

Métodos numéricos para la identificación no destructiva de
defectos
Tesis doctoral: Resumen

Guillermo Rus Carlborg
Departamento de Mecánica de Estructuras, Universidad de Granada.
grus@ugr.es tlf: +34958249431 fax: +34958249959

Director: Prof. Rafael Gallego Sevilla

Junio de 2001

Autor: Guillermo Rus Carlborg

Director: Rafael Gallego Sevilla

Copyright: 2001, Guillermo Rus Carlborg
ISBN: 84-699-6762-2
Depósito legal: GR 1866/01

Índice General

1	Introducción	7
1.1	Objetivos	7
1.2	Introducción	9
1.2.1	El problema	9
1.2.2	Qué medir	9
1.2.3	Concepto de problema inverso (PI)	9
1.2.4	Cómo medir	10
1.3	El método de los elementos de contorno (MEC)	11
1.4	Estado del arte	13
1.4.1	Derivación del gradiente	13
2	Contribuciones	17
2.1	Derivación Directa de la sensibilidad a la geometría	17
2.1.1	Conceptos preliminares	17
2.1.2	Derivación de la ecuación	18
2.1.3	Límite al contorno	21
2.1.4	Términos libres	22
2.2	Parametrización	24
2.2.1	Cómo y porqué parametrizar	24
2.2.2	Elección de parametrización	24
2.2.3	Parametrizaciones probadas	25
2.3	Tratamiento numérico	28
2.3.1	Discretización	28
2.3.2	\sqrt{r} en grietas con elementos de alto orden	28
2.3.3	Aplicación de la parametrización	29
2.3.4	Organización de las ecuaciones	30
2.4	Método de la Variable Adjunta	31
2.4.1	Concepto de Variable Adjunta	31
2.4.2	Problema adjunto	31
2.5	Sensibilidad a propiedades del material	34
2.5.1	Derivada de las ecuaciones	34
2.5.2	Tratamiento numérico	34
2.6	Derivada topológica	36
2.6.1	Ecuación integral de contorno	36
2.6.2	Implementación numérica	38
2.6.3	Procedimiento para la solución	38
2.7	La solución del Problema Inverso	40
2.7.1	Algoritmos de minimización	40
2.7.2	Implementación y control	42
2.7.3	Equivalencia entre el método Gauss-Newton y el de Ecuación de Observación	43

3 Ejemplos numéricos	45
3.1 Tests de la sensibilidad	45
3.1.1 Comparación con la solución analítica. Derivación directa	45
3.1.2 Comparación con solución numérica. Derivación directa	46
3.1.3 Parametrizaciones complejas	47
3.1.4 Sensibilidad por el método de la variable adjunta	51
3.2 Comprobación de algoritmos de optimización	55
3.2.1 Metodología	55
3.3 Problema Inverso de Identificación	57
3.3.1 Ejemplos de otros autores	57
3.3.2 Test de convergencia. Derivación directa	59
3.3.3 Uso del algoritmo BFGS con gradiente proporcionado por Variable Adjunta	63
3.4 Derivada Topológica	68
3.4.1 Verificación de la estimación de radio y residual	68
3.4.2 Algoritmos genéticos	69
3.5 Ejemplos de demostración	72
3.5.1 Detección de una inclusión subsuperficial	72
3.5.2 Identificación de la posición y longitud de una grieta de delaminación en una viga.	73
4 Conclusiones	75
4.1 Sobre el gradiente por derivación directa	75
4.2 Sobre la elección del algoritmo de optimización	75
4.3 Sobre el método de la variable adjunta	75
4.4 Sobre la convergencia del PI	76
4.5 Sobre la derivada topológica	76
4.6 Trabajos futuros	76

Agradecimientos:

La presente Tesis Doctoral ha sido posible gracias a la inestimable ayuda y colaboración de las personas que a continuación menciono y a quienes, por ello, expreso mi más vivo y sincero agradecimiento.

- *El Prof. D. Rafael Gallego Sevilla me ha guiado sabia y pacientemente durante todo el camino, ayudándome con todo interés y diligencia siempre que yo lo he necesitado.*
- *El Prof. D. Javier Suárez Medina abrió camino en esta asignatura y me alentó vivamente para continuarlo.*
- *El Prof. D. Juan José Granados Romera me asistió en mis atolladeros en más de una ocasión.*
- *Todo el Departamento, sin excepción, me ha apoyado diariamente, creando a mi alrededor un ambiente de camaradería y optimismo.*
- *Fuera de esta Escuela, el Prof. D. Francisco Chirino Godoy nos ha proporcionado generosamente útiles códigos fuente.*
- *Por último, estoy especialmente agradecido al Prof. Marc Bonnet por su contribución directa en un capítulo de esta tesis y por su paternidad de las ideas básicas, además de sus consejos en el ámbito científico.*

A mis padres.

Capítulo 1

Introducción

1.1 Objetivos

El propósito de este trabajo es el estudio de una clase de problemas inversos que surgen en mecánica, basándose sobre todo en el método de los elementos de contorno. El problema inverso de identificación significa que las incógnitas son una parte oculta de la geometría (cavidades internas, inclusiones, etc.) en lugar de desplazamientos y tensiones. Su búsqueda se realiza a partir de datos adicionales en forma de mediciones de la respuesta mecánica (detección no destructiva). El método de los elementos de contorno está especialmente bien condicionado gracias a su menor coste computacional y su buena adaptación a geometrías variables.

El punto central es una ecuación integral de sensibilidad respecto a la geometría, que proporcionará un gradiente útil para algoritmos de minimización de funciones de costo. Las principales contribuciones se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Revisión de las estrategias en problemas inversos, clarificando sus principales beneficios, problemas y áreas de aplicabilidad de cada uno (capítulo 1.4).
- Sensibilidad a la geometría por derivación directa. Esto se hace de un modo completamente analítico y genérico, antes de cualquier definición de parametrización o discretización (capítulo 2.1).
- Sensibilidad por el método de la variable adjunta. Este método se extiende a la obtención de la sensibilidad geométrica de una grieta en elasticidad armónica mediante una ecuación exclusivamente de contorno (capítulo 2.4).
- Derivada topológica. Se presenta un método basado en una estimación linealizada de la presencia de una cavidad circular o grieta lineal. Resulta ser extremadamente rápido en comparación con la solución de un problema directo completo aportando a pesar de ello precisión más que suficiente para propósitos de inicialización o incluso detección (ver capítulo 2.6).
- Comparación sistemática de los métodos de minimización más interesantes, con el objeto de vislumbrar el ámbito de cada uno desde un punto de vista práctico, dentro del marco de imposibilidad de extraer conclusiones puramente matemáticas en este sentido.
- Todos los métodos desarrollados se comprueban numéricamente en profundidad, incluyendo errores simulados, control de la distancia a la solución real, y medios para obtener mejor convergencia, para proporcionar técnicas listas para su uso. Se proponen y prueban numerosas parametrizaciones (ver capítulo 2.2; el capítulo 3 contiene un extracto de los resultados más reveladores).

Durante el desarrollo de todas estas ideas se crearon nuevas técnicas:

- Se encontró una fórmula de regularización muy simple para integrales hipersingulares que no requiere el cálculo de ninguna derivada y necesita un sólo bucle para su programación. Esto se desarrolla junto con una revisión en el apéndice B.
- Se desarrolló un álgebra programable para expresiones tensoriales con gran número de índices. Sus ventajas son la facilidad de programación y una reducción del riesgo de errores (ver apéndice C).
- El comportamiento tipo \sqrt{r} de las grietas se generaliza para elementos de orden superior en el capítulo 2.3.

Además, aparecieron resultados inesperados:

- Se encontró una estrecha relación entre los métodos de optimización y el planteamiento de las ecuaciones de observación en forma de una equivalencia entre ambos. Este lazo se puede ensanchar y hacer posible el intercambio de herramientas adjuntas de un método al otro. Esto se explica en el capítulo 2.7.3.

1.2 Introducción

1.2.1 El problema

La necesidad de detección no destructiva aparece en muchos campos de la ingeniería. El gran número existente de estructuras civiles, arquitectónicas o aeronáuticas nos ha dejado la necesidad de su mantenimiento sostenible, para aumentar su longevidad y seguridad. Un ejemplo crítico sería la detección de grietas por fatiga en una viga de alas de avión. La etapa de producción se beneficia directamente de la detección no destructiva en la etapa de control de calidad, especialmente en materiales avanzados y de alto rendimiento. Otros campos emergentes, como la biomecánica, la búsqueda de minas antipersonales o la geofísica tienen gran fuerza en muchas Universidades.

En la práctica, los métodos usuales son en gran medida empíricos y experimentales, requiriendo bien aproximaciones a soluciones analíticas simples o la interpretación visual de tomografías o curvas por parte de personas experimentadas. Algunos intentos prácticos de uso sistemático de algoritmos de identificación están dando resultados prometedores, pero la identificación es un buen ejemplo de problemas mal condicionados: ni la existencia ni la unicidad necesitan existir, y los resultados pueden ser muy sensibles a las medidas. Esto hace necesario encontrar métodos robustos.

Actualmente, los problemas principales, que definen la dirección de este trabajo son:

- la necesidad de cálculo rápido y preciso de gradientes respecto a la variación de la geometría,
- el escaso rango de convergencia de los algoritmos de optimización clásicos,
- falta de criterios para la elección de algoritmos, y
- para la inicialización de éstos,
- necesidad de una técnica de búsqueda global en un tiempo razonable.

Es interesante notar que en la multidisciplinariedad del tema hay muchos aspectos comunes con la optimización de estructuras y su diseño, siéndole aplicables muchas de las presentes contribuciones.

1.2.2 Qué medir

La detección de defectos dentro de un cuerpo se basa en el estudio de una magnitud que se propaga en su interior y se manifiesta en el contorno (ondas elásticas, acústicas, potencial eléctrico, térmico, o radiación X). Dentro de las ondas elásticas de nuestro tema, se puede distinguir la respuesta acústica (excitación y medición) de la emisión acústica (crecimiento de grietas).

1.2.3 Concepto de problema inverso (PI)

En elasticidad, un problema directo se puede definir como el cálculo de la respuesta (desplazamientos u y tensiones q) en un cuerpo definido por su geometría (Ω), propiedades mecánicas (k), modelo de comportamiento (operador L) y condiciones de contorno (valores conocidos de u y q). Como contraposición, un PI es aquél en el que no se conoce una parte de los datos anteriores, por ejemplo una parte de la geometría o sus propiedades mecánicas.

Si un problema directo genérico (no necesariamente elástico) se define como:

$$L(k)u = q \quad \text{en } \Omega$$

la naturaleza de la incógnita genera la siguiente clasificación de PI, por Kubo [74]:

- Identificación: una parte de la geometría (Ω). Éste es el problema aquí tratado.
- Modelización: las ecuaciones matemáticas que gobiernan el comportamiento (L).

- Reconstrucción: condiciones de contorno o iniciales.
- Acciones externas: q .
- Propiedades mecánicas: algunos parámetros que caracterizan el material (k).

Para encontrar esta información, se han de proveer datos suplementarios, en forma de mediciones extraordinarias de u o q en una zona accesible del espécimen.

1.2.4 Cómo medir

El uso de datos *estáticos* es, en general, menos útil que los dinámicos principalmente por la dificultad en su medición.

La medición de la respuesta *permanente* armónica se usa aquí principalmente por la reducción en la cantidad de datos a adquirir y el requerimiento exclusivamente de transductores de rango de frecuencia suficiente, en comparación con la dinámica *transitoria* (eco de pulsos), que se basa en la similitud de ondas, o en su forma simplificada, en la comparación de pico y retardo [132] [90] [110] [116].

Otra alternativa es el análisis *modal*, pero las frecuencias y modos propios muchas veces no están suficientemente influenciados por cambios pequeños de rigidez del espécimen, lo que lleva a inexactitudes y sensibilidad a errores. También dificulta el problema el posible cambio en el orden de las frecuencias propias ante grandes defectos. En el otro extremo, la respuesta de pequeños defectos puede verse muy afectada por la sola presencia de los transductores.

El análisis *permanente* se puede mejorar analizando la forma de onda mediante una descomposición armónica, siempre que la excitación también contenga múltiples armónicos. Esto permite obtener información muy rica usando pocos o un sólo actuador y receptor. Una limitación de este método es que no es apropiado para contemplar efectos unilaterales [110], por la no linealidad que implican, aunque el campo de aplicabilidad sigue siendo muy interesante, al permitir el análisis en servicio (en el que las cargas de servicio mantendrán abierta cualquier grieta).

En este punto se puede distinguir entre el análisis por técnicas iterativas de las respuestas exactas de problemas directos (nuestro caso), o la deducción de una función simplificada de respuesta a partir de la excitación (función de transición) que sustituye a la resolución de modelos directos [21] [20].

1.3 El método de los elementos de contorno (MEC)

En comparación con otros métodos numéricos, el MEC proporciona ventajas: no requiere remallados del dominio al modificar la geometría, implicando una fuente menos de imprecisiones numéricas; el alto número de iteraciones requiere de métodos de cálculo rápidos; en detección ultrasónica, el número de elementos para capturar las pequeñas ondas es muy alto.

Con objeto de establecer una nomenclatura, los problemas de elasticidad se definen aquí por las ecuaciones [102] [35] [94]:

Ecuaciones de equilibrio:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (1.1)$$

Ecuaciones de compatibilidad:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.2)$$

Ecuaciones constitutivas:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (1.3)$$

σ_{ij} Tensor de tensiones

ϵ_{ij} Tensor de deformaciones

u_i Desplazamientos

b_i Fuerzas de volumen

q_i Vector de tensiones en la normal n_j ($q_i = \sigma_{ij} n_j$)

δ_{ij} Delta de Kroenecker

λ, μ Constantes de Lamé, que pueden ser expresadas en función de:

E, ν Módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Estas ecuaciones se combinan en la ecuación de Navier,

$$\left(\frac{1}{1-2\nu} \right) u_{j,ji} + u_{i,jj} + \frac{1}{\mu} b_i = 0$$

que se puede expresar en forma integral en virtud de teoremas energéticos, en los cuales la solución compatible requerida viene dada en deformación plana 2D ($\epsilon_{33} = 0$) por soluciones fundamentales correspondientes al problema de la aplicación de una fuerza puntual en el polo, dirección e_k [36] [22] [4] [99]. Tras el proceso de paso al límite del polo hasta el contorno, la ecuación integral se torna, en el caso de ausencia de fuerzas de volumen:

$$c_k^i(\xi) u_k(\xi) + \int_{\Gamma} [q_k^i(\mathbf{x}; \xi) u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}; \xi) q_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.4)$$

donde \mathbf{x} es el punto de integración u observación, ξ el polo o punto de colocación, y las integrales tienen el sentido de valor principal de Cauchy (CPV: $\int_a^b CPV = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^b \right)$)

Va a ser importante estudiar en la derivada el proceso del paso al límite. En general, al acercarse el polo al contorno, los términos en $r_i = x_i - \xi_i$, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ de los núcleos serán singulares, es decir, de las formas $\log \frac{1}{r}$, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$. Una técnica para desarrollar este límite consiste en acercarse el

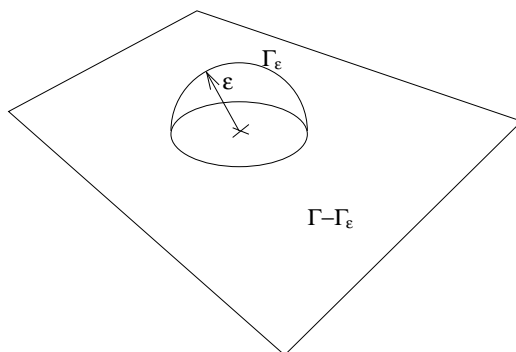


Figura 1.1: Artifice to make the limit to the boundary.

contorno al polo siguiendo una "bola artificial" infinitesimal (figura 1.1) y descomponiendo el límite en dos términos.

$$\int_{\Gamma} f d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma - \Gamma_{\epsilon}} f d\Gamma \right) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\Gamma_{\epsilon}} f d\Gamma \right)$$

Para un cálculo numérico eficiente es necesario recurrir a ciertas técnicas, como descomponer la integral en una parte regular numérica y otra singular analíticamente resoluble; aplicar la colocación fuera de los extremos de los elementos, o integración mediante cuadraturas especiales.

Por último, de esta formulación se puede derivar la llamada ecuación hipersingular (basada en la aplicación de la ley de Hooke a la anterior), principalmente útil para la modelización de grietas [30] [17] [10] [80] [42] [67] [45] [46] [103] [107] [32] [38] [23] [95] [134]. Se conviene la siguiente nomenclatura, donde la integral tiene sentido de Parte Finita de Hadamard:

$$c_k^i(\boldsymbol{\xi}) q_k(\boldsymbol{\xi}) + \oint_{\Gamma} [d_k^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) q_k(\mathbf{x}) - s_k^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) u_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.5)$$

Ambas ecuaciones, válidas para un continuo han de ser discretizadas para ser aproximadas por un conjunto finito de valores ($x_k = \sum \phi_{kj} x_j$, $u_k = \sum \phi_{kj} u_j$, $q_k = \sum \phi_{kj} q_j$). En el MEC se escribe la ecuación para tantos puntos y direcciones de colocación como incógnitas, con lo cual se obtiene un sistema de ecuaciones determinado de la forma,

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{H} = \{h_{ij}\} = \begin{cases} c_k^i(\boldsymbol{\xi}) \phi_{kj}(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} q_k^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \phi_{kj}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) & \text{para la } ubie \\ \int_{\Gamma} s_k^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \phi_{kj}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) & \text{para la } qbie \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{G} = \{g_{ij}\} = \begin{cases} \int_{\Gamma} u_k^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \phi_{kj}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) & \text{para la } ubie \\ c_k^i(\boldsymbol{\xi}) \phi_{kj}(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} d_k^i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \phi_{kj}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) & \text{para la } qbie \end{cases} \quad (1.8)$$

La aplicación de condiciones de contorno se materializa en la agrupación de las incógnitas de \mathbf{u} y \mathbf{q} en un nuevo vector \mathbf{v} , y la reordenación de las ecuaciones en,

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b} \quad (1.9)$$

1.4 Estado del arte

El estudio de PI en ingeniería ha sido un área de investigación de creciente actividad en las últimas dos décadas (Tanaka y Dulikravich [120]; Delaunay y Jarny [33]; Zabaras, Woodbury y Raynaud [136], y otros autores: [40], [26], [106], [7], y editores: [117], [118], [120], [121], [119]). Se han escrito buenas revisiones recientemente, Bui [25] y Stavroulakis [110]. Algunas revisiones generales fueron presentadas por Kubo [74] o Nishimura y Kobayashi [93].

El algoritmo ideal debería cubrir todos los rangos, para poder inicializarlo con una configuración completamente desconocida y terminar con la aproximación deseada (1: precisión). El modo de conseguir esto con un coste computacional asequible (2: efectividad) y una buena probabilidad de solución correcta (3: convergencia), es a través de varias etapas abarcando rango global hasta local sucesivamente.

Las técnicas usadas se pueden englobar según su planteamiento en dos (ver Rus y Gallego [101]):

1. Método de la Ecuación de Observación

Se basan en establecer la correspondencia entre valores medidos y computados,

$$F(x) = u^{exp}$$

x es el conjunto de parámetros.

u son los valores a comparar.

$()^{exp}$ se refiere a información experimental.

F es el operador implícito que relaciona u y x .

Esto se aborda mediante una linealización de la expansión en serie:

$$F(u_0) + \left. \frac{dF(u)}{dx} \right|_{x_0} \delta x \approx u^{exp} \quad (1.10)$$

de donde se extrae δx para actualizar x .

La resolución se puede hacer por diferencias finitas directamente de las variables u , o bien del operador, a nivel parcial F , o por diferenciación analítica, que es el más elaborado.

2. Teoría de optimización

Esta teoría se aplica definiendo un tanteo inicial x , y un funcional de costo a minimizar, en la mayoría de los casos $f = \frac{1}{2}R^T R$ donde $R = F(x) - u^m$ es el residuo. Esta definición se puede alterar adicionando un término $A(x)$, que define un conjunto de técnicas de regularización debidas a Tikhonov.

$$\min_x f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$$

Esta definición de funcional tiene interpretaciones probabilísticas, bien desarrolladas por Abdallah [1], Suzuki [115] o Menke [86].

Las variadas técnicas para llevar a cabo la minimización se describen en el capítulo 1.4 (ver figura 1.2). Se pueden encontrar revisiones generales en Menke [86], Dennis [64] [34] y Hansen [60].

1.4.1 Derivación del gradiente

Normalmente la solución de PI se basa en la minimización de un funcional de coste por múltiples técnicas, pero un algoritmo eficiente requiere un cálculo analítico del gradiente de este funcional ∇f o de los residuos $A = \frac{-\delta F(x)}{\delta x}$, en caso de que exista.

Global	Local	Esquema
	Técnicas para sistemas de ecuaciones no lineales	Ecuaciones de observación
	Algoritmos de optimización (Gauss–Newton, Quasi–Newton, Secantes, Mínimos cuadrados) Programación lineal y cuadrática Filtro de Kalman, filtro de proyección	Minimización de funcional de costo
Algoritmos genéticos y evolucionarios Redes neuronales; inferencia difusa Búsqueda estocástica Recocido simulado		
Derivada Topológica		Inicialización

Figura 1.2: Una clasificación de estrategias para problemas inversos.

- *Diferencias finitas* implica resolver al menos un problema directo a una distancia finita del original por cada parámetro. A parte del elevado costo, proporciona una precisión limitada.

La diferenciación finita se ha usado extensivamente para ecuaciones integrales de contorno regulares, singulares e incluso hipersingulares (Mellings y Aliabadi, 1993 [84], Bonnet, 1995 [13]; Matsumoto et al., 1993 [83]; Nishimura y Kobayashi, 1991 [92]; Kirsch, 1993 [69]). Bonnet (1995) [13] demostró que las fórmulas de diferenciación de integrales regulares se pueden aplicar a integrales singulares e hipersingulares, proporcionando una base matemática más firme a los trabajos precedentes. Mitra y Das [88] aplican algoritmos de minimización a un funcional, obteniendo el gradiente por diferencias finitas. Mellings y Aliabadi [84] y [85] usan una técnica similar pero con un gradiente implícito. Nishimura y Kobayashi [92], [93] usan planteamientos similares para grietas en 2D y 3D [91], obteniendo buenos resultados pero sin tener en cuenta por ejemplo elementos a un cuarto, y requiriendo medidas en todo el contorno. El uso directo de algoritmos de optimización con gradiente por diferencias finitas es el más extendido Bezerra y Saigal [9], elasticidad, Zabarar et al. [105], propiedades materiales, Mura et al. [89], cavidades, Kagawa [66] usa acústica mientras que Yao [133] usa elasticidad, Kassab et al. [68] detecta cavidades experimentalmente. Bryan et al. [24] reconstruye experimentalmente grietas por impedancia.

- La ventaja del *método de la variable adjunta* es que sólo requiere el cálculo de un segundo problema adjunto para obtener todo el gradiente del funcional, a costa de una mayor complejidad teórica. Este método lo aplicaron diferentes autores a diferentes problemas. Por ejemplo, Aithal y Saigal (1995) [3], Bonnet(1989) [11] para problemas térmicos bidimensionales; Bonnet (1995) [14] para problemas de identificación de obstáculos penetrables y duros en 3D; Meric (1995) [87] para optimización de formas en campos de potencial; Burczyński (1995) [27] aplicado a análisis de sensibilidad a forma estocástico; Lewis (1997) [76] estudió algunos aspectos numéricos de problemas generales; Bui (1999) [6] estudió la evaluación del plano contenedor de una grieta. Bonnet [11], [12], [13], [14], [17] ha contribuido proporcionando numerosas formulaciones teóricas e ideas. Su último trabajo se basa en la obtención de la derivada de una función de coste completa por la variable adjunta para contornos cerrados y después para grietas [16], [19], [18].
- La base de la *derivación directa* vino de la formulación de las variaciones de las ecuaciones de observación.

Zeng y Saigal (1992) [137] desarrollaron hasta nivel teórico una formulación para problemas de potencial basada en variaciones. Tanaka y Masuda (1989) [122] y Matsumoto y Tanaka (1990)

[82] hicieron trabajos similares mucho antes basándose en desarrollos de Taylor de los núcleos y densidades. También proponen un método de identificación que salva la minimización de funcionales, y consiste en establecer la igualdad directa de las ecuaciones de observación, aunque no se lograron buenos resultados debido a ciertas inconsistencias. Gallego y Suárez (1999) [114] desarrollaron la ecuación integral de contorno de las variaciones (δBIE) para el problema potencial 2D de un modo más riguroso, expandiendo en serie los núcleos y densidades, y siguiendo con un paso al límite riguroso, antes de la discretización, incluyendo términos olvidados en [137] y [122]. Siendo el primer intento en esta dirección, aún carece de algunos matices en derivada material y técnicas de optimización. Presentaron resultados usando el planteamiento de las ecuaciones de observación en [49], [50], [48] y [51].

- La *diferenciación automática* se realiza por software reciente especializado que procesa código fuente de FORTRAN y C++ (ver [39], [43]).

Capítulo 2

Contribuciones

2.1 Derivación Directa de la sensibilidad a la geometría

El objetivo es calcular la derivada de los desplazamientos o vectores de tensiones (agrupados en \mathbf{u}) respecto a la variación de la geometría ($\frac{d\mathbf{u}}{d\delta\mathbf{x}}$). Esta variación se describirá en principio mediante campo de variaciones $\delta\mathbf{x}$ en el sentido de que cada punto del contorno a variar se moverá $x'_i = x_i + \delta x_i(\mathbf{x})$. Más adelante se describirá este campo en términos de un conjunto finito de parámetros \mathbf{P} mediante una técnica llamada parametrización.

Los pasos a seguir para la definición de la derivada genéricamente, antes de parametrización son:

1. El punto de partida es la ecuación del integral del MEC (*ubie* y *qbie*).
2. El procedimiento comienza definiendo la sensibilidad o gradiente de toda la ecuación respecto a la geometría (ecuaciones de las variaciones $\delta ubie$ y $\delta qbie$). Ésta es la etapa más complicada, y se sintetiza en la figura 2.1.
3. Como en el MEC, esta última ha de ser llevada al contorno y discretizada, pasos en los que hay que observar ciertas precauciones relacionadas con el orden de singularidad.
4. Finalmente, las ecuaciones discretizadas se reordenan según las condiciones de contorno, las incógnitas ($\frac{d\mathbf{u}}{d\delta\mathbf{x}}$) y los datos (soluciones de u), hasta obtener $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{P}}$.

2.1.1 Conceptos preliminares

Es necesario representar las variaciones de las magnitudes geométricas básicas en función del campo de variaciones $\delta\mathbf{x}(\mathbf{x})$, partiendo de la figura 2.2, y utilizando la geometría de un diferencial $\delta\mathbf{x} \times \delta\mathbf{y}$ de la figura 2.3

Si δn_j es la variación de la normal a un contorno sometido a $\delta\mathbf{x}$, y δJ es la variación unitaria de ese contorno,

$$\begin{aligned}\delta r_l &= \delta x_l - \delta \xi_l \\ \delta n_j &= t_j t_l \epsilon_{lp} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\epsilon} (\delta x_p(\xi + t\epsilon) - \delta x_l(\xi)) \right) = t_j t_l \epsilon_{lp} \delta x_{p,m} t_m \\ \delta J &= t_l \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\epsilon} (\delta x_l(\xi + t\epsilon) - \delta x_l(\xi)) \right) = t_l \delta x_{l,m} t_m \\ \epsilon_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (tensor de permutación)}\end{aligned}$$

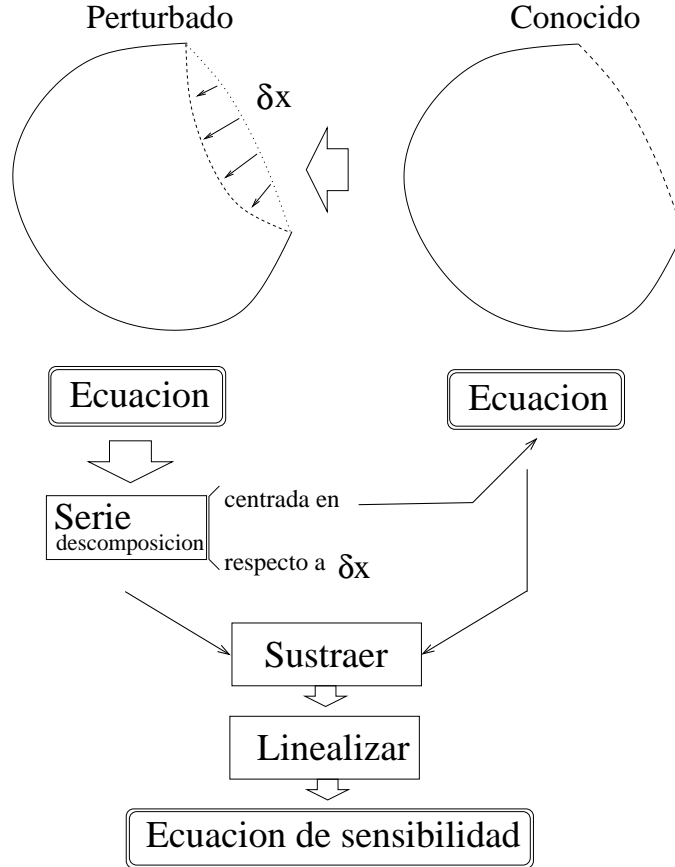


Figura 2.1: Proceso de obtención de la ecuación de las variaciones.

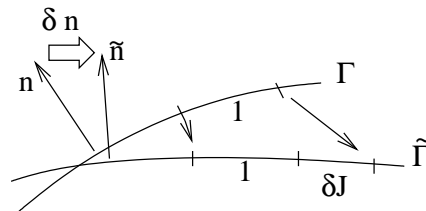


Figura 2.2: Sentido de las definiciones geométricas: $\tilde{n}_j(\mathbf{x}) = n_j(\mathbf{x}) + \delta n_j(\mathbf{x})$ $d\tilde{\Gamma} = [1 + \delta J]d\Gamma$

Las ecuaciones de contorno de partida son la de desplazamientos (*ubie*):

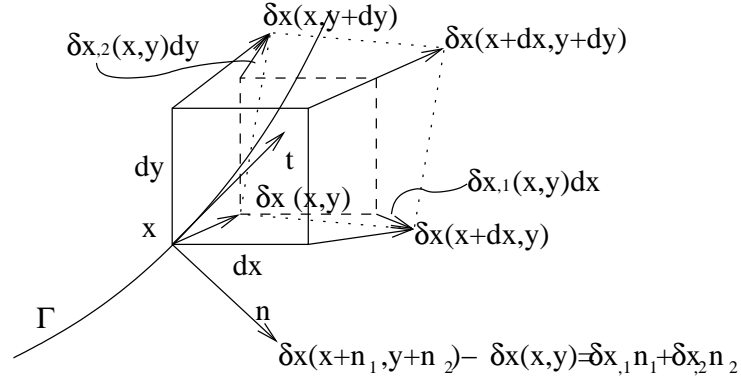
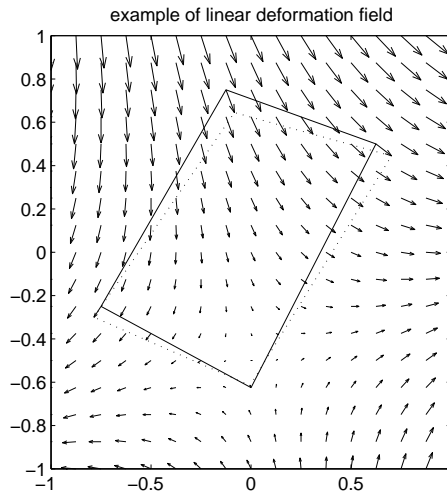
$$\delta_k^i u_k(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} q_k^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} u_k^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad \boldsymbol{\xi} \text{ interior.} \quad (2.1)$$

y la de tensiones (*qbie*):

$$\delta_k^i q_k(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) n_l(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} d_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) q_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad \boldsymbol{\xi} \text{ interior.} \quad (2.2)$$

2.1.2 Derivación de la ecuación

Ésta se hace mediante la definición de derivación como límite, $\delta\{eq\} = \lim_{\delta\mathbf{x} \rightarrow 0} (\{\tilde{eq}\} - \{eq\})$. El término $\{\tilde{eq}\}$ representa a la ecuación de contorno original $\{eq\}$ alterada por el campo infinitesimal $\delta\mathbf{x}$ (véase un ejemplo en la figura 2.4)

Figura 2.3: Interpretaciones geométricas diferenciales en las cercanías de ξ .Figura 2.4: Ejemplo del campo $\delta \mathbf{x}(\mathbf{x})$.

Para proceder a su sustracción hay que representar las ecuaciones en términos comunes, lo que se consigue expandiendo en serie cada término de la ecuación desconocida centrado en el conocido, y respecto a $\delta \mathbf{x}$.

Llegados a este punto se presenta la disyuntiva de hacer primero la expansión en serie infinitesimal y después el límite de ξ al contorno o viceversa (ver [13]). Se han probado ambos, dando resultados idénticos en caso de punto de colocación suave, pero el método más seguro es el primero, ya que se hace una expansión de términos sin singularidad.

ubie Las ecuaciones original y alterada de la *ubie* ($\{\tilde{e}q\}$ y $\{eq\}$) son:

$$\begin{aligned} \{\tilde{e}q\} : \quad & \tilde{u}_i(\xi) + \int_{\tilde{\Gamma}} [\tilde{u}_k \tilde{q}_k^i - \tilde{u}_k^i \tilde{q}_k] d\tilde{\Gamma} = 0 \\ \{eq\} : \quad & u_i(\xi) + \int_{\Gamma} [u_k q_k^i - u_k^i q_k] d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

Si la diferencia de los desplazamientos y tensiones son δu_k y δq_k ,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k &= u_k + \delta u_k \\ \tilde{q}_k &= q_k + \delta q_k \end{aligned}$$

mientras que los núcleos se han de expandir en serie (notando como *hot*. a los términos de orden

superior),

$$\tilde{u}_k^i \simeq u_k^i + \frac{du_k^i}{dx_m} \delta x_m + \frac{du_k^i}{d\xi_m} \delta \xi_m + hot. = u_k^i + \frac{du_k^i}{dx_m} \delta x_m - \frac{du_k^i}{dx_m} \delta \xi_m + hot. = u_k^i + u_{k,m}^i \delta r_m + hot.$$

puesto que $r_k = x_k - \xi_k$ y por la naturaleza radial de u_k^i .

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k^i &\simeq u_k^i + u_{k,m}^i \delta r_m + hot. \\ \tilde{q}_k^i &= \tilde{\sigma}_{jk}^i \tilde{n}_j(\mathbf{x}) \simeq q_k^i + \sigma_{jk}^i \delta n_j(\mathbf{x}) + \sigma_{jk,m}^i \delta r_m n_j(\mathbf{x}) + hot. \end{aligned}$$

La $\delta ubie$ tras la sustitución de las expansiones en $\{eq\}$ y su sustracción a $\{eq\}$ es:

$$\begin{aligned} \delta_k^i \delta u_k(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} [\sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \delta q_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ + \int_{\Gamma} [(\sigma_{jk,m}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) - u_{k,m}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q_k) \delta r_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ + (\sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q_k) \delta J(\mathbf{x}) \\ + \sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u_k(\mathbf{x}) \delta n_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\boldsymbol{\xi}$ interior

La derivada de la $qbie$ se hace de modo similar, teniendo en cuenta,

$$\begin{aligned} \tilde{n}_j(\boldsymbol{\xi}) &= n_j(\boldsymbol{\xi}) + \delta n_j(\boldsymbol{\xi}) \\ \tilde{d}_{jk}^i &= d_{jk}^i + d_{jk,m}^i \delta r_m + hot. \\ \tilde{s}_{jk}^i &= \tilde{s}_{jkl}^i \tilde{n}_l(\mathbf{x}) \simeq s_{jk}^i + s_{jkl}^i \delta n_l(\mathbf{x}) + s_{jkl,m}^i \delta r_m n_l(\mathbf{x}) + hot. \end{aligned}$$

Y resulta $\delta qbie$:

$$\begin{aligned} \delta_k^i \delta q_k(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} [d_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) \delta q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) n_l(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ + \int_{\Gamma} [(d_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) n_l(\mathbf{x}) u_k) \delta J(\mathbf{x}) \\ + (d_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q_k - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_l(\mathbf{x}) u_k) \delta n_j(\boldsymbol{\xi}) \\ + (d_{jk,m}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl,m}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_l(\mathbf{x}) n_j(\boldsymbol{\xi}) u_k) \delta r_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\ - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) u_k \delta n_l(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\boldsymbol{\xi}$ interior

Los núcleos han de ser derivados para la expansión en serie, y se pueden representar en función de la solución de los desplazamientos:

$$\begin{aligned} d_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \lambda \delta_{ij} u_{k,n}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mu (u_{k,j}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + u_{k,i}^j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \\ s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \lambda \delta_{ij} \sigma_{kl,n}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mu (\sigma_{kl,j}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \sigma_{kl,i}^j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \\ d_{jk,m}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \lambda \delta_{ij} u_{k,nm}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mu (u_{k,jm}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + u_{k,im}^j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \\ s_{jkl,m}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \lambda \delta_{ij} \sigma_{kl,nm}^n(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mu (\sigma_{kl,jm}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \sigma_{kl,im}^j(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \lambda \delta_{jk} u_{n,n}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mu (u_{j,k}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + u_{k,j}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \\ \sigma_{jk,l}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \lambda \delta_{jk} u_{n,nl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mu (u_{j,kl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + u_{k,jl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \\ \sigma_{jk,lm}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \lambda \delta_{jk} u_{n,nlm}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mu (u_{j,klm}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + u_{k,jlm}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})) \end{aligned}$$

$$u_k^i = \frac{1}{2\pi\mu} [\psi \delta_{ik} - \chi r_{,i} r_{,k}]$$

donde las funciones ψ y χ dependen de las velocidades de ondas S y P, c_s y c_p , y $K_\alpha(z)$ son las funciones de Bessel modificadas de orden α .

$$\begin{aligned}\psi &= K_0(z_s) + \frac{1}{z_s}[K_1(z_s) - \frac{c_s}{c_p}K_1(z_p)] \\ \chi &= [K_0(z_s) + \frac{2}{z_s}K_1(z_s)] - \frac{c_s^2}{c_p^2}[K_0(z_p) + \frac{2}{z_p}K_1(z_p)] \\ z_s &= \frac{i\omega r}{c_s}; z_p = \frac{i\omega r}{c_p}; i = \sqrt{-1}\end{aligned}$$

Se pueden definir los tensores siguientes para simplificar la notación:

$$\begin{aligned}e_{abij} &= \delta_{ai}\delta_{bj} + \delta_{aj}\delta_{bi} \\ e_{abcijk} &= \delta_{ai}\delta_{bj}\delta_{ck} + \delta_{aj}\delta_{bk}\delta_{ci} + \delta_{ak}\delta_{bi}\delta_{cj}\end{aligned}$$

Con esto, las derivadas de la solución fundamental en desplazamientos son:

$$\begin{aligned}u_b^a &= \frac{1}{2\pi\mu} [\psi\delta_{ab} - \chi r_{,a}r_{,b}] \\ u_{b,c}^a &= \frac{1}{2\pi\mu} [\psi'\delta_{ab}r_{,c} - \chi' r_{,a}r_{,b}r_{,c} - \chi e_{abij}r_{,i}r_{,j}r_{,c}] \\ u_{b,c,d}^a &= \frac{1}{2\pi\mu} [\psi''\delta_{ab}r_{,c}r_{,d} + \psi'\delta_{ab}r_{,c,d} - \chi'' r_{,a}r_{,b}r_{,c}r_{,d} - \chi' r_{,a}r_{,b}r_{,c,d} \\ &\quad - e_{abij}(\chi' e_{cdkl}r_{,i}r_{,k}r_{,j,l} + \chi r_{,icd}r_{,j} + \chi r_{,ic}r_{,j,d})] \\ u_{b,cde}^a &= \frac{1}{2\pi\mu} [\psi'''\delta_{ab}r_{,c}r_{,d}r_{,e} + (-r\psi'' + \psi')\delta_{ab}r_{,cde} - \chi'' r_{,a}r_{,b}r_{,c}r_{,d}r_{,e} \\ &\quad - \chi'' [e_{abcijk}e_{delm}r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l}r_{,m} + e_{abeijm}r_{,ic}r_{,j}r_{,d}r_{,m}] \\ &\quad - \chi' [e_{abcijk}(r_{,ie}r_{,b}r_{,kd} + r_{,i}r_{,j}e_{r,kd} + r_{,i}r_{,j}r_{,kde}) \\ &\quad + e_{abij}(r_{,i}r_{,j}r_{,c}r_{,de} + e_{delm}(r_{,im}r_{,j}r_{,l}))] \\ &\quad - \chi e_{abij}[r_{,ide}r_{,j}c + r_{,id}r_{,j}ce + r_{,ie}r_{,jcd} + r_{,jcde}r_{,i}]]\end{aligned}$$

donde $r_a = x_a - \xi_a$, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, y $r_{,a} = \frac{\partial r}{\partial x_a}$.

2.1.3 Límite al contorno

Las ecuaciones en el capítulo 2.1.2 se han escrito para puntos de colocación ξ interiores. Al igual que en el MEC, interesa realizar el paso de ξ al contorno Γ . Para ello se procede de un modo similar (véanse trabajos específicos del MEC [79], [55], [56] y [72]). Se descompone el contorno localmente en un sector circular S_ε alrededor de ξ , que generará términos libres, y se restará al contorno total $\Gamma - \Gamma_\varepsilon$. Esto define el Valor Principal de Cauchy si el integrando es de orden $\frac{1}{r}$ o la Parte Finita de Hadamard para $\frac{1}{r^2}$.

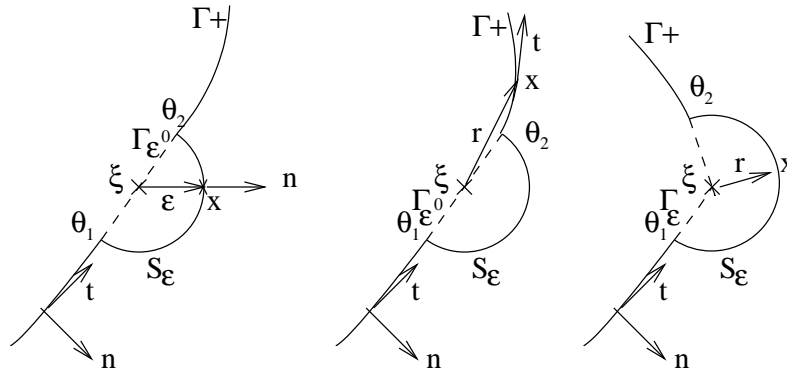


Figura 2.5: Artificio para el paso al límite. Izquierda: $\mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon$ Centro: $\mathbf{x} \in \Gamma_+$ después de Γ_ε Derecha: caso de contorno no suave.

2.1.4 Términos libres

Los límites de las integrales anteriores evaluadas a lo largo de S_ε generan términos libres. Para calcularlos, se representan los términos del integrando en función de sus valores en ξ , utilizando,

$$\begin{aligned} r_i &= rn_i \\ r_{,a} &= \frac{r_a}{r} = \delta_{a\alpha} n_\alpha \\ r_{,ab} &= \frac{1}{r} (\delta_{ab} - r_{,a} r_{,b}) = \frac{1}{r} \epsilon_{a\alpha} \epsilon_{b\beta} n_\alpha n_\beta \\ r_{,abc} &= \frac{-1}{r} e_{abca'b'c'} r_{,a'b'c'} = \frac{-1}{r^2} e_{abca'b'c'} \epsilon_{a'\alpha} \epsilon_{b'\beta} \delta_{c'\gamma} n_\alpha n_\beta n_\gamma \\ r_{,abcd} &= \frac{-1}{r} (r_{,abc} r_{,d} + e_{abca'b'c'} (r_{,a'b'c'} r_{,d} + r_{,a'b'c'} r_{,d})) \end{aligned}$$

donde, $n_i = (\cos \theta, \sin \theta)^T$ y $\delta_{a\alpha}$ es la delta de Kroenecker mientras que el tensor de permutación es $\epsilon_{a\alpha}$, y

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) &= u_i(\xi) + u_{i,j}(\xi) rn_j(\mathbf{x}) + hot. \\ q_i(\mathbf{x}) &= \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}) &= \sigma_{ij}(\xi) + \sigma_{ij,l}(\xi) rn_l(\mathbf{x}) + hot. \\ \delta u_i(\mathbf{x}) &= \delta u_i(\xi) + \delta u_{i,j}(\xi) rn_j(\mathbf{x}) + hot. \\ \delta q_i(\mathbf{x}) &= \delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) + \sigma_{ij}(\mathbf{x}) \delta n_j(\mathbf{x}) \\ \delta \sigma_{ij}(\mathbf{x}) &= \delta \sigma_{ij}(\xi) + \delta \sigma_{ij,l}(\xi) rn_l(\mathbf{x}) + hot. \\ \delta x_i(\mathbf{x}) &= \delta x_i(\xi) + \delta x_{i,j}(\xi) (x_j - \xi_j) + hot. \Rightarrow \\ \delta r_l &= \delta \xi_{l,m} r n_m + \delta x_{l,mn} r^2 n_m n_n + hot. \\ \delta x_{i,j}(\mathbf{x}) &= \delta x_{i,j}(\xi) + \delta x_{i,jk} r n_k + hot. \Rightarrow \\ \delta n_j(\mathbf{x}) &= t_j(\mathbf{x}) t_l(\mathbf{x}) \epsilon_{lk} \delta x_{k,m}(\xi) t_m(\mathbf{x}) + r t_j(\mathbf{x}) t_l(\mathbf{x}) \epsilon_{lk} \delta x_{k,mn}(\xi) t_m(\mathbf{x}) n_n(\mathbf{x}) + hot. \\ \delta J(\mathbf{x}) &= t_l(\mathbf{x}) t_m(\mathbf{x}) \delta x_{l,m}(\xi) + r \delta x_{l,mn}(\xi) t_l(\mathbf{x}) t_m(\mathbf{x}) n_n(\mathbf{x}) + hot. \end{aligned}$$

En el caso de que el contorno sea suave alrededor de ξ , las ecuaciones con este término libre sumado quedan,

dubie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_k^i \delta u_k(\xi) + \int_\Gamma [\sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}, \xi) \delta q_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ + \int_\Gamma [(\sigma_{jk,m}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) - u_{k,m}^i(\mathbf{x}, \xi) q_k) \delta r_m(\mathbf{x}, \xi) \\ + (\sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}, \xi) q_k) \delta J(\mathbf{x}) \\ + \sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) u_k(\mathbf{x}) \delta n_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

para $\xi \in \Gamma$

δqbíe:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_k^i \delta q_k(\xi) + \int_\Gamma [d_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) \delta q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) n_l(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ + \int_\Gamma [(d_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) n_l(\mathbf{x}) u_k) \delta J(\mathbf{x}) \\ + (d_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) q_k - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \xi) n_l(\mathbf{x}) u_k) \delta n_j(\xi) \\ + (d_{jk,m}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl,m}^i(\mathbf{x}, \xi) n_l(\mathbf{x}) n_j(\xi) u_k) \delta r_m(\mathbf{x}, \xi) \\ - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) u_k \delta n_l(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

para $\xi \in \Gamma_e$

En el caso de su aplicación a una grieta con $\Delta q = 0$, el dominio existe en ambos lados del contorno, con lo que no se efectúa el límite:

$$\begin{aligned}
& \delta_k^i \delta q_k(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} [d_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) \delta q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) n_l(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\
& \quad + \int_{\Gamma} [(d_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) n_l(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x})) \delta J(\mathbf{x}) \\
& \quad \quad + (d_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q_k - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_l(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x})) \delta n_j(\boldsymbol{\xi}) \\
& \quad + (d_{jk,m}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl,m}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_l(\mathbf{x}) n_j(\boldsymbol{\xi}) u_k(\mathbf{x})) \delta r_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\
& \quad \quad - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\boldsymbol{\xi}) u_k(\mathbf{x}) \delta n_l(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad \text{for } \boldsymbol{\xi} \in \Gamma_+ \tag{2.6}
\end{aligned}$$

con las siguientes redefiniciones,

$$\begin{cases} \Gamma = \Gamma_e \Rightarrow \\ \Gamma = \Gamma_+ \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} u \leftarrow u & \delta u \leftarrow \delta u \\ q \leftarrow q & \delta q \leftarrow \delta q \\ u \leftarrow \Delta u & \delta u \leftarrow \delta \Delta u \\ q \leftarrow 0 & \delta q \leftarrow 0 \end{cases}$$

Asímismo se han obtenido los valores de los términos libres que aparecen en la *ubie* para puntos de colocación angulosos:

$$\begin{aligned}
& \delta u_k(\boldsymbol{\xi}) FTDU1_k^i + u_k(\boldsymbol{\xi}) \delta x_{l,j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) FTDU2_{jkl}^i \\
& \quad + \int_{\Gamma} [\sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \delta q_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\
& \quad + \int_{\Gamma} [(\sigma_{jk,m}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) - u_{k,m}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q_k) \delta r_m(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \\
& \quad \quad + (\sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) n_j(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q_k) \delta J(\mathbf{x}) \\
& \quad \quad + \sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u_k(\mathbf{x}) \delta n_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Condiciones de derivabilidad

En la tabla siguiente se resume el orden de continuidad requerido para que exista la formulación anterior.

Componente	Necesita (en <i>ubie</i>)	Necesita (en <i>δubie</i>)	Necesita (en <i>qbie</i>)	Necesita (en <i>δqbie</i>)
u_k	$C^{0,\alpha}$	$C^{0,\alpha}$	$C^{1,\alpha}$	$C^{1,\alpha}$
q_k	acotado	acotado	$C^{0,\alpha}$	$C^{0,\alpha}$
σ_{kl}	—	$C^{0,\alpha}$	$C^{1,\alpha}$	$C^{1,\alpha}$
δx_l	—	$C^{1,\alpha}$	—	$C^{2,\alpha}$
δu_l	—	$C^{0,\alpha}$	—	$C^{1,\alpha}$
δq_l	—	$C^{0,\alpha}$	—	$C^{1,\alpha}$
$\delta \sigma_{kl}$	—	—	—	$C^{1,\alpha}$

donde $C^{1,\alpha}$ denota la condición de Hölder, con $0 \leq \alpha < 1$.

La razón por la que el orden de singularidad de la ecuación en variaciones no aumenta es que en el estado modificado se está desplazando tanto \mathbf{x} como $\boldsymbol{\xi}$ (derivada material). Los núcleos derivados en \mathbf{r} que presentan singularidad, multiplican a δr , que tiende a cero como $O(r)$ por ser $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$, reduciendo así en 1 el orden del integrando.

2.2 Parametrización

2.2.1 Cómo y porqué parametrizar

La variación de la geometría durante un paso en el proceso iterativo se representa siempre por una parametrización, que significa una representación de la geometría mediante un grupo de valores numéricos. Una representación genérica y exacta requeriría un número infinito de parámetros. Cuando se procede a una discretización, este número se reduce al de algunas coordenadas locales. Este conjunto daría una parametrización completa, implicando un número finito pero grande de datos.

En problemas inversos y de optimización hay dos puntos importantes a considerar: los algoritmos no tienen garantizada la convergencia, y ésta se deteriora rápidamente al aumentar el número de parámetros, con lo que en un principio interesa reducirlos; por otra parte, se puede mejorar la estabilidad y convergencia mediante la regularización, íntimamente ligada con la parametrización, y que se puede ver como la adición de información a priori.

2.2.2 Elección de parametrización

Hay una gran libertad en su elección e invención, a la vez que es un punto decisivo en la resolución del problema. Las más usuales son los splines (B-splines cúbicos, NURBS [5], o curvas de Bezier [130]). En problemas de identificación, la geometría se define a menudo mediante entidades geométricas simples (elipses, círculos [9], [133] [85]).

Un concepto más elaborado, presentado por Gallego y Suárez [48] consiste en definir un *campo de modificación* en lugar de la geometría. De este modo se elige una geometría inicial y se procede a su deformación mediante un campo definido por unos pocos parámetros (en principio fueron los 6 que definen una deformación lineal [100], [114]).

Otra estrategia más conceptual consiste en una *parametrización basada en la discretización*, que se puede entender como el agrupamiento de los parámetros nodales de una primera parametrización en otros parámetros nodales de una malla superimpuesta menos densa (véase [19] y [18]).

En este trabajo se opta por trabajar en ecuaciones de sensibilidad usando este campo de variaciones. De este modo se puede partir de una geometría de cualquier complicación sin complicar la parametrización. El campo vectorial de variaciones δx_i expresa el cambio de posición de cualquier punto material:

$$x'_i = x_i + \delta x_i$$

$$\delta x_i(\mathbf{x}) = \Theta_{ig} \delta P_g$$

donde Θ_{ig} es la matriz paramétrica y P_g es un vector de g parámetros.

Parámetros globales: grandes valores

En un paso k del proceso iterativo, hay dos modos de llegar a una configuración geométrica dada.

1.

$$\begin{aligned} x_i^k &= x_i^{k-1} + \delta x_i^k(\mathbf{x}^{k-1}) \\ \delta x_i^k &= \Theta_{ig}(\mathbf{x}^{k-1}) \delta P_g \end{aligned}$$

Se trata de la parametrización incremental, que olvida la configuración inicial y por tanto permite más variabilidad. En este trabajo se utiliza con la derivación directa. Tiene el inconveniente de que el valor acumulado de P_g no tiene una relación biyectiva con la geometría salvo en el caso de que la parametrización esté elegida como una dependencia no multiplicativa sino implícita, que haya sido obtenida por integración del campo de deformaciones, lo cual no es necesariamente posible (para dos iteraciones a y b , se cumple $\Theta(\mathbf{x}^a) = \Theta(\mathbf{x}^b)$).

2.

$$\begin{aligned}x_i^k &= x_i^0 + \Delta x_i^k(\mathbf{x}^0) \\ \Delta x_i^k &= \Theta_{ig}(\mathbf{x}^0) P_g\end{aligned}$$

En este caso, la variación se calcula desde el estado inicial, que llega a tomar valores grandes. Por otra parte, en este caso se conserva una relación biyectiva entre la geometría y el valor de P_g . Esta condición la hace más atractiva para algoritmos de optimización que usen actualización del Hessiano o simple búsqueda lineal, ya que dependen de la historia. Éste método se ha usado en este trabajo junto con la derivación por variable adjunta.

Precauciones

Un campo de variación no lineal puede afectar a las distancias relativas entre nodos, con lo cual el comportamiento \sqrt{r} en grietas puede dejar de serlo. Esto se puede corregir variando exclusivamente sus nodos extremos e interpolando el campo entre ellos.

El proceso de discretización puede resolverse de dos modos en referencia a la parametrización:

- $\delta x = \delta x(x)$ Éste método ha dado mejores resultados prácticos.
- $\delta x = \sum \delta x_i \phi_i$

2.2.3 Parametrizaciones probadas

Las primeras cinco se usaron con el cálculo de sensibilidades por derivación directa y su aplicación a problemas de identificación. Las restantes se utilizaron con el método de la variable adjunta, para sensibilidad y problemas inversos.

Campo de deformación lineal básico

El campo viene definido por un campo de deformaciones constantes (6 parámetros):

$$\delta x_{ig}^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_2 & x_1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 & x_2 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

donde $x = x^{real} - x^{cg}$ (x respecto del centroide), y el sentido de cada uno de los 6 parámetros es:

$$P_g = \begin{bmatrix} \delta x_1^{cg} \\ \delta x_2^{cg} \\ \delta \omega \\ \delta \epsilon_m \\ \delta \epsilon' \\ \delta \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Primera coordenada del centro del defecto} \\ \text{Segunda coordenada del centro del defecto} \\ \text{Ángulo de rotación} \\ \text{Dilatación esférica} \\ \text{Elongación horizontal} \\ \text{Distorsión} \end{bmatrix}$$

Parametrización de grietas

Idealmente, una grieta se debería de poder representar por una línea de orden superior al lineal, para poder formar una S . Además su variación sólo debería depender del desplazamiento de sus puntos perpendicularmente a la grieta, lo cual reduce el número de incógnitas, que por otra parte están mal condicionadas.

La utilización de series de Fourier en la parametrización tiene ventajas por ser capaz de representar cualquier forma, estableciendo un compromiso entre número de términos (léanse parámetros) y exactitud. Además se pueden incrementar los parámetros sin necesidad de alterar los anteriores. Tienen también buenas propiedades en referencia a la regularización [96].

La parametrización sugerida es la siguiente:

$$\Theta_{ig}^{crack} = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & \xi & 0 & -\sin \alpha \sin n\pi\xi \dots \\ 0 & 1 - \xi & 0 & \xi & \cos \alpha \sin n\pi\xi \dots \end{bmatrix}$$

donde ξ es una distancia normalizada entre las puntas A y B , $\xi = \frac{(x_1 - x_1^A)(x_1^B - x_1^A) + (x_2 - x_2^A)(x_2^B - x_2^A)}{(x_1^B - x_1^A)^2 + (x_2^B - x_2^A)^2}$ y $n = 1 \dots \infty$. $-\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ son los cosenos directores del segmento que define la distancia, como se observa en la figura 2.6.

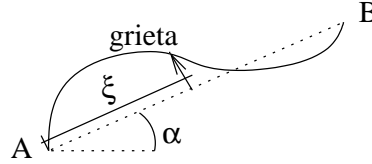


Figura 2.6: Definición de la parametrización para grietas.

Combinación de dos puntos

Se hace una combinación lineal proporcional a la distancia proyectada a dos puntos A y B .

$$\begin{aligned} \Theta_{ig}^{2point} &= \Theta_{ig}^{\delta A}(1 - \xi) + \Theta_{ig}^{\delta B}(\xi) \\ \Theta_{ig}^{2point} &= \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & (x_2 - x_2^B)(1 - \xi) \dots & \xi & 0 & (x_2 - x_2^B)(\xi) \dots \\ 0 & 1 - \xi & -(x_1 - x_1^B)(1 - \xi) \dots & 0 & \xi & -(x_1 - x_1^B)(\xi) \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde la distancia unitaria $A - B$, $\xi = \frac{(x_1 - x_1^A)(x_1^B - x_1^A) + (x_2 - x_2^A)(x_2^B - x_2^A)}{(x_1^B - x_1^A)^2 + (x_2^B - x_2^A)^2}$.

Parametrización polar de Fourier

La idea viene de la generalización de la parametrización polar por segmentos usada por otros autores.

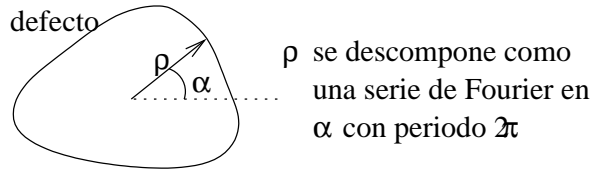


Figura 2.7: Definición de la parametrización polar de Fourier.

$$\Theta_{ig}^{crack} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos \alpha \cos n\alpha \dots \\ 0 & 1 & \sin \alpha \cos n\alpha \dots \end{bmatrix}$$

Campo cuadrático desacoplado

$$\Theta_{ig}^{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_1 x_2 & 0 & x_1^2 & 0 & x_2^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_1 x_2 & 0 & x_1^2 & 0 & x_2^2 \end{bmatrix}$$

Parametrización elemental para grietas

Esto se basa en el principio de que la variación de la grieta de n_n nodos se define por $n_n + 2$ parámetros, elegidos como en la figura 2.8.

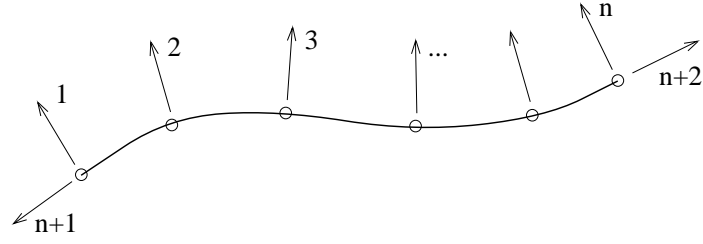


Figura 2.8: Parametrización elemental

$$\Theta_{ig} = \sum_g \phi_g n_i^+ \quad 1 \leq g \leq n$$

$$\Theta_{i,n+1} = \phi^a \nu_i, \Theta_{i,n+2} = \phi^b \nu_i \quad \text{para el crecimiento de las puntas}$$

donde n_i^+ y ν_i son la normal superior y el vector tangente, y ϕ_g es un conjunto de funciones de forma cuadráticas mientras que ϕ^a y ϕ^b son lineales.

Extensión a malla superpuesta

El número de parámetros g se puede reducir a los de los nodos h de una malla superpuesta más gruesa. Se puede encontrar una matriz rectangular que relacione ambas en sentido multiplicativo, lo cual simplifica en gran medida la implementación: $\delta x_{ih}^{par} = S_{hj} \Theta_{ij}^{modelo}$, de modo que $P_k^{nod} = S_{hj} T_{jk} P_h^{superpuesta}$, y su gradiente será asimismo $L_k^{nod} = S_{hj} T_{jk} L_h^{superpuesta}$.

$$\Theta_{ih}^{par} = \sum_j \phi_h^{par}(x_j) \Theta_{ij}^{model}(x_j)$$

$$\Theta_{i,tips}^{par} = \Theta_{i,tips}^{model} \quad \text{para los parámetros de crecimiento de puntas}$$

2.3 Tratamiento numérico

2.3.1 Discretización

Al igual que en el MEC (figura 2.9), el contorno se divide en una serie de elementos, y en cada uno, las siguientes variables se definen por un conjunto discreto de valores, tanto en la geometría conocida como la perturbada:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{n=1}^N \phi_n \mathbf{x}_n & \mathbf{u} &= \sum_{n=1}^N \phi_n \mathbf{u}_n & \mathbf{q} &= \sum_{n=1}^N \phi_n \mathbf{q}_n \\ \tilde{\mathbf{x}} &= \sum_{n=1}^N \phi_n \tilde{\mathbf{x}}_n & \tilde{\mathbf{u}} &= \sum_{n=1}^N \phi_n \tilde{\mathbf{u}}_n & \tilde{\mathbf{q}} &= \sum_{n=1}^N \phi_n \tilde{\mathbf{q}}_n \end{aligned}$$

ϕ_n Funciones de forma.

n Índice para nodo elemental, de orden $N - 1$ ($n = \{1, 2, 3\}$ para elementos cuadráticos, $N = 2$).

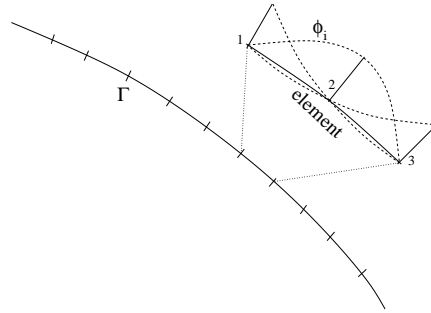


Figura 2.9: Discretización de elementos.

En realidad la geometría perturbada $\tilde{\cdot}$ nunca se discretiza, sino sólo su variación:

$$\delta \mathbf{u} = \sum_{n=1}^N \phi_n \delta \mathbf{u}_n \quad \delta \mathbf{q} = \sum_{n=1}^N \phi_n \delta \mathbf{q}_n$$

De las dos alternativas para definir $\delta \mathbf{x}$ la segunda ha proporcionado mejores resultados:

$$\delta \mathbf{x} = \sum_{n=1}^N \phi_n \delta \mathbf{x}_n \quad \text{where} \quad \delta \mathbf{x}_n = \Theta_{ig}(\mathbf{x}_n) P_g$$

o

$$\delta \mathbf{x} = \Theta_{ig}(\mathbf{x}) P_g \quad \text{where} \quad \mathbf{x} = \sum_{n=1}^N \phi_n \mathbf{x}_n$$

Para elementos de orden superior se ha utilizado el siguiente algoritmo recursivo basado en polinomios de Lagrange para obtener las funciones de forma:

$$\phi_i = \prod_{i \neq j} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad \frac{d\phi_i}{d\xi} = \sum_{i \neq k} \prod_{i \neq k, i \neq j} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \frac{1}{\xi_i - \xi_k}$$

2.3.2 \sqrt{r} en grietas con elementos de alto orden

Se prueba que es posible encontrar una colocación de nodos en un elemento de vértice de grieta de cualquier orden que represente correctamente el comportamiento \sqrt{r} de desplazamientos y tensiones. La condición es que el elemento sea recto.

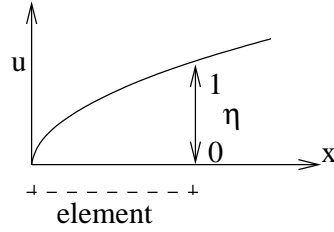


Figura 2.10: Definiciones para el elemento de punta de grieta.

En este caso, los desplazamientos dependen asintóticamente de la distancia a la punta x local como $u = c\sqrt{x}$. Por otra parte su discretización se realiza con $u = \sum \phi_i(\xi)u_i$.

Si somos capaces de definir una variable local η que varíe de $\eta = 0$ en la punta a $\eta = 1$ al final del elemento, y que cumpla $x = L\xi^2$, y además usamos un conjunto de funciones de forma que sean capaces de modelizar la identidad (alguna combinación de $\phi = \eta$), substituyendo obtenemos la expresión

$$u = c'\eta = c\sqrt{x}$$

. La relación deseada $x = L\eta^2$ se obtiene simplemente espaciando los nodos regularmente según η . Por ejemplo, en un elemento cuadrático, el nodo central es $\eta = 0.5$, situado físicamente en $x = L0.5^2 = 0.25L$, que coincide con la definición de elemento a un cuarto. En un elemento de alto orden n , las coordenadas de los nodos intermedios son $\xi = [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}]$ o $x = L[\frac{1}{n^2}, \frac{2^2}{n^2}, \dots, \frac{(n-1)^2}{n^2}]$.

Substituyendo, las componentes modelizadas de los desplazamientos/tensiones son:

$$u = \{1, \sqrt{x}, x, x^{\frac{3}{2}}, x^2, \dots\}$$

que coinciden con la expansión en serie del comportamiento en la punta de la grieta. La bondad de esta formulación ha sido probada con excelentes resultados.

2.3.3 Aplicación de la parametrización

Si se substituye la parametrización deseada (capítulo 2.2), $\delta x_i = \Theta_{ig}\delta P_g$ se obtienen las siguientes expresiones dependientes del vector de parámetros δP_g :

$$\delta r_i = (\Theta_{ig}(\xi) - \Theta_{ig}(x))\delta P_g; \quad \delta n_i = t_i t_m t_l \epsilon_{mk} \Theta_{kg,l} \delta P_g; \quad \delta J = t_k t_l \Theta_{lg,k} \delta P_g$$

Substituyendo 2.8 en 2.6 y 2.6, los sistemas de ecuaciones se pueden escribir como *δubie*:

$$\begin{aligned} c_k^i \delta u_k(\xi) + \int_{\Gamma} [\sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}, \xi) \delta q_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) &= {}^g U_g^i(\xi) \delta P_g \\ {}^g U_g^i(\xi) \delta P_g &= - \int_{\Gamma} [(\sigma_{jk,m}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) - u_{k,m}^i(\mathbf{x}, \xi) q_k) \delta r_m(\mathbf{x}, \xi) \\ &\quad + (\sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}, \xi) q_k) \delta J(\mathbf{x}) \\ &\quad + \sigma_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) u_k(\mathbf{x}) \delta n_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

δqbie:

$$\begin{aligned} c_k^i \delta q_k(\xi) + \int_{\Gamma} [d_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) \delta q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) n_l(\mathbf{x}) \delta u_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) &= {}^g Q_g^i(\xi) \delta P_g \\ {}^g Q_g^i(\xi) \delta P_g &= - \int_{\Gamma} [(d_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) n_l(\mathbf{x}) u_k) \delta J(\mathbf{x}) \\ &\quad + (d_{jk}^i(\mathbf{x}, \xi) q_k - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \xi) n_l(\mathbf{x}) u_k) \delta n_j(\xi) \\ &\quad + (d_{jk,m}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) q_k(\mathbf{x}) - s_{jkl,m}^i(\mathbf{x}, \xi) n_l(\mathbf{x}) n_j(\xi) u_k) \delta r_m(\mathbf{x}, \xi) \\ &\quad - s_{jkl}^i(\mathbf{x}, \xi) n_j(\xi) u_k \delta n_l(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.3.4 Organización de las ecuaciones

La discretización de cualquiera de las ecuaciones anteriores siguiendo los criterios del MEC (donde \mathbf{u} , \mathbf{q} , \mathbf{H} , \mathbf{G} , \mathbf{v} , \mathbf{A} y \mathbf{b} tienen idéntico sentido), y la posterior ordenación según las condiciones de contorno (donde las variaciones de valores prescritos son cero y por tanto igualmente prescritos) proporcionan las siguientes expresiones matriciales,

$$\mathbf{H}\delta\mathbf{u} - \mathbf{G}\delta\mathbf{q} = \Delta\delta\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\delta\mathbf{v} = \Delta\delta\mathbf{P}$$

donde Δ es una matriz que agrupa al resto de las integrales, multiplicadas por el vector de parámetros factor común $\delta\mathbf{P}$.

Las soluciones del último sistema se puede hacer para cada columna de Δ y agrupadas en \mathbf{J} (jacobiano), de modo que cumpla el objetivo deseado:

$$\delta\mathbf{v} = \mathbf{J}\delta\mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \{j_{ig}\} = \frac{dv_i}{dP_g}$$

Desde el punto de vista computacional, este proceso es muy barato ya que el sistema A se encuentra previamente factorizado (solución del problema directo).

2.4 Método de la Variable Adjunta

El objetivo es encontrar el gradiente de un funcional de coste J usado para la identificación de geometrías, por ejemplo, respecto de la variación de la geometría por un conjunto de parámetros P ($\frac{dJ}{dP}$). La principal ventaja de este método es que no hay necesidad de calcular explícitamente ningún gradiente de \mathbf{u} o \mathbf{q} . $\frac{dJ}{dP}$ se obtiene solucionando dos problemas directos, el original y un adjunto definido de tal manera que una serie de simples operaciones darán directamente el gradiente deseado.

Con el propósito de minimizar la diferencia entre un conjunto de datos calculados (tensiones y desplazamientos q_i, u_i) y experimentales (q_i^{exp}, u_i^{exp}) se puede definir una función objetivo genérica,

$$J(\Gamma_c) = \int_0^T \int_{\Gamma_q} \varphi_u d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_u} \varphi_q d\Gamma dt + \int_{\Gamma} \psi d\Gamma \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_u &= \begin{cases} \frac{1}{2}(u_i^{exp} - u_i)^2 & \Gamma^{m_u} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \varphi_q &= \begin{cases} \frac{1}{2}(q_i^{exp} - q_i)^2 & \Gamma^{m_q} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

La transformación del dominio x se puede definir mediante $\tilde{x}_i = x_i + \delta x_i(\mathbf{x})$, con $\delta x_i = \Theta_{ig} P_g$, un campo de variaciones y con un vector P_g de g parámetros. La derivada material de cualquier magnitud se puede definir como $\delta f_i = \frac{\partial f_i}{\partial P_g} \delta P_g + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j$.

2.4.1 Concepto de Variable Adjunta

M. Bonnet en [16] proporciona el desarrollo completo y teórico del proceso, así como [28]. Se presentan dos planteamientos para la demostración del método a partir de un problema discretizado $A_{ij}(P)u_j = b_i$, en lugar de continuo $(c_1^2 - c_2^2)u_{i,jj} + c_1^2 u_{j,ij} - \rho \ddot{u}_j = 0$ por razones de simplicidad.

Si partimos del funcional de costo que depende directamente de u e indirectamente de P , $J(P) = J(u(P), P)$ y buscamos sus derivada respecto a P $\delta J = J_{,u_i} \delta u_i + J_{,P} \delta P$ podemos definir otro problema con el mismo comportamiento (igual matriz de sistema) $A_{ij}(P)u'_j = b'_i$.

Las siguientes multiplicaciones son equivalentes al teorema de Betti en el continuo. Si derivamos el problema,

$$A_{ij}(P)u_j = b_i \quad \Rightarrow \quad A_{ij}\delta u_j + \delta A_{ij}u_j = 0$$

y multiplicamos un estado derivado, con el objetivo de evitar el cálculo explícito de δu_i ,

$$\left. \begin{aligned} u'_i[A_{ij}\delta u_j + \delta A_{ij}u_j = 0] \\ \delta u_i[A_{ij}(P)u'_j = b'_i] \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_i \delta A_{ij}u'_j = -b'_i \delta u_i$$

Con la elección particular de $b'_i = -J_{,u_i}$, podemos sustituir esta expresión en $\frac{\partial J}{\partial P}$, dando

$$\delta J = u_i \delta A_{ij}u'_j + J_{,P} \delta P$$

En esta expresión ni u_i ni u'_i dependen de P , por lo cual sólo es necesario calcular un sólo estado adjunto.

2.4.2 Problema adjunto

Para completar el problema, $u_i \delta A_{ij}u'_j$ se puede tratar (aplicando los teoremas de Gauss y desarrollando los términos en las puntas de grieta [16]), para convertir a δA_{ij} en una integral de

contorno.

$$\begin{aligned}
\delta L &= \int_{\Gamma_c^+} (\delta x_k n_k) \int_0^T [[\sigma_{ij} u'_{i,j} - \rho \dot{u}_i \dot{u}'_i]] dt d\Gamma \\
&\quad - \frac{1}{\mu} \int_{\delta\Gamma_c} (\delta x_k \nu_k) \int_0^T \{ (1-\nu)[K_I K'_I + K_{II} K'_{II}] + K_{III} K'_{III} \} dt d\Gamma \\
&\quad - \frac{1-\nu}{\mu} \int_{\delta\Gamma_c} (\delta x_k n_k) \int_0^T [K_I K'_{II} + K_{II} K'_I] dt d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_c} [\psi_i \delta x_i + \psi (\delta x_{i,i} - n_i \delta x_{i,j} n_j)] d\Gamma_c
\end{aligned}$$

donde $\delta\Gamma_c$ es la punta de grieta, $[[f]] = f(x^+) - f(x^-)$ es la discontinuidad de f en Γ , n_i es la normal en Γ y Σ_ε . ν_i y N_i quedan explicados en la figura 2.11. donde el problema adjunto (') se

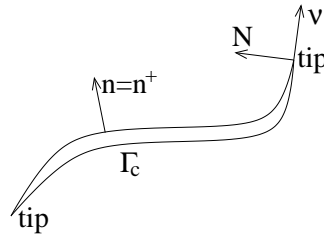


Figura 2.11: Algunas definiciones de la geometría

define por el comportamiento y los valores prescritos siguientes:

$$\begin{aligned}
(c_1^2 - c_2^2)u'_{i,jj} + c_1^2 u'_{j,ij} &= \rho \ddot{u}'_i && \text{con,} && (2.12) \\
q'_i &= \begin{cases} (u_i^{exp} - u_i) & \Gamma^{m_u} \\ 0 & \Gamma_q / \Gamma^{m_u} \end{cases} \\
u'_i &= \begin{cases} (q_i - q_i^{exp}) & \Gamma^{m_q} \\ 0 & \Gamma_u / \Gamma^{m_q} \end{cases} \\
q'_i &= 0 \text{ en } \Gamma_c
\end{aligned}$$

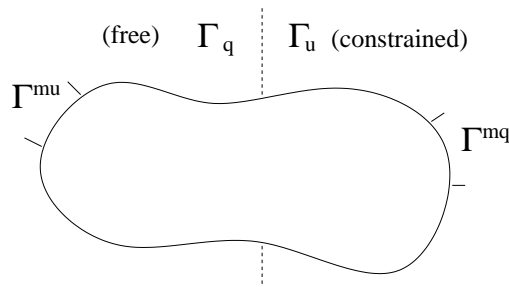


Figura 2.12: Definición de las divisiones del contorno.

La reducción de la fórmula anterior al caso bidimensional sometido a excitación armónica de frecuencia ω se obtiene con representación compleja $f(x) = [a(x) \quad b(x)] = a(x) + b(x)\sqrt{-1} \Leftrightarrow$

$$f(x, t) = \text{Re} [f(x)e^{i\omega t}].$$

$$\begin{aligned} \delta L = & \frac{\pi}{\omega} \text{Re} \left[\int_{\Gamma_c} (\delta x_k n_k) [[c_{ijkl} u_{i,j} \bar{u}'_{k,l} - \rho \omega^2 u_i \bar{u}'_i]] d\Gamma \right. \\ & - \sum_{tips} \left\{ \frac{1}{\mu} (\delta x_k \nu_k) \{ (1 - \nu) [K_I \bar{K}'_I + K_{II} \bar{K}'_{II}] + K_{III} \bar{K}'_{III} \} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1 - \nu}{\mu} (\delta x_k N_k) [K_I \bar{K}'_{II} + K_{II} \bar{K}'_I] \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde \bar{a} expresa el conjugado del complejo a .

Los términos del gradiente se pueden obtener mediante las siguientes expresiones a partir de los valores en el contorno, usando el gradiente superficial ∇_s y la divergencia superficial div_s , que no son más que sus respectivas proyecciones sobre el contorno.

$$\begin{aligned} \sigma : \nabla \bar{u}' &= \mu \left\{ \frac{2\nu}{1 - \nu} \text{div}_s u \text{div}_s \bar{u}' \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (\nabla_S u + \nabla_S^T u) : (\nabla_S \bar{u}' + \nabla_S^T \bar{u}') - (n \nabla_S u) (n \nabla_S \bar{u}') \right\} \\ \text{div}_S u &= u_{t,t} \\ \nabla_S u &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u_{n,t} & u_{t,t} \end{bmatrix} \\ u_{t,t} &= u_{i,\xi} t_i \frac{1}{J} \\ \sigma_{ij} \bar{u}'_{i,j} &= \mu \left\{ \frac{2\nu}{1 - \nu} u_{t,t} \bar{u}'_{t,t} + \frac{1}{2} (2u_{n,t} \bar{u}'_{n,t} + 2u_{t,t} \bar{u}'_{t,t}) - u_{n,t} \bar{u}'_{n,t} \right\} \\ &= \frac{2\mu}{J^2(1 - \nu)} u_{i,\xi} t_i \bar{u}'_{j,\xi} t_j \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.5 Sensibilidad a propiedades del material

Cercano al problema inverso de identificación está el *problema de identificación de material*, en el que las incógnitas son sus constantes físicas (mecánicas, eléctricas, etc. dependiendo de la aplicación) sobre todo el dominio o parte de él (una inclusión por ejemplo). Se han usado diferencias finitas con éxito en Schnur et al. [105] o Yuan et al. [135], y la variable adjunta por Constantinescu et al. [31].

2.5.1 Derivada de las ecuaciones

La derivación directa de las correspondientes ecuaciones integrales de contorno singular e hipersingular son mucho más simples que en geometría. La estructura final del problema es muy similar, pero los parámetros contienen las propiedades mecánicas, que incluso podrían ser acoplados a los parámetros geométricos. Las derivadas de las ecuaciones integrales de contorno se realizan directamente dentro del signo de la integral dado que las variables son independientes. Se reseña aquí que esta formulación no ha sido probada numéricamente.

Partiendo de las ecuaciones de contorno originales y descomponiendo en serie todos los núcleos respecto a la variable material m :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_b^a &= u_b^a + \frac{du_b^a}{dm}\delta m + hot. \\ \tilde{u}_{b,c}^a &= u_{b,c}^a + \frac{du_{b,c}^a}{dm}\delta m + hot. \\ \tilde{u}_{b,cd}^a &= u_{b,cd}^a + \frac{du_{b,cd}^a}{dm}\delta m + hot. \\ \tilde{\sigma}_{bc}^a &= \sigma_{bc}^a + \frac{d\sigma_{bc}^a}{dm}\delta m + hot. \\ \tilde{\sigma}_{bc,d}^a &= \sigma_{bc,d}^a + \frac{d\sigma_{bc,d}^a}{dm}\delta m + hot.\end{aligned}$$

resultan las siguientes ecuaciones, en las que las derivadas completas de los núcleos se especifican en los anejos:

$\delta ubie_m$:

$$\begin{aligned}c_k^i \delta u_k + \int_{\Gamma} \{ \sigma_{jk}^i n_j(x) \delta u_k - u_k^i \delta q_k \} d\Gamma &= {}^m U_m^i(\xi) \delta m_m \\ {}^m U_m^i(\xi) &= -\frac{dc_k^i}{dm_m} u_k + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{du_k^i}{dm_m} q_k - \frac{d\sigma_{jk}^i}{dm_m} n_j(x) u_k \right\} d\Gamma\end{aligned}$$

$\delta qbie_m$:

$$\begin{aligned}c_k^i \delta q_k + \int_{\Gamma} \{ t_{jkl}^i n_j(\xi) n_l(x) \delta u_k - d_{jk}^i n_j(\xi) \delta q_k \} d\Gamma &= {}^m Q_m^i(\xi) \delta m_m \\ {}^m Q_m^i(\xi) &= -\frac{dc_k^i}{dm_m} q_k + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{d_{jk}^i}{dm} n_j(\xi) q_k - \frac{t_{jkl}^i}{dm} n_l(x) n_j(\xi) u_k \right\} d\Gamma\end{aligned}$$

2.5.2 Tratamiento numérico

Tras su discretización, las ecuaciones se reorganizan nuevamente en los datos calculados u_k y q_k , su diferencia con los medidos δu_k y δq_k y el vector de propiedades mecánicas δm dando el siguiente sistema.

$$A\delta u = {}^m \Delta \delta m$$

Durante una iteración, la matriz de sistema A se encuentra previamente factorizada desde la solución del problema directo. Si se soluciona para cada columna de ${}^m\Delta$, las soluciones se agrupan en mJ , que proporciona el jacobiano deseado:

$$\delta u = {}^mJ\delta m \quad \Rightarrow \quad {}^mJ = \frac{du}{dm}$$

2.6 Derivada topológica

El concepto de derivada topológica consiste en la variación infinitesimal de la respuesta cuando aparece un defecto infinitesimal. Esta “derivada” se puede entender como el término de primer orden de la variación debida al fallo buscado, y por tanto como una buena aproximación en el caso de que tenga dimensiones pequeñas en comparación con el espécimen y que las tensiones no varíen rápidamente:

$$u(A_{defecto}) = u(0) + \frac{du(0)}{dA} \delta A + O(\delta A^2) \quad (2.15)$$

donde $u(A)$ es la respuesta mecánica cuando existe un defecto de volumen A ($A = 0$ significa sin defecto, por lo que no requiere su discretización ni modelización, y $A = A_{defecto}$ significa el defecto real). La magnitud A es de orden r^n en \mathfrak{R}^n . Se han encontrado muy pocos trabajos en relación con esta idea (Sokolowski [109], [108], Masmoudi [81]).

2.6.1 Ecuación integral de contorno

La derivada topológica se calcula considerando un estado modificado que contiene una cavidad infinitesimal. Puesto que esta cavidad es pequeña, las variables en el contorno se pueden representar como una aproximación en función de sus valores en el contorno de ella. La linealización e integración de las integrales en el contorno infinitesimal llevan a la siguiente definición (véase Gallego y Rus [47]).

En un dominio homogéneo Ω cuyo contorno exterior es Γ_e , sujeto a una carga estática, considérese la aparición de una cavidad circular sin tensiones centrada en el punto \mathbf{z} y definida por su contorno Γ_z (figura 2.13).

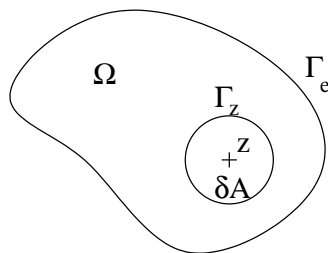


Figura 2.13: Contornos para la derivada topológica.

La ecuación integral de contorno estándar del MEC se puede descomponer según los dos contornos Γ_e y Γ_z :

$$\begin{aligned} c_k^i(\boldsymbol{\xi}) u_k(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma_e} [q_k^i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) q_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ + \int_{\Gamma_z} [q_k^i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) q_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

En la integral sobre Γ_z se supone que no hay tensiones ($q_k = 0$). Ahora estudiamos el valor de $u_k(\mathbf{x})$: se puede descomponer en la suma de un movimiento de sólido rígido (un desplazamiento único u_k^{slido}) más una deformación sobre \mathbf{x} respecto al desplazamiento anterior. Para alguna elección de movimiento de sólido rígido, el último desplazamiento se puede asimilar a la deformación $u_k^{infinito}(\mathbf{x})$ de un hueco en un medio infinito sujeto a un campo de tensión constante en el infinito σ_{ij} (representado en la figura 2.14). Esta suposición es válida siempre y cuando la cavidad sea lo suficientemente pequeña, o en contraposición, lejos de fuertes variaciones del contorno o del campo σ_{ij} . Por tanto,

$$u_k(\mathbf{x}) = u_k^{slido} + u_k^{infinito}(\mathbf{x}) + hot.$$

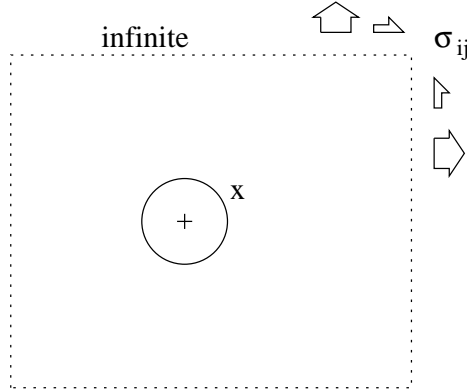


Figura 2.14: Cavidad pequeña en un medio grande a tensión constante.

Finalmente, $q_k^i(\xi, \mathbf{x}) = \sigma_{jk}^i(\xi, \mathbf{x})n_j(\mathbf{x})$, donde $\sigma_{jk}^i(\xi, \mathbf{x}) = \sigma_{jk}^i(\xi, \mathbf{z}) + hot$. La segunda integral se convierte pues en:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_z} [q_k^i(\xi, \mathbf{x})u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\xi, \mathbf{x})q_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma_z} [\sigma_{jk}^i(\xi, \mathbf{x})n_j(\mathbf{x})u_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &= \sigma_{jk}^i(\xi, \mathbf{z}) \int_{\Gamma_z} [n_j(\mathbf{x})(u_k^{slido} + u_k^{infinito}(\mathbf{x}) + hot.)] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ &= \sigma_{jk}^i(\xi, \mathbf{z})u_k^{slido} \int_{\Gamma_z} [n_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \sigma_{jk}^i(\xi, \mathbf{z}) \int_{\Gamma_z} [n_j(\mathbf{x})u_k^{infinito}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + hot. \end{aligned}$$

La primera integral $\int_{\Gamma_z} [n_j(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x})$ es exactamente cero, lo cual significa que los movimientos de sólido rígido no afectan a la integral. La segunda integral se puede resolver analíticamente sustituyendo en $u_k^{infinito}(\mathbf{x})$ la solución analítica del problema de la cavidad en medios infinitos. Esto se ha hecho para el caso de un círculo y de una grieta (véase la figura 2.15), proporcionando el tensor $-K_{jk}(z^z)$.

En conclusión, generalizando a varias cavidades circulares centradas en un conjunto de puntos z^z ,

$$c_k^i(\xi)\delta u_k(\xi) + \int_{\Gamma} [q_k^i(x, \xi)\delta u_k(x) - u_k^i(x, \xi)\delta q_k(x)] d\Gamma(x) = \mathcal{U}_z^i(z^z; \xi)\delta A_z \quad (2.16)$$

donde,

$$\mathcal{U}_z^i(z^z; \xi) = \sigma_{jk}^i(z^z; \xi)K_{jk}(z^z)$$

El parámetro de tamaño δA_z tiene la siguiente definición en cada caso (figura 2.15):

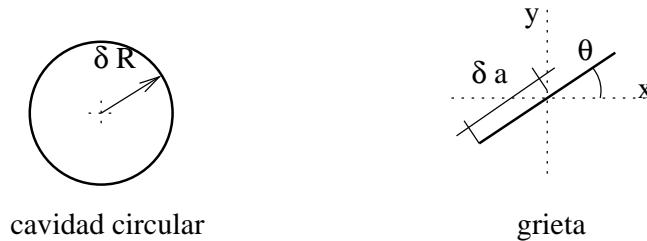


Figura 2.15: Descripción de círculo y grieta.

$$\delta A_z = \begin{cases} \pi \delta R^2 & \text{para cavidades circulares} \\ \delta a^2 & \text{para grietas rectas} \end{cases} \quad (2.17)$$

- En el caso de una cavidad circular, $K_{jk}(z^z)$ toma el valor,

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 3\sigma_{11} - \sigma_{22} & 4\sigma_{12} \\ 4\sigma_{21} & 3\sigma_{22} - \sigma_{11} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

- En el caso de grietas, $K_{jk}(z^z)$ es,

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \frac{2\pi(1-\nu^2)}{E} \begin{pmatrix} -\sigma'_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma'_{11} \sin^2 \theta & -\sigma'_{11} \sin \theta \cos \theta - \sigma'_{12} \sin^2 \theta \\ -\sigma'_{11} \sin \theta \cos \theta + \sigma'_{12} \cos^2 \theta & +\sigma'_{12} \sin \theta \cos \theta - \sigma'_{11} \cos^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

donde, a su vez, σ'_{ij} es la tensión local en el punto de referencia de la grieta:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \cos 2\theta - \sigma_{12} \sin 2\theta \\ \sigma'_{12} &= \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{21} \sin 2\theta \end{aligned}$$

2.6.2 Implementación numérica

La discretización de 2.16 lleva a,

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{v} = {}^t\Delta\delta\mathbf{A} \quad (2.20)$$

donde \mathbf{A} es la misma matriz de coeficientes de sistema que para el problema directo, y $\delta\mathbf{v}$ agrupa las variaciones de los valores no prescritos de desplazamientos y tensiones. ${}^t\Delta = {}^tU$ es la matriz $n \times m$ donde n son los puntos de colocación (número de ecuaciones en el problema directo) y m es el número de defectos estimados. $\delta\mathbf{A}$ es el vector con los volúmenes de esos defectos. Resolviendo \mathbf{A} para cada columna de ${}^t\Delta$ se puede definir la derivada de ${}^t\mathbf{J}$,

$$\mathbf{A}{}^t\mathbf{J} = {}^t\Delta \quad \Rightarrow \quad {}^t\mathbf{J} = \{j_{iz}\} = \frac{dv_i}{dA_z} \quad (2.21)$$

2.6.3 Procedimiento para la solución

El proceso de identificación se puede por tanto estructurar del siguiente modo. La diferencia entre la respuesta medida \mathbf{v}^{exp} y la calculada sin defecto \mathbf{v}^0 se denomina $\delta\mathbf{v}$. Las variables buscadas se almacenan en el vector \mathbf{x} (incluyendo los centros z^z y ángulos en el caso de grietas). Se puede usar cualquier algoritmo de minimización para buscar el valor de \mathbf{x} que minimiza el funcional de costo f definido como $f = \frac{1}{2}\mathbf{R}^T\mathbf{R}$ (dando un sentido de mínima distancia de los residuos, o de máxima similitud de la respuesta), donde el residuo es,

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}(\mathbf{A}) - \mathbf{v}^{exp} \approx \mathbf{v}^0 + \frac{d\mathbf{v}(0)}{d\mathbf{A}}\delta\mathbf{A} - \mathbf{v}^{exp} = \delta\mathbf{v} + {}^t\mathbf{J}(\mathbf{x})\delta\mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

En este punto $\delta\mathbf{A}(x)$ se puede optimizar directamente para minimizar f para el \mathbf{x} dado, gracias a su linealidad, mediante mínimos cuadrados:

$$\delta\mathbf{A}(x) = ({}^t\mathbf{J}(\mathbf{x})^T{}^t\mathbf{J}(\mathbf{x}))^{-1}{}^t\mathbf{J}(\mathbf{x})\delta\mathbf{v} \quad (2.23)$$

Este método es muy útil por las siguientes razones,

- El problema directo (cálculo de \mathbf{v} y \mathbf{A}) sólo se realiza una vez para toda la búsqueda.
- Cada iteración es extremadamente barata en comparación con la solución del problema directo, porque:
 - \mathbf{A} ya está factorizada y preparada para sustitución.
 - $K_{jk}(\mathbf{z}^z)$ básicamente requiere el cálculo de las tensiones en los puntos \mathbf{z}^z . Este es el paso más costoso.

– La evaluación de $\sigma_{jk}^i(\mathbf{z}^z; \xi)$ es inmediata.

- El número de parámetros a buscar se reduce drásticamente puesto que $\delta\mathbf{A}$ se calcula internamente, y sólo se permite la variación del centro (y ángulo) de cada defecto.

La facilidad en buscar simultáneamente varios defectos da la posibilidad de buscar un número indefinido de huecos, inicializando en exceso, y permitiendo a los no existentes desvanecerse por sí mismos (anulación del área). Este principio intuitivo ha sido sugerido con anterioridad como técnica de “burbujas”, y fue comprobado en [113].

2.7 La solución del Problema Inverso

Se ha hecho una revisión de los métodos más usados en la literatura en el capítulo 1.4. En este trabajo se usa principalmente el método de Levenberg-Marquardt para minimizar la suma cuadrática del vector residuo con aporte de gradiente por Derivación Directa, tras haber probado también el de Gauss-Newton y BFGS. Por otra parte, la minimización de funcional completo, derivado mediante el Método de la Variable Adjunta se hace con el método BFGS.

2.7.1 Algoritmos de minimización

Programación matemática

Se exponen los algoritmos más utilizados. Para una exposición detallada véanse Dennis y Schnabel [64], y otros [97], [63].

Método de Newton Mediante una expansión de Taylor multivariable hasta el segundo término, podemos construir un modelo afín de $f(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ como,

$$m_c(x_c + p) = f(x_c) + \nabla f(x_c)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x_c) p + h^T h \epsilon(p)$$

$\nabla_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ es el gradiente.

$\nabla_{ij}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ es el Hessiano, que será simétrico si es doblemente diferenciable continuamente.

Si el gradiente o el Hessiano no están disponibles, se calculan apropiadamente mediante las aproximaciones,

$$\nabla f \quad \simeq \quad \frac{f(x+he_i) - f(x-he_i)}{2h} \quad \text{error} \leq \frac{\gamma}{6} h^2 \quad (2.24)$$

$$\nabla^2 f \quad \simeq \quad \frac{f(x+he_i+he_j) - f(x-he_i) - f(x-he_j) + f(x)}{h^2} \quad \text{error} \leq \frac{5\gamma h}{6} \quad (2.25)$$

El método de Newton consiste en un método iterativo en el que, comenzando por un tanteo inicial x_k se repite lo siguiente,

$$\nabla^2 f(x_k) s_k = -\nabla f(x_k) \quad (2.26)$$

$$x_{k+1} = x_k + s_k \quad (2.27)$$

Métodos Quasi-Newton Éste aparece de redefinir el Hessiano anterior,

1. Calcular $\nabla f(x_k)$
2. Calcular $H_k = \nabla^2 f(x_k)$
3. Factorizar H_k y calcular el número de condicionamiento. Si está mal condicionado, perturbar ($H_k = \nabla^2 f(x_k) + \mu_k I$, con $\mu_k < \text{mínimo autovalor}$).
4. $H_k s_k = -\nabla f(x_k)$
5. $x_{k+1} = x_k + s_k$ o elegir x_{k+1} con una estrategia global.

La *búsqueda lineal* es la estrategia global más inmediata. La idea es que el paso proporcionado por un algoritmo s_k puede llevar a un punto más desfavorable (lo cual ocurre con frecuencia ante grandes valores de s_k), pero es posible garantizar que, puesto que en la dirección de s_k el gradiente es negativo, se puede encontrar una solución mejor en la línea definida por esa dirección: $x_{k+1} = x_k + \lambda_k s_k$ (véase [63]).

La *región de confianza* (*Model-trust region*) es la otra gran familia de estrategias globales. Se trata de modificar H_k en lugar de λ_k para que $s_k \leq \delta_c$, es decir, s_k esté dentro del radio de confianza δ_c (mediante $(H_c + \mu I) s(\mu) = -\nabla f(x_c)$ o mediante δ_c que una la solución de Newton $-H^{-1} \nabla f$ con la de Cauchy $\frac{-\nabla f}{\|\nabla f\|}$).

Métodos secantes El método de Broyden o de la actualización secante para minimización no restringida procede en los siguientes pasos, en los que no se requiere el Hessiano,

1. $y_{k-1} = \nabla f(x_k) - \nabla f(x_{k-1})$
2. $H_k = H_{k-1} + \frac{(y_{k-1} - H_{k-1} s_{k-1}) s_{k-1}^T}{s_{k-1}^T s_{k-1}}$
3. $H_k s_k = -\nabla f(x_k)$
4. $x_{k+1} = x_k + s_k$

Hay otras variantes, como la actualización Powell-Symmetric-Broyden, la Davidon-Fletcher-Powell, y la Inverse-Positive-Definite-Secant. Pero la práctica ha sentenciado al Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) o Positive-Definite-Secant como la mejor opción. Así, la actualización se hace,

$$H_k = H_{k-1} + \frac{y_{k-1} y_{k-1}^T}{y_{k-1}^T s_{k-1}} + \frac{H_{k-1} s_{k-1} s_{k-1}^T H_{k-1}}{s_{k-1}^T H_{k-1} s_{k-1}}$$

Método de Gauss-Newton Este no es una ulterior mejora sino otra familia que aprovecha la estructura de la suma cuadrática. Puesto que $f = \frac{1}{2} R^T R$, y llamando $J = J_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$, entonces $\nabla f = J^T R$; $\nabla^2 f = J^T J + \sum_i R_i \nabla^2 R_i$. Si el residuo tiende a cero en el óptimo ($R \rightarrow 0$) y R es poco no lineal, podemos obviar el segundo sumando del Hessiano y escribir,

1. $J_k^T J_k s_k = -J_k^T R_k$
2. $x_{k+1} = x_k + s_k$

Aquí también se pueden aplicar las estrategias globales:

Gauss-Newton amortiguado

1. $J_k^T J_k s_k = -J_k^T R_k$
2. $x_{k+1} = x_k + \lambda_k s_k$

donde λ_k se calcula con una búsqueda lineal.

Levenberg-Marquardt o región de confianza

1. $(J_k^T J_k - \mu_k I) s_k = -J_k^T R_k$ sujeto a $\|x_{k+1} - x_k\|_2 \leq \delta_k$
2. $x_{k+1} = x_k + s_k$

Se han desarrollado otros algoritmos en los que el segundo término $\sum_i r_i \nabla^2 r_i$ se aproxima mediante una actualización secante (A),

1. $A_k = A_{k-1} + \frac{(y_{k-1}^{II} - A_{k-1} s_{k-1}) y_{k-1}^T + y_{k-1} (y_{k-1}^{II} - A_{k-1} s_{k-1})^T}{y_{k-1}^T s_{k-1}} - \frac{\langle y_{k-1}^{II} - A_{k-1} s_{k-1}, s_{k-1} \rangle y_{k-1} y_{k-1}^T}{(y_{k-1}^T s_{k-1})^2}$ where $y_{k-1}^{II} = A_{k-1} s_{k-1}$
2. $(J_k^T J_k + A_k) s_k = -J_k^T R_k$
3. $x_{k+1} = x_k + s_k$

Filtro de Kalman y filtro de proyección Estos métodos, originalmente desarrollados para inversión lineal están pensados para incorporar información sobre el ruido en las mediciones (básicamente acortando el paso según ese ruido), y de su error (poniendo más peso en los datos más seguros).

Entre otras técnicas usadas en la literatura, el recocido simulado se usa para estabilizar el proceso de convergencia ([75]), y la programación lineal y cuadrática engloban técnicas eficientes para la adición de restricciones a los algoritmos de optimización locales.

Computación suave

Búsqueda estocástica Consiste en resolver un número de problemas directos con diferentes configuraciones supuestas elegidas al azar.

Algoritmos Genéticos y Evolucionarios Proporcionan un modo de incrementar la eficiencia del anterior, de modo que tienen gran seguridad en la convergencia, pero siguen requiriendo un enorme tiempo de cómputo.

Se pueden encontrar muchas referencias especializadas (Goldberg [52]), y entre los intentos de identificar formas mediante el MEC, se pueden citar [71], [41], [125], [113], [112] o [111].

Basado en las ideas de Darwin sobre la evolución, en el marco de la optimización, el conjunto de parámetros x o fenotipo se codifica en un cromosoma. Debido a la naturaleza estocástica de esta teoría, se establece una población de individuos, a los que se asigna una función a maximizar ($e(x) = -\log \sum (u^{\text{computado}} - u^{\text{exp}})^2$ en nuestro caso). Esta estructura básica se puede completar de numerosos modos.

Redes neuronales Una red neuronal artificial se compone de un cierto número de elementos procesadores altamente interconectados según una estructura jerárquica. Si se conocen los datos deseados de salida para un conjunto de datos de entrada, este conjunto de paradigmas de entrada-salida se pueden usar para entrenar la red, lo cual se hace mediante unos algoritmos que ajustan las variables que gobiernan su comportamiento. Una vez completado este proceso de aprendizaje, la red es capaz de predecir nuevas salidas.

Entre otras referencias se pueden citar [61] o [111], quien ha inspirado la mayor parte de esta descripción.

Inferencia difusa o neuro-difusa Los métodos de inferencia difusa están condicionados para procesar información donde existen datos provenientes de la experiencia, en forma de reglas, y que no se puede integrar directamente en un modelo.

2.7.2 Implementación y control

Error Es posible obtener una idea de la probabilidad de que x sea el óptimo. La matriz J^{-1} proporciona directamente la razón de desviación de la solución x respecto de la variación de cada dato, puesto que $J_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j}$.

La matriz de varianza/covarianza de la solución x cuando ésta tiene cierta variación dada por σ viene dada por $\sigma^2(J^T J)^{-1}$ (ver Bates y Watts [8]). A falta de datos mejores $\sigma = \frac{2f(x)}{m-n}$, donde m y n son los números de mediciones y parámetros.

Escalado Las unidades del problema afectan a la solución proporcionada por ciertos algoritmos. Esto unido a los posibles problemas numéricos al conjugar datos de magnitudes muy diferentes dan lugar a la idea de escalar los valores x mediante una matriz de escalado D_x , de la forma $\hat{x} = D_x x$.

Se propone la realización del escalado en la etapa de preproceso por cuestiones de programación.

Parada Los principales criterios para la parada de los algoritmos de optimización son,

- Gradiente: $\|\nabla f\| \leq \varepsilon$. Que puede ser mejorado a, $\max_i \left| \frac{\nabla f_i \max\{|x_i|, x_{i\text{tpico}}\}}{\max\{|f|, \text{typical } f\}} \right| \leq \text{tolerancia}$
- Paso: $\frac{|x_k - x_{k-1}|}{\max\{|x_k, x_{\text{tpico}}\}} \leq \text{tolerancia}$.
- Residuo: $f \leq \text{tolerancia}$.

Reducción del paso Se ha implementado una de las técnicas de estabilización de convergencia más simples: reducir el paso proporcionado por ciertos algoritmos: $x^{i+1} = x^i + \alpha \delta x^i$, $\alpha = 0..1$. Se ha utilizado $\alpha = \frac{1}{1+\beta f^2}$ con Gauss-Newton simple, de modo que la reducción de paso se atenúa conforme se acerca la solución.

Prohibición de configuraciones imposibles En el sentido puramente geométrico, el modo más simple es evitar que ningún punto cruce a otro segmento de la geometría. De este modo se consigue que los huecos no se salgan del espécimen ni se solapen. Esto se consigue mediante comprobaciones geométricas muy simples, que en caso de ser positivas reduzcan la longitud del paso lo necesario. Esto se ha probado para Gauss-Newton simple. Por otra parte se establece un límite sistemático en cada parámetro.

Otra técnica menos elástica pero más estable numéricamente es un mapeado continuo y derivable de los parámetros hasta un rango prefijado, a modo de una caja virtual de valores permitidos. El mapeado sugerido y su gradiente viene dado, si $x \in [-\infty, \infty]$ es el parámetro de prueba, y $y \in [-r, r]$ el transformado, con sentido físico, y $\frac{dy}{dp}$ y $\frac{dx}{dp}$ sus respectivos gradientes respecto al parámetro p , y r el rango limitador,

$$y = \arctan\left(\frac{\pi x}{2r}\right) \frac{2r}{\pi}$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dx}{dp} \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dy} \left(1 + \left(\frac{\pi x}{2r}\right)^2\right)$$

2.7.3 Equivalencia entre el método Gauss-Newton y el de Ecuación de Observación

La llamada ecuación de la sensibilidad ha sido anteriormente utilizada para solucionar problemas inversos directamente mediante el MEC por diversos autores ([122], [137], [114], [49], [50], [48], [51]). El método básicamente consiste en escribir la ecuación integral y derivarla respecto a una variación geométrica genérica tras un proceso de linealización y límite al contorno. Las ecuaciones integrales resultantes dan, tras su discretización las relaciones entre la variación de los desplazamientos medidos y los parámetros geométricos (un sistema de ecuaciones llamado δBIE de la forma $H(x)\delta u = \Delta(x)\delta x \Rightarrow A(x)\delta x = \delta u$). Estos datos se relacionan fácilmente con el residuo R y la descripción geométrica x respectivamente. La δBIE se puede usar directamente en un proceso iterativo comenzando por un tanteo inicial x_0 ,

1. Computar $A(x_k)$
2. Solucionar el sistema rectangular sobredeterminado $A(x_k)\delta x_k = \delta u_k$ por mínimos cuadrados ($A_k^T A_k \delta x_k = A_k^T \delta u_k$).
3. Actualizar la geometría $x_{k+1} = x_k + \delta x_k$

Ahora, puesto que $R = u - u^{exp} \Rightarrow \delta R = \delta u$ y llamando $J = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\delta u}{\delta x} = A$ para una iteración lo suficientemente pequeña o en un modelo linealizado, podemos definir un funcional de coste $f = \frac{1}{2} R^T R$. El método de Gauss-Newton para su minimización consiste en,

1. $J_k^T J_k s_k = -J_k^T R_k$
2. $x_{k+1} = x_k + s_k$

que es exactamente lo mismo que el proceso descrito arriba.

Esto auna dos métodos anteriormente considerados en diferentes familias. Este enlace puede permitir la adaptación de técnicas usadas en uno para el otro, abriendo nuevas áreas de investigación. Algunos ejemplos podrían ser:

- usar los beneficios de la descomposición en valor singular de las ecuaciones de observación a algoritmos de minimización para amortiguar valores singulares altos, como modo de regularización (ver [86], capítulo 7, y [60], capítulo 2),
- aplicar la teoría de análisis de factores (ver [86], capítulo 10).
- Aplicación de mínimos cuadrados truncados en la definición del funcional de minimización (ver [60], capítulo 3).
- Aplicación de teorías probabilísticas de minimización, preconditionamiento, etc. (ver [60]).

Capítulo 3

Ejemplos numéricos

A continuación se muestran algunos de los resultados más representativos extraídos de una serie sistemática y extensiva de comprobaciones.

3.1 Tests de la sensibilidad

3.1.1 Comparación con la solución analítica. Derivación directa

Se comienza estudiando un problema muy simple, con solución analítica exacta, que nos va a dar la seguridad de que se converge a la solución exacta, y a qué ritmo. Se trata de una sección de dimensiones infinitas con un hueco circular, sujeto a una tracción uniforme en el infinito, como se muestra en la figura 3.1. Se muestra asimismo el error relativo en el punto A para diferentes discretizaciones.

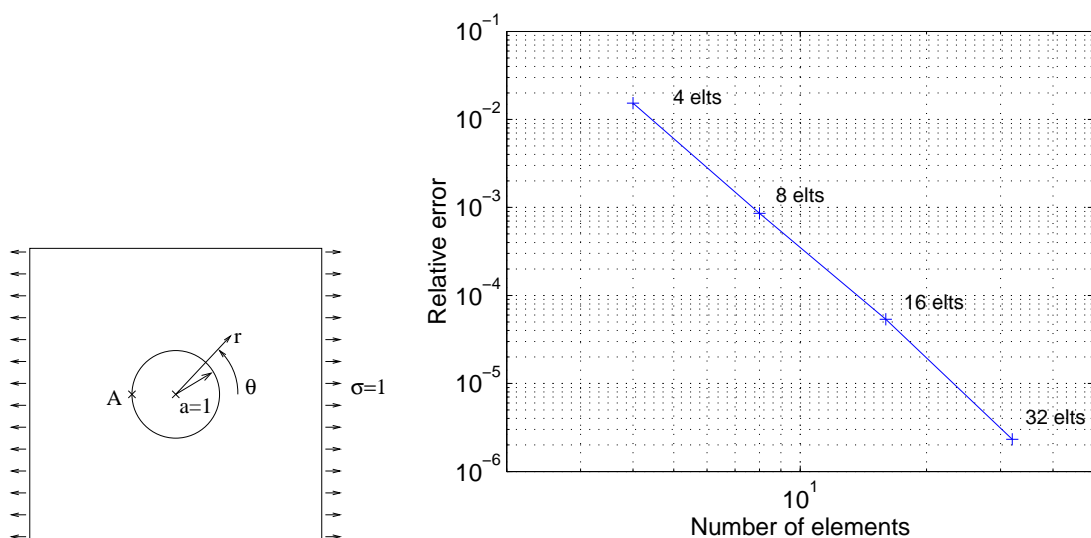


Figura 3.1: Sección infinita. Modelo y error numérico.

Los valores en diversos nodos se comparan con los analíticos con dos discretizaciones en la figura 3.2.

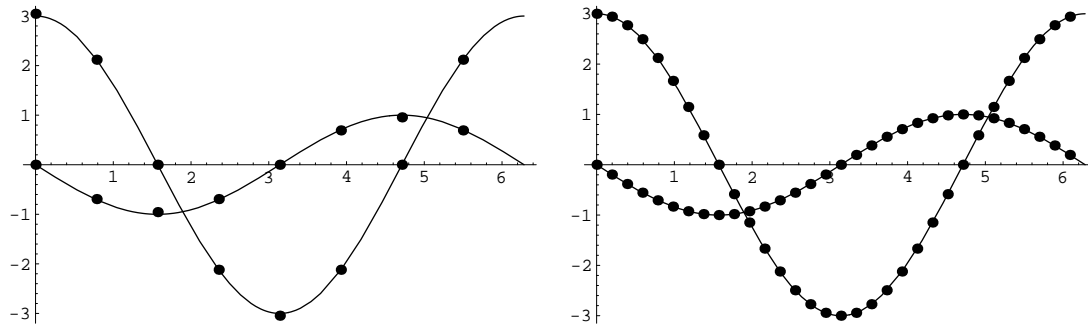


Figura 3.2: Variación en el contorno, con 4 y 16 elementos.

3.1.2 Comparación con solución numérica. Derivación directa

Metodología

Se utiliza un conjunto de problemas simples de prueba con el objeto de permitir la reproducibilidad. Consisten en una sección cuadrada de 2×2 con constantes de material $E = 1.0$; $\nu = 0.2$, $\rho = 1.0$ (excepto la inclusión, que tiene $E = 0.5$). Como condiciones de contorno, la base inferior se encuentra empujada, y la superior se somete a una tensión unitaria vertical uniforme. La geometría de los defectos se describe en la figura 3.3.

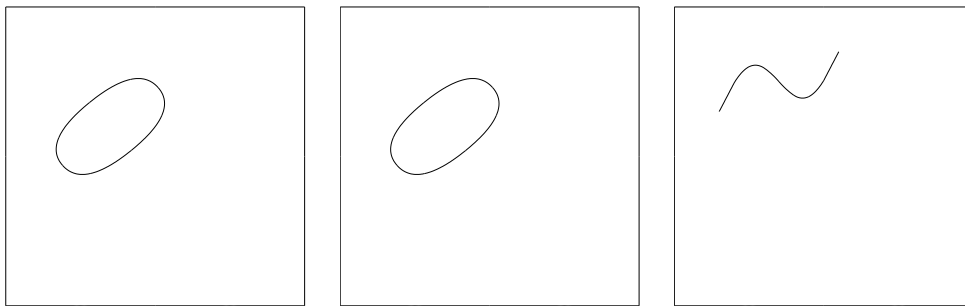


Figura 3.3: Descripción de los problemas de cavidad, inclusión y grieta.

Comparación visual de valores

Se trata de comparar algunos valores obtenidos con la formulación desarrollada con los de diferencias finitas. Los cálculos se realizaron con 256 elementos, y las diferencias finitas se separaron por la cantidad $\frac{0.002}{\omega}$, dado que éstas últimas presentaban fácilmente divergencias por errores numéricos a bajas distancias o por efectos de segundo orden en altas distancias.

Orden de integración, orden y número de elementos

En las siguientes gráficas se representa el error relativo a la mejor solución encontrada incrementando la densidad de malla, conforme se varía el número de puntos de integración de Gauss, el orden de los elementos, y la densidad de malla.

Influencia de la frecuencia

En las figuras 3.1.2, el error relativo dado a continuación es el máximo en todos los puntos entre el valor analítico y diferencias finitas, por lo que no se está comparando con una solución exacta, sino con otra que también contiene errores. Se ha elegido una distancia finita de 10^{-4} .

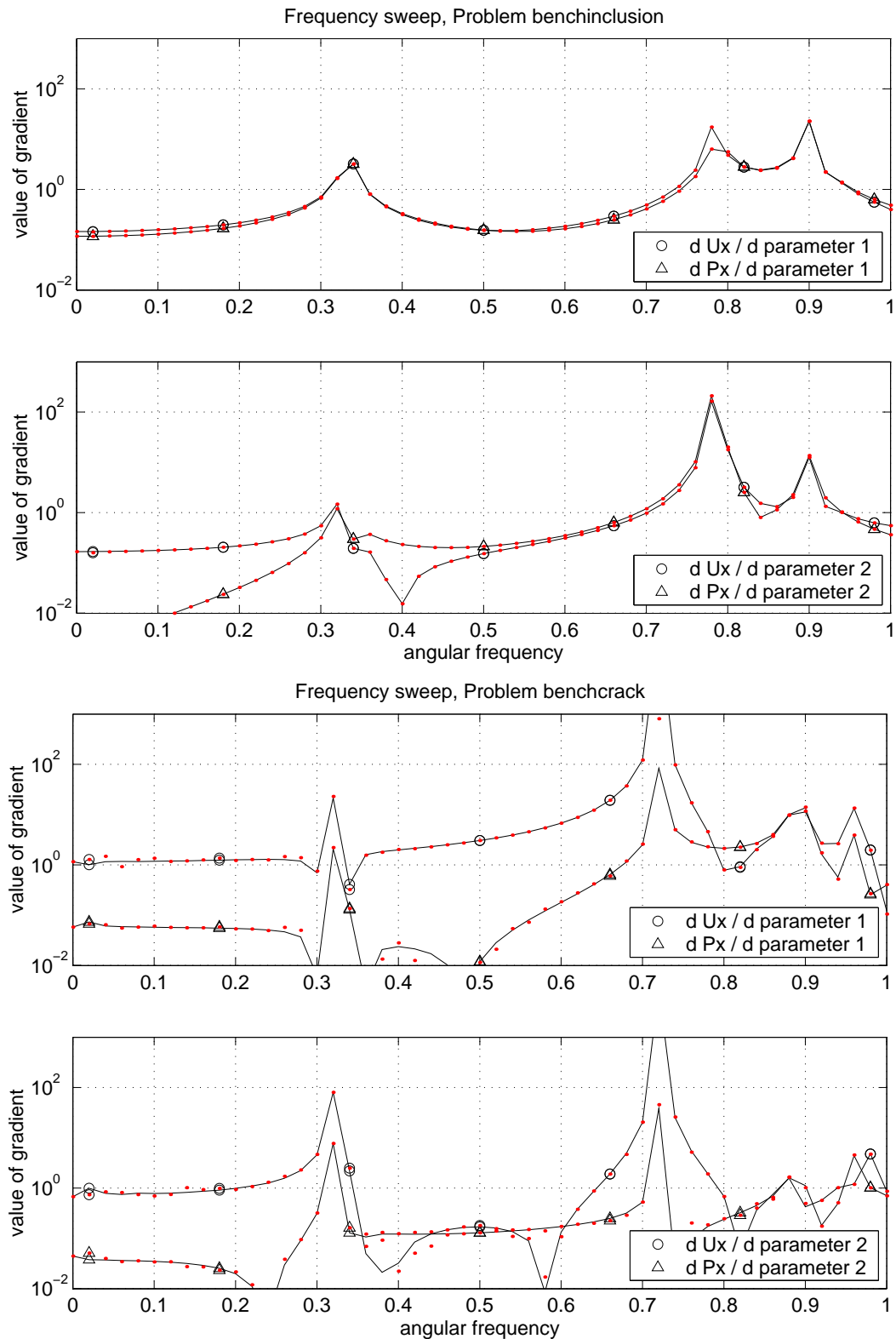


Figura 3.4: Valores del gradiente. Problemas de inclusión y grieta, derivadas respecto a parámetros 1 y 2.

3.1.3 Parametrizaciones complejas

Finalmente, la figura 3.1.3 muestra los errores máximos y en consecuencia la necesidad de mallas más refinadas para capturar las fuertes deformaciones que la parametrización impone a la

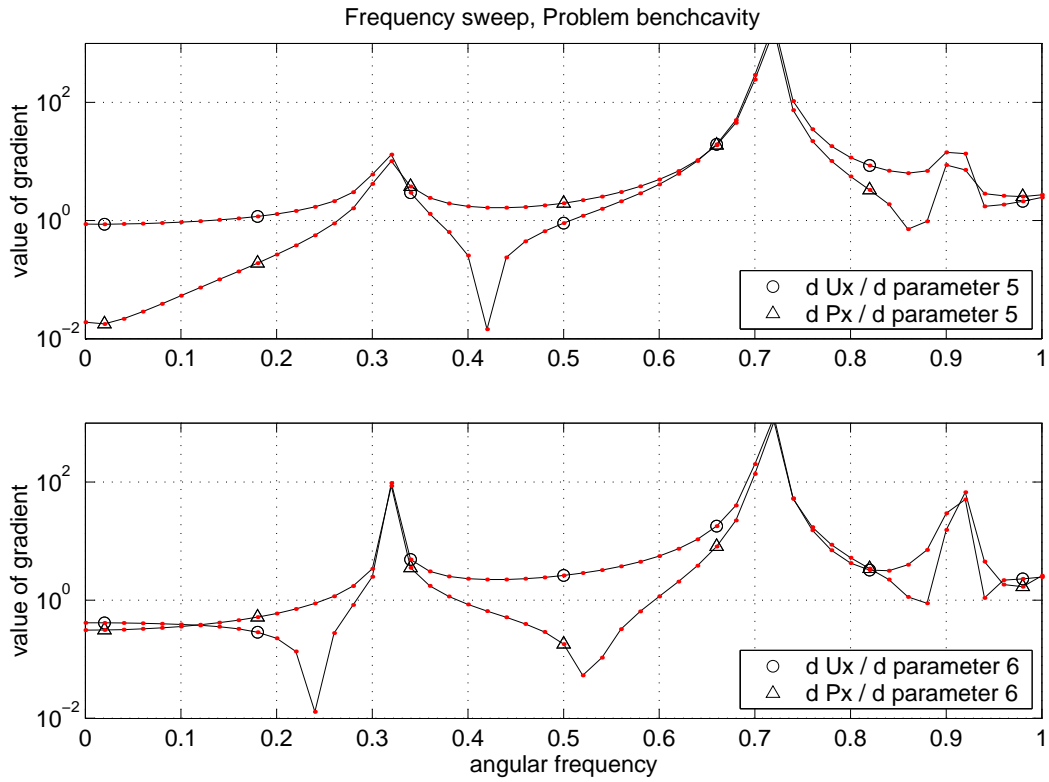


Figura 3.5: Valores del gradiente. Problema de cavidad, derivadas respecto a parámetros 5 y 6.

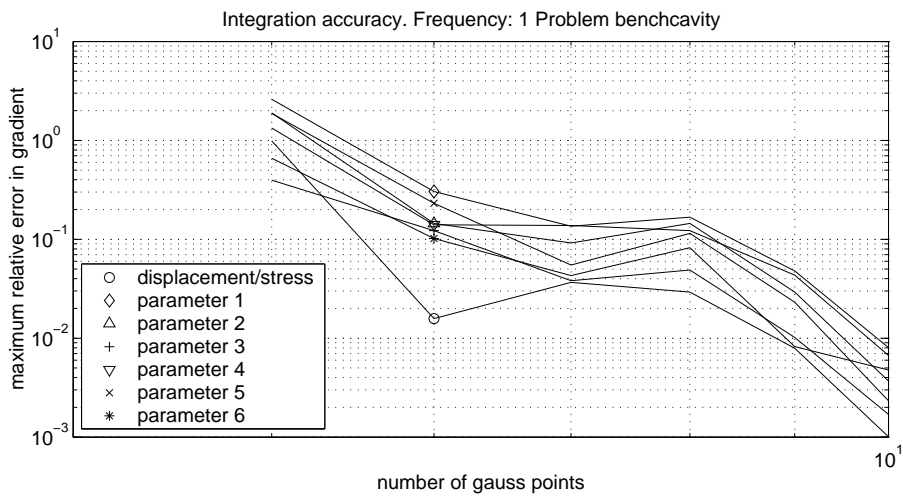


Figura 3.6: Orden de integración. Problema de cavidad.

geometría.

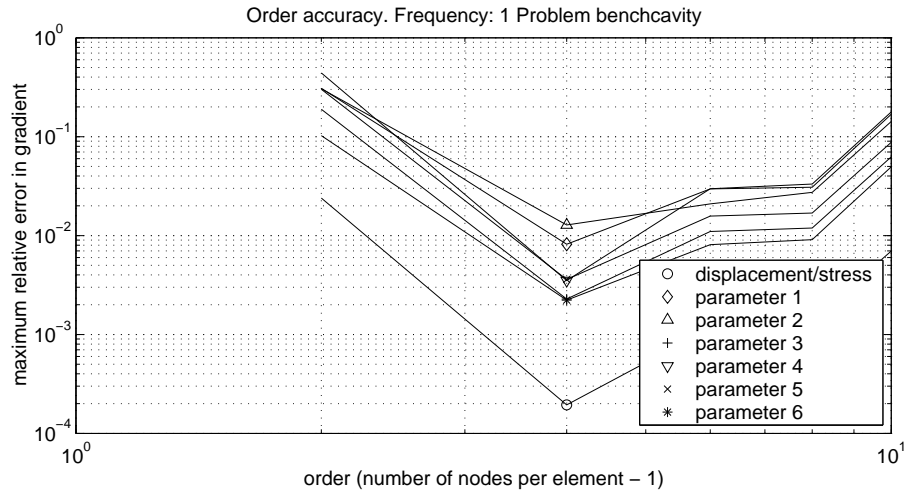


Figura 3.7: Orden de elementos.

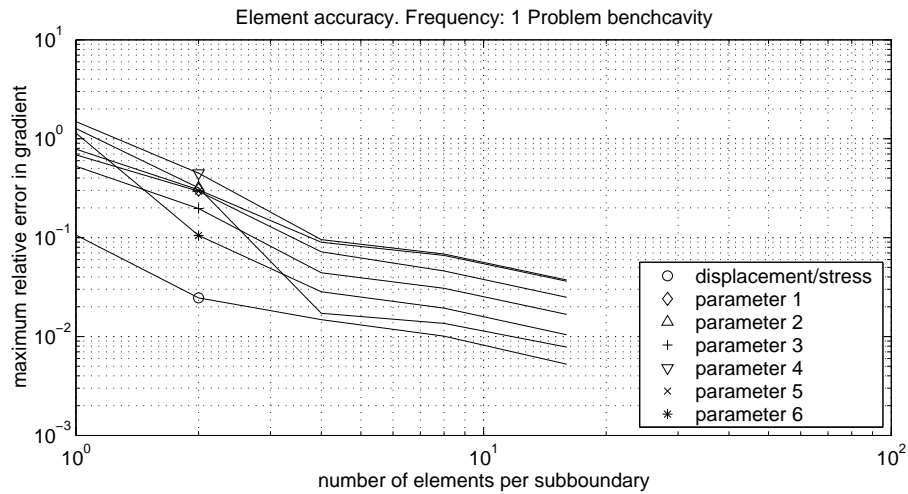


Figura 3.8: Número de elementos.

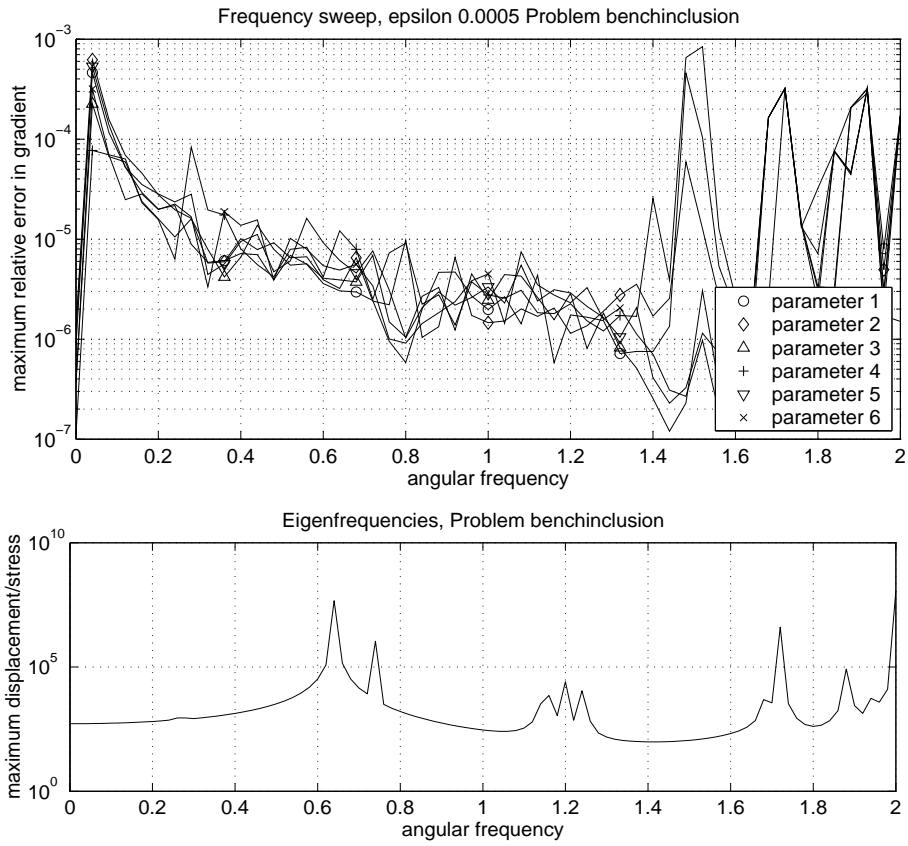


Figura 3.9: Frecuencia. Error relativo y frecuencias propias. Problema de inclusión.

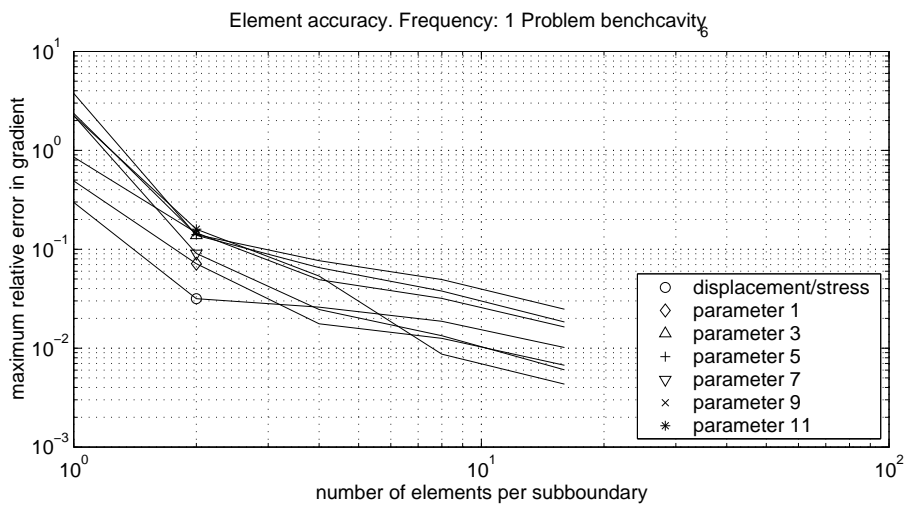


Figura 3.10: Problema de cavidad. Parametrización polar de Fourier.

3.1.4 Sensibilidad por el método de la variable adjunta

Metodología

Se van a utilizar dos modelos para medir la sensibilidad a una grieta, uno de sección circular y otro de cuadrada, con condiciones de contorno variables según la figura 3.11 y con iguales constantes materiales a los anteriores. En general, se utiliza el círculo sin prescripciones de desplazamientos,

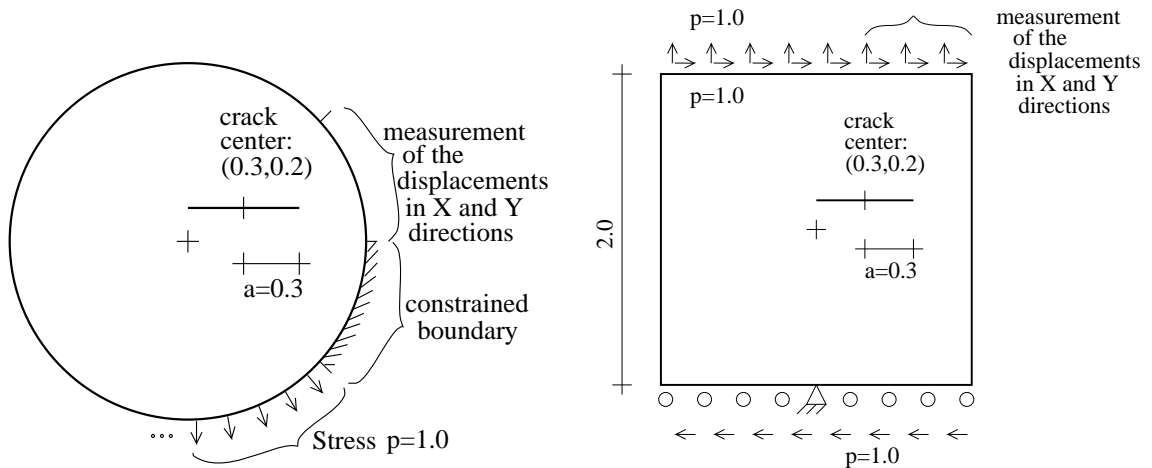


Figura 3.11: Definiciones de la geometría

y en ambos problemas se utilizan todas las medidas posibles. En este caso se ha estimado como óptima una distancia finita de 10^{-6} (calculando con $36 + 12 + 12$ elementos, en el exterior y cada labio de la grieta). En la discretización de la grieta se han concentrado los nodos hacia los extremos según $\xi = \frac{\arctan(sx)}{\arctan(s)}$, con $s = 2.0$

Dependencia de la discretización

A continuación se representan ejemplos de convergencia (eje vertical: valor y error relativo al mejor valor encontrado incrementando la malla) conforme se incrementa independientemente el número de elementos del contorno exterior (eje horizontal de 12 a 192) y el número de elementos de la grieta (curvas de abajo a arriba, de 4 a 64 elementos).

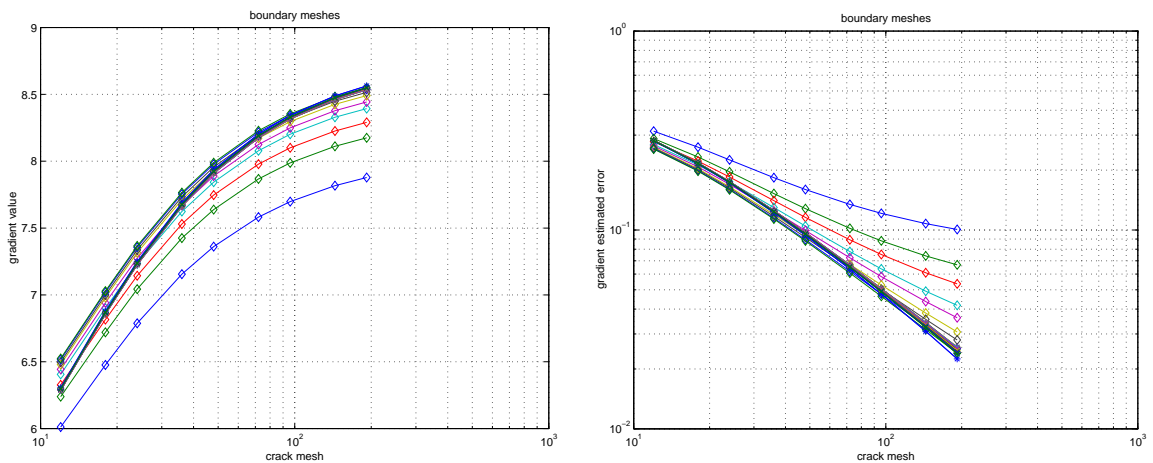


Figura 3.12: Modelo circular. Sensibilidad al desplazamiento horizontal de la grieta. (o) Variable Adjunta, (x) Diferencias finitas.

Dependencia de la frecuencia

Las figuras 3.13 y 3.14 muestran el error relativo a diferencias finitas, donde cada curva muestra una discretización creciente. Los picos aleatorios mostrados corresponden a errores provocados por la cercanía de frecuencias propias. El pico de frecuencias casi nulas corresponde a la divergencia de las diferencias finitas.

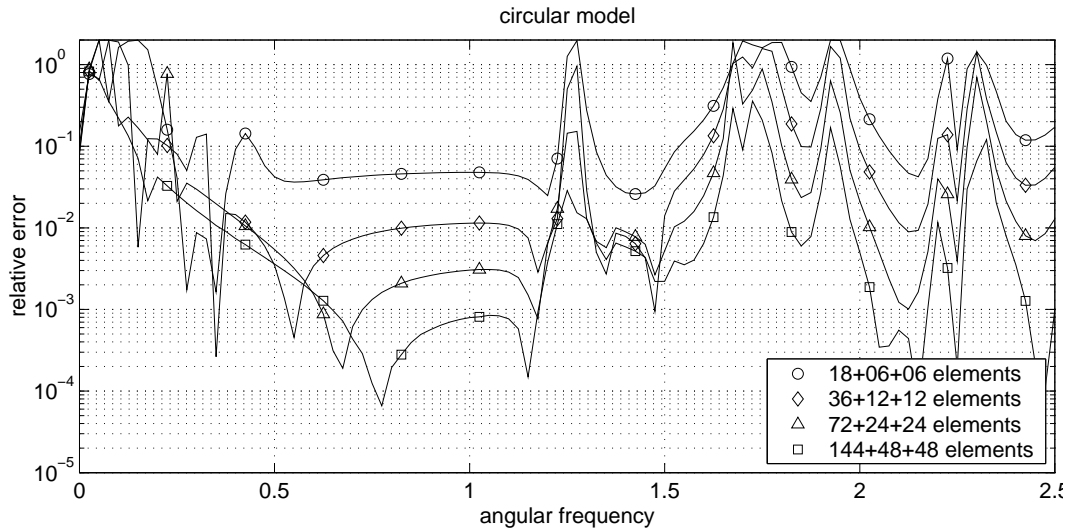


Figura 3.13: Modelo circular. Sensibilidad al desplazamiento horizontal de la grieta.

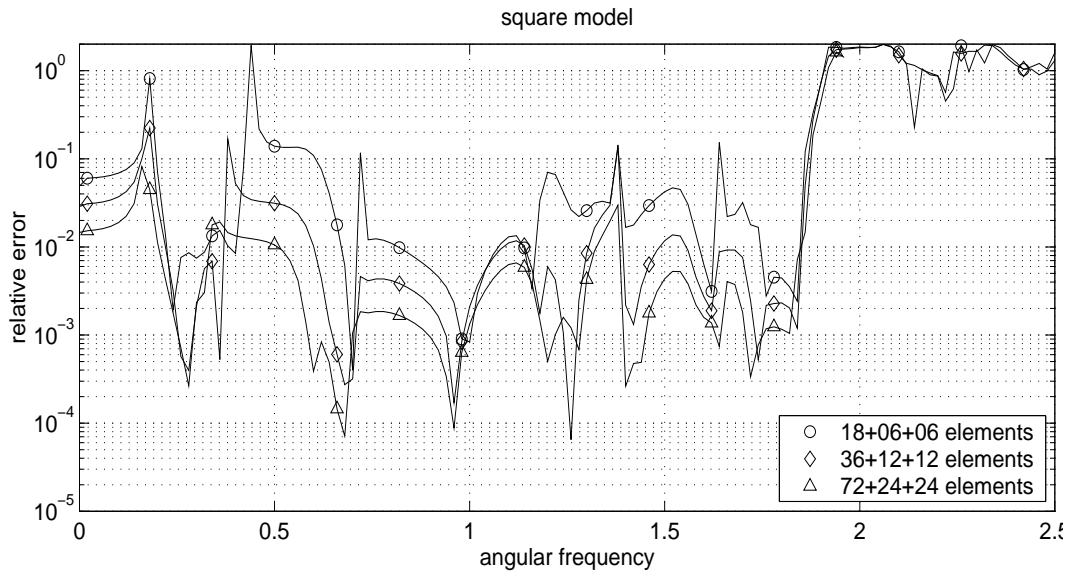


Figura 3.14: Modelo cuadrado. Sensibilidad al desplazamiento vertical de la grieta.

Dependencia de las mediciones y condiciones de contorno

La figura 3.15 representa el error comparado con diferencias finitas según la proporción de medidas tomadas y de la proporción de arco prescrito, con frecuencia $\omega = 1.0$ y con varias discretizaciones.

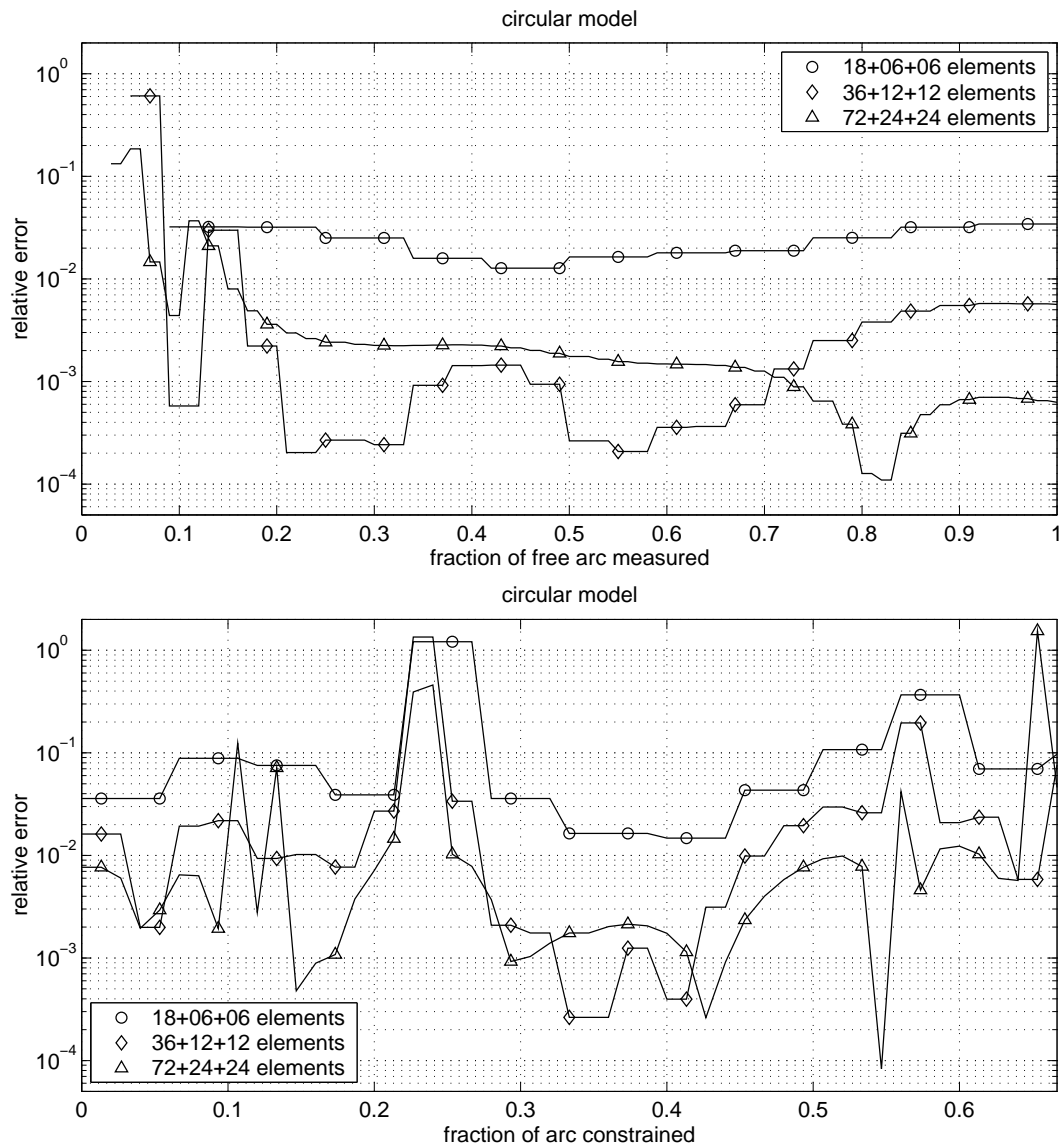
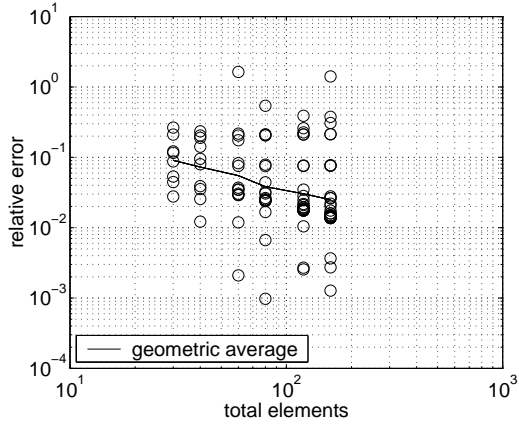


Figura 3.15: Modelo circular. Arriba: Fracción de mediciones Abajo: fracción de prescripciones.

Parametrizaciones

En la figura 3.16 se muestran los valores del gradiente por Variable Adjunta y por diferencias finitas con una parametrización elemental ante diferentes discretizaciones (razón por la cual no hay equivalencia de parametrizaciones). Los parámetros corresponden a los desplazamientos normales en cada centro de elemento y los dos últimos a los desplazamientos tangenciales de cada punta de grieta.

La figura 3.17 muestra la convergencia del gradiente con una parametrización superpuesta de tres elementos mas otros dos parámetros para los desplazamientos tangenciales de las puntas.



Nº de elementos (grieta)	Nº of parameters	Media geométrica del error	Desviación estándar ¹
6	8	0.0905	0.0387
8	10	0.0728	0.0499
12	14	0.0549	0.0506
16	18	0.0383	0.0285
24	26	0.0303	0.0217
32	34	0.0249	0.0172

Figura 3.16: ElementaParametrización por elementos. Evolución de los errores con la malla.

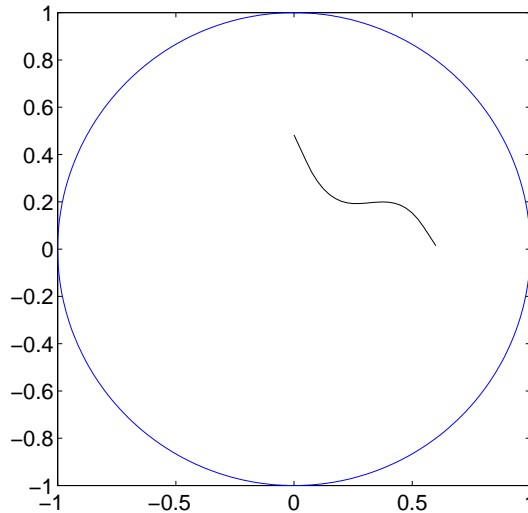
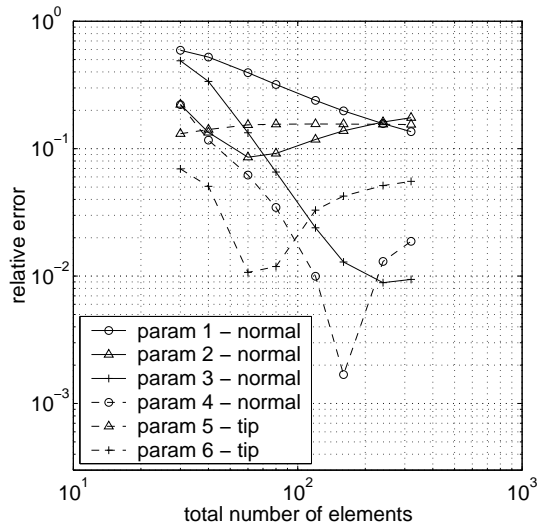


Figura 3.17: Grieta curva. Frecuencia $\omega = 0.8$. Un tercio del arco prescrito. Mediciones sobre un tercio del arco. Izquierda: (x) valor por diferencias finitas, (o) valor por variable adjunta.

3.2 Comprobación de algoritmos de optimización

3.2.1 Metodología

El propósito es comparar los algoritmos de optimización sin restricciones más usuales, cuando se les suministra el gradiente calculado mediante derivación directa.

Se ha preparado una serie de modelos, esquematizados en la figura 3.18 pensados para realzar las diferencias entre cada algoritmo. Los problemas A a D son secciones cuadradas de 3×3 con uno o dos huecos, mientras que el F es un rectángulo de 100×50 tomado de Bezerra et al. [9], en el que sólo se permite la variación del centro del círculo (2 parámetros). Bezerra et al. lo solucionaron en 35 iteraciones por BFGS.

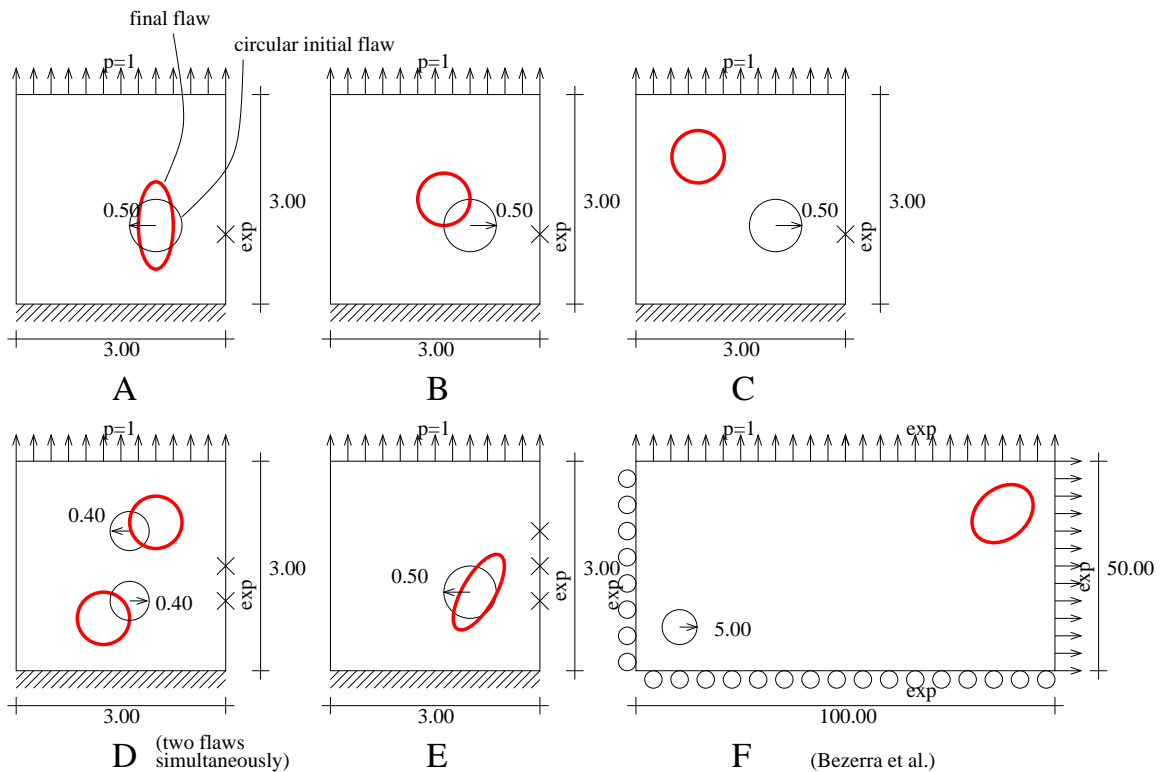


Figura 3.18: Problemas

Problema	A	B	C	D	E	F
Elementos exteriores	12	12	12	12	12	24
Elementos en cavidad	4	4	4	2x4	4	8
Elementos totales	16	16	16	20	16	32
Parámetros	5	2	2	4	5	2
Datos experimentales	5	2	2	8	5	80

En la siguiente tabla se esquematizan los resultados para los métodos de cada fila (-/- significa que no se consiguió convergencia).

Métodos	Gr	LS	A	B	C	D	E	F	media	éxito
G-N	•		8/8	-/-	-/-	5/5	-/-	31/31	14.67/14.67	50 %
	•	•	13/5	-/-	-/-	17/6	-/-	35/-	21.67/ 5.5	50 %
		•	10/0	-/-	-/-	41/0	-/-	-/-	25.5 / -	33 %
L-M	•		7/7	6/6	6/6	7/7	17/17	15/15	9.67/ 9.67	100%
	•	•	13/5	14/5	23/8	17/6	42/13	-/-	21.8 / 7.4	83 %
		•	10/0	23/0	34/0	41/0	64/0	40/0	42.4 / -	100%
BFGS	•	•	9/3	20/6	23/7	21/5	61/17	35/-	28.17/ 7.6	100%
		•	12/0	32/0	37/0	64/0	61/0	-/-	41.2 / -	83 %
GN-SU	•		5/5	6/6	-/-	4/4	-/-	12/12	5.0 / 5.0	67 %

3.3 Problema Inverso de Identificación

3.3.1 Ejemplos de otros autores

Se ha comparado el método de la derivación directa con los resultados proporcionados por otros autores.

Panel con cargas axiales

El primer ejemplo fue estudiado por L. M. Bezerra y S. Saigal [9]. Minimiza la función de coste mediante un método clásico quasi-Newton, tomando mediciones en todo el contorno. En nuestra prueba se utiliza un coeficiente de reducción del paso creciente con el residuo.

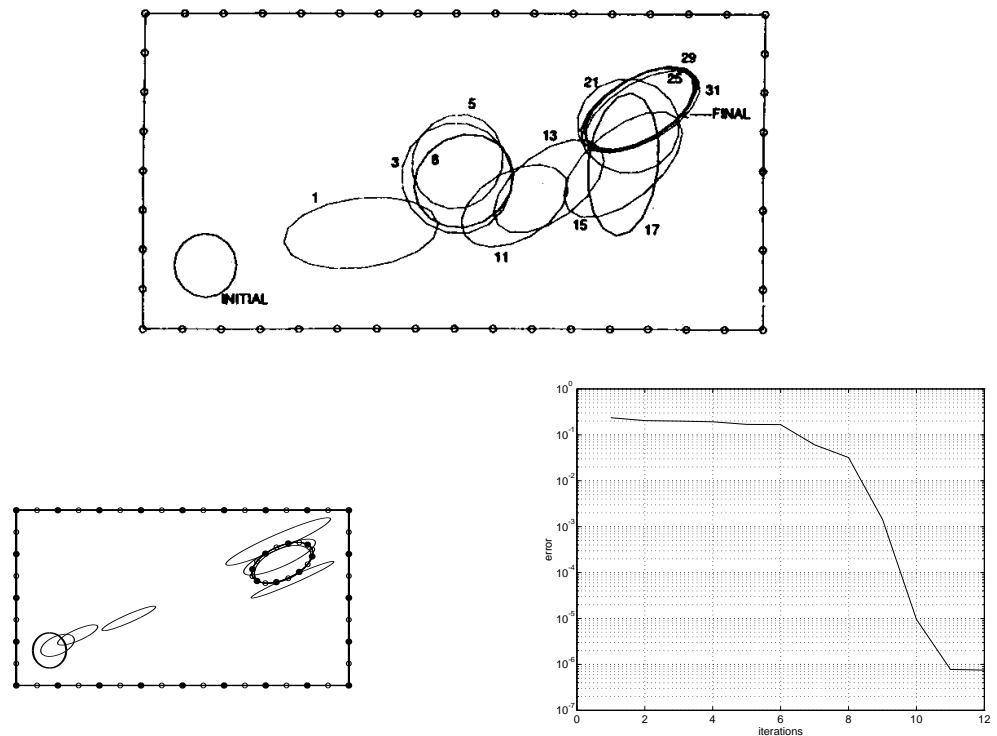


Figura 3.19: Arriba: Resultados de Bezerra: convergencia en 10 iteraciones (Fuente: L. M. Bezerra y S. Saigal). Abajo: Resultados por Gauss-Newton con gradiente por derivación directa y con reducción de paso en 10 iteraciones.

Placa cuadrada

Este segundo ejemplo ha sido tomado de S. C. Mellings y M. H. Aliabadi [85], donde utilizan el método del gradiente conjugado, y se mide la tensión en 16 sensores internos.

Dos huecos

El tercer ejemplo viene de un trabajo de Z. Yao y B. Gong [133], con dos cavidades simultáneas, y mediciones en todo el contorno.

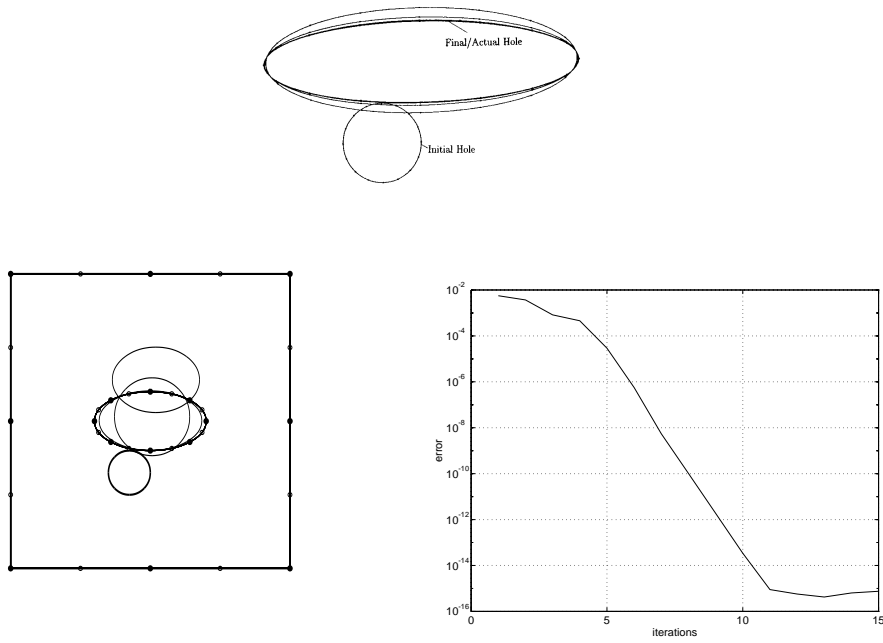


Figura 3.20: Arriba: Solución con entre 10 y 89 iteraciones (Fuente: S. C. Mellings y M. H. Aliabadi). Abajo: Solución por Gauss-Newton con gradiente por derivación directa y con reducción de paso en 9 iteraciones.

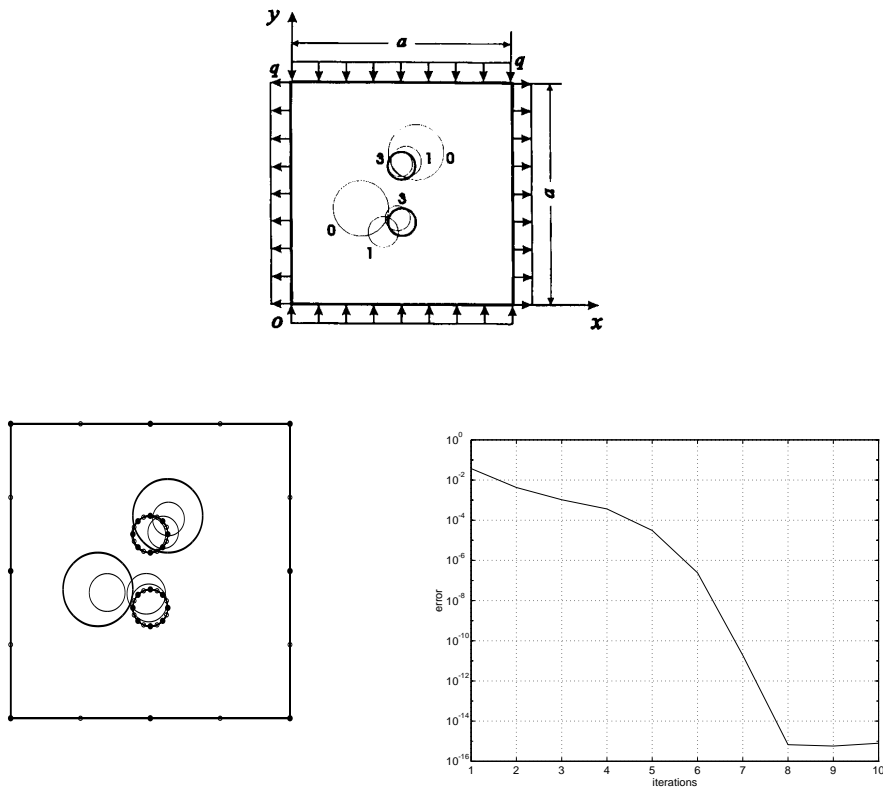


Figura 3.21: Arriba: Solución en 17 iteraciones (Fuente: Z. Yao y B. Gong). Abajo: Solución por Gauss-Newton con gradiente por derivación directa y con reducción de paso en 8 iteraciones.

3.3.2 Test de convergencia. Derivación directa

Se han utilizado los tres problemas tipo de la figura 3.3, con tanteos de partida en el centro y sin deformar. Se aplicó el algoritmo Levenberg-Marquardt con búsqueda lineal y aporte de gradiente por derivación directa.

La identificación se hace incrementando gradualmente el número de parámetros en cuatro etapas, según se indica en la leyenda de cada caso. También se limita a 0.2 el cambio máximo de cada parámetro en cada iteración para limitar las posibles divergencias. En cada caso se ponen tres ejemplos: uno correspondiente a la búsqueda con datos estáticos; otro con datos a frecuencia $\omega = 1.0$, y un tercero con datos tomados a varias frecuencias $\omega = [0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0]$.

A continuación se muestran comprobaciones de la convergencia en función de la distancia del tanteo inicial; sensibilidad al número de mediciones; convergencia según el error inducido en mediciones, material, geometría y frecuencia.

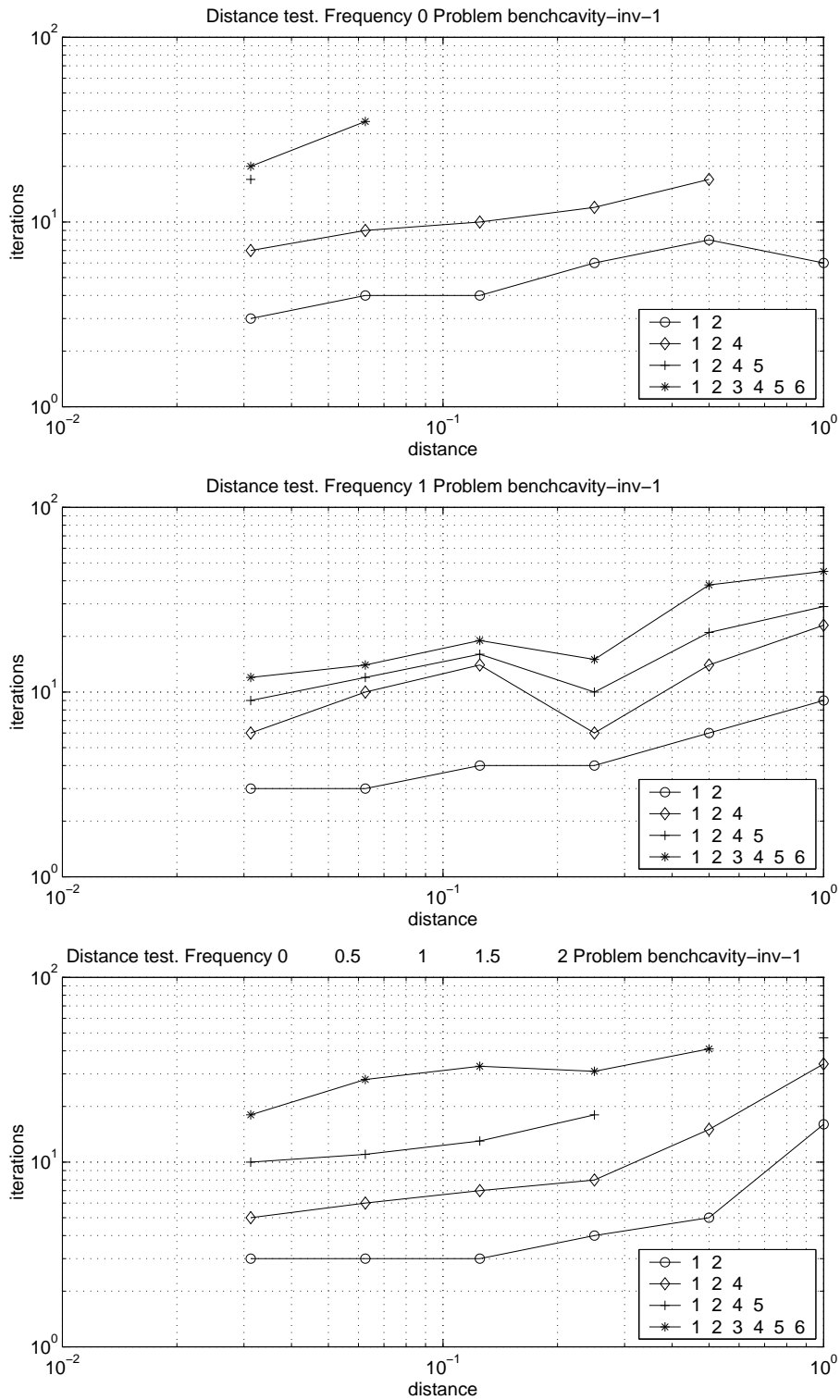


Figura 3.22: Test de convergencia. Iteraciones requeridas según la distancia del primer tanteo a la configuración real. Problema de cavidad.

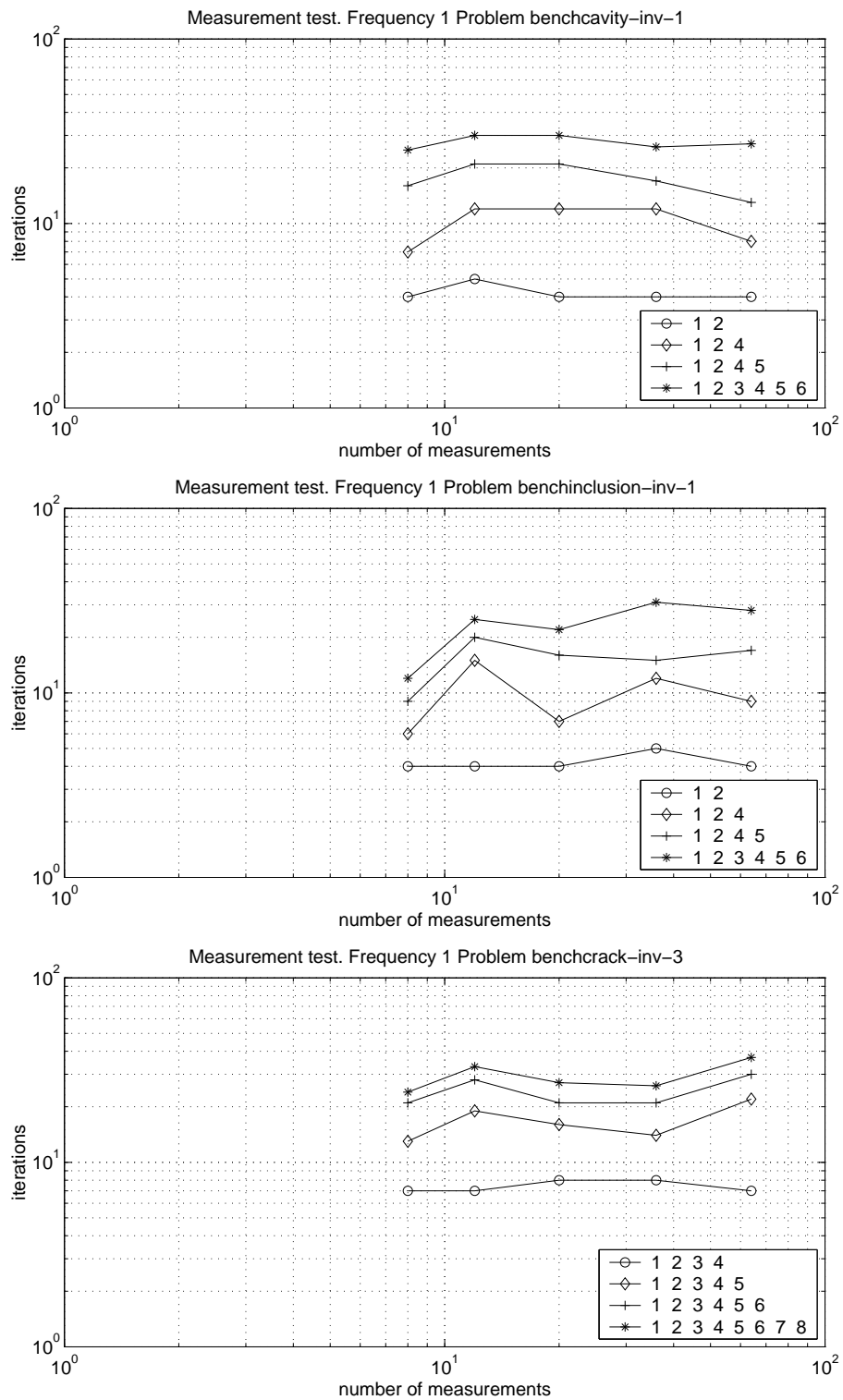


Figura 3.23: Test de número de mediciones. Problemas de Cavidad, inclusión y grieta. Frecuencia $\omega = 1.0$. Comienzo 20% de la distancia.

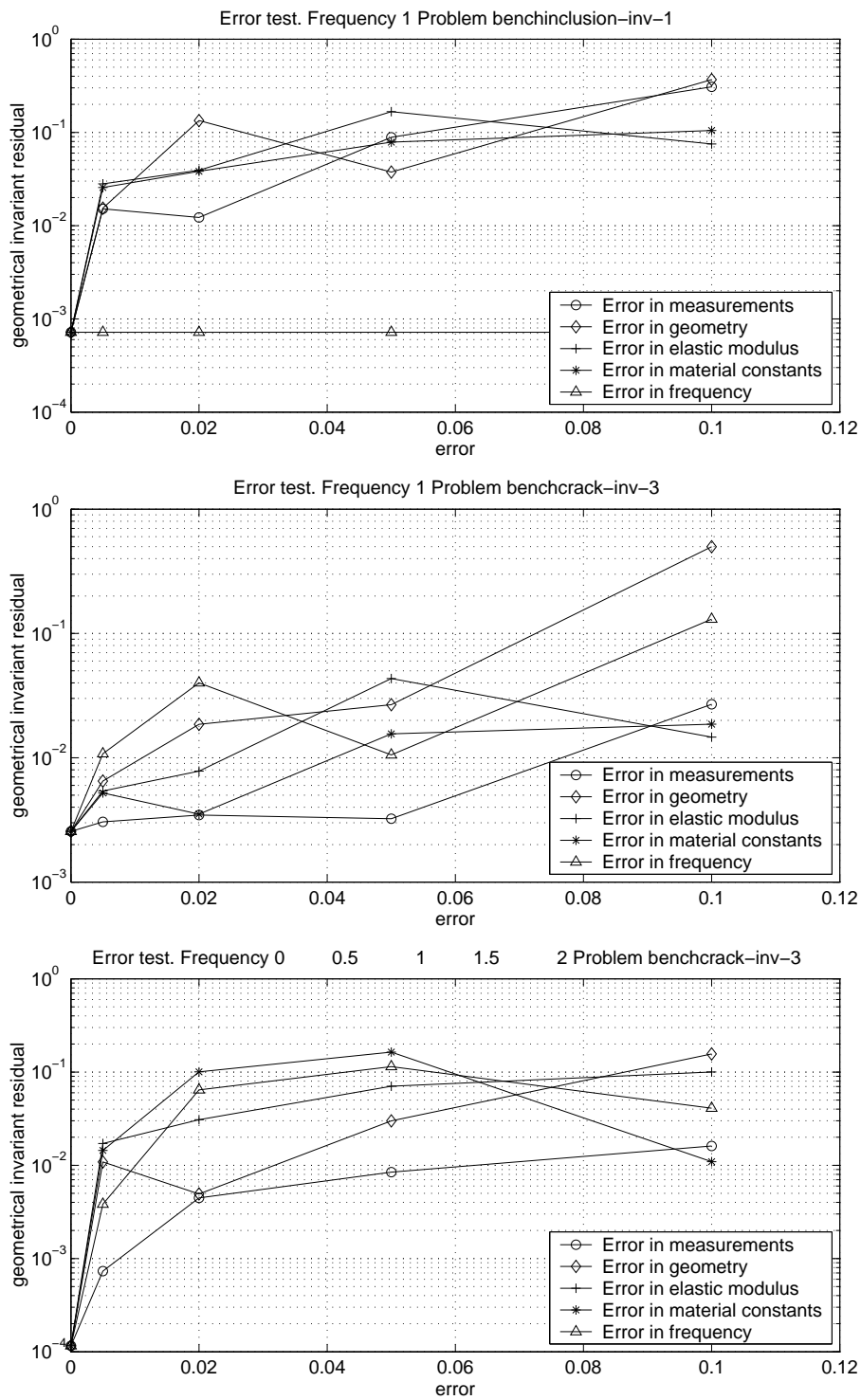


Figura 3.24: Test de errores. Aproximación final en función del error impuesto de valores hasta 10% (ver leyenda). Problema de grieta.

3.3.3 Uso del algoritmo BFGS con gradiente proporcionado por Variable Adjunta

Se van a usar los mismos modelos que en el cálculo de la sensibilidad por Variable Adjunta, descritos en la figura 3.11.

Los siguientes gráficos muestran la capacidad de convergencia respecto a la distancia del tanteo inicial. La idea es estimar la probabilidad de encontrar la grieta a la vez que la exactitud de la búsqueda, mediante dos curvas: el número de iteraciones y el valor final del error geométrico, definido como la suma cuadrática de los seis primeros invariante geométricos.

Se muestran primero ejemplos sin errores, con errores en las mediciones y modelo, con errores en la geometría final (no permitiendo el juego de algunos parámetros), y probando 2, 4 y 6 parámetros.

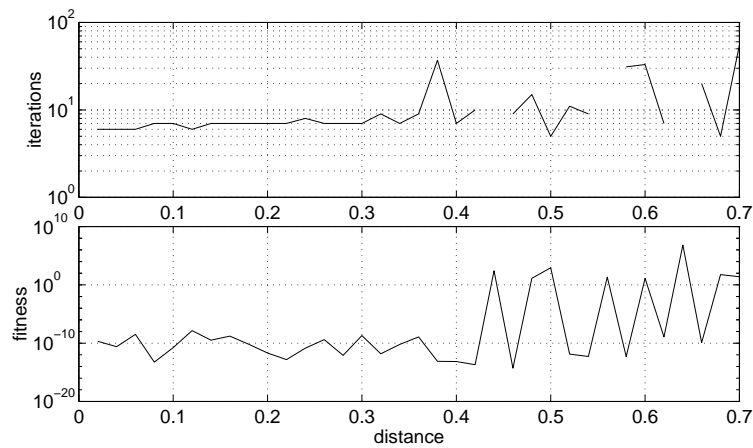


Figura 3.25: Modelo circular. Dinámica ($\omega = 1.5$). 2 parámetros. No errores.

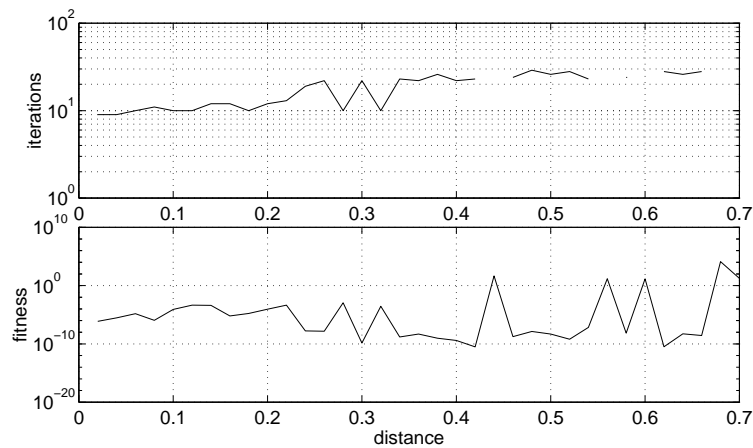


Figura 3.26: Modelo circular. Dinámica ($\omega = 1.5$). 4 parámetros. No errores.

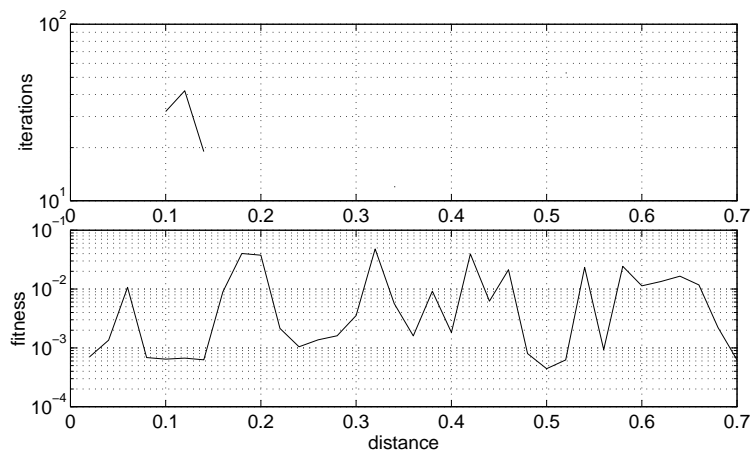


Figura 3.27: Modelo circular. Estática ($\omega = 0.0$). 4 parámetros. 2% de error aleatorio en las medidas.

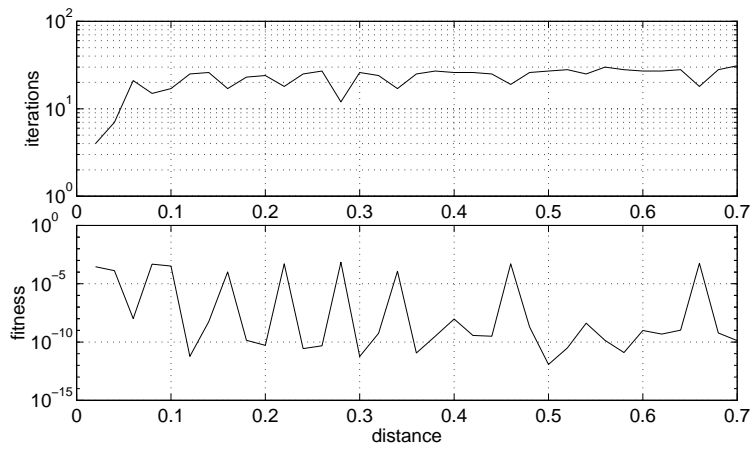


Figura 3.28: Modelo circular. Estática ($\omega = 0.0$). 4 parámetros. 2% de error aleatorio en las medidas. Criterio de convergencia relajado y refinamiento de malla en 4 veces.

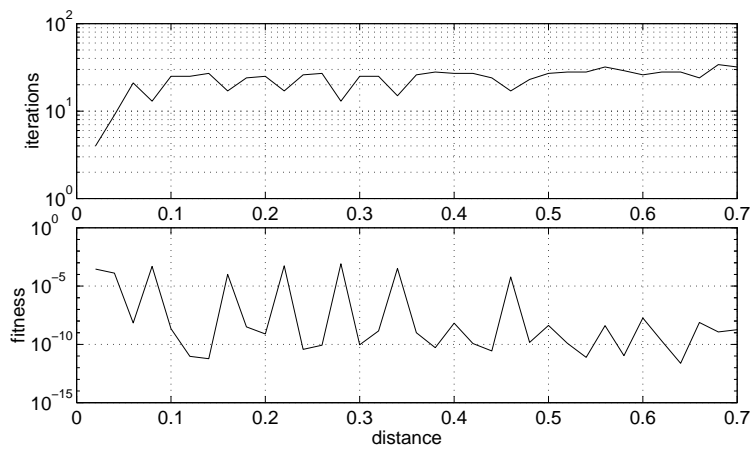


Figura 3.29: Modelo circular. Estática ($\omega = 0.0$). 4 parámetros. 2% de error aleatorio en las propiedades mecánicas.

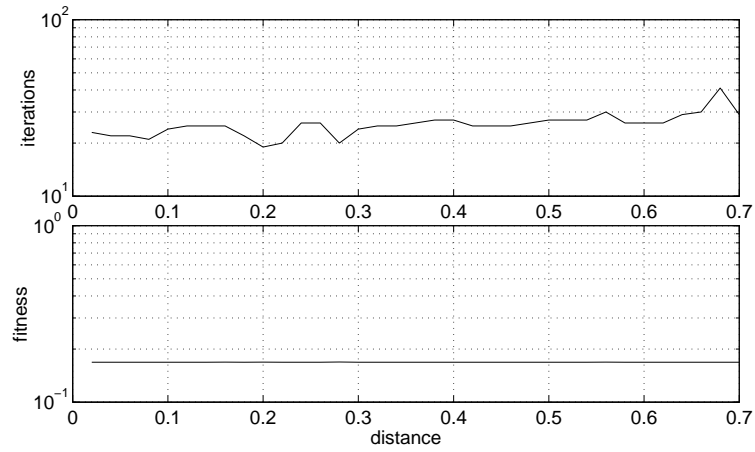


Figura 3.30: Modelo circular. Estática ($\omega = 0.0$). Grieta curvada mediante parámetros $[0.20 \quad -0.10 \quad 0.00 \quad 0.00 \quad 0.00]$. Sólo se permite una grieta recta (dando el mínimo estimado en $[0.0822 \quad 0.0437 \quad 0.7880 \quad -0.0743]$). No error. Refinamiento de malla de factor 4.

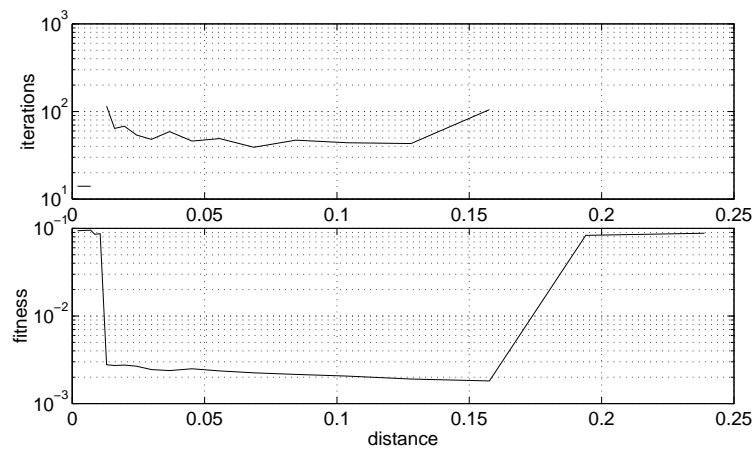


Figura 3.31: Modelo circular. Estática ($\omega = 0.0$). Grieta curvada mediante parámetros $[0.20 \quad -0.10 \quad 0.00 \quad 0.00 \quad 0.00 \quad 0.00]$. 6 Parámetros, y comienzo desde grieta recta. No error. Criterio de parada aumentado.

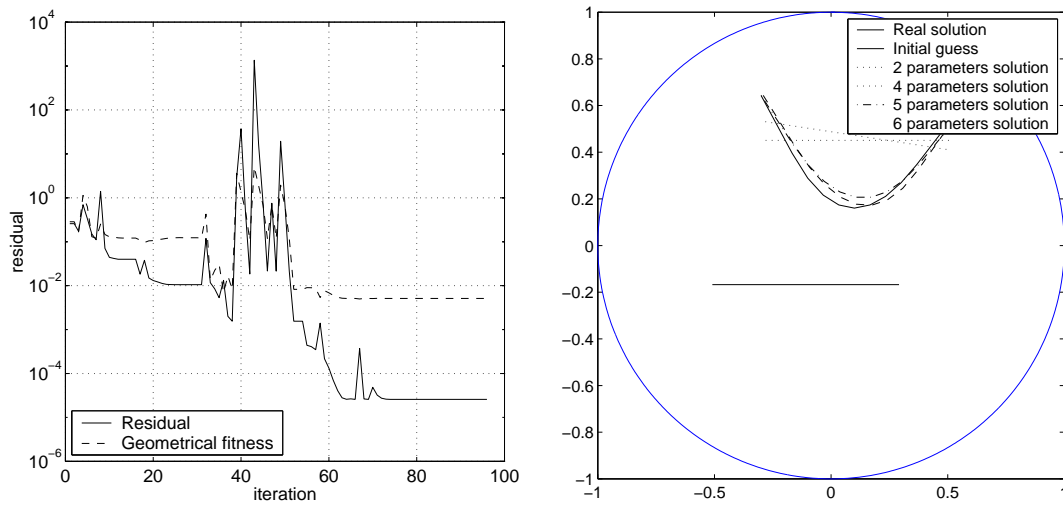


Figura 3.32: Estrategia global: parámetros permitidos secuencialmente: 2 - 4 - 5 - 6 Comienzo desde grieta recta a distancia 0.2. Modelo circular. Estática ($\omega = 0.0$). No error.

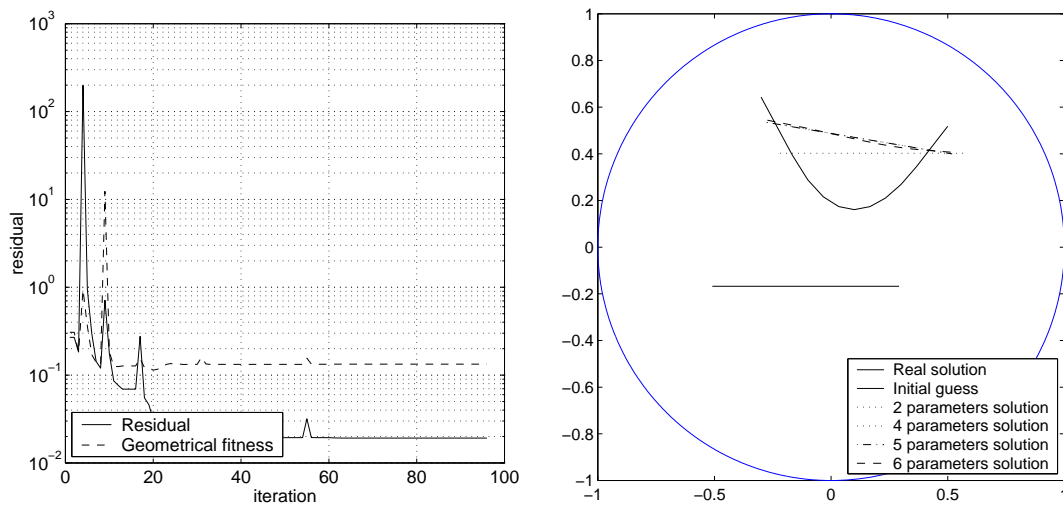


Figura 3.33: Estrategia global: parámetros permitidos secuencialmente: 2 - 4 - 5 - 6 Comienzo desde grieta recta a distancia 0.2. Modelo circular. Estática ($\omega = 0.0$). 10% de error en las mediciones.

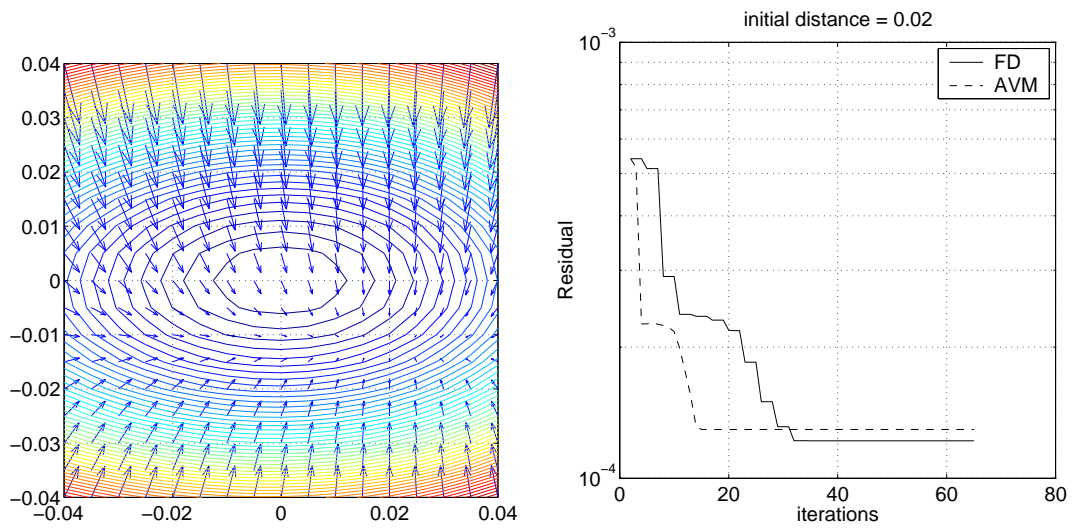


Figura 3.34: Inconsistencia entre diferencias finitas y Variable Adjunta. Izquierda: detalle del valor del funcional de costo y su gradiente por Variable Adjunta. Derecha: Evolución del funcional de costo usando diferencias finitas y Variable Adjunta: esta última queda atascada debido a que el gradiente por Variable Adjunta no apunta hacia el mínimo en un pequeño entorno. Discretización de $18 + 6 + 6$. Error del 2% en las mediciones.

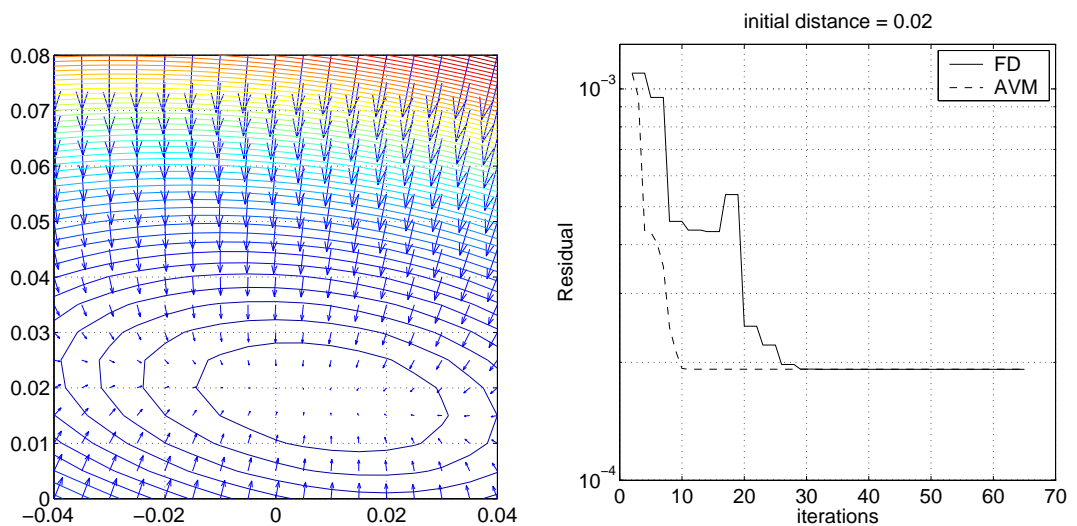


Figura 3.35: Inconsistencia entre diferencias finitas y Variable Adjunta. Izquierda: detalle del valor del funcional de costo y su gradiente por Variable Adjunta. Derecha: Evolución del funcional de costo usando diferencias finitas y Variable Adjunta: en este caso, un refinamiento de malla en un factor 4 mejora en gran medida esta convergencia en el pequeño entorno. Error del 2% en las mediciones.

3.4 Derivada Topológica

3.4.1 Verificación de la estimación de radio y residual

Como paso intermedio en una iteración del cálculo de la derivada topológica se incluye la estimación del radio en primer orden. En los siguientes ejemplos se muestra el valor de la función de coste o residuo de mediciones estándar para algunas variaciones interesantes.

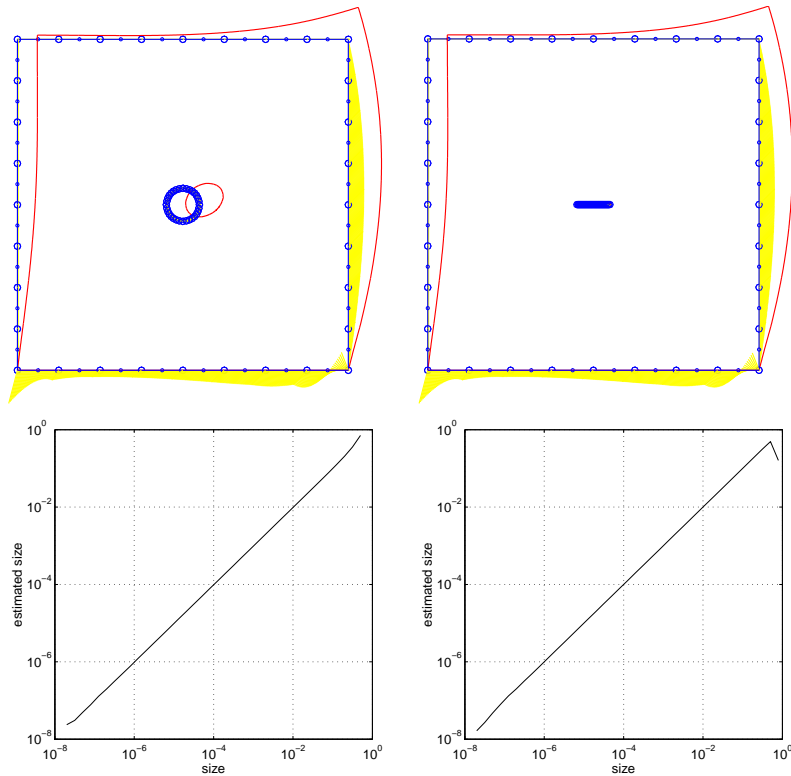


Figura 3.36: Arriba: Geometría de los dos problemas de prueba. Carga parabólica a la derecha, y mediciones en este mismo lado. Abajo: Correlación del radio real con el radio estimado.

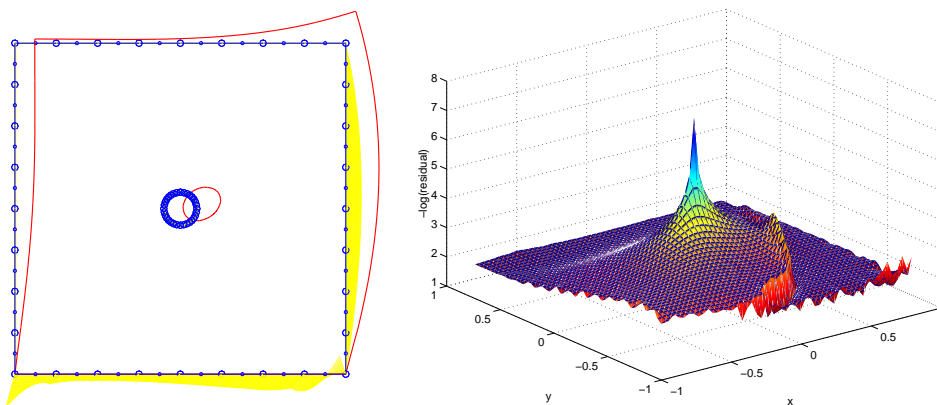


Figura 3.37: Problema con una cavidad. Residuo para cada posición del centro del círculo.

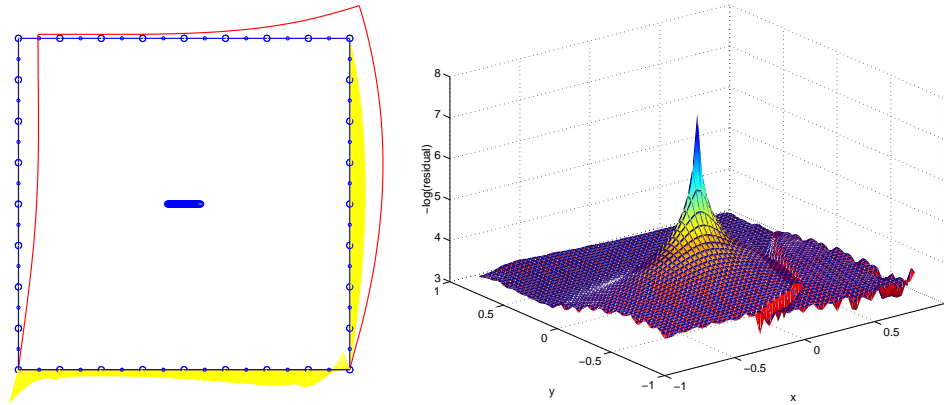


Figura 3.38: Problema con una grieta. Residuo para cada posición del centro del círculo.

3.4.2 Algoritmos genéticos

Se ha realizado una programación sencilla de algoritmos genéticos que maximizan el objetivo $-\log$ residual, y con los parámetros,

Número de miembros de la población	30
Número de generaciones	100
Probabilidad de mutación	0.02
Probabilidad de cruce	0.8
Probabilidad de torneo	0.7
Escala para mutaciones	0.1
Genes	Codificación real

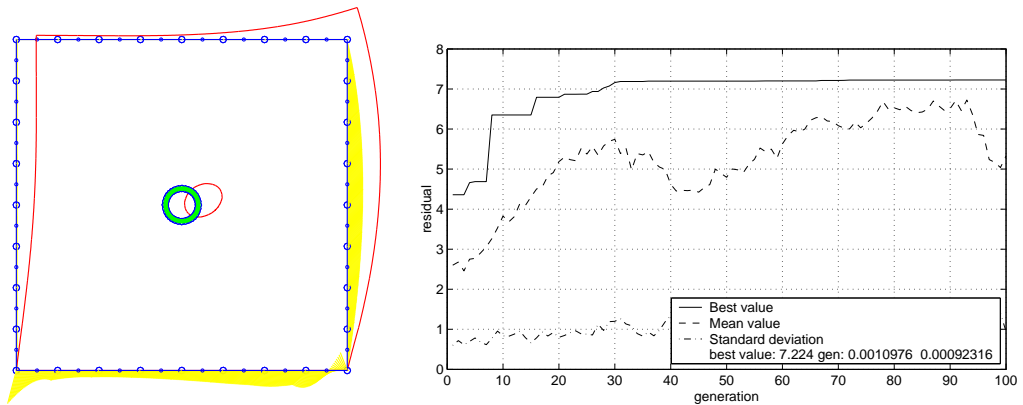


Figura 3.39: Problema con cavidad circular. Se encuentra una solución muy cercana (mejor gen con menos de 1% de distancia geométrica).

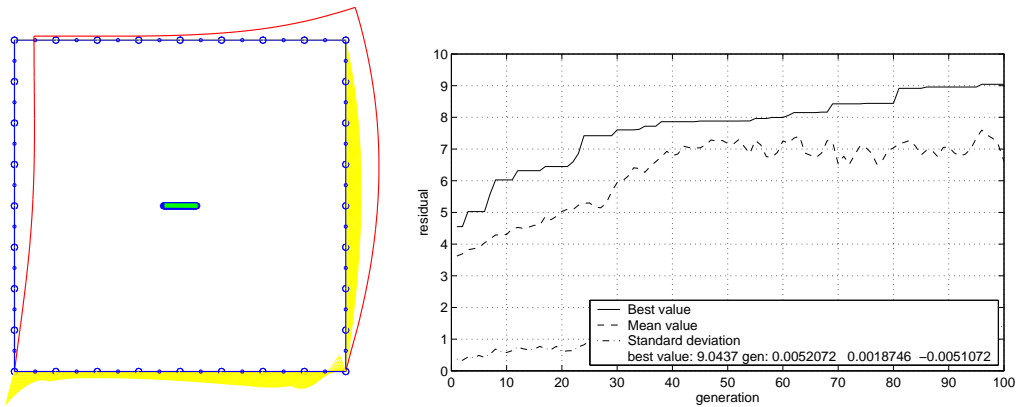


Figura 3.40: Problema con grieta. Se incluye como tercer parámetro el ángulo. Se encuentra asimismo una solución muy buena.

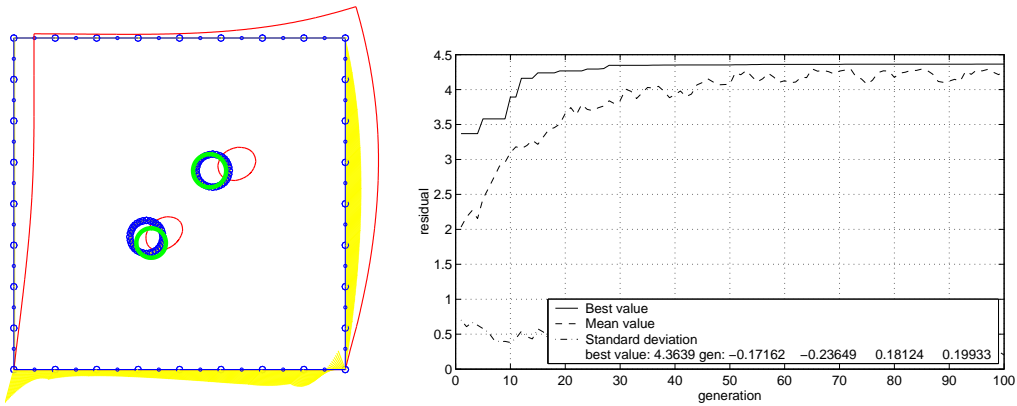


Figura 3.41: Problema con dos cavidades circulares. Esto implica cuatro parámetros. Se hace necesario aumentar en número de mediciones al doble para conseguir buenos resultados.

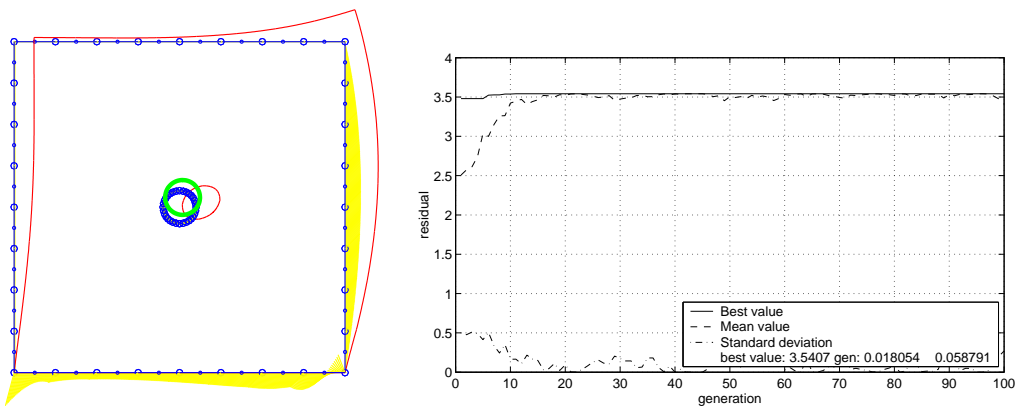


Figura 3.42: Problema con una cavidad circular. Se introduce un 10% de error en las mediciones. Aparece una solución muy cercana a la real.

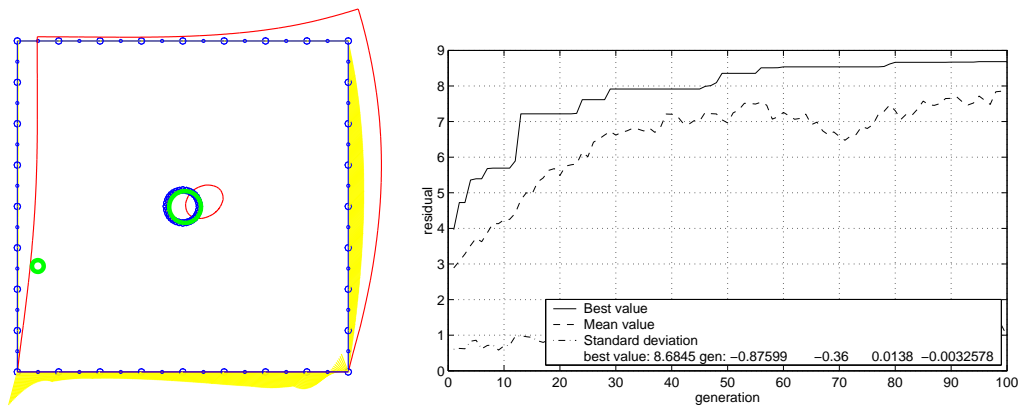


Figura 3.43: Problema con una cavidad circular. Se permiten dos cavidades, de modo que una converja a la solución real y la otra se desvanezca virtualmente.

3.5 Ejemplos de demostración

3.5.1 Detección de una inclusión subsuperficial

Se presenta un problema que simula un suelo con dos estratos (26 elementos cuadráticos), en el que se busca una inclusión aplanada en el estrato inferior de menor rigidez. Excitando y midiendo en una pequeña zona de superficie (5 nodos) se localiza la posición, tamaño y aplanamiento de la inclusión en 43 iteraciones. Esto podría simular la detección de un depósito de aceite, una tubería de drenaje o una oquedad en una pieza de acero, por ejemplo.

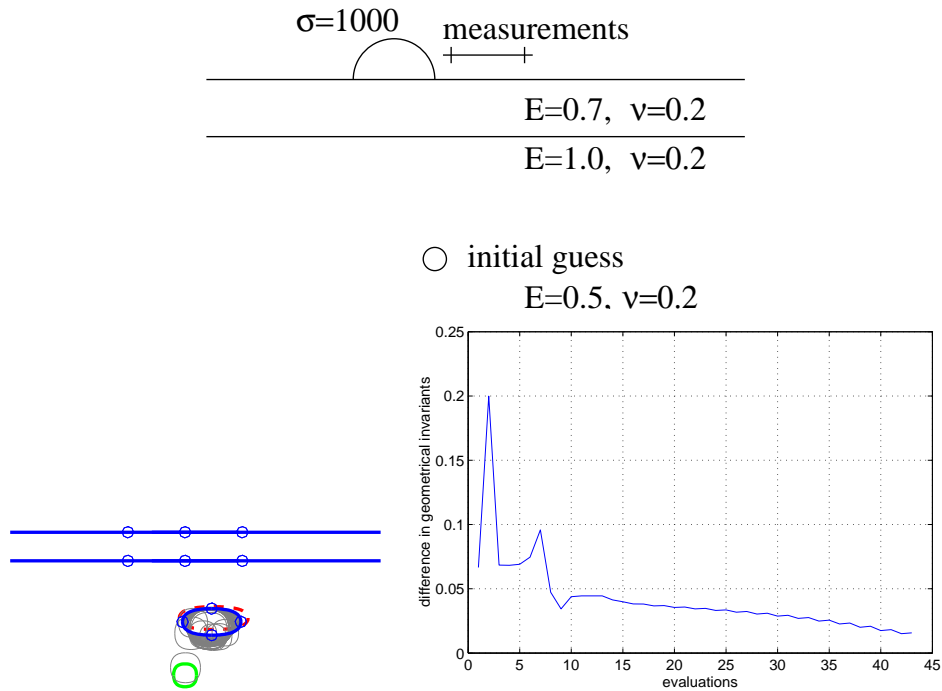


Figura 3.44: Arriba: Definición del modelo. Abajo: Iteraciones y error geométrico.

A continuación se repite el problema con la medición en un sólo nodo de la forma de onda y descomponiéndola en sus armónicos, cuyas amplitudes y desfases se toman como datos. Esto tiene como ventaja la reducción notable de la instrumentación a utilizar.

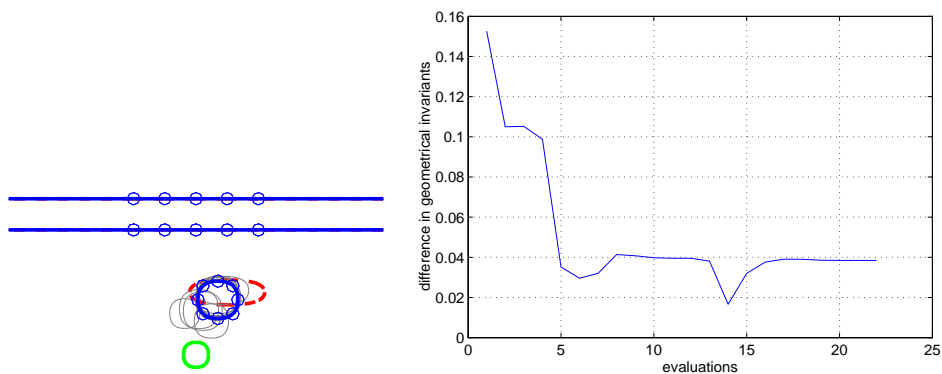


Figura 3.45: Iteraciones y error geométrico. Análisis de la forma de onda, con una sola medición.

3.5.2 Identificación de la posición y longitud de una grieta de delaminación en una viga.

En este problema se simula la búsqueda de una grieta que aparece en una viga a voladizo, lo cual se consigue en 24 y 36 iteraciones por el método de 5 mediciones y 1 medición de la forma de onda respectivamente. Esto podría simular la búsqueda de una delaminación en una viga de composite isótropo, por ejemplo un ala de avión.

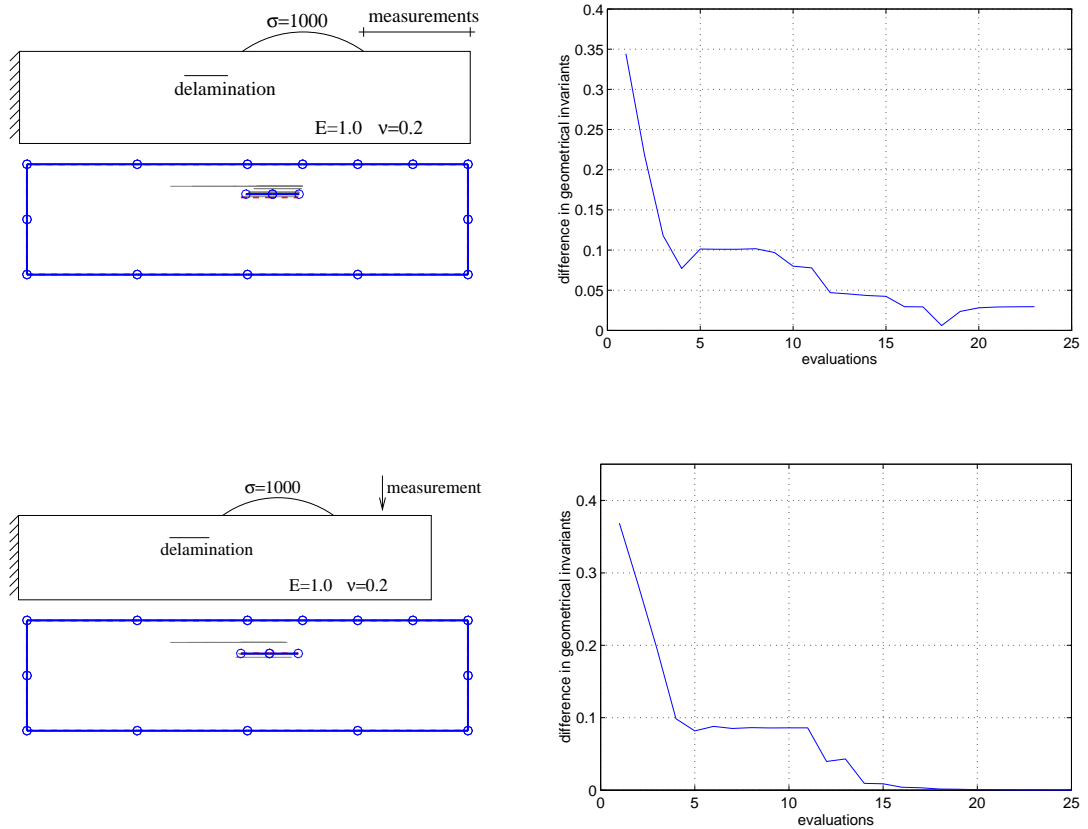


Figura 3.46: Arriba: Análisis con 5 datos. Abajo: Análisis de forma de onda en 1 punto. Izquierda: definición del modelo e iteraciones, Derecha: Error geométrico.

Capítulo 4

Conclusiones

4.1 Sobre el gradiente por derivación directa

Se ha desarrollado un procedimiento para la obtención del gradiente o sensibilidad de ecuaciones integrales de contorno singulares o hipersingulares del MEC. La sensibilidad se obtiene analíticamente previa e independientemente de la discretización y parametrización. Finalmente se estudian las condiciones de continuidad requeridas a todos los núcleos, pesos, discretización y parametrización.

Se ha llevado a cabo su implementación numérica completa y comprobación. La convergencia frente a un refinamiento de la malla y la coincidencia visual con diferencias finitas permiten concluir que se alcanza la solución exacta. El estudio ha revelado ciertas inestabilidades numéricas de las diferencias finitas relacionadas con la elección de la distancia finita y con la frecuencia, lo cual acentúa las ventajas de este método analítico.

La funcionalidad del gradiente en la identificación se confirma con éxito en búsquedas completas, que incluyen errores simulados en mediciones, modelo, geometría y frecuencia.

Finalmente se presenta una técnica basada en el estudio de la forma de onda estacionaria por descomposición, que permite la medición en un solo punto.

4.2 Sobre la elección del algoritmo de optimización

Se comparan los algoritmos de optimización sin prescripciones en su aplicación a PII con objeto de encontrar el más idóneo.

El método de Gauss-Newton presenta las menores probabilidades de alcanzar la solución correcta (menor ámbito de convergencia), mientras los demás no muestran diferencia. Pero según la velocidad (número de iteraciones) es mucho más rápido el Gauss-Newton junto al Levenberg-Marquardt, dando al primero velocidad cerca de la solución y al último la combinación de rapidez y robustez. El uso de búsqueda lineal es una decisión crítica, ya que retarda mucho la convergencia, si bien se hace necesaria para problemas complejos. Por último, el uso del gradiente analítico expuesto acelera regularmente el cálculo.

4.3 Sobre el método de la variable adjunta

Se ha adaptado, implementado y comprobado al caso de grietas en dinámica transitoria, un método para el cálculo del gradiente de la función de costo con integrales exclusivamente de contorno. Las ventajas de este método son la facilidad de programación y un coste computacional mínimo.

Los resultados numéricos concuerdan con lo esperado, y hay que cuidar algunas consideraciones: se requiere gran precisión en el cómputo de los factores de intensidad de tensiones. También hay que cuidar la proximidad de frecuencias propias. Es interesante comprender que las ecuaciones del método dan la sensibilidad del problema continuo (antes de discretizar), con lo que la aplicación

a problemas discretos provoca una cierta inconsistencia, que explica muchos comportamientos encontrados.

4.4 Sobre la convergencia del PI

Se ha demostrado cómo el suministro del gradiente es un factor decisivo en la resolución debido a la importante aceleración que proporciona y a una mayor exactitud del gradiente en comparación con diferencias finitas, dados sus problemas numéricos derivados de la elección de distancia finita.

Un factor importante es el número de parámetros o incógnitas, que reducen drásticamente la estabilidad y rango de convergencia. Esto se puede solucionar dosificando los parámetros, y jugando con el compromiso entre exactitud de representación de la solución deseada frente a un reducido número de parámetros. En este punto entra también la importancia de una buena elección de parametrización para conjugar ambas virtudes.

Los errores simulados en los modelos tienen efectos importantes, pero controlables aumentando el número de puntos y frecuencias medidas.

4.5 Sobre la derivada topológica

La derivada topológica da la variación de la respuesta cuando aparece un defecto. Entre sus ventajas se encuentra el ínfimo coste computacional en comparación con cualquier otro método (del orden de magnitud del coste del cómputo del tensor de tensiones en un punto), y la reducción de parámetros, al optimizar internamente el tamaño del defecto.

La capacidad de buscar simultáneamente muchos defectos con facilidad permite una identificación automática del número de ellos aprovechando el efecto de la reducción a cero del área de los defectos inexistentes.

4.6 Trabajos futuros

- El trabajo más inmediato, en realización actualmente, trata de la extensión de la derivada topológica a la dinámica estacionaria, y más adelante a inclusiones.
- Las técnicas menos clásicas de computación suave son un campo interesante por explorar. Parecen especialmente indicadas para su uso acoplado con la derivada topológica.
- Puesto que los métodos desarrollados hasta aquí parecen listos para su uso, el siguiente paso natural es la confirmación experimental.
- Las fórmulas de sensibilidad geométrica y topológica se han de extender a medios anisótropos, con el objeto de entrar completamente en la evaluación de materiales avanzados.

Se pueden obtener ejemplos numéricos para comparación y software funcional del autor en *grus@ugr.es*

Bibliografía

- [1] J. B. Abdallah. *Inversion gaussienne appliqué à la correction paramétrique de modèles structuraux*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1995.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover, 1964.
- [3] R. Aithal and S. Saigal. Shape sensitivity in thermal problems using bem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15:115–120, 1995.
- [4] E. Alarcon and P. Reyero. Método de los elementos de contorno. Guía de Introducción.
- [5] M. Altmann. About nonuniform rational b-splines - nurbs. Worcester Polytechnic Institute, USA. www.cs.wpi.edu/~matt/cs563/talks/nurbs.html.
- [6] S. Andrieux, A. B. Abda, and H. D. Bui. Reciprocity principle and crack identification. *Inverse Problems*, 15:59–65, 1999.
- [7] M. R. Barone and R. J. Yang. A boundary element approach for recovery of shape sensitivities in three-dimensional elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989.
- [8] D. M. Bates and D. G. Watts. *Relative curvature measures of nonlinearity*. D. Jacobs Ed, Academic Press, London, 1980.
- [9] L. M. Bezerra and S. Saigal. A boundary element formulation for the inverse elastostatics problem (iesp) of flaw detection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:2189–2202, 1993.
- [10] G. E. Blandford. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17:387–404, 1981.
- [11] M. Bonnet. On some inverse problems for determining volumic defects by electric current using boundary integral equation approaches: an overview. *JASCOME*, 1989.
- [12] M. Bonnet. Shape identification using acoustic measurements: A numerical investigation using bie and shape differentiation. In H. D. Bui M. Tanaka, editor, *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, pages 191–200, 1992.
- [13] M. Bonnet. Bie and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15:121–136, 1995.
- [14] M. Bonnet. Bie formulations for first- and second-order shape sensitivity of elastic fields. *Computer and Structures*, 56:799–811, 1995.
- [15] M. Bonnet. *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. Wiley, 1995.

- [16] M. Bonnet. A general boundary-only formula for crack shape sensitivity of integral functionals. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série IIb/ Mécanique des Solides et des Structures*, June 7 1999.
- [17] M. Bonnet, R. Gallego, and J. Domínguez. Elementos de contorno de transición para el cálculo de factores de intensidad de tensiones. *Métodos de Contorno*, 1996.
- [18] M. Bonnet, G. Rus, and R. Gallego. Convergence of crack identification using avm gradient and bfgs optimization. *to be published*, 2001.
- [19] M. Bonnet, G. Rus, and R. Gallego. Crack shape sensitivity by the adjoint variable method using a boundary-only formula. *to be published*, 2001.
- [20] A. Boström, G. Johansson, and P. Olsson. On the derivation of a hierarchy of dynamic equations for a homogeneous, isotropic, elastic plate. *International Journal of Solids and Structures*, 38:2487–2501, 2001.
- [21] A. Boström and H. Wirdelius. Ultrasonic probe modeling and nondestructive crack detection. *J. Acoust. Soc. Am.*, 97:2836–2848, 1995.
- [22] C. A. Brebbia and J. Domínguez. *Boundary Elements, An Introductory Course*. CMP, McGraw Hill, 1992.
- [23] D. Broek. *Elementary engineering fracture mechanics*. Kluwer academic publishers, 1997.
- [24] K. Bryan, V. Liepa, and M. Vogelius. Reconstruction of multiple cracks from experimental electrostatic boundary measurements. *NASA. ICASE Report*, 93-96:1–28, 1993.
- [25] H. D. Bui. *Inverse Problems in the Mechanics of Materials. An Introduction*. CRC, Eyrolles, 1994.
- [26] T. Burczynski. Recent advances in boundary element approach to design sensitivity analysis - a survey. In *Design Sensitivity Analysis*, pages 1–25. M. Kleiber, 1993.
- [27] T. Burczynski, G. Kuhn, H. Antes, and M. Ńowakowski. Boundary element formulation of shape sensitivity analysis for defect identification in free vibration problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1997.
- [28] E. Calvo. *Análisis de sensibilidad en elasticidad mediante el método de los elementos de contorno. Aplicación a la optimización de formas*. PhD thesis, Centro Politécnico de la Universidad de Zaragoza, september 1995.
- [29] F. Chirino. Hypersingular boundary element program for harmonic crack solution. Fortran 77., 1998.
- [30] F. Chirino and R. Abascal. Cálculo de factores de intensidad de tensión estáticos y dinámicos mediante el método de los elementos de contorno con formulación hipersingular. *Métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 14(3):339–364, 1998.
- [31] A. Constantinescu and N. Tardieu. Identification strategies for recovering material parameters from indentation experiments. In M. Tanaka and G. Dulikravich, editors, *Inverse problems in engineering mechanics II*, 2000.
- [32] T. A. Cruse. *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [33] D. Delaunay, Y. Jarny, and K. A., editors. *Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice.*, Proc. 2nd Conf. on Inverse Problems in Engineering, June 9-14, 1993, Le Croisic, France, 1996.

- [34] J. E. Dennis, D. M. Gay, and R. E. Welsch. Algorithm 573 nl2sol - an adaptive nonlinear least-squares algorithm [e4]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 7(3):369–383, 1981.
- [35] Manuel Doblaré. *Fundamentos de Elasticidad Lineal*. Sintesis, 1998.
- [36] J. Domínguez. *Boundary Elements in Dynamics*. Elsevier, CMP, 1993.
- [37] N. A. Dumont. On the efficient numerical evaluation of integrals with complex singularity poles. *Engng. Analysis With Boundary Elements*, 13:155–168, 1994.
- [38] M. Elices. Mecánica de la fractura aplicada a sólidos elásticos bifimensionales. Apuntes del Departamento de Ciencia de Materiales, E.T.S.I. Caminos, C. y P., U.P.M.
- [39] D. Elizondo, C. Faure, and B. Cappelare. Automatic- versus manual- differentiation for nonlinear inverse modelling. In *INRIA, Rapport de Recherche*, volume 3981, 2000.
- [40] S. Ratnajeevan et al. Inverse problem methodology and finite elements in the identification of cracks, sources, materials, and their geometry in inaccessible locations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 27(3), May 1991.
- [41] T. Kowalczyk et al. An extensible evolutionary algorithm approach for inverse problems. In G. S. Dulikravich M. Tanaka, editor, *Inverse problems in Engineering Mechanics*, 1998.
- [42] H. L. Ewalds and R. J. H. Wanhill. *Fracture Mechanics*. Arnold DUM, 1984.
- [43] C. Faure. Automatic differentiation for adjoint code generation. In *INRIA, Rapport de Recherche*, volume 3555, 1998.
- [44] H. E. Fettis. Expressions for divergent integrals in terms of convergent ones. In G. Hammerlin, editor, *Numerical Integration, International Series of Numerical Mathematics 57*. Birkhauser, 1991.
- [45] R. Gallego and J. Domínguez. Hypersingular bem for transient elastodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:1681–1705, 1996.
- [46] R. Gallego and J. Domínguez. Solving transient dynamic crack problems by the hypersingular boundary element method. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 20(5):799–812, 1997.
- [47] R. Gallego and G. Rus. Topological derivatives for elasticity by boundary integral equations. *To be published*, 0:0, 2001.
- [48] R. Gallego and J. Suarez. Numerical solution of the variation boundary integral equation for inverse problems, October 1999.
- [49] R. Gallego and J. Suarez. Solution of inverse problems by boundary integral equations without residual minimization, September 1999.
- [50] R. Gallego and J. Suarez. Solution of inverse problems by boundary integral equations without residual minimization, September 1999.
- [51] R. Gallego and J. Suarez. Variation boundary integral equation for flaw shape identification. In *3rd Int. Conf. on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, June 1999.
- [52] D. Goldberg. *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison-Wesley Publ, Reading, Massachussets, etc., 1989.
- [53] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integral, series, and products*. Academic Press, 1963.

- [54] M. Guiggiani. Direct evaluation of hypersingular integrals in 2D BEM. In W. Hackbusch / Vieweg, editor, *Proc. 7th GAMM Seminar on Numerical Techniques for Boundary Element Methods / Notes in Numerical Fluid Mechanics*, volume 333, pages 23–34, Kiel, Germany, 1991.
- [55] M. Guiggiani. Hypersingular formulation for boundary stress evaluation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1993.
- [56] M. Guiggiani. Hypersingular boundary integral equations have an additional free term. *Computational Mechanics*, 16:245–248, 1995.
- [57] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, F. J. Rizzo, and T. J. Rudolphi. Hypersingular boundary integral equations: a new approach to their numerical treatment. In L. Morino and R. Piva / Springer, editors, *Proc. IABEM Symposium / Boundary Integral Methods*, pages 211–220, Rome, Italy / Berlin, Germany, 1990.
- [58] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, T. J. Rudolphi, and F. J. Rizzo. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *J. Appl. Mech.*, 59:604–614, 1992.
- [59] J. Haataja. Matlab function for simulating a simple real-coded genetic algorithm. Center for Scientific Computing, Box 405, FIN-02101 Espoo. Internet: Juha.Haataja@csc.fi, 2000.
- [60] Per Christian Hansen. *Rank-deficient and discrete ill-posed problems. Numerical aspects of linear inversion*. SIAM, 1997.
- [61] John Hertz, Anders Krogh, and Richard G. Palmer. *Introduction to the theory of neural computation*. Addison Wesley, 1991.
- [62] Q. Huang and T.A. Cruse. Some notes on singular integral techniques in boundary element analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 36:2643–2659, 1993.
- [63] MathWorks Inc. Matlab optimization toolbox user’s guide. <http://www.mathworks.com>, 1996.
- [64] J. E. Dennis Jr. and Robert B. Schnabel. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. SIAM, 1983, 1996.
- [65] L. Jun, G. Beer, and J. L. Meek. Efficient evaluation of integrals of order $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ using Gauss method. *Engng. Analys.*, 2:118–123, 1985.
- [66] H. Kagawe. The two dimensional inverse acoustic scattering for shape identification. In Tanaka et al. Bui, editor, *Inverse problems in Engineering Mechanics*, 1994.
- [67] M. F. Kanninen and C.H. Popelar. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford Science Publications, 1985.
- [68] A. Kassab, F. Moshley, and A. Daryapubkar. Nondestructive detection by an inverse elastostatic boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13:45–55, 1994.
- [69] A. Kirsch. The domain derivative and two applications in inverse scattering theory. *Inverse Problems*, 9:81–96, 1993.
- [70] G. Kirsch. The effect of circular holes on stress distributions in plates. *V.D.I.*, 42, 1898.
- [71] H. Koguchi and H. Watabe. Improving defects search in structure by boundary element and genetic algorithm scan method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 19:105–116, 1997.

- [72] G. Krishnasamy, L. W. Schmerr, T. J. Rudolphi, and F. J. Rizzo. Hypersingular boundary integral equations: Some applications in acoustic and elastic wave scattering. *Transactions of the ASME*, pages 404–415, 1990.
- [73] A. R. Krommer and C. W. Ueberhuber. *Computational Integration*. SIAM, 1998.
- [74] S. Kubo. Classification of inverse problems arising in field problems and their treatments. In H. D. Bui M. Tanaka, editor, *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, pages 51–60, 1992.
- [75] D. Laplue, G. Guerlement, and D. Lamblin. Implementation of simulated annealing to the optimal plastic design of solid cylindrical shells without axial loading. In B. Suárez E. Oñate, G. Bugeda, editor, *ECCOMAS2000*, 2000.
- [76] R. M. Lewis. Numerical computation of sensitivities and the adjoint approach. *Tech. Report No.97-61, ICASE, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA*, 1997.
- [77] J. A. Liggett and J. R. Salmon. Cubic spline boundary elements. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, 1981.
- [78] E. D. Lutz. *Numerical methods for hypersingular and near-singular boundary integrals in fracture mechanics*. PhD thesis, Cornell University, Ithaca, New York, USA, 1991.
- [79] V. Mantic and F. Paris. Existence and evaluation of the two free terms in the hypersingular boundary integral equation of potential theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 9:1–8, 1995.
- [80] J. Martínez and J. Domínguez. On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1941–1950, 1984.
- [81] M. Masmoudi. A synthetic presentation of shape and topological optimization. In *INRIA, Rapport de Recherche*, pages 121–127, 1998.
- [82] T. Matsumoto and M. Tanaka. Boundary integral formulation of design sensitivities for potential problems. *Engng Anal Boundary Elements*, 7-1:33–38, 1990.
- [83] T. Matsumoto, M. Tanaka, M. Miyigawa, and N. Ishii. Optimum design of cooling lines in injection moulds by using boundary element design sensitivity analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 14:177–186, 1993.
- [84] S. C. Mellings and M. H. Aliabadi. Dual boundary element formulatoin for inverse potential problems in crack identification. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 12:275–283, 1993.
- [85] S. C. Mellings and M. H. Aliabadi. Flaw identification using the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:399–419, 1995.
- [86] William Menke. *Geophysical data analysis, Discrete Inverse Theory*. Academic Press INC., 1984.
- [87] R. A. Meric. Differential and integral sensitivity formulations and shape optimization by bem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15:181–188, 1995.
- [88] A. K. Mitra and S. Das. Solution of inverse problems by using the boundary element method. *Boundary Element Technology*, 1990.
- [89] T. Mura, T. Koya, C. Hsieh, Z. A. Moschovidis, and Z. Gao. Inverse problems associated with nondestructive evaluation of plastic damages in solids.

- [90] K. Nakahata and M. Kitahara. Inversion of defects by linearized inverse scattering methods with measured waveforms. In M. Tanaka and G. Dulikravich, editors, *Inverse problems in engineering mechanics II*, 2000.
- [91] N. Nishimura. Crack determination problems. *Theoretical and Applied Mechanics*, 46:39–57, 1997.
- [92] N. Nishimura and S. Kobayashi. A boundary integral equation method for an inverse problem related to crack detection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:1371–1387, 1991.
- [93] N. Nishimura and S. Kobayashi. Determination of cracks having arbitrary shapes with the boundary integral equation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 15:189–195, 1994.
- [94] Federico Paris. *Teoría de la Elasticidad*. GERM, 1996.
- [95] Polch, Cruse, and Huang. Traction bie solutions for flat cracks. *Computational Mechanics*, 2:253–267, 1987.
- [96] M Prud'homme and T. H. Nguyen. Iterative solution to the inverse steady state convection: analysis of the convergence process. In B. Suárez E. Oñate, G. Bugeda, editor, *ECCOMAS2000*, 2000.
- [97] L. Råde and B. Westergren. *Mathematics Handbook for Science and Engineering*. Springer, 1999.
- [98] T. J. Rudolph. The use of simple solutions in the regularization of hypersingular boundary integral equations. *Math. Comput. Modelling*, 15:269–278, 1991.
- [99] G. Rus and R. Gallego. Acoplamiento del método de los elementos finitos y elementos de contorno en elastodinámica plana armónica. sevilla, june 2000. In R. Abascal, J. Domínguez, and G. Bugeda, editors, *CIMNE*, 1999.
- [100] G. Rus and R. Gallego. Solution of identification inverse problems by a sensitivity boundary integral equation. barcelona, september 2000. In B. Suárez E. Oñate, G. Bugeda, editor, *ECCOMAS2000*, 2000.
- [101] G. Rus and R. Gallego. Optimization algorithms for identification inverse problems. In B. Suárez E. Oñate, G. Bugeda, editor, *CMEM2001*, 2001.
- [102] J. N. Goodier S. Timoshenko. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1951.
- [103] A. Sáez, R. Gallego, and J. Domínguez. Hypersingular quarter-point boundary elements for crack problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 38:1681–1701, 1995.
- [104] V. Saldek, J. Sladek, and M. Tanaka. Regularization of hypersingular and nearly singular integrals in the potential theory and elasticity. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 36:1609–1628, 1993.
- [105] D. Schnur and N. Zabarás. An inverse method for determining elastic material properties and a material interface. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:2039–2057, 1992.
- [106] A. A. Schwab. Boundary integral equations for inverse problems in the elasticity theory. *Journal of elasticity*, 1995.

- [107] B. Sensale, A. Herrera, and A. Piria. Optimización de forma de estructuras continuas por algoritmos naturales y el método de los elementos de contorno. In *Métodos Numéricos en la Ingeniería*, 1999.
- [108] J. Sokolowski and A. Zochowski. On topological derivative in shape optimization. In *INRIA, Rapport de Recherche*, pages 129–136, 1997.
- [109] J. Sokolowski and A. Zochowski. Topological derivatives for elliptic equations. INRIA. Inverse Problems, Control and Shape Optimization, 1998.
- [110] G. E. Stavroulakis. *Inverse and crack identification problems in engineering mechanics*. Kluwer Academics, 2000.
- [111] G. E. Stavroulakis. *Inverse and crack identification problems in engineering*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [112] G. E. Stavroulakis and H. Antes. Crack detection in elastostatics and elastodynamics. a bem modelling - neural network approach. In M. Tanaka and G. Dulikravich, editors, *Inverse problems in engineering mechanics*, 1998.
- [113] G. E. Stavroulakis and H. Antes. Flaw identification in elastomechanics: Bem simulation with local and genetic optimization. *Structural Optimization*, 1998.
- [114] F. J. Suárez. *Aplicación del Método de los Elementos de Contorno a la Resolución del Problema Inverso en Elastodinámica*. PhD thesis, Universidad de Granada, E.T.S.I. Caminos, C. y P., Noviembre 1998.
- [115] M. Suzuki and A. Murakami. Bayesian estimation for nonlinear inverse problems. In M. Tanaka and G. Dulikravich, editors, *Inverse problems in engineering mechanics II*, 2000.
- [116] M. Takadoya, M. Notake, and M. Kitahara. Neural network approach to the inverse problem of crack-depth determination from ultrasonic backscattering data. In M. Tanaka and H. D. Bui, editors, *Inverse problems in engineering mechanics. Proc. IUTAM Symposium Tokyo*, pages 413–422, 1992.
- [117] M. Tanaka and H. D. Bui, editors. *Inverse Problems in Engineering Mechanics.*, Proc. IUTAM Symp. on Inverse Problems in Engineering Mechanics 1992, Tokyo, Japan., 1992.
- [118] M. Tanaka and H. D. Bui, editors. *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Tokyo, Japan, 1992.
- [119] M. Tanaka and H. D. Bui. *Inverse Problems in Engineering Mechanics*. Balkema, 1994.
- [120] M. Tanaka and G. S. Dulikravich, editors. *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Proc. Int. Symp. on Inverse Problems in Engineering Mechanics 1998 (ISIP'98), Nagano, Japan, 1998.
- [121] M. Tanaka and G. S. Dulikravich, editors. *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Proc. Int. Symp. on Inverse Problems in Engineering Mechanics 2000 (ISIP 2000), Nagano, Japan, 2000.
- [122] M. Tanaka and Y. Masuda. Boundary element method applied to some potential inverse problems. *Engineering Analysis*, 3-3:138–143, 1989.
- [123] M. Tanaka, T. Matsumoto, and S. Oida. Identification of unknown boundary shape of rotationally symmetric body in steady heat conduction via bem and filter theories. In M. Tanaka and G. Dulikravich, editors, *Inverse problems in engineering mechanics*, 1998.

- [124] M. Tanaka, T. Matsumoto, and T. Yano. A combined use of experimental design and kalman filter-bem for identification of unknown boundary shape for axisymmetric bodies under steady-state hear conduction. In M. Tanaka and G. Dulikravich, editors, *Inverse problems in engineering mechanics II*, 2000.
- [125] M. Tanaka and M.Ñakamura. Application of genetic algoritm to plural defects identification. In Tanaka et al. Bui, editor, *Inverse problems in Engineering Mechanics*, 1994.
- [126] M. Tanaka, V. Sladek, and J. Sladek. Regularization techniques applied to boundary element methods. *Appl. Mech. Rev.*, 47:457–499, 1994.
- [127] M. Tanaka and K. Yamagiwa. A boundary element method for some inverse problems in elastodynamics. *Appl. Math. Modelling*, 13, May 1989.
- [128] J. C. F. Telles. A self-adaptative coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 24:959–973, 1987.
- [129] N. Tosaka and A. Utani. New filter theory - boundary element method and its applicatoin to inverse problem. In Tanaka et al. Bui, editor, *Inverse problems in Engineering Mechanics*, 1994.
- [130] G. J. Vass. The bezier curve. a pov-ray tutorial. www.geocities.com/CapeCanaveral/Launchpad/7394/.
- [131] H. G. Walters, J. C. Ortiz, G. Steven Gipson, and J. A. Brewer III. Overhauser boundary elements in potential theory and linear elastostatics. *IUTAM Symposium, San Antonio, Texas*, 1987.
- [132] S. C. Wooh and I. M. Daniel. Three dimensional ultrasonic imaging of defects and damage in composite materials. *Materials Evaluation*, pages 1199–1206, 1994.
- [133] Z. Yao and B. Gong. Defect identification using boundary element methods of elastostatics. In Tanaka et al. Bui, editor, *Inverse problems in Engineering Mechanics*, 1994.
- [134] A. Young. A single-domain boundary element method for 3-d elastostatic crack analysis using continuous elements. *Int J Numer Methods Engrg*, 39:1265–1293, 1996.
- [135] F. Yuan, X. Cai, and M. Oezisik. Determination of elastic constant by inverse analysis. *Inverse Problem in Engineering*, 3:1–19, 1996.
- [136] N. Zabaras, K. A. Woodbury, and M. Raynaud, editors. *Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, Proc. 1st Conf. on Inverse Problems in Engineering, June 13-18, 1993, Palm Coast, Florida, USA, 1993.
- [137] X. Zeng and S. Saigal. An inverse formulation with boundary elements. *Transactions of the ASME*, 59:835–840, December 1992.