} \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial \rho^2} + \frac{\lambda^2}{\rho} \frac{\partial u_3^*}{\partial \rho} + \lambda^2 u_3^* = 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \xi \quad (3.127)$$

eliminando λ , obtenemos,

$$\rho^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial \rho^2} + \rho \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_3^*}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{1}{r^2} u_3^* = 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi} \quad (3.128)$$

que podemos expresar, eliminando $\frac{1}{r^2}$,

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial u_3^*}{\partial \rho} + \rho^2 u_3^* = 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi} \quad (3.129)$$

la expresión 3.129 puede considerarse como una ecuación diferencial de Bessel de orden $(p = 0)$.

La solución de la ecuación 3.129 será por tanto,

$$u_3^*(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi\mu} K_o \left(i \frac{wr}{c_2} \right) \quad (3.130)$$

siendo

$K_o(z)$: función de Bessel modificada de 2ª clase de orden cero.

La expresión 3.130 nos indica que el movimiento en el estado elastodinámico fundamental consiste en una onda de desplazamiento propagándose radialmente desde el polo $\boldsymbol{\xi}$.

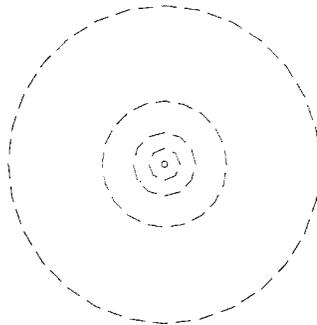


Figura ~3-6:

Para determinar la solución fundamental en tensiones, consideramos un plano paralelo a OX_3 , cuyo vector normal unitario será de la forma,

$$\mathbf{n} : (n_1, n_2, 0) \quad (3.131)$$

el vector tensión asociado al plano sólo tiene componente en la dirección del eje OX_3 ,

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{n} = (0, 0, p_3^*) \quad (3.132)$$

siendo, según la expresión 3.96

$$p_3^* = \sigma_{3\alpha}^* n_\alpha = \mu u_{3,\alpha}^* n_\alpha = \mu (u_{3,1}^* n_1 + u_{3,2}^* n_2) \quad (3.133)$$

teniendo en cuenta la expresión de la solución fundamental,

$$u_{3,\alpha}^* = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \frac{1}{2\pi\mu} K_o \left(i \frac{\omega r}{c_2} \right) \right\} = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ K_o \left(i \frac{\omega r}{c_2} \right) \right\} \quad (3.134)$$

Considerando la derivada de las funciones de Bessel,

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} K_o \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) = \frac{d}{dr} K_o \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = \frac{d}{dz} K_o(\mathbf{z}) \frac{i\omega}{c_2} r_{,\alpha} = -\frac{i\omega}{c_2} r_{,\alpha} K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) \quad (3.135)$$

sustituyendo en la expresión 3.133 obtenemos,

$$p_3^* = \mu \left(\frac{1}{2\pi\mu} \left(-\frac{i\omega}{c_2} \right) r_{,1} K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) n_1 + \frac{1}{2\pi\mu} \left(-\frac{i\omega}{c_2} \right) r_{,2} K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) n_2 \right) \quad (3.136)$$

considerando la expresión de la derivada direccional,

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \nabla r \cdot \mathbf{n} = (r_{,1} n_1 + r_{,2} n_2) \quad (3.137)$$

podemos concluir la expresión de la solución fundamental en tensiones,

$$p_3^*(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = -\frac{i\omega}{2\pi c_2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) \quad (3.138)$$

3.6.2 Teorema de reciprocidad. Ecuacion integral.

Aplicamos el teorema de reciprocidad a los estados elastodinámicos (1) y (2) considerados en el dominio Ω de frontera Γ de un medio continuo de densidad ρ y características elásticas

(c_1, c_2) .

Consideramos como estado (1) un estado elastodinámico genérico en el que las cargas másicas son nulas.

$$ESTADO (1) : \mathbf{b} = 0 \quad (3.139)$$

Consideramos como estado (2) el estado elastodinámico fundamental,

$$\rho b_3^* = \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \delta(t) e^{i\omega t} \quad (3.140)$$

$$u_3^*(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi\mu} K_0 \left(i \frac{\omega r}{c_2} \right) \quad (3.141)$$

$$p_3^*(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = -\frac{i\omega}{2\pi c_2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) \quad (3.142)$$

Aplicando el teorema de reciprocidad para estados elastodinámicos antiplanos armónicos en el tiempo, expresión 3.121, obtenemos

$$\int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_3 u_3^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_3^* u_3 d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b_3^* u_3 d\Omega \quad (3.143)$$

siendo u_3, p_3 las componentes antiplanas del estado (1),

$$u_3 = u_3(\mathbf{x}, w) \quad (3.144)$$

$$p_3 = p_3(\mathbf{x}, w) \quad (3.145)$$

teniendo en cuenta que $b_3 = 0$, y las las propiedades de la distribución *Delta de Dirac*,

$$\int_{\Omega} \rho b_3^* u_3 d\Omega = \int_{\Omega} \delta(x; \boldsymbol{\xi}) u_3 d\Omega = u_3^{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.146)$$

obtenemos la expresión,

$$\int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_3^* u_3 d\Gamma + u_3^{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.147)$$

siendo

$$\xi \in \Omega; \xi \notin \Gamma \quad (3.148)$$

3.7 Ecuación integral del Método de los elementos de contorno.

La expresión 3.147, si llamamos i al polo, resulta

$$w_3^i + \int_{\Gamma} p_3^* w_3 d\Gamma = \int_{\Gamma} p_3 w_3^* d\Gamma \quad (3.149)$$

siendo,

$$i \in \Omega; i \notin \Gamma \quad (3.150)$$

$$w_3 = w_3(x_1, x_2, w) \quad (3.151)$$

$$w_3^* = w_3^*(x_1, x_2, w) \quad (3.152)$$

$$p_3 = p_3(x_1, x_2, w) \quad (3.153)$$

$$p_3^* = p_3^*(x_1, x_2, w) \quad (3.154)$$

y es la ecuación integral del método de los elementos de contorno, que ya obtuvimos en el capítulo 2, a partir de la teoría del potencial, y que hemos obtenido ahora para estados elastodinámicos antiplanos armónicos en el tiempo.

Capítulo 4

EL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 Ecuación integral del Método de los Elementos de Contorno.

En el capítulo 2 se ha expuesto el planteamiento de los denominados *problemas de potencial*, consistentes en la determinación de una función u , que verifica la ecuación de Laplace en el dominio Ω , cuya frontera es Γ ; estando sometido el dominio Ω a condiciones de contorno que pueden ser tipo Dirichlet o tipo Newman; utilizando para el cálculo de u , la deducida función de Green.

Ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (4.1)$$

Condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad \forall x \in \Gamma_1 \\ q &= \bar{q} \quad \forall x \in \Gamma_2 \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Función de Green:

$$u^i = \int_{\Gamma} (u^* q - u q^*) d\Gamma \quad (4.3)$$

siendo

u^i : valor de la función u en el punto $\mathbf{x}_i \in \Omega$; $\mathbf{x}_i \notin \Gamma$ que llamamos polo.

u^* : función de carácter auxiliar conocida como *solución fundamental*; la expresión de u^* en dominios bidimensionales es,

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{1}{r} \right\} \quad (4.4)$$

siendo r la función radial referida al polo.

$q = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$: la derivada de u según la normal exterior a Γ .

$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}}$: la derivada de u^* según la normal exterior a Γ ,

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \quad (4.5)$$

En el capítulo 3 hemos expuesto el planteamiento del *problema elastodinámico antiplano con variación armónica en el tiempo*, consistente en la determinación de la componente antiplana del campo de desplazamientos, función u_3 , que verifica la ecuación del movimiento, en el dominio Ω de frontera Γ ; estando sometido Ω a condiciones de contorno, que pueden ser de tipo Dirichlet o tipo Newman; y utilizando para el cálculo de u_3 , la ecuación integral deducida suponiendo las cargas másicas nulas ($\mathbf{b} = 0$) y aplicando el teorema de reciprocidad.

Ecuación del movimiento antiplano con variación armónica en el tiempo, supuestas nulas las cargas másicas:

$$\nabla^2 u_3 + \frac{\omega^2}{c_2^2} u_3 = 0 \quad (4.6)$$

Condiciones de contorno,

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_1, p_3(\mathbf{x}, t) = \overline{p_3}$$

$$\begin{aligned}\forall \mathbf{x} &\in \Gamma_2, u_3(\mathbf{x}, t) = \bar{u}_3 \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2\end{aligned}\quad (4.7)$$

Ecuación integral,

$$u_3^i + \int_{\Gamma} p_3^* u_3 d\Gamma = \int_{\Gamma} p_3 u_3^* d\Gamma \quad (4.8)$$

siendo,

u_3^i : valor del desplazamiento en el punto $\mathbf{x}_i \in \Omega$; $\mathbf{x}_i \notin \Gamma$, que llamamos polo.

p_3 : componente antiplana del vector tensión, relacionada con u_3 , según la siguiente expresión,

$$p_3 = \sigma_{3\alpha} n_\alpha = \mu u_{3,\alpha} n_\alpha = \mu \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{n}} \quad (4.9)$$

u_3^*, p_3^* : solución del *estado elastodinámico fundamental*, cuya expresión es,

$$u_3^* = \frac{1}{2\pi\mu} K_0 \left(i \frac{wr}{c_2} \right) \quad (4.10)$$

$$p_3^* = -\frac{iw}{2\pi c_2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_1 \left(i \frac{wr}{c_2} \right) \quad (4.11)$$

siendo r la función radial referida al polo.

Las ecuaciones integrales obtenidas en ambos problemas, expresiones 4.3 y 4.8, son similares salvo en el valor de las variables (u^*, q^*), (u_3^*, p_3^*), y en la inclusión de la constante μ en la expresión de p_3 ; igualmente son similares las condiciones de contorno establecidas en Γ , lo que nos induce a plantear un método de resolución común para ambos problemas.

El Método de los Elementos de Contorno, (MEC), que vamos a exponer en el presente capítulo, es un procedimiento numérico aplicable a la resolución de las ecuaciones integrales 4.3 y/o 4.8, es decir, a la resolución de los *problemas de potencial*, y/o a la resolución del *problema elastodinámico antiplano con variación armónica en el tiempo*. Disponemos de un tratamiento exhaustivo sobre el tema en las referencias bibliográficas [4], [10], [3], [5] y [6].

Utilizaremos la notación habitual en el MEC, que exponemos a continuación,

- Función incógnita: u, q

- Funciones *solución fundamental*: u^*, q^*

La relación entre u y q , o entre u^* y q^* es,

$$q = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}; \quad q^* = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} \quad (4.12)$$

o bien

$$q = \mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}; \quad q^* = \mu \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} \quad (4.13)$$

según se trate de problemas de potencial o del problema elastodinámico antiplano. Igualmente el valor de las funciones *solución fundamental* corresponde a las expresiones 4.4 y 4.5, ó 4.10 y 4.11, según se trate de problemas de potencial o del problema elastodinámico antiplano.

- Dominio de integración: Ω cuya frontera es Γ .
- Condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \\ q &= \bar{q} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_2 \\ \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

- Ecuación integral del Método de los Elementos de Contorno:

$$u^i = \int_{\Gamma} (u^* q - u q^*) d\Gamma; \quad i \in \Omega; i \notin \Gamma \quad (4.15)$$

4.2 Ecuación integral en el contorno.

Para obtener a partir de la expresión 4.15 una ecuación integral en el contorno, procederemos a su desarrollo en el supuesto de que el *polo* pertenezca al contorno $\Gamma (i \rightarrow \xi \in \Gamma)$.

Si consideramos como origen de las funciones radiales, el punto $\xi \in \Gamma$, para poder aplicar la ecuación 4.15, consideramos ampliado el dominio de integración Ω en un subdominio circular

infinitesimal de radio ε en el entorno del *polo* ξ , como indica la figura 4-1. Mediante una operación de paso al límite, haciendo tender ε a cero, obtenemos la ecuación integral resultante.

Ecuación integral del Método de los Elementos de Contorno,

$$u^i + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma$$

$$i : \begin{cases} i \in \Omega \\ i \notin \Gamma \end{cases} \quad (4.16)$$

Consideramos que el punto i se aproxima al contorno, $i \rightarrow \xi \in \Gamma$.

Consideramos el dominio Ω ampliado en el entorno de ξ en un área circular infinitesimal de radio ε ,

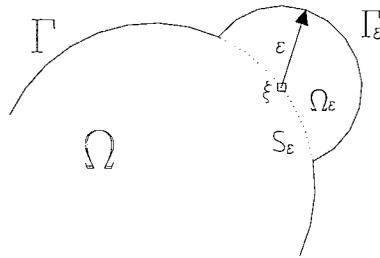


Figura ~4-1:

llamando Γ_ε a la ampliación de Γ , y S_ε al fragmento de Γ eliminado. Queda por tanto el dominio ampliado

$$\bar{\Omega} = \Omega + \Omega_\varepsilon \quad (4.17)$$

siendo el nuevo contorno

$$\bar{\Gamma} = \Gamma - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon \quad (4.18)$$

Al considerar el dominio ampliado el punto ξ es un punto interior y por lo tanto es válida la aplicación de la ecuación integral. Consideramos una operación de paso al límite, siendo la ecuación integral en el contorno,

$$u(\xi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} uq^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u^* q d\Gamma \right\} \quad (4.19)$$

Cálculo de las integrales suponiendo Γ un contorno suave:

•

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} uq^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon} uq^* d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} uq^* d\Gamma \right\} \quad (4.20)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon} uq^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon} u \left(\frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right) d\Gamma \right\} = VPC \int_{\Gamma} u \left(\frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (4.21)$$

en los puntos de Γ_ε tomamos,

$$u \simeq u(\xi) \quad (4.22)$$

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \mathbf{n} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = 1 \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} uq^* d\Gamma \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u \left(\frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) d\Gamma \right\} = \\ &= u(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{-1}{2\pi \varepsilon} \right) \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} d\theta \right\} = u(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{-1}{2\pi \varepsilon} \right) \varepsilon \pi \right\} = -\frac{1}{2} u(\xi) \end{aligned} \quad (4.24)$$

•

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u^* q d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon} u^* q d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* q d\Gamma \right\} \quad (4.25)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon} u^* q d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \ln \left(\frac{1}{r} \right) q d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \ln \left(\frac{1}{r} \right) q d\Gamma \quad (4.26)$$

integral impropia convergente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* q d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \ln \left(\frac{1}{r} \right) q d\Gamma \right\} \quad (4.27)$$

en Γ_ε tomamos,

$$\nabla u \simeq \nabla u(\xi) \quad (4.28)$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} \simeq \nabla u(\xi) \cdot \mathbf{n} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{1}{2\pi} \right) \ln \left(\frac{1}{r} \right) q d\Gamma \right\} &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right) \nabla u(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{n} d\Gamma \right\} = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right) \nabla u(\xi) \int_0^\pi \mathbf{n} d\theta \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

La ecuación integral del Método de los Elementos de Contorno aplicada a puntos pertenecientes al contorno Γ , considerado este contorno suave, resulta por tanto:

$$\frac{1}{2} u(\xi) + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \quad (4.31)$$

4.3 Aproximación del contorno mediante elementos cuadráticos.

Para proceder a la discretización de la ecuación integral 4.31, necesitamos en primer lugar, discretizar el contorno Γ . Introducimos a continuación algunas definiciones elementales

del Método de los Elementos de Contorno, que podemos encontrar más desarrolladas en la referencias bibliográficas [4] y [3].

NODOS Y ELEMENTOS. -

Se establecen sobre Γ una serie de puntos que llamaremos *nodos*, tal como se indica en la figura 4-2.

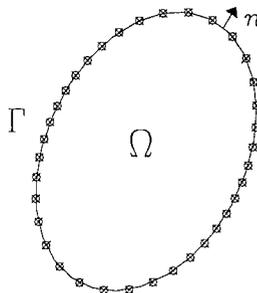


Figura 4-2:

Cada tres nodos constituyen un *elemento de contorno*, de tal forma que Γ queda totalmente recubierto de elementos. El Método de los Elementos de Contorno se basa en la aproximación de Γ mediante la poligonal circunscrita formada por los elementos de contorno. Por tanto, cuanto mayor sea el número de nodos y por lo tanto mayor el número de elementos, mayor será la precisión del procedimiento numérico.

En adelante llamaremos

N : número de nodos utilizados en la aproximación de Γ .

$NE = N/2$: número de elementos de contorno.

En cada elemento de contorno distinguimos los nodos extremos (1) y (3) y el nodo intermedio (2), tal como se indica en la figura 4-3.

COORDENADA NATURAL. - Establecemos una correspondencia biunívoca entre los puntos de Γ incluidos en un elemento de contorno y los valores de la que vamos a llamar *coordenada natural* ξ , de tal forma que a los nodos extremos de elemento le hacemos corresponder el valor $\xi = -1$, y $\xi = 1$ respectivamente, y al nodo intermedio le hacemos corresponder el valor $\xi = 0$. De esta

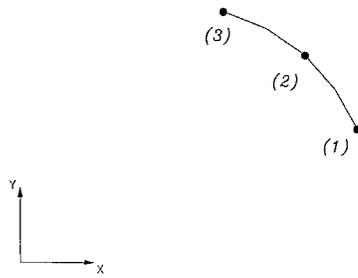


Figura ~ 4-3:

forma, la variación de la variable natural ξ , en el intervalo $[-1, 1]$ supone un recorrido completo del elemento de contorno.

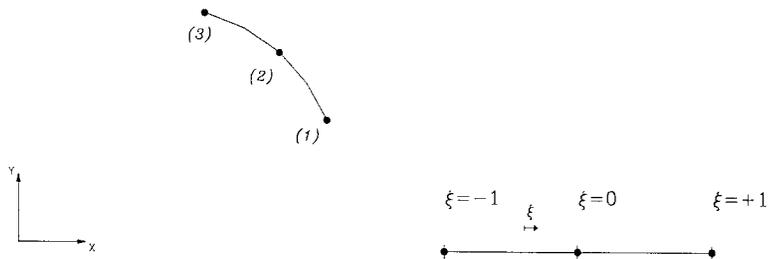


Figura ~ 4-4:

FUNCIONES DE FORMA. - Las conocidas como *funciones de forma* son funciones cuadráticas de la variable ξ , definidas de forma que toman valores 0 y 1, en los nodos del elemento de contorno. Sus expresiones son las siguientes,

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\
 \phi_1 &= (1 - \xi)(1 + \xi) \\
 \phi_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)
 \end{aligned}
 \tag{4.32}$$

Su representación gráfica se indica en la figura 4-5.

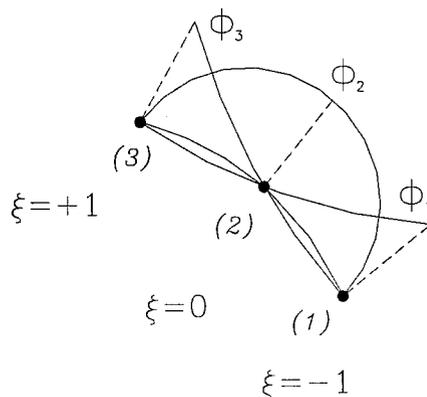


Figura ~4-5:

INTERPOLACION GEOMETRICA.- Utilizando las funciones de forma, el vector de posición correspondiente a un punto incluido en el elemento de contorno, lo obtenemos por interpolación de los valores nodales, como se indica,

$$\mathbf{x}(\xi) = \phi_1(\xi) \mathbf{x}^{(1)} + \phi_2(\xi) \mathbf{x}^{(2)} + \phi_3(\xi) \mathbf{x}^{(3)} \quad (4.33)$$

las componentes de $\mathbf{x}(\xi)$ las podemos expresar,

$$\begin{aligned} x_1(\xi) &= \phi_1(\xi) x_1^{(1)} + \phi_2(\xi) x_1^{(2)} + \phi_3(\xi) x_1^{(3)} \\ x_2(\xi) &= \phi_1(\xi) x_2^{(1)} + \phi_2(\xi) x_2^{(2)} + \phi_3(\xi) x_2^{(3)} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Los elementos de contorno se llaman por ello elementos isoparamétricos.

JACOBIANO.- Las ecuaciones 4.34 constituyen, para cada elemento de contorno, las ecuaciones paramétricas de la curva que aproxima Γ . Por tanto, podemos utilizar el concepto geométrico de *jacobiano*, como la variación de la longitud de curva respecto del parámetro ξ , que puede ser

positiva o negativa. Así tenemos,

$$d\Gamma = \pm \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} \Rightarrow J = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \pm \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (4.35)$$

puesto que en un elemento de contorno $d\Gamma$, y $d\xi$ van a aumentar en el mismo sentido, podemos expresar,

$$d\Gamma = |J| d\xi \quad (4.36)$$

INTERPOLACION FUNCIONAL. - Igualmente el valor en un punto incluido en el elemento de contorno, de las funciones u, q , lo determinaremos por interpolación de los valores nodales,

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \phi_1(\xi) u^{(1)} + \phi_2(\xi) u^{(2)} + \phi_3(\xi) u^{(3)} \\ q(\xi) &= \phi_1(\xi) q^{(1)} + \phi_2(\xi) q^{(2)} + \phi_3(\xi) q^{(3)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

ELEMENTOS CONFORMES Y NO CONFORMES. - Según lo expuesto, en los elementos de contorno cuadráticos distinguimos tres tipos de nodos:

1. Nodos geométricos: utilizados para la interpolación geométrica.
2. Nodos de interpolación: utilizados para la interpolación funcional: u, q .
3. Nodos de colocación: utilizados para definir el polo u origen de las funciones radiales.

En la formulación habitual del Método de los Elementos de Contorno los tres tipos de nodos indicados coinciden en un mismo punto, tal como se indica en la figura 4-6

Los llamados *elementos conformes*, son aquellos en los que los nodos de colocación cuando coinciden con nodos extremos del elemento, se consideran desplazados hacia el interior del elemento, tal como se indica en la figura 4-7.

Por último los *elementos no conformes*, son aquellos en los que *nodos de colocación* y *nodos de interpolación* son desplazados cuando coinciden con nodos extremos del elemento tal como se indica en la figura 4-8.

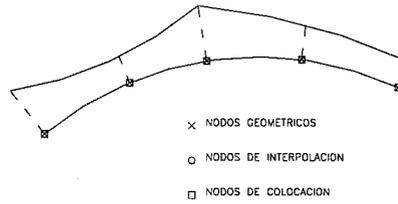


Figura 4-6:

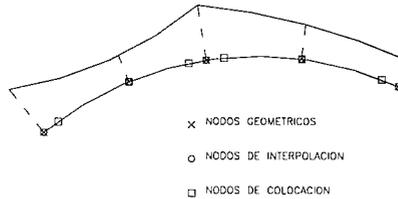


Figura 4-7:

4.4 Discretización de la ecuación integral del MEC.-

Discretizamos en el contorno Γ , aproximado por NE elementos, las integrales incluidas en la expresión 4.31,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma &= \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2}u(\xi) + \sum_{e=1}^{e=NE} \int_{\Gamma_e} uq^* d\Gamma &= \sum_{e=1}^{e=NE} \int_{\Gamma_e} qu^* d\Gamma \end{aligned} \quad (4.38)$$

Desarrollamos las integrales de la expresión 4.38, cuyos dominios de integración son elementos de contorno,

•

$$\int_{\Gamma_e} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma_e} (\phi_1 u^{(1)} + \phi_2 u^{(2)} + \phi_3 u^{(3)}) q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_e} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{pmatrix} q^* d\Gamma =$$

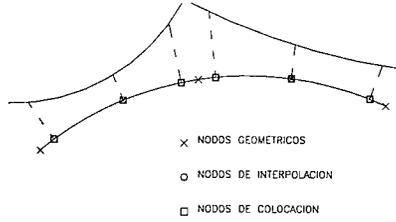


Figura ~ 4-8:

dejando fuera del integrando los valores nodales,

$$= \int_{\Gamma_e} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) q^* d\Gamma \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{pmatrix}_{(e)} = \begin{pmatrix} h_1^{ie} & h_2^{ie} & h_3^{ie} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{pmatrix}_{(e)}$$

siendo

$$h_k^{ie} = \int_{\Gamma_e} \phi_k q^* d\Gamma; \quad i : \text{nodo de colocación.}$$

•

$$\int_{\Gamma_e} q u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_e} (\phi_1 q^{(1)} + \phi_2 q^{(2)} + \phi_3 q^{(3)}) u^* d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ q^{(3)} \end{pmatrix} u^* d\Gamma =$$

dejando fuera del integrando los valores nodales,

$$= \int_{\Gamma_e} \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} u^* d\Gamma \begin{pmatrix} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ q^{(3)} \end{pmatrix}_{(e)} = \begin{pmatrix} g_1^{ie} & g_2^{ie} & g_3^{ie} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ q^{(3)} \end{pmatrix}_{(e)}$$

siendo

$$g_k^{ie} = \int_{\Gamma_e} \phi_k u^* d\Gamma; \quad i : \text{nodo de colocación} \quad (4.39)$$

A partir de los coeficientes h_k^{ie} y g_k^{ie} , formamos las matrices $\hat{\mathbf{H}}$ de orden $N \times N$, y \mathbf{G} , de orden $N \times 3NE$, de la siguiente forma,

$$\hat{\mathbf{H}} : \hat{H}^{i,j} = \begin{cases} j \text{ par} : h_2^{i,(\frac{j}{2})} \\ j \text{ impar} : h_3^{i,(\frac{j-1}{2})} + h_1^{i,(\frac{j+1}{2})} \end{cases} \quad (4.40)$$

$$\mathbf{G} : G^{i,j} = g_k^{i,m} : \begin{cases} j \text{ multiplo } 3 : \begin{cases} m = j/3 \\ k = 3 \end{cases} \\ j \text{ no multiplo } 3 : \begin{cases} m = 1 + \text{parte entera}(j/3) \\ k = \text{resto}(j/3) \end{cases} \end{cases} \quad (4.41)$$

Definimos el vector \mathbf{u} de dimensión N , como aquel cuyas componentes son los valores nodales de la función u ,

$$\mathbf{u} : \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ \vdots \\ u^{(N)} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

y el vector \mathbf{q} , de dimensión $3NE$, como aquel cuyas componentes son los valores nodales de la función q ordenados por elementos,

$$\mathbf{q} = \left[\begin{array}{c} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ q^{(3)} \\ \vdots \\ q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ q^{(3)} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ q^{(3)} \end{array} \right\} \text{ elemento } 1 \\ \vdots \\ \left. \begin{array}{l} q^{(1)} \\ q^{(2)} \\ q^{(3)} \end{array} \right\} \text{ elemento } NE \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (4.43)$$

La ecuación integral 4.31 podemos expresarla matricialmente de la siguiente forma,

$$\frac{1}{2}u(\xi) + \hat{\mathbf{H}}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (4.44)$$

Definiendo la matriz \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H} : H^{ij} = \begin{cases} \hat{H}^{ij} & \text{cuando } i \neq j \\ \hat{H}^{ij} + \frac{1}{2} & \text{cuando } i = j \end{cases} \quad (4.45)$$

la expresión matricial del Método de los Elementos de Contorno resulta,

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{q} \quad (4.46)$$

SISTEMA DE ECUACIONES.- Las condiciones de contorno expresadas en 4.14 indican que en cada nodo, o conocemos el valor de u , o conocemos el valor de q , pero no ambos. El Método de los Elementos de Contorno, una vez obtenidas las matrices \mathbf{H} y \mathbf{G} , reordena sus componentes intercambiando columnas de una y otra matriz, de tal forma, que en la expresión matricial 4.46, a la derecha de la igualdad, queden los valores nodales conocidos, u o q , y a la izquierda los valores nodales incógnita.

Si llamamos,

- \mathbf{A} : matriz de orden $N \times N$, resultante de la reordenación de las componentes de la matriz \mathbf{H} .
- \mathbf{x} : vector de dimensión N formado por los valores nodales incógnita.
- \mathbf{F} : vector de dimensión N , que resulta del producto matricial de la matriz \mathbf{G} después de la reordenación de sus componentes, por el vector de dimensión $3 \times NE$, cuyas componentes son los valores nodales conocidos de las funciones u, q , ordenados por elementos.

la expresión matricial 4.46 se transforma en

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (4.47)$$

Obtenemos finalmente un sistema lineal de N ecuaciones y N incógnitas, compatible y determinado, de fácil resolución numérica por los métodos habituales, que nos permitirá el cálculo de los valores nodales no conocidos de las funciones u y q .

Capítulo 5

Formulación integral para la resolución del problema inverso.

En el presente capítulo desarrollaremos una formulación integral para la resolución de problemas de potencial planteados como *problemas inversos de identificación*.

Como se ha expuesto en el capítulo 1, en el problema inverso de identificación una porción del contorno Γ que llamaremos Γ_H , y que suele representar el contorno de un hueco o defecto en el interior del dominio Ω , es desconocida. La resolución del problema inverso consiste en la determinación de la geometría Γ_H conociendo, además de las condiciones de contorno, un número M de mediciones experimentales adicionales.

La formulación integral se desarrolla a partir de la ecuación integral del Método de los Elementos de Contorno, por lo que resulta aplicable a la resolución de problemas de elastodinámica antiplana armónica en el tiempo.

5.1 Planteamiento del problema inverso de identificación.

Consideremos un dominio bidimensional $\tilde{\Omega}$, cuyo contorno es Γ . Consideremos la existencia de un hueco o defecto en $\tilde{\Omega}$, cuya geometría y posición es desconocida. El contorno Γ queda por tanto dividido, en el contorno conocido Γ_C , y el contorno no conocido o contorno del hueco, Γ_H ,

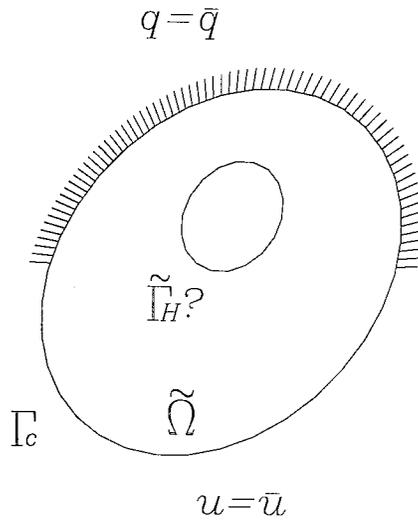


Figura 5-1:

$$\Gamma = \Gamma_C + \Gamma_H \quad (5.1)$$

El planteamiento de problemas de potencial, tratado en el capítulo 2, nos lleva a la resolución de la ecuación de Laplace en el dominio $\tilde{\Omega}$:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}) = 0; \quad \mathbf{x} \in \tilde{\Omega} \quad (5.2)$$

sometido a condiciones de contorno esenciales y naturales,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \Gamma_{C_u} &\Rightarrow u(\mathbf{x}) = \bar{u} \\ \mathbf{x} \in \Gamma_{C_q} &\Rightarrow q(\mathbf{x}) = \bar{q} \\ \Gamma_C &= \Gamma_{C_u} + \Gamma_{C_q} \\ \mathbf{x} \in \Gamma_H &\Rightarrow q(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

siendo

\mathbf{x} : vector de posición de un punto perteneciente a $\tilde{\Omega}$

u : función potencial

$q = \mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$: función flujo de potencial

\mathbf{n} : normal exterior a Γ

ψ : fuente de potencial

La ecuación integral para la resolución de problemas de potencial en dominios con huecos de geometría conocida, mediante aplicación del Método de los Elementos de Contorno la encontramos en la obra de Dominguez Abascal, referencia [10],

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_C} [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})q(\mathbf{y}) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})u(\mathbf{y})] d\Gamma_C(\mathbf{y}) + \\ + \int_{\Gamma_H} [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})q(\mathbf{y}) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})u(\mathbf{y})] d\Gamma_H(\mathbf{y}) + \int_{\tilde{\Omega}} u^*(\mathbf{z}; \mathbf{x})\psi(\mathbf{z})d\tilde{\Omega}(\mathbf{z}) \quad (5.4)$$

Si consideramos ausencia de fuentes de potencial: $\psi(\mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \tilde{\Omega}$, la expresión 5.4 queda,

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_C} [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})q(\mathbf{y}) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})u(\mathbf{y})] d\Gamma_C(\mathbf{y}) + \\ + \int_{\Gamma_H} [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})q(\mathbf{y}) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})u(\mathbf{y})] d\Gamma_H(\mathbf{y}) \quad (5.5)$$

La resolución del problema inverso consiste en determinar la posición y geometría de Γ_H conociendo el valor de un número M de mediciones experimentales en el contorno conocido Γ_C .

Disponemos por tanto de $M = M_u + M_q$ mediciones experimentales de *potencial* y *flujo de potencial* en Γ_C :

M_u : mediciones de potencial.

M_q : mediciones de flujo.

De esta forma el *potencial* resulta conocido en algunos puntos de Γ_{C_q} y el *flujo de potencial* resulta conocido en algunos puntos de Γ_{C_u} :

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}_\alpha) &= \bar{u}(\mathbf{x}_\alpha), \quad \mathbf{x}_\alpha \in \Gamma_{C_u} \quad \alpha = 1, 2, \dots, M_u \\
q(\mathbf{x}_\beta) &= \bar{q}(\mathbf{x}_\beta), \quad \mathbf{x}_\beta \in \Gamma_{C_q} \quad \beta = 1, 2, \dots, M_q
\end{aligned}
\tag{5.6}$$

Consideramos una geometría supuesta para el defecto o hueco, de contorno Γ_V , que llamaremos contorno variable, y que suponemos próximo a Γ_H . De esta forma, el dominio de integración queda definido doblemente, Ω y $\tilde{\Omega}$, según consideremos la geometría Γ_V ó Γ_H del hueco.

La doble consideración del dominio de integración, Ω y $\tilde{\Omega}$, nos permite definir en Ω la magnitud vectorial que vamos a llamar *variación geométrica*, como el vector desplazamiento necesario para que cada punto de Ω alcance su posición real en $\tilde{\Omega}$.

Como se puede apreciar en la figura 5-2 la variación geométrica es nula en los puntos de Γ_C y toma valores crecientes a medida que nos acercamos a Γ_V .

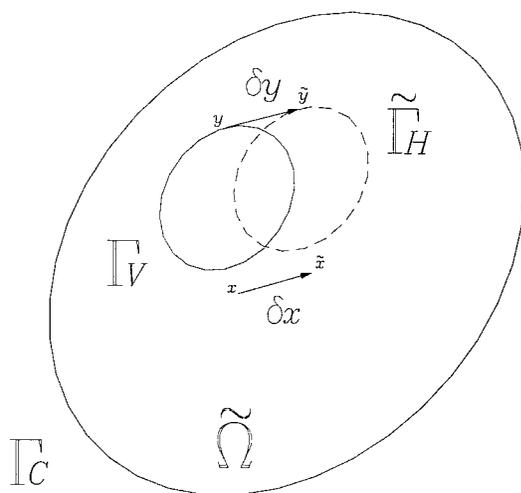


Figura ~5-2:

En lo sucesivo, utilizaremos la notación "˜" para indicar magnitudes consideradas en el dominio $\tilde{\Omega}$, en contraposición de las magnitudes consideradas en Ω .

La ecuación integral del Método de los Elementos de Contorno para cada planteamiento es

la siguiente,

- Planteamiento considerando la geometría Γ_V :

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}, \Gamma_V) &= \int_{\Gamma_C} [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma_C(\mathbf{y}) \\
 &+ \int_{\Gamma_V} [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma_V(\mathbf{y})
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &\in \Gamma_{C_u} \Rightarrow u(\mathbf{x}) = \bar{u} \\
 \mathbf{x} &\in \Gamma_{C_q} \Rightarrow q(\mathbf{x}) = \bar{q} \\
 \Gamma_C &= \Gamma_{C_u} + \Gamma_{C_q} \\
 \mathbf{x} &\in \Gamma_V \Rightarrow q(\mathbf{x}) = 0
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

- Planteamiento considerando la geometría Γ_H :

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{x}, \Gamma_H) &= \int_{\Gamma_C} [u^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}})q(\mathbf{y}, \Gamma_H) - q^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}})u(\mathbf{y}, \Gamma_H)] d\Gamma_C(\mathbf{y}) \\
 &+ \int_{\Gamma_H} [u^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}})q(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) - q^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}})u(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H)] d\Gamma_H(\tilde{\mathbf{y}})
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &\in \Gamma_{C_u} \Rightarrow u(\mathbf{x}) = \bar{u} \\
 \mathbf{x} &\in \Gamma_{C_q} \Rightarrow q(\mathbf{x}) = \bar{q} \\
 \Gamma_C &= \Gamma_{C_u} + \Gamma_{C_q} \\
 \tilde{\mathbf{x}} &\in \Gamma_H \Rightarrow q(\tilde{\mathbf{x}}) = 0
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

El doble planteamiento del problema de potencial nos permite definir, para una configuración supuesta del hueco Γ_V dada, las siguientes dos variables:

- *variación de potencial*: aumento necesario de potencial en el punto \mathbf{x} para pasar de la configuración supuesta del hueco a la configuración real.

$$\delta u(\mathbf{x}, \Gamma_V) = u(\mathbf{x}, \Gamma_H) - u(\mathbf{x}, \Gamma_V) \quad (5.11)$$

- *variación de flujo de potencial*: aumento necesario de flujo de potencial en el punto \mathbf{x} para pasar de la configuración supuesta del hueco a la configuración real.

$$\delta q(\mathbf{x}, \Gamma_V) = q(\mathbf{x}, \Gamma_H) - q(\mathbf{x}, \Gamma_V) \quad (5.12)$$

El potencial $u(\mathbf{x}, \Gamma_H)$ y el flujo de potencial $q(\mathbf{x}, \Gamma_H)$ correspondientes a la geometría real del hueco lo conocemos en algunos puntos de Γ_C , a partir de las condiciones de contorno y las mediciones experimentales.

El potencial $u(\mathbf{x}, \Gamma_V)$, y el flujo de potencial $q(\mathbf{x}, \Gamma_V)$ correspondientes a la geometría supuesta del hueco, puesto que Γ_V es conocido, se determinará mediante aplicación directa del Método de los Elementos de Contorno.

5.2 Consideraciones geométricas.

Consideramos próximos el contorno variable Γ_V y el contorno real Γ_H del hueco.

LLamamos

$\tilde{\mathbf{y}}$: vector de posición de un punto perteneciente a Γ_H .

\mathbf{y} : vector de posición de un punto perteneciente a Γ_V .

Tal como ha sido definida, la variación geométrica $\delta\mathbf{y}$, es la diferencia vectorial entre $\tilde{\mathbf{y}}$, e \mathbf{y} es decir, el incremento necesario de \mathbf{y} para pasar de la configuración supuesta a la configuración real.

Analizando la figura 5-4 hacemos las siguientes consideraciones geométricas,

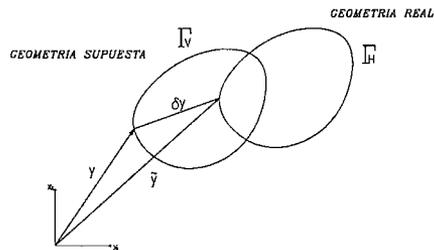


Figura ~5-3:

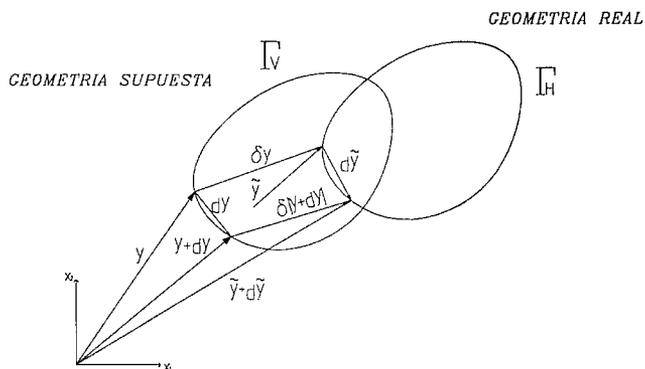


Figura ~5-4:

$$d\Gamma_V = |dy|; \quad d\Gamma_H = |d\tilde{y}| \quad (5.13)$$

el esquema vectorial nos permite deducir,

$$dy + \delta(y + dy) = \delta y + d\tilde{y} \quad (5.14)$$

suponiendo la linealidad del operador δ podemos concluir,

$$\delta(dy) = d\tilde{y} - dy = d(\tilde{y} - y) = d(\delta y) \quad (5.15)$$

Definimos en cada punto del contorno variable Γ_V la función *variación del jacobiano* $\delta J(y)$

según la siguiente expresión,

$$\delta J(\mathbf{y}) = \frac{|d\tilde{\mathbf{y}}| - |d\mathbf{y}|}{|d\mathbf{y}|} \quad (5.16)$$

que nos permite expresar,

$$d\Gamma_H(\tilde{\mathbf{y}}) = (1 + \delta J(\mathbf{y})) d\Gamma_V(\mathbf{y}) \quad (5.17)$$

Definimos para cada punto de Γ_V la magnitud vectorial $\delta \mathbf{n}(\mathbf{y})$, como la variación necesaria del vector normal en \mathbf{y} para pasar de la geometría supuesta a la geometría real del hueco, es decir,

$$\delta \mathbf{n}(\mathbf{y}) = \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (5.18)$$

Las componentes del vector $\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{y}})$ se pueden expresar,

$$n_1(\tilde{\mathbf{y}}) = \frac{d\tilde{y}_2}{d\Gamma_H(\tilde{\mathbf{y}})} \quad (5.19)$$

$$n_2(\tilde{\mathbf{y}}) = -\frac{d\tilde{y}_1}{d\Gamma_H(\tilde{\mathbf{y}})} \quad (5.20)$$

considerando las expresiones 6.94 y 5.17 en el numerador y el denominador de las expresiones 5.19 y 6.96,

$$n_1(\tilde{\mathbf{y}}) = \frac{dy_2 + \delta(dy_2)}{(1 + \delta J(\mathbf{y})) d\Gamma_V(\mathbf{y})} = \frac{dy_2}{d\Gamma_V(\mathbf{y})} \frac{\left(1 + \frac{\delta(dy_2)}{dy_2}\right)}{(1 + \delta J(\mathbf{y}))} \quad (5.21)$$

$$n_2(\tilde{\mathbf{y}}) = -\frac{dy_1 + \delta(dy_1)}{(1 + \delta J(\mathbf{y})) d\Gamma_V(\mathbf{y})} = -\frac{dy_1}{d\Gamma_V(\mathbf{y})} \frac{\left(1 + \frac{\delta(dy_1)}{dy_1}\right)}{(1 + \delta J(\mathbf{y}))} \quad (5.22)$$

teniendo en cuenta el siguiente desarrollo en serie,

$$\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + \varepsilon} \simeq 1 - \varepsilon + TOS \quad (5.23)$$

podemos expresar,

$$n_1(\tilde{\mathbf{y}}) = \frac{dy_2}{d\Gamma_V(\mathbf{y})} \left(1 + \frac{\delta(dy_2)}{dy_2}\right) \frac{1}{(1 + \delta J(\mathbf{y}))} \simeq \frac{dy_2}{d\Gamma_V(\mathbf{y})} \left(1 - \delta J(\mathbf{y}) + \frac{\delta(dy_2)}{dy_2}\right) \quad (5.24)$$

$$n_2(\tilde{\mathbf{y}}) = -\frac{dy_1}{d\Gamma_V(\mathbf{y})} \left(1 + \frac{\delta(dy_1)}{dy_1}\right) \frac{1}{(1 + \delta J(\mathbf{y}))} \simeq -\frac{dy_1}{d\Gamma_V(\mathbf{y})} \left(1 - \delta J(\mathbf{y}) + \frac{\delta(dy_1)}{dy_1}\right) \quad (5.25)$$

teniendo en cuenta la expresión de las componentes del vector normal,

$$n_1(\tilde{\mathbf{y}}) = n_1(\mathbf{y}) \left(1 - \delta J(\mathbf{y}) + \frac{\delta(dy_2)}{dy_2}\right) = n_1(\mathbf{y}) + n_1(\mathbf{y}) \left(-\delta J(\mathbf{y}) + \frac{\delta(dy_2)}{dy_2}\right) \quad (5.26)$$

$$n_2(\tilde{\mathbf{y}}) = n_2(\mathbf{y}) \left(1 - \delta J(\mathbf{y}) + \frac{\delta(dy_1)}{dy_1}\right) = n_2(\mathbf{y}) + n_2(\mathbf{y}) \left(-\delta J(\mathbf{y}) + \frac{\delta(dy_1)}{dy_1}\right) \quad (5.27)$$

así como la expresión 5.18 podemos expresar,

$$\delta n_1(\mathbf{y}) = n_1(\tilde{\mathbf{y}}) - n_1(\mathbf{y}) = n_1(\mathbf{y}) \left(-\delta J(\mathbf{y}) + \frac{\delta(dy_2)}{dy_2}\right) \quad (5.28)$$

$$\delta n_2(\mathbf{y}) = n_2(\tilde{\mathbf{y}}) - n_2(\mathbf{y}) = n_2(\mathbf{y}) \left(-\delta J(\mathbf{y}) + \frac{\delta(dy_1)}{dy_1}\right) \quad (5.29)$$

Definimos para cada punto de Γ_V la magnitud $\delta \mathbf{m}$ por la expresión vectorial,

$$\delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) = \left[\frac{d(\delta y_2)}{d\Gamma_V} \quad -\frac{d(\delta y_1)}{d\Gamma_V} \right] \quad (5.30)$$

que podemos expresar como derivadas direccionales,

$$\delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) = \left[\nabla(\delta y_2) \cdot \mathbf{t} \quad -\nabla(\delta y_1) \cdot \mathbf{t} \right] \quad (5.31)$$

siendo \mathbf{t} el vector tangente en Γ_V . Las componentes de $\delta \mathbf{m}$ son,

$$\delta m_1(\mathbf{y}) = \nabla(\delta y_2) \cdot \mathbf{t} = \frac{d(\delta y_2)}{d\Gamma_V} \quad (5.32)$$

$$\delta m_2(\mathbf{y}) = -\nabla(\delta y_1) \cdot \mathbf{t} = -\frac{d(\delta y_1)}{d\Gamma_V} \quad (5.33)$$

aplicando la regla de la cadena,

$$\delta m_1(\mathbf{y}) = \frac{d(\delta y_2)}{d\Gamma_V} = \frac{d(\delta y_2)}{dy_2} \frac{dy_2}{d\Gamma_V} = \frac{d(\delta y_2)}{dy_2} n_1 \quad (5.34)$$

$$\delta m_2(\mathbf{y}) = -\frac{d(\delta y_1)}{d\Gamma_V} = -\frac{d(\delta y_1)}{dy_1} \frac{dy_1}{d\Gamma_V} = -\frac{d(\delta y_1)}{dy_1} n_2 \quad (5.35)$$

intercambiando los operadores d y δ ,

$$\delta m_1(\mathbf{y}) = n_1 \frac{\delta(dy_2)}{dy_2} \quad (5.36)$$

$$\delta m_2(\mathbf{y}) = n_2 \frac{\delta(dy_1)}{dy_1} \quad (5.37)$$

sustituyendo en 5.28 y 5.29,

$$\delta n_1(\mathbf{y}) = -n_1(\mathbf{y}) \delta J(\mathbf{y}) + \delta m_1(\mathbf{y}) \quad (5.38)$$

$$\delta n_2(\mathbf{y}) = -n_2(\mathbf{y}) \delta J(\mathbf{y}) + \delta m_2(\mathbf{y}) \quad (5.39)$$

podemos concluir la siguiente expresión,

$$\delta \mathbf{n}(\mathbf{y}) = \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) - \mathbf{n}(\mathbf{y}) \delta J(\mathbf{y}) \quad (5.40)$$

5.3 Desarrollos en serie.

Consideremos el contorno variable Γ_V próximo al contorno real Γ_H y por lo tanto \mathbf{y} próximo a $\tilde{\mathbf{y}}$. Planteamos a continuación el desarrollo en serie de las funciones aparecidas en las expresiones 5.7 y 5.9:

- Desarrollo en serie de $\delta J(\mathbf{y})$: teniendo en cuenta las expresiones 6.39 y 6.94 podemos expresar,

$$\begin{aligned}\delta J(\mathbf{y}) &= \frac{|d\tilde{\mathbf{y}}| - |d\mathbf{y}|}{|d\mathbf{y}|} = \frac{|d\mathbf{y} + \delta(d\mathbf{y})| - |d\mathbf{y}|}{|d\mathbf{y}|} = \\ &= \frac{\sqrt{(d\mathbf{y} + \delta(d\mathbf{y})) \cdot (d\mathbf{y} + \delta(d\mathbf{y}))}}{\sqrt{d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y}}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{2d\mathbf{y} \cdot \delta(d\mathbf{y})}{d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y}}} - 1\end{aligned}\quad (5.41)$$

teniendo en cuenta el desarrollo en serie elemental,

$$(1 + \alpha)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\alpha + TOS \quad (5.42)$$

concluimos,

$$\delta J(\mathbf{y}) \simeq \frac{d\mathbf{y} \cdot \delta(d\mathbf{y})}{d\mathbf{y} \cdot d\mathbf{y}} \quad (5.43)$$

- Desarrollo en serie de la función *solución fundamental* u^* considerada como función de \mathbf{x} :

$$u^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}}) = u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + \nabla_x [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \delta\mathbf{x} + TOS \quad (5.44)$$

siendo ∇_x la derivada de la función u^* respecto de la variación del polo \mathbf{x} .

Por ser u^* función radial se cumple,

$$\nabla_x [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] = -\nabla_y [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \quad (5.45)$$

La expresión 5.44 se puede expresar como sigue, suprimiendo el subíndice y ; considerando ($\nabla \equiv \nabla_y$),

$$u^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}}) = u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) - \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \delta\mathbf{x} + TOS \quad (5.46)$$

- Desarrollo en serie de la función *flujo de la solución fundamental* q^* considerada como función de \mathbf{x} :

El flujo de la solución fundamental lo podemos expresar,

$$q^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} [u^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}})] = \nabla [u^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (5.47)$$

considerando $q^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}})$ como una función de \mathbf{x} , hacemos su desarrollo en serie,

$$q^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}}) = q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + \nabla_x [q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \delta \mathbf{x} + TOS \quad (5.48)$$

tomando

$$\nabla_x [q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] = \nabla_x [\nabla (u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}))] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (5.49)$$

podemos expresar,

$$q^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}}) \simeq q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + \nabla_x [\nabla (u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}))] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \delta \mathbf{x} \quad (5.50)$$

por ser $\nabla (u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}))$ una función radial, podemos concluir,

$$q^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}}) \simeq q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) - \nabla [\nabla (u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}))] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \delta \mathbf{x} \quad (5.51)$$

$$q^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}}) \simeq q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) - \nabla [q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \delta \mathbf{x} \quad (5.52)$$

- Desarrollo en serie de la función *solución fundamental* u^* considerada como función de \mathbf{x} e \mathbf{y} :

$$u^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}}) = u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + \nabla_x [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \delta \mathbf{x} + \nabla_y [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \delta \mathbf{y} + TOS \quad (5.53)$$

que podemos expresar,

$$u^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}}) = u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot (\delta \mathbf{y} - \delta \mathbf{x}) + TOS \quad (5.54)$$

- Desarrollo en serie de la función *flujo de la solución fundamental* q^* considerada como función de \mathbf{x} e \mathbf{y} :

La expresión del flujo de la solución fundamental es,

$$q^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}}) = \nabla [u^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}})] \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{y}}) \quad (5.55)$$

consideramos el desarrollo en serie de $\nabla [u^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}})]$ considerado como función de \mathbf{x}, \mathbf{y} ,

$$\nabla [u^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}})] = \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] + \nabla_{\mathbf{y}} \{ \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \} \cdot \delta \mathbf{y} + \nabla_{\mathbf{x}} \{ \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \} \cdot \delta \mathbf{x} + TOS \quad (5.56)$$

teniendo en cuenta el carácter de función radial,

$$\nabla [u^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}})] = \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] + \nabla \{ \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \} \cdot (\delta \mathbf{y} - \delta \mathbf{x}) + TOS \quad (5.57)$$

Considerando la expresión 5.18 podemos expresar,

$$\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{n}(\mathbf{y}) + \delta \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (5.58)$$

y sustituyendo la expresión 5.40, podemos expresar,

$$\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{n}(\mathbf{y}) (1 - \delta J(\mathbf{y})) + \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) \quad (5.59)$$

sustituyendo 5.57 y 6.71 en 6.30,

$$q^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}}) = \{ \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] + \nabla \{ \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \} \cdot (\delta \mathbf{y} - \delta \mathbf{x}) \} \cdot \{ \mathbf{n}(\mathbf{y}) (1 - \delta J(\mathbf{y})) + \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) \} \quad (5.60)$$

desarrollando,

$$\begin{aligned} q^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}}) &= \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) - \\ &\quad - \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \delta J(\mathbf{y}) + \\ &\quad + \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) + \\ &\quad + \nabla \{ \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \} \cdot (\delta \mathbf{y} - \delta \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\nabla \{ \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \} \cdot (\delta\mathbf{y} - \delta\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \delta J(\mathbf{y}) + \\
& + \nabla \{ \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \} \cdot (\delta\mathbf{y} - \delta\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{m}(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{5.61}$$

despreciando los términos de orden superior en la expresión 6.33 podemos concluir,

$$\begin{aligned}
q^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}}) & \simeq \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) - \\
& - \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \delta J(\mathbf{y}) + \\
& + \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \cdot \delta\mathbf{m}(\mathbf{y}) + \\
& + \nabla \{ \nabla [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})] \} \cdot (\delta\mathbf{y} - \delta\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})
\end{aligned} \tag{5.62}$$

- Desarrollo en serie de las funciones *potencial* y *flujo de potencial* en los puntos de Γ_C consideradas como funciones del contorno:

$$u(\mathbf{y}, \Gamma_H) = u(\mathbf{y}, \Gamma_V) + \delta u(\mathbf{y}) \tag{5.63}$$

$$q(\mathbf{y}, \Gamma_H) = q(\mathbf{y}, \Gamma_V) + \delta q(\mathbf{y}) \tag{5.64}$$

- Desarrollo en serie de las funciones *potencial* y *flujo de potencial* en los puntos de Γ_H consideradas como funciones del punto \mathbf{y} y del contorno:

$$u(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) = u(\mathbf{y}, \Gamma_H) + \nabla_{\mathbf{y}} [u(\mathbf{y}, \Gamma_H)] \cdot \delta\mathbf{y} + TOS \tag{5.65}$$

sustituyendo en 5.65 las expresión 6.36,

$$u(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) = u(\mathbf{y}, \Gamma_V) + \delta u(\mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} [u(\mathbf{y}, \Gamma_V) + \delta u(\mathbf{y})] \cdot \delta\mathbf{y} + TOS \tag{5.66}$$

despreciando términos de orden superior en 6.38 concluimos,

$$u(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) \simeq u(\mathbf{y}, \Gamma_V) + \delta u(\mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} [u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta\mathbf{y} \tag{5.67}$$

La expresión de la función flujo de potencial es,

$$q(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) = \nabla u(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{y}}) \quad (5.68)$$

aplicamos la expresión 6.110 a la función $\nabla u(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H)$,

$$\nabla u(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) \simeq \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) + \delta \nabla u(\mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} [\nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \quad (5.69)$$

permutando los operadores δ y ∇ y sustituyendo en 6.107,

$$q(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) = \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{y}}) + \nabla \delta u(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{y}}) + \nabla_{\mathbf{y}} [\nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \cdot \mathbf{n}(\tilde{\mathbf{y}}) \quad (5.70)$$

teniendo en cuenta la expresión 5.18 y despreciando términos de orden superior,

$$\mathbf{n}(\tilde{\mathbf{y}}) = \delta \mathbf{n}(\mathbf{y}) + \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (5.71)$$

$$q(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) = q(\mathbf{y}, \Gamma_H) + \nabla \delta u(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) + \nabla [\nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) + \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (5.72)$$

teniendo en cuenta la expresión 5.40, podemos expresar,

$$\nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{m} = \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{n} + \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \mathbf{n} \delta J \quad (5.73)$$

$$\nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{n} = \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{m} - q(\mathbf{y}, \Gamma_V) \delta J \quad (5.74)$$

sustituyendo en 5.72,

$$q(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) = q(\mathbf{y}, \Gamma_V) + \nabla \delta u(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) + \nabla \{ \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \} \cdot \delta \mathbf{y} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) + \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{m} - q(\mathbf{y}, \Gamma_V) \delta J \quad (5.75)$$

aplicando la expresión 5.49 a la función $q(\mathbf{y}, \Gamma_V)$,

$$\nabla [q(\mathbf{y}, \Gamma_V)] = \nabla [\nabla (u(\mathbf{y}, \Gamma_V))] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (5.76)$$

sustituyendo en 5.75,

$$q(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) = q(\mathbf{y}, \Gamma_V) + \nabla \delta u(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) + \nabla [q(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} + \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{m} - q(\mathbf{y}, \Gamma_V) \delta J \quad (5.77)$$

teniendo en cuenta

$$\delta q(\mathbf{y}) = \nabla \delta u(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \quad (5.78)$$

concluimos,

$$q(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) = q(\mathbf{y}, \Gamma_V) + \delta q(\mathbf{y}) + \nabla [q(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} + \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{m} - q(\mathbf{y}, \Gamma_V) \delta J \quad (5.79)$$

5.4 Ecuación integral de las variaciones en el contorno .

En la expresión 6.75 sustituimos las expresiones 5.9 y 5.7,

$$\begin{aligned} \delta u(\mathbf{x}, \Gamma_V) &= \int_{\Gamma_C} [u^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}})q(\mathbf{y}, \Gamma_H) - q^*(\mathbf{y}; \tilde{\mathbf{x}})u(\mathbf{y}, \Gamma_H)] d\Gamma_C(\mathbf{y}) + \\ &+ \int_{\Gamma_H} [u^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}})q(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H) - q^*(\tilde{\mathbf{y}}; \tilde{\mathbf{x}})u(\tilde{\mathbf{y}}, \Gamma_H)] d\Gamma_H(\tilde{\mathbf{y}}) - \\ &- \int_{\Gamma_C} [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma_C(\mathbf{y}) - \\ &- \int_{\Gamma_V} [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x})u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma_V(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (5.80)$$

sustituyendo en 5.80 las expresiones 5.46, 6.37, 5.52, 6.36, 5.54, 5.79, 5.62 y 6.110, obtenemos la que llamamos *Ecuación Integral de las variaciones en el contorno*,

$$\delta u(\mathbf{x}, \Gamma_V) + \nabla u(\mathbf{x}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{x} = \quad (5.81)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma} [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \delta q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \delta u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma(\mathbf{y}) \\
&\quad - \int_{\Gamma_C} \{ \nabla u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \} \cdot \delta \mathbf{x} d\Gamma(\mathbf{y}) + \\
&\quad + \int_{\Gamma_V} \{ [\nabla u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot (\delta \mathbf{y} - \delta \mathbf{x}) \\
&\quad + [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \nabla q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\
&\quad + [u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) \} d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (5.82)
\end{aligned}$$

La ecuación integral obtenida relaciona la variación del potencial y la variación geométrica de un punto $\mathbf{x} \in \Omega$ con la variación del potencial, flujo y geometría a lo largo del contorno Γ . Los valores en Γ_C y Γ_V de las funciones potencial y flujo de potencial pueden ser calculados mediante aplicación directa del Método de los Elementos de Contorno.

5.5 Ecuación integral en el contorno.

Desarrollamos en el presente apartado la expresión de la ecuación integral 5.82 en el supuesto de que el origen de las funciones radiales \mathbf{x} , que hemos llamado *polo* pertenezca al contorno, $\mathbf{x} \rightarrow \xi \in \Gamma$; lo llamaremos en este caso *nodo de colocación*.

Emplearemos un procedimiento similar al seguido en el Método de los Elementos de Contorno, consistente en ampliar el dominio de integración Ω en un subdominio circular infinitesimal de radio ε en el entorno del nodo de colocación ξ . La ecuación integral resultante la obtendremos haciendo tender ε a cero.

Ampliamos el dominio Ω en un subdominio circular infinitesimal de radio ε en el entorno de ξ , al que llamamos Ω_ε . El dominio ampliado será:

$$\bar{\Omega} = \Omega + \Omega_\varepsilon$$

El contorno del dominio ampliado, si llamamos S_ε al fragmento de Γ eliminado y Γ_ε al contorno del subdominio circular añadido, como vemos en la figura 6, será:

$$\bar{\Gamma} = \Gamma - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon$$

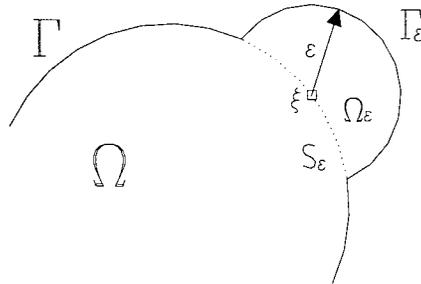


Figura 5-5:

El punto ξ es un punto interior en el dominio ampliado por lo que podemos plantear la ecuación integral 5.82. El límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ de la ecuación planteada será la ecuación que buscamos.

Vamos a considerar separadamente los siguientes casos:

1. $\xi \in \Gamma; \xi \notin \Gamma_V$
2. $\xi \in \Gamma_V$

5.5.1 Ecuación integral cuando el nodo de colocación pertenece al contorno conocido.

$$\xi \in \Gamma; \xi \notin \Gamma_V \tag{5.83}$$

Por pertenecer el nodo de colocación al contorno conocido, la variación geométrica es nula.

$$\xi \in \Gamma_C \Rightarrow \delta\xi = 0 \tag{5.84}$$

En la ecuación integral 5.82, el tercer término integral del segundo miembro de la igualdad, integral en Γ_V , no resultará afectado por la ampliación del dominio, resultando por tanto,

$$\begin{aligned}
\delta u(\boldsymbol{\xi}, \Gamma_V) &= \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma(\mathbf{y}) \right\} \\
&\quad + \int_{\Gamma_V} \{ [\nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\
&\quad + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\
&\quad + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) \} d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (5.85)
\end{aligned}$$

Cáculamos los límites aparecidos en la expresión 5.85,

1.-

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta q(\mathbf{y}, \Gamma_V) d\Gamma(\mathbf{y}) \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u^* \delta q d\Gamma \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon} u^* \delta q d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* \delta q d\Gamma \right\} \quad (5.86)
\end{aligned}$$

El primer término de 5.86 es una integral impropia convergente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon} u^* \delta q d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon} \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta q d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta q d\Gamma \quad (5.87)$$

Calculamos el segundo término de 5.86 dejando fuera del integrando los elementos constantes en Γ_ε ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* \delta q d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta q d\Gamma \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\delta u) d\Gamma \right\} = \frac{1}{2\pi\mu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla (\delta u) \mathbf{n} d\Gamma \right\} \quad (5.88)$$

Utilizando notación indicial

$$\nabla (\delta u) \equiv \delta u_{,i} \quad (5.89)$$

regularizamos la integral considerando el desarrollo en serie de $\delta u_{,i}$

$$\delta u_{,i}(\mathbf{x}) = \delta u_{,i}(\boldsymbol{\xi}) + TOS \quad (5.90)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla (\delta u) \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \delta u_{,i} n_i d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_\varepsilon} (\delta u_{,i} - \delta u_{,i}(\boldsymbol{\xi})) n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \delta u_{,i}(\boldsymbol{\xi}) n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla (\delta u) \mathbf{n} d\Gamma \right\} &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} (\delta u_{,i} - \delta u_{,i}(\boldsymbol{\xi})) n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \delta u_{,i}(\boldsymbol{\xi}) n_i d\Gamma \right) \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \int_{\Gamma_\varepsilon} (\delta u_{,i} - \delta u_{,i}(\boldsymbol{\xi})) n_i d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \int_{\Gamma_\varepsilon} \delta u_{,i}(\boldsymbol{\xi}) n_i d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (5.92)$$

La integral de una función regular en un dominio infinitesimal tiende a cero

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} (\delta u_{,i} - \delta u_{,i}(\boldsymbol{\xi})) n_i d\Gamma \right\} = 0 \quad (5.93)$$

por lo tanto, puede ser multiplicada por una función no acotada

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \int_{\Gamma_\varepsilon} (\delta u_{,i} - \delta u_{,i}(\boldsymbol{\xi})) n_i d\Gamma \right\} = 0 \quad (5.94)$$

podemos concluir

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla(\delta u) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \int_{\Gamma_\varepsilon} \delta u_{,i}(\boldsymbol{\xi}) n_i d\Gamma \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \nabla(\delta u)(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{n} d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* \delta q d\Gamma \right\} &= \frac{1}{2\pi\mu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla(\delta u) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi\mu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \nabla(\delta u)(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{n} d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (5.96)$$

cambiando la variable de integración y estableciendo los límites según observamos en la figura ??,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* \delta q d\Gamma \right\} = \frac{1}{2\pi\mu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \nabla(\delta u)(\boldsymbol{\xi}) \varepsilon \int_{\theta_1 - \pi/2}^{\theta_2 + \pi/2} \mathbf{n} d\theta \right\} \quad (5.97)$$

el producto de un infinitésimo por una función no acotada es igual a cero, por lo que podemos concluir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* \delta q d\Gamma \right\} = 0 \quad (5.98)$$

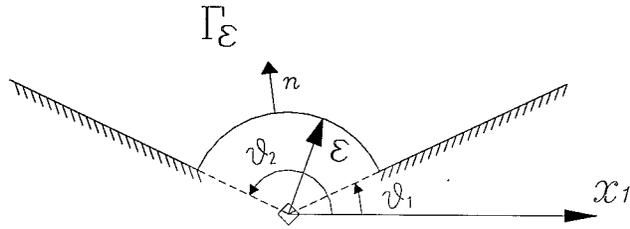


Figura ~5-6:

2.-

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\epsilon + \Gamma_\epsilon} q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta u(\mathbf{y}, \Gamma_V) d\Gamma(\mathbf{y}) \right\} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\epsilon + \Gamma_\epsilon} q^* \delta u d\Gamma \right\} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\epsilon} q^* \delta u d\Gamma \right\} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} q^* \delta u d\Gamma \right\} \quad (5.99)
 \end{aligned}$$

El primer término de 5.99 es el Valor principal de Cauchy de la integral

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\epsilon} q^* \delta u d\Gamma \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\epsilon} \left(\frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \delta u d\Gamma \right\} = VPC \int_{\Gamma} \left(\frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \delta u d\Gamma \quad (5.100)$$

Calculamos el segundo término de 5.99 dejando fuera del integrando las funciones constantes en Γ_ϵ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} q^* \delta u d\Gamma \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\epsilon} \left(\frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \delta u d\Gamma \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{-1}{2\pi \epsilon} \right) \int_{\Gamma_\epsilon} \delta u d\Gamma \right\} = \quad (5.101)$$

considerando el desarrollo en serie de la función δu , y regularizando la integral

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{-1}{2\pi\varepsilon} \right) \delta u(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma_\varepsilon} \delta u d\Gamma \right\} = \quad (5.102)$$

cambiando de variable de integración,

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{-1}{2\pi\varepsilon} \right) \delta u(\boldsymbol{\xi}) \varepsilon \int_{\theta_1 - \pi/2}^{\theta_2 + \pi/2} d\theta \right\} = \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \delta u(\boldsymbol{\xi}) [\theta_2 - \theta_1 + \pi] \quad (5.103)$$

Sustituyendo las expresiones 5.87, 5.98, 5.100, y 5.103, en la expresión 5.85, obtenemos la siguiente ecuación integral para $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$; $\boldsymbol{\xi} \notin \Gamma_V$:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1 + \pi) \right] \delta u(\boldsymbol{\xi}) = \\ & = \int_{\Gamma} [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma(\mathbf{y}) \\ & + \int_{\Gamma_V} \{ [\nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\ & + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\ & + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) \} d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (5.104) \end{aligned}$$

Ecuación integral cuando el nodo de colocación pertenece al contorno conocido, considerado éste como contorno suave.

Supongamos que podemos considerar el contorno conocido Γ_C como un contorno suave. En este caso podemos aproximar $\theta_2 \simeq \theta_1$ en la expresión 5.104, que resulta:

$$\Gamma_C : \text{contorno suave} \Rightarrow \theta_2 = \theta_1$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right) \delta u(\xi) &= \int_{\Gamma} [u^*(\mathbf{y}; \xi) \delta q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \xi) \delta u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma(\mathbf{y}) \\
&+ \int_{\Gamma_V} \{[\nabla u^*(\mathbf{y}; \xi) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \xi) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\
&+ [u^*(\mathbf{y}; \xi) \nabla q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \xi) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\
&+ [u^*(\mathbf{y}; \xi) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla u^*(\mathbf{y}; \xi) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y})\} d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (5.105)
\end{aligned}$$

5.5.2 Ecuación integral cuando el nodo de colocación pertenece al contorno variable.

$$\xi \in \Gamma_V \quad (5.106)$$

Planteamos la ecuación integral siendo ξ un punto interior en el dominio ampliado:

$$\bar{\Omega} = \Omega + \Omega_\varepsilon$$

$$\bar{\Gamma} = \Gamma - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon$$

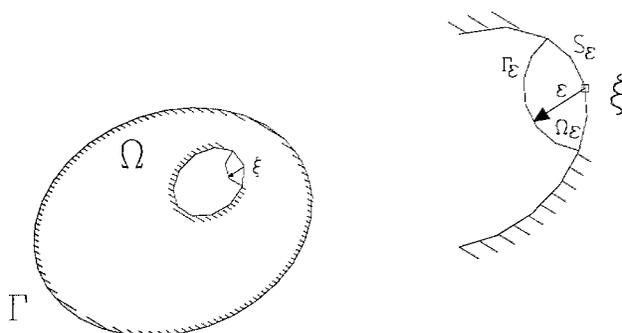


Figura 5-7:

$$\delta u(\boldsymbol{\xi}, \Gamma_V) + \nabla u(\boldsymbol{\xi}, \Gamma_V) \cdot \delta \boldsymbol{\xi} = \quad (5.107)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma(\mathbf{y}) \right\} \\ &\quad - \int_{\Gamma_C} \{ \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \} \cdot \delta \boldsymbol{\xi} d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \{ [\nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) \right. \\ &\quad + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\ &\quad \left. + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) \right\} d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (5.108) \end{aligned}$$

El desarrollo del primer término de la suma de la expresión 5.108, es similar al caso anterior; queda por tanto

$$\begin{aligned} &\left[1 - \frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1 + \pi) \right] \delta u(\boldsymbol{\xi}, \Gamma_V) + \nabla u(\boldsymbol{\xi}, \Gamma_V) \cdot \delta \boldsymbol{\xi} = \\ &= \int_{\Gamma} [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma(\mathbf{y}) - \\ &\quad - \int_{\Gamma_C} \{ \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \} \cdot \delta \boldsymbol{\xi} d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \{ [\nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) \right. \\ &\quad + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\ &\quad \left. + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) \right\} d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (5.109) \end{aligned}$$

Calculamos los límites aparecidos en el segundo término de la expresión 5.109,

1.-

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\mathbf{y}) \right\} = \\
 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \nabla u^* q (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} = \\
 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} \nabla u^* q (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla u^* q (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} \quad (5.110)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} \nabla u^* q (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma_V} \nabla u^* q (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \quad (5.111)$$

Por ser $\nabla u^* = -\frac{\nabla r}{2\pi r}$ y teniendo en cuenta,

$$\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) \rightarrow 0 \quad (5.112)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla u^* q (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} = 0 \quad (5.113)$$

2.-

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V) (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma(\mathbf{y}) \right\} = \\
 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \nabla q^* u (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} \nabla q^* u (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla q^* u (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} \quad (5.114)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} \nabla q^* u (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} = VPC \int_{\Gamma_V} \nabla q^* u (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \quad (5.115)$$

La función ∇q^* presenta una singularidad de segundo orden en el punto $r = 0$

$$\nabla q^* = -\frac{1}{2\pi r^2} (\mathbf{n} - 2\nabla r \nabla r \cdot \mathbf{n}) \quad (5.116)$$

consideramos el desarrollo en serie de la función $u(\mathbf{y})(\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi})$,

$$u(\mathbf{y})(\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) = u(\boldsymbol{\xi}) \nabla \delta \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}) + TOS \quad (5.117)$$

tomando $\nabla \delta \boldsymbol{\xi} = \nabla \delta \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla q^* u (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla q^* [u (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) - u(\boldsymbol{\xi}) \nabla \delta \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi})] d\Gamma \right\} +$$

$$+ u(\boldsymbol{\xi}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla q^* \cdot \nabla \delta \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} \quad (5.118)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla q^* [u (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) - u(\boldsymbol{\xi}) \nabla \delta \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi})] d\Gamma \right\} = 0 \quad (5.119)$$

$$u(\boldsymbol{\xi}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla q^* \cdot \nabla \delta \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{y} - \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} = u(\boldsymbol{\xi}) \frac{1}{2\pi} \nabla \delta \boldsymbol{\xi} : \int_{\theta_1}^{\theta_2} \langle \mathbf{nn} \rangle d\theta \quad (5.120)$$

si llamamos

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}'(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \langle \mathbf{nn} \rangle d\theta = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\theta}{4\pi} + \frac{1}{8\pi} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) & \frac{1}{8\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \\ \frac{1}{8\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) & \frac{\theta}{4\pi} - \frac{1}{8\pi} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \end{pmatrix} \quad (5.121)
\end{aligned}$$

podemos concluir,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla q^* u (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right\} = u(\boldsymbol{\xi}) \nabla \delta \boldsymbol{\xi} : \mathbf{b}'(\boldsymbol{\xi}) \quad (5.122)$$

3.-

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u^*(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \nabla q(\mathbf{y}, \Gamma_V) \delta \mathbf{y} d\Gamma_V(\mathbf{y}) \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u^* \nabla q \delta \mathbf{y} d\Gamma_V \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} u^* \nabla q \delta \mathbf{y} d\Gamma_V \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* \nabla q \delta \mathbf{y} d\Gamma_V \right\} \quad (5.123)
\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} u^* \nabla q \delta \mathbf{y} d\Gamma_V \right\} = \int_{\Gamma_V} u^* \nabla q \delta \mathbf{y} d\Gamma_V \quad (5.124)$$

$$\nabla q \delta \mathbf{y} = q_{,i} \delta y_i = (\mu u_{,k} n_k)_{,i} \delta y_i = \mu u_{,ki} n_k \delta y_i \quad (5.125)$$

$$(\nabla q \delta \mathbf{y})(\mathbf{y}) = \mu u_{,ki}(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) \delta y_i(\mathbf{y}) = \mu u_{,ki}(\boldsymbol{\xi}) n_k(\mathbf{y}) \delta y_i(\boldsymbol{\xi}) + TOS \quad (5.126)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* \nabla q \delta \mathbf{y} d\Gamma_\varepsilon \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* \mu u_{,ki}(\boldsymbol{\xi}) n_k(\mathbf{y}) \delta y_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_\varepsilon \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) u_{,ki}(\boldsymbol{\xi}) \delta y(\boldsymbol{\xi}) \varepsilon \int_{\theta_1 - \frac{\pi}{2}}^{\theta_2 + \frac{\pi}{2}} n_k(\mathbf{y}) d\theta \right\} = 0
\end{aligned} \tag{5.127}$$

4.-

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \delta \mathbf{y} d\Gamma_V(\mathbf{y}) \right\} &= \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} q^* \nabla u \delta \mathbf{y} d\Gamma_V \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} q^* \nabla u \delta \mathbf{y} d\Gamma_V \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q^* \nabla u \delta \mathbf{y} d\Gamma_V \right\}
\end{aligned} \tag{5.128}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} q^* \nabla u \delta \mathbf{y} d\Gamma_V \right\} = \int_{\Gamma_V} q^* \nabla u \delta \mathbf{y} d\Gamma_V \tag{5.129}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_\varepsilon} q^* \nabla u \delta \mathbf{y} d\Gamma_\varepsilon &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \nabla u \delta \mathbf{y} d\Gamma_\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} (\nabla u \delta \mathbf{y})(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_\varepsilon = \\
&= \frac{-1}{2\pi} (\nabla u \delta \mathbf{y})(\boldsymbol{\xi}) \int_{\theta_1 - \frac{\pi}{2}}^{\theta_2 + \frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{-1}{2\pi} (\nabla u \delta \mathbf{y})(\boldsymbol{\xi}) [\theta_2 - \theta_1 + \pi]
\end{aligned} \tag{5.130}$$

5.-

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \right\} = \\
 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u^* \nabla u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \right\} = \\
 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} u^* \nabla u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* \nabla u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \right\} \quad (5.131)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} u^* \nabla u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma_V} u^* \nabla u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \quad (5.132)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* \nabla u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \right\} = 0 \quad (5.133)$$

6.-

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{y}) \right\} = \\
 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \nabla u^* u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \right\} = \\
 & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} \nabla u^* u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla u^* u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \right\} \quad (5.134)
 \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_V - S_\varepsilon} \nabla u^* u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma_V} \nabla u^* u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \quad (5.135)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla u^* u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \right\}$$

$$u(\mathbf{y}) = u(\boldsymbol{\xi}) + TOS \quad (5.136)$$

$$\delta \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \nabla \delta y_2 & -\nabla \delta y_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \nabla \delta \xi_2 & -\nabla \delta \xi_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{t} + TOS \quad (5.137)$$

siendo \mathbf{t} el vector tangente en el contorno.

En el contorno Γ_ε , se cumple,

$$\nabla u^* = -\mathbf{n}/2\pi\varepsilon \quad (5.138)$$

$$n_1 = t_2, n_2 = -t_1 \quad (5.139)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \nabla u^* u \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma \right\} &= \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(\boldsymbol{\xi})}{2\pi\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{n} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \nabla \delta \xi_2 & -\nabla \delta \xi_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{t} \right\} d\Gamma = \\ &= -u(\boldsymbol{\xi}) \nabla \delta \boldsymbol{\xi} : \mathbf{b}''(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (5.140)$$

siendo,

$$\mathbf{b}''(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \langle \mathbf{t} \mathbf{t} \rangle d\Gamma = \begin{pmatrix} \frac{\theta}{4\pi} - \frac{1}{8\pi} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) & -\frac{1}{8\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) \\ -\frac{1}{8\pi} (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2) & \frac{\theta}{4\pi} + \frac{1}{8\pi} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \end{pmatrix} \quad (5.141)$$

Sustituimos las expresiones 5.111, 5.113, 5.115, 5.122, 5.124, 5.127, 5.129, 6.92. 5.132, 5.133, 5.135 y 5.140 en la ecuación 5.109 y obtenemos,

$$\begin{aligned}
& \left[1 - \frac{1}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1 + \pi) \right] \delta u(\boldsymbol{\xi}, \Gamma_V) + \nabla u(\boldsymbol{\xi}, \Gamma_V) \cdot \delta \boldsymbol{\xi} + \\
& + u(\boldsymbol{\xi}) \nabla \delta \boldsymbol{\xi} : \mathbf{b}'(\boldsymbol{\xi}) - \frac{1}{2\pi} \nabla u(\boldsymbol{\xi}, \Gamma_V) \cdot \delta \boldsymbol{\xi} \cdot [\theta_2 - \theta_1 + \pi] - u(\boldsymbol{\xi}) \nabla \delta \boldsymbol{\xi} : \mathbf{b}''(\boldsymbol{\xi}) = \\
& = \int_{\Gamma} [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma(\mathbf{y}) - \\
& - \int_{\Gamma_C} \{ \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \} \cdot \delta \boldsymbol{\xi} d\Gamma(\mathbf{y}) + \\
& + \int_{\Gamma_V} \{ [\nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) \\
& + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\
& + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) \} d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (5.142)
\end{aligned}$$

Ecuación integral cuando el nodo de colocación pertenece al contorno variable, considerado éste como contorno suave.

Supongamos que podemos considerar en contorno variable Γ_V como un contorno suave. En este caso podemos aproximar $\theta_2 \simeq \theta_1$ en la expresión 5.142, que resulta:

$$\Gamma_V : \text{contorno suave} \Rightarrow \theta_2 = \theta_1$$

$$\mathbf{b}'(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{b}''(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.143)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\delta u(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2}\nabla u(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta \boldsymbol{\xi} = \\
& = \int_{\Gamma} [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] d\Gamma(\mathbf{y}) - \\
& \quad - \int_{\Gamma_C} \{ \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \} \cdot \delta \boldsymbol{\xi} d\Gamma(\mathbf{y}) + \\
& \quad + \int_{\Gamma_V} \{ [\nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot (\delta \mathbf{y} - \delta \boldsymbol{\xi}) \\
& \quad + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\
& \quad + [u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) \} d\Gamma(\mathbf{y}) \quad (5.144)
\end{aligned}$$

Haciendo $\delta \boldsymbol{\xi} = 0$ en la expresión 5.144 obtenemos la expresión 5.105, por lo que la expresión 5.144 tiene carácter general, independientemente de la posición que ocupe el nodo de colocación en el contorno Γ .

5.6 Condiciones de contorno del problema inverso.

Las condiciones de contorno para las variables definidas, teniendo en cuenta las condiciones de contorno de ambos planteamientos del problema de potencial, se pueden expresar,

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \in \Gamma_{C_u} & \Rightarrow \delta u(\mathbf{x}) = 0 \\
\mathbf{x} \in \Gamma_{C_q} & \Rightarrow \delta q(\mathbf{x}) = 0 \\
\Gamma_C & = \Gamma_{C_u} + \Gamma_{C_q} \quad (5.145)
\end{aligned}$$

La expresión nos permite deducir el valor de la variable δq en el contorno variable Γ_V ,

$$\mathbf{y} \in \Gamma_V \Rightarrow \delta q(\mathbf{y}) = -\nabla q \cdot \delta \mathbf{y} - \nabla u \cdot \delta \mathbf{n}$$

teniendo en cuenta la expresión 5.40,

$$\mathbf{y} \in \Gamma_V \Rightarrow \delta q(\mathbf{y}) = -\nabla q \cdot \delta \mathbf{y} - \nabla u \cdot \delta \mathbf{m} + \nabla u \cdot \mathbf{n} \delta J$$

considerando,

$$\mathbf{y} \in \Gamma_V \Rightarrow q(\mathbf{y}) = \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$$

concluimos,

$$\mathbf{y} \in \Gamma_V \Rightarrow \delta q(\mathbf{y}) = -\nabla q \cdot \delta \mathbf{y} - \nabla u \cdot \delta \mathbf{m}$$

5.7 Ecuación integral de las variaciones de las variaciones en el contorno.

Teniendo en cuenta los valores de las variables $\delta u, \delta q$ en el contorno $\Gamma = \Gamma_C + \Gamma_V$ y sustituyendo en las expresiones 5.144, obtenemos la expresión general de la que hemos denominado **ecuación integral de las variaciones en el contorno** (δBIE),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \delta u(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2} \nabla u(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta \boldsymbol{\xi} = \\ & = - \int_{\Gamma_V} q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \delta u(\mathbf{y}, \Gamma_V) d\Gamma(\mathbf{y}) - \\ & - \int_{\Gamma} \{ \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \} \cdot \delta \boldsymbol{\xi} d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ & + \int_{\Gamma_V} \{ [\nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{y}, \Gamma_V) - \nabla q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V)] \cdot \delta \mathbf{y} \\ & - q^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) \nabla u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{y} - \nabla u^*(\mathbf{y}; \boldsymbol{\xi}) u(\mathbf{y}, \Gamma_V) \cdot \delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) \} d\Gamma(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (5.146)$$

que en adelante expresaremos de forma simplificada,



$$\frac{1}{2}\delta u(\xi) + \frac{1}{2}\nabla u(\xi) \cdot \delta \xi =$$

$$= - \int_{\Gamma_V} q^* \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma} \{\nabla u^* q - \nabla q^* u\} \cdot \delta \xi d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_V} \{[\nabla u^* q - \nabla q^* u] \cdot \delta \mathbf{y} - q^* \nabla u \cdot \delta \mathbf{y} - \nabla u^* u \cdot \delta \mathbf{m}\} d\Gamma \quad (5.147)$$

Capítulo 6

DISCRETIZACION DE LA ECUACION INTEGRAL

6.1 Introducción

En el capítulo anterior hemos deducido la *ecuación integral de las variaciones en el contorno*; se trata de una combinación lineal de integrales en el contorno, que relaciona los valores de las variables $u, q, \delta u, \delta q$ y $\delta \mathbf{y}, \delta \boldsymbol{\xi}$, y cuyos coeficientes son integrales de los núcleos u^*, q^* , y de sus gradientes ∇u^* y ∇q^* .

En el presente capítulo procederemos en primer lugar, a la parametrización de las variables $\delta \mathbf{y}$, $\delta \boldsymbol{\xi} = \delta \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi})$, quedando expresadas ambas en función de variables geométricas o parámetros incluidos en la variable $\delta \mathbf{v}$. Posteriormente, procederemos a la discretización de los términos de la ecuación integral deducida, para obtener un sistema lineal de ecuaciones, en el que, conocidos los valores de las variables u, q en el contorno, podamos calcular los valores de las variables δu y δq , que no sean ya conocidos como consecuencia de las condiciones de contorno del problema inverso, así como el valor de las variables incluidas en $\delta \mathbf{v}$, que nos indican la evolución geométrica necesaria para que la configuración supuesta del hueco se aproxime a la configuración real.

La ecuación integral obtenida, es la siguiente,

- $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$

$$\frac{1}{2} \delta u(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2} \nabla u(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta \boldsymbol{\xi} =$$

$$\begin{aligned}
= & - \int_{\Gamma_V} q^* \delta u d\Gamma - \int_{\Gamma} \{q \nabla u^* - u \nabla q^*\} \cdot \delta \xi d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_V} \{q \nabla u^* \cdot \delta \mathbf{y} - u \nabla q^* \cdot \delta \mathbf{y} - q^* \nabla u \cdot \delta \mathbf{y} - u \nabla u^* \cdot \delta \mathbf{m}\} d\Gamma \quad (6.1)
\end{aligned}$$

En el presente capítulo vamos a proceder a la discretización de los términos de la ecuación integral, y para ello en primer lugar vamos a analizar a la parametrización del vector $\delta \mathbf{y}$.

6.2 Parametrización de la evolución geométrica impuesta al contorno variable.

El vector $\delta \mathbf{y}$ ha sido introducido en el capítulo 5.

Considerabamos próximo el contorno variable Γ_V o geometría supuesta, y el contorno Γ_H , o geometría real del hueco. LLamabamos

$\tilde{\mathbf{y}}$: vector de posición de un punto perteneciente a Γ_H .

\mathbf{y} : vector de posición de un punto perteneciente a Γ_V .

Definiamos la magnitud $\delta \mathbf{y}$ como la diferencia vectorial entre \mathbf{y} e $\tilde{\mathbf{y}}$, es decir, el aumento necesario de \mathbf{y} para pasar de la configuración supuesta a la configuración real.

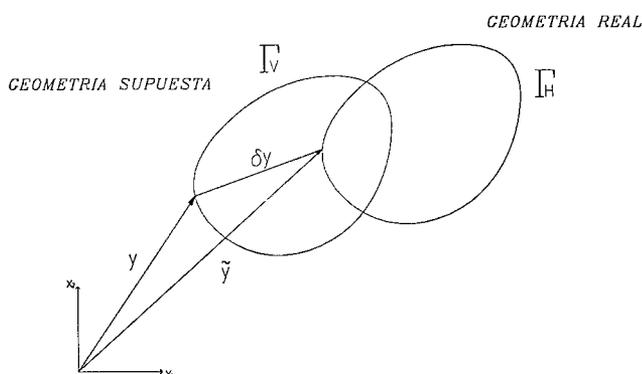


Figura ~6-1:

Realmente el vector $\delta\mathbf{y}$ es la incógnita del problema inverso tal como se ha planteado en la presente tesis. Para una geometría supuesta del hueco, el vector $\delta\mathbf{y}$ nos determina la evolución geométrica de Γ_V , para que las variables $\delta u, \delta q$ se hagan cero, o lo que es lo mismo, para que el *potencial* y el *flujo de potencial* calculado en aquellos nodos en los que se han realizado mediciones experimentales, coincida con estas. El cálculo de $\delta\mathbf{y}$ en sucesivas iteraciones, nos permitirá aproximar la geometría de Γ_V a a la geometría real del hueco Γ_H .

El cálculo del vector $\delta\mathbf{y}$ en cada punto de Γ_V supondría un número elevado de incógnitas. Para reducir el número de incógnitas procederemos a la parametrización de la evolución geométrica del contorno Γ_V .

6.2.1 Análisis de deformaciones

La expresión vectorial de la deformación es

$$ds' = ds + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u}) \times ds + \mathbf{D}ds \quad (6.2)$$

siendo,

ds : elemento lineal considerado en la configuración inicial.

ds' : elemento lineal transformado de ds , considerado en la configuración final.

\mathbf{u} : vector desplazamiento en un punto.

\mathbf{D} : tensor de deformación.

En dominios bidimensionales tendremos,

$$\mathbf{u} : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \text{ siendo } \begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (u_{2,1} - u_{1,2}) \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (6.4)$$

En un estado de deformación lineal, el tensor de deformaciones lo podemos expresar,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \\ \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) & u_{2,2} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

el tensor de giro,

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} \\ -w_{12} & 0 \end{pmatrix}; \quad w_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}) \quad (6.6)$$

Según las expresiones anteriores, la deformación lineal en dominios bidimensionales queda determinada por los siguientes seis parámetros:

$$u_1, u_2, u_{1,1}, u_{2,2}, u_{1,2}, u_{2,1}$$

Aplicamos el teorema de Schwarz a las componentes del vector du :

$$du_1 = u_{1,1}dx_1 + u_{1,2}dx_2 = \varepsilon_{11}dx_1 + (\varepsilon_{21} - w_{21})dx_2 \quad (6.7)$$

$$du_2 = u_{2,1}dx_1 + u_{2,2}dx_2 = (\varepsilon_{12} - w_{12})dx_1 + \varepsilon_{22}dx_2 \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\varepsilon_{21} - w_{21}) \Rightarrow \frac{\partial w_{21}}{\partial x_1} = \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\varepsilon_{12} - w_{12}) = \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \Rightarrow \frac{\partial w_{12}}{\partial x_2} = \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \quad (6.10)$$

Aplicamos el teorema de Schwarz a la componente w_{12} y obtenemos la ecuación de compatibilidad de la deformación,

$$dw_{12} = w_{12,1}dx_1 + w_{12,2}dx_2 \quad (6.11)$$

$$w_{12,12} = w_{12,21} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{21}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (6.13)$$

por integración de 6.11 obtenemos el valor de la componente w_{12} ,

$$w_{12} - w_{CG} = \int_{x_{1CG}}^{x_1} w_{12,1} dx_1 + \int_{x_{2CG}}^{x_2} w_{12,2} dx_2 \quad (6.14)$$

por integración de 6.7 y 6.8 obtenemos el valor de las componentes u_1, u_2 ,

$$u_1 - u_{1CG} = \int_{x_{1CG}}^{x_1} \varepsilon_{11} dx_1 + \int_{x_{2CG}}^{x_2} (\varepsilon_{21} - w_{21}) dx_2 \quad (6.15)$$

$$u_2 - u_{2CG} = \int_{x_{1CG}}^{x_1} (\varepsilon_{12} - w_{12}) dx_1 + \int_{x_{2CG}}^{x_2} \varepsilon_{22} dx_2 \quad (6.16)$$

Para el cálculo de las integrales debemos conocer los valores,

- giro en un punto: w_{CG}
- desplazamiento en un punto: u_{1CG}, u_{2CG}

Por lo tanto, los seis parámetros que determinan la deformación lineal en un punto de un dominio bidimensional son los siguientes,

$$u_{1CG}, u_{2CG}, w_{CG}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}$$

6.2.2 Campo de deformaciones homogéneo.

Suponiendo homogéneo el campo de deformaciones,

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = cte. \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{11,2} = \varepsilon_{12,1} = \varepsilon_{12,2} = \varepsilon_{22,1} = 0 \Rightarrow \quad (6.18)$$

según las expresiones 6.9, 6.10, y 6.11,

$$\Rightarrow w_{12,1} = w_{12,2} = 0 \Rightarrow dw_{12} = 0 \Rightarrow w_{12} = w_{CG} \quad (6.19)$$

sustituyendo en 6.15 y 6.16,

$$u_1 = \varepsilon_{11} (x_1 - x_{1CG}) + \varepsilon_{21} (x_2 - x_{2CG}) + w_{CG} (x_2 - x_{2CG}) + u_{1CG} \quad (6.20)$$

$$u_2 = \varepsilon_{12} (x_1 - x_{1CG}) - w_{CG} (x_1 - x_{1CG}) + \varepsilon_{22} (x_2 - x_{2CG}) + u_{2CG} \quad (6.21)$$

por lo tanto podemos expresar matricialmente el desplazamiento de un punto en un campo de deformaciones lineal y homogéneo,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (x_2 - x_{2CG}) & (x_1 - x_{1CG}) & 0 & (x_2 - x_{2CG}) \\ 0 & 1 & -(x_1 - x_{1CG}) & 0 & (x_2 - x_{2CG}) & (x_1 - x_{1CG}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1CG} \\ u_{2CG} \\ w_{CG} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

6.2.3 Formación de la matriz paramétrica.

En nuestro problema inverso, vamos a modelizar la evolución geométrica del contorno variable Γ_V , asimilándola a un campo de deformaciones lineal y homogéneo. Después de discretizar Γ_V en elementos cuadráticos, determinaremos la evolución geométrica de cada elemento, como si estuviera sometido a un campo de deformación lineal y homogéneo, admitiendo por tanto un máximo de seis grados de libertad.

Supongamos el contorno Γ_V aproximado mediante elementos isoparamétricos de tres nodos, tal como se explica en el capítulo 4. Sean $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(3)}$ los vectores de posición de los nodos geométricos del elemento isoparamétrico Γ_e ,

$$\mathbf{y}^{(1)} \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix}, \mathbf{y}^{(2)} \begin{pmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{pmatrix}, \mathbf{y}^{(3)} \begin{pmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

Para cada punto de Γ_e , el vector de posición \mathbf{y} lo determinamos por interpolación de los valores de nodales,

$$\mathbf{y} = \phi_1 \mathbf{y}_1 + \phi_2 \mathbf{y}_2 + \phi_3 \mathbf{y}_3 \quad (6.24)$$

siendo ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 las funciones de forma, expuestas en el capítulo 4.

Seán $\delta \mathbf{y}^{(1)}, \delta \mathbf{y}^{(2)}, \delta \mathbf{y}^{(3)}$ los valores nodales en Γ_e de la variación geométrica $\delta \mathbf{y}$,

$$\delta \mathbf{y}^{(1)} \begin{pmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \end{pmatrix}, \delta \mathbf{y}^{(2)} \begin{pmatrix} \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \end{pmatrix}, \delta \mathbf{y}^{(3)} \begin{pmatrix} \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

El valor de $\delta \mathbf{y}$ en los puntos de Γ_e lo determinamos por interpolación geométrica,

$$\delta \mathbf{y} = \phi_1 \delta \mathbf{y}^{(1)} + \phi_2 \delta \mathbf{y}^{(2)} + \phi_3 \delta \mathbf{y}^{(3)} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Aplicando la expresión matricial 6.22 a cada nodo de Γ_e , y tomando como punto de referencia para el desplazamiento y el giro, el centro de gravedad de Γ_V , podemos expresar,

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) & (y_1^{(1)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) \\ 0 & 1 & -(y_1^{(1)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) & (y_1^{(1)} - x_{1CG}) \\ 1 & 0 & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) & (y_1^{(2)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) \\ 0 & 1 & -(y_1^{(2)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) & (y_1^{(2)} - x_{1CG}) \\ 1 & 0 & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) & (y_1^{(3)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) \\ 0 & 1 & -(y_1^{(3)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) & (y_1^{(3)} - x_{1CG}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1CG} \\ u_{2CG} \\ w_{CG} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

siendo

$\mathbf{x}_{CG} : \begin{pmatrix} x_{1CG} \\ x_{2CG} \end{pmatrix}$ el vector de posición del centro de gravedad de Γ_V

$\mathbf{u}_{CG} : \begin{pmatrix} u_{1CG} \\ u_{2CG} \end{pmatrix}$ el vector desplazamiento del centro de gravedad de Γ_V .

w_{CG} : valor del giro en Γ_V .

$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$: componentes del tensor de deformación homogénea en Γ_V .

Definimos la *matriz paramétrica* \mathbf{P}_e de orden 6×6 , correspondiente al elemento de contorno Γ_e ,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) & (y_1^{(1)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) \\ 0 & 1 & -(y_1^{(1)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) & (y_1^{(1)} - x_{1CG}) \\ 1 & 0 & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) & (y_1^{(2)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) \\ 0 & 1 & -(y_1^{(2)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) & (y_1^{(2)} - x_{1CG}) \\ 1 & 0 & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) & (y_1^{(3)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) \\ 0 & 1 & -(y_1^{(3)} - x_{1CG}) & 0 & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) & (y_1^{(3)} - x_{1CG}) \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Definimos el *vector de las variables geométricas* $\delta \mathbf{v}$, de dimensión 6, correspondiente al contorno variable Γ_V ,

$$\delta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{1CG} \\ u_{2CG} \\ w_{CG} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

La relación 6.27 se puede expresar,

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix}_{(e)} = \mathbf{P}_{(e)} \delta \mathbf{v} \quad (6.30)$$

sustituyendo en 6.26 obtenemos,

$$\delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix}_{(e)} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \mathbf{P}_{(e)} \delta \mathbf{v} \quad (6.31)$$

La expresión 6.31 supone la parametrización del vector $\delta \mathbf{y}$, pues nos permite obtener el valor de $\delta \mathbf{y}$ en cada punto de Γ_V , en función de las seis componentes de $\delta \mathbf{v}$, que llamaremos variables geométricas impuestas en la evolución de Γ_V .

6.2.4 Parametrización de la variación geométrica en el nodo de colocación.

El valor de la variación geométrica en el nodo de colocación, $\delta\xi$, lo obtenemos igualmente por interpolación de los valores nodales,

$$\begin{aligned} \delta\xi &= \delta\mathbf{y}(\xi) = \phi_1^{co} \delta\mathbf{y}_{(eco)}^{(1)} + \phi_2^{co} \delta\mathbf{y}_{(eco)}^{(2)} + \phi_3^{co} \delta\mathbf{y}_{(eco)}^{(3)} = \\ &= \begin{bmatrix} \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} & 0 \\ 0 & \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix}_{(eco)} \end{aligned} \quad (6.32)$$

siendo,

$\phi_1^{co}, \phi_2^{co}, \phi_3^{co}$: valor de las funciones de forma en el nodo de colocación.

$\delta\mathbf{y}_{(eco)}^{(1)}, \delta\mathbf{y}_{(eco)}^{(2)}, \delta\mathbf{y}_{(eco)}^{(3)}$: valores nodales en el elemento que contiene al nodo de colocación, de la variación geométrica.

La expresión 6.30 establecida para el elemento que contiene al nodo de colocación, nos permite concluir,

$$\delta\xi = \begin{bmatrix} \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} & 0 \\ 0 & \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} \end{bmatrix} \mathbf{P}_{(eco)} \delta\mathbf{v} \quad (6.33)$$

siendo $\mathbf{P}_{(eco)}$ la matriz paramétrica correspondiente al elemento que contiene al nodo de colocación.

6.2.5 Parametrización de la variación de m.

Definíamos en el capítulo 5 la magnitud auxiliar $\delta\mathbf{m}$ según la expresión,

$$\delta\mathbf{m}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{d(\delta y_2)}{d\Gamma_V} & -\frac{d(\delta y_1)}{d\Gamma_V} \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

derivando la expresión del jacobiano en los puntos del contorno,

$$J(\mathbf{y}) = \frac{d\Gamma}{d\xi} \quad (6.35)$$

podemos expresar,

$$\delta \mathbf{m}(\mathbf{y}) = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial(\delta y_2)}{\partial \xi} \quad -\frac{\partial(\delta y_1)}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{J} \left(\delta y_2 \quad -\partial \delta y_1 \right) \quad (6.36)$$

indicando la notación empleada la derivada respecto de la coordenada natural ξ .

Derivando la expresión 6.26, respecto de la coordenada natural,

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\delta \mathbf{y}) = \dot{\phi}_1 \delta \mathbf{y}^{(1)} + \dot{\phi}_2 \delta \mathbf{y}^{(2)} + \dot{\phi}_3 \delta \mathbf{y}^{(3)} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & 0 & \dot{\phi}_2 & 0 & \dot{\phi}_3 & 0 \\ 0 & \dot{\phi}_1 & 0 & \dot{\phi}_2 & 0 & \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

expresando las componentes de 6.37,

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\delta y_1) = \dot{\phi}_1 \delta y_1^{(1)} + \dot{\phi}_2 \delta y_1^{(2)} + \dot{\phi}_3 \delta y_1^{(3)} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 & 0 & \dot{\phi}_2 & 0 & \dot{\phi}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\delta y_2) = \dot{\phi}_1 \delta y_2^{(1)} + \dot{\phi}_2 \delta y_2^{(2)} + \dot{\phi}_3 \delta y_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi}_1 & 0 & \dot{\phi}_2 & 0 & \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

sustituyendo las expresiones 6.38 y 6.39 en 6.36,

$$\delta m_1 = \frac{1}{J} \left(\begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi}_1 & 0 & \dot{\phi}_2 & 0 & \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} \right) \quad (6.40)$$

$$\delta m_2 = \frac{1}{J} \left(\begin{bmatrix} -\dot{\phi}_1 & 0 & -\dot{\phi}_2 & 0 & -\dot{\phi}_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} \right) \quad (6.41)$$

podemos concluir,

$$\delta \mathbf{m} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 & \dot{\phi}_1 & 0 & \dot{\phi}_2 & 0 & \dot{\phi}_3 \\ -\dot{\phi}_1 & 0 & -\dot{\phi}_2 & 0 & -\dot{\phi}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

6.2.6 Grados de libertad.

En algunos casos puede ser conveniente la resolución del problema inverso, trabajando con un número de variables geométricas inferior a seis. Puede ser necesario incluso establecer secuencias en la evolución geométrica impuesta al contorno variable para su aproximación al contorno real, comenzando con movimientos más simples como el desplazamiento unidireccional, para ir incorporando grados de libertad a medida que nos acercamos a la posición y geometría real del hueco. Utilizaremos por tanto como matriz paramétrica sólo una parte de la matriz indicada en la expresión 6.28, según el tipo de evolución geométrica impuesta a Γ_V .

En el presente apartado vamos a exponer las matrices paramétricas utilizadas en las aplicaciones prácticas de resolución del problema inverso incluidas en la presente tesis, en las que hemos impuesto a la evolución geométrica de Γ_V un número de grados de libertad creciente desde 1 hasta 6.

A partir de las evoluciones geométricas elementales, los grados de libertad del movimiento del contorno variable se han incorporado siguiendo la descomposición natural del tensor de deformaciones,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 \\ 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix}}_{\text{DILATACION ISOTROPICA}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon'_{22} \end{pmatrix}}_{\text{DILATACION DESVIADORA } (\varepsilon'_{11} + \varepsilon'_{22} = 0)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{DISTORSION}} \quad (6.43)$$

Para garantizar la no dimensionalidad de las variables, los desplazamientos del centro de gravedad u_{1CG} , u_{2CG} , cuando se combinan con las demás componentes de $\delta\mathbf{v}$, se dividen por el diámetro equivalente, D_{eq} , o diámetro del círculo de área igual a Γ_V ,

$$D_{eq} = \sqrt{\frac{4A_{\Gamma_V}}{\pi}} \quad (6.44)$$

siendo A_{Γ_V} el área del contorno variable.

Igualmente, para garantizar que la solución del problema sea físicamente posible, se han impuesto los siguientes límites a las componentes físicas de la deformación,

- Elongación:

La elongación de elementos lineales ha de ser mayor que -1 . En las aplicaciones prácticas hemos trabajado con un valor límite de la elongación próximo a -1 ,

$$\varepsilon > \varepsilon_{\text{lim}} > -1 \quad (6.45)$$

- Distorsión:

El valor de la distorsión en un punto, para que sea físicamente posible, ha de estar comprendido entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$,

$$\frac{3\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2} \quad (6.46)$$

en términos de tangente del ángulo,

$$-1 < \varepsilon_{12} < +1 \Rightarrow |\varepsilon_{12}| < 1 \quad (6.47)$$

En las aplicaciones prácticas hemos trabajado con un valor límite del valor absoluto de la distorsión,

$$|\varepsilon_{12}| < c_{z_{\text{lim}}} < 1 \quad (6.48)$$

Se indican a continuación las matrices paramétricas utilizadas en la presente tesis, según la evolución geométrica impuesta al contorno variable.-

Desplazamiento horizontal.

Número de grados de libertad: $L = 1$

Matriz paramétrica:

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[u_{1CG} \right] \quad (6.49)$$

Desplazamiento vertical.

Número de grados de libertad: $L = 1$

Matriz paramétrica:

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left[u_{2CG} \right] \quad (6.50)$$

Rotación.

Número de grados de libertad: $L = 1$

Matriz paramétrica:

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_2^{(1)} - x_{2CG}) \\ -(y_1^{(1)} - x_{1CG}) \\ (y_2^{(2)} - x_{2CG}) \\ -(y_1^{(2)} - x_{1CG}) \\ (y_2^{(3)} - x_{2CG}) \\ -(y_1^{(3)} - x_{1CG}) \end{bmatrix} \left[w_{CG} \right] \quad (6.51)$$

Dilatación isotrópica.

Imponemos:

$$\varepsilon_m > \varepsilon_{\text{lim}} > -1 \quad (6.52)$$

Número de grados de libertad: $L = 1$

Matriz paramétrica:

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_1^{(1)} - x_{1CG}) \\ (y_2^{(1)} - x_{2CG}) \\ (y_1^{(2)} - x_{1CG}) \\ (y_2^{(2)} - x_{2CG}) \\ (y_1^{(3)} - x_{1CG}) \\ (y_2^{(3)} - x_{2CG}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

Dilatación desviadora:

Imponemos:

$$|\varepsilon'| < |\varepsilon_{\text{lim}}| < 1 \quad (6.54)$$

Número de grados de libertad: $L = 1$.

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_1^{(1)} - x_{1CG}) \\ -(y_2^{(1)} - x_{2CG}) \\ (y_1^{(2)} - x_{1CG}) \\ -(y_2^{(2)} - x_{2CG}) \\ (y_1^{(3)} - x_{1CG}) \\ -(y_2^{(3)} - x_{2CG}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon' \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

Distorsión.

Imponemos:

$$|\varepsilon_{12}| < c z_{\text{lim}} < 1 \quad (6.56)$$

Número de grados de libertad: $L = 1$

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_2^{(1)} - x_{2CG}) \\ (y_1^{(1)} - x_{1CG}) \\ (y_2^{(2)} - x_{2CG}) \\ (y_1^{(2)} - x_{1CG}) \\ (y_2^{(3)} - x_{2CG}) \\ (y_1^{(3)} - x_{1CG}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Desplazamiento plano.

Número de grados de libertad: $L = 2$.

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1CG} \\ u_{2CG} \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Desplazamiento plano más dilatación isotrópica.

Imponemos:

$$\varepsilon_m > \varepsilon_{\text{lim}} > -1 \quad (6.59)$$

Número de grados de libertad: $L = 3$

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{eq} & 0 & \begin{pmatrix} y_1^{(1)} - x_{1CG} \\ y_2^{(1)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \\ 0 & D_{eq} & \begin{pmatrix} y_1^{(1)} - x_{1CG} \\ y_2^{(1)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \\ D_{eq} & 0 & \begin{pmatrix} y_1^{(2)} - x_{1CG} \\ y_2^{(2)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \\ 0 & D_{eq} & \begin{pmatrix} y_1^{(2)} - x_{1CG} \\ y_2^{(2)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \\ D_{eq} & 0 & \begin{pmatrix} y_1^{(3)} - x_{1CG} \\ y_2^{(3)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \\ 0 & D_{eq} & \begin{pmatrix} y_1^{(3)} - x_{1CG} \\ y_2^{(3)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1CG} \\ u_{2CG} \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

Desplazamiento plano más rotación más dilatación isotrópica.

Imponemos:

$$\varepsilon_m > \varepsilon_{\lim} > -1 \quad (6.61)$$

Número de grados de libertad: $L = 4$

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{eq} & 0 & \begin{pmatrix} y_2^{(1)} - x_{2CG} \\ y_1^{(1)} - x_{1CG} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1^{(1)} - x_{1CG} \\ y_2^{(1)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \\ 0 & D_{eq} & -\begin{pmatrix} y_1^{(1)} - x_{1CG} \\ y_2^{(1)} - x_{2CG} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1^{(1)} - x_{1CG} \\ y_2^{(1)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \\ D_{eq} & 0 & \begin{pmatrix} y_2^{(2)} - x_{2CG} \\ y_1^{(2)} - x_{1CG} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1^{(2)} - x_{1CG} \\ y_2^{(2)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \\ 0 & D_{eq} & -\begin{pmatrix} y_1^{(2)} - x_{1CG} \\ y_2^{(2)} - x_{2CG} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1^{(2)} - x_{1CG} \\ y_2^{(2)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \\ D_{eq} & 0 & \begin{pmatrix} y_2^{(3)} - x_{2CG} \\ y_1^{(3)} - x_{1CG} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1^{(3)} - x_{1CG} \\ y_2^{(3)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \\ 0 & D_{eq} & -\begin{pmatrix} y_1^{(3)} - x_{1CG} \\ y_2^{(3)} - x_{2CG} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} y_1^{(3)} - x_{1CG} \\ y_2^{(3)} - x_{2CG} \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1CG} \\ u_{2CG} \\ w_{CG} \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

Desplazamiento plano más rotación más dilatación isotrópica más dilatación desviadora.

Imponemos:

$$\varepsilon_m - |\varepsilon'| > \varepsilon_{\lim} > -1 \quad (6.63)$$

Número de grados de libertad: $L = 5$

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{eq} & 0 & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) & (y_1^{(1)} - x_{1CG}) & (y_1^{(1)} - x_{1CG}) \\ 0 & D_{eq} & -(y_1^{(1)} - x_{1CG}) & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) & -(y_2^{(1)} - x_{2CG}) \\ D_{eq} & 0 & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) & (y_1^{(2)} - x_{1CG}) & (y_1^{(2)} - x_{1CG}) \\ 0 & D_{eq} & -(y_1^{(2)} - x_{1CG}) & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) & -(y_2^{(2)} - x_{2CG}) \\ D_{eq} & 0 & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) & (y_1^{(3)} - x_{1CG}) & (y_1^{(3)} - x_{1CG}) \\ 0 & D_{eq} & -(y_1^{(3)} - x_{1CG}) & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) & -(y_2^{(3)} - x_{2CG}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1CG} \\ u_{2CG} \\ w_{CG} \\ \varepsilon_m \\ \varepsilon' \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

Desplazamiento plano más rotación más dilatación isotrópica más distorsión.

Imponemos:

$$\varepsilon_m > \varepsilon_{lim} > -1 \quad (6.65)$$

$$|\varepsilon_{12}| < cz_{lim} < 1 \quad (6.66)$$

Número de grados de libertad: $L = 5$

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{eq} & 0 & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) & (y_1^{(1)} - x_{1CG}) & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) \\ 0 & D_{eq} & -(y_1^{(1)} - x_{1CG}) & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) & (y_1^{(1)} - x_{1CG}) \\ D_{eq} & 0 & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) & (y_1^{(2)} - x_{1CG}) & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) \\ 0 & D_{eq} & -(y_1^{(2)} - x_{1CG}) & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) & (y_1^{(2)} - x_{1CG}) \\ D_{eq} & 0 & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) & (y_1^{(3)} - x_{1CG}) & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) \\ 0 & D_{eq} & -(y_1^{(3)} - x_{1CG}) & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) & (y_1^{(3)} - x_{1CG}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1CG} \\ u_{2CG} \\ w_{CG} \\ \varepsilon_m \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (6.67)$$

MOVIMIENTO TOTAL: desplazamiento plano más rotación más dilatación isotrópica más dilatación desviadora más distorsión.

Imponemos:

$$\varepsilon_m - |\varepsilon'| > \varepsilon_{\text{lim}} > -1 \quad (6.68)$$

$$|\varepsilon_{12}| < c z_{\text{lim}} < 1 \quad (6.69)$$

Número de grados de libertad: $L = 6$

$$\begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{eq} & 0 & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) & (y_1^{(1)} - x_{1CG}) & (y_1^{(1)} - x_{1CG}) & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) \\ 0 & D_{eq} & -(y_1^{(1)} - x_{1CG}) & (y_2^{(1)} - x_{2CG}) & -(y_2^{(1)} - x_{2CG}) & (y_1^{(1)} - x_{1CG}) \\ D_{eq} & 0 & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) & (y_1^{(2)} - x_{1CG}) & (y_1^{(2)} - x_{1CG}) & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) \\ 0 & D_{eq} & -(y_1^{(2)} - x_{1CG}) & (y_2^{(2)} - x_{2CG}) & -(y_2^{(2)} - x_{2CG}) & (y_1^{(2)} - x_{1CG}) \\ D_{eq} & 0 & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) & (y_1^{(3)} - x_{1CG}) & (y_1^{(3)} - x_{1CG}) & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) \\ 0 & D_{eq} & -(y_1^{(3)} - x_{1CG}) & (y_2^{(3)} - x_{2CG}) & -(y_2^{(3)} - x_{2CG}) & (y_1^{(3)} - x_{1CG}) \end{bmatrix} \quad (6.70)$$

6.3 Discretización de los términos de la ecuación integral.

6.3.1 Formación de la matriz H.

$$\int_{\Gamma_V} q^* \delta u d\Gamma \quad (6.71)$$

La discretización de la integral 6.71, se ha expuesto con detalle en el capítulo 4. La exponemos a continuación de forma resumida.

Consideramos el contorno Γ aproximado mediante elementos de contorno isoparamétricos, siendo,

NEV : número de elementos de contorno utilizados en la aproximación del contorno variable.

$$\int_{\Gamma_V} q^* \delta u d\Gamma = \sum_{e=1}^{e=NEV} \int_{\Gamma_e} q^* \delta u d\Gamma =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{e=1}^{e=NEV} \int_{\Gamma_e} q^* \left(\phi_1 \delta u^{(1)} + \phi_2 \delta u^{(2)} + \phi_3 \delta u^{(3)} \right) d\Gamma = \\
&= \sum_{e=1}^{e=NEV} \int_{\Gamma_e} q^* \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta u^{(1)} \\ \delta u^{(2)} \\ \delta u^{(3)} \end{pmatrix} d\Gamma = \sum_{e=1}^{e=NEV} \int_{\Gamma_e} q^* \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} d\Gamma \begin{pmatrix} \delta u^{(1)} \\ \delta u^{(2)} \\ \delta u^{(3)} \end{pmatrix} = \\
&= \sum_{e=1}^{e=NEV} \left[\int_{\Gamma_e} q^* \phi_1 d\Gamma \quad \int_{\Gamma_e} q^* \phi_2 d\Gamma \quad \int_{\Gamma_e} q^* \phi_3 d\Gamma \right] \begin{pmatrix} \delta u^{(1)} \\ \delta u^{(2)} \\ \delta u^{(3)} \end{pmatrix} = \\
&= \sum_{e=1}^{e=NEV} \begin{bmatrix} h_1^{ie} & h_1^{ie} & h_1^{ie} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta u^{(1)} \\ \delta u^{(2)} \\ \delta u^{(3)} \end{pmatrix} = \tag{6.72}
\end{aligned}$$

siendo

$$h_k^{ie} = \int_{\Gamma_e} q^* \phi_k d\Gamma; \quad i : \text{nodo de colocaci3n} \tag{6.73}$$

A partir de los coeficientes h_k^{ie} formamos la matriz $\hat{\mathbf{H}}$, coincidente con la empleada en el m3todo de los elementos de contorno,

$$\hat{H}^{i,j} = \begin{cases} j \text{ par} : h_2^{i,(\frac{j}{2})} \\ j \text{ impar} : h_3^{i,(\frac{j-1}{2})} + h_1^{i,(\frac{j+1}{2})} \end{cases} \tag{6.74}$$

Definiendo el vector δu , de dimensi3n N , como aquel cuyas componentes son los valores nodales de la variable δu ,

$$\delta \mathbf{u} : \begin{bmatrix} \delta u^{(1)} \\ \vdots \\ \delta u^{(N)} \end{bmatrix} \quad (6.75)$$

y teniendo en cuenta que la variable δu es nula en los nodos del contorno Γ_C , podemos expresar

$$- \int_{\Gamma_V} q^* \delta u d\Gamma = -\hat{\mathbf{H}} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (6.76)$$

6.3.2 Formación de la matriz delta.

Procedemos a la discretización de los restantes términos de la ecuación integral ??, con el objetivo de deducir la expresión matricial de esta; los términos a discretizar son los siguientes,

1. $\int_{\Gamma} q \nabla u^* \cdot \delta \xi d\Gamma$
2. $\int_{\Gamma} u \nabla q^* \cdot \delta \xi d\Gamma$
3. $\int_{\Gamma_V} q \nabla u^* \cdot \delta \mathbf{y} d\Gamma_V$
4. $\int_{\Gamma_V} u \nabla q^* \cdot \delta \mathbf{y} d\Gamma_V$
5. $\int_{\Gamma_V} q^* \nabla u \cdot \delta \mathbf{y} d\Gamma_V$
6. $\int_{\Gamma_V} u \nabla u^* \cdot \delta \mathbf{m} d\Gamma_V$

1.-

$$\int_{\Gamma} q \nabla u^* \delta \xi d\Gamma = \int_{\Gamma} q \nabla u^* d\Gamma \delta \xi = \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \nabla u^* d\Gamma \right\} \delta \xi = \quad (6.77)$$

$$= \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} \left(q \frac{\partial u^*}{\partial y_1} \quad q \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \right) d\Gamma \right\} \delta \xi = \quad (6.78)$$

$$= \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_1} d\Gamma \quad \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_2} d\Gamma \right\} \delta \xi = \quad (6.79)$$

$$= \left(\sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_1} d\Gamma \right\} \quad \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_2} d\Gamma \right\} \right) \delta \xi = \quad (6.80)$$

teniendo en cuenta la expresión 6.33,

$$= \left[\sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_1} d\Gamma \right\} \quad \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_2} d\Gamma \right\} \right] \begin{bmatrix} \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} & 0 \\ 0 & \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} \end{bmatrix} \mathbf{P}_{(eco)} \delta \mathbf{v} \quad (6.81)$$

$$= \left[\sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_1} d\Gamma \right\} \phi_1^{co} \quad \dots \quad \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_2} d\Gamma \right\} \phi_3^{co} \right] \mathbf{P}_{(eco)} \delta \mathbf{v} \quad (6.82)$$

si llamamos i al nodo de colocación, y L al número de grados de libertad establecidos en la evolución geométrica de Γ_V , igual a la dimensión del vector $\delta \mathbf{v}$ hemos obtenido el primer sumando de la fila i de la matriz que llamaremos Δ , de orden $N \times L$.

Definimos,

$$\Delta_i^1 = \left[\sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_1} d\Gamma \right\} \phi_1^{co} \quad \dots \quad \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_2} d\Gamma \right\} \phi_3^{co} \right] \mathbf{P}_{(eco)} \quad (6.83)$$

2.-

$$\int_{\Gamma} u \nabla q^* \delta \xi d\Gamma = \int_{\Gamma} u \nabla q^* d\Gamma \delta \xi = \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \nabla q^* d\Gamma \right\} \delta \xi = \quad (6.84)$$

$$= \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} \left(u \frac{\partial q^*}{\partial y_1} \quad u \frac{\partial q^*}{\partial y_2} \right) d\Gamma \right\} \delta \xi = \quad (6.85)$$

$$= \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_1} d\Gamma \quad \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_2} d\Gamma \right\} \delta \xi = \quad (6.86)$$

$$= \left(\sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_1} d\Gamma \right\} \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_2} d\Gamma \right\} \right) \delta \xi = \quad (6.87)$$

teniendo en cuenta la expresión 6.33,

$$= \left(\sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_1} d\Gamma \right\} \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_2} d\Gamma \right\} \right) \begin{bmatrix} \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} & 0 \\ 0 & \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} \end{bmatrix} \mathbf{P}_{(eco)} \delta \mathbf{v} \quad (6.88)$$

$$= \left[\sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_1} d\Gamma \right\} \phi_1^{co} \quad \dots \quad \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_2} d\Gamma \right\} \phi_3^{co} \right] \mathbf{P}_{(eco)} \delta \mathbf{v} \quad (6.89)$$

definimos,

$$\Delta_i^2 = \left[\sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_1} d\Gamma \right\} \phi_1^{co} \quad \dots \quad \sum_{e=1}^{e=NE} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_2} d\Gamma \right\} \phi_3^{co} \right] \mathbf{P}_{(eco)} \quad (6.90)$$

3.-

$$\int_{\Gamma_V} q \nabla u^* \delta \mathbf{y} d\Gamma_V = \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_1} \quad \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \right) \delta \mathbf{y} d\Gamma_e \right\} =$$

siendo, NEV el número de elementos de contorno utilizados en la aproximación de Γ_V .

Teniendo en cuenta la expresión 6.31,

$$= \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_1} \quad \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \right) \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{pmatrix} \mathbf{P}^e \delta \mathbf{v} d\Gamma_e \right\} = \quad (6.91)$$

siendo

\mathbf{P}^e : matriz paramétrica correspondiente al elemento Γ_e .

En la expresión 6.91, el vector $\delta \mathbf{v}$ por estar determinado para Γ_V lo dejamos fuera del

sumatorio, y la matriz \mathbf{P}^e , por estar determinada para Γ_e la dejamos fuera de la integral,

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} q \begin{pmatrix} \frac{\partial u^*}{\partial y_1} & \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{pmatrix} d\Gamma_e \mathbf{P}^e \right\} \right\} \delta \mathbf{v} = \\
 &= \left\{ \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} \left(q \frac{\partial u^*}{\partial y_1} \phi_1 \quad q \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \phi_1 \quad q \frac{\partial u^*}{\partial y_1} \phi_2 \quad q \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \phi_2 \quad q \frac{\partial u^*}{\partial y_1} \phi_3 \quad q \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \phi_3 \right) d\Gamma_e \mathbf{P}^e \right\} \right\} \delta \mathbf{v} = \\
 &= \left\{ \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \left(\int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_1} \phi_1 d\Gamma_e \quad \cdots \quad \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \phi_3 d\Gamma_e \right) \mathbf{P}^e \right\} \right\} \delta \mathbf{v} = \quad (6.92)
 \end{aligned}$$

definimos,

$$\Delta_i^{(3)} = \left(\sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \left(\int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_1} \phi_1 d\Gamma_e \quad \cdots \quad \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \phi_3 d\Gamma_e \right) \mathbf{P}^e \right\} \right) \quad (6.93)$$

4.-

$$\int_{\Gamma_V} u \nabla q^* \delta y d\Gamma_V = \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \begin{pmatrix} \frac{\partial q^*}{\partial y_1} & \frac{\partial q^*}{\partial y_2} \end{pmatrix} \delta y d\Gamma_e \right\} =$$

teniendo en cuenta la expresión 6.31,

$$= \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \begin{pmatrix} \frac{\partial q^*}{\partial y_1} & \frac{\partial q^*}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \mathbf{P}^e \delta y d\Gamma_e \right\} = \quad (6.94)$$

el vector $\delta \mathbf{v}$ por estar determinado en Γ_V lo dejamos fuera del sumatorio, y la matriz \mathbf{P}^e , por estar determinada en Γ_e la dejamos fuera de la integral,

$$= \left\{ \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \begin{pmatrix} \frac{\partial q^*}{\partial y_1} & \frac{\partial q^*}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{pmatrix} d\Gamma_e \mathbf{P}^e \right\} \right\} \delta \mathbf{v} =$$



$$\begin{aligned}
&= \left\{ \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} \left(u \frac{\partial q^*}{\partial y_1} \phi_1 \quad u \frac{\partial q^*}{\partial y_2} \phi_1 \quad u \frac{\partial q^*}{\partial y_1} \phi_2 \quad u \frac{\partial q^*}{\partial y_2} \phi_2 \quad u \frac{\partial q^*}{\partial y_1} \phi_3 \quad u \frac{\partial q^*}{\partial y_2} \phi_3 \right) d\Gamma_e \mathbf{P}^e \right\} \right\} \delta \mathbf{v} = \\
&= \left\{ \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \left(\int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_1} \phi_1 d\Gamma_e \quad \cdots \quad \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_2} \phi_3 d\Gamma_e \right) \mathbf{P}^e \right\} \right\} \delta \mathbf{v}
\end{aligned}$$

definimos,

$$\Delta_i^{(4)} = \left(\sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \left(\int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_1} \phi_1 d\Gamma_e \quad \cdots \quad \int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_2} \phi_3 d\Gamma_e \right) \mathbf{P}^e \right\} \right) \quad (6.95)$$

5.-

$$\int_{\Gamma_V} q^* \nabla u \delta \mathbf{y} d\Gamma_V = \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} q^* \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \quad \frac{\partial u}{\partial y_2} \right) \delta \mathbf{y} d\Gamma_e \right\} =$$

teniendo en cuenta la expresión 6.31,

$$= \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} q^* \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \quad \frac{\partial u}{\partial y_2} \right) \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \mathbf{P}^e \delta \mathbf{v} d\Gamma_e \right\} = \quad (6.96)$$

el vector $\delta \mathbf{v}$ por estar determinado en Γ_V lo dejamos fuera del sumatorio, y la matriz \mathbf{P}^e , por estar determinada en Γ_e la dejamos fuera de la integral,

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} q^* \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \quad \frac{\partial u}{\partial y_2} \right) \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{pmatrix} d\Gamma_e \mathbf{P}^e \right\} \right\} \delta \mathbf{v} = \\
&= \left\{ \sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} q^* \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \phi_1 \quad \frac{\partial u}{\partial y_2} \phi_1 \quad \frac{\partial u}{\partial y_1} \phi_2 \quad \frac{\partial u}{\partial y_2} \phi_2 \quad \frac{\partial u}{\partial y_1} \phi_3 \quad \frac{\partial u}{\partial y_2} \phi_3 \right) d\Gamma_e \mathbf{P}^e \right\} \right\} \delta \mathbf{v} =
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \sum_{e=1}^{NEV} \left(\int_{\Gamma_e} q^* \frac{\partial u}{\partial y_1} \phi_1 d\Gamma_e \quad \cdots \quad \int_{\Gamma_e} q^* \frac{\partial u}{\partial y_2} \phi_3 d\Gamma_e \right) \mathbf{P}^e \right\} \delta \mathbf{v} \quad (6.97)$$

definimos,

$$\Delta_i^5 = \left(\sum_{e=1}^{NEV} \left\{ \left(\int_{\Gamma_e} q^* \frac{\partial u}{\partial y_1} \phi_1 d\Gamma_e \quad \cdots \quad \int_{\Gamma_e} q^* \frac{\partial u}{\partial y_2} \phi_3 d\Gamma_e \right) \mathbf{P}^e \right\} \right) \quad (6.98)$$

6.-

$$\int_{\Gamma_V} u \nabla u^* \delta \mathbf{m} d\Gamma_V = \sum_{e=1}^{e=NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \nabla u^* \delta \mathbf{m} d\Gamma_e \right\} = \quad (6.99)$$

$$= \sum_{e=1}^{e=NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_1} \quad \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \right) \delta \mathbf{m} d\Gamma_e \right\} = \quad (6.100)$$

sustituyendo la expresión 6.42,

$$= \sum_{e=1}^{e=NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_1} \quad \frac{\partial u^*}{\partial y_2} \right) \frac{1}{J} \begin{pmatrix} 0 & \dot{\phi}_1 & 0 & \dot{\phi}_2 & 0 & \dot{\phi}_3 \\ -\dot{\phi}_1 & 0 & -\dot{\phi}_2 & 0 & -\dot{\phi}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix}_{(e)} d\Gamma_e \right\} = \quad (6.101)$$

por estar los valores nodales determinados para cada elemento quedan fuera de la integral,

$$= \sum_{e=1}^{e=NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{1}{J} \begin{pmatrix} -\dot{\phi}_1 \frac{\partial u^*}{\partial y_2} & \dot{\phi}_1 \frac{\partial u^*}{\partial y_1} & -\dot{\phi}_2 \frac{\partial u^*}{\partial y_2} & \dot{\phi}_2 \frac{\partial u^*}{\partial y_1} & -\dot{\phi}_3 \frac{\partial u^*}{\partial y_2} & \dot{\phi}_3 \frac{\partial u^*}{\partial y_1} \end{pmatrix} d\Gamma_e \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix}_{(e)} \right\} \quad (6.102)$$

teniendo en cuenta la expresión 6.31,

$$= \sum_{e=1}^{e=NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{1}{J} \begin{pmatrix} -\dot{\phi}_1 \frac{\partial u^*}{\partial y_2} & \dot{\phi}_1 \frac{\partial u^*}{\partial y_1} & -\dot{\phi}_2 \frac{\partial u^*}{\partial y_2} & \dot{\phi}_2 \frac{\partial u^*}{\partial y_1} & -\dot{\phi}_3 \frac{\partial u^*}{\partial y_2} & \dot{\phi}_3 \frac{\partial u^*}{\partial y_1} \end{pmatrix} d\Gamma_e \mathbf{P}_{(e)} \delta \mathbf{v} \right\} = \quad (6.103)$$

por estar el vector $\delta \mathbf{v}$ determinado para Γ_V , queda fuera del sumatorio,

$$= \sum_{e=1}^{e=NEV} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{1}{J} \begin{pmatrix} -\dot{\phi}_1 \frac{\partial u^*}{\partial y_2} & \dot{\phi}_1 \frac{\partial u^*}{\partial y_1} & -\dot{\phi}_2 \frac{\partial u^*}{\partial y_2} & \dot{\phi}_2 \frac{\partial u^*}{\partial y_1} & -\dot{\phi}_3 \frac{\partial u^*}{\partial y_2} & \dot{\phi}_3 \frac{\partial u^*}{\partial y_1} \end{pmatrix} d\Gamma_e \mathbf{P}_{(e)} \right\} \delta \mathbf{v} = \quad (6.104)$$

$$= \sum_{e=1}^{e=NEV} \left\{ \left(- \int_{\Gamma_e} \frac{u \dot{\phi}_1}{J} \frac{\partial u^*}{\partial y_2} d\Gamma_e \quad \dots \quad \int_{\Gamma_e} \frac{u \dot{\phi}_3}{J} \frac{\partial u^*}{\partial y_1} d\Gamma_e \right) \mathbf{P}_{(e)} \right\} \delta \mathbf{v} = \quad (6.105)$$

definimos,

$$\Delta_i^{(6)} = \left(\sum_{e=1}^{e=NEV} \left\{ \left(- \int_{\Gamma_e} \frac{u \dot{\phi}_1}{J} \frac{\partial u^*}{\partial y_2} d\Gamma_e \quad \dots \quad \int_{\Gamma_e} \frac{u \dot{\phi}_3}{J} \frac{\partial u^*}{\partial y_1} d\Gamma_e \right) \mathbf{P}_{(e)} \right\} \right) = \quad (6.106)$$

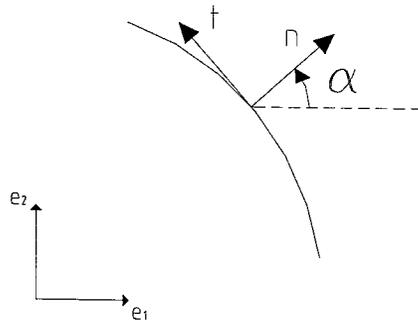
Desarrollo del término libre.

En el presente apartado vamos a desarrollar la expresión,

$$\frac{1}{2} \nabla u(\boldsymbol{\xi}) \cdot \delta \boldsymbol{\xi} \quad (6.107)$$

aparecida en el término libre de la ecuación 6.1.

En un punto $\mathbf{y} \in \Gamma_V$ consideramos la base natural (\mathbf{n}, \mathbf{t}) , siendo \mathbf{n} el vector normal a Γ_V en \mathbf{y} , y \mathbf{t} el vector tangente, ambos unitarios. La base natural está relacionada con la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ mediante el tensor de transformación,



Figura~6-2:

Tensor de transformación:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Las coordenadas del vector gradiente ∇u en ambos sistemas de referencia son las derivadas direccionales, relacionadas ambas por el tensor de transformación,

$$\begin{aligned} \nabla u \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} & \frac{\partial u}{\partial y_2} \end{pmatrix} \text{ en } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ \nabla u \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \text{ en } (\mathbf{n}, \mathbf{t}) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} \\ \frac{\partial u}{\partial y_2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} \\ \frac{\partial u}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Igualmente para el vector $\delta \boldsymbol{\xi}$, consideramos sus coordenadas en ambos sistemas de referencia,

relacionados por el tensor de transformación,

$$\delta \boldsymbol{\xi} \begin{pmatrix} \delta y_1(\boldsymbol{\xi}) & \delta y_2(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \text{ en } (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \quad (6.108)$$

$$\delta \boldsymbol{\xi} \begin{pmatrix} \delta y_n(\boldsymbol{\xi}) & \delta y_t(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \text{ en } (\mathbf{n}, \mathbf{t}) \quad (6.109)$$

$$\begin{pmatrix} \delta y_n(\boldsymbol{\xi}) \\ \delta y_t(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \delta y_2(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta y_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \delta y_2(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y_n(\boldsymbol{\xi}) \\ \delta y_t(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} \quad (6.110)$$

Desarrollamos la expresión 6.107,

$$\frac{1}{2} \nabla u \cdot \delta \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta y_n(\boldsymbol{\xi}) & \delta y_t(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \delta y_n(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\partial u}{\partial t} \delta y_t(\boldsymbol{\xi}) \right) = \quad (6.111)$$

teniendo en cuenta la expresión 6.110,

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} (\cos \alpha \delta y_1(\boldsymbol{\xi}) + \sin \alpha \delta y_2(\boldsymbol{\xi})) + \frac{\partial u}{\partial t} (-\sin \alpha \delta y_1(\boldsymbol{\xi}) + \cos \alpha \delta y_2(\boldsymbol{\xi})) \right) = \quad (6.112)$$

teniendo en cuenta las expresiones,

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} \quad (6.113)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \Gamma} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \Gamma} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{J} \quad (6.114)$$

$$\cos \alpha = n_1$$

$$\sin \alpha = n_2 \quad (6.115)$$

si indicamos con el superíndice "co" el valor de las funciones en el nodo de colocación, podemos expresar,

$$\frac{1}{2} \nabla u \cdot \delta \mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \left(q^{co} (n_1^{co} \delta y_1(\boldsymbol{\xi}) + n_2^{co} \delta y_2(\boldsymbol{\xi})) + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} (-n_2^{co} \delta y_1(\boldsymbol{\xi}) + n_1^{co} \delta y_2(\boldsymbol{\xi})) \right) = \quad (6.116)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(q^{co} n_1^{co} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_2^{co} \right) \delta y_1(\boldsymbol{\xi}) + \left(q^{co} n_2^{co} + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_1^{co} \right) \delta y_2(\boldsymbol{\xi}) \right] = \quad (6.117)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q^{co} n_1^{co} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_2^{co} & q^{co} n_2^{co} + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_1^{co} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta y_1(\boldsymbol{\xi}) \\ \delta y_2(\boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix} = \quad (6.118)$$

teniendo en cuenta la expresión, 6.33

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q^{co} n_1^{co} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_2^{co} & q^{co} n_2^{co} + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_1^{co} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} & 0 \\ 0 & \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta y_1^{(1)} \\ \delta y_2^{(1)} \\ \delta y_1^{(2)} \\ \delta y_2^{(2)} \\ \delta y_1^{(3)} \\ \delta y_2^{(3)} \end{bmatrix} \quad (6.119)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q^{co} n_1^{co} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_2^{co} & q^{co} n_2^{co} + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_1^{co} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} & 0 \\ 0 & \phi_1^{co} & 0 & \phi_2^{co} & 0 & \phi_3^{co} \end{bmatrix} \mathbf{P}_{(eco)} \delta \quad (6.120)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(q^{co} n_1^{co} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_2^{co} \right) \phi_1^{co} \cdots \left(q^{co} n_2^{co} + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_1^{co} \right) \phi_3^{co} \right) \mathbf{P}_{(eco)} \delta \mathbf{v} \quad (6.121)$$

definimos,

$$\Delta_i^{(7)} = \frac{1}{2} \left[\left(q^{co} n_1^{co} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_2^{co} \right) \phi_1^{co} \cdots \left(q^{co} n_2^{co} + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^{co} \frac{1}{J^{co}} n_1^{co} \right) \phi_3^{co} \right] \mathbf{P}_{(eco)} \quad (6.122)$$

Teniendo en cuenta el signo de cada término de la expresión ?? definimos la fila i de la matriz Δ de orden $N \times L$,

$$\Delta_i = -\Delta_i^{(1)} + \Delta_i^{(2)} + \Delta_i^{(3)} - \Delta_i^{(4)} - \Delta_i^{(5)} - \Delta_i^{(6)} - \Delta_i^{(7)} \quad (6.123)$$

6.4 Formación de un sistema lineal de ecuaciones.

La ecuación integral 6.1, teniendo en cuenta las expresiones 6.76 y 6.123, la podemos expresar,

$$\frac{1}{2} \delta u(\boldsymbol{\xi}) = -\hat{\mathbf{H}} \cdot \delta \mathbf{u} + \Delta \cdot \delta \mathbf{v} \quad (6.124)$$

El término $\frac{1}{2} \delta u(\boldsymbol{\xi})$, de igual forma que en el Método de los Elementos de Contorno, se incorpora a la matriz $\hat{\mathbf{H}}$, sumando $\frac{1}{2}$ a los elementos de la diagonal.

Definimos la matriz \mathbf{H} ,

$$\mathbf{H} : H^{i,j} = \begin{cases} \hat{H}^{i,j} & i \neq j \\ \frac{1}{2} + \hat{H}^{i,j} & i = j \end{cases} \quad (6.125)$$

La expresión 6.124 se convierte en,

$$\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{u} = \Delta \cdot \delta \mathbf{v} \quad (6.126)$$

6.5 Introducción.

En el presente capítulo vamos a exponer los procedimientos de integración empleados en el cálculo de las integrales elementales obtenidas en la formación de la matriz Δ , que relacionamos a continuación,

1. $\int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_i} d\Gamma$
2. $\int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_i} d\Gamma$
3. $\int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_i} \phi d\Gamma$
4. $\int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_i} \phi d\Gamma$
5. $\int_{\Gamma_e} q^* \frac{\partial u}{\partial y_i} \phi d\Gamma$
6. $\int_{\Gamma_e} \frac{u \phi}{J} \frac{du^*}{dy_i} d\Gamma$

Para ello procederemos, en primer lugar, a la descomposición de las funciones *solución fundamental* y *flujo de la solución fundamental*, y sus derivadas, en sus partes estática y dinámica.

6.6 Descomposición en partes estática y dinámica de las funciones solución fundamental.

- Recordemos la expresión de la función *solución fundamental*,

$$u^* = \frac{1}{2\pi\mu} K_0 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) \quad (6.127)$$

teniendo en cuenta el desarrollo en serie de la función de Bessel de orden 0,

$$K_0(z) \simeq -\ln \frac{z}{2} - \gamma + O(z) \quad (6.128)$$

si llamamos,

$$z = \frac{i\omega r}{c_2} \Rightarrow -\ln \frac{z}{2} = \ln \frac{1}{r} - \ln \frac{i\omega}{2c_2} \quad (6.129)$$

podemos expresar,

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{2\pi\mu} K_0(z) = \frac{1}{2\pi\mu} \left(-\ln \frac{z}{2} - \gamma + O(z) \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\mu} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2\pi\mu} \left[O(z) - \gamma - \ln \left(\frac{i\omega}{2c_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.130)$$

en la expresión A.36 tenemos la descomposición de u^* en sus partes estática y dinámica,

$$u^* = (u^*)_S + (u^*)_D \quad (6.131)$$

$$(u^*)_S = \frac{1}{2\pi\mu} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad (6.132)$$

$$(u^*)_D = \frac{1}{2\pi\mu} \left[O(z) - \gamma - \ln \left(\frac{i\omega}{2c_2} \right) \right] \quad (6.133)$$

- Partiendo de la expresión de la derivada de la función de Bessel,

$$\frac{d}{dz} K_0(z) = -K_1(z) \quad (6.134)$$

derivamos la solución fundamental u^* ,

$$\frac{\partial u^*}{\partial y_i} = \frac{-i\omega}{2\pi\mu c_2} K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) r_{,i} \quad (6.135)$$

y teniendo en cuenta el desarrollo en serie de la función de Bessel de orden 1,

$$K_1(z) \simeq \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \quad (6.136)$$

si llamamos, $z = \frac{i\omega r}{c_2}$, podemos expresar,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^*}{\partial y_i} &= \frac{-i\omega}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] r_{,i} = \\
&= \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} + \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right]
\end{aligned} \tag{6.137}$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial u^*}{\partial y_i} = \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i} \right)_S + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i} \right)_D \tag{6.138}$$

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i} \right)_S = \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \tag{6.139}$$

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i} \right)_D = \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] \tag{6.140}$$

- Recordemos la expresión del flujo de la solución fundamental,

$$q^* = \frac{-i\omega}{2\pi c_2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_1 \left(\frac{i\omega r}{c_2} \right) \tag{6.141}$$

teniendo en cuenta el desarrollo en serie de la función de Bessel de orden 1,

$$K_1(z) \simeq \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \tag{6.142}$$

si llamamos, $z = \frac{i\omega r}{c_2}$, podemos expresar,

$$\begin{aligned}
q^* &= \frac{-i\omega}{2\pi c_2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_1(z) = \\
&= \frac{-i\omega}{2\pi c_2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left[\frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] = \\
&= \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + (-z_s) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left[r z_p \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right]
\end{aligned} \tag{6.143}$$

por lo tanto,

$$q^* = (q^*)_S + (q^*)_D \quad (6.144)$$

$$(q^*)_S = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \quad (6.145)$$

$$(q^*)_D = \left(-\frac{i\omega}{2\pi c_2} \right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] \quad (6.146)$$

- Teniendo en cuenta la expresión de la derivada de la función de Bessel de orden 1,

$$\frac{d}{dz} \{zK_1(z)\} = zK_0(z) \quad (6.147)$$

llamando, $z = \frac{i\omega r}{c_2}$ podemos expresar,

$$q^* = \frac{-1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} zK_1(z) \quad (6.148)$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial q^*}{\partial y_i} = \frac{-1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) zK_1(z) + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial y_i} (zK_1(z)) \right] \quad (6.149)$$

teniendo en cuenta,

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right)_{,i} = \left(\frac{1}{r} \right)_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right)_{,i} \quad (6.150)$$

podemos expresar,

$$\left(\frac{1}{r} \right)_{,i} = \frac{-r_{,i}}{r^2} \quad (6.151)$$

por ser $n_{i,j} = 0$, tenemos,

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right)_{,i} = r_{,ji} n_j \quad (6.152)$$

teniendo en cuenta el desarrollo,

$$r_{,ij} = \frac{1}{r} (\delta_{ij} - r_{,i} r_{,j}) \quad (6.153)$$

sustituyendo A.35 en A.37,

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right)_{,i} = \frac{1}{r} (\delta_{ji} - r_{,j} r_{,i}) n_j = \frac{1}{r} \left(n_i - r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \quad (6.154)$$

derivando,

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) = \frac{-r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{r^2} \left(n_i - r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \quad (6.155)$$

sustituyendo en A.42,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^*}{\partial y_i} &= \frac{-1}{2\pi} \left[\left(\frac{-r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} + \frac{1}{r^2} \left(n_i - r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right) z K_1(z) + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} (z K_0(z)) \frac{i\omega}{c_2} r_{,i} \right] = \\ &= \frac{-1}{2\pi} \left[\frac{i\omega}{c_2} \frac{1}{r} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) K_1(z) - \frac{w^2}{c_2^2} r_{,i} K_0(z) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right] \end{aligned} \quad (6.156)$$

considerando el desarrollo en serie de $K_0(z)$ y $K_1(z)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^*}{\partial y_i} &= \frac{-1}{2\pi} \left\{ \frac{i\omega}{c_2} \frac{1}{r} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \left[\frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] - \frac{w^2}{c_2^2} r_{,i} \left[-\ln \frac{z}{2} - \gamma + O(z) \right] \right\} \frac{\partial}{\partial} \\ &= \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) z \left[\frac{1}{z} + \frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] + \frac{1}{2\pi} \frac{w^2}{c_2^2} r_{,i} K_0(z) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \end{aligned} \quad ($$

por lo tanto,

$$\frac{\partial q^*}{\partial y_i} = \left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i} \right)_S + \left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i} \right)_D \quad (6.158)$$

$$\left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i} \right)_S = \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \quad (6.159)$$

$$\left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i}\right)_D = \frac{\omega^2}{4\pi c_2^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\right) \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2\pi r} \frac{i\omega}{c_2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\right) O(z^2) + \frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{c_2^2} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_0(z) \quad (6.160)$$

6.7 Integración de las funciones elementales.

En la presente tesis, la integrales obtenidas en la formación de la matriz Δ , cuando la función integrando presenta un comportamiento regular en el dominio de integración, se han calculado por procedimientos numéricos, utilizando las fórmulas de Gauss-Legendre y de Gauss-logarítmica, expuestas en al Anexo nº 1.

Por el contrario, cuando la función integrando presenta *singularidades* en el dominio de integración, lo que ocurre generalmente cuando el nodo de colocación, origen de las funciones radiales, esta incluido en el elemento de integración, los métodos numéricos no son convenientes para el cálculo de la integral, por lo que hemos recurrido, en estos casos, a procedimientos especiales de integración, objeto del presente capítulo.

6.7.1 Análisis de singularidades.

En este apartado vamos a analizar las posibles singularidades que pueda presentar el cálculo de las integrales cuando el nodo de colocación esté incluido en el elemento de integración, estudiando por separado la integración de las partes estática y dinámica, y exponiendo los procedimientos empleados para el cálculo de cada una de las integrales singulares.

Para mayor claridad en la exposición, hemos alterado el orden de estudio de cada una de las integrales, pero no así su numeración.

Integral nº 3

$$\int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_i} \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_e} q \left\{ \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i}\right)_S + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i}\right)_D \right\} \phi d\Gamma =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma_e} q \left\{ \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} + \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] \right\} \phi d\Gamma = \\
&= \int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi d\Gamma + \int_{\Gamma_e} q \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] \phi d\Gamma \quad (6.161)
\end{aligned}$$

Integral n° 3 (parte estática)

$$\int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi d\Gamma \quad (6.162)$$

Analizamos el comportamiento de la función $r_{,i}$, cuando el nodo de colocación está incluido en el elemento de integración.

$$r_{,i} = \frac{y_i - \xi_i}{r} \quad (6.163)$$

Algebráicamente el valor de la función $r_{,i}$, cuando nos aproximamos al nodo de colocación es indefinido:

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow r_{,i} \rightarrow \frac{0}{0} \quad (6.164)$$

Sin embargo, gráficamente podemos deducir el valor definido de la función, según se observa en la figura 6-3, cuando $r \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}
r_{,1} &= \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha_t \\
r_{,2} &= \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha_t \quad (6.165)
\end{aligned}$$

siendo α_t la pendiente de la tangente a Γ en el nodo de colocación ξ .

El valor límite de $r_{,i}$ cuando $r \rightarrow 0$ es distinto por la derecha y por la izquierda.

En efecto, de la figura 6-4 podemos deducir,

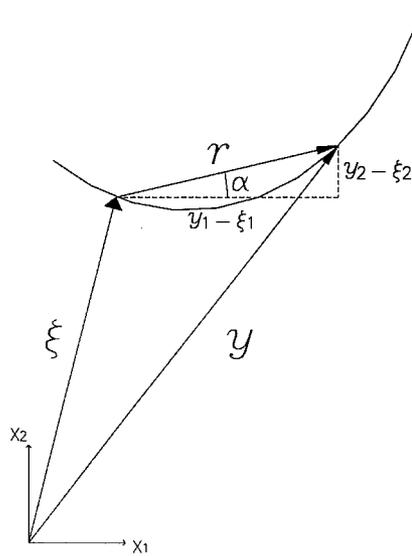


Figura ~6-3:

$$r \rightarrow 0^+ \Rightarrow \begin{cases} r_{,1} \rightarrow \cos \alpha_t = a \\ r_{,2} \rightarrow \sin \alpha_t = b \end{cases} \quad (6.166)$$

$$r \rightarrow 0^- \Rightarrow \begin{cases} r_{,1} \rightarrow \cos (180 + \alpha_t) = -a \\ r_{,2} \rightarrow \sin (180 + \alpha_t) = -b \end{cases} \quad (6.167)$$

En la figura 6-5 representamos el comportamiento de la función $r_{,i}$ cuando $r \rightarrow 0$,

Como consecuencia del comportamiento de la función $r_{,i}$, concluimos que la función integrando de la expresión A.31, presenta una singularidad cuando $r = 0$, haciéndose su valor infinito, pero con distinto signo si se aproxima por la derecha o por la izquierda,

$$r \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{-r_{,i}}{r} \rightarrow -\infty \quad (6.168)$$

$$r \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{-r_{,i}}{r} \rightarrow +\infty \quad (6.169)$$

En la figura 6-6 representamos el comportamiento de la función $\frac{-r_{,i}}{r}$ cuando $r \rightarrow 0$.

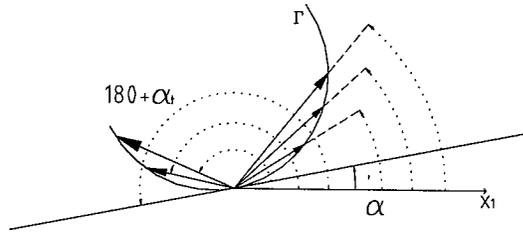


Figura ~6-4:

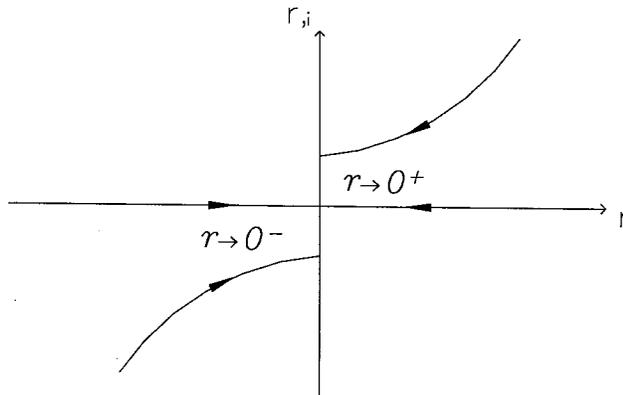


Figura ~6-5:

La función $q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi$ presenta un comportamiento análogo a la función $\frac{1}{x}$, y por lo tanto, según se expone en el anexo n° 1, el valor principal de Cauchy de la integral A.31 es convergente.

Tomamos por tanto:

$$\int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi d\Gamma = VPC \int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi d\Gamma \quad (6.170)$$

El cálculo del valor principal de Cauchy, lo hacemos regularizando la integral según se expone en el anexo n°1,

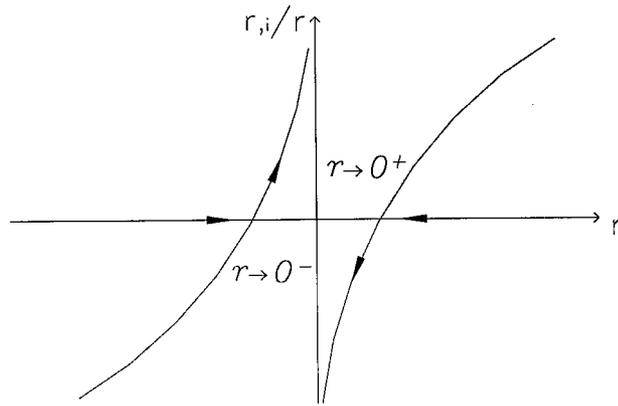


Figura ~6-6:

$$VPC \int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{q(-r_{,i})\phi + q^o r_{,i}^o \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma - VPC \int_{\Gamma_e} \frac{q^o r_{,i}^o \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma \quad (6.171)$$

En la expresión 6.171 encontramos las siguientes integrales,

•

$$\int_{\Gamma_e} \frac{q(-r_{,i})\phi + q^o r_{,i}^o \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma \quad (6.172)$$

en el entorno del nodo de colocación, podemos aproximar el valor de la función $qr_{,i}\phi$ con el primer término de su desarrollo en serie,

$$qr_{,i}\phi = q^o r_{,i}^o \phi^o + TOS \Rightarrow qr_{,i}\phi \simeq q^o r_{,i}^o \phi^o \quad (6.173)$$

la integral A.27 es, por tanto, una integral regular y podemos emplear para su cálculo procedimientos numéricos.

•

$$VPC \int_{\Gamma_e} \frac{q^o r_{,i}^o \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma \quad (6.174)$$

Analizamos la función $\frac{dr}{d\Gamma}$.

En cada punto de Γ_e el vector $d\Gamma$ toma la dirección de la tangente. Si llamamos \mathbf{t} al vector tangente unitario,

$$d\Gamma : (dy_1, dy_2) \Rightarrow \mathbf{t} : \left(\frac{dy_1}{d\Gamma}, \frac{dy_2}{d\Gamma} \right) \quad (6.175)$$

el gradiente de la función r es,

$$\nabla r : (r_{,1}, r_{,2}) = \frac{1}{r} (y_1 - \xi_1, y_2 - \xi_2) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (6.176)$$

el vector normal unitario es,

$$\mathbf{n} : \left(\frac{dy_2}{d\Gamma}, -\frac{dy_1}{d\Gamma} \right) \quad (6.177)$$

aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{dr}{d\Gamma} = \frac{\partial r}{\partial y_1} \frac{dy_1}{d\Gamma} + \frac{\partial r}{\partial y_2} \frac{dy_2}{d\Gamma} = \nabla r \cdot \mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{t} \quad (6.178)$$

de la figura 6-7 deducimos,

$$r \rightarrow 0^+ : \left\{ \begin{array}{l} (y_2 - \xi_2) \rightarrow dy_2 \\ (y_1 - \xi_1) \rightarrow dy_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r} \rightarrow d\Gamma \Rightarrow \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \rightarrow \mathbf{t} \Rightarrow \frac{dr}{d\Gamma} \rightarrow 1 \quad (6.179)$$

$$r \rightarrow 0^- : \left\{ \begin{array}{l} (y_2 - \xi_2) \rightarrow -dy_2 \\ (y_1 - \xi_1) \rightarrow -dy_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{r} \rightarrow -d\Gamma \Rightarrow \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \rightarrow -\mathbf{t} \Rightarrow \frac{dr}{d\Gamma} \rightarrow -1 \quad (6.180)$$

Teniendo en cuenta las componentes del vector normal en el nodo de colocación,

$$\mathbf{n}^o : \left(\sin \alpha_t \quad -\cos \alpha_t \right) \quad (6.181)$$

y las expresiones 6.166 y 6.167, y 6.179 y 6.180, podemos expresar,

$$r \rightarrow 0^+ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_{,1} \rightarrow \cos \alpha_t = \cos \alpha_t \frac{dr}{d\Gamma} = -n_2^o \frac{dr}{d\Gamma} \\ r_{,2} \rightarrow \sin \alpha_t = \sin \alpha_t \frac{dr}{d\Gamma} = n_1^o \frac{dr}{d\Gamma} \end{array} \right. \quad (6.182)$$

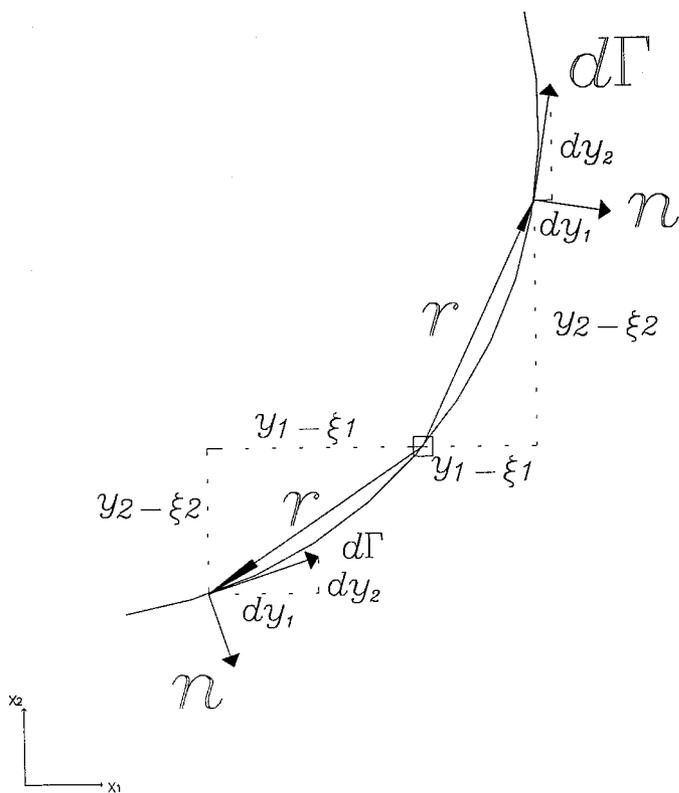


Figura ~6-7:

$$r \rightarrow 0^- \Rightarrow \begin{cases} r_{,1} \rightarrow -\cos \alpha_t = \cos \alpha_t \frac{dr}{d\Gamma} = -n_2^o \frac{dr}{d\Gamma} \\ r_{,2} \rightarrow -\sin \alpha_t = \sin \alpha_t \frac{dr}{d\Gamma} = n_1^o \frac{dr}{d\Gamma} \end{cases} \quad (6.183)$$

concluimos,

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} r_{,1} \rightarrow -n_2^o \frac{dr}{d\Gamma} \\ r_{,2} \rightarrow n_1^o \frac{dr}{d\Gamma} \end{cases} \quad (6.184)$$

y sustituyendo en A.28,

$$VPC \int_{\Gamma_e} \frac{q^o r_{,i}^o \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma = \begin{cases} VPC \int_{\Gamma_e} \frac{q^o (-n_2^o \frac{dr}{d\Gamma}) \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma \\ VPC \int_{\Gamma_e} \frac{q^o (n_1^o \frac{dr}{d\Gamma}) \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma \end{cases} \quad (6.185)$$

Para el cálculo de las integrales 6.185, distinguimos los siguientes casos:

- El nodo de colocación es un punto interior del elemento:

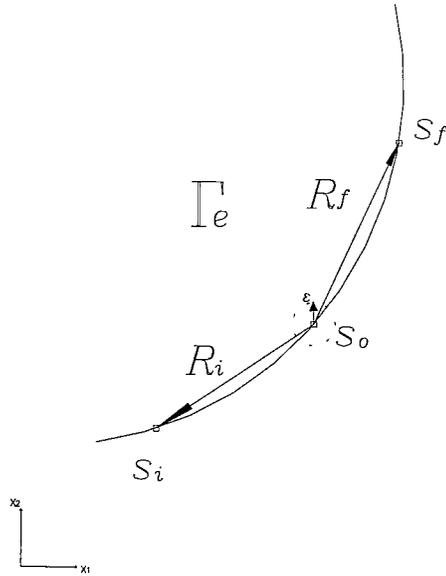


Figura ~6-8:

$$VPC \int_{\Gamma_e} \frac{q^o (\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma = VPC \int_{S_i}^{S_f} \frac{q^o (\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma = \quad (6.186)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_i}^{S_o-\epsilon} \frac{q^o (\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma + \int_{S_o+\epsilon}^{S_f} \frac{q^o (\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma \right\} = \quad (6.187)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^{\epsilon} \frac{q^o (\mp n_i^o) \phi^o}{2\pi\mu r} dr + \int_{\epsilon}^{R_f} \frac{q^o (\mp n_i^o) \phi^o}{2\pi\mu r} dr \right\} = \quad (6.188)$$

$$= \frac{q^o (\mp n_i^o) \phi^o}{2\pi\mu} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^{\epsilon} \frac{dr}{r} + \int_{\epsilon}^{R_f} \frac{dr}{r} \right\} = \frac{q^o (\mp n_i^o) \phi^o}{2\pi\mu} \ln \frac{R_f}{R_i} \quad (6.189)$$

- El nodo de colocación coincide con un nodo extremo del elemento; en este caso calcularemos la integral correspondiente a dos elementos de contorno consecutivos.

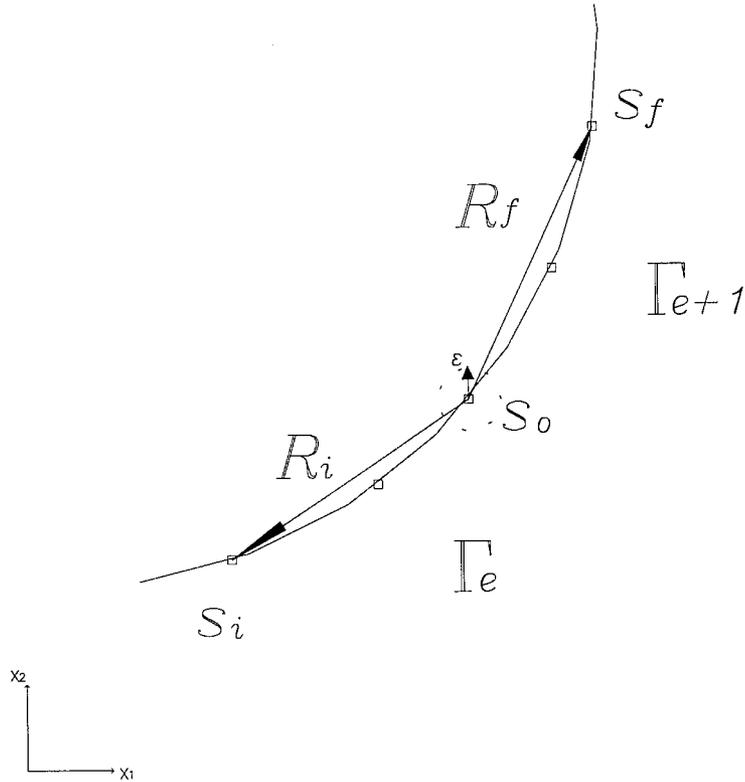


Figura ~6-9:

$$VPC \int_{\Gamma_e + \Gamma_{e+1}} \frac{q^o(\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma = VPC \int_{S_i}^{S_f} \frac{q^o(\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma = \quad (6.190)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_i}^{S_0 - \epsilon} \frac{q^o(\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma \right\} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_0 + \epsilon}^{S_f} \frac{q^o(\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \phi^o}{2\pi\mu r} d\Gamma \right\} = \quad (6.191)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^{\epsilon} \frac{q^o(\mp n_i^o) \phi^o}{2\pi\mu r} dr \right\} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\epsilon}^{R_f} \frac{q^o(\mp n_i^o) \phi^o}{2\pi\mu r} dr \right\} = \quad (6.192)$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{q^o(\mp n_i^o) \phi^o}{2\pi\mu} \int_{R_i}^{\varepsilon} \frac{dr}{r} \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{q^o(\mp n_i^o) \phi^o}{2\pi\mu} \int_{\varepsilon}^{R_f} \frac{dr}{r} \right\} = \quad (6.193)$$

$$= \frac{q^o(\mp n_i^o) \phi^o}{2\pi\mu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{(\ln \varepsilon - \ln R_i) + (\ln R_f - \ln \varepsilon)\} = \quad (6.194)$$

$$\frac{q^o(\mp n_i^o) \phi^o}{2\pi\mu} (\ln R_f - \ln R_i) \quad (6.195)$$

Integral n° 3 (parte dinámica)

$$\int_{\Gamma_e} q \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] \phi d\Gamma \quad (6.196)$$

El integrando presenta un comportamiento regular en el dominio de integración, por lo que, hemos calculado la integral por procedimientos numéricos.

Integral n° 1

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} q \frac{\partial u^*}{\partial y_i} d\Gamma &= \int_{\Gamma_e} q \left\{ \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i} \right)_S + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i} \right)_D \right\} d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_e} q \left\{ \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} + \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] \right\} d\Gamma = \\ &= \int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} d\Gamma + \int_{\Gamma_e} q \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (6.197)$$

Integral n° 1 (parte estática)

$$\int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} d\Gamma \quad (6.198)$$

Igual que en el caso anterior, tomamos,

$$\int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} d\Gamma = VPC \int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} d\Gamma \quad (6.199)$$

Para calcular el valor principal de Cauchy, regularizamos la integral,

$$VPC \int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{q(-r_{,i}) + q^o r_{,i}^o}{2\pi\mu r} d\Gamma - VPC \int_{\Gamma_e} \frac{q^o r_{,i}^o}{2\pi\mu r} d\Gamma \quad (6.200)$$

•

$$\int_{\Gamma_e} \frac{q(-r_{,i}) + q^o r_{,i}^o}{2\pi\mu r} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{q(-r_{,i}) + q^o |r_{,i}^o| \frac{dr}{d\Gamma}}{2\pi\mu r} d\Gamma : \text{procedimientos numéricos.} \quad (6.201)$$

• En el caso de que el nodo de colocación sea un punto interior del elemento,

$$\begin{aligned} VPC \int_{\Gamma_e} \frac{q^o r_{,i}^o}{2\pi\mu r} d\Gamma &= VPC \int_{\Gamma_e} \frac{q^o |r_{,i}^o| \frac{dr}{d\Gamma}}{2\pi\mu r} d\Gamma = VPC \int_{S_i}^{S_f} \frac{q^o |r_{,i}^o| \frac{dr}{d\Gamma}}{2\pi\mu r} d\Gamma = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{S_i}^{S_o-\varepsilon} \frac{q^o |r_{,i}^o| \frac{dr}{d\Gamma}}{2\pi\mu r} d\Gamma + \int_{S_o+\varepsilon}^{S_f} \frac{q^o |r_{,i}^o| \frac{dr}{d\Gamma}}{2\pi\mu r} d\Gamma \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^{\varepsilon} \frac{q^o |r_{,i}^o|}{2\pi\mu r} dr + \int_{\varepsilon}^{R_f} \frac{q^o |r_{,i}^o|}{2\pi\mu r} dr \right\} = \\ &= \frac{q^o |r_{,i}^o|}{2\pi\mu} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^{\varepsilon} \frac{dr}{r} + \int_{\varepsilon}^{R_f} \frac{dr}{r} \right\} = \frac{q^o |r_{,i}^o|}{2\pi\mu} \ln \frac{R_f}{R_i} \end{aligned} \quad (6.202)$$

podemos concluir,

$$VPC \int_{\Gamma_e} q \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{q(-r_{,i}) + q^o |r_{,i}^o| \frac{dr}{d\Gamma}}{2\pi\mu r} d\Gamma - \frac{q^o |r_{,i}^o|}{2\pi\mu} \ln \frac{R_f}{R_i} \quad (6.203)$$

Integral n° 1 (parte dinámica)

$$\int_{\Gamma_e} q \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] d\Gamma \quad (6.204)$$

El integrando presenta un comportamiento regular en el dominio de integración, por lo que hemos calculado la integral por procedimientos numéricos.

Integral n° 6

$$\int_{\Gamma_e} \frac{u\dot{\phi}}{J} \frac{du^*}{dy_i} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{u\dot{\phi}}{J} \left\{ \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i} \right)_S + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y_i} \right)_D \right\} d\Gamma = \quad (6.205)$$

$$= \int_{\Gamma_e} \frac{u\dot{\phi}}{J} \left\{ \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} + \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] \right\} d\Gamma = \quad (6.206)$$

$$= \int_{\Gamma_e} \frac{u\dot{\phi}}{J} \left\{ \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} \right\} d\Gamma + \quad (6.207)$$

$$+ \int_{\Gamma_e} \frac{u\dot{\phi}}{J} \frac{-i\omega r_{,i}}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] d\Gamma = \quad (6.208)$$

Integral n° 6 (parte estática)

$$\int_{\Gamma_e} \frac{u\dot{\phi}}{J} \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} d\Gamma \quad (6.209)$$

Igual que en los casos anteriores, el valor principal de Cauchy de la integral A.44 es convergente. Tomamos,

$$\int_{\Gamma_e} \frac{u\dot{\phi}}{J} \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} d\Gamma = VPC \int_{\Gamma_e} \frac{u\dot{\phi}}{J} \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} d\Gamma \quad (6.210)$$

Regularizamos la integral como se indica en el anexo n° 1,

$$\begin{aligned} VPC \int_{\Gamma_e} \frac{u\dot{\phi}}{J} \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} d\Gamma &= \\ &= \int_{\Gamma_e} \frac{\frac{u\dot{\phi}}{J} (-r_{,i}) + \frac{u^o\dot{\phi}^o}{J^o} |(-r_{,i})^o| \frac{dr}{d\Gamma}}{2\pi\mu r} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} \frac{\frac{u^o\dot{\phi}^o}{J^o} |(-r_{,i})^o| \frac{dr}{d\Gamma}}{2\pi\mu r} d\Gamma = \end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma_e} \frac{\frac{u\dot{\phi}}{J}(-r_{,i}) + \frac{u^o\dot{\phi}^o}{J^o}|(-r_{,i})^o| \frac{dr}{d\Gamma}}{2\pi\mu r} d\Gamma - \frac{u^o\dot{\phi}^o}{2\pi\mu J^o}|(-r_{,i})^o| \int_{\Gamma_e} \frac{dr}{r} \quad (6.211)$$

Calculamos las integrales obtenidas en 6.211,

- $$\int_{\Gamma_e} \frac{\frac{u\dot{\phi}}{J}(-r_{,i}) + \frac{u^o\dot{\phi}^o}{J^o}|(-r_{,i})^o| \frac{dr}{d\Gamma}}{2\pi\mu r} d\Gamma \Rightarrow \text{procedimientos numéricos} \quad (6.212)$$

- En el caso de que el nodo de colocación sea un punto interior del elemento,

$$\frac{u^o\dot{\phi}^o}{2\pi\mu J^o}|(-r_{,i})^o| VPC \int_{\Gamma_e} \frac{dr}{r} = \frac{u^o\dot{\phi}^o}{2\pi\mu J^o}|(-r_{,i})^o| (\ln R_f - \ln R_i) \quad (6.213)$$

podemos concluir,

$$VPC \int_{\Gamma_e} \frac{u\dot{\phi}}{J} \frac{-r_{,i}}{2\pi\mu r} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} \frac{\frac{u\dot{\phi}}{J}(-r_{,i}) + \frac{u^o\dot{\phi}^o}{J^o}|(-r_{,i})^o| \frac{dr}{d\Gamma}}{2\pi\mu r} d\Gamma - \frac{u^o\dot{\phi}^o}{2\pi\mu J^o}|(-r_{,i})^o| \ln \frac{R_f}{R_i} \quad (6.214)$$

Integral n° 6 (parte dinámica)

$$\int_{\Gamma_e} \frac{u\dot{\phi} - i\omega r_{,i}}{J} \frac{1}{2\pi\mu c_2} \left[\frac{z}{2} \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + O(z^2) \right] d\Gamma \quad (6.215)$$

El integrando presenta un comportamiento regular en el dominio de integración, por lo que hemos calculado la integral por procedimientos numéricos.

Integral n° 4

$$\int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_i} \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_e} u \left\{ \left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i} \right)_S + \left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i} \right)_D \right\} \phi d\Gamma = \quad (6.216)$$

$$= \int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} \phi d\Gamma + \quad (6.217)$$

$$+ \int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{w^2}{4\pi c_2^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\pi r} \frac{iw}{c_2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) O(z^2) + \frac{1}{2\pi} \frac{w^2}{c_2^2} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_0(z) \right\} \quad (6.218)$$

Integral n° 4 (parte estática)

$$\int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} \phi d\Gamma \quad (6.219)$$

Analizando la expresiones,

$$r_{,i} = \frac{y_i - \xi_i}{r} \quad (6.220)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \nabla r \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{y_1 - \xi_1}{r}, \frac{y_2 - \xi_2}{r} \right) \cdot (n_1, n_2) = \left(\frac{y_1 - \xi_1}{r} n_1 + \frac{y_2 - \xi_2}{r} n_2 \right) \quad (6.221)$$

deducimos que la función integrando de 6.219 consiste en una combinación lineal de términos de la forma $\frac{1}{r^2}$ y $\frac{1}{r^4}$, por lo que nos encontramos ante una función de comportamiento hipersingular cuando el valor de $r \rightarrow 0$.

Para facilitar el cálculo de la integral hipersingular 6.219, mediante la consideración de su parte finita, tal como se expone en el anexo n° 1, nos aseguramos de que las funciones hipersingulares están multiplicadas por una función continua y con derivada continua.

Para garantizar la continuidad en el elemento de integración de las funciones de forma y de sus derivadas, así como de la función potencial u , obtenida por interpolación de los valores nodales, utilizaremos elementos de contorno *no conformes*, definidos en el capítulo 4, como aquellos en los que *odos de colocación* y *odos de interpolación* son desplazados cuando coinciden con nodos extremos del elemento, tal como se indica en la figura 6-10.

Procedemos a la regularización de cada una de las partes de la integral 6.219,

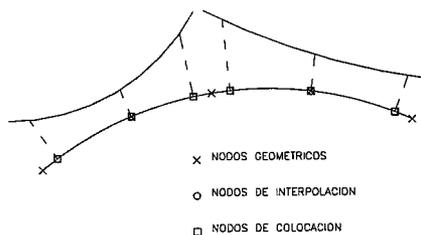


Figura 6-10:

$$\int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} \phi d\Gamma = \frac{-1}{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{n_i}{r^2} \phi d\Gamma - \int_{\Gamma_e} 2u \frac{r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \phi d\Gamma \right\} \quad (6.222)$$

$$\int_{\Gamma_e} u \frac{n_i}{r^2} \phi d\Gamma \quad (6.223)$$

Consideramos el desarrollo en serie de la función n_i ,

$$\mathbf{n} : (n_i); \quad n_i = (n_i)_{S=S^0} + \left(\frac{dn_i}{ds} \right)_{S=S^0} \Delta S + TOS \quad (6.224)$$

teniendo en cuenta,

$$\left(\frac{dn_1}{ds} \right)_{S=S^0} = \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{dy_2}{ds} \right) \right)_{S=S^0} = \left(\frac{d^2 y_2}{ds^2} \right)_{S=S^0} \quad (6.225)$$

$$\left(\frac{dn_2}{ds} \right)_{S=S^0} = \left(\frac{d}{ds} \left(-\frac{dy_1}{ds} \right) \right)_{S=S^0} = - \left(\frac{d^2 y_1}{ds^2} \right)_{S=S^0} \quad (6.226)$$

y teniendo en cuenta las expresiones de y_i y J en función de la coordenada natural ζ ,

$$y_i(\zeta) = \phi_1(\zeta) y_i^{(1)} + \phi_2(\zeta) y_i^{(2)} + \phi_3(\zeta) y_i^{(3)} \quad (6.227)$$

$$J(\zeta) = \frac{ds}{d\zeta} \quad (6.228)$$

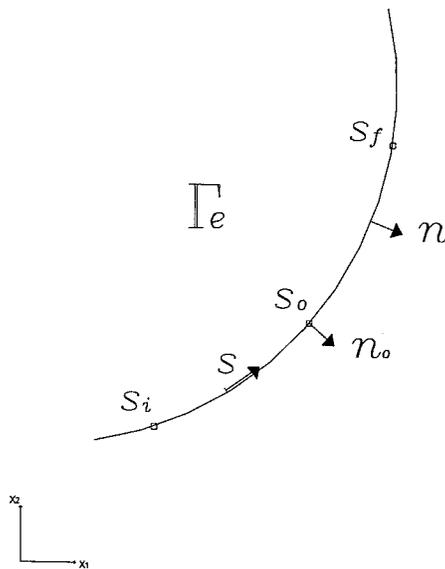


Figura ~6-11:

deducimos,

$$\frac{d^2 y_i}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dy_i}{ds} \right) = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dy_i}{ds} \right) \frac{d\zeta}{ds} = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dy_i}{ds} \right) \frac{1}{J} \quad (6.229)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dy_i}{ds} \right) = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{dy_i}{d\zeta} \frac{1}{J} \right) = \left(\frac{d^2 y_i}{d\zeta^2} J - \frac{dy_i}{d\zeta} \dot{J} \right) \frac{1}{J^2} \quad (6.230)$$

$$\frac{d^2 y_i}{ds^2} = \left(\frac{d^2 y_i}{d\zeta^2} J - \frac{dy_i}{d\zeta} \dot{J} \right) \frac{1}{J^3} = \frac{\ddot{y}_i J - \dot{y}_i \dot{J}}{J^3} \quad (6.231)$$

por lo tanto podemos expresar,

$$\left(\frac{dn_1}{ds} \right)_{s=S_o} = \left(\frac{\ddot{y}_2 J - \dot{y}_2 \dot{J}}{J^3} \right)_{s=S_o} \quad (6.232)$$

$$\left(\frac{dn_2}{ds} \right)_{s=S_o} = - \left(\frac{\ddot{y}_1 J - \dot{y}_1 \dot{J}}{J^3} \right)_{s=S_o} \quad (6.233)$$

De la figura6-11 podemos deducir,

$$\Delta s = s - s_o \Rightarrow |\Delta s| \simeq r \Rightarrow \Delta s \simeq r \frac{dr}{d\Gamma} \quad (6.234)$$

Considerando el desarrollo en serie de la función $un_i\phi(s)$,

$$un_i\phi = u^o(n_i)^o\phi^o + \left((un_i\phi)'\right)^o \Delta S + TOS \quad (6.235)$$

procedemos a la regularización de la integral 6.223,

$$\int_{\Gamma_e} \frac{un_i\phi}{r^2} d\Gamma = \quad (6.236)$$

$$= \int_{\Gamma_e} \frac{un_i\phi - u^o(n_i)^o\phi^o \left|\frac{dr}{d\Gamma}\right| - \left((un_i\phi)'\right)^o r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma + \quad (6.237)$$

$$+ \int_{\Gamma_e} \frac{u^o(n_i)^o\phi^o \left|\frac{dr}{d\Gamma}\right|}{r^2} d\Gamma \quad (6.238)$$

$$+ \int_{\Gamma_e} \frac{\left((un_i\phi)'\right)^o r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma \quad (6.239)$$

Calculamos las integrales obtenidas,

$$\int_{\Gamma_e} \frac{un_i\phi - u^o(n_i)^o\phi^o \left|\frac{dr}{d\Gamma}\right| - \left((un_i\phi)'\right)^o r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma \quad (6.240)$$

en el entorno del nodo de colocación, podemos aproximar el valor de la función $un_i\phi$ con los dos primeros términos de su desarrollo en serie,

$$un_i\phi \simeq u^o(n_i)^o\phi^o + \left((un_i\phi)'\right)^o \Delta S = u^o(n_i)^o\phi^o \left|\frac{dr}{d\Gamma}\right| + \left((un_i\phi)'\right)^o r \frac{dr}{d\Gamma} \quad (6.241)$$

la integral 6.241 es, por tanto, una integral regular y podemos emplear para su cálculo procedimientos numéricos.

- Considerando que el nodo de colocación es un punto interior del elemento de integración,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_e} \frac{u^o(n_i)^o \phi^o \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right|}{r^2} d\Gamma &= pf \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_e - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \frac{u^o(n_i)^o \phi^o \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right|}{r^2} d\Gamma \right\} \right) = \\
&= pf \left(u^o(n_i)^o \phi^o \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{s_i}^{s_o - \varepsilon} (-1) \frac{dr}{r^2} + \int_{s_o + \varepsilon}^{s_f} \frac{dr}{r^2} \right\} \right) = \\
&= u^o(n_i)^o \phi^o pf \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^{\varepsilon} \frac{-dr}{r^2} + \int_{\varepsilon}^{R_f} \frac{dr}{r^2} \right\} \right) = \\
&= u^o(n_i)^o \phi^o pf \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f} + \frac{1}{\varepsilon} \right\} \right) = \\
&= -u^o(n_i)^o \phi^o \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_f} \right) \tag{6.242}
\end{aligned}$$

- Considerando que el nodo de colocación es un punto interior del elemento de integración,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_e} \frac{\left((un_i\phi)' \right)^o \frac{dr}{d\Gamma}}{r} d\Gamma &= VPC \int_{\Gamma_e} \frac{\left((un_i\phi)' \right)^o \frac{dr}{d\Gamma}}{r} d\Gamma \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_e - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \frac{\left((un_i\phi)' \right)^o \frac{dr}{d\Gamma}}{r} d\Gamma \right\} = \\
&= \left((un_i\phi)' \right)^o \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^{\varepsilon} \frac{dr}{r} + \int_{\varepsilon}^{R_f} \frac{dr}{r} \right\} = \\
&= \left((un_i\phi)' \right)^o \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \ln \varepsilon - \ln R_i + \ln R_f - \ln \varepsilon \} = \\
&= \left((un_i\phi)' \right)^o (\ln R_f - \ln R_i) \tag{6.243}
\end{aligned}$$

•

$$\int_{\Gamma_e} 2u \frac{r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \phi d\Gamma \tag{6.244}$$

podemos expresar,

$$\int_{\Gamma_e} 2u \frac{r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \phi d\Gamma = \int_{\Gamma_e} 2u \frac{r_{,i}}{r} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi d\Gamma \quad (6.245)$$

Consideremos el desarrollo en serie de la función $ur_{,i} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi$,

$$ur_{,i} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi = u^o(r_{,i})^o \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o \phi^o + TOS \quad (6.246)$$

teniendo en cuenta la expresión 6.184, podemos expresar,

$$ur_{,j} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi \simeq u^o(\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o \phi^o \quad (6.247)$$

siendo,

$$\begin{aligned} j = 1 &\Rightarrow i = 2 \\ j = 2 &\Rightarrow i = 1 \end{aligned} \quad (6.248)$$

Regularizamos la integral 6.244 utilizando el primer término de su desarrollo en serie, según se expone en el anexo nº 1,

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_e} 2u \frac{r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \phi d\Gamma = \quad (6.249) \\ &= 2 \left\{ \int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,j} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi - u_o(\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o \phi_o}{r} d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \frac{u_o(\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o \phi_o}{r} d\Gamma \right\} = \\ &= 2 \left\{ \int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,j} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi - u_o(\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o \phi_o}{r} d\Gamma + u_o(\mp n_i^o) \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o \phi_o \int_{R_i}^{R_f} \frac{dr}{r} \right\} = \\ &= 2 \left\{ \int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,j} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) \phi - u_o(\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o \phi_o}{r} d\Gamma + u_o(\mp n_i^o) \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o \phi_o \ln \left(\frac{R_f}{R_i} \right) \right\} \quad (6.250) \end{aligned}$$

Cálculo de las expresiones obtenidas en 6.250,

$$\int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,j} \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \phi - u_o (\mp n_i^o) \left(\frac{dr}{d\Gamma} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right)_o \phi_o}{r} d\Gamma \quad (6.251)$$

en el entorno del nodo de colocación, podemos aproximar el valor de la función $ur_{,j} \left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \phi$ con el primer término de su desarrollo en serie, tal como se indica en la expresión 6.247; la integral 6.251 es por tanto una integral regular y podemos emplear para su cálculo procedimientos numéricos.

- Cálculo de la expresión,

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right)_o \quad (6.252)$$

estableciendo el origen del sistema de referencia en el nodo de colocación, podemos expresar,

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \nabla r \cdot \mathbf{n} = r_{,i} n_i = \frac{x_1}{r} n_1 + \frac{x_2}{r} n_2 = \frac{x_1}{r} \frac{dx_2}{ds} - \frac{x_2}{r} \frac{dx_1}{ds} \quad (6.253)$$

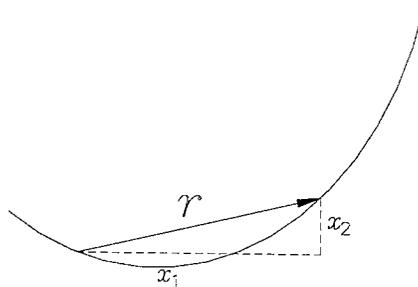


Figura ~6-12:

como se aprecia en la figura 6-12,

$$r \rightarrow 0^+ \Rightarrow \Delta s = r \quad (6.254)$$

$$r \rightarrow 0^- \Rightarrow \Delta s = -r \quad (6.255)$$

consideramos el desarrollo en serie de las funciones $x_i(s)$,

$$x_1(s) = x_1(s_o) + \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o \Delta s + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^o \Delta s^2 + TOS \quad (6.256)$$

$$x_2(s) = x_2(s_o) + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o \Delta s + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^o \Delta s^2 + TOS \quad (6.257)$$

teniendo en cuenta que $x_i(s_o) = 0$, y considerando $\Delta s = r$ (se obtienen iguales conclusiones considerando $\Delta s = -r$),

$$\frac{x_1}{r} \simeq \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^o r \quad (6.258)$$

$$\frac{x_2}{r} \simeq \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^o r \quad (6.259)$$

consideramos el desarrollo en serie de las funciones $\frac{dx_i}{ds}(s)$,

$$\frac{dx_1}{ds}(s) = \frac{dx_1}{ds}(s^o) + TOS \simeq \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o \quad (6.260)$$

$$\frac{dx_2}{ds}(s) = \frac{dx_2}{ds}(s^o) + TOS \simeq \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o \quad (6.261)$$

multiplicando las expresiones, 6.258 por 6.261 y 6.259 por 6.260,

$$\frac{x_1}{r} \frac{dx_2}{ds} \simeq \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^o \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o r \quad (6.262)$$

$$\frac{x_2}{r} \frac{dx_1}{ds} \simeq \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o + \frac{1}{2} \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^o \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o r \quad (6.263)$$

restando las expresiones 6.262 y 6.263,

$$\frac{x_1}{r} \frac{dx_2}{ds} - \frac{x_2}{r} \frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^o \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^o r - \frac{1}{2} \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^o \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^o r \quad (6.264)$$

considerando la expresión 6.253,

$$\left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r}\right)^{\circ} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^{\circ} \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^{\circ} - \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^{\circ} \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^{\circ} \right] \quad (6.265)$$

teniendo en cuenta las expresiones de n_i ,

$$\left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r}\right)^{\circ} = \frac{1}{2} \left[n_1^{\circ} \left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^{\circ} + n_2^{\circ} \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^{\circ} \right] \quad (6.266)$$

Integral n° 4 (parte dinámica)

$$\int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{w^2}{4\pi c_2^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\pi r} \frac{iw}{c_2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) O(z^2) + \frac{1}{2\pi} \frac{w^2}{c_2^2} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_0(z) \right\} \phi d \quad (6.267)$$

El integrando presenta un comportamiento regular en el dominio de integración, por lo que hemos calculado la integral por procedimientos numéricos.

Integral n° 2

$$\int_{\Gamma_e} u \frac{\partial q^*}{\partial y_i} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} u \left\{ \left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i}\right)_S + \left(\frac{\partial q^*}{\partial y_i}\right)_D \right\} d\Gamma =$$

$$= \int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{w^2}{4\pi c_2^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\pi r} \frac{iw}{c_2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) O(z^2) + \frac{1}{2\pi} \frac{w^2}{c_2^2} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_0(z) \right\} \quad (6.268)$$

Integral n° 2 (parte estática)

$$\int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} d\Gamma \quad (6.269)$$

planteamos igual que en el caso anterior,



$$\int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{-1}{2\pi r^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \right\} d\Gamma = \frac{-1}{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma_e} u \frac{n_i}{r^2} d\Gamma - \int_{\Gamma_e} 2u \frac{r_{,i}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \right\} \quad (6.270)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \frac{un_i}{r^2} d\Gamma &= \\ &= \int_{\Gamma_e} \frac{un_i - u^o(n_i)^o \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| - \left((un_i)' \right)^o r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_e} \frac{u^o(n_i)^o \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right|}{r^2} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_e} \frac{\left((un_i)' \right)^o r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma \end{aligned} \quad (6.271)$$

Calculamos las integrales obtenidas:

$$\int_{\Gamma_e} \frac{un_i - u^o(n_i)^o \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right| - \left((un_i)' \right)^o r \frac{dr}{d\Gamma}}{r^2} d\Gamma : \text{procedimientos numéricos} \quad (6.272)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \frac{u^o(n_i)^o \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right|}{r^2} d\Gamma &= pf \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_e - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \frac{u^o(n_i)^o \left| \frac{dr}{d\Gamma} \right|}{r^2} d\Gamma \right\} \right) = \\ &= pf \left(u^o(n_i)^o \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{s_i}^{s_o - \varepsilon} (-1) \frac{dr}{r^2} + \int_{s_o + \varepsilon}^{s_f} \frac{dr}{r^2} \right\} \right) = \\ &= u^o(n_i)^o pf \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^{\varepsilon} \frac{-dr}{r^2} + \int_{\varepsilon}^{R_f} \frac{dr}{r^2} \right\} \right) = \\ &= u^o(n_i)^o pf \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_f} + \frac{1}{\varepsilon} \right\} \right) = \\ &= -u^o(n_i)^o \left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_f} \right) \end{aligned} \quad (6.273)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_e} \frac{\left((un_i)'\right)^o \frac{dr}{d\Gamma}}{r} d\Gamma &= VPC \int_{\Gamma_e} \frac{\left((un_i)'\right)^o \frac{dr}{d\Gamma}}{r} d\Gamma \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_e - S_\varepsilon + \Gamma_e} \frac{\left((un_i)'\right)^o \frac{dr}{d\Gamma}}{r} d\Gamma \right\} = \\
&= \left((un_i)'\right)^o \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{R_i}^{\varepsilon} \frac{dr}{r} + \int_{\varepsilon}^{R_f} \frac{dr}{r} \right\} = \\
&= \left((un_i)'\right)^o \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \ln \varepsilon - \ln R_i + \ln R_f - \ln \varepsilon \} = \\
&= \left((un_i)'\right)^o (\ln R_f - \ln R_i) \tag{6.274}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_e} 2u \frac{r_{,j}}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Gamma_e} 2u \frac{r_{,j}}{r} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) d\Gamma = \\
&= 2 \left\{ \int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,j} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) - u^o (\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o}{r} d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \frac{u^o (\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o}{r} d\Gamma \right\} = \\
&= 2 \left\{ \int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,j} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) - u^o (\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o}{r} d\Gamma + u^o (\mp n_i^o) \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o \int_{R_i}^{R_f} \frac{dr}{r} \right\} = \\
&= 2 \left\{ \int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,j} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) - u^o (\mp n_i^o) \frac{dr}{d\Gamma} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o}{r} d\Gamma + u^o (\mp n_i^o) \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o \ln \left(\frac{R_f}{R_i} \right) \right\} \tag{6.275}
\end{aligned}$$

Calculamos las integrales obtenidas en 6.275 como indicábamos en el apartado anterior,

$$\int_{\Gamma_e} \frac{ur_{,j} \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right) - u^o (\mp n_i^o) \left(\frac{dr}{d\Gamma} \right) \left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r} \right)^o}{r} d\Gamma : \text{procedimientos numéricos} \tag{6.276}$$

- Tomaremos,

$$\left(\frac{\partial r / \partial \mathbf{n}}{r}\right)^o = \frac{1}{2} \left[n_1^o \left(\frac{dx_1^2}{ds^2}\right)^o + n_2^o \left(\frac{dx_2^2}{ds^2}\right)^o \right] \quad (6.277)$$

Integral n° 2 (parte dinámica)

$$\int_{\Gamma_e} u \left\{ \frac{w^2}{4\pi c_2^2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\pi r} \frac{iw}{c_2} \left(n_i - 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \right) O(z^2) + \frac{1}{2\pi} \frac{w^2}{c_2^2} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} K_0(z) \right\} d\Gamma \quad (6.278)$$

El integrando presenta un comportamiento regular en el dominio de integración, por lo que hemos calculado la integral por procedimientos numéricos.

Integral n° 5

$$\int_{\Gamma_e} q^* \frac{\partial u}{\partial y_i} \phi d\Gamma \quad (6.279)$$

El integrando presenta un comportamiento regular en el dominio de integración, por lo que hemos calculado la integral por procedimientos numéricos, sin necesidad de descomponer la función en parte estática y parte dinámica.

Capítulo 7

Aplicaciones numéricas

7.1 Introducción

La resolución del sistema lineal de ecuaciones obtenido en el capítulo seis, nos permite calcular valores de las variables geométricas establecidas para la resolución del problema inverso, que aproximan la geometría y posición del contorno variable Γ_V , a la geometría y posición del contorno real del hueco, Γ_H . Mediante un proceso iterativo, en sucesivas resoluciones del sistema de ecuaciones para geometrías del contorno variable cada vez más próximas al contorno real, podemos conseguir la coincidencia de ambas, quedando resuelto de esta forma, el problema inverso de identificación.

Hemos elaborado un programa informático en lenguaje Fortran, que, para las sucesivas geometrías del contorno variable, resuelve el sistema de ecuaciones obtenido, calculando el valor de las variables geométricas, y obteniendo una nueva geometría y posición del contorno variable más próximas a la real.

El programa informático incluye las subrutinas necesarias para realizar el cálculo de las integrales en el contorno, previamente aproximado mediante elementos cuadráticos; en los casos de regularidad mediante procedimientos numéricos, y en los casos de singularidad, según los procedimientos de regularización expuestos en el capítulo siete.

Incluimos en el presente capítulo los resultados de un total de quince aplicaciones numéricas de nuestro programa informático. En todas ellas se resuelve el problema inverso de identificación en dominios bidimensionales, bien sometidos a estados elastostáticos antiplanos, bien sobre los

que se ha planteado un problema de potencial.

En todas ellas el problema inverso de identificación ha sido resuelto, determinando la geometría y posición inicialmente desconocidas de un hueco existente en el dominio, lo que nos permite concluir la bondad del algoritmo teórico propuesto en la presente tesis.

7.2 Aplicaciones numéricas

En cada aplicación numérica hemos resuelto previamente el problema directo, es decir, hemos calculado, considerando la geometría real del dominio, el potencial o el flujo de potencial en los nodos del contorno cuando no son conocidos como condiciones de contorno, mediante aplicación del método de los elementos de contorno.

Posteriormente, considerando una geometría y posición supuestas para el contorno del hueco, y tomando el número necesario de valores resultantes del problema directo en concepto de mediciones experimentales, hemos aplicado nuestro programa informático para la resolución del problema inverso de identificación.

En el presente apartado comentamos los resultados obtenidos.

7.2.1 Función residuo.

Para conocer la evolución del proceso iterativo, hemos definido la *función residuo*, como la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores nodales de tensión o desplazamiento tomados como medición experimental, y los valores nodales de tensión o desplazamiento calculados en la resolución del problema directo en cada una de las iteraciones,

$$res = \sum_{i=1}^{i=M} (x_{exp} - x_{iter})^2$$

siendo,

$i = 1 \dots M$ nodos con medición experimental

x_{exp} : valor experimental de tensión o desplazamiento

x_{iter} : valor calculado de tensión o desplazamiento en cada iteración

La función residuo cuantifica en cada iteración la mayor o menor proximidad de las geometrías supuesta y real del hueco, siendo igual a cero cuando ambas coinciden.

El desarrollo teórico incluido en la presente tesis, no incluye la aplicación de procedimientos de minimización a la función residuo, aunque sus valores se hagan mínimos.

7.2.2 Aplicaciones numéricas 01-05.

Las aplicaciones referenciadas como 01, 02, 03, 04 y 05, resuelven el problema inverso de identificación planteado en un estado elastoestático antiplano. El dominio de definición es una placa cuadrada de dimensiones 6×6 , con un hueco centrado de dimensiones 2×2 , de un material cuyo módulo de elasticidad transversal es,

$$G = 0.1E8 \left(\frac{\text{ud. fuerza}}{\text{ud. superficie}} \right)$$

sometida a condiciones de contorno consistentes en desplazamientos uniformes y opuestos en dos de sus laterales, tal como se indica en la figura 7-1,

Para la resolución del problema inverso, hemos considerado una posición y geometría supuestas para el hueco; en estos primeros ejemplos, la posición y geometría supuestas son próximas a la real; y hemos impuesto variables geométricas elementales, desplazamiento, rotación, dilatación... de tal forma que el número de grados de libertad en la evolución geométrica del hueco es igual a uno. Hemos considerado en cada caso el número mínimo de mediciones experimentales necesario para la convergencia de la solución, tomando los valores de tensiones y desplazamientos obtenidos en el problema directo.

La aplicación de nuestro programa, ha determinado en cada caso, después de un número reducido de iteraciones, la posición y geometría real del hueco.

En la aplicación referenciada como 04, aunque la solución es convergente, el número de iteraciones necesarias es elevado; ello se debe al reducido valor de la función residuo para la configuración inicial, y para todas las posibles configuraciones iterativas, debido a su proximidad con la configuración real y al tipo de evolución geométrica impuesta.

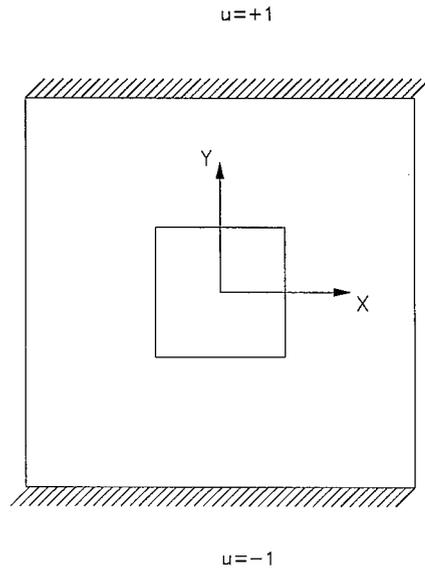


Figura 7-1:

Se pone de manifiesto una menor eficacia de nuestro método cuando los valores de la función residuo son muy pequeños; es decir cuando las configuraciones supuesta y real están son ya prácticamente coincidentes.

7.2.3 Aplicaciones M1, M2, M3.

Las aplicaciones referenciadas como M1, M2 y M3, reproducen los ejemplos de resolución del problema inverso publicados en la referencia bibliográfica [1]; consisten en un dominio bidimensional 2×2 , sobre el que se plantea un problema de potencial, siendo las condiciones de contorno las indicadas en la figura 7-2. El dominio tiene un hueco cuya posición y geometría se desconoce.

El autor de la publicación resuelve el problema inverso de identificación mediante la minimización de un funcional por el algoritmo de Levenberg-Marquadt.

En la aplicación referenciada como M1, la geometría real del hueco es elíptica, de semiejes $a = 0,05$ y $b = 0,025$, estando el semieje mayor alineado con el eje X ; su posición es centrada, tal como se indica en la figura 7-3. Se adopta como geometría supuesta la de un círculo centrado de radio igual a $0,1$.

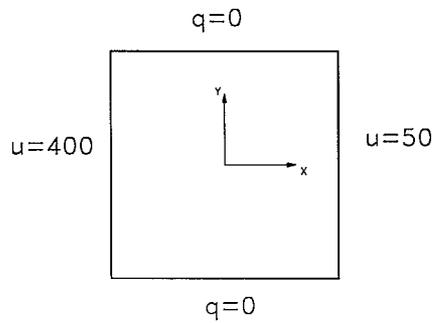


Figura ~7-2:

Al igual que en la publicación de Mitra, se ha resuelto el problema inverso tomando un número de mediciones experimentales, $M = 8, 10$ y 12 , utilizando en la aproximación del contorno un número de elementos igual a 24 .

Indicamos a continuación los resultados obtenidos por Mitra, junto con los resultados obtenidos en la presente tesis.

- Resultados obtenidos por Mitra:

Nº MED. EXPERIMENTALES	Nº ITERACIONES	% ERROR SEMIEJE a	% ERROR SEMIEJE b
8	81	0.1	0.04
10	83	0.1	0.04
12	83	0.1	0.04

- Resultados obtenidos en la presente tesis:

Nº MED. EXPERIMENTALES	Nº ITERACIONES	SEMIEJE a	SEMIEJE b
8	4	0.0275	0.0318
10	5	0.0433	0.0267
12	5	0.0471	0.0258

Podemos concluir que el algoritmo teórico propuesto en la presente tesis consigue la con-

vergencia de la solución del problema inverso en un número de iteraciones muy inferior al necesitado por Mitra para minimizar su funcional. Igualmente podemos observar, que en casos de gran proximidad entre las configuraciones supuesta y real, es decir, de valores reducidos de la función residuo, la precisión de los resultados obtenidos por Mitra es mayor que la precisión de los resultados obtenidos en la presente tesis.

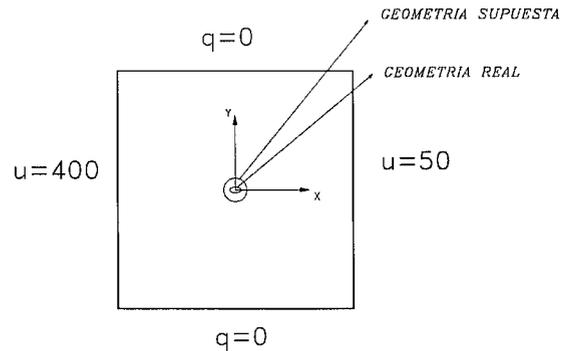


Figura ~7-3:

Las aplicaciones referenciadas como M2 y M3, suponen como geometría real del hueco el polígono irregular de ocho lados indicado en la figura 7-4, siendo las coordenadas de sus vértices las siguientes,

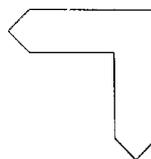


Figura ~7-4:

0.533	0.533	0.433	0.433
0.533	0.233	0.233	0.433
0.483	0.183	0.183	0.483
0.433	0.233	0.233	0.533

La aplicación referenciada como M2, adopta como geometría supuesta del hueco, una geometría idéntica a la real, pero partiendo de dos posiciones distintas en el dominio, tal como se indica en la figura 7-5. En ambos casos, referencias M2a y M2b, la convergencia del método es total, consiguiendo después de un número de iteraciones alcanzar la posición real del hueco, haciendo igual a cero el valor de la función residuo.

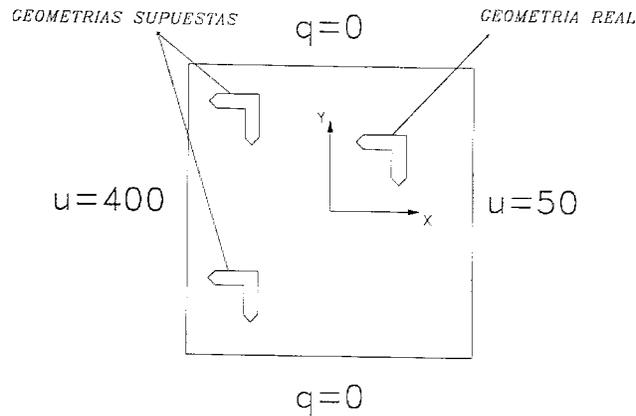


Figura 7-5:

En la aplicación referenciada como M3, hemos tomado como geometría supuesta del hueco un círculo centrado en el origen de radio igual a 0,1. Hemos resuelto el problema inverso imponiendo evoluciones geométricas con un número creciente de grados de libertad, desde el desplazamiento plano (n^o grados de libertad igual a 2), hasta la deformación total (número de grados de libertad igual a seis). En todos los casos, el método de resolución converge hacia una geometría y posición del contorno variable, lo más próxima posible, compatible con las variables geométricas impuestas, a la solución real, haciendo prácticamente nulo el valor de la función residuo.

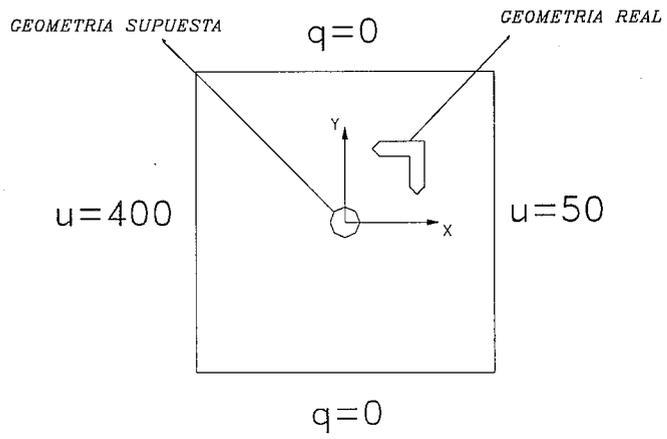


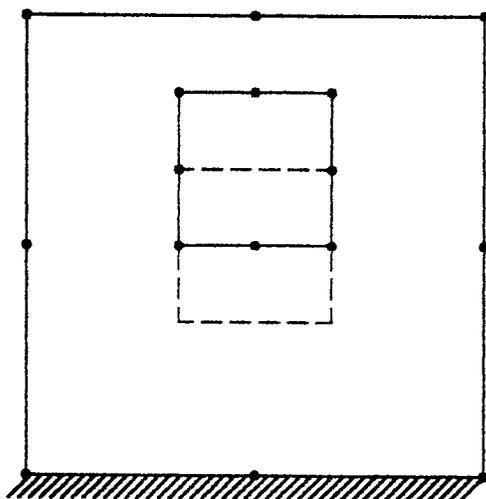
Figura 7-6:

$p7=0.324E7$

$p6=0.234E7$

$p5=0.324E7$

$u6=0.9992362$



$u=-1$

APLICACION N°: 01

NUMERO DE ELEMENTOS: 8

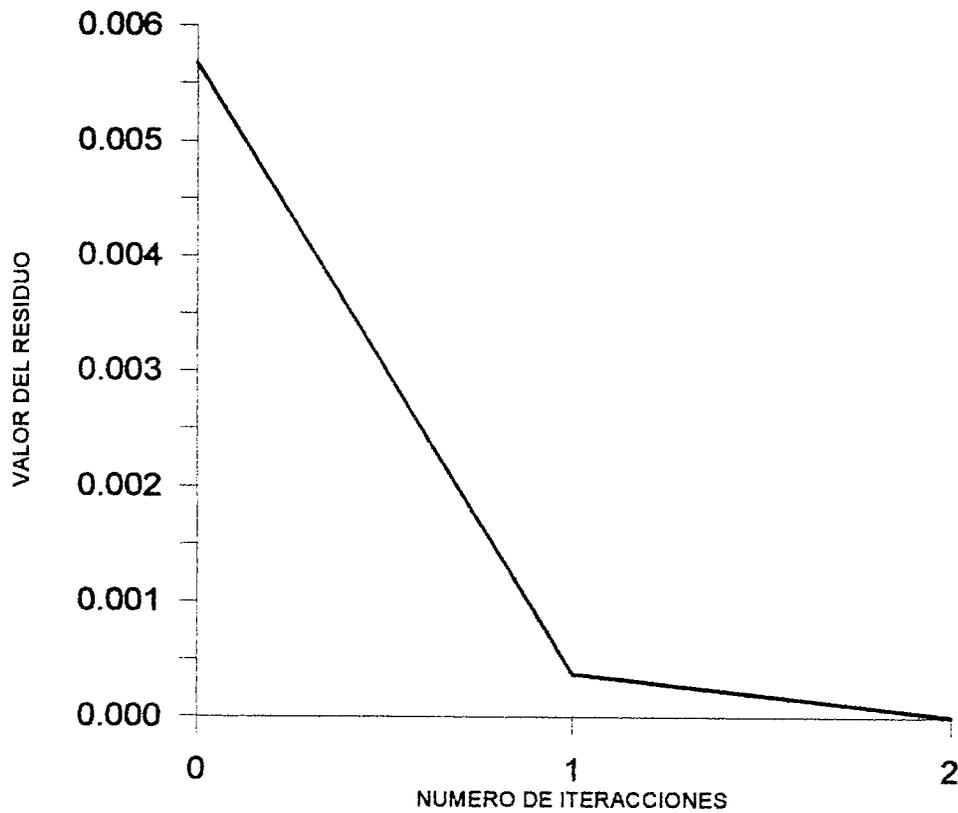
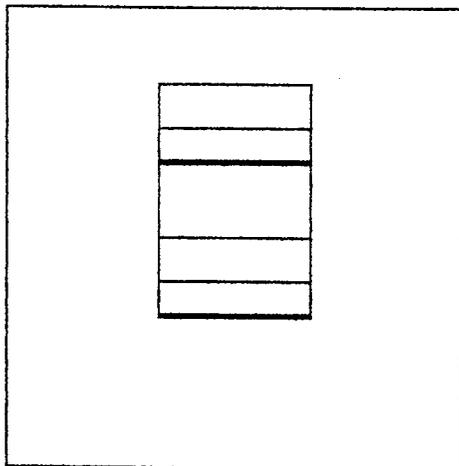
NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 1

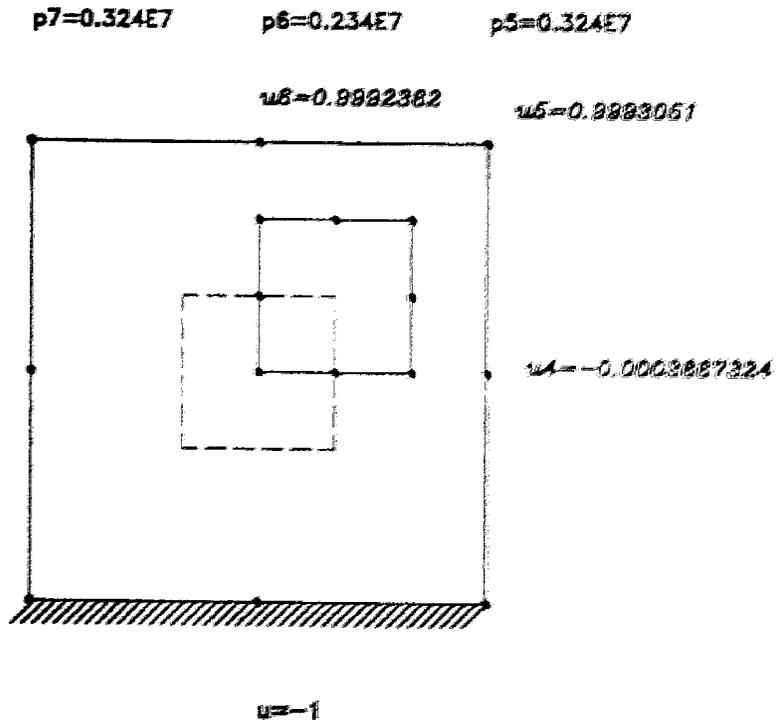
FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

VARIABLES GEOMETRICAS: u_2

CRITERIO DE PARADA: valor límite función residuo

APLICACION N°: 01
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE





APLICACION N°: 02

NUMERO DE ELEMENTOS: 8

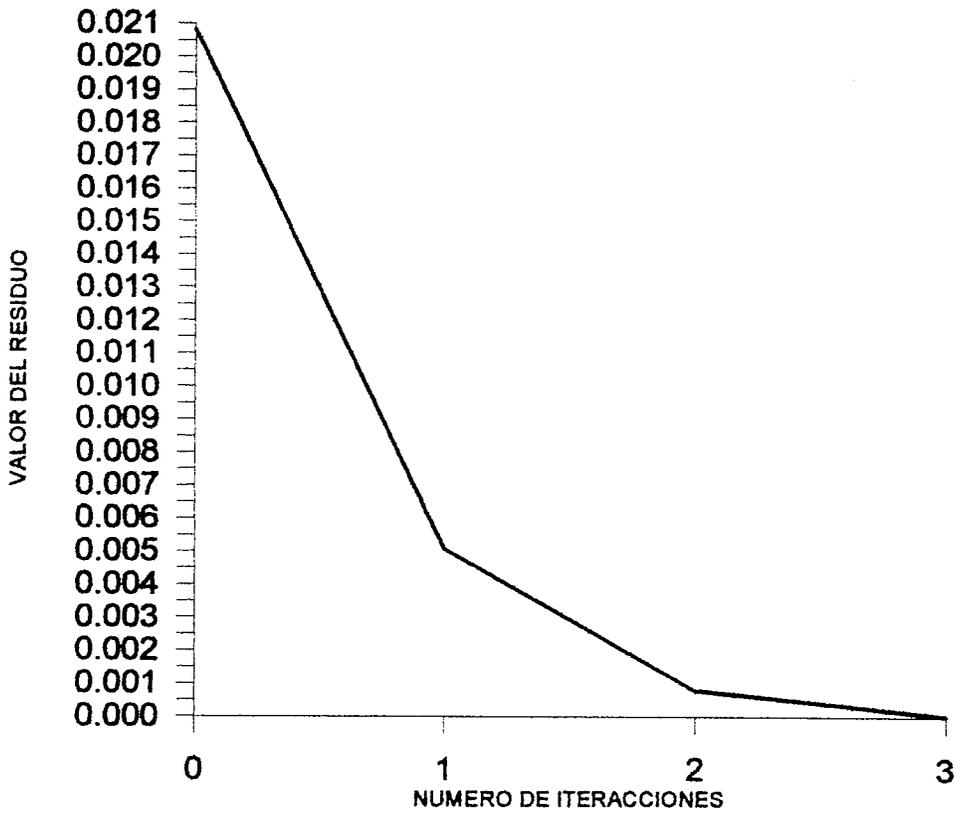
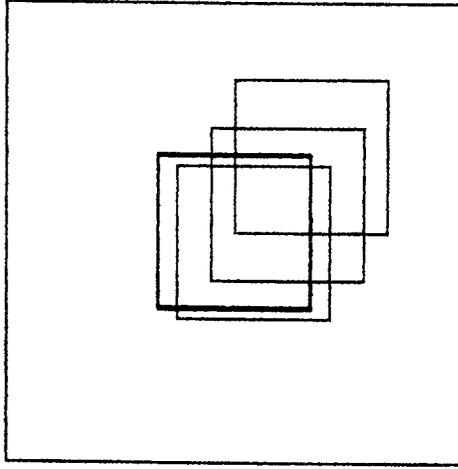
NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 3

FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

VARIABLES GEOMETRICAS: $u1, u2$

CRITERIO DE PARADA: valor límite función residuo

APLICACION N°: 02
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE



$p7=0.324E7$

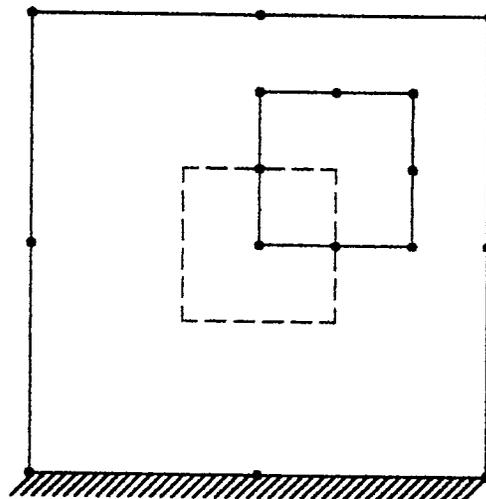
$p6=0.234E7$

$p5=0.324E7$

$u7=0.9993053$

$u6=0.9992362$

$u5=0.9993051$



APLICACION N°: 03

NUMERO DE ELEMENTOS: 8

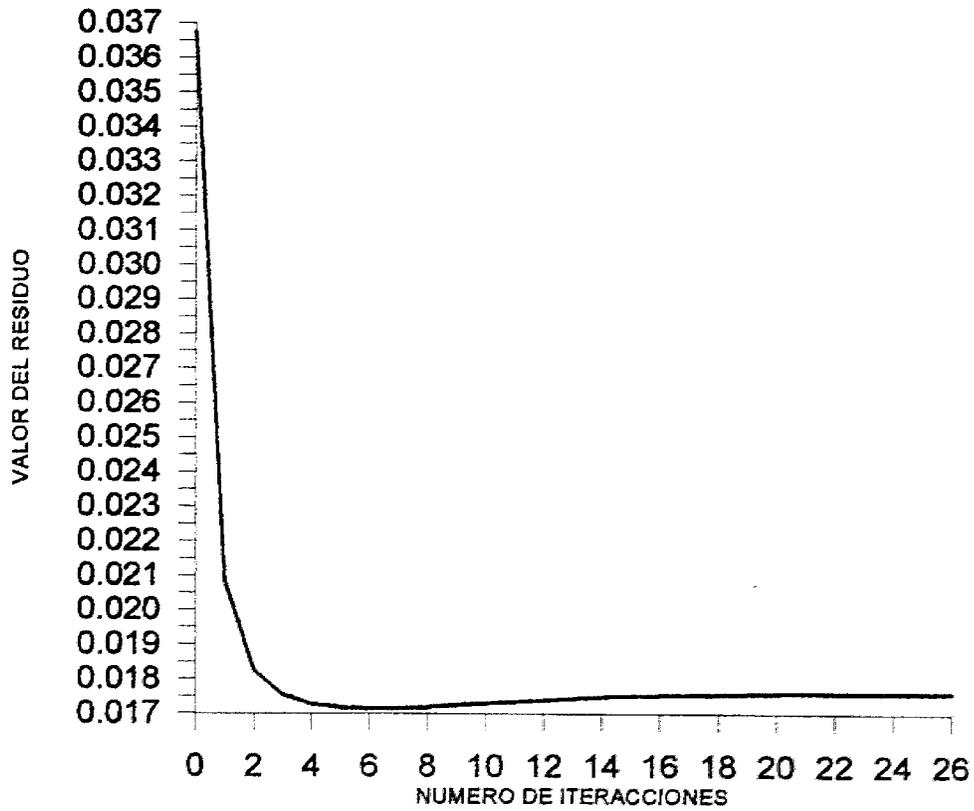
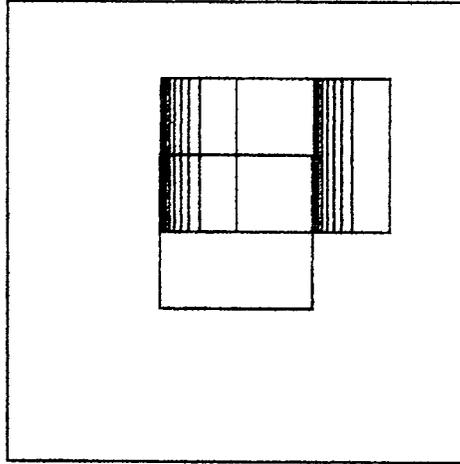
NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 3

FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

VARIABLES GEOMETRICAS: $u1$

CRITERIO DE PARADA: valor limite función residuo

APLICACION N°: 03
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE



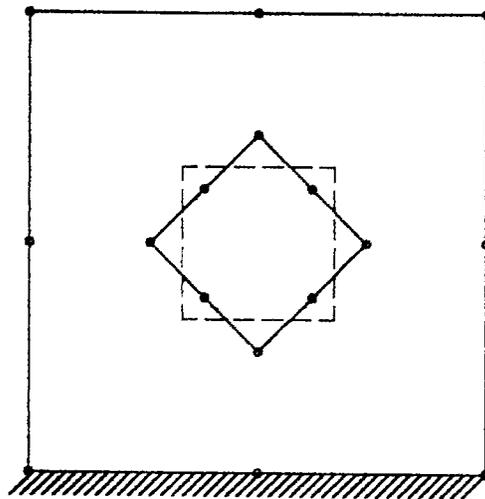
$p7=0.324E7$

$p6=0.234E7$

$p5=0.324E7$

$u6=0.9992362$

$u5=0.9993051$



$u=-1$

APLICACION N°: 04

NUMERO DE ELEMENTOS: 8

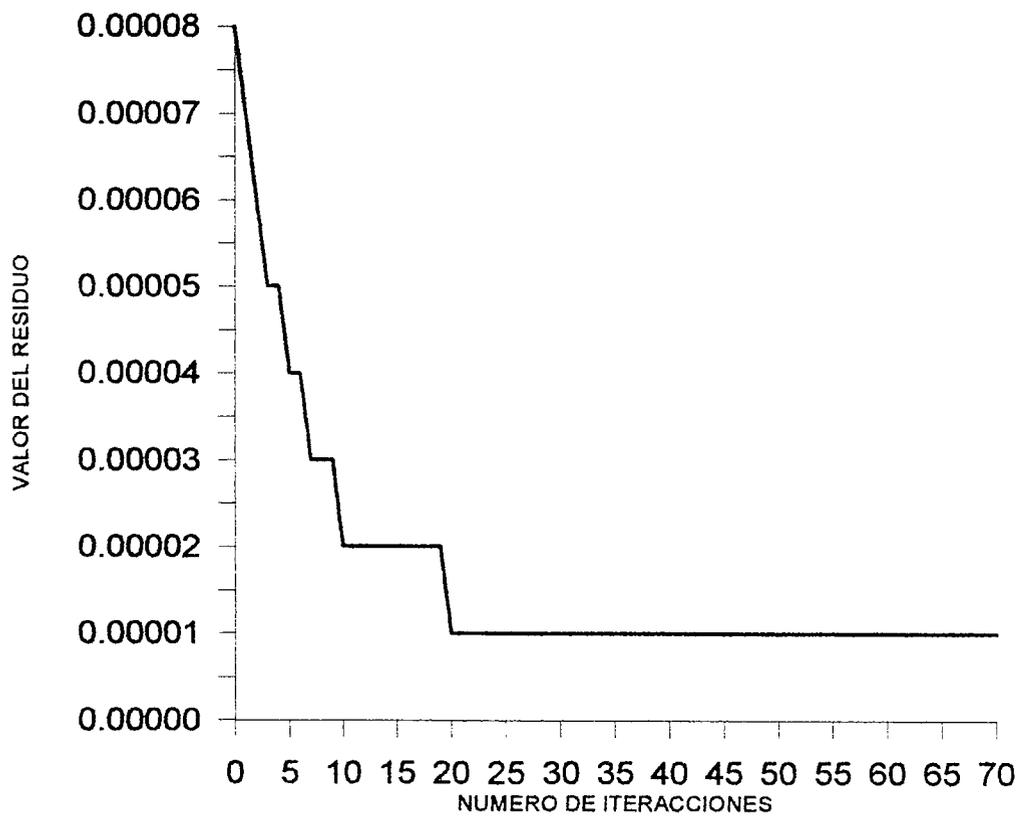
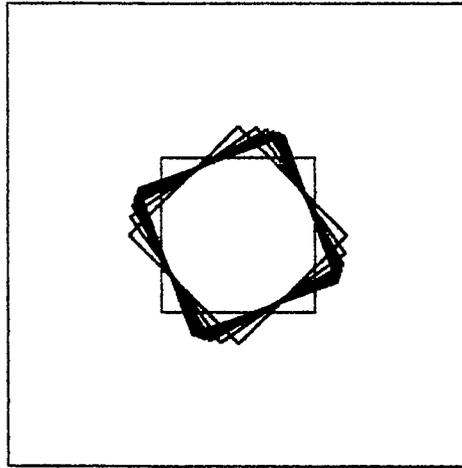
NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 2

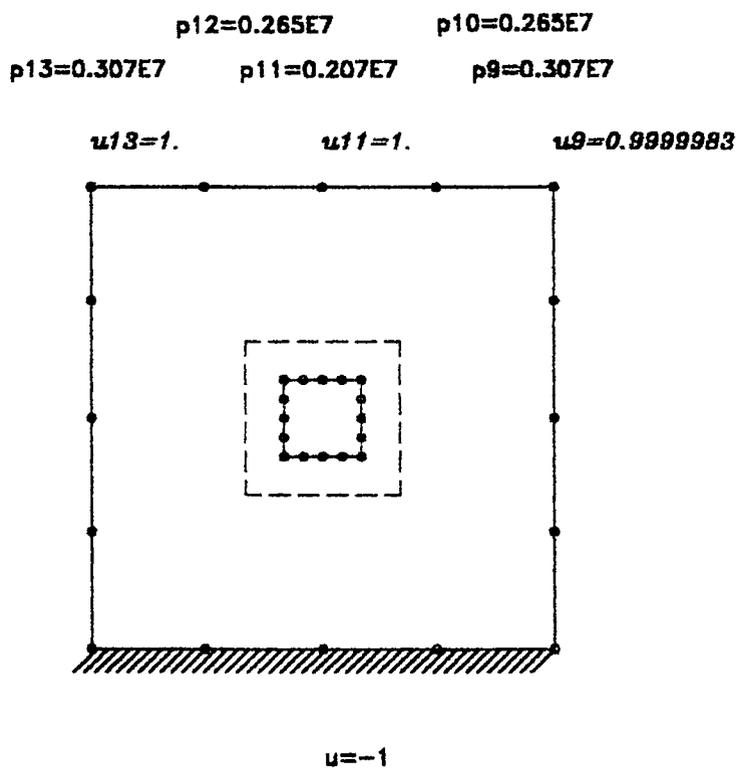
FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

VARIABLES GEOMETRICAS: W

CRITERIO DE PARADA: número de iteraciones

APLICACION N°: 04
 EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE





APLICACION N°: 05

NUMERO DE ELEMENTOS: 16

NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 3

FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

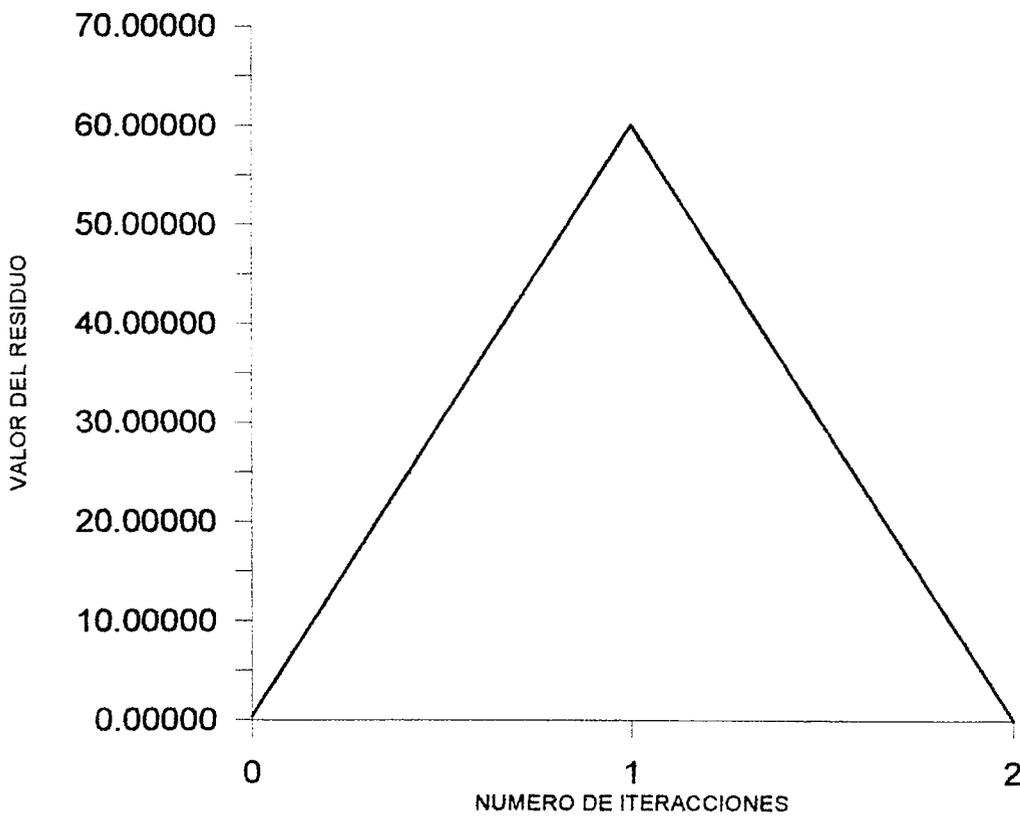
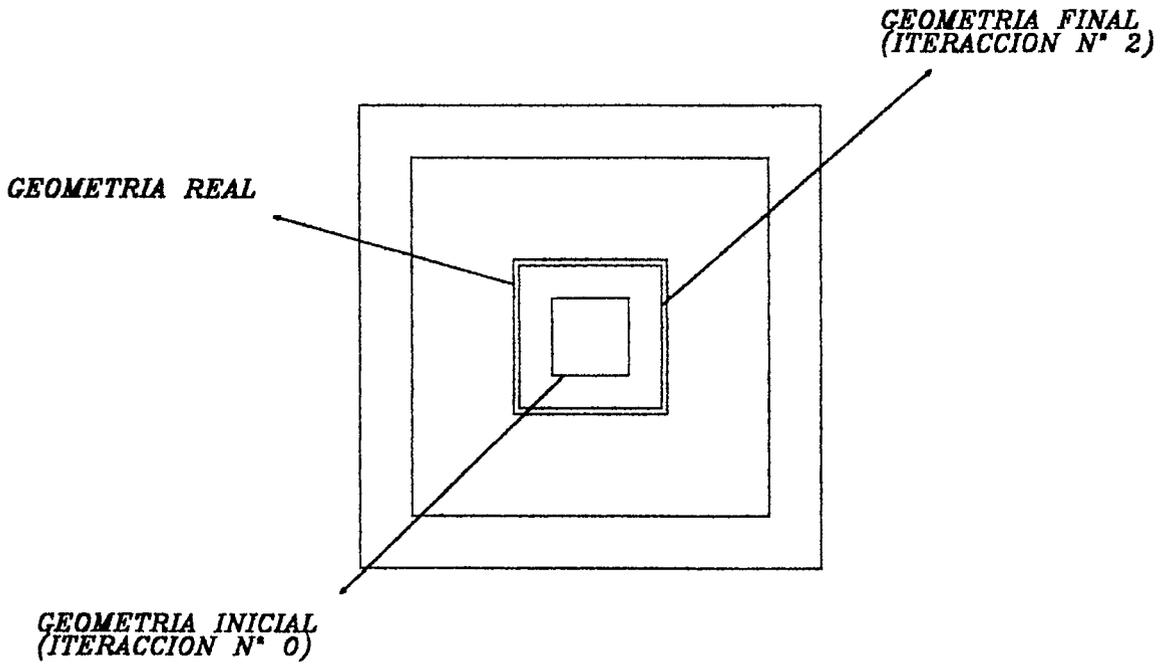
VARIABLES GEOMETRICAS: ϵ_m

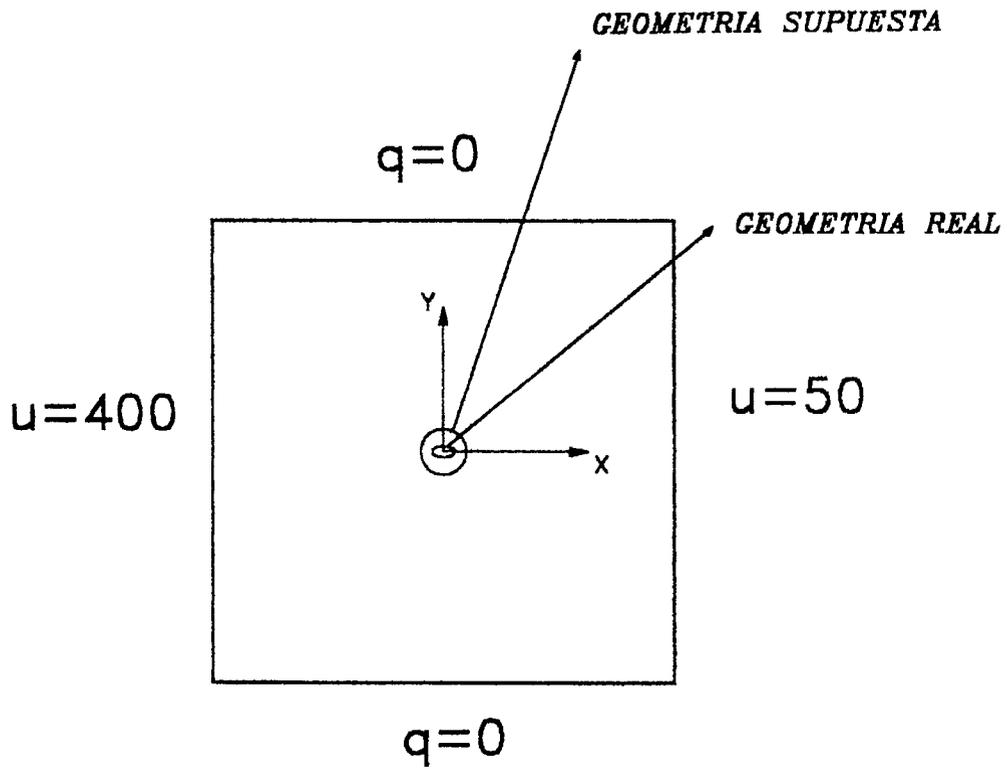
ELONGACION LIMITE: -0.8

DOMINIO SEGURIDAD: 2.5×2.5

CRITERIO DE PARADA: valor límite variación residuo

APLICACION N°: 05
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE





APLICACION N°: M1a

NUMERO DE ELEMENTOS: 24

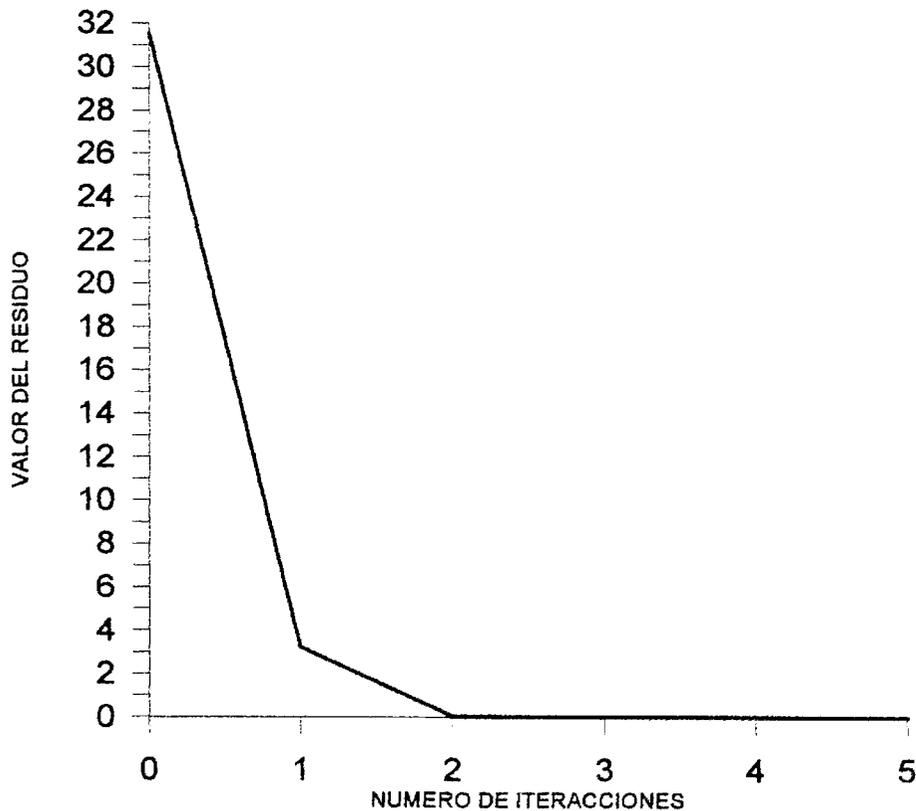
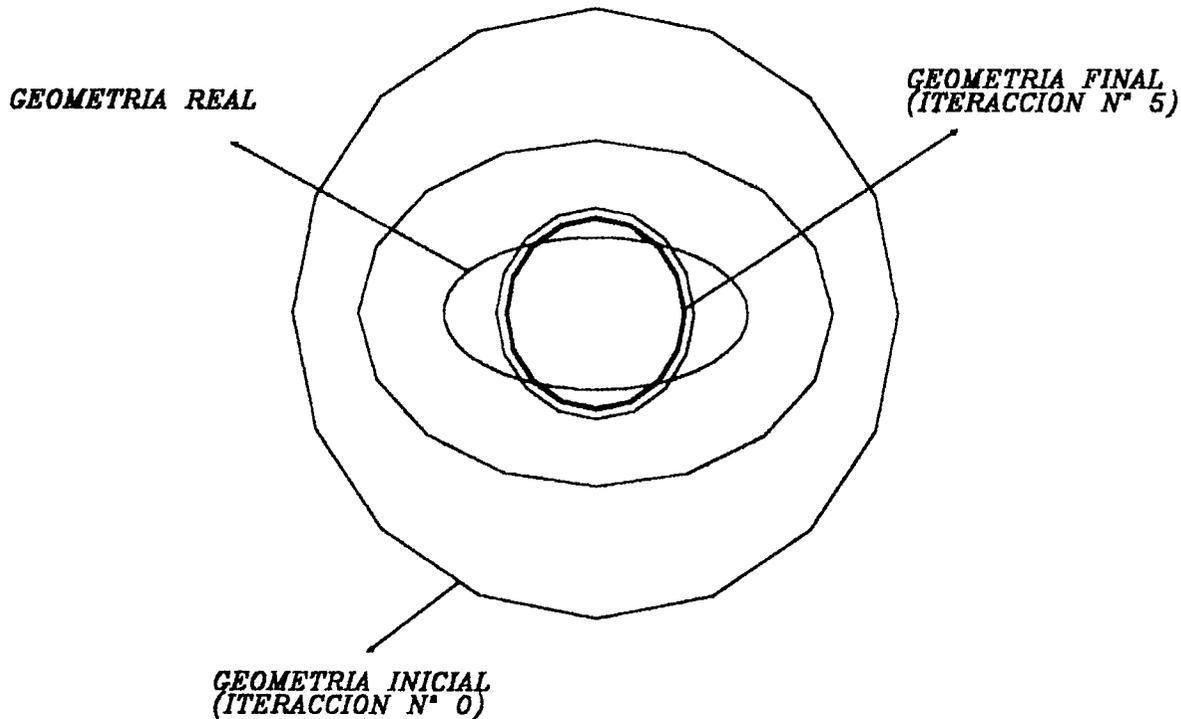
NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 8

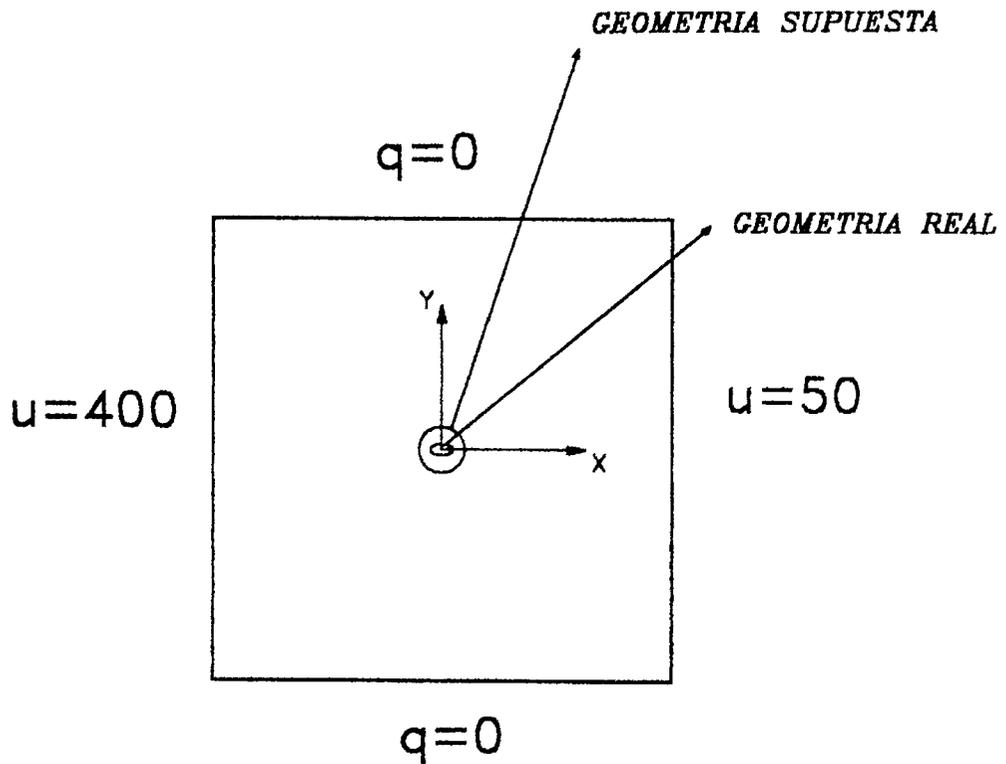
FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

VARIABLES GEOMETRICAS: $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}$

CRITERIO DE PARADA: valor límite función residuo

APLICACION N°: M1a
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE





APLICACION N°: M1b

NUMERO DE ELEMENTOS: 24

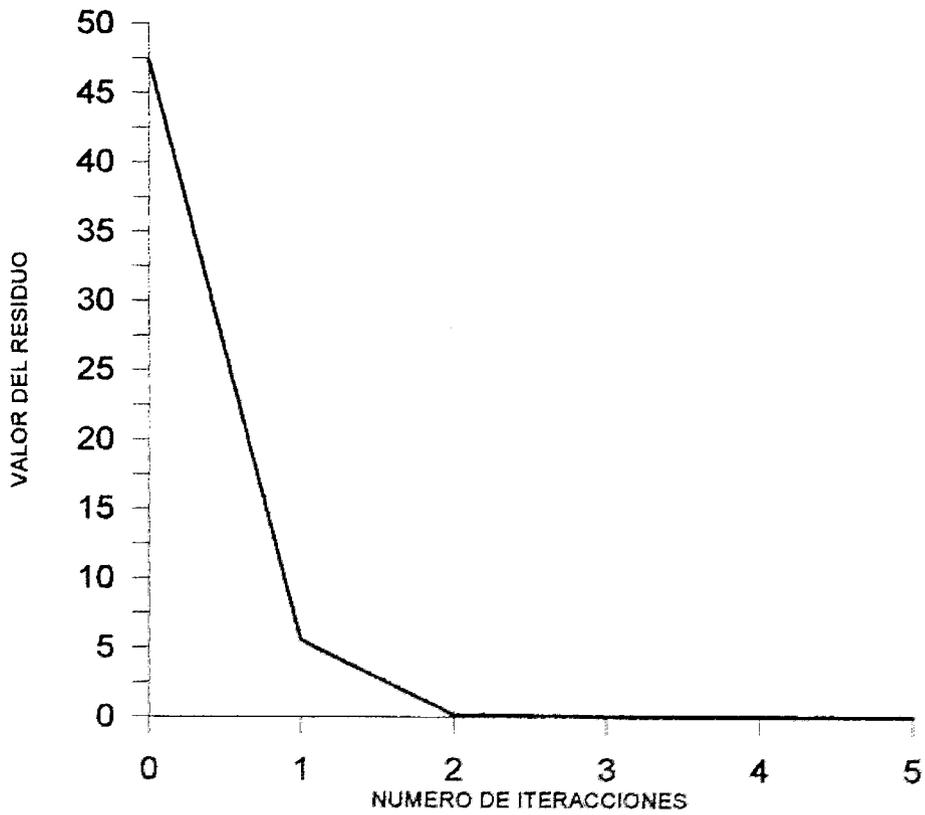
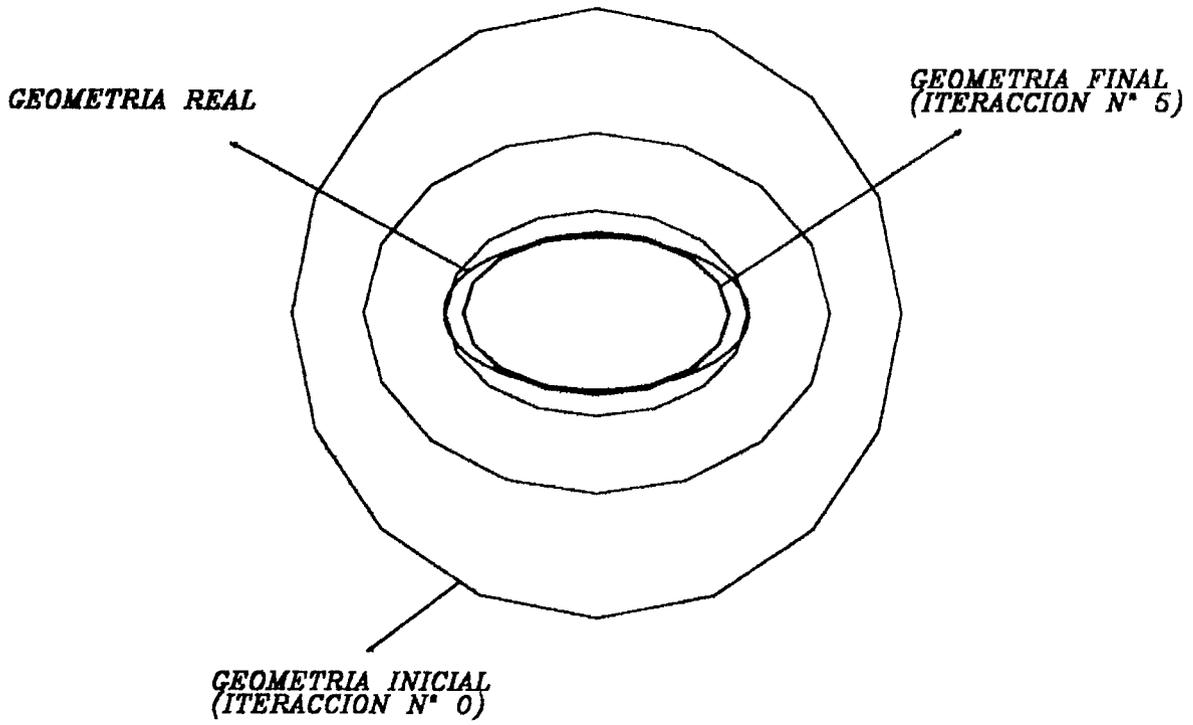
NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 10

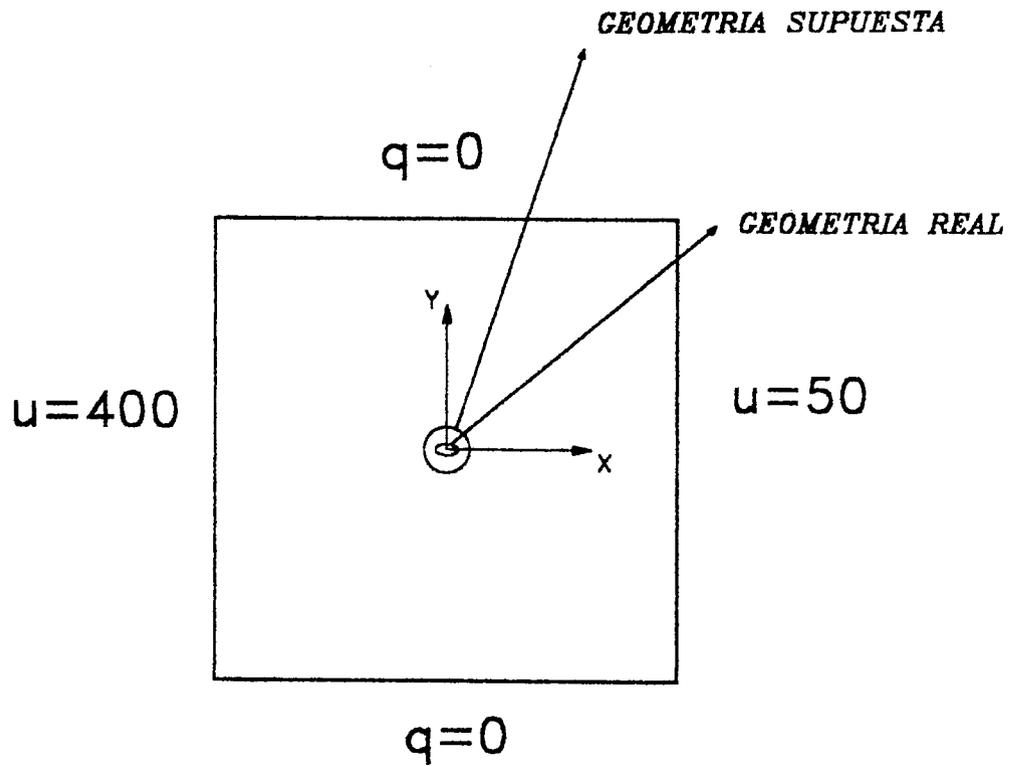
FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

VARIABLES GEOMETRICAS: ϵ_1, ϵ_2

CRITERIO DE PARADA: valor límite función residuo

APLICACION N°: M1b
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE





APLICACION N°: M1c

NUMERO DE ELEMENTOS: 24

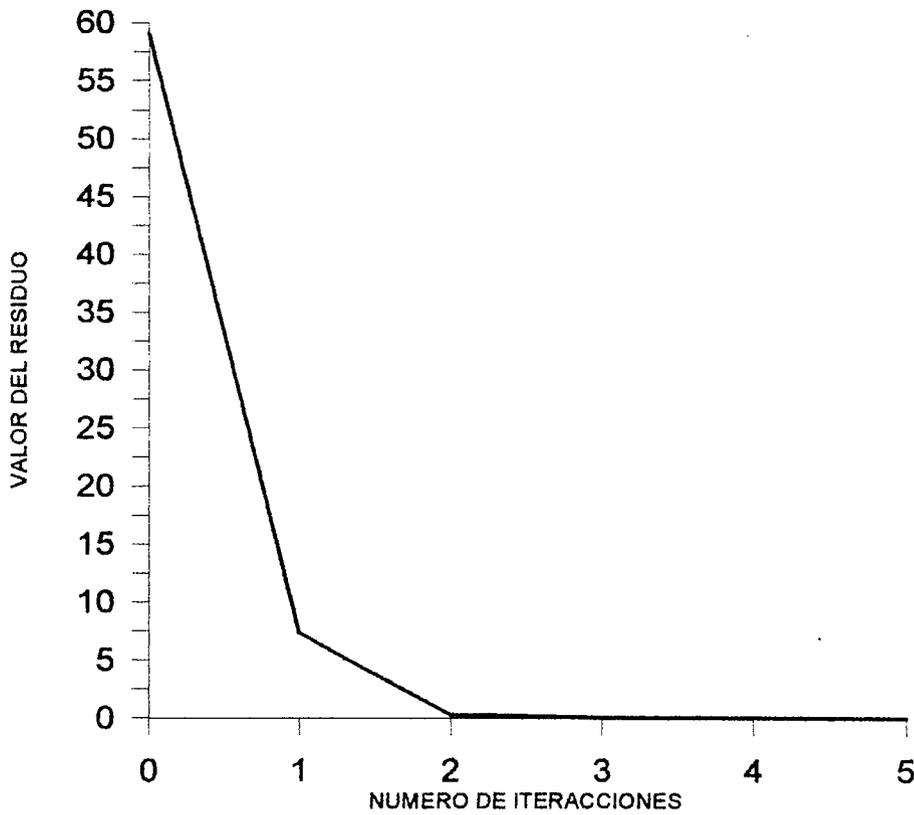
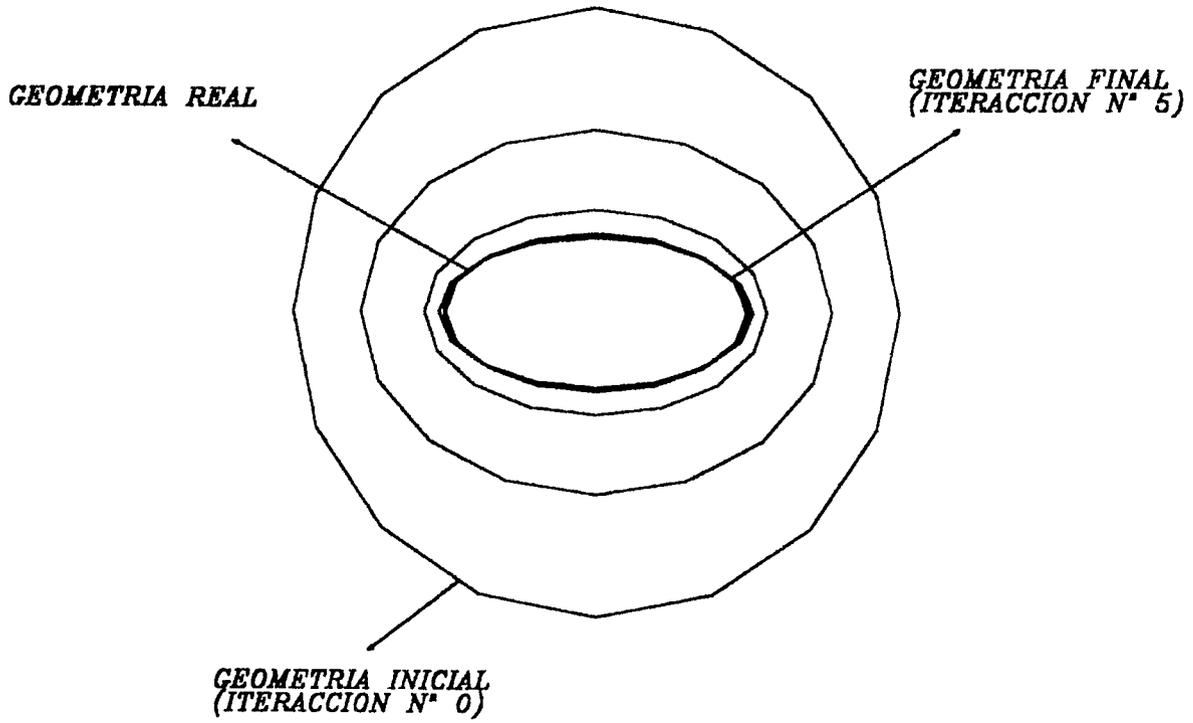
NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 12

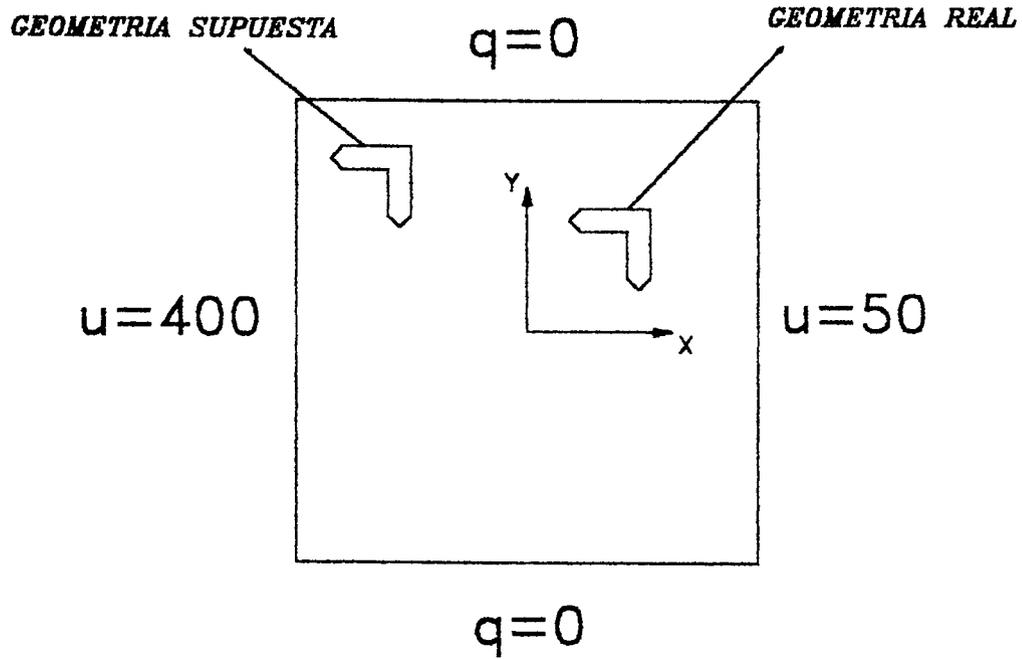
FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

VARIABLES GEOMETRICAS: $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}$

CRITERIO DE PARADA: valor límite función residuo

APLICACION N°: M1c
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE





APLICACION N°: M2a

NUMERO DE ELEMENTOS: 26

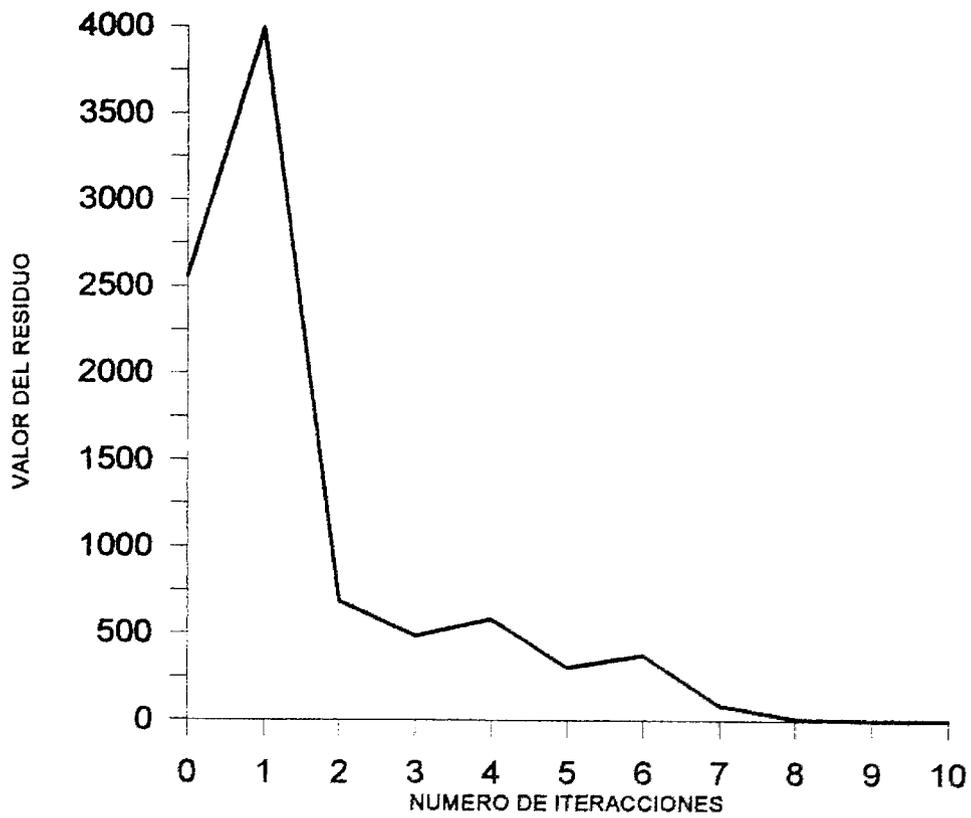
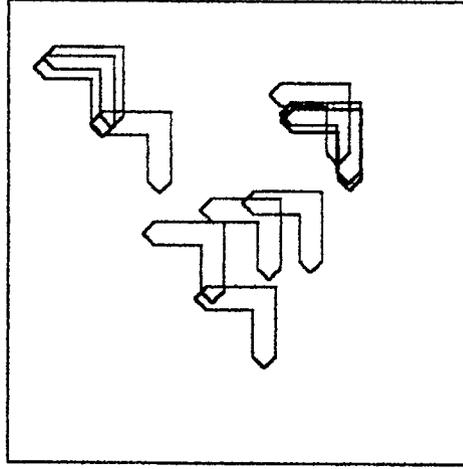
NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 12

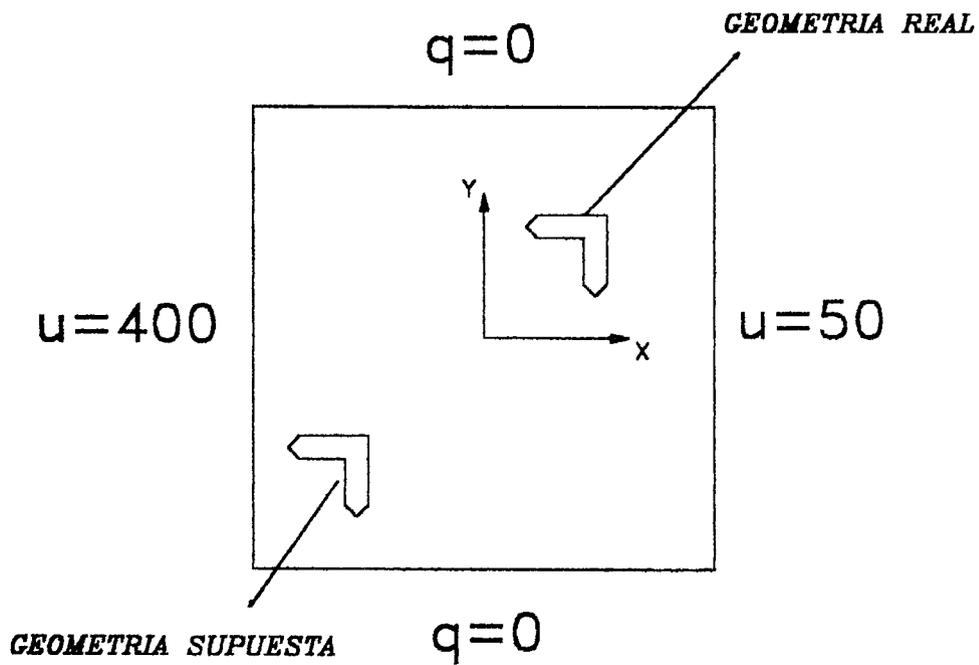
FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

VARIABLES GEOMETRICAS: u_1, u_2

CRITERIO DE PARADA: valor límite función residuo

APLICACION N°: M2a
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE





APLICACION N°: M2b

NUMERO DE ELEMENTOS: 18

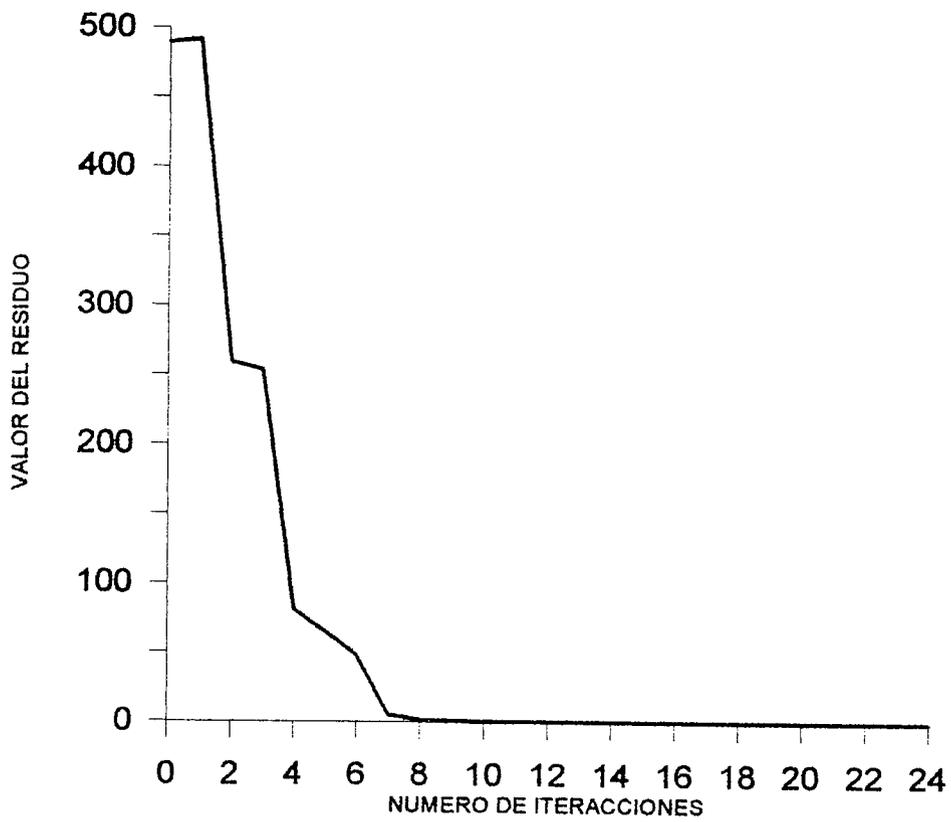
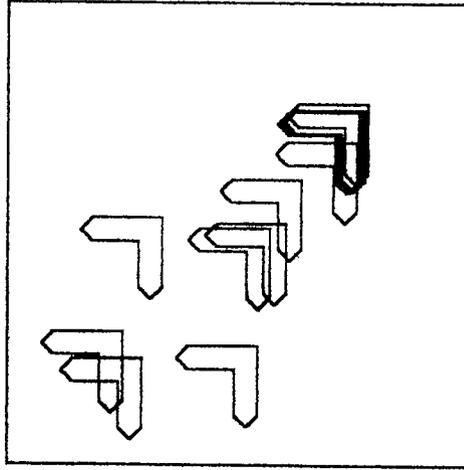
NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 6

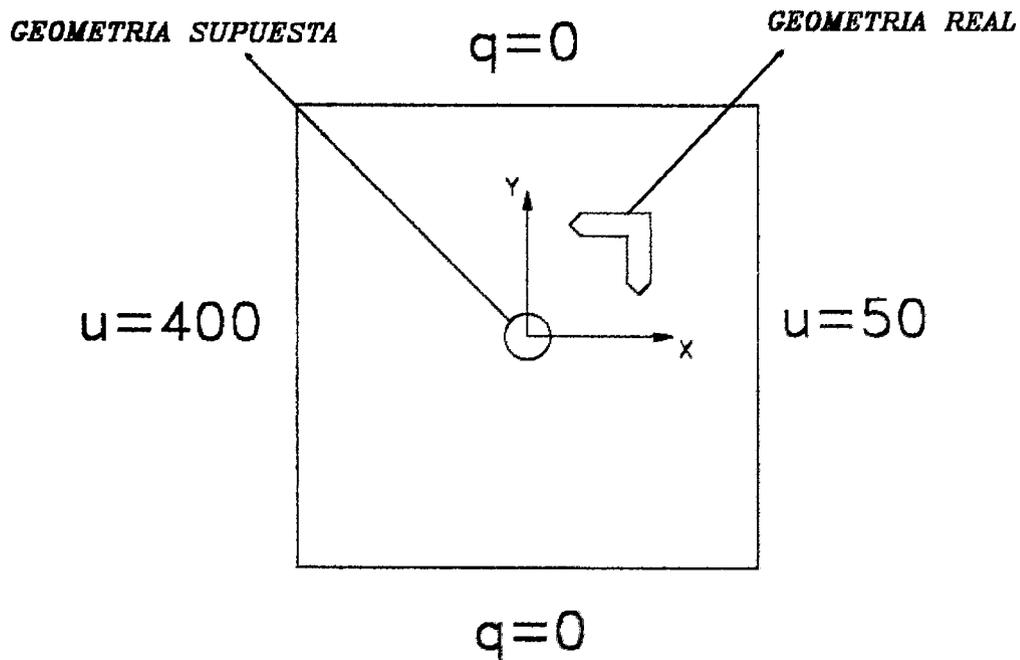
FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

VARIABLES GEOMETRICAS: u_1, u_2

CRITERIO DE PARADA: valor límite función residuo

APLICACION N°: M2b
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE





APLICACION N°: M3a

NUMERO DE ELEMENTOS: 26

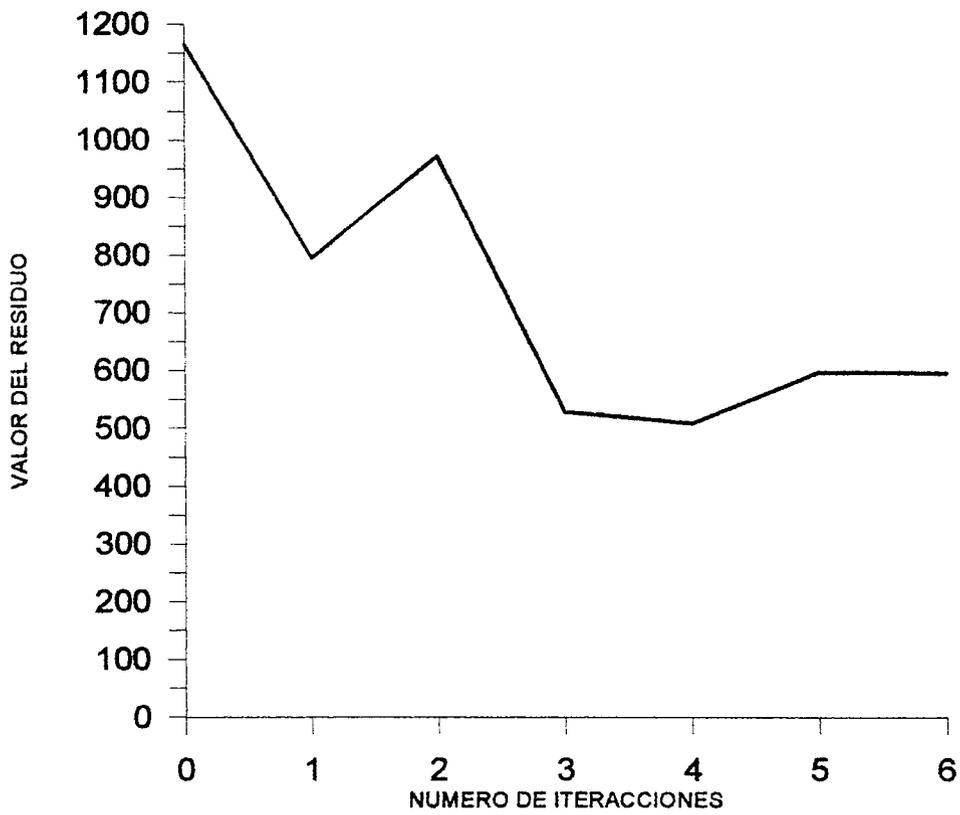
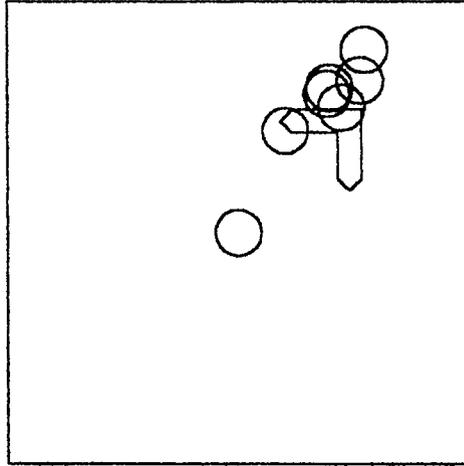
NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 20

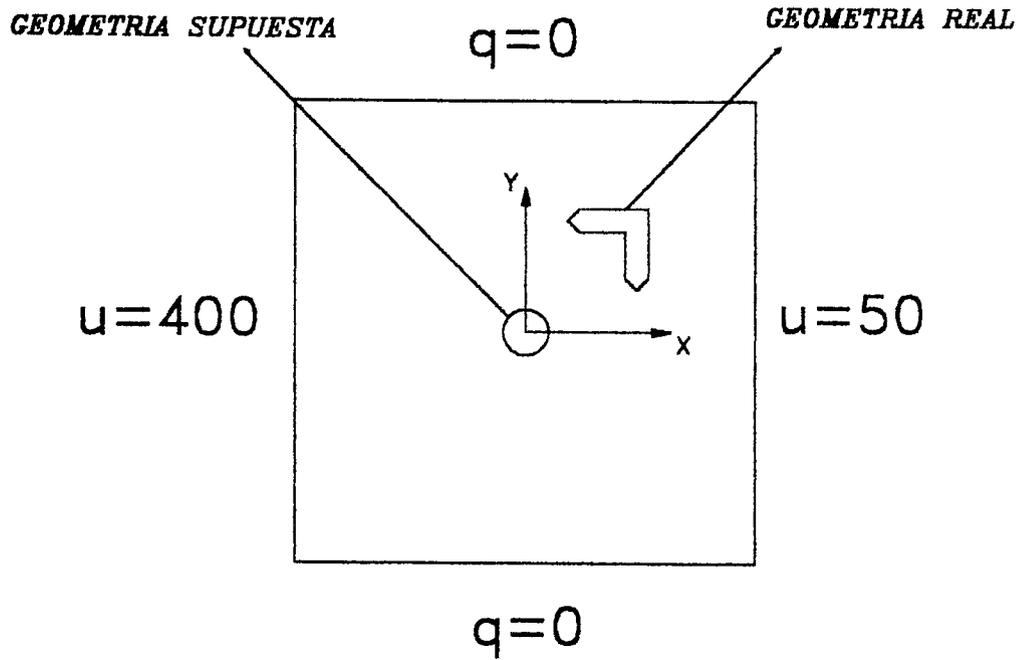
FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

VARIABLES GEOMETRICAS: u_1, u_2

CRITERIO DE PARADA: valor límite variación residuo

APLICACION N°: M3a
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE





APLICACION N°: M3b

NUMERO DE ELEMENTOS: 26

NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 20

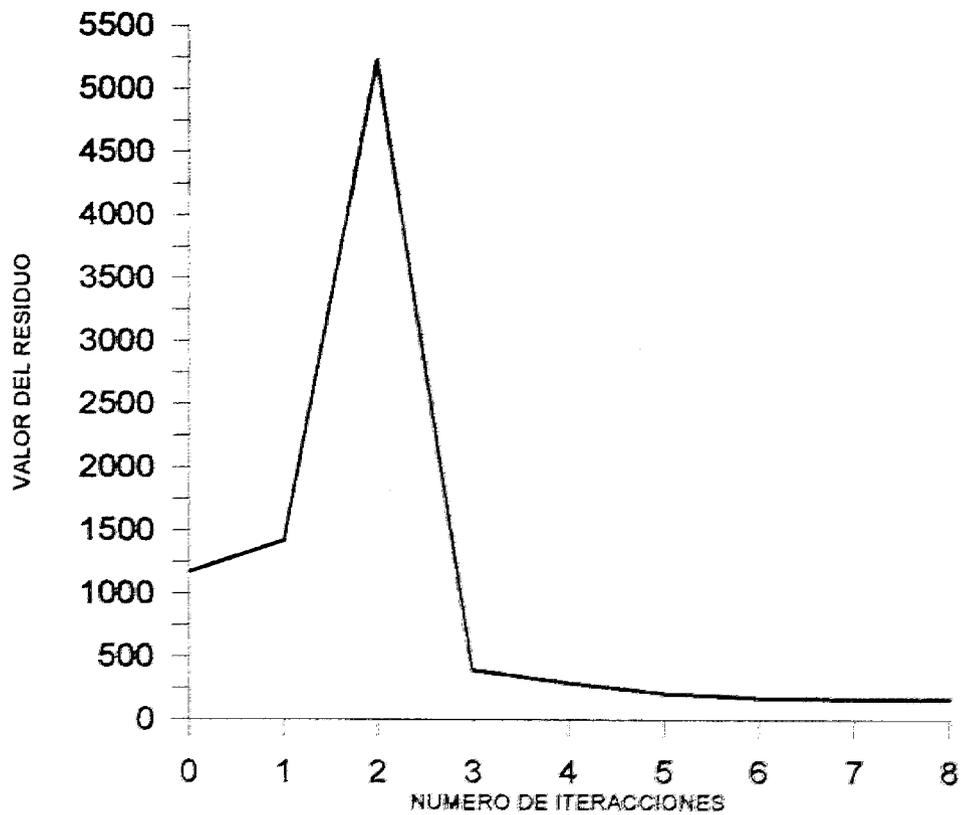
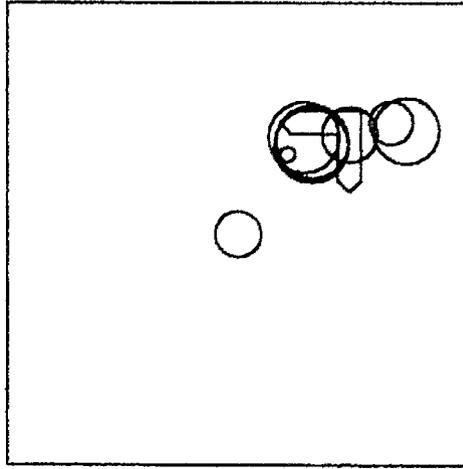
FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

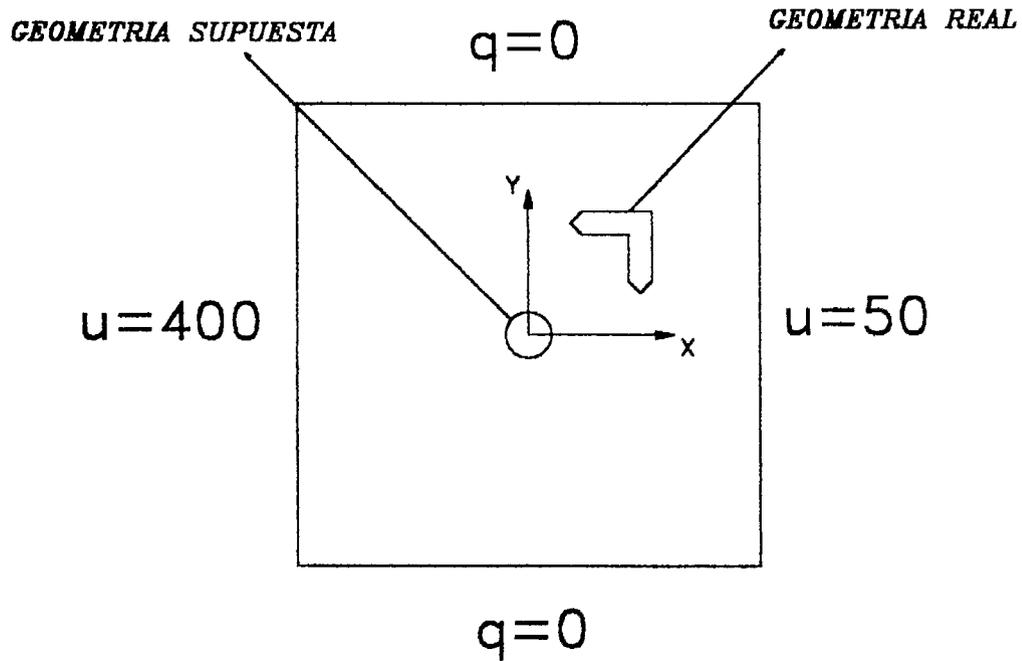
VARIABLES GEOMETRICAS: u_1, u_2, ϵ_m

ELONGACION LIMITE: -0.8

CRITERIO DE PARADA: valor límite variación residuo

APLICACION N°: M3b
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE





APLICACION N°: M3c

NUMERO DE ELEMENTOS: 26

NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 20

FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

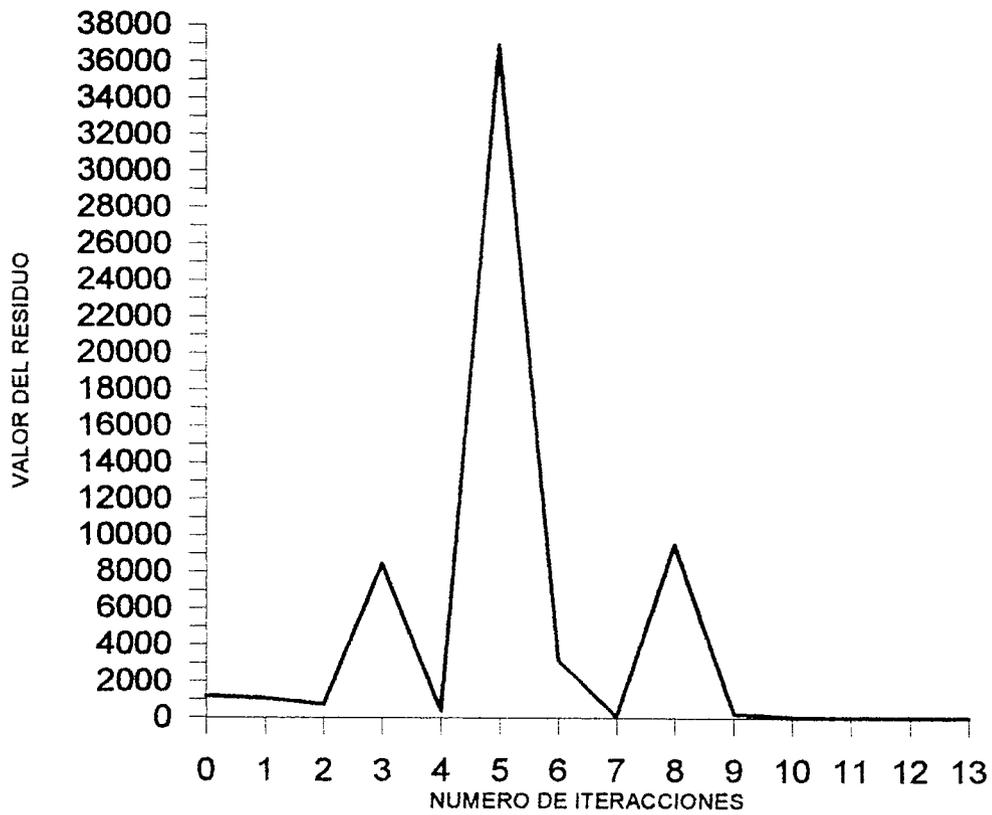
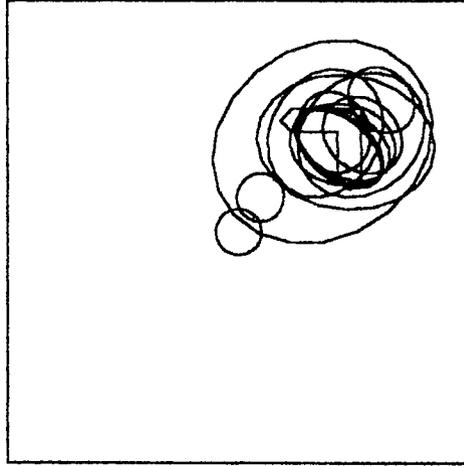
VARIABLES GEOMETRICAS: $u_1, u_2, \varepsilon_m, \omega, \varepsilon_{12}$

ELONGACION LIMITE: -0.5

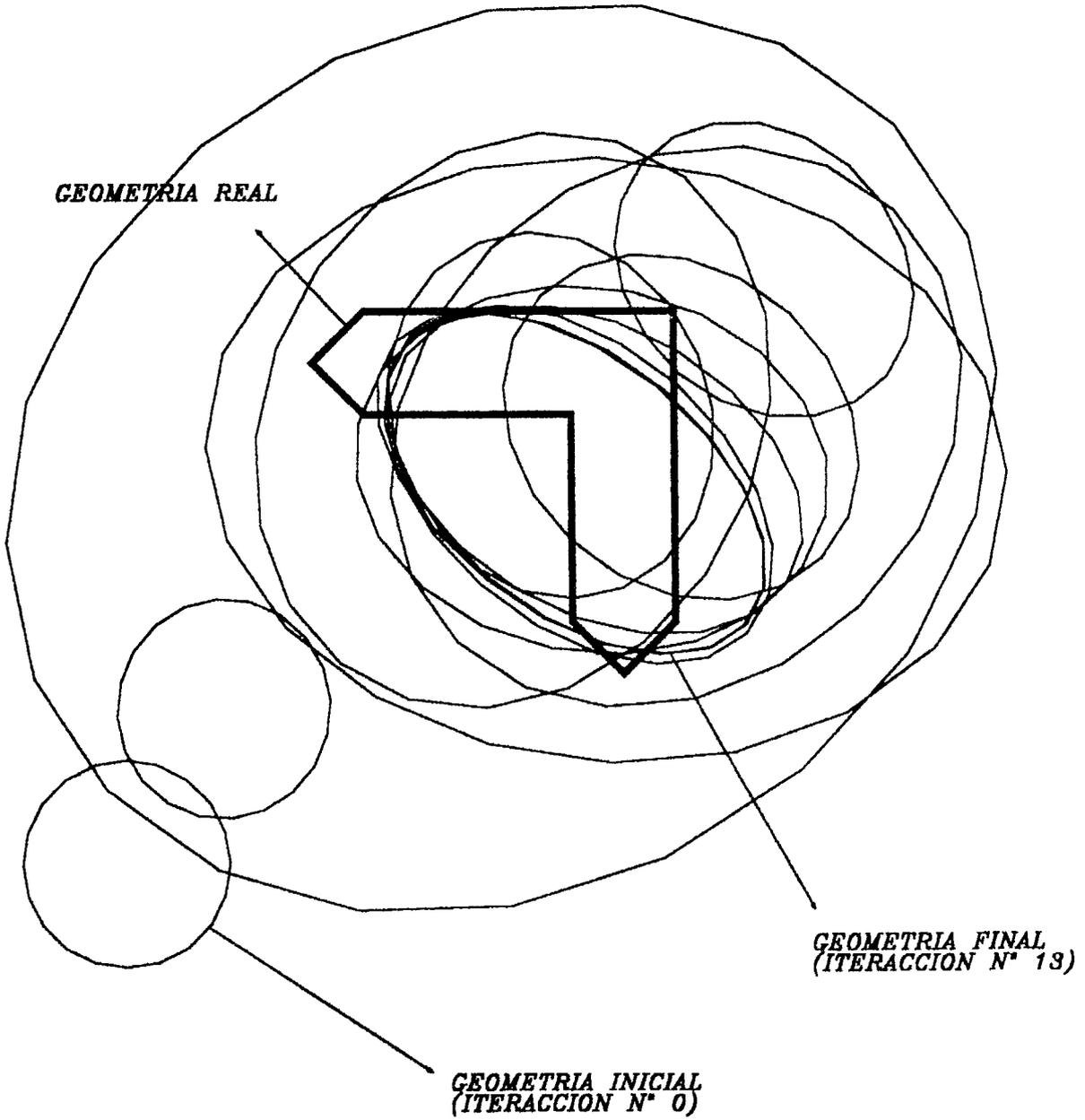
DISTORSION LIMITE: 0.5

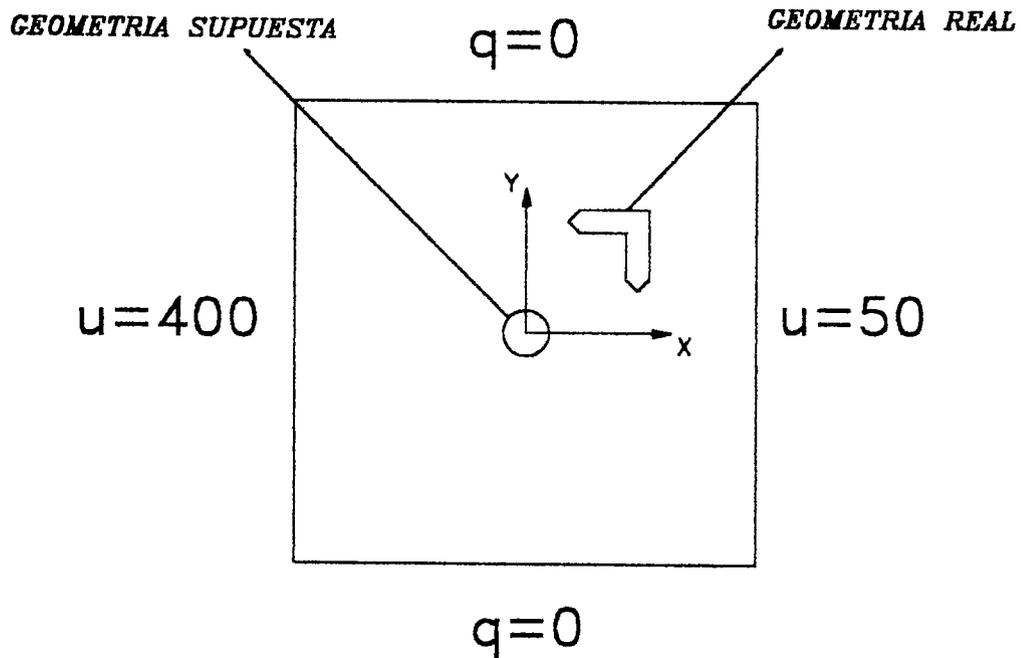
CRITERIO DE PARADA: valor límite variación residuo

APLICACION N°: M3c
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE



APLICACION N°: M3c
DETALLE ITERACIONES





APLICACION N°: M3d

NUMERO DE ELEMENTOS: 26

NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 20

FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

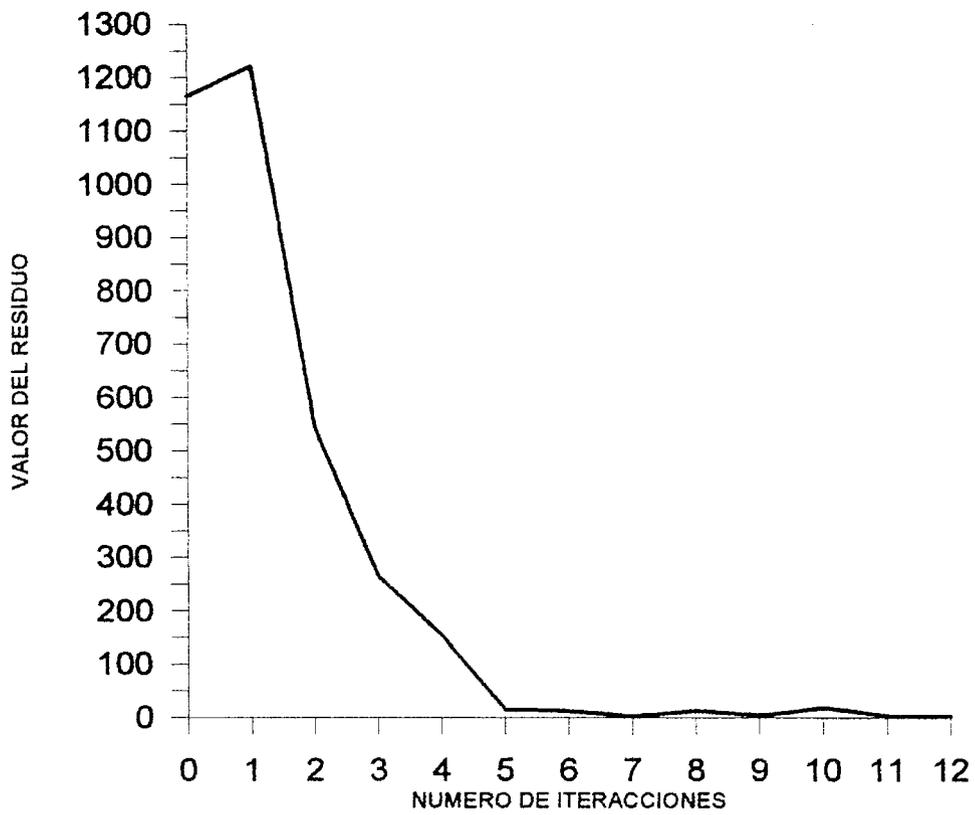
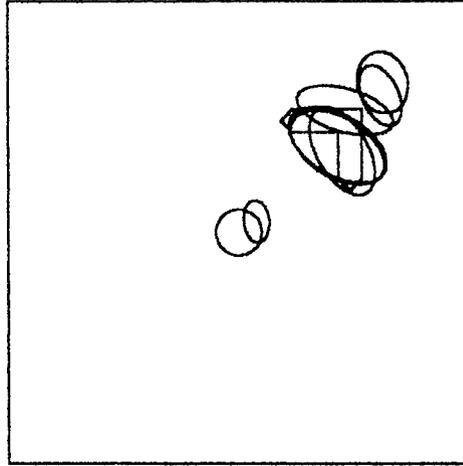
VARIABLES GEOMETRICAS: $u_1, u_2, \varepsilon_m, \omega, \varepsilon'$

ELONGACION LIMITE: -0.5

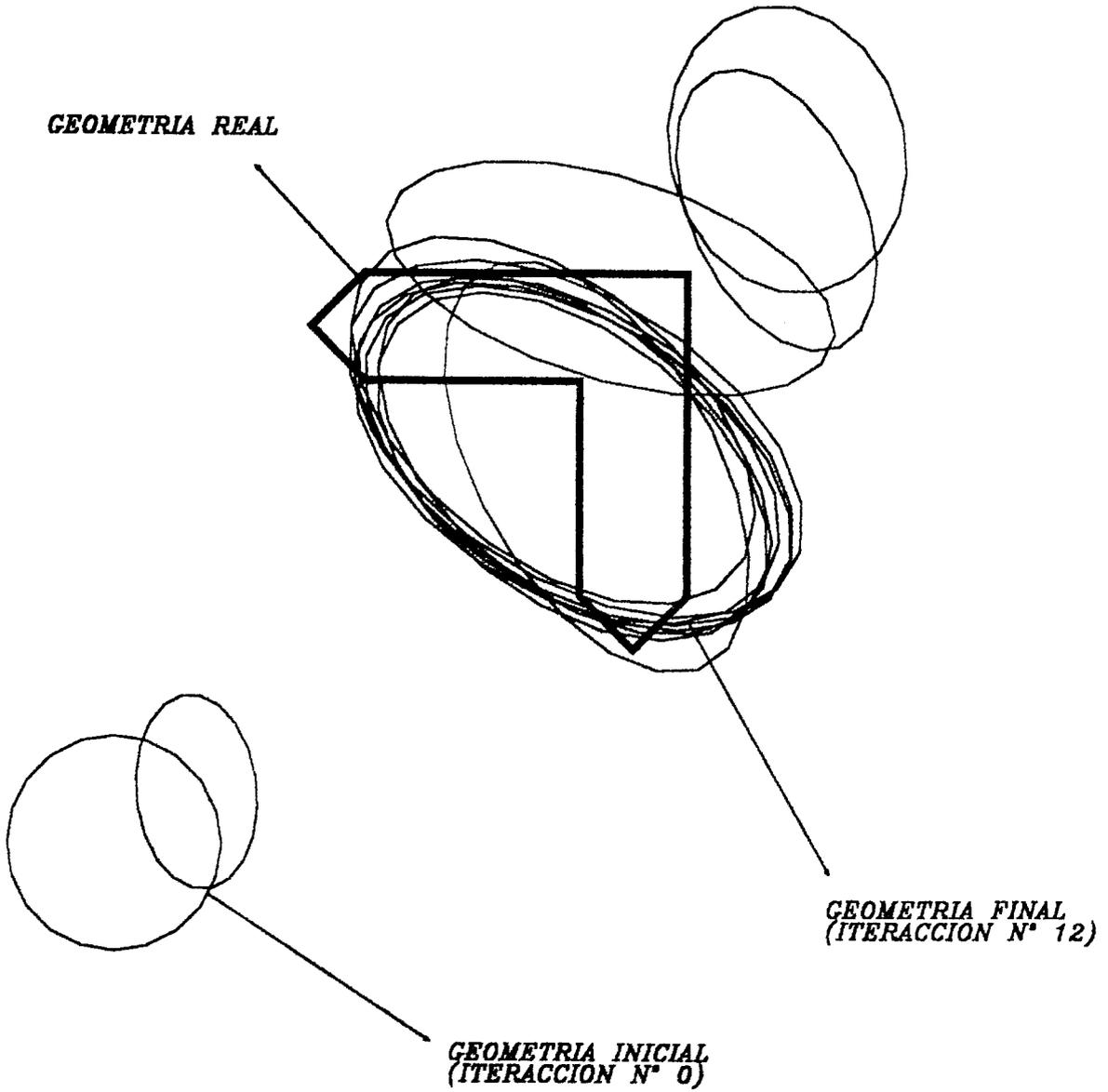
DISTORSION LIMITE: 0.5

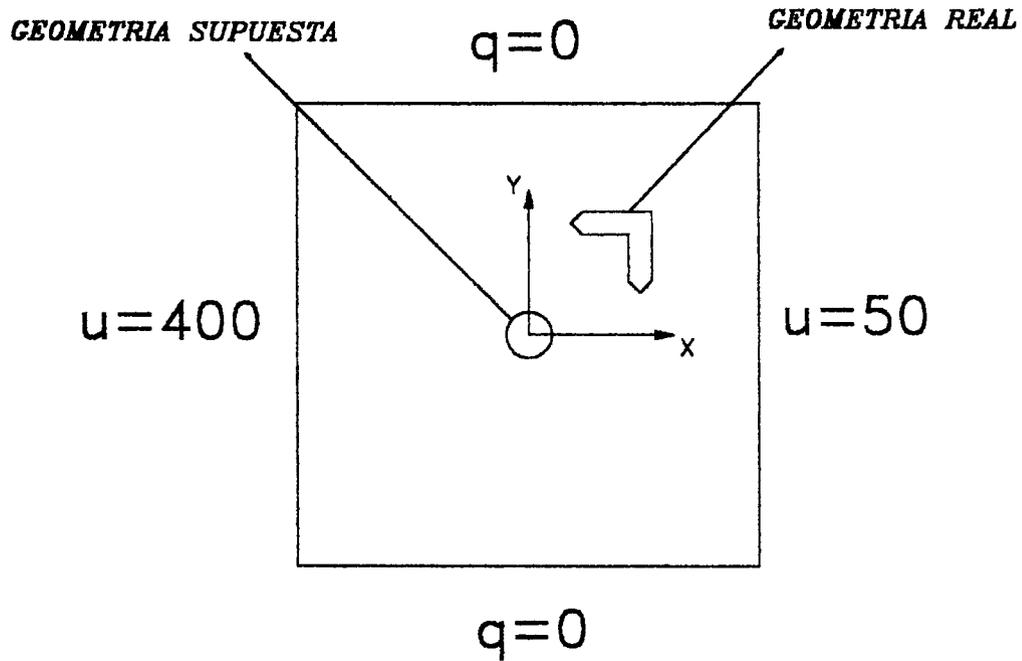
CRITERIO DE PARADA: valor límite variación residuo

APLICACION N°: M3d
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE



APLICACION N°: M3d
DETALLE ITERACCIONES





APLICACION N°: M3e

NUMERO DE ELEMENTOS: 26

NUMERO DE MEDIDAS EXPERIMENTALES: 20

FACTOR PONDERACION ECUACIONES NODOS EXPERIMENTALES: 1

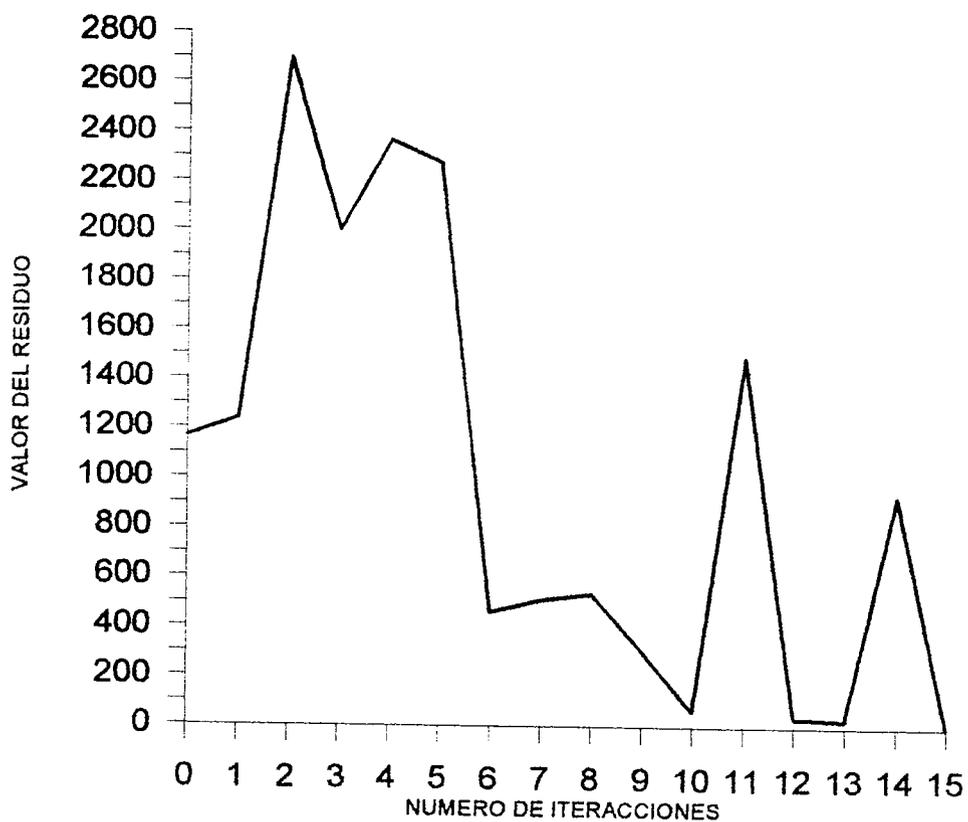
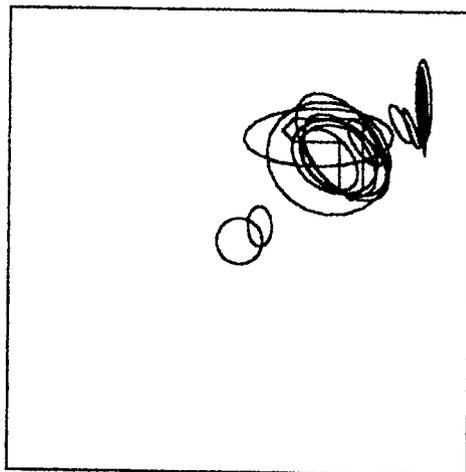
VARIABLES GEOMETRICAS: $u_1, u_2, \varepsilon_m, \omega, \varepsilon', \varepsilon_{12}$

ELONGACION LIMITE: -0.5

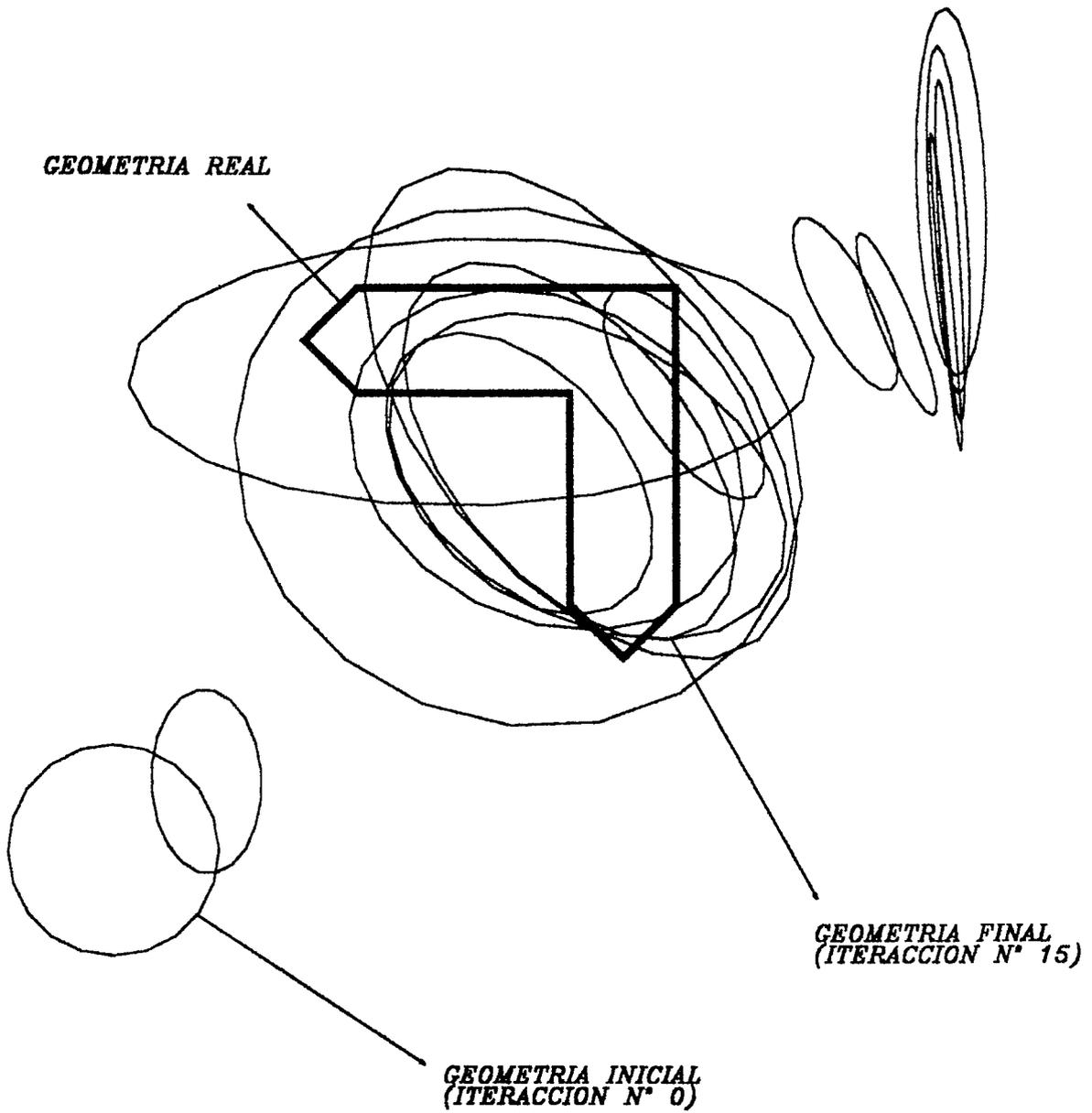
DISTORSION LIMITE: 0.5

CRITERIO DE PARADA: valor límite función residuo

APLICACION N°: M3e
EVOLUCION GEOMETRICA CONTORNO VARIABLE



APLICACION N°: M3e
DETALLE ITERACIONES



Capítulo 8

Conclusiones

8.1 Introducción

En la presente tesis se propone un nuevo método para la resolución del *problema inverso de identificación*, mediante la aplicación del Método de los Elementos de Contorno, en dominios bidimensionales sometidos a un estado elastodinámico antiplano, o bien sobre los que se ha planteado un problema de potencial.

Mediante la consideración de la variación de los términos aparecidos en la ecuación integral del método de los elementos de contorno, aplicada a las configuraciones supuesta y real, de un hueco existente en el dominio, hemos deducido la que hemos llamado ecuación integral de las variaciones. Se ha deducido en primer lugar, para puntos situados en el interior del dominio, y posteriormente, mediante la consideración del dominio ampliado en un subdominio circular infinitesimal, y una operación de paso al límite, para puntos del contorno, resultando la que hemos llamado *ecuación integral de las variaciones en el contorno* (δBIE).

La discretización en el contorno de la ecuación integral deducida, junto con las mediciones experimentales disponibles, nos ha permitido obtener un sistema lineal de ecuaciones, entre cuyas incógnitas se encuentran las variables impuestas en la evolución geométrica de la configuración supuesta del hueco. En el sistema de ecuaciones obtenido, el número de ecuaciones es superior al número de incógnitas. Su resolución mediante el método de los mínimos cuadrados, nos permite calcular el valor de las variables geométricas que aproxima la configuración supuesta del hueco a la configuración real. Repitiendo el proceso de forma iterativa, podemos

hacer coincidir ambas configuraciones.

El cálculo de las integrales obtenidas en la discretización de la ecuación integral se ha hecho por procedimientos numéricos en los casos de regularidad, y empleando procedimientos de regularización utilizados en otras formulaciones integrales en el contorno, como se expone en las referencias bibliográficas [17] y [7], en los casos de singularidad.

8.2 Principales contribuciones de esta tesis

Los resultados de las aplicaciones numéricas realizadas, confirman la bondad del planteamiento teórico de partida, *las variaciones en el contorno*, así como de la formulación desarrollada y de la metodología empleada, objetivo de la presente tesis doctoral. Ello supone una mejora de las formulaciones desarrolladas por Mitra y Tanaka, expuestas en las referencias bibliográficas [1] y [19], en las que algunos términos son olvidados.

Igualmente queda confirmada la eficacia del método, al ser el número de iteraciones necesarias para la resolución del problema inverso muy inferior al de las pruebas realizadas por Tanaka, referencia [19].

8.3 Futuras líneas de investigación.

Una vez comprobada la bondad del planteamiento teórico de las variaciones en el contorno, así como la eficacia del método propuesto, procede su aplicación a otros campos, para lo cual se proponen las siguientes líneas de investigación,

- Adecuación de la formulación integral y de la metodología empleada a casos de existencia de un número de huecos superior a uno.
- Adecuación de la formulación integral y de la metodología empleada a casos de existencia de grietas en el dominio.
- Adecuación de la formulación integral y de la metodología empleada a estados elastodinámicos planos.
- Adecuación de la formulación integral y de la metodología empleada a dominios tridimensionales.

Apéndice A

CALCULO INTEGRAL

A.1 Cálculo de integrales regulares.

A.1.1 Integración numérica mediante el empleo de fórmulas de cuadratura por puntos de Gauss.

Existe un gran número de procedimientos de cálculo aproximado de integrales definidas. En la presente tesis doctoral, como es habitual en la aplicación del Método de los Elementos de Contorno, se han utilizado fórmulas de cuadratura por puntos de Gauss. Comentaremos a continuación los conceptos básicos del procedimiento numérico, remitiéndonos a las referencias bibliográficas [10], [3], y [13], para un tratamiento detallado del tema.

A.1.2 Fórmula de Gauss-Legendre.

El valor aproximado de una integral sobre el segmento $[-1, 1]$ viene dado por la fórmula,

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\zeta) d\zeta \simeq \sum_{i=1}^{i=n} w_i f(\zeta_i) + E_n \quad (\text{A.1})$$

siendo

n : número de puntos de integración.

ζ_i : coordenadas de los puntos de integración (puntos de Gauss).

w_i : factor peso asociado a cada punto.

El error de la cuadratura se expresa,

$$E_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) [(2n!)]^3} \frac{d^{2n} f(\zeta)}{d\zeta^{2n}}; \quad (-1 < \zeta < 1) \quad (\text{A.2})$$

Los valores ζ_i , corresponden a las coordenadas de los puntos en los que se anulan los polinomios de Legendre $P_n(\zeta)$. Los pesos w_i vienen dados por la expresión,

$$w_i = 2 / (1 - \zeta_i^2) \left[\frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta} \right]_{\zeta=\zeta_i}^2 \quad (\text{A.3})$$

Ambos valores ζ_i, w_i están determinados para un valor dado n , y frecuentemente tabulados en la literatura.

Los puntos de Gauss se caracterizan por el hecho de que la integración de monomios de grado $\leq 2n - 1$ es exacta:

$$\forall k, \quad 0 \leq k \leq 2n - 1, \quad \int_{-1}^{+1} x^k dx = \sum_{i=1}^{i=n} w_i x_i^k \quad (\text{A.4})$$

Los puntos de Gauss son interiores al segmento: $\forall (i, n), x_i \in]-1, 1[$ y los pesos son estrictamente positivos: $\forall (i, n), w_i > 0$. Su distribución es simétrica respecto al centro del segmento: $\forall (i, n), x_i = -x_{n-i}, w_i = w_{n-i}$.

El cálculo de una integral definida sobre el segmento $[a, b]$ exige un cambio de variable:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\zeta\right) d\zeta \quad (\text{A.5})$$

A.1.3 Fórmula logarítmica de Gauss.

Existe igualmente una familia de puntos modificados para la evaluación de integrales del tipo:

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \simeq \sum_{i=1}^{i=n} \hat{w}_i f(\hat{x}_i) \quad (\text{A.6})$$

siendo $g(x)$ una función peso $\{g(x) \geq 0\}$ integrable sobre $[-1, 1]$. Ello nos permite, por ejemplo, el cálculo numérico de integrales débilmente singulares, incorporando la singularidad la función peso, $g(x)$; considerando,

$$[a, b] = [0, 1] \quad g(x) = \text{Log} \frac{1}{x} \quad (\text{A.7})$$

$$I = \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{\zeta} \right) f(\zeta) d\zeta \simeq \sum_{i=1}^{i=n} \hat{w}_i f(\zeta_i) \quad (\text{A.8})$$

Los valores ζ_i, w_i están determinados para un valor dado n , y frecuentemente tabulados en la literatura.

A.2 Integrales impropias de segunda especie.

A.2.1 Integrales impropias.

La integral definida $\int_a^b f(x) dx$ se dice impropia si

a) $a = -\infty$ o $b = \infty$ o ambos, es decir, si uno de los límites de integración o los dos se hacen infinitos.

b) $f(x)$ no es acotada en uno o más puntos de $a \leq x \leq b$, puntos que se llaman singularidades de $f(x)$.

Las integrales de los casos a) y b) se denominan integrales impropias de primera y de segunda especie, respectivamente, denominándose de tercera especie las que presentan ambas condiciones.

A.2.2 Integrales impropias de segunda especie.

Si $f(x)$ no es acotada solamente en el extremo $x = a$ del intervalo $a \leq x \leq b$, se define entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx \quad (\text{A.9})$$

Si el límite existe, se dice que la integral es convergente. Si no existe, se dice que la integral es divergente.

Si $f(x)$ no está acotada solamente en el extremo $x = b$ del intervalo $a \leq x \leq b$, se define entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx \quad (\text{A.10})$$

Si el límite existe, se dice que la integral es convergente. Si no existe, se dice que la integral es divergente.

Si $f(x)$ no está acotada solamente en un punto interior $x = x_o$ del intervalo $a \leq x \leq b$, se define entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{x_o-\epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{x_o+\epsilon_2}^b f(x) dx \quad (\text{A.11})$$

La integral $\int_a^b f(x) dx$ converge o diverge según existan o no los límites anteriores.

A.2.3 Valor principal de Cauchy.

Puede suceder que los límites de la expresión anterior no existan cuando ϵ_1, ϵ_2 tienden a cero independientemente, pero que si existan tomando $\epsilon_1 = \epsilon_2$.

Tomaremos entonces

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_a^{x_o-\epsilon} f(x) dx + \int_{x_o+\epsilon}^b f(x) dx \right\} \quad (\text{A.12})$$

Al valor límite indicado le llamaremos Valor Principal de Cauchy de $\int_a^b f(x) dx$,

$$VPC \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_a^{x_o-\epsilon} f(x) dx + \int_{x_o+\epsilon}^b f(x) dx \right\} \quad (\text{A.13})$$

A.2.4 Integrales p de segunda especie.

Se denominan integrales impropias p de segunda especie, aquellas que tienen una expresión de la forma siguiente, pudiendo demostrar la convergencia o divergencia indicada.

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \Rightarrow \begin{cases} p < 1 & \text{converge} \\ p \geq 1 & \text{diverge} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \Rightarrow \begin{cases} p < 1 & \text{converge} \\ p \geq 1 & \text{diverge} \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Si $p \leq 0$ las integrales ya no son impropias.

A.2.5 Análisis de integrales impropias de segunda especie.

- Integrales de la forma,

$$\int_0^1 \ln x dx \quad (\text{A.16})$$

Se trata de una integral impropia de segunda especie. Veamos que es convergente.

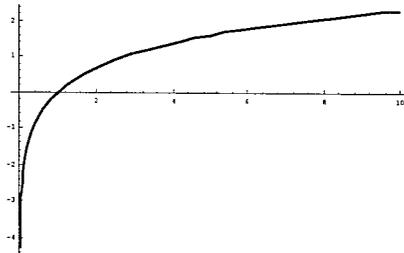


Figura ~A-1:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ x (\ln x - 1) \Big|_{\varepsilon}^1 \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{-1 - \varepsilon (\ln \varepsilon - 1)\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{-1 + \varepsilon - \varepsilon \ln \varepsilon\} = -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{1/\varepsilon} = \\ &= -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = -1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = -1 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

- Integrales de la forma,

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} \quad (\text{A.18})$$

Se trata de una integral impropia de segunda especie.

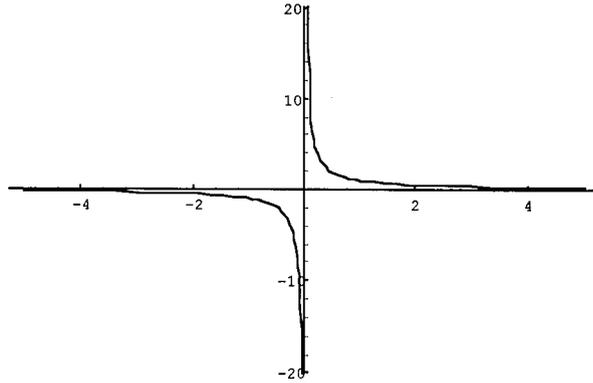


Figura ~ A-2:

Podemos descomponer en suma de integrales p :

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \int_{-a}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^{+b} \frac{dx}{x} = - \int_{-a}^0 \frac{dx}{-x} + \int_0^{+b} \frac{dx}{x} \quad (\text{A.19})$$

por ser $p = 1$ ambas integrales son divergentes.

El Valor Principal de Cauchy es convergente,

$$\begin{aligned} VPC \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+b} \frac{dx}{x} \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ (\ln \varepsilon - \ln a) + (\ln b - \ln \varepsilon) \} = \\ &= \ln b - \ln a \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$VPC \int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a \quad (\text{A.21})$$

- Integrales de la forma,

$$\int_{-a}^{+b} \frac{f(x)}{x} dx \quad (\text{A.22})$$

siendo a, b valores positivos.

El integrando presenta una singularidad en el punto $x = 0$ por lo que se trata de una integral impropia de segunda especie que calcularemos mediante los límites siguientes,

$$\int_{-a}^{+b} \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a}^{-\varepsilon_1} \frac{f(x)}{x} dx \right\} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left\{ \int_{+\varepsilon_2}^{+b} \frac{f(x)}{x} dx \right\} \quad (\text{A.23})$$

Dependiendo de la forma de $f(x)$, los límites anteriores serán convergentes o divergentes.

Calculamos el Valor Principal de Cauchy,

$$VPC \int_{-a}^{+b} \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{+\varepsilon}^{+b} \frac{f(x)}{x} dx \right\} \quad (\text{A.24})$$

Integrando por partes obtenemos

$$\int \frac{f(x)}{x} dx = f(x) \ln |x| - \int \ln |x| f'(x) dx \quad (\text{A.25})$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} VPC \int_{-a}^{+b} \frac{f(x)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{+\varepsilon}^{+b} \frac{f(x)}{x} dx \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ f(-\varepsilon) \ln |-\varepsilon| - f(-a) \ln |-a| - \int_{-a}^{-\varepsilon} \ln |x| f'(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + f(b) \ln |b| - f(\varepsilon) \ln |\varepsilon| - \int_{+\varepsilon}^{+b} \ln |x| f'(x) dx \right\} = \\ &= (f(b) \ln |b| - f(-a) \ln |-a|) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ f(-\varepsilon) \ln |-\varepsilon| - f(\varepsilon) \ln |\varepsilon| \} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a}^{-\varepsilon} \ln |x| f'(x) dx + \int_{+\varepsilon}^{+b} \ln |x| f'(x) dx \right\} = \\
& = (f(b) \ln |b| - f(-a) \ln |-a|) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ (f(-\varepsilon) - f(\varepsilon)) \ln |\varepsilon| \} - VPC \int_{-a}^{+b} \ln |x| f'(x) dx =
\end{aligned} \tag{A.26}$$

A.2.6 Regularización de integrales.

Podemos aproximar el valor de $\int_{-a}^{+b} \frac{f(x)}{x} dx$ regularizando la integral mediante la utilización de los términos lineales del desarrollo en serie de $f(x)$.

En el entorno del punto de singularidad $x = 0$,

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + TOS \Rightarrow f(x) - f(0) \simeq x f'(0) \tag{A.27}$$

Podemos expresar,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{+b} \frac{f(x)}{x} dx &= \int_{-a}^{+b} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx + \int_{-a}^{+b} \frac{f(0)}{x} dx = \\
&= \int_{-a}^{+b} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx + f(0) \int_{-a}^{+b} \frac{1}{x} dx
\end{aligned} \tag{A.28}$$

En la expresión A.28 aparecen las siguientes integrales,

$$\int_{-a}^{+b} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx \tag{A.29}$$

en el entorno del punto de singularidad, $x = 0$, según la expresión A.27 se verifica,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \simeq f'(0) \tag{A.30}$$

por lo tanto la integral A.29 es regular y podemos emplear procedimientos numéricos para calcularla.

$$\int_{-a}^{+b} \frac{1}{x} dx \quad (\text{A.31})$$

como hemos visto en los apartados anteriores el valor principal de Cauchy es convergente. Tomaremos por tanto,

$$\int_{-a}^{+b} \frac{1}{x} dx = VPC \int_{-a}^{+b} \frac{1}{x} dx = \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (\text{A.32})$$

Podemos concluir,

$$\int_{-a}^{+b} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{-a}^{+b} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx + f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (\text{A.33})$$

A.3 Integrales hipersingulares.

A.3.1 Integrales hipersingulares.

Decimos que la integral definida en $[a, b]$ de una función $f(x)$ es hipersingular, si $f(x)$ presenta en el intervalo $[a, b]$ una singularidad de orden igual o superior a dos.

Por ejemplo,

$$\int_{-a}^{+b} \frac{1}{x^2} dx \quad (\text{A.34})$$

siendo a, b valores positivos, es una integral hipersingular pues para $x = 0$, el integrando presenta una singularidad de segundo orden.

A.3.2 Parte finita de una integral hipersingular.

Una integral hipersingular es una integral impropia de segundo orden, y como hemos visto en los apartados anteriores, determinaremos su valor considerando la siguiente operación de paso al límite,

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{x_o - \epsilon_1} f(x) dx + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{x_o + \epsilon_2}^b f(x) dx \quad (\text{A.35})$$

siendo x_o el punto de hipersingularidad de la función $f(x)$.

Si los límites de la expresión A.35 no son convergentes, determinaremos el valor principal de Cauchy,

$$I = \int_a^b f(x) dx = VPC \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x_o - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_o + \varepsilon}^b f(x) dx \right\} \quad (\text{A.36})$$

Si el límite de la expresión A.36 no es convergente recurriremos a la *parte finita* de la integral hipersingular.

De forma general la expresión entre corchetes en la ecuación A.36 la podemos expresar como combinación lineal de las potencias de ε y de $\ln \varepsilon$, es decir,

$$\int_a^b f(x) dx = I(\varepsilon) = I_o + I_1\varepsilon + I_2\varepsilon^2 + \dots + I_{-1}\frac{1}{\varepsilon} + I_{-2}\frac{1}{\varepsilon^2} + \dots + I \ln \varepsilon \quad (\text{A.37})$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, todos los términos de A.37 se hacen cero o toman valores infinitos, excepto I_o , que llamaremos *parte finita* de la integral hipersingular,

$$pf(I) = pf\left(\int_a^b f(x) dx\right) = pf\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^b f(x) dx \right\}\right) = I_o \quad (\text{A.38})$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} pf\left(\int_0^b \frac{1}{x} dx\right) &= pf\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x} dx \right\}\right) = \\ &= pf\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\ln |b| - \ln |\varepsilon|\}\right) = \ln |b| \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Por ejemplo, si a, b son dos valores positivos,

$$\begin{aligned} pf\left(\int_{-a}^{+b} \frac{1}{x^2} dx\right) &= pf\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx + \int_{+\varepsilon}^{+b} \frac{1}{x^2} dx \right\}\right) = \\ &= pf\left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{\varepsilon} \right\}\right) = -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

A.3.3 Integrales hipersingulares en el Método de los Elementos de Contorno.

En el Método de los Elementos de Contorno aparecen frecuentemente integrales de la forma,

$$\int_{\Gamma_e} \frac{f(x)}{r^2} d\Gamma \quad (\text{A.41})$$

las cuales, cuando el nodo de colocación pertenece al elemento de integración, dan lugar a integrales hipersingulares. Dichas integrales se calculan mediante la siguiente operación de paso al límite, siendo Γ_e un subdominio circular infinitesimal en el entorno del punto de hipersingularidad y S_ε el fragmento Γ_e interceptado por Γ_ε , tal como muestra la figura,

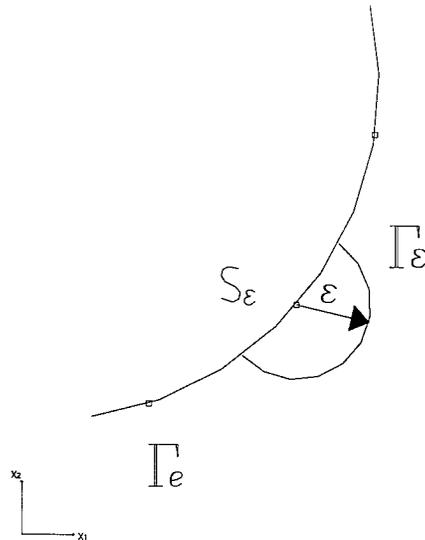


Figura ~ A-3:

$$\int_{\Gamma_e} \frac{f(x)}{r^2} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_e - S_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} \frac{f(x)}{r^2} d\Gamma \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_e - S_\varepsilon} \frac{f(x)}{r^2} d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(x)}{r^2} d\Gamma \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_e - S_\varepsilon} \frac{f(x)}{r^2} d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(x)}{r^2} d\Gamma \right\} \quad (\text{A.42})
\end{aligned}$$

Podemos ver desarrollado en la referencia bibliográfica [7], como siendo cada uno de los límites resultantes en la expresión A.42 igual a infinito, si la función $f(x)$ es continua y derivable cuando $r \rightarrow 0$, la suma de ambos es igual a la parte finita.

Podemos afirmar por tanto,

La integral en Γ_e de una función de la forma $\frac{f(y)}{r^2}$, si $f(y)$ es continua y derivable cuando $r \rightarrow 0$, es igual a la parte finita.

$$\int_{\Gamma_e} \frac{f(y)}{r^2} d\Gamma = pf \left(\int_{\Gamma_e} \frac{f(y)}{r^2} d\Gamma \right)$$

A.3.4 Regularización de integrales hipersingulares.

Podemos aproximar el valor de $\int_{-a}^{+b} \frac{f(x)}{x^2} dx$ regularizando la integral mediante utilización de los términos cuadráticos del desarrollo en serie de $f(x)$. Así, en el entorno del punto de hipersingularidad, $x = 0$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + TOS \quad (\text{A.43})$$

despejando,

$$f(x) - f(0) - f'(0)x = \frac{1}{2}f''(0)x^2 + TOS \quad (\text{A.44})$$

Podemos expresar,

$$\int_{-a}^{+b} \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_{-a}^{+b} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} dx + \int_{-a}^{+b} \frac{f(0) + f'(0)x}{x^2} dx =$$

$$= \int_{-a}^{+b} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} dx + f(0) \int_{-a}^{+b} \frac{1}{x^2} dx + f'(0) \int_{-a}^{+b} \frac{1}{x} dx \quad (\text{A.45})$$

En la expresión A.45 obtenemos las siguientes integrales,

$$\int_{-a}^{+b} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} dx \quad (\text{A.46})$$

en el entorno del punto $x = 0$, según la expresión A.44 podemos aproximar,

$$\frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} \simeq \frac{1}{2} f''(0) \quad (\text{A.47})$$

por lo que se trata de una integral regular que calcularemos por procedimientos numéricos.

$$\int_{-a}^{+b} \frac{1}{x^2} dx \quad (\text{A.48})$$

integral impropia de segunda especie divergente, siendo su valor principal de Cauchy igualmente divergente, por lo que consideraremos su caracter hipersingular, sustituyéndola por su parte finita,

$$\int_{-a}^{+b} \frac{1}{x^2} dx = pf \left(\int_{-a}^{+b} \frac{1}{x^2} dx \right) = - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (\text{A.49})$$

$$\int_{-a}^{+b} \frac{1}{x} dx \quad (\text{A.50})$$

integral impropia de segunda especie divergente, siendo su valor principal de Cauchy convergente.

$$\int_{-a}^{+b} \frac{1}{x} dx = VPC \int_{-a}^{+b} \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a \quad (\text{A.51})$$

Concluimos,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{+b} \frac{f(x)}{x^2} dx &= \int_{-a}^{+b} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} dx + f(0) pf \left(\int_{-a}^{+b} \frac{1}{x^2} dx \right) + f'(0) VPC \int_{-a}^{+b} \frac{1}{x} dx = \\
&= \int_{-a}^{+b} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} dx - f(0) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + f'(0) (\ln b - \ln a) \quad (\text{A.52})
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] S.DAS A.K.MITRA. Solution of inverse problems by using the boundary element method. 1992.
- [2] GOTTFRIED ANGER. *Inverse problems in differential equations*. Plenum Press, 1990.
- [3] MARC BONNET. *Equations integrales et elements de frontiere*. Eyrolles, 1995.
- [4] J.DOMINGUEZ C.A.BREBBIA. *Boundary Elements An Introductory Course*. Computational Mechanics Publications, 1992.
- [5] P.REYERO E.ALARCON. *Guia de introducción al metodo de los elementos de contorno*. Escuela Tecnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid, 1983.
- [6] J.CANAS F.PARIS. *A BEM primer*. Escuela Tecnica Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla, 199?
- [7] M. GUIGGIANI. Direct evaluation of hypersingular integrals in 2d bem. 1992.
- [8] H.D.BUI. *Introduction aux problemes inverses en mecanique des materiaux*. Eyrolles, 1993.
- [9] J.D.ACHENBACH. *Wave propagation in elastic solids*. North-Holland, 1975.
- [10] J.DOMINGUEZ. *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, 1993.
- [11] JAVIER JESUS GONZALEZ MARTINEZ JOSE MARIA VARONA RUIZ. *Mecanica de los medios continuos*. ETS Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Santander, 1988.

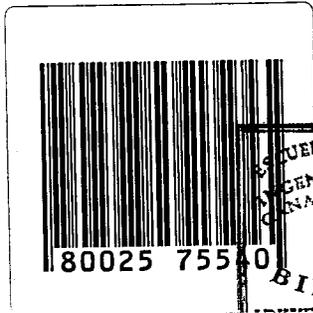
- [12] ANDREAS KIRSCH. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer, 1996.
- [13] ALBERTO GALINDO LORENZO ABELLANAS. *Métodos de cálculo*. McGraw Hill, 1990.
- [14] GEORGE E. MASE. *Mecánica del Medio Continuo*. McGraw-Hill, 1977.
- [15] FEDERICO PARIS. *Teoría de la Elasticidad*. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad de Sevilla, 1996.
- [16] AVELINO SAMARTIN QUIROGA. *Curso de elasticidad*. Bellisco, 1990.
- [17] JOSE DOMINGUEZ RAFAEL GALLEGO. Hypersingular bem for transient elastodynamics. 1996.
- [18] GEORGE F. SIMMONS. *Ecuaciones diferenciales*. McGraw-Hill, 1993.
- [19] Y. TANAKA M., MASUDA. Boundary element method applied to some inverse problems. 1989.
- [20] DENNIS G. ZILL. *Ecuaciones diferenciales*. Grupo Editorial Iberoamerica, 1986.

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Biblioteca Universitaria



00828540

ETS ING. CAM., CAN. Y P.()



Fecha: veintitres de Noviembre de 1998

Su Ref^a.

Nuestra Ref^a.

Fecha de Salida:

Unidad de Origen: COMISIÓN DE DOCTORADO

ESQUEMA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS GRANADA	
UNIVERSIDAD DE GRANADA	
COMISION DE DOCTORADO	
ENTRADA	SALIDA
Nº 2634	Nº

UNIVERSIDAD DE GRANADA	
Reg. de Tesis	
24 NOV. 1998	
SALIDA Nº 17943	

Destinatario:

Ilmo. Sr. Decano

E.T.S. INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS
GRANADA

En cumplimiento del artículo 36 de las Normas Regulatoras de los estudios de Tercer Ciclo de esta Universidad, adjunto se remite un ejemplar de la Tesis Doctoral presentada por el Doctorando D.FRANCISCO JAVIER SUAREZ MEDINA titulada APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO A LA RESOLUCION DEL PROBLEMA INVERSO EN ELASTODINAMICA y dirigida por el Profesor/es Dr/es RAFAEL GALLEGO SEVILLA con objeto de mantenerla depositada desde el día veintitres de Noviembre de 1998 hasta el día treinta y uno de Diciembre de 1998 para que pueda ser examinada por cualquier Doctor que así lo desee.

Granada a veintitres de Noviembre de 1998.

EL SECRETARIO DE LA COMISIÓN DE DOCTORADO,



A handwritten signature in black ink, appearing to be "D. Sevilla Merino".

DIEGO SEVILLA MERINO
Secretario de la Comisión



UNIVERSIDAD DE GRANADA

COMISION DE DOCTORADO

Fecha: 23/11/98

Su Refª.

Nuestra Refª.

Fecha de Salida:

Unidad de Origen:

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS COMISIÓN DE DOCTORADO GRANADA	
27 NOV. 1998	
ENTRADA Nº 2628	SALIDA Nº

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Registro General

Asunto:

Aprobando Tribunal Tesis Doctoral

25 NOV 1998

Destinatario:

Íltmo. Sr. Decano

É.T.S. DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS
GRANADA

VALDARIF 18045

De conformidad con lo establecido en el artículo 9 del Real Decreto 778/1998, de 30 de abril, la Comisión de Doctorado de esta Universidad, en su sesión de 23/11/98 ha resuelto designar el siguiente Tribunal para juzgar la Tesis Doctoral presentada por **D. FRANCISCO JAVIER SUAREZ MEDINA** en el departamento de INGENIERIA CIVIL y que actuará de acuerdo con la siguiente constitución:

PRESIDENTE: DR. D. JOSE DOMINGUEZ ABASCAL (UNIVERSIDAD DE SEVILLA)

VOCALES: DR. D. ENRIQUE ALARCON ALVAREZ (UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID)

DR. D. MARC BONNET (ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSES.PARIS)

DR. D. FERMIN LUIS NAVARRINA MARTINEZ (UNIVERSIDAD DE LA CORUÑA)

SECRETARIO DR. D. JOSE JUAN QUESADA MOLINA (UNIVERSIDAD DE GRANADA)

SUPLENTE DR. D. JOSE GOICOLEA RUIGOMEZ (UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID)

DR. D. JOSE CHACON MONTERO (UNIVERSIDAD DE GRANADA)

(Caso de tener que recurrir a los suplentes, el Tribunal deberá cumplir en el momento de constituirse los requisitos establecidos en el art. 9.2. del Real Decreto 778/1998 de 30 de Abril).

No obstante se le advierte que el presente acuerdo quedaría sin efecto si la Tesis no fuese admitida a trámite una vez transcurrido el período de depósito.

EL SECRETARIO DE LA COMISIÓN DE DOCTORADO



DIEGO SEVILLA MERINO

Secretario de la Comisión