

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUNYA  
E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



OPTIMIZACIÓN DEL DESPACHO  
ECONÓMICO EN SERVICIOS  
ELÉCTRICOS MEDIANTE  
PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA

TESIS DOCTORAL

ANTONIO ESPÍN ESTRELLA  
Barcelona, 1996

OPTIMIZACIÓN DEL DESPACHO ECONÓMICO

EN SERVICIOS ELÉCTRICOS MEDIANTE

PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA

Antonio Espín Estrella

OPTIMIZACIÓN DEL DESPACHO ECONÓMICO  
EN SERVICIOS ELÉCTRICOS MEDIANTE  
PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA

MEMORIA QUE PRESENTA

ANTONIO ESPIN ESTRELLA

PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA

OCTUBRE de 1.995

DIRECTORES

DR. D. RICARD BOSCH TOUS

DR. D. MIGUEL DELGADO CALVO-FLORES

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

E. T. S. INGENIEROS INDUSTRIALES

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUNYA

La memoria titulada:

"OPTIMIZACIÓN DEL DESPACHO ECONÓMICO, EN SERVICIOS  
ELÉCTRICOS, MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA"

que presenta Antonio Espín Estrella, para optar al grado de DOCTOR en INGENIERÍA, ha sido realizada en colaboración de los Departamentos de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial e Ingeniería Civil, de la Universidad de Granada, e Ingeniería Eléctrica de la Universidad Politécnica de Barcelona, bajo la dirección de los doctores D. Ricard Bosch Tous y D. Miguel Delgado Calvo - Flores.

Barcelona, Octubre de 1.995

Fdo. Antonio Espín Estrella

Fdo. D. Ricard Bosch Tous y D. Miguel Delgado Calvo-Flores

## A G R A D E C I M I E N T O S

Con unas pocas palabras quisiera agradecer, en general, a los distintos componentes del Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, de la Universidad de Granada, que con gran comprensión y amabilidad me han atendido cuando me acerqué al Departamento para pedir su ayuda y que me animaron en todo momento; a los componentes del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Politécnica de Catalunya que también fueron receptivos a las consultas y al trabajo presentado y, en particular, a los directores de la Tesis, D. Miguel Delgado Calvo - Flores y D. Ricard Bosch Tous. Al primero por su gran paciencia, en la cercanía, y al segundo por sus consejos, ayuda, ánimos y colaboración en la distancia.

A todos mi agradecimiento.

A mi familia.

---

---

## I N D I C E

	Pag
Capítulo 1.- INTRODUCCIÓN	1
Capítulo 2.- LOS SERVICIOS ELÉCTRICOS	13
1.- INTRODUCCIÓN	13
2.- PREVISIÓN DE CARGAS	14
2.1.- Previsión a corto plazo	16
2.2.- Previsión a largo plazo	17
2.3.- Planificación de operaciones	19
2.3.1.- Despacho Económico de cargas	20
2.3.2.- Despacho Económico incluyendo pérdidas	22
2.3.3.- Coordinación hidrotérmica	24
3.- PLANIFICACIÓN DE LA EXPANSIÓN DE GENERACIÓN	25
3.1.- Estudio de reserva de generación	26
3.2.- Comparaciones económicas	30
3.3.- Modelos de planificación de generación	31
4.- PLANIFICACIÓN DE LA EXPANSIÓN EN LA TRANSMISIÓN	32
4.1.- El problema de la expansión	32
4.2.- Métodos de solución propuestos	34

5.- INTRODUCCIÓN AL CONTROL DE UN SISTEMA DE POTENCIA	36
5.1.- Generalidades	36
5.2.- Características de entrada - salida	38
6.- D. E. SIN PÉRDIDAS DE TRANSMISIÓN	40
6.1.- Formulación del problema	40
6.2.- D. E. sin restricciones de generación	44
6.3.- D. E. con restricciones de generación	50
 Capítulo 3.- PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA	 55
1.- INTRODUCCIÓN	55
2.- CONJUNTOS DIFUSOS	60
2.1.- Conjunto difuso	61
2.2.- $\alpha$ - corte	61
2.3.- Teorema de Representación	62
2.4.- Convexidad	62
2.5.- Normalización	63
2.6.- Teorema de Extensión	63
3.- NÚMEROS DIFUSOS	64
3.1.- Números difusos trapezoidales	65
3.2.- Números difusos triangulares	67
3.3.- Operaciones básicas	68
3.3.1.- Operaciones con números difusos trapezoidales	68
3.4.- Comparación de números difusos	69
3.4.1.- Métodos basados en la definición de función ordenadora	70



3.4.1.1.- Índices de Yager	70
3.4.1.2.- Relación de Adamo	72
3.4.1.3.- Índice promedio	73
4.- PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA	73
4.1.- Problemas de P. L. con restricciones difusas	74
4.2.- Problemas de P. L. con coeficientes difusos	75
4.3.- Problemas de P.L. con costes difusos	77
4.4.- Modelo general de P. L. D.	77
4.5.- Métodos de resolución en P. L. D.	79
4.5.1.- P.L. con restricciones difusas	79
4.5.1.1.- Soluciones	80
4.5.1.1.1.- Difusa	80
4.5.1.1.2.- Satisfacción de objetivos y restricciones	82
4.5.2.- P.L. con restricciones y meta difusas	84
4.5.2.1.- Resolución	84
4.5.3.- Análisis conjunto de los modelos con restricciones difusas	87
4.5.4.- P. L. D. con coeficientes imprecisos	90
4.5.4.1.- Resolución	90
4.5.4.1.1.- Modelo general	90

4.5.4.1.2.- Modelo particular basado en una relación de comparación de números difusos	93
Capítulo 4.- RESOLUCIÓN PROBLEMA D.E. MEDIANTE P.L.D.	97
1.- INTRODUCCIÓN	97
2.- MODELOS DE P.L.D EN EL DESPACHO ECONÓMICO	101
2.1.- Primer modelo: D.E. CON DEMANDA DE POTENCIA PUNTUAL	101
2.1.1.- Formulación del problema	101
2.1.2.- Ejemplos	104
2.1.2.1.- Problema 1	104
2.1.2.1.1.- Técnicas de resolución	105
2.1.2.1.1.1.- Curva rendimiento/potencia	105
2.1.2.1.1.2 .- Método gráfico	105
2.1.2.1.1.3.- Por P.L.	109
2.1.2.1.1.4.- Por P.L.D.	109
2.1.2.1.1.4.1.- Solución difusa	111
2.1.2.1.1.4.2.- Satisfacción restricciones y objetivo	114
2.1.2.1.1.4.3.- Resticciones y meta difusas	118

2.1.2.1.2.- Consideraciones	120
2.1.2.1.3.- Ahorro	123
2.1.2.1.3.1.- Del reparto difuso frente al igualitario	125
2.1.2.1.3.2.- Del reparto difuso frente al de P.L.	126
2.1.2.1.4.- Comentarios	126
2.2.- Segundo modelo: D.E. CON DEMANDA DE POTENCIA VARIABLE	127
2.2.1.- Formulación del problema	127
2.2.2.- Ejemplos	129
2.2.2.1.- Problema 2	129
2.2.2.1.1.- Técnicas de resolución	130
2.2.2.1.1.1.- Método gráfico	130
2.2.2.1.1.2.- Mediante P.L.	132
2.2.2.1.1.3.- Mediante P.L.D	133
2.2.2.1.1.3.1.- Solución difusa	135
2.2.2.1.1.3.2.- Satisfacción restricciones y objetivo	136
2.2.2.1.1.3.3.- Resticciones y meta difusas	138
2.2.2.1.2.- Consideraciones	140

2.2.2.1.3.- Ahorro	146
2.2.2.1.3.1.- Del reparto difuso frente al igualitario	146
2.2.2.1.3.2.- Del reparto difuso frente al de P.L.	147
2.2.2.1.4.- Comentarios	148
2.3.- Tercer modelo: D.E. CON DEMANDA DE POTENCIA VARIABLE Y UNIDADES DE POTENCIA	
VARIABLES	149
2.3.1.- Formulación del problema	149
2.3.2.- Ejemplos	150
2.3.2.1.- Problema 3	150
2.3.2.1.1.- Técnicas de resolución	150
2.3.2.1.1.1.- Método gráfico	150
2.3.2.1.1.2.- Mediante P.L.	152
2.3.2.1.1.3.- Mediante P.L.D	153
2.3.2.1.1.3.1.- Solución difusa	155
2.3.2.1.1.3.2.- Satisfacción restricciones y objetivo	158
2.3.2.1.1.4.3.- Resticciones y meta difusas	160
2.3.2.1.2.- Consideraciones	162

2.3.2.1.3.- Ahorro	167
2.3.2.1.3.1.- Del reparto de P.L. frente al igualitario	167
2.3.2.1.3.2.- Del reparto difuso frente al igualitario	167
2.3.2.1.3.2.- Del reparto difuso frente al de P.L.	168
2.3.2.1.4.- Comentarios	169
2.4.- Cuarto modelo: D.E. CON COEFICIENTES DIFUSOS, DEMANDA DE POTENCIA Y UNIDADES DE POTENCIA VARIABLES	
2.4.1.- Formulación del problema	171
2.4.2.- Ejemplos	173
2.4.2.1.- Problema 4	173
2.4.2.1.1.- Técnicas de resolución	173
2.4..2.1.1.1.- Método gráfico	173
2.4.2.1.1.1.2.- Mediante P.L.	176
2.4.2.1.1.1.3.- Mediante P.L.D	176
2.4.2.1.1.3.1.- Mediante funciones ordenadoras	181
2.4.2.1.1.3.1.1.- Con el primer índice de Yager	182
2.4.2.1.1.3.1.2.- Con el tercer índice de Yager	182

2.4.2.1.1.3.1.3.- Con el índice de Adamo	183
2.4.2.1.1.3.1.4.- Con el índice promedio	184
2.4.2.1.2.- Consideraciones	185
2.4.2.1.3.- Ahorro	185
2.4.2.1.3.1.- Del reparto difuso frente al de P.L	185
2.4.2.1.4.- Comentarios	187
2.4.2.2.- Problema 5	187
2.4.2.2.1.- Resolución mediante P. L. D.	188
2.4.2.2.1.1.- Mediante funciones ordenadoras	188
2.4.2.2.1.1.1.- Con el primer índice de Yager	189
2.4.2.2.1.1.2.- Con el tercer índice de Yager	189
2.4.2.2.1.1.3.- Con el índice de Adamo	190
2.4.2.2.1.1.4.- Con el índice promedio	191
2.4.2.2.2.- Consideraciones	192
2.4.2.1.3.- Ahorro	192
2.4.2.1.3.1.- Del reparto difuso frente al de P.L.	192

2.4.2.2.4.- Comentarios	193
Capítulo 5.- COMENTARIOS FINALES	211
CONCLUSIÓN	212
FUTURO	214
BIBLIOGRAFÍA	219

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN



## INTRODUCCIÓN

En todos los modelos de optimización utilizados hasta ahora se admitía como hipótesis básica que las magnitudes intervinientes toman valores concretos y sus aplicaciones a los distintos campos, como al de la Ingeniería que nos ocupa, siguen desarrollándose a través de dicha exactitud de valores o situaciones, pero los mecanismos de decisión y optimización que utilizan los seres humanos en su vida real trabajan con magnitudes valoradas en términos vagos y así están dotados de mayor riqueza que los modelos matemáticos con los que se pretende darles solución.

Si nos atenemos al concepto tradicional de optimización, ésta es exacta, no admite ambigüedades, pero esta exactitud no es la que, en general, utiliza un decisor en su trabajo. El decisor aplica mecanismos de mayor complejidad para resolver los problemas y luego los procesa, según sus conocimientos, capacidad, habilidades, experiencia, sentido común,...

La/s persona/s que tienen la obligación de decidir trabajan, normalmente, en un plano más especulativo; utilizan conceptos más ambiguos, con diversas posibilidades de interpretación que se ajustarán a unas respuestas que estudiará/n y actuará/n en consecuencia. El filósofo B. Russell dice que la vaguedad existe pero que la lógica formal es incapaz de manejarla.

En el campo de la Ingeniería es fácil encontrarse con expresiones como "esta máquina es mejorable", "esta instalación está relativamente nueva", "ésta es la mejor posible", "el ruido es pasable",... que nos indican un manejo habitual de la vaguedad, lo que no siempre es por desconocimiento sino que, en muchos casos, procede de la necesidad de simplificar a la hora de determinar ciertos parámetros que son magnitudes muy complejas de un cierto ámbito o dominio [Zim76]. Sin embargo, a la hora de llevar a cabo operaciones de optimización siempre se barajan valores concretos: potencia demandada, 250 kW, o, en el mejor de los casos, entre 150 y 325 kW; tensión de servicio 20 kV; etc.

Atendiendo a estas consideraciones, vemos que es necesario el manejo de datos con valores ambiguos, valores que en la literatura al uso se denominan "difusos" o "fuzzy", que parecen ajustarse más a las características de las personas en el dominio de su trabajo porque cuando decimos que "el rendimiento de esta unidad es mejor que el de la otra" ¿cuantificamos el rendimiento? ¿Es recomendable esta mejoría? ¿Es suficiente?

En todo caso aceptamos una imprecisión que luego se materializa en valores más o menos controlados.

Hablando de modo muy general, puede decirse que el objetivo de esta Memoria es explorar las posibilidades del empleo de técnicas y/o algoritmos difusos al ámbito del Despacho Económico (D.E.) donde tradicionalmente se han empleado técnicas clásicas, básicamente. Adicionalmente exploraremos el uso de esta técnica en otros problemas clásicos de la Ingeniería Eléctrica.

Como se sabe, la operación de Despacho Económico es la fijación de la carga entre generadores operativos de energía eléctrica. Por tanto, el problema general a resolver será:

"Se tienen n unidades generadoras de energía trabajando en paralelo, cuyos costes incrementales de generación vienen dados por n funciones del tipo:

$$\lambda_i = a_i + b_i * P_i$$

Se desea cumplir con una determinada petición de consumo, de la forma más económica (despreciando las pérdidas de transmisión)".

Tradicionalmente se ha resuelto mediante PROGRAMACION LINEAL (P.L.):

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = cx \\ \text{s.a.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Los valores utilizados son muy concretos, no había posibilidad de su modificación, por ejemplo en la previsión de la demanda, lo que en realidad no ocurre con frecuencia en este tipo de Servicios, sino que es normal que se acepten aproximaciones, dentro de lo razonable, de acuerdo con el tipo de instalaciones. Es frecuente que en operaciones de D. E. oír que se necesitarán "aproximadamente", "alrededor de", "más o menos", ... tantos MW, según la experiencia y conocimientos, para cumplir con las peticiones de consumo.

También es frecuente que se tenga en cuenta que las unidades generadoras no tienen unos valores límites de trabajo estables, sino que, por el contrario, se sabe que, según las unidades que se utilicen, éstas tendrán un margen "más o menos" preciso, o sea que el decisor acepta ciertas violaciones en dichos límites, controladas por su experiencia y conocimientos.

Además, la ecuación de partida para cada unidad de generación se compone de unos parámetros que no siempre son tan concretos sino que deben ser estimados como valores "más o menos", "aproximadamente",... Esto nos lleva a pensar que en la ecuación de partida del costo incremental también se han de tener en cuenta estas vaguedades ya conocidas.

Todo lo anterior hace que los responsables del Servicio asuman unas decisiones para mejorar sus prestaciones, en función de diversas circunstancias como pueden ser: estación del año,

previsiones meteorológicas, horas de funcionamiento, lugar de suministro, tipo de instalaciones, modelo de unidades de generación, etc. y que sus conocimientos les indican como más aconsejables.

Estudiaremos servicios con estas características, donde el responsable decide admitir algún grado de "vaguedad" en la previsión de necesidades, por ejemplo "cercana a", de la carga total y/o respecto a las unidades de generación.

Este problema se puede plantear teniendo en cuenta las situaciones normales de trabajo en el D.E. de los Servicios Eléctricos y resolver mediante Programación Lineal Difusa (P.L.D.).

En su forma general es:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \lambda \\
 & \text{s.a.} \quad \lambda_i = a_i + b_i * P_i \\
 & \quad \sum P_i = P_T \\
 & \quad P_1 \leq P_i \leq P_2 \\
 & \quad P' \leq P_T \leq P'' \\
 & \quad i = 1, n
 \end{aligned}$$

siendo:  $\tilde{a}$  y  $\tilde{b}$  coeficientes difusos  
 $\lambda$  coste incremental  
 $P_i$  potencias de las unidades de generación  
 $P_1$  y  $P_2$  límites de potencia de las unidades de generación  
 $P_T$  demanda de consumo  
 $\tilde{P}'$  y  $\tilde{P}''$  límites de demanda de consumo  
 $\tilde{=}$  y  $\tilde{\leq}$  restricciones difusas que aplicará el decisor.

El decisor puede aceptar violaciones en el cumplimiento de las restricciones, mediante funciones de pertenencia de la forma:

$$\mu_i: \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \quad i = 1, n$$

que el optimizador considera como válidas.

Para el estudio presentado nos basamos en las diversas tendencias actuales de investigación, (fundamentalmente los trabajos de R. Bellman y L. A. Zadeh, Tanaka, Zimmermann, Delgado, Verdegay y Werners) que podremos resumir en:

- Técnicas de resolución de programación paramétrica, basadas en el teorema de la Representación de conjuntos "fuzzy" de Negoita y Ralescu (1975).

- Técnicas de resolución usando aritmética "fuzzy", o sea, problemas con coeficientes difusos.

Creemos que esta Memoria aporta una aplicación práctica de la línea de investigación generada por la MATEMATICA DIFUSA y que, en el campo de la Ingeniería, puede ser muy interesante en el futuro, ya que la prestigiosa "Real - World Computing Program" de Japón [Rwc93], en un informe publicado en 1.993, ha dado un respaldo importante a los métodos de optimización basados en lógicas flexibles, lo que garantiza la importancia de los procedimientos, desarrollos, métodos y modelos que en la actualidad tienen los sistemas que utilizan la P.L.D. como método de resolución.

Como se ha dicho anteriormente, mediante esta Tesis se pretende resolver uno de los problemas que se plantean en los Servicios Eléctricos, el del DESPACHO ECONÓMICO, mediante la **PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA DIFUSA**. Además, se pretende abrir el campo para trabajar en el futuro, desde este nuevo punto de vista, en otros ámbitos de los Servicios Eléctricos, que se relacionan más adelante.

La experiencia enseña que buenas soluciones teóricas, para la resolución de los problemas del Despacho Económico, en la práctica no funcionan por diversas causas, y una de ellas es no contemplar la experiencia de los operarios del sistema y no darles un margen de posibilidades de participación en la generación de los programas de funcionamiento así como en su adecuación de forma activa, o sea, tenerlos sujetos a un proceso

automatizado que ellos entienden que no mejora sus conocimientos y capacidades.

El problema que se plantea es darle un nuevo enfoque a las soluciones actuales del problema de optimización del coste generación - transporte de energía mediante el uso de esta nueva herramienta.

Parece oportuna esta nueva directriz ya que actualmente la Matemática Difusa nos proporciona nuevos argumentos (razonables) para que se intente estudiar este reto diario de las decisiones a tomar, en cuanto al aprovechamiento energético, mantenimiento (ya sea preventivo o predictivo) de las instalaciones y maquinarias, optimización de consumo (con lo que representa de ahorro en la economía del país), seguridad, etc.

La conjunción de elementos básicos en el problema del transporte (generación - distribución - consumo - seguridad) y los de la Programación Matemática Difusa, en su modelo general, nos hacen pensar que es interesante abrir otro camino de investigación para la resolución de problemas que se presentan de forma continua en la vida de las industrias de Servicios Eléctricos a media y gran escala y, fundamentalmente, en el Despacho Económico.



La idea es emplear las distintas fluctuaciones de carga, generación, pérdidas, costes, ... en un modelo de previsión difuso que nos proporcione (junto a los conocimientos de los expertos) un sistema de ayuda a la decisión a tomar, en función de las necesidades o previsiones, y obtener así un modelo matemático que sea útil, deducido mediante unas reglas de control difuso, como pueden ser:

- 1) Experiencia y conocimiento del Ingeniero o responsable: consistente en la modelización diaria sobre el sistema, expresada en forma lingüística y que se reflejará en un manual de operaciones del proceso.
- 2) Modelo difuso del proceso: que parte de una estructura que se puede tratar metodológicamente con mayor facilidad.
- 3) Aprendizaje: que por medio de reglas y meta-reglas van modificando la base de conocimiento de partida hasta conseguir el comportamiento adecuado.

En las revistas especializadas ya hay algún artículo que hace referencia a la aplicación de la **PROGAMACIÓN LINEAL DIFUSA** a diversos aspectos de la optimización en otros campos, como es el almacenamiento de carga [Che93], (aunque en el ejemplo aclaratorio se refiere al aire acondicionado) y no a problemas

de mayor envergadura como el generación - transporte de energía eléctrica, objeto de nuestro estudio, o bien otros ámbitos en los que creemos pueden obtenerse buenos resultados en un futuro próximo.

Entre los últimos trabajos publicados, que tratan temas referidos a Sistemas Eléctricos mediante técnicas difusas, también podríamos destacar [Sak93] y [Mir95].

Esta Tesis se configura en tres grandes bloques, a saber:

- SERVICIOS ELÉCTRICOS
- MATEMÁTICA DIFUSA
- APLICACIONES

A su vez, dichos bloques se han distribuido en los capítulos siguientes:

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN.

Donde se hace una presentación de la Tesis, su motivación y sus objetivos.

## Capítulo 2. LOS SERVICIOS ELÉCTRICOS.

Donde se hace un rápido recorrido para introducirnos en algunos de los campos de actuación de dichos Servicios y ponernos en situación de conocer el estado actual de los estudios en estos ámbitos, fundamentalmente en el campo de la optimización del DESPACHO ECONÓMICO (DISPATCHING).

## Capítulo 3. PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA.

En este capítulo se hace un recordatorio de algunos conceptos difusos generales así como un breve repaso de los elementos básicos de la Programación Lineal Difusa necesarios para resolver el problema planteado.

## Capítulo 4. RESOLUCIÓN DEL DESPACHO ECONÓMICO MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA.

Aquí se recogen los aspectos reflejados en los capítulos anteriores; se amplía con diversos ejemplos; se hacen unas aplicaciones a situaciones posibles en el Despacho Económico en su forma clásica y finalmente se presenta la solución difusa, objetivo propuesto en esta Tesis, según el siguiente esquema:

- Modelo general.
- Modelo general difuso.
  - Interpretaciones.
- Modelo particular.
  - Ejemplo.
    - Solución gráfica.
    - Solución clásica.
    - Solución difusa.
    - Ahorro.
    - Comentarios sobre ejemplos.

y por último:

Capítulo 5. COMENTARIOS FINALES.

## CAPÍTULO 2

### LOS SERVICIOS ELÉCTRICOS

## LOS SERVICIOS ELÉCTRICOS

### 1.- INTRODUCCIÓN

La electricidad es un medio de transporte de energía desde fuentes tales como el carbón, petróleo, gas, salto de agua o reacciones nucleares, para demandas de calor, luz o movimiento.

La energía eléctrica no puede ser almacenada sino que debe ser generada y liberada conforme a la subida de la demanda.

Ya en 1970 se hizo un estudio de recopilación por la Comisión de Potencia Federal de los E.E. U.U. para hacer que el Servicio Eléctrico sea comprensivo. En él se hacían análisis industriales de crecimiento, generación, transmisión, combustibles, polución, estéticos, seguridad, financiación, consumos, etc. [FPC70].

A partir de ese momento, y sin perder de vista los trabajos anteriores, aparecen dos tipos de actividades fundamentales en la Investigación Operativa (I.O.) de la industria de Servicios Eléctricos. La primera fué la aproximación a los equipos con personas de nivel operativo importante: ingenieros, matemáticos

y otras disciplinas que se enfrentaban a un problema y decidían la implementación de la solución del problema estudiado. Uno de ellos es el **DESPACHO ECONÓMICO** (Dispatching) que reconocía las pérdidas y otro es "PLANIFICACIÓN" de la generación de reservas usando métodos de probabilidad.

El segundo tipo de actividad incluye técnicas específicas de la I.O.: previsiones a corto plazo mediante métodos exponenciales corregidos, dispatching de multisistemas y planificación de redes de transmisión usando Programación Lineal, son ejemplos al caso.

Veamos resumidos algunos de los puntos que se consideran básicos para la Introducción al Estudio de los Servicios Eléctricos, que se han de mencionar directa o indirectamente, para dirigir el trabajo hacia la aplicación de la **MATEMÁTICA DIFUSA** en este campo.

## **2.- PREVISIÓN DE CARGAS**

La previsión de cargas en los Servicios Eléctricos implica tres características distintas: previsión de cantidad, periodo de tiempo y método usado.

### A.- Previsión de cantidad

- 1.- MW de potencia de pico de demanda en un día, estación o año (periodo de tiempo).

- 2.- Forma de la curva de demanda.
- 3.- MWh de energía en un día, mes o año.

#### B.- Periodo de tiempo

- 1.- Corto: 1 hora o varias semanas.
- 2.- Largo: una estación para muchos años.

#### C.- Métodos de previsión

- 1.- Parecidos a un día o secuencia de días
- 2.- Extrapolación a series temporales.
- 3.- Correlación con otras consideraciones como el tiempo meteorológico, número de usuarios o negocios.
- 4.- Predominio del movimiento.
- 5.- Suavización exponencial.
- 6.- ...

Los departamentos financieros prevén la energía en función de gastos de combustibles, ingresos estimados, ..., mientras que los departamentos operativos fijan sus puntos de referencia en las demandas de pico para planificar los cambios de carga y esto llega a la contradicción que en un mismo servicio y departamentos distintos a menudo hacen previsiones distintas.

La meta de tales pronósticos es estar dentro de un margen aceptable y con errores también aceptables de ese margen, o sea, tender a un límite de precisión posible.



### 2.1.- Previsión a corto plazo

¿Cuál va a ser la demanda de electricidad para el medio día de mañana? Un operador del sistema con experiencia tendrá en cuenta los diversos factores que su conocimiento del problema le aporta y sistematizará y evaluará estos datos y tomará una decisión unipersonal que será más o menos difusa y con mayor o menor exactitud, en función de su carácter, conocimiento, experiencia, ...

Se han hecho algunos modelos de previsión mediante visitas al dispatching y usados métodos informáticos pero la experiencia demostraba que al final el operador volvía a sus propios métodos, ya que se cansaba de mantener al día la base de datos del programa ya que estas previsiones no eran mejores que las suyas.

En función de esto Chen y Winters aportaron un procedimiento que tenía en cuenta los métodos manuales y que mejoraron con un modelo de cuatro componentes para predecir la demanda del pico de carga [Che66]:

$$\text{Pico de demanda} = \text{Base} + \text{día semana} + \text{temperatura} + \text{nublado}$$

Se hicieron otros estudios aplicando las series de Fourier para previsiones de carga en periodo de 24 horas, pero han sido rechazados porque no supuso una mejora en la exactitud de la previsión [Chr71].

Lijesen y Gupte [Lij71], entre otros, hicieron modelos

matemáticos para previsiones semanales, teniendo en cuenta el tiempo atmosférico mediante una matriz de covarianzas. Otros, como Gupte y Yamada [Gup72], usaron funciones exponenciales y el efecto del tiempo atmosférico mediante regresión lineal. Pero ambos son demasiado molestos, según los mismos autores, porque son difíciles de explicar a los usuarios potenciales.

## **2.2.- Previsión a largo plazo**

Dada la historia de la carga (demanda) ¿cuál será el pico de carga el próximo verano? ¿y los próximos 20 veranos? ¿cuánta energía se demandará el próximo Julio? Se hacen necesarios análisis de tiempo no estacionario y asumir unos riesgos más o menos controlados, más o menos difusos, teniendo en cuenta una serie de restricciones.

Se han hecho estudios por diversas compañías americanas donde se extrapolaba el uso de la energía en clases de servicios tales como: comercial, industrial, agrícola, doméstico, ... durante una estación del año se sumaban y teniendo en cuenta los registros históricos se multiplicaban los resultados por un valor esperado, lo que tampoco parece muy exacto.

La agrupación Edison hizo un estudio donde su pico de demanda previsto lo sacaba de modelos de base más un añadidor sensible al tiempo atmosférico y luego tomaba en consideración las demandas de carga históricas y, además, le añade un índice

de reserva de producción industrial (como reducciones de voltaje).

El Centro de Investigación de la Energía de E.E. U.U. hace el estudio mediante curvas en U y acepta intervalos de temperatura en los cuales la carga es insensible a la temperatura, y las evaluaciones en otros intervalos se hace mediante regresión lineal. Pero este método tampoco consiguió unas mejoras interesantes por lo que se desechó [FPC70].

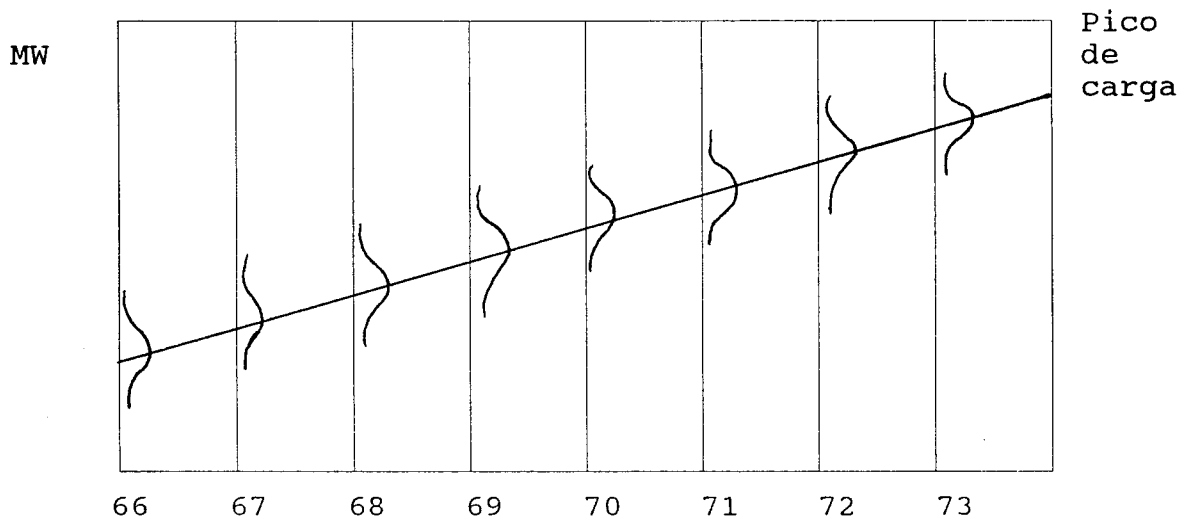


Figura 1. Pico de demanda usando historia temporal

Luego se estudiaron los picos de demanda por regresión múltiple.

Más adelante se utilizó un modelo de cuatro componentes:

- 1.- Número de consumidores residenciales.
- 2.- kWh básicos por consumidor.
- 3.- Factor energético residencial.
- 4.- Variable de tiempo.

**2.3.- Planificación de operaciones**

La planificación de operaciones selecciona las unidades de generación a sincronizar para que el sistema se adecue a la carga entre las unidades de operación. Los costos de operación de estas unidades, ya sean de saltos de agua, quemado de combustible o reacción nuclear, se han de minimizar, sin perjudicar el servicio ni la seguridad del sistema. La tabla 1 ofrece una guía de las operaciones más usuales.

Tabla 1. I. O. relacionada con sistemas de potencia

Tema	claves del tema
1. Despacho económico ignorando pérdidas	LP,NLP,DP
2. " " incluyendo "	LP,NLP
3. Coordinación hidrotérmica	LP,NLP,DP
4. Orden a la unidad	IP,DP,SP
5. Seguridad	LP,NLP,NF
6. Despacho económico de grandes sistemas	D&D,NF
7. Mantenimiento	IP
clave: LP Programación lineal	
NLP " no "	
IP Programación entera	
DP " dinámica	
SP Procesos estocásticos	
NF Flujos de redes	
D&D Descomposicion y visión	

Entre las operaciones a realizar se destacan:

### 2.3.1.- Despacho Económico (distribuidor) de cargas

El problema del Despacho Económico es minimizar el costo de combustible mientras se suministra la carga total y con todas las unidades operando entre sus límites de salida, máximo y mínimo.

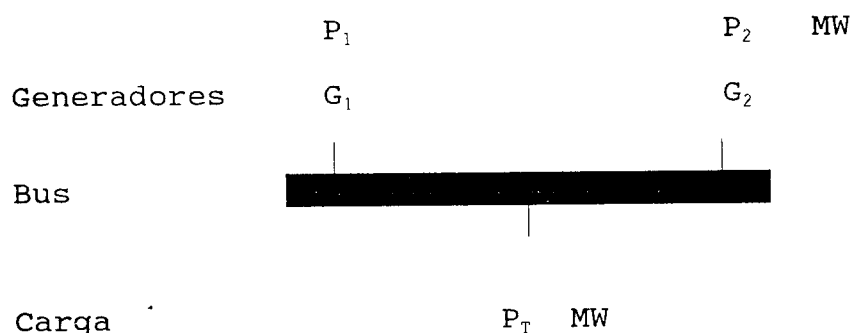


Figura 2. Diagrama simbólico de Despacho Económico

O sea:

$$\text{Minimizar } \Sigma \text{ COSTFUEL} \quad (1)$$

todas las unidades

$$\text{s.a. } \Sigma \text{ POTENCIA} = \text{CARGA} \quad (2)$$

todas las unidades

$$\text{PMIN} \leq \text{POTENCIA} \leq \text{PMAX} \quad \text{para todas las unidades operativas} \quad (3)$$

$$\text{POTENCIA} = 0 \quad \text{" " " no operativas} \quad (4)$$

siendo el COSTFUEL para cada unidad una función de la POTENCIA de salida.

Mediante un ordenador, y utilizando un sistema " $\lambda$ ", con operadores de Lagrange, se determina el Despacho Económico usando curvas de costo incremental, según la figura 3, de tal forma que las unidades pararán una vez que añadan al sistema la parte correspondiente para que el sistema funcione [Ste43].

De todas formas este sistema se estudió por Kirchmayer y no dió buen resultado ya que las pérdidas son significativas en un sistema disperso y las curvas de E/S de las unidades individuales no son funciones lineales ni cuadráticas [Kir58].

Los resultados demostraron que un modelo de E/S usando pasos graduales incrementales daban unos costes más bajos que los incrementales sesgados de la figura 3 [Rin63].

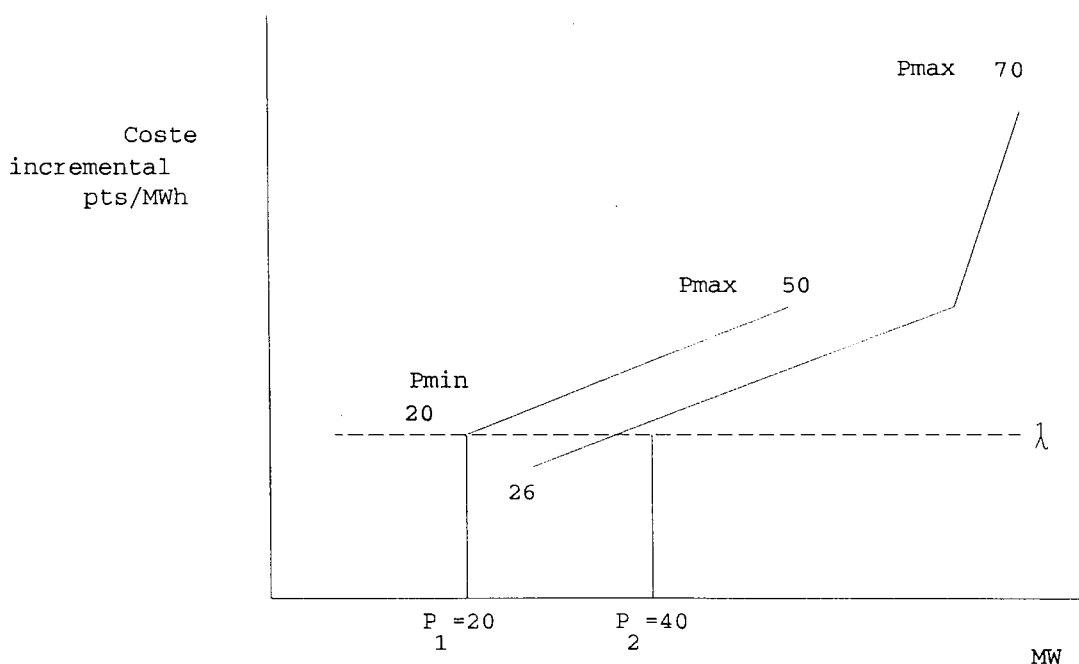


Figura 3. Curvas de costo incremental de un generador de potencia

### 2.3.2.- Despacho Económico incluyendo pérdidas

La potencia eléctrica que se transmite se acompaña de unas pérdidas de energía. El componente de pérdida mayor es el calor, calculado por el tiempo de paso de la corriente por la resistencia. Cuanto mayor es la distancia mayor es la resistencia y cuanto mayor es la potencia mayor es la intensidad, a un voltaje dado. Por esto, cuando las unidades de generación y cargas se dispersan en la red, tal como en la figura 4, es más económico generar potencia a un coste ligeramente más alto y más cercano a las cargas, e incurrir en pérdidas inferiores, que generar el mismo incremento de costo pero en un lugar distante.

Las pérdidas entran en las restricciones (2) como siguen:

$$\Sigma \text{ POTENCIA} = \text{LOAD} + \text{LOSSES} \quad (5)$$

todas las unidades

donde LOSSES (pérdidas) son las funciones no lineales de las variables de potencia.

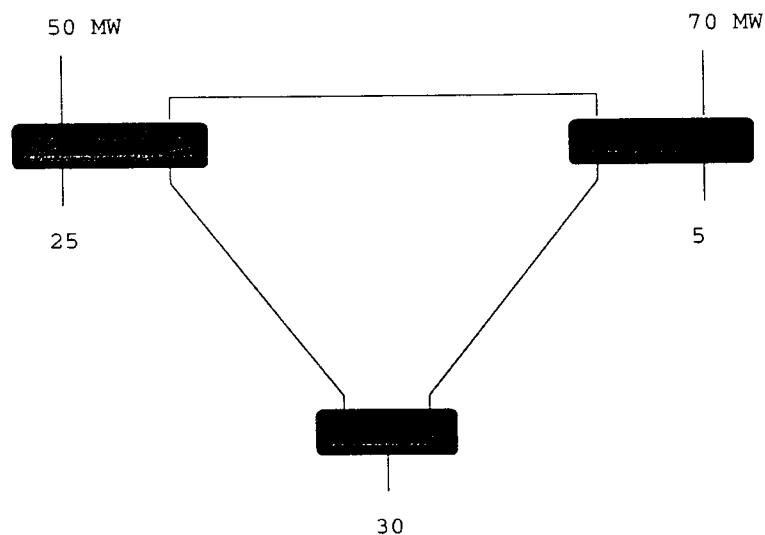


Figura 4. Red de un Despacho Económico

El método práctico para manejar estas restricciones no lineales se ajustó a una función cuadrática de las variables POTENCIA a la función LOSSES y se dedujeron factores de penalización para modificar cada unidad de coste incremental antes de igualarlo al sistema " $\lambda$ " anterior [Rin63].

La fórmula de pérdidas ha ganado amplia aplicación industrial pero requiere algunos ajustes.

Una cosa importante a superar es solucionar las ecuaciones de red mientras se minimizan los costes de combustible. La ecuación sencilla (5) se reemplaza por dos ecuaciones para cada nodo de la red. La primera ecuación fija que la suma de potencia real alrededor de un nodo debe ser igual a cero.

$$\text{POTENCIA} - \text{LOAD} = \sum \text{LINEFLOWS} \quad (6)$$

todas las líneas en el nodo

donde LINEFLOWS son los flujos de potencia generados en el nodo.

La segunda ecuación fija que la suma de potencia reactiva alrededor de cada nodo debe ser igual a cero:

$$\text{VARS} - \text{LOADVARS} = \sum \text{LINEVARS} \quad (7)$$

todas las líneas en el nodo

donde:

VARS es la potencia reactiva generada en el nodo.

LOADVARS es la potencia reactiva pedida en el nodo y

LINEVARS son los flujos de potencia reactiva que salen del nodo.



### 2.3.3.- Coordinación hidrotérmica

Una situación típica de dispatching es la coordinación entre fuentes de energía hidráulica y térmica. El salto de agua es una fuente de energía primaria pero su uso debe estar coordinado con operaciones de plantas térmicas para minimizar costes y asegurar el servicio.

La figura 4 muestra un sistema con dos plantas hidroeléctricas en serie de forma que el agua de salida de una planta se convierte en la entrada de la segunda. La coordinación de dichas plantas con otras térmicas requiere un estudio riguroso en el tiempo a fin de utilizar el agua para minimizar costes.

Ahora la formulación del problema del Dispatching llega a ser dependiente del tiempo e incluye límites sobre la salida de la energía de la planta hidroeléctrica:

$$\text{Min} \quad \sum \sum \text{FUELCOST} \quad (8)$$

tiempo; todas las unidades térmicas

$$\text{s. a.} \quad \sum \text{POWER} = \text{LOAD} \quad (\text{en cada periodo de tiempo}) \quad (9)$$

todas las unidades

$$\sum \sum \text{ENERGY} \leq \text{ENERGYMAX} \quad (10)$$

tiempo; todas las unidades hidro

(para cada conjunto de unidades hidro)

donde ENERGY es la integral de POTENCIA respecto al tiempo.

La energía total generada mediante el sistema hidroeléctrico se limita a la energía máxima en un periodo (10).

Se han hecho distintas aplicaciones con D. P., con diversos métodos y distintas combinaciones de plantas dando resultados no significativos [Fuk60].

La selección de las unidades a operar fué formulada como un problema de I. P. y D. P., pero todos los experimentos para usar métodos de Programación Matemática se han frustrado por la cantidad de requisitos prácticos que se precisan. Se necesita un procedimiento rápido y simple.

### 3.- PLANIFICACIÓN DE LA EXPANSIÓN DE GENERACIÓN

Las instalaciones de Servicios Eléctricos incluyen la planta de generación de potencia, la red de transmisión de potencia a estaciones de mayor voltaje y la red de distribución a los usuarios. Las actividades de I. O. se han concentrado en la expansión de la planta de transmisión y generación porque estas actividades representan las mayores inversiones de capital. Una sola unidad de generación, que puede significar una instalación total para una compañía, para uno o varios años, se planifica cuidadosamente teniendo en cuenta el volumen y tipo de combustible y donde se colocará.

La optimización matemática ha sido difícil de aplicar en planificación de generación aunque hay varios intentos en este sentido.

### 3.1.- Estudios de reserva de generación

La necesidad de reserva de la capacidad de generación se indica mediante la previsión de carga, que excede al nivel de las pérdidas de capacidad instalada y se requieren reservas para suplirlas. La mayor parte de los servicios eléctricos determinan sus requisitos de reservas usando procedimientos basados en probabilidad tales como el método de la probabilidad de pérdida de carga (L.O.L.P). El cálculo básico es la probabilidad de las capacidades de generación útiles, siendo menores que una carga específica. Por ejemplo, si se instalan 2 unidades de 50 MW y otra de 100 MW ¿Cuál es la probabilidad de no cumplir con una demanda de 130 MW? Asumiendo que cada unidad tiene 2 estados: utilizable o no y que las unidades de 50 MW tienen una probabilidad de 0.02 de arranque y la de 100 MW una probabilidad de 0.03, se puede formar una tabla, como la 2, con los estados de diferente capacidad de arranque y sus probabilidades exactas y acumuladas.

Tabla 2. Capacidad de carga para un sistema de 2 unidades

Estado	Capacidad de carga	Probabilidad exacta	Prob. Acum. de carga
1	0 MW	0.931588	1.000000
2	50	0.038024	0.068412
3	100	0.029200	0.030388
4	150	0.001166	0.001188
5	200	0.000012	0.000012

El método L.O.L.P. examina una serie de cargas para representar un año. Algunas variantes de este método utilizan cargas por hora, cargas por día, por semanas, etc. De todas formas, cualquiera que sea el número de cargas a representar en un año las probabilidades de no utilizarlas se suman, resultando un número esperado de días con pérdidas de capacidad. Por ejemplo, si se estudian tres cargas: 110, 130 y 90 MW, mediante el método L.O.L.P., los resultados se podrían representar como en la tabla 3.

Tabla 3. Cálculo de la probabilidad del flujo de carga usando un sistema para 200 MW.

Nº día	Carga	Reserva	Probabilidad pérdida capacidad
1	110 MW	90 MW	0.030388
2	130	70	0.030388
3	90	110	0.001188
nº esperado de días de pérdida de capacidad			0.061964

La cantidad resultante, 0.06194 días, en el ejemplo, representa el riesgo o la necesidad esperada de capacidad para cubrir las peticiones previstas.

El método de Monte Carlo, popular a finales de los 50, fué ensayado en la planificación de generación de reservas pero

requería demasiado tiempo de cálculo, por lo que se desechó pero se ha empezado a utilizar en la actualidad mediante un procedimiento recursivo [Bai66].

Un análisis de sensibilidad de la cantidad de días/año ayuda también en el conocimiento y la aceptación de la nueva medida de probabilidad. Calculando y dibujando el riesgo anual para varios niveles de carga, figura 5, los planificadores llegan a conocer cuantas adiciones unitarias afectan a la capacidad del sistema [Gar66].

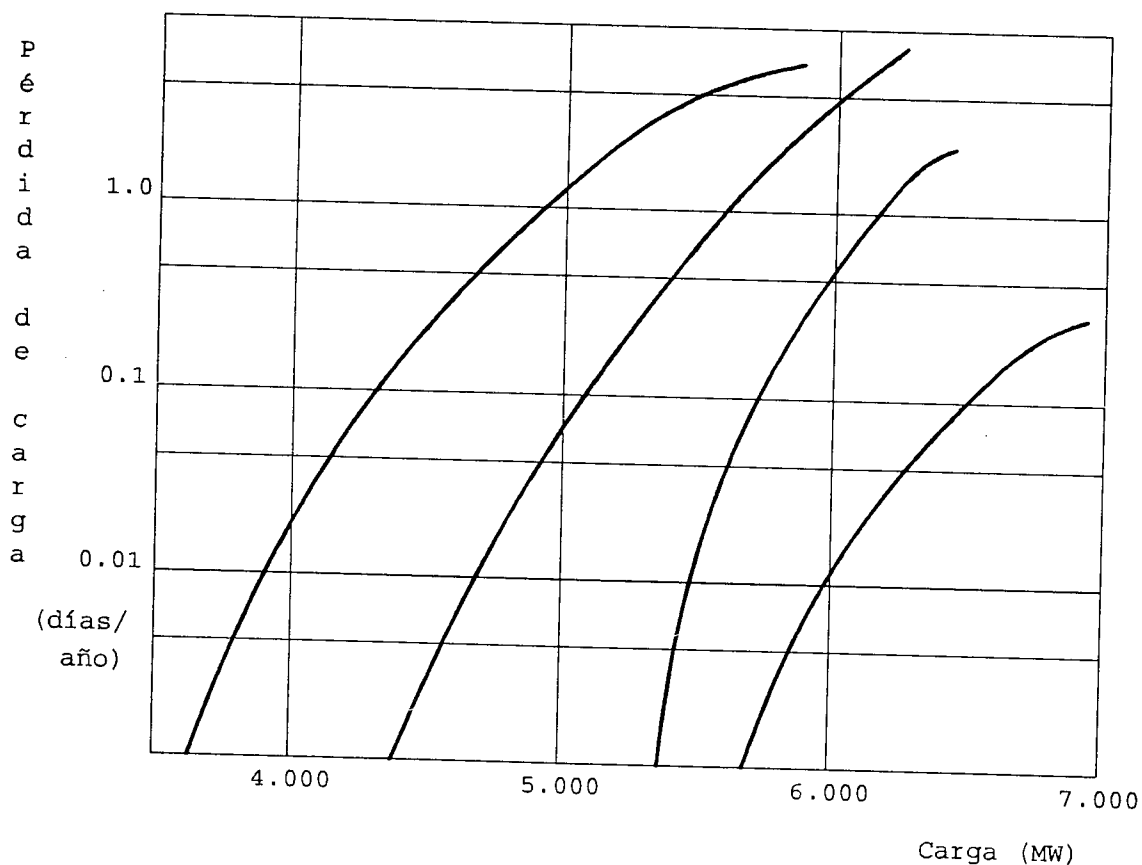


Figura 5. Probabilidad del flujo de carga.

Usando métodos de probabilidad para planificación de reservas hay complicaciones en la toma y mantenimiento de datos. Por ejemplo, se requiere un listado de las capacidades de la unidad de generación y probabilidad de carga excesivas (demasiado para la industria) y el catálogo del tipo de mantenimiento. Pero la capacidad puede variar mucho, como se muestra en la figura 6, lo que hace varias cuestiones difíciles de resolver.

¿Sería máxima la capacidad en el estado "útil" alcanzada durante el año? ¿Qué determina el estado "útil", la capacidad de descender por debajo del 100%, 80%, el 50%, etc.?

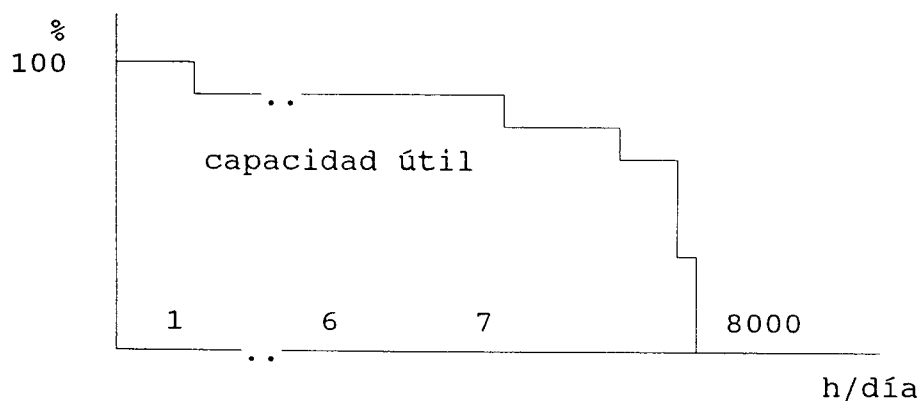


Figura 6. Curva de duración de la capacidad para una unidad de generación.

También se habría de tener en cuenta el tiempo ya que la experiencia demuestra, entre otras cosas, que el número excesivo de horas de trabajo durante los primeros años de servicio son de dos a tres veces mayores que las de la unidad más antigua. También el número probable de días con pérdidas de capacidad podría ser conocido por los planificadores de servicios y así saber la frecuencia, cantidad y duración de las pérdidas.

Se ha estudiado la planificación de generación de reserva por métodos de probabilidad para introducir la incertidumbre de los datos de la instalación de la unidad y del combustible útil, y para señalar capacidades y modelar las unidades hidroeléctricas que son las que limitan mejor su capacidad. Los métodos de probabilidad determinan la reserva necesaria y el desarrollo de la demanda [Gra71] y [Bil73].

### 3.2.- Comparaciones económicas

Sólo los estudios de simulación han establecido la necesidad de la capacidad de generación adicional, donde se examinan varios tamaños de unidad y tipos de combustible para su impacto en costos de inversión y producción. Estos estudios de comparación de costos han sido tradicionalmente realizados por procedimientos económicos de ingeniería, donde incluían el valor presente para los estudios de beneficio actual.

Uno de los primeros modelos para evaluar planes de expansión y financieros y teniendo en cuenta gastos financieros producir con salarios aceptables fué diseñado por la compañía Edison de Boston [Car69].

Los Servicios Eléctricos no son los únicos en beneficiarse de los modelos incorporados. Durante una presentación de trabajos, tres empleados explicaron las promociones que han conseguido como resultado de la actividad del modelo.

La construcción del modelo ha dado un camino de aprendizaje acerca de las actividades de la compañía y el conocimiento obtenido les abrió nuevas oportunidades.

Se han calculado costos de producción, que son un componente principal de los costos en la decisión del tamaño de la unidad, y el tipo de combustible mediante métodos determinísticos y probabilísticos [Bal63] y [Gal69].

La Programación Lineal se está utilizando para previsión de producción en programas de planificación expansiva comprensiva.

Se está aceptando un nuevo método para incluir unidades de carga en costos de producción estimados que está ganado adeptos en la industria. Este método se basa en la convolución de la curva de duración de la carga para un periodo determinado, con la tabla de generación esperada se permite conocer la energía y las horas de producción de cada unidad a calcular.

Los costes totales, entonces, guían la selección del tamaño, combustible y tipo para la unidad de generación a considerar y obtener, así, la que sea más adecuada al mínimo coste.

### 3.3.- Modelos de planificación de generación

Se han desarrollado varios modelos de planificación de generación para englobar los tres primeros componentes: costos de reserva, costos de producción y costos de inversión. Se hizo una formulación de D. P. anterior con altos costes de cálculo,



aunque después se usaron modelos de costos de producción y reserva simplificados. Se han hecho algunos trabajos con intención de reducir la dimensionalidad de la D. P.; por ejemplo, Electricité de Francia aplicó técnicas de L. P. y N. L. P. para planificación de expansión a partir de 1954.

Adamson describió el modelo alternativo de la figura 7 para estudiar los Servicios Eléctricos [Ada73].

#### **4.- PLANIFICACIÓN DE EXPANSIÓN EN LA TRANSMISIÓN**

La planificación de expansión en la transmisión determina las conexiones a añadir a la red, de modo que la potencia liberada puede continuar como añadida a las nuevas demandas desarrolladas y a las nuevas plantas de generación. El problema de expansión se ha diseñado usando L. P. y D. P.

##### **4.1.- El problema de la expansión**

El problema de transmisión sigue al de la previsión de demandas a puntos de distribución en la red y la planificación de nuevas capacidades de generación en distintos puntos.

El problema fundamental de la planificación de transmisión se ilustra en la figura 8. Ahí se muestra una porción de una gran red existente de 345/138 KV junto con una nueva subestación

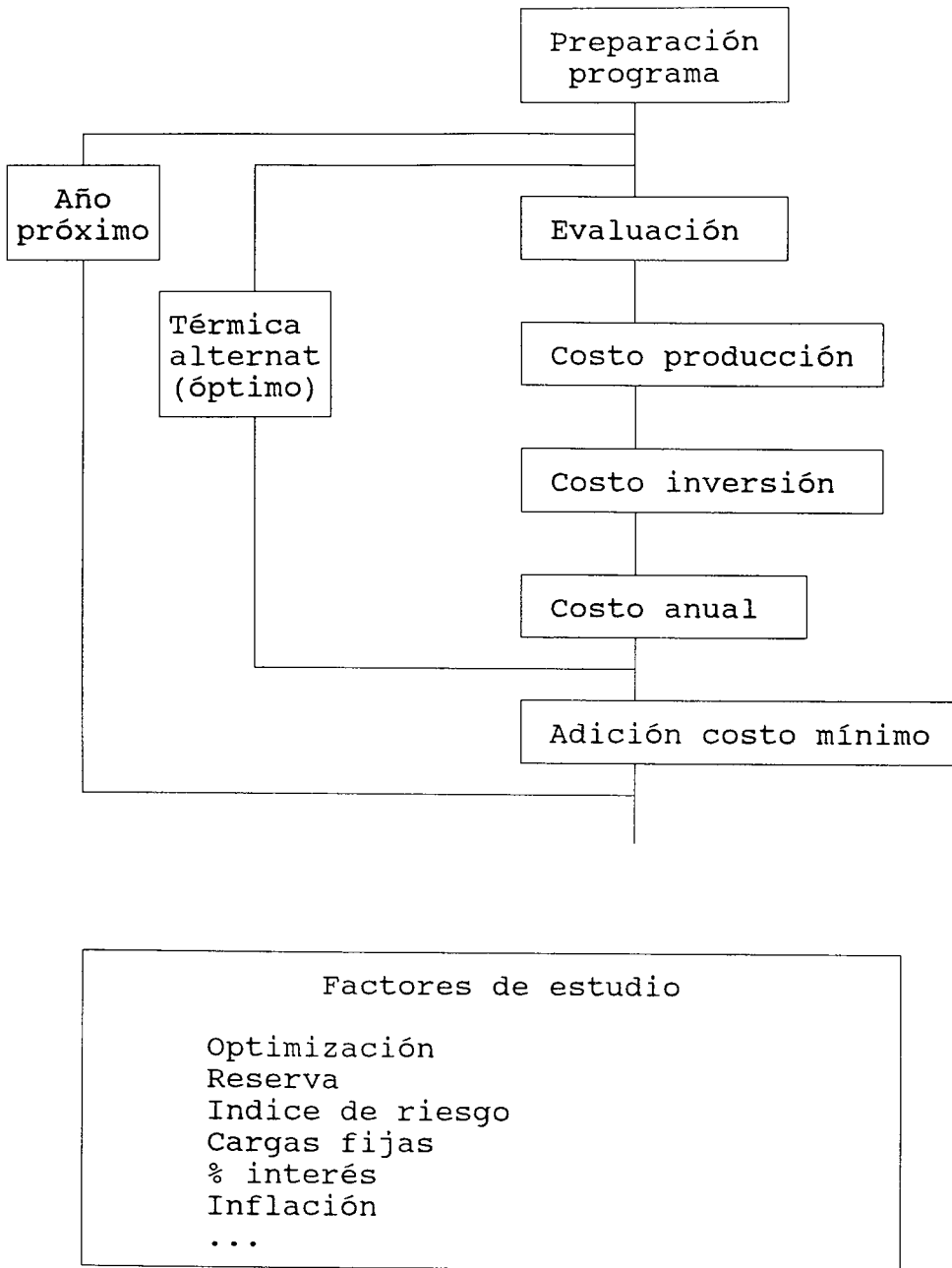


Figura 7. Modelo de planificación de expansión de generación (demanda), una nueva subestación de transformación de aumento de tensión y una nueva planta de generación. ¿Qué combinación de 345 KV y 135 KV proporcionarán una red suficiente y coste mínimo?

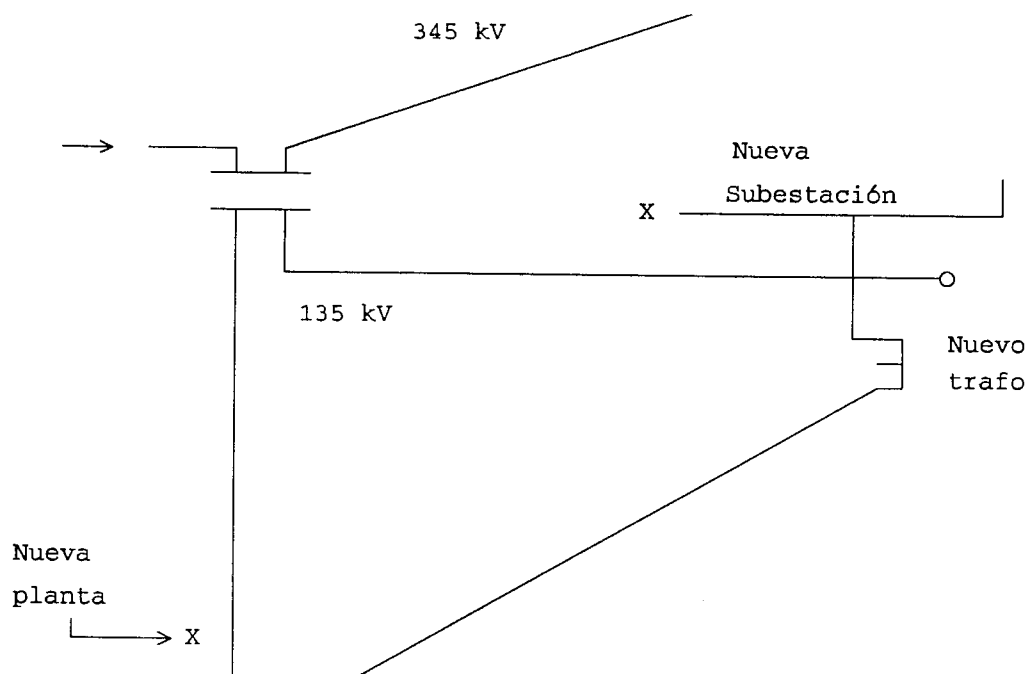


Figura 8. Problema de la expansión de transmisión

#### 4.2.- Métodos de solución propuestos

La primera aproximación al problema se concentró en calcular el proceso de ingeniería. Usando flujo de carga de corriente alterna y estudios de estabilidad, mediante planificadores de servicios para diseñar redes y por esto parece natural incluir algún procedimiento de selección del circuito para automatizar la planificación. Esta aproximación se siguió y culminó en un programa muy detallado para la generación del despacho económico calculando el flujo de carga y tomar la acción correctiva cuando aparezcan sobrecargas [Des65].

De todas formas esto tiene cuatro dificultades importantes:

- 1ª los requisitos de muchos datos con los que empieza el programa,
- 2ª el análisis del flujo de carga muy exacto es costoso,
- 3ª el siguiente año a estudiar ha de tener un pequeño incremento de demanda, de modo que las ecuaciones no lineales del flujo de carga en c. a. puedan converger en un resultado útil, y
- 4ª pequeños incrementos de demanda producen sobrecargas que son económicamente asumidas mediante pequeños cambios de redes, pero pequeños cambios de redes pueden producir (y han producido) diseños de redes inaceptables para los planificadores, lo que hacen que sea la 4ª y fatal dificultad.

## 5.- INTRODUCCIÓN AL CONTROL DE UN SISTEMA DE POTENCIA

Después del repaso al estado actual de los Servicios Eléctricos, en cuanto al estudio de diversas facetas de la generación, previsión, costes, seguridad, etc. vamos a efectuar una introducción un poco más profunda en el apartado del Despacho Económico, teniendo por referencia la transmisión con y sin pérdidas, utilizando el sistema de Coefficientes de Pérdidas "B", en su caso.

### 5.1.- Generalidades

El funcionamiento de un sistema de potencia requiere una serie de operaciones de control cuyo número y complejidad dependerá de la dimensión del sistema y del grado de seguridad que se quiera alcanzar. En este capítulo se presentará el DESPACHO ECONÓMICO como una función a realizar dentro de un conjunto más amplio de operaciones, cuya misión es la de alcanzar la seguridad y calidad del servicio deseada, con un mínimo coste de generación. La figura 9 muestra una curva de carga en un sistema de potencia, en la que se indica la evolución de la demanda de la potencia a lo largo de un día. Dependiendo del día de la semana y de la estación del año, el valor de la carga total será distinto, sin embargo la forma de la curva será similar, presentando puntas y valles; en la curva se pueden distinguir un valor de mínimo, o Carga de Base, y un valor máximo, Punta de Carga.

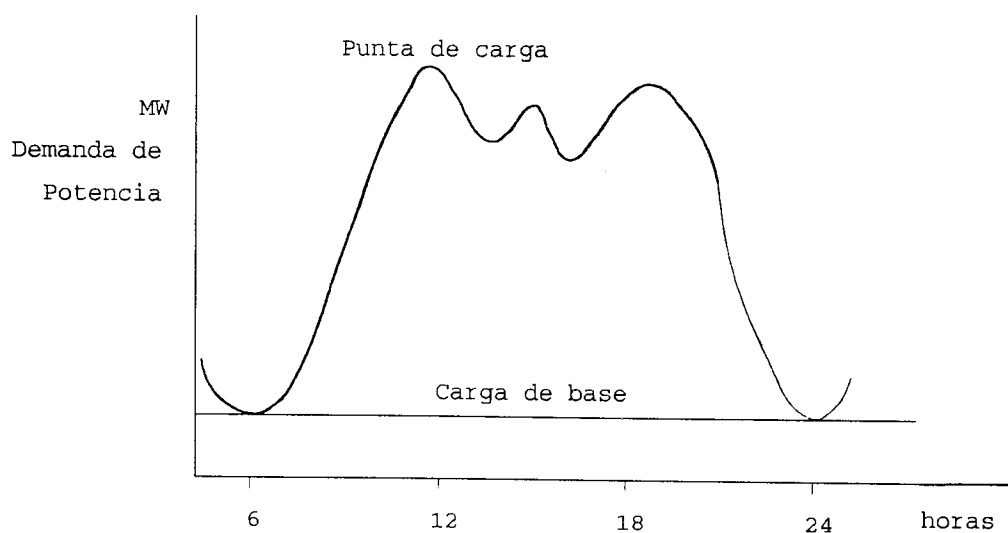


Figura 9. Curva de Carga diaria.

La imposibilidad de conseguir un gran almacenamiento de energía eléctrica y el tiempo necesario para colocar en sincronismo un grupo térmico convencional obliga a realizar una previsión de la demanda de carga para preparar y seleccionar con suficiente antelación las unidades generadoras necesarias para cubrir el servicio.

La selección de unidades que trabajan en paralelo durante un determinado intervalo de tiempo se realizará considerando costes de operación y determinadas características técnicas, como son las de regulación y los límites de estabilidad. En los costes de operación, que incluyen costes de combustible, de mantenimiento y de amortización de las instalaciones, hay que añadir el coste de arrancada y de parada que presenta cada unidad generadora.

El estudio del funcionamiento óptimo económico permitirá conocer la potencia que deben entregar las unidades seleccionadas para atender la carga de forma que el coste de generación sea mínimo. El planteamiento de este problema dependerá del tipo de unidades generadoras que existan en el sistema en estudio.

La figura 10 muestra un posible esquema del control de un sistema de potencia, y la interacción entre el sistema y un ordenador central encargado de ejecutar las funciones señaladas. El bloque Sistema de Potencia simboliza el sistema real, mientras que en el bloque Base de Datos está representado el modelo del sistema en el ordenador.

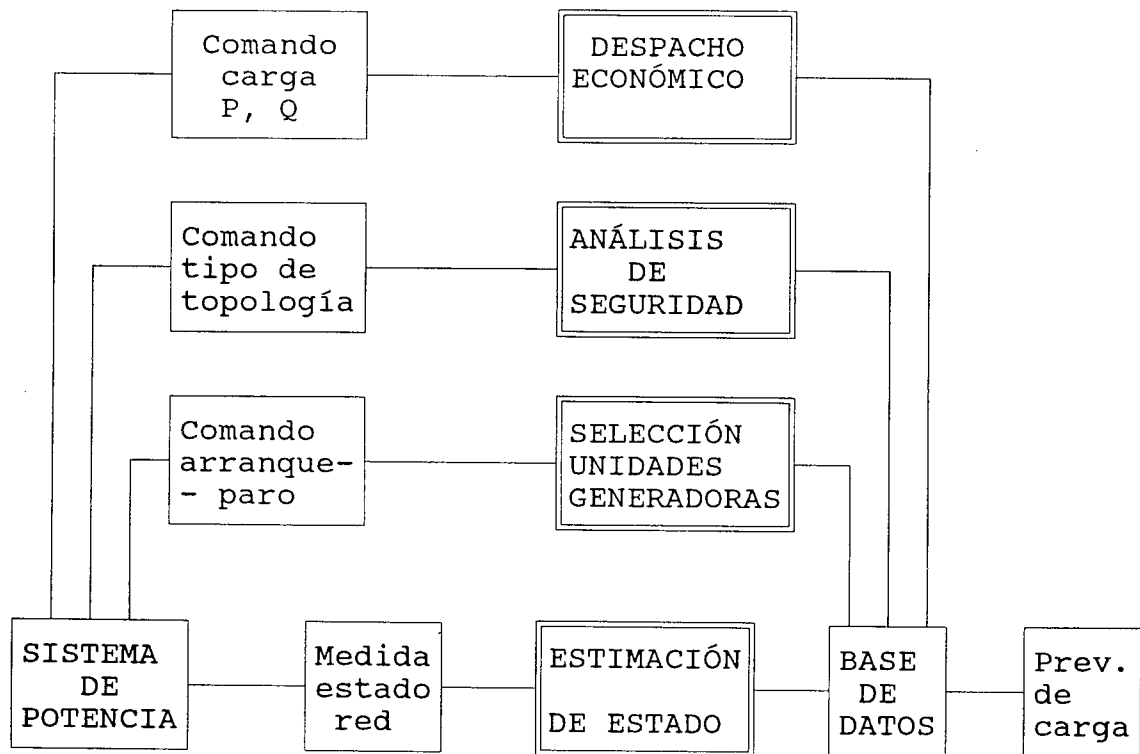


Figura 10. Funciones básicas de control en un S. de P.

Según se indica en la figura 10, cualquiera de las funciones estudiadas se realizará de forma interactiva con la base de datos.

### 5.2.- Característica de entrada-salida

En el estudio del Despacho Económico es fundamental el modelo de entrada-salida de cada unidad generadora. En el caso de una central térmica, la característica de entrada puede ser la cantidad de combustible, medido en toneladas de carbón o en

millones de  $m^3$  de fuel-oil por hora, necesarios para generar la potencia, medida en MW; será esta variable la que se tome como característica de salida. La figura 11 muestra la característica de entrada-salida de una central térmica según una curva continua, lo que representa una idealización-aproximación de la característica real. El coste expresado de esta forma es un coste variable, dependiente de la potencia generada; sin embargo en el coste total de operación de una central se deben incluir, además del coste del combustible, determinados costes fijos, como los de mantenimiento o de personal, que son independientes de la potencia de salida.

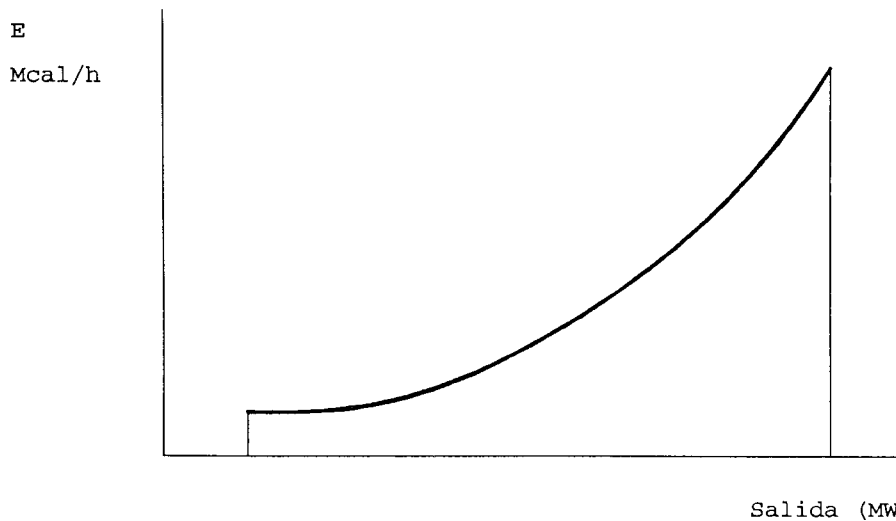


Figura 11. Característica de e/s en una central térmica.

En la operación de una central térmica es necesario considerar ciertas restricciones. En la figura 11 se han señalado un valor máximo y un valor mínimo entre los que se debe encontrar la potencia de salida. La existencia de un valor máximo en la



potencia eléctrica que puede entregar un generador es obvia, ya que cualquier unidad tiene una potencia nominal, cuyo valor no es conveniente superar, excepto en determinadas emergencias y por un periodo corto de operación.

Es muy normal que se realice una aproximación de la curva característica de entrada - salida mediante una función polinómica, siendo la más corriente una función de segundo grado; en este caso, la expresión de la característica de entrada en función de la potencia de salida será:

$$F = \alpha + \beta P + \gamma P^2 \quad (11)$$

siendo F el coste del combustible.

### **Definición**

Se define el coste incremental o marginal de generación como la relación entre el aumento del coste del combustible y el aumento que se origine en la potencia neta de salida.

$$\text{Coste incremental} = \frac{\Delta C}{\Delta P} \quad (\text{ptas/MWh}) \quad (12)$$

## **6.- DESPACHO ECONÓMICO SIN PÉRDIDAS DE TRANSMISIÓN**

### **6.1.- Formulación del problema**

En un sistema que presenta distancias cortas entre los centros de generación y los puntos de consumo se puede suponer,

como primera aproximación, que las pérdidas de potencia en la transmisión son despreciables. La figura 12 muestra el esquema de un sistema de potencia con n unidades generadoras en el que se desprecian las pérdidas de transmisión.

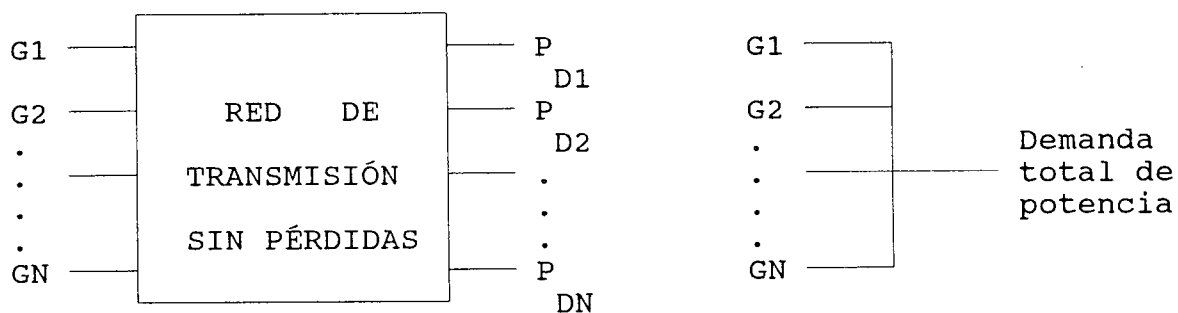


Figura 12. Sistema de potencia sin pérdidas de transmisión.

Si se anota por  $C_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), el coste de generación, en ptas/h, para cada unidad y se supone que este coste depende exclusivamente de la potencia activa generada, el coste total en el sistema será:

$$C = \sum_{i=1}^N C_i (P_{Gi}) = C_1(P_{G1}) + C_2(P_{G2}) + \dots + C_N(P_{GN}) \quad (13)$$

El Despacho Económico tiene como objetivo el cálculo de la potencia que debe entregar cada unidad generadora para que el valor de la función de coste total sea mínimo. La minimización de esta función objetivo se realizará teniendo en cuenta ciertas restricciones que se clasificarán de la siguiente forma:

## a) Restricciones de igualdad

El reparto de potencia entre unidades generadoras se debe efectuar teniendo en cuenta el balance de potencia en el sistema. Si se supone que la potencia reactiva no influye en los costes de generación, el balance de potencia, para un sistema en el que se desprecian las pérdidas de transmisión, se reduce a la igualdad

$$P_{Dt} = \sum_{i=1}^N P_{Gi} \quad (MW) \quad (14)$$

siendo  $P_{Dt}$  la demanda total de potencia activa en el sistema.

## b) Restricciones de desigualdad

En la operación de una central eléctrica existe un límite máximo y otro mínimo para la potencia activa que puede ceder cada unidad generadora:

$$P_{Gimin} \leq P_{Gi} \leq P_{Gimax} \quad i = 1, \dots, N_G \quad (15)$$

En el caso de existir generadores no regulables, es decir, generadores en los que la potencia de salida se mantiene fija e independiente de la demanda de carga, es necesario introducir alguna modificación. Puesto que la potencia de estas unidades es conocida, su valor tendrá que ser restado de la demanda total de potencia, la diferencia será la potencia a repartir entre las unidades regulables.

Sea  $M$  el número de unidades no regulables y  $N_G$  el número de unidades regulables,  $N_G = N - M$ . Si se numeran en primer lugar las unidades regulables, la ecuación de equilibrio o de balance de potencia será:

$$P_{Dt} = \sum_{i=1}^{N_G} P_{Gi} + \sum_{i=N_G+1}^N P_{Gi} \quad (MW) \quad (16)$$

La diferencia entre demanda total y potencia no regulable será la demanda de potencia regulable,  $P_D$ ,

$$P_D = P_{Dt} - \sum_{i=N_G+1}^N P_{Gi} = \sum_{i=1}^{N_G} P_{Gi} \quad (MW) \quad (17)$$

La función de coste que se tiene que minimizar ahora es

$$C = \sum_{i=1}^{N_G} C_i (P_{Gi}) \quad (\text{ptas/h}) \quad (18)$$

El objetivo del Despacho Económico es determinar el reparto de la demanda de potencia regulable,  $P_D$ , entre las  $N_G$  unidades generadoras cuya potencia de salida es regulable. En todo lo que resta del estudio, cuando se hable de Despacho Económico, se hará suponiendo que no existen unidades no regulables o que su potencia ya ha sido restada de la potencia total de carga.

La incorporación de restricciones de desigualdad en el Despacho Económico aumenta el rigor del estudio, sin embargo suponen también un aumento en la complejidad de los cálculos a realizar.

### 6.2.- Despacho Económico sin restricciones de generación

El problema planteado consiste en hallar el reparto de cargas más económico entre la unidades regulables, sujeto a la restricción de igualdad que se deduce del balance de potencia, ecuación (16). Si se emplea la siguiente notación

$$g = P_D - \sum_{i=1}^{N_G} P_{Gi} = 0 \quad (19)$$

se puede formar la siguiente función de coste aumentada:

$$C = C + \lambda g \quad (20)$$

(siendo  $\lambda$  el multiplicador de Lagrange)

cuyo valor coincidirá siempre con el de la función de coste original, expresión (18); por tanto, el mínimo de ambas funciones también coincidirá.

Las condiciones que se deben cumplir en el mínimo de la nueva función objetivo son:

$$\frac{\partial C}{\partial P_{Gi}} = 0 \quad i = 1, \dots, N_G \quad (21)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda} = 0$$

Estas condiciones son necesarias pero no suficientes para obtener el mínimo de la función objetivo C.

Las derivadas parciales de la función de costo ampliada con respecto a la potencia activa de cada unidad serán:

$$\frac{\partial C^*}{\partial P_{Gi}} = \frac{\partial C}{\partial P_{Gi}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial P_{Gi}} \quad i = 1, \dots, N_G \quad (22)$$

Puesto que

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial P_{Gi}} = \frac{dC_i}{dP_{Gi}} \quad i=1, \dots, N_G \quad (23)$$

$$\frac{\partial g}{\partial P_{Gi}} = -1$$

quedará como condición de mínimo

$$\frac{dC_i}{dP_{Gi}} - \lambda = 0 \quad i = 1, \dots, N_G \quad (24)$$

La derivada  $dC_i/dP_{Gi}$  es el coste incremental de generación en la unidad  $i$ , equivalente a la pendiente de la curva característica de coste y viene expresada en ptas/MWh. Para designar el coste incremental de generación se empleará la siguiente notación:

$$\frac{dC_i}{dP_{Gi}} = (CI)_i \quad i = 1, \dots, N_G \quad (25)$$

Así pues, el coste mínimo de generación en un sistema con pérdidas de transmisión despreciables se obtiene cuando todos los generadores regulables operan con el mismo coste incremental de generación:

$$(CI)_1 = (CI)_2 = \dots = (CI)_{N_G} = \lambda \quad (\text{ptas/MWh}) \quad (26)$$

El significado físico del multiplicador de Lagrange es claro:  $\lambda$  es el valor óptimo de los costes incrementales en el punto de operación del sistema, es decir, con la demanda de potencia regulable  $P_D$ .

Las ecuaciones que permitirán calcular el punto de operación óptimo, desde un punto de vista económico, para una determinada demanda de potencia activa son las igualdades (19) y la ecuación de balance de potencia activa (16).

Las ventajas de realizar el reparto de potencias según el despacho óptimo económico quedarán más claras con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.1.

Un sistema de potencia es alimentado por dos unidades generadoras con los siguientes costes incrementales:

$$(C1) = 2415 + 2.90 \cdot P_1 \quad \text{Ptas/MWh.}$$

$$(C2) = 2130 + 3.15 \cdot P_2 \quad \text{"}$$

Calcular el ahorro, en ptas/h, que se obtiene con un reparto de potencias óptimo frente a un reparto de cargas iguales, si la demanda total de potencia es de 600 MW y se deprecian las pérdidas de transmisión.

La resolución mediante el método más clásico, y ya superado, es el del rendimiento/potencia, que consiste en utilizar la unidad de mayor rendimiento y una vez llegada a su potencia máxima poner en marcha la siguiente en rendimiento, y así sucesivamente, que no da el sistema óptimo.

El ahorro que se obtiene, como veremos en el capítulo 5, es de 3.644,6 ptas/h.

Un caso muy corriente consiste en aproximar las curvas de coste mediante funciones cuadráticas o polinomios de 2º grado:

$$C_i (P_{Gi}) = \alpha_i + \beta_i P_{Gi} + \gamma_i P_{Gi}^2 \quad i = 1, \dots, N_G \quad (27)$$

Las condiciones de funcionamiento óptimo serán entonces

$$(\beta_i + 2\gamma_i P_{Gi}) = \lambda \quad i = 1, \dots, N_G \quad (28)$$



sujetas a la restricción de igualdad

$$P_D = \sum_{i=1}^{N_G} P_{Gi} \quad (29)$$

Si se despeja la potencia activa de la expresión (28):

$$P_{Gi} = \frac{\lambda}{2\gamma_i} - \frac{\beta_i}{2\gamma_i} \quad i = 1, \dots, N_G \quad (30)$$

y se sustituye en la ecuación de balance de potencias, queda:

$$P_D = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^{N_G} \frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_G} \frac{\beta_i}{\gamma_i} \quad (31)$$

De esta igualdad se obtiene la siguiente expresión de  $\lambda$

$$\lambda = \frac{2P_D + \sum_{i=1}^{N_G} (\beta_i/\gamma_i)}{\sum_{i=1}^{N_G} 1/\gamma_i} \quad (32)$$

Conocido el valor de  $\lambda$ , el cálculo de la potencia que debe ceder cada unidad se obtiene a partir de (30).

En el caso más general, las funciones de coste incremental pueden ser no lineales e, incluso, presentar alguna discontinuidad. La figura 13 muestra la resolución gráfica del Despacho Económico para un caso no lineal.

La interpretación de esta figura es muy simple. Con un reparto de cargas óptimo, todas las unidades trabajan con el mismo coste incremental,  $\lambda$ , y la suma de sus potencias debe ser

igual a la demanda total de potencia en el sistema. El cálculo del Despacho Económico se reduce a desplazar el valor multiplicador  $\lambda$  por el eje de ordenadas hasta conseguir que se equilibre la suma de potencias generadas y la potencia total demandada.

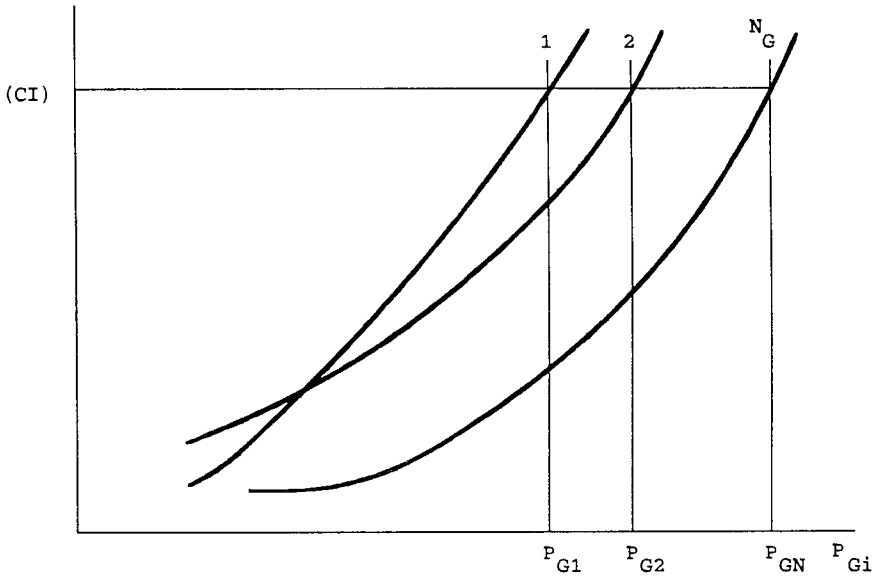


Figura 13. Obtención gráfica del Despacho Económico

En el caso más general, la obtención del reparto óptimo de potencias supone la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales. A partir de las condiciones que se deben de cumplir en el óptimo, se obtiene:

$$f_i = \frac{dC_i}{dP_{Gi}} - \lambda = 0 \quad i = 1, \dots, N_G \quad (33)$$

$$g = P_D - \sum_{i=1}^{N_G} P_{Gi} = 0$$

Se tiene un sistema con  $N_G + 1$  ecuaciones, siendo las incógnitas  $N_G$  potencias de generación y el multiplicador  $\lambda$ .

La resolución de un sistema de ecuaciones no lineales puede realizarse mediante el método de Newton - Raphson.

Otro sistema de disminuir costos, utilizado antiguamente y ya en desuso, es el de **la unidad de mayor rendimiento**, que consiste en empezar a trabajar con la unidad de mayor rendimiento, que es la que da un menor consumo, hasta llegar a su punto de máximo rendimiento; en ese momento, y a un incremento de demanda, se pone en funcionamiento la siguiente unidad en rendimiento, hasta llegar a su máximo; y así sucesivamente. De este modo no obtenemos el coste mínimo, aunque se consiga un rendimiento óptimo.

### 6.3.- Despacho Económico con restricciones de generación

El problema de optimización que se plantea cuando se tienen en cuenta los límites de operación de las unidades generadoras consiste en minimizar la función de coste total sujeta a la restricción de igualdad:

$$P_D = \sum_{i=1}^{N_G} P_{Gi} \quad (34)$$

y a las restricciones de desigualdad:

$$P_{Gimin} \leq P_{Gi} \leq P_{Gimax} \quad i = 1, \dots, N_G \quad (35)$$

Estas últimas se pueden descomponer en dos desigualdades

$$P_{Gmin} - P_{Gi} \leq 0 \quad i = 1, \dots, N_G \quad (36)$$

$$P_{Gi} - P_{Gimax} \leq 0$$

Las restricciones, tanto de igualdad como de desigualdad, se anotarán de la siguiente forma:

$$g = P_D - \sum_{i=1}^{N_G} P_{Gi} = 0 \quad (37)$$

$$h_{im} = P_{Gimim} - P_{Gi} \leq 0 \quad i = 1, \dots, N_G$$

$$h_{iM} = P_{Gi} - P_{Gimax} \leq 0$$

Siguiendo un proceso similar al empleado en el caso anterior, se puede formar la siguiente función de coste aumentada:

$$\hat{C} = C + \lambda g + \sum_{i=1}^{N_G} (\tau_{im} h_{im} + \tau_{iM} h_{iM}) \quad (38)$$

siendo  $\lambda$  el multiplicador de Lagrange, mientras que las nuevas variables  $\tau$  son conocidas como multiplicadores de Kuhn-Tucker; su significado físico es distinto al que tiene  $\lambda$ , que sigue expresando el coste incremental óptimo.

Las condiciones que se deben cumplir en el punto de mínimo son:

$$\frac{\partial C}{\partial P_{Gi}} = 0 \quad i = 1, \dots, N_G \quad (39)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau_{im}} = 0 \quad \text{si } \tau_{im} \neq 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau_{iM}} = 0 \quad \text{si } \tau_{iM} \neq 0$$

Realizando las derivadas parciales indicadas, se obtiene:

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial P_{Gi}} = \frac{dC_i}{dP_{Gi}} - \lambda - (\tau_{im} - \tau_{iM}) = 0 \quad i = 1, \dots, N_G \quad (40)$$

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial \lambda} = g = P_D - \sum_{i=1}^{N_G} P_{Gi} = 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau_{im}} = h_{im} = P_{Gimin} - P_{Gi} = 0 \quad \text{cuando } \tau_{im} \neq 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau_{iM}} = h_{im} = P_{Gi} - P_{Gimax} = 0 \quad \text{cuando } \tau_{im} \neq 0$$

El cálculo del reparto de cargas óptimo teniendo presentes los límites de operación de los generadores puede ser el siguiente:

- 1) Se resuelve el problema de optimización prescindiendo de las restricciones de desigualdad.
- 2) Si el valor de la potencia que debe ceder cada unidad se encuentra dentro de los límites de operación, el problema está terminado. Sin embargo es probable que en algún generador el valor de la potencia se encuentre fuera de los límites. Para aquellas unidades que cumplan las restricciones se mantendrán los multiplicadores de Kuhn-Tucker a cero

$$\tau_{im} = \tau_{iM} = 0 \quad \text{si } P_{Gimin} \leq P_{Gj} \leq P_{Gjmax}$$

- 3) Si la solución obtenida en el despacho óptimo viola una o varias de las restricciones (36), nos será necesario imponer el límite más cercano en todas las unidades en las que se ha originado. Supóngase, por ejemplo, que en las unidades  $\underline{r}$  y  $\underline{s}$  se ha obtenido puede ser suficiente con hacer:

$$P_{Gr} < P_{Grmin} \quad P_{Gr} > P_{Gsmax}$$

$\tau_{rm} \neq 0$ , es decir  $P_{Gr} = P_{rmin}$  ya que al imponer este límite resulte  $P_{Gm} \leq P_{mmax}$ , y la función objetivo tenga un valor inferior al que se obtiene haciendo  $P_r = P_{rmin}$  y  $P_r = P_{rmax}$  simultáneamente.

En [Kha91] se estudia un método eficiente del D. E. para una unidad térmica. En [Pal91] se hace un algoritmo sencillo para el estudio del Despacho Económico.

\*\*\*\*\*

Hasta aquí se ha hecho un breve estudio del estado actual de los Servicios Eléctricos, desde el punto de vista de los sistemas de control del DESPACHO ECONÓMICO que existen en este momento.

## CAPÍTULO 3

### PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA



## PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA

### 1.- INTRODUCCIÓN

Teniendo en cuenta que la I.O. se aplica con gran amplitud en áreas que están relacionadas con evaluaciones humanas, decisiones y percepciones es necesario un lenguaje que modele dichas situaciones.

Si el modelo no está formado por oraciones matemáticas definidas clásicamente, o sea, por un modelo conteniendo conjuntos difusos, números difusos, oraciones difusas o relaciones difusas, entonces los métodos matemáticos tradicionales no pueden aplicarse directamente, deberán utilizarse algoritmos difusos, o sea, aquellos que puedan tratar con entidades difusas.

En todos los casos en los que se usa adecuadamente la teoría de conjuntos difusos, como una herramienta de modelización, se caracterizan los tres rasgos siguientes:

1) El fenómeno difuso, las relaciones o evaluaciones se modelan por una teoría bien definida y fundamentada.

2) También, por hacer una mejor aproximación al fenómeno real, que la llevada a cabo por modelos formales.

3) Una mejor modelización del fenómeno real requiere una información más detallada que la que se necesita para modelar las rígidas dicotomías.

La teoría de conjuntos difusos fue desarrollada para solucionar problemas imprecisos/vagos especialmente en términos de razonamiento impreciso y modelos lingüísticos. En la resolución de problemas de decisión el trabajo pionero fue el de Bellman y Zadeh [Bel70], luego continuaron Tanaka, Okuda y Asai [Tan74] y [Tan76], Negoita et al. [Neg76], [Neg77] y [Neg81], Zimmermann [Zim76] y [Zim78], Orlovsky [Orl77], Yager [Yag79], entre otros.

La teoría de conjuntos difusos, aunque todavía joven, ya ha sido aplicada a un gran número de problemas de I.O., de entre las que destacamos la Programación Lineal Difusa.

Los modelos de P.L. pueden ser considerados como un tipo especial de modelo de decisión, donde el espacio de decisión se define por restricciones, la "meta" (función de utilidad) mediante la función objetivo y el tipo de decisión es un modelo bajo certeza.

Como se dijo en el capítulo primero, el modelo clásico de P.L. puede quedar como:

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & z = cx \\ \text{s.a.} \quad & Ax \leq b \\ & x > 0 \end{aligned}$$

donde  $c, x \in \mathbb{R}^n$ ;  $b \in \mathbb{R}^m$ ;  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Tenemos la forma de partida de los supuestos clásicos en los que todos los coeficientes de  $A$ ,  $b$  y  $c$  son números reales, " $\leq$ " es significativo en el sentido clásico y que "maximizar" es un imperativo estricto.

Si aceptamos que la decisión en P.L. ha de hacerse completamente en ambientes difusos, existe un número de modificaciones posibles. En primer lugar, podemos encontrarnos con que el decisor puede realmente no buscar maximizar o minimizar la función objetivo, sino que, más bien, tendiera a buscar alcanzar alguna meta, que en valores clásicos no pudieran admitirse. De este modo podría buscar "mejorar" la situación de costos.

Segundo, las restricciones pueden ser vagas y de una de las formas siguientes: el signo " $\leq$ " pudiera no ser significativo en el sentido matemático estricto, pero bien pudieran ser aceptables pequeñas violaciones. Esto ocurrirá si las restricciones

representan niveles de aspiración, como se indicaron anteriormente, o si, por ejemplo, las restricciones representan requisitos sensoriales (tacto, color, olor, etc.) que no pueden ser aproximados adecuadamente mediante un valor real. Desde luego, los coeficientes de los vectores  $b$ ,  $c$  o de la matriz  $A$ , por sí mismos pueden tener un carácter difuso en todo caso, porque son difusos por naturaleza o porque su percepción es difusa.

Finalmente, el papel de las restricciones puede ser diferente del de la P.L. clásica, donde la violación de alguna necesidad simple de algún valor hace que la solución sea impracticable. El autor de las decisiones puede aceptar pequeñas violaciones de las restricciones con diferentes grados de importancia para restricciones diferentes.

En todos los casos se ha de decidir la función de pertenencia que los caracteriza y que dará el grado para el que se satisface la condición difusa.

Destacando que el signo " $\leq$ " señala la versión difusa de " $\leq$ " y tiene la interpretación lingüística "esencialmente menor o igual que" y los valores de  $A$ ,  $b$  y  $c$  pueden ser difusos, el modelo básico de P.L.D. sería:

$$\text{Max} \quad z = cx$$

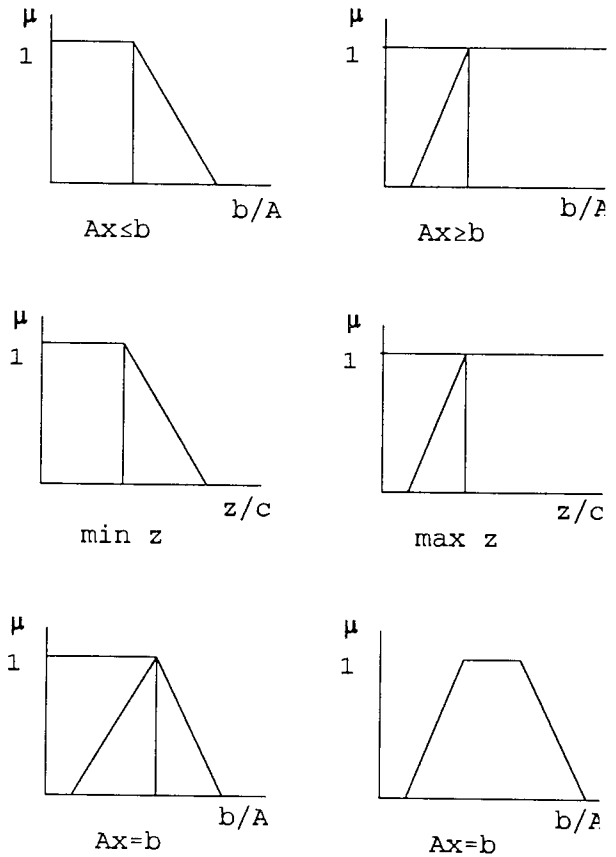
$$\text{s.a.} \quad Ax \leq b$$

$$x > 0$$

Para formular valores difusos podemos usar funciones de pertenencia, de las que las figuras siguientes son unas representaciones básicas.

La Programación Matemática Difusa (P.M.D.) se está aplicando a muchas disciplinas del campo de la ingeniería y de las ciencias, como son producción, fabricación, transporte, almacenamiento, agrícola, economía, control, información, etc.

Con este trabajo queremos hacer una aportación en el ámbito de la Ingeniería Eléctrica, tratando el problema del Despacho Económico, en los Servicios Eléctricos, de forma real, tal como los decisores lo conciben, y encontrando solución al problema difuso generado.



Funciones de pertenencia de valores difusos de A, b, c y z.

En este capítulo abordamos la presentación de algunos conceptos que serán básicos para el desarrollo del resto de la Memoria. Sólo se tratarán de forma resumida ya que un estudio

detallado puede encontrarse en textos ya clásicos [Zim85], amén de que atender a las descripciones de demasiados detalles nos pueden alejar del objetivo principal.

En concreto, introduciremos las definiciones de conjunto y número difusos, algunos tipos de números difusos (trapezoidales y triangulares), las formas más usuales de comparar números difusos (Yager, González y Adamo) y algunas operaciones con ellos.

Además, tomaremos de la literatura especializada los modelos y métodos necesarios para resolver los problemas planteados en el D.E. y que nos servirán para alcanzar la solución a dichos problemas mediante P.L.D.

## 2.- CONJUNTOS DIFUSOS

Todos los desarrollos en P.L.D. se apoyan en el concepto de número difuso, tomando como punto de arranque el que nos dice que un número difuso es un conjunto difuso en  $\mathbb{R}$  [De194]. Esta noción de número difuso se divulga a partir de los artículos de L. A. Zadeh y su importante trabajo en 1965, titulado: Fuzzy Sets [Zad65].

### 2.1.- Conjunto difuso

Sea un conjunto  $A$ , llamado referencial. Un subconjunto  $B$  de  $A$  se puede caracterizar mediante una función,  $f_B$ , tal que:

$$f_B: A \longrightarrow \{0, 1\}$$

de tal forma que:

$$\begin{aligned} f_B(x) &= 1 && \text{sii } x \in B \\ &= 0 && \text{sii } x \notin B \end{aligned}$$

#### **Definición**

Dado un conjunto referencial  $A$ , se define el subconjunto difuso  $B$  de  $A$  como cualquier función

$$\mu_B: A \longrightarrow [0, 1]$$

donde  $\mu_B$  es la función que da el grado de cumplimiento de la propiedad considerada para cada elemento de  $A$ , y se le llama función de pertenencia.

Al conjunto de todos los subconjuntos difusos de  $A$  se nota por  $F(A)$ .

### 2.2.- $\alpha$ - corte

Dado un conjunto difuso  $B$ , se llama  $\alpha$  - corte de dicho conjunto al conjunto

$$B_\alpha = \{ x \in A \mid \mu_B(x) \geq \alpha \}; \quad \alpha \in [0, 1]$$

### 2.3.- Teorema de Representación

Si  $B$  es un conjunto difuso y  $B_\alpha$  sus  $\alpha$  - cortes, con  $\alpha \in [0, 1]$ , se verifica que:

$$B = \sqcup_\alpha B_\alpha \quad \alpha \in (0, 1]$$

y la función de pertenencia es, a partir de las funciones características de sus  $\alpha$  - cortes:

$$\mu_{B_\alpha}(x) = \text{Sup} \min(\alpha, \mu_{B_\alpha}(x)) \quad \alpha \in (0, 1] \quad \text{con:}$$

$$\begin{aligned} \mu_{B_\alpha}(x) &= 1 && \text{sii } x \in B_\alpha \\ &= 0 && \text{sii } x \notin B_\alpha \end{aligned}$$

la función característica de  $B_\alpha$ .

### 2.4.- Convexidad

Un conjunto difuso es convexo si y sólo si sus  $\alpha$  - cortes son convexos [Zad65].

Una definición equivalente a la convexidad es:

$B$  es convexo si y sólo si:

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \forall \beta \in [0, 1]$$

$$\mu_B [\beta x_1 + (1 - \beta)x_2] \geq \min [\mu_B(x_1), \mu_B(x_2)]$$



**2.5.- Normalización**

Un conjunto difuso se dice normalizado si y sólo si

$$\exists x \in X, \quad \text{en el que} \quad \mu_B(x) = 1$$

**2.6.- Teorema de Extensión**

Sea A el producto cartesiano de n conjuntos referenciales,  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  y  $B_1, B_2, \dots, B_n$  n subconjuntos difusos definidos respectivamente en los anteriores referenciales. El producto cartesiano se define para cada tupla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de A por,

$$B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n = \text{Min} [\mu_{B_1}(x_1), \mu_{B_2}(x_2), \dots, \mu_{B_n}(x_n)]$$

Supongamos ahora que ese subconjunto difuso que tenemos definido en el referencial A, queremos pasarlo (extenderlo) a otro referencial Y. Sea f una aplicación de  $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  a Y tal que

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Mediante la aplicación f, el Principio de Extensión permite obtener, a partir de los n subconjuntos difusos  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , un nuevo subconjunto difuso en Y, que notaremos por C, definido por:

$$C = \{(y, \mu_C(y) / y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A\}$$

siendo su función de pertenencia

$$\mu_C(y) = \text{Sup Min } [\mu_{B_1}(x_1), \mu_{B_2}(x_2), \dots, \mu_{B_n}(x_n)]$$

$$\mu_C(y) = 0 \quad \text{si } f^{-1}(y) = \emptyset$$

siendo  $f^{-1}(y)$  la imagen inversa de  $y \in Y$ .

Para  $n = 1$  el Principio de Extensión se reduce a:

$$C = f(B) = \{(y, \mu_C(y)) / y = f(x), x \in A\}$$

con

$$\begin{aligned} \mu_C(x) &= \text{Sup } \mu_B(x) \quad \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \quad x \in f^{-1}(y) \\ &= 0 \quad \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

### 3.- NÚMEROS DIFUSOS

El concepto de número difuso que utilizaremos en toda la exposición será el dado por Dubois y Prade [Dub78] y la aritmética basada en dicha definición.

Un número difuso  $b$  es un conjunto  $\mu_b$  de la recta real, convexo y normalizado, tal que:

- a)  $\exists x_0 \in \mathbb{R} \mid \mu_b(x_0) = 1$ , que suele llamarse moda, y
- b)  $\mu_b$  es continua a trozos

(En lo que sigue notaremos como  $F(\mathbb{R})$  el conjunto de los números difusos construidos de acuerdo con la definición anterior).

Todo número difuso está obviamente caracterizado por una función de pertenencia:

$$\mu_b: \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

donde  $\mu_b(x)$  nos da el grado de pertenencia de  $x$  al conjunto difuso  $B$ .

Consideraremos números difusos triangulares o trapezoidales, lineales y normalizados para estudiar los métodos de comparación que usaremos en adelante.

**3.1.- Números difusos trapezoidales**

Uno de los números difusos más importantes es el "trapezoidal". Un número difuso trapezoidal viene caracterizado por una tetrapleta:  $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ , cuya función de pertenencia es:

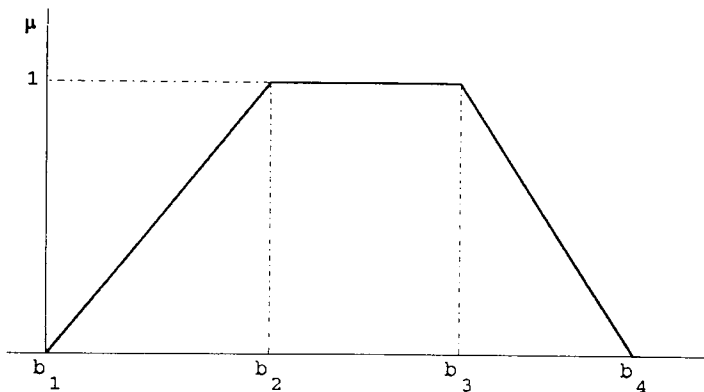


Figura 14. N<sup>o</sup> difuso trapezoidal  $\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$

Analíticamente, su función de pertenencia es:

$$\begin{aligned}
 \mu_b(x) &= \frac{x - b_1}{b_2 - b_1} && \text{Si } b_1 \leq x \leq b_2 \\
 &= 1 && \text{Si } b_2 \leq x \leq b_3 \\
 &= \frac{b_4 - x}{b_4 - b_3} && \text{Si } b_3 \leq x \leq b_4 \\
 &= 0 && \text{en otro caso}
 \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo:

Sea el número difuso trapezoidal definido por  $(-2, 1, 3, 4)$ , su función de pertenencia es:

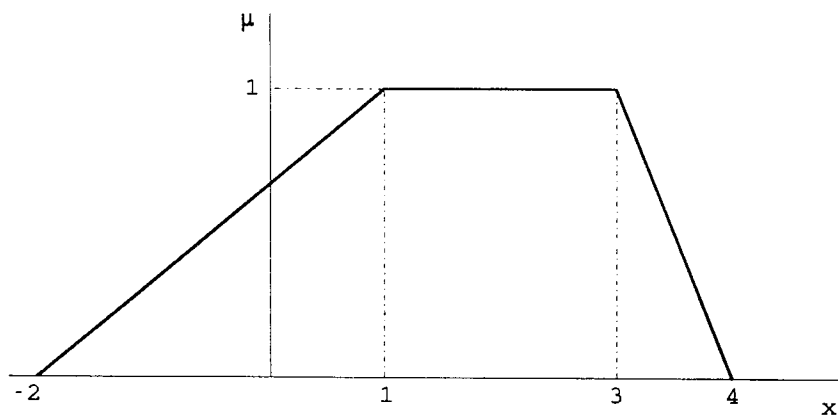


Figura 15. N<sup>o</sup> difuso trapezoidal.  $b = (-2, 1, 3, 4)$

y analíticamente:

$$\begin{aligned} \mu_b(x) &= \frac{x + 2}{1 - (-2)} && \text{Si } -2 \leq x \leq 1 \\ &= 1 && \text{Si } 1 \leq x \leq 3 \\ &= \frac{4 - x}{4 - 3} && \text{Si } 3 \leq x \leq 4 \\ &= 0 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

**3.2.- Números difusos triangulares**

Son un caso particular de los trapezoidales, cuando  $b_2=b_3$ , cuya función de pertenencia se esquematiza en la figura siguiente:

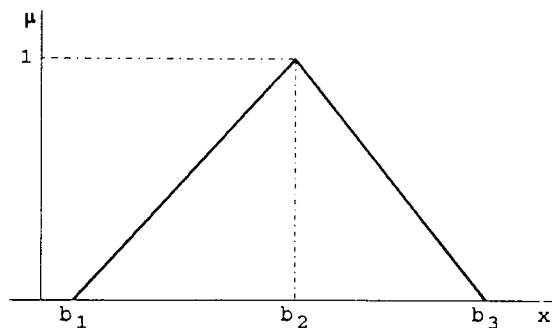


Figura 16. N<sup>o</sup> difuso triangular  $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$

### 3.3.- Operaciones básicas

La Aritmética Difusa se obtiene por generalización de las operaciones aritméticas de  $\mathbb{R}$  empleando el teorema de Extensión [Dub80]. Estas operaciones adoptan, en general, expresiones en términos de las correspondientes funciones de pertenencia. Un estudio detallado del tema puede encontrarse en Zimmermann [Zim86]. A continuación reseñamos la versión para números trapezoidales de aquellas operaciones de interés para el desarrollo de esta Memoria.

#### 3.3.1.- Operaciones con números difusos trapezoidales

Sean dos números difusos trapezoidales:

$$\underline{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4] \quad \text{y} \quad \underline{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4]$$

con estos números se cumplen las propiedades siguientes:

$$\underline{a} (+) \underline{b} = [a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4]$$

$$\underline{a} (-) \underline{b} = [a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, a_4-b_4]$$

$$k (+) \underline{a} = [k+a_1, k+a_2, k+a_3, k+a_4]$$

$$k (x) \underline{a} = [k*a_1, k*a_2, k*a_3, k*a_4] \quad \text{para} \quad k > 0$$

$$= [k*a_4, k*a_3, k*a_2, k*a_1] \quad \text{"} \quad k < 0$$

### 3.4.- Comparación de números difusos

A la hora de resolver problemas donde aparecen números difusos puede surgir la duda de ¿qué número es mejor? ¿cuál será el mayor? ..., en definitiva aparece la dificultad de efectuar una comparación entre ellos.

El problema de la comparación de números difusos es investigado en los últimos años como un elemento importante en la Matemática Difusa y es por lo que han aparecido diversos métodos que intentan dar una solución a esta cuestión.

De los diversos métodos de comparación existentes vamos a desarrollar los que están más contrastados y, de ellos, los que más se acercan a nuestro tema de estudio.

En [Zhu92] puede consultarse una buena recopilación de métodos de comparación. Puede comprobarse que en la comparación de números difusos existen tres grandes enfoques, de los que estudiaremos el siguiente:

Métodos basados en la definición de función ordenadora

- Lineal
- No lineal

A continuación reseñaremos las características más relevantes de este enfoque. En todos los casos supondremos que tratamos de ordenar un conjunto finito de números difusos,

$$B = \{b_1, \dots, b_n\} \subseteq F(\mathbb{R})$$

**3.4.1.- Métodos basados en la definición de función ordenadora**

Estos métodos consisten en la definición de una función de comparación  $F$ , de  $B$  en un cierto  $X$ , donde exista un orden (total o parcial),

$F: B \longrightarrow X$ , tal que

$$F(\underline{b}_i) < F(\underline{b}_j) \quad \Rightarrow \quad \underline{b}_i < \underline{b}_j$$

$$F(\underline{b}_i) > F(\underline{b}_j) \quad \Rightarrow \quad \underline{b}_i > \underline{b}_j$$

$$F(\underline{b}_i) = F(\underline{b}_j) \quad \Rightarrow \quad \underline{b}_i = \underline{b}_j$$

El primer candidato a ser considerado como  $X$  es el propio  $\mathbb{R}$  dotado del orden natural. En este caso cualquier  $F$  equivale a asociar un número real (índice) a cada sistema difuso y emplear dicho índice para efectuar la comparación. Esta forma de trabajo ha sido investigada por múltiples autores. A continuación resumimos las contribuciones más sobresalientes en este campo. En todos los casos ilustraremos el empleo de los índices que presentamos, mediante su uso para comparar dos números triangulares  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$

**3.4.1.1.- Índices de Yager (Yager 1978, 1981)**

Yager ha propuesto varios índices, cada uno de los cuales pretende resumir características del número difuso en estudio, que puedan ser considerados (de acuerdo con algunas hipótesis de



partida) significativas para la ordenación.

a) Primer índice

Se define como:

$$F_1(a_j) = \frac{\int_{S_j} g(z) \mu_{a_j}(z) dz}{\int_{S_j} \mu_{a_j}(z) dz}$$

donde  $g(z)$  es una medida sobre  $\mathbb{R}$  que mide la importancia de cada  $z$ .

Para los números triangulares del tipo  $\underline{a}_x$  y si  $g(z)=z$ , el valor de la función de comparación es:

$$F_1(\underline{a}_x) = ax + 1/3*(dx - d'x)$$

o bien

$$F_1(a) = 1/3*(a_3 + a_2 + a_1)$$

$$\text{con } dx = a_3 - a_2, \quad d'x = a_2 - a_1, \quad ax = a_2$$

En consecuencia, comparando dos números difusos triangulares  $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$  resulta que  $\underline{a} \leq \underline{b}$  cuando  $F_1(\underline{a}) \leq F_1(\underline{b})$ , o sea, cuando  $a_1 + a_2 + a_3 \leq b_1 + b_2 + b_3$

b) Tercer índice

$$F_3(a_j) = \int_0^1 M(A_{j\alpha}) d\alpha$$

donde  $A_{j\alpha}$  es el  $\alpha$  - corte de  $a_j$  y  $M(A_{j\alpha})$  es el valor medio de los elementos de  $A_{j\alpha}$ .

Para los números triangulares  $a_j$  el valor de la función de comparación es:

$$F_3(\underline{a}x) = ax + 1/4*(dx - d'x)$$

o bien

$$F_3(\underline{a}) = 1/4*(a_3 + 2*a_2 + a_1)$$

Por tanto,  $\underline{a} \leq \underline{b}$  cuando  $a_3 + 2*a_2 + a_1 \leq b_3 + 2*b_2 + b_1$

#### 3.4.1.2.- Relación de Adamo (Adamo 1980)

Utilizando el concepto de  $\alpha$  - corte, Adamo define un índice de  $\alpha$  - preferencia, dado por:

$$F_\alpha(\underline{a}_j) = \max \{z / \mu_{a_j}(z) \geq \alpha\}$$

para un  $\alpha$  dado, con  $\alpha \in [0, 1]$ .

Para los números triangulares, el valor de la función de ordenación será:

$$F_\alpha(\underline{a}) = a_3 + \alpha*(a_2 - a_3)$$

Utilizando este índice, diremos que dos números difusos triangulares  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  verifican que  $\underline{a} \leq \underline{b}$ , a grado  $\alpha$ , cuando

$$a_3 + \alpha*(a_2 - a_3) \leq b_3 + \alpha*(b_2 - b_3).$$

### 3.4.1.3.- Índice promedio (González 1988)

El índice promedio se define por medio de un proceso de integración de una función paramétrica que representa la posición de cada  $\alpha$ -corte en la recta real. Para números difusos triangulares ( $\tilde{a}$ ), con función de pertenencia representada en la figura 16, el valor del índice está dado mediante:

$$V_t^\lambda(\tilde{a}) = a_2 + \frac{(a_2 - a_1)}{t + 1} + \lambda \frac{(a_3 - a_1)}{t + 1}$$

donde  $\lambda$  es el grado de optimismo - pesimismo del decisor. Si el decisor es optimista  $\lambda \rightarrow 1$  y si es pesimista  $\lambda \rightarrow 0$ , y  $t$  es el parámetro que permite seleccionar distintos valores medios.

## 4.- PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA (P. L. D.)

La P. L. D. es uno de los temas estudiados con mayor profundidad en la literatura especializada en conjuntos difusos. A continuación se resumirán los tipos más importantes de modelos, es decir, los que presentan un conjunto difuso de restricciones, los que tienen coeficientes imprecisos en la función objetivo, los que tienen valores de la matriz tecnológica vagamente definidos y los que tienen valores difusos en el vector de la derecha, así como los que tienen una meta por alcanzar.

**4.1.- Problemas de P. L. con restricciones difusas**

Sea el problema de P. L. con restricciones fuzzy:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & z = cx \\
 \text{S. a.} \quad & Ax \leq b \\
 & x \geq 0;
 \end{aligned} \tag{41}$$

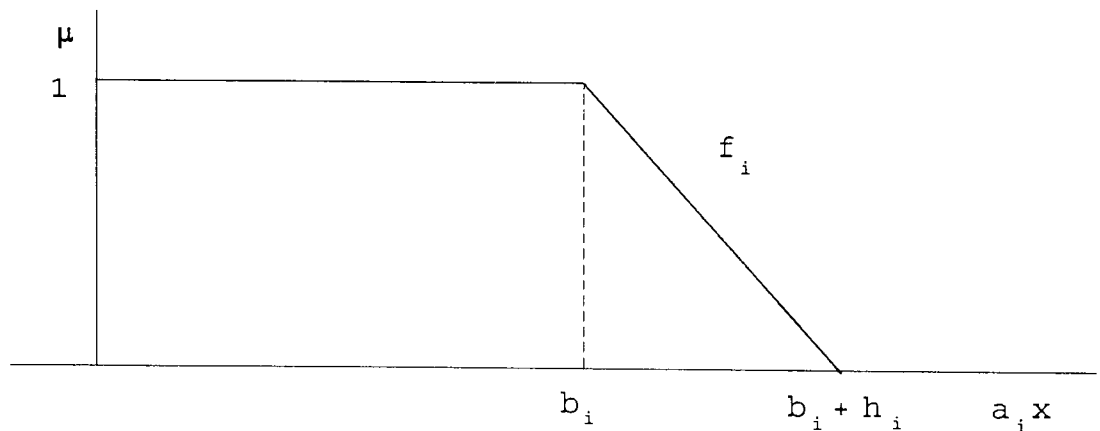
dónde  $c \in \mathbb{R}^n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A$  es una matriz de números reales de  $(m \times n)$  y cada una de las restricciones está modelizada por la función de pertenencia:

$$\mu_i : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$$

tal que:

$$\begin{aligned}
 \mu_i(a_i x) &= 1 && \text{Si } a_i x \leq b_i \\
 &= f_i(a_i x) && \text{Si } b_i \leq a_i x \leq b_i + h_i \\
 &= 0 && \text{Si } a_i x \geq b_i + h_i
 \end{aligned}$$

donde el decisor admite violaciones de cada restricción de valor  $h_i$ . Gráficamente será:



Para resolver este problema se pueden considerar las aproximaciones de Tanaka [Tan74], Zimmermann [Zim76], Verdegay [Ver82] y Werners [Wer87]. Haciendo uso del Teorema de Representación para conjuntos difusos en [Ver82] se demuestra que se puede encontrar una solución fuzzy a (41) por medio del problema auxiliar de P. L. paramétrica:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = cx \\ \text{s. a.} \quad & Ax \leq g(\alpha) \\ & x \geq 0; \quad \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

Las soluciones de Tanaka y Zimmermann se obtienen de la propuesta por Verdegay para distintos valores de  $\alpha$ . Por tanto, se tendrá un modelo auxiliar para su resolución que será:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = cx \\ \text{s. a.} \quad & Ax \leq b + h*(1 - \alpha) \\ & x \geq 0; \quad \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

La solución difusa se notará como:  $\tilde{S} = \{X(\alpha)/\alpha\}$

#### 4.2.- Problemas de P. L. con coeficientes difusos

Dentro de los distintos problemas que se plantean en la P. L. D. vamos a estudiar el problema de P. L. con coeficientes difusos en la matriz tecnológica y en los de la derecha, siendo números reales los valores que intervienen y definen la función objetivo.

Este tipo de P. L. D. se plantea como:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = cx \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \end{aligned} \quad (42)$$

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, n; \quad i = 1, m$$

con  $b_i$  y  $a_{ij} \in F(\mathbb{R})$  ( $F(\mathbb{R})$  = conjunto de números difusos).

Podemos suponer que se admiten violaciones en el cumplimiento de sus restricciones, hasta una amplitud máxima de valor  $h_i$ , según se indica en [Del89]. Teniendo en cuenta que aquí  $h_i$  ha de ser un número difuso y en los casos anteriores la amplitud no era difusa.

Desde este punto de vista, en [Del89] se propone un método de resolución para el modelo general (42) que sustituye el conjunto de restricciones por el siguiente conjunto convexo:

$$\underline{a}_i x_i \leq \underline{b}_i + h_i * (1 - \alpha) \quad i = 1, m; \quad \alpha \in [0, 1]$$

donde  $\underline{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ ;  $h_i$  es un número difuso fijado por el decisor, que nos da la violación tolerada en las restricciones y  $\leq$  es una relación entre dichos números.

△

Así el problema (42) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = cx \\ \text{s.a.} \quad & \underline{a}_i x_i \leq \underline{b}_i + h_i * (1 - \alpha) \end{aligned} \quad (43)$$

$$x_i \geq 0; \quad \alpha \in [0, 1]; \quad i = 1, m$$

donde  $\leq$  corresponde a un método de ordenación de números difusos.

△

**4.3.- Problemas de P. L. con costes difusos**

En este caso el decisor no conoce con exactitud los valores de los coeficientes de la función objetivo, por lo que el problema a plantear será:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & z = \underline{c}x && (44) \\
 \text{s. a.} \quad & Ax \leq b \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

donde  $\underline{c} \in F(\mathbb{R})$  y las funciones de pertenencia son de la forma:

$$\begin{aligned}
 \mu_i : \mathbb{R} & \text{--->} [0, 1] && i = 1, n \\
 \mu_i(u) & = 0 && \text{Si } u \leq r_j \text{ o } c \geq \underline{c}_j \\
 & = h_i(u) && \text{Si } r_j \leq u \leq \underline{c}_j \\
 & = g_i(u) && \text{Si } c_j \leq u \leq R_j \\
 & = 1 && \text{Si } u \geq R_j
 \end{aligned}$$

Para resolver (44) se conocen diferentes aproximaciones como son las de [Del87], [Rom89] y [Tan84]. En [Del90] se demuestra que la solución de (44) encontrada en [Del87] engloba al resto, utilizando un modelo auxiliar paramétrico multiobjetivo.

**4.4.- Modelo general de P. L. D.**

El problema general de P. L. D., que se plantea cuando aparecen a la vez las restricciones difusas, los coeficientes

difusos y los costes difusos, ha sido resuelto por Tanaka, Verdegay, Delgado y Zimmermann, entre otros.

Pues bien, este es un problema del tipo:

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\
 & x_j \geq 0; \quad i = 1, m; \quad j = 1, n
 \end{aligned} \tag{45}$$

donde los elementos difusos están dados por:

a) Para los costes, su valor representativo será:

$$\exists \mu_j \in F(\mathbb{R}) \quad | \quad \mu_j : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]; \quad j = 1, n$$

b) Para cada fila

$$\exists \mu_i \in F(\mathbb{R}) \quad | \quad \mu_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad i = 1, m$$

las cuales definen el número difuso de la derecha.

c) Para cada elemento de la matriz tecnológica

$$\exists \mu_{ij} \in F(\mathbb{R}) \quad | \quad \mu_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad i = 1, m; \quad j = 1, n$$

d) Para cada fila

$$\exists \mu^i \in F[F(\mathbb{R})] \quad | \quad \mu^i : F(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]; \quad i = 1, m$$

que para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  nos da el grado de acoplamiento del número difuso

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$$

con respecto a la  $i$ -ésima restricción.



Procedimientos de resolución tanto mediante el uso del Teorema de Representación como el uso de funciones ordenadoras se pueden encontrar en [Cad92].

#### 4.5.- Métodos de resolución en P. L. D.

Una vez que se han expuesto los distintos modelos que se pueden dar en P. L. D. en los apartados 2 y 3 del presente capítulo, vamos a estudiar algunos de los distintos métodos de resolución de los modelos anteriormente descritos.

A partir del modelo adecuado, en el que se basará el decisor (y en su caso el operador del sistema), para resolver las distintas actuaciones que debe desarrollar en el trabajo cotidiano del D. E. en los Servicios Eléctricos elegirá el método de resolución que le sirva para adecuar las previsiones a las realidades y optimizar los recursos que manejan.

##### 4.5.1.- P. L. con restricciones difusas

Su modelo será:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max} & z = cx \\
 \text{s.a.} & (Ax)_i \leq b_i \\
 & x \geq 0
 \end{array} \tag{46}$$

cuya función de pertenencia es del tipo ya dado:

$$\mu_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1] \quad i = 1, m$$

para cada una de las restricciones y consideraremos un  $\alpha$  - corte sobre la restricción difusa.

#### 4.5.1.1.- Soluciones

##### 4.5.1.1.1.- Solución difusa

Para resolver (46), en [Ver82] se considera que si las funciones de pertenencia de las restricciones difusas

$$\begin{aligned} \mu_i(x) &= 1 && \text{Si } (Ax)_i < b_i && (47) \\ &= [(Ax)_i - b_i]/h_i && \text{Si } b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + h_i \\ &= 0 && \text{Si } (Ax)_i \geq b_i + h_i \end{aligned}$$

son funciones monótonas y continuas, la ecuación (46) es equivalente a:

$$\begin{aligned} \text{Max } & z = cx \\ \text{s.a. } & x \in X_\alpha \end{aligned} \quad (48)$$

donde  $X_\alpha = \{x \mid \mu_i(x) \geq \alpha; x \geq 0\}$  para cada  $\alpha \in [0, 1]$  y  $\alpha$  es el  $\alpha$  - corte, como se definió en 2.2., del presente capítulo, las funciones de pertenencia indican que:

1) Si  $(Ax)_i \leq b_i$ , entonces la  $i$ -ésima restricción se satisface absolutamente,  $\mu_i(x) = 1$ .

2) Si  $(Ax)_i \geq b_i + h_i$ , donde  $h_i$  es la máxima tolerancia de  $b_i$  y determinada por el decisor, por un camino sistemático o no, entonces la  $i$ -ésima restricción es violada absolutamente, por lo que  $\mu_i(x) = 0$ .

3) Si  $(Ax)_i \in (b_i, b_i + h_i)$ , entonces las funciones de pertenencia son monótonamente decrecientes. O sea, si estos valores se hacen menores la satisfacción del decisor disminuye.

Se pueden sustituir las funciones de pertenencia de (47) en (48) y obtendremos el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Max} & z = cx \\
 \text{s.a.} & (Ax)_i \leq b_i + h_i * (1 - \alpha) \\
 & x \geq 0; \quad \alpha \in (0, 1]
 \end{array} \tag{49}$$

que es equivalente al de programación paramétrica, mientras que  $\alpha = 1 - \theta$ . O sea, que el problema de P.L. paramétrico dado en (46) puede ser equivalente al problema de P.L. clásico, cuando se toman las formas apropiadas de las funciones de pertenencia de las restricciones. Se ha de tener en cuenta que para cada  $\alpha$  tenemos una solución optimal; además, la solución con grado  $\alpha$  de pertenencia es difusa realmente.

**4.5.1.1.2.- Satisfacción de objetivos y restricciones**

En [Wer87] se propone que la función objetivo de (46) puede ser difusa a causa de los valores difusos o restricciones de desigualdad difusas. Se aceptan unas tolerancias para los valores difusos,  $h_i$ .

El problema paramétrico auxiliar es:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = cx \\ \text{s.a.} \quad & (Ax)_i \leq b_i + h_i * (1 - \alpha) \\ & x \geq 0; \quad \alpha \in (0, 1] \end{aligned}$$

cuya solución será:  $\{x(\alpha)/\alpha\}$ .

Para resolver (46) Werners define dos valores  $z_0$  y  $z_1$ , como:

$$\begin{aligned} z_0 = \text{Max} \quad & cx \\ \text{s.a.} \quad & (Ax)_i \leq b_i \\ & x \geq 0; \quad z_0 = cx(1) \quad \text{y} \\ z_1 = \text{Max} \quad & cx \\ \text{s.a.} \quad & (Ax)_i \leq b_i + h_i \\ & x \geq 0; \quad z_1 = cx(0) \end{aligned}$$

ya que la solución optimal se encontrará entre  $z_0$  y  $z_1$ . La satisfacción de dicha solución aumentará cuando estos valores se incrementen.

La función de pertenencia del objetivo,  $\mu_o$ , es:

$$\begin{aligned} \mu_o(x) &= 1 && \text{Si } cx > z_1 \\ &= (cx - z_0) / (z_1 - z_0) && \text{Si } z_0 \leq cx \leq z_1 \\ &= 0 && \text{Si } cx < z_0 \end{aligned}$$

cuya representación gráfica es:

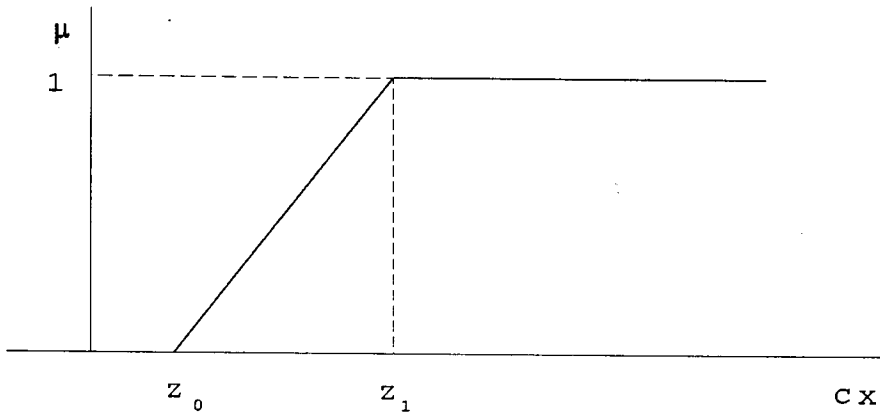


Figura 18. Función de pertenencia de la función objetivo

La solución óptima será  $(X^*, \alpha^*)$ , que se obtiene a partir del problema:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} \quad \alpha \\
 & \text{s.a.} \quad \mu_0(x) \geq \alpha \\
 & \quad \quad \mu_i(x) \geq \alpha \\
 & \quad \quad x \geq 0; \quad \alpha \in [0, 1]; \quad i = 1, m
 \end{aligned} \tag{50}$$

haciendo  $f[X(\alpha)] = \alpha$

$$[cx(\alpha) - z_0] / (z_1 - z_2) = \alpha$$

tendremos:

$$cx(\alpha) = z_0 + (z_1 - z_2) * \alpha$$

por tanto:

$$cx(\alpha) = cx(1) + [cx(0) - cx(1)] * \alpha$$

obteniéndose los valores óptimos  $\alpha^*$  y  $x^* = x(\alpha^*)$ .

#### 4.5.2.- P. L. con restricciones y meta difusas

Planteado el problema, el decisor puede quedar complacido con un valor  $x_1$  en el que consiga la meta fijada  $z_0$  que, aun no siendo la óptima, satisfaga mejor las restricciones, al menos en un cierto grado. Podemos considerar que su modelo de P.L.D. es como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad z &= \underset{\sim}{c}x \\ \text{s.a.} \quad (Ax)_i &\leq b_i \\ x &\geq 0; \quad i = 1, m \end{aligned} \tag{51}$$

##### 4.5.2.1.- Resolución

Para resolver la ecuación (51) se han propuesto los métodos de Zimmermann [Zim76] y Chanas [Cha83], utilizaremos el de Zimmermann, por considerarlo más adecuado para el problema que estamos planteando.

En esta aproximación, inicialmente se dan la meta,  $b_0$ , y la correspondiente holgura,  $h_0$ , de la función objetivo, y también los márgenes  $b_i$  y sus correspondientes tolerancias  $h_i$ .

Se consideran como difusas las restricciones y la función objetivo, indistintamente, y sus correspondientes regiones pueden limitarse en el intervalo  $[b_i, b_i + h_i]$ . O sea, la ecuación (51) puede ser considerada como:

$$\begin{aligned}
 &\text{Encontrar } \alpha \\
 &\text{tal que } \quad cx \geq b_0 \\
 &\quad \quad \quad (Ax)_i \leq b_i \qquad \qquad \qquad (52) \\
 &\quad \quad \quad x \geq 0; \quad i = 1, m
 \end{aligned}$$

En la teoría de conjuntos difusos, la función objetivo y las restricciones difusas se definen por sus correspondientes funciones de pertenencia. Por simplicidad, se acepta que la función de pertenencia del objetivo difuso,  $\mu_0$ , es lineal, continua y no decreciente y las de las restricciones,  $\mu_i$ , son lineales, continuas y no crecientes, como se ven en la figura.

$$\begin{aligned}
 \mu_0(x) &= 1 && \text{Si } cx > b_0 \\
 &= 1 - (b_0 - cx)/h_0 && \text{Si } b_0 - h_0 \leq cx \leq b_0 \\
 &= 0 && \text{Si } cx < b_0 - h_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Y } \mu_i(x) &= 1 && \text{Si } (Ax)_i < b_i \\
 &= 1 - [(Ax)_i - b_i]/h_i && \text{Si } b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + h_i \\
 &= 0 && \text{Si } (Ax)_i > b_i + h_i
 \end{aligned}$$

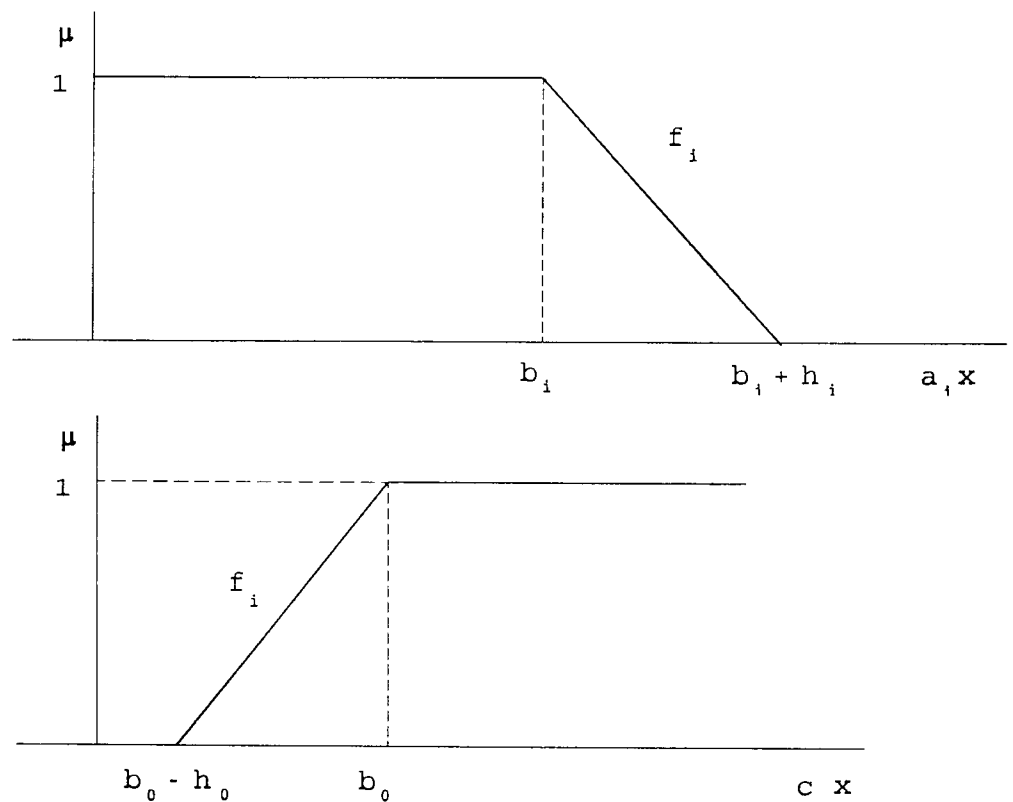


Figura 19. Funciones de pertenencia de las restricciones difusas en el objetivo y en las restricciones.

Zimmermann usó el operador de Bellman y Zadeh [Bell70] para resolver la ecuación (52). Por tanto, la solución optimal puede alcanzarse mediante la expresión:

$$\max \mu_D = \max \{ \min [\mu_0(x), \mu_1(x), \dots, \mu_n(x)] \}$$

donde  $\mu_D$  es la función de pertenencia del espacio de decisión,  $D$ , y

$$\mu_D = \min [\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n] \quad (53)$$

Si  $\mu_D = \alpha$  la ecuación (52), mediante (53), será equivalente a:



$$\begin{aligned}
 & \text{Max} && \alpha \\
 & \text{s.a.} && \mu_0(x) = 1 - (b_0 - cx)/h_0 \geq \alpha \\
 & && \mu_i(x) = 1 - [(Ax)_i - b_i]/h_i \geq \alpha \\
 & && i = 1, m; \alpha \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{54}$$

o bien:

$$\begin{aligned}
 & \text{Max} && \alpha \\
 & \text{s.a.} && cx \geq b_0 - (1 - \alpha) * h_0 \\
 & && (Ax)_i \leq b_i + (1 + \alpha) * h_i \\
 & && i = 1, m; \alpha \in [0, 1]
 \end{aligned} \tag{55}$$

donde  $A$ ,  $c$ ,  $b_0$ ,  $h_0$ ,  $b_i$  y  $h_i$  se dan inicialmente.

Obviamente, la ecuación (55) es de P.L. clásica. Se puede obtener una única solución optimal. Se podría indicar que esta aproximación está considerada como el primer método práctico para resolver problemas de P.L. con coeficientes y objetivo difuso.

#### 4.5.3.- Análisis conjunto de los modelos con restricciones difusas

Después del estudio de los modelos anteriores, podemos encontrar que las aproximaciones referidas son las más prácticas porque nos dan un posible control de la solución al problema ya que reflejan, en un caso, el conocimiento del decisor en cuanto a la meta por alcanzar; en otro, que conociendo los límites de trabajo se satisfarán sus objetivos si actúa entre dichos límites, y por último, la solución difusa, que engloba a las dos

anteriores; recoge el conocimiento difuso del decisor para las restricciones y a éste le da como solución una ecuación paramétrica que le permite conocer la solución puntual al problema en función de dicho parámetro  $\alpha$ .

A fin de conocer las diferencias y contribuciones de estas aproximaciones y conceptos es necesario hacer algunos comentarios adicionales.

En el modelo de P.L.D. de Zimmermann, se puede dar inicialmente la meta  $b_0$  y su máxima tolerancia. En problemas del mundo real no es realista empezar a preguntar al decisor acerca de los valores de  $b_0$  y  $h_0$  sin que disponga de alguna información previa. Por otro lado, la función de pertenencia de la función objetivo es cuestionable e, igualmente, la solución también lo es. Por ejemplo, si la  $b_0$  dada es demasiado grande, no será una solución en el modelo de P.L.D. de Zimmermann. Al mismo tiempo, si  $h_0$  es demasiado grande entonces no será significativa para la función de pertenencia. O sea, la solución es dudosa. En lugar de preguntar al decisor por  $b_0$  y  $h_0$  para establecer la función de pertenencia de la función objetivo, Werners propone dos puntos como posibles extremos,  $z_0$  y  $z_1$ , tales que:

$$z_0 = \inf (\max cx) \quad x \in X$$

$$z_1 = \sup (\max cx) \quad x \in X$$

donde  $X = \{x \mid (AX)_i \leq b_i; x \geq 0; i = 1, m\}$ . La diferencia entre las funciones de pertenencia de Zimmermann y Werners se ve en la figura siguiente. En esta figura los valores de  $z$ ,  $b_0$  y  $h_0$  serán

racionales; por ejemplo,  $z_0 \leq b_0 \leq z_1$  y  $b_0 - h_0 \geq z_0$ . De este modo, el decisor puede considerar la función de pertenencia como más aceptable, la mayoría de las veces.

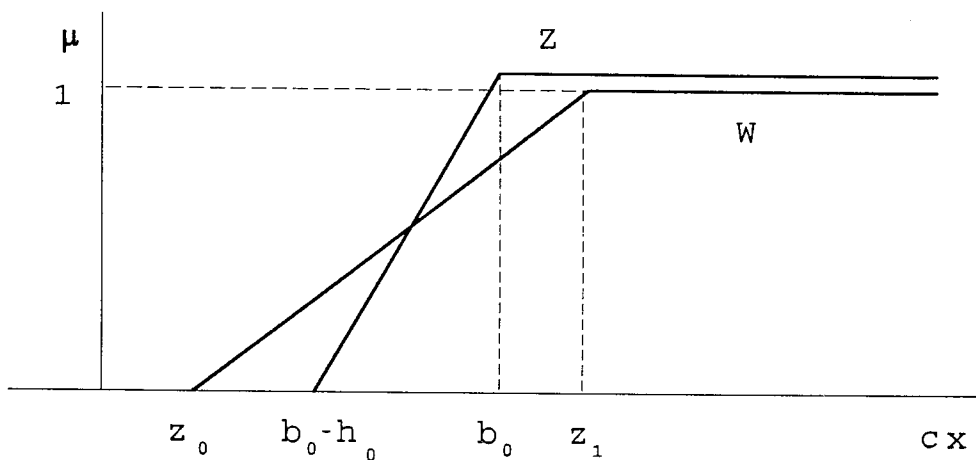


Figura 20. Diferencia entre las funciones de pertenencia de Zimmermann y Werners.

Mientras que Tanaka et al. [Tan74] y Zimmermann [Zim76] conectan la teoría de conjuntos difusos y el operador max-min con la P.L., Verdegay [Ver82] obtiene la relación equivalente entre la programación paramétrica con coeficientes paramétricos y la P.L.D. con valores difusos definidos, aceptando funciones de pertenencia lineales. La dificultad de proporcionar  $b_0$  y  $h_0$  inicialmente está superada con la presentación de una tabla de la solución del problema de P.L. paramétrico. En esta tabla el

decisor puede fijar su objetivo  $b_0$  y  $h_0$ . Entonces, la solución del modelo de Zimmermann es segura.

#### 4.5.4.- P.L.D. con coeficientes imprecisos

El problema puede presentarse como:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = cx \\ \text{s.a.} \quad & \sum a_{ij} x_j \leq b_i \\ & x \geq 0; \quad i = 1, m; \quad j = 1, n \end{aligned} \tag{56}$$

donde  $a_{ij}$  y  $b_i$  son números triangulares y  $\leq$  es una desigualdad imprecisa.

Como el decisor conoce la falta de precisión en cada uno de los valores de  $a_{ij}$  y  $b_i$ , en cada restricción de (56) se puede admitir alguna violación en el cumplimiento de cada una de ella.

#### 4.5.4.1.- Resolución

##### 4.5.4.1.1.- Modelo general

Delgado et al. [Del89] dan una solución a este problema. La metodología a seguir es modelar la función de pertenencia de las restricciones "difusas  $\leq$ " estimando una holgura  $h_i$ .

Esta desigualdad en las restricciones indica que el uso de los valores  $(\sum a_{ij} x_j)$  son menores o iguales que  $b_i$ , pero no mayores que  $b_i + h_i$ . Entre  $b_i$  y  $b_i + h_i$  existe una función que representa la satisfacción de nuestra predicción. Esta desigualdad puede estar modelada por funciones de pertenencia  $\mu_i(x)$ , aceptando que es lineal, tal como:

$$\begin{aligned} \mu_i(x) &= 1 && \text{Si } \sum a_{ij} x_j \leq b_i \\ &= 1 - (\sum a_{ij} x_j - b_i) / h_i && \text{Si } b_i \leq \sum a_{ij} x_j \leq b_i + h_i \\ &= 0 && \text{Si } \sum a_{ij} x_j \geq b_i + h_i \end{aligned}$$

Sea  $\alpha = \min \mu_i(x)$ , el nivel mínimo de satisfacción aceptable, o sea,  $\mu_i(x) \geq \alpha$ . Entonces la restricción de (56) será equivalente a:

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i + h_i * (1 - \alpha)$$

Por otro lado, se supone que existe una relación de ordenación entre números difusos, tal como:

$$\underline{a}, \underline{b} \in F(\mathbb{R}) \implies \underline{a} \leq_{\Delta} \underline{b}$$

Ahora, el valor de la restricción,  $h_i$ , será un número difuso fijado por el decisor, dando su máxima violación en el cumplimiento de la restricción  $i$ -ésima. Por tanto, tiene sentido cambiar la  $i$ -ésima restricción por el siguiente conjunto difuso convexo:

$$\underline{a}_i x \leq_{\Delta} \underline{b}_i + h_i * (1 - \alpha)$$

$$\alpha \in (0, 1]; \quad i = 1, m$$

que indica que para  $\alpha = 1$  se verifica completamente la restricción con respecto al grado de optimismo del decisor.

Por otro lado, a menor  $\alpha$  menor será el grado de cumplimiento de la toma de decisión. Por tanto, el conjunto de restricciones difusas en (56) puede ser sustituido por:

$$\underline{A} x \leq \underline{b} + \underline{h}*(1 - \alpha); \quad \alpha \in (0, 1] \quad (57)$$

donde  $\underline{A}$  es una matriz  $(m, n)$  de números difusos y  $\underline{h}$  el vector columna de los números difusos de las holguras.

De esta forma, el problema auxiliar para la resolución de (56) es:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & c_j x_j \\ \text{s. a.} \quad & \sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij} x_j \leq \underline{b}_i + \underline{h}_i(1 - \alpha) \\ & x_j \geq 0; \quad i = 1, m; \quad j = 1, n; \quad \alpha \in (0, 1] \end{aligned} \quad (58)$$

Es evidente que la ecuación (58) es un problema de P.L.D. con la principal diferencia que aquí la relación  $\leq$  puede ser cualquiera que el decisor elija. Por esto, debido al tipo de relación que se acepte se obtendrá un modelo diferente de P.L. convencionales.

**4.5.4.1.2.- Modelo particular basado en una relación de comparación de números difusos**

Campos y Verdegay [Cam87] proponen modelos auxiliares de solución de (56), usando números difusos triangulares sustituyendo la relación  $\leq$  anterior, por la particularización de cada  $a_i x$  y  $b_i + h_i * (1 - \alpha)$ . Esto permitirá conseguir diferentes modelos de P.L. paramétrica convencional de los cuales se obtendrán soluciones apropiadas y diferentes de (56).

De acuerdo con los métodos de comparación de números difusos dados en el apartado 3.4.1 del presente capítulo, tendremos:

a) Primer índice de Yager

Para números difusos triangulares, el primer índice de Yager es:

$$f_1(ax) = \frac{1}{3} * (a_1 + a_2 + a_3) x$$

Aplicando este índice al modelo auxiliar para resolver el problema (56), tendremos:

$$\text{Max } z = cx$$

$$\text{s.a. } (a_1 + a_2 + a_3)x \leq (b_1 + b_2 + b_3) + (h_1 + h_2 + h_3) * (1 - \alpha)$$

$$x \geq 0; \quad \alpha \in (0, 1]$$

en el cual la linealidad y adimensionalidad del problema se mantiene.

b) Tercer índice de Yager

Para números difusos triangulares, este índice es:

$$f_2(ax) = 1/4*(a_1 + 2*a_2 + a_3)x$$

Aplicando este índice al modelo auxiliar para resolver el problema (56), tendremos:

$$\text{Max } z = cx$$

$$\text{s.a. } (a_1+2*a_2+a_3)x \leq (b_1+2*b_2+b_3) + (h_1+2*h_2+h_3)*(1 - \alpha)$$

$$x \geq 0; \quad \alpha \in (0, 1]$$

que también es lineal con las mismas condiciones del problema anterior.

c) Relación de Adamo

Para números difusos triangulares, este índice es:

$$f_\alpha(ax) = [a_3 - \alpha*(a_3 - a_1)]x$$

Aplicando este índice al modelo auxiliar para resolver el problema (56), tendremos:



$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = cx \\ \text{s. a.} \quad & [a_3 - \alpha(a_3 - a_1)]x \leq [b_3 - \alpha(b_3 - b_1)] + [d_3 - \alpha(d_3 - d_1)](1 - \alpha) \\ & x \geq 0; \quad \alpha \in (0, 1] \end{aligned}$$

d) Índice promedio (González)

Para números difusos triangulares el índice González es:

$$f(\tilde{ax}) = a_2x + [(a_2 - a_1)]x/(t+1) + \lambda(a_3 - a_1)x/(t+1)$$

Aplicando este índice al modelo auxiliar para resolver el problema (56), tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = cx \\ \text{s. a.} \quad & a_2x + [(a_2 - a_1)]x/(t+1) + \lambda(a_3 - a_1)x/(t+1) \leq \\ & \leq b_2 + [(b_2 - b_1)]/(t+1) + \lambda(b_3 - b_1)/(t+1) + \\ & + [d_2 + [(d_2 - d_1)]/(t+1) + \lambda(d_3 - d_1)/(t+1)]*(1 - \alpha) \\ & x \geq 0; \quad \alpha \in (0, 1] \end{aligned}$$

## CAPÍTULO 4

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL D.E.  
MEDIANTE P.L.D.

## RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DEL D.E. MEDIANTE P.L.D.

### 1.- INTRODUCCIÓN

Como se ha dicho en el capítulo segundo, la operación de Despacho Económico (D.E.) es la fijación de la carga entre generadores operativos de energía eléctrica.

En este capítulo se pretende resolver mediante P. L. D. uno de los problemas que se plantean en el D.E., que en la actualidad se soluciona utilizando técnicas clásicas. Compararemos los resultados obtenidos por los distintos procedimientos.

El problema general a resolver será:

" Se tienen  $n$  unidades generadoras de energía trabajando en paralelo, cuyos costes incrementales vienen dados por  $n$  funciones del tipo:

$$\lambda_i = a_i + b_i * P_i$$

Se desea cumplir con una determinada petición de consumo, de la forma más económica (despreciando las pérdidas de transmisión)".

En el capítulo dedicado a los Servicios Eléctricos se han revisado sistemas conocidos y suficientemente contrastados en Ingeniería Eléctrica. A continuación vamos a plantear un nuevo método de trabajo en el D. E. mediante P. L. D., que creemos que permite un estudio más amplio y flexible del problema en cuestión, ya que se podrá incluir la experiencia del decisor y sus conocimientos, factores que posee de una forma más o menos "vaga" que, por otro lado, es lo habitual en los operadores del Dispatching en los Servicios Eléctricos o en los responsables técnico-económicos de las empresas del sector.

Como se ha visto en los capítulos anteriores, los valores utilizados son "muy concretos", no había posibilidad de modificación "a la baja o a la alta" en la previsión de la demanda, lo que en realidad no ocurre con frecuencia en este tipo de Servicios, sino que, por el contrario, es normal que se acepten aproximaciones, "dentro de lo razonable", de acuerdo con el tipo de instalaciones. Es frecuente oír al operador o jefe de Servicio indicar que necesitarán "aproximadamente", "alrededor de", "más o menos", ... tantos MW, según su experiencia y conocimientos, para abastecer la demanda de energía.

También es frecuente que se tenga en cuenta que las unidades generadoras no tienen unos valores límites de trabajo estables, sino que, por el contrario, se sabe que según las unidades que se utilicen éstas tendrán un margen "más o menos" preciso, o sea, que el decir que los límites de actuación de las unidades están entre, por ejemplo, 20 y 100 MW no indica que sea exactamente el intervalo  $[20, 100]$  el de actuación, sino que será un intervalo tal como entre "alrededor de 20 y alrededor de 100", teniendo claro que estos "alrededor de" están controlados por la experiencia de los operadores, y que ellos adecuarían si el sistema tuviese la flexibilidad suficiente.

Además, la ecuación de partida para cada unidad de generación también está dada, y se sabe que para llegar a dicha ecuación se han de tener en cuenta una serie de parámetros, de los cuales no todos son tan concretos como en principio parecen, tales como: los salarios, que se deben estimar como "más o menos"; la amortización también es "aproximadamente", ya que los intereses se pueden estudiar perfectamente como números difusos [Che93]; el precio del combustible será "alrededor de",... Esto nos lleva a pensar que en la ecuación de partida del costo incremental también se han de tener en cuenta estas vaguedades ya conocidas.

Todo lo anterior hace que los responsables del sistema asuman unas decisiones para mejorar el servicio, en función de diversas circunstancias como pueden ser: estación del año, previsiones meteorológicas, horas de funcionamiento, lugar de

suministro, tipo de servicio, tipo de instalaciones, modelo de unidades de generación, etc., y que sus conocimientos les indican como más aconsejables.

Pues bien, vamos a estudiar servicios con estas características, donde el responsable decide admitir algún grado de "vaguedad" en la previsión de las necesidades, por ejemplo "cercana" al 10% de la carga total, y lo mismo en cuanto al intervalo de funcionamiento por unidad, lo que implica "su aproximación" en la decisión para resolver adecuadamente las necesidades del servicio en cuestión. Bajo estas consideraciones se debe tener en cuenta que aparecerá el grado de optimismo o pesimismo del decisor.

Este es un problema que se puede plantear teniendo en cuenta las situaciones más normales de trabajo en el D.E. de los Servicios Eléctricos, donde aparece la imprecisión. En su forma más general es:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \lambda \\
 & \text{s. a.} \quad \underline{a} + \underline{b} * P_i \leq \lambda_i \\
 & \quad \quad \quad \Sigma P_i \leq P_T \\
 & \quad \quad \quad P_1 \leq P_i \leq P_2 \\
 & \quad \quad \quad P' \leq P_T \leq P'' \\
 & \quad \quad \quad P_i > 0; \quad i = 1, n.
 \end{aligned}$$

siendo:  $a$  y  $b$  coeficientes difusos

$\lambda$  coste incremental

$P_i$  potencias de las unidades de generación

$P_1$  y  $P_2$  límites de la potencia de las unidades de generación

$P_T$  demanda de consumo

$P'$  y  $p''$  límites de la demanda de consumo

$=$  y  $\leq$  restricciones difusas que aplicará el decisor.

Se puede resolver aplicando distintos métodos, como vamos a estudiar. Se obtendrán las soluciones para el coste incremental y la potencia por unidad que interviene, según técnicas enunciadas en el capítulo anterior, que serán las óptimas en cada caso.

## 2.- MODELOS DE P.L.D. EN EL DESPACHO ECONÓMICO

### 2.1.- Primer modelo: DESPACHO ECONÓMICO CON DEMANDA DE POTENCIA PUNTUAL

#### 2.1.1.- Formulación del problema

"Cuando se demanda un consumo puntual de  $P_T$  (W) y la potencia de las unidades que intervienen son mayores que cero".

Este problema se plantea en un ambiente borroso, vago, ..., debiendo resolverse entonces por P. L. D. considerando que el

decisor asume que puede haber cierta tolerancia en el cumplimiento de alguna restricción. Para cada restricción esta suposición se puede representar de la forma:

$$a_i x \leq b_i \quad i = 1, n$$

y modelarla mediante una función de pertenencia de la forma:

$$\begin{aligned} \mu_i(x) &= 1 && \text{Si } a_i x = b_i \\ &= f_1(a_i x) && \text{Si } a_i x \leq b_i + d_i \\ &= f_2(a_i x) && \text{Si } b_i - d_i \leq a_i x \\ &= 0 && \text{En otro caso.} \end{aligned}$$

que indica que el decisor admitirá violaciones en cada restricción hasta un valor  $b_i \pm d_i$  ( $i = 1, n$ ). Por otro lado, las funciones  $f_i$  se asumen aquí como lineales y continuas para la función de pertenencia,  $f_1$  decreciente y  $f_2$  creciente.

La función  $\mu_i(x)$  da el grado de cumplimiento de la  $i$ -ésima restricción para cada  $x \in X$ , cuya representación gráfica es:

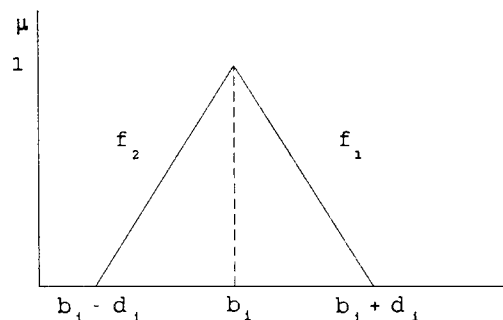


Figura 21. Función de pertenencia  $b_i \pm d_i$



Este problema de P. L. D. se representa mediante el modelo:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & z = cx \\
 \text{s.a.} & Ax = b \\
 & x \geq 0
 \end{array} \tag{60}$$

Este problema ha sido descrito en diversos trabajos y para su resolución hay diferentes aproximaciones. En particular haciendo uso del Teorema de Representación para conjuntos difusos, se obtiene el modelo auxiliar de Programación Lineal Paramétrica.

Tomando para los valores difusos las funciones de pertenencia triangulares descritas en el capítulo tercero, (60) se presenta bajo la forma paramétrica:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & z = cx \\
 \text{s.a.} & a_i x \leq b_i + d_i *(1 - \alpha) \\
 & a_i x \geq b_i - d_i *(1 - \alpha) \\
 & x \geq 0; \quad i \in M; \quad \alpha \in (0, 1]
 \end{array} \tag{61}$$

2.1.2.- Ejemplos2.1.2.1.- Problema 1

Se tienen dos unidades trabajando en paralelo, cuyos costes incrementales vienen dados por:

$$(C1) = 2415 + 2.90 \cdot P_1 \quad \text{ptas/MWh}$$

$$(C2) = 2130 + 3.15 \cdot P_2 \quad \text{"}$$

con  $P_1$  y  $P_2$  en MW.

Si la demanda de consumo es de 600 MW, se desea saber la carga que deben proporcionar las unidades 1 y 2, para que el sistema funcione en la forma más económica (despreciando las pérdidas de transmisión).

Su diagrama simbólico es:



**2.1.2.1.1.- Técnicas de resolución****2.1.2.1.1.1.- Si conocemos la curva de rendimiento/potencia de cada unidad de generación**

No tiene interés en nuestro estudio, como se indicó en el capítulo segundo.

**2.1.2.1.1.2.- Método gráfico**

Se representan las gráficas correspondientes a  $P_1$  y  $P_2$

P1	$\lambda$	P2	$\lambda$
0	2415	0	2130
500	3865	500	3705

y con ellas la de  $\lambda = f(P_1 + P_2)$ .

- a) Tomando valores de  $\lambda$  se encuentran las  $P_1$  y  $P_2$  en el eje de abscisas.
- b) Con ese mismo  $\lambda$  se encuentra un punto de la función  $(P_1 + P_2)$
- c) Y así sucesivamente, hasta encontrar la curva total del costo incremental.

Una vez trazada la curva total, la carga que debe tomar cada unidad para optimizar la producción se determina de la siguiente forma:

Se supone que la carga a suministrar es  $P_T$ , a la que corresponderá un punto en la curva de costo incremental de producción, cuyo valor es  $\lambda_T$ . La carga a dar por cada unidad es precisamente la de la abscisa correspondiente a dicho  $\lambda_T$ . (Este método se puede aplicar con cualquier número de unidades en paralelo).

Veamos una tabla de valores para este caso:

(ptas/MWh)	P1 (Mw.)	P2 (MW)	P1+P2 (MW)	Observ.
2000	-14.31	-41.269	--	*
2415	0	90.476	90.476	**
3000	201.72	276.19	477.91	***
3050	218.96	292.06	511.02	***
3184.2817	265.1814	334.8186	600	****
3200	270.69	339.68	610.39	*****

Como vemos, con  $\lambda = 2000$  los valores resultantes (tipo \*) señalan que el sistema absorbe potencia del exterior y no la suministra, por lo tanto no interesa.

Si  $\lambda = 2415$  (tipo \*\*), solo funciona una de las dos unidades.

Si  $\lambda = 3000$  o  $\lambda = 3050$  (tipo \*\*\*), el sistema ya suministra energía al exterior pero no consigue el valor de la potencia demandada.

Con  $\lambda = 3184.2817$  (tipo \*\*\*\*), se obtienen los 600 MW solicitados en la carga (estamos en el punto exacto de funcionamiento) y tenemos la distribución óptima de  $P_1$  y  $P_2$ .

Si  $\lambda = 3200$  (tipo \*\*\*\*\*), se ve que ya se ha sobrepasado la carga solicitada, y con un coste mayor. ¿Se admitirá este aumento como aceptable?

Si las necesidades del servicio (carga) fuese otro valor de los referidos para  $P_T$ , de la tabla anterior, por ejemplo 500 MW, se tomará dicho valor sobre el eje de abscisas, se levanta una perpendicular hasta que corte a la gráfica de  $P_T$ . Desde ese punto se traza una paralela al eje de abscisas que cortará las curvas características de la unidades 1 y 2 en sendos puntos, que son los valores de  $P_1$  y  $P_2$  óptimos, para este caso y, además, obtendremos el valor de  $\lambda$  óptimo:

$$\lambda = 3033.347 \quad \text{ptas/MWh.}$$

$$P_1 = 213.223 \quad \text{MW.}$$

$$P_2 = 286.277 \quad \text{MW.}$$

(Ver figura 22)

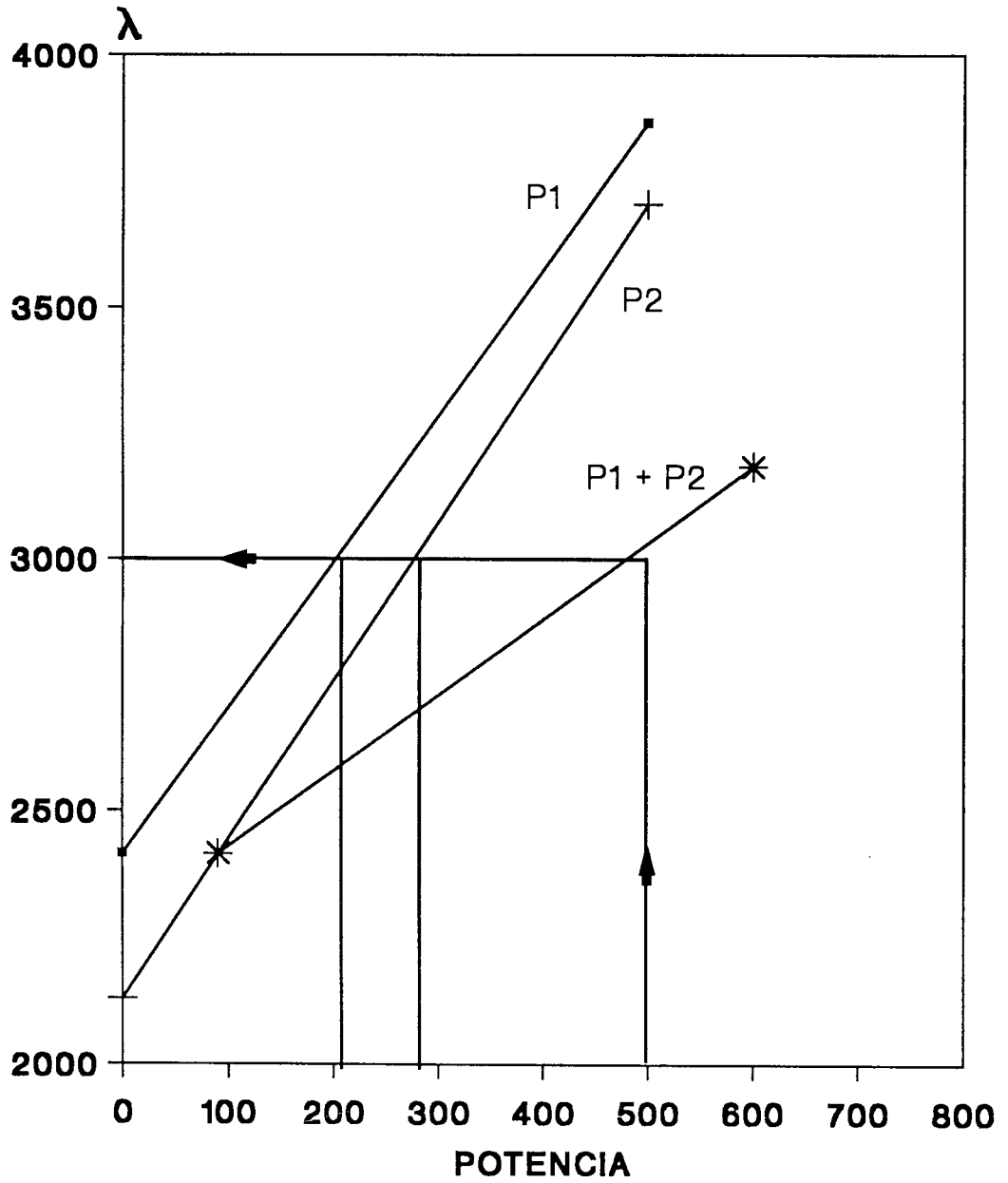


Figura 22. Coste incremental / Potencia.

**2.1.2.1.1.3.- Mediante Programación Lineal**

Este es un problema de P. L. clásico que se puede plantear así:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & \lambda \\
 \text{s.a.} & \lambda - 2.90 \cdot P_1 = 2415 \\
 & -2.9 \cdot P_1 + 3.15 \cdot P_2 = 285 \\
 & P_1 + P_2 = 600 \\
 & P_1, P_2 > 0
 \end{array}$$

(ya se ha demostrado que todas las unidades han de trabajar con el mismo valor de  $\lambda$  (coste incremental de producción) para que la entrada en ptas/h sea mínima, según se dijo en el capítulo segundo).

Resolviendo por el método del Simplex, se obtiene:

$$\begin{array}{ll}
 \lambda & = 3184.2817 \quad \text{ptas/MWh.} \\
 P_1 & = 265.1816 \quad \text{MW} \\
 P_2 & = 334.8186 \quad \text{MW}
 \end{array}$$

**2.1.2.1.1.4.- Mediante PROGRAMACION LINEAL DIFUSA**

El jefe del servicio entiende que el consumo está "en torno a" 600 MW, con una oscilación de  $\pm 10\%$ . Su experiencia le indica que según las condiciones de la demanda la holgura considerada

es la adecuada y sabe que también el sistema funciona de forma "aproximadamente" más económica.

Su modelo difuso es:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & \lambda \\
 \text{s.a.} & \lambda - 2.90 \cdot P_1 = 2415 \\
 & -2.9 \cdot P_1 + 3.15 \cdot P_2 = 285 \\
 & P_1 + P_2 = 600 \\
 & P_1, P_2 > 0
 \end{array}$$

cuya función de pertenencia, con holgura  $d = 0.1 \cdot (P_1 + P_2) = 0.1 \cdot 600 = 60$  es:

$$\begin{aligned}
 \mu (P_1 + P_2) &= \frac{P_1 + P_2 - 540}{60} && \text{Si } 540 \leq P_1 + P_2 \leq 600 \\
 &= 1 && \text{Si } P_1 + P_2 = 600 \\
 &= \frac{660 - (P_1 + P_2)}{60} && \text{Si } 600 \leq P_1 + P_2 \leq 660 \\
 &= 0 && \text{En otro caso}
 \end{aligned}$$

(cuya representación gráfica es la figura 23)



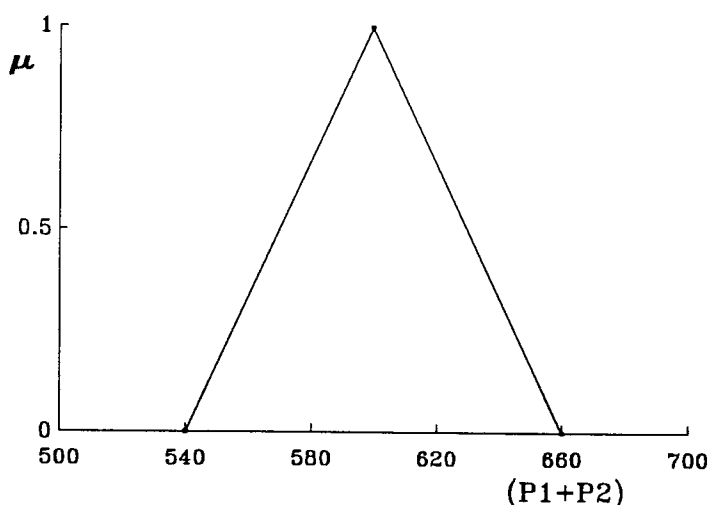


Figura 23. Función de pertenencia de  $P_1 + P_2$ .

Resolviendo tenemos:

#### 2.1.2.1.1.4.1.- Solución difusa

Como se ha indicado, se resuelve el problema paramétrico:

$$B^{-1}_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}} [b \pm d(1 - \alpha)] = \{X(\alpha)\}$$

Puesto que la solución paramétrica es una función lineal a trozos, debido a las condiciones de factibilidad, para cada uno de los intervalos de valores de  $\alpha$  para los que se mantiene la optimalidad tendremos una matriz inversa distinta, de ahí la notación  $B^{-1}_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}}$  donde los  $\alpha_i$  representan los extremos de los intervalos tal como muestra la siguiente partición del intervalo  $[0, 1]$  a partir del parámetro  $\alpha$ :  $[\alpha=0, \alpha_1][\alpha_1, \alpha_2)\dots[\alpha_n, 1]$

Donde:

$B^{-1} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}$  = matriz inversa obtenida del método del Simplex, para el  $\alpha$  dado.

$b$  = matriz del vector de la derecha.

$d$  = matriz de holgura.

$\alpha$  = parámetro que nos indica los  $\alpha$  - cortes que permiten resolver el problema por el Teorema de Representación.

En este caso, el problema a resolver es de la forma:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & \lambda \\
 \text{s.a.} & \lambda - 2.9 * P_1 = 2415 \\
 & -2.9 * P_1 + 3.15 * P_2 = 285 \\
 & P_1 + P_2 \leq 600 + 60 * (1 - \alpha) \\
 & P_1 + P_2 \geq 600 - 60 * (1 - \alpha) \\
 & P_1, P_2 > 0; \quad \alpha \in (0, 1]
 \end{array}$$

Cuya solución optimal paramétrica es:

$$\begin{array}{lll}
 \lambda(\alpha) & = & 3093.6877 + 90.594 * \alpha \quad \text{ptas/MWh} \\
 P_1(\alpha) & = & 233.949 + 31.236 * \alpha \quad \text{MW} \\
 P_2(\alpha) & = & 306.06 + 28.7586 * \alpha \quad \text{MW}
 \end{array}$$

Dando valores a  $\alpha$  tendremos la tabla:

$\alpha$	$\lambda$	P1	P2	P1 + P2
1	3184.2817	265.185	334.8186	600
0.7	3157.1035	255.8142	326.191	582
0.67	3154.3857	254.877	325.488	580.365
0.51	3139.55	249.84	320.46	570.3
0.5	3138.9847	249.567	320.4393	570
0.3	3120.8656	243.3198	314.6876	558
0	3093.6877	233.949	306.06	540

cuya representación gráfica es la figura 24.

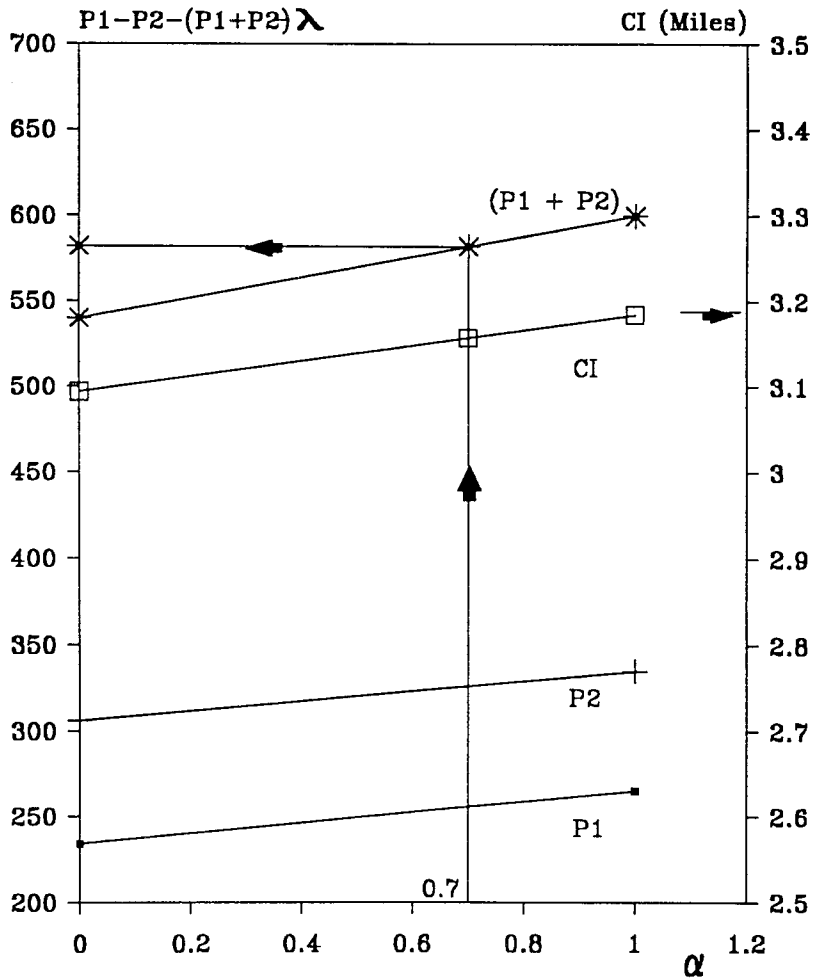


Figura 24. Coste incremental - Potencia /  $\alpha$

La solución difusa es:

$$\tilde{S} = \{3093.6877 + 90.594\alpha/\alpha; 233.949 + 31.236\alpha/\alpha; 306.06 + 2875\alpha/\alpha\}$$

Efectuando la representación gráfica de  $\lambda(\alpha)$ :

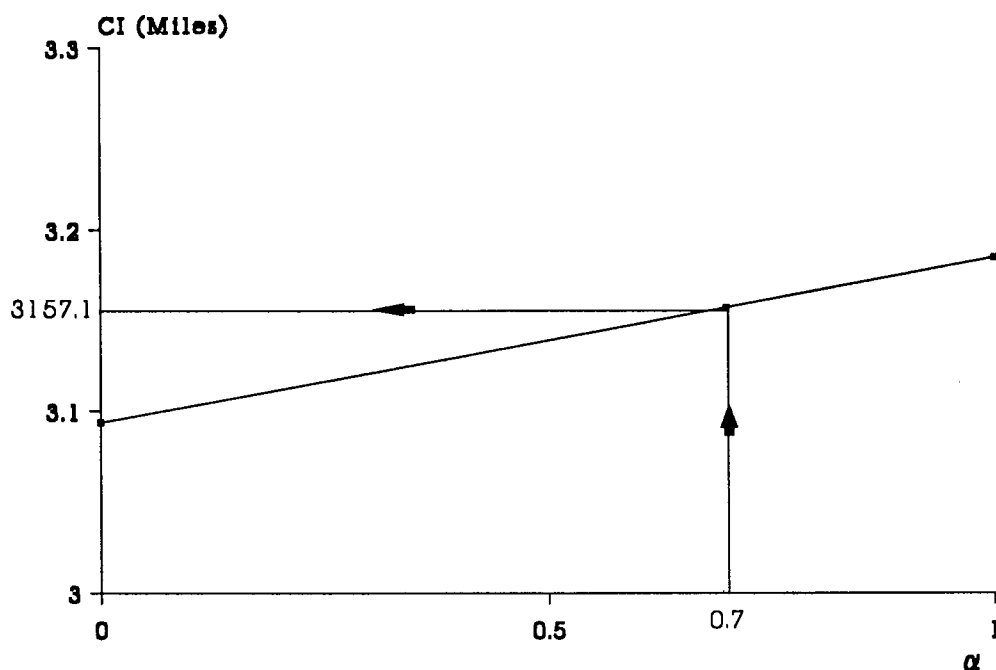


Figura 25. Coste incremental/α.

#### 2.1.2.1.1.4.2.- Satisfacción de restricciones y objetivo

El decisor estudiará este problema teniendo en cuenta qué restricciones se deben cumplir y verificará si el objetivo alcanzado está dentro de los valores que considera como satisfactorios.

Según Werners [Wer87] los valores a estudiar serán los correspondientes a 540 y 600 MW; obteniéndose para la función objetivo los valores:

$$z_0 = \lambda(0) = 3093.6877 \quad \text{ptas/MWh}$$

$$z_1 = \lambda(1) = 3184.2817 \quad \text{"}$$

cuya función de pertenencia es:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 1 && \text{Si } \lambda(x) < 3093.6877 \\ &= \frac{[3184.2817 - \lambda(x)]}{90.594} && \text{Si } 3093.6877 \leq \lambda(x) \leq 3184.2817 \\ &= 0 && \text{Si } \lambda(x) > 3184.2817 \end{aligned}$$

Entonces el problema es equivalente a

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \alpha \\ \text{s.a.} \quad & \lambda \leq 3184.2817 - 90.594\alpha \\ & \lambda - 2.9 * P_1 = 2415 \\ & -2.9 * P_1 + 3.15 * P_2 = 285 \\ & P_1 + P_2 \leq 600 + 60 * (1 - \alpha) \\ & P_1 + P_2 \geq 600 - 60 * (1 - \alpha) \\ & P_1, P_2 > 0; \quad \alpha \in (0, 1] \end{aligned}$$

cuya solución optimal es:

$$\begin{aligned}\alpha^* &= 0.5 \\ \lambda^* &= 3138.9847 \quad \text{ptas/MWh} \\ P_1^* &= 249.567 \quad \text{MW} \\ P_2^* &= 320.4393 \quad \text{MW} \\ P_T^* &= 570 \quad \text{MW}\end{aligned}$$

o bien, calculada a partir de la ecuación general:

$$\begin{aligned}f[x(\alpha)] &= \alpha \\ \lambda(\alpha) &= \lambda(1) - [\lambda(1) - \lambda(0)]\alpha\end{aligned}$$

que para nuestro caso particular se reduce a:

$$3093.6877 + 90.594\alpha = 3184.2817 - 90.594\alpha$$

obteniéndose, como en el modelo anterior, la solución optimal para  $\alpha^*=0.5$ .

(De esta forma siempre se encontrará el valor óptimo para  $\alpha=0.5$ ).

Considerando todo el intervalo de trabajo ((540, 660) MW) tendremos:

$$\begin{aligned}z_0 &= \lambda(0) = 3093.6877 \quad \text{ptas/MWh} \\ z_1 &= \lambda(1) = 3274.93 \quad \text{"}\end{aligned}$$

cuya función de pertenencia es:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 1 && \text{Si } \lambda(x) < 3093.6877 \\ &= \frac{[3274.93 - \lambda(x)]}{181.24} && \text{Si } 3093.6877 \leq \lambda(x) \leq 3274.93 \\ &= 0 && \text{Si } \lambda(x) > 3274.93 \end{aligned}$$

Entonces el problema es equivalente a:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \alpha \\ \text{s.a. } & \lambda \leq 3274.93 - 181.24\alpha \\ & \lambda - 2.9*P_1 = 2415 \\ & -2.9*P_1 + 3.15*P_2 = 285 \\ & P_1 + P_2 \leq 600 + 60*(1 - \alpha) \\ & P_1 + P_2 \geq 600 - 60*(1 - \alpha) \\ & P_1, P_2 > 0; \quad \alpha \in (0, 1] \end{aligned}$$

cuya solución optimal es:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= 0.67 \\ \lambda^* &= 3154.3857 \quad \text{ptas/MWh} \\ P_1^* &= 254.877 \quad \text{MW} \\ P_2^* &= 325.488 \quad \text{MW} \\ P_T^* &= 580.365 \quad \text{MW} \end{aligned}$$

o bien, calculada a partir de la ecuación general:

$$\begin{aligned} f[x(\alpha)] &= \alpha \\ \lambda(\alpha) &= \lambda(1) - [\lambda(1) - \lambda(0)]\alpha \end{aligned}$$

que para nuestro caso particular se reduce a:

$$3093.6877 + 90.594\alpha = 3274.93 - 181.2423\alpha$$

obteniéndose, como en el modelo anterior, la solución optimal para  $\alpha^* = 0.67$ .

Como se puede comprobar, los valores obtenidos para la potencia de las unidades de generación cumplen con las restricciones  $540 \leq P_T \leq 660$  y si el del objetivo lo considera como satisfactorio (o no) actuará en consecuencia.

#### 2.1.2.1.1.4.3.- Con restricciones y meta difusas

El decisor por su experiencia y conocimientos puede tener una idea imprecisa (aunque siempre aproximada) del valor de la meta a alcanzar; tomará dicho valor como referencia, por ejemplo, 3100 ptas/MWh, con una holgura de 80 ptas/MWh, y su función de pertenencia será:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 1 && \text{Si } \lambda(x) < 3100 \\ &= \frac{[3180 - \lambda(x)]}{80} && \text{Si } 3100 \leq \lambda(x) \leq 3180 \\ &= 0 && \text{Si } \lambda(x) > 3180 \end{aligned}$$

El problema es equivalente a:



$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & \alpha \\
 \text{s.a.} \quad & \lambda \leq 3100 + 80*(1 - \alpha) \\
 & \lambda - 2.9*P_1 = 2415 \\
 & -2.9*P_1 + 3.15*P_2 = 285 \\
 & P_1 + P_2 \leq 600 + 60*(1 - \alpha) \\
 & P_1 + P_2 \geq 600 - 60*(1 - \alpha) \\
 & P_1, P_2 > 0; \quad \alpha \in (0, 1]
 \end{aligned}$$

cuya solución optimal es:

$$\begin{aligned}
 \alpha^* &= 0.51 \\
 \lambda^* &= 3139.55 \quad \text{ptas/MWh} \\
 P_1^* &= 249.84 \quad \text{MW} \\
 P_2^* &= 320.45 \quad \text{MW} \\
 P_T^* &= 570.29 \quad \text{MW}
 \end{aligned}$$

o bien, calculada a partir de la ecuación general. Para nuestro caso particular se reduce a:

$$3093.6877 + 90.594\alpha = 3180 - 80\alpha$$

obteniéndose, como en el modelo anterior, la solución optimal para  $\alpha^*=0.51$ .

Aquí el decisor comprobará que se cumplen las restricciones de la potencia de las unidades de generación ( $540 \leq P_T \leq 660$ ) y

si para el valor estimado de la meta obtiene una solución puntual que satisface sus previsiones. Como se cumplen ambas premisas considerará que el problema ha sido resuelto. En caso necesario, volverá a plantearse los valores estimados para la meta y restricciones y los adaptará a lo que considere oportunos.

#### 2.1.2.1.2.- Consideraciones

Si el decisor trabaja tomando como referencia:

a) La solución difusa, entonces, y como se puede apreciar, existe una variación de coste incremental de 0.15099 ptas/h por cada MW suministrado. Dicho valor da una referencia al decisor económico que tomará en consideración la posibilidad de aceptar esta variación de coste según la estime como "válida", "regular", "aceptable", "oportuna", ..., en función de lo que su experiencia indica.

La influencia del carácter difuso de los parámetros indicados a la hora de tomar la decisión, como son los valores de mercado de los distintos componentes (combustible, mantenimiento, mano de obra, amortización, ...) así como la vaguedad controlada del consumo confirman que las apreciaciones del decisor son razonables en función de los resultados obtenidos.

Por otro lado, si el decisor estima que este incremento de coste es mayor del que se puede admitir y pretende ajustar un poco "más fino" y considera que dicho incremento de costo debe ser, por ejemplo, de unas 0.1136 pts/h por cada MW suministrado, y, teniendo en cuenta que no se pueden perder de vista los "aproximadamente" 600 MW de carga, por las necesidades del servicio, por tanto el límite máximo se puede calcular gráficamente tomando el  $\alpha$ -corte correspondiente, que será para  $\alpha = 0.3$ , o sea, que trabajando para un coste incremental de 3120.8656 pts/MWh, lo que representa trabajar "sobre" 558 MW de consumo, lo aceptará como "válido".

$$\lambda_i = 3093.6877 + 558 * 0.048 = 3120.8656 \quad \text{-----}$$

----- según la gráfica para  $\alpha=0.3$  ----- tabla  $P_T = 558$  MW.

Esta posibilidad de actuar con un coste incremental considerado como "más real y razonable" en la actualidad no se contempla y creemos de gran interés económico.

b) La satisfacción de restricciones y objetivo, se puede comprobar que los valores obtenidos satisfacen las previsiones del decisor. Además, también se puede ver que el valor de la solución optimal está contenido en la solución difusa (como ya demostró Verdegay [Ver82]), por lo que tomaremos la solución más general para el estudio del ahorro en los apartados venideros.

c) Las restricciones y metas difusas, se pueden verificar que la solución obtenida como optimal satisface a las condiciones impuestas por el decisor y también, como demostró Verdegay [Ver82], estos valores están incluidos en la solución difusa, por tanto, como en el caso b), nos basaremos en la solución más general para el estudio del ahorro.

Por otro lado, si se realiza una comparación entre las soluciones de Zimmermann y Werners, mediante la representación gráfica de ambas:

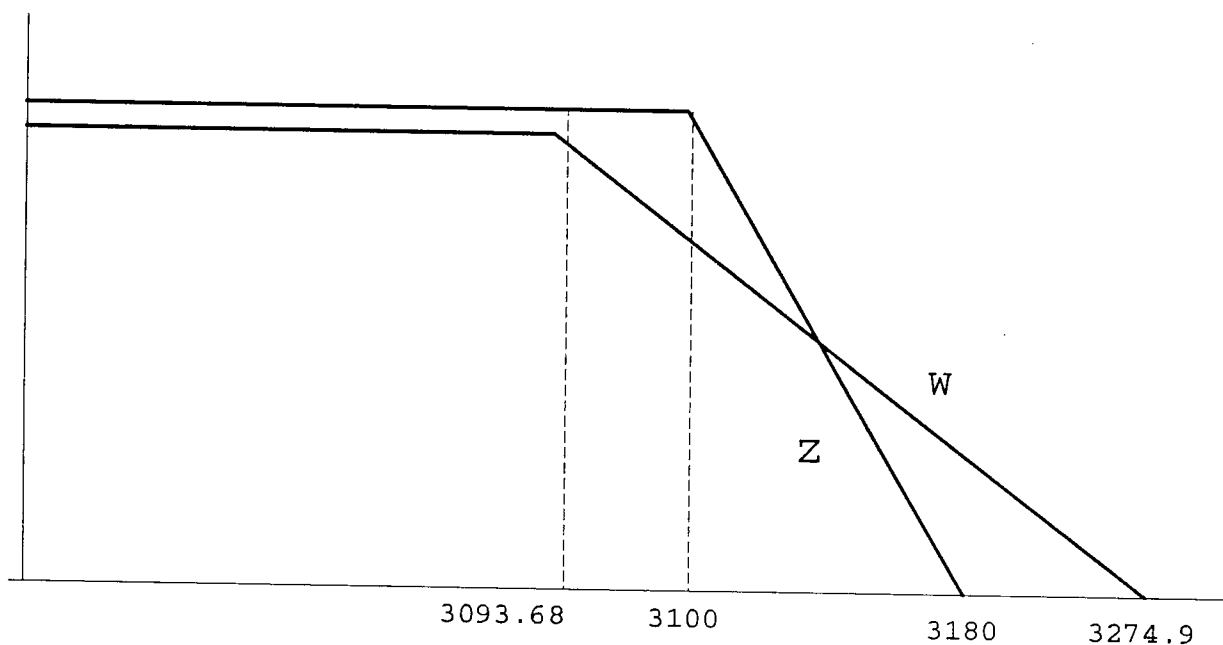


Figura 26. Funciones de pertenencia de Zimmermann y Werners

Comprobamos que se satisfacen las previsiones teóricas que se expusieron en el apartado 4.5.3 del capítulo anterior, donde

se veía que los valores del intervalo para la solución de Zimmermann [310,3180] están incluidos en el de los valores límites previstos por Werners (3093.68, 3274.9)

### 2.1.2.1.3.- AHORRO

El ahorro se obtiene como resultado de comparar el coste total producido entre dos o más situaciones de distribución de la carga entre las unidades de generación para cumplir con el consumo demandado.

Como la función de coste incremental, según vimos en la definición dada en el capítulo segundo de la presente Memoria, es:

$$(CI) = \frac{dF}{dP} = a_k * P_k + b_k \quad \text{ptas/MWh.}$$

$$dF = (a_k * P_k + b_k) * dP \quad (\text{ptas/MWh}) (MW)$$

siendo la función de coste, F, de la siguiente forma:

$$F = \int (a_k * P_k + b_k) dP \quad \text{ptas/h}$$

y  $P_k$  la potencia de cada una de las unidades de generación.

El ahorro se calcula como diferencia entre dos valores considerados como de referencia, siendo éstos los obtenidos a partir de:

- a) Reparto de carga igualitario,  
 b) " " " obtenido mediante P. L.,  
 c) " " " " " P. L. D.,

según la expresión:

$$\text{Ahorro} = \text{Coste1} - \text{Coste2}$$

donde:

Coste1 = representa el coste ante un reparto igualitario de cargas o el obtenido ante la situación de reparto de carga realizado mediante P. L.

Coste2 = Idem mediante P. L. o P. L. D.

calculándose a partir de:

$$\begin{aligned} \text{Ahorro} &= \text{Coste}(P_a, P_b) - \text{Coste}(P_x, P_y) = \\ &= \int_{P_x}^{P_a} (a_1 * P_1 + b_1) dP_1 + \int_{P_y}^{P_b} (a_2 * P_2 + b_2) dP_2 \quad \text{ptas/h} \end{aligned}$$

donde  $P_a$  y  $P_b$  son los valores de la potencia tomados como referencia de las unidades de generación ante el reparto igualitario o mediante P. L. y  $P_x$  y  $P_y$  los obtenidos mediante P. L. o P. L. D., según el caso.

Por tanto, para el ejemplo tendremos:

2.1.2.1.3.1.- Ahorro del reparto difuso frente al igualitario

Como el consumo demandado es de 600 MW, el reparto a cargas iguales será suministrando cada unidad 300 MW, mientras que en el reparto obtenido mediante P. L. D., como se calculó en 2.1.2.1.1.4.1, para  $P_1(\alpha) = 233.949 + 31.236*\alpha$  (MW) y  $P_2(\alpha) = 306.06 + 28.7586*\alpha$  (MW):

$$\text{Ahorro} = \text{coste}(300, 300) - \text{coste}(233.949 + 31.236*\alpha, 306.06 + 28.7586*\alpha)$$

$$\text{Ahorro} = \int_{233.949+31.236\alpha}^{300} (2415+2.9P_1) dP_1 + \int_{306.06+28.7586\alpha}^{300} (2130+3.15P_2) dP_2$$

$$= 191956.2 - 185613.17*\alpha - 2717.49*\alpha^2.$$

El ahorro máximo será cuando  $\alpha = 0$ : Ahorro = 191956.2 ptas/h, o lo que es lo mismo 4.606.949 ptas/día. El ahorro mínimo será de 3625.54 ptas/h, para  $\alpha = 1$ .

Esto nos indica que cuando el decisor comprueba que el funcionamiento del sistema es adecuado y que sus conocimientos aplicados son correctos, encontrará la satisfacción personal de haber optimizado los medios puestos a su disposición y que lo puede medir, al menos, con el ahorro conseguido en pesetas o en recursos energéticos.

**2.1.2.1.3.2.- Ahorro del reparto difuso frente al de P.L.**

Si calculamos el ahorro existente entre el reparto óptimo, obtenido por el método del Simplex, frente a una distribución de cargas iguales, se consigue que el ahorro sea de 3644.6 ptas/h, o bien 87470.44 ptas/día.

En este caso, comparando ambos resultados, se puede concluir que el ahorro obtenido utilizando la aproximación difusa es bastante mayor que el conseguido con el reparto por P. L. (de 87470.44 ptas/día frente a los 4.606.949 ptas/día). Igualmente se pueden hacer las consideraciones que en el caso anterior.

**2.1.2.1.4.- Comentarios**

Las distintas soluciones obtenidas al problema presentado nos indican que las clásicas trabajan tomando como principio un punto de vista que creemos incorrecto: la demanda fija de carga; pero esto no es la realidad ya que el consumo es variable, aunque sea dentro de un margen más o menos amplio, y esto debe tenerse en cuenta y por ello presentamos las soluciones obtenidas mediante P. L. D. puesto que en ellas sí se tiene en cuenta el carácter difuso del consumo y a la vez nos lleva a obtener un cierto ahorro, según se ha calculado en 2.1.2.1.3.1. y 2.1.2.1.3.2.



**2.2.- Segundo modelo: DESPACHO ECONÓMICO CON DEMANDA DE POTENCIA VARIABLE**

**2.2.1.- Formulación del problema**

"Cuando la demanda de consumo es variable y la potencia de las unidades que intervienen es mayor que cero".

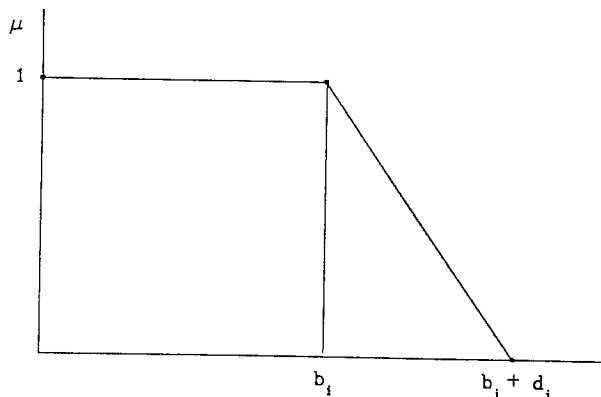
Este problema se resuelve mediante P. L. D. considerando que el decisor asume que puede haber cierta tolerancia en el cumplimiento de alguna restricción. Para cada restricción, esta suposición se podría representar de la forma:

$$a_i x \leq b_i ; \quad i = 1, n$$

y modelarla mediante una función de pertenencia de la forma:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 1 && \text{Si } a_i x \leq b_i \\ &= f_1(a_i x) && \text{Si } b_i \leq a_i x \leq b_i + d_i \\ &= 0 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

y cuando  $f_1$  es una función lineal:



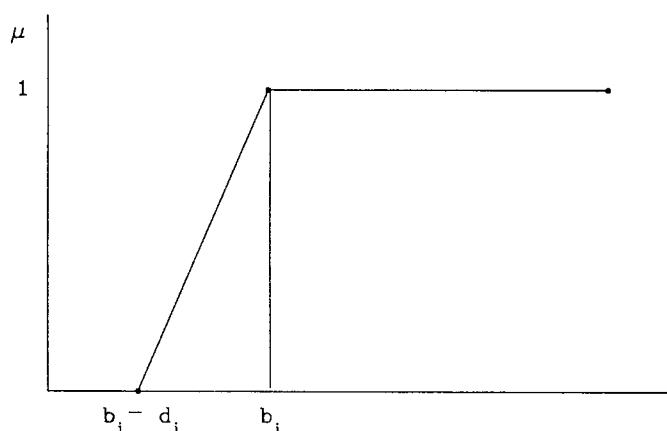
o bien de la forma:

$$a_i x \geq b_i ; \quad i = 1, n$$

y modelarla mediante la función de pertenencia:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 1 && \text{Si } a_i x \geq b_i \\ &= f_2(a_i x) && \text{Si } b_i \geq a_i x \geq b_i - d_i \\ &= 0 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

y cuando  $f_2$  es una función lineal:



que indican que el decisor admitirá violaciones en cada restricción hasta un valor  $b_i \pm d_i$  ( $i = 1, n$ ).

Para resolver la situación actual a que nos enfrentamos se necesitará un modelo que tenga en cuenta el carácter difuso de los límites del margen del consumo, ya que éste debe oscilar "en torno a" tantos MW, que el decisor considera como "válidos" por sus conocimientos y experiencia y con ello cubrirá adecuadamente las necesidades del servicio.

Este problema de P. L. D. se representa mediante el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s.a.} \quad & Ax_i = b_i \\ & x_1 \leq x_i \leq x_2 \\ & x \geq 0; \quad i = 1, n \end{aligned}$$

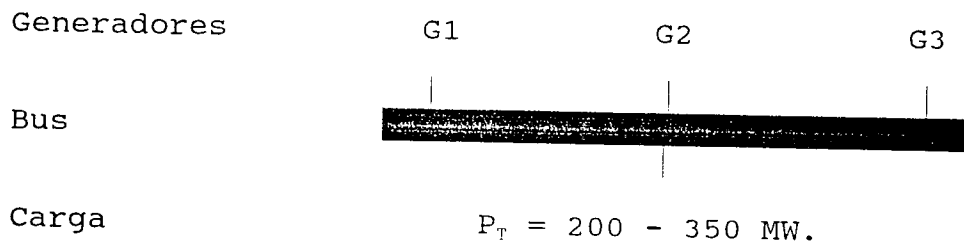
### 2.2.2.- Ejemplos

#### 2.2.2.1.- Problema 2

Dadas las variaciones del costo de combustible para tres grupos de generación de una central, que son:

$$\begin{aligned} (C1) &= 17 + 0.03 \cdot P_1 && \text{ptas/MWh.} \\ (C2) &= 16 + 0.06 \cdot P_2 && \text{"} \\ (C3) &= 18 + 0.04 \cdot P_3 && \text{"} \end{aligned}$$

hallar el reparto óptimo entre las tres unidades sabiendo que trabajan en forma continua y el consumo varía entre 200 y 350 MW.



**2.2.2.1.1.- Técnicas de resolución**

Siguiendo el mismo proceso que el referido en el problema 1, para los distintos procedimientos de cálculo, tendremos:

**2.2.2.1.1.1.- Método gráfico**

Se representan las gráficas correspondientes a  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ . Dando valores a  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  obtenemos los " $\lambda$ " respectivos:

$P_1$	$\lambda$	$P_2$	$\lambda$	$P_3$	$\lambda$
0	17	0	16	0	18
100	20	100	22	100	22

y con ellas el de  $\lambda = f(P_1 + P_2 + P_3)$ .

Una vez representadas las funciones anteriores, y siguiendo el proceso realizado en el problema 1, podremos determinar gráficamente los valores de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_T$  que sean necesarios.

Realicemos una tabla de valores para este caso:

$\lambda$ (ptas/MWh)	$P_1$ (MW)	$P_2$ (MW)	$P_3$ (MW)	$P_1+P_2+P_3$ (MW)	Observ.
15	--	--	--	---	*
19	66.667	50	25	141.667	**
19.778	92.593	62.963	44.444	200	***
20	100	66.667	50	216.667	****
21	133.33	83.333	75	291.667	*****
21.778	159.26	96.296	94.444	350	*****
24	233.33	133.33	150	516.667	*****

Como vemos, con  $\lambda = 15$  los valores resultantes (tipo \*) señalan que el sistema absorbe potencia del exterior y no la suministran, por lo tanto no interesa.

Si  $\lambda = 19$  (tipo \*\*), el sistema ya suministra energía al exterior pero no consigue el valor de la potencia demandada.

Con  $\lambda = 19.778$  (tipo \*\*\*), se obtienen los 200 MW mínimos solicitados en la carga (punto exacto del inicio del funcionamiento) y tenemos la distribución de  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  óptima.

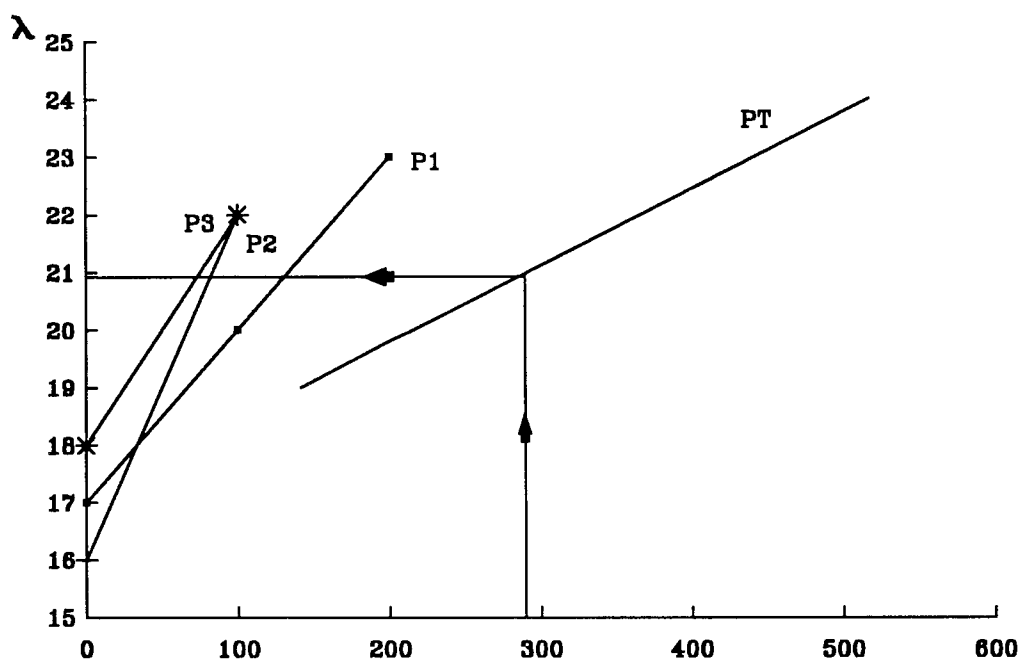
Si  $\lambda = 20$  o  $\lambda = 21$  (tipo \*\*\*\*), se ve que ya se ha sobrepasado la carga mínima solicitada, pero está dentro del margen de funcionamiento (entre 200 y 350 MW).

Si  $\lambda = 21.778$  (tipo \*\*\*\*\*) estamos en el límite máximo.

Si  $\lambda = 24$  (tipo \*\*\*\*\*) se ve que se ha sobrepasado el límite máximo de carga de funcionamiento.

Si deseamos encontrar un punto determinado de funcionamiento se trazará una perpendicular al eje de abscisas que cortará la curva característica de  $P_1$  en un punto y trazando desde él una paralela al eje de abscisas se cortarán dichas gráficas de las unidades 1, 2 y 3 en sendos puntos, que son los valores de  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  óptimos, para este caso y, además, obtendremos el valor de  $\lambda$  óptimo. Por ejemplo, para una carga de 290 MW:

$\lambda =$	20.923	ptas/MWh
$P_1 =$	132	MW
$P_2 =$	80	MW
$P_3 =$	78	MW
$P_T =$	290	MW.

Figura 27.  $\lambda/P_1-P_2-P_3-P_T$ 

### 2.2.2.1.1.2.- Mediante Programación Lineal

Este problema se puede modelizar mediante:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \lambda \\
 \text{s.a.} \quad & \lambda - 0.03 \cdot P_1 = 17 \\
 & \lambda - 0.06 \cdot P_2 = 16 \\
 & \lambda - 0.04 \cdot P_3 = 18 \\
 & P_1 + P_2 + P_3 \geq 200 \\
 & P_1 + P_2 + P_3 \leq 350 \\
 & P_1, P_2, P_3 > 0
 \end{aligned}$$

cuya solución óptima será:

$$\lambda = 19.778 \quad \text{Ptas/MWh}$$

$$P_1 = 92.583 \quad \text{MW}$$

$$P_2 = 62.693 \quad \text{MW}$$

$$P_3 = 44.444 \quad \text{MW.}$$

### 2.2.2.1.1.3.- Mediante PROGRAMACION LINEAL DIFUSA

Si el jefe del servicio entiende que el consumo está en el intervalo [200, 350] MW, tomando valores en los límites "en torno al" 5%; y su experiencia le indica que según las condiciones de la demanda la holgura considerada es la adecuada y entiende que también el sistema funciona de forma "aproximadamente" más económica, el problema a resolver será:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \lambda \\ \text{s.a.} \quad & \lambda - 0.03 \cdot P_1 = 17 \\ & \lambda - 0.06 \cdot P_2 = 16 \\ & \lambda - 0.04 \cdot P_3 = 18 \\ & P_1 + P_2 + P_3 \geq 200 \\ & P_1 + P_2 + P_3 \leq 350 \\ & P_1, P_2, P_3 > 0 \end{aligned}$$

y tomando la holgura indicada:  $d = 0.05 \cdot (P_1 + P_2 + P_3) = 0.05 \cdot 200 = 10$  y  $d' = 0.05 \cdot 350 = 17.5$ .

Su función de pertenencia es la que sigue y su gráfica la 28

$$\begin{aligned} \mu (P_1+P_2+P_3) &= 1 && \text{Si } 200 \leq P_T \leq 350 \\ &= (P_T - 190)/10 && \text{Si } 190 \leq P_T \leq 200 \\ &= (367.5 - P_T)/17.5 && \text{Si } 350 \leq P_T \leq 367.5 \\ &= 0 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

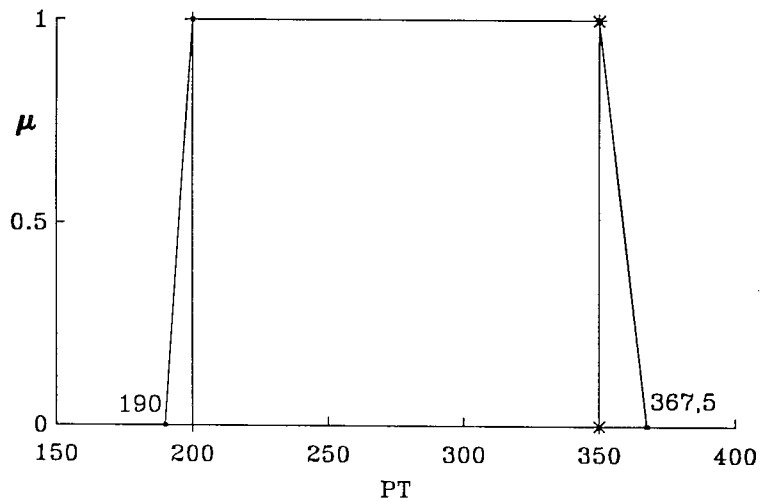


Figura 28. Función de pertenencia/PT.

Como se puede comprobar el margen de maniobrabilidad de la carga se abre, o sea, se amplía el posible entorno de uso



mediante la holgura; holgura, que por otro lado no es aleatoria, sino que viene determinada por el decisor y su grado de "optimismo - pesimismo", debido a su conocimiento.

### 2.2.2.1.1.3.1.- Solución difusa

Con las mismas consideraciones dadas el primer modelo, el problema tomará la forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{Min} \quad \lambda \\
 &\text{s.a.} \quad \lambda - 0.03 \cdot P_1 = 17 \\
 &\quad \quad \lambda - 0.06 \cdot P_2 = 16 \\
 &\quad \quad \lambda - 0.04 \cdot P_3 = 18 \\
 &\quad \quad P_1 + P_2 + P_3 \geq 200 - 10 \cdot (1 - \alpha) \\
 &\quad \quad P_1 + P_2 + P_3 \leq 350 + 17.5 \cdot (1 - \alpha) \\
 &\quad \quad \alpha \in (0, 1]
 \end{aligned}$$

Resolviendo se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \lambda(\alpha) &= 19.6447 + 0.1333 \cdot \alpha \\
 P_1(\alpha) &= 88.1486 + 4.4444 \cdot \alpha \\
 P_2(\alpha) &= 60.4708 + 2.2222 \cdot \alpha \\
 P_3(\alpha) &= 41.1111 + 3.3333 \cdot \alpha
 \end{aligned}$$

Dando valores a  $\alpha$  tenemos:

$\alpha$	$\lambda$ (ptas/Mwh)	P1 (Mw)	P2 (Mw)	P3 (Mw)	P1+P2+P3
0	19.6447	88.2486	60.5708	41.1111	189.9304
0.5	19.7113	90.3707	61.5819	42.7782	194.7306
0.79	19.75	91.6593	62.2262	43.7442	197.6297
1	19.778	92.6932	62.793	44.4444	199.9324

Como se puede comprobar en la tabla, los menores valores de  $\lambda$  se encuentran en las proximidades del extremo inferior del intervalo de aplicación (en consonancia con lo referido en el apartado B.1. anterior), o sea, para:

$$\begin{aligned} \alpha = 0 \quad \lambda(0) &= 19.6447 \quad \text{ptas/MWh} \\ P_1(0) &= 88.2486 \quad \text{MW} \\ P_2(0) &= 60.5708 \quad \text{MW} \\ P_3(0) &= 41.1111 \quad \text{MW} \\ P_T(0) &= 189.930 \quad \text{MW} \end{aligned}$$

La solución difusa es:

$$\underline{S} = \{ 19.6447 + 0.1333*\alpha/\alpha; 88.1486 + 4.444*\alpha/\alpha; 60.4701 + 2.222*\alpha/\alpha; 41.111 + 3.333*\alpha/\alpha \}$$

### 2.2.2.1.1.3.2.- Satisfacción de restricciones y objetivo

El decisor estudiará los valores que satisfacen las restricciones previstas y el objetivo. Tomará los dos valores extremos para el consumo,  $190 \leq P_T \leq 367.5$  MW; se calcularán los valores de la función objetivo para dichos extremos, siendo éstos:

$$\begin{aligned} z_0 &= \lambda(0) = 19.6447 \quad \text{ptas/MWh} \\ z_1 &= \lambda(1) = 22.0147 \quad \text{ptas/MWh} \end{aligned}$$

Así obtendrá un margen de actuación.

Su función de pertenencia es:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 1 && \text{Si } \lambda(x) < 19.6447 \\ &= \frac{22.0147 - \lambda(x)}{2.37} && \text{Si } 19.6447 \leq \lambda(x) \leq 22.0147 \\ &= 0 && \text{Si } \lambda(x) > 22.0147 \end{aligned}$$

El problema es equivalente a:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \alpha \\ \text{s.a. } & \lambda \leq 22.0147 - 2.37\alpha \\ & \lambda - 0.03P_1 = 17 \\ & \lambda - 0.06P_2 = 16 \\ & \lambda - 0.04P_3 = 18 \\ & P_1 + P_2 + P_3 \geq 200 - 10(1 - \alpha) \\ & P_1 + P_2 + P_3 \leq 350 + 17.5(1 - \alpha) \\ & \alpha \in (0, 1] \end{aligned}$$

cuya solución optimal es:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= 1 \\ \lambda^* &= 19.778 \quad \text{ptas/MWh} \\ P_1^* &= 92.6932 \quad \text{MW} \\ P_2^* &= 62.793 \quad \text{MW} \\ P_3^* &= 44.444 \quad \text{MW} \\ P_T^* &= 199.9324 \quad \text{MW} \end{aligned}$$

También se obtendrán los mismos valores de la solución optimal si se calculasen a partir de la ecuación general, como vimos en el ejemplo 1:

$$f[x(\alpha)] = \alpha$$

$$\lambda(\alpha) = \lambda(1) - [\lambda(1) - \lambda(0)]\alpha$$

Como se puede comprobar, los valores obtenidos para la potencia de las unidades de generación cumplen con las restricciones impuestas,  $190 \leq P_T \leq 367.5$  MW, y si el objetivo se considera como satisfactorio ha resuelto el problema. En caso de no haber encontrado adecuado el objetivo se modificará hasta encontrar uno que lo satisfaga, dentro del margen previsto para la meta dada; en este caso entre 19.6447 y 22.0147 ptas/MWh.

#### 2.2.2.1.1.3.3.- Con restricciones y meta difusas

El decisor, por su experiencia y conocimientos, puede tener una idea imprecisa (aunque siempre aproximada) del valor de la meta a alcanzar y, cumpliendo con las restricciones impuestas, tomará dicho valor como referencia, por ejemplo, 19.70 ptas/MWh, con una holgura de 0.3 ptas/MWh.

La función de pertenencia de la función objetivo será:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 1 && \text{Si } \lambda(x) < 19.7 \\ &= \frac{20 - \lambda(x)}{0.3} && \text{Si } 19.7 \leq \lambda(x) \leq 20 \\ &= 0 && \text{Si } \lambda(x) > 20 \end{aligned}$$

El problema es equivalente a:

$$\begin{aligned} \text{Max } & \alpha \\ \text{s.a. } & \lambda \leq 22.0147 - 2.37*\alpha \\ & \lambda - 0.03*P_1 = 17 \\ & \lambda - 0.06*P_2 = 16 \\ & \lambda - 0.04*P_3 = 18 \\ & P_1 + P_2 + P_3 \geq 200 - 10*(1 - \alpha) \\ & P_1 + P_2 + P_3 \leq 350 + 17.5*(1 - \alpha) \\ & \alpha \in (0, 1] \end{aligned}$$

cuya solución optimal es:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= 0.79 \\ \lambda^* &= 19.75 \quad \text{ptas/MWh} \\ P_1^* &= 91.6693 \quad \text{MW} \\ P_2^* &= 62.2262 \quad \text{MW} \\ P_3^* &= 43.7442 \quad \text{MW} \\ P_T^* &= 199.6297 \quad \text{MW} \end{aligned}$$

También se obtendrán los mismos valores de la solución optimal si se calculasen a partir de la ecuación general, como vimos en el ejemplo 1:

$$f[x(\alpha)] = \alpha$$

$$\lambda(\alpha) = \lambda(1) - [\lambda(1) - \lambda(0)]\alpha$$

Aquí el decisor comprobará que se cumplan las restricciones impuestas ( $190 \leq P_T \leq 367.5$  MW) y si la solución optimal alcanzada,  $\lambda^* = 19.75$  ptas/MWh, es aceptable. Si se cumplen ambas premisas quedará satisfecho y en caso contrario se deberán replantear las consideraciones previstas las consideraciones previstas, bien para la meta, las restricciones o ambas.

#### 2.2.2.1.2.- Consideraciones

El decisor puede trabajar tomando como referencia cualquiera de las soluciones anteriores y elegir la que más se acerca a sus previsiones. Por tanto, si actua con:

a) Solución difusa

La variación del coste incremental es: 0.1333 ptas/MWh, y por cada MW suministrado de 0.0133 ptas/h. El responsable (ingeniero, economista, etc.) ya tiene una referencia y actuará en función de su toma de "riesgo", experiencia, ... Si esta variación de coste no le parece adecuada y decide actuar, no en un punto concreto del coste incremental sino cuando dicha variación esté en un valor próximo al 0.03 ptas/h, por ejemplo, estudiará el valor del  $\alpha$  - corte que le corresponde y comprobará

si el valor asociado de  $P_T$  está en un margen de trabajo admitido y procederá, en consecuencia, sobre él.

Para el coste incremental anterior ( $\lambda = 0.03$  ptas/MWh)

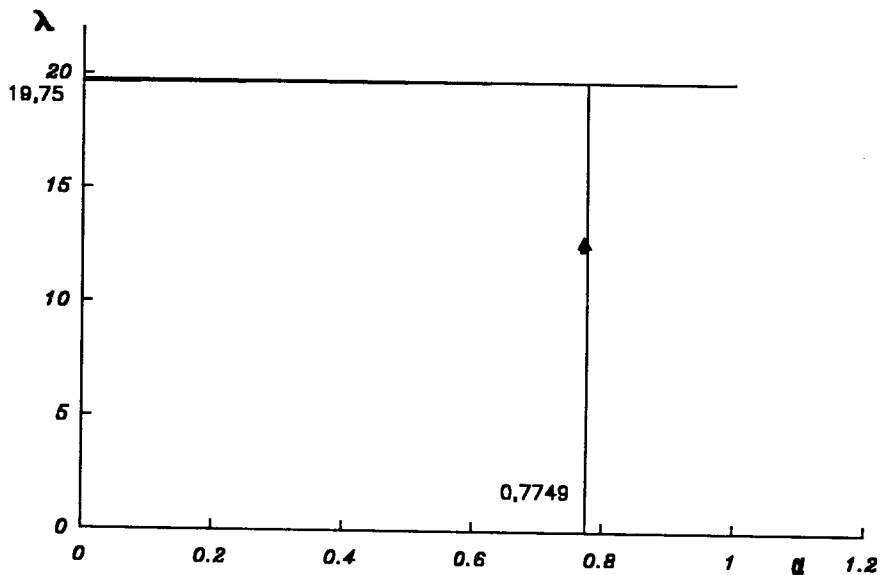


Figura 29. Coste incremental/ $\alpha$

$$\alpha = 0.7749 \quad \text{-----} \rightarrow \quad \lambda(\alpha) = 19.74799 \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 91.59256 \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 62.19278 \quad \text{MW}$$

$$P_3(\alpha) = 43.69397 \quad \text{MW}$$

$$P_T(\alpha) = 197.4793 \quad \text{MW}$$

Por otro lado, debemos contemplar la posibilidad de trabajar próximos al máximo valor de la carga ( $P_T = 367.5$  MW) donde los valores obtenidos no serán óptimos, aunque sí se han de tener en

cuenta, ya que lo que nos interesa es el intervalo de carga en estudio. En este caso, se han de determinar los valores de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_T$  y  $\lambda$  para el extremo de dicho intervalo, teniendo en cuenta la holgura considerada y obtener las conclusiones precisas.

Además, como en los puntos anteriores, se han de determinar los valores de  $\lambda(\alpha)$ ,  $P_1(\alpha)$ ,  $P_2(\alpha)$ ,  $P_3(\alpha)$  y  $P_T(\alpha)$ .

Si tomamos como referencia el valor de  $P_T = 350$  MW sobre la gráfica de la figura 27, obtendremos los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\lambda &= 21.778 && \text{ptas/MWh} \\ P_1 &= 159.26 && \text{MW} \\ P_2 &= 96.296 && \text{MW} \\ P_3 &= 94.444 && \text{MW} \\ P_T &= 350 && \text{MW}\end{aligned}$$

valores que en función de la holgura y  $\alpha$  serán:

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha) &= 22.011275 - 0.233275*\alpha \\ P_1(\alpha) &= 167.03771 - 7.77777*\alpha \\ P_2(\alpha) &= 100.18482 - 3.88885*\alpha \\ P_3(\alpha) &= 100.27767 - 5.833275*\alpha\end{aligned}$$

y dando valores a  $\alpha$  tenemos:

$\alpha$	$\lambda$ (ptas/MWh)	P1 (MW)	P2 (MW)	P3 (MW)	PT
0	22.011275	167.0377	100.1848	100.2776	367.5
0.5	21.8946	163.1488	98.2404	97.3610	358.75
0.7	21.8480	161.5933	97.4626	96.1944	355.2503
1	21.778	159.26	96.2959	94.4444	350



que llevados a una gráfica resultará la figura siguiente.

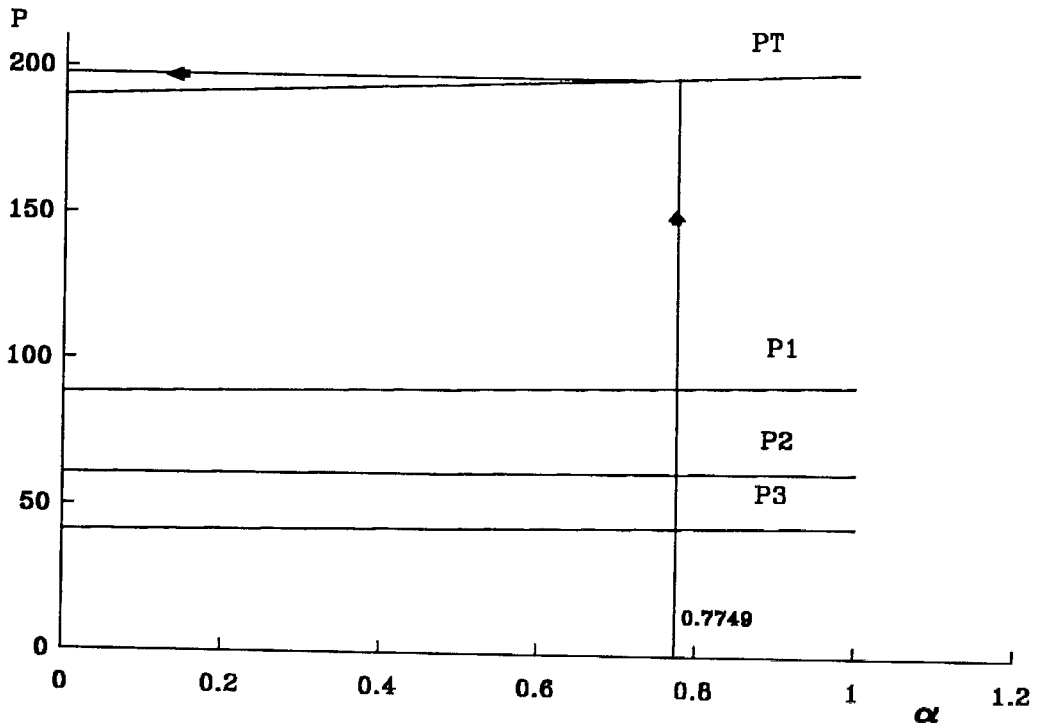


Figura 30.  $(P_1 : P_2 : P_3 : P_T) / \alpha$

El costo incremental es 0.013 Ptas/h, como anteriormente.

Vamos a estudiar el  $\alpha$  - corte asociado a nuestro problema, o sea, cuando  $\alpha = 0.7749$ , tendremos:

$$\lambda(\alpha) = 21.8305 \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 161.0176 \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 97.17133 \quad \text{MW}$$

$$P_3(\alpha) = 95.75746 \quad \text{MW}$$

$$P_T(\alpha) = 353.9464 \quad \text{MW.}$$

Efectuando una comparación entre los valores de  $\lambda$ , en cada caso, tendremos:

$$\alpha = 0 \quad \lambda_{190} = 19.6447 \quad \text{ptas/MWh} \quad P_T = 190 \quad \text{MW.}$$

$$\alpha = 0 \quad \lambda_{367.5} = 22.011275 \quad " \quad P_T = 367.5 \quad \text{MW.}$$

La variación del coste incremental es:

$$\lambda = 22.011275 - 19.6447 = 2.366575 \quad \text{ptas/MWh.}$$

b) Satisfacción de restricciones y objetivo.

Como se puede comprobar, los valores obtenidos satisfacen las restricciones impuestas por el decisor en cuanto al consumo total y, si además, está conforme con el intervalo de trabajo que consigue para la función objetivo; calculará el valor óptimo para dicho intervalo (solución optimal) y si lo considera como válido habrá resuelto su problema. En caso contrario tomará otros valores de referencia para las restricciones o modificará el optimal (dentro del margen calculado), así el grado de conocimiento de la imprecisión que maneja le indique que la solución obtenida sea adecuada.

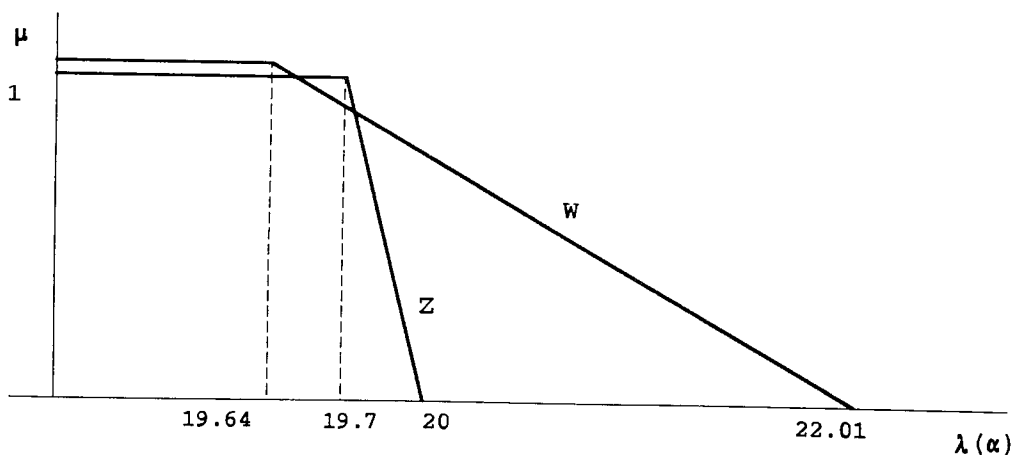
También se puede comprobar que la solución optimal es un valor particular de la solución difusa, como se puede ver en la tabla anterior, por lo que tomaremos ésta, por ser más general, para el estudio del ahorro en los apartados venideros.

## c) Restricciones y meta difusa.

Se puede verificar que la solución obtenida como optimal satisface las condiciones impuestas por el decisor, pero pudiera ocurrir que si no tiene un cierto conocimiento de la meta, con una imprecisión controlada, el resultado puede ser no aceptable y para esto será conveniente que compare sus valores con los obtenidos para la solución difusa, que es más completa, y decidirá como actuar.

Como esta solución está incluida en la difusa tomaremos la difusa para el estudio del ahorro en los apartados venideros, como más general.

Por otro lado, también se podrá hacer una comparación entre las soluciones obtenidas en 2.2.2.1.1.3.2 y 2.2.2.1.1.3.3 por medio de las representaciones gráficas de la función de pertenencia de las funciones objetivo. Se verificará si las previsiones teóricas, que indicaban que la solución de Zimmermann debe estar en el intervalo de variación de la de Werners. En este ejemplo se cumple.



2.2.2.1.3.- Ahorro

Haciendo un estudio, como en el problema 1, del ahorro respecto a un reparto de cargas iguales, en distintos puntos de funcionamiento, tendremos:

2.2.2.1.3.1.- Ahorro frente a un reparto igualitario cuando se está en un consumo cercano al límite inferior del intervalo

Siguiendo la explicación dada para obtener el ahorro en el primer ejemplo, si la carga a distribuir es de 195 MW, perteneciente al intervalo [190 - 367.5]:

$$\text{Ahorro} = \text{coste}(65, 65, 65) - \text{coste}(88.1486 + 4.4444*\alpha; 60.4708 + 2.2222*\alpha; 41.1111 + 3.3333*\alpha)$$

$$\text{Ahorro} = \int_{88.1486+4.4444\alpha}^{65} (17+0.03*P_1) dP_1 + \int_{60.4708+2.2222\alpha}^{65} (16 + 0.06*P_2) dP_2$$

$$+ \int_{41.1111+3.3333\alpha}^{65} (18+0.04*P_3) dP_3$$

$$\text{Ahorro} = 123.5097 - 196.40649*\alpha - 0.66649*\alpha^2 > 0$$

El ahorro se producirá cuando  $\alpha < 0.6275$ , y será máximo cuando  $\alpha = 0$ .

Ahorro	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.6275$
ptas/h	123.5097	0

que representa un ahorro anual de hasta 1.081.945 ptas/año.

**2.2.2.1.3.2.- Ahorro frente a un reparto igualitario, en otro punto**

Tomando como ejemplo de referencia 360 MW, tendremos:

$$\text{Ahorro} = \text{coste}(120, 120, 120) - \text{coste}(167.0377 - 7.7777*\alpha; 100.1848 - 3.88885*\alpha; 100.27767 - 5.833275*\alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{Ahorro} = & \int_{167.0377-7.7777\alpha}^{120} (17+0.03*P_1) dP_1 + \int_{100.1848-3.88885\alpha}^{120} (16+0.06*P_2) dP_2 \\ & + \int_{100.27762-5.833275\alpha}^{120} (18 + 0.04*P_3) dP_3 \end{aligned}$$

$$\text{Ahorro} = -112.34.16 + 385.1897*\alpha - 2.0416*\alpha^2 > 0$$

El ahorro se producirá, ante una distribución igualitaria, a partir del valor de  $\alpha$  de 0.2923 y será máximo cuando  $\alpha = 1$ .

Ahorro	$\alpha = 0.2923$	$\alpha = 1$
ptas/h	0	270.8065

que representa un ahorro de hasta 2.372.265 ptas/año.

Los ahorros calculados en 2.2.2.1.3.1 y 2.2.2.1.3.2 indican que tomando de forma realista el carácter difuso de los límites de funcionamiento del sistema, así como algunos puntos intermedios, se consiguen mejorar los resultados asignando los valores adecuados de los  $\alpha$  - cortes, para cada caso, con lo que el decisor verá compensada la aplicación de sus conocimientos.

Seguimos comprobando en este segundo modelo que las ventajas económicas se incrementan, además de continuar con las de tipo socio-laboral, que tampoco podemos despreciar, por lo que representan de satisfacción personal de los que intervienen en los trabajos del D. E., como se indicó en el capítulo 1.

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

### **2.3.- Tercer modelo: DESPACHO ECONÓMICO CON DEMANDA DE POTENCIA VARIABLE Y UNIDADES DE POTENCIA VARIABLE**

#### **2.3.1.- Formulación del problema**

Es frecuente que se pretenda suministrar la carga requerida por medio de unidades de potencia variable, así como que el consumo oscile dentro de un margen, más o menos amplio, en una determinada zona. Por ello, en este apartado vamos a seguir acercándonos al caso más real resolviendo el problema aquí planteado.

Este problema se resuelve por Programación Lineal Difusa considerando que el decisor asume que puede haber cierta tolerancia en el cumplimiento de alguna/s restricción/es, que pueden aparecer tanto en el intervalo de potencia demandada, como en el rango posible de trabajo de las unidades generadoras. Estas restricciones se estudiarán como difusas y nos llevarán a un modelo con restricciones difusas más amplio que el estudiado en el modelo dos.

**2.3.2.- Ejemplos**

**2.3.2.1.- Problema 3**

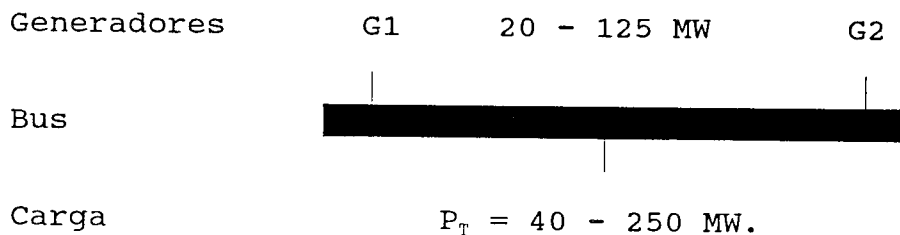
Dadas las variaciones de costo incremental de producción de los dos grupos de una central de suministro de energía eléctrica, que son:

$$(C1) = 2.2 + 0.010 \cdot P_1 \quad \text{Ptas/MWh}$$

$$(C2) = 1.6 + 0.012 \cdot P_2 \quad \text{"}$$

$$P_1, P_2 \quad \text{MW.}$$

Si las dos unidades funcionan de forma continua, se desea determinar la variación de coste incremental y distribución óptima de carga entre éstas cuando la carga total varíe entre 40 y 250 MW y la potencia de cada unidad oscile entre 20 y 125 MW.



**2.3.2.1.1.- Técnicas de resolución**

**2.3.2.1.1.1.- Método gráfico**

Veamos una tabla de valores para este caso:



$\lambda$ (ptas/MWh)	P1 (MW)	P2 (MW)	P1+P2 (MW)	Observ.
1.84	20	20	40	*
2	20	33	53	**
2.2	20	50	70	**
2.4	20	66.6667	86.6667	***
2.8	60	100	160	****
3.1	90	125	215	****
3.2	100	125	225	****
3.45	125	125	250	****

Como vemos, con  $\lambda = 1.84$  ptas/MWh, los valores resultantes (tipo \*) están en el límite mínimo del intervalo de funcionamiento.

Para  $\lambda = 2$  y  $2.2$  los valores resultantes de las potencias (tipo \*\*), igual que el anterior, están por debajo del valor óptimo de  $\lambda$  (gráficamente), que es  $2.4$ , e igualmente, en el margen inferior del intervalo de funcionamiento.

El tipo \*\*\* nos marca la distribución obtenida mediante Programación Lineal.

Los valores correspondientes al tipo \*\*\*\* nos señalan que ya se han sobrepasado los valores de la distribución de Programación Lineal, hasta llegar al límite del intervalo de funcionamiento, con el consiguiente aumento del coste incremental.

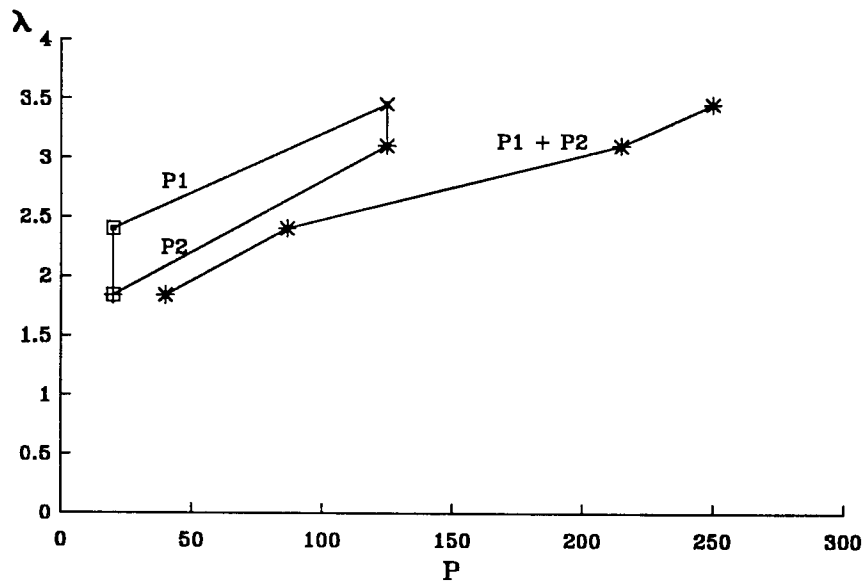


Figura 31.  $\lambda / P_1 - P_2 - P_1+P_2$

2.3.2.1.1.2.- Mediante P. L.

Sería resolver el problema:

$$\begin{aligned}
 &\text{Min} && \lambda \\
 &\text{s. a.} && \lambda - 0.010 \cdot P_1 = 2.2 \\
 &&& \lambda - 0.012 \cdot P_2 = 1.6 \\
 &&& P_1 + P_2 \leq 250 \\
 &&& P_1 + P_2 \geq 40 \\
 &&& 20 \leq P_1, P_2 \leq 125
 \end{aligned}$$

Su solución óptima es:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= 2.4 && \text{ptas/MWh} \\
 P_1 &= 20 && \text{MW} \\
 P_2 &= 66.6667 && \text{MW.}
 \end{aligned}$$

2.3.2.1.1.3.- Mediante PROGRAMACION LINEAL DIFUSA

Aquí el jefe del servicio podría entender que los valores del consumo y de las unidades de generación pueden tener un margen de maniobra "a lo sumo del 10%", según le indica su experiencia y conocimientos de la zona, para que el sistema funcione de la forma "aproximadamente" más económica.

Por tanto, su modelo difuso será::

$$\begin{aligned} \text{Min } & \lambda \\ \text{s.a. } & \lambda - 0.010 \cdot P_1 = 2.2 \\ & \lambda - 0.012 \cdot P_2 = 1.6 \\ & P_1 + P_2 \leq 250 \\ & P_1 + P_2 \geq 40 \\ & P_1, P_2 \leq 125 \\ & P_1, P_2 \geq 20 \end{aligned}$$

Las funciones de pertenencia con las holguras indicadas son:

$$d_1 = 0.1 \cdot (P_1 :: P_2) = 0.1 \cdot 125 = 12.5; \quad d_2 = 0.1 \cdot 20 = 2$$

$$d'_1 = 0.1 \cdot (P_1 + P_2) = 0.1 \cdot 250 = 25 \text{ y } d'_2 = 0.1 \cdot 40 = 4$$

$$\begin{aligned} \mu_1 (P_1 + P_2) &= 0 && \text{Si } P_1 + P_2 \leq 36 \\ &= \frac{(P_1 + P_2) - 36}{4} && \text{Si } 36 \leq P_1 + P_2 \leq 40 \\ &= 1 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 (P_1 + P_2) &= 1 && \text{Si } P_1 + P_2 \leq 250 \\ &= \frac{[275 - (P_1 + P_2)]}{25} && \text{Si } 250 \leq P_1 + P_2 \leq 275 \\ &= 0 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

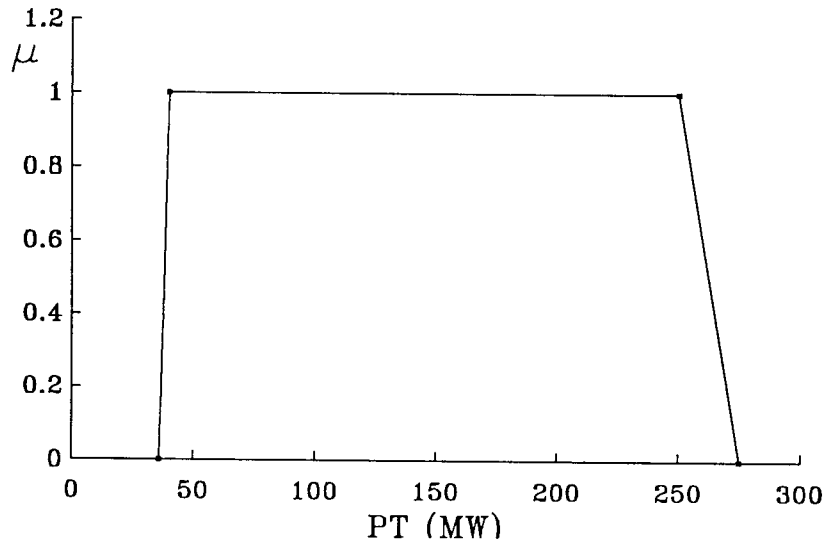


Figura 32. Función de pertenencia de  $P_T$ .

$$\begin{aligned} \mu_3 (P_1 :: P_2) &= 0 && \text{Si } P_1 :: P_2 \leq 18 \\ &= \frac{(P_1 :: P_2) - 18}{2} && \text{Si } 18 \leq P_1 :: P_2 \leq 20 \\ &= 1 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_4 (P_1 :: P_2) &= 1 && \text{Si } P_1 :: P_2 \leq 125 \\ &= \frac{137.5 - (P_1 :: P_2)}{12.5} && \text{Si } 125 \leq P_1 :: P_2 \leq 137.5 \\ &= 0 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

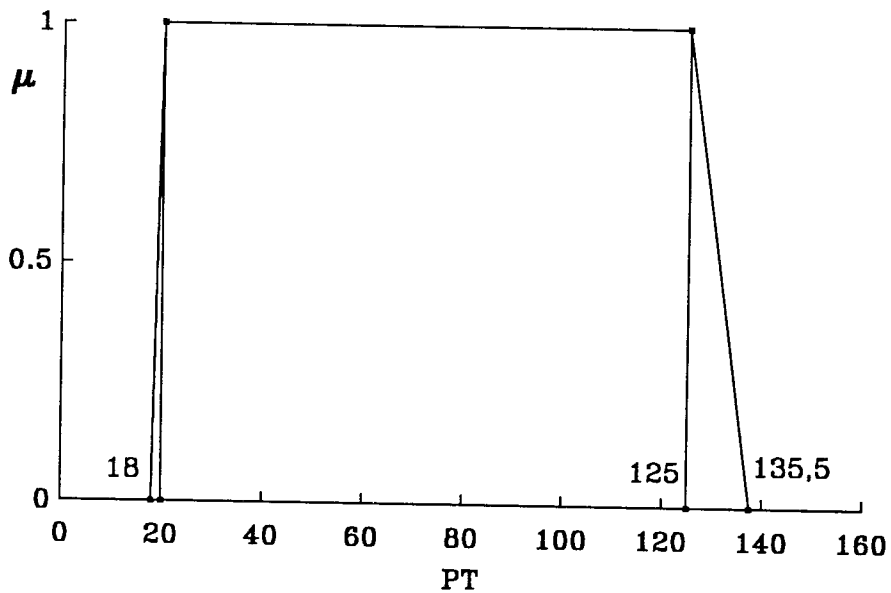


Figura 33. Función de pertenencia de  $P_1$  y  $P_2$

2.3.2.1.1.3.1.- Solución difusa

Tomando las consideraciones anteriores, el problema a resolver tomará la forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \lambda \\
 \text{s.a.} \quad & \lambda - 0.010 \cdot P_1 = 2.2 \\
 & \lambda - 0.012 \cdot P_2 = 1.6 \\
 & P_1 + P_2 \leq 250 + 25 \cdot (1 - \alpha) \\
 & P_1 + P_2 \geq 40 - 4 \cdot (1 - \alpha) \\
 & P_1 \leq 125 + 12.5 \cdot (1 - \alpha) \\
 & P_1 \geq 20 - 2 \cdot (1 - \alpha) \\
 & P_2 \leq 125 + 12.5 \cdot (1 - \alpha) \\
 & P_2 \geq 20 - 2 \cdot (1 - \alpha) \\
 & \alpha \in (0, 1]
 \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\lambda(\alpha) = 2.38 + 0.02*\alpha$$

$$P_1(\alpha) = 18 + 2*\alpha$$

$$P_2(\alpha) = 64.999 + 1.667*\alpha$$

y dando valores a  $\alpha$  tenemos:

$\alpha$	$\lambda$	P1	P2	P1 + P2
0	2.38	18	64.999	82.999
0.5	2.39	19	65.8325	84.8325
0.86	2.3972	19.72	66.4326	86.1526
1	2.4	20	66.6667	86.6667

cuyas representaciones gráficas son:

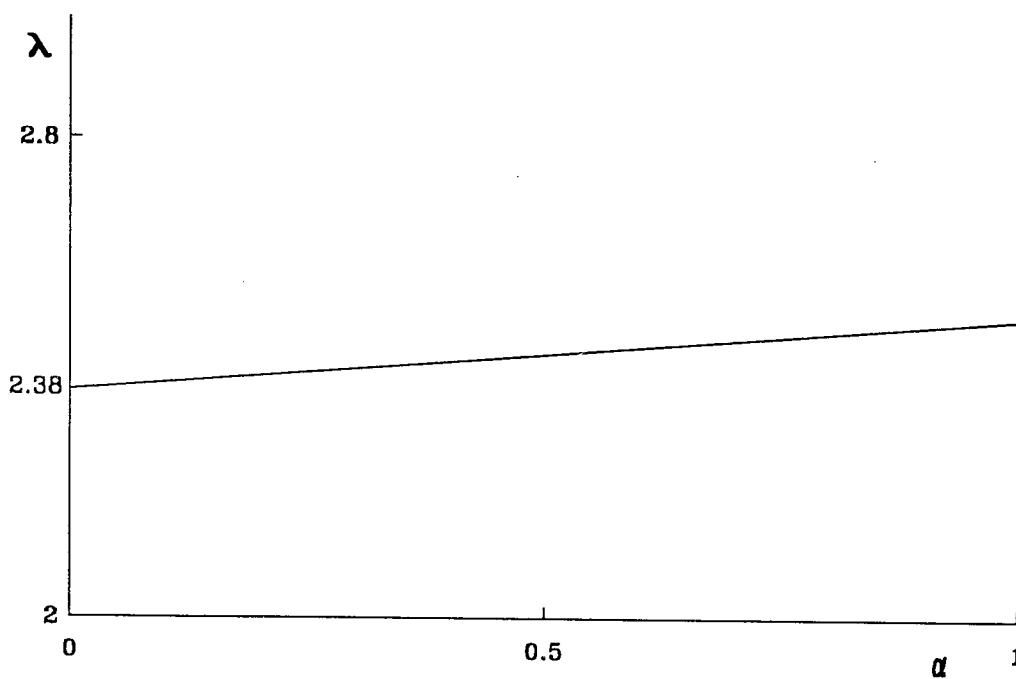


Figura 34. Coste incremental /  $\alpha$

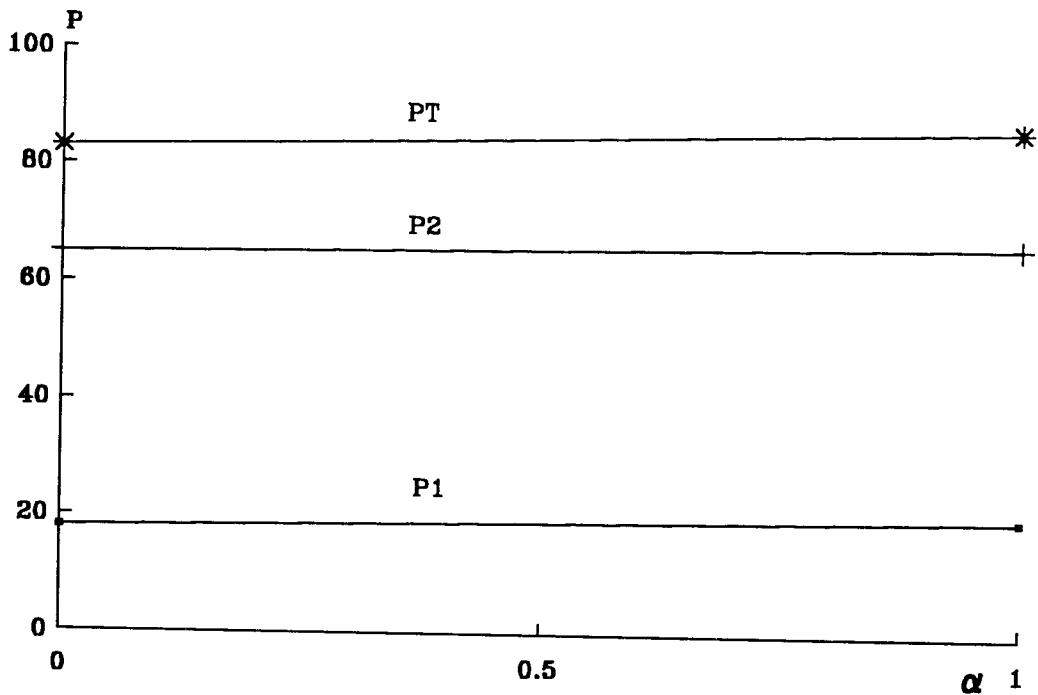


Figura 35.  $P_1 - P_2 - P_T / \alpha$

Como se puede apreciar de la tabla y gráficas anteriores, la variación de coste incremental ( $\lambda$ ) es muy pequeña debido a los valores tomados como referencia en el ejemplo y que, como veremos en las consideraciones, la influencia de la variación de dicho coste es muy pequeña y el ahorro, por la misma razón, también será modesto.

La gráfica que representa la situación de  $P_1, P_2, P_T / \alpha$ , tiene pequeño el margen de variación de los valores debido a las características del ejemplo empleado.

La solución difusa se presenta como:

$$S = \{ \_2.38 + 0.02*\alpha/\alpha; 18 + 2*\alpha/\alpha; 64.999 + 1.667*\alpha/\alpha \}$$

2.3.2.1.1.3.2.- Satisfacción de restricciones y objetivo

El decisor estudiará los valores que satisfacen las restricciones previstas y el objetivo. Tomará los dos valores extremos de las restricciones del consumo,  $36 \leq P_T \leq 275$  MW; se calcularán los valores de la función objetivo correspondientes a dichos extremos, siendo éstos:

$$z_0 = \lambda(0) = 2.38 \quad \text{ptas/MWh}$$

$$z_1 = \lambda(1) = 2.68 \quad \text{ptas/MWh}$$

y así obtendrá el margen de actuación.

Su función de pertenencia será:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 1 && \text{Si } \lambda(x) < 2.38 \\ &= \frac{2.68 - \lambda(x)}{0.3} && \text{Si } 2.38 \leq \lambda(x) \leq 2.68 \\ &= 1 && \text{Si } \lambda(x) > 2.68 \end{aligned}$$

El problema es equivalente a:



$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & \alpha \\
 \text{s.a.} \quad & \lambda \leq 2.68 - 0.3\alpha \\
 & \lambda - 0.010 \cdot P_1 = 2.2 \\
 & \lambda - 0.012 \cdot P_2 = 1.6 \\
 & P_1 + P_2 \leq 250 + 25 \cdot (1 - \alpha) \\
 & P_1 + P_2 \geq 40 - 4 \cdot (1 - \alpha) \\
 & P_1 \leq 125 + 12.5 \cdot (1 - \alpha) \\
 & P_1 \geq 20 - 2 \cdot (1 - \alpha) \\
 & P_2 \leq 125 + 12.5 \cdot (1 - \alpha) \\
 & P_2 \geq 20 - 2 \cdot (1 - \alpha) \\
 & \alpha \in (0, 1]
 \end{aligned}$$

cuya solución optimal es:

$$\begin{aligned}
 \alpha^* &= 1 \\
 \lambda^* &= 2.4 \quad \text{ptas/MWh} \\
 P_1^* &= 20 \quad \text{MW} \\
 P_2^* &= 66.6667 \text{ MW.}
 \end{aligned}$$

Como en los ejemplos anteriores se podría calcular la solución optimal a partir de la ecuación general  $f[x(\alpha)] = \alpha$  obteniéndose los mismos valores.

Como se puede comprobar, los valores obtenidos cumplen con las restricciones impuestas para el consumo,  $36 \leq P_T \leq 275$ , y para

las unidades,  $18 \leq P_1:P_2 \leq 127.5$ , y si el objetivo se considera como satisfactorio se ha resuelto el problema. En caso contrario se reaplanteará las condiciones de las restricciones hasta que encuentre la solución más adecuada al problema en estudio.

### 2.3.2.1.1.3.3.- Con restricciones y meta difusas

El decisor, por su experiencia y conocimientos, puede tener una idea imprecisa (aunque aproximada) del valor de la meta a alcanzar y, cumpliendo con las restricciones impuestas, tomará dicho valor como referencia, por ejemplo, 2.39 ptas/MWh, con una holgura de 0.05 ptas/MWh.

La función de pertenencia de la función objetivo es:

$$\begin{aligned} \mu(x) &= 1 && \text{Si } \lambda(x) < 2.39 \\ &= \frac{2.395 - \lambda(x)}{0.05} && \text{Si } 2.39 \leq \lambda(x) \leq 2.44 \\ &= 1 && \text{Si } \lambda(x) > 2.44 \end{aligned}$$

El problema es equivalente a:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & \alpha \\
 \text{s.a.} & \lambda \leq 2.39 + 0.05*(1 - \alpha) \\
 & \lambda - 0.010*P_1 = 2.2 \\
 & \lambda - 0.012*P_2 = 1.6 \\
 & P_1 + P_2 \leq 250 + 25*(1 - \alpha) \\
 & P_1 + P_2 \geq 40 - 4*(1 - \alpha) \\
 & P_1 \leq 125 + 12.5*(1 - \alpha) \\
 & P_1 \geq 20 - 2*(1 - \alpha) \\
 & P_2 \leq 125 + 12.5*(1 - \alpha) \\
 & P_2 \geq 20 - 2*(1 - \alpha)
 \end{array}$$

cuya solución optimal es:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha^* = & 0.86 \\
 \lambda^* = & 2.3972 \quad \text{ptas/MWh} \\
 P_1^* = & 19.72 \quad \text{MW} \\
 P_2^* = & 66.4326 \quad \text{MW.}
 \end{array}$$

Aquí el decisor comprobará que se cumplen las restricciones del consumo,  $36 \leq P_T \leq 275$ , y de las unidades,  $18 \leq P_1:P_2 \leq 127.5$ , y si la solución optimal alcanzada,  $\lambda = 2.3972$  ptas/MWh, es aceptable. Si se cumplen ambas premisas quedará satisfecho, y en caso contrario se deberán plantear las consideraciones previas, bien para la meta, restricciones o ambas.

**2.3.2.1.2.- Consideraciones**

El decisor puede trabajar tomando como referencia cualquiera de las soluciones anteriores y elegir la que más se acerca a sus previsiones. Por tanto, si actúa con:

a) Solución difusa, estudiando los valores obtenidos en el apartado anterior nos encontramos que la variación de coste incremental es 0.02 ptas/MWh, y por cada MW suministrado será de  $0.02 / (86.667 - 82.999) = 0.00545$  ptas/h.

Con esta variación de costo incremental el responsable del servicio ya tiene una referencia y puede asumir determinada "vaguedad" en el instante adecuado del suministro.

Si en su decisión está tomar otro valor de variación del coste incremental en ptas/h, por ejemplo 0.004 ptas/h, estudiará el  $\alpha$  - corte que le corresponde y comprobará si los valores asociados de  $\lambda$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_T$  están en el margen de trabajo admitido y actuará en consecuencia.

Así, para este ejemplo el  $\alpha$  - corte estará en 0.292 y los valores asociados de  $\lambda$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_T$  serán:

$$\begin{aligned} \lambda (0.292) &= 2.38 + 0.02 * 0.292 = 2.38584 && \text{ptas/MWh} \\ P_1(0.292) &= 18 + 2 * 0.292 = 18.584 && \text{MW} \\ P_2(0.292) &= 64.999 + 1.667 * 0.292 = 65.485764 && \text{MW} \\ P_T(0.292) &= 84.069764 && \text{MW.} \end{aligned}$$

Valores que también están dentro del margen de funcionamiento previsto y que le darán al decisor una referencia de la situación planteada.

La variación del coste incremental es pequeña y la pendiente de la recta representada en la figura 36 también lo es. Por lo tanto, para el valor tomado como referencia  $\alpha = 0.292$  se obtiene un valor  $\lambda = 2.38584$  ptas/MWh, muy cercano al máximo, que es de 2.4 ptas/MWh.

Para  $\alpha = 0.292$  se obtienen unos valores asociados,  $P_I = 18.584$  MW,  $P_Z = 65.485764$  MW y  $P_T = 84.069764$  MW, muy cercanos a los límites 18, 64.999 y 82.999 MW, respectivamente.

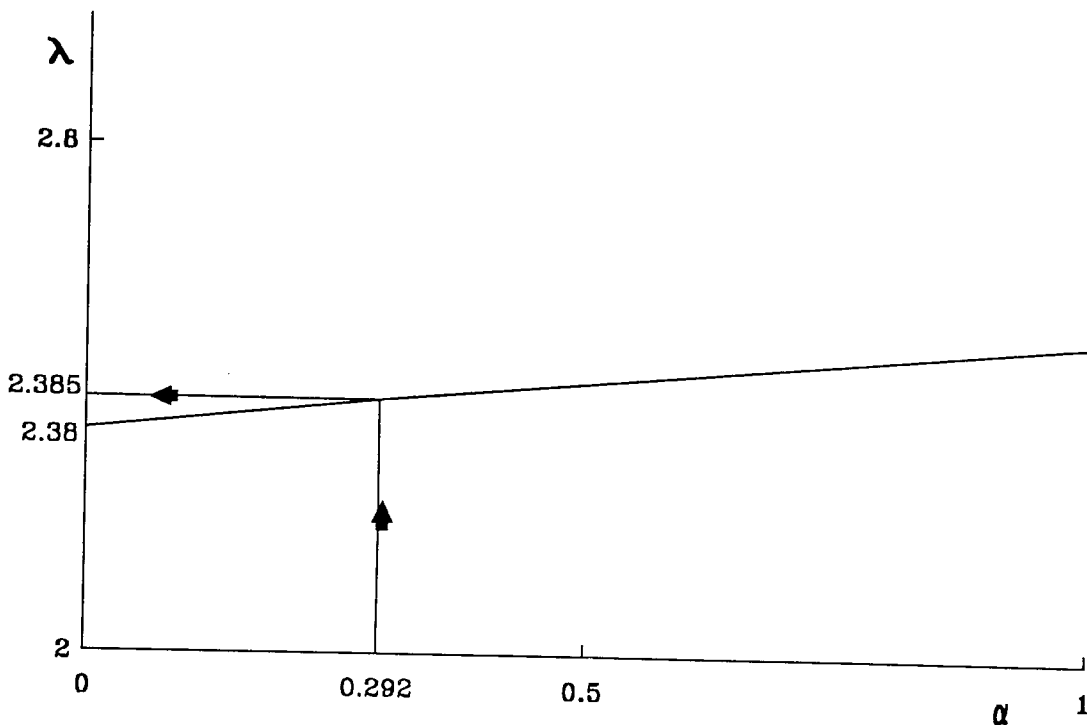


Figura 36. Coste incremental /  $\alpha$

Como se puede apreciar, se siguen corroborando las conclusiones obtenidas en los casos anteriores, en cuanto que el responsable puede adecuar el suministro, y por ende su coste, según sus conocimientos y con "un cierto grado de optimismo/pesimismo", teniendo en cuenta que siempre se deberá aportar la carga necesaria al servicio demandado, al menor costo, en cualquier caso.

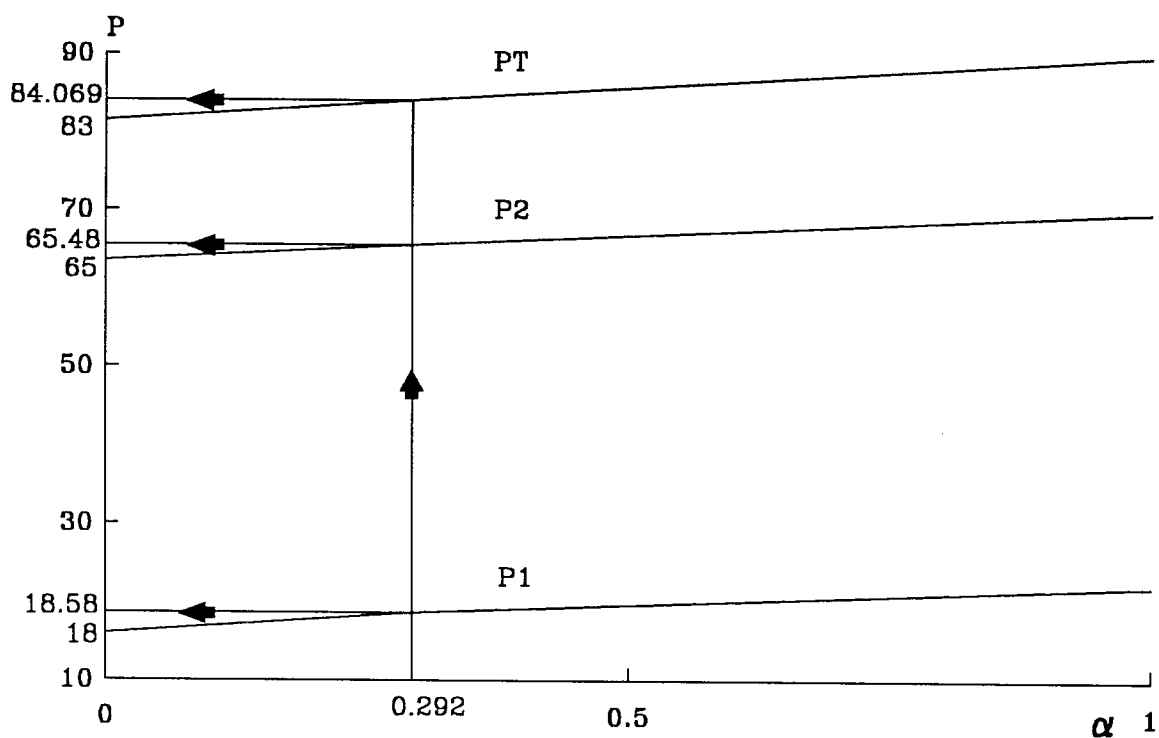


Figura 37.  $P_1 - P_2 - P_T / \alpha$

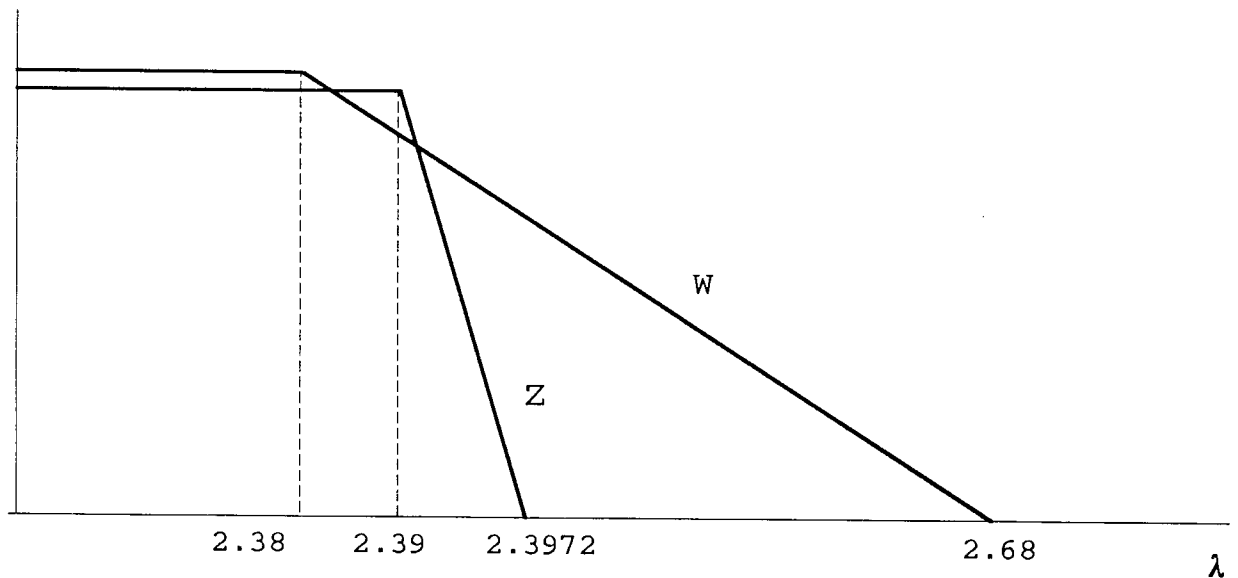
b) Satisfacción de restricciones y objetivo, entonces, como se puede comprobar, los valores obtenidos satisfacen las restricciones impuestas por el decisor, en cuanto al consumo total y el margen de funcionamiento de las unidades de generación, y, si además, está conforme con el intervalo de trabajo que consigue para la función objetivo calculará el valor óptimo para dicho intervalo (solución optimal) y si lo considera como válido habrá resuelto el problema. En caso contrario tomará otros valores como referencia para las restricciones o modificará el optimal (dentro del margen calculado), de tal forma que el grado de conocimiento de la imprecisión que maneja le indicará que la solución obtenida sea la adecuada.

También se puede comprobar que la solución optimal es un valor particular de la solución difusa, como se puede ver en la tabla anterior, por lo que tomaremos ésta para el estudio del ahorro en los apartados venideros, por ser más general.

c) Restricciones y meta difusas, se puede verificar que la solución obtenida como optimal satisfacen las condiciones impuestas por el decisor. También pudiera ocurrir que si no tiene el conocimiento adecuado de la meta con una imprecisión aceptable, el resultado podría no ser aconsejable y para esto será conveniente que compare sus datos con los valores obtenidos para la solución difusa, que es más amplia, y decidirá como actuar.

Esta solución es un valor puntual de la difusa, como se puede comprobar en la tabla anterior; por lo tanto tomaremos ésta para el estudio del ahorro en los apartados venideros, por ser la más general.

Se podría hacer una comparación entre las soluciones obtenidas en 2.3.2.1.1.3.2 y 2.3.2.1.1.3.3 por medio de las representaciones gráficas de la función de pertenencia de las funciones objetivo. Se verifica que se cumplen las previsiones teóricas que indican que la solución de Zimmermann está dentro del intervalo de las soluciones de Werners.





2.3.2.1.3.- Ahorro2.3.2.1.3.1.- Ahorro del reparto de P. L. frente al igualitario

Frente a un reparto al 50 %, entre las dos unidades de la central y para una potencia de consumo determinada, por ejemplo 180 MW, el ahorro que se obtendrá, a partir de los valores calculados mediante P. L., será:

$$\lambda = 2.9091 \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1 = 70.709 \quad \text{MW}$$

$$P_2 = 109.09 \quad \text{MW}$$

$$\begin{aligned} \text{Ahorro} &= \int_{70.709}^{90} (2.2 + 0.01 * P_1) dP_1 + \int_{109.09}^{90} (1.6 + 0.012 * P_2) dP_2 = \\ &= 4.593631 \text{ Pts/h} \end{aligned}$$

Esto representará un ahorro de 40.240 ptas/año.

2.3.2.1.3.2.- Ahorro del reparto difuso frente al igualitario

El reparto difuso para 180 MW es:

$$\lambda(\alpha) = 2.7073 + 0.2 * \alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 68.72 + 2.1816 * \alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 107.262 + 1.818 * \alpha \quad \text{MW}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ahorro} &= \int_{(68.72+2.1816\alpha)}^{90} (2.2 + 0.01*P_1) dP_1 + \\
 &+ \int_{(107.262+1.818\alpha)}^{90} (1.6 + 0.012*P_2) dP_2 = \\
 &= 16.111111 - 11.547515*\alpha - 0.0436227*\alpha^2 \quad \text{ptas/h}
 \end{aligned}$$

Así pues, para cualquier valor de  $\alpha$  comprendido entre 0 y 1 se obtiene un ahorro positivo. Por ejemplo:

Para  $\alpha = 0$  141.133 ptas/año  
 Para  $\alpha = 1$  38.595 "

### 2.3.2.1.3.3.- Ahorro del reparto difuso frente al de P. L.

$$\begin{aligned}
 \text{Ahorro} &= \int_{(68.72 + 2.1816\alpha)}^{70.709} (2.2 + 0.01*P_1) dP_1 + \\
 &+ \int_{(107.262 + 1.818\alpha)}^{109.09} (1.6 + 0.012*P_2) dP_2 = \\
 &= 11.0114738 - 11.547515*\alpha - 0.043627*\alpha^2 \quad \text{pts/h.}
 \end{aligned}$$

Se obtendrá un ahorro para valores de  $\alpha < 0.9507$ .

Estos resultados nos indican que, para este ejemplo, el ahorro obtenido en los dos supuestos anteriores, siempre es favorable cuando se utilizan los valores del reparto difuso frente a la distribución igualitaria o a la obtenida mediante P. L., aunque en este caso se puede comprobar que es modesto debido a las características del problema.

**2.3.2.1.4.- Comentarios**

Como en los casos anteriores, con los resultados obtenidos se puede asegurar que el uso del conocimiento difuso en las operaciones del Despacho Económico, en los Servicios Eléctricos, proporciona un ahorro económico, energético y ventajas socio - laborales y personales que nos indican claramente que la utilización de esta técnica tiene bastante interés y su dominio y aplicación proporcionan beneficios interesantes.

En este apartado se vuelve a demostrar que las ventajas del reparto difuso son evidentes respecto al resto.

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

#### **2.4.- Cuarto modelo: DESPACHO ECONOMICO CON COEFICIENTES DIFUSOS, DEMANDA DE POTENCIA Y UNIDADES DE POTENCIA VARIABLES**

Como última situación, en el trabajo del Despacho Económico, vamos a tratar el caso donde las ecuaciones del coste incremental aparecen como números difusos, además de considerar algunas restricciones también difusas.

Aquí partiremos de unas hipótesis de trabajo teóricas ya que no disponemos de valores reales que conforman las constantes que aparecen en las ecuaciones del costo incremental. Según los casos, cada empresa del sector tomará unos parámetros, o sea, seleccionará las consideraciones adecuadas al tipo, lugar, economía, ... , que con una influencia característica condicionan la obtención de la ecuación de coste.

En función de lo expuesto anteriormente, es necesario empezar con ecuaciones supuestas, al no disponer de condiciones reales de cálculo, en las que las constantes que aparecen se pueden reflejar bien como números difusos de carácter triangular bien trapezoidal, según las hipótesis previas; hipótesis que deben ir apoyados en el mundo empresarial por el conocimiento y experiencia de los equipos que determinan la puesta en funcionamiento de distintas unidades de generación para suministrar la energía adecuada a la zona a alimentar.

Creemos que este es un primer paso, aunque sea teórico, para llegar a plantearse el problema de forma real y mediante un proyecto conjunto con empresas del sector obtener un modelo matemático aplicable. Esto será así tanto en cuanto los datos que se dispongan para obtener las ecuaciones de coste sean los "más aproximados posibles", y eso sólo lo pueden dar las entidades relacionadas con el tema en estudio.

A la hora de enfrentarse con este problema no solo intervendrán los responsables del Despacho Económico, en cuanto a servicio técnico que es, sino que deberá ser un conjunto mayor de participantes en la decisión, como pueden ser: economistas, ingenieros, matemáticos, jefes de personal, directores de política empresarial, de compras, etc., que de una u otra forma deben aportar sus conocimientos, teniendo en cuenta el carácter "difuso" de todos y cada uno de los condicionantes que deben integrar los parámetros para determinar el óptimo funcionamiento, tanto en sus condicionantes de servicio como económicos.

También se engloba dentro de este modelo el caso en que se admita inseguridad e imprecisión no aleatoria de los datos.

#### **2.4.1.- Formulación del problema**

Este problema se resuelve por P. L. D. considerando que el decisor asume que puede haber cierta tolerancia en el cumplimiento de alguna restricción; aceptará holguras tales como

"aproximadamente", más o menos", etc. y coeficientes representados por números difusos estimados como "aceptables", "en torno a", ..., dados por números triangulares:

$$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3); \quad \underline{b} = (b_1, b_2, b_3); \quad \underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

cuyas funciones de pertenencia ya se indicaron en el capítulo tercero del presente trabajo.

Bajo estas consideraciones el modelo que consideraremos aquí será:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = cx \\ \text{s.a.} \quad & \underline{a}_i x \leq \underline{b}_i \\ & x > 0 \end{aligned} \tag{62}$$

Como el decisor conoce la falta de precisión de los valores de los coeficientes y de las restricciones anteriores, puede admitirse alguna violación en cumplimiento de ellas. Como se dijo en el apartado 4.3.2 del capítulo cuarto, en [Del89] se propone un método de resolución para el modelo (62).

## 2.4.2.- Ejemplos

### 2.4.2.1.- Problema 4

Se tienen dos unidades trabajando en paralelo, cuyos costes incrementales vienen dados por las ecuaciones:

$$(C1) = 0.80 \cdot P_1 + 800 \quad \text{ptas/MWh}$$

$$(C2) = 0.96 \cdot P_2 + 640 \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1, P_2 \quad \text{MW}$$

Si la demanda de consumo se supone comprendida entre 625 y 1250 MW y los límites de variación de dichas unidades están entre 100 y 625 MW, se desea saber la carga que debe suministrar cada una de las unidades para que el sistema funcione en la forma más económica.

#### 2.4.2.1.1.- Técnicas de resolución

##### 2.4.2.1.1.1.- Método gráfico (sin fuzziness)

Veamos una tabla de valores para este caso:

$\lambda$	P1	P2	P <sub>T</sub>
784	100	150	250
880	100	250	350
1040	300	417	717
1120	400	500	900
1240	550	625	1175
1300	625	625	1250

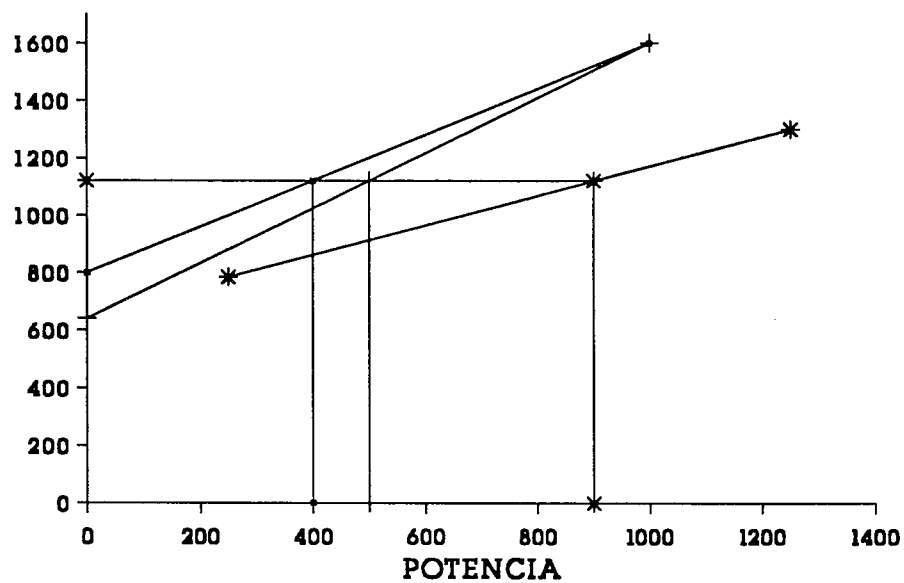


Figura 38. Coste incremental / Potencia

Otras gráficas de interés son las mostradas en las figuras 39 y 40.

En la figura 39 podemos comprobar que, al igual que se obtenía en la tabla anterior, para  $\lambda = 1240$  ptas/MWh, la unidad 2 trabajará en su límite superior y que el costo adicional proviene de la unidad 1, que es la que determinará el coste incremental.



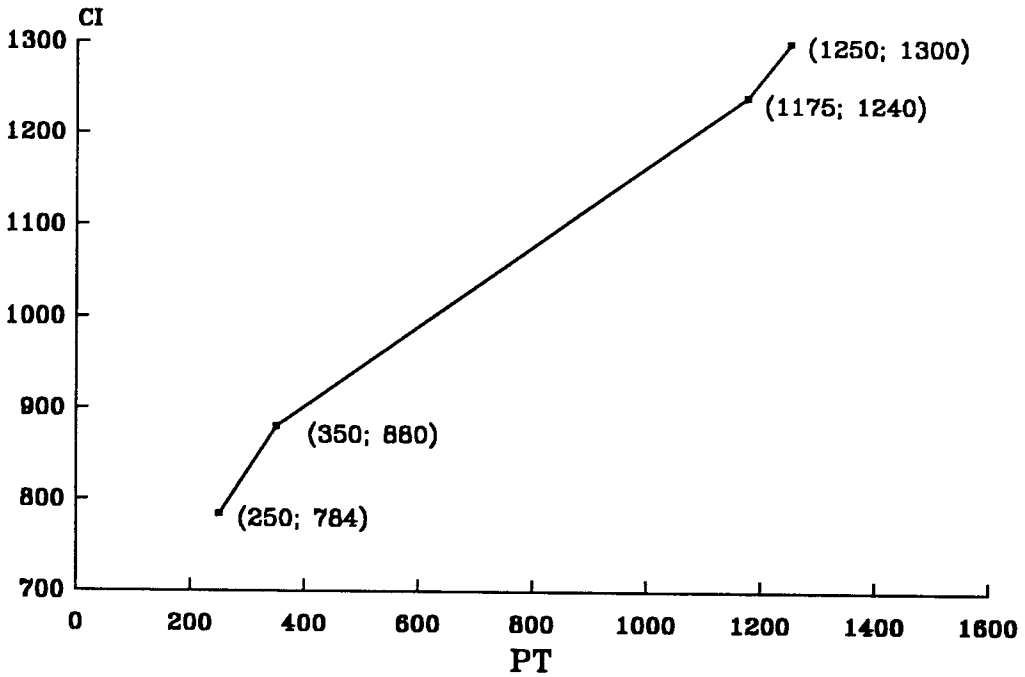


Figura 39. Coste incremental/Potencia de salida

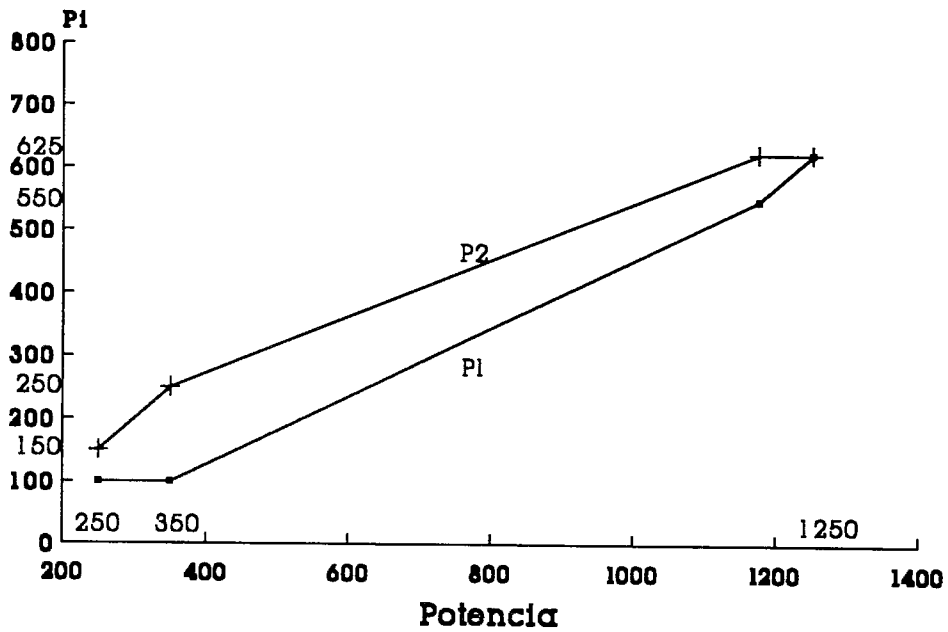


Figura 40.  $P_1 :: P_2 / P_T$

**2.4.2.1.1.2.- Mediante P. L.**

Su modelo será:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \lambda \\ \text{s. a.} & \lambda - 0.80 \cdot P_1 = 800 \\ & \lambda - 0.96 \cdot P_2 = 640 \\ & P_1 + P_2 \geq 625 \\ & P_1 + P_2 \leq 1250 \\ & 100 \leq P_1, P_2 \leq 625 \end{array}$$

Su solución óptima es:

$$\begin{array}{ll} \lambda = 1000 & \text{ptas/MWh} \\ P_1 = 250 & \text{MW} \\ P_2 = 375 & \text{MW} \end{array}$$

**2.4.2.1.1.3.- Mediante PROGRAMACIÓN LINEAL DIFUSA**

Considerando la formulación del problema 4, y con los elementos difusos dispuestos en las ecuaciones de coste incrementales, así como en las restricciones de demanda de consumo y límites de variación de potencia de las unidades generadoras, se puede escribir:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & \lambda \\
 \text{s.a.} & \lambda - 0.80 \cdot P_1 = 800 \\
 & \lambda - 0.96 \cdot P_2 = 640 \\
 & P_1 + P_2 \geq 625 \\
 & P_1 + P_2 \leq 1250 \\
 & P_1, P_2 \leq 625 \\
 & P_1, P_2 \geq 100
 \end{array}$$

donde el decisor acepta holguras tales como "en torno al" 10% para la primera y segunda restricciones y del 5% para el resto y se consideran como "aceptables" aproximaciones para los coeficientes dadas por números difusos triangulares, tales como se dieron en el capítulo tercero:

$$0.96 = (0.93, 0.96, 0.98) \quad 640 = (630, 640, 650)$$

$$0.8 = (0.75, 0.8, 0.82) \quad 800 = (790, 800, 810)$$

Las funciones de pertenencia con las holguras indicadas son:

$$d_1 = 0.1 \cdot (P_1 + P_2) = 0.1 \cdot 625 = 62.5; \quad d_2 = 0.1 \cdot 1250 = 125$$

$$d'_1 = 0.05 \cdot (P_1 :: P_2) = 0.05 \cdot 100 = 5 \quad \text{y} \quad d'_2 = 0.05 \cdot 625 = 31.25$$

$$\begin{aligned}
 \mu_1 (P_T) &= (P_T - 562.5)/62.5 && \text{Si } 562.5 \leq P_T \leq 625 \\
 &= 1 && \text{Si } 625 \leq P_T \leq 1250 \\
 &= (375 - P_T)/125 && \text{Si } 1250 \leq P_T \leq 1375 \\
 &= 0 && \text{En otro caso}
 \end{aligned}$$

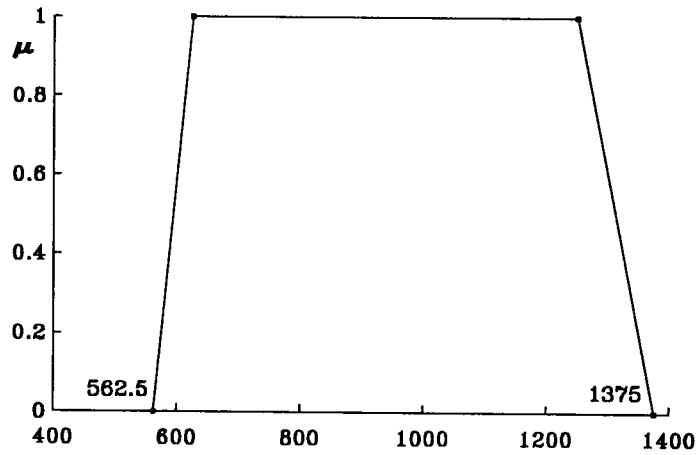


Figura 41. Función de pertenencia/ $P_T$

$$\begin{aligned}
 \mu_2 (P_1::P_2) &= (P_1 - 95)/5 && \text{Si } 95 \leq P_1 \leq 100 \\
 &= 1 && \text{Si } 100 \leq P_1 \leq 625 \\
 &= (656.25 - P_1)/31.25 && \text{Si } 625 \leq P_1 \leq 656.25 \\
 &= 0 && \text{En otro caso}
 \end{aligned}$$

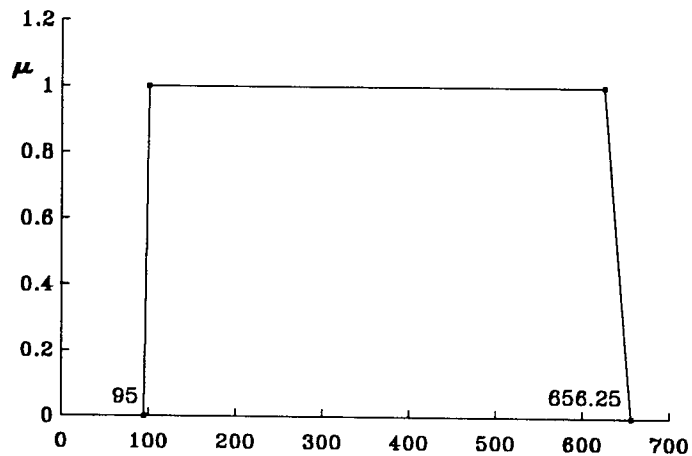


Figura 42. Función de pertenencia/ $(P_1::P_2)$

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{0.8}} &= (0.82 - x)/0.02 && \text{Si } 0.8 \leq x \leq 0.82 \\ &= (x - 0.75)/0.05 && \text{Si } 0.75 \leq x \leq 0.8 \\ &= 0 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

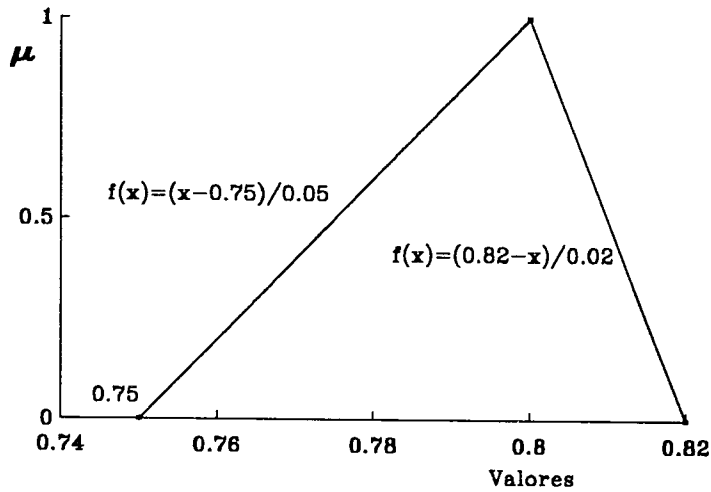


Figura 43.  $\underline{0.8} = [0.75 + 0.05x; 0.82 - 0.02x]$

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{0.96}} &= (x - 0.96)/0.03 && \text{Si } 0.93 \leq x \leq 0.96 \\ &= (0.98 - x)/0.02 && \text{Si } 0.96 \leq x \leq 0.98 \\ &= 0 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

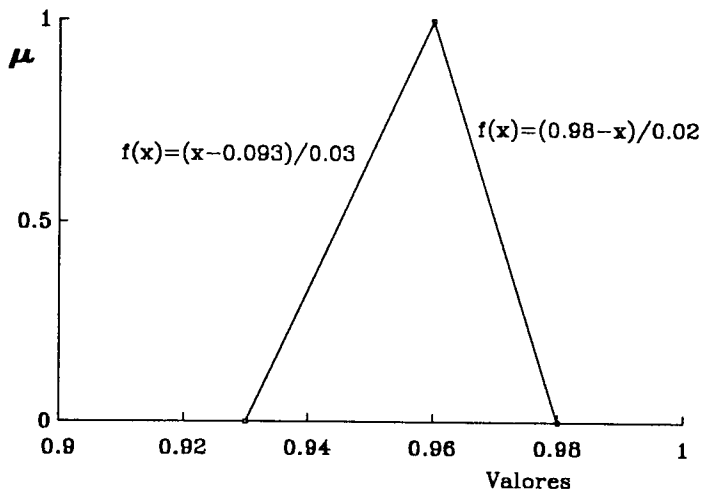


Figura 44.  $\underline{0.96} = [0.93 + 0.03x; 0.98 - 0.02x]$

$$\begin{aligned} \mu(800) &= (x - 790) / 10 && \text{Si } 790 \leq x \leq 800 \\ &= (810 - x) / 10 && \text{Si } 800 \leq x \leq 810 \\ &= 0 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

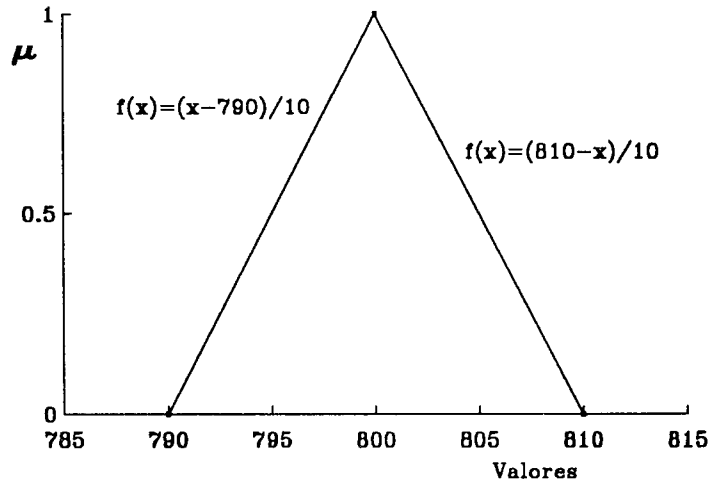


Figura 45.  $800 = [790 + 10x; 810 - 10x]$

$$\begin{aligned} \mu(640) &= (x - 630) / 10 && \text{Si } 630 \leq x \leq 640 \\ &= (650 - x) / 10 && \text{Si } 640 \leq x \leq 650 \\ &= 0 && \text{En otro caso} \end{aligned}$$

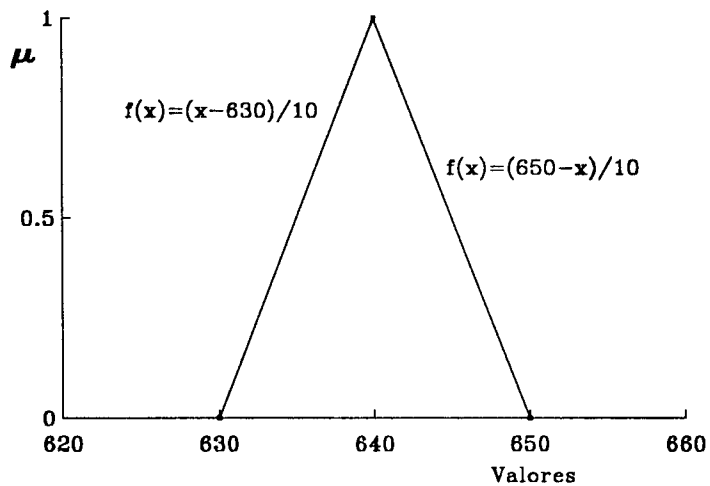


Figura 46.  $640 = [630 + 10x; 650 - 10x]$

Tomando las consideraciones y valores anteriores, el modelo auxiliar a resolver, según Delgado et al. [Del89], será de la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \lambda \\ \text{s. a.} & \lambda - 0.80 * P_1 = 800 \\ & \lambda - 0.96 * P_2 = 640 \\ & P_1 + P_2 \geq 625 - 62.5 * (1 - \alpha) \\ & P_1 + P_2 \leq 1250 + 125 * (1 - \alpha) \\ & P_1, P_2 \leq 625 + 31.25 * (1 - \alpha) \\ & P_1, P_2 \geq 100 - 5 * (1 - \alpha) \\ & \alpha \in (0, 1] \end{array}$$

Las soluciones obtenidas empleando los distintos índices de comparación estudiados en el apartado 4.5.4.1.2 del capítulo tercero serán:

#### 2.4.2.1.1.3.1.- Por funciones ordenadoras

Resolviendo los distintos modelos con la ayuda del software PROBO [Cad92], obtenemos las soluciones que a continuación se describen:

**2.4.2.1.1.3.1.1.- Con el primer índice de Yager**

$$\lambda (\alpha) = 974.70 + 26.70*\alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1 (\alpha) = 217.03 + 33.69*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2 (\alpha) = 346.47 + 27.80*\alpha \quad \text{MW}$$

Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	$P_T$ (MW)
0	974.70	217.03	346.47	563.50
0.25	981.38	225.45	353.42	578.87
0.5	988.05	233.87	360.38	594.24
0.75	994.73	242.29	367.33	609.62
1	1001.4	250.72	374.27	624.99

**2.4.2.1.1.3.1.2.- Con el tercer índice de Yager**

$$\lambda (\alpha) = 974.21 + 26.84*\alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 216.75 + 33.79*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 346.50 + 27.96*\alpha \quad \text{MW}$$

Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	$P_T$ (MW)
0	974.21	216.75	346.50	563.25
0.25	980.92	250.20	353.49	578.69
0.5	987.63	233.64	360.48	594.12
0.75	994.34	242.09	367.47	609.56
1	1001.05	250.54	374.46	625



2.4.2.1.1.3.1.3.- Índice de Adamo

- 1) Para una  $\alpha$  - preferencia determinada por el decisor a priori: 0.9

$$\lambda(\alpha) = 970.59 + 27.22*\alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 215.77 + 34.30*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 346.43 + 28.50*\alpha \quad \text{MW}$$

Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	P <sub>T</sub> (MW)
0	970.59	215.77	346.73	562.50
0.25	977.40	224.34	353.56	577.90
0.5	984.20	232.92	320.68	593.52
0.75	991.01	241.5	357.80	609.30
1	997.81	250.07	374.93	625

- 2) Idem para  $\alpha$  - preferencia de 0.3

$$\lambda(\alpha) = 958.00 + 26.85*\alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 214.92 + 35.63*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 345.48 + 28.50*\alpha \quad \text{MW}$$

Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	P <sub>T</sub> (MW)
0	958.00	214.92	345.48	560.40
0.25	964.71	223.81	352.74	576.55
0.5	971.43	232.71	359.99	597.70
0.75	978.14	241.61	367.24	608.85
1	984.85	250.55	373.93	624.48

2.4.2.1.1.3.1.4.- Índice promedio (González)

- 1) Para unos coeficientes fijados por el decisor a priori:  $t = 1$  y  $\beta = 0.9$

$$\lambda(\alpha) = 964.54 + 26.96*\alpha \quad \text{Ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 215.51 + 34.89*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 345.94 + 28.66*\alpha \quad \text{MW}$$

Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	$P_T$ (MW)
0	964.54	215.51	345.94	561.45
0.25	971.28	222.23	353.10	575.33
0.5	978.02	232.96	360.27	593.23
0.75	984.76	241.68	367.44	609.12
1	991.50	250.40	374.60	625

- 2) Idem para  $t = 1$  y  $\beta = 0.3$

$$\lambda(\alpha) = 979.13 + 26.77*\alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 217.36 + 33.24*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 346.79 + 27.61*\alpha \quad \text{MW}$$

Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	$P_T$ (MW)
0	979.13	217.36	346.79	564.15
0.25	985.82	225.67	353.69	579.36
0.5	992.51	233.98	360.59	594.57
0.75	999.21	242.29	367.49	609.78
1	1005.90	250.60	374.40	625

#### 2.4.2.1.2.- Consideraciones

Estudiando las distintas soluciones anteriores, el decisor tomará la más adecuada al caso, de acuerdo a sus características, y determinará las acciones a realizar según convenga a la situación intentando mejorar el servicio, o sea, optimizarlo según un criterio más razonable.

Se ha de tener en cuenta, como ocurre en este ejemplo, que en todos los casos se cumplan las restricciones tanto para el consumo,  $562.5 \leq P_T \leq 1375$  MW, como para las unidades de generación,  $95 \leq P_i \leq 657.25$  MW.

#### 2.4.2.1.3.- AHORRO

##### 2.4.2.1.3.1.- Ahorro del reparto difuso frente al de P. L.

(El más representativo)

Tomando como referencia los valores mayores y menores de los obtenidos en los apartados anteriores tendremos:

a) Para  $\lambda = 958 + 26.83 * \alpha$ , correspondiente al índice de Adamo 0.3 con  $P_1 = 214.92 + 35.62 * \alpha$  y  $P_2 = 345.48 + 29.01 * \alpha$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \text{Ahorro} &= \int_{214.92+35.62*\alpha}^{250} (800+0.80*P_1) dP_1 + \\
 &+ \int_{345+29.01*\alpha}^{375} (640+0.96*\alpha) dP_2 \\
 &= 64155.7575-62794.872*\alpha-911.4681*\alpha^2 \quad \text{pts/h}
 \end{aligned}$$

Lo que representa un ahorro para cualquier valor de  $\alpha$ , tal como:

$$\begin{array}{llll}
 \text{para } \alpha = 0 & 64155.7575 & \text{ptas/h} & = 1.539.738 \text{ ptas/día} \\
 \text{para } \alpha = 1 & 448.2084 & " & = 10.757 "
 \end{array}$$

b) Para  $\lambda = 979.13 + 26.77*\alpha$ , correspondiente al índice promedio  $t = 1$  y  $\beta = 0.3$  con  $P_1 = 217.36 + 33.24*\alpha$  y  $P_2 = 346.79 + 27.61*\alpha$ , tendremos:

$$\begin{aligned}
 \text{Ahorro} &= \int_{217.38+33.24*\alpha}^{250} (800+0.8*P_1) dP_1 + \\
 &+ \int_{346.79+27.61*P_2}^{375} (640+0.96*P_2) dP_2 = \\
 &= 60041-59477.4912*\alpha-807.8688*\alpha^2 \quad \text{pts/h}
 \end{aligned}$$

Lo que representa un ahorro para valores de  $\alpha < 0.996$ , de hasta 60.041 ptas/h (1.440.984 ptas/día).

#### 2.4.2.1.4.- Comentarios

Como se puede comprobar, en cualquiera de los casos tenemos un ahorro, más o menos importante según la situación. El decisor tomará el índice adecuado según su experiencia, conocimientos y grado de "optimismo - pesimismo", para intentar mejorar el servicio y, en todo caso, rentabilizarlo económicamente.

Por tanto, se siguen las conclusiones obtenidas en los ejemplos precedentes, y es por lo que creemos que aporta un notable interés la aplicación de los modelos presentados en esta Memoria, al menos, por sus condiciones económicas y técnico - profesionales.

#### 2.4.2.2.- Problema 5

Con el mismo enunciado que en el problema 4, vamos a introducir imprecisión en todos los valores, siendo difusos todos los coeficientes y, así mismo, con restricciones y holguras difusas.

El modelo sería:

Min  $\lambda$

$$\text{s.a. } \lambda - 0.80 * P_1 = 800$$

$$\lambda - 0.96 * P_2 = 640$$

$$P_1 + P_2 \leq 1250 + 125 * (1 - \alpha)$$

$$P_1 + P_2 \geq 625 - 62.5 * (1 - \alpha)$$

$$P_1 :: P_2 \leq 625 + 31.25 * (1 - \alpha)$$

$$P_1 :: P_2 \geq 100 - 5 * (1 - \alpha)$$

$$\alpha \in (0, 1]$$

$$\text{con: } 1250 = (1240, 1250, 1258) \quad 125 = (118, 125, 130)$$

$$5 = (3, 5, 6) \quad 31.25 = (30, 31.25, 32) \quad 100 = (95, 100, 105)$$

$$62.5 = (56.5, 62.5, 65.5) \quad 625 = (615, 625, 640)$$

#### 2.4.2.2.1.- Resolución mediante P. L. D.

##### 2.4.2.2.1.1.- Por funciones ordenadoras

Resolviendo para los distintos índices con la ayuda del software PROBO [Cad92] se obtienen las soluciones que a continuación se describen:

**2.4.2.2.1.1.1.- Con el primer índice de Yager**

$$\lambda (\alpha) = 975.43 + 26.70*\alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1 (\alpha) = 217.94 + 33.69*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2 (\alpha) = 347.22 + 27.82*\alpha \quad \text{MW}$$

Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	P <sub>T</sub> (MW)
0	975.43	217.94	347.22	565.16
0.25	982.10	226.37	354.18	580.55
0.5	988.78	234.78	361.13	595.91
0.75	995.45	243.21	368.08	611.29
1	1002.13	251.63	375.04	629.69

**2.4.2.2.1.1.2.- Con el primer índice de Yager**

$$\lambda (\alpha) = 974.75 + 26.85*\alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1 (\alpha) = 217.43 + 26.85*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2 (\alpha) = 347.07 + 27.96*\alpha \quad \text{MW}$$

Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	P <sub>T</sub> (MW)
0	974.75	217.43	347.07	567.50
0.25	981.46	225.88	354.06	579.92
0.5	988.17	234.33	361.05	595.39
0.75	994.88	242.77	368.04	610.81
1	1001.60	251.22	375.03	626.25

2.4.2.2.1.1.3.- Índice de Adamo

- 1) Para una  $\alpha$  - preferencia determinada por el decisor a priori de 0.9

$$\lambda (\alpha) = 971.24 + 27.22*\alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 216.59 + 34.30*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 347.11 + 27.96*\alpha \quad \text{MW}$$

Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	P <sub>T</sub> (MW)
0	971.24	216.59	347.11	563.70
0.25	978.05	225.16	354.24	579.40
0.5	984.85	233.74	361.36	595.10
0.75	991.66	242.31	368.49	610.80
1	998.46	250.89	375.61	626.50

- 2) Idem para una  $\alpha$  - preferencia de 0.3

$$\lambda (\alpha) = 962.36 + 25.86*\alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 220.70 + 35.60*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 350.20 + 29.00*\alpha \quad \text{MW}$$



Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	$P_T$ (MW)
0	962.36	220.70	350.20	570.90
0.25	969.08	226.90	357.47	587.07
0.5	975.79	238.50	364.70	603.20
0.75	982.51	247.40	371.95	619.35
1	988.22	256.30	379.20	635.50

#### 2.4.2.2.1.1.4.- Índice promedio (González)

1) Para unos parámetros determinados por el decisor:

$$t = 1 \quad y \quad \beta = 0.9$$

$$\lambda (\alpha) = 967.19 + 26.96*\alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 218.66 + 34.89*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 348.76 + 28.66*\alpha \quad \text{MW}$$

Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	$P_T$ (MW)
0	967.19	218.94	348.76	567.70
0.25	973.93	227.66	355.92	583.58
0.5	980.67	236.39	363.09	599.48
0.75	987.41	245.11	370.25	615.36
1	994.15	253.83	377.42	631.25

2) Idem para  $t = 1$  y  $\beta = 0.3$

$$\lambda (\alpha) = 978.58 + 26.77*\alpha \quad \text{ptas/MWh}$$

$$P_1(\alpha) = 216.68 + 33.24*\alpha \quad \text{MW}$$

$$P_2(\alpha) = 346.22 + 27.61*\alpha \quad \text{MW}$$

Dando valores a  $\alpha$  :

$\alpha$	$\lambda$	P1 (MW)	P2 (MW)	$P_T$ (MW)
0	978.58	216.68	346.22	562.90
0.25	985.27	224.99	353.12	578.11
0.5	991.96	233.30	360.02	593.32
0.75	998.66	241.61	366.93	608.54
1	1005.35	249.92	373.83	623.75

#### 2.4.2.2.2.- Consideraciones

Estudiando las distintas soluciones anteriores, el decisor tomará la más adecuada al caso, de acuerdo a sus características, y determinará las acciones a realizar según convenga a la situación intentando mejorar el Servicio, o sea, optimizarlo según un criterio "más razonable".

Se ha de tener en cuenta, como ocurre en este ejemplo, que en todos los casos se cumplan las restricciones tanto para el consumo,  $562.5 \leq P_T \leq 1375$  MW, como para las unidades de generación,  $95 \leq P_i \leq 657.25$  MW.

#### 2.4.2.2.3.- Ahorro

##### 2.4.2.2.3.1.- Ahorro del reparto difuso frente al de P. L.

Tomando como referencia los valores mayores y menores de los obtenidos en los apartados anteriores tendremos:

a) Para  $\lambda(\alpha) = 962.36 + 25.80\alpha$ , correspondiente al índice Adamo 0.3, con  $P_1(\alpha) = 220.70 + 35.60\alpha$  y  $P_2(\alpha) = 350.20 + 29\alpha$ , tendremos:

$$\text{Ahorro} = 53528.60 - 63075.103\alpha - 910.624\alpha^2 \quad \text{ptas/h}$$

Lo que representa un ahorro para valores de  $\alpha < 0.84$  de hasta 53.259 ptas/h, o lo que es lo mismo de 1.278.206 ptas/día.

b) Para  $\lambda = 978.58 + 26.77\alpha$ , correspondiente al índice promedio  $t = 1$  y  $\beta = 0.3$  en las restricciones con  $P_1 = 216.68 + 33.24\alpha$  y  $P_2 = 346.22 + 27.61\alpha$ , tendremos:

$$\text{Ahorro} = 61258.4 - 59201.12\alpha - 807.87\alpha^2 \quad \text{ptas/h.}$$

Lo que representa un ahorro para cualquier valor de  $\alpha$ , estando comprendido entre 1.470.202 ptas/día y 29.986 ptas/día.

#### 2.4.2.2.4.- Comentarios

Como se puede comprobar, en cualquiera de los casos tenemos un ahorro, más o menos importante según la situación. El decisor tomará el índice adecuado según su experiencia, conocimientos y grado de "optimismo - pesimismo", para intentar mejorar el servicio y, en todo caso, rentabilizarlo económicamente.

Por tanto, se siguen las conclusiones obtenidas en los ejemplos precedentes, y es por lo que creemos que aporta un notable interés la aplicación de los modelos presentados en esta Memoria, al menos, por sus condiciones económicas y técnico - profesionales.

## CAPÍTULO 5

### COMENTARIOS FINALES

## COMENTARIOS FINALES

En este trabajo hemos pretendido un nuevo enfoque que amplia el campo de las posibles soluciones al problema que se plantea de D.E.

Empleando los métodos que aquí se han expuesto, cualquier responsable de la toma de decisiones respecto al Servicio, puede:

- 1) Trabajar más comodamente empleando valoraciones difusas cuando el conocimiento sea impreciso.
- 2) Conocer las violaciones posibles que produce o se admite en las restricciones.
- 3) Reducir costes.

Como la reducción de costes es una de las funciones principales del D.E., creemos que utilizando una herramienta como la Programación Lineal Difusa se puede conseguir el objetivo que se persigue en todas las industrias: optimizar el Servicio. Para eso se deben tener en cuenta los factores de conocimiento y

"toma de riesgo" (grado de optimismo - pesimismo) de los responsables de hacer funcionar las instalaciones y mejorar el rendimiento económico de ellas.

Hemos indicado anteriormente, la aplicación correcta de los conocimientos de alto nivel económico no se verá reflejada en la utilización de sistemas de control o servicios si los responsables de hacerlos funcionar no entienden la mejora de lo que le presentan sobre lo que ellos saben en base a su experiencia y conocimientos.

Consideramos que el modelo propuesto es lo bastante flexible para que, teniendo en cuenta los condicionantes de política económica y laboral de la empresa, se incorporen los conocimientos "difusos" que tienen los responsables y operadores de los sistemas y se consiga un Servicio más eficaz y a menor coste.

### **CONCLUSIÓN**

Se ha podido comprobar a lo largo de los distintos modelos y ejemplos desarrollados que se pueden extraer algunas consecuencias de gran interés económico, energético y socio-laboral, como son:

- Ventajas:

a) Consideraciones socio - profesionales

Los responsables de los servicios y operadores saben que se tienen en cuenta sus conocimientos y experiencia, lo que implica una mayor predisposición a la mejora y optimización. Mejoras que considerarán como propias lo que, sin lugar a dudas, les representará una satisfacción personal - profesional.

b) Consideraciones energéticas

Se sabe que existe un enorme consumo energético. Pues bien, la forma de resolución del problema del D. E. propuesta en esta Tesis tiende a un menor consumo de combustible, entre otros factores. Se trata de trabajar de forma óptima, lo que conlleva a un cierto ahorro energético y a nadie se le oculta su importancia.

c) Consideraciones económicas

El sistema propuesto consigue que los gastos de la empresa disminuyan por este capítulo.



Normalmente en las ecuaciones del C. I. de las unidades de generación se tienen en cuenta, además del combustible, otros gastos como son los de personal, transporte, mantenimiento, generales, ... que también se reducirían al incluirse en las ecuaciones de costos de las unidades generadoras y, por lo tanto, los beneficios se mejorarían con esta forma de plantear y solucionar los problemas.

Este ahorro, como se ha visto en los distintos ejemplos, será más o menos importante según el problema a resolver.

Por todo lo expuesto anteriormente creemos que se aporta una mejoría a la resolución de uno de los problemas del D. E. en los Servicios Eléctricos, como se resume en las ventajas antes mencionadas.

## **FUTURO**

El área más importante de investigación futura deberá recoger con mayor intensidad aplicaciones reales con decisiones reales. Muchas de las cuales deberán ser resueltas por la P.M.D.

Con este trabajo abrimos un nuevo campo de actuación ya que los resultados obtenidos en nuestra Memoria nos hacen concebir la esperanza de conseguir la apertura de líneas de investigación en las que seguir desarrollando las aportaciones tan interesantes que presenta la P.M.D. a los diversos ámbitos de los Servicios Eléctricos, como son:

- generación
- mantenimiento (en sus diversos aspectos)
- expansión
- seguridad
- protecciones
- sistemas de control
- transporte
- ...

También será interesante apoyarse en un futuro próximo, para estudiar la Industria de Servicios Eléctricos, en las técnicas (en evidente evolución y expansión) que usan redes neuronales difusas, sistemas de control difuso, grafos difusos, etc., junto a los sistemas de busca aproximada como son los algoritmos genéticos y el simulated annealing.

Creemos se abren unas perspectivas muy interesantes para la investigación en el campo de la Ingeniería, en general y en la Eléctrica, en particular, como lo demuestra la evolución de trabajos publicados referidos al sector y de los que destacamos: [Hai91], [Wal92], [Sak93], [Xia93], [Fus94], [Kim94], [Ule94] y [Won94] entre otros.

## BIBLIOGRAFÍA

## BIBLIOGRAFIA

- [Ala95P] Jarmo T. Alander, An Indexed Bibliography of Genetic Algorithms in Power Engineering. Report Ser. Nº 94-1-Power, 1995.
- [Ala95S] Jarmo T. Alander, An Indexed Bibliography of Genetic Algorithms and Simulated Annealing: Hibrids and Comparisons. Report Series nº 94-1-SA, 1995.
- [Ada73] A. M. Adamson, J. F. Kenney and R. W. Moisan, Parametric Sensitivity Method for Establishing Optimum Long Range Generation Mix Proc. Am. Power Conf., 1973
- [Bai66] E. S. Bainbridge et als., Hidrothermal Dispatch with Pumped Storage. IEEE Trans, 1966.
- [Bal63] E. S. Bailey, C. D. Galoway and A. J. Wood, Generation Planning for Interconnected Systems. IEEE Trans. Special Publication, 1963.
- [Bel70] R. E. Bellman y L. A. Zadeh, Decision Making in a Fuzzy Environment, Man. Sci, 1970.
- [Bil73] R. Billinton, R. J. Ringle and A. J. Wood, Power System Reliability Calculations. The MIT Press, 1973.
- [Cad92] J. M. Cadenas y F. Herrera, Estudio de un sistema interactivo de ayuda a la decisión en problemas de optimización difusa. 2º Congreso Español de Tecnologías y Lógica Fuzzy, 1992.
- [Cam89] L. Campos y J. L. Verdegay, Linear Programming Problems and Ranking of Fuzzy Numbers, Fuzzy Sets and Systems, 1989.

- [Ber86] A. R. Bergen, Power Systems Analysis. Prentice-Hall, 1986.
- [Car62] M. J. Carpentier, Contribution a l'Etude du Dispatching Economique, Bulletin de la Société Française des Electriciens, 1962.
- [Car63] M. J. Carpentier, L'Optimisation de la Production a l'Electricité de France, Bulletin de la Société Française des Electriciens, 1963.
- [Car69] J. F. Carlin et al., Corporate Model of an Electric Utility. IEEE Spectrum, 1969.
- [Czy91] P. Czyak y R. Slowinski, Multiobjective Fuzzy Linear Programming. Interactive Fuzzy Optimization and Mathematical Programming. Springer Verlag, 1991.
- [Cha83] V. Chankong y Y. Haimés, Multiobjective Decision Making. Theory and Methodology, North-Holland Serie in System Science and Engineering. New York, 1983.
- [Cha83] S. Chanas, The use of parametric programming in fuzzy linear programming. Fuzzy Sets and Systems, 1983.
- [Cha91] S. Chanas, D. Kuchta y Z. Nowak, FPLP - A package for Fuzzy and Parametric Linear Programming Problems. Interactive Fuzzy Optimization and Mathematical Programming. Springer Verlag, 1991.
- [Che66] C. S. Chen, H. Gorden and W. Winters, Forecasting Peak Demand for Electric Utility. Management Sciences, 1966.

- [Che93] C. S. Chen and J. N. Sheen, Applying Fuzzy Mathematics to the Evaluation of Avoided Cost for a Load Management Program. Electric Power Systems Resarce, 1993.
- [Dan63] G. Dantzing, Linear Programming and Extensions. Princenton, N. J, Princenton University Press, 1963.
- [Deb88] A. S. Debs, Modern Power Systems Control and Operation. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [Des65] C. A. De Salvo and H. L. Smith, Automatic Transmission Planning with A-C Load Flow and Incremental Transmission Loss Evaluation. IEEE Trans, 1965.
- [Dha82] R. N. Dhar, Computer Aided Power Systems Operation and
- [Del83] M. Delgado, A Resolution Method for Multiobjective Problems. E. J. O. R., 1983.
- [Del85] M. Delgado, J. L. Verdegay y M. A. Vila, Solving the Biobjetive Linear Programming Problem: A Fuzzy Approach, Approximate Reasoning. E. S. North-Holland, 1985.
- [Del87] M. Delgado, J. L. Verdegay y M. A. Vila, Imprecise costs in Mathematical Programming Problems. Control and Cybernet, 1987.
- [Del89] M. Delgado, J. L. Verdegay y M. A. Vila, A general model for fuzzy linear programming. Fuzzy Sets and Systems, 1989.
- [Del90] M. Delgado, J. L. Verdegay y M. A. Vila, Relating different approaches to solve Linear Programming Problems with Imprecise Costs. Fuzzy Sets and Systems, 1990.
- [Del93] M. Delgado, F. Herrera, J. L. Verdegay y M. A. Vila, Post-optimality analisys on the membership function of a fuzzy linear programming problems. Fuzzy Sets and Systems, 1993.

- [Del94] M. Delgado, J. L. Verdegay y M. A. Vila, Fuzzy Numbers, Definitions and Properties. Mathware Soft Computing. 1994.
- [Dub78] D. Dubois y H. Prade, Operations on Fuzzy Numbers. Systems and Science, 1978.
- [Dub83] D. Dubois y H. Prade, Ranking of Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory. Inf. Sci., 1983.
- [Dub87] D. Dubois y H. Prade, The mean value a fuzzy number. Systems and Science, 1987.
- [Dys81] R. G. Dyson, Maximin Programming. Fuzzy Linear Programming and Multicriterio Decision Making. Journal of Operational Research Society, 1981.
- [Elg82] O. I. Elgerd, Electric Energy Systems Theory: An Introduction, 2ª Edición, McGraw-Hill, 1982.
- [Esp93] A. Espín, Una aproximación a la Optimización del Despacho Económico, en Servicios Eléctricos, mediante la Programación Matemática Difusa. III Congreso Español sobre Tecnología y Lógica Fuzzy, Santiago de Compostela, 1993.
- [Esp95] A. Espín, Optimización del Despacho Económico, en Servicios Eléctricos, Mediante la Programación Matemática Difusa. XI Congreso Chileno de Ingeniería Eléctrica, Punta Arenas 1995.
- [Esp95] A. Espín, Utilización de la Programación Lineal Difusa en el Despacho Económico. Jornadas Técnicas sobre Energía. Associació d'Enginyers Industrials de Catalunya, 1995.
- [Esp95] A. Espín, Aplicación de la Matemática difusa en los Servicios Eléctricos. Revista Técnica ELECTRA, (p.p.).

- [Fus94] W. Fushuan and H. Zhenxiang, Fault Section Estimation in Power Systems Using Genetic Algorithm and Simulated Annealing. Proc. CSEE, 1994.
- [FPC70] F. P. C., National Power Survey U. S. Government Printing Office, 1970.
- [Fre91] M. Fredizzi, J. Kacprzyk y J. L. Verdegay, A Survey of Fuzzy Optimization and Fuzzy Mathematical Programming. Interactive Fuzzy Optimization, 1991.
- [Fuk60] T. Fukao and T. Yamazaki, A Computational Method of Economic Operation of Hidro-Thermal Power Systems Including Flow Interconnected Hidro-Power Plants. Electrotechnical I. of Japan, 1960.
- [Gal69] C. D. Galloway, L. L. Garver and L. Kirmayer, Generation Transmission Planning and Economic Evaluation Power Systems Computation. Conference Rome, June 1969.
- [Gar90] M. C. García Aguado, Estudio de la Sensibilidad de las funciones de pertenencia en problemas de optimización con restricciones imprecisas. Tesis doctoral, Universidad de Granada, 1990.
- [Gar66] L. L. Garver, Effective Load Carrying Capability of Generating Units. IEEE Trans, 1966.
- [Ger90] B. Gerald, Optimization Overview with Economic Dispatch Examples. IEEE, April, 1990.
- [Gon88] A. González, Métodos subjetivos para la comparación de números difusos. Tesis doctoral, Universidad de Granada, 1988.
- [Gon90] A. González, A Studing of the Ranking Function Approach through Mean Values. Fuzzy Sets and Systems, 1990.



- [Gra71] E. G. Graham, G. E. Gunter and R. J. Ringle, Generation System Planning Models for Hidro-Thermal Systems. Am. Power Conf. Proce., 1971.
- [Gro86] C. A. Gross, Power System Analysis. John Wiley, 1986.
- [Gup72] P. C. Gupta and K. Yamada, Adaptative Short-Term Forecasting of Hurley Loads. IEEE Trans, 1972.
- [Hai93] T. Haida and Y. Akimoto, Genetic Algorithms Approach to Voltage Optimization. Proceedings of the 1st International Forum on Applications of Neural Networks to Power Systems. IEEE, 1993.
- [Hap80] H. H. Happ, Piecewise Methods and Applications to Power Systems, John Wiley, 1980.
- [Haw79] M. E. El-Hawary y G. C. Christensen, Optimal Economic Operation of Electric Power Systems, Academic Press, 1979.
- [Haz91] D. Hazarika and P. K. Bordoloi, Modified Loss Coefficients in the Determination of Optimum Generation Scheduling. IEEE Proc., 1991
- [Her92] F. Herrera, M. Kovács y J. L. Verdegay, Fuzzy Linear Programming Problems with Homogeneous Linear Fuzzy Functions. IPMU'92.
- [Hey86] G. T. Heydt, Computer Analysis Methods for Power Systems. Macmillan, 1986.
- [Kau85] A. Kaufmann and M. R. Gutta, Introduction to Fuzzy Arithmetic. Theory and Applications. N. York, 1985.
- [Kau92] A. Kaufmann and M. R. Gutta, Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, 1992.

- [Kha91] Khalid Mohamed-Nor and Abdul Halim, Efficient Economic Dispatch Algorithm for Thermal Unit Commitment. IEE Proc., 1991.
- [Kim95] H. Kim and K. Nara, A Method for Maintenance Scheduling Using GA with SA. Computers and Industrial Engineering, 1994.
- [Kir58] L. K. Kirchmayer, Economic Operation of Power Systems. John Wiley & Sons. New York, 1958.
- [Kov91] M. Kovács, An Optimun Cocept for Fuzzified Linear Programming Problems. Proccedins of GDOR, 1991.
- [Lai82] Y. J. Lai y C. L. Hwang, Interactive Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems, 1982.
- [Lai93] Y. J. Lai y C. L. Hwang, A decision Support Systems. Fuzzy Sets and Systems, 1993.
- [Kus86] G. L. Kusic, Computer-Aided Power Systems Analysis. Prentice-Hall, 1986.
- [Lai80] E. R. Laithaite and L. L. Freris, Electric Energy: Its Generation, Transmission and Use, McGraw-Hill, 1980.
- [Lat68] J. H. Latham, D. A. Normand and J. J. Voorhis, Probability Approach to Electric Utility Load Forecasting. IEEE Trans. 5 discussions, 1968.
- [Lij71] D. P. Lijensen, Adaptative Forecasting of Hourley Loads Based on Load Measurements and Weather Inf. IEEE Trans 1970.
- [Mil83] R. H. Miller, Power System Operation, 2ª Edición. McGraw-Hill, 1983.
- [Mir95] V. Miranda and L. M. Prodenca, Genetics Algorithms and Fuzzy Models: And Application to Gas and Electricity Distribution Planning under uncertainty. Proceedings of the Third International Workshop, 1995.

- [Gra71] E. G. Graham, G. E. Gunter and R. J. Ringle, Generation System Planning Models for Hidro-Thermal Systems. Am. Power Conf. Proce., 1971.
- [Gro86] C. A. Gross, Power System Analysis. John Wiley, 1986.
- [Gup72] P. C. Gupta and K. Yamada, Adaptative Short-Term Forecasting of Hurley Loads. IEEE Trans, 1972.
- [Hai93] T. Haida and Y. Akimoto, Genetic Algorithms Approach to Voltage Optimization. Proceedings of the 1st International Forum on Applications of Neural Networks to Power Systems. IEEE, 1993.
- [Hap80] H. H. Happ, Piecewise Methods and Applications to Power Systems, John Wiley, 1980.
- [Haw79] M. E. El-Hawary y G. C. Christensen, Optimal Economic Operation of Electric Power Systems, Academic Press, 1979.
- [Haz91] D. Hazarika and P. K. Bordoloi, Modified Loss Coefficients in the Determination of Optimum Generation Scheduling. IEEE Proc., 1991
- [Her92] F. Herrera, M. Kovács y J. L. Verdegay, Fuzzy Linear Programming Problems with Homogeneous Linear Fuzzy Functions. IPMU'92.
- [Hey86] G. T. Heydt, Computer Analysis Methods for Power Systems. Macmillan, 1986.
- [Kau85] A. Kaufmann and M. R. Gutta, Introduction to Fuzzy Arithmetic. Theory and Applications. N. York, 1985.
- [Kau92] A. Kaufmann and M. R. Gutta, Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, 1992.

- [Kha91] Khalid Mohamed-Nor and Abdul Halim, Efficient Economic Dispatch Algorithm for Thermal Unit Commitment. IEE Proc., 1991.
- [Kim95] H. Kim and K. Nara, A Method for Maintenance Scheduling Using GA with SA. Computers and Industrial Engineering, 1994.
- [Kir58] L. K. Kirchmayer, Economic Operation of Power Systems. John Wiley & Sons. New York, 1958.
- [Kov91] M. Kovács, An Optimun Cocept for Fuzzified Linear Programming Problems. Proccedins of GDOR, 1991.
- [Lai82] Y. J. Lai y C. L. Hwang, Interactive Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems, 1982.
- [Lai93] Y. J. Lai y C. L. Hwang, A decision Support Systems. Fuzzy Sets and Systems, 1993.
- [Kus86] G. L. Kusic, Computer-Aided Power Systems Analysis. Prentice-Hall, 1986.
- [Lai80] E. R. Laithaite and L. L. Freris, Electric Energy: Its Generation, Transmission and Use, McGraw-Hill, 1980.
- [Lat68] J. H. Latham, D. A. Normand and J. J. Voorhis, Probability Approach to Electric Utility Load Forecasting. IEEE Trans. 5 discussions, 1968.
- [Lij71] D. P. Lijensen, Adaptative Forecasting of Hourley Loads Based on Load Measurements and Weather Inf. IEEE Trans 1970.
- [Mil83] R. H. Miller, Power System Operation, 2ª Edición. McGraw-Hill, 1983.
- [Mir95] V. Miranda and L. M. Prodenca, Genetics Algorithms and Fuzzy Models: And Application to Gas and Electricity Distribution Planning under uncertainty. Proceedings of the Third International Workshop, 1995.

- [Nag80] I. J. Nagrath and D. P. Kothari, Modern Power Systems Analysis, Tata McGraw-Hill, 1980.
- [Neg75] C. V. Negoita and D. A. Ralescu, Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. Birkhouser, 1975.
- [Neg77] C. V. Negoita and D. A. Ralescu, On Fuzzy Optimization. Kybernetes, 1977.
- [Neg81] C. V. Negoita, The Current Interest in Fuzzy Optimization. Fuzzy Sets and Systems, 1981.
- [Orl77] S. A. Orlovsky, On Programming with Fuzzy Constraint Sets. Cybernetics, 1977.
- [Orl78] S. A. Orlovsky, Decision-Making with a Fuzzy Preference Relation. Fuzzy Sets and Systems, 1978.
- [Orl80] S. A. Orlovsky, On Formalization a General Fuzzy Mathematical Problems. Fuzzy Sets and Systems, 1980.
- [Pal91] C. Palanichamy and K. Srikrishna, Simple Algorithm for Economic. Power Dispatch Electric Power Systems Resarce, 1991.
- [Rin63] R. J. Ringle and D. D. Wilians, Economic Systems Operation Considering. Distribution of System Loads by the Method of Dinamic Programming. AIEE Trans, 5 discussions, 1963.
- [Rom89] H. Rommelfanger, R. Hanuscheck y J. Wolf, Linear Programing with Fuzzy Objectives. Fuzzy Sets and Systems, 1989.
- [Rom91] H. Rommelfanger, A PC-Supported Procedure for Solving Multicriteria Linear Programming Problems with Fuzzy Data. Interactive Fuzzy Optimization and Mathematical Programming. Springer Verlag, 1991.
- [Rwc93] Feasibility Study Committee of the Real-World Computing Program, The Master Plan for the Real-World Computing Program. Machinery and Information Industries Bureau (MITI), Japón, 1993.

- [Sak93] M. Sakawa, J. Utaka et al., Hot Parts Operating Schedule of Gas Turbines by Genetics Algorithms and Fuzzy Satisficing Methods. IEEE, 1993.
- [Ste78] M. J. H. Sterling, Power Control. Peter Peregrinus Ltd., 1978.
- [Ste43] M. J. Steinberg and T. M. Smith, Economy Loading of Power Plants and Electric Systems. John Wiley & Sons, 1943.
- [Ste82] W. D. Stevenson, Elements of Power Systems Analysis, 4ª Edición. McGraw-Hill, 1982.
- [Ste81] R. E. Steuer, Algorithms for Linear Programming Problems with Interval Objective Function Coeficients. Mathematics of Operations Research, 1981.
- [Tan74] H. Tanaka, T. Okuda y K. Asai, On Fuzzy Mathematical Programming. Journal of Cybernetics, 1974.
- [Tan76] H. Tanaka, T. Okuda y K. Asai, A Formulation of Fuzzy Decision Problems and its Applications to an Investment Problem, Kybernetes, 1976.
- [Tan84] H. Tanaka, H. Ichihashi y K. Asai, A Formulation of Fuzzy Linear Programming Problems Based a Comparison of Fuzzy Numbers. Control and Cybernetics, 1984.
- [Ule93] G. F. Uler, O, A, Mohammed and C. S. Koh, Design Optimization of Electrical Machines using Genetric Algorithms. IEEE Transactions on Magnetics, 2008-2011, 1993.
- [Ven84] V. Venikov, V. Zhuraviev y T. Filippova, Optimal Operation of Power Plants and Electric Systems. Mir, 1984.
- [Ver82] J. L. Verdegay, Problemas de Decision en Ambiente Difuso. Tesis doctoral, Universidad de Granada, 1982.

- [Ver82] J. L. Verdegay, Fuzzy Mathematical Programming. Fuzzy Information and Decision Processes, 1982.
- [Ver84] J. L. Verdegay, A Dual Approach to Solve the Fuzzy Linear Programming Problem. Fuzzy Sets and Systems, 1984.
- [Wad83] C. L. Wadhwa, Electrical Power Systems. John Wiley, 1983.
- [Wal84] Y. Wallach, Calculations and Programs for Power System Networks. Prentice-Hall, 1984.
- [Wal93] D. C. Walters, G. B. Shble and El-Hawary, Genetic Algorithm Solution of Economic-Dispatch with Valve Point Loading. IEEE Transactions on Power Systems, 1993.
- [Wer87] B. Werners, An Interactive Fuzzy Programming System. Fuzzy Sets and Systems, 1987.
- [Wil85] H. P. Wilians, Model Building in Mathematical Programming. John Wiley and Sons, 1985.
- [Won94] K. P. Wong and Y. W. Wong, Genetic and Genetic/Simulated Annealing Approaches to Economic Dispatch. Proceedings, Generation, Transmission and Distribution, 1994.
- [Woo84] A. Wood y B. Wollenberg, Power Generation Operation and Control. John Wiley, 1984.
- [Xia93] Y. Xiaodong, Application of Genetic Algorithms to Multiple Load Flow Solution Problem in Electrical Power Systems. In Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control, 1993.
- [Yag79] R. R. Yager, Mathematical Programming with Fuzzy Constraints and a Preference on the Objective. Kybernetes, 1979.

- [Zad75] L. Zadeh, The Concept of a Linguist Variable and its Applications to Approximate Reasoning. Information Sciences, 1975.
- [Zhu92] Q. Zhu y E. S. Lee, Comparison and Ranking of Fuzzy Numbers. Fuzzy Regression Analysis, 1992.
- [Zim74] H. J. Zimmermann, Optimization in Fuzzy Environments. Puerto Rico, 1974.
- [Zim76] H. J. Zimmermann, Description and Optimization of Fuzzy Systems. International Journal Of General Systems, 1976.
- [Zim78] H. J. Zimmermann, Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions. Fuzzy Sets and Systems, 1978.
- [Zim85] H. J. Zimmermann, Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems. Academic Publishers, Boston 1987.
- [Zim87] H. J. Zimmermann, Application of Fuzzy Set Theory to Mathematical Programming. Information Sciences, 1985.