GARCIA
DE
MATEMATICA

2

ELEMENTOS

DE ARITMÉTICA,

ALGEBRA Y GEOMETRIA.

SU AUTOR

D. JUAN JUSTO GARCÍA, PRESBÍTERO, del gremio y Claustro de la Universidad de Salamanca, y uno de sus Catedráticos de Matemáticas, quien los ha corregido y añadido en esta

QUARTA IMPRESION

TOMO SEGUNDO.

CON PRIVILEGIO REAL.

SALAMANCA
EN LA IMPRENTA DE D. VICENTE BLANCO,
AÑO 1815.

ELEMENTOS

DE ARITMÉTICA, ALGEBRA Y GEOMETRIA.

SU AUTOR

D. JUAN JUSTO GARCÍA, PRESBÍTERO, del gremio y Claustro de la Universidad de Salamanca, y uno de sus Catedráticos de Matemáticas, quien los ha corregido y añadido en esta

QUARTA IMPRESION

TOMO SEGUNDO.

CON PRIVILEGIO REAL.

SALAMANCA
EN LA IMPRENTA DE D. VICENTE BLANCO,
AÑO 1815.

Indice de las materias del segundo Tomo.

ERRATAS ESENCIALES DE ESTE SEGUNDO TOMO QUE SE DEBEN CORREGIR ANTES DE LEERLE.

Pág.	Lín.	Dice	Ha de decir.
7	21	EA	OA
9	4	ER	EB
21	2	(28)	(29)
26	2	RS	RT
33	13	(fig.88)	(fig.38)
39	20	(82)	(51)
42	12	(36)	(86)
46	9	*ad*	*bd*
54	10	(135)	(135)(fig.64)
56	1	*ba:*	*ba::*
74	23	(167)	(168)
75	2	*id*	*id.*
79	13	EDC	EBC
91	27	*abcd*	*aebf*
92	11	*del como..*	*del cono*
96	3	(212)	(213)
101	8	EQPT..	EQFT
103	20	(203)	(202)
112	2	$2(2sen\frac{1}{2}a)^2$	$2(sen\frac{1}{2}a)^2$
117	8	(275)	(270)
122	16	BT	BTC
138	12	1.ª	2.ª
141	3	e^2t+e^2	e^2t+e^3
142	8	abe^2	abc^2
144	22	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{2}a$
148	3	$\frac{24}{4}a^4$	$\frac{14}{4}-a^4$
153	9	*hac*	*hdc*
164	20	CP	EP
166	23	BM*m*′	B*mm*′
171	18	MF	MT
173	últ	P*p*M*n*	P*pm*M
175	últ	*f*M	FM
185	últ	FM	FM′
186	últ	*f*M	*f*M′
188	10	$\frac{bb}{a}$	$\frac{b}{a}$
195	13	—*bb*	—*yy*
200	2	QM	Q*m*′
201	15	$(ad+zz)(xx-aa)$	$(aa+zz)(xx-aa)^2$
204	14	(374)	(384)
227	1 y 2	d^{n-2}, y $s^{m-1}t^{n-1}$	d^{m-1}, y $s^{m-2}t^{m-2}$
233	5	—*ad*	—*aad*
338	19	*vx*	*xx*
240	7	2,30258409.	2,30258509
244	18	$(y^{\frac{3}{8}})$	$(y^{-\frac{3}{8}})$
245	11	$-cxydx$	$-cz^2ydx$
247	1	dzx	zdx
250	6	$\frac{dx}{cos^2y}$	$\frac{dx}{cos^2x}$
252	2	$d(z^m$	$d(lz^m$
266	23	$+2ax$	$+2ay$
267	19	$\frac{1}{4}cxx\times =$	$\frac{1}{4}cxx\times y =$
278	15	$\frac{-ddy}{dx}$	$\frac{-ddy}{dx^2}$
283	9	$2axda$	$2axdx$
293	10 y 11	(471)..Sx^zazlx	(472) Sx^zdzlx

298	16...	*dxds*...	*dx:ds*
id.	17...	*subtangente*...	*su tangente*
303	21	$\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$
304	10	SPMA	SPMR
305	12	(163)	(183)
309	2	(472)	(272)
316	12	$\frac{1}{6}myyx$	$\frac{1}{3}myyx$
331	12	HTDN	HTDM

ELEMENTOS

DE GEOMETRÍA.

1 Todo lo que se presenta á nuestros sentidos ocupa algun espacio, y es á un mismo tiempo largo, ancho y grueso. Estos tres géneros de *estension*, *longitud*, *latitud* y *profundidad* son el obgeto de la *Geometría*, que los considera cada uno de por sí para averiguar mejor sus propiedades. Mide por eg. lo largo de un camino sin atender á su ancho, y la anchura de un rio sin calcular su profundidad. Llamarémos pues, *sólido* ó *cuerpo* lo que abraza anchura, longitud y grueso como una pared. Pero si consideramos en la pared su ancho y largo, es decir, su cara ó exterior sin atender á su grueso, nos habremos formado idea de la *superficie* ó latitud; y si miramos solamente á su largo sin hacer caso de lo ancho, tendremos la idea de la *linea*. Esta la consideran los Geómetras compuesta de partes infinitamente pequeñas que llaman *puntos*, y que son sus elementos: la superficie se la figuran como un tegido de infinidad de líneas, y el sólido como un

paquete de infinidad de superficies: de suerte que los estremos de una linea serán puntos, los de la superficie lineas, y los del sólido superficies.

De las Lineas y del Círculo.

2 Si se concibe que el punto A (fig. 1.ª) se mueve ácia B sin mudar de direccion ó por el camino mas derecho, dejando rastro tras sí, formará la línea recta AB, que será la mas breve distancia entre los dos puntos A y B: la única que se puede tirar entre ellos, y de consiguiente la verdadera medida de la distancia que hay entre los dos.

3 Por ser la linea recta la mas corta y la única que se puede tirar entre dos puntos A y B, quedará determinada la situacion ó posicion de una recta en señalando dos puntos, por donde debe pasar: y asi dos lineas rectas qualesquiera AS, AB no pueden tener dos puntos comunes, ó no se pueden cortar sino en un solo punto A; porque ningun otro está en la direccion de las dos.

4 Si el punto A que trazó la recta AB, hubiera caminado ácia B por otro camino diferente del recto, esto es, mudando á cada paso de direccion, hubiera descrito una linea curva, qual es AOB ó ADB: y como se puede ir desde A á B por infinitos caminos,

habrá una infinidad de lineas curvas, siendo asi que es única la especie de las rectas.

5 Parar tirar lineas rectas en el papel sirve la *regla*, *pluma* y *lapicero*, instrumentos vulgares y conocidos de todos: que saben que la regla ha de estar perfectamente derecha, y ha de tener en uno de sus lados un chaflan ó rebajo para que quando se tiren las lineas con pluma y tinta, no se manche el papel.

6 Para trazar lineas en el terreno hay que prevenir piquetes de todos tamaños, ó palos labrados con su punta que clave en el suelo, y hendidos en el otro estremo para aplicarles en él un papel ó carton que los haga distinguir de lejos: los quales se llaman *jalones*.

En un terreno llano se puede trazar una linea recta, si no ha de ser muy larga; atando los dos estremos de un bramante dado de greda algo estirado, á dos piquetes A, B (fig. 2.ª) puestos en los dos estremos de la linea: se tira del bramante ácia arriba, y dejándole caer con ímpetu contra el suelo, dejará impresa en él la recta que se pide.

Si ha de ser muy larga, se fija en uno de sus estremos B (fig. 3.ª) un jalon A que quedará derecho sobre el suelo, si sigue la direccion de un hilo con un plomo, y otro M en D: despues se ponen otros dos T, N &c. intermedios ; pero de suerte que mirando desde A el jalon M, se confunda con él, y seguramente estarán A y M en una misma linea BD, y lo mismo qualesquiera otros T, N, &c. intermedios que se coloquen del mismo modo. Quando la linea es demasiado larga, se divide la operacion en dos, tres ó mas estaciones : y si median cuestas ó barrancos se alinean los piquetes segun exîjan las circunstancias del terreno y aconseje la práctica, y el exercicio.

7 En la práctica de medir una linea qualquiera, que consiste en averiguar las veces que en ella cabe otra linea conocida que se toma por la unidad, como una linea de un pie, de una vara ; no puede haber dificultad : y asi solo advertirémos que los Prácticos en lugar de sogas de cáñamo, esparto &c. que padecen variaciones con el temporal, usan de una cadena de alambre grueso ó de hierro, cuyos eslabones suelen ser de un pie ó de una vara cada uno.

8 La principal medida que rige en Castilla, es la *Vara* que llaman de Burgos, señalada por Felipe II en su Pragmática del año de 1568, y compuesta de tres pies, cada pie de doce pulgadas, cada una de doce lineas &c. Tambien se usa del *Estadal*, que se compone de diez pies castellanos. Por lo que hace al tamaño de la vara de Aragon, Valencia,

y la media Cana de Cataluña, 95 palmos de los quatro en que se divide la vara de Castilla, equivalen á 102 Aragoneses, á 88 palmos Valencianos y á 100 Catalanes.

9 La medida mas general, y á que suelen reducirse las demas, es el *Pie de Rey*, sesta parte de la *Toesa*, medida francesa. Dicho pie tambien se divide en 12 pulgadas, cada pulgada en 12 lineas &c. Para reducir á esta medida la de los diferentes pies de las demas Provincias de Europa han considerado los Geómetras dividida en diez partes iguales la linea que es $\frac{1}{144}$ de pie : y de las 1440 partes que por esta cuenta tiene el pie de Rey, han encontrado que tiene el pie de.....

Castilla.. $1234\frac{2}{7}$	Venecia.. 1540	Suecia............ 1320
Roma.... 1320	Rhin..... $1391\frac{1}{10}$	Dinamarca....... $1403\frac{3}{5}$
Londres. 1350	Bolonia.. $1682\frac{2}{5}$	Constantinopla. 3120

Por medio de esta tabla se reducirán con una simple regla de tres los pies de una Nacion á los de otra qualquiera ; pero quando haya que reducir á pies castellanos los franceses, será mejor usar de la razon sencilla de 6 : 7 que tiene el castellano al frances con poca diferencia.

10 De las lineas curvas solo hablarémos por ahora de la *circunferencia del círculo*. Asi se llama la linea curva cerrada ADCE (fig. 4.ª)

que traza el estremo A de una linea AO fija en O, dando una vuelta entera al rededor de dicho punto O que se llama *centro*. Al espacio encerrado por dicha curva llamamos *círculo*: á las rectas AO, OD, OE tiradas del centro á la circunferencia *radios*; y *diámetro* á qualquiera AC que pasando por el centro se termina por ambas partes en la circunferencia.

11 Como cada radio es igual á la linea AO que traza la curva, serán todos los radios iguales, y todos los puntos de la circunferencia distarán igualmente del centro. Los diámetros tambien son todos iguales; pues se componen de dos radios.

12 Qualquiera porcion TCP de circunferencia se llama *arco*, y *cuerda* ó *subtensa* de dicho arco la recta TP tirada por sus dos estremos T, P. Bien se ve que los arcos iguales tienen cuerdas iguales AE, AD en un mismo ó en iguales círculos; y si las cuerdas son iguales lo serán tambien los arcos: pues si doblando el círculo por AC se sobrepone el arco y cuerda ARE á AQD; caerá el punto E sobre D, y todos los puntos del arco ARE sobre los de AQD, como que todos distan igualmente del centro: luego se ajustarán perfectamente los dos, y de consiguiente serán iguales. Por lo mismo, las mayores cuerdas subtenden mayores arcos, y al contrario.

Las circunferencias que tienen un mismo centro, ó se confundirán si los radios son iguales, ó no se tocarán si son desiguales: de consiguiente si dos circunferencias se cortan, señal que no tienen un mismo centro.

13 La mayor cuerda de un círculo es el diámetro; ED por eg. es mayor que qualquiera otra TP; pues los dos radios TO, PO tirados á sus dos estremos equivalen al diámetro, y dichos radios juntos son mayores que TP (2).

14 Un círculo qualquiera ADCE se traza en el papel con el *compás*, instrumento bien conocido, abriéndole de suerte que sus dos puntas caigan en O y A, y haciendo dar una vuelta entera á la punta A al rededor de la punta O que ha de estar fija.

De los ángulos y su medida.

15 Si consideramos ahora que á la recta BE puesta sobre BA (fig. 5ª), se la hace andar el espacio OA con uno de sus puntos O, teniendo el otro fijo en B, se habrá formado el ángulo OBA que es *el espacio AO comprendido entre dos lineas BE, BA que concurren en un punto B*. Dichas lineas se llaman *lados* del ángulo, y el punto B su *vértice*. En adelante nombrarémos un ángulo ó con sola la letra B del vértice, ó con las tres

EBA, ó ABE, poniendo en medio dicha letra B. El ángulo EBA se llama *rectilineo*, MNO (fig. 6ª) *curvilineo*, y RSH *mistilineo* por la clase de lineas que los forman.

16 De la formacion del ángulo se colige que el espacio que encierra, se debe medir por un arco de círculo descrito desde el vértice como centro con qualquier intervalo; pues aunque sea menor el arco descrito á la distancia D′ que á D (fig. 5ª); siempre será una misma la medida del ángulo CBD; pues el arco D′C′ es la 4ª parte de su círculo como lo es DC: de consiguiente el ángulo es siempre el mismo que se acorten ó que se alarguen sus lados.

17 Para medir los arcos del círculo le han considerado los Geómetras dividido en 360 partes iguales con el nombre de *grados*: cada uno de estos en 60 *minutos*, cada minuto en 60 *segundos*, cada segundo en 60 *terceros* &c. Estas partes que son grandes ó pequeñas, segun que el círculo lo es, se indican con las señales °, ′, ″, ‴ &c. de suerte que 7.° 8′, 36″, 9‴, quiere decir *siete grados, ocho minutos, treinta y seis segundos y nueve terceros*.

Llamaremos *recto* el ángulo que tiene por medida 90° ó la 4ª parte de la circunferencia como DBC, ABD, medidos por los arcos DC, DA: *agudo* el ángulo ABE cuya medida que es el arco OA, es menor que 90°; y *obtuso* aquel como CBE, al que mide un arco CDO mayor que 90°.

18 *Si una línea qualquiera EB cae sobre otra AC, forma siempre con ella dos ángulos ABE, EBC que juntos valen* 180° *, ó dos ángulos rectos*; pues su medida será siempre la mitad de la circunferencia (16). Alargando EB, la RB que cae sobre AC, forma tambien en B dos ángulos ABR, RBC que valen juntos otros 180°.

19 Luego 1º todos los ángulos que se forman en un punto B qualquiera, valen 360°: 2º el diámetro AC divide al círculo en dos partes iguales. 3º Para dividir un ángulo en qualquier número de partes iguales; basta dividir el arco que le mide, en otras tantas partes iguales, y tirar líneas desde el vértice á todos los puntos de division. 4º Para medir el ángulo APD (fig. 7ª) que forman dos paredes AO, OD; se alargará con una regla la base AP, y midiendo el ángulo DPC, será lo que le falta para 180° la medida del APD que se desea.

20 Lo que falta ó sobra á un ángulo ó arco para componer 90°, se llama su *complemento*: el del ángulo ABE (fig. 5.ª) es el ángulo EBD: y el de EBC es-EBD: y asi el complemento de un ángulo agudo es positivo, el del ángulo recto es nulo, y el del

obtuso es negativo.

21 *Suplemento* de un ángulo es lo que le falta ó sobra para componer 180°: el ángulo ABE por eg. es suplemento de EBC y al contrario. De consiguiente el ángulo agudo tiene un obtuso por suplemento, el recto otro recto, y el obtuso un agudo.

22 Supuesto que los ángulos iguales deben tener suplementos y complementos iguales; y que deben ser iguales los ángulos que tengan unos mismos complementos y suplementos; colegirémos *que si se cortan como quiera, dos lineas ER, AC, serán iguales los ángulos ABE, RBC opuestos al vértice* que llamarémos por eso *verticales*; pues tienen ambos un mismo suplemento, que es el ángulo EBC: lo mismo se debe entender de los ángulos EBC, ABR, cuyo suplemento comun es el ángulo ABE.

23 *Si dado el ángulo OCD* (fig. 8.ª) *se pidiese formar otro igual en un punto B de la recta AB*; se trazará desde C con qualquier abertura de compás el arco OD, con la misma abertura se trazará desde el punto dado B el arco indefinido AR; se tomará despues con el compás la distancia OD, que se trasladará de A á T, y tirando por B y T la linea BT, se habrá formado el ángulo TBA igual á OCD: pues que los arcos AT, DO que los miden, se han hecho iguales.

24 Con el instrumento MHDT (fig. 9.ª) que es un *semicírculo* de alaton ó cuerno dividido en sus 180° con sus suplementos debajo para poderlos contar por la derecha y por la izquierda; se puede formar en el papel un ángulo qualquiera de 30° por eg. en el punto B de una recta BC, aplicando el radio BT del instrumento sobre BC y de manera que coincida su centro con el punto B, y tirando despues por este punto y el núm.º 30° que se pide, la recta AB; pues el ángulo ABC que resulta, es de 30°.

Asimismo, para medir con dicho instrumento un ángulo qualquiera ABC; puesto su centro en el vértice B del ángulo, y el radio BT sobre uno de sus lados: el arco DT que intercepten sus lados, alargados si es menester, mostrará el número de grados de que consta el ángulo ABC.

25 Un semicírculo (fig. 10.ª) de alaton de 7 á 15 pulgadas de diámetro dividido en 180° y en medios, quartos &c. de grado á proporcion de su magnitud, sirve para medir y formar ángulos en el terreno. A este fin se coloca sobre un pie, y por medio de dos tornillos se le pone derecho, inclinado ó en qualquier otra situacion que requiera la direccion de las miras á los obgetos que forman los ángulos.

26 Para dirigir á estos las lineas visuales

hay una *regla* ó *alidada* CD movible al rededor del centro que tiene en medio una linea central con una *flor de lís* en su estremo, que señala los grados. Al lado de ella hay doce divisiones, cada una de las quales equivale por lo comun á $\frac{11}{12}$ de grado ó á 55′, para sacar el valor del ángulo con mas exâctitud, quando la linea central no señala en el instrumento número fijo de grados. En los estremos de la alidada hay tambien dos *pínulas m*, *n* clavadas y hendidas muy perpendicularmente, lo mismo que las que tiene el diámetro inmovil AB en los puntos 0°, 180°. Quando los obgetos estan á mas distancia que de ocho á nueve mil varas, se usa de un anteojo que con otro colocado en el diámetro inmovil, descubre con mas claridad los obgetos. Mas adelante hablarémos del modo de hacer uso de este instrumento.

Lineas perpendiculares y oblicuas.

27 Si una recta AS (fig. 11.ª) cae cortando la BD sin inclinarse á un lado ni á otro, ó formando los ángulos ACB, ACD iguales, que serán rectos (17 y 18), se llama *perpendicular* á ella. Qualquiera otra DS que corte la BD inclinandose mas un lado que á otro, se llama *oblicua*.

28 Luego 1.º la BD que no se inclina á

A ni á S será tambien perpendicular á AS. 2.º Si qualesquiera dos puntos A, S de una linea AS están á igual distancia de otros dos B, D de la BD: todos los puntos de la AS, distarán igualmente de B y D; pues los puntos de una linea tienen todos la posicion que dos de ellos (3): de consiguiente la AS no se inclinará á B ni á D, y le será perpendicular. Y como C ha de distar igualmente de B y D, dividirá tambien AS á la BD por medio.

29 3.º Con un solo punto A que tenga la perpendicular AS á igual distancia de los dos B, D de la BD sobre que cae, los deberá tener todos y dividirla por medio en C: pues si algun punto R por eg. no distára lo mismo de D y B, se inclinaria por esta parte á un lado mas que á otro, contra el supuesto de ser perpendicular.

30 4.º De todas las rectas AB, AE, AC, AO &c. (fig. 12.ª) que se pueden tirar de un punto A sobre otra BD, *la perpendicular AC es mas corta que qualquiera otra*, AB por eg. Pues haciendo CS=AC, y tirando BS; se tiene la AS menor que las dos AB+BS, y de consiguiente la mitad AC de AS mas corta que AB, mitad de AB+BS. Lo mismo se probará de otra qualquiera. Decimos que AB es la mitad de AB+BS ó que AB=BS; porque estando el punto C de

la perpendicular CB á igual distancia de A y de S, lo estará tambien su punto B (29), y AB=BS.

31 *Las lineas mas oblicuas* ó que distan mas de C, *son las mas largas*; y asi AB es mayor que AE; pues siendo AB+BS mayor que AE+ES, será la mitad AB de las primeras mayor que la mitad AE de las otras. De consiguiente serán iguales las AE, AO, tiradas á E, O puntos igualmente distantes de C.

32 5º *La perpendicular mide la distancia que hay de un punto á una recta, ó de una recta á otra*, pues es el camino mas corto.

33 6º *Desde un punto A no se puede tirar mas perpendicular sobre BD que la AC*; pues esta sola es la mas corta que se puede tirar desde A sobre BD (30). *Ni tampoco desde C se puede levantar á BD mas perpendicular que CA*: pues otra qualquiera se inclinará á un lado mas que á otro.

34 *Para levantar una perpendicular en el punto C de la linea BD* (fig. 11.ª); se tomarán dos puntos E, O á igual distancia de C, y haciendo de ellos centro, se trazarán con el compas con una abertura mayor que EC, dos arcos que se corten en un punto qualquiera A; se tirará por A y C la AC, y esta será la perpendicular (28): pues tiene dos puntos A, C á igual distancia de los dos E, O.

35 *Desde un punto A se bajará una perpendicular sobre BD*; trazando desde A con el compás un arco qualquiera EO que corte la BD en dos puntos E, O; y desde estos los dos arcos que se corten en S: tirese despues AS, y será la perpendicular (28): pues tiene tambien A y S á igual distancia de E y O.

36 De lo que se infiere que *si se pidiese dividir por medio una recta* BD; se trazarán haciendo centros en B y D, dos arcos que se corten en A y S, y la AS tirada por A y S, dividirá por medio la BD: pues distando igualmente A y S de B y D, todos los demas puntos de AS como C, distarán igualmente de B y D (28), y será BC=CD; luego &c.

37 El instrumento ABC (fig. 13.ª) de alaton con una charnela en B para que cerrado quepa en el *Estuche matemático*, se llama *Escuadra*, y sirve para tirar perpendiculares en el papel; porque sus dos lados AB, BC forman un ángulo recto ABC. El mismo uso tiene la escuadra H de una madera dura y lisa.

38 *Para tirar en el terreno una perpendicular á la linea* AB (fig. 14.ª) *desde un punto* C; se fijará en este punto el medio de una cuerda, cuyos estremos se han de atar bien tirantes en dos puntos A, B de AB; se dividirá la AB por medio en D, y la CD será la perpendicular (28); por tener C y D á igual distancia de A y B.

Se levantará desde D una perpendicular á *AB* ; tomando AD=*BD*, atando en *A* y *B* los estremos de una cuerda, por cuya mitad C y el punto D se tirará la CD, que será la perpendicular por lo que acabamos de decir.

39 Para esta operacion es muy comodo y comun el valerse del *Cartabon* ó *Escuadra de Agrimensor* (fig. A) que es un círculo bastante grueso de alaton ó madera de cinco á siete pulgadas de diámetro cortado á ángulos rectos por dos diametros de igual grueso, en cuya mitad hay dos lineas que dividen el círculo en quatro partes iguales, con pínulas hendidas en sus estremos semejantes á las del Grafometro, lo mismo que el pie sobre que se coloca.

Para levantar en el punto C (fig. B) *una perpendicular á la linea AB* ; colocado el cartabon en C, se alineará con la recta MNOP en que rematan los jalones clavados en la AB, la visual dirigida por las pínulas *t*, *s* ; se hará despues colocar un jalon R de manera que se alinee con las otras pínulas *o*, *r* : hagase lo mismo con otro Q puesto á dos ó tres estadales de R, y si parece algun otro mas ; y será la linea CH la perpendicular que se busca. Casi del mismo modo se baja una perpendicular al terreno desde un punto T, yendo acercando el instrumento hasta encontrar la linea TD con la visual que se dirige por las pínulas *o*, *t*.

40 Llamarémos *paralelas* aquellas lineas AB, CD, EP (fig. 15.), cuyos puntos correspondientes distan todos igualmente los unos de los otros: de consiguiente serán iguales todas las perpendiculares HO, MN, que se tiren entre ellas, que miden dicha distancia (32) : y como ninguna de las paralelas puede inclinarse ácia las otras, aunque se alarguen infinitamente nunca podrán juntarse.

41 De aqui se infiere 1º que si dos lineas AB, EP son paralelas á otra CD, serán paralelas entre sí ; pues siendo por la suposicion HO=MN, y OR=NS, será HO+OR=MN+NS y &c.

42 Lo 2º que si se toman dos puntos H, M á igual distancia de la recta CD, y se tira por ellos la AB ; será paralela á CD.

43 Lo 3º que si de dos paralelas EC, PD (fig. 16.) la una EC es perpendicular á AD, tambien lo deberá ser la PD, que por no estar inclinada á su paralela EC, ha de tener la misma inclinacion con la AD. Y al contrario, si una recta AD es perpendicular a EC, lo será tambien á su paralela PD (27 y 40). Ultimamente, si las EC, PD son perpendiculares á AD, serán paralelas ; pues cayendo ambas sobre AD, sin inclinarse á un lado ni á otro, no estarán inclinadas la una á la otra; luego serán paralelas.

44 Como las lineas paralelas AB, CD (fig. 17) tienen igualmente distantes sus puntos correspondientes, no estarán inclinadas la una à la otra; y de consiguiente tendrán ambas una misma inclinacion con otra linea qualquiera SR que las corte, que se llama *secante*: y como esta inclinacion forma à la derecha de la secante los ángulos o y t por cima, x y n por bajo de las paralelas; y à la izquierda de dicha secante los ángulos p y z, e y m; tendrémos que quando una recta SR corta dos ó mas paralelas 1º *forma iguales los ángulos* o y t, x y n; p y z, e y m, los quales se llaman *correspondientes*.

45 Lo 2º *Tambien son iguales los ángulos alternos* t y e, x y z; p y n, m y o; porque siendo o y t, iguales, y $o = e$ (22), será tambien $t = e$, y lo mismo se prueba de los demas, que se llaman *alternos* por formarse alternativamente, uno por cima y otro por bajo de la secante: e, t; x, z son alternos *internos* porque están entre las paralelas; n, p; o, m, *esternos* por estar fuera.

46 Lo 3º Los ángulos internos t, x, de un mismo lado de la secante son suplemento el uno del otro; porque siendo $e = t$ (45), y e suplemento de x (18); lo será tambien t: tambien e es suplemento de z.

47 Al contrario, *siempre que una recta* RS *corta á otras dos* AB, CD *formando los* *ángulos correspondientes iguales, serán dichas lineas paralelas*: porque siendo igual su inclinacion con la SR, no estarán inclinada la una á la otra. Tambien *serán paralelas* AB, CD *si resultan iguales los ángulos alternos*: porque si $e = t$, siendo $e = o$ (22), será tambien $t = o$, es decir, iguales los ángulos correspondientes, y las lineas paralelas. Tambien lo son quando t es suplemento de x; pues siéndolo igualmente e (18), se tendrá $t = e$, y $t = o$: luego &c.

48 De aqui inferirémos 1º que si dos ángulos MNA, CDE (fig. 18) tienen sus lados AN, ED; MN, y CD paralelos, serán iguales: porque alargando uno de los lados AN hasta B, se tiene ANM = ABC = EDC (44).

49 2º *Que si se pide tirar una paralela á la recta* CD (fig. 17) *por un punto qualquiera* p; tirada por p qualquiera recta RS, se traza desde n con qualquier intervalo np el arco pq, y desde p con el mismo intervalo el arco indefinido rh: se toma despues la distancia pq, y trasladada de r á h, se tirará por p y h la AB que será la paralela que se busca; por haberse hecho iguales los ángulos correspondientes pnq, rph (23).

3º Si se pidiese levantar una perpendicular en el estremo D (fig. 16) de una recta AD que no se puede alargar; se levantaría en qualquiera de sus puntos la perpendicular

CE, y tirando como acabamos de decir, por el punto D una paralela á CE, sería perpendicular (43).

50 Con el instrumento (fig. C) compuesto de dos reglas unidas con dos hojas todas de laton, y paralelas, que se estrechan y apartan á arbitrio; se tiran quantas paralelas se quieran en el papel: y para que no se manche con tinta, tiene un chaflan una de las reglas.

En el terreno se tira una paralela á la recta AB *por el punto* C (fig. D); levantando en A y *B* dos perpendiculares iguales *AB*, *B*D; y tirando por C y D la *CD* que será paralela á *AB* (42).

Por esta operacion *se continua una linea* AC (fig. E) *mas allá de un obstaculo*: pues si se levantan en A y C las dos perpendiculares iguales AE, CF, y tirando por E y F la EFH paralela á A, se bajan por dos de sus puntos G, H, las GD, H*B* iguales y perpendiculares á EH; será D*B* continuacion de AC.

De las Líneas y de los Angulos en el círculo.

51 *Una recta* CT (fig. 19) *tirada perpendicularmente desde el centro de un círculo á una cuerda DS, la divide por medio lo mismo que á su arco* DTS: porque estando el punto C de dicha perpendicular á igual distancia de

los dos D y S, lo estarán todos los demas de CT (28); luego P y T distarán igualmente de D y S, y será de consiguiente *DP*=PS, y DT=TS.

52 Al contrario, si la CT divide por medio en P la cuerda DS, tendrá dos puntos C y P á igual distancia de D y S, y de consiguiente será perpendicular á DS: lo mismo sucede quando CT divide por medio al arco DTS.

53 Luego 1º los arcos ZD y QS de un mismo círculo comprendidos entre paralelas son iguales: pues dividiendo CT por medio á los arcos ZDTSQ, y DTS, si de ZDT=TSQ quitamos DT=TS, quedará ZD=QS.

54 2º Se podrá dividir un arco qualquiera ZTQ en dos partes iguales con la perpendicular bajada desde el centro sobre su cuerda ZQ; y la perpendicular CH bajada sobre TQ dividirá su mitad TSQ en otras dos. De suerte que toda la circunferencia de un círculo podrá dividirse en quatro partes iguales, tirando en ella dos diámetros perpendiculares ED, AC (fig. 4.), y si cada uno de los arcos iguales AQD, DPC &c. se divide por medio, resultarán ocho arcos iguales; y se habrá partido la circunferencia en 16, 32, 64 &c. partes iguales dividiendo susucesivamente por medio dichos arcos.

55 3º *Si dados tres puntos M , N , O* (fig. 19) *se pidiese trazar un círculo por ellos*, ó encontrar un punto C igualmente distante de los tres ; se tirarán las cuerdas MO, NO, y divididas por medio con las perpendiculares RC , LC ; el punto C donde estas concurren , es el centro del círculo que pasará por M , N, O : pues debiendo dichas perpendiculares pasar ambas por él (52), no puede ser otro que C , único punto que tienen comun.

56 La operacion es la misma quando se da el arco MNO y se pide su círculo ó su centro : pero es esencial que los tres puntos no esten en linea recta ; pues si se diesen los puntos A , C , D (fig. 16), las perpendiculares EC , PD debiendo ser paralelas (43) , no podrian encontrarse.

57 De donde se inferirá que una recta no puede cortar à un círculo en tres puntos: como tambien , que dados tres puntos que no están en linea recta , queda determinado un círculo , que no podrá equivocarse con otro: pues si dos circunferencias se pudiesen cortar en tres puntos , tendrian un mismo centro, y no serian dos sino una la circunferencia.

58 Si desde un punto A (fig. 20) que no sea el centro de un círculo, se tiran à la parte de la circunferencia mas distante varias rectas AE , AD , AB , AF &c. 1º *AB que pasa por el centro , es mayor que qualquiera otra AD* : pues tirando el radio CD=CB, AD es menor que AC+CD , ó que AC+CB ó que AB.

59 2º *AD es mayor que AE , que dista mas del centro* ; pues tirado el radio CE , serán CO+OD juntas mayores que CD ó que CE su igual : quitando CO comun , queda OD mayor que OE , y añadiendo à ambas lineas OA , será DO+OA ó DA mayor que EO+OA : y como EO+OA son mayores que EA, será AD mucho mayor que AE.

60 Si se tiran á la parte de circunferencia mas inmediata las rectas AM , AN &c. *la AM que alargada pasa por el centro , es la mas corta* : pues tirado el radio CN , se tiene CA+AN mayores que CN ó que CM su igual: quítese CA comun , y queda AN mayor que AM.

61 Quando el punto A (fig. 21) está fuera del círculo, sucede lo mismo : pues siendo AN+NC mayores que AC , resulta quitando de una parte el radio CN y de otra el CM, AN mayor que AM. Serán pues, iguales las lineas tiradas desde qualquier punto (fig. 20 y 21) á igual distancia del centro C : y como solo hay dos con esta condicion, una à la derecha de la AB y otra à su izquierda; no se podrán tirar desde dicho punto

tres lineas iguales á la circunferencia, y si desde algun punto se pueden tirar mas de dos líneas iguales, será sin duda el centro del círculo.

62 *Tangente* de un círculo es una línea AT (fig. 22) que aunque se alargue no corta sino toca su circunferencia, y es solo en un punto que se llama del *contacto*; pues si le tocase en dos *m*, *n*, tiradas al centro las *Cm*, *Cn* que serian iguales (11), serian mayores que la perpendicular CT, que se tirase entre ellas (30): luego estando el punto T en la circunferencia, deberán caer fuera de ella *m* y *n*. Una línea AB que desde qualquier punto A fuera del círculo le corta en dos puntos E y B, se llama *secante*.

63 Tendrémos pues 1º *que el radio CT debe ser perpendicular á la tangente* (3); pues es la línea mas corta que se puede tirar desde el centro á dicha tangente; y al contrario, la perpendicular AT al estremo T del radio CT, será tangente al círculo. Y así *para tirar una tangente al círculo en un punto* T; se tira el radio CT, y se levanta en T la perpendicular AT: la qual debe ser única, por no poderse levantar mas perpendicular que una desde qualquier punto T (33).

64 2º Si tres circunferencias de circulo se tocan dentro ó fuera; los centros C,D,R de los círculos, y el punto *o* del contacto están en una linea recta: porque debiendo los radios *Do*, *Ro*, *Co* ser perpendiculares á la tangente; formarán una sola línea recta (63),

65 3.º Qualquier otra recta DO (fig. 23) tirada por el punto T que no sea la tangente, corta al circulo; de suerte que qualquier ángulo rectilineo BTD es mayor que el mistilineo BTPD, el qual será infinitamento pequeño: pero sin embargo puede ser dividido por infinidad de arcos *Th*, *Tb* &c. que se van acercando á la tangente AB, á proporcion que son mayores los radios con que se describen.

66 Conviene á veces medir los ángulos no con arcos descritos desde su vértice, sino con los de algun círculo junto al qual, ó dentro del qual están formados; y por eso vamos á señalar á cada uno la medida que le corresponde, segun su diferente posicion. Empecemos por el ángulo ATD (fig. 24) que forma la tangente AT con la cuerda TD, que se llama *ángulo del segmento*, y tiene por medida *la mitad del arco TRD que subtende la cuerda*.

Para demostrarlo, tirese por el centro el diámetro PQ paralelo á la cuerda TD, el RS perpendicular á PQ y el radio TC. El ángulo recto RCP es igual al ángulo ATC tambien recto: quitese de ambos el ángulo TCP igual á su alterno DTC, y quedará DTA=

RCT: y como al ángulo RCT le mide el arco RS (16), mitad de DRT (51); este mismo medirá tambien al ángulo ATD. Valiendo los dos ángulos ATD, DTB 180° (18) ó la mitad de toda la circunferencia TRDQSPT; si de ella se quita la mitad del arco RTD, medida del ángulo ATD, quedará la mitad de DQSPT por medida del ángulo DTB.

67 De esta proposicion se infiere que la medida de un ángulo BTD (fig. 25) cuyo vértice está en la circunferencia (se llama *inscripto*) *es la mitad del arco BD que comprenden sus lados*, que son dos cuerdas. Porque tirada la tangente AT, si de la medida del ángulo ATB, que es la mitad de TDB, se quita la del ángulo ATD, que es la mitad de TD; quedará la mitad de BD que será medida del ángulo BTD.

68 Luego 1º el ángulo del centro BCD es duplo del inscripto BTD que insiste sobre el mismo arco; pues la medida de BCD es el arco BD, y la de BTD, $\frac{1}{2}$ BD. Lo 2º Todos los ángulos inscriptos A, B, C, (fig. 26) de un mismo círculo que insisten sobre un mismo arco FD, son iguales; pues que tienen una misma medida.

69 Lo 3º *Todo ángulo inscripto BTR (fig. 27) que estriba sobre el diámetro, es recto*: pues vale la mitad de 180° ó 90°. El que insiste en un arco menor que la semicircunferencia como TRB es agudo, y el que estriba como NMR, en mayor arco que la semicircunferencia, es obtuso.

70 De consiguiente *se podrá levantar en el estremo T de la recta TB una perpendicular*; trazando un círculo desde qualquier punto C con el intervalo CT, tirando por el centro y el punto B en que el círculo corta la BT, el diámetro BR; pues la TR será perpendicular á BT; por ser el ángulo RTB recto.

71 Si se diese en el terreno la recta BD (fig. 28) para levantar en su estremo D la perpendicular; se atarán en B y D los estremos, y en A la mitad de una cuerda BAD: y pasando la parte AB á ser AC, será la CD perpendicular. Y al contrario, para bajar desde C una perpendicular ácia el estremo de la DB; atada la cuerda en C y B, y dividida en su mitad A, se pasa la AC á AD; y tirando CD, será la perpendicular. Porque siendo iguales las AC, AB, AD; será A el centro del círculo que pasa por C, D, B (57): y de consiguiente será CB diámetro, el ángulo CDB recto (69), y la CD perpendicular.

72 Para tirar dos tangentes á un circulo desde un punto O (fig. 29) dado fuera de él; despues de haber tirado la OC à su centro, se trazará desde su mitad H con el intérvalo OH un círculo que cortará al dado en los dos puntos B, T, por los quales y O tirando

las OB, OT serán las tangentes: pues tirando los radios BC, CT; serán rectos los ángulos CBO, CTO (69): luego las OB, OT serán perpendiculares, y de consiguiente tangentes.

73 Si se pidiese trazar sobre la recta BD (fig. 30) un segmento de círculo, tal que todos los ángulos inscriptos en él como BAD, sean iguales á un ángulo dado X; se hará en uno de los estremos B de la BD un ángulo DBF igual á X, se levantará sobre BF la perpendicular indefinida BH, y en medio de BD otra perpendicular PT que cortará á la BH en un punto C que será centro del círculo que se pide: pues siendo la medida del ángulo DBF ó X la mitad de BTD (66), la misma que tiene el ángulo inscripto BAD y qualquier otro que insista sobre la cuerda BD; será el segmento BNAHD capaz del ángulo X como se pidió.

74 Por esta proposicion será fácil determinar el sitio de un punto T qualquiera (fig. 29), conociendo el valor de los ángulos RTB, *BTO* que con dicho punto forman las rectas TR, TB, TO tiradas à los tres objetos R, B, O, cuya situacion es conocida: pues tirando las líneas BR, *BO*, y trazando sobre *BR* una porcion de círculo capaz del angulo dado *BTR*, y sobre *BO* otra capaz del angulo *BTO*; debiendo el punto T caer

en ambos círculos, será aquel en que los dos se cortan.

75 La medida del ángulo *BAR* (fig. 31) que se llama *escéntrico* por tener su vértice fuera del centro del círculo en que esta, *es la mitad de los dos arcos BR*+HC *que abrazan sus lados alargados.* Porque tirando por C la CD paralela á HR, será el ángulo BAR = BCD (44): y siendo (67) la medida de BCD, $\frac{1}{2}$ BD = $\frac{1}{2}$BR + $\frac{1}{2}$RD = $\frac{1}{2}$BR + $\frac{1}{2}$ HC por ser RD = HC (53); será la medida de BAR, $\frac{1}{2}$BR + $\frac{1}{2}$HC.

76 La medida del ángulo ZCB formado en la circunferencia con la cuerda BC y la DC alargada, es tambien la mitad de los arcos BC + CD que subtenden las cuerdas: porque siendo DCB + BCZ = 180° (18) ó la mitad de toda la circunferencia CHBRDC, si de ella se quita la medida del ángulo *BCD* que es $\frac{1}{2}$BD; quedará $\frac{1}{2}$BHC + $\frac{1}{2}$CD por la del ángulo BCZ.

77 Un ángulo BAP (fig. 32) *circunscripto*, ó cuyo vértice está fuera del círculo, tiene por medida *la mitad del arco cóncavo* BP *en que insisten sus lados alargados si es menester, ménos la mitad del arco convexô* HR *que comprehenden dichos lados.* Porque tirando la RC paralela á HB, el ángulo CRP que es igual á *BAP* (44), tiene por medida $\frac{1}{2}$CP ó $\frac{1}{2}$BP — $\frac{1}{2}$BC, ó últimamente $\frac{1}{2}$BP —

$\frac{1}{2}$ HR: pues BC=HR (53): luego la medida del ángulo BAP es $\frac{1}{2}BP - \frac{1}{2}HR$.

78 Si se tira HM paralela á la tangente AX, se probará del mismo modo que al ángulo XAB le mide $\frac{1}{2}$ XB $-\frac{1}{2}$XH: y últimamente tirando por Z una paralela à AX, se hallará que la medida del ángulo XAZ que forman las dos tangentes, es $\frac{1}{2}$XBPZ$-\frac{1}{2}$XHRZ.

De las Figuras.

De los Triángulos y Quadriláteros.

79 Dos solas líneas no abrazan espacio determinado: se necesitan tres, quatro, cinco, ó mas para encerrarle. Á este espacio cerrado llamarémos *figura*; *rectilinea*, *curvilinea*, ó *mistilinea*, segun sean rectas ó curvas las líneas que la forman: à estas líneas *lados* de la figura: á la suma de todas *ambito*, *contorno*, ó *perímetro*: é *isoperímetras* à las figuras que tienen perímetros iguales.

80 La figura ABC (fig. 33) se llama *triángulo* rectilineo: se compone de tres lados *AB*, *BC*, AC, y de tres ángulos A, *B*, C: se llama *equilátero* quando sus tres lados son iguales: *isósceles* (fig. 34) quando son iguales dos: *escaleno* (fig. 35) quando los

tres son desiguales: *rectángulo* (fig. 36) quando uno de sus ángulos D es recto: *obtusángulo* quando uno de ellos D (fig. 35) es obtuso; y *acutángulo* (fig. 34 quando todos tres son agudos.

81 Qualquiera de los lados AC (fig. 33) opuesto al ángulo B que se toma por vértice, se llama *base* del triángulo: y *altura*, la perpendicular BT tirada desde el ángulo B del vértice à la base. Se ve que quando los ángulos A, C adjacentes à la base AC son agudos, cae la perpendicular dentro del triángulo: quando es recto uno de dichos ángulos (fig. 36), es el mismo lado AD del triángulo: y quando es obtuso (fig. 35), la OR cae fuera y sobre la base CD alargada. El lado AB (fig. 36) opuesto al ángulo recto D del triángulo ADB, se llama *hipotenusa*.

82 En el triángulo isósceles EDF (fig. 34) la perpendicular ER divide por medio la base DF: porque siendo ED y EF iguales, estará el punto E de la perpendicular ER, y de consiguiente todos los demas (29), á igual distancia de D y F: luego DR=RF.

83 *Los tres ángulos de qualquier triángulo valen siempre dos ángulos rectos ó 180°.* Si se da el triángulo ABC (fig. 37), y se hace pasar un círculo por sus tres ángulos (55), se verá (67), que la medida de todos tres es la mitad de toda la circunferencia; luego valen 180.°

84 De aquí se infiere 1º que alargado qualquiera de los lados BC de un triángulo, el ángulo esterno ACD es igual à los dos internos y opuestos A y B : pues su medida es (76) $\frac{1}{2}$ (ATC+BRC), medidas de A y B (67).

85 2º Que en ningun triángulo puede haber mas que un ángulo recto ó un obtuso: y quando alguno es recto, serán los otros dos complementos el uno del otro (20) : y asi conociendo el uno, será el otro lo que falta para 90°.

86 3º Que qualquiera de los ángulos de un triángulo es suplemento de los otros dos (21), y se sabrá su valor restando la suma de ambos de 180°: y al contrario, restando de 180° un ángulo de un triángulo, resultará la suma de los otros dos. Por eso si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, el tercero que es el suplemento, será tambien igual al tercero.

87 4º Tambien se infiere que en qualquier triángulo los lados opuestos à iguales ángulos son iguales ; y que si son iguales los lados, lo serán tambien los ángulos opuestos. Pues siendo iguales los ángulos, lo deben ser los arcos, sus medidas, y de consiguiente sus cuerdas (12) : y si lo son las cuerdas, lo serán los arcos, y los ángulos que miden. Y así en el triángulo isósceles (fig. 34) siempre

son iguales los dos ángulos D, F opuestos à los dos lados EF, ED iguales ; y en el equilátero son iguales los tres ángulos, y por lo mismo vale cada uno 60° ó la tercera parte de 180.°

88 5º Que al mayor lado de un triángulo estará opuesto el mayor ángulo, y al menor el menor : y al contrario, el mayor ángulo tendrá mayor lado enfrente : porque mientras mayor sea la cuerda, mayor será el arco, y de consiguiente el ángulo que mide: y al contrario.

89 *Dos triángulos* ABC, abc, (fig. 88) *son iguales* 1º *si los tres lados del uno son iguales á los del otro*, ó si AB=*ab*, AC=*ac*, CB=*cb* ; pues sobreponiendo el triángulo *abc* à ABC de modo que *bc* caiga sobre BC; el punto *b* deberá caer en el arco de círculo descrito desde C con el intervalo *bc*= BC, y en el descrito desde A con el intervalo *ab*= AB : caerá pues, en *B*, en donde se cortan dichos arcos ; y el triángulo *abc* se ajustará ó confundirá con ABC : luego serán iguales.

90 2.º *Son iguales dos triángulos* ABC, abc *que tienen un lado* AC=ac *adjacente á dos ángulos* A, C ; a, c *iguales* ; pues poniendo *abc*, sobre ABC, de suerte que *ac* caiga sobre su igual AC ; caerán los puntos *a*, *c*, sobre A, C; y como los ángulos A, *a* ; C, *c* son iguales, el lado *ab* caerá sobre AB y *cb*

sobre CB; luego el punto *b* caerá sobre *B*, y los triángulos por ajustarse ó confundirse, serán iguales.

91 3º *Tambien lo son, quando tienen un ángulo B=b formado por dos lados AB, BC; ab, bc tambien iguales*; pues sobreponiendo el triángulo *abc* à ABC, caerán los lados, *ab*, *bc* sobre *AB* y *BC* por ser iguales los ángulos *B*, *b*; y los puntos *a*, *c* sobre A, C por la igualdad de los lados; luego *ac* caerá sobre AC, y los triángulos se ajustarán, ó serán iguales.

92 Para formar un triángulo de tres líneas dadas, ó cuyos tres lados sean iguales à los del triángulo *abc*; se toma una línea AC=*ac*, y trazando desde A con el intervalo *ab* y desde C con el intervalo *cb* dos arcos, se tirarán à A y C desde el punto *B* donde se cortan, las líneas *BC*, *BA*; y se tendrá el triángulo ABC=*abc*. Quando se da una recta AC, y se pide formar sobre ella un triángulo equilátero; se trazan los arcos desde C y A con el intervalo AC, y luego se tiran las AB y BC. Si se diese un lado *ac* y los ángulos adjacentes *a*, *c* para hacer el triángulo; se formarian en los estremos A, C de una recta AC=*ac* dos ángulos A, C iguales á *a*, *c*; y de los lados *AB*, *BC* juntos en *B* resultaria el triángulo, que se pide. En el caso que se den dos lados *ab bc* y el ángulo comprendido *b*; se forma un

ángulo B=*b*, y cortando BC=*bc*, AB=*ab*, se tiene el triángulo pedido ABC.

93 El *quadrilátero*, que es una figura formada por quatro líneas y quatro ángulos; se llama *trapezoide* (fig. 39) quando no tiene lado alguno paralelo à otro: *trapecio* (fig. 40) quando dos de sus lados AE, BC son paralelos; y *paralelogramo* quando cada lado es paralelo à su opuesto. El paralelogramo se llama *rombo* (fig. 41) quando sus quatro lados son iguales y desiguales sus ángulos contigüos: *romboide* (fig. 42) quando sus ángulos y lados contigüos son desiguales: *rectángulo* (fig. 43) quando sus ángulos son rectos, y desiguales dos lados: y *cuadrado* (fig. 44) quando sus ángulos y lados son iguales. La recta EB (fig. 42) tirada de un ángulo al opuesto de qualquier figura, se llama *diágonal*: y la perpendicular AT ó BD à la base EC alargada si es menester, *altura del quadrilátero*.

94 *Los quatro ángulos de un quadrilátero valen siempre 360° ó quatro ángulos rectos*: pues tirada la diagonal AC (fig. 40), dichos ángulos son los de los triangulos ACE, ABC que valen 360° (83).

95 *Si dos lados* AD, CB (fig. 43) *de un quadrilátero* ADBC *son iguales y paralelos, lo serán tambien los otros dos* AC, DB. Porque tirada la diagonal AB, los triangulos

ACB, ABD que tienen el lado AB comun, AD=CB, é iguales los angulos *t* y *o* (45), seran iguales (91): luego el lado AC=DB: y como son tambien iguales los angulos alternos *x*, *y*, seran paralelos AC y BD (47).

96 De lo que inferirémos 1.º *que la diagonal* AC *divide el paralelógramo* ADBC *en dos triángulos* ACB, ABD *iguales*; pues ademas del lado AB comun à los dos, los angulos *x*, *y*; *t*, *o* son iguales por las paralelas (45): luego (90), serán iguales los triángulos. De consiguiente, un triángulo qualquiera ABC será siempre la mitad de un *paralelógramo de igual base y altura que él.*

97 2.º *Los paralelógramos* ABCE, BCDF (fig. 45) *de una misma ó igual base* BC, *que están entre unas mismas paralelas ó que tienen una misma altura, son iguales*: pues los triángulos ABF, ECD que tienen AB=EC, BF=CD (95), é iguales los ángulos *m*, *n* comprendidos (48), serán iguales (91), quítese de ambos el triángulo EKF comun, y quedará AEKB=CKFD, y si se añade à ambas partes el triangulo BKC, resultará el paralelogramo ABCE igual al otro BCDF. De consiguiente, *los triángulos de igual base y altura, ó que teniendo una misma ó igual base, estan entre unas mismas paralelas, son iguales*; pues son mitades de los paralelogramos iguales.

98 3.º *Las partes* HR, TX (fig. 46) *de dos paralelas* NO, MP *interceptadas entre otras dos paralelas* AB, CD, *son iguales*; pues resulta de ellas un paralelogramo HTXR cuya diagonal HX le divide en dos triangulos iguales: luego HR=TX: y en todo paralelogramo serán iguales los lados opuestos HT, RX; HR, TX.

99 4.º *Los ángulos opuestos* A *y* B, C *y* D (fig. 43) *de un paralelogramo son iguales.* Porque siendo paralelos AC, BD, deben valer 180° los ángulos A y D (46); y por ser paralelos AD, CB, tambien D y B valdrán 180°: luego A y B que tienen un mismo suplemento D, serán iguales (22): lo mismo se probará de C y D. De consiguiente, si uno de estos ángulos es recto, lo serán igualmente los otros tres: pues si A es recto, lo será tambien su igual B; y habiendo de componer 180° los dos iguales C y D (94), serán tambien rectos ambos.

100 *Si dados dos lados bc, ce* (fig. 42), *y el ángulo c, se pidiese trazar un paralelógramo*; se tomará EC=*bc*, se formará en E un ángulo E=*c*, se cortará EA=*ce*, y tirando por A una paralela à EC y por C otra à EA, resultará el paralelogramo AECB que se pide, el qual será rectángulo: si el ángulo *c* fuese de 90°, y cuadrado si ademas fuese *bc*=*ce*.

De los Polígonos.

101 Se llama generalmente *polígono* à la figura terminada por mas de quatro líneas: y en particular *pentágono* à la que consta de cinco, *exâgono* à la que tiene seis, *eptagono* à la de siete, *octógono* à la de ocho, *eneágono* à la de nueve, *decágono* à la de diez, *dódecagono* à la de doce.... *pentedecágono* à la de quince &c. Quando todos los lados y ángulos de los polígonos son iguales, se llaman *regulares*, é *irregulares* quando no lo son. Al ángulo B (fig. 47) cuyo vértice se mete dentro de la figura, le llamarémos *entrante*: y *salientes* à los demas que caen fuera de la figura.

102 Un polígono *A*BCDEF (fig. 48) cuyos ángulos tienen todos sus vértices en la circunferencia de un círculo, se dice estar *inscripto* en él, ó el círculo circunscripto al polígono: su perímetro que es tanto mayor quanto mas lados tiene, es siempre menor que la circunferencia del círculo. Quando los lados de un polígono PRTHMN tocan todos al círculo, se dice *circunscripto* à el, y el círculo inscripto en el polígono: su perímetro que es tanto menor quanto mas lados tiene, es siempre mayor que la circunferencia del círculo.

De consiguiente, quanto mas lados tenga un polígono inscripto ó circunscripto à un círculo, mas se acercará à su circunferencia: y si el número de lados se concibe infinito ó mayor que qualquiera asignable, se confundirá su perímetro con dicha circunferencia del círculo, *el qual se podrá considerar como un polígono infinitángulo ó de una infinidad de lados.*

103 Las perpendiculares OT, OR &c. (fig. 49) tiradas desde el punto medio O ó centro de un polígono *ABCDE* sobre sus lados *A*B, BC &c. se llaman *radios rectos* ó *apotecmas* del polígono: y *radios oblicuos* à las O*A*, OB, OC &c. tiradas desde O à los angulos, de suerte que los dividan por medio. Unas y otras son iguales entre sí quando el polígono es regular.

Los oblicuos OA, O*B* &c. lo son porque dividiendo la perpendicular OT por medio á AB (82), tendrán los triángulos OAT, OTB, AT=TB, OT comun, é iguales los ángulos ATO, OTB comprendidos; luego serán iguales (91), y AO=O*B*: lo qual se probará igualmente de OC, OD &c. Tambien son iguales los radios rectos, OT, OR &c. porque siendo en los triángulos OTB, OBR, T*B*=BR por ser mitades de los lados iguales AB, *B*C, el lado O*B* comun, y los ángulos comprendidos O*B*T, OBR iguales por ser mitades del ángulo *B*; serán iguales dichos triángulos (91), y OT=OR: lo que se demostrará igualmente de los demas.

104 De aqui se infiere que si se dividen por medio dos de los ángulos A, B de un polígono regular con los radios oblicuos AO, OB, y se traza desde el punto O de su concurso un círculo con el radio OA ó BO, quedará inscripto en él el polígono. Igualmente, si con el intervalo de uno de los radios rectos OT de un polígono se traza un círculo, quedará inscripto en el polígono ó este circunscripto al círculo.

105 *La suma de los ángulos interiores de todo polígono es tantas veces 180° como lados tiene ménos dos.* Lo demostrarémos del pentágono ABCDE (fig. 50) y lo mismo se demostrará de qualquier otro. Si desde uno de sus ángulos D se tiran diagonales DA, DB á los ángulos opuestos A, B, quedará el polígono dividido en tres tres triángulos cuyos ángulos valen 3×180° (83): y como estos son los mismos que los del polígono, serán estos 3×180° ó (5−2)×180°, que son tantas veces 180° como lados tiene ménos dos. Lo mismo sucede en el polígono ABCDEF (fig. 47) no contando el ángulo entrante B por el lado esterior ABC, sino por el interior que comprehende los quatro ángulos ABF, FBE, EBD, y DBC.

106 Si dicha suma se divide en qualquier polígono regular por el número de sus ángulos ó lados, se tendrá el valor de cada ángulo. El del pentágono por exemplo, será (5−2)×180° ó 540° divididos por 5, que da 108°: el del exâgono vale 4×180° ó 720° partidos por 6, que da 120°.

107 De consiguiente, para construir qualquier polígono v. gr. un exâgono, sobre una recta dada AB (fig. 48); formado en B el ángulo ABC igual al del polígono que es de 120°, se trazará un círculo desde el punto O en que concurren los dos radios oblicuos AO, OB con el intervalo de qualquiera de ellos; y pasando con un compás la distancia AB à los puntos C, D, E, F de su circunferencia à los que se tirarán BC, CD, DE, EF, FA, se habrá descripto el exâgono regular.

108 Si desde el centro O (fig. 51) de un polígono se tirán rectas OA, OB &c. à todos sus ángulos, quedará dividido en tantos triángulos como lados tiene, los quales à causa de sus radios oblicuos iguales, serán isósceles é iguales si el polígono es regular. Con efecto, los ángulos de estos triángulos valen 5×180° (83), de donde si se quitan 360° ó 2×180° que valen los formados en O que no pertenecen al polígono, quedarán (5−2)×180°, valor de sus ángulos interiores como lo digimos ya (105).

109 Cada ángulo de los formados en O, se llama *ángulo del centro del polígono*, y su

valor en el polígono regular es 360°, que valen siempre todos, partidos por el número de lados del polígono: en el exâgono regular vale 360° partidos por 6 ó 60°: y como solamente 6×60, 4×90 y 3×120 componen 360°; solo con triángulos equiláteros en los que vale cada ángulo 60°, con cuadrados cuyo ángulo es de 90°, y con exâgonos podrá enlosarse un pavimento con figuras regulares.

110 En qualquiera de los triángulos, ABO, se ve (36) que el ángulo del centro AOB es suplemento de los otros dos ABO, OAB ó del ángulo ABC del polígono à que equivalen: y como tambien es suplemento de ABC el ángulo esterior TBC, será este igual al ángulo del centro BOA. Lo mismo se probará de los demas esteriores RCD, XDE &c. que se forman alargando ácia una misma parte todos los lados del polígono: y de consiguiente *la suma de estos ángulos esteriores de qualquier polígono es siempre 360° como la de los del centro.*

111 Tanto estos como los esteriores disminuyen à proporcion que es mayor el número de lados: y así en el círculo, que se compone de una infinidad de ellos, el ángulo esterior BTPD (fig. 23) es infinitamente pequeño como lo dejamos dicho: y por lo mismo el ángulo CTPD que forma el radio

con la circunferencia, se puede considerar como recto.

112 Valiendo el ángulo del centro AOB (fig. 48) del exâgono regular 360° partidos por 6 ó 60°, valdrán tambien 60° cada uno de los àngulos iguales OAB, OBA (83 y 87), y el triángulo AOB será equilátero (80): luego *el lado AB del exâgono regular inscripto en un círculo, es igual al radio AO de dicho círculo*: de consiguiente, el diámetro será igual à $\frac{1}{3}$ del perimétro del exâgono, y la circunferencia mayor que el triplo del diámetro.

113 Luego *para inscribir un exâgono regular en un círculo*; se llevará su radio con un compás seis veces sobre la circunferencia, señalando los puntos A, B, C &c. por los que se tirarán las cuerdas AB, BC &c. que formarán el exâgono. Si se tiran despues las cuerdas BF, FD, DB, resultará el triángulo equilátero inscripto FDB; pues cada uno de dichos lados será cuerda de 120°. En él se tiene el radio oblicuo OB=OC duplo del radio recto OX, por ser OX=XC.

114 Como cada lado de un polígono inscripto en un círculo es cuerda de un arco igual à 360° partidos por el número de lados; si se pidiese *inscribir un polígono regular en un círculo dado*; se buscará, dividiendo 360° por el número de lados, el arco que

corresponde à cada uno, se tirará la cuerda à dicho arco, valiéndose del *Semicírculo* (24), y repitiéndolo con el compás por toda la circunferencia, quedará inscripto el polígono. Para trazar en este mismo caso el polígono circunscripto, se alargan los radios oblicuos OC, OD (fig. 49) hasta que encuentran la PH tangente al círculo en el punto Q, y PH será el lado del polígono circunscripto: los demas se determinan del mismo modo.

115 Si se tiran los dos diámetros AB, CD (fig. 52) perpendiculares el uno al otro, queda el círculo dividido en quatro partes iguales, por las que se podrá dividir (54) en 8, 16, 32, 64 &c. partes. Con el triángulo equilátero ó con el exâgono regular se le podrá dividir en 3, 6, 12, 24, 48 &c. partes iguales.

Si se tira la cuerda AC de 90°, la AH lado del pentágono ó de 72°, y la AT de 60°, y se divide el arco TC por medio en O; será HO de 3°, que no se puede dividir ya geométricamente. Con efecto, AC-AT ó 90°-60°=30°; luego TO=15°: y como TH=AH—AT=72°—60°=12°; será HO=3°, con cuyo intervalo se dividirá el círculo en 120 partes iguales.

De las Líneas proporcionales.

116 Si en una línea *ab* (fig. 53), que forma con otra *ob* un ángulo qualquiera *abo*, se toman las partes iguales *bn*, *ne*, *eh*, *hk* &c. y por los puntos *n*, *e* *h*, *k*, se tiran las paralelas *nq*, *es*, *hr*, *kp* &c. cortarán en la *bo* las partes iguales *bq*, *qs*, *sr*, *rp* &c. pues tiradas las *qz*, *sc*, *rl* &c. paralelas à *ab*; los triángulos *bnq*, *zqs*, que tienen *bn*=*ne*=*qz* (98), el ángulo *nbq*=*zqs* (44), y el *bnq*=*qzs* (48), serán iguales (90), y el lado *bq* será igual à *qs*. De los triángulos *qzs*, *scr*, *rlp* &c. se sacará del mismo modo que son iguales *qs*, *sr*, *rp* &c.

117 Luego la parte *bn* es respecto de la *bq*, lo que *ne* respecto de *qs*, lo que *eh* respecto de *sr* &c. es decir, que *bn*:*bq*::*ne*:*qs*::*eh*:*sr*::*hk*:*rp*:: &c. de consiguiente será (180 1. *t.*) *ba* suma de los antecedentes de dichas razones, à *bo* suma de los consecuentes, como un antecedente *bn* à su consecuente *bq*; como dos antecedentes *be* à dos consecuentes *bs*; y como qualquier número de antecedentes *nk* à igual número de consecuentes *qp*: ó *ba*:*bo*::*bn*:*bq*::*be*:*bs*::*nk*:*qp* &c. de manera que si *ba* es los dos tercios de *bo*, tambien *bn* será los dos tercios de *bq*; *be* de *bs*; *nk* de *qp* &c.

118 De aquí se infiere lo 1º *que qualquiera recta* hk (fig. 54) *paralela á la base*

ad *de un triángulo, divide proporcionalmente los otros dos lados* ab, bd : esto es, será *bh:ha::bk:kd*; y *bh:ba::bk:bd.* Tambien será *bd:bk::da:kh*; pues tirando por *k* la *kp* paralela à *ab*, será por lo que acabamos de decir, *bd:bk::ad:ap=hk* (98).

119 2º Al contrario, siempre que una recta *hk* divida proporcionalmente los lados *ba*, *ad* de un triángulo *abd*, será paralela à la base *ad*: porque como la paralela à la base, tirada por *k*, ha de cortar en *ba* una parte *bh* que tenga con *ha* la misma razon que *bk* con *kd* (118); la *hk* de quien esto se verifica, deberá ser paralela à *ad*.

120 3º *Si desde un punto qualquiera* b (fig. 55), *se tiran á una recta* ae *muchas otras* ba, bc, bd, be; *las cortará proporcionalmente una línea* hk *paralela á la base*, porque (118) en los triángulos *bac*, *bcd*, *bde*, la *hk* paralela à sus bases, corta los lados de suerte que *bh:ha::bq:qc::bp:pd::bk:ke*, y *bh:ba::bq:bc::bp:bd::bk:be.*

121 Siendo en el triángulo *bac* (118) *bq:bc::hq:ac*, y en el triángulo *bcd*, *bq:bc::qp:cd*; será *hq:ac::qp:cd*, ó *hq:qp::ac:cd*: del mismo modo se probará que *qp:pk:: cd : de*; luego *hq:qp:pk::ac:cd:de.* Lo mismo se verifica quando la paralela *ot* corta las *ab*, *bc*, *bd*, *be* alargadas; pues tomando en *ba*, *bn=bt*, y tirando por *n* la *nm* paralela à *ae*; los triángulos *bnx*, *bxs*, *bsm* son iguales à *btz*, *bzr*, *bro* (90), por tener cada uno un lado y los ángulos adjacentes iguales: luego siendo *nx:xs:sm::ac:cd:de*; será tambien *tz:zr:ro::ac:cd:de.*

122 4º *Si la línea* bd (fig. 56) *divide el ángulo* b *del triángulo* abc *en dos ángulos iguales* x, o; *cortará el lado opuesto* ac *en dos partes* ad, dc *proporcionales á los otros dos lados* ab, bc; esto es, será *ad:dc::ab:bc*: porque tirando por *a* la *az* paralela á *db* que encuentre en *z* la *cb* alargada; será el ángulo *o=y* (44), y *x=t* (45); y por ser x=*o*, será *t=y*, y (87) *ab=zb.* Como la paralela *bd* á *az* corta los lados *ac*, *cz* de suerte que *ad:dc::zb:*bc (118); se tendrá poniendo por *zb* su igual *ab*, *ad:dc::ab:bc.* Al contrario, siendo los segmentos *ad*, *dc* proporcionales à los lados *ab*, *bc*, dividirá la *bd* al ángulo *b* por medio: porque siendo *ad:dc::ab:bc*, será *ad:dc::zb:bc*, y (119) la *bd* será paralela à *az*, el ángulo *y=o* (44), y *t=x*; luego siendo *t=y*, será *x=o.*

123 5º *Para encontrar una quarta proporcional à las tres líneas dadas* m, n, o, (fig. 57); tiradas dos líneas *bf*, *ba* que formen un ángulo qualquiera *abf*, se tomará con el compás sobre *bf*, *br* igual à la línea dada *m*, y la *bg* del tamaño de la *n*; cortese despues en *ba*, la *bp* igual à la línea *o*, tirese por *p* y *r* la *pr*, y trazando por el punto *g*

la gt paralela à pr; será bt la quarta proporcional à m, n, o: pues en el triángulo btg se tiene (118) $br:bg::bp:bt$, ò $m:n::o:bt$.

124 *Unaa tercera proporcional à dos líneas dadas* m, n, se encuentra tomando en bf, br, y bg iguales à m, n, y sobre ba, $bp = n$, tirando rp, y por g su paralela gt; pues siendo $br:bg::bp:bt$, será $m:n::n:bt$ ò $\div m:n:bt$.

125 6º *Para tirar por un punto dado* f (fig. 58) *una línea* fg, *que se encamine en derechura al punto del concurso de las dos* ab, de, quando este punto está demasiado distante para poderse determinar; desde dos puntos qualesquiera de la ab se tirarán dos paralelas ad, be que rematen en la de, desde el punto a se tirará à f la af, y à esta la paralela indefinida bl; tomese en ella la parte bg quarta proporcional à las tres líneas ad, be, af; y tirando por f y g la fg, será la línea que se pide: porque siendo $ad:be::af:bg$; si se tiran otras dos paralelas qualesquiera mn, no, será tambien $ad:af::mn:no$: luego quando mn sea cero, lo será tambien no; esto es, quando la ab se junte con de, se juntará tambien la fg.

126 7.º Ultimamente, *si se pidiese dividir una recta* ab (fig. 59) *en qualesquiera partes*, v. g. en ocho iguales: se tomarán en la línea bf que forma con ab un ángulo qualquiera abf, comenzando desde b y con qualquier intervalo de compás bd, las ocho

partes iguales bd, dx &c. desde c donde concluyen, se tirará la recta ca, y trazando despues por los puntos d, x, r &c. paralelas á ca; cortarán en ab las ocho partes iguales. pues siendo $bc:ba::bd:be$; $dx:eh::xr:hp$ &c. serán be, eh, hp octavas partes de ab, como bd, dx, xr &c. lo son de bc.

127 *Si se hubiera de haber dividido la* ab *en dos partes que tuviesen una razon qualquiera*, como $3:5$; tomada la suma $3+5=8$ de partes iguales sobre bc, y tírada la ca, se tiraría por la tercera division la pr paralela á ac; pues siendo $br:rc::bp:pa$ y $br:rc::3:5$, será $bp:pa::3:5$.

128 En esta doctrina escriba el método de construir las *Escalas*, instrumento que representa en partes pequeñas las medidas de leguas, toesas, varas &c. tomadas en el terreno. Si se toman por egemplo, á arbitrio en una línea qualquiera as (fig. 60) diez partes iguales ad, dc, ce &c. señaladas con sus números correspondientes 10, 20, 30 &c. y la primera se divide en sus diez unidades que representen varas, pies &c. se tendrá una escala as de 100 partes iguales.

Para tomar en ella un número qualquiera 65, de partes; se pondrá en el número 60 una de las puntas del compás y la otra en el 5, y este intervalo será de 65 partes. Igualmente para averiguar el número de partes de la escala que tiene una línea *nm* ; tomando su longitud con el compás, poniendo la punta en una de las decenas como 40, y viendo adónde llega la otra, si es á 5 tendrá 45.

129 Para construir una escala mas exâcta y universal ; tirada en el punto A de una línea AG indefinida, la perpendicular AB de longitud arbitraria (fig. 61), y por B la BP paralela á AG, se dividirá una porcion AH y su igual BD en diez partes iguales, que se señalarán con los números 10, 20, 30 &c. se tirarán despues trasversales desde 10 à D, de 20 á 10, de 30 á 20. Repitiendo tambien en la AG diez veces la porcion AH, se levantarán en los puntos F, G &c. las perpendiculares FI, GP &c. á las que se pondran los números 100, 200, 300 &c. Se dividirá por último la *AB* en diez partes iguales 1, 2, 3, &c. y tirando por estos puntos paralelas; quedará construida la escala de mil partes, en la que los intervalos HF, FG &c. son de cien partes : D10, 10 20 son de diez, cuyas unidades son *tp*, *on* &c. ; pues siendo los triángulos D10H, D*tp*, D*on*, D*rs* &c. semejantes, será DH de diez partes, à H10 de otras diez ; como D*s* de cinco, à *sr* de otras cinco; como D*n* de dos, à O*n* de otras dos.

130 Si se pidiesen 265 partes de esta escala ; supuesto que HG ó *s*Q vale 200, D60 ó T*r*, 60, y *rs* cinco ; será la distancia TQ de

265 partes. Asimismo sabremos quántas partes contiene de la escala qualquiera recta; tomando su intervalo con el compás, acomodando una de sus puntas sobre alguna de las líneas DH, FI, GP &c. y viendo despues á qué trasversal de la *BD* corresponde.

De las Líneas proporcionales en el círculo y de la semejanza de los triángulos.

131 Dos triángulos *atr*, *bcd* (fig. 62) son semejantes, si los tres ángulos del uno son iguales à los del otro, esto es, $a=b$, $t=d$, $r=c$. Quando son iguales los dos ángulos del uno à los del otro, lo son los tres (86): y en los triángulos rectángulos basta la igualdad de uno de los agudos ; así como en los isósceles la de qualquiera de los tres. De consiguiente, si dada una línea *dc* se pidiese trazar sobre ella un triángulo semejante à *atr*; se formarán en *d* y *c* dos ángulos iguales à *t* y *r*, y será el triángulo *bdc* semejante à *atr*.

Si en un triángulo *atr* se tiran paralelas *mn*, *pq* &c. à la base ; resultarán los triángulos *amn*, *apq*, *atr* semejantes : pues tienen comun el ángulo *a*, y los otros dos iguales por las paralelas. Lo mismo sucede quando los lados del un triángulo *ont* (fig. 63) son paralelos à los del otro *abc* ; pues deben ser equiángulos : ó quando son perpendiculares los lados unos à otros, como los de *emd*; pues dando à este la quarta parte de una vuelta, quedarán sus tres lados paralelos à los de *abc*.

132 *Dos triángulos semejantes qualesquiera* atr, bdc (fig. 62), *tienen proporcionales sus lados homólogos* ó los opuestos à iguales ángulos; *at:bd::ar:bc::tr:dc*. Porque si se toma en el lado *at*, *am*=*bd*, y por *m* se tira la *mn* paralela à la base *tr*: tendrán los triángulos *amn*, *bdc* el lado *am*=*bd*, y por ser semejantes *atr*, *bdc*, los ángulos *a*=*b*, y *m*=*t*=*d*: luego serán iguales (90), y *an*=*bc*, *mn*=*dc*: y como por razon de las paralelas *mn*, *tr* se tiene (118) *at:am::ar:an::tr:mn*; será tambien *at:bd::ar:bc::tr:dc*, poniendo por *am*, *an*, *mn*, sus iguales *bd*, *bc*, *dc*.

133 Al contrario, *si los lados homólogos de dos triángulos* atr, bdc *son porporcionales* at:bd::ar:bc::tr:dc; *dichos triángulos serán semejantes*: porque tomando *am*=*bd*, y tirando *mn* paralela à *tr*; será (118) *at:am::ar::an::tr:mn*: y como por suposicion *at:bd::ar:bc::tr:dc*; será *am:bd::an:bc::mn:dc*: los términos de la primer razon *am*, *bd* son iguales; con que lo serán tambien *an* y *bc*, *mn* y *dc*; y los triángulos *amn*, *bdc* serán iguales (89), luego siendo el triángulo *amn* semejante à *atr* lo deberá ser tambien *bdc*.

134 *Dos triángulos* atr, bdc *con un ángulr* a=b, *y proporcionales los lados que le*

forman at:bd::ar:bc, *son semejantes*. Tomando *am*=*bd*, y tirando *mn* paralela à *tr*, resulta *at:am::ar:an*: y como se supone *at:bd::ar:bc*, será *am:bd::an:bc*; y siendo *am*=*bd*, será *an*=*bc*, y los triángulos *amn*, *bdc* iguales (91): luego siendo *amn* semejante á *atr*, lo será tambien *bdc*.

135 *Si desde el ángulo recto* b (fig. 64) *de un triángulo rectángulo* abc, *se baja la perpendicular* bd; *resultan dos triángulos* abd, bdc *semejantes á* abc, *y de consiguiente entre sí*: pues cada uno de ellos tiene con *abc* un ángulo comun, y un ángulo recto en *d*; luego son semejantes con *abc* (131), y de consiguiente lo serán entre sí.

136 De la semejanza de los triángulos *abd*, *bdc* se saca (132) *ad:bd::bd:dc* ó ÷ *ad:bd:dc*, es decir, *que la perpendicular* bd *bajada del ángulo recto de un triángulo rectangulo sobre la hipotenusa, es media proporcional entre sus segmentos* ad, dc. Y como todo ángulo inscripto *abc* (fig. 65) formado sobre el diámetro *ac* de un círculo es recto (69) será tambien *media proporcional entre los segmentos* ad, dc *del diámetro la perpendicular* bd *bajada sobre él desde qualquier punto de la circunferencia del círculo*, esto es, será ÷ *ad:bd:dc*, y de consiguiente (175. *t*. I.) $(bd)^2 = ad \times dc$.

137 Y así *para encontrar una media*

proporcional entre dos líneas dadas m, n ; tomando $ad=m$ y $dc=n$, se juntarán ambas de suerte que formen una sola recta *ac*, que se dividirá por medio en *o*: desde *o* con el intervalo *ao* se trazará el semicírculo *abhc*, y la perpendicular *bd* levantada en el punto *d* del concurso de las dos líneas, será media proporcional entre *ad* y *dc*, ó entre *m* y *n* (136).

138 De los triángulos *abd*, *abc* semejantes (135), se saca $ac:ab::ab:ad$ (132), y de los *abc*,*bdc* tambien semejantes $ac:bc::bc:dc$; es decir, *cada lado* ab, bc *de los que forman el ángulo recto, es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente de la base*: y por lo mismo *qualquiera cuerda* ab (fig. 65)*tirada desde el estremo del diámetro* ac, *es media proporcional entre el diámetro y el segmento* ad que forma la perpendicular bajada desde *b* sobre *ac*; pues tirada la *bc*, el triángulo *abc* es rectángulo en *b*.

139 Luego *si dadas* t, r, *se pidiese una media proporcional entre ellas*; se trazaría sobre $ac=t$ un semicírculo, se tomaría $ad=r$, y levantando en *d* la *bd* perpendicular à *ac*; sería media proporcional la cuerda *ab* tirada de *a* à *b*: pues en el triángulo rectángulo *abc*, se tiene $ac:ab::ab:ad$ ò $t:ab::ab:r$.

140 Si despues de haber trazado sobre la hipotenusa *ac* (fig. 66) del triángulo rectángulo *abc* un semicírculo, se alargan *ab*, *ac*, y se levanta en *c* la *ce* perpendicular à *ac*, en *e* la *ef* perpendicular à *am*, y en *g*, *h*, k, *l*, *m*, las perpendiculares à dichas líneas, se tendrá una série de líneas proporcionales $\div ad:ab:ac:ae:af:ag$ &c. en los triángulos rectángulos semejantes *abd*, *abc*, *ace*, *aef*, *afg* &c.

141 De las dos proporciones $\div ac:ab:ad$, $\div ac:bc:dc$, se saca (175 *t.* I) $(ab)^2=ac\times ad$, $(bc)^2=ac\times dc$: será pues, sumando ambas quaciones, $(ab)^2+(bc)^2=ac\times ad+ac\times dc$, ó $(ab^2+(bc)^2=ac(ad+dc)$, ó últimamente $(ab)^2+(bc)^2=ac\times ac=(ac)^2$, que es decir; *el cuadrado* $(ac)^2$, *de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados* $(ab)^2+(bc)^2$ *de los otros dos lados.*

142 *Las partes de dos cuerdas* ad, bc, (fig. 67) *que se cortan en un círculo, son recíprocamente proporcionales*; esto es, *ae* parte de la 1ª es à *eb* parte de la 2ª como *ec* parte de esta 2ª à *ed* parte de la 1ª : porque tirando las *ab* y *cd*, resultan semejantes los triángulos *aeb*, *ced*; por tener los ángulos en *e* iguales (22), y $c=a$ (68) : luego (132) $ae:eb::ec:ed$. Si entre dos paralelas *ab*, *cd* se tiran como quiera las *ad*, *bc* que se corten, son tambien recíprocamente proporcionales sus partes por la misma razon.

143 *Dos secantes* ab, bc (fig. 68) *tiradas à un círculo desde un punto* b, *son recíprocamente proporcionales con las partes es-*

teriores br, bd; de suerte que $bc:ba:\,br:bd$: porque si se tiran *ad* y *rc*, los triángulos *brc*, *bad* que tienen ademas del ángulo *b* comun, *a* y *c* iguales (68), serán semejantes: luego (132) $br:bd::bc:ba$.

144 *Si se tiran á un circulo desde un punto* b *una tangente* bp *y una secante* ba, *la tangente es media proporcional entre la secante y el segmento esterno*, ó $ba:bp::bp:br$. Tiradas las *pa*, *pr*, los triángulos *apb*, *pbr* son semejantes; pues tienen el ángulo *b* comun y $a=p$ (66 y 67): luego $ab:bp::bp:br$, y $(bp)^2=ab\times br$ (175 *t.* I.) Del mismo modo se verifica que $ab:bo::bo:br$, ó que $(bo)^2=ab\times br$; será pues, $(bp)^2=(bo)^2$, y $bp=bo$, es decir, serán iguales las dos tangentes tiradas à un círculo desde qualquier punto fuera de él.

145 Por esta proposicion 1º *se encuentra una media proporcional entre* m *y* n (fig. 69): tomando una línea $bt=m$ y $br=n$, trazando sobre el diámetro *tr* un círculo, y tirando à él desde *b* la tangente *ba*, que será media proporcional entre *bt* y *br*, ó entre *m* y *n*.

146 2º Se puede dividir una línea *ab* en *media* y *estrema razon*: así se llama la division de *ab* en dos partes *ad*, *db* tales, que la mayor *db* sea media proporcional entre la menor *ad* y toda la *ab*. Para esto se levanta en el estremo *a* la perpendicular *ac* igual à

la mitad de *ab*, con el radio *ca* se traza un círculo, por *b* y *c* se tira *bct*, y tomando $bd=br$, quedará la *ab* dividida en *d*, de suerte que $ad:bd::bd:ab$. Porque siendo (144) $bt:ba::ba:br$ ó (177 *t.* I.) $bt-ba:ba::ba-br:br$; como $bt-ba=br=bd$, (por ser $bt-ba=bt-2ac=bt-tr$), $ba-br=ba-bd=ad$; se tendrá $bd:ba::ad:bd$, ó $ba:bd::bd:ad$ (177 *t.* I.) Quando la parte *rt* de la secante es igual à la tangente *ab*, queda la secante dividida en media y estrema razon en *r*; pues siendo (144) $bt:ba::ba:br$; será en tal caso $bt:rt::rt:rb$.

147 Si en el triángulo isósceles *abc* (fig. 70) cuyos ángulos *b*, *c* sea cada uno duplo de *a* ó de 72°, se divide el ángulo *b* por medio con la *bt*, quedará la *ac* dividida en media y estrema razon en *t*. Porque siendo semejantes los triángulos *abc*, *tbc*, por tener el ángulo *c* comun, y $a=tbc=36°$; será $ac:cb::cb:ct$, ó $ac:at::at:ct$, pues $cb=bt=at$ por la igualdad de los ángulos (87). Luego si *bc* es lado del decágono inscripto en un círculo, será el ángulo $a=36°$ (109), *b* y *c* de 72°; y de consiguiente, tirando *bt*, será $bc=at$, y *el lado del decágono inscripto en un círculo será igual al segmento mayor del radio dividido en media y estrema razon.*

De la semejanza de las demas figuras.

148 Tratemos ya de las demas figuras, que para ser *semejantes* deben tener todas sus ángulos iguales, y proporcionales todos sus lados ó líneas *homólogas*, es decir, las opuestas à iguales ángulos, ó situadas semejantemente en ellas. Serán pues, semejantes los pentágonos ABCDE, *abcde* (fig. 71), si los ángulos $A=a$, $B=b$, $C=c$, $D=d$, $E=e$, y los lados $AB:ab::BC:bc::CD:cd::DE:de$.

149 »Si de dos ángulos homólogos C, *c* »de dos figuras semejantes ABCDE, *abcde*, »se tiran à los demas las diagonales CA, CE; »*ca*, *ce*; los triángulos en que queda dividi»da la una figura, serán semejantes à los cor»respondientes de la otra.« Pues los triángulos ABC, *abc* y lo mismo se prueba de DEC, *dec*, ademas de los ángulos B, *b* iguales, tienen proporcionales los lados AB, BC; *ab*, *bc* que los forman (148); luego serán semejantes (134). Será pues, el ángulo $n=o$ y (132) $AB:ab::AC:ac$; y como $AB:ab::AE.ae$, será $AC:ac::AE:ae$, es decir, proporcionales los lados AC, AE; *ac*, *ae* de los triángulos AEC, *aec*, ademas de ser iguales los ángulos *m* y *z* que forman; pues si del ángulo $A=a$, se quita $n=o$, quedará $m=z$; luego tambien son semejantes los triángulos ACE, *ace*, y de

consiguiente todos los de las figuras.

150 Por un razonamiento contrario se prueba igualmente que si los triángulos en que una figura se divide, son semejantes à los correspondientes en que se divide otra; son semejantes las figuras. Y así para construir una figura semejante à otra ABCDE dada, y que tenga à *bc* por lado homólogo de BC; se llevará *bc* desde C à b', se tirará por b' la $b'a'$ paralela á AB que encontrará á AC en a'; por a' se trazará la $a'e'$ paralela à AE, y por *e* la $e'd'$ paralela à ED; y resultará la figura $Cd'e'a'b'$ semejante à ABCDE. Tambien pudo haberse trazado sobre el lado *bc* dado, el triángulo *abc* semejante à ABC (131), sobre *ac*, el triángulo *ace* semejante à ACE, y sobre *ec*, *ecd* semejante á ECD, y se hubiera tenido la figura *abcde* semejante à ABCDE.

151 *Para copiar una figura qualquiera* ABCDEF (fig. 72); 1º se podrá tirar la diagonal BE, y bajando à ella desde todos los ángulos las perpendiculares AO, FS, DR, CP, se verá quántas partes tienen de una escala la BE, dichas perpendiculares, y sus respectivas distancias BO, OS, SP &c. Tomese despues una línea *be* del mismo número de partes que BE, y determinadas por uno y otro lado las distancias *bo*, *os* &c. de las perpendiculares, dando á cada una el número de partes que les corresponde; quedarán seña-

lados los puntos o, s, p, r; en los que levantando las perpendiculares oa, sf &c. del mismo tamaño que OA, SF &c. se tendrán los puntos b, a, f, d &c. mas principales de la figura: los demas se pueden dibujar à ojo; advirtiendo que si no basta la BE para determinar dichos puntos por ser muchos, ó por ser grande su distancia respectiva, se tirará otra base perpendicular à BE por cuyo medio se determinarán.

152 2º Tambien se pudiera haber copiado aplicando el papel ó lienzo en que está la figura à otro, y picando despues con un alfiler sutil los puntos mas principales por los quales se podrán determinar los demas.

153 3º Si despues de haber picado con un alfiler los puntos de la figura, se aplica sobre otro el papel picado, y se repasan todos ellos con un *Cisquero*, que es un lienzo atado por sus puntas con carbon molido dentro; quedarán señalados dichos puntos en el papel que se renovarán con tinta ú otro color permanente.

154 4º Apliquese sobre un papel, otro dado de qualquier color que se quite fácilmente como el de qualquier género de lápiz: póngase sobre ambos la figura que se ha de copiar, y repasando con una punta roma todos los contornos y puntos principales, quedará calcada la figura en el papel.

155 5º Si se aplica à un cristal la figura dada, en sitio donde le dé bastante luz por atrás, y se pone sobre ella un papel; se traslucirá por él toda la figura, y será facil copiar todos sus puntos y contornos.

156 6º Ultimamente, quando se trata, en especial de la copia de un cuadro ó mapa, se encierra la figura en un cuadrado ó rectángulo ABCD (fig. E), se dividen los dos lados AB, AD en partes iguales, y se tiran por ellas líneas paralelas que dividirán el rectángulo que se llama *Cuadrícula*, en cuadrados pequeños: copiese cada cuadrado correspondiente en otro rectángulo que se forma igual en un papel ó lienzo, dividido en igual número de partes, y con las mismas paralelas, y se tendrá la copia de la figura.

157 Si en lugar de figuras iguales se quisiese una copia semejante que fuese la mitad, el tercio, quarto... del original, se formará una Cuadrícula que tenga con la dada la razon que se desea; y por el primer método se tomarán sus líneas con el número de partes de una escala que tenga la misma razon que han de tener las figuras.

158 *Para levantar el plano de un terreno*, ó trazar otro semejante en el papel con las distancias respectivas que tienen los puntos ú obgetos principales que en él haya; sirven diferentes instrumentos como el *Grafó-*

metro, *la Plancheta*, *la Brújula* &c. Hablarémos ahora de estos dos últimos con relacion à los terrenos accesibles por todas sus partes, reservando para despues el uso del Grafómetro en los sitios en parte ó del todo inaccesibles.

La *Plancheta* es una tabla HMNO (fig. 73) de tres pies de largo, y como dos y medio de ancho, colocada sobre un pie como el Grafómetro (25): sobre ella se estiende un papel que se afianza con un bastidor que coge el perímetro de la tabla: y para dirigir por ella visuales á los objetos, se usa de una *alidada* LT con dos pínulas en sus estremos, ó de un anteojo si los objetos están á mucha distancia.

159 Para levantar un plano con este instrumento, se mide una base SR desde cuyos estremos S, R se pueden ver los mas de los obgetos que se han de figurar: se pone la plancheta en S y un piquete en R, y dirigiendo la alidada de manera que por sus pínulas se vea R; se tirará en el papel una base EF, dándole tantas partes de una escala, como varas ó pies tenga SR. Dirijase despues la alidada fijo uno de sus estremos en E, à todos los objetos A, B, C &c. del terreno, y por cada direccion se tirará en el papel una línea indefinida. Pasese despues el instrumento à R, dejando un piquete en S, y alineando con él la *ef*, dirijanse visuales à los objetos A, B, C &c. observados, las quales señaladas en el papel, cortarán las primeras en los puntos *a*, *b*, *c* &c. que determinarán la posicion de los del terreno, à causa de los triangulos semejantes SAR, SBR, SCR &c. *efa*, *efb*, *efc* &c. que resultan.

160 El poco aparato que requiere el uso de este instrumento, le hace apreciable para determinar los puntos ménos principales de un plan forjado ya por un metodo mas exâcto. Si se quisiere por exemplo, añadir al anterior *efcba* un punto R omitido; se plantará sobre él la plancheta, se dirigirá la alídada por los puntos A, *a*, y despues por *B*, *b*; y el concurso *f* de las líneas *Aa*, *Bb* tiradas en cada direccion, señalará la situacion de R: en prueba de lo qual la línea tirada po *Cc* pasará tambien por *f*. Por lo demas, suelen ser considerables los errores que pueden resultar en el uso de la plancheta, ya por ser muy agudos los ángulos que sobre ella se forman, ya por estar el papel espuesto á moverse. Ademas de esto, quando el mal temporal interrumpe la operacion, hay que volverla á comenzar si se ha de hacer con exâctitud.

161 La *Brújula* es un instrumento de marfil, madera ú otra materia sólida (fig. 74) de dos hasta seis pulgadas de diámetro, cuya parte interior es un círculo con dos diàmetros que se cortan à ángulos rectos. El estremo de uno

de ellos tiene una flor de lys con que se señala el *Norte*, uno de los quatro puntos *cardinales* del mundo: desde él empieza la division del círculo en sus 360° ácia la derecha del que mira al cielo con la cara al *Norte*, el qual tiene el *Sur* à las espaldas, el *Oriente* à la derecha y el *Poniente* à la izquierda: así se llaman los otros tres puntos del mundo. En el centro del círculo sobre un exe de cobre puntiagudo se coloca una aguja de acero tocada al iman, muy en equilibrio para que pueda dar vueltas con facilidad; y todo se tapa con un cristal redondo qne encaja en un rebajo hecho al rededor del círculo para impedir que el ayre mueva la aguja.

162 Como esta tiene la virtud comunicada del iman, de dirigir uno de sus estremos ácia el Norte y otro ácia el Sur; se cuida de colocar tanto en el grafómetro como en la plancheta una brújula para dar por medio de ella à los objetos la misma situacion en el papel que tienen en el terreno con relacion à los puntos cardinales del mundo. Con este fin se coloca de manera que la línea *Norte Sur* quede paralela con el diámetro del grafómetro; pues siendo la base comun de todos los triángulos que se observan, paralela á dicho diámetro; con solo dirijir paralela à la aguja la línea de *fe'*, que es la que pasa por medio de la alidada; se sabrá con poca diferencia la

situacion de los obgetos respecto de dichos puntos cardinales.

163 Dige con poca diferencia, porque la aguja segun el tiempo y los diferentes lugares, se aparta mas ó ménos de la direccion del Norte. Para saber en quántos grados se separa, ó el *ángulo de la declinacion* de la aguja con la línea norte sur, hay que tirar esta línea en el terreno. Lo que se puede hacer trazando desde un punto dos líneas de treinta à quarenta estadales, una ácia el sol naciente y otra quando se pone, y dividiéndo por medio el ángulo que formen las dos, con una línea, que será la *meridiana* ó norte-sur. Si à esta meridiana se aplica una de las bases AB de la brújula, quedarà con ella paralela su línea norte-sur; y el ángulo que con ella forme la aguja, restado de 360°, dará el de la declinacion.

164 Con ningun instrumento se levantan mas fácilmente los planos que con la brújula; pero ninguno ocasiona mayores equivocaciones, ya sea por tomarse muy agudos los ángulos por la pequeñez de las agujas, ya sea por no haberse acaso apartado lo bastante de alguna mina de hierro en el terreno; y en casa, de utensilios de hierro, puntas de compás, ò de otra brújula. Por eso suele servir solamente para determinar *el por menor* de un plano; como el curso de un rio, la

direccion de un camino, el circuito de una laguna, bosque &c.

165 Para qualquiera de estos casos se plantarán piquetes A, B, C, D, E (fig. 75) en todos los recodos mas reparables, se colocará la brújula en A, y suponiendo que sea AH la direccion de la aguja; se medirá la AB, y se verá qué número de grados tiene el ángulo HAB. Puesto el instrumento en B, se medirá igualmente la BC, y el ángulo HBC, repitiendo esto mismo en cada recodo. Se tomará despues en el papel un punto *a*, y tirando à arbitrio la *ah* que represente la direccion de la aguja; se formará con el *Semicírculo* un ángulo *hab*=HAB, dando á *ab* tantas partes de una escala como varas ó pies tuvo *AB*: se tirará despues por *b* la *hb* paralela à *ab*, y se hará el ángulo *hbc*=HBC, dando á *bc* tantas partes como medidas tuvo BC: practíquese lo mismo en los demas puntos, y se habrá levantado el plan propuesto.

166 *Los perímetros de dos figuras semejantes* ABCDE, abcde (fig. 71) *sean regulares ó no, tienen entre sí la misma razon que sus lados, porciones, diagonales y demas líneas homólogas.* Porque siendo (148) *AB*:*ab*::BC:*bc*::CD:*cd*::DE:*de*, será (180 *t*.I.) AB+BC+CD+DE ó ABCDE perímetro de la una figura y suma de los antecedentes, á *abcde* perímetro de la otra y suma de los consequentes;

como un antecedente AB á su consecuente *ab*; como qualquier número de antecedentes AB+BC+CD ó ABCD, á igual número de consecuentes *abcd*. Y como AB:*ab*::AC:*ac*::CE:*ce* &c. (149), serán tambien los lados y perímetros proporcionales á las diagonales, y en los polígonos regulares á los radios rectos, oblicuos &c. de manera que la figura de un perímetro duplo del de otra tendrà lados, diagonales, radios duplos; triplos si fuese triplo el perímetro &c.

167 Todas estas proposiciones tienen lugar en el círculo, polígono infinitángulo (102), que podemos imaginar dividido en infinitos triángulos con radios tirados á todos sus puntos, que serán las bases y lados infinitamente pequeños del polígono. De consiguiente, *las circunferencias de los círculos son entre sí como sus radios, diámetros, cuerdas y arcos semejantes.* De manera que dado el diámetro y circunferencia de un círculo, y el diámetro de otro, si se nos pidiese su circunferencia; diriamos, *el primer diámetro es á su circunferencia, como el segundo diámetro á la circunferencia que se busca*, que sería el 4° término de la proporcion.

Pero hasta ahora está por averiguar la circunferencia ó porcion de línea recta que exâctamente corresponde á cierto diámetro, ó la razon del diámetro á la circunferencia: teniéndose ya casi por imposible la que se llama (180) *Cuadratura del círculo.* Sinembargo, son suficientísimas para la practica las razones 7:22 que tiene el diámetro á la circunferencia segun *Arquimédes*, en la que sale un solo pie de ménos en un círculo de 800 pies: 113:355 que halló *Mecio*, y que da un pie de falta en una circunferencia de 1000000, y 1:3,14159265358979 32 &c. hasta ciento veinte y siete notas decimales.

168 Si se diese un diámetro de 16 varas, hallariamos su circunferencia de $50\frac{2}{7}$ *v.* diciendo, $7:22::16:50\frac{2}{7}v.$ y al contrario, el diámetro 16 *v.* de una circunferencia que tiene $50\frac{2}{7}$ *v.* se encuentra por la proporcion $22:7::50\frac{2}{7}v:16$: Ultimamente, si dado el diámetro de 20 *v.* se pidiese la longitud de un arco de 32° 40′, se buscará primero la circunferencia que es de $62\frac{6}{7}$ *v.* y despues se dirá, *si toda la circunferencia ó 360° tiene 62* $\frac{6}{7}$*v. ¿quántas tendrá* 32°40′? Saquese el último término, y saldrán $5\frac{19}{27}$ *varas.*

De las Superficies y Planos.

169 El segundo género de estension en longitud y latitud que se llama *area* ó *superficie*, es el espacio que encierran las líneas: y segun sean estas rectas ó curvas, será *rectilinea*, *curvilinea* ó *mistilinea* la superficie.

Tambien se llama *plana* la superficie perfectamente lisa sin hoyos ni eminencias, como la del cristal: y *curva* aquella cuyos puntos no están igualmente altos y bajos: esta será *conveja* ó *cóncaba* como el esterior é interior de un caldero.

170 Dicha superficie plana que se considera formada de infinidad de líneas que llenan todo su espacio (1), se llama *plano* quando se imagina separada de los cuerpos; y como no tiene grueso, cavidades ni prominencias, *qualquiera recta que le toque en dos puntos; le tocará en todos*; pues si no, tendria una parte en el plano y otra mas elevada; y no seria recta. Por lo mismo, un *plano puesto sobre otro le toca en todos sus puntos*, *y forma con él un solo plano*; pues se tocan precisamente todas las rectas que los forman.

171 *Tres puntos que no están en línea recta, determinan la situacion de un plano*; porque si dos planos pudieran tener tres puntos comunes, ó los tendrian todos y formarian un solo plano, ó tendria uno de ellos alguna parte elevada sobre el otro plano, lo que no puede ser (169). De consiguiente, tres puntos que no esten en línea recta, no pueden ser comunes á dos planos.

172 De aquí se infiere que por tres puntos qualesquiera v. gr. los de un triángulo, se podrá hacer pasar un plano: y de consi-

guiente dos rectas BD, BC (fig. 76) que se corten, estarán en un mismo plano, determinado por los tres puntos D, B, C: y lo mismo dos paralelas TH, AB.

173 *Una recta AB perpendicular á un plano MNOP, es tambien perpendicular á todas las líneas puestas en el mismo plano que pasan por el punto B de la perpendicular*: pues si no lo fuera, se inclinaria ácia algun lado del plano, contra el supuesto de ser perpendicular. De consiguiente, *dos líneas TH, AB perpendiculares á un plano son paralelas entre sí*: pues uniéndolas con HB son perpendiculares à la HB (43).

174 *Desde un punto tomado en un plano ó fuera de él, no se puede tirar mas que una perpendicular á dicho plano*; porque si se pudieran tirar dos desde un mismo punto, se podrian tirar dos perpendiculares desde un punto á una línea recta, lo qual es imposible (33).

175 *Si dos planos ENMA, BOPS (fig. 77) se cortan, la comun seccion es una línea recta*: porque si tomamos dos puntos en dicha seccion, la recta que pase por ellos, ha de estar toda en cada uno de los planos (3): luego será la comun seccion, y será línea recta.

176 *Si dos planos EMNA, BOPS son perpendiculares al plano RQ, su comun sec-*

cion DC será tambien perpendicular al plano: pues si del punto C se levanta una perpendicular al plano RQ, deberá hallarse toda en cada uno de los planos EMNA, BOPS; luego será la comun seccion.

177 *La inclinacion de dos planos AN BP se mide por el ángulo ACB que forman dos líneas AC, BC perpendiculares á la comun seccion DC, tiradas una en el plano AN, y otra en el plano BP*: pues si imaginamos que sobrepuesto el punto A á B, se aparta despues el plano AN moviéndose al rededor del ege DC; trazará B hasta volver á su lugar, el arco AB: luego medirá la inclinacion de los planos el ángulo ACB, cuya medida es AB.

178 Luego en la interseccion y encuentro de dos ó mas planos se verifica quanto dejamos demostrado en la interseccion y encuentro de dos ó mas líneas (18, 22 *y sig.* 27 *y sig.* 43 *hasta* 48) que escusamos repetir aquí.

179 Los planos son paralelos quando distan igualmente por todas partes: y así *si un plano corta dos ó muchos planos paralelos, las comunes secciones son tambien paralelas*; pues si no, alargándolas se vendrian à juntar, y de consiguiente los planos, contra lo supuesto de ser paralelos.

Medida de las Superficies.

180 Las superficies se miden con cuadrados, por ser la figura mas sencilla: y así *cuadrar* ó *medir una superficie* ABCD (fig. 78) es averiguar las veces que en ella cabe otra superficie cuadrada y conocida *abdc* que se toma por la unidad. Y como ABDC se puede concebir formada (1) por la recta DC que se mueve paralelamente á si misma lo largo de BD, dejando rastro tras sí de su movimiento; á cada paso D*b* que ande, igual al lado *db* del cuadrado *abdc* que se toma por la unidad, formará tantos cuadrados iguales á *abdc*, quantas veces dicho lado D*b* ó D*c* quepa en la línea D*c*, que son quatro. Luego dicha superficie contendrá tantas veces quatro cuadrados iguales á *abdc*, como veces su lado *ab* ó D*b* quepa en la base BD, esto es, el producto del número de veces que el lado del cuadrado cabe en la base y en la altura. Esto espresaremos mas sencillamente en lo sucesivo diciendo *que la superficie de un paralelogramo rectángulo es el producto de la base por la altura*, bien que con impropiedad; pues ni una línea puede multiplicarse por otra no siendo número abstracto (15 *t.I.*), y si se pudiera multiplicar, resultaria una linea y no una superficie.

181 Luego 1º *la superficie de un cuadrado es el producto de la base ó de la altura por sí*: y la de un paralelogramo qualquiera BCDF (fig. 45) *es el producto de su base* BC *por su altura* DT ó AB; esto es, $BC \times AB$: porque BCDF es igual á ABCE (97), y este tiene por superficie á $BC \times AB$ (180).

182 2º *La superficie de qualquier triángulo*, como mitad que es del paralelogramo de igual base y altura que él (96), *es la mitad del producto de su base por su altura*, ó el producto de una de las dos, por la mitad de la otra.

183 *La superficie de un trapecio* abce (fig. 79) *es el producto de su altura* ed *por la mitad de la suma de sus bases paralelas* bc, ae: porque con la diagonal *ac* queda dividido en los dos trángulos *abc*, *ace*, cuyas superficies son (182), $\frac{1}{2}\,bc \times ed + \frac{1}{2}\,ae \times ed$: luego la suma de estas dos superficies ó la del trapecio será $\frac{1}{2}\,(bc+ae) \times ed$. Si se toma $ao = ob$, y se tira *ot* paralela á *bc*, será la superficie del trapecio $ed \times to$: porque tirando por *o* la *mn* paralela á *ec*, se tiene $2to = en + mc$, y $to = \frac{1}{2}(en+mc) = \frac{1}{2}(ae+bc)$, poniendo *bm* en lugar de *an* su igual en los triángulos *aon*, *bom* iguales, por tener $ao = ob$, los ángulos en *o* iguales (22), y lo mismo *a* y *b* (45).

184 *La superficie de un polígono regular,* ABCDE (fig. 51) *es el producto del radio recto por la mitad de su perímetro*; porque siendo la superficie de cada uno de los triángulos iguales en que se divide (108), el producto de su altura OM por la mitad de su base AB (182); será la de todos los triángulos ó la del polígono, el producto de la altura ó radio recto OM por la mitad de todas las bases ó lados del polígono que forman su perímetro. Luego un triángulo que tuviese por base el perímetro del polígono, y su radio recto por altura; tendria la misma superficie que el polígono: pues seria tambien el producto del radio por la mitad del perímetro.

185 Como el círculo es un polígono infinitángulo (102), será su superficie *el producto del radio por la mitad de la circunferencia, ó de esta por la mitad del radio*: y equivaldrá à la superficie de un triángulo cuya base fuese la circunferencia, y la altura el radio. La superficie de un círculo de 20 pies de diámetro, cuya circunferencia es $62\frac{6}{7}$(167); será $314\frac{2}{7}$ pies cuadrados, producto de 5 mitad del radio, por la circunferencia $62\frac{6}{7}$.

186 La superficie de un *sector de círculo* ACBD (fig. 80) que es el espacio contenido entre dos radios CB, CA y el arco AB, es el producto de la mitad del radio por el valor del arco ADB. Si este arco por egemplo, es de

32° 40′, y su diámetro de 20 pies; tendrá el arco $5\frac{19}{27}$ pies (167): multiplíquese por 5 mitad del radio, y resultarán $28\frac{14}{27}$ pies cuadr. por la superficie del sector.

187 Un *segmento de círculo* ABD ó el espacio encerrado entre un arco ADB y su cuerda AB, tiene por superficie à la del sector ADBC ménos la del triángulo ACB. Y la de una corona X se hallará buscando separadamente la de los dos círculos que la componen, y restando la superficie del menor de la del mayor.

188 Para sacar la superficie de un polígono irregular, se le divide en triángulos, en los ménos que pueda ser: se saca la de cada uno, ó de cada dos, si se les puede dar una base comun; y la suma de todos, será la del polígono. Si en el ABCDEF (fig. 72) se toma la diagonal BE por base de los dos triángulos BEC, BFE; se sacará de una vez la superficie de ambos, multiplicando BE por la mitad de las alturas FC, FS: y añadiendo á la superficie que resulte, la de los triángulos FAB, EDC que se sacará cada una por sí; se tendrá la del polígono.

189 Quando está terminado de alguna línea curva irregular, se le reduce segun lo muestra la figura 81, à polígono rectilíneo, y despues de medir las superficies mistilíneas restantes, ó como triángulos ó como segmen-

tos de círculo, se unirán à la del polígono para tener la total sin error sustancial.

De consiguiente qualquier terreno acesible ó inacesible se podrá medir, levantando su plano (158 y *sig.*), y midiendo despues la superficie del plano que resulte en el papel en partes de la escala que sirvió para el plano: esa misma deberá ser la del terreno en pies ó varas. Quando el terreno está terminado de líneas curvas como suele suceder à un pantano, bosque ó montaña; cierresele entre líneas rectas, y cercenense de la superficie que resulte, las porciones que no le pertenezcan.

Conviene advertir que el terreno que está en cuesta, no se debe apreciar por su superficie aparente, sino por la utilidad que puede tener en labranza, árboles, casas &c. Todo esto se planta y se edifica perpendicularmente: es decir, que en la cuesta AB (fig. 128) por eg. nunca se podrán plantar mas árboles que los que caben en la línea orizontal AD. De consiguiente si se gradúa que cabrán en la cuesta la mitad que en DA; se debe valuar la superficie de la cuesta en la mitad de AD, y aun en menos, por la incomodidad que trae labrar ó edificar en terreno que está pendiente.

Reduccion y division de las Superficies.

190 Un paralelógramo BCDF (fig. 45) se trasforma en un cuadrado, igual en superficie; buscando (139) una media proporcional M entre la base BC y la altura DT, y esta será el lado del cuadrado: porque siendo BC:M::M:DT; será (175 *t.* I.) $BC\times DT=M^2$: ó la superficie del paralelogramo igual á la del cuadrado.

191 Una media proporcional entre la mitad de la base y la altura, ó entre la base y la mitad de la altura de un triángulo, seria el lado del cuadrado igual á él en superficie (182): y la media proporcional entre el radio y la semicircunferencia de un círculo dará el lado del cuadrado de una misma superficie que él (185).

192 *Una figura rectilinea qualquiera* ABCDE (fig. 82) *se reduce á otra igual en superficie, y que tenga un lado ménos*; tirando la diagonal BD, y por el punto C la CG paralela á BD, que cortará en G el lado AB alargado: tirando despues la DG, resultará el quadrilátero AGDE igual al pentágono ABCDE. Porque siendo iguales los triángulos GBD, CBD (97) por ser de una misma base y estar entre las paralelas BD, CG; si del pentâgono se quita el triángulo CBD, y

se le pone su igual GBD, quedará AGDE= ABCDE. Si al quadrilátero AGDE se le quita por el mismo método otro lado AE, quedará reducido al tríngulo FDG igual á él en superficie: de consiguiente, qualquiera figura rectilinea podrá trasformarse en un triángulo de igual superficie, igualmente que en cuadrado (190).

193 *Para reducir un triángulo* ABC (fig. 83) *á otro igual en superficie, que tenga su vértice en un punto dado* D; tirense a los puntos A, C las DA, DC: por el vértice B la BH paralela á la base AC, y por el punto H donde la DA corta á BH, la HE paralela á DC; y tirando finalmente la DE, será ADE el triángulo que se pide. Porque tirando la HC, los triángulos DHE, HEC de una misma base HE, y que están entre las paralelas DC, HE, son iguales (97): júntense con el triángulo AHE en la 1ª figura, y réstense de AHE en la 2ª y 3ª, y resultará el triángulo ADE igual á AHC: y como este es igual á ABC triángulo dado, por tener una misma base y estar entre las paralelas BH, AC; será el triángulo ADE=ABC.

De esta práctica se deduce el modo de trasformar un triángulo isosceles é equilátero ABC en otro obstusángulo ó escaleno ADE que le sea igual. Y si se quiere reducir el ABC (fig. F) isosceles é equilátero à otro igual

que sea rectángulo; despues de bajar la perpendicular CD, y alargar la base AB hasta que DE sea igual á AB, se tendrá ABC=EDC rectángulo.

195 *Para dividir un triángulo* ABC (fig. 84) *en las partes iguales que se quiera* por eg. *en dos, con líneas tiradas desde un punto dado* D; se dividirá la base AC en dos partes iguales en E, á donde se tirarán las EB y ED, y desde *B* la BF paralela à DE: tirense por último DF, DB, y estas dividirán al triángulo en dos partes *BDFA*, DFCB iguales. Porque los triángulos ABE, EDC de bases CE, AE iguales, y de una misma altura BE, son iguales (97): tambien lo son BEF, BDF, por tener una misma base BF y estar entre las paralelas BF, DE: añadanse á ABF, y resultará el triángulo ABE mitad del total ABC, igual al trapezoide AFDB; y de consiguiente la porcion DFCB sera la otra mitad.

Si se pidiese encontrar en un lado AC *del triángulo* ABC (fig. G) *un punto desde donde se le divida en qualquier número de partes iguales como en quatro*; se tomará AH=$\frac{1}{4}$AC, y tirando la HB, será AHB la quarta parte de ABC: dividase despues BHC en las tres partes iguales *BHF*, FHE, EHC como hemos dicho ya (195), y quedará ABC dividido como se pide.

194 *Para dividir en qualesquiera partes, por egemplo en dos, un quadrilatero* ABCD (fig. 85) *desde un punto* E *dado en uno de sus lados*; se reducirá primero al triángulo ADF (192)), se tirará despues la DE y la DG à la mitad G de la base AF; y será el triángulo ADG mitad de ADF ó del quadrilátero ABCD: finalmente tracese por G la GH paralela à DE, y tirando EH, dividirá al quadrilatero como se pide. Porque siendo iguales los triángulos DEH, DEG de una misma base que están entre las paralelas GH, DE, si se añaden à ADE; se tendrá ADG mitad del quadrilátero, igual à ADHE.

195 *Para dividir en quantas partes se quiera, sea en tres, el polígono* ABCDE (fig. 86) *con líneas tiradas desde uno de sus ángulos* D; trasformesele en el triángulo TDF (192), dividase su base TF en tres partes iguales en H y G, y tirando DH, DG; quedará dividido el polígono en tres partes iguales: pues son iguales los tres triángulos TDH, HDG, GDF que tienen una misma altura y bases iguales. Quando alguno de los puntos G, H, &c. cae fuera del polígono como sucede en ABCDE (fig. 86*), el qual si se divide en quatro partes iguales como acabamos de decir, queda fuera el punto H; se reduce el triángulo HDI al quadrilatero AODI, tirando por H la HO paralela à AD.

195 *Un quadrilátero* ABCD (fig. H) *se dividirá en qualesquiera partes iguales* por eg. *en tres con líneas tiradas desde un punto* I *dado en uno de sus lados*; dividiendo AB en tres partes iguales en M y N, tirándo las LM, NK paralelas à AD, qne dividirá en tres partes iguales el paralelogramo ABCD: dividanse por medio ML, NK en O y R, y tirando por ellos TH, TS, partirán al paralelógramo como se pide.

Comparacion de las Superficies.

196 Siendo la superficie de un paralelogramo el producto de la base por su altura (180); si llamamos B la base, A la altura, S la superficie de uno; *b*, *a*, *s* la base, altura y superficie de otro; será $S = B \times A$, $s = b \times a$; luego $S:s::B \times A:b \times a$; es decir, *las superficies de los paralelogramos* son como los productos de sus bases por sus alturas, ó *estan en razon compuesta de bases y alturas* (172 I. *t.*)

197 Quando $B = b$, la proporcion $S:s::AB:ab$, se reduce á $S:s::A:a$, y quando $A = a$, es $S:s::B:b$: esto es, *los paralelogramos de una misma base son como sus alturas, y los de una misma altura son como sus bases.*

198 *Si las bases de los paralelogramos están en razon inversa de sus alturas, serán sus superficies, iguales: y si son iguales, tendrán*

bases y alturas recíprocas: porque si $B:b::a:A$, será (174 *t.* I.) $B\times A=b\times a$ ó $S=s$: y si $S=s$ ó $B\times A=b\times a$, será (176 *t.* I.) $B:b::a:A$.

199 Como los triángulos son mitades de los paralelogramos de igual base y altura (96), tendrán tambien (183 *t.* I.) *la razon compuesta de bases y alturas ; los de igual base serán como las alturas, y los de igual altura como sus bases : los iguales en superficie tendrán sus bases en razon inversa de sus alturas ; y los que tengan bases y alturas recíprocas, serán iguales en superficie.*

200 En los paralelogramos y triángulos semejantes, en los que la razon de las bases es igual á la de las alturas (148), será la razon compuesta de bases y alturas que tienen dichas figuras (196), duplicada de qualquiera de ellas (172 *t.* I.) ; luego *los paralelogramos y triángulos semejantes tienen la razon duplicada de sus bases ó alturas , ó son como sus cuadrados* : y como las bases y alturas son proporcionales á todos los lados homólogos, *serán dichas figuras como los cuadrados de sus lados homólogos* ; y así será $S:s::A^2:a^2::B^2:b^2$ &c.

201 Luego *las superficies de qualesquiera figuras que tienen la razon compuesta de los dos factores que las producen, quando son semejantes ; tendrán la razon duplicada de sus lados homólogos , ó serán como sus cuadrados*:

pues siendo los triángulos en que dichas figuras pueden dividirse, partes semejantes suyas (149) , deberán tener la misma razon que ellos (183 *t.* I.) , que es la de los cuadrados de sus lados homólogos (200). Y así , *las superficies de los polígonos regulares semejantes son entre sí como los cuadrados de sus perímetros , diagonales , radios rectos y oblicuos : y las superficies de los círculos ó semicírculos son como los cuadrados de las circunferencias , radios , diámetros , arcos y cuerdas semejantes.*

202 Por ser (141) $(ab)^2=ac\times ad=aepd$ (fig. 87), y $(bc)^2=ac\times dc=dpfc$; será $(ab)^2+(bc)^2=aepd+dpfc$: ó el cuadrado V de la hipotenusa ac igual á la suma $X+Z$ de los cuadrados de los otros dos lados ab , bc : proposicion que demostramos (141) : y que tambien consta de que siendo semejantes los triángulos abc, abd, bdc (135) , será (200) $abc:abd:bdc::(ac)^2:(ab)^2:(bc)^2::V:X:Z$, y siendo $abc=abd+bdc$, será $V=X+Z$.

203 Luego 1º $X=V-Z$, y $Z=V-X$, ó *el cuadrado de cada lado del ángulo recto, es igual á la diferencia entre los cuadrados de la hipotenusa y del otro lado.* 2º Quando el triángulo rectángulo es isósceles , el cuadrado de la hipotenusa es duplo del cuadrado de cada lado , esto es , $(ac)^2=2(ab)^2$; y de consiguiente $ac=\sqrt{2(ab)^2}=ab\sqrt{2}$, que es una cantidad inconmensurable ; y como ac es en-

F 2

tónces diagonal del cuadrado $abcV$, *será la diagonal de un cuadrado inconmensurable con sus lados* : es decir, no podrá con los lados espresarse el valor de la diagonal.

204 3º *Toda figura formada sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de las semejantes trazadas sobre los otros dos lados* : por egemplo, el semicírculo $abca$ es igual á los semicírculos aXb, bZc: pues siendo $abca:aXb:bZc::(ac)^2:(ab)^2:(bc)^2$ (201), y $(ac)^2=(ab)^2+(bc)^2$; será tambien $abca=aXb+bZc$. Si se quita de ambas partes $aoba$, $bhcb$ comun, queda $aXbo+bZch$ igual al triángulo abc, y quando $ab=bc$, se tiene $aobX=abd$. Las porciones de círculo $aXbo$, $bZch$ se llaman las *Lúnulas de Hipócrates*, que encontró su cuadratura.

205 4º *El cuadrado de la hipotenusa es á los cuadrados de los otros dos lados, como la hipotenusa á los segmentos correspondientes a dichos lados* ; ó $(ac)^2:(ab)^2:(bc)^2::ac:ad:dc$: porque $(ac)^2:(ab)^2:(bc)^2::abc:abd:bdc::ac:ad:dc$; pues teniendo los tres triángulos una misma altura bd, serán como sus bases ac, ad, dc (199),

206 5º *Luego los cuadrados de dos cuerdas* ab, ah (fig. 65) *tiradas desde un estremo* a *del diámetro, son entre sí como las partes* ad, ar *que cortan en él las perpendiculares* bd, hr *bajadas de los estremos de dichas cuerdas* : porque en el triángulo rectángulo abc, $(ac)^2:(ab)^2::ac:ad$, y en ahc es $(ac)^2:(ah)^2::ac:ar$; luego $(ab)^2:(ah)^2::ad:ar$.

207 *De las figuras regulares isoperímetras la que tiene mas lados incluye mayor superficie.* Sean por egemplo, un cuadrado y un pentágono (fig. 88) : si se inscribe en ellos un círculo, estarán sus superficies en razon de los radios ac, mn; pue son el producto de la mitad de su perímetro por dichos radios; luego nm es mayor que ca : porque si fueran iguales y de consiguiente sus círculos, sería menor el perímetro del pentágono que el del cuadrado (102), contra lo supuesto de ser iguales; luego es mayor la superficie del pentágono que la del cuadrado. De consiguiente *el círculo que es un polígono de infinitos lados, tiene mayor superficie que otra qualquier figura de igual perímetro:*

208 Para hacer dos figuras que tengan entre sí una razon dada como la de 1 : 3; se tomarán en una línea indefinida ac (fig. 65) dos partes que sean entre sí como 1 : 3, de suerte que sea $3ad=dc$: desde su mitad o se trazará un semicírculo, y levantando en d la perpendicular db, serán ab, bc tiradas á los estremos del diametro los lados homólogos de las figuras que se piden, las quales se trazarán semejantemente sobre ellos. La razon de la operacion es evidente, pues las figuras se-

mejantes trazadas sobre *ab* y *bc*, son entre sí (201) como $(ab)^2:(bc)^2::ad:dc::1:\ 3$ (206); luego &c.

209 Si dada la figura *abcde* (fig. 71) se desease otra de una superficie tripla, ó que tuviese con ella la razon de 3:1; suponiendo á uno de sus lados *ab* de 10 varas, hallaríamos el homólogo AB de la otra figura, haciendo $1:3::(10)^2:300$, cuadrado de AB; de suerte que $AB=\sqrt{300}=17{,}32$ varas con poca diferencia: hagase ahora *ab*: AB::*bc*:BC:: *cd*:CD::*de*:DE, y se tendrá la longitud de los demas, que unidos con ángulos iguales á *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, formarán la figura ABCDE que se desea.

De los Sólidos.

210 La última especie de estension que reune longitud, latitud y profundidad ó altura, se llama *sólido*, *cuerpo* ó *volúmen geométrico*: *será regular*, si las superficies que le rodean, son iguales y semejantes, y sus ángulos sólidos iguales; los demas son *irregulares*. El cuerpo de quatro superficies se llama *tetraedro*, el de cinco *pentaedro*, y *exâedro*, *eptaedro*, *octaedro*....*polyedro* el de seis, siete, ocho.... y muchas superficies.

211 Llamamos *ángulo sólido* al formado de mas de dos ángulos planos que concurren en un punto: tal es H (fig. 89) compuesto de los ángulos DHA, AHB, BHC, CHD. La medida de estos ángulos compone la del ángulo sólido que es siempre menor que 360°: pues si se tirá la perpendicular HO, y las DO, CO, BO, AO; será cada ángulo AOD mayor que su correspondiente AHD, por tener su vértice mas cerca de la base comun AD; luego todos los ángulos formados en H valen menos que los formados en O que componen 360° (19).

Tambien *cada ángulo de los que forman el ángulo sólido, es menor que la suma de los demas*: pues si llegase DHC por exemplo, á ser igual à DHA+AHB+BHC, puestos estos sobre aquel no compondrian un sólido, sino un plano.

212 El sólido ABCFDE (fig. 90) cuyas dos caras opuestas ABC, DEF que son sus *bases*, son dos planos iguales y paralelos, y las demas superficies ABED, EBCF, FDAC paralelogramos; se llama *prisma*: y puede considerarse formado por el plano ABC moviéndose paralelamente á sí mismo lo largo de la recta AD, dejando rastro de su camino. ABC se llama *plano generador*, y cada plano infinitamente delgado de los que forma, *elemento del prisma*. La perpendicular HO tirada de qualquier punto de una de las bases à la otra, es la *altura*: y las líneas AD, BE, FC *lados* del prisma. Quando estos son perpen-

diculares á la base, ó iguales á la altura, se llama el prisma *recto*: y *oblicuo* (fig. 91) quando no. Últimamente, será *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal* &c. el prisma, segun el plano ABC sea triángulo, cuadrilátero, pentágono &c.

213 Quando el plano generador es un paralelogramo ABCD (fig. 92), el prisma que resulta, toma el nombre de *paralelepípedo*, que tiene por superficies seis paralelogramos: quando es un *cuadrado* ABCD (fig. 93) consta de seis cuadrados iguales, y se llama *cubo*. Un círculo AEBF (fig. 94) produce un sólido ABDC que se llama *cilindro*, que será recto quando cae perpendicular la línea OH que pasa por los centros de las dos bases, y es su *ege*: y *oblicuo* (fig. 95) quando cae inclinada. Tambien puede considerarse producido el cilindro por el rectángulo AOHC que dé una vuelta al rededor de HO (fig. 94).

214 Si nos figuramos que una recta AH (fig. 89) fija en el punto H, corre con el estremo A los lados de la figura ABCD; habrá producido la superficie lateral de un sólido que se llama *pirámide*, cuya base es ABCD, y cuyas caras son triangulos que tienen su vértice en un mismo punto H, que es el *vértice* ó *cúspide* de la pirámide: su *altura* es la HO tirada perpendicularmente desde el vértice H á la base, y su *ege* la tirada desde H al centro del polígono de la dicha base. Quando el ege es diferente de la altura, y el polígono de la base irregular, será la pirámide *irregular*: pero si coincidiese el ege y la altura, y el polígono de la base es regular; lo será tambien la pirámide, y todos los triángulos CHB, BHA &c. serán iguales é isósceles. Una perpendicular HT, tirada desde H sobre uno de los lados de la base, la dividirá por medio (82), y será la altura de todos los triángulos: se llama *apotecma*. La pirámide *triangular* tiene por base un triángulo, la *cuadrangular* un cuadrilátero &c.

215 Si la base de la pirámide fuese un círculo (fig. 96) ó un polígono de infinitos lados, resultará un sólido que se llama *cono*: que se puede considerar formado por el triángulo rectángulo AOH que diese una vuelta al rededor de OH: OH es su *ege*, y *altura* quando es perpendicular: las lineas AH, CH &c. sus *lados*, que se equivocan con los apotecmas; y segun que la OH sea ó no perpendicular á la base, será *recto* ú *oblicuo* el cono.

216 Si el semicírculo AEB (fig. 97) da una vuelta entera al rededor de su diámetro AB, producirá la *esfera* AEBDA, que es un sólido de revolucion terminado de una superficie curva, cuyos puntos distan igualmente del punto C que es su *centro*. El arco FA for-

ma en la revolucion el *casco* ó *casquete esférico* FTHA. El sector circular FCA engendra el *sector esférico* CFAHT: FAO mitad del segmento FAH produce el *segmento esférico* FTHAO, cuya base es el casquete FTHA. Á qualquiera AB de los diámetros llamaremos *ege* de la esfera, *polos* à sus dos estremos *A*, *B*; y *zona* á la parte EHFD comprendida entre dos planos paralelos.

217 Un semipolígono que hubiera dado una vuelta al rededor del diámetro, hubiera producido un *esferoide*, regular ó irregular segun fuese el polígono: y como el círculo es un polígono infinitángulo (102); será tambien la esfera un esferoide *infinitángulo*.

218 Si imaginamos perpendiculares tiradas desde la circunferencia á todos los puntos del diámetro *AB*, cada una describirá como radio en la revolucion un círculo, y de consiguiente juntos todos formarán la solidez de la efera: luego si á la esfera la corta un plano qualquiera, la seccion será un círculo, tanto mayor quanto mas cerca esté de centro: los que pasan por él, se llaman *círculos maxîmos*, y los demas *menores*.

De la medida y comparacion de las superficies de los Cuerpos.

219 La superficie del prisma recto(fig.90)

sin contar la de sus bases *ABC*, DEF, que se llama *lateral*, se compone de los paralelogramos rectángulos *AE*, EC, *AF*, cuya medida es (180) el producto de sus bases *AB*, *BC*, *AC* por la altura comun *AD*. Las caras del prisma oblicuo (fig. 91) son los paralelogramos *AG*, GD, DΓ, TE, EF de lados *AF*, *BG*, DH &c. iguales, cuya superficie considerando á estos lados como bases de los paralelogramos, y tirando sobre ellos sus alturas, ó las perpendiculares *ab*, *bc*, *cd*, *de*, es (180) el pruducto de estas últimas por una de las bases ó lados iguales *AF*. Lo mismo se debe aplicar al paralelepípedo, cubo y cilindro.

220 Luego la superficie lateral ó sin contar las bases, de un prisma (fig. 90) es el producto del perímetro *ABC* de su base por la altura *AD* si es recto; y si es oblicuo, el producto de uno de sus lados *AF* por el perímetro *abcde* perpendicular á dicho lado. La superficie del cilindro *AD* fig. 94) es el producto del perímetro *AEBF* por la altura *AC*. Para medir la del cilindro oblicuo *AD* (fig. 95), basta para la práctica multiplicar uno de sus lados *BD* por la longitud de un hilo enrollado por el vestigio de la seccion *abcd* perpendicular à *BD*, La superficie lateral se añade á la de las dos bases para tener la total.

221 Los triángulos *ADH*, *ABH*, *BCH*,

DCH (fig. 89) que son las caras de la pirámide ABCDH, tienen por superficie (182) al producto de sus bases AB, BC, CD, DA por la mitad de HT altura de todos los triángulos (214): luego *la superficie lateral de una pirámide es el producto del perímetro* AB+BC+CD+DA *de la base por la mitad de su apotecma*; ó $\frac{1}{2}$ (HT×ABCDA). En la pirámide inclinada se mide cada cara de por sí, y la suma de la superficie de todas es la de la pirámide. La superficie lateral del como ACH (fig. 96) es la mitad del producto de la circunferencia ABCD de la base por uno de sus lados AH, ó $\frac{1}{2}$ (AH×ABCDA).

222 En un trozo ó tronco de pirámide de bases *abc*, ABC paralelas (fig. 98) los trapecios *Ab*, *Bc*, *Ca*, componen su superficie que es (183), el producto de la mitad de sus bases paralelas AB, *ab*; BC, *bc*; CA, *ca* por la altura comun *ht*; ó tirando *mp*, *pn*, *nm* por la mitad de A*a*, B*b*, C*c*; *ht*×*mpn*: luego *la superficie lateral de un tronco de pirámide es la mitad del producto de los perímetros* abc, ABC *de sus bases por la altura* ht, *esto es*, $\frac{1}{2}$(abc+ABC)×ht: *ó* mpn×ht, *producto del perímetro* mpn *medio entre los de las bases por la altura* ht. *Tambien la superficie del tronco* Ac (fig. 99) *de pirámide cónica es* $\frac{1}{2}$(abc+ABC)×Aa, *mitad del producto de los perímetros de las bases por su lado*; *ó* mpn×Aa *producto del perímetro medio por dicho lado.*

223 Si consideramos á *ab* (fig. 97) como uno de los infinitos lados del semicírculo BEA que produce la esfera, formará en su revolucion un cono truncado: cuya superficie, tirando las paralelas *ad*, *bq*, y por *n* mitad de *ab*, la *nm*; será (222) *ab×circunferencia* mn. Bajando ahora la *ar* perpendicular á *bq*, y tirando el radio C*n* en los triángulos *abr*, C*on* semejantes (131) se tiene *ab*:*ar*=*tp*::C*n*:*no*; y por ser las circunferencias proporcionales a sns radios (167); será *ab*:*tp*::*circunf.* Cn: *circunf.* no : luego (174 *t.* I.) *ab×circunf.* no=tp×*circunf.* Cn, ó la superficie del cono truncado descrito por *ab*, igual á su ege *tp* multiplicado por la circunferencia del círculo máxîmo de la esfera. Pruebese lo mismo de todos los sólidos que componen la esfera; y tendremos *que su superficie es el producto de su ege* AB *por la circunferencia de su círculo máxîmo*: de suerte que si suponemos que el diámetro AB tenga 20 pies, y de consiguiente $62\frac{6}{7}$ la circunferencia de su círculo; serán $20\times62\frac{6}{7}$ ó $1257\frac{1}{7}$ los pies cuadrados que contiene la superficie de la esfera.

224 De aquí se infiere 1º que la superficie del casco esférico AFTH es el producto de su altura OA por la circunferencia del círculo máxîmo: y la de la zona DEHF el producto de OC por la circunferencia de dicho círculo. 2º Que la superficie de un círculo

cuyo radio fuese el ege de la esfera, sería igual á la de la esfera: pues la circunferencia de este círculo sería dupla de la del círculo máxîmo de la esfera.

225 3º Como la superficie del círculo máxîmo es el producto de la circunferencia por la mitad del radio, que es la quarta parte del diámetro, y la de la esfera el producto de dicha circunferencia por todo el diámetro; *equivaldrá esta á la de quatro círculos máxîmos.* De consiguiente, siendo la superficie lateral del cilindro circunscripto (fig. 100) el producto de HM ó AB ege de la esfera por la circunferencia de uno de sus círculos máxîmos HOGR ó EQFT, es decir, igual à la de la esfera: si à la del cilindro se añade la de sus dos bases que son círculos máxîmos, compondrá seis círculos máxîmos; y la superficie total del cilindro circunscripto à la esfera, será à la de la esfera como 6:4, ó como 3:2.

226 *Sólidos semejantes* son los que constan de ángulos sólidos iguales y de igual número de superficies semejantes; y así los de diferente especie como un prisma y una pirámide no pueden ser semejantes. Como las superficies de los sólidos se componen de dos factores del mismo modo que las superficies planas; demostrarémos como en ellas (196 *y sig.*), las proposiciones que siguen.

227 »Las superficies laterales de los prismas son entre sí como los productos de sus »alturas por el perímetro de sus bases, si son »rectos; ó por el de la seccion perpendicular »à las alturas, si son oblicuos. Los prismas »de igual altura son como los perímetros de »sus bases, los de igual perímetro son como »sus alturas; y los de alturas y perímetros »recíprocamente proporcionales son de superficies iguales, y al contrario. Lo mismo se »debe entender de las pirámides ó conos con »la diferencia de poner lado en lugar de al»tura.

228 »Las superficies de los sólidos se»mejantes son entre sí como los cuadrados de »sus líneas homólogas: y de consiguiente, »las superficies de dos esferas son como los »cuadrados de sus radios ó diámetros.

De la medida y comparacion de las solidezes de los Cuerpos.

229 La *solidez* de un cuerpo que es el espacio que ocupan sus superficies, sea ó no mazizo, se mide averiguando las veces que en él cabe otro cuerpo que se toma por la unidad. El escogido para esto es el *cubo*, que por tener todas sus dimensiones iguales, es el mas sencillo. Sea *ab* (fig. 92) el sólido que se toma por la unidad, y averigüemos las veces que cabe en el prisma AT.

230 A este sólido le forma el plano ABCD que corre paralelamente la línea CT (212): luego á cada paso *Cb* que ande dicho plano, igual á la altura *db* del sólido *ab*, formará tantos sólidos iguales á *ab*, quantas veces la base cabe en el plano AC: si son quatro, será la solidez del prisma tantas veces quatro sólidos iguales á *ab*, quantas la altura *db* quepa en CT; luego será el producto del número de veces que la base *ad* cabe en AC, multiplicado por el número de veces que la altura *db* cabe en la altura CT, ó mas brevemente *el producto de la superficie de la base por la altura, y si es recto, por su lado.*

231 Para sacar la solidez del paralelepípedo AT en la suposicion de ser AB de 15 pulgadas, CB de 8 y AE de 20; sacaré la superficie de la base BD, multiplicando AB por CB ó 15 por 8, y multiplicando el producto 120 por la altura AE que es 20; tendré 2400 pulgadas cúbicas ó cubos de una pulgada: que equivalen á 1 *pie cúbico* y $\frac{7}{18}$ de *pie*, dividiendo 2400 por $12\times12\times12=1728$, número de pulgadas cúbicas que contiene un pie cúbico.

232 Luego la solidez *de un cilindro recto* AD (fig. 94) *es el producto de la superficie de su base* AEBF *por su ege: y la del oblicuo* (fig. 95) *el producto de la base* AEBF *por la altura* HO: de consiguiente serán iguales en solidez los cilindros y prismas que tengan una misma base y altura.

233 Un plano RQ (fig. 101) que corte á una pirámide TABCDE paralelamente á la base, cortará proporcionalmente los lados AT, BT, CT &c. y qualquiera otra recta TO tirada del vértice á la base, y en la misma razon que dos qualesquiera lados homólogos AB, *ab* de la seccion. Pues si por la recta TO y los lados de la pirámide imaginamos los planos TOA, TOB, TOC &c. cortarán la seccion *abcde* en *oa*, *ob*, *oc*, *oe*, *od*, las quales serán paralelas á OA, OB &c. por ser secciones comunes de los planos paralelos RQ, ABCDE (178); luego los triángulos ATO, BTO, CTO &c. serán semejantes á sus correspondientes *a*T*o*, *b*T*o*, *c*T*o* &c. y sus lados proporcionales, TO:T*o*::TA:T*a*::TB:T*b*::TC:T*c* &c. ::AB:*ab*::BC:*bc* &c.

234 Luego 1º las *secciones* ABCDE, abcde *serán semejantes*; pues se dividen en igual número de triángulos semejantes, por tener paralelos sus lados: y de consiguiente, sus areas serán como los cuadrados de las líneas TO, T*o*; pues se tendrá (200) ABCDE *abcde*::$(AB)^2:(ab)^2::(TO)^2:(To)^2$; por ser AB:*ab*::TO:T*o* (233).

235 2º Si suponemos iguales las alturas TO, MN de las pirámides TABCDE, MFGH cortadas por el plano RQ, estarán

las secciones $abcde$, fgh en la misma razon que las bases ABCDE, FGH: y serán iguales si lo son las bases. Pues siendo $ABCDE : abcde :: (TO)^2 : (To)^2$; $FGH : fgh :: (MN)^2 : (Mn)^2$, y $MN = TO$; será $(TO)^2 : (To)^2 :: (MN)^2 : (Mn)^2$, y de consiguiente $ABCDE : abcde :: FGH : fgh$; luego si $ABCDE = FGH$, será tambien $abcde = fgh$.

236 3º *Las piramides de igual base y altura son iguales en solidez, aunque sea diferente la figura de sus bases*; pues serán (180 *t.* I.) todos los planos ó elementos que componen la solidez de la una, à todos los de la otra, como la base de la 1ª á la de la 2ª luego siendo iguales las bases, serán tambien iguales todos los planos; y debiendo haber en ambas igual número de ellos por haberse supuesto de igual altura, serán las solideces iguales.

237 Esto supuesto, vamos á probar *que qualquier pirámide es la tercera parte de un prisma de igual base y altura que ella*: y puesto que todo prisma polígono puede dividirse en prismas triangulares de igual base y altura; bastará demostrar la proposicion del prisma triangular EDFBAP (fig. 102). Para esto tirense desde uno de sus ángulos P las diagonales PE, PF en las caras laterales AEDP, BFDP.

Imaginemos despues un plano que pasan-

do por EP y PF, separe del prisma la pirámide PEFD, y otro que pasando por las diagonales EB, EP separe del sólido APBEF que queda (fig. 103), la pirámide APBE; y tendremos dividido el prisma en las tres pirámides PEFD, *A*PBE, EFPB. De ellas las dos primeras de bases EDF, *A*BP y alturas PD, *A*E iguales, son iguales en solidez (236): y las *A*PBE, EFPB consideradas sobre las bases *A*BE, BEF que son triángulos iguales, y con el vértice comun P, serán tambien iguales: luego siendo la una PEFD de una misma base EFD y altura DP que el prisma; será asi como las otras, su tercera parte.

238 Siendo pues, la solidez del prisma el producto de la superficie de la base por su altura (230), será la de qualquier pirámide la tercera parte de este producto, ó *la superficie de la base multiplicada por el tercio de la altura.*

239 Y como el cono debe ser tambien la tercera parte del cilindro de igual base y altura, por ser prisma infinitángulo; será su solidez *el producto de la superficie de la base por el tercio de su altura.*

240 Para sacar la solidez de un trozo de pirámide ó cono de bases paralelas (fig. 98 y 99); imaginándole completo, se saca su solidez multiplicando la base *A*BC por $\frac{1}{3}$ TO,

multiplicando despues *abc* por $\frac{1}{3}$ To, resultará la solidez del trozo T*abc* que falta: restese esta de la total, y se tendrá la del tronco. La To que se supone conocida en esta operacion, se saca por lo demostrado (233), pues siendo AB : *ab* : : TO : To, tendremos (177 *t.* I.) *AB*—*ab*:*ab*::TO —To:To ó *AB* — *ab*:*ab*::Oo:To.

241 *La solidez de la esfera es el producto de su superficie por el tercio de su radio*: porque si la concebimos compuesta de una infinidad de pirámides que tienen los vértices en su centro, y cuyas bases componen su superficie; tendrán todas por altura el radio de la esfera : y será la suma de sus solidezes ó la de la esfera el producto de todas sus bases, superficie de la esfera, por un tercio de su altura, que es el radio : y así la solidez de una esfera de 20 pies de diámetro, cuya superficie es $1257\frac{1}{7}$ (223), será $3\frac{1}{3}\times 1257\frac{1}{7}=4190\frac{10}{21}$ pies cúbicos. Si suponemos con Newton que el diámetro de nuestro globo tiene 19688725 pies de París, y la circunferencia de uno de sus círculos máxîmos 61878850; tendrá su superficie (223)...... 1218315660966250 pies cuadrados: y el producto de este número por la sesta parte del diámetro dará 3997846798940344927500 pies cúbicos de que constará la tierra.

242 Luego la solidez de un sector esférico CF*A*HT (fig. 97) es el producto de la superficie del casco FTH*A* por el tercio del radio. Como esta se compone del segmento FOHT*A* y del cono CFH; si de la solidez del sector se resta la del cono, resultará la del segmento.

243 *La solidez de la esfera es los dos tercios de la del cilindro circunscripto.* Llamemos al radio R, D al diámetro, C la superficie del círculo máxîmo HOGR ó EQPT (fig. 100); será 4C la superficie de la esfera (225), y su solidez $\frac{1}{3}$R×4C=$\frac{4}{3}$R×C, esto es, $\frac{2}{3}$D×C, por ser $\frac{4}{3}$del radio $\frac{2}{3}$ del diámetro : y como la solidez del cilindro es D×C; será la 1.ª á la 2.ª como $\frac{2}{3}$D×C:D×C ó como $\frac{2}{3}$: 1, ó últimamente como 2:3.

244 Como toda solidez es producto de una superficie que tiene dos factores, por una línea; si llamamos B, C los factores de la superficie ó base, A su altura, S la solidez de un cuerpo, *s* la solidez de otro, y *a*, *b*, *c* sus tres factores; tendremos S=A×BC, *s*=*a*×*bc*. Luego será S:*s*::A×BC:*a*×*bc*, es decir, *las solidezes de dos prismas ó cilindros, ó de un prisma y un cilindro son entre sí como los productos de su base por la altura.* De consiguiente, *los de igual base serán como sus alturas, y los de igual altura como sus bases*; pues si A=*a*, resulta S:*s*::BC:*bc* : y si BC=*bc*; S:*s*::A:*a*.

245 Quando A:*a* :*bc*:BC, se tiene (174 *t.* I.) A×BC=*a*×*bc* ó S=*s*; esto es, *si las ba-*

ses de los sólidos están en razon recíproca con las alturas, serán sus solidezes iguales, y al contrario. Todas estas proposiciones se deben entender tambien de las pirámides ó conos.

246 Quando los sólidos son semejantes, son iguales las razones $A:a$, $B:b$, $C:c$ (226) de los factores de que se componen las solidezes en la proporcion $S:s::ABC:abc$ (244); luego *las solidezes de los cuerpos semejantes estarán en razon triplicada, ó serán como los cubos de sus factores homólogos*; ó $S:s::A^3:a^3::B^3:b^3::C^3:c^3$: de consiguiente, *las solidezes de dos esferas serán como los cubos de sus radios ó diámetros.*

247 Tenemos pues, que las figuras de los sólidos semejantes son como sus líneas homólogas (166), sus superficies como los cuadrados de dichos lados homólogos (228), y sus solidezes como sus cubos (246): de manera que si los diámetros de dos esferas por egemplo, tuvieran la razon de 3:4; las circunferencias de sus círculos maxîmos serian tambien como 3:4, sus superficies ó las de las esferas serian como $(3)^2:(4)^2$ ó como 9:16, y sus sólidezes como $(3)^3:(4)^3$ ó como 27:64.

248 Luego para hacer una esfera dupla de otra que tuviese 6 pulgadas de diámetro, se haria la proporcion 1:2::216 *cubo del diámetro dado*: 432 *cubo del diámetro dé la esfera pedida*: cuyo diámetro será 7,56 raiz cúbica proxîma de 432.

Método para medir la capacidad de los vasos que encierran algun líquido.

249 Para medir la capacidad de un vaso, ó las veces que contiene una medida que se toma por la unidad; como por lo comun los vasos son cónicos ó cilíndricos, se dispondrá un cilindro AH (fig. 104) de estaño ú hoja de lata, en el que se echará una ó dos azumbres de líquido, y tomando una vara (fig. 105). se señalarán en uno de sus lados las partes E1, 1 2.2 3 &c. iguales á la altura AD que ocupa el líquido en el cilindro.

250 Para dividir el otro lado MN de la vara; se levantará en N la perpendicular NT igual al diámetro AB del cilindro, se tomará $N1=TN$, y tirando la hipotenusa $T1$, será diámetro de un círculo ó base dupla de ARB; porque (201) los círculos son como los cuadrados de sus diámetros, y $(T1)^2=(TN)^2+(N1)^2=2(TN)^2$ (203): señalado pues, $T1$ desde N á 2, se tirará la hipotenusa $T2$, y será por la misma razon diámetro de una base tripla de ARB: se trasladará desde N à 3, y se continuará del mismo modo para sacar los diámetros quádruplo, quíntuplo &c. Si se dividen TN y $N1$ por medio en K y *t*, y se tira la K*t*; será diámetro de una base mitad de ARB, que se debe pasar de N á $\frac{1}{2}$.

251 Para medir ahora el vaso XO (fig. 106); se aplicará el lado NM de la vara al diámetro XZ; y si coge N3, será triplo de la base ARB (fig. 104): y de consiguiente, el hueco XT hará tres veces mas líquido que AC. Midase despues la altura LX con el lado FE de la vara, y si equivale á cinco divisiones; deberé multiplicar 3 por 5 para encontrar las azumbres de líquido que caben en el vaso XO, que serán 15.

252 Si el vaso fuere cono truncado, se sacará una base media, sumando las dos: pero si la de arriba fuere muy pequeña, será mejor reducir el vaso á sólido regular: pues si se sacase la mitad de la suma de las dos bases AM y R del vaso ARM (fig. 107); resultaria una base poco mayor que la mitad de AM, y cuyo producto por la altura MC, daria una cabidad igual casi á la mitad del cilindro AC; siendo así que el cono ARM, cuya cabidad se busca, es casi el tercio de dicho cilindro (237).

253 Ultimamente, para averiguar el hueco del tonel BQ (fig. 108); tomese un diámetro medio entre los dos DE, AB, que será $2\frac{1}{2}$ si DE equivale en la vara á N3 y AB á N2: sea la longitud CT=E8, multipliquese 8 por $2\frac{1}{2}$; y el producto 20 será el número de azumbres que caben en el tonel propuesto, que podemos considerar como un

cilindro de una base media proporcional aritmetica entre el fondo y su vientre.

Sólidos regulares.

254 Llamamos así los cuerpos cuyas superficies son todas polígonos regulares é iguales, y cuyos ángulos sòlidos se componen de igual número de ángulos planos. Como estos no han de llegar á $360°$ (211), y seis ángulos de triángulo equilátero componen $6\times60°=360°$; solo podremos formar con ángulos de triángulo equilatero un ángulo sólido de tres, igual á $3\times60°=180°$; de quatro que vale $4\times60°=240°$; y de cinco, su valor $5\times60°=300°$: de donde resultan el *tetraedro* fig. 109), cuyas superficies son quatro triángulos equiláteros; el *octaedro* (fig. 110) que consta de ocho, y el *icosaedro* (fig. 111) que tiene veinte. Con ángulos de cuadrado solo puede formarse un ángulo sólido de tres igual á $3\times90°=270°$; pues $4\times90°=360°$: y con tres ángulos de pentágono ó $3\times108°=324°$, otro; y con ellos se forma el *exâedro* ó *cubo* (fig. 112) rodeado de seis cuadrados iguales, y el *dodecaedro* (fig. 113) que consta de doce pentágonos regulares. Y como tres ángulos del exágono regular valen $3\times120°=360°$; es claro que no puede haber mas sólidos regulares que los cinco referidos.

255 Si se saca la superficie de una de las caras de estos, y se multiplica por el número de ellas; se tendrá la superficie de cada uno. Con este obgeto se han pintado al lado de cada sólido las superficies que le rodean.

256 La solidez del tetraedro se saca como digimos (238); pues es una pirámide equilátera triangular. La del exâedro se encuentra por lo dicho (230). Al octaedro se le considera dividido en dos pirámides iguales y semejantes, y despues se saca la solidez de las dos. Tambien el icosaedro puede imaginarse dividido en veinte pirámides iguales: y así multiplicando por 20 la solidez de una de ellas, se tendrá la del sólido. Ultimamente, tirando rectas desde el centro del dodecaedro á todos sus ángulos, resultarán doce pirámides pentágonas iguales: con que si se multiplica por 12 la solidez de la una, tendremos la del dodecaedro.

Trigonometría Rectilinea.

257 Se enseña en este ramo de la geometría el modo de averiguar en un triángulo rectilíneo el valor de tres de las seis cosas que le componen, à saber tres ángulos y tres lados, dado el de las otras tres, no siendo los tres ángulos; pues por ellos solo se puede saber la razon de los lados, pero no su longitud, que será diferente en cada uno de los infinitos triangulos que pueden tener unos mismos ángulos (83). A este fin, como los lados de los triángulos no son proporcionales á sus ángulos; se han inventado las líneas trigonométricas, *senos*, *cosenos*, *tangentes*, *secantes* que vamos à dar à conocer; las quales ademas de ser proporcionales con los lados de los triángulos, son un equivalente de sus ángulos.

258 Llamamos pues, *seno recto* ó seno de un ángulo ACB (fig. 114) ó de su arco AB à la perpendicular *AT* bajada del estremo *A* de dicho arco sobre el radio CB, que pasa por el otro estremo *B*: *seno verso* à la parte *BT* del radio comprendida entre el seno y el estremo del arco: *tangente* de dicho ángulo ó arco *AB* á la *BH* perpendicular al estremo B del radio *CB*, terminada por el radio AC alargado: y *secante* à la CH ó radio AC alargado.

259 Tambien AD=CT es seno del ángulo ACE ó de su arco AE, DE su seno verso, EQ su tangente y CQ su secante: y como el arco *AE* es complemento de *AB*; serán AD, DE, EQ, CQ, seno, seno verso, tangente y secante del complemento del arco *AB*, ó mas brevemente *coseno*, *coseno verso*, *cotangente*, y *cosecante* del arco *AB*. En lo sucesivo escribiremos *sen*, *cos*, *tang* *cotang*, *sec*,

en lugar de seno, coseno, tangente, cotangente, secante.

260 Segun lo que acabamos de decir 1º el *seno* AT *de un arco qualquiera* AB *es la mitad de la cuerda* AR *del arco* ABR *duplo de AB*; pues el radio CB perpendicular à AR, la divide por medio (51). Y asi *el seno del arco de 30º es la mitad de la cuerda de 60º, que es el radio* (112).

261 2º El coseno AD de un arco *AB* qualquiera es siempre igual á CT parte del radio comprendida entre el centro y el seno: y su seno verso BT es la diferencia entre el radio y el coseno. 3º La tangente *BH es igual al radio* BC *quando el ángulo* BCH *es de* 45º: porque siendo el ángulo CBH recto, y BCH de 45º; será tambien BHC de 45º (86), y la BH=BC.

262 4º Que si en un triángulo rectángulo CAT se toma por radio la hipotenusa, y se traza un arco AB; serán los otros dos lados AT, TC seno y coseno del ángulo ACT: y si se toma por radio uno de los lados como CB en el triángulo rectángulo HCB será el otro BH tangente, y la hipotenusa CH secante del ángulo HCB.

263 En el punto B en que suponemos que no hay arco, tampoco hay seno ni tangente, y el coseno es el radio CB. Al paso que es mayor el arco, crece el seno y la tangente, y disminuye el coseno y cotangente hasta que el arco llega á ser BAE ó de 90º: entónces es el seno el radio EC, que por ser el mayor de todos se llama *seno total* ó de 90º, el coseno es cero y lo mismo la cotangente; y la tangente y secante que resultan paralelas, son infinitas.

264 En pasando el arco de 90º comienzan á mengüar los senos y tangentes, y á crecer los cosenos y cotangentes hasta que llega á 180º ó al punto F, en el que es cero el seno y la tangente, el coseno es el radio CF, y la cotangente y cosecante paralelas é infinitas. Pero notese que en qualquier ángulo obtuso es uno mismo el seno, coseno, tangen- &c. que en el ángulo agudo su suplemento: por egemplo, el seno del ángulo *ACF* es *AT*, seno del ángulo *ACB* suplemento de ACF; su coseno es *AD*, su tangente es FG igual á BH, á causa de los triángulos CBH, CFG iguales (90): pero todas estas líneas son negativas quando pertenecen à los ángulos obtusos, ó están en una situacion contraria à la que tienen quando pertenecen à los ángulos agudos.

265 Así como un arco se valúa por grados, mayores ó menores segun el círculo; así tambien el valor de un seno que en diferentes círculos tiene distinta longitud, se espresa en partes en que se considera dividido el radio

del círculo, sea grande ó pequeño. Para que este valor sea mas exâcto, se supone que el número de partes en que el radio ó seno total se divide, sea grande como en 1000000, y averiguando quántas de ellas corresponden à cada uno de los senos, cosenos, tangentes &c. desde 1′ hasta 90°, se ha formado una lista de ellos, que se llama *tabla de los senos*, para cuya formacion se necesita la doctrina siguiente.

266 Si llamamos r el radio AC de un círculo qualquiera, y a el arco AB; será AT, *sen a*; CT, *cos a*; BH, *tang a*; CH, *sec a* &c. Luego si dado el valor del seno AT, se nos pidiese el de las demas líneas; 1º en el triángulo rectángulo CAT, donde $(CT)^2 = (CA)^2 - (AT)^2$ (203), ó $CT = \sqrt{((AC)^2 - (AT)^2)}$, será $\cos a = \sqrt{(r^2 - \operatorname{sen}^2 a)}$, así como $AT = \sqrt{((AC)^2 - (CT)^2)}$ ó $\operatorname{sen} a = \sqrt{(r^2 - \cos^2 a)}$. 2º Por ser $TB = CB - CT$ (261), será $\operatorname{sen\,vers} a = r - \cos a$.

267 3º De los triángulos rectángulos semejantes CAT, CBH se saca CT:TA::CB:BH ó $\cos a : \operatorname{sen} a :: r : \operatorname{tang} a$: luego $\operatorname{tang} a = \frac{r \operatorname{sen} a}{\cos a}$, ó $\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$ suponiendo $r = 1$, y poniendo un punto en lugar del signo ×. 4º En los mismos triángulos se tiene CT:CA::CB:CH ó $\cos a : r :: r : \sec a = \frac{r^2}{\cos a} = \frac{1}{\cos a}$, siendo

$r = 1$. 5º Por ser $DE = CE - CD$, tendremos $\cos\operatorname{vers} a = r - \operatorname{sen} a$.

268 6.º De los triángulos semejantes CDA, CEQ se saca CD:DA::CE:EQ, ó $\operatorname{sen} a : \cos a :: r : \cot a = \frac{r \cdot \cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}$, haciendo $r = 1$. Tambien es BH:CB::CE:EQ ó $\operatorname{tang} a : r :: r : \cot a = \frac{r^2}{\operatorname{tang} a} = \frac{1}{\operatorname{tang} a}$ y $\operatorname{tang} a = \frac{r^2}{\cot a} = \frac{1}{\cot a}$ es decir, *que las tangentes estan en razon inversa de las cotangentes*. 7.º Ultimamente, CD:CA::CE:CQ ó $\operatorname{sen} a : r :: r : \operatorname{cosec} a = \frac{r^2}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a}$.

269 Dado el seno $BD = a$ (fig. 115) de un arco qualquiera AB y de consiguiente su coseno CD ó $\cos a$ (266), se tendrá el seno BT de su mitad en el triángulo rectángulo ABD, donde por ser $AB = \sqrt{((BD)^2 + (AD)^2)}$, resulta $\frac{1}{2} AB = BT = \frac{1}{2}\sqrt{((BD)^2 + (AD)^2)}$, ó $\operatorname{sen} \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{(\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen\,vers}^2 a)}$: póngase en lugar de $\operatorname{sen\,vers}^2 a$ su valor (266) $(r - \cos a)^2$ ó $r^2 - 2r \cos a + \cos^2 a$, y será $\operatorname{sen} \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{(\operatorname{sen}^2 a + r^2 - 2r \cos a + \cos^2 a)}$: y como $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = r^2$ ó $(BD)^2 + (CD)^2 = (CB)^2$ en el triángulo rectángulo BDC; se tendrá por último, $\operatorname{sen} \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\sqrt{(2r^2 - 2r \cos a)}$.

270 Si dado BT ó $\operatorname{sen} \frac{1}{2}a$, se nos pidiese el seno $BD = a$ del arco duplo; se sacará de la

equacion $sen\ \frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\sqrt{(2r^2-2r\ cos\ a)}$ el valor de $cos\ a=\frac{r^2-2(2\ sen\ \frac{1}{2}a)^2}{r}$, y sustituido en..... $sen\ a=\sqrt{(r^2-cos^2 a)}$ que encontramos (266), tendremos dicho BD ó *sen a*.

271 Supongamos ahora conocidos los senos EF$=a$, DT$=b$ (fig. 116) de los arcos AE, DE, y tratemos de encontrar el seno y coseno de su suma y de su diferencia. Si se toma EB=ED; será AB la diferencia de los arcos AE, DE: bajese el radio CE perpendicular à la cuerda BD; DM, TL, *BG* perpendiculares à CA, y tirando las paralelas TH, *B*K, será (118) DH:HK::KO:OB::BT:TD; esto es, DH=HK, KO=OB, asi como DT=TB (51): luego el seno de DBA suma de los arcos propuestos será DM=MH+HD=TL+HD, el seno de la diferencia de dichos arcos BG=MK=HM−HK=TL−HD, el coseno de la suma CM=CL−LM=CL−TH, y el coseno de la diferencia CG=CL+LG=CL+TH.

El valor de estas líneas TL,HD; CL,TH; se saca de los triángulos CEF,CTL,DTH semejantes,donde CE:CT::EF:TL:CE:CT::CF:CL; CE:CF::DT:DH, CE:EF::DT:*T*H; ó poniéndoles sus nombres, $r:cos\ b::sen\ a:$ TL$=\frac{sen\ a.\ cos\ b}{r}$, $r : cos\ b:: cos\ a :$ CL$=\frac{cos\ a\ cos\ b}{r}$,

$r: cos\ a:: sen\ b :$ DH$=\frac{sen\ b.\ cos\ a}{r}$, $r:sen\ a::sen\ b:$ TH$=\frac{sen\ a.\ sen\ b}{r}$. Luego....

1º $TL+HD=DM=sen(a+b)=\frac{sen\ a.cos\ b+cos\ a.\ sen\ b}{r}$:

2º $TL-HD=BG=sen(a-b)=\frac{sen\ a.\ cos\ b-cos\ a.\ sen\ b}{r}$

3º $CL-TH=CM=cos(a+b)=\frac{cos\ a.\ cos\ b-sen\ a.\ sen\ b}{r}$

4º $CL+TH=CG=cos\ (a-b)=\frac{cos\ a.cos\ b+sen\ a.\ sen\ b.}{r}$

272 Supuesto que $tang=\frac{r.\ sen}{cos}$ (267); será $tang\ (a+b)=\frac{r\ sen\ (a+b)}{cos\ (a+b)}$............

$$\frac{r(sen\ a.\ cos\ b+cos\ a.\ sen\ b)}{cos\ a.\ cos\ b-sen\ a.\ sen\ b}=\frac{r.\left(\frac{sen\ a}{cos\ a}+\frac{sen\ b}{cos\ b}\right)}{1-\frac{sen\ a}{cos\ a}\times\frac{sen\ b}{cos\ b}}$$

dividiendo numerador y denominador por *cos a. cos b*. Pónganse ahora en lugar de... $\frac{sen\ a}{cos\ a}$, $\frac{sen\ b}{cos\ b}$ sus iguales $\frac{tang\ a}{r}$, $\frac{tang\ b}{r}$; y se tendrá por último, $tang\ (a+b)=$... $\frac{r^2(tang\ a+tang\ b)}{r^2-tang\ a.tang\ b}$. Y por lo mismo será $tang.\ (a-b)=\frac{r^2(tang\ a-tang\ b)}{r^2+tang\ a.\ tang\ b)}$

273 De la expresion $cotang=\frac{r.\ cos}{sen}$(268)

sacaremos $cotang\,(a+b) = \frac{r\ cos\,(a+b)}{sen\,(a+b)} =$

$\frac{r(cos\,a.\ cos\,b - sen\,a.\,sen\,b)}{sen\,a.\ cos\,b + cos\,a.\ sen\,b} = \frac{r\left(1 - \frac{sen\,a.\ sen\,b}{cos\,a.\ cos\,b}\right)}{\frac{sen\,a}{cos\,a} + \frac{sen\,b}{cos\,b}} =$

$\frac{r^2 - tang\,a.\ tang\,b}{tang\,a - tang\,b}$, partiendo por $cos\,a.\ cos\,b$, y sustituyendo $\frac{tang\,a}{r}$, $\frac{tang\,b}{r}$ en lugar de...... $\frac{sen\,a}{cos\,a}$, $\frac{sen\,b}{cos\,b}$. Como tambien $cotang\,(a-b) =$

$\frac{r^2 + tang\,a.\ tang\,b}{tang\,a - tang\,b}$

274 Ultimamente, siendo (267) $secante = \frac{r^2}{cos}$; tendremos $secant\,(a+b) = \frac{r^2}{cos\,(a+b)} =$

$\frac{r^3}{cos\,a.\ cos\,b\ sen\,a.\ sen\,b} = \frac{r^2 \times r^2}{r(cos\,a.\ cos\,b - sen\,a.\ sen\,b)}$

multiplicando por r: multipliquese y partase el denominador por $cos\,a.\ cos\,b$, y resultará $secant\,(a+b) = \frac{r^2 \times r^2}{(r.\ cos\,a.\ cos\,b) \times \left(1 - \frac{sen\,a}{cos\,a} \times \frac{sen\,b}{cos\,b}\right)} =$

$\frac{r.\ sec\,a.\ sec\,b}{r^2 - tang\,a.\ tang\,b}$ poniendo $secant$ y $tang$ en lugar de sus iguales $\frac{r^2}{cos}$ y $\frac{sen}{cos}$ (267) : y por igual razon $sec\,(a-b) = \frac{r.\ sec\,a.\ sec\,b}{r^2 + tang\,a.\ tang\,b}$. El

mismo cálculo con corta diferencia nos dará $cosec\,(a+b) = \frac{r^2}{sen\,(a+b)}$ (268) $=$ ....

$\frac{r^3}{sen\,a.\ cos\,b + cos\,a.\ sen\,b} = \frac{r^2 \times r^2}{(r.\ cos\,a.\ cos\,b) \times \left(\frac{sen\,a}{cos} + \frac{sen\,b}{cos\,b}\right)}$

$= \frac{sec\,a\ sec\,b}{tang\,a + tang\,b}$: y $cosec\,(a-b) = \frac{sec\,a\ seb}{tang\,a - tang\,b}$.

275 Si en las espresiones $sen\,(a+b)$, $cos\,(a+b)$ &c. suponemos $a = b$, $a = 2b$, $a = 3b$ &c. resultarán los valores de los senos, cosenos, tangentes &c. de los arcos duplos, triplos &c. Si suponemos $b = a$ y $r = 1$; será $sen\,(a+b) = sen\ 2a = 2\ sen\,a.\ cos\,a$: $cos\,(a+b) = cos\ 2a = cos^2 a - sen^2 a$; $tang.\,(a+b) = tang\ 2a = \frac{2\ tang\,a}{1 - tang\,a}$: haciendo.... $b = 2a$, se tendrá $sen\ 3a = sen\,a.\ cos\ 2a + cos\,a.\ sen\ 2a$: $cos\ 3a = cos\,a.\ cos\ 2a - sen\,a.\ sen\ 2a$, y asi de las demas.

276 Si suponiendo $r = 1$, se suman las espresiones número 1.º y 2.º, y las número 3.º y 4.º (271); resulta $sen\,(a+b) + sen(a-b) = 2\ sen\,a.\ cos\,b$, $cos(a+b) + cos\,(a-b) = 2 cos\,a.\ cos\,b$: y haciendo $a+b = p$, $a-b = q$, en cuyo caso $a = \frac{1}{2}(p+q)$, $b = \frac{1}{2}(p-q)$; $sen p + sen q = 2 sen \frac{1}{2}(p+q) \times cos \frac{1}{2}(p-q)$: $sen p - sen q = 2 sen \frac{1}{2}(p-q) \times cos \frac{1}{2}(p+q)$: $cos p + cos q = 2 cos \frac{1}{2}(p+q) \times cos \frac{1}{2}(p-q)$: $cos q - cos p =$...... $2\ sen \frac{1}{2}(p+q) \times sen \frac{1}{2}(p-q)$.

277 Si se dividen ahora estas fórmulas las unas por las otras, se tendrá.................

$$\frac{senp + senq}{senp - senq} = \frac{sen\,\frac{1}{2}(p+q)\;cos\,\frac{1}{2}(p-q)}{cos\,\frac{1}{2}(p+q)}:\frac{}{sen\,\frac{1}{2}(p-q)} = tang$$

$$\tfrac{1}{2}(p+q)\times cot\,\tfrac{1}{2}(p-q) = \frac{tang\,\frac{1}{2}(p+q)}{tang\,\frac{1}{2}(p-q)}\quad(269).$$

$$\frac{senp+senq}{cosp+cosq} = tang\tfrac{1}{2}(p+q):\ \frac{senp-senq}{cosp+cos\,q} = tang\tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\frac{senp+senq}{cosq-cosp} = cot\,\tfrac{1}{2}(p-q):\ \frac{senp-senq}{cosq-cosp} = cot\tfrac{1}{2}(p+q):$$

$$\frac{cosp+cosq}{cosq-cosp} = cot\,\tfrac{1}{2}(p+q).cot\tfrac{1}{2}(p-q)$$: con otras

muchas que se pueden sacar. Las primeras sirven para trasformar los productos de los senos en senos simples: las segundas para sustituir á las sumas ó diferencias de los senos los productos de otros senos, y las terceras, las taugentes y cotagentes á los senos y cosenos.

278 Las proposiciones establecidas ya, bastan para la construccion de las Tablas de los senos (265): pues considerando de 1000000 partes al radio, cuerda de 60° (112); tendrá el seno de 30° que es su mitad (260), 500000 y buscando sucesivamente los senos de la mitad (269), sacarémos por el de 30° el valor de los senos de 15°, 7°30′, 3°45′, 1°52′30″ hasta el de 52″44‴ 3⁗$\frac{3}{4}$ que por su pequeñez se confunde ya con su arco. Por lo mismo tanto él como el de 1′ serán sin error sensible proporcionales con sus arcos: y podremos decir, *el arco de 52″44‴ 3⁗$\frac{3}{4}$ es á su seno encontrado, como el arco de 1′ es á su seno.* Conocido por esta proporcion el valor del seno de 1′, sacarémos el de 2′, 4′, 8′ &c. (275), el de 1′+2′=3′ (271), 3′+2′=5, el de 10′, 20′, 30′, 60′, ó el de 1°; y con él se sacarán del mismo modo los de los senos restantes hasta 45°. Los demas hasta 90° son sus cosenos, y su valor se encuentra segun digimos (266): y con los senos y cosenos se sacan (267 y 268) los valores de las tangentes y cotangentes.

279 Las tablas que acabamos de enseñar à construir, en lugar de los valores de los senos, cosen. tang. suelen contener solo sus logarítmos para mayor comodidad en los cálculos; pero logarítmos sacados por los antiguos Geómetras que consideraban al radio dividido en 10000000000 partes. Los Modernos suponiendo el radio de 1000000, han omitido en los valores de los senos, tangentes &c. las quatro últimas cifras y algunos cinco, por no necesitarse tanta exâctitud; pero han dejado los logarítmos conforme los sacaron los Antiguos. El que solo tenga tabla de los logarítmos de los senos, y quisiese sacar por ellas el valor de un seno v. gr. el de 18° 6′; debe

rebajar seis unidades de la característica de su logarítmo 9, 4923083, y buscando 3,4923083 en los logaritmos de los números naturales, le hallará entre 3106 y 3107, y qualquiera de ellos será con poca diferencia el valor del seno de 18°6′.

280 Habiendo manifestado ya cómo los senos equivalen à los ángulos, vamos ahora à demostrar *que en qualquier triángulo los senos de los ángulos son proporcionales á sus lados opuestos.* Inscripto en un círculo un triángulo qualquiera ABC (fig. 37), siendo cada uno de sus lados cuerda de un arco duplo del que mide el ángulo opuesto (67); será la mitad de cada lado el seno del ángulo opuesto: esto es, AP será seno del ángulo B, AN seno de C, y BH seno de A: luego siendo los lados proporcionales à sus mitades, lo serán de consiguiente à los senos de los ángulos opuestos; de suerte que será AB:*sen* C::AC:*sen* B::BC:*sen* A.

281 En el triángulo rectángulo ABD (fig. 117) *es tambien el seno del ángulo recto* D (que es el radio ó *r*), *á la hipotenusa* AB; *como el seno* A *al lado* BD, *y como el seno* B *al lado* AD: y pues tomando à BD por radio, es AD tangente del ángulo B (262), y siendo AD radio, es DB tangente del ángulo A; será BD:AD::*r*:*tang* B, y AD:DB::*r*:*tang* A.

282 En un triángulo qualquiera ACB (fig. 118) *la suma de los dos lados* BC+AC *que comprende el ángulo* C, *es á su diferencia* BC—AC; *como la tangente de la mitad de la suma de los otros dos ángulos* A, B, *es á la tangente de la mitad de la diferencia de estos ángulos*: ó BC+AC:BC—AC:: *tang* $\frac{1}{2}$(A+B) : *tang* $\frac{1}{2}$(A—B).

Para demostrarlo descríbase un círculo desde C con el intervaló del lado menor AC, y tiradas las dos cuerdas AE, AD, y la DF paralela à AE; será el ángulo *t* mitad de los ángulos A y B, por ser z=A+B(84); y *t* mitad de z (68): el ángulo DAB es la semidiferencia de A—B de dichos ángulos (238 *t.I.*); porque DAB con el ángulo o=*t* que es su semisuma, compone el ángulo A el mayor de A y B, luego siendo EAD ángulo recto (69), y lo mismo su igual ADF (45); será tomando á DA y AF por radios, EA tangente del ángulo *t*=$\frac{1}{2}$(A+B), y DF tangente de DAF=$\frac{1}{2}$(A—B): y como por las paralelas EA, DF se tiene BE:BD::EA:DF, y BE=BC+AC, BD=BC—CD=BC—AC; saldrá por último, BC+AC:BC—AC:: *tang* $\frac{1}{2}$(A+B):*tang* $\frac{1}{2}$(A—B). Conocida la semisuma y semidiferencia de los ángulos A y B, se averigua fácilmente el valor de cada uno (238 *t.I.*).

283 Finalmente, *en qualquier triángulo* ABC (fig. 119 y 120) *el lado* BC *sobre el qual ó sobre cuya prolongacion cae la perpen-*

dicular AD, *es á la suma* AC+*AB de los otros dos; como su diferencia* AC−AB *es à la diferencia* DC−BD *de los segmentos hechos por la perpendicular* AD, *ó á su suma* DC+BD *si la perpendicular cae fuera.* Porque trazando un círculo desde A con el radio *AB*, y alargando AC hasta T; será (143) *CB*:CT::CR:CE, y como CT=AC+*AB*, CR=AC−*AB*, y CE=DC−*DB* por ser BD=DE; se tendrá sustituyendo estos valores, BC:AC+*AB*::*AC*−AB:DC−DB: y en la fig. 120 donde CE es igual à CD+DE=CD+DB, sale *BC*:AC+*AB*::*AC*−*AB*:CD+*DB*. Conocida la suma y diferencia de los segmentos, se averigua su valor (238 *t.*I.)

Usos del cálculo trigonométrico en la resolucion de los triángulos rectángulos y oblicuángulos.

284 Con las proposiciones anteriores se pueden resolver los quatro casos diferentes en que con arreglo à lo dicho (257), dadas tres cosas de las seis que componen un triángulo, se pida el valor de las otras tres.

285 Y comenzando por el triángulo rectángulo, si ademas del ángulo recto D (fig. 117) que se conoce, se diese 1º uno de los ángulos agudos *B* y el lado *BD*; harémos (281) *r*: *tang B*::*BD*:*AD* para averiguar el

lado *AD*. 2º Si se diese la hipotenusa *AB* y uno de los ángulos agudos A; haciendo *r*:*AB*::*sen A*:BD, se conocerá el lado BD. 3º Con el lado BD y la hipotenusa *AB*, tendremos *AB*:*r*::DB:*sen A*; y se habrá averiguado el ángulo *A*. 4º Dados los lados DB, *AD*; se hará *AD*:DB::*r*:*tang A*; y se tendrá el ángulo *A*.

286 En los triángulos oblicuángulos ó que no tienen ángulo recto, 1º conocido uno de los lados *AB* (fig. 121) y los dos ángulos C y B, será *A* lo que les falta para 180° (86); y se averiguará el valor de los lados *AC* y CB por las dos proporciones siguientes (280) *sen* C:*AB*::*sen* B:*AC*::*sen A*:BC. 2.º Dados los dos lados *AC*, CB (fig. 118) y el ángulo C comprendido; se hará (282) CB+*AC*:CB−*AC*:: *tang* $\frac{1}{2}$(*A*+B) : *tang* $\frac{1}{2}$(A−B) : conocida la diferencia de A y B, como se conoce su suma que con C compone 180° (86); se averiguará lo que vale cada uno (238 *t.*I.).

287 3.º Quando se dan los lados AB, BC (fig. 121) y el ángulo A; se hace BC:*sen* A::AB:*sen* C: conocidos C y A y de consiguiente su suplemento B, se averiguará AC diciendo *sen* C:AB:: *sen* B:AC. Si con los lados AB, BC se hubiese dado el ángulo C, hubieramos hecho la proporcion AB:*sen*C::BC *sen* A.

288 Pero como tirando la $BT = AB$, resulta otro triangulo BTC con los mismos tres datos BT ó AB, BC y C, donde $BT : sen C :: BC : sen BTC$; se infiere que à dichos datos AB, BC y C corresponde por 4.º término proporcional ó el seno del ángulo obtuso BTC ó el del ángulo agudo $A = BTA$ complemento de BTC: que aunque el mismo en ambos (264), no lo es el tercer lado AC, TC de los dos triángulos: por lo que quando se den en un triángulo oblicuángulo dos lados AB BC y el ángulo C opuesto al menor AB; se necesita saber ademas, si el ángulo opuesto al otro lado es el agudo A, y entonces se tratara del triángulo ABC, ó es el obtuso BT, y será BTC el triángulo de que se habla.

289 4.º Si se diesen los tres lados AB, AC, BC (fig. 119), y se pidiesen los ángulos; sacarémos de la proporcion (283) $BC : AC + AB :: AC - AB : DC - BD$, la diferencia de los segmentos que forma una perpendicular bajada desde A sobre BC, suma conocida de dichos segmentos: luego conocerémos el valor de qualquiera de ellos por exemplo, el de DC: y en el triángulo rectángulo ADC conocida la hipotenusa y el lado DC, se averiguará el ángulo C (285), y de consiguiente (287) A y B.

Sea $AC = 180P$. $AB = 128$, $BC = 200$; tendrémos $200 : 180 + 128 :: 180 - 128 : DC - BD = EC$, esto es, $200 : 308 :: 52 : EC = 80$ poco mas. Con esta diferencia de los segmentos BD, DC y su suma, que es el lado BC, tendrémos el valor de qualquiera de ellos $BD = \frac{1}{2}(200 \quad 80) = 60$: y en el triángulo rectángulo ABD donde conocemos AB, BD; averiguarémos el ángulo B (285) y por él, los otros A y C.

290 Vamos á aplicar esta doctrina á algunos egemplos, en los que usarémos para abreviar el cálculo en lugar de los números, senos, cosenos, tangentes &c. de sus logarítmos, y aun del complemento aritmético como no sea en el caso de haberse de hacer la resta del logarítmo del radio, que siendo 10,000000, escusa dicha abreviacion.

291 Hayase de medir 1.º la altura AB (fig. 122) acesible por uno de sus estremos A. Puesto el Grafómetro en un sitio inmediato M, y colocado verticalmente ó de suerte que su diámetro quede paralelo al suelo llano por medio de un hilo et con un plomo, que colgando de su centro debe pasar por los 90°: dirijase por el diámetro inmobil el rayo visual pD, y por el mobil el qB à la cumbre de la altura: vease quántos grados coge en el instrumento el ángulo pea, y estos mismos tendrá su vertical BeD. Medida despues la distancia $MN = eD$, como BN es perpendicular al suelo y de consiguiente à

eD, será BDe un triángulo rectángulo, en el que si el lado eD que se conoce, es de 456 *v.* y el angulo observado BeD de $56^\circ\, 12'$, se sacará el otro lado BD (281) por la proporcion $r:tang\, BeD = 56^\circ\, 12' :: eD = 456 : DB$, que se encuentra de 681 *v.* por el siguiente cálculo de logarítmos.

Log. tang $56^\circ\, 12'$	10,174287
Log. 456	2,658965
Suma	12,833252
Log. del radio	10,000000
Resta ó Log. BD	2,833252

añádasele DN ó la altura del Grafómetro, y se tendrá la AB que se pide.

292 Si ED fuera la altura conocida de una muralla, y se pidiese la longitud de eB para escalarla; despues de haber buscado el ángulo Bed haciendo $eD:DB::r:tang\, BeD$; haríamos $BD:sen\, BeD::r:Be$. Mas facil es cuadrar el valor de eD y BD, y sacar de su suma la raiz cuadrada que será la longitud de eB; porque $eB = \sqrt{((eD)^2 + (BD)^2)}$ (141).

293 En estas y semejantes prácticas conviene colocar el Grafómetro à una distancia casi igual à la que se va à medir, para que sea menor el error que por lo comun se comete al tomar el ángulo de la altura, que será entónces de 45°. Por exemplo, si midiendo la altura GD (fig. 123), se toma en el punto F el ángulo ZFT en lugar del verdadero GFT, y en E el KET por el verdadero GET; aunque la equivocacion ó los ángulos GEK y GFZ se supongan iguales, es mayor la parte GZ en que la observacion disminuye la altura en F, que GK que sale de ménos en E.

294 Supongamos ahora que se nos pida medir una línea AB (fig. 124) acesible solamente por sus estremos, como el ancho de una laguna, bosque &c. En este caso se ha de escoger un punto C desde donde se puedan tirar las líneas CA, CB; y suponiendo que se puedan medir, sea $AC = 142P$, $BC = 120$, y $C = 132^\circ$: y será $B + A = 48^\circ$; haré-

Log. tang 24°	9,648583
Log. 22	1,342423
Comp. Log. 262	7,581699
Suma ó Log. tang $\frac{1}{2}$ (B−A)	18,572705

mos pues (286), $142 + 120 : 142 - 120 :: tang\, 24^\circ : tang\, \frac{1}{2}(B-A)$, ó $262 : 22 :: tang\, 24^\circ : tang\, \frac{1}{2}(B-A)$, que calculada por los logarítmos es de $2^\circ 8'$. Luego (238 *t.I.*) el ángulo B valdrá $24^\circ + 2^\circ 8' = 26^\circ 8'$, y $A\ 24^\circ - 2^\circ 8' = 21^\circ 52'$.

Con los ángulos B, A se encontrará despues la AB por la proporcion siguiente $sen\, B : AC :: sen\, C . AB$, ó $sen\, 26^\circ 8' : sen\, 132^\circ :: 142 : AB$: que buscada por los logarítmos resulta de 235,6 P.

295 Si no hubiese sitio desde donde se puedan ver los dos puntos *A*, *B* (fig. 125); se elegirán dos C, D tales que sea fácil medir las BC, CD, DA y los ángulos C, D que convendrá sean rectos: imaginando despues la BD, resultará un triángulo BCD donde conocidos BC, CD y el ángulo comprendido, se averiguará BD como acabamos de decir. Conociendo ya en el otro triángulo ADB AD, DB y el ángulo *ADB* diferencia entre BDC y ADC; se averiguará por último la AB.

296 Vamos ya à medir una línea inacesible AB (fig. 126): para lo qual despues de haber escogido y medido una base CD que se procura hacer casi igual y paralela à AB, se tirarán las visuales CA, CB, DA, DB, y despues de haber medido los ángulos que forman en C, D, se averiguará (286) el valor de CB en el triángulo CBD, donde el lado CD y los àngulos BCD, CDB son conocidos: del mismo modo se averiguarà AC en el triángulo ACD. Con AC y BC conocidos, además del ángulo *A*CB que forman, que es la diferencia de los ángulos ACD, BCD observados; se sacará por último en el triángulo ACB el valor de *A*B por lo dicho (286).

En el caso de no encontrarse un punto C desde donde se vean los dos A, B; se tirará una recta CE (fig. 127) tal que desde E se

alcancen á ver dichos puntos: se imaginarán despues las visuales E*A*, EB, CB, ED, DA y DB, y medidos los ángulos en E, D y la base CE, se hallará facilísimamente la *A*B, cuidando siempre de no formar jamás ángulos muy agudos en los puntos inacesibles.

297 Si la línea inacesible fuese la altura vertical AB (fig. 123): observarémos en el sitio H el angulo A*e*C, medirémos despues un trecho HP, y tomando en P el ángulo *Ate*; tendremos conocidos en el triángulo *Ate* los ángulos *etA*, y A*et* suplemento del observado *Ae*C, con el lado *te*=PH: luego podremos averiguar A*e* (286). Pasando ahora al triángulo rectángulo *Ae*C donde sabemos el valor de la hipotenusa A*e* y el del ángulo *Ae*C; tendremos el de *A*C por la proporcion

Log. sen 35°40'...............	9,765720
Log. 576........................	2,760422
Suma.............................	12,526142
Log. r...........................	10,..............
Resta ó Log. AC.............	2,526142

r:*Ae*::*sen* A*e*C:AC. Sea *Ae* de 576 *v.* y el ángulo A*e*C de 35°40'; será *r*: 576:: *sen* 35° 40': AC, que se encuentra de 335,8 *v.* á las que si se añade CB ó la altura del instrumento, resultará la AB que se busca.

298 Para medir la distancia AB (fig. 128) de una nube ó cuesta inacesible; se mide una

base AC, y observando en el triángulo ABC los ángulos A y C, se averiguan *AB* y BC (286). Si se dirige despues con el Grafómetro colocado verticalmente, una línea AD paralela al suelo llano que se llama *orizontal*, en el triángulo rectángulo ABD, donde la hipotenusa AB es conocida, y el ángulo BAD se puede medir; se hallará fácilmente la altura BD de la montaña y la distancia orizontal *AD* (285).

299 Hayase de levantar el plano de un terreno ACDBE &c. (fig. 129) ó determinar la situacion de todos sus puntos principales. Despues de haberlos recorrido, y formado á ojo un borrador de todos para hacer juicio de su situacion; mídase una base AB de una distancia proporcionada á la de los objetos mas remotos, y tal que desde sus estremos se registren los mas principales, como casas, huertas, molinos, torres &c. Póngase el Grafómetro en B, y colocando el diámetro inmobil en la direccion AB; obsérvense los ángulos ABE, ABF, ABG, *A*BD, ABC que con él forman los rayos dirigidos á los objetos E, F, G &c. Mudese ahora el instrumento á A; y haciendo que el diámetro inmobil se dirija á B, se tomarán tambien los ángulos BAE, BAF BAG, BAD &c. que se anotarán con los anteriores en un *libro de memorias*.

Escojase despues otra base GE para determinar los objetos R, H, K que ó no se ven desde *A* y B, ó forman en ellos ángulos muy agudos ó muy obtusos: y desde sus estremos G, E observense como los anteriores los ángulos EGK, EGR, EGH; GEK, GER, GEH; y si es menester los LCD, LDC para determinar algun otro punto L muy estraviado, escribiéndolos todos con los ya observados.

Tendremos pues, en los triángulos AEB, AFB, AGB &c. el lado AB y los ángulos adyacentes conocidos; y de consiguiente será facil calcular los otros dos lados (286). Tambien se averiguará el valor de GE por medio del triángulo GEB, cuyos lados GB, BE se conocen ya, y el ángulo GBE comprendido, que es la diferencia entre los observados ABG, ABE. Con GE y los ángulos adyacentes observados se buscan en los triángulos GKE, GRE, GHE sus lados, haciendo lo mismo con los del triángulo CDL.

Hecho esto, se tirará en el papel una línea *ab* que tenga tantas partes de la escala que ha de determinar el tamaño del *plano*, como varas ó pies tiene AB en el terreno, y tomando en dicha escala un intervalo de tantas partes como varas ó pies tiene *BE*; se trazará desde *b* como centro un arco. Con otro espacio de tantas partes como varas ó pies tiene AE, se traza otro arco desde *a*, que cortará al primero en el punto *e*, cuya posicion respecto de *ab* quedará determinada en el papel, semejante á E respecto de AB. Determinense de este mismo modo los puntos *g*, *f*; *c*,*d*; y se habrán representado los G, F, C, D. Los K, R, H, L se deben determinar en el papel desde las bases *ge*, *cd*, trazando desde sus estremos arcos con el intervalo de tantas partes como varas ó pies corresponden á GK, EK; GR, RE &c. y quedará trazada en el papel una figura semejante á la del terreno (150); pues se compondrá de igual número de triángulos semejantes y colocados del mismo modo que ella: con que solo faltará dibujar en cada punto los obgetos que en ellos se representan.

300 Tambien se pudieron determinar los puntos de la figura despues de haber observado los ángulos en A, B, G, E, C, D tomando la *ab* como digimos, y formando en *a* y *b* por medio del semicírculo (24), los ángulos *abe*, *abf*, *abg*, *abd*, *abc*; *bae*, *baf*, *bag*, *bad*, *bac* iguales á los observados en A y B: en *g* y *e* tirando la *ge*, los *gek*, *ger*, *geh*; *egk*, *egr*, *egh*; y en *c*, *d*, los *cdl*, *lcd* iguales á los medidos en G, E, C, D; pues los triángulos que resultan, son semejantes á los del terreno. Este método aunque ménos exâcto, ahorra el calcular los lados por la trigonometría, y por eso conviene usar de él quando no son muy grandes las distancias á que están los puntos principales del plano.

301 Ademas de los medios que nos ofrece la trigonometría para medir toda clase de líneas; nos podremos tambien servir de los siguientes. 1.° La altura AB (fig. 122) pudo haberse medido fijando en el mismo plano de la torre un palo *ab* paralelo á dicho edificio, y diciendo despues, *la longitud* ac *de la sombra del palo es á su altura* ab; *como la longitud de la sombra* AC *es á* AB: pero cuidese, si el edificio termina en punta, añadir á la longitud de la sombra la mitad del diámetro del edificio, que es en lo que aparece mayor la sombra del edificio igual, que el que no lo es.

302 2.° Para medir la recta AB (fig. 130) acesible por uno de sus estremos *A*; se plantará un piquete en C, y sobre él orizontalmente un estadal con dos reglas pequeñas en sus estremos D, A: dirijanse con ellas al punto B los rayos visuales AB, DB: muevase el piquete al rededor, llevando inmobiles las reglas, hasta que quede en la direccion *ad*, y midiendo *ab*, ó lo que hay de *a* á *b* punto donde concurren los rayos *db*, *ab*; se tendrá el valor de AB. Este método que es bastante exâcto en cortas distancias, se aplica á medir qualesquiera otras líneas, verticales ú *orizontales* (306), colocando el estadal y las reglas segun el caso lo requiera.

303 3.° Habiendose de medir la línea AB (fig. 131); tirada la base AC en sitio có-

modo para medirse, y dirigiendo la CB; se tendrá un triángulo ACB con un lado AC, y los ángulos adyacentes conocidos: cuyo lado AB se calculará, ò formando en CA los ángulos bCA, CAb iguales á BCA, CAB; y entónces será Ab=AB, ó tirando sobre un papel una recta ac del mismo número de partes de una escala que AC tiene de varas ó pies, y formando sobre ella un triángulo abc semejante á ABC: en cuyo caso el número de partes de la escala de que conste ab, será el de las varas ó pies que tiene AB.

304 4.° Quando la línea AB propuesta tiene una parte AD acesible, tirada AC que supondremos de 30 v. se formará, tomando á arbitrio la Ac de 10 v. el ángulo AcD=ACB, y midiendo AD, si tiene 12 v. formarémos la proporcion Ac=10 v : AC= 30 v : : AD= 12 v : AB, que resulta de 36. Si AB no tiene parte acesible, se alargará AC hasta que AT sea de 10 v. y formando el ángulo ATd=ACB, se hará dicha regla de tres. Siempre conviene hacer á Ac el tercio ò el quarto de AC, y con eso será AD el tercio ó quarto de AB: como tambien tomar á AC igual con poca diferencia á AB; lo que se logrará apartando tanto el punto C que el ángulo BCA sea la mitad del suplemento del ángulo A; pues siendo entonces ACB=ABC, será AC=AB (87).

De la Nivelacion.

305 Concluiamos este tratado dando alguna idea de los métodos de *nivelar* un terreno. Para esto supondremos 1.° que á razon de 56979 toesas ó 132951 v. castellanas en que se puede regular cada grado de círculo máximo de la tierra; corresponderán á toda la circunferencia $56979 \times 360° =$ 20512440 toesas ó 47862360 v: al diámetro 6526685 toesas ó $15228932\frac{2}{3}v$: al radio $3263342\frac{1}{2}$toesas ó $7614466\frac{1}{3}v$: á un minuto 950 toesas ó 2216 v: y á un segundo 16 toesas que son 37 v: todo en la suposicion de que la tierra sea perfectamente esférica; pues aunque en realidad es ovalada, es insensible el error de dicho supuesto para la nivelacion.

306 2.° Que una línea Ad (fig. 132) cuyos puntos A, c, d, distan todos igualmente del centro O de la tierra, como la paralela á la superficie de un gran lago; se llama línea *orizontal* y de *nivel verdadero*, á diferencia de la que se encuentra nivelando, que en la distancia Ad es la tangente Ac, que se llama *línea de nivel aparente*. La diferencia Cd entre las dos, ó lo que dista mas de O el punto C que d, es casi nula á la corta distancia de 100 á 130 toesas, por la mucha estension de la superficie de la tierra; pero en ma-

yores distancias se debe apreciar y restar de la que haya resultado en la operacion.

307 Podremos sacar el valor de esta diferencia considerando la distancia *Ac* igual á la tangente AB, y como BR:AB::AB:*Bc* (144) suponiendo que el arco *Ac* se confunda por su pequeñez con la tangente AB; será BR lo mismo que *c*R, y *c*R:*Ac*::*Ac*:*Bc*; pongáse el valor de *c*R diámetro de la tierra (305), y el de la distancia *Ac*, y se tendrá la diferencia B*c*; y por ella qualquiera otra C*d*: pues siendo B*c*, C*d* casi paralelas é iguales á *Aa*, *Ab*, que son entre sí como los cuadrados de las cuerdas ó arcos *Ac*, *Ad* (206), tendrémos $(Ac)^2:(Ad)^2::Bc:Cd$, y así de las demas. La siguiente tabla formada por *M Mrs. Picard* y de *la Hire* contiene las diferencias de nivel aparente y verdadero hasta 4000 toesas.

DISTANCIAS.				DISTANCIAS.				DISTANCIAS.			
Toes.	*Pies.*	*Pulg.*	*Lin.*	*Toes.*	*Pies.*	*Pulg.*	*Lin.*	*Toes.*	*Pies.*	*Pulg.*	*Lin.*
50	0	0	$0\frac{1}{3}$	500	0	2	9	1000	0	11	0
100	0	0	$1\frac{1}{3}$	550	0	3	6	1250	1	5	$2\frac{1}{2}$
150	0	0	3	600	0	4	0	1500	2	0	9
200	0	0	$5\frac{1}{3}$	650	0	4	8	1750	2	9	$8\frac{1}{2}$
250	0	0	$8\frac{1}{3}$	700	0	5	4	2000	3	8	0
300	0	1	0	750	0	6	3	2500	5	8	9
350	0	1	$4\frac{1}{3}$	800	0	7	1	3000	8	3	0
400	0	1	$9\frac{1}{3}$	850	0	7	$11\frac{1}{2}$	3500	11	2	9
450	0	2	3	900	0	8	11	4000	14	8	0
				950	0	10	0				

308 Esto supuesto, para la operacion de nivelar usan los Prácticos de diferentes instrumentos. Los mas comunes son 1º el *nivel de ayre* (fig. 133), que es un tubo lleno de espíritu de vino ménos una ampolla de ayre A, que debe estar perfectamente en medio, para que el sitio que ocupa el instrumento, esté á nivel 2º El *nivel de Albañil* (fig. 134) es un triángulo isósceles sin base con un cuadrante de círculo entre sus lados, y una línea perpendicular tirada desde su vértice á la base y señalada en el cuadrante. Del estremo superior de esta línea cuelga un hilo con un plomo, que pasando por el cuadrante, determina en grados la cantidad de inclinacion del plano que se nivela, ó pasa por dicha línea si el plano está á nivel.

309 3º El nivel de mas uso es el *de agua* (fig. 135) compuesto de un tubo hueco de hoja de lata ú otro metal doblado en A y B en cuyos estremos *e* y *t* se introducen otros dos tubos de vidrio D, C pegados con betun en *e* y *t*: tiene debajo y en medio del tubo AB una virola para colocarle en su pie. Lleno el tubo de agua hasta que llegue en los dos pequeños á la altura de 2 á 3 pulgadas, la línea *et* que pasa por la superficie del agua, es perfectamente orizontal. Acompaña al nivel el estadal HG dividido en pies, pulgadas y líneas, con un rebajo en el medio, en el que

se intruduce una regla, á la que se fija un carton ú hoja de lata TF de un pie en quadro poco mas ó ménos, cuya mitad inferior se tiñe de negro, dejando blanca la superior.

310 Si se quisiese saber lo que dista mas del nivel verdadero el punto G que Z; se colocará el instrumento en E, perpendicular al terreno por medio del hilo de plomo H, se enviará un Peon à G que clavando el estadal perpendicular, y teniéndole fijo con la mano izquierda, suba ó bage con la derecha segun le avise el que mire desde *e*, hasta asegurarle en T donde remata el rayo visual *t*T Midase aora la altura GT que supongo de 2P y 7*p*, y restándola de la del instrumento que por lo comun es de 4P y 6*p*; resultarán 1P y 11*p*, en que el punto G està mas elevado que Z sobre el Orizonte. Si la distancia ZG no pasa de 750P, se desprecia la diferencia entre el nivel aparente y verdadero: pero si es mayor, se cuenta con ella, y se repite la operacion nivelando de cada vez 1400 ó 1500 P.

311 Hayanse por egemplo, de nivelar los puntos A y H (fig. 136) distantes uno de otro 3000 P. pudiendose nivelar de cada vez 1400 á 1500 P, dividiré la operacion en dos estaciones: elegiré para ellas dos sitios á 750P uno, y à 2250 el otro del punto *A*: pongo en el medio E de toda la distancia un estadal, y planto el instrumento en 1: miraré desde *a* hácia B, y haré notar y medir la altura AB que el rayo *ab* B señala, y que supongo de 8P 5*p*: miro despues por *b* à C, y mando señalar este punto con un lapiz. Paso el nivel al punto 2, y mirando desde *d* á D, mediré la altura DC de 4P, haciendo notar ó escribir á parte la altura HF de 5P 3*p*, que se determina mirando de *c* á F. Sumo ahora las alturas AB; DC encontradas, y restando de su suma 12P 5*p*, el valor 5P 3*p* de HF; tendré de residuo 7P 2*p*, que es en lo que el punto A está mas bajo que H.

312 Si hubiese cuestas en la operacion, convendrá poner separadas en una columna que llamarémos *primera*, las distancias que se encuentran subiendo, y en otra *segunda* las que se encuentren bajando, para restar despues la suma de las unas de la de las otras. Y así continuando la nivelacion del egemplo anterior hasta el punto Z; apuntaré en la 1.ª columa las alturas halladas *AB*, DC, y pasando el nivel al punto 3, miraré por *f*, *e* y G, y haciendo medir GF de 3P 6*p*, lo apuntaré en la 1.ª columna, determinando tambien desde *e* el punto I. Plantado el nivel en 4, determinará el rayo *q*K la KI de 3P 3*p*, que escribiré en la 2.ª columna por ser bajada, como tambien la altura 4P 6*p* del instrumento colocado en 5, á cuyo pie

va á dar el rayo *yh*, haciendo al mismo tiempo señalar el punto M á donde se dirige *hy*.

Paso á 6, y escribo en la 2ª columna 2P à que equivale MN determinada por el rayo *ik*, señalando tambien el punto P. Ultimamente, pongo en la 1ª columna las alturas QP de 4P 1*p*, y TS de 6P 5*p*, que se encuentran como las otras, colocando sucesivamente el instrumento en 7 y 8, y la XZ de 3P 2*p*. en la 2ª Sumando ahora las alturas de la 1ª columna, tendré 26P 5*p* : resto de ellas 12P 11*p* suma de las de la 1ª, y resultan 13P 6*p* que dista mas del centro de la tierra Z que A. Las cuestas demasiado empinadas se nivelan mas facilmente comenzando desde la cumbre, y de este modo pueden nivelar dos á un tiempo para acabar mas pronto la operacion.

APLICACION DEL ALGEBRA á la Geometría.

Construccion de las Equaciones de 1º y 2º grado

313 Para la resolucion completa de los problemas geométricos por medio del Álgebra, es preciso saber ántes representar en líneas las espresiones ó valores algébricos de las incognitas que contengan. Esplicarémos

esta operacion que se llama *construcion*, en los egemplos siguientes. Sea $x=a+b-n$, donde a represente la línea A (fig. 137), b la B y n la C: tomo sobre una línea indefinida DH, la DO=A, la OT=B, y desde T hácia el lado opuesto la TS=n, y tendré DS=DO+OT−TS=$a+b-n=x$.

314 La espresion $x=\frac{ab}{c}$ representa una quarta proporcional á c, a, b; pues $c:a::b:\frac{ab}{c}=x$: y $x=\frac{bb}{c}$ una tercera proporcional á c y b; por ser $c:b::b:\frac{bb}{c}=x$: luego si a, b, c representan las líneas o, n, m (fig. 57), y se practica lo que digimos (123 y 124); será $bt=x$ la quarta ó la tercera proporcional. A esta misma operacion se reducen $x=\frac{abcd}{emn}$ haciendo $e:a::b:\frac{ab}{e}$, $m:\frac{ab}{e}::c:\frac{abc}{em}$, y últimamente, $n:\frac{abc}{em}::d:\frac{abcd}{emn}=x$. Aqui y en lo sucesivo damos por supuestas las operaciones geométricas que citamos.

315 Quando hay dos ó mas términos, como en $x=\frac{cd}{m}+\frac{abc}{et}-\frac{r^2st}{a^2b}$&c. se busca la línea à que equivale cada uno, y quedará reducida à una espresion semejante à esta $x=p+q-h$, facil de construir. Lo mismo se

egecuta con $x=\frac{a^2b+cd^2+cde}{fg}$; esto es, se busca una línea $t=\frac{a^2b}{fg}$, otra $m=\frac{cd^2}{fg}$, y $n=\frac{dce}{fg}$ y resulta $x=t+m+n$.

316 En $x=\frac{abc+deb+\&c.}{ed-fg+\&c.}$ &c. $x=\frac{bc\,d-a^3qp+\&c.}{a^2g+d^2m+\&c.}$ se reducen à monomios sus denominadores polinomios haciendo $t=\frac{ed-fg}{e}$, $n=\frac{a^2g+d^2m}{ag}$ esto es, buscando una línea igual al denominador dividido por una de sus letras, ó por dos, segun el número de factores que contenga; pues siendo en tal caso $et=ed-fg$, $agn=a^2g+d^2m$, se reducirán las espresiones propuestas à estas $x=\frac{abc+deb}{et}$, $x=\frac{bt^2d-a^3qp}{agn}$ que ya hemos enseñado á construir.

317 Hay construcciones mas expedítas para ciertas espresiones: $x=\frac{bd+ad}{c+e}=\frac{(b+a)d}{c+e}$ se construye haciendo $c+e:b+a::d:\frac{bd+ad}{c+e}=x$ $x=\frac{a^2-b^2}{g-f}=\frac{(a+b)(a-b)}{g-f}$, haciendo $g-f:a+b::a-b:\frac{a^2-b^2}{g-f}=x$. Para construir facilísimamente $x=\frac{bde^2-b^2d^2}{bde+e^3}$, introduciremos en el término b^2d^2 la línea e haciendo $\frac{bd}{e}=t$, ó

$e:b::d:t$; pues será $bd=et$, y poniendo este valor en lugar de bd, se convertirá la espresion en esta $x=\frac{e^3t-e^2t^2}{e^2t+e^2}=\frac{et-t^2}{t+e}$, semejante à la primera.

318 Todas las espresiones anteriores tienen en su numerador un factor mas que en su denominador: pero si tuviesen dos como $\frac{a^3+a^2b}{d+c}=a\times\frac{a^2+ab}{d+c}$, se encontrará $\frac{a^2+ab}{d+c}=m$, y la espresion reducida á $a\times m$, se construirá formando un paralelogramo cuya base sea a, y m la altura. En $\frac{a^3+bc^2+d^3}{a+c}$ hay que introducir a en el 2.° y 3.r término, haciendo $\frac{bc}{a}=m$ ó $bc=am$, y $\frac{d^2}{a}=n$ ó $d^2=an$, y quedará reducida á $\frac{a^3+amc+adn}{a+c}=a\times\left(\frac{a^2+mc+dn}{a+c}\right)$ semejante á la anterior.

319 Quando son tres los factores que hay demas, como en $\frac{a^3b+a^2b^2}{a+c}$, que es igual à $ab\times\frac{a^2+ab}{a+c}$ se hallará $\frac{a^2+ab}{a+c}=m$, y siendo ab un paralelogramo, si se le considera como base de un paralelepípedo cuya altura sea m, será su solidez $ab\times m$; y esta será la construccion de la espresion $\frac{a^3b+a^2b^2}{a+c}$.

320 Las cantidades que tienen como las construidas un mismo número de factores en todos los términos, se llaman *homogeneas*: si alguna $abc^2 - a^2 + abm$ no lo fuese, suponiendo que n sea la línea que representa la unidad; se multiplican los términos faltos $-a^2 + abm$, el 1º por n^2, y el 2º por n, y resultará la espresion $abc^2 - a^2n^2 + abmn$ igual á la primera, y que ya se podrá construir por ser homogenea.

321 La espresion mas sencilla de las equaciones de 2º grado es $x=\sqrt{ac}$, que es una media proporcional entre a y c: de suerte que suponiendo $m=a$ (fig. 65), $n=c$, será procediendo segun digimos (145), la $bd=x=\sqrt{ac}$. Tambien $x=\sqrt{(2bc+dc)}=\sqrt{(2b+d)c}$ representa una media proporcional entre........ $2b+d$ y c: $\sqrt{(a^2-b^2)}=\sqrt{(a+b)(a-b)}$ otra entre $a+b$ y $a-b$ En $x=\sqrt{(b^2+dg)}$, introduciendo en dg la línea b, ó haciendo $dg=bt$; se tendrá $x=\sqrt{(b^2+bt)}=\sqrt{(b+t)b}$, que es una media proporcional entre $b+t$ y b Quando la espresion consta de muchos términos como $x=\sqrt{(cd+ac-eb \text{ \&c.})}$ se procede del mismo modo: ó se busca como digimos (316), una línea $t=\frac{cd+ac-eb}{b}$, y será $bt=cd+ac-eb$, y $x=\sqrt{bt}$. En $x=\sqrt{\left(\frac{bc^2-a^2g \text{ \&c.}}{d-c}\right)}$ se hace $t=\frac{bc}{d-c}$, $m=\frac{ag}{d-c}$; y $\sqrt{(ct-am)}$ á que que-

da reducida, se construye facilísimamente.

322 Sea $x=\sqrt{(a^2+b^2)}$: tomese $CD=a$ (fig. 138) y perpendicular á CD, la $BD=b$; será (141) la hipotenusa $CB=\sqrt{((CD)^2+(BD)^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)}=x$. Si se hubiera dado $x=\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2+ \text{\&c.})}$; despues de hallada la $CB=\sqrt{(a^2+b^2)}$, se levantará en B la perpendicular $BA=C$, y será $CA=\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$: tirese despues la perpendicular $AO=d$, y se tendrá finalmente $CO=\sqrt{(a^2+b^2+c^2+d^2)}$. Quando hay algunos cuadrados negativos, se busca un cuadrado t^2 suma de los positivos, y otro m^2 suma de los negativos, y se reducirá la espresion á $\sqrt{(t^2-m^2)}$, que se puede construir describiendo sobre la línea $ac=t$ (fig. 65) un semicírculo, en el que se inscribirá la línea $ab=m$; pues será (203) $bc=\sqrt{((ac)^2-(ab)^2)}=\sqrt{(t^2-m^2)}$. A esta y á la anterior construccion pueden reducirse las espresiones $x=\sqrt{(ab+cd+mn+\text{\&c.})}$, $x=\sqrt{(ab-cd+mn-\text{\&c.})}$, haciendo ántes $ab=t^2$, $cd=r^2$, $mn=p^2$ &c.

323 Si en $x=\left(b^2+\frac{a^2d^2+d^2c^2}{bd+ac}\right)$ suponemos $bd+ac=m^2$, $a^2+c^2=t^2$; nos resultará $x=\sqrt{\left(b^2+\frac{d^2t^2}{m^2}\right)}$; hagase despues $n=\frac{dt}{m}$, y quedará que construir $\sqrt{(b^2+n^2)}$. $\sqrt{(a^2-ex\sqrt{(bd-e^2)})}$ se reduce, buscando $t=\sqrt{(bd-}$

$e^2)$, á$\sqrt{(a^2-ct)}$: y últimamente, $\frac{a\sqrt{(b+c)}}{\sqrt{(d+e)}} = \frac{a\sqrt{(b+c)(d+e)}}{d+e}$, se construye buscando una media proporcional n entre $b+c$ y $d+e$, y despues una quarta $d+e$, a y n.

324 Sea $x = \pm\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 \pm b^2)}$ el valor sacado de la equacion general incompleta de 2.° grado $x^2 \pm ax = \pm b^2$; y pues que abraza las dos fórmulas $x = \pm\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, $x = \pm\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$, tomemos para construir la 1.ª $ac = \frac{1}{2}a$ (fig.69), y ab perpendicular á ac igual á b, describase con ac un círculo, y tirando bt; tendremos $bt = tc + cb = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$, y $br = bc - cr = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + b^2)}$; luego $\pm bt$ y $\pm br$ serán los quatro valores de la 1.ª espresion.

325 Para la construccion de la 2.ª $x = \pm\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$; sobre $ac = \frac{1}{2}a$ (fig.65) tracese el semicirculo $abhc$, é inscribiendo en él $ab = b$, tirese bc que se alargará hasta que cn, cp sean iguales á ac, y serán $\pm bn$, $\pm bp$ los quatro valores que se buscan: pues $bn = cn - bc = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$, y $bp = cp + cb = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$.

326 Esto supuesto, para la solucion de los problemas geométricos, ademas de lo que dejamos dicho en la de los algébricos (227 y *sig.t. I.*), se supone encontrado lo que se va á

buscar, valiendose para formar la equacion que determine su valor, de la posicion y relaciones de las líneas que se den. Pero quando las condiciones del problema no suministran todas las líneas necesarias para resolverle; es preciso buscarlas, alargando las dadas hasta que encuentren otras, tirando paralelas, perpendiculares, tangentes, formando triángulos rectángulos ó semejantes, y valiendose despues de las propiedades que de estas líneas y figuras dejamos demostradas en la geometría elemental: en especial la de los triángulos rectángulos y semejantes. Y supuesto que para esto no se pueden dar reglas generales, es preciso esperar los progresos y el acierto en esta materia del talento y del egercicio reflexionado que cada uno haga sobre ella. Al mismo tiempo que resolvamos algunos problemas, haremos las únicas advertencias que pueden guiarnos en tanta obscuridad é incertidumbre.

327 Prob. 1.° *Dados dos puntos* A, C, (fig. 139) *trazar un círculo que pase por ellos, y toque ademas la recta* BE. Supongase encontrado el tercer punto T por donde ha de pasar el círculo, tirese por A y C la AE alargada hasta que corte á BE; y tendremos que averiguar el valor de ET. Dividase AC por medio en R, y llamando ER, a; AR = RC, b; y ET, x; será CE $= a - b$, y por lo

demostrado (144) $(ET)^2 = AE \times EC$, ó $x^2 = a^2 - b^2$, y $x = \sqrt{(a^2 - b^2)} = ET$: espresion que se puede construir describiendo sobre $ER = a$ el semicírculo RHE, é inscribiendo en él la $RH = RC = b$: pues será $EH = ET = x = \sqrt{(a^2 - b^2)}$ en el triángulo rectangulo RHE (203).

328 2. *Dividir la línea dada AB (fig. 140) en media y estrema razon en D, ó de modo que sea AB:AD::AD:DB.* Sea $AB = a$, $AD = x$; será $BD = AB - AD = a - x$, y la proporcion $AB : AD :: AD : DB$ se mudará en esta $a:x::x:a-x$, donde (174 t.I.) $x^2 = a^2 - ax$, y (249 t.I.) $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}a^2)}$. Si se levanta en B la perpendicular $BC = \frac{1}{2}a$, y se tira la AC; valdrá $\sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}a^2)}$ ó $\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$: córtese de AC, $CE = BC = \frac{1}{2}a$, y será $AE = AD = AC - CE = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$. El otro valor $-\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ se construye tomando á la parte opuesta $AH = AC + CB = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$, y la AH será tanbien media proporcional entre HB y AB.

329 3.º *Dado el radio de un círculo, encontrar el lado del triángulo equilátero, el del decágono y pentágono regular.* 1.º Sea el radio $AC = a$ (fig. 141), x el lado AT del triángulo; será el arco ABT de 120°, AB de 60°, y el triángulo ABC isosceles : luego (82) $CP = \frac{1}{2}a$, y en el triángulo rectángulo APC será $(AP)^2 = (AC)^2 - (CP)^2$,

$6\frac{1}{4}x^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$, $x^2 = 4a^2 - a^2$, y $x = \sqrt{(4a^2 - a^2)}$. Formese pues, sobre el diámetro MN un triángulo equilátero MRN, y la perpendicular RC será en el triángulo rectángulo MRC, $\sqrt{(4aa - aa)} = x$, por ser $MC = a$ y $MR = MN = 2a$.

330 2.º Suponiendo (fig. 142) $AD = x$ el lado del decágono, será su arco medida del ángulo ACD, $\frac{1}{10}$ de la circunferencia ó de 36°, CDA = CAD de 72° (86 y 87), y BDC de 108° (84). Hagase $BD = DC$, y será DBC = DCB = 36°, y ACB = 72° luego los triángulos ABC, ADC serán semejantes, y se tendrá $AB : AC :: AC : AD$, ó $a + x : a :: a : x$: será pues, $x^2 + ax = a^2$, y $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = AD$: espresion que encontramos (328) ser el segmento mayor de una línea $AC = a$ dividida en media y estrema razon.

331 3.º Para encontrar el lado $SD = z$ del pentágono regular, dado el del decágono $AD = b$ y el radio $AC = a$; tenemos $DL = \frac{1}{2}z$ (82), $LC = \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}z^2)}$ en el triángulo rectángulo DLC, y $AL = AC - LC = a - \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}z^2)}$. Del triángulo rectángulo ADL se saca $(AD)^2 = (AL)^2 + (DL)^2$, ó poniendo sus valores, $b^2 = a^2 - 2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}z^2)} + a^2 - \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^2$ esto es, $2a\sqrt{(a^2 - \frac{1}{4}z^2)} = 2a^2 - b^2$. Cuadrense ambos miembros, reduzcase y partase por a^2, y resultará $z^2 = 4b^2 -$

$\frac{b^4}{a^2}$: y pues que $b=\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}-\tfrac{1}{2}a$ (330), si en lugar de b^2 y b^4 ponemos sus valores $\tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}, \tfrac{24}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$; tendremos reduciendo, $z^2=a^2+\tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$, ó $z^2=a^2+b^2$, poniendo b^2 en lugar de $\tfrac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$. Tomese ahora CT $=b$, y tirando RT, será en el triàngulo rectángulo RTC, RT $=\sqrt{(a^2+b^2)}=z$.

332 4.º *Dada la* HD (fig. 143) *y los ángulos* H, D *que con ella forman* HC, DC, *averíguar el valor de la altura* CP *á que estas líneas se encuentrán.* Llamemos m la tangente del ángulo D conocido, n la del ángulo H, r el radio, HD, a; y la CP, y tendremos en el triángulo rectángulo CDP (281) DP *á* PC, *como el radio á la tangente del angulo* D; ó DP:y::r:m; HP:y::r:n; luego DP $=\frac{ry}{m}$, HP $=\frac{ry}{n}$; y DP + HP = HD $=a=\frac{ry}{m}+\frac{ry}{n}$: de consiguiente, $y=\frac{amn}{rm+rn}$. Si llamamos p, q las cotangentes de dichos ángulos D, H, y en lugar de sus tangentes m, n ponemos sus equivalentes (268) $\frac{r^2}{p}$, $\frac{r^2}{q}$ en la espresion hallada; quedará reducida á $y=\frac{ar}{p+q}$, mucho mas sencilla que la primera: para que se vea que de la eleccion de las líneas conocidas pende que el resultado sea ó no sencillo.

333 5.º *Dados los tres lados* AC $=a$, BC $=c$, AB $=b$ *de un triángulo* ABC (fig. 119 y 120), *hallar la perpendicular* AD *y los dos segmentos* BD, DC *que forma sobre* BC. Suponiendo $AD=z$ y DC $=x$, será BD $=$ BC $-$ DC $=c-x$ en la *fig.* 119 y en la 120 BD $=$ DC $-$ BC $=x-c$; y siendo $(DC)^2+(AD^2)=(AC)^2$, y $(BD)^2+(AD)^2=(AB)^2$; tendremos $x^2+z^2=a^2$, $c^2-2cx\ \ x^2+z^2=b^2$; restando esta equacion de la 1.ª quedará $2cx-c^2=a^2-b^2$, y $x=\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}=\frac{a^2-b^2}{2c}+\frac{c}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{(a+b)(a-b)}{c}\right)+\frac{1}{2}c=$ DC: que es la mitad de una quarta proporcional à c, $a+b$ y $a-b$, sumada con $\frac{1}{2}c$: averiguada DC, se conocerá fácilmente AD ó z.

334 De la equacion $2cx-c^2=a^2-b^2$ ó $c(2x-c)=(a+b)(a-b)$, se saca c:$a+b$::$a-b$:$2x-c$ ó BC:AC $+$ AB::AC $-$ AB : AD $\pm$ BD, proporcion demostrada (283). Asimismo, si en la equacion $z^2+x^2=a^2$, $z^2=a^2-x^2=(a+x)\times(a-x)$, ponemos por x su valor $\frac{aa-bb+cc}{2c}$ .... (333); tendremos $zz=\left(a+\frac{aa-bb+cc}{2c}\right)\times\left(a+\frac{bb+aa-cc}{2c}\right)=\left(\frac{2ac+aa+cc-bb}{2c}\right)\times\left(\frac{2ac+aa-cc+bb}{2c}\right)$ $=\left(\frac{(a+c+b)(a+c-b)}{2c}\right)\times\left(\frac{b+c-a)\,(b-c+a)}{2c}\right)$:

luego $4cczz = ((a+c+b)(a+c-b))((b+c-a)(b-c+a))$, ó $4c^2z^2 = (a+c+b)(a+b-c-2b)(a+b+c-2a)(a+b+c-2c)$ y llamando $2s$ la suma de los tres lados $a+b+c$, $4c^2z^2 = 2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c) = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$, donde partiendo por 16, reduciendo y sacando la raiz, resulta $\frac{1}{2}(cz) = \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))}$: y como $\frac{1}{2}(cz) = \frac{1}{2}BC \times AD$ es la superficie del triángulo ABC (182), se encontrará esta quando se conocen sus lados, *restando sucesivamente cada lado de su semisuma, multiplicando las restas entre sí y por la semisuma, y sacando despues la raiz cuadrada del producto.* Vease pues, quántas cosas puede contener una equacion ademas de la que se busca.

335 6º *Desde un punto* B (fig. 144) *cuya situacion es conocida respecto del ángulo* FCO, *tirar una recta que corte en él un triángulo* CHD *de una superficie igual á la de un cuadradado conocido* mm. Tirese como quiera la BHD, despues las HT y BX perpendiculares à OC, y BM paralela à FC: y tendremos en los triángulos semejantes MDB, CDH, BDX, HDT; MD:CD:: BD:HD, BD:HD:: BX:HT; luego MD:CD::BX:HT, ó llamando MC, a; BX, b; CD, x; $a+x:x::b:\mathrm{HT} = \frac{bx}{a+x}$; y pues que $\frac{1}{2}\mathrm{CD} \times \mathrm{HT}$ es (182) la superficie del triángulo HCD, que ha de ser igual à mm;

se tendrá $\frac{x}{2} \times \frac{bx}{a+x} = mm$ ó $\frac{bx^2}{2(a+x)} = mm$, donde $x = \frac{mm}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{m^4}{bb} + \frac{2amm}{b}\right)} = \frac{mm}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{mm}{b} + 2a\right)\frac{mm}{b}}$.

336 Para construir esta espresion, se levantará en qualquier punto D de una línea indefinida AX (fig. 145) la perpendicular DT $= b$, sobre AD y DT se tomarán DC, DN iguales cada una à m, y habiendo tirado TN, y por C la CH paralela á TN; será $\mathrm{DH} = \frac{mm}{b}$ en los triàngulos semejantes DTN, DCH, donde TD:CD:: DN:DH, ó $b:m::m : \mathrm{DH} = \frac{mm}{b}$; luego será $x = \mathrm{DH} \pm \sqrt{(\mathrm{DH} + 2a) \times \mathrm{DH}}$.

Tomese despues, BD $= 2a$, tracese sobre HB un semicirculo que encuentre en P la DT, y será la cuerda $\mathrm{PH} = \sqrt{(\mathrm{DH} + 2a)\mathrm{DH}}$ (138): pasese esta á HO y HA, y seràn los dos valores de x $\mathrm{AD} = \mathrm{DH} + \mathrm{HA} = \mathrm{DH} + \sqrt{(\mathrm{DH} + 2a)\mathrm{DH}}$, y $\mathrm{DO} = \mathrm{HO} - \mathrm{DH} = \sqrt{(\mathrm{DH} + 2a)\mathrm{DH}} - \mathrm{DH}$. Si se pasa el primer valor AD desde C á D (fig. 144) y se tira la BHD, será el triángulo CDH el pue se pide. El 2.º valor DO, que se ha de tomar en sentido negativo para que sea $\mathrm{DH} - \sqrt{(\mathrm{DH} + 2a)\mathrm{DH}}$, se pasa de C á d y con el triángulo Chd se resuelve el problema respecto del ángulo hCd igual y opuesto á HCD, como se puede ver comparando los triángulos MBd, dhC; BdX, thd.

En el caso que el punto B se hubiese dado por bajo de la CD y en el mismo ángulo MCH (fig. 146); la posicion de las BX, BM contraria á la que tenian en el caso anterior, hace negativas las a, b, y produce el valor $x = -\frac{mm}{b} \pm \sqrt{\left(-\frac{mm}{b} - 2a\right) \times -\frac{mm}{b}}$: que siendo el mismo que el anterior aunque con signos contrarios, se construye del mismo modo que él.

En la fig. 147 en que el punto B por bajo de la CD coge la BX ó b en situacion opuesta al primer caso, el $-b$ reduce la espresion á esta $x = -\frac{mm}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{mm}{b} - 2a\right)\frac{mm}{b}}$, que siendo imaginária quando $\frac{mm}{b}$ es menor que $2a$, muestra que entonces es imposible el problema: quando $2a$ se supone menor que $\frac{mm}{b}$, resultan negativos ambos valores y pertenecen al ángulo MCh igual y opuesto à FCO dado, respecto del qual serà imposible el problema. Con efecto, si despues de haber hallado como digimos (336) $DH = \frac{mm}{b}$ (fig. 148), se toma $HB = 2a$, y al semi-

círculo trazado sobre ella se tira la tangente DP que será (144) $\sqrt{DH \times DB} = \sqrt{\left(\frac{mm}{b} - 2a\right)\frac{mm}{b}}$, y se lleva esta de D á A y á O; serán $AH = DH - AD = \frac{mm}{b} - \sqrt{\left(\frac{mm}{b} - 2a\right)\frac{mm}{b}}$, y $HO = HD + DO = \frac{mm}{b} + \sqrt{\left(\frac{mm}{b} - 2a\right)\frac{mm}{b}}$ los valores de x, que tomados con signos contrarios, es decir, llevados de C á D y d (fig. 147) y tirando las HBD, hBd, cortarán los triángulos HDC, haC pedidos.

Dado el punto B dentro del ángulo HCD (fig. 149), la CM ó a que entonces resulta negativa, reduce los valores á la espresion $x = \frac{mm}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{mm}{b} - 2a\right) \times \frac{mm}{b}}$ la misma que la anterior sino es en los signos: y asi construida como ella, se llevarán AH, HO valores de $-x$, à D y d á la derecha de C, y darán los dos triángulos HCD, hCd que desatan la cuestion. La hemos tratado en toda su estension para que se acostumbren los principiantes á sacar de una equacion los diferentes casos que puede encerrar.

337 Por este problema podremos facilmente 1º *dividir un triángulo* AHQ (fig.

143) *desde un punto* B *dado dentro ó fuera de él, en dos partes que tengan entre sí una razon qualquiera* a:b. Pues si se hace $a+b$ à a, *como la superficie conocida del triángulo* AHQ *al* 4.º *término*; será este la superficie que debe tener el triángulo HCD que se pide: con que si buscando un cuadrado *mm* igual á esta superficie, tiramos desde el punto B una recta, que corte en el ángulo AHQ una superficie igual á *mm* (335), se habrá resuelto el problema.

338 2º *Dividir desde un punto dado* K (fig. 150) *qualquier figura rectilínea* ABCDE *en dos partes* ARLB, REDCL *que tengan entre sí una razon dada.* Conocida la ABCDE con todos sus ángulos y lados, averiguarémos la superficie del ángulo AFB, cuyo lado AB, y ángulos BAF, ABF, suplementos de EAB, ABC, son conocidos: y siendo fácil averiguar como en el problema anterior, la superficie ARLB, porcion determinada de toda la figura; se reducirá el problema á tirar desde el punto K una recta KRL que corte en el ángulo EFC un triángulo de una superficie conocida. Lo que tambien podrá servirnos para dividir una figura en qualesquiera partes.

339 7º *En una esfera* AHBD (fig. 151) *formada por el semicírculo* ABD *al rededor del diámetro* AB, *se pregunta en qué punto*

será la solidez del segmento esférico DAHED *igual á la del cono* DCH. Sea AC$=a$, AE$=x$, será CE$=a-x$: y suponiendo $r{:}c$ la razon del radio á la circunferencia, será la del círculo máxîmo ADBHA el 4.º término de la proporcion $r{:}c{::}a{:}\frac{ac}{r}$: la superficie del casco esférico DAH (224) $\frac{ac}{r}\times x$, y la solidez del sector esférico DCHA (242) $\frac{ac}{r}\times x\times\frac{1}{3}a=\frac{a^2cx}{3r}$. La del cono DCH es el producto de su base cuyo rayo es ED, multiplicada por el tercio de la altura EC (239): y como en el triángulo rectàngulo EDC, ED$=\sqrt{((DC)^2-(EC)^2)}$, ó ED$=\sqrt{(a^2-a^2+2ax-x^2)}=\sqrt{(2ax-x^2)}$; si se hace $r{:}c{::}\sqrt{(2ax-x^2)}{:}\frac{c\sqrt{(2ax-x^2)}}{r}$; será esta la espresion de la circunferencia del círculo base del cono: su susuperficie (185) el producto de esta circunferencia por $\frac{1}{2}$ ED, mitad de su radio, ó $\frac{1}{2}\sqrt{(2ax-x^2)}\times\left(\frac{c\sqrt{(2ax-x^2)}}{r}\right)=\frac{c(2ax-x^2)}{2r}$: y la solidez del cono el producto de esta base por $\frac{1}{3}$ EC, tercio de la altura, esto es, $\frac{c(2ax-x^2)}{2r}\times\frac{a-x}{3}$.

Si esta, que en el caso presente debe

ser la mitad de la del sector DCHA, se multiplica por 2, quedará igual á la de dicho sector: de suerte que tendremos $\frac{2c(2ax-x)}{2r} \times \frac{a-x}{3} = \frac{a^2cx}{3r}$, que se reduce á $x^2 - 3ax = -a^2$, donde $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{9}{4}a^2 - a^2)}$: espresion que se construye tomando $AR = \frac{3}{2}a$, trazando sobre ella el semicírculo, é inscribiendo en él la $AT = a$: pues siendo la TR en el triángulo rectángulo ATR, $\sqrt{((AR)^2 - (AT)^2)} = \sqrt{(\frac{9}{4}a^2 - a^2)}$; si se toma $RE = TR$, será $AE = AR - ER \ldots\ldots = \frac{3}{2}a - \sqrt{(\frac{9}{4}a^2 - a^2)} = x$.

340 El otro valor $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ que por ser mayor que el diámetro $2a$, no puede pertenecer á la cuestion, resuelve esta otra: *dada la AQ dividida en tres partes iguales en B y C, encontrar en la misma direccion un punto E, tal que AC sea media proporcional entre las distancias de E á los estremos A y* Q: pues suponiendo AC, a; AE, x; se tendrá $x:a::a:3a-x$; $3ax - x^2 = a^2$, y $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$: y supuesta la construccion anterior, se pasará TR á E y E′, puntos que satisfarán la pregunta. Estos problemas cuya equacion incluye la solucion de cuestiones distintas, se llaman *concretos*; y *abstractos* aquellos que tienen tantas soluciones como valores la incognita.

341 Concluyamos esta materia previniendo á los que se egerciten en ella, que no esperen acertar desde luego con el camino mas corto de resolver y construir un problema. Entre los diferentes datos de que se puede echar mano para este efecto, los hay que conducen á equaciones mas ó menos complicadas, de inferior ó de superior grado: y por eso se deben tentar otros medios siempre que el escogido aparezca embarazoso: en la inteligencia de que la mayor parte de las espeditas y elegantes construcciones y soluciones que leemos en las obras de los mayores geómetras, no se han conseguido ántes de haber probado otras mas complicadas y trabajosas; y de consiguiente que ademas de talento, se necesita haber adquirido con el egercicio cierto tino, para creerse adelantado en esta materia tan útil como dificil y delicada: especialmente quando se trata de construir equaciones de grados superiores.

Construccion de las equaciones indeterminadas de 1.º y 2.º grado ó de los Lugares geométricos.

342 Todos los puntos de una línea qualquiera que no se haya tirado casualmente, han de estar situados segun cierta ley ó propiedad particular que caracterize la línea; y

que reducida á equacion, espresará su naturaleza. Para encontrar esta equacion por la que se puedan despues determinar todos los puntos de la línea; basta referir qualquiera de ellos à dos rectas fijas colocadas en el mismo plano que ella, y exâminar despues la razon que tienen entre sí las distancias de la línea á las otras dos.

343 Para determinar por egemplo, la situacion de los puntos de la línea HR (fig. 152); tomaré dos rectas EL, BD que formen un ángulo qualquiera ECL, y tirando desde uno de sus puntos M la MP paralela á BD; espresarán las MP, CP las distancias de HR à ED y EL: como tambien las HS, CS; *mq*, C*q* &c. espresarán las de los puntos H, *m*. Los dos puntos A y F en que BD y EL cortan la HR, determinan esta línea, y lo mismo las CA y CF, en cuya razon deberán estar todas las demas distancias CP, PM; CE, EH; C*q*, *qm* &c. á causa de la semejanza de los triángulos CAF, AMP, A*qm* &c.

344 Pero ántes de pasar adelante se ha de advertir que las partes CA, CP, C*q* se llaman *abscisas*, y EL *ege de las abscisas*; las PM, *qm*, EH *ordenadas* ó *aplicadas*, y la BD *ege de las ordenadas*, cada abscisa con su ordenada *coordenadas*. Unas y otras son *negativas* quando caen à la izquierda de BD, si

suponemos *positivas* las de la derecha, y al contrario. Toda línea como las abscisas y ordenadas, que varia de tamaño en cada diferente punto, se llama *variable*; y *constante* la que tiene valor fijo como las CA, CF, el radio de un círculo &c. En lo sucesivo representarémos las ordenadas con las letras y, u, y las abscisas con x, z.

345 Esto supuesto, para determinar la situacion de los puntos de la HR; colocando el principio ú *origen* de las abscisas en A, y haciendo $CA=a$, $CF=b$, $AP=x$, $PM=y$; tendrémos en los triángulos semejantes CAF, APM, CA:CF::AP:PM ó $a:b::x:y$; $PM=\frac{bx}{a}$, que nos dará el punto M luego que se conozca CP ó x: lo mismo se hubiera sacado de los triángulos Aqm, AHS para determinar las mq, HS.

Pudieramos haber puesto el origen de las abscisas en qualquier otro punto C: en este caso $CP=x$, $AP=x-a$, y la proporcion CA:CF::AP:PM se muda en $a:b::x-a:$ $PM=y=\frac{bx-ab}{a}$. En el punto m se tiene $Cp=x$, $Ap=CA-Cp=a-x$; y en los triángulos semejantes Apm', ACF, es AC:CF:: $Ap:pm'$, ó $a:b::a-x:y=\frac{ab-bx}{a}$, espresion idéntica con la anterior, sino es en los signos; por ser negativa la pm' que cae bajo de la EL: luego dicha equacion será la propia de la línea HR, pues que representa todos sus puntos.

346 En el punto en que comienzan las abscisas, es decir en su origen, es $x=o$, ó no hay abscisa: como tambien $y=o$ en el punto A en que no hay ordenada, por pasar por él la HR. Luego si suponiendo $y=o$ en una equacion, resultase $x=o$ ó al contrario; pasará la línea á que pertenece, por el origen: pero si suponiendo $x=o$ resultase algun valor de y, determinará este en el ege de las ordenadas el punto por donde pasa la línea: y si haciendo $y=o$ tuviese x algun valor, se conocerá por él el punto en que la línea corta el ege de las abscisas. En la equacion $y=\frac{bx}{a}$, resulta $y=o$, $x=o$ en la suposicion de ser cero qualquiera de ellos: prueba de que HR pasa por el orígen A: pero si en $y=\frac{bx-ab}{a}$ se hace $y=o$; se tendrá $x=a=CA$, á cuya distancia del origen C, pasa HR; y haciendo $x=o$, resulta $y=-b=CF$, distancia á que pasa de C la HR.

347 Las equaciones de esta forma $y=\frac{cx}{b}+p$ pertenecen á líneas rectas que se llaman de 1.r *grado* por resolver con su interseccion los problemas de 1.r grado: líneas de

2º grado ó curvas de 1º son el círculo y las secciones conicas, *Parábola*, *Elipse* é *Hipérbola* cuyas equaciones son de 2º grado, y resuelven los problemas de este género, por medio de una recta que corte qualquiera de dichas curvas. Las equaciones de 3.º 4.º y demas grados altos resuelven problemas superiores por medio de curvas de órden superior al 2.º: de las que se llaman *algébricas* ó *geométricas* aquellas cuyas abscisas y ordenadas son líneas cuyo valor puede sacarse geometricamente, y *trascendentes* ó *mecánicas* aquellas cuyas abscisas y ordenadas son arcos de círculo, logarítmos, senos, tangentes &c. Las que en su descripcion guardan cierta ley, se llaman *lugares geométricos*, por quanto todos sus puntos suministran soluciones á los problemas geométricos indeterminados. La semiperiféria del círculo por egemplo, es el lugar geométrico de los vértices de todos los triángulos rectángulos que pueden tener su diámetro por hipotenusa (69). Nosotros nos tenemos que ceñir en esta vasta é intrincada materia á lo dicho sobre las equaciones indeterminadas de 1.r grado, y en quanto á las de 2º 3º &c. trataremos analíticamente de las principales propiedades del círculo, de las tres secciones conicas, y de algunas curvas particulares.

348 Supongamos pues, que todos los

puntos de la circunferencia AMNBnm (fig. 153) se refieran á las dos líneas DR ege de las ordenadas, y AB ege de las abscisas, y que poniendo su origen en A, se trate de espresar en una equacion la relacion de las coordenadas AP, PM; Ap, pN &c. tomando de A á B las abscisas positivas de A á E las negativas, de A á D las ordenadas positivas, y de A á R las negativas. Hagamos $PM=y$, el radio $AC=a$, $AP=x$; será $PB=AB-AP=2a-x$: y pues que dejamos demostrado (136) de qualquier punto M del círculo que $AP:PM::PM:PB$; tendremos poniendo sus valores, $x:y::y:2a-x$, y de consiguiente $y^2=2ax-x^2$, ó $y=\pm\sqrt{(2ax-x^2)}$, equacion que se busca, y que manifiesta que á cada abscisa $AP=x$ corresponden dos valores de y, PM y Pm: de suerte que la curva tendrá dos ramos AMNB, AmnB.

349 Si dada la equacion se nos pidiese describir por ella el círculo; supondriamos desde luego $x=o$, y por el resultado $y=o$ conoceremos que la circunferencia pasa por el origen A: haciendo despues $y=o$, resulta $x^2=2ax$ ó $x^2-2ax=o$, equacion en la que $x=o$, $x=2a=AB$, y que da los puntos A y B por donde pasa la curva. Para determinar los demas, se darán diferentes valores á x, y de cada uno resultarán dos de y, uno positivo y otro negativo. Si fuese por egemplo, $AP=x=2$ en

la suposicion de valer a, 5; $y=\pm\sqrt{16}=\pm4$ determinaria la longitud de PM y Pm, y de consiguiente los puntos M, m de la circunferencia, que no puede pasar de B; pues si se supone x mayor que $2a$, saldrá la cantidad $2ax-x^2=(2a-x)x$ negativa, y la y imaginária ó imposible (155 *t.* I.)

350 Las principales propiedades del círculo se sacan fácilmente de su equacion $y^2=2ax-x^2$. Comencemos por los triángulos rectángulos MPC, AQC: en el primero se tiene $(MC)^2=(MP)^2+(CP)^2$ ó $(CM)^2=2ax-x^2+a^2-2ax+x^2$, poniendo por $(MP)^2$, $2ax-x^2$; y por $(CP)^2$, $(a-x)^2$: reduzcase, y se tendrá $CM=a$, ó *que todos los radios son iguales*. En el otro triángulo AQC, donde $(AQ)^2=(QC)^2+(AC)^2=y^2+x^2$, se tiene poniendo $2ax-x^2$ en lugar de y^2, $(AQ)^2=2ax$: luego $x:AQ::AQ:2a$, propiedad demostrada (138).

351 Cada una de las cuerdas ZB, QB vale $\sqrt{2a^2}$ en los triángulos rectángulos QCB, ZCB: de consiguiente 1º $(QB)^2+(ZB)^2=4a^2=(QZ)^2$: es decir, que será recto el ángulo QBZ (69). 2º En el quadrilátero AQBZ el producto de las dos diagonales $QZ\times AB=4a^2$, es igual á $AQ\times BZ+AZ\times BQ=4a^2$.

352 Si el orígen de las abcisas se hubiera colocado en el centro C, haciendo CP, x;

se hubiera sacado del triángulo rectángulo CPM, $(PM)^2=(CM)^2-(PC)^2$, ó $y^2=a^2-x^2$, otra equacion al círculo que incluye la proporcion $a-x:y::y:a+x$, ó $AP:PM::PM:PB$ de donde se sacó la primera (348).

353 Tambien pudiera haberse puesto el orígen de las abscisas en qualquier otro punto T: en cuyo caso tirados los eges TX de las abscisas y GS de las ordenadas, bajadas perpendicularmente desde el centro á una y otra las $CE=c$, y $CK=b$; serán $MU=GT=y$, y $MG=UT=x$ las coordenadas de un punto qualquiera M de la circunferencia; las coordenadas del punto N son $NO=YT=x$, y $NY=TO=y$ &c. La equacion que represente la relacion de estas líneas, se saca facilmente del triángulo rectángulo MPC, donde $(CM)^2=(PM)^2+(PC)^2$; pues siendo $MC=a$, $MP=MU+UP=y+b$, y $PC=EC-CP=c-x$; se tiene $a^2=y^2+2by+b^2+c^2-2cx+x^2$; y de consiguiente $y=-b\pm\sqrt{(a^2-x^2+2cx-c^2)}$: nueva equacion al círculo del mismo grado que las anteriores.

354 Hayase de construir por último la curva cuya equacion es $y^2=x^2-a^2$: suponiendo $y=o$, resulta $x=\pm a$: de consiguiente, tomando en el punto A de una recta indeterminada BD (fig. 154) el principio de las abscisas, y las partes AS, As iguales á a; deberá pasar la curva por S, s. La equacion $y=\pm\sqrt{(x^2-a^2)}=\pm\sqrt{((x+a)(x-a))}$ manifiesta que tomando las abscisas positivas hácia D, corresponden à cada $AP=x$, dos valores iguales PM, Pm, uno positivo y otro negativo; es decir, que la curva tendrá dos ramos SM, Sm iguales é infinitos. Otros dos iguales y opuestos à los primeros se sacan de la equacion $y=\pm\sqrt{((-x+a)(-x-a))}$ que resulta de tomar las abscisas hacia B ó negativamente: pero en uno y en otro caso ha de ser x mayor que a para que el radical no sea imaginário, é imposible su valor; pues que entre S y s no hay curva.

De las Secciones Cónicas, Parábola, Elipse é Hipérbola.

355 Si una recta indeterminada AR (fig. 155) fija en el punto G, recorre las dos circunferencias DmAm′, RNQn; habrá formado dos superficies cónicas opuestas AGD, GRQ, que pueden ser menores ó mayores indefinidamente: y de cuyas diferentes secciones por un plano resultan las que se llaman *secciones cónicas*. La seccion de un plano que por el punto G cortase perpendicularmente qualquiera de dichos conos, sería un triángulo GDA: será un círculo EMFM′, siempre que el plano corte el cono GDA paralelamente à la base, ó formando el mismo

ángulo con los lados GD, GA. Si el plano pasa por Bb (fig. 156) cortando los lados GA, GR con diferentes ángulos; resulta una seccion BMmb, que se llama *Elipse*. Será una *Parabola* BMmm' (fig. 157) quando el plano secante es paralelo á uno de los lados GC del cono: y últimamente, si dejando de ser paralelo, cortase uno y otro cono (fig. 155); trazará las curvas BMmm', bNn que se llaman *Hipérbolas*.

356 En la parábola Bmm' (fig. 157) en la que la Bp se llama *ege*, el punto B *vértice* y orígen de las abscisas, las PM, pm, *ordenadas*, y las BP, Bp *abscisas*; *los cuadrados de las ordenadas estan en la misma razon que sus abscisas*, ó $(PM)^2:(pm)^2::BP:Bp$. Porque si corta al cono el plano circular FME paralelamente à la base, y à estos dos planos paralelos los corta el triángular GDC; serán paralelas las comunes secciones FE, DC (179), y por lo mismo serán tambien paralelas las MP, mp secciones comunes de dichos planos paralelos, cortados por BMm': luego siendo por la naturaleza del círculo (136) $(MP)^2=EP\times PF$, $(mp)^2=Dp\times Cp=Dp\times PE$, por ser $PE=Cp$ (98); tendremos $(MP)^2:(mp)^2::FP\times PE:Dp\times PE::FP:Dp$: y pues que $FP:Dp::BP:Bp$ en los triángulos semejantes BPF, BpD; será finalmente, $(MP)^2:(mp)^2::BP:Bp$.

357 En la elipse (fig. 156) supuesto que los planos AGR, BMb cortan los paralelos EMF, CmD; se tiene en los triángulos semejantes BPF, BpD; bEP, bCp; $BP:Bp::PF:pD$; $bP:bp::EP:Cp$: luego será multiplicando estas proporciones, $BP\times bP:Bb\times bp::PF\times EP$ $pD\times Cp$: y pues que en los círculos EMF, CmD, $(PM)^2=PF\times EP$, $(pm)^2=Dp\times Cp$; se tendrá $BP\times bP:Bp\times bp::(PM)^2:(pm)^2$: es decir, *los cuadrados de las ordenadas* PM, pm, *son en la elipse como el producto de las partes* BP, bP; Bp, bp *que cortan en el ege* Bb, *que llamaremos* abscisas.

358 Lo mismo se saca en la hipérbola (fig. 155.) de los triángulos BEP, BDp; bPF, bpA, donde $BP:Bp::EP:Dp$, $bP:bp::PF:pA$; y de consiguiente, $BP\times bP:Bp\times bp::EP\times PF:Dp\times pA$, ó $BP\times bP:Bp\times bp::(PM)^2:(pm)^2$, poniendo por $EP\times PF$, $Dp\times pA$ sus iguales $(PM)^2$, $(pm)^2$: solo hay la diferencia de que en la hipérbola las abscisas BP, bP; Bp, bp se toman para cada ordenada de distinto lado que en la elipse.

Para que conozcamos mejor las utilísimas propiedades de estas tres curvas de que se hace un uso contínuo y general en todos los ramos de física y matemàticas, hablaremos de cada una en particular; considerándolas descritas en un plano.

Parábola.

359 Es la parábola una curva cuyos puntos M, N, n, m (fig. 158) distan todos igualmente de una línea fija BD que se llama *directriz*, y de un punto F que se llama *focus*, distante siempre del vértice S de la quarta parte de una línea p conocida con el nombre de *parámetro*: de manera que si en el punto O de una escuadra OGB, y en qualquier otro F se fijan los estremos de un hilo OMF igual en longitud à OG, y se mueve la escuadra hacia E llevando tirante el hilo con un lapiz M; la línea MNS que describa el lapiz, y la otra mitad Snm que trace del mismo modo del otro lado de la EH, será una parábola: pues en qualquiera de sus puntos M se verifica que siendo $OG = OMF$, es $MF = MG$, quitando MO comun: y por lo mismo $SF = SE = \frac{1}{4}p$.

360 La recta MF tirada desde qualquier punto M de la parábola al focus, se llama *radio vector*; y si se tira desde M la ordenada $MP = y$, siendo $SP = x$, será siempre $MF = MG = EP = PS + SE = x + \frac{1}{4}p$. Luego si habiendo escogido en la línea SH que haya de ser ege de la parábola, el punto S para vértice, y tomado $SF = SE = \frac{1}{4}p$ para señalar el focus F; si despues de haber tirado perpendi-

culares indefinidas à todos los puntos P del ege, se trazan desde F con el intervalo de cada PE dos arcos à un lado y otro de la SH; se determinarán de cada vez dos puntos M, m de la curva, que se describirá facilmente, determinando así los demas: pues en tal caso cada FM será igual á la distancia EP ó GM.

361 En el triàngulo rectangulo FMP, en el que $(PM)^2 = (FM)^2 - (FP)^2$, será poniendo en lugar de PM, FM, FP, sus valores y, $x + \frac{1}{4}p$, $x - \frac{1}{4}p$; $yy = xx + \frac{2}{4}px + \frac{1}{16}pp - xx + \frac{2}{4}px - \frac{1}{16}pp$, que se reduce á $yy = px$, ó $y = \pm\sqrt{px}$, equacion à la parábola: que comparada con $YY = pX$ de otra qualquier ordenada Y, cuya abscisa sea X, da $yy : YY :: px : pX :: x : X$, segun lo demostramos ya (356).

362 Si hacemos en ella $x = o$ ó $y = o$, veremos que pasa la curva por el origen S, sin que se estienda mas alla; pues resulta imaginária la $y = \pm\sqrt{-px}$, tomando á x negativa. Y como á cada x corresponden dos valores iguales de y, que crecen á proporcion que es mayor x; tendrá la parábola dos ramos iguales é infinitos; cuyos puntos podran determinarse dando á x diferentes valores, y sacando en cada uno los que corresponden á y.

363 De $yy = px$ se saca $x : y :: y : p$, esto es, *que cada ordenada es media proporcional entre su abscisa y el parámetro, y este tercera proporcional á qualquier abscisa y su ordenada:*

de suerte que la doble ordenada Nn (fig. 158) que pasa por el focus, es igual al parámetro; pues siendo la abscisa $SF = \frac{1}{4}p$, será $(NF)^2 = yy = px = \frac{1}{4}pp$, y $NF = \sqrt{\frac{1}{4}pp} = \frac{1}{2}p$; luego $Nn = p$ Si á una cuerda qualquiera SL (fig. 159) se levanta la perpendicular LQ, será tambien RQ el parámetro de la parábola: pues en el triángulo rectángulo SLQ, $SR:RL::RL:RQ$, ó $x:y::y:RQ = p$.

364 *Para tirar una tangente á un punto M de la parábola* (fig. 158); tiradas las MG, MF y GF; la MT perpendicular á GF será la tangente; pues de qualquier otro punto suyo Z que no sea M, se probará que está fuera de la curva. Para esto tirense ZF al focus, ZB perpendicular á la directriz y ZG; se verá que siendo ZB menor que ZG (30) ó que su igual ZF, Z no está en la parábola (359. Si á la tangente MT se levanta en el punto M la perpendicular ó *normal* MR, la parte TP de ege comprendida entre la tangente y la ordenada MP, se llama *subtangente*, y la PR comprendida entre la ordenada MP y la normal, se llama *subnormal*.

365 Siendo iguales los ángulos GMT, TMF (82), y $GMT = ZMO$; será $ZMO = TMF$: ZMO se llama ángulo *de la incidencia*, y TMF *de la reflexîon*. Tambien por razon de las paralelas GM, TF, y por ser $GC = CF$, serán iguales y semejantes los

triángulos GCM, TCF (90 y 131): y de consiguiente $MG = TF = FM$, y en el triángulo isósceles MFT la FC perpendicular á la tangente la dividirá por medio.

366 Pues que $FM = FT = x + \frac{1}{4}p$, será $TP = TF + FP = x + \frac{1}{4}p + x - \frac{1}{4}p = 2x$, ó *la subtangente PT dupla de su abscisa* SP; y de consiguiente $SP = ST$. Luego 1º el paralelogramo MKSP (fig. 159) es igual al triángulo MPT que tiene doble altura que él (97). 2º Para tirar una tangente al punto M de la parábola (fig. 158) se bajará la perpendicular MP, y haciendo $ST = SP$, se tirarà por T y M la TM.

367 3º *Las perpendiculares FC bajadas desde el focus á la tangente, son como las raices cuadradas de los radios vectores*: pues dividiendo FC por medio la MF, lo mismo que la tangente SC, por ser $TC:CM::TS:SP$, y $TS = SP$; coincidirá la CS con FC en C: y en el triángulo rectángulo CTF, será $TF:FC::FC:FS$, $(FC)^2 = TF \times FS = FM \times \frac{1}{4}p$: en otro punto M′ se tendria tambien $(FC')^2 = FM' \times \frac{1}{4}p$: luego $(FC)^2 : (FC')^2 :: FM \times \frac{1}{4}p : FM' \times \frac{1}{4}p$, y $FC:FC' :: \sqrt{FM} : \sqrt{FM'}$.

368 4º En el triángulo rectángulo RMT se tiene (136) $PT:PM::PM:PR = \frac{(PM)^2}{PT} = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$; es decir, *que la subnormal es la*

mitad del parámetro. La normal $MR = \ldots$ $\sqrt{((MP)^2+(PR)^2)}=\sqrt{(px+\frac{1}{4}pp)}=\sqrt{MF\times p}$ en el triángulo rectángulo MPR: y del TMP tambien rectángulo, se saca la tangente $TM=\sqrt{((PM)^2+(PT)^2)}=\sqrt{(px+4x^2)}=\sqrt{4MF\times x}$.

369 Qualquiera recta MO paralela al ege SH se llama *diámetro*, cuyas ordenadas son $m'p'$ paralelas á TM, tangente en el punto M del diámetro: su parámetro (q) es tambien cuadruplo de la distancia FM de su vértice al focus; de manera que $q=4MF=p+4x$, y de consiguiente tercera proporcional á la abscisa y tangente que corresponden al punto M; pues es $\div$ x : *tang* $=\sqrt{(px+4x^2)}:p+4x=q$, ó $\div x:MT:q$.

370 Sea la abscisa Mu, z (fig. 159) y u la ordenada lu; tendrémos en los triángulos lpn, MPT, $MT:lp::MP:ln::TP:pn$, ó $\sqrt{qx}:u+\sqrt{qx}::\sqrt{px}:ln=\frac{u\times\sqrt{px}}{\sqrt{qx}}+\sqrt{px}::$ $2x:pn=\frac{2ux}{\sqrt{qx}}+2x$: y como $Sp=Tp-TS$ $=Mu-TS=z-x$; será $Sn=Sp+pn=z+x+\frac{2ux}{\sqrt{qx}}$. Por la propiedad de la parábola (361), $(ln)^2=p\times Sn$ ó $(\sqrt{px}+\frac{u\sqrt{px}}{\sqrt{qx}})^2=pz+px+$

$\frac{2xpu}{\sqrt{qx}}$: en donde sacando el cuadrado y reduciendo resulta $u^2=qx$, equacion à la parábola respecto de sus diámetros, en todo semejante à la del ege, y de la que se sacará como en ella, *que los cuadrados de las ordenadas son como las abscisas; que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales* &c.

371 Si se pidiese trazar una parábola, cuyas ordenadas formen un ángulo conocido con un diámetro dado MO (fig. 158), cuyo parámetro se dé tambien; se tirará por el vértice M del diámetro la recta ZMT que forme con él un ángulo OMZ igual al dado: se hará despues el ángulo $TMF=ZMO$, y tomando $MF=\frac{1}{4}q$; se tendrá el focus F por donde se tirará la HT paralela à MO que será el ege: bajesele la perpendicular MP, y dividiendo PT por medio, se tendrá el vértice S con el que y el focus se trazará la parábola (360).

372 Si se tiran (fig. 159) la ordenada mp infinitamente proxîma à PM, y las MK, rt paralelas á TP; se tendrá en los triángulos TMP, roM, $TP:PM::ro=Pp:rM$, ó poniendo por TP su igual $2sp$, ó 2KM; $2KM:PM::Pp:rM$: y de consiguiente $PM\times Pp=2KM\times rM$, ó el paralelogramo $PpMn$ duplo del

rMKt : y como se puede probar otro tanto de qualquiera de los paralelogramos de que se compone la superficie de la parábola; será qualquier espacio parabólico SPM duplo del espacio esterior SoMK, ó los dos tercios del rectángulo SPMK: los triángulos omM, roM se desprecian en el cálculo por infinitamente pequeños (442) Solo en el caso que las abscisas tengan como en la parábola, una relacion constante con la subtangente, podrán cuadrarse exâctamente las curvas.

Elipse.

373 La propiedad que caracteriza esta curva es que la suma de las distancias FM$+f$M (fig. 160) de qualquiera de sus puntos M á los dos F, f, que se llaman sus *focus*, es igual á la línea Ss su *ege mayor* : de manera que si clavados en F, f los estremos de un hilo FMf, mas largo que Ff, se le lleva estirado con un lapiz al rededor de dichos puntos; resultará descrita una elipse. En ella llamarémos *ege menor* la Bb perpendicular al punto C mitad de Ss y *centro* de la elipse: á las CF, Cf *escentricidad*: las *MP*, *mP ordenadas* y SP, sP *abscisas* del ege mayor Ss; Mp, Bp, bp *ordenadas* y *abscisas* del ege menor Bb, y las FM, fM *radios vectores*. Ultimamente, la TX es *tangente* (fig.161), la MR *normal*,

PR *subnormal*, y PT *subtangente*, correspondientes al punto M de la elipse.

374 La estension del hilo en el punto S (fig. 160) es $2SF+Ff$, y en s, $2sf+fF$: luego $2SF+Ff=2sf+fF$; y de consiguiente $SF=sf$, $CF=Cf$. De lo que se infiere 1.° que el punto b de la perpendicular Cb debe estar á igual distancia de F y f (29) como lo está C, ó $Fb=fb=SC$ mitad de Ss; y el *ege menor se dividirá por medio* en C á causa de los triángulos rectangulos iguales fCB, fCb. 2.° Un arco descrito desde b con el radio CS, cortará la Ss en los puntos F, f que serán los focus : de suerte que será fácil trazar la elipse dados los dos eges; pues determinados sus focus, se practicará despues lo que digimos (373).

375 Llamemos ya Ss, $2a$; Bb, $2b$; $CF=Cf$, c; PM, y; CP, x : será $PS=SC-CP$, $a-x$; $Ps=sC+CP$, $a+x$; $PF=CF-CP$, $c-x$; $Pf=fC+CP$, $c+x$; $SF=SC-CF$, $a-c$; y $Fs=a+c$: y en el triángulo rectángulo FbC tendremos $(Fb)^2=(FC)^2+(Cb)^2$ ó $aa=cc+bb$; de donde se saca $cc=aa-bb$; y $bb=aa-cc$: luego $a+c:b::b:a-c$, ó $\div$ Fs:Cb: FS; esto es, *el semiege menor* Cb *medio proporcional entre las distancias* Fs, FS *de los vértices á uno de los focus*.

376 Esto supuesto, en el triángulo FMf es (283) $fM+Mf\ (2a) : Ff\ (2c)::fP-PF(2x)$:

$fM-FM=\frac{4cx}{2a}=\frac{2cx}{a}$. Con esta diferencia, y la suma $2a$ de FM y fM, sacaremos (238*t*. I.) $FM=a-\frac{cx}{a}$: y en triángulo rectángulo PMF será $(PM)^2=(FM)^2-(PF)^2$, ó $yy=aa-2cx+\frac{ccxx}{aa}-cc+2cx-xx$, que se reduce poniendo $aa-bb$ en lugar de cc (375), á $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}=\frac{bb}{aa}(aa-xx)$: equacion á la elipse; en la que por ser $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$ corresponderán à cada abscisa CP dos ordenadas iguales una positiva y otra negativa, que se determinarán conociendo à x, y podrá trazarse por este medio la elipse: á la que siempre divide por medio el ege mayor.

377 Si el origen de las abscisas se coloca en S haciendo $SP=x$, $SF=sf=e$; $SP\times Ps$ que ántes era $(a-x)(a+x)$, será $x(2a-x)$: pongase este producto en la equacion anterior en lugar de $aa-xx$, y quedará reducida á $yy=\frac{bb}{aa}\times(2ax-xx)$, equacion en la que suponiendo $y=o$, resulta $xx-2ax=o$ donde $x=o$ y $x=2a$, es decir, que la curva pasa por S en que $x=o$, y por s en que $x=Ss=2a$.

378 Tambien se verificará de otra qualquier ordenada $M'P'$ (T), cuya abscísa SP'

sea X, $YY=\frac{bb}{aa}\times(aa-XX)$: de consiguiente, será $yy:YY::\frac{bb}{aa}(aa-xx):\frac{bb}{aa}\times(aa-XX)::aa-xx:aa-XX$, ó $(PM)^2:(M'P')^2::SP\times Ps:SP'\times P's$ como lo digimos (357). Tambien de $yy=\frac{bb}{aa}\times(aa-xx)$ se saca $yy:aa-xx::bb:aa$; y si en lugar de bb ponemos su igual $aa-cc$, resultará $yy:aa-xx::aa-cc:aa$ ó $(PM)^2:SP\times Ps::SF\times Fs:(SC)^2$.

379 Siendo $Mp=PC=x$, $Cp=PM=y$, y de consiguiente $bp=y+b$, y $Bp=b-y$; será la equacion al ege menor de la elipse despejando xx en $y^2=bb-\frac{bbxx}{aa}$ (376), $xx=aa-\frac{aayy}{bb}=\frac{aa}{bb}\times(bb-yy)$, la misma respectivamente que la del ege mayor, y de la que se deducen las mismas consecuencias que de aquella.

380 Trazado un círculo sobre el ege mayor Ss (fig. 161) si en la proporcion $(PM)^2:SP\times Ps::(BC)^2:(SC)^2$ (378), ponemos en lugar de $SP\times Ps$ su igual $(PH)^2$ (136); tendremos $(PM)^2:(PH)^2::(BC)^2:(SC)^2$, y $PM:PH::BC:SC$, ó las ordenadas del ege mayor á las ordenadas de su círculo, como el ege menor al mayor: luego *todas las ordenadas de la elipse, esto es, su superficie es á la de dicho círculo, como el ege menor es al mayor*. Del mis-

mo modo se prueba que *la superficie de la elipse es á la del círculo trazado sobre el ege menor, como el ege mayor es al menor.* Suponiendo $1:c$ la razon del diámetro á la circunferencia, será aac la superficie del círculo $SAsa$, y abc la de la elipse, haciendo $a:b::aac:abc$, la qual *es igual á la de un círculo cuyo diámetro es* $\sqrt{4ab}$, *esto es, medio proporcional entre sus eges.* Esto prueba que el circulo es una elipse de eges iguales con los focus en el centro, y el diámetro por parametro. Con efecto, qualquiera de las suposiciones $2b = 2a$, $SF = \frac{1}{2}a$ ó $p = 2a$ convierte las equaciones halladas en las del círculo $y^2 = 2ax - xx$, $y^2 = aa - xx$ (348).

381 Llamaremos *parámetro* p del 1.er ege una tercera proporcional á él y al 2.º ege; de suerte que sea $2a:2b::2b:p = \frac{4b^2}{2a}$: este siempre es igual á la nn' doble ordenada al focus (fig. 160); pues como la abscisa $CF = c$, si en $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$, ponemos c en lugar de x, y despues $aa - bb$ en lugar de cc, tendremos $(nF)^2 = \frac{b^4}{aa}$, $nF = \frac{bb}{a}$ y $nn' = \frac{2bb}{a} = \frac{4bb}{2a} = p$. Atendiendo á la analogía de las equaciones del ege mayor y menor, será el parámetro de este $q = \frac{4aa}{2b}$: de suerte que sea $2b:2a::2a:q$.

382 De $p = \frac{2bb}{a}$ se saca $bb = \frac{ap}{2}$: póngase este valor en lugar de bb en las equaciones al 1.r ege, y las reducirá á estas $yy = \frac{p}{2a}(2ax - xx)$, $yy = \frac{p}{2a}(aa - xx)$ que son las del parámetro del 1.r ege. Del mismo modo se reduce la del 2.º ege $xx = \frac{aa}{bb}(bb - yy)$ á $xx = \frac{q}{2b}(bb - yy)$. De las de ambos eges se saca $yy:aa - xx::p:2a$, $xx:bb - yy::q:2b$, ó el *cuadrado de la ordenada al producto de sus abscisas, como el parámetro á su ege.*

383 *Para tirar una tangente á la elipse en un punto* M; se alarga la fM hasta que sea MH = MF, ó fH = Ss, se tira la HF; y la perpendicular TX que la divide por medio, es la tangente al punto M, el único en que toca la curva: pues si qualquier otro O perteneciese á ella, las OF y Of serian iguales (373) á FM + fM ó á fH, lo que es falso; por ser OF + Of ó OH + Of mayores que fH. El ángulo XMf es igual á TMF, por ser TMF = HMK, y este á su vertical XMf.

384 Tirada la normal MR (fig. 161), si de los ángulos rectos XMR, RMT se quitan los iguales XMf, TMF (383), resultan iguales los ángulos RMf, RMF, y será (122) fM:MF::fR:RF, ó (177 *t*. I.) fM + MF $(2a)$:

$\mathrm{MF}\left(a-\frac{cx}{a}\right)$ (376)::fR+RF(2c): RF$=c-\frac{ccx}{aa}=c-x+\frac{bbx}{aa}$, poniendo $aa-bb$ en lugar de cc: *luego la subnormal* PR$=$FR+FP$=$ $c-x+\frac{bbx}{aa}+x-c=\frac{bbx}{aa}=\frac{px}{2a}$ (382). Si contando las abscisas desde el vértice se supone SP$=u$, será $x=a-u$, y poniendo este valor en lugar de x; será PR$=\frac{bb}{a}-\frac{bbu}{aa}=\frac{1}{2}p-\frac{pu}{2a}$.

385 En el triángulo rectángulo RMT se tiene (136) la subtangente PT$=\frac{(\mathrm{PM})^2}{\mathrm{PR}}=\frac{\frac{bb}{aa}(aa-xx)}{\frac{bb}{aa}x}=\frac{aa-xx}{x}=\frac{2au-uu}{a-u}$, poniendo por x, $a-u$. De consiguiente CT$=$CP+PT$=x+\frac{aa-xx}{x}=\frac{aa}{x}$, sT$=CT-Cs$$=\frac{aa}{x}-a=\frac{aa-ax}{x}$. De CT$=\frac{aa}{x}$ se saca x:a:: a:CT, ó ÷CP:Cs:CT, por donde se podrá determinar el punto T de la tangente TM.

Ultimamente, la espresion de la normal se saca del triángulo rectángulo MRP en el que MR$=\sqrt{\left(yy+\frac{b^4xx}{a^4}\right)}=\sqrt{\left(bb-\frac{bbxx}{a^4}(aa-bb)\right)}=b\sqrt{\left(1-\frac{ccxx}{a^4}\right)}$; y la de la tangente TM del triángulo MPT tambien rectángulo.

386 *Diámetro* de la elipse es una recta MN (fig. 160) que pasa por el centro, y se termina por ambos cabos en la curva: y *diámetro conjugado* al MN la RZ paralela à TM tangente al punto M de MN: las LQ paralelas á la tangente TM, son sus ordenadas y NQ, QM abscisas: y parámetro de qualquier diámetro una tercera proporcional á dicho diámetro y à su conjugado.

387 *El triángulo* tmP (fig. 162) *formado por la tangente, subtangente y ordenada de una elipse, es igual al trapecio* Pmks *que forman la ordenada, la tangente al vértice y una recta que pasa por el centro y el punto* K. Porque en los triángulos semejantes CPm, Csk, es Pm:sk::CP:Cs::Cs:Ct (385): luego Cs:Ct::Pm:sk, y Cs×sk=Pm×Ct, $\frac{1}{2}$(Cs×sk)$=$ $\frac{1}{2}$(Pm×Ct) superficies iguales de los triángulos Cmt, Csk: quitese de àmbos la parte comun PmC, y resultará tmP$=$Pmks.

388 De aquí se infiere, que *el triàngulo* qlr *que forman* lq *ordenada al ege*, ol *ordenada al diámetro* Mm *terminada en el ege, y su parte* qr *comprendida, es siempre igual al trapecio* hqsk *correspondiente*; pues sacandose de los triángulos semejantes Pmt, qlr, Pmt: qlr::(Pm)^2:(ql)^2 (200):: (Cs)$^2-$(CP)^2: (Cs)$^2-$

$(Cq)^2$ (378):: $Pmks$: $qhks$ diferencia de los triángulos semejantes Cks, CPm; Cks, Cqh que están en la misma razon que las diferencias de los cuadrados de sus lados homólogos Cs, CP, Cq; será $Pmt:qlr::Pmks:qhks$: y como $Pmt=Pmks$ (387), tendremos tambien $qlr=skhq=qhmt$ quitando $Pmks$ y añadiendo su igual Pmt. De consiguiente el triángulo loh será igual al trapecio correspondiente $mort$; pues si de $qlr=qhmt$ se quita $qhor$ comun, queda $loh=mort$. Tambien será $CND=Cmt$; pues quando lr se concibe bajar paralelamente á ser CN, la lh que se ha de terminar en el diámetro mM alargado si es menester, vendrá á ser ND: y siendo $CND=Cnd$ por la simetría de la elipse cuyos puntos M, m, N, n deben estar semejantemente situados; será $Cnd=Cmt$.

389 Esto supuesto, en los triángulos semejantes Cmt, Cor se tiene (200) $(Cm)^2$: $(Co)^2$::Cmt: Cor, y (177 *t.I.*) $(Cm)^2-(Co)^2$: $(Cm)^2$::$Cmt-Cor=mort$:Cmt::loh:Cdn(388):: $(lo)^2$: $(Cn)^2$ en los triángulos Cdn, loh semejantes por la igualdad de los ángulos alternos h, d que forman las paralelas lq, nd; y de l igual á su alterno $lQC=dnC$: luego $(Cm)^2-(Co)^2$: $(Cm)^2$:: $(lo)^2$: $(Cn)^2$: es decir, llamando á Mm, $2a$; Nn, $2b$; lo, y; Co, x; $aa-xx:aa::yy:bb$; y de consiguiente, $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}$, equacion á las ordenadas de los diámetros del todo semejantes á la de los eges; y de la que como de estas, se saca tambien que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales: que los diámetros dividen sus ordenadas y la elipse por medio: que $CM=Cm$, $CN=Cn$ &c.

390 *Si se bajan al ege* Ss *las ordenadas* mP, nz, *de los estremos* m, n *de los diámetros conjugados* Mm, Nn, *el cuadrado de* Cz *comprendido entre el centro y una de ellas* nz, *es igual al producto de las abscisas* PS×Ps *de la otra* mP, *ó* $(Cz)^2=PS\times Ps$. Haciendo $mP=y$, y $sP=x$, $Sz=z$, $Ss=2a$, $Bb=2b$; en los triángulos semejantes tPm, Cnz se tiene $(Cz)^2$: $(Pt)^2$::$(mP)^2$:$(nz)^2$:: $PS\times Ps$:$zS\times zs$ (378), esto es, $PS\times Ps$ $(aa-xx)$: $zS\times zs(aa-zz)$:: $(PT)^2$ $\frac{aa-xx}{xx}$ (384):$(nz)^2(zz)=\frac{(aa-zz)\,(aa-xx)^2)}{xx(aa-xx)}$: de donde se saca $zz=aa-xx$, ó $(Cz)^2=PS\times Ps$.

391 Del mismo modo se hubiera sacado $(CP)^2=zS\times zs$, y de consiguiente si en lugar de $aa:bb::zS\times zs$: $(nz)^2$ (378), ponemos $aa:bb::(CP)^2(xx):(nz)^2=\frac{bbxx}{aa}$; tendrémos $(Cn)^2=(Cz)^2+(nz)^2=aa-xx+\frac{bbxx}{aa}$; y como tambien $(Cm)^2=(CP)^2+(Pm)^2=xx+bb-\frac{bbxx}{aa}$, sacarémos sumando y reduciendo, $(Cm)^2+(Cn)^2=aa+bb$, *ó la suma de*

los cuadrados de los diámetros igual á la de los eges.

392 Siendo $nz=u$; $Sz=z$; será $uu=\frac{bb}{aa}(aa-zz)$ (376), y $\frac{aauu}{bb}=aa-zz$: y como $aa-zz=(CP)^2=xx$(390); será $\frac{aauu}{bb}=xx$, y $aauu=bbxx$ ó $au=bx$. Tirese ahora la CH perpendicular à Tl, y en los triángulos semejantes Czn, CtH donde $Cz:zn(u)::Ct\left(\frac{aa}{x}\right)$ (385):CH, será $Cz\times CH=\frac{u\times aa}{x}$, ó poniendo bx en lugar de au, $Cz\times CH=ab$; es decir, *que es igual el paralelogramo formado de los semieges á el de los semidiámetros, y de consiguiente el de los eges á el de los diámetros.*

393 Quando z cae en P, es $y=u$, $z=x$, y $zz=aa-xx$ viene á ser $xx=aa-xx$, ó $xx=\frac{1}{2}aa=a\times\frac{1}{2}a$: que da $a:x::x:\frac{1}{2}a$: luego si se toma CP media proporcional entre a y $\frac{1}{2}a$, y se tira por P una doble ordenada, determinará esta dos puntos por los quales y el centro se pueden tirar dos diámetros iguales: pues sus mitades serán hipotenusas de los triangulos iguales CPm, CPn: y como à cada lado solo en un punto se verifica la anterior proporcion, y uno y otro dan unos mismos

diámetros; no habrá en la elipse mas que dos diámetros iguales.

394 *Si dado uno de los eges y su parámetro, se pidiese trazar la elipse*; se buscará una media proporcional entre los dos datos que será el otro ege (381), y se hará lo que dejamos dicho (373). Pero si se diesen dos diámetros conjugados Ss, Bb (fig. 163) que formen qualquier ángulo; se tomaran sobre la mitad CB de uno de ellos las partes iguales CE, EE′ &c. y tiradas las perpendiculares CD, ED′ &c. que encuentren la circunferencia de un círculo descrito desde C con el radio CB; se tirará SB, y por E su paralela EP: tomense hácia s y S partes iguales à CP, y tirando despues por los puntos P, las PM iguales cada una à su correspondiente ED′, quedarán determinados los puntos M por donde se ha de trazar la elipse, determinando los demas m, haciendo $Pm=PM$. Efectivamente, en los triángulos semejantes CSB, CPE se tiene $CS(a):CB(b)::(CP)(x):CE=\frac{bx}{a}$; y en el triángulo rectángulo CED′ es $(ED')^2=(PM)^2=(CD')^2-(CE)^2$, esto es, $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}$, equacion á la elipse, á la que pertenecerán los puntos M, m.

Hipérbola.

395 Es propiedad constante de esta curva que la diferencia entre las rectas FM, fM'

(fig. 164) tiradas desde qualquiera de sus puntos M' á los dos f, F que son los *focus*, es siempre igual á su *primer ege* Ss: de consiguiente si habiendo fijado en f una regla $fM'O$ mobil al rededor de dicho punto, y en su estremo O el de un hilo atado por el otro cabo en F, se voltea la regla al rededor de f, llevando la parte $M'O$ del hilo unida à ella y tirante todo el hilo con un lapiz M'; señalará este la porcion SH de una hipérbola; pues la diferencia entre todas las fM', FM' será siempre igual á la que hay entre el hilo y la regla, y se ve que en el punto S esta diferencia es Ss. La otra mitad SG de la curva se describe volviendo la regla hácia aquel lado: y para trazar la hipérbola gsh opuesta, se truecan las posiciones fijando la regla en F. El hilo ha de ser siempre desigual con la regla; pues si no, saldrian todos los puntos M' igualmente distantes de F y f; por ser $OM'f = OM'F$, y $Mf = M'F$ quitando CM' comun, y trazaria el lapiz una línea recta.

396 *Segundo ege* de la hipérbola es una línea Bb perpendicular al primero Ss, cuya mitad CB es lado de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa SB es igual à CF, y el otro lado CS es la mitad de Ss: las perpendiculares PM, MQ al 1º y 2º eges son sus ordenadas, CQ, y SP, sP son las abscisas. las fM, FM' son los *radios vectores*. TM (fig

165) es una *tangente*, PT la *subtangente*, MR y PR la *normal* y *subnormal* correspondientes al punto M. Ultimamente, la recta MCM' (fig. 170) que pasando por el centro C corta las hipérbolas opuestas, se llama *diámetro*, y su *conjugado* será la DCd paralela á la tangente Tt al punto M del 1.r diámetro, cuyas coordenadas son mQ y CQ.

397 Esto supuesto, si se hace $Ss = 2a$, (fig. 164) $Bb = 2b$, $CF = Cf = c$; $CP = x$, y $PM = y$; será $SP = CP - CS = x - a$, $sP = sC + CP = x + a$, y $SP \times sP = (x - a)(x + a) = xx - aa$. Tambien será $PF = CP - CF = x - c$, $Pf = PC + Cf = x + c$, y $PF \times Pf = xx - cc$: y en el triángulo rectángulo CSB tendremos $(BS)^2$ ó (396) $(CF)^2 = (BC)^2 + (CS)^2$ ó $cc = aa + bb$, y $bb = cc - aa = (c + a)(c - a)$: de donde se saca $c - a : b :: b : c + a$ ó $\div SF : CB : sF$; esto es, *el semiege menor medio proporcional entre las distancias de uno de los focus á los vértices.*

398 Tomese ahora $PR = FP$ y tirada la MR, se tendrá en el triángulo fMR (283) $fM - MR(2a) : fP - PR(2c) :: fR(2x) : fM + FM = \frac{2cx}{a}$. De esta suma y de la diferencia $fM - FM = 2a$, se sacará (238 I. t.) $fM = \frac{cx}{a} + a$, y $FM = \frac{cx}{a} - a$, y en el triángulo rectángulo PMF, en el que $(PM)^2 = (FM)^2 - (PF)^2$, será $yy = \frac{ccxx}{aa} - 2cx + aa -$

$xx+2cx-cc$, poniendo $aa+bb$ en lugar de cc (397): y reduciendo, $yy=\frac{bbxx}{aa}-bb=\frac{bb}{aa}(xx-aa)$, equacion à la hipérbola, diferente de la de la elipse en solos los signos(376). Si poniendo en S el orígen de las abscisas, hacemos $SP=x$, $SF=sf=c$; será $SP\times Ps=x(2a+x)=2ax+xx$: pongase este producto en lugar de $xx-aa$ en la equacion anterior, y se convertirá en $yy=\frac{bb}{aa}(2ax+xx)$.

399 De $yy=\frac{bb}{aa}(xx-aa)$ se saca $y=\frac{bb}{a}\times\sqrt{(xx-aa)}$; de consiguiente, à cada abscisa CP corresponderán dos ordenadas iguales PM positiva y Pm negativa, que van siendo mayores à proporcion que es mayor x; de suerte que tendrá la curva dos ramos iguales é infinitos. Si se supone en dicha equacion $y=o$, resulta $x=\pm a=CS=Cs$, es decir, que la curva pasa por S y s: de suerte que tomando à x menor que a, saldrá imaginária la cantidad $\pm\frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}$, ò no habrá curva entre S y s: pero si tomamos à x negativa y mayor que a, resultarán dos valores positivos de y à cada valor de x, y comenzará en s otra curva opuesta é igual à la primera; pues

tomando $CP=CP'$, será $PS\times P's=P'S\times P's$, y de consiguiente $PM=P'm$. Ultimamente, dando diferentes valores à x podremos determinar por medio de los que resulten de y, diferentes puntos M de la hipérbola que será facil trazar por ellos.

400 Comparando las equaciones de dos diferentes ordenadas Y, y del 1.r ege, cuyas abscisas sean X, x, tendrémos $YY:yy::\frac{bb}{aa}(xx-aa):\frac{bb}{aa}(XX-aa)::xx-aa:XX-aa$, y *los cuadrados de las ordenadas serán como el producto de sus abscisas* segun lo demostramos (358). De $yy=\frac{bb}{aa}(xx-aa)$ se saca $yy:xx-aa::bb:aa$, y poniendo $cc-aa$ en lugar de bb(397); $yy:xx-aa::cc-aa:aa$, ó que *el cuadrado de una ordenada es al producto de sus abscisas, como el producto de las distancias de uno de los focus á los estremos del ege, es al cuadrado de la mitad de dicho ege.*

401 Pues que la abscisa $CP=x$ es igual à la ordenada MQ del 2.º ege y su abscisa CQ igual à la ordenada $PM=y$, con despejar xx en la equacion $yy=\frac{xx}{aa}-bb$; tendrémos la del 2.º ege $xx=\frac{aayy}{bb}+aa$: de la qual se saca $xx:yy+bb::aa:bb::4aa:4bb$, es

decír que *el cuadrado* $(MQ)^2$ *de una ordenada del* 2º *ege es à la suma de los cuadrados* $(QC)^2+(Cb)^2$, *como el cuadrado del* 1.r *ege al del* 2º Tambien se ve que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales una positiva y otra negativa &c.

402 Si hacemos $2a:2b::2b:p=\frac{2bb}{a}$, tendrémos el parámetro del 1.r ege que es una tercera proporcional á dicho ege y al 2º, y es igual á la doble ordenada Nn que pasa por el focus; pues si en $yy=\frac{bbxx}{aa}-bb$ ponemos c en lugar de x, y en el resultado sustituimos $aa+bb$ á cc (397); tendrémos $yy=(NF)^2=\frac{b^4}{aa}$, $NF=\frac{bb}{a}$, y $Nn=\frac{2bb}{a}$. De $p=\frac{2bb}{a}$ se saca $bb=\frac{ap}{2}$, y este valor puesto en lugar de bb en las equaciones del 1.r ege las convierte en estas $yy=\frac{p}{2a}(2ax+xx)=px+\frac{pxx}{2a}$, $yy=\frac{p}{2a}(xx-aa)=\frac{pxx}{2a}-\frac{pa}{2}$ que son las del parámetro del 1.r ege, y de las que se infiere que $yy:xx-aa::p:2a$ ó *el cuadrado de una ordenada al* 1.r *ege, es al producto de sus abscisas, como su parámetro á dicho ege.*

403 Tambien $q=\frac{2aa}{b}$ es el parámetro del 2º ege, tercera proporcional à él y al 1º

y su equacion, poniendo $\frac{bq}{2}$ por aa en $xx=\frac{aayy}{bb}+aa$, es $xx=\frac{qyy}{2b}+\frac{bq}{2}=\frac{q}{2b}(yy+bb)$: de la que se saca $xx:yy+bb::q:2b$, es decir, que *el cuadrado de una ordenada al* 2º *ege es à la suma de los cuadrados* $(CQ)^2+(Cb)^2$, *como su parámetro à dicho ege.*

404 Si tiradas las FM, fM (fig. 165) à los focus, se toma $MH=MF$, y sobre FH se levanta la perpendicular Td, será tangente à la hipérbola en M: pues si de qualquier otro punto m de la MT, se tiran las mH, mf, mF, $mf-mF=mf-MH$ es mayor que $Mf-MF=fH$; siendo $mH+Hf$ mayor que mf: luego el punto m no pertenece à la hipérbola (395); y lo mismo se probará de qualquier otro que no sea M. Como los ángulos FMT, TMf son iguales, y $TMf=NMm$, seràn FMT y NMm tambien iguales.

405 En el triángulo fMF se tiene (122) $fM:MF::fT:TF$, y $fM+MF\left(\frac{2cx}{a}\right):Mf\left(a+\frac{cx}{a}\right)(398)::fT+TF(2c):fT=\frac{aa}{x}+c$: luego $fT-Cf=CT=\frac{aa}{x}$: y será $CP(x):CS(a)::Cs(a):CT\left(\frac{aa}{x}\right)$, proporcion que determinará el punto T de la tangente: y como al

paso que crece x, disminuye $\frac{aa}{x}$ ó CT; pasarán todas las tangentes á la hipérbola por los puntos T situados entre C y S, hasta que suponiendo x infinita, $\frac{aa}{x}$ ó CT se reduzca á cero, y el punto T se confunda con C.

406 Será pues 1º la subtangente $PT = CP - CT = x - \frac{aa}{x} = \frac{xx-aa}{x}$. 2º En el triángulo rectángulo TPM la tangente $TM = \sqrt{((PM)^2 + (PT)^2)} = \sqrt{\left(\frac{bb}{aa}(xx-aa) + \left(\frac{xx-aa}{x}\right)^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{bbxx}{aa} + xx - aa\right) \times \frac{xx-aa}{xx}}$

3º La subnormal $PR = \frac{(PM)^2}{PT} = \frac{\frac{bb}{aa}(xx-aa)}{\frac{xx-aa}{x}} = \frac{bbxx}{aa} = \frac{px}{2a}$, ó $\frac{1}{2}p + \frac{pu}{2a}$, haciendo $SP = u = x - a$.

4.º Ultimamente, en el triángulo rectángulo MRP la normal $MR = \sqrt{((PM)^2 + (PR)^2)} = \sqrt{\left(\frac{b4xx}{a4} + \frac{bb}{aa}(xx-aa)\right)}$.

407 *Si del centro de la elipse ó de la hipérbola se tira la* CK (fig. 166 y 167), *será igual á* a; pues siendo CF=Cf, y FK=KH, será Ff: FC:: fH: CK: y así como $CF = \frac{1}{2}fF$, será $CK = \frac{1}{2}fH = \frac{1}{2}(fm \pm mF) = a$. De consiguiente, 1.º descrito un círculo desde C con el radio $CS = a$, terminarán en su circunferencia las perpendiculares FK, *fd* tiradas de los focus sobre la tangente alargada si es menester: porque siendo recto el ángulo K*d*D, y estando K en dicha circunferencia; estará tambien el punto D de la DK que debe ser diámetro (69).

408 2.º *El producto* fd×FK *de dichas perpendiculares bajadas de los focus á la tangente, es siempre igual á* bb *cuadrado del semiege menor*; pues siendo FK=KH=fD por razon de las paralelas DK, *f*H; tendrémos (142) $fd \times fD = fd \times HK = fs \times fS = aa - cc = bb$ (375) en la elipse: y en la hipérbola por razon de las secantes (143), $fd \times FD = fd \times FK = fs \times fS = cc - aa = bb$ (397).

409 3.º *Las perpendiculares* FK *bajadas del focus* F *á la tangente en diferentes puntos* m *de la elipse y de la hipérbola, crecen mas que las raices de los radios vectores en la elipse, y ménos en la hipérbola*: pues en los triángulos *fmd*, F*m*K semejantes por las paralelas y los ángulos en *d* y K rectos, se tiene $fm : fd :: Fm : FK = \frac{fd + Fm}{fm}$, y multiplicando por FK, $(FK)^2 = FK \times fd \times \frac{Fm}{fm} = bb \times \frac{Fm}{fm}$. Si llamamos P, *p* dos perpendiculares FK, FK′,

y R, r; R′, r' sus radios vectores FM, fm; FM′, fm'; tendrémos $PP:pp::bb\times\frac{R}{r}:bb\times\frac{R'}{r'}::\frac{R}{r}:\frac{R'}{r'}$, y $P:p::\sqrt{\frac{R}{r}}:\sqrt{\frac{R'}{r'}}$. Y como la elipse en la que $R+r=2a$, disminuye r aumentando R, crecerá la razon de las fracciones $\frac{R}{r}:\frac{R'}{r'}$ mas, que si siendo constante r, aumentase R: y al contrario, en la hipérbola en donde $r-R=2a$, r aumenta creciendo R; será menor dicha relacion de $\frac{R}{r}:\frac{R'}{r'}$ luego &c.

410 Tirada Sd (fig. 165) paralela à MP, los triángulos semejantes TSd, TMP dan $TP:PM::TS=CS-CT:Sd$, ó $\frac{xx-aa}{x}:\ldots\ldots\frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}::a-\frac{aa}{x}:Sd=\frac{b\sqrt{(xx-aa)}}{x+a}=b\sqrt{\frac{(x+a)(x-a)}{(x+a)(x+a)}}=b\sqrt{\frac{(x-a)}{(x+a)}}$. Esta espresion se reduce à $Sd=b$ quando x es infinita, en cuyo caso se desprecian como demostrarémos despues (442), a y $-a$: y de consiguiente si tomando $Sa=SA=b$, se tiran por A, a y C las LK, lk; serán tangentes de la hipérbola à una distancia infinita (405), y se llaman sus *asíntotas*: las quales se van acercando à la curva sin llegar à tocarla. Sus ordenadas à

la asíntota lk son las Mm (fig. 168) paralelas à la otra asíntota LK, y sus abscisas Cm.

411 *Si se alarga una ordenada* PM *hasta las asíntotas, será siempre* $Mn\times MN=bb=(Sd)^2$ ó $\div Mn:Sd:MN$; pues sacándose de los triángulos semejantes CSd, CPn, $CS:Sd::CP:Pn$, ó $a:b::x:Pn=\frac{bx}{a}$; será $Mn=Pn-PM=\frac{bx}{a}-y$, $MN=PN+PM=\frac{bx}{a}+y$; y $Mn\times MN=\frac{bbxx}{aa}-yy$: pongase $\frac{bb}{aa}\times\ldots\ldots(xx-aa)$ en lugar de yy, y saldrá reduciendo, $Mn\times MN=bb$. Siendo $Pn=\frac{bx}{a}$, $(Pn)^2=\frac{bbxx}{aa}$, y la correspondiente $(PM)^2=\frac{bbxx}{aa}-bb$; es claro que ningun punto de la hipérbola podrá encontrar el correspondiente n de la asíntota: y como $Mn\times MN=bb$ ó $Mn=\frac{bb}{MN}$, miéntras mayor sea MN, será menor $\frac{bb}{MN}$ ó Mn, que irá disminuyendo hasta el infinito: es decir, la asíntota se acercará mas y mas à la curva sin jamas encontrarla.

412 Del mismo modo que acabamos de decir se demuestra que $Qx\times xq=bb=Mn\times MN$: de consiguiente *si se tiran dos ó mas paralelas* Hh, Ep *terminadas en las asínto-*

tas, y que corten la hipérbola en x, c, e, r, *se tendrá* $Hx \times hx = Er \times rp$: pues suponiendo tiradas las Nn, Qq perpendiculares à SP', en los triángulos HxQ, NrE, hxq, rnp semejantes à causa de las paralelas Nn, Qq; se tendrá $Hx:Er::Qx:Nr$; y $xh:rp::xq:rn$, donde multiplicando ambas proporciones, resulta $Hx \times xh : Er \times rp :: Qx \times xq : Nr \times rn$: luego $Hx \times xh = Er \times rp$, así como $Qx \times xq = Nr \times rn$: por la misma razon $ep \times Ee = ch \times cH$.

413 Si se mueve la Ep paralelamente hasta confundirse con la Tt tangente à la curva en el punto R, en el que concurren los dos r, e; se verificará como ántes $Hx \times xh = RT \times Rt$, como tambien $ch \times cH = Rt \times RT$: luego $Hx \times xh = ch \times cH$, esto es, $Hx(xc+ch) = ch(xc+xH)$, que se reduce quitando $Hx \times ch$ comun, à $Hx = ch$, y de consiguiente $Rt = RT$, es decir, *que son iguales las partes de qualesquiera rectas comprendidas entre la curva y las asíntotas.*

414 Luego 1º si dada la ordenada RO, se toma $OT = OC$, la Tt tirada por T y R; será la tangente correspondiente á RO: pues siendo en los triángulos semejantes TOR TCt, $Tt:TR::TC:TO$; será $TR = Rt$ como $TO = OC$. 2º El producto $MM' \times Mh$ de las ordenadas paralelas al 1.er ege es aa: pues en los triángulos semejantes Mhn, $MM'N$, CSD, $Mh:CS::Mn:SD$, y $MM':CS::MN:SD$; luego

$Mh \times MM' : (CS)^2 (aa) :: Mn \times MN (bb) : (SD)^2 (bb)$: y $Mh \times MM' = (CS)^2 = aa$. 3º Ultimamente, *para trazar una hipérbola entre las asíntotas* CI, CL *que pase por un punto dado* x; se tirarán por él las Hh, Qq &c. y tomando $ch = Hx$, $vq = xQ$ &c. pertenecerán à la hipérbola los puntos c, v &c.

415 Tiradas Sg y Mm paralelas à LK, y ZM paralela é igual à Cm, y llamando m la $Sg = AC$; Cm, x, y Mm, y; se tendrá en los triángulos semejantes Mnm, Sdg, ZMN, $Sd:Sg::Mn:Mm$, y $Sd:gd::MN:MZ$: y multiplicando estas proporciones $(Sd)^2 : Sg \times gd :: Mn \times MN : Mm \times MZ$; ó por ser $gd = Sg$ en el triángulo isósceles Sgd, $(Sd)^2 (bb) : (Sg)^2 (mm) :: Mn \times MN (bb) : Mm \times MZ (xy)$: luego $bb \times xy = mm \times bb$, y $xy = mm$, equacion à la hipérbola entre las asíntotas, en la que por ser $y = \frac{mm}{x}$, irá y menguando hasta el infinito, à proporcion que crezca x, y la asíntota nunca tocará á la hipérbola. Si suponemos otra ordenada $Y = \frac{mm}{X}$, tendremos $YX = mm = yx$, y $Y:y::x:X$, ó *las ordenadas á las asíntotas estarán en razon inversa de las abscisas.* El cuadrado mm se llama *potencia de la hipérbola*, y su valor sacado del triángulo rectángulo CSb, donde $(Sg)^2 = \frac{1}{4}((CS)^2 + (Cb)^2)$, es $mm = \frac{aa+bb}{4}$.

416 Estén en proporcion geométrica las abscisas CX, CU, CG, Cc, (fig. 169) y será CU$-$CX:CX::CG $-$CU:CU::$Cc-$CG:CG &c. y como los consecuentes son geométricamente proporcionales, lo serán tambien los antecedentes XU,UG,Gc &c. diferencias de las abscisas. Si los cuadriláteros XKYU, YUGZ &c. se conciben formados de los pequeños rectángulos $UuYy$, $gGZt$ que tienen las ordenadas UY, GZ por altura, y por bases uU,gG, partes semejantes de XU,UG; será uU:gG::XU:UG: y como XU:UG::CX:CU::CU:CG::GZ:YU por estar las ordenadas en razon inversa de las abscisas (415); será uU:gG::GZ:YU, y uU×YU$=g$G×GZ, ó $gGZt=UYyu$. Lo mismo se podrá demostrar de los demas rectángulos que componen los cuadriláteros: luego estos son iguales: y si suponemos que XUYK sea 1, será XGZYK$=$2, XcNZK$=$3 &c. y *creciendo las abscisas en progresion geométrica, estarán los espacios asintóticos en progresion aritmética.*

417 Si se tiran las CK, CY, CZ &c. *los sectores hipérbolicos* CYK,CYZ *son iguales à los cuadriláteros* XUYK,UGZY: pues siendo iguales los triángulos CXK, CUY (199) por tener sus bases en razon inversa de sus alturas; si se quita CoX comun y se añade à los dos residuos oKY, resultará CKY$=$KXUY, y así de los demas: *luego si las abscisas son términos de una progresion geométrica, serán dichos espacios los correspondientes en la aritmética, ó serán sus logarítmos.*

418 Lo primero que hay que saber de los diámetros es *que ambos se dividen por medio en el centro* C (fig. 170): *y que el segundo es igual à la tangente* Tt: pues tiradas las MD, Md, en el paralelogramo DMtC, es DC$=$Mt: luego pues que TM$=$Mt(413); será DC$=$Cd,D$d$$=Tt$. Tomando ahora CP$'$$=$CP, y tirando las MP,M$'P'$, en los triángulos rectángulos iguales CPM, CP$'$M$'$ se tendrá CM$=$CM$'$; luego &c. De consiguiente dados los dos diámetros conjugados MM$'$,Dd, se tendrán las asíntotas, trazando por el centro C las CL, Cl paralelas à las DM, dM tiradas al 2º diámetro Dd desde un estremo M del 1º: y al contrario, dadas las asíntotas CL, Cl y un punto M de la curva, se tendrán los diámetros, tirando MH paralela á Cl, tomando HD$=$HM; y las DC, MC tiradas al centro serán los semidiámetros: pues si se traza MT paralela á DC; serán iguales los triángulos CDH, THM, á causa de las paralelas y de DH$=$HM; luego TM$=$DC: y como TM es tangente por ser TH $=$ HC, será DC el 2.º semiege.

419 Llamemos MM$'$, $2a$; Dd ó Tt, $2b$; la ordenada mQ,y; CQ,x: y será MQ$=x-a$, M$'$Q$=x+a$: y en los triángulos semejantes

CMT, CQN, $CM(a):CQ(x)::MT(b):QN=\frac{bx}{a}$: luego $mN=NQ-QM=\frac{bx}{a}-y$, $mn=NQ+Qn=\frac{bx}{a}+y$, $mN\times mn=\frac{bbxx}{aa}-yy$: y siendo $mN\times mn=bb$ (411); será finalmente $\frac{bbxx}{aa}-yy=bb$, y de consiguiente $yy=\frac{bbxx}{aa}-bb$, equacion á las ordenadas del 1.r diámetro de la hipérbola. La de las ordenadas del 2.o por ser $Cp=mQ=y$, y $CQ=mp=x$; será despejando xx en la anterior, $xx=\frac{aayy}{bb}+aa$. Ambas son en todo semejantes á las de los eges, y de consiguiente podremos de ellas inferir tambien que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales en cada diámetro: que á uno y otro corta la curva en dos puntos: que el cuadrado de la ordenada á un diámetro es al producto de sus abscisas, como el cuadrado de su conjugado al de dicho diámetro: que el parámetro de un diámetro es una tercera proporcional á él y á su conjugado &c. y así de todas las demas propiedades, escepto las de los focus.

420 *Si de los estremos* d, M *de los diámetros* Dd, MM′ *se bajan dos ordenadas* do, MP *al* 1.r ege, *será el cuadrado de* Co *comprendida entre la una* do *y el centro* C *igual*

al producto PS×Ps *de las abscisas de la otra ordenada* MP: *y el cuadrado de* CP *igual á la suma de los cuadrados* $(Co)^2+(Cs)^2$.

Supongamos que sobre Bb alargado se toman $CE'=CE=CF$, y se trazan por B, b dos hipérbolas, cuyos focus sean E, E′ que se llaman *conjugadas* á las primeras: sea $CS=a$, $CB=b$, $CP=x$, $Co=z$; será $oS\times os=aa-zz$, $SP\times sP=xx-aa$. Por la propiedad de la hipérbola (400) $(PM)^2:PS\times Ps::bb:aa::(do)^2:(Cs)^2+(Co)^2$ (401), ó $PS\times Ps:(Cs)^2+(Co)^2::(PM)^2:(do)^2::(PR)^2:(Co)^2$ en los triángulos semejantes Cod, RPM: luego $PS\times Ps\,(xx-aa):(Cs)^2+(Co)^2\,(aa+zz)::(PR)^2\ldots\left(\frac{xx-aa}{xx}\right)^2$ (406)$:(Co)^2(zz)=\frac{(aa+zz)(xx-aa)}{xx(xx-aa)}$; de donde se saca $zz=xx-aa$ ó $(Co)^2=PS\times Ps$, y $xx=zz+aa$ ó $(CP)^2=(Cs)^2+(Co)^2$.

421 Si en la proporcion $(do)^2:(Cs)^2+(Co)^2::bb:aa$ (401), ponemos por $(Cs)^2+(Co)^2$ su igual xx (420); se mudará invirtiéndola, en $aa:bb::xx:(do)^2=\frac{bbxx}{aa}$: de consiguiente será $(Cd)^2=(Co)^2+(do)^2=xx-aa+\frac{bbxx}{aa}$: tambien $(CM)^2=(CP)^2+\ldots\ldots(PM)^2=xx+\frac{bbxx}{aa}-bb$: réstese una equacion de otra, reduzcase y se tendrá $(CM)^2-$

$(Cd)^2 = aa - bb$; y será *la diferencia de los cuadrados de los eges de la hipérbola igual à la de los cuadrados de sus diámetros.*

422 Bajada sobre Tt la perpendicular Ca se saca de los triángulos semejantes CaR, RPM, $RM:PM::CR:Ca = \frac{PM \times CR}{RM}$: tambien $PR:RM::Co:Cd = \frac{RM \times Co}{PR}$ en los triángulos semejantes Cod, RPM: luego $Cd \times Ca = \frac{PM \times CR \times RM \times Co}{RM \times PR} = \frac{PM \times CR \times Co}{PR}$, y $(Cd)^2 \times (Ca)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2 \times Co}{(PR)^2}$: pongase por $(PM)^2$, $\frac{bb}{aa}(xx - aa)$, por $(CR)^2$, $\frac{a^4}{xx}$ (405); $xx - aa$ por $(Co)^2$(420), y $\frac{(xx-aa)^2}{xx}$ en lugar de $(PR)^2$; y resultará despues de reducir, $(Cd^2) \times (Ca)^2 = aabb$, y Cd ó $CD \times Ca = ab$, ó el paralelogramo DTMC de los semidiámetros igual al de los semieges: luego *el paralelogramo formado de los diámetros de la hipérbola es igual al que forman los eges.*

423 Dados los dos diámetros Ss 1º, y Bb 2º (fig. 171) que formen qualquier ángulo, se podrá trazar la hipérbola; tomando sobre el semidiámetro CS alargado qualquier número de partes iguales CE, EE′ &c. tirando por E la EP paralela à SB, tomando en CB y Cb partes iguales à CP, y levantando en C

la CD perpendicular é igual á Cs; pues si por los puntos P se corta cada paralela PM igual a su correspondiente ED; todos los puntos M pertenecerán á la hipérbola: porque siendo $Ss = 2a$, $Bb = 2b$, $CP = y$, $PM = x$; se tendrá en los triángulos semejantes CSB, CEP, CB: CS:: CP:CE, ó $b:a::y$: $CE = \frac{ay}{b}$: y en el triángulo rectángulo ECD donde $(DE)^2$ ó.... $(PM)^2 = (CE)^2 + (CD)^2$; será $xx = \frac{aayy}{bb} + aa$, equacion al 2º diámetro de la hipérbola (401): y verificandose esto en los demas puntos, pertenecerán á la hipérbola.

424 Quando los eges ó diámetros son iguales, se llama la hipérbola *equilátera*; y basta entónces para trazarla, levantar la CR perpendicular é igual à CB; pues tirando por qualquier punto P′ la MP′M′ paralela à Ss, y tomando P′M y P′M′ iguales à P′R, serán M, M puntos de la hipérbola; porque en el triangulo rectángulo CP′R se tiene $(P'R)^2$ ó $(P'M)^2 = (CP')^2 + (CR)^2$, esto es, $xx = yy + aa$. Esta misma es la equacion à los eges, quando son iguales, ó quando la hipérbola es equilátera; en cuyo caso forman las asíntotas con los eges un ángulo de 45°.

425 La equacion $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$ incluye las de la elipse é hipérbola con relacion à su

parámetro, segun se ha visto (382 y 402); y como quando el ege $2a$ es infinito, como sucede en la parábola, dicha equacion se reduce omitiendo $\pm\frac{pxx}{2a}$ que entónces es cero, á $yy=px$ que lo es de la parábola; podremos considerár à $yy=px\pm\frac{pxx}{2a}$ como equacion general de las tres secciones cónicas, contando sus abscisas desde el vértice; en la qual sacando los valores de las diferentes líneas que en ellas hemos calculado, se podrán facilmente comparar, para observar mejor sus relaciones recíprocas.

426 La subnormal por egemplo, segun hemos visto (374 y 406), es $\frac{1}{2}p\pm\frac{px}{2a}$ en la elipse é hipérbola, y $\frac{1}{2}p$ en la parábola (368) en la que $\pm\frac{px}{2a}=0$. Si en $yy=px\pm\frac{pxx}{2a}$ se pone en lugar de y, $\frac{1}{2}p$ ordenada al focus; resulta $\frac{1}{4}pp=px\pm\frac{pxx}{2a}$, y $p=4x\pm\frac{2x^2}{a}$, es decir, que el parámetro es cuadruplo de la distancia del vértice al focus en la parábola, mas que cuadruplo en la hipérbola, y ménos en la elipse &c.

427 Finalmente, *si dada una porcion de seccion cónica, se pidiese quál es de las tres, y la posicion de sus eges*: habiendo tirado den-

tro de ella dos líneas paralelas terminadas por ambos cabos en la curva, y por su mitad una recta; será esta uno de sus diámetros (369, 386 y 396): búsquese del mismo modo otro, y si saliese paralelo al primero; será la curva una parábola, cuyo ege se hallará, tirando por el vértice una paralela à qualquiera de los dos diámetros encontrados. Si el 2º diámetro corta al 1º dentro de la curva, será esta una elipse: y si le corta fuera, una hipérbola. En estos casos si se traza un arco desde el centro de la seccion que corte la curva en dos puntos, y tirando por ellos una recta, se le baja una perpendicular desde dicho centro; será esta uno de los eges, y el otro debe ser una perpendicular al ege encontrado.

428 Por medio de los esponentes indeterminados se representan con una sola equacion infinidad de curvas de diferente órden. Si en el círculo suponemos a el diámetro, y en lugar de $x:y::y:a-x$ (348), hacemos $x^m:y^m::y^n:(a-x)^n$; representará la equacion $y^{m+n}=x^m\times(a-x)^n$ la naturaleza de los círculos de todos géneros; y de ella resultará la del círculo ordinario suponiendo $m=1$, $n=1$. Con otros valores salen diferentes equaciones de curvas que se llaman círculos, por la analogía de su equacion con la del ordinario.

429 Si hacemos en la parábola $p^m:y^m::$

$y^n : x^n$ (357); se tendrá la equacion à las parábolas de diferentes órdenes. Suponiendo a el primer ege de la hipérbola, se tiene $y^2 : x(a+x) :: p : a$ (402): de consiguiente será $y^{m+n} : x^m (a+x)^n :: p : a$, y la equacion $y^{m+n} = \frac{p}{a} \times x^m \times (a+x)^n$, ó $\frac{a}{p} y^{m+n} = x^m (a+x)^n$ la equacion á las hipérbolas de todos géneros: así como $x^m y^m = c^{n+m}$ lo es à las mismas entre las asíntotas; pues sacándose de $xy = c^2$ (415), $y : c :: c : x$; será tambien $y^m : c^m :: c^n : x^n$. (c es la potencia de la hipérbola).

Noticia de algunas Curvas en particular.

430 *Concoide de Nicomédes.* Si por un punto qualquiera B (fig. 193) se tiran à una recta GH líneas BQM, BAD &c. y tomando QM=AD, Qt=Ad; se hace pasar una curva por M, D &c. y otra por m, t, &c. será MDM′ la *concoide superior* y mdm' la *inferior*: El punto B se llama *polo*, y la GH *directriz*. Quando AB es mayor que dA, resulta la figura 193: quando es menor (fig. 194), la curva tiene un nudo en d, y quando es igual (fig. 195) se desvanece el nudo, y queda un punto de retroceso en B.

Por la referida construccion se ve 1º que la curva podrá trazarse por la interseccion

contínua de una regla BDM (fig. 196) movible al rededor de B, y de un círculo de un radio CA, cuyo centro corra la GH con la regla aplicada à dicho centro. Y si al círculo se sustituye una curva qualquiera CM (fig. 197) que se haga mover lo largo de GH junto con la regla fija en un punto B, y aplicado à otro qualquiera del ege que recorra la GH; resultará otra concoide que variará segun las diferentes curvas que se empleen. 2º Que la GH (fig. 193) es asíntota de la concoide: pues debiendo ser cada vez mas oblicuas las MQ, se iran acercando los puntos M à la GH sin que puedan juntarse: porque siempre ha de mediar alguna parte de las tM.

Si se baja la PM perpendicular à AH, y hacemos AD=QM$=a$, AB$=b$, PM$=y$, y AP$=x$; se tendrá en los triángulos PQM, BAQ semejantes PQ:PM::AQ:AB, ó $\sqrt{(a^2-y^2)} : y :: x-\sqrt{(a^2-y^2)} : b$, y $xy = (b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$, equacion à la concoide que será una curva algébrica. El mismo cálculo da $xy = (b-y)\sqrt{(a^2-y^2)}$ por la equacion à la concoide inferior, y una y otra desembarazada del radical es $y^4 \pm 2by^3 + (b^2-a^2+x^2) y^2 \pm 2a^2by = a^2b^2$, equacion algébrica de una línea de 4º órden ó curva de 3º

Finalmente, si tiradas las MP, AB (fig. 197) perpendiculares à la directriz, se supone AP$=x$, PM$=y$, CP$=z$, CQ$=a$,

$AB = b$; será $PQ(z-a):PM(y)::AQ(x+a-z)$: $AB(b)$, y $z = \frac{xy}{b+y} + a$, valor que sustituido en la equacion á la curva CM dará la de la concoide DM. Si se sustituye por egemplo, en $y^2 = 2ax - x^2$, la equacion al círculo cuyo centro es Q; resulta $xy = (b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$, que es la de la concoide ordinaria: y sustituyéndole en $y^2 = px$ equacion á la parábola; se tiene $y^3 + by^2 - apy - abp = px$, que pertenece à la concoide parabólica, que sirvió à Descartes para resolver una equacion de 6º grado.

431 *Cisoide de Diocles.* Si en un círculo cuyo diámetro es Aa (fig. 198), Tt tangente en a, se tiran desde A rectas AF, Af &c. à diferentes puntos de la tangente, y tomando $AN = MF$, $An = mf$ &c. se traza por M, m la curva MAm; se tendrá la *cisoide.* Tirese MI paralela, y MP perpendicular à Aa: hagase $AP = x$, $MP = y$, $Aa = a$: y por ser $AN = MF$; será $AK = Pa = a - x$, y $NK = \sqrt{(ax - x^2)}$ (136): y como en los triángulos semejantes AKN, APM, AK:KN:: AP:PM ó $a - x : \sqrt{(ax - x^2)}::x:y$; será $y = \frac{x\sqrt{(ax-x^2)}}{a-x}$ ó $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ la equacion à la cisoide, línea de 3.er órden, y curva algébrica de 2º

Luego 1º à cada abscisa corresponden

dos ordenadas, una positiva y otra negativa: y de consiguiente tendrá la curva dos ramos iguales é infinitos. 2º Pasará por el orígen A de las abscisas: pues $y = o$ quando $x = o$. 3.º Si $x = \frac{1}{2}a$, $y = \pm\frac{1}{2}a$; es decir que cada ramo corta la circunferencia del círculo en los puntos C, C′ igualmente distantes de A y a 4º Quando $x = a$, $y^2 = \frac{a^3}{o}$, ó y es infinita, y la tangente Tt será asíntota de la curva.

Valiendose en lugar del círculo de la parábola, hipérbola &c. se hubiera sacado la cisoide parábolica, hiperbólica &c. Los àntiguos encontraron por medio de esta curva dos medias proporcionales entre dos líneas dadas.

432 *Quadratriz de Dinostrates.* Si una tangente AT (fig. 199) al quadrante AB se mueve uniforme y paralelamente à si misma hacia C, al mismo tiempo que el radio AC recorre al rededor de C el arco AB; la interseccion de la tangente y el arco formará la curva AMD que se llama *Quadratriz*: en la que en virtud de la construccion qualquier espacio AP corrido por la tangente AT, es al arco AN corrido por el radio AC; como el radio es al quadrante ANB.

Luego si se supone $AP = x$, $PM = y$, $AN = u$, $AC = a$, $ANB = c$; será $x:a::u:c::$ *ángulo* ACN : *ángulo* ACB, ó $u = \frac{cx}{a}$: y como

CP:PM::CA:AT, ó $a-x:y::a:tang.\,u$; se tendrá $y=\frac{a-x}{a}tang.\frac{cx}{a}$ por la equacion á la curva, que es de las trascendentes, y de la que se sirvió su inventor para cuadrar el círculo.

433 *Espiral de Arquimédes.* Se llama así la curva CKMA (fig. 200) descrita por un punto C que se mueve uniformemente por el radio CA, mientras que este hace una revolucion al rededor del centro C; de manera que el punto C llegue á A, quando el radio haya recorrido toda la circunferencia. Si CA alargado repite su revolucion, miéntras C continua su movimiento, describirá una segunda espiral, y podrá trazar otras muchas que serán partes de una curva que se estiende al infinito. De consiguiente, la ordenada CM (y), será al radio CA (a); como el arco AON (x), que es la abscisa correspondiente, á toda la circunferencia AONBA: esto es, $y=\frac{ax}{c}$, equacion á la curva, que tambien es trascendente, y que pasa por el centro del círculo generador y el punto A. Haciendo $x=c+x'$, se mudará la equacion en $y=a+\frac{ax'}{c}$, en la que dando á x' los valores comprendidos entre o y c, resultarán los de la segunda espiral, que terminará en el estremo

de un radio doble de CA: haciendo $x=2c+x''$, se tendrá la de la tercera, y así de las demas.

434 *Espiral parabólica.* Si en un radio qualquiera CN (fig. 201) se toma una parte MN media proporcional entre el arco AN y una recta dada p; la curva que pase por los puntos M así determinados, se llama *espiral parabólica.* Haciendo en ella AN$=x$, CM$=y$, AC$=a$; se tiene $y=a-\sqrt{px}$, equacion à la curva, que espresará sus infinitas revoluciones sustituyéndo en ella en lugar de x; $c+x$, $2c+x$ &c.

435 *Espiral hiperbólica.* Si en una recta indefinida CP (fig. 202) se trazan desde un punto qualquiera C como centro los arcos AG, QM, PO &c. iguales en longitud, y se hace pasar una curva por sus estremos G,M,O &c. será la *espiral hiperbólica*, en la que la recta BH paralela al ege CP, y distante de él en CB$=$AG$=$QM$=$PO &c. será su asíntota; pues no puede encontrarla hasta que CM sea infinito.

Sea CA$=a$, AN$=x$, CM$=y$, AG$=$QM$=$&c. $=b$; tendremos $x:b::a:y$, ó $xy=ab$ equacion á la curva, semejante à la de la hiperbóla entre las asíntotas; y en la que poniendo por x; $c+x$, $2c+x$ &c. resulta $y=\frac{ab}{c+x}$, $y=\frac{ab}{2c+x}$ &c

Luego al paso que crece la abscisa, mengua la ordenada hasta el infinito, y la curva hace infinidad de revoluciones al rededor de su centro ántes de llegar á él.

436 *Logarítmica.* Si de uno y otro lado de la línea indefinida AY (fig. 172) se toman las partes iguales AE, EF &c. AC, CX, XO, y en los puntos O, X C, A se levantan perpendiculares OL, XM′, CN, AB &c. que representen los números de una progresion geométrica; las partes AE, AF, AG &c. estarán en progresion aritmética, y qualquiera de ellas AP será el término aritmético que corresponde al geométrico PM, ó AP será el logarítmo de PM (209 *t.* I.) Hagase ahora pasar una curva por todos los puntos L, M, N, &c. y se tendrá la *logarítmica*, en la que los valores de las ordenadas estan en progresion geométrica, y los de las abscisas en progresion aritmética.

Si suponiendo $AB=1$, hacemos $AP=x$, $PM=y$, m el módulo, y $e=2,7182818$3, número cuyo lagarítmo hiperbólico es 1; tendrémos $x=mly=xle$, (454y458) ó $y^m=e^x$ de donde se saca $y=e^{\frac{x}{m}}$, equacion á la logarítmica, curva trascendente, en la que quando $x=o$, y ó $AB=1$. Si suponemos $AE=1$, será ED ó $y=e^{\frac{1}{m}}$: luego si llamamos ED, a; tendrémos siempre $y=a^x$: y las abscisas formarán la

progresion aritmetica ÷ 1.2.3.4 &c. miéntras que las ordenadas forman la geométrica ∺ $a^1:a^2:a^3:a^4$: &c. Las abscisas negativas AC, AX &c. que son -1, -2 &c. dan las ordenadas $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$ &c. es decir, que la curva tiene una rama infinita BL que se va acercando à la directriz ó ege OY hasta al infinito, ó que OY será asíntota de la curva. La principal propiedad de la logarítmica es que su subtangente es una cantidad constante como probarémos adelante.

437 *Espiral logarítmica.* Si despues de haber determinado un número qualquiera de arcos AD, AG, AH, &c. (fig. 203) que esten en progresion aritmética, se determinan en los radios correspondientes líneas CA, CM, CN &c. en progresion geométrica, la curva que pasa por los puntos A, *M*, N, &c. se llama *logarímica espiral*, la qual forma un mismo ángulo con todos los radios CM tirados desde el centro; igualmente que estos con la tangente y en la que los arcos circulares son logarímos de las ordenadas correspondientes de las curvas. Dichas ordenadas CO, CN &c. disminuyen en progresion geométrica decreciente al infinito, y de consiguiente la curva hace infinitas revoluciones al rededor del centro C, sin jamas llegar á él.

438 *Cicloide.* Si un círculo AG (fig. 204) rueda sobre una recta *Aa* hasta que el punto

A llegue à a; trazara este punto la nueva curva A B a que se llama *cicloide* ó *trocoide*, qual la describe el clavo de una rueda à cada revolucion. Si ademas del de rotacion, hubiese movimiento de traslacion hácia una misma parte, resulta una cicloide menguada(fig. 205), y si la traslacion fuese en sentido contrario à la rotacion, será la cicloide alongada (fig. 206).

Por la descripcion de la curva se ve que en la ordinaria la base Aa es igual à la circunferencia del círculo generador, menor en la menguada, y mayor en la alongada. El diámetro BC es el ege de la curva quando es perpendicular à la base, y el punto B su vértice.

Tirada MP perpendicular à BC, y las cuerdas iguales MF, OC; será FC$=$MO: y pues que FC$=$AC$-$AF$=$BOC$-$FKM$=$BOC$-$OLC$=$BIO; es claro que la parte MO de la ordenada MP es siempre igual al arco correspondiente BIO del círculo generador: y como la parte restante OP es seno de dicho arco; si llamamos MP, y; BIO, u; será la equacion à la cicloide ordinaria $y=u+sen\, u$: y suponiendo MO$=\frac{a}{b}$BIO que comprende las tres cicloides, segun que b es igual, mayor ò menor que a; se tendrá $y=\frac{b}{a}u+sen\, u$ por la equacion general à las tres, que como se ve, son curvas trascendentes. Quando el punto A se toma dentro ò fuera del círculo, describe otra especie de cicloide: y si en vez de línea recta, se hace rodar el círculo sobre otra curva; resultan otras del género de las *epicicloides*.

439 Finalmente, se llaman curvas *esponenciales* aquellas en cuya equacion entra algun esponente variable, como $ay=x^x$, el producto de la ordenada y por la constante a, que se puede suponer igual á 1, seria proporcional á la abscisa x elevada à la potencia x. Suponiendo $a=1$, y $x=2$, seria $y=x^2=4$: si $x=3$, $y=3^3=27$ &c. es decir, que si à à la ordena y corresponde la abscisa 2, y à la ordenada y' la abscisa $x=3$; se tendrá $y:y'::4:27$: y las y aumentarán ò disminuirán en la misma relacion que las x^x correspondientes.

Es muy frecuente y universal el uso que en las ciencias y las artes se hace de las curvas, en especial de las secciones cónicas. Sus propiedades sirven en la proyeccion de las bombas, escabacion de minas, en la construccion de las bóvedas, de las bocinas acústicas, espejos ustorios, telescopios &c. Los planetas se mueven en elipses cuyo focus ocupa el sol: y las orbitas de los cometas se confunden sensiblemente con parábolas en los puntos de sus trayectorias en que se observan. La cicloide ha servido para arreglar los reloxes de péndola &c.

440 El objeto de este càlculo es considerar la relacion entre los incrementos ó decrementos que sobrevienen á qualesquiera cantidades variables, para llegar à cierto estado: dichos aumentos ò decrementos que son partes infinitamente pequeñas ò *elementos* de las cantidades, pueden mirarse bajo de dos aspectos diferentes, que dividen en dos ramos el cálculo infinitesimal: en el uno que se llama *cálculo diferencial* ò *de las fluxîones*, se averigua la razon que hay entre dichos elementos dadas las cantidades, y en el otro que es el *integral* ò de las *fluentes*, se busca la razon de las cantidades dados sus elementos: de suerte que el 1º resuelve las cantidades en sus elementos, y el 2º de los elementos compone las cantidades.

Si q es el cociente de la cantidad b partida por a, de suerte que $\frac{b}{a}=q$, y permaneciendo b constante, concebimos que a vaya menguando; irá creciendo à proporcion el cociente q hasta que llegando à ser a una cantidad infinitamente chica qual podemos considerar al cero, venga q à ser infinitamente grande: esto es, si $a=0, \frac{b}{a}=\frac{b}{0}=q=\infty$ (este es el signo del infinito). Al contrario, si se

concibe que a vaya creciendo hasta el infinito, disminuirá q hasta llegar à ser cero, y será $\frac{b}{a}=\frac{b}{\infty}=q=0$. Por esto llamaremos cantidad *infinita* la que *en su género* se concibe haber recibido todos los aumentos posibles: è *infinitamente pequeña* la que se concibe menor *en su género* que otra qualquiera posible. Pero propiamente hablando, el infinito equivale las mas veces à *indefinido*, y viene à ser el límite ácia el que se acerca el infinito quanto se quiere, sin poder jamas llegar à él. Quando decimos que 1 es la suma de la série infinita $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}$ &c. es decir que 1 es el límite de dicha suma; porque quantos mas términos se sumen de dicha série, mas se acercará la suma à 1. Asimismo, llamar al círculo *polígono de infinitos lados* es decir que el círculo es el límite de quantos polígonos se le quieran inscribir, ò circunscribir, al qual se acercarán tanto quanto mas lados tengan.

441 Hay infinitos è infinitamente pequeños de diferentes órdenes: si x es infinito, siendo $1:x::x:xx$; será xx infinito respecto de x, como x lo es respecto de 1, ò será infinitamente infinito ò infinito de 2º órden: por igual razon es x^3 infinito de 3.^{r} órden, x^4 de 4º &c. Si $\frac{1}{x}$ es infinitamente pequeño, será $\frac{1}{xx}$ infinitamente pequeño de 2.º órden;

pues es $1 : \frac{1}{x} :: \frac{1}{x} : \frac{1}{xx} ; \frac{1}{x^3}$ será infinitamente pequeño de 3.^r órden, $\frac{1}{x^4}$ de 4.° &c. En un producto de factores infinitos ó infinitamente pequeños, se atiende al número y grado de dichos factores: y así bxz y xz, siendo x, z infinitos y b finito, son infinitos de 2.° órden; pues $bxz : xz : b : 1$: y siendo b, 1 de un mismo órden, lo serán tambien bxz y xz. Aquí se ve tambien que à los infinitos multiplicados y partidos por cantidades finitas puede medirlos alguna razon finita.

442 Las cantidades finitas no aumentan ni disminuyen una cantidad infinita: porque siendo $1-1=-1+1=0$, y $\frac{a}{0}=\infty$ (440) será $\frac{a}{1-1}=\frac{a}{-1+1}=\infty$: hagase la division (103 t.I.) y resultará $\frac{a}{1-1}=a+a+a+a......+\frac{a}{1-1}$: y $\frac{a}{-1+1}=-a-a-a-a...+\frac{a}{-1+1}$: luego lo mismo es $\frac{a}{1-1}$ que $a+a+a+a.....+\frac{a}{1-1}$, y lo mismo es $\frac{a}{-1+1}$ que $-a-a-a-a...+\frac{a}{-1+1}$.

De consiguiente en los cálculos en que intervengan una ó mas cantidades infinitas, se deben despreciar todos los términos finitos: y por igual razon se deben omitir los infinitos

ò infinitamente pequeños de órden inferior quando los haya de órden superior. Por egemplo, la espresion $\frac{3x+1}{5x-b}$ en la suposicion de ser x infinito, se reduce à $\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$. Los mismos $\frac{3}{5}$ hubieran salido dividiendo numerador y denominador por x, y despreciando los terminos $+\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x}$ que por ser infinitamente pequeños, se reducen à cero: tambien la espresion $xx+ax+bb$ se reduce à xx en la suposicion de x infinito, omitiendo bb finito y ax infinito de 1.^r órden.

443 Asimismo $xx+ax$ se reduce á ax, siendo x infinitamente pequeño, despreciando xx que lo es de 2.° órden: y $\frac{ax+b}{cx+d}$ bajo de la misma suposicion, se queda en $\frac{b}{d}$. Pero no se ha de egecutar la reduccion hasta haber concluido el cálculo de que se trate: y así la verdadera diferencia de $xx+bx+a$ y $xx+bx+b$, suponiendo x infinito, es $xx+bx+a-xx-bx-b=a-b$, y si se hubieran quitado ántes los términos ax, a, bx, b, hubiera resultado $xx-xx=0$: tampoco $x-\sqrt{(xx-aa)}$ se reduce à cero en la misma suposicion, sino à $x-x+\frac{aa}{2x}+\frac{a^4}{8x^3}$ &c. desembarazando el radical (154 t.I.): y despues á $\frac{aa}{2x}$, despreciando los demas

términos (442). Pero ántes de internarnos en los métodos diferenciales é integrales, vamos à dar alguna idea de lo que son *séries* con algunas de sus propiedades que nos servirán despues.

De las Séries.

444 Llamamos así à un polinomio de infinitos términos por el que se espresa el valor de una cantidad que no se puede sacar cabal. Quando sus términos van disminuyendo se llama *decrescente*, y tambien *convergente* porque entónces se acerca mas al verdadero valor; será *divergente* quando se va apartando de él; y porque entónces van creciendo los términos, se llama *crescente*. Aquellas en las que cada término se forma de alguno ó algunos de los anteriores, se llaman *recurrentes*. De números hay tres géneros de séries: 1º el de las *potencias* que ya conocemos: 2º el de los números *figurados* ò de diferentes órdenes que comienzan así......

Números.		
	Constantes ó de 1.^{r} *órden*...	1. 1. 1. 1. 1. 1. &c.
	Naturales ó de 2º *órden*...	1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.
	Triángulares ó de 3.^{r} *órden.*	1.3.6.10.15.21. &c.
	Piramidales ó de 4º *órden.*	1.4.10.20.35.56. &c.

y en los quales cada término es la suma de los

que le anteceden en la serie precedente: en los triángulares por exemplo, $1=1$, $3=1+2$, $6=1+2+3$ &c. El 3.^{r} género es el de los números *poligonos* formados por la suma de los términos consecutivos de una progresion aritmética, y toman el nombre segun es 1, 2, 3 &c. la diferencia de la progresion.

Progresiones aritméticas.	*Números polígonos.*	
1.2.3.4.5. &c. *dif.* 1....	1.3.6.10.15. &c.	*Triang.*
1.3.5.7.9. &c. *dif.* 2....	1.4.9.16.25. &c.	*Cuadr.*
1.4.7.10.13. &c. *dif.* 3....	1.5.12.22.35. &c.	*Pentág.*
1.5.9.13.17. &c. *dif.* 4....	1.6.15.28.45. &c.	*Exâgon.*

Se llaman *polígonos* porque las unidades que tienen sus números, se pueden colocar en figura de triángulo, cuadrado, pentágono &c.

445 Ya hemos visto cómo por medio de la division y de la fórmula de Newton (104 y 154 *t.I.*) se reduce à serie qualquier cantidad: ahora vamos á esplicar otro método mas espedito valiéndonos de los coeficientes indeterminados A, B, C, D &c. Supongamos pues para reducir à série la cantidad $\frac{a}{b+z}$, que el valor de dichos coeficientes sea tal que....

$$\frac{a}{b+z}=A+Bz+Czz+Dz^3+Ez^4+\&c.$$

tendremos multiplicando ambos miembros por

$$b+z,\ a=\left\{\begin{array}{l} bA+bBz+bCzz+bDz^3+\&c. \\ \quad +Az+Bzz+Cz^3+\&c. \end{array}\right.$$

$$\text{ó trasponiendo el } a,\ 0=\left\{\begin{array}{l} bA+bBz+bCzz+bDz^3+\&c. \\ -a+Az+Bzz+Cz^3+\&c. \end{array}\right.$$

Para que el 2º miembro se reduzca á cero, igualemos à cero todos los coeficientes y tendremos $bA - a = 0$, $bB + A = 0$, $bC + B = 0$, $bD + C = 0$: de donde sacarémos despejando A,B,C,&c. $A = \frac{a}{b}$, $B = -\frac{A}{b} = -\frac{a}{bb}$, $C = -\frac{B}{b} = \frac{a}{b^3}$, $D = -\frac{C}{b} = -\frac{a}{b^4}$ &c. : luego $\frac{a}{b+z} = A + Bz + Czz + Dz^3 + \&c. = \frac{a}{b} - \frac{az}{bb} + \frac{azz}{b^3} - \frac{az^3}{b^4} + \&c.$

Para reducir à serie $\frac{aa}{aa+2ax-xx}$, supongo $\frac{aa}{aa+2ax-xx} = A + Bx + Cxx + Dx^3 + \&c.$ y multiplicando por el denominador, saldrá

$$aa = \left\{ \begin{array}{l} aaA + aaBx + aaCxx + aaDx^3 + \&c. \\ + 2aAx + 2aBxx + 2aCx^3 + \&c. \\ - Axx - Bx^3 \ \&c. \end{array} \right.$$

Y por ser entónces $aa = aaA$, $aaB + 2aA = 0$, $aaC + 2aB - A = 0$, $aaD + 2aC - B = 0$; será $A = 1$, $B = -\frac{2}{a}$, $C = \frac{5}{aa}$, $D = -\frac{12}{a^3}$ &c. y de consiguiente $\frac{aa}{aa+2ax-xx} = A + Bx + Cxx + Dx^3 + \&c. = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{5xx}{aa} - \frac{12x^3}{a^3} + \&c.$

Quando en el numerador hay dos términos, se igualan á los dos homogeneos de la serie multiplicada ya por el denominador: si

hay tres á los tres primeros, y así de los demas: y así para hallar la série que corresponde á $\frac{1+2z}{1-z-zz}$, se supondrá igual à $A + Bz + Czz + Dz^3 + \&c.$ y despues de haber multiplicado por $1 - z - zz$; se hará $1 = A$, $2 = B - A$: y

$$1 + 2z = \left\{ \begin{array}{l} A + Bz + Czz + Dz^3 + \&c. \\ - Az - Bzz - Cz^3 - \&c. \\ - Azz - Bz^3 - \&c. \end{array} \right.$$

de consiguiente será $B = 3$, $C = 4$, $D = 7$, &c. y $\frac{1+2z}{1-z-zz} = A + Bz + Czz + Dz^3 + \&c. = 1 + 3z + 4zz + 7z^3$ &c. série *recurrente* por ser el coeficiente de cada término suma de los dos precedentes.

Para sacar por este medio la raiz próxîma de $(aa+xx)$, ó reducir à série $\sqrt{(aa+xx)} = (aa+xx)^{\frac{1}{2}}$, supondrémos $(aa+xx)^{\frac{1}{2}} = A + \ldots Bxx + Cx^4 + Dx^6 + \&c.$ (no se supone igual à $A + Bx + Cxx + \&c.$ porque el término con x del 2º miembro sin homólogo en el 1º, hubiera embarazado la operacion). Cuadrese pues, la anterior equacion, y resultará........

$$aa + xx = \left\{ \begin{array}{l} AA + 2ABxx + BBx^4 + 2ADx^6 + \&c. \\ + 2ACx^4 + 2BCx^6 + \&c. \end{array} \right.$$

de donde se saca $aa = AA$ y $A = a$, $B = \frac{1}{2a}$, $C = \frac{1}{8a^3}$, $D = \frac{1}{16a^5}$ &c. Luego $\sqrt{(aa+xx)} = A + Bxx + Cx^4 + Dx^6 + \&c. = a + \ldots$

$\frac{xx}{2a} + \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} + \&c.$

446 *El sumar las séries* es la operacion mas dificil que se hace con ellas, y viene á reducirse á sumar algunas generales que sirven de fórmulas por las que se suman las demas que pueden reducirse á ellas. Nosotros nos ceñirémos á los casos mas precisos

1º Sea $\div \frac{a}{b} : \frac{a}{bq} : \frac{a}{bqq} : \frac{a}{bq^3} : \frac{a}{bq^4} \ldots\ldots \frac{a}{bq\infty}$ una progresion general geométrica decrescente al infinito. Si se coloca así $\div \frac{a}{bq^\infty} \ldots \frac{a}{bq^4} : \frac{a}{bq^3} : \frac{a}{bqq}$ $\frac{a}{bq} : \frac{a}{b}$; la habrémos hecho crescente, y su suma será (202 *t.* I.) despreciando el término $\frac{a}{bq\infty}$ que es infinitamente pequeño (442), $S = \frac{aq}{bq-b}$: fórmula por la que se podrà sumar qualquier progresion geométrica decrescente al infinito.

Sumemos por ella la fraccion decimal 0,3333 &c. que sabemos equivale à $\frac{1}{3}$, y viene á ser $\div \frac{3}{10} : \frac{3}{100} : \frac{3}{1000} \ldots \frac{3}{10\infty}$: si la hacemos crescente escribiéndola así, $\frac{3}{10^\infty} : .. \frac{3}{1000} : \frac{3}{100} : \frac{3}{10}$; será $a=3$, $b=10$, $q=10$, y $S=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$. De consiguiente la suma de 0,99999 &c. será 1 como lo dá tambien la formula.

Para averiguar en quebrado comun el valor de la decimal 0,181818 &c. ó la suma de la progresion à que equivale; harémos $a=18$, $b=100$, $q=100$, y será $S=\frac{1800}{9900}=\frac{2}{11}$. Tambien encontrarémos que la fraccion periódica 0,14285714285714 &c. vale $\frac{1}{7}$, sustituyendo en la fórmula, 142857 en lugar de a, 1000000 en lugar de b y q.

447 2º Para sumar una série $\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3}$ &c. cuyos numeradores están en progresion aritmética y los denominadores en progresion geométrica; se reducirá á esta forma $\frac{a}{b}, \frac{a}{bq} + \frac{d}{bq}, \frac{a}{bqq} + \frac{d}{bqq} + \frac{d}{bqq}, \frac{a}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3}$ &c. de donde se sacarán las siguientes séries que son otras tantas progresiones geométricas.

$\div \frac{a}{b} : \frac{a}{bq} : \frac{a}{bqq} : \frac{a}{bq^3}$ &c. cuya suma es $\frac{aq}{bq-b}$

$\div \frac{d}{bq} : \frac{d}{bqq} : \frac{d}{bq^3}$ &c. su suma..... $\frac{d}{bq-b}$

$\div \frac{d}{bqq} : \frac{d}{bq^3}$ &c. su suma....... $\frac{d}{bqq-bq}$

$\div \frac{d}{bq^3}$ &c. su suma....... $\frac{d}{bq^3-bqq}$

Y pues que estas sumas escepto la primera, forman la progresion $\div \frac{d}{bq-b} : \frac{d}{bqq-bq} : \ldots\ldots\ldots$

$-\frac{d}{q^3-bqq}$ &c. cuya suma es $\frac{dq}{bq^2-2bq+b}$: si à esta se añade la primera $\frac{aq}{bq-b}$; se tendrá.......... $\frac{aqq-aq+dq}{bqq-2bq+b}$ por la suma de la série propuesta.

448 3.º Encontremos generalmente la suma de qualquier número de términos de una progresion qualquiera de las potencias de los números naturales 1, 2, 3, 4 &c. Represente la progresion aritmética $\div a. b. c. d. t.$ una série qualquiera de estos números: y pues que $t=d+1$, $d=c+1$, $c=b+1$, $b=a+1$; será elevando estas equaciones à una potencia qualquiera m.....

$$1^{\circ}\ t^m=d^m+md^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}d^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}d^{m-3}+\&c.$$

$$2^{\circ}\ d^m=c^m+mc^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}c^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}c^{m-3}+\ \&c.$$

$$3^{\circ}\ c^m=b^m+mb^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}b^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}b^{m-3}+\&c.$$

$$4^{\circ}\ b^m=a^m+ma^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}a^{m-3}+\&c.$$

Sumo todas estas potencias y tendré reduciendo, $t^m=a^m+m(a^{m-1}+c^{m-1}+b^{m-1}+d^{m-1})+\frac{1}{2}(m\times m-1)(d^{m-2}+c^{m-2}+b^{m-2}a^{m-2})+\ldots$ $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}(d^{m-3}+c^{m-3}+b^{m-3}+a^{m-3})+$ &c.

Si suponemos ahora s^{m-1} igual à la suma de las potencias $m-1$, de a, b, c, d, t; será...

$s^{m-1}-t^{m-1}=a^{n-1}+b^{n-1}+c^{m-1}+d^{n-2}$, y $s^{n-1}-t^{m-1}=a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2}+d^{n-2}$&c. y la suma anterior se reducirá finalmente á $t^m=a^n+$.. $m(s^{m-1}-t^{m-1})+\frac{1}{2}(m\times m-1)(s^{m-2}-t^{n-2})+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\times 3}(s^{m-3}-t^{m-3})+$&c. espresion general que se busca.

Siendo $m=1$, resulta $t=a+s^{\circ}-t^{\circ}$ ó $s^{\circ}=t\ a+1$, suma de una série de potencias *cero*: en $\div 3^{\circ}4^{\circ}5^{\circ}6^{\circ}$ por egemplo, $s^{\circ}=t-a+1=6-3+1=4$. Si $m=2$ se reduce la fórmula à $t^2=aa+2s-2t+s^{\circ}-t^{\circ}=aa+2s-t-a$, poniendo en lugar de $s^{\circ}-t^{\circ}$, $t-a$ sacado de la suposicion anterior: luego $s=\frac{1}{2}(tt-aa+t+a)=\frac{1}{2}t(t+1)+\frac{1}{2}a(1-a)$: de suerte que la suma de $\div 8.\ 9.\ 10.\ 11.\ 12.\ 13$ es $s=13\times 7+4\times-7=63$.

Suponiendo $m=3$, resulta $t^3=a^3+3(ss-tt)+3(s-t)+s^{\circ}-t^{\circ}=a^3+3ss-3tt+3s-2t-a$: sustituyase el valor de s, y se tendrá trasponiendo, $ss=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}tt+\frac{1}{6}t-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}aa-\frac{1}{6}a=\frac{1}{6}t(2tt+3t+1)-\frac{1}{6}a(2aa-3a+1)$. En la série de los cuadrados $\div 2^2.3^2.4^2.5^2.6^2.$ se tiene $ss=90$. Haciendo $m=4$, y poniendo en el resultado los valores hallados de s, ss, sale $s^3=\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{4}tt-\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{4}aa=\frac{1}{4}tt(tt+2t+1)-\frac{1}{4}aa(aa-2a+1)$: y así de las demas.

449 Si suponemos infinito el número de términos, será el último $t=\infty$, y entonces...

$\infty^{m-1}, \infty^{m-2}$ &c. se desvanecerán en la fórmula como infinitamente pequeños respecto de ∞^m: y lo mismo s^{m-2}, s^{m-3} &c. respecto de s^{m-1}: luego dicha fórmula quedará reducida á $\infty^m = ms^{m-1}$, y $s^{m-1} = \frac{\infty^m}{m}$, ó suponiendo $m - 1 = n$, $s^n = \frac{\infty^{n+1}}{n+1}$: es decir, la suma de las potencias n de una infinidad de términos de los números naturales es el producto de la potencia ∞^m del último término multiplicado por el número de términos, y partido por $n + 1$. Con la misma facilidad se sacaría la suma de las potencias de qualquier número de términos finito ó infinito de una progresion aritmética qualquiera, suponiendo r la diferencia y haciendo $t = d + r, d = c + r$ &c. y como el esponente n puede representar aun las potencias fraccionarias, quedará el problema completamente resuelto.

450 Se llama *término general de una série* la espresion de n número de términos, por la que se forman todos los de la série substituyendo por n los números 1, 2, 3 &c.: n^2 por egemplo, es el término general de la série 1, 4, 9, 16, 25 &c. cuyos términos resultan suponiendo $n = 1, n = 2$ &c. y *suma general de una série* la espresion que da generalmente la suma de un número qualquiera n de términos. Tal es $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}nn + \frac{1}{6}n$ suma de

la série de los cuadrados 1, 4, 9, 16 &c. cuyo término general es nn: en la qual si en lugar de n se pone 6, salen 91 que suman los seis primeros términos,

451 Si en la suma general (S) se pone $n - 1$ en lugar de n, resultarà la suma (s) de los términos hasta $n - 1$ inclusive, o de todos ménos el último que es el general: de consiguiente si esta suma se resta de la primera, se tendrá el término general (T), que es siempre $S - s$. Si $S = \frac{1}{2}(nn + n)$, será poniendo $n - 1$ en lugar de n, $s = \frac{1}{2}(nn - n)$, y $S - s = T = n$. Si $S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$, será $S - s = T = aq^{n-1}$. Pero dado el término general T no es tan facil encontrar la suma. Contentemonos con la resolucion siguiente que se estiende á inumerables casos.

452 Sea $T = an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} + $ &c. $+ r$, y hayase de encontrar la suma S de su série. Si hacemos $S = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} +$ &c. $+ R$, y sustituimos $n - 1$ en lugar de n, tendremos $s = A(n-1)^{m+1} + B(n-1)^m + C(n-1)^{m-1} + D(n-1)^{m-2} +$ &c. $= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\begin{array}{llll} An^{m+1} - A(m+1)n^m & + \frac{1}{2}Am(m+1)n^{m-1} & - \frac{A(m+1)m(m-1)}{2 \times 3}n^{m-2} + \&c. \\ + Bn^m & - Bm \times n^{m-1} & + \frac{1}{2}Bm(m-1)n^{m-2} - \&c. \\ & + Cn^{m-1} & - C(m-1)n^{m-2} + \&c. \\ & & + Dn^{m-2} - \&c. \end{array}$$

luego $S - s = T = an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} + dn^{m-3} +$ &c. $=$

$$A(m+1)n^m-\tfrac{1}{2}A(m+1)ma^{m-1}+\frac{A(m+1)m(m-1)}{2\times 3}n^{m-2}\text{-\&c.}$$
$$+B\times m\times n^{m-1}\quad-\tfrac{1}{2}B\,(m-1)\,mn^{m-2}+\text{\&c.}$$
$$+C(m-1)n^{m-2}\quad\text{\&c.}$$

Comparense los términos homólogos, y se tendrá $A=\frac{a}{m+1}$, $B=\frac{a}{2}+\frac{b}{m}$, $C=\frac{c}{m-1}+\frac{b}{2}+\frac{am}{12}$ &c: de consiguiente $S=An^{m+1}+Bn^m+$ &c. $=\frac{a}{n+1}n^{m+1}+\left(\frac{b}{m}+\frac{a}{2}\right)n^m+\left(\frac{c}{m-1}+\frac{b}{2}+\frac{am}{12}\right)n^{m-1}+$&c.

Si se pidiese la suma de la série 1.2.3.4.5.....n, cuyo término general es n; se hará $m=1$, $a=1$, $b=o$, $c=o$ &c. y será $S=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}nn=\frac{1}{2}(nn+n)$. La de la série 1.4.9.16......nn, donde $T=nn$, da $m=2$, $a=1$, $b=o$, $c=o$ &c. y $S=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}nn+\frac{1}{6}n$. Ultimamente, si $T=n^m$ como sucede en la fórmula $1^m.2^m.3^m.4^m.........n^m$; será $m=m$, $a=1$, $b=o$, $c=o$ &c. y $S=\frac{1}{m+1}n^{m+1}+\frac{1}{2}n^m+\frac{m}{12}n^{m-1}+$ &c. y suponiendo $n=\infty$ y positivo, será despreciando n^m, n^{m-1}&c. (442), $S=\frac{n^{m+1}}{m+1}$.

453 Quando se da una equacion $x=az^m+bz^{m+n}+cz^{m+2n}+dz^{m+3n}+$ &c. y se pide espresar en términos de x el valor de z; acudimos al que se llama *método inverso, retorno ó regreso de las séries.* Consideremos 1º que $m=1$, y $n=1$, ó que sea $x=az+bzz+cz^3+dz^4+$&c. y que se pida en x el valor de z. Si suponemos $z=Ax+Bxx+Cx^3+Dx^4+$&c. será......

$$\begin{aligned} zz&=AAxx+2ABx^3+BBx^4+\text{\&c.}\\ &\qquad\qquad\qquad\;\;+2ACx^4+\text{\&c.}\\ z^3&=\quad A^3x^3+3AABx^4+\text{\&c.}\\ z^4&=\qquad\qquad\quad A^4x^4+\text{\&c.}\end{aligned}$$

$$\text{y } x=\left\{\begin{aligned} az&=Aax+aBxx+aCx^3+aDx^4+\text{\&c.}\\ bzz&=\;AAbxx+2ABbx^3+B^2bx^4\text{ \&c.}\\ &\qquad\qquad\qquad\;\;+2ACbx^4+\text{\&c.}\\ cz^3&=\qquad\quad A^3cx^3+3AABcx^4+\text{\&c.}\\ dz^4&=\qquad\qquad\qquad\quad A^4dx^4+\text{\&c.}\end{aligned}\right.$$

luego $x=Aax$, y $A=\frac{1}{a}$: $aB+AAb=o$, ó $B=-\frac{b}{a^3}$: $aC+2aBb+A^3c=o$, y $C=\frac{2bb-ac}{a^5}$, y así de los demas. Pónganse estos valores en $z=Ax+Bxx+Cx^3+Dx^4$ &c. y resultará

$$z=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a^3}xx+\frac{2bb-ac}{a^5}x^3+\left(\frac{5abc-aad+5b^3}{a^7}\right)x^4$$
$$+\left(\frac{14ab^4-21abbc+6aabd+3aaec-a^3c}{a^9}\right)x^5\text{.........}$$

+&c fórmula por la que podremos espresar una série de potencias de z en otra compuesta de las mismas potencias de x.

Sea por egemplo, $x=z-zz+z^3-z^4+z^5-$&c. tendremos $a=1$, $b=-1$, $c=1$, $d=-1$, $e=1$ &c. y sustituyendo estos valores, será $z=x+xx+x^3+x^4+x^5+$&c. Si fuese $x=z+\frac{1}{2}zz+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{4}z^4+\frac{1}{5}z^5+$&c. por ser $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=\frac{1}{4}$, $e=\frac{1}{5}$ &c. será $z=x-\frac{1}{2}xx+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5-$ &c. Últimamente, siendo $z=\frac{x}{a}-\frac{xx}{2aa}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x4}{4a^4}+\frac{x^5}{5a^5}-$&c. será $\frac{x}{a}=z+\frac{1}{2}zz+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5+$ &c.

Supongamos 2º que $m=1$, y $n=2$, de que resulta la série $x=az+bz^3+cz^5+dz^7+$ &c. de potencias impares: buscarémos una formula para este caso, haciendo $z=Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+$ &c. pues será.......

$$\begin{array}{ll} z^3= & A^3x^3+3AABx^5+3AACx^7+\text{ &c.} \\ & \qquad\qquad +3ABBx^7+\text{ &c.} \\ z^5= & \qquad\qquad A^5x^5+5A^4Bx^7+\text{ &c.} \\ z^7= & \qquad\qquad\qquad A^7x^7+\text{ &c.} \end{array}$$

$$\text{luego } x=\left\{\begin{array}{ll} az= & Aax+aBx^3+aCx^5+aDx^7+\text{ &c.} \\ bz^3= & A^3bx^3+3AABbx^5+3AACbx^7+\text{ &c.} \\ & \qquad\qquad +3ABBbx^7+\text{&c.} \\ cz^5= & \qquad\qquad A^5cx^5+5A^4Bcx^7+\text{&c.} \\ dz^7= & \qquad\qquad\qquad A^7dx^7+\text{&c.} \end{array}\right.$$

De donde se sacará $x=aAx$, ó $A=\frac{1}{a}$:

$aB+A^3b=0$ y $B=-\frac{b}{a^4}$: $C=\frac{3bb-ac}{a^7}$, $D=\frac{8abc--aad--12b^3}{a^{10}}$ &c. de modo que la fórmula por la que podremos espresar en x qualesquiera potencias impares de z, será $z=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a^4}x^3+\left(\frac{3bb-ac}{a^7}\right)x^5+\left(\frac{8abc-ad-12b^3}{a^{10}}\right)x^7+$ &c.

Para espresar en x los valores de z en la equacion $x=z-\frac{z^3}{2.3.tt}+\frac{z^5}{2.3.4.5.t^4}-\frac{z^7}{2.3.4.5.6.7.t^6}+$ &c. haremos $a=1$, $b=-\frac{1}{2.3.tt}$ $c=\frac{1}{2.3.4.5.t^4}$, $d=-\frac{1}{2.3.4.5.6.7t^6}$ &c. y se tendrá $z=x+\frac{1}{2.3tt}x^3+\left(\frac{1}{3.4t^4}-\frac{1}{2.3.4.5t^4}\right)x^5+$ &c. $=x+\frac{1}{2.3tt}x^3+\frac{3}{2.4.5t^4}x^5+\frac{3.5}{2.4.6.7t^6}x^7+$&.

Consideraciones generales sobre los Logarítmos, algunos de sus usos, y modo de sacarlos por las séries.

454 Para generalizar mas las ideas que dimos (208 *t.*I.) de los logarítmos, supongamos que sea a un número mayor que 1, x la potencia à que se ha de elevar para que iguale à b, de modo que $a^x = b$; será (209 *t.*I.) el esponente x el logarítmo de b, ó $x = lb$ (l significa *logarítmo.*) La cantidad a se llama base, y segun varíe su valor, varía el sistema de logarítmos. Juan Népero su inventor usó del mas sencillo en que $a = 1$, del que resultan los logarítmos hiperbólicos (417): este y el de las tablas, en el que se hizo $a = 10$, son los usados; pero en todos es $l1 = 0$: pues si en $a^x = b$, suponemos $b = 1$; será $a^x = 1$, y de consiguiente $x = 0$ (92 *t.*I.): y pues que $la^1 = 1$, $la^2 = 2$, $la^3 = 3$ &c. conoceríamos el número que se ha tomado por base, viendo quál es el que tiene por logarítmo 1.

455 En qualquier sistema de logarítmos, se tiene $lab = l\frac{ab}{1} = la + lb - l1$; por ser $1:a::b:\frac{ab}{1}$, y por lo que enseñamos (213 *t.*I.): $labc = la + lb + lc - 2l1$; porque $1:\frac{ab}{1}::c:\frac{abc}{1\times 1}$:

$labcd = la + lb + lc + ld - 3l1$, $la^2 = la + la - l1 = 2la - l1$: $la^3 = 3la - 2l1$, y $la^n = mla - (m-1)l1$: $l\sqrt[m]{a} = la^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}la - \left(\frac{1}{m} - 1\right)l1 = \frac{la + (m-1)l1}{m}$: $l\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}(la + 2l1)$. En el quebrado $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 1$, donde $b:a::1:\frac{a}{b}$, se tendrá $l\frac{a}{b} = l1 + la - lb$: $l\frac{b^3}{ac} = l1 + lb^3 - lac = 3lb - la - lc$, poniendo $3lb - 2l1$ en lugar de lb^3, $la + lc - l1$ por lac, y reduciendo despues.

456 En el sistema comun de los logarítmos de las tablas, en el que $l1 = 0$, son mas sencillas estas espresiones por reducirse à cero los términos en que entra $l1$: y así $lab = la + lb$: $la^3 = 3la$, $la^m = mla$: $l\frac{a}{b} = la - lb$: $l\frac{a^3}{b^2c} = 3la - 2lb - lc$: $l\sqrt[n]{c^2} = lc^{\frac{2}{n}} = \frac{2}{n}lc$: $l\frac{\sqrt{(aa - xx)}}{(a+x)^2} = \ldots \frac{1}{2}l(a - x) - \frac{1}{2}l(a + x)$: y últimamente $l3aa + la^4 + 5l3 = 6l3a = l3a^6$. Y para manifestar quánto facilitan estas espresiones los cálculos mas complicados, vamos à aplicarlas à algunas equaciones y problemas.

457 1º Si se diese para resolver la equacion $a^x = b$; hariamos $xla = lb$, y $x = \frac{lb}{la}$: en $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}} = c$ será $mxla + (1 - nx)lb = lc$, $mxla -$

$nxlb = lc - lb$, y $x = \frac{lc-lb}{mla-nlb} = \frac{l\frac{c}{b}}{l\frac{a^m}{b^m}}$: Sea.

$a^x = \frac{b^{mx+n}}{c^{qx}}$, tendremos $xla = mxlb + nlb - qxlc$, y $x = \frac{nlb}{la-mlb+qlc}$. Ultimamente, si se diese $\frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{mx}} = f^{x-p}$; sería $nlb - \frac{a}{x}lb - mxlc = xlf - plf$, y $(mlc+lf)xx - (nlb+plf)x = -alb$, ó $xxlc^mf - xlb^nf^p = -xlb^a$: de donde se saca (249 *t.I.*) $x = \frac{lb^nf^p}{alc^mf} \pm \sqrt{\left(\frac{(lb^nf^p)^2}{4(lc^mf)^2} \quad \frac{lb^a}{lc^mf}\right)}$

2º *Si* 100000 *personas aumentan en una provincia de* $\frac{1}{30}$ *cada año ¿quántas habrá al cabo de un siglo?* Si $100000 = n$, habrá al fin del 1.r año $n+\frac{1}{30}n$ ó $n(1+\frac{1}{30}) = n(\frac{31}{30})$: al fin del 2º año habrá $n(\frac{31}{30})^2$, al fin del 3º $n(\frac{31}{30})^3$....... y al fin del siglo $n(\frac{31}{30})^{100}$. Luego deberá ser $(\frac{31}{30})^{100} \times 100000 = x$, el número de habitantes: tendré pues, $100l\frac{31}{30} + l100000 = lx$: y como $l\frac{31}{30} = l31 - l30 = 0{,}014240439$; será $100l\frac{31}{30} = 1{,}4240439$: súmese con $l100000 = 5{,}0000000$, y compondrá $6{,}4240439 = lx$ que corresponde al número 2654874, valor de x, y número de habitantes que se busca.

Para averiguar en qué razon debió aumentarse el género humano cada año por los tres hijos de Noe y sus mugeres, para que á los 200 *años hubiese un millon de personas:* supongo que cada año se aumentasen de...... $\frac{1}{x}$; sería $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \times 6$ el número de personas que debería haber à los 200 años, y de consiguiente $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \times 6 = 1000000$, $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$, y por los logarítmos....$l\frac{1+x}{x} = \frac{1}{200}l\frac{1000000}{6} = \frac{1}{200} \times 5{,}2218487 = 0{,}0261092$.

El número que corresponde à este logarítmo és $\frac{1061963}{1000000}$: luego $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000}$; y x= 16 poco ménos : de suerte que el aumento $\frac{1}{x}$ cada año debería haber sido de $\frac{1}{16}$.

¿Quanto debería aumentarse un pueblo cada año para ser al fin de cada siglo dos veces mas numeroso? Siendo n el número de sus habitantes y $\frac{1}{x}$ la razon en que se aumenta; habria al fin de un siglo $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} \times n$, y pues que este número ha de ser $2n$; será.... $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} \times n = 2n$ y $\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}}$: luego $l\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100}l2 = 0{,}0030103$: con que $\frac{1+x}{x} = \ldots$

$\frac{10069555}{10000000}$, y $x = 144$: tendrian pues que aumentarse en $\frac{1}{144}$ cada año.

Para saber quantos años se necesitan para que n de personas sea diez veces mayor, aumentándose cada año de $\frac{1}{100}$: haciendo x el número de años, seria $n\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10n$, ó $\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10$, y se sacará $x = \frac{l10}{l101 - l100} = \ldots\ldots \frac{10000000}{43214} = 231$. En estos problemas sacados de la *Introduccion al Analisi de los infinitos*, una de las mejores producciones del célebre *Leonardo Eulero*, se han tomado los logarítmos de tablas que tienen diez decimales, como las escelentes de *Ulaq*.

458 Tratemos ya *de sacar el logarítmo de un número qualquiera*, por un método mas espedito que el que esplicamos (211 *t.* I.) Supongamosle $1+x$, y que $(1+x)^m$ sea igual à otro número $1+z$; será $1+z = (1+x)^m$, y $z = mx + \frac{1}{2}m(m-1)vx + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3 + \&c.$ Sea... $l(1+x) = Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + \&c.$ y $l(1+z) = Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4$; tendremos $l(1+z) = l(1+x)^m = ml(1+x) = (mAx + mBxx + mCx^3 + \&c.) = (Az + Bzz + Cz^3 + Dz^4 + \&c.)$: pongase en este último miembro el valor de z que sacamos ántes, y se reducirá la equacion à esta....

$$mAx + mBxx + mCx^3 + mDx^4 + \&c.$$

$$= \left\{ \begin{array}{lll} mAx + \frac{1}{2}m(m-1)Axx + & \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}Ax^3 & + \&c. \\ \quad +mmBxx & +mm(m-1)Bx^3 & + \&c. \\ & +m^3Cx^3 & + \&c. \end{array} \right.$$

en donde reduciendo y comparando los términos homólogos, resulta $A - A = 0$, $B = -\frac{1}{2}A$, $C = \frac{1}{3}A$, $D = -\frac{1}{4}A$ &c. luego $l(1+x) = A(x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c.) Aquí se ve que à $1+x$ corresponderán diferentes logarítmos segun los diferentes valores que se den à la indeterminada A que se llama *módulo*: pero haciendo $x=0$, siempre se tiene $l\,1 = 0$, como lo digimos (454). De la suposicion $A=1$, resultan los logarítmos hiperbólicos, que por mas sencillos, se llaman *naturales*: y como por ellos se pueden sacar los de los demas sistemas, multiplicàndolos por el módulo correspondiente A, hablarémos de los hiperbólicos.

Y por quanto la série sacada para el $l(1+x)$ es poco convergente, aun quando x es un número pequeño; sacarémos para darla una forma mas ventajosa, el $l(1-x) = -x - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \&c.$ y será $l(1+x) - l(1-x) = l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \&c.\right)$ série por la que se sacará el logarítmo hiperbólico de un número qualquiera mayor que 1, y que será muy convergente: pues igualando el número á $\frac{1+x}{1-x}$, siempre x será menor que 1. Para sacar por egemplo, el logarítmo de 2, haremos $2=\frac{1+x}{1-x}$, y será...... $x=\frac{1}{3}$; luego $l2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\&c.\right)=0,6931458$. Del mismo modo hubieramos sacado $l\,10=2,30258409$. El duplo del logarítmo de 2 es el de 4, el triplo el de 8: la suma de los de 2 y 3 será logarítmo de 6: la mitad del de 10 será el de 5, y así de los demas que se sacarán facilísimamente calculados los de los números primeros.

459 Siendo 2,30258509 el logarítmo hiperbólico de 10, y el de las tablas 1; tendremos $1=A\times 2,30258509$: de consiguiente $A=\frac{1}{2,30258509}=0,43429448$, valor del módulo de los logarítmos de las tablas, por el que se deben multiplicar para reducirlos à hiperbólicos: y estos al contrario, se reducirán à los de las tablas, partiéndolos por....0,43429448.

460 *Si dado un logarítmo, se nos pidiese el número que le corresponde*: suponiendo z el logarítmo dado, y $1+x$ el número que se

busca; será (458) $z=-x\frac{1}{2}xx+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\&c.$ Para averiguar ahora el valor de x en z (453), sea $x=Az+Bzz+Cz^3+Dz^4+\&c.$ y será....

$$z=\left\{\begin{array}{r} Az+Bzz+Cz^3+Dz^4+\&c. \\ -\frac{1}{2}AAzz-ABz^3-\frac{1}{2}BBz^4-\&c. \\ -ACz^4-\&c. \\ +\frac{1}{3}A^3z^3+AABz^4-\&c. \\ -\frac{1}{4}A^4z^4-\&c. \end{array}\right.$$

De donde se saca $A=1$, $B=\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{6}$, $D=\frac{1}{24}$ &c. luego $x=z+\frac{zz}{2}+\frac{z^3}{2\cdot 3}+\frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots\frac{z^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\&c.$ y finalmente $1+x=1+z+\frac{zz}{2}+\frac{z^3}{2.3}+\frac{z^4}{2.3.4}+\&c.$ En general, un número qualquiera $n=1+ln+\frac{(ln)^2}{2}+\frac{(ln)^3}{2.3}+\ldots\frac{(ln)^4}{2.3.4}$ &c. série que siempre es convergente, y de consiguiente que resuelve la cuestion. Apliquemosla á encontrar la base de los logarítmos hiperbólicos, de que se usa mucho en el cálculo integral: y pues su logarítmo es 1, tendremos $n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}$ $=2,71828183$. Adviertase que el logarítmo dado se reduce à hiperbólico àntes de la operacion, quando no lo es.

CALCULO DIFERENCIAL

461 Supuesto que debe haber igual razon entre las cantidades variables y los aumentos ó decrementos semejantes que les sobrevengan; es evidente que si por medio de estos conseguimos determinar dicha relacion entre las cantidades, quedará ésta determinada aunque reduzcamos á cero ó hagamos desvanecer los tales elementos, como que son partes infinitamente pequeñas de las cantidades. Este arbitrio para descubrir las cantidades por medio de sus elementos, es el objeto del *cálculo diferencial*, como veremos mas claramente por los egemplos, despues que hayamos enseñado á espresar algébricamente los elementos de toda clase de cantidades, que por el modo con que se sacan, se llaman *diferenciales*, y que se representan con la letra *d* puesta al lado de la cantidad cuyas partes significa. Pero no se debe confundir este càlculo con el de las *diferencias finitas* de las cantidades variables que hace con ellas las mismas operaciones que el diferencial é integral con las diferencias infinitamente pequeñas.

Si las cantidades variables x, y crecen en un instante de una parte infinitamente pequeña dx, dy; vendràn à ser $x+dx$, $y+dy$,

y la diferencia entre lo que son ahora y lo que ántes eran, será $x+y+dx+dy-x-y=dx+dy$: estas son las *diferenciales* de x, y que *se sacarán de qualesquiera cantidades sumadas ó restadas juntando á cada variable la letra característica* d, que se pone despues del coeficiente si le hubiese: pues si $3x$ crece de $3dx$, será su diferencial $3x+3dx-3x=3dx$: la de $ay-z$ es $ady-dz$, y la de $2cx+ab-\frac{my}{n}$ es $2cdx+\frac{mdy}{n}$. En ab y en qualquier otra cantidad constante es cero la diferencial; pues no crece ni mengua su valor. Hemos supuesto y supondrémos en lo sucesivo, que las variables crezcan y vengan á ser $x+dx$, $y+dy$; pero llévese entendido que si menguan; serán $x-dx$, $y-dy$, y sus diferenciales $-dx-dy$: y si creciendo x decrece y, serán dichas diferenciales $dx-dy$.

462 Para diferenciar xz, , multiplicarémos estas cantidades aumentadas $(x+dx)\times(z+dz)$ y restando xz del producto $xz+xdz+zdx+dxdz$; quedará $zdx+xdz+dzdx$ por diferencial de xz: que se reduce à $zdx+xdz$, despreciando el infinitamente pequeño de 2º órden $dxdz$ respecto de zdx y xdz que lo son de 1º (442): luego en las *cantidades multiplicadas se diferencia cada variable considerando á las otras como constantes*. Y así la diferencial de xyz será $xydz+xzdy+yzdx$, dife-

renciando primero como si xy fuesen constantes, despues como si lo fuesen xz, y por último como si lo fuesen yz: y la de $5axz-\frac{b}{a}yz$, ó $d(5axz-\frac{b}{a}yz)=5axdz+5azdx-\frac{b}{a}ydz-\frac{b}{a}zdy$. Para no equivocarse, conviene escribir la última la variable que se diferencia.

463 Por esta misma regla será la diferencial de xx, $xdx+xdx=2xdx$: la de x^3, $xxdx+xxdx+xxdx=3xxdx$: la de x^4, $4x^3dx$, y en general la de x^m, $mx^{m-1}dx$: luego *una cantidad variable elevada á qualquier potencia se diferencia multiplicando por el esponente de la potencia la cantidad disminuido su esponente de* 1, *y por la diferencia de la variable*, de manera que la diferencial de ax^5 ó $d(ax^5)$ será $5ax^4dx$: $d(z^{-2})=-2z^{-3}dz$: $d(x^{\frac{3}{5}})=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}dx$: $d(y^{\frac{3}{8}})=-\frac{3}{8}y^{-\frac{11}{8}}dy$. La diferencial de ax^3z^2, considerando á x^3z^2 como dos variables simples, es $ax^3(d(zz)+az^2(d(ax^3)=2ax^3zdz+3az^2x^2dx$: en general, $d(ax^mz^n)=ax^m(d(z^n)+az^n(d(x^m)=\ldots\ldots nax^mz^{n-1}dz+maz^nx^{m-1}dx$.

464 Si el quebrado $\frac{x}{z}$ se escribe así xz^{-1} (93 *t.* I.), será su diferencial $z^{-1}dx-xz^{-2}dz=\frac{dx}{z}-\frac{xdz}{zz}=\frac{zdx-xdz}{zz}$ *luego si se multiplica la*

diferencial del numerador de un quebrado variable por el denominador, y la de este por el numerador, y restando este producto del primero, se divide el residuo por el cuadrado del denominador; se tendrá la diferencial del quebrado. Y así $d\left(\frac{3z^2-a}{bx}\right)=\ldots\ldots\ldots\frac{6bxzdz-3bz^2dx-abdx}{bxx}$.

Con estas reglas podremos diferenciar qualesquiera cantidades algébricas. Por egemplo, $d\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{dz}{zz}$: $d(2x^3z-cz^2yx-ab)=2x^3dz+6zx^2dx-cx^2ydx-cz^2xdy-2cxyzdz$: $d(c-az+bx^3)^4$ contando toda la cantidad por una variable, es $4(c-az+bx^3)4^{-1}\times d(c-az+bx^3)=4(c-az+bx^3)^3\times(-adz+3bx^2dx)$: y por igual razon, tratando à los dos factores como dos variables, $d(ax^2\times(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}=(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}\times(d(ax^2))+ax^2\times d(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}=2axdx(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}ax^2(mz^3+a-z)^{\frac{1}{2}}\times(3mz^2dz-dz)$.

Quando hay radicales se convierten en sus iguales con esponentes fraccionarios (115 *t.* I.) y así $d(\sqrt{z})=d(z^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{dz}{2\sqrt{z}}$; $d(\sqrt[4]{x^5})=d(x^{\frac{5}{4}})=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}dx$: $d(\sqrt{(ab-xx)}=$

$d(ab-xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(ab-xx)^{-\frac{1}{2}} \times d(ab-xx) = -xdx(ab-xx)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{(ab-xx)}}$: . . . .

$d(a\sqrt[m]{(cx-az^2)^n} = d(a(cx-az^2)^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m} a \times \ldots (cx-az^2)^{\frac{n}{m}-1} \times (cdx-2azdz)$: y . . . . . .

$d\left(\frac{\sqrt{(x^2-a^2z)^m}}{(x+b)^3}\right) = d(x+b)^{-3} \times (x^2-a^2z)^{\frac{m}{2}} = \frac{m}{2}(x+b)^{-3} \times (x^2-a^2z)^{\frac{m}{n}-1} \times (2xdx-aadz) - 3dx(xx-aaz)^{\frac{m}{2}} \times (x+b)^{-4} =$ &c.

465 *La diferencial segunda* de una cantidad se saca diferenciando de nuevo el resultado de la 1ª, y se representa con dos dd: *la diferencia* 3ª se espresa con tres ddd, y viene á ser una nueva diferenciacion de la 2ª &c. ddx ó d^2x indica la diferencial 2ª de x: $dddx$ ó d^3x la diferencial 3ª &c. pero no se ha de equivocar d^2x, $d^3x \ldots d^mx$ diferencia 2ª 3ª ….mª de x, con $dx^2 = dxdx$, $dx^3 = dxdxdx \ldots$ dx^m, cuadrado, cubo y potencia m de dx; así como dx^2, $dx^3 \ldots dx^m$ son distintos de $d(x^2)$, $(dx^3) \ldots d(x^m)$ que indican la 1ª diferencial de x^2, de x^3, de x^m.

Será pues la 2ª diferencial de x, ddx: la de xz, se saca diferenciando de nuevo su

primera diferencial $xdz+dzx$, tomando á x, dz, z, dx, como otras tantas variables: y es $xddz+dzdx+zddx+dxdz = xddz+2dzdx+zddx$: la de xx en cuya primera diferencial $2xdx$ se consideran dos variables $2x$ y dx, es $2xddx+2dx^2$: y generalmente, la 2ª diferencial de x^m ó $d(mx^{m-1}dx)$, es $mx^{m-1}ddx + m(m-1)x^{m-2}dx^2$: como tambien $dd\left(\frac{x}{z}\right) = d\left(\frac{zdx-xdz}{zz}\right) =$ . . . .

$\frac{z^3ddx+z^2dxdz-z^2xddz-2z^2dxdz-z^2dxdz+2xzdz^2}{z^4} = \frac{z^2ddx-zxddz-2zdxdz+2xdz^2}{z^3}$. Lo mismo se practíca para diferenciar las cantidades en que haya ya diferenciales primeras: y así diferenciciando de nuevo zdx, resulta $d(zdx) = dzdx + zddx$: $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{dyddx-dxddy}{dy^2}$:..............

$d(\sqrt{(dz^2+dx^2)}) = d(dz^2+dx^2)^{\frac{1}{2}} =$.............. $\frac{1}{2}(dz^2+dx^2)^{-\frac{1}{2}} \times d(dz^2+dx^2) = \frac{dzddz+dxddx}{\sqrt{(z^2+dx^2)}}$;

y $d\left(\frac{ydx}{dy}\right) = d(ydxdy^{-1}) = dx + \frac{yddx}{dy} - \frac{ydxddy}{dy^2}$,

466 Si en un cálculo en que haya diferenciales primeras de distintas variables, referimos á una como à término de comparacion

todas las demas; es decir, si suponemos constante una de dichas primeras diferenciales, se desvanecerán los términos en que entren las diferenciales segundas de dicha variable que son cero (461), y el cálculo quedará mas sencillo. Por egemplo, la segunda diferencial de $\frac{dx}{dy}$ suponiendo á dx constante, es...........

$-dxdy^{-2}ddy = \frac{-dxddy}{dy^2}$: y suponiendo constante á dy, es $\frac{ddx}{dy}$; por ser en el 1.r caso $ddx=o$, y en el 2.o $ddy=o$.

Las diferenciales terceras se sacan del mismo modo que las segundas, tomando à las cantidades variables, á sus diferenciales primeras y segundas, como otras tantas variables: y lo mismo se debe practicar para las diferenciales quartas, quintas &c. advirtiendo que en todas las diferenciaciones se ha de contar por constante la diferencial que en las anteriores se haya supuesto tal. Finalmente, las cantidades omitidas en la 1.a diferenciacion (462) no alteran el càlculo de la 2.a; pues vueltas á diferenciar aquellas que eran de 2.o órden, hubieran resultado de 3.o, cuya omision nada quita á las de 2.o (442).

Modo de diferenciar las cantidades que incluyen senos, cosenos &c. las logarítmicas y esponenciales.

467 Si el seno x de un ángulo ó arco llega á ser x+dx, tendremos (271) suponiendo $r=1$, $sen\,(x+dx)=sen\,x\ cosen\,dx+sen\,dx\ cosen\,x$: y como el seno de un arco dx infinitamente pequeño se confunde con el arco ó $sen\,dx=dx$, y su coseno es el radio (263) ó $cosen\,dx=1$; será $sen\,(x+dx)=sen\,x+dx\ cosen\,x$: tomemos pues la diferencial, y resultará $d(sen\,x)=d(sen\,x+dx)=sen\,x+dx\ cosen\,x-sen\,x=dx\ cosen\,x$, *ó la diferencial de un sen x, cuyo radio es 1, es el producto de la diferencial de su ángulo multiplicada por su coseno.*

Tambien $coseno\,(x+dx)=cosen\,x\ cosen\,dx-sen\,x\ sen\,dx$ (271): luego siendo $sen\,dx=dx$, $cosen\,dx=1$; será $cosen\,(x+dx)=cosen\,x-dx\ sen\,x$, y $d(cos\,x)=d(cosen\,x+dx)=cosen\,x-dx\ sen\,x-cosen\,x=-dx\ sen\,x$: es decir, *la diferencial del coseno de un ángulo ó arco cuyo radio es 1, igual al producto negativo de la diferencial del ángulo multiplicada por su seno* En virtud de estas dos reglas y de las anteriores, tendremos que $d(sen\,4x)=4\,dx\ cos\,4x$: $d(sen\,ax)=adx\ cosen\,ax$: $d\,(cosen\,mz)=-mdz\ sen\,mz$: $d\,(sen\,x\ cosen\,z)=$

$cosen\ z \times d(sen\ x) + sen\ x \times d(cosen\ z) = cosen\ zdx\ cosen\ x - sen\ xdz\ sen\ z$: y $d(sen\ x)^m = m(sen\ x)^{m-1} d(sen\ x) = mdx\ cos\ x (sen\ x)^{m-1}$.

468 Por ser $tang\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$ (267), será $d(tang\ x) = d\left(\frac{sen\ x}{cosen\ x}\right) = \frac{dx\ cosen^2 x + dx\ sen^2 x}{cosen^2 x}$ (464) $= \frac{dx}{cosen^2 x}(cosen^2 x + sen^2 x) = \frac{dx}{cosen^2 x}$ por ser $cosen^2 x + sen^2 x = rr = 1$ (268): y será *la diferencial de la tangente de un arco ó ángulo cuyo radio es* 1, *el cociente de la diferencial del ángulo partida por el cuadrado de su coseno*: y como en $d(tang\ x) = \frac{dx}{cosen^2 x}$, es $dx = cosen^2 x \times d(tang\ x)$; *será la diferencial del ángulo el producto de la diferencial de su tangente multiplicada por el cuadrado de su coseno. Tambien es la diferencial de la cotangente de tal ángulo el cociente negativo de la diferencial de dicho ángulo partida por el cuadrado de su seno*; pues siendo $d(cotang\ x) = d\left(\frac{cosen\ x}{sen\ x}\right)$ (268) $= -\frac{dx\ sen^2 x - dx\ cosen^2 x}{sen^2 x}$ (464) $= -\frac{dx}{sen^2 x}(sen^2 x + cosen^2 x)$; será... $d(cotang\ x) = -\frac{dx}{sen^2 x}$: por ser $sen^2 x + \ldots cosen^2 x = 1$. Con las quales reglas y las hasta

aquí dadas, será fácil diferenciar qualesquiera cantidades que contengan senos, cosenos, tangentes &c.

469 Para la diferenciacion de las *cantidades logarítmicas*, sea x un número, cuyo logaritmo natural designo por lx, y haciendo $lx = z$, será $z + dz = l(x + dx)$: de donde se saca dz ó $d(lx) = l(x + dx) - lx = l\left(\frac{x + dx}{x}\right) = l\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \&c.$ (458) $= \frac{dx}{x}$ (442): *es decir que la diferencial del logarítmo de un número qualquiera* x *es su diferencial dx dividida por el mismo número* x.

470 En virtud de lo qual $d(ly) = \frac{dy}{y}$: $d\,l(a + x) = \frac{dx}{a + x}$: $dl\left(\frac{a}{a + x}\right) = d(la - l(a + x)) = \frac{-dx}{a + x}$: $dl\frac{1}{x} = d(l1 - lx) = \frac{-dx}{x}$: $dlx^2 = \ldots$ $d(2lx) = \frac{2dx}{x}$: $dlx^n = d(nlx) = \frac{ndx}{x}$: $d(lxz) = d(lx + lz) = \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{zdx + xdz}{xz}$: $d\left(l\frac{x}{z}\right) = d(lx - lz) = \frac{dx}{x} - \frac{dz}{z}$: $d\left(l\frac{c + z}{a - x}\right) = \frac{dz}{c + z} - \frac{dx}{a - x}$: $d(l(bb - yy)) =$

$$\frac{-2ydy}{bb-yy} : d\,(l\sqrt{(aa+zz)}\,) = \frac{d(\sqrt{(aa+zz)})}{\sqrt{(aa+zz)}} =$$

$$\frac{zdz}{aa+zz} : d(lz^m\sqrt[n]{(a+cxq)}^{\,p} = d(z^m + d(la+cxq)^{\frac{p}{n}} =$$

$$d(mlz+d(\frac{p}{n}l\,(a+cx^q) = \frac{mdz}{z} + \frac{\frac{p}{n}\,qxc^{q-1}\,dx}{(a+cx^q)}.$$

En la espresion d($l.ly$) supongo ly=x, será $d(l.ly)=dlx=\frac{dx}{x}$: y como $d(ly)=\frac{dy}{y} = dx$; si se sustituyen en lugar de x y dx sus valores, resultará por último, $d(l.ly)=\frac{dy}{yly}$.

471 Las cantidades *esponenciales* son aquellas que tienen por esponente una cantidad variable como x^z, y^x. Para diferenciarlas supongamos $x^z=y$, será $lx^z=ly$, y $dlx^z=\frac{dy}{y}$, ó $dy=ydlx^z$: pongamos por y su valor x^z, y tendrémos dy ó $dx^z=x^zdlx^z$; esto es, *la diferencial de una cantidad esponencial* x^z *es el producto de dicha esponencial multiplicada por* dlx^z *diferencial de su logarítmo*; de suerte que $dx^z=x^zdlx^z=x^z\left(dzlx+\ldots\ldots\frac{zdx}{x}\right)$: $d(a^x+y^z)=a^xdla^x+y^zdly^z=\ldots\ldots$ $a^xdxla+y^z\left(dzly+\frac{zdy}{y}\right)$: $d(aa+x^2)^x=$

$(aa+x^2)^x \times dl(aa+x^2)^x = (aa+x^2)^x\,(dxl\,(aa+x^2)+\frac{2xxdx}{aa+xx}$.

472 Si se hubiera de diferenciar c^x en el supuesto de ser c un número cuyo logarítmo es 1; se tendria $d(c^x)=c^x\,dlc^x=c^x\,dxlc$, y como $lc=1$, será $dc^x=c^x\,dx$: espresion de la diferencial de la base de los logarítmos hiperbólicos. Las diferenciales segundas, terceras &c. de las cantidades esponenciales, de las logarítmicas, y de las que contienen senos, cosenos, &c. se sacan conforme digímos (465).

Aplicacion del Cálculo diferencial á las líneas curvas.

473 Supuesto que una curva viene á ser un polígono de infinitos lados, de los quales uno de ellos M*m* alargado hasta T formaría la tangente TM (fig. 173); sea *pm* una ordenada infinitamente proxîma à la PM, y M*r* una paralela al ege SH: si llamamos à PM, *y*; SP, x; será P*p*=M*r*, *dx*; *mr*, *dy*; y M*m*=$\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ en el triángulo rectángulo M*mr*: y en los triángulos semejantes M*mr*, MPT se tendrá 1º *rm*:M*r*::MP:PT, ó *dy*:*dx*::*y*:PT $=\frac{ydx}{dy}$: espresion general de la subtangente de qualquiera curva, en la que sustituyendo por *y*, y $\frac{dx}{dy}$ sus correspondientes valores sa-

cados de la equacion de la curva de que se trate, saldrá el de su subtangente: y de consiguiente se tendrá el punto T por el que se podrá tirar la tangente à un punto M dado.

2.º Tambien se tiene en dichos triángulos rm:Mm::PM:TM ó $dy: \sqrt{(dx^2+dy^2)}::$ $y:\text{TM}=\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}=y\sqrt{\left(\frac{dxx}{dy^2}+1\right)}$: espresion general de la tangente. 3.º La de la subnormal se saca de los triángulos semejantes Mmr, PMR en que Mr:mr:: PM:PR, ó $dx:dy::y:\text{PR}=\frac{ydy}{dx}$. 4.º La proporcion M$r$: M$m$::PM:MR, ó $dx:\sqrt{(dx^2+dy^2)}::y:\text{PR}=\frac{y\times\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}=y\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dxx}+1\right)}$ da el valor de la normal 5.º Finalmente, tirada por S la SD paralela à PM, en los triàngulos semejantes TSD, TPM tendremos PT:PM::ST$=$ PT$-$SP:SD, ó $\frac{ydx}{dy}:y::\frac{ydx}{dy}-x:\text{SD}=y-\frac{xdy}{dx}$ Con los valores de ST y SD sacados de la equacion á la curva, se tendrán suponiendo en ellos x infinita, dos puntos T, D por donde deben pasar las asíntotas de la curva que las tenga. Con efecto, en la tangente á una distancia infinita los puntos T y D, se confundirán con C y B por donde sabemos que pasan las asíntotas de la hipérbola (410).

474 Para aplicar estas fórmulas al círculo, tomemos su equacion $yy=aa-xx$, que diferenciada ès $2ydy=-2xdx$: despejese en ella la espresion de la subtangente, y será.... $\frac{ydx}{dy}=-\frac{yy}{x}=-\left(\frac{aa-xx}{x}\right)=$ PT, poniendo por yy, aa-xx. El signo-indica que la PT se ha de tomar hácia el centro desde donde se cuentan las abscisas, al contrario de como se tomó en la fórmula para la qual se contaron desde el vértice (473). En la equacion $yy=2ax-xx$ en que igualmente se cuentan desde el vértice (348), se tiene $\frac{ydx}{dy}=\frac{yy}{a-x}=\frac{2aa-xx}{a-x}$: que da la proporcion $a-x:2a-x::$ x: PT, ó AP: PB:: CP: PT. Tambien se encuentra en la equacion $yy=aa-xx$ diferenciada, la subnormal $\frac{ydy}{dx}=-x$: y la normal $\sqrt{\left(yy+\frac{yydy^2}{dx^2}\right)}=\sqrt{(xx+yy)}=a$, radio del círculo.

475 En la paràbola, cuya equacion es $yy=px$, se tiene diferenciando, $2ydy=pdx$: luego la subtangente $\text{PT}=\frac{ydx}{dy}=\frac{2yy}{p}=2x$, poniendo px en lugar de yy: la subnormal $\frac{ydy}{dx}=\frac{py}{2y}=\frac{1}{2}p$: y así de las demas. En la

elipse cuya equacion diferenciada es $2ydy = \frac{bb}{aa}(-2xdx)$; se tiene la subtangente PT $= \frac{ydx}{dy} = -\frac{aa}{bx}\left(bb - \frac{bbxx}{aa}\right) = -\frac{a2-xx}{x}$, y la subnormal PR $= \frac{ydy}{dx} = -\frac{bbxy}{aay} = -\frac{bbx}{aa}$; ambas negativas por contarse las abcisas al reves que en la fòrmula.

476 Del mismo modo encontrarémos en la hipérbola la subtangente PT $= \frac{ydx}{dy} = x - \frac{aa}{x} = \frac{xx-aa}{x}$, y la subnormal PR $= \frac{ydy}{dx} = \frac{bbx}{aa}$. En su equacion á las asíntotas $xy = mm$, se tiene $xdy + ydx = 0$, y la subtangente $\frac{ydx}{dy} = -x$: de suerte que se debe tirar la $p't$ del lado opuesto al punto C origen de las abscisas, y así se tirará por t y m' la tangente tm'. Para determinar sus asíntotas tomemos la equacion $yy = \frac{bb}{aa}(2ax+xx)$, y diferenciada, despejemos $\frac{ydx}{dy} - x$ en su resultado $2a^2ydy = 2adx + 2xdx$, y hallarémos $\frac{ydx}{dy} - x = \frac{ax}{a+x}$, que se reduce à $a = SC$, suponiendo x infinita.

Despejando despues $y - \frac{xdy}{dx}$, sale $b = SB$: luego las asíntotas deberán pasar por C y B. Quando resulta infinito el valor de SB, siendo SC finito, es señal de que la asíntota es paralela á la ordenada PM: y lo será al ege de las abscisas, quando SB es finito y SC infinito.

477 Del triángulo rectángulo rMm (473) se saca, haciendo al radio 1, $rm : rM :: 1 : tang\ rmM = \frac{rM}{rm} = \frac{dx}{dy}$; y $rM : rm :: 1 . tang\ rMm = \frac{rm}{rM} = \frac{dy}{dx}$. Será pues, $\frac{dx}{dy}$ la espresion de la tangente del ángulo rmM que forma la curva ó su tangente en cada punto con la ordenada, y $\frac{dy}{dx}$ la de la tangente rM que forma con el ege de las abscisas: de consiguiente si despejamos en la equacion de una curva, despues de diferenciada, $\frac{dx}{dy}$ ó $\frac{dy}{dx}$; tendremos respecto de ella el valor de dichos ángulos: y al contrario, para saber en que punto forma la curva un ángulo conocido con su ordenada, se igualará el valor de la tangente de dicho ángulo con el de $\frac{dx}{dy}$, sacado de la equacion diferenciada de la curva; pues poniendo en el resultado en lugar de y su valor, el de x

será el punto que se busca, sino es imaginário ó absurdo; pues entónces en ningun punto formará la curva dicho ángulo.

478 La equacion $y^{m+n} = p^m x^n$ (429) de las parábolas de todos géneros diferenciada es $(m+n)y^{m+n-1}\,dy = np^m x^{n-1}\,dx$: de consiguiente $dx = \frac{(m+n)y^{m+n-1}dy}{np^m x^{n-1}}$, que sustituido en $\frac{ydx}{dy}$, da reduciendo, $\frac{ydx}{dy} = \frac{m+n}{n}x$. Del mismo modo se saca $\frac{ydx}{dy} = -\frac{m}{n}x$ de la equacion general $y^m x^n = c^{m+n}$ de las hipérbolas entre las asíntotas, que diferenciada es $my^m x^{n-1}dx + mx^n y^{m-1}dy = 0$, y en la que $dx = \frac{mx^n y^{m-1}dy}{ny^m x^{x-1}}$.

479 Si se diferencia la equacion $y^{m+n} = \frac{p}{a}x^m(a-x)^n$ à las elipses de todos géneros, y del resultado $(m+n)y^{m+n-1}\,dy = \frac{p}{a}(mx^{m-1}dx)$ $(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1}dx)$, se saca $dx = \frac{(m+n)y^{m+n-1}\,dy}{\frac{p}{a}(mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1}dy)}$; se tendrá la subtangente $\frac{ydx}{dy} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{(m+n)y^{m+n}dy}{\frac{p}{a}(mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1}dy} = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{(m+n)\frac{p}{a}x^m(a-x)^n}{\frac{p}{a}(mx^{m-1}(a-x)^n - nx^m(a-x)^{n-1})}$ quitando dy, y poniendo $\frac{p}{a}x^m(a-x)^n$ en lugar de y^{m+n}: quitese $\frac{p}{a}$, y divídanse los dos términos por $x^{m-1}(a-x)^{n-1}$, y se tendrá finalmente, $\frac{xdy}{dy} = \frac{(m+n)x(a-x)}{m(a-x)-nx} = \frac{(m+n)x(a-x)}{am-mx-nx}$. Por un cálculo semejante se saca tambien $\frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)x(a+x)}{am+mx+nx}$ de la equacion $y^{m+n} = \frac{p}{a}x^m \times (a+x)^n$ à las hipérbolas de todos generos.

480 En la logarítmica en la que (436) $x = Aly$, y $dx = \frac{Ady}{y}$, se tiene $\frac{ydx}{dy} = A$: es decir, que su subtangente es constante é igual siempre al módulo.

481 Supongamos ahora una curva BOC (fig. 209) con otra BMA tal que alargada la perpendicular PO hasta M, la relacion de MP al arco BOP sea espresada por una equacion qualquiera: y que se trate de tirar una tangente al punto M de la curva BMA. Sea mp una ordenada infinitamente próxîma á MP, tirese Mr paralela à OR tangente de la curva BOC, y supongo BOC$=x$, MP$=y$;

será Pp ó Mr $=dx$, $mr=dy$: y de los triángulos semejantes Mmr, TMP se sacará mr: Mr :: MP : PT ó $dy:dx::y:$ PT $=\frac{ydx}{dy}$ que será la fórmula de la subtangente que se busca, cuyo valor debe tomarse sobre la tangente RP de la curva BOC. Si esta fuese un círculo, y la BMA es tal que $y=\frac{b}{a}x$; será una cicloide (438): y pues que diferenciando, resulta $dy=\frac{bdx}{a}$; será PT $=\frac{bdx}{dy}=\frac{abx^2}{abx}=x$.

482 Si dado un círculo AHBO (fig. 200) se pidiese tirar una tangente al punto M de una curva CKM cuya relacion con el radio CM se esprese con una equacion qualquiera; tirado el radio Cmn infinitamente próxîmo á CN, descrito el arco Mr infinitamente pequeño con el radio CM, y levantando en CM la perpendicular CT: supongo AC $=$ CN $=a$, CM $=y$, y el arco AHBN $=x$; será N$n=dx$, $rm=dy$. Los sectores semejantes CNn, CMr dan CN (a) : CM (y) :: Nn (dx): M$r=\frac{ydx}{a}$: y de los triángulos semejantes CTM, Mmr, en los que rm: Mr::CM:CT ó $dy:\frac{ydx}{a}::y:$CT, se saca CT $=\frac{y^2dx}{ady}$, que es la espresion de la subtangente que se pide.

Sea la curva CKM la espiral de Arquí-

medes en la que $y=\frac{ax}{c}$ (433), y diferenciando $dy=\frac{adx}{c}$, $dx=\frac{cdy}{a}$: sustituyo este valor en CT $=\frac{y^2dx}{ady}$, y tendré CT $=\frac{cy^2dy}{a^2dy}$, que se reduce poniendo $\frac{a^2x^2}{c^2}$ en lugar de y^2, á CT $=\frac{xy}{a}=$ al arco DSM; pues CN (a): CM (y):: AHBN (x) : DSM $=\frac{xy}{a}$: luego si trazando un círculo con el radio CM $=y$, se toma CT igual al arco DSM, se tendrá el punto T desde el qual se ha de tirar la tangente TM.

483 En la espiral hiperbólica, cuya equacion $xy=ab$ (435), diferenciada es $xdy+ydx=o$, $ydx=-xdy$; se tiene CT $=-\frac{xydy}{ady}=-\frac{xy}{a}=-b=-$ AG : pues AC (a) : AN (x)::CM(y):$b=\frac{xy}{a}$. Será pues, la subtangente de la espiral hiperbólica cantidad constante como en la logarítmica.

Del método de los Máxîmos y Mínimos.

484 Para percibir la economía de este método que se dirige á encontrar las mayores

ó menores cantidades que crecen ó menguan segun cierta ley, ó que tienen en mayor grado que todas sus semejantes alguna propiedad determinada; concibamos que la ordenada PM (fig. 174) de una curva SMBs crece hasta llegar á ser la mayor BC: crecerá la subtangente en la fig. 1.ª hasta que en el punto B resulte infinita, por ser paralela la tangente BR al ege de las abscisas Ss, y menguará en la fig. 2.ª hasta desvanecerse, por confundirse la tangente con la ordenada CB. Si dicha ordenada continúa hasta s, será la subtangente negativa, que va aumentando en la fig. 2.ª y menguando en la 1.ª Las mismas observaciones tienen lugar respecto del ege Aa, y la ordenada p'M$'$ que va menguando hasta llegar á ser la menor Bc; luego 1.º *una cantidad que pasa de positiva á negativa, ó pasa por el infinito si crece, ó por cero si mengua.*

485 2.º En el punto B (fig. 1.ª) se desvanece el àngulo que la tangente forma con el ege de las abscisas Ss, y en la fig. 2.ª el que forma con el de las ordenadas: es decir, que en estos puntos es cero $\frac{dx}{dy}$ y $\frac{dy}{dx}$ (477): y como dichos puntos son los de las mayores y menores ordenadas, tendremos *que en ellos es cero la diferencial* dx *ó* dy *de la variable.* Como la espresion de qualquiera cantidad

variable se puede considerar como el valor de la ordenada de una curva; podremos inferir generalmente, que para averiguar los puntos del máxîmo y mínimo de qualquiera cantidad, se ha de diferenciar su espresion, y suponiendo su diferencial igual á cero; resultarà el valor ó valores que sustituidos en la primera espresion, darán los puntos del màxîmo ó mínimo: advirtiendo que un valor negativo supone una condicion contraria á la de la cuestion propuesta, y los imaginàrios prueban que no hay el máxîmo ni el mínimo que se busca. Por este mismo método deben determinarse los puntos en que la tangente es paralela á los eges, y *los límites* de las abscisas y ordenadas de una curva: pues unos y otros no son otra cosa que los del máxîmo y mínimo en este género.

486 De lo dicho podemos colegir que si de resultas de una operacion saliese a por valor de x, y se quisiese saber si a es un máxîmo ó mínimo; sustituiremos sucesivamente en la espresion propuesta en lugar de x, $a+q$, a, $a-q$ (q es una cantidad qualquiera): y si la sustitucion de las cantidades estremas diese resultados menores que la de la media, será a un máxîmo; si los diese mayores, será un mínimo: y si siendo el un resultado real, fuese el otro un imaginário, será al mismo tiempo un máxîmo y un mínimo.

487 Egemplo 1º *Hallar la mayor ordenada y abscisa de la elipse.* Si en su equacion $aayy=2abbx-bbxx$, que diferenciada es $2aaydy=2abbdx-2bbxdx$, suponemos $dx=o$, quedará $2aaydy=o$, ó $y=o$: pongase este valor en la equacion $yy=\frac{bb}{aa}(2ax-xx)$, y tendremos $o=2abbx-bbxx$, y $x=2a$: luego *la mayor abscisa en la elipse, contándolas desde el vértice, es el ege mayor.* Si en la equacion diferenciada hacemos $dy=o$, tendremos $o=2abbdx-2bbxdx$, donde $x=a$: cuyo valor sustituido en la equacion à la curva, la reduce à $aayy=2aabb-aabb$, que da $y=\pm b$: *será pues, el semiege menor la mayor ordenada de la elipse.*

488 2º *Desde un punto* R (fig. 173) *dado en el ege de una curva qualquiera, tirar á ella la recta mas corta que sea posible.* Sea $SP=x$, $PM=y$, $SR=t$, y $MR=u$ que consideraré como ordenada de una curva: será en el triángulo rectángulo MPR, $(MR)^2=(MP)^2+(PR)^2$ ó $uu=tt-2tx+xx+yy$: diferencio, y suponiendo $du=o$ en el resultado $2udu=-2tdx+2xdx+2ydy$, *tendré* $o=-2tdx+2xdx+2ydy$, donde poniendo el valor de ydy sacado de la equacion á la curva, me resultará el de x que se pide. Si fuese por egemplo, la parábola en la que $yy=px$, $2ydy=pdx$, $ydy=\frac{1}{2}pdx$; sustituido este valor

en la equacion sacada, resulta $o=-2tdx+2xdx+pdx$, y $\frac{1}{2}p=t-x$: luego siendo $\frac{1}{2}p$ el valor de la subnormal en la parábola (368); será $t-x=PR$ la subnormal y la menor que se puede tirar desde M à la curva, será la normal MR.

489 3º *Para dividir un número qualquiera* a *en dos partes tales que su producto sea mayor que el de otras dos qualesquiera del mismo número*; suponiendo x por una de las partes, será $a-x$ la otra, y $ax-xx$ el producto: si su diferencial $adx-2xdx$ se supone igual á cero; será $adx-2xdx=o$, $adx=2xdx$, y $x=\frac{1}{2}a$: *luego el producto de las dos mitades de* a *será el máximo.*

490 4º *Averiguar qué triángulo de un perímetro* 2p, *tendrá mayor superficie de los que se pueden trazar sobre la base* $AB=a$ (fig. 175). Si llamamos y la superficie, x uno de los lados AC que buscamos; será el otro $2p-a-x$: y tendremos (334) $y=\sqrt{(p(p-a)(p-x)(a+x-p))}$, ó cuadrando y valiendonos de los logarítmos, $2ly=lp+l(p-a)+l(p-x)+l(a+x-p)$. La diferencial de esta cantidad es $\frac{2dy}{y}=-\frac{dx}{p-x}+\frac{dx}{a+x-p}$, que se reduce suponiendo $dy=o$, á $p-x=a+x-p$, o $2p-a=2x$: luego el duplo 2x del lado AC iguala à todo el perímetro ménos la base AB: esto es, serán iguales los dos lados AC, CB,

y el triángulo que se busca, es el isósceles. Y como por igual razon debe ser isósceles el construido sobre AC que tenga mayor superficie; podremos asegurar *que el triángulo equilátero es el que incluye mayor superficie entre los de un mismo perímetro.*

591 5º *Para encontrar el paralelepípedo de mayor cabida entre los de una misma superficie cc, y altura* a; supondremos x, y, los dos lados del rectángulo de su base: y pues que de los seis rectángulos que forman su superficie, los dos tienen a por altura y x por base, otros dos la misma altura a con la base y, y los dos últimos y por base y x por altura; será toda la superficie del paralelepípedo $2ax+2ay+2xy=cc$. La solidez axy que ha de ser un maxîmo, tendrá igual à cero su diferencial, ó $axdy+aydx=o$, y $dx=-\frac{xdy}{y}$. Este valor sustituido en la equacion anterior diferenciada $o=2adx+2ady+2xdy+2ydx$, la reduce á $x=y$, lo que muestra que la base debe ser un cuadrado: y si en $cc=2ax+2ax+2xy$ ponemos x en lugar de y, sacaremos $x=-a\pm\sqrt{(aa+\frac{1}{2}cc)}$, cuyo valor positivo es el lado del paralelepípedo: el negativo no pertenece á esta cuestion.

Reducido ya el sólido à axx, averiguaremos su altura en el caso de haber de tener la mayor solidez, igualando á cero su diferencial, así; $2axdx+xxda=o$, y sustituyendo $da=-\frac{2adx}{x}$ que de ella se saca, en la equacion $4xa+2xx=cc$ despues de diferenciada, ó en $4adx+4xda+4xdx=o$; pues resulta $x=a$: de consiguiente *el paralelepípedo que buscamos, debe ser un cubo cuyo lado es la raiz cuadrada de la sesta parte de la superficie.* Con efecto, si se pone x en lugar de a en la equacion $4ax+2xx=cc$, resulta $x=\sqrt{\frac{1}{6}cc}$.

492 6º *Hallar las dimensiones de una medida cilíndrica, tal que con la menor superficie interior posible quepa en ella cierta cantidad de agua, trigo &c.* Si llamamos x el diàmetro AB (fig. 176) de su base, y su altura AD, s su cabida, y $1:c$ la razon del diàmetro á la circunferencia; será cx la periferia de la base, $cx\times y$ la superficie interior lateral, y $cx\times\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}cxx$ la de la base: de consiguiente la solidez ó cabida $s=\frac{1}{4}cxx\times=\frac{1}{4}cyxx$. De aquí se saca la superficie interior $cxy=\frac{4s}{x}$: luego si se le junta la de la base $\frac{1}{4}cxx$, serà la total $\frac{4s}{x}+\frac{cxx}{4}$: de cuya diferencial igualada á cero $-\frac{4sdx}{xx}+\frac{cxdx}{2}=o$, se saca $x=\sqrt[3]{\frac{8s}{c}}=2\sqrt[3]{\frac{s}{c}}$. En ella se encuentra tambien

$cx^3 = 8s$, y si se parte esta equacion por...... $\frac{1}{4}cyxx = s$, ó $cyxx = 4s$ que sacamos antes, resultarà $\frac{x}{y} = 2$, y $x = 2y$: luego *la medida será como se pide, si fuese el diámetro de su base duplo de su altura.*

493 7.º *Determinar el cono de mayor solidez, entre los que tienen una misma superficie conocida* s. Sea x el radio AC (fig. 177), y el lado AB, y $1:c$ la razon del diàmetro à la circunferencia: será la de la base $2cx$, su area cxx, y la superficie convexâ del cono cxy (221). Será pues, la superficie total $cxx + cxy = s$, $y = \frac{s}{cx} - x$, y la altura $CB = \sqrt{((AB)^2 - (AC)^2)} = \sqrt{\left(\frac{ss}{ccxx} - \frac{2s}{c}\right)}$: multiplíquese este valor por $\frac{1}{3}cxx$ tercio de la area de la base, y el producto $\frac{cxx}{3} \times \sqrt{\left(\frac{ss}{ccxx} - \frac{2s}{c}\right)}$ será la espresion de la solidez del cono (239.) Siendo esta un máxîmo, lo será tambien su cuadrado $\frac{1}{9}ssxx - \frac{2}{9}csx^4$: luego su diferencial $\frac{2}{9}ssxdx - \frac{8}{9}x^3csdx = 0$, y $4cxx = s$, $x = \sqrt{\frac{s}{4c}}$. Si en la equacion $y = \frac{s}{cx} - x$ ponemos $4cxx$ valor de s; resultarà $y = 3x$: y *el cono cuyo lado sea triplo del semidiámetro de la base, será el que se pide,*

De las evolutas, y radios osculadores de las curvas.

494 Si un hilo aplicado á la curva BECG (fig. 78) y à su tangente SB en B si la hubiese, se desenvuelve teniendo su estremo fijo en G, y llevándole siempre tirante; trazará el otro estremo S una curva SHM de la qual se llama *evolûta* la curva BECG, y las rectas SB, HE, MC *radios de la evolûta.* De consiguiente 1º cada radio CM es igual á la porcion CEB del arco evoluto, y à la parte constante SB de tangente si la hay, y se diferenciarà del inmediato EH en la porcion de curva EC infinitamente pequeña. 2º Cada radio se puede considerar como la prolongacion de uno de los infinitos lados que componen la curva (473), y por lo mismo será tangente suya.

495 3º La curva SHM puede considetarse formada de pequeños arcos circulares SH, HM, &c. descritos con diferentes radios EN, CM &c. perpendiculares á dichos arcos que se llaman *radios del círculo osculador ó de la evolûta*: y la BECG será el *lugar geométrico* de todos los centros de los círculos que besan la SHM.

496 4º Pues que los radios son tangentes de la evoluta é iguales à ella, se podràn

siempre determinar los puntos de una curva tirando á los de su evoluta tangentes iguales á ella; y haciendo pasar una línea por los estremos de dichas tangentes: y así qualquier curva puede concebirse engendrada por el desenvolvimiento de otra que será su evoluta:

497 5º Los radios de la evoluta se llaman tambien radios de *curvatura*: porque por ellos se averigua la que tiene una curva en qualquier punto; pues es la misma que la del círculo correspondiente cuyo radio se conoce. Y como los círculos son tanto menos curvos quanto mayores son sus radios; será tanto mayor la curvatura de la evoluta, quanto menor sea el radio: de consiguiente, *la curvatura máxîma se encontrará buscando el radio mínimo.*

498 6º Finalmente, siempre que los radios oculadores puedan ser espresados por equaciones finitas: las evolutas que pasan por el estremo de estos radios, podrán ser representadas por líneas rectas.

499 Conocida la naturaleza de una curva, veamos 1º cómo se determina el valor del radio de la evoluta para cada uno de sus puntos: y 2º cómo se encuentra la equacion de su evoluta. Para averiguar 1º el valor del radio $CM = R$ en la curva SHM, suponiendo sus ordenadas perpendiculares al ege SD;

tírensele las dos PM, pm infinitamente proxîmas, por C y M la CA y Mr paralelas al mismo ege, y los dos radios CM, Cm infinitamente proxîmos y perpendiculares al arco infinitamente pequeño Mm, que por lo mismo concurrirán en un punto C. Sea $MA = u$, $PM = y$; será $AQ = Pp = Mr = dx$, $mr = dy = du$, y $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ que llamarémos ds: y en los triángulos semejantes Mmr, MAC, tendremos $Mr\ (dx)$: $Mm(ds) :: MA(u) : MC = R = \frac{uds}{dx}$.

Y pues que quando AM aumenta de rm pasando à ser Qm, la CM que es entonces Cm, no varía; será su diferencial cero: luego

$$d\left(R = \frac{uds}{dx}\right) = \frac{udxdds + dxduds - udsddx}{dx^2} = 0,$$

y multiplicando por dx^2 y poniendo dy en lugar de du; $udxdds + dxdyds - udsddx = 0$: de donde se saca $u = \frac{dsdydx}{dsddx - dxdds}$. Será pues, $R = \frac{uds}{dx} = \frac{dyds^2}{dsddx - dxdds}$, donde poniendo por ds^2, $dx^2 + dy^2$; y por dds, $\frac{dxddx + dyddy}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}$; resulta despues de multiplicar por $(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}$ numerador y denominador y reducir, $R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyddx - dxddy} = \frac{ds^3}{dyddx - dxddy}$: espresion del radio de curvatura, que suponiendo ds constante, se reduce á $R=\frac{dsdy}{ddx}$: suponiendo dy constante es $R=\frac{ds^3}{dyddx}$: y finalmente, suponiendo como se acostumbra, dx constante, es $R=\frac{ds^3}{-dxddy}=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}=\ldots\ldots\ldots$ $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy}$

500 Si las ordenadas no son perpendiculares sino que salen de un punto P (fig. 207); tiradas las PM, pm infinitamente proxîmas, las perpendiculares CA, Ca, y descrito desde P el arco Mr: llamando PM, y; MA, z; Mr, dx; será $mr=dy$, $Mm=dx^2+dy^2$, y en los triángulos semejantes MAC, mMr tendré $Mr\,(dx):mr\,(dy)::AM\,(z):AC=\frac{zdy}{dx}=Ca$, por ser infinitamente pequeña la diferencia Ao de CA y Ca. Tambien $ao=\frac{zdy}{y}$ en los triángulos semejantes PMr, Cao, en los que $PM:Ca::Mr:ao$: y como la diferencial de MC ó $dz=ma-MA=mr-ao=dy-ao$; será $dz=dy-\frac{zdy}{y}=\frac{ydy-zdy}{y}$.

Esto supuesto, los triángulos semejantes MAC, mMr dan $Mr(dx):Mm(\sqrt{(dx^2+dy^2)})::$

$MA(z):MC=\frac{z\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$: cuya diferencial, tomando à dx por constante, igualada á cero como en el caso anterior, da z ó $MA=\frac{dz(dx^2+dy^2)}{-dyddy}=\frac{(ydy-zdy)(dx^2+dy^2)}{-ydyddy}$ poniendo por dz, $\frac{ydy-zdy}{y}$. Despejese z, y resultará z ó $MA=\frac{y(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2-yddy}$: y de consiguiente $CM=\frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3+dxdy^2-ydxddy}$, fórmula del radio de la evoluta quando las ordenadas salen de un mismo punto P: la qual se reduce á la anterior (499) suponiendo $y=x$, en cuyo caso no queda en el denominador mas término que $-dxddy$.

501 2º La equacion de la evoluta se encuentra tirando (fig. 208) perpendicular al ege la CD que llamaremos z, y á la BD, u: será CD ó $z=AP=AM-MP=\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}-y$: y BD ó $u=AC+SP-SB=x+CA-SB$. De los triángulos semejantes MPN, MAC se saca $MP:PN::MA:AC$ ó $y:\frac{ydx}{dx}::\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}:AC=\frac{dy(dx^2+dy^2)}{-dxddy}$: y como el valor de SB se encuentra suponiendo $x=0$ en la

espresion del radio de la evoluta, si le representamos por a, será u ó $BA = x + \frac{dy(dx^2+dy^2)}{-dxddy} - a$: con cuyos valores y la equacion á la curva, será fácil encontrar la de la evoluta.

502 *Encontremos ahora el radio de curvatura del círculo.* Diferenciada su equacion $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, es $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$: luego si tomamos á dx por constante, será $ddy = \frac{-aadx^2}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}$, $dy^2 = \frac{aadx^2 - 2axdx^2 + xxdx^2}{2ax-xx}$, ... $dx^2+dy^2 = \frac{aadx^2}{2ax-xx}$, y $R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, será sustituyendo estos valores, y partiendo ambos términos por $(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$, ...
$\frac{(aadx^2)^{\frac{3}{2}}}{aadx^3} = \frac{aadx^2 \sqrt{aadx^2}}{aadx^3} = a$: es decir, que el radio de la evoluta en el círculo es su mismo radio, de suerte que la evoluta se reducirá à un punto que es el centro.

503 *Para calcular el radio de curvatura de la parábola, elipse é hipérbola*; igualemos la fórmula de la normal $\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (473, 4°) á n: y será $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \frac{ndx}{y}$, y $(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{n^3dx^3}{y^3}$: si este valor se sustituye en la espresion del radio, la reducirá à $R = \frac{n^3dx^2}{-y^3ddy}$. Si diferenciamos ahora la equacion general de las secciones cónicas $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$ (425); tendremos $2ydy = pdx \pm \frac{pxdx}{a}$, y volviendo à diferenciar tomando à dx por constante, $2yddy + 2dy^2 = \pm \frac{pdx^2}{2a}$, ó $yddy = \pm \frac{pdx^2}{2a} - dy^2$, y multiplicando por yy, $y^3ddy = \pm \frac{p}{2a}yydx^2 - yydy^2$: pongase en esta equacion el valor de $yy = px \pm \frac{pxx}{2a}$, y el de $yydy^2 = \left(\frac{pdx}{2} \pm \frac{pxdx}{2a}\right)^2$ sacado de $2ydy = pdx \pm \frac{pxdx}{2a}$; y resultará $y^3ddy = \pm \frac{pdx^2}{2a} \times \left(px \pm \frac{pxx}{2a}\right) - \left(\frac{pdx}{2} \pm \frac{pxdx}{2a}\right)^2$ que se reduce à $y^3ddy = -\frac{ppdx^2}{4}$: luego $R = -\frac{n^3dx^2}{-y^3ddy} = \frac{4n^3}{pp} = \frac{n^3}{\frac{1}{4}pp}$: y *el radio de curvatura en las secciones cónicas será igual al cubo de la normal partido por el cuadrado de la mitad del parámetro.*

Si se saca por la fórmula de la normal

$\frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}=n$, la que corresponde à la equacion $yy=px\pm\frac{pxx}{2a}$, y se busca despues su valor en el vértice en donde $x=o$; se encontrará $n=\frac{1}{2}p$: de consiguiente será entónces $R=\frac{\frac{1}{8}p^3}{\frac{1}{4}pp}=\frac{1}{2}p$, y *el radio de curvatura de las secciones cónicas en el vértice será la mitad del parámetro.*

504 Busquemos ya la equacion de la evoluta de una de estas curvas, por egemplo de la parábola, cuya equacion diferenciada $dy=\frac{pdx}{2\sqrt{px}}$, da $dy^2=\frac{pdx^2}{4x}$, y $ddy=\frac{-pdx^2}{4x\sqrt{px}}$ ó $-ddy=\frac{pdx^2}{4x\sqrt{px}}$. Sustituido este valor en $MA=\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, (501) suponiendo dx constante, y el de $MP=\sqrt{px}$; será CD ó $z=MA-MP=\frac{4x\sqrt{px}}{p}$, y BD ó $u=SP+AC-SB=3x$, poniendo por AC su valor $\frac{1}{2}p+2x$(366 y 368), y por SB, $\frac{1}{2}p$(503): luego $x=\frac{1}{3}u$, y la equacion $z=\frac{4x\sqrt{px}}{p}$ se mudará en $z=\frac{4}{3}u\sqrt{\frac{pu}{3p^2}}$, de donde se saca $u^3=\frac{27}{16}pz^2$ equacion à la segunda parábola cúbica, que

resulta de suponer en $y^{m+n}=p^m x^n$, $m=1$, $n=2$ (429), la qual será evoluta de la ordinaria, y su parámetro es $\frac{27}{16}$ del de la parábola dada.

Puntos de Inflexîon.

505 Todo punto M (fig. 179) en el que una curva de cóncava se muda en convexâ, se llama *punto de inflexîon.* En ellos la TM alargada será tangente à un tiempo à los dos ramos SM, *sm*; y por lo mismo tendrá la curva dos elementos M*o*, *om* en línea recta. Los radios que à ellos se tiren perpendiculares, serán paralelos, y no se encontrarán sino à una distancia infinita. Sin embargo, habrá curvas en donde sea tan repentina la inflexîon, que dichos elementos se vengan à confundir en uno lo mismo que los radios, en términos que juntándose en su mismo origen, se reduzcan à cero.

506 Luego en los puntos de inflexîon debe ser cero ó infinito el radio de curvatura, esto es, $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}=o$ ó $=\infty$: y dividiendo ambos términos por dx^3, $\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{ddy}{dx^2}}=o$ ó $=\infty$. Para esto debe ser cero ó infinito el

denominador $-\frac{ddy}{dx^2}$: (440) de consiguiente para determinar los puntos de inflexîon de una curva se ha de diferenciar dos veces su equacion, tomando à dx por constante, y sacando en cantidades finitas el valor de $\frac{-ddy}{dx^2}$, se igualará à cero ó al infinito, y de la equacion que resulta, junto con la de la curva se inferirán los valores de x, y correspondientes al punto ó puntos de la inflexîon.

507 Quando las ordenadas salen de un mismo punto, la fórmula $\frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3+dxdy^2-ydxddy}$ ó $\frac{y\left(\frac{dx^2+dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx^2+dy^2-yddy}{dx^2}}$ es cero ó ∞; luego....... $\frac{dx^2+dy^2-yddy}{dx^2}=o$ ó ∞ Si se supone $y=\infty$, son paralelas las ordenadas y la fórmula se reduce à $\frac{-ddy}{dx}=o$ ó $=\infty$.

508 Si se hubiese de hallar el punto de inflexîon de la curva SFK (fig. 180) cuyo diámetro es S*s*, y cuya equacion es $axx=xxy+aay$, ó $y=\frac{axx}{xx+aa}$, siendo SE, x; y EF, y: diferencio la equacion, y tendré $dy=\frac{2a^3xdx}{(xx+aa)^2}$: vuelta esta à diferenciar, tomando à dx por constante, será $ddy=$............ $\frac{2a^3dx^2(xx+aa)^2-8a^3xxdx^2(xx+aa)}{(xx+aa)^4}$, que se reduce partiendo numerador y denominador por $xx+aa$, haciendo las operaciones indicadas y dividiendo despues por dx^2, à.......... $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{2a^3xx+2a^5-8a^3xx}{(xx+aa)^3}=-\frac{6a^3xx+2a^5}{(xx+aa)^3}$.......... Igualo à cero esta cantidad, y me saldrá $3xx=aa$, y $x=a\sqrt{\frac{1}{3}}$: luego $y=\frac{1}{4}a$.

509 Sirva de 2º exemplo averiguar el punto de inflexîon de la curva cuya equacion es $y=a+(x-a)^{\frac{3}{5}}$ ó $dy=\frac{3}{5}(x-a)^{-\frac{2}{3}}dx$ diferenciando: vuelta à diferenciar tomando por constante à dx, da $ddy=-\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}}dx^2$, y $\frac{ddy}{dx^2}=\frac{-6}{25\sqrt[5]{(x-a)^7}}$, valor que igualado á cero produce $6=o$, que nada significa. Se igualará pues, al infinito, y será su denominador cero, lo mismo que qualquiera de sus potencias: luego $25\sqrt[5]{(x-a)^7}=o$, de donde se saca $x=a$.

Por este mismo método se averiguan los puntos de *retroceso* de las curvas, exâminando en la vencidad de dichos puntos el camino que sigue la curva en ellos.

CÁLCULO INTEGRAL.

510 Este cálculo, inverso del Diferencial porque busca las cantidades por medio de sus elementos; manifiesta con la letra S la *integracion* de dichas cantidades, que viene à ser la *suma* de sus elementos: de suerte que Sdx, $Smzdz$, muestran las *integrales* de dx, y de $mzdz$. Las cantidades que no provienen de una diferenciacion exâcta, no pueden ser integradas: las diferenciales de senos, arcos de círculo, y demas trascendentes se integran por aproxîmacion. Llamarémos *funcion* de una cantidad variable qualquiera espresion en donde dicha cantidad se encuentre como quiera que sea.

De las diferenciales con una sola variable capaces de integracion exâcta.

511 Pues que $ax^m dx$ es la diferencial de $\frac{ax^{m+1}}{m+1}$ (463), será esta la integral de $ax^m dx$, ó $Sax^m dx=\frac{ax^{m+1}}{m+1}$: luego *qualquier monomio se integra aumentando de* 1 *el esponente* m *de la variable, y dividiendo el resultado por el esponente aumentado y por la diferencial.* De suerte que la integral de $azdz$, ó $Sazdz$ es

$\frac{az^{1+1}dz}{(1+1)dz}=\frac{az^2}{2}$: la de $12x^2dx$ ó $S12x^2dx$ es $\frac{12x^{2+1}dx}{(2+1)dx}=4x^3$: y en general $S\frac{ax^{m-1}dx}{b}=\ldots\frac{ax^{m-1+1}dx}{b(m-1+1)dx}=\frac{ax^m}{mb}$. Efectivamente, si se diferencian $\frac{az^2}{2}$, $4x^3$ y $\frac{ax^m}{mb}$; resulta $azdz$, $12x^2dx$ y $\frac{ax^{m-1}dx}{b}$.

512 Siendo $dx=x^0dx$, será $Sdx=\frac{x^{0+1}dx}{(0+1)dx}=x$: $Sadx=\frac{ax^{0+1}dx}{(0+1)dx}=ax$: $Sadx\times\sqrt[3]{x}=Sadx\times x^{\frac{1}{3}}=S\,ax^{\frac{1}{3}}dx=\frac{ax^{\frac{1}{3}+1}dx}{(\frac{1}{3}+1)dx}=\ldots\ldots\frac{3ax^{\frac{4}{3}}}{4}=\frac{3a}{4}\sqrt[3]{x^4}$. Del mismo modo se aplica la regla general à otros qualesquiera monomios, tengan ó no radicales. Pero falla quando el esponente de la variable es -1: pues integrando $x^{-1}dx$, resulta $\frac{x^{-1+1}dx}{(-1+1)dx}=\frac{x^0}{0}$,........ cantidad infinita: pero como $dx=\frac{dy}{y}$ sabemos (470) que es la diferencial del logarítmo hiperbólico de x, será su integral lx, ó $Sx^{-1}dx=lx$: y $S\frac{dx}{x}=S{-x^{-1}}dx=-lx=l\frac{1}{x}$; pues $dl\,\frac{1}{x}$ es $-\frac{dx}{x}$: y se deberán integrar por los logarít-

mos todos los casos que ocurran de esta naturaleza.

Modo de integrar por la regla general las cantidades complexâs de una sola variable.

513 Quando estas cantidades no están en el denominador ni incluyen potencias de cantidades complexâs, se integran exâctamente integrando cada término por sí: $Scx^2dx + \frac{bdx}{a} - cx^3dx + \frac{bdx}{x^3}$ ó $bdx^{-3}dx$, es $\frac{cx^3}{3} + \frac{bx}{a} - \frac{cx^4}{4} - \frac{bx^{-2}}{2}$ ó $-\frac{b}{2x^2}$. Tambien admiten integracion exâcta aun quando incluyen potencias complexâs, como no estén en el denominador, y su esponente sea un número entero y positivo; pues subidas á las potencias, se integra despues cada término por sí: por egemplo, $Sdx(a + cx^4)^2$ que equivale á $S(aadx + 2acx^4dx + ccx^8dx)$, es $aax + \ldots \ldots \frac{2acx^5}{5} + \frac{ccx^9}{9}$. En $Sadx(b + x^n)^3(c + x^m)^4$ se hacen las operaciones indicadas, y se integran despues los términos que resulten.

514 Podrá no obstante ser integrada por la regla general qualquiera cantidad complexâ elevada á una potencia negativa ó fraccionaria, si está multiplicada por la diferencial

de la cantidad que se ha de elevar, prescindiendo de las constantes que la multiplican ò la parten. Así sucede á $kdx(a + bx)^m$, en donde kdx es la diferencial de $a + bx$ multiplicada por $\frac{k}{b}$: y por eso considerando á $a + bx$ como una sola variable, será $Skdx(a + bx)^m = \frac{kdx(a + bx)^{m+1}}{(m+1)d(a+bx)} = \frac{k(a + bx)^{m+1}}{b(m + 1)}$. Tambien es integrable $\frac{aadx + 2axdx}{\sqrt{(ax+xx)}} = (aadx + \ldots 2axdx)(ax + xx)^{-\frac{1}{2}}$, por ser $aadx + 2axda$ la diferencial de $ax + xx$ multiplicada por a: y así $S(aadx + 2axdx)(ax + xx)^{-\frac{1}{2}} = \ldots\ldots\ldots \frac{(aadx + 2axdx)(ax + xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(adx + 2xdx)} = 2a(ax + xx)^{\frac{1}{2}}$.

515 Luego generalmente, qualquiera diferencial binomia de esta forma $kx^mdx(a + bx^n)^p$ podrá ser integrada exâctamente 1.º quando el número p es entero y positivo, sean m y n los que quieran. 2º Quando el esponente de la variable x que está fuera del paréntesis, es menor en 1 que el esponente de la otra x: es decir, que se podrá integrar la cantidad $kx^{n-1}dx(a + bx^n)^p$, sean n y p los números que se quieran; pues en tal caso será $kx^{n-1}dx$ diferencial de $a + bx^n$ multiplicada por $\frac{k}{nb}$: luego &c. (514).

516 3º Quando dividiendo el esponente m de la primera x aumentado de 1, por el esponente n de la segunda, resulta un número entero y positivo de cociente: como sucede à la cantidad $kx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$, donde el cociente de $3+1$ partido por 2, es 2. Para integrarla supongo $a+bx^2=z$, y será $x^2=\frac{z-a}{b}$: y pues que x^3dx que precede al binomio, dejando à parte las constantes, resulta de diferenciar x^4 cuadrado de x^2; cuadraré la equacion $x^2=\frac{z-a}{b}$, y diferenciando el resultado $x^4=\left(\frac{z-a}{b}\right)^2$; saldrá $4x^3dx=2\left(\frac{z-a}{b}\right)\times\frac{dz}{b}$: ó $x^3dx=\left(\frac{z-a}{b}\right)\times\frac{dz}{2b}$. Si pongo aora en la cantidad dada en lugar de x^3dx, y $a+bx^2$ sus valores en z; tendré $k\left(\frac{z-a}{2bb}\right)dz\times z^{\frac{4}{5}}$ ó.... .... $\frac{kz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2bb}-\frac{kaz^{\frac{4}{5}}dz}{2bb}$: cuya integral es..... $\frac{kz^{\frac{4}{5}+2}}{(\frac{4}{5}+2)2bb}-\frac{kaz^{\frac{4}{5}+1}}{(\frac{4}{5}+1)2bb}$: ó por ser $\frac{kz^{\frac{4}{5}+1}}{2bb}$........ multiplicador comun,..... $\frac{kz^{\frac{4}{5}+1}}{2bb}\left(\frac{z}{\frac{4}{5}+2}-\frac{a}{\frac{4}{5}+1}\right)=\frac{kz^{\frac{4}{5}+1}}{2bb}(\frac{5}{14}z-\frac{5}{9}a)$: sustituyo en lugar de z su valor; y saldrá por último, $Skx^3dx(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}=\frac{k}{2bb}((a+bx^2)^{\frac{4}{5}+1}\times\frac{5}{14}(a+bxx)-\frac{5}{9}a))$, que es la integral que se busca.

517 Si el binomio no tuviese la dicha condicion, podrá las mas veces reducirse à otro igual que la tenga, dividiendo sus dos términos por la potencia de x que encierra, y multiplicando la cantidad de afuera para compensar esta division, por dicha potencia de x elevada al grado que indica el esponente total del binomio. Por egemplo, para integrar $\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}=aa\,x^0dx(aa+xx)^{-\frac{3}{2}}$, donde $0+1$ no es divisible por 2, partiré por x^2 el binomio, y multiplicaré por $(x^2)^{-\frac{3}{2}}=x^{-3}$ la cantidad de afuera, y tendré $aax^{-3}dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$, espresion integrable por dividir exâctamente -2 á $-3+1=-2$. Supongo pues, $aax^{-2}+1=z$, y será $x^{-2}=\frac{z-1}{aa}$: y como $x^{-3}dx$ es la diferencial de x^{-2} sin las constantes, diferenciaré $x^{-2}=\frac{z-1}{aa}$, y saldrá $-2x^{-3}dx=\frac{dz}{aa}$, y $x^{-3}dx=-\frac{dz}{2aa}$: luego sustituyendo, será $aax^{-3}dx(aa^{-2}+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{-aa\times dz}{2aa}\times z^{-\frac{3}{2}}=$..............

$\frac{-z^{-\frac{3}{2}}dz}{2}$, cuya integral es $\frac{-z^{1-\frac{3}{2}}}{2(1-\frac{3}{2})} = z^{-\frac{1}{2}}$. Pongo por z su valor, y tendré $Saax^3dx(aax^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}} = (aax^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{(aax^{-1}+1)}} = \frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}$. Quando hay en los dos términos del binomio potencias de x, se practica lo mismo dividiendo por una de ellas. Las cantidades trinomias, quadrinomias &c. á escepcion de algun otro caso estraordinario, solo en los esplicados (513 *y sig.*) admiten integracion exâcta.

518 Fuera de los casos mencionados en que las diferenciales binomias admiten integracion exâcta, se acude à las series para conseguirla à lo ménos proxîma. Si se reduce por egemplo, el binomio de la cantidad $2adx(a^2-x^2)^{-1}$ à la serie convergente $\frac{1}{a^2}+\frac{x^2}{a^4}+\frac{x^4}{a^6}+\frac{x^6}{a^8}+$ &c. (445), será $2adx(a^2-x^2)^{-1} = 2\left(\frac{dx}{a}+\frac{x^2dx}{a^3}+\frac{x^4dx}{a^5}+\frac{x^6dx}{a^7}+\&c\right)$ é integrando cada término por sí, $S2adx(a^2-x^2)^{-1} = 2\left(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\frac{x^7}{7a^7}+\&c.\right)$

Integracion de las diferenciales con dos ó mas variables.

519 Pues que $d(xy)$ es $ydx+xdy$ (462); será $S(ydx+xdy)=xy$. En $S(ydx+xdy+bdz)$, sacada la integral xy de $ydx+xdy$, y restada su diferencial de $ydx+xdy+bdz$, saldrá de residuo bdz, cuya integral bz añadida á xy, dará $xy+bz=S(ydx+xdy+bdz)$. Del mismo modo se integra la cantidad $ydx+xdy+bdy$, tomando la integral de los dos términos $xdy+bdy$ que es $xy+by$; pues $d(xy+by)=ydx+xdy+bdy$. Luego para integrar una diferencial con muchas variables, quando es posible, *se deben integrar los términos afectados de una misma variable, mirando las otras como constantes: se diferencia despues el resultado contando con todas las variables que encierra, y se resta lo que salga, de la cantidad propuesta. Si nada queda, se tendrá la integral que se busca: y si queda, se tomará su integral, que se añadirá á la anterior, continuando así hasta tenerla completa.*

En virtud de esta regla se hallará que $S(ny^mx^{n-1}dx+mx^ny^{m-1}dy)=x^ny^m$: $S\frac{ydx+xdy}{y^2} = S(y^{-1}dx-xy^{-2}dy)=\frac{x}{y}$. $S\left(\frac{anx^{n-1}ydx-amx^ndy}{y^{m+1}}\right)$

$=\frac{ax^n}{y^m}$: y $S(x^3dy+3x^2ydx+x^2dz+2xzdx+xdx+y^2dy)=x^3y+x^2z+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3$.&c.

520 Para conocer si una diferencial de muchas variables es ó no integrable; sea X la integral de la diferencial $Pdx+Qdy$ de dos variables, en la que P y Q son funciones de x, y: representemos por $\overset{x}{d}(X)$, $\overset{y}{d}(X)$ las diferenciales de X haciendo variar en la primera espresion á x, y en la segunda á y: y por $\overset{x}{\underset{y}{d}}(X)$ la diferencial de X haciendo primero variar à x, y despues á y. Es claro que $Pdx=\overset{x}{d}(X)$, y $Qdy=\overset{y}{d}(X)$: y que haciendo variar la cantidad y que contiene P, y la cantidad x que contiene Q; será $\overset{y}{d}(P)\,dx=\overset{x}{\underset{y}{d}}(X)$, y $\overset{x}{d}(Q)dy=\overset{y}{\underset{x}{d}}(X)$. La diferencial de X que se encuentra, variando primero x y despues y, debe ser igual á la diferencial de X que resulta variando primero y, y despues x: luego $\overset{x}{\underset{y}{d}}(X)=\overset{y}{\underset{x}{d}}(X)$: de consiguiente $\overset{y}{d}(P)dx=\overset{x}{d}(Q)dy$, y $\frac{\overset{y}{d}(P)}{dy}=\frac{\overset{x}{d}(Q)}{dx}$. De donde se infiere que *si una diferencial*

$Pdx+Qdy$ de dos variables es integrable, la diferencial de P variando á y, dividida por dy; debe ser igual á la diferencial de Q variando á x, dividida por dx. Asi se ve en la diferencial $ydx+xdy$, en la que $P=y, Q=x$; pues $\frac{\overset{y}{d}(P)}{dy}=\frac{dy}{dy}=1$, y $\frac{\overset{x}{d}(Q)}{dx}=\frac{dx}{dx}=1$; prueba de que dicha diferencial es integrable.

521 Sea ahora X la integral de una diferencial $Pdx+Qdy+Rdz$ de tres variables: suponiendo constante à z, se tiene $dz=0$, y de consiguiente $dX=Pdx+Qdy$, equacion en la que $\frac{\overset{y}{d}(Q)}{dy}=\frac{\overset{x}{d}(Q)}{dx}$. Si se toma á y por constante, $dy=0$, $d(X)=Pdx+Rdz$, y $\frac{\overset{x}{d}(P)}{dx}=\frac{\overset{z}{d}(R)}{dz}$. Haciendo constante à x, $dx=0$, $dX=Qdy+Rdz$, y $\frac{\overset{z}{d}(Q)}{dz}=\frac{\overset{y}{d}(R)}{dy}$. Luego quando una diferencial $Pdx+Qdy+Rdz$ de tres variables admite integracion exâcta, ha de tener idénticas las tres equaciones $\frac{\overset{x}{d}(P)}{dy}=\frac{\overset{x}{d}(Q)}{dx}$, $\frac{\overset{z}{d}(P)}{dz}=\frac{\overset{x}{d}(R)}{dx}$, $\frac{\overset{x}{d}(Q)}{dz}=\frac{\overset{y}{d}(R)}{dy}$. Por el mismo método se encuentran las que son necesarias

para diferenciales de mayor número de variables.

Integracion de las diferenciales segundas, terceras &c.

522 Por lo que dejamos dicho (465), una diferencia primera es la integral de su segunda: y esta lo es de su tercera, y así de las demas: por lo mismo las diferencias segundas, terceras &c. se deben integrar por las mismas reglas que las primeras: de suerte que $Sddx = dx$, $Sdxddx = \frac{1}{2}dx^2$.

Si se hubiese de integrar la diferencial segunda $x^n ddx + nx^{n-1}dx^2$, que tiene dos variables; suponiendo dx constante, se reducirá á $x^n ddx$, cuya integral es $x^n dx$: diferencio esta integral haciendo variar á x y dx; y será $d(x^n dx) = x^n ddx + nx^{n-1}dx^2$, que es justamente la diferencial propuesta: luego $S(x^n ddx + nx^{n-1}dx) = x^n dx$.

523 Á muchas de las mencionadas integrales faltan las constantes que se despreciaron en su diferenciacion (461): y para determinarlas *hay que igualar á cero la variable* x *de la integral sacada; y lo que resulte mudándole los signos, será la constante:* quando sale cero es señal que no hay constantes que añadir á la integral hallada.

Dejando para despues la aplicacion de esta regla, la demostraremos suponiendo que sea Q una integral completa quando x vale a,

y que siendo P la integral incompleta que da el cálculo, haya de completarse con la constante ó constantes C que no conocemos. Si sustituyendo en P a en lugar de x, resulta A, será A+C la integral completa en el caso de $x = a$; y tendremos $Q = A + C$. Pero como Q nos es por lo comun incognito, le suponemos cero para descubrir el valor de C: pues siendo entónces $o = A + C$, ó $C = -A$; será la constante lo que resulte de suponer $x = o$, tomado con signos contrarios.

524 De consiguiente, si la integral es cero, no quando $x = o$, sino quando tiene un valor determinado a; será entonces la constante la misma integral que da el cálculo, poniendo en ella a en lugar de x. Pues que $Sx^2dx = \frac{x^3}{3}$ es $\frac{a^3}{3}$ quando $x = a$; será $Q = \frac{a^3}{3} + C$, y como suponemos $Q = o$, tendremos $o = -\frac{a^3}{3} + C$, $C = -\frac{a^3}{3}$, y la integral completa $Q = \frac{x^3 - a^3}{3}$. *Si* $S - x^n dx = -\frac{x^{n+1}}{n+1}$ es cero quando $x = a$; será $\frac{-a^{n+1}}{n+1} + C = o$, $C = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, y la integral completa $Q = \frac{a^{n+1} - x^{n+1}}{n+1}$. Finalmente, si $Sxdx(c^3 + \ldots\ldots$

$bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(c^3+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$ fuese cero quando $x=a$; sería $\frac{(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}+C=0$, $C=-\frac{(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}$, y

$$Q=\frac{(c^3+bx^2)^{\frac{3}{2}}-(c^3+ba^2)^{\frac{3}{2}}}{3b}.$$

Integracion de las diferenciales que llevan senos y cosenos, y de las esponenciales.

525 Pues que demostramos (467 *y sig.*) que $d(\text{sen } z)=dz\cos z$, $d(\cos z)=-dz\,\text{sen } z$; será la integral de $dz\cos z$, $\text{sen } z$, ó $\text{sen } z+C$: $S-dz\,\text{sen } z=\cos z+C$. Para integrar $dz\cos 3z$, se escribirá así, $\frac{3dz\cos 3z}{3}$: y será su integral $\frac{\text{sen } 3z}{3}+C$: $dz\,\text{sen } 3z$ se transforma en $\frac{-3dz\,\text{sen } 3z}{-3}$, y es su integral $\frac{\cos 3z}{-3}+C$: en general, $Sdz\,\text{sen } mz=S\frac{-mdz\,\text{sen } mz}{-m}=-\dots\dots\frac{\cos mz}{m}+C$.

Si fuese la diferencial $(\text{sen } z)^n dz\cos z$ que viene à ser $(\text{sen } z)^n d(\text{sen } z)$; se integrará por la regla general así; $\frac{(\text{sen } z)^{n+1}}{n+1}+C$. $S(\text{sen}$

$mz)^n dz\cos mz=S\left(\frac{\text{sen } mz^n mdz\cos mz}{m}\right)=S\frac{\text{sen } mz^n d(\text{sen } mz)}{m}$, es $\frac{(\text{sen } mz)^{n+1}}{m(n+1)}+C$: y $Sm(\cos mz)^n dz\,\text{sen } mz=Sm\frac{(\cos mz)^n\times mdz\,\text{sen } mz}{-m}$ es $\frac{(\cos mz)^{n+1}}{-m(n+1)}+C$.

526 *La integral de las diferenciales esponenciales debe ser la misma diferencial dividida por la diferencial de su logarítmo*: regla opuesta á la que dimos (471) para diferenciarlas: porque si la diferencial de c^x es $c^x dx$ (471), será $Sc^x dx=c^x$: asimismo.... $Sx^z dzlx+x^{z-1}zdx$ es x^z; porque siendo.... $dzlx+\frac{zdx}{x}$ la diferencial del logarítmo x^z, si divido por ella $x^z dzlx+x^{z-1}zdx=x^z dzlx+\frac{x^z zdx}{x}$; tendré de cociente x^z.

Integracion de las cantidades logarítmicas.

527 Para integrar $\frac{dx}{xlx}$, haremos $lx=y$, y será (470) $\frac{dx}{x}=dy$, $\frac{dx}{xlx}=\frac{dy}{y}$: y como $S\frac{dy}{y}$.. es ly (512); si ponemos por y su valor, tendremos $S\frac{dx}{xlx}=l\,lx$. En $m(lx)^{m-1}\frac{dx}{x}$, suponiendo $lx=y$, sacarémos $\frac{dx}{x}=dy\,(lx)^{n-1}=$

y^{m-1}: luego $Sm(lx)^{m-1}\frac{dx}{x} = Smy^{m-1}dy$, será y^m ó $l(x)^m$, poniendo por y, lx. $S\frac{dx}{a+x} = \ldots$ $l(a+x)$ ó $l(a+x)+C$: $S\frac{2xdx}{a^2+x^2} = l(a^2+x^2)+C$. En general, *quando el numerador de un quebrado es la diferencial del denominador, la integral es el logarítmo del denominador.*

528 Á veces es menester multiplicar ó partir los dos términos del quebrado por cantidades constantes para que el numerador quede diferencial cabal del denominador: en cuyo caso será su integral el logarítmo del denominador partido ó multiplicado por las constantes. Sirva de egemplo $\frac{axxdx}{a^3+x^3}$, à la que por ser $3x^2dx$ diferencial de a^3+x^3, la daré esta forma $\frac{a}{3}\times\frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$: y será su integral $\frac{a}{3}l(a^3+x^3)+C$. Tambien $S\frac{dx}{a-x} = S\frac{1}{-1}\times\frac{-1dx}{a-x} = -1\,l(a-x)+C = l(a-x)^{-1}+C = l\left(\frac{1}{a-x}\right)+C$. $S\frac{xdx}{aa+xx} = S\frac{1}{2}\times\frac{2xdx}{aa+xx} = \frac{1}{2}l(aa+xx)+C = l(\sqrt{(aa+xx)})+C$: $S\frac{ax^{n-1}dx}{k+bx^n} = S\frac{a}{bn}\times\ldots\ldots\frac{b^nx^{n-1}dx}{k+bx^n} = \frac{a}{bn}l(k+bx^n)+C = l(k+bx^n)^{\frac{a}{bn}}+C$.

529 Hay cantidades que no admiten esta preparacion, en las que es preciso multiplicar por una funcion de x, tal que el producto sea la diferencial de dicha funcion; pues dividiendo despues por el resultado, quedará reducida la diferencial á logarítmica. Si se multiplíca $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$ por $x+\sqrt{(xx-1)}$, el producto $\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}+dx$ es justamente la diferencial del multiplicador $x+\sqrt{(xx-1)}$: luego $S\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}} = S\frac{dx+\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}}{x+\sqrt{(xx-1)}} = l(x+\ldots\ldots\sqrt{(xx-1)})+C$. Tambien sacarémos la integral de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, multiplicando ambos términos por $\sqrt{-1}$: pues resulta $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}}$, cuya integral es $\sqrt{-1}\times l(x+\sqrt{(xx-1)})+C$ en virtud de lo dicho. De consiguiente, la integral de $\frac{dx}{\sqrt{(xx\pm aa)}}$ es $l(x\pm\sqrt{(xx\pm aa)})$, como se puede verificar diferenciando esta cantidad (470).

Integrales que se refieren al círculo.

530 Sea SM$=s$ (fig. 181) el arco de un círculo cuyo diametro es a; SP, x; PM, y: tirense la pm infinitamente próxîma à PM, y la Mr paralela à SC: y será Pp=Mr=dx, Mm=ds, PM=$\sqrt{(2ax-xx)}$ (348): y en los triángulos semejantes CPM,Mrm, se tendrá PM:CM::Mr:Mm, ó $\sqrt{(2ax-xx)}:\frac{1}{2}a::dx:$
$$ds=\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$$, elemento del arco SM: y $S\frac{\frac{1}{2}adx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$ será el valor de dicho arco. Para averiguar el valor de esta integral quando x tiene un valor determinado; se restará este de SC$=\frac{1}{2}a$, para conocer CP, y con él y la hipotenusa CM$=\frac{1}{2}a$, se calculará en el triángulo rectángulo CPM el ángulo SCM (285): con el qual y el radio CM será facil hallar la longitud del arco SM (167), que es el valor de la integral propuesta.

Para reducir à ella $\frac{hdx}{\sqrt{(gkx-pxx)}}$, siendo h, g, k, p cantidades conocidas; se dividirán numerador y denominador por $\sqrt{p}$: y como en
$$\frac{\frac{h}{\sqrt{p}}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}} \text{ ó } \frac{h}{\sqrt{p}}\times\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}}$$

que resulta, ha de multiplicar á dx la mitad de $\frac{gk}{p}$ multiplicador de x, para que sea semejante á la anterior diferencial; multiplicaré y dividire á un mismo tiempo por $\frac{1}{2}\left(\frac{gk}{p}\right)$, y tendré
$$\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}\times\frac{\frac{gk}{2p}dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p}x-xx\right)}}$$: diferencial que representa un arco de círculo cuyo diámetro es $\frac{gk}{p}$ y la abscisa x, multiplicado por $\frac{2ph}{gk\sqrt{p}}$, que se determinará como la otra.

531 Contando las abscisas desde C, y siendo CS, b; CP, x; sale $\frac{-bdx}{\sqrt{(bb-xx)}}$ por elemento del arco SM, comparando los triángulos semejantes CPM, Mmr, y teniendo presente que PM$=\sqrt{(bb-xx)}$: y que pues SM mengua al paso que CP ó x crece, deberá ser la diferencial negativa (461).

Reduciremos à ella $\frac{kdx}{\sqrt{(gh-pxx}}$, transformándola como ántes en $\frac{k}{\sqrt{p}}\times\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p}-xx\right)}}$: y como aquí $\frac{gh}{p}$ sustituye por bb, la cantidad $-b$ que ha de acompañar à dx, es $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$: de suerte que tendremos $\dfrac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{-\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times \dfrac{-\sqrt{\frac{gh}{p}} \times dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p} - xx\right)}}$:

y suponiendo $CS = \sqrt{\frac{gh}{p}}$, y CP x; será la integral $\dfrac{\frac{k}{\sqrt{p}}}{\sqrt{\frac{gh}{p}}} \times SM$ ó $-\frac{k}{\sqrt{gh}} \times SM + C$.

532 Si se tira la tangente SN, la secante CN, la Cn infinitamente proxîma à CN, y se traza desde C con el radio CN el arco infinitamente pequeño Nt que será perpendicular à CN y Cn; los triángulos semejantes $CM'm'$, CtN darán $CN:CM'::tN.M'm'$: de los CSN, tNn tambien semejantes, se saca $CN:CS::Nn:tN$: y de consiguiente $(CN)^2 : CM' \times CS :: tN \times Nn : tN \times M'm' :: Nn : M'm'$: ó llamando CS, a; la tangente SN, x; y s el arco SM', $aa+xx : aa :: dx : ds = \frac{aadx}{aa+xx}$, espresion del elemento de un arco cuyo radio es a, y x subtangente: luego si ademas del radio que se conoce, se averigua el ángulo SCN en el triángulo rectán-

gulo SCM; se podrá determinar la longitud del arco para cada valor de x.

Para reducir à dicha espresion la diferencial $\frac{kdx}{gbb+hxx}$; puesta así, $\frac{k}{h} \times \dfrac{dx}{\frac{gbb}{h} + xx}$, se multiplicarán sus dos términos por $\frac{gbb}{h}$: y pues que resulta $\frac{k}{gbb} \times \dfrac{\frac{gbb}{h} dx}{\frac{gbb}{h} + xx}$; será la integral el producto del arco cuya tangente es x, y el radio $\sqrt{\frac{gbb}{h}}$ multiplicado por $\frac{k}{gbb}$.

533 Espliquemos ahora un modo fácil de encontrar la longitud del arco de un ángulo dado, conocido el radio, que como hemos visto, sirve de *módulo* en todas estas integraciones. Llamemos R el radio, N el número de grados del ángulo dado y Z su longitud. Siendo el diámetro á la circunferencia ó el radio á la semicircunferencia como 1 : 3,1415926535 &c. será 3,14159 &c. : 1 :: 180° : R = 57°, 29577951 &c. = 57°, 17', 44'' = m: luego el arco de 57°, 17', 44'' es á la longitud del radio, como el número de grados del ángulo N es á la longitud de su arco; esto es, $m:R::N:Z = \frac{R \times N}{m}$, ó haciendo $r =$

$\frac{1}{m} = \frac{1}{57,295779 \&c.}$, $Z = N \times R \times r$.

Aplicacion de la integracion por series à los logarítmos.

534 Para encontrar el logarítmo hiperbólico del número $\frac{n+x}{n}$; sacaré su diferencial $\frac{dx}{n+x}$ (469): y pues que reducido à série este quebrado es (445), $\frac{dx}{n+x} = \frac{dx}{n} - \frac{xdx}{nn} + \frac{x^2dx}{n^3} - \frac{x^3dx}{n^4} + \&c.$ tendremos integrando, $l\left(\frac{n+x}{n}\right) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3} - \frac{x^4}{4n^4} + \&c.$ que se reduce haciendo $n = 1$, à $l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.$ série que ya encontramos (458). quando x es negativa, corresponden à los términos pares signos contrarios.

535 Si el número hubiera sido $\frac{n+x}{n-x}$, cuya diferencial es $\frac{2ndx}{n^2-x^2} = 2\left(\frac{dx}{n} + \frac{x^2dx}{n^3} + \frac{x^4dx}{n^5} + \frac{x^6dx}{n^7} + \&c.\right)$; se hubiera sacado integrando, $l\left(\frac{n+x}{n-x}\right) = 2\left(\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5n^5} + \frac{x^7}{7n^7} + \&c.\right)$: que se reduce haciendo $n = 1$,

à $2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \&c.)$ la misma que sacamos ya (458).

536 Finalmente, Si dado un logarítmo y, se pidiese el número $1+x$ que le corresponde; tendremos $y = 1+x$, $dy = \frac{dx}{1+x}$, ó $dy + xdy - dx = 0$. Si hacemos $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \&c.$ será $dx = Ady + 2Bydy + 3Cy^2dy + 4Dy^3dy + \&c.$ y haciendo las correspondientes sustituciones saldrá.......

$$\left.\begin{array}{l} dy + Aydy + By^2dy + Cy^3dy \\ -Ady \quad 2Bydy - 3Cy^2dy - 4Dy^3dy \end{array}\right\} = 0,$$

de donde sacaremos (445) $A = 1$, $B = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}B = \frac{1}{2.3}$, $D = \frac{1}{4}C = \frac{1}{2.3.4}$ &c. y será el número que se busca $1+x = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1}{2.3.4}y^4 + \&c.$

Aplicaciones del Cálculo integral.

Cuadratura de las Curvas.

537 Si de los estremos M, m (fig. 182) de uno de los infinitos lados de que podemos concebir formada una curva MSQ (102), imaginamos tiradas perpendicularmente al ege Ss las dos ordenadas MP, mp infinitamente próximas, llamando MP, y; SP, x; será Pp, dx;

rm, dy; pm, $y+dy$, y la superficie del trapecio $PMmp$(182), $\frac{1}{2}(PM+pm)\times Pp=\frac{1}{2}(2y+dy)\times dx=ydx+\frac{1}{2}dxdy=ydx$, despreciando $\frac{1}{2}dxdy$ (442). Luego si poniendo en ydx el valor de y sacado de la equacion à la curva de que se trata, se integra despues lo que resulta; se habrá sacado la suma de todos los trapecios que componen la superficie que abraza la curva, ó su *Cuadratura*. Pero como el trapecio $PMmp$ que hemos considerado como la diferencial del espacio SMP, puede serlo tambien del espacio LHPM tomado desde un punto fijo H; pues $PMmp=HpmL-HPML=d(HPML)$; es preciso añadir á la integral que da el cálculo, una constante que muestra esta diferencia; como veremos mas claramente en los egemplos.

538 Si las ordenadas saliesen todas de un centro comun como las SQ, Sq; se considera el ámbito de la curva dividido en una infinidad de triángulos como SQq, cuya superficie $\frac{1}{2}\times Sq\times Qt$ es, llamando SQ, y; Qt, dx; $\frac{1}{2}(y+dy)\times dx=\frac{1}{2}ydx$, despreciando $\frac{1}{2}dxdy$ (442). Quando las ordenadas no son perpendiculares al ege, aunque sean paralelas entre si, resulta una espresion algo diferente de las anteriores.

539 Vengamos à los egemplos, y sea el 1º *cuadrar el triángulo* ABC (fig. 175): para esto, supongamos tiradas las dos ordenadas

Mm, Nn infinitamente próximas, y llamemos a la altura CD, b la base AB, y la Mm, y CP, x; será Pp, dx: y el elemento del area $NMnm=ydx$: pongamos ahora en lugar de y, $\frac{bx}{a}$ que se saca de los triángulos semejantes ABC, CMm, donde CD : AB :: CP: Mm, ó $a:b::x:y=\frac{bx}{a}$; y tendremos $MNnm=ydx=\frac{bxdx}{a}$, cuya integral $Sydx=\frac{bxx}{2a}$ será el espacio CMm: luego el de todo el triángulo ABC en el que $x=a$, será $\frac{baa}{2a}=\frac{ba}{2}$, como lo digimos (182).

540 2º *Para cuadrar la parábola* (fig. 182) cuya equacion es $y^2=px$ ó $y=\sqrt{px}=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$; pongo este valor en ydx, y tendré $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$, cuya integral $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C$ es el valor de la superficie de la parábola. Como en el punto S en que $x=o$, es tambien cero el espacio SMP, y la integral se reduce à $o=o+C$ en donde $C=o$; no habrá constante quando los espacios se cuentan desde el punto S, y será $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ el espacio indefinido SPM. Pero si se pidiese lá superficie del espacio LHMP, siendo $SH=b$; sería $LHMP=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C$; y pues

que este espacio es cero quando $SP=x=b$; en cuyo supuesto es $o=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}+C$ (524), y $C=-\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$; será $LHMP=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$

La espresion $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\times x=SPM$, se reduce poniendo y en lugar de $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, à $\frac{2}{3}xy$, que son los dos tércios del rectángulo SPMR. Tambien el espacio LHPM=...... $\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\times x-\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\times b=\frac{2}{3}SP\times PM-\frac{2}{3}LH\times SH$, es la diferencia entre los dos tercios de los rectángulos SPMA y SHLZ.

541 3º *Habiendo de cuadrar el quarto de círculo* SCD (fig. 181); supondremos el radio a, y $PM=y=\sqrt{(aa-xx)}$ (352): y será el espacio $CDMP=Sydx=Sdx\sqrt{(aa-xx)}=$ (154 t.I.) $Sdx\left(a-\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^3}{128a^7}-\&c.\right)$: donde integrando cada término por sí, resulta $CDMP=ax-\frac{x^3}{2.\,3.\,a}-\frac{1.x^5}{2.4.5a^3}-\frac{1.\,3.\,x^7}{2.4.6.7.a^5}-\frac{1\,.\,3\,.\,5x^9}{2.\,4.\,6\,8.\,9a^7}-$ &c. Si suponemos $x=a$, saldrá la superficie del cuadrante $CSD=aa-\frac{aa}{0}-\frac{aa}{40}-\frac{aa}{112}-\frac{5aa}{1152}-\&c.=aa\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{40}-\frac{1}{112}\right.$

$\left.-\frac{5}{1152}-\&c.\right)$ La superficie del sector CMD se saca restando de CDMP la del triángulo $CPM=PM\times\frac{1}{2}CP=\frac{1}{2}xx\times\sqrt{(aa-xx)}$.

542 4º *En la Elipse* cuya equacion es $y=\frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$, se tiene haciendo las mismas operaciones, $Sydx=bx-\frac{bx^3}{6aa}-\frac{bx^5}{40a^4}-\frac{bx^7}{112a^6}-\frac{5bx^9}{1152a^8}-\&c.=\frac{b}{a}\left(ax-\frac{1.\,x^3}{2.\,3.\,a}-\frac{1.\,x^5}{2.3.5a^3}-\frac{1.x^7}{2.4.6.7a^7}-\&c.\right)$: la qual série tiene con la anterior del círculo la razon de b á a segun lo dejamos demostrado.

543 5º *Para cuadrar la area hiperbólica* SMP (fig. 163) *y el sector hiperbólico* CSM; sustituiremos en ydx, $\frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}$ valor de y en la equacion de la hipérbola: y será $ydx=\frac{bdx}{a}\sqrt{(xx-aa)}$ el elemento de su superficie. El sector $CSM=CPM-SPM=CP\times\frac{1}{2}PM-SPM=\frac{1}{2}yx-Sydx$, cuya diferencial $\frac{1}{2}(xdy+ydx)-ydx=\frac{1}{2}(xdy-ydx)$, se reduce á $\frac{ab}{2}\times\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$ substituyendo $\frac{b}{a}\times\sqrt{(xx-aa)}$ y $\frac{bxdx}{a\sqrt{(xx-aa)}}$ en lugar de y, dy. Su

integral es (529)$\frac{1}{2}ab\times l\,(x+\sqrt{(xx-aa)}+C$: y como esta debe ser cero quando $x=a$, de cuya suposicion resulta $C=-\frac{1}{2}ab\times la$; será la integral completa de $\frac{ab}{2}\times\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, ó la superficie del sector $CSM=\frac{1}{2}ab\times l(x+\sqrt{(xx-aa)})-\frac{1}{2}ab\times la=\frac{ab}{2}\times l\left(\frac{x+\sqrt{(xx-aa)}}{a}\right)$ Si esta se resta del triángulo $CPM=\frac{1}{2}(CP\times PM)=\frac{bx\sqrt{(xx-aa)}}{2a}$, será el residuo $\frac{bx\sqrt{(xx-aa)}}{2a}-\frac{ab}{2}\times l\left(\frac{x+\sqrt{(xx-aa)}}{a}\right)$ el valor del espacio hiperbólico SPM.

544 6º *Cuadremos finalmente, la hipérbola equilátera entre sus asíntotas*: cuya equacion (415) haciendo $aa=1$, es $xy=1$: y siendo (fig. 169) CG, x; GZ, y; $xy=1$, da $y=\frac{1}{x}$. Luego $Sydx=S\frac{dx}{x}=lx$ (512): y el area MCGZYX será $lx+C$.

545 Como esta es cero quando $x=o$, y entonces se reduce à $l(o)+C=o$ donde $C=\ldots-l(o)$; será dicha superficie completa $lx-\ldots l(o)=l\frac{x}{o}$. De consiguiente si hacemos $x=\ldots CX=b$, será el espacio $MCXX'=l\frac{b}{o}$, infinito. Suponiendo $CU=1$, $aa=1$, y contando las abscisas desde U; será $CG=1+x$, $GZ=y=\frac{1}{1+x}$, $ydx=\frac{dx}{1+x}$, y $Sydx=S\frac{dx}{1+x}=l(1+x)+C=lGZ+C$. Este espacio es cero quando $x=o$, en cuyo supuesto $l(1+o)+C=o$, y $C=-l1=o$: de suerte que dicho espacio será solamente $l(1+x)$, y serán finitos los espacios UGZY donde $CU=1$.

546 Aquí se ve que los logarítmos hiperbólicos resultan de una hipérbola equilátera cuya potencia es 1: de consiguiente siendo la potencia aa, $CU=b$, $UG=x$, $GZ=y$; hubieramos sacado $UGZY=aal(b+x)=l\,CU\times aa$. Supongamos aora que sea mm la potencia de Snm, otra de las infinitas hipérbolas que se pueden trazar entre las asíntotas MC, Cc; sería por lo dicho el espacio $UGmn=mml(b+x)$, y tendriamos $UGZY:UGmn::aal(b+x):mm\times l(b+x)::aa:mm$: luego *los logarítmos de un mismo número tomados en distintas hipérbolas, son como las potencias de las mismas hipérbolas.*

Rectificacion de las Curvas

547 Para encontrar la línea recta á que equivale una línea curva SM (fig. 182), imaginemos el punto m infinitamente proxîmo á M, y será Mm la diferencial de SM; y como $Mm=\sqrt{((Mr)^2+(rm)^2)}=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, será $S\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ la fórmula para rectificar las curvas quando sus ordenadas son perpen-

diculares al ege, ó no salen de un punto fijo. El modo de aplicarla es despejar en la equacion á la curva despues de diferenciada, el dy en x y dx, ó el dx en y y dy, sustituir estos valores en $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, y tomar la integral de lo que resulte.

548 1º *Para rectificar la circunferencia del círculo*; tomemos $\frac{aadx}{aa+xx}$ elemento de un arco cuyo radio es a, y x su tangente (532): y pues que $\frac{aadx}{aa+xx} = aadx(aa+xx)^{-1}$, $(aa+xx)^{-1} = a^{-2} \times \left(1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}-\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}-\&c.\right)$; será $Saadx(aa+xx)^{-1} = S\left(dx-\frac{x^2dx}{aa}+\frac{x^4dx}{a^4}-\frac{x^6dx}{a^6}+\frac{x^8dx}{a^8}-\&c.\right) = x-\frac{x^3}{3a^2}+\frac{x^5}{5a^4}-\frac{x^7}{7a^6}+\frac{x^9}{9a^8}-\&c. = x\left(1-\frac{x^2}{3a^2}+\frac{x^4}{5a^4}-\ldots\ldots\frac{x^6}{7a^6}+\frac{x^8}{9a^8}-\&c.\right)$ Si en esta série suponemos que x sea la tangente de 45°, que cabe ocho veces en 360° ó en toda la circunferencia, y es igual al radio a; quedará reducida á $a(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\&c.)$

Para hacer esta série mas convergente, descompongamos el arco de 45° en otros dos b, c cuyas tangentes sean conocidas, y tendre-

mos haciendo el radio 1, $tang\,(b+c)=45° = 1 = (472)\,\frac{tang\,b+tang\,c}{1-tang\,b\times tang\,c}$, de donde se saca $tang\,c=\frac{1-tang\,b}{1+tang\,b}$: luego si $tang\,b=\frac{1}{2}$, será $tang\,c=\frac{1}{3}$. Pongase ahora en la série anterior $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ en lugar de a, y resultarán las dos $\frac{1}{2}-\frac{1}{3\cdot2^3}+\frac{1}{5\cdot2^5}-\frac{1}{7\cdot2^7}+\frac{1}{9\cdot2^9}-\&c.$ y $\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot3^3}+\frac{1}{5\cdot3^5}-\frac{1}{7\cdot3^7}+\frac{1}{9\cdot3^9}-\&c.$ cuya suma 0,7853981633974483 &c. será la longitud de un arco de 45°: y de consiguiente su cuádruplo 3,141592653897932 &c. será la semicircunferencia, que comparada con el radio 1 dará la razon del diámetro á la circunferencia de que ya hemos hablado.

549 2º *En la parábola* cuyo arco sea u, su parámetro $2a$, y su equacion $yy=2ax$; tendremos $ydy=adx$, y $dx^2=\frac{yydy^2}{aa}$: sustituido este valor en la fórmula $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, la reduce á $\frac{dy}{a}\sqrt{(yy+aa)}=du$: luego $dy\sqrt{(yy+aa)}=adu$. Supongamos que sea MSN (fig. 184) la parabóla que se ha de rectificar, que sea ST una tangente á su vértice, y SP $=y$; será $au=Sdy.\sqrt{(yy+aa)}$. Si se tira la $Ss=a$ perpendicular á ST, y se traza una hipérbola equilátera nsp, cuyo centro esté en S y el

vértice en s, titando desde P à la parábola la ordenada PM alargada hasta que encuentre la hipérbola en p; será $SspP = Sdy\sqrt{(yy+aa)}$ (424 y 537): luego $Sadu = au = SspP$, y el arco $SM = u$ de la parábola, será igual al espacio hiperbólico $SspP$ partido por la mitad del parámetro.

550 3º *Para rectificar un arco* u *de elipse, y de hipérbola*; sacaremos de la equacion à la elipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$, $dy = \frac{-bxdx}{a\sqrt{(aa-xx)}}$: y de consiguiente será el arco elíptico $u = Sdu = S\sqrt{(dx^2+dy^2)} = Sdx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = Sdx\sqrt{\left(\frac{a^4-a^2x^2+b^2x^2}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}\right)}$, cuyo valor solo se puede sacar por séries. En la hipérbola se encuentra por el mismo camino $Sdu = Sdx\frac{\sqrt{(a^2x^2-a^4+b^2x^2)}}{a\sqrt{(x^2-a^2)}}$.

551 Sea la equacion $y^3 = px^2$ de la segunda parábola cúbica, en la que $x = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$: luego $dx = \frac{\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy}{p^{\frac{1}{2}}}$, $ydx^2 = \frac{9ydy^2}{4p}$. Será pues, $S(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = S\left(dy^2+\frac{9ydy^2}{4p}\right)^{\frac{1}{2}} = Sdy\left(1+\frac{9y}{4p}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{8}{27}p\left(1+\frac{9y}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} + C$. Su-

poniendo $y = o$, resulta $C = -\frac{8}{27}p$; luego la integral completa ó la longitud de un arco qualquiera de la segunda parábola cúbica, contando sus abscisas desde el origen, es $\frac{8}{27}p\left(1+\frac{9y}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}p$.

552 En la cicloide ordinaria los triángulos semejantes Mmr, BOP (fig. 209) dan $dy:dx::\sqrt{(2ax-x^2)}:x$; de suerte que $dy = \frac{dx}{x}\sqrt{(2ax-x^2)} = \frac{dx\sqrt{(2a-x)}}{\sqrt{x}}$, $dy^2 = \frac{2adx^2-xdx^2}{x}$. Será pues, $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{\left(dx^2+\frac{2adx^2-xdx^2}{x}\right)} = \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{x}} = \ldots\ldots\ldots \sqrt{2a}x^{-\frac{1}{2}}dx$: y $S(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}} = BM = S\sqrt{2a}x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\sqrt{2ax}$, que es el duplo de la cuerda correspondiente $BO = \sqrt{2ax}$. Si se hace $x = 2a$, será la semicicloide $BMA = 2\sqrt{4a^2} = 2\times 2a$, que es el duplo del diámetro del círculo generador: de consiguiente toda la cicloide será cuadrupla de dicho diámetro.

Solidez de los Cuerpos.

553 Si concebimos un cuerpo ABCS (fig. 185) formado de planos ó rebanadas infinitamente delgadas *acbefh* que serán la diferencial de su solidez, y suponemos bb la su-

perficie de la base ABC, a la altura ST, y x la St distancia del vértice al plano *acbefh*: será dx la altura de dicho plano y su supérficie *abc* ó *ehf*, se hallará por la proporcion $(ST)^2$: $(St)^2$::ABC:*abc*, ó aa:xx::bb:$\frac{bbxx}{aa}$: luego la solidez del plano será $\frac{bbxx}{aa}\times dx$, y la de todo el sòlido su integral $S\frac{bbxx}{aa}\times dx = \ldots\ldots$ $\frac{bbx^3}{3aa}+C$, ó $\frac{bbx^3}{3aa}$ solamente, contando la solidez desde el vértice S. La espresion ...... $\frac{bbx^3}{3aa}=\frac{bbxx}{aa}\times\frac{1}{3}x = abc\times\frac{1}{3}St$ concuerda con la que sacamos ya (239).

554 Si el plano MmlL (fig. 186) pertenece à un sólido de revolucion ABS, formado por una curva AS dando la vuelta al rededor de ST: suponiendo PM$=y$, SP$=$x, y $r{:}c$ la razon del radio à la circunferencia; será $\frac{cy}{r}$ la de un círculo cuyo radio es y; la superficie de este círculo será $\frac{cy}{r}\times\frac{1}{2}y=\frac{cyy}{2r}$: y la solidez del plano $\frac{cyy}{2r}\times Pp=\frac{cyydx}{2r}$: espresion diferencial en la que poniendo el valor de y sacado de la equacion à la curva de

cuya revolucion se haya formado el sólido, se tendrá su solidez integrando el resultado.

555 Egemplo 1º: *Encontrar la solidez del cono engendrado por el triángulo rectángulo* CPM (fig. 183) *al rede*[illegible]*r de* CP. Sea CP, x; PM, y; y u el ángulo MCP: si tomamos à CM por radio, será *cosen u*: *sen u*:: x: $y=\frac{x\times sen\,u}{cosen\,u}$. Si sustituimos este valor en la fórmula $\frac{cyydx}{2r}$; se reducirá à $\frac{c}{2r}\times\ldots\ldots$ $\frac{sen^2u}{cosen^2u}x^2dx$: y la solidez del cono será $\frac{c}{2r}\times\ldots$ $S\frac{sen^2u}{cosen^2u}x^2dx=\frac{c}{2r}\times\frac{sen^2u}{cosen^2u}\times\frac{x^3}{3}=\frac{cyy}{2r}\times\frac{x}{3}$; ...... que es como digimos (239) la tercera parte del cilindro de una misma base y altura que él. Del mismo modo se hubiera sacado la solidez $\frac{2cxx}{r}\times\frac{y}{3}$ del cono producido por el mismo triángulo al rededor del lado MP.

556 2º *La solidez del paraboloide ó conoide parabólico* (fig. 186), que es el sólido que engendra una semiparábola al rededor de su ege; se saca poniendo en la fórmula el valor de yy que da la equacion yy$=ax$ de la parábola: pues integrando el resultado $\frac{caxdx}{2r}$, se tiene contando la solidez desde S en que C$=$o, $\frac{cax^2}{4r}=\frac{cax}{2r}\times\frac{x}{2}=\frac{cyy}{2r}\times\frac{x}{2}$, que

equivale à la solidez del cilindro de igual base y altura que el paraboloide. Si la solidez se cuenta desde un punto H, tal que $SH=b$; debiendo ser cero el sólido en dicho punto ó quando $x=b$; será $C=-\frac{cabb}{4r}$, y la solidez de una porcion qualquiera de paraboloide $\frac{caxx-cabb}{4r}$.

557 3º *Hallar la solidez del elipsoide ó hiperboloide.* Si sustituimos en la fórmula en lugar de yy, $\frac{bb}{aa}(2ax-xx)$ sacado de la equacion à la elipse, é integramos $\frac{cbb}{2raa}(2axdx-xxdx)$ que resulta; tendremos $\frac{cbb}{2raa}\left(axx-\frac{x^3}{3}\right)$ por la solidez del *elipsoide prolongado*, sólido que engendra una semielipse al rededor de su ege mayor Ss (fig. 187), contándola desde S en que $C=0$. Quando $x=Ss=2a$, se reduce dicha espresion à $\frac{2acbb}{3r}$, que es la solidez de todo el elipsoide. Y como la de un cilindro circunscripto à él, sería $\frac{acbb}{r}$; será la del elipsoide los $\frac{2}{3}$ de la de este cilindro, como lo digimos de la esfera (243).

Si se pide la solidez desde un punto H en

que $SH=m$: siendo en este punto cero la integral, se tendrá $C=-\frac{cbb}{2raa}\left(amm-\frac{m^3}{3}\right)$, y la solidez de una porcion de elipsoide comprendida entre dos planos paralelos y perpendiculares al ege, cuya distancia es $x-m$, será $\frac{cbb}{2raa}\left(axx-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{cbb}{2raa}\left(amm-\frac{m^3}{3}\right)$. La del *elipsoide aplanado*, ó producido por la revolucion de la semielipse al rededor del ege menor, que es $\frac{2aacb}{3r}$; se saca como la otra, y es tambien los $\frac{2}{3}$ de su cilindro circunscripto: y tiene con ella la razon de los eges $2b:2a$.

Por el mismo camino encontrarémos que la solidez del sólido que engendra una hipérbola al rededor de su primer ege, es $\frac{cbb}{2raa}\times\ldots\ldots\left(axx+\frac{x^3}{3}\right)$, si se cuenta desde el vértice; y $\frac{cbb}{2raa}\left(axx+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{cbb}{2raa}\left(amm+\frac{m^3}{3}\right)$ la de una porcion de *hiperboloide* comprendida entre dos planos paralelos y perpendiculares al ege, cuya distancia es $x-m$.

558 4º *Hayase de medir el sólido producido por el arco* sp (fig. 184) *de hipérbola que voltea al rededor de su segundo ege* ST. suponiendo este $2a$, el 1º $2Ss=2b$, $SP=x$,

$Pp = y$, y S el vértice. Si hacemos $r : c :: 1 : \frac{c}{r}$, será $\frac{c}{r} \times \frac{1}{2} = \frac{c}{2r}$ que llamarémos m, el area del círculo cuyo radio es 1; y la fórmula $\frac{cyydx}{2r}$ quedará reducida à $myydx$, en donde myy es el area del círculo cuyo radio es y: pues $1^2 : y^2 :: m : myy$ (201). Si en ella ponemos el valor de yy sacado de la equacion $yy = bb + \frac{bbxx}{aa}$ (401); tendremos $myydx = mbbdx + \frac{mbbxxdx}{aa}$, cuya integral es $mbbx + \frac{mbbx^3}{3aa}$ ó $\frac{2}{3}mbbx + \frac{1}{3}myyx$, poniendo en lugar de $\frac{bbxx}{aa}$, $yy - bb$ sacado de la equacion: será pues, $\frac{2}{3}mbbx + \frac{1}{3}myyx$ la solidez del cuerpo que forma el area $SspP$ al rededor de ST.

559 5º *Para hallar la solidez del cuerpo que se forma de la revolucion de una hipérbola equilatera* QKYN (fig. 169) *al rededor de su asíntota* Cc; llamaremos $CU = UY$, a; y será (415) $aa = xy$, ó $yy = \frac{a^4}{xx}$. Puesto este valor en $\frac{cyydx}{2r}$, resulta $\frac{c}{2r} \times \frac{a^4dx}{xx} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{c}{2r} \times a^4x^{-2}dx$, y su integral $\frac{c}{2r} \times - \frac{a^4}{x} + C$ será la solidez que buscamos. Como esta es cero quando $x = a$, será $C = \frac{c}{2r}a^3$, y el valor completo del sólido producido por el area UYNc, será $\frac{c}{2r}\left(a^3 - \frac{a^4}{x}\right) = \frac{c}{2r}\left(a^3 \times \ldots\ldots\ldots \left(\frac{x-a}{x}\right)\right)$: de consiguiente suponiendo las abscisas a, $2a$, $3a$, &c. en progresion arítmética, resultarán sólidos iguales à $\frac{c}{2r}a^3$, multiplicados sucesivamente por o, $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ &c.

Si fuese x infinita, equivaldrá el sólido $\frac{c}{2r}a^3$ al cilindro engendrado en la misma revolucion por el rectángulo CUYH: quando x es menor que a es el sólido negativo, é infinito si $x = o$: de suerte que el sólido producido por el espacio UYNC es finito; pero el que engendra la area MCXK al rededor de la asíntota, es infinito.

560 6º *Midamos ahora un cuerpo parabólico* ACBDA (fig. 188) *producido por la rotacion de la parábola* ACB *al rededor de la ordenada* AB. Sea a la abscisa CM, b la semiordenada AM ó BM, u la distancia $MN = EP$ que hay entre la línea DC y una seccion ENF del sólido, paralela à DC: y tendremos (361) $(AM)^2 : (EP)^2 :: CM : CP$, ó $bb : uu :: a : CP = \frac{auu}{bb}$, y $EN = CM - CP = a - \frac{auu}{bb} = \frac{a}{bb} \times (bb - uu)$: luego (554) $m \times (EN)^2 = \frac{maa}{b^4} \times (b^4 - 2bbuu + u^4)$ será la espresion del area

de la seccion ENF : y si se multiplica por la diferencial du de MN, dará el elemento del sólido $\frac{maa}{b^4}(b^4du-2bbuudu+u^4du)$. Integrese, y tendremos $\frac{maa}{b^4}(b^4u-\frac{2}{3}bbu^3+\frac{1}{5}u^5)$, que se reduce haciendo $u=b$, á $\frac{8maab}{15}$ mitad del sólido que se busca.

561 7º *Si se quiere la solidez del cuerpo* ACBDA (fig. 189) *que forma el segmento de círculo* ACB *rotando al rededor de la cuerda ú ordenada* AB; suponiendo el centro en O, y llamando al radio OE, r; OM, n; y EP, u; será $OP=\sqrt{((OE)^2-(EP)^2)}=\sqrt{(rr-uu)}$, $EN=OP-OM=\sqrt{(rr-uu)}-n$; y la fórmula $myydx$ se transformará en $mdu(\sqrt{rr-uu})\ n)^2=mdu(rr-uu+nn-2n\sqrt{(rr-uu)})=mdu(rr-uu-nn)-mdu(2n\sqrt{(rr-uu)}-2nn)$. Y como la integral de $mdu\,(2n\sqrt{(rr-uu)}-2nn)=2nm\times du\times(\sqrt{(rr-uu)}-n)=2nm\times du\times EN$ es $2mn\times area$ MNEC; será toda la integral $mu(rr-nn-\frac{1}{3}uu)-2nm\times area$......... $MNEC=m\times MN\times((AM)^2-\frac{1}{3}(MN)^2)-2m\times OM\times area$ MNEC : que en el supuesto de ser MN=MA, es $m\times\frac{2}{3}(AM)^3-2m\times OM\times$ ACM, valor de la mitad del sólido propuesto.

562 8º *Para encontrar la solidez de un prismoide* AEGB (fig. 190) *rodeado de superficies planas, y cuyas bases son dos rectángulos paralelos*; hagamos AB, a; AD, b; EH, c; EF, e; h la altura del sólido, y x la distancia variable del plano EG à una seccion IL del sólido paralela à la base. Tirándo despues en la superficie AH, la HP paralela à EA, y en la cara BG la HN paralela à GC; tendremos en los triángulos HPB, HRM semejantes $h:x::PB=AB-EH:RM=IM-EH=\frac{x(a-c)}{h}$; y en los triángulos HBN, HMQ, tambien semejantes, $h:x::BN=BC-HG:MQ=ML-HG=\frac{x(b-e)}{h}$: luego $IM=\frac{x(a-c)}{h}+c$, y $ML=\frac{x(b-e)}{h}+e$: y será el area de la seccion IL.... $\frac{(a-c)(b-e)}{hh}xx+\frac{bc+ae-2ce}{h}x+ce$. Si multiplicamos esta espresion por dx, y sacamos despues su integral, resultará $\frac{(a-c)(b-e)}{3hh}x^3+$.... $\left(\frac{bc+ae-2ce}{2h}\right)xx+cex$, valor del sólido IFGL.

Suponiendo en él $x=h$, saldrá el de todo el prismoide, que es $\frac{1}{3}h(a-c)(b-e)+\frac{1}{2}h(bc+ae-2ce)+ceh=\frac{1}{6}h\,(2ab+ae+bc+2ce)=\frac{1}{6}h$ AB×AD+EH×EF+(AB+EH)(AD+EF)), Si EF fuese nula, EH y FG coincidirian formando un ángulo en la parte superior del sólido, que tendria entonces la forma de la armadura de un tejado, y su solidez sería $\frac{1}{6}h(2ab+bc)=\frac{1}{6}h(2AB+EH)AD$. En el caso de ser EF=EH y AD=AB, sería el sólido un trozo de pirámide cuadrada, cuya solidez es $\frac{1}{3}h(aa+ac+cc)=\frac{1}{3}h((AB)^2+AB\times EH+(EH)^2)$: y finalmente haciendo $EH=o$, resultaría una pirámide con la base $(AB)^2$ y la altura h, que tendrá por solidez $(AB)^2\times\frac{1}{3}h$.

563 9º *La solidez del cuerpo* que los Ingleses llaman *Groin* (fig. 191), cuyas secciones paralelas à la base son cuadrados y las dos secciones hechas perpendicularmente á la base por el medio de los dos lados opuestos, son semicírculos; la encontrarémos suponiendo x la distancia Ab del vértice A à una seccion $cpeg$ paralela à la base, a el radio AB ó BN de la seccion circular ANBMA perpendicular à la base, y será $bn=\sqrt{(2ax-xx)}$ (348); el lado del cuadrado $cpeg$, $2\sqrt{(2ax-xx)}$, y su area $4(2ax-xx)$: luego el elemento del groin es $4dx(2ax-xx)$. Si en su integral $4axx-\frac{4}{3}x^3$ suponemos $x=a$, resulta $\frac{(2a)^3}{3}$ solidez de todo el groin; que sacaríamos del mismo modo aun quando las secciones paralelas à la base fuesen rectángulos, y las perpendiculares otras curvas distintas del círculo.

564 10º *Si se hubiese de calcular la solidez de la pirámide ó cono* ABCD (fig. 192), formado de rectas tiradas de todos los puntos de un plano DBC dado à un punto A: llamaremos x la distancia perpendicular AQ de A à una seccion EFG paralela à BDC, a la altura AP del sólido, b la area conocida de la base BDC: y pues que los planos BDC, EFG deben ser semejantes (234), tendremos $(AP)^2:(AQ)^2::BDC:EFG$, ó $aa:xx::b:EFG=\frac{bxx}{aa}$. Esta espresion multiplicada por la diferencial dx dará el elemento $\frac{bxxdx}{aa}$ del sólido, que será $S\frac{bxxdx}{aa}=\frac{bx^3}{3aa}$, que se reduce à $\frac{1}{3}ab$ quando $x=a$.

565 11º *Si à un cilindro* ABCD (fig. 176) *lo corta un plano oblicuo á la base, y se pregunta la solidez del cuerpo* SARH *que resulta*, que se llama *Ungula cilindrica*; suponiendo para hacer mas sencillo el cálculo, que la seccion pase por el centro de là base, se considerará la úngula cortada por planos paralelos infinitamente próximos y perpendiculares á la base RAH: y debiendo ser las secciones triángulares semejantes, se tendrá llamando r el radio AO de la base, a la altura AS, y la base del triángulo PMN; OAS: PMN $::rr:yy$ (200), y siendo $OAS=\frac{1}{2}ar$, será $PMN=\frac{aryy}{2rr}=\frac{ayy}{2r}$. Luego si se llama

x la PH, será dx el grueso de la rebanada comprendida entre dos planos paralelos, cuyo valor será $\frac{ayydx}{2rx}$, ó poniendo $2rx - xx$ en lugar de yy (348), $\frac{adx(2rx-xx)}{2r} = \frac{a}{2rx}(2rxdx - xxdx)$. Su integral, contando la solidez desde el punto H, es $\frac{a}{2r}\left(rxx - \frac{x^3}{3}\right)$: de donde se saca suponiendo $x = 2r$, el valor de todo el sólido que es $\frac{2}{3}arr = \frac{ar}{2} \times \frac{4}{3}r =$ AOS$\times\frac{4}{3}$HO $=$ AOS$\times\frac{2}{3}$RH : ó los $\frac{2}{3}$ de un prisma cuya base sería el triángulo AOS y la altura el diámetro RH.

566 12º *Encontremos por último, la solidez de una úngula cónica* EFGD (fig. 177) que corta en el cono ABD un plano EFG que pasa por su base. Siendo BC la altura perpendicular del cono, y BO una perpendicular tirada à HE ege de la seccion EFG; si suponemos que sea FBG otra seccion del cono hecha por un plano que pasa por el vértice B y la línea FG; los dos sólidos DBFG, EBFG cuyas bases son FDG, FEG tendrán por solidez (564) à FDG$\times\frac{1}{3}$BC y FEG$\times\frac{1}{3}$BO: restese la segunda de la primera, y su diferencia será el valor de la úngula cónica, Si las bases FDG, FEG fuesen secciones cónicas, se buscarán sus areas (540 *y sig.*), y

se resolverá la cuestion. Sea por exemplo, EH paralela à BA; siendo entónces (355) la seccion una parábola cuya area es $\frac{2}{3}$ FG$\times$EH, será la solidez del segmento EFGB$=\frac{2}{9}\times$FG$\times$EH$\times$BO, y rebajando esta cantidad del sólido DFGB, será el residuo el valor de la úngula.

Medida de las superficies curvas de los sólidos.

567 Si imaginamos que el lado infinitamente pequeño Mm de una curva SB$=u$(fig, 186) traze una zona, faja ó porcion de cono truncado quando toda la curva voltéa al rededor de ST, la superficie de dicha zona que es elemento de la total, será el producto de M$m = du$ multiplicado por una circunferencia cuyo radio es PM: luego si llamamos m la razon entre la circunferencia y el diámetro, será $2my$ la circunferencia del círculo cuyo diámetro es ML, y $2my \times du = 2my \times \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ será el elemento de la superficie de los sólidos de revolucion.

568 Egemplo 1º *Comencemos por el cono recto* ABD (fig. 177), y suponiendole cortado por un plano MN paralelo à la base, y tirado el ege BC; llamemos AB, a; AC, b; PM, y; BM, u; y tendremos en los triángulos semejantes BAC, BMP, BA:AC::BM:MP ó $a:b::u:y = \frac{bu}{a}$: luego $2mydu = \frac{2mbudu}{a}$, y su

integral $\frac{mbuu}{a}$ será la espresion de la superficie de una porcion qualquiera de cono. Si en ella hacemos $u=a$, se reduce à $abm = m\times AC\times AB$ que es la de todo el sólido.

569 2º *Para encontrar la superficie de la esfera*; sea el radio $CM=a$ (fig. 181), $SP=x$, $PM=y$, $SM=u$; será $Mm=du$, $Pp=Mr=dx$: y en los triángulos semejantes CPM, Mmr tendremos $PM:MC::Mr:Mm$, ó $y:a::dx:du=\frac{adx}{y}$. Sustituyendo este valor en $2mydu$, resulta $2madx$; y su integral $2max = SP\times$ *circunf.* SDBM'S, será la superficie del segmento esférico SPMM'. Si se hace $x=2a$, $2max$ se convierte en $4maa$, que es la superficie de toda la esfera, cuadrupla de maa superficie del círculo màximo SDBM'S (225): y como $2max:4maa::x:2a$; será la superficie de un segmento à la de toda la esfera, como la altura del segmento à todo el ege.

570 3º *Saquemos ahora la superficie del paraboloide* ASB (fig. 186). La equacion $yy=px$ de la paràbola da $dx=\frac{2ydy}{p}$, y $dx^2=\frac{4yydy^2}{pp}$: luego $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dy\sqrt{(pp+4yy)}}{\sqrt{pp}}$; y $2mydu$ se reducirá à $\frac{2mydy}{p}\times(pp+4yy)^{\frac{1}{2}}$. Supongamos para integrar esta diferencial, $(pp+4yy)^{\frac{1}{2}}=z$, será $pp+4yy=zz$, y diferenciando, $8ydy=2zdz$ ò $2ydy=\frac{zdz}{2}$. Sustituyase este valor en $\frac{2mydy}{pp}(pp+4yy)^{\frac{1}{2}}$, y quedará reducida à $\frac{mz\times zdz}{2p}$, cuya integral es $\frac{mz^3}{6p}$, ó $\frac{m\times(pp+4yy)^{\frac{3}{2}}}{6p}$, poniendo $(pp+4yy)^{\frac{3}{2}}$ en lugar de z^3. Quando $y=o$, se tiene $C=-\frac{1}{6}mpp$; de consiguiente $\frac{m(pp+yy)^{\frac{3}{2}}}{6p}-\frac{1}{6}mpp$ serà la integral completa, que pudo tambien haberse sacado por lo dicho (514).

571 4º *Para hallar la superficie del esferoide ò elipsoide* (fig. 187); suponiendo $SC=a$, $CB=b$, $CP=x$ y $BM=u$; sacarémos de la equacion à la curva $y=\frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$, $dy=-\frac{bxdx}{a\sqrt{(aa-xx)}}$: y será $du=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{\left(dx^2+\frac{bbxxdx^2}{aa(aa-xx)}\right)}=\frac{dx\sqrt{(a^4-(aa-bb)xx)}}{a\sqrt{(aa-xx)}}=\frac{dx\sqrt{(a^4-ccxx)}}{a\sqrt{(aa-xx)}}$ (suponiendo $\sqrt{(aa-bb)}=c$) $=\frac{cdx\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}}{a\sqrt{(aa-xx)}}$: de consiguiente $2mydu$ se-

rá $\frac{2mbcdx}{aa}\times\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}$: cuya integral expresada en série infinita, es $2mbx\left(1-\frac{ccxx}{2.3a^4}-\frac{c^4x^4}{2.4.5a^8}-\frac{3c^6x^6}{2.4.6.7a^{12}}-\&c.\right)$

Esta integral se encuentra mas facilmente por medio de la cuadratura del círculo; pues si desde C con un radio $\frac{aa}{c}$, se traza un círculo IER, y se alarga hasta E la ordenada PM; es claro (352) que $PE=\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}$, y que el elemento del area EICP será $dx\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}$, que tendrá con el elemento $\frac{2mbcdx}{aa}\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}$ de la superficie $bMM'B$ la razon de $1:\frac{2mbc}{aa}\times EIPC=2m\times\frac{Cb}{CI}\times EICP$.

Si para aplicar esta solucion al elipsoide aplanado, supusieramos Ss el ege menor; siendo CS menor que Cb, sería imposible el valor de $c=\sqrt{(aa-bb)}$: con que hagamos $c=\sqrt{(bb-aa)}$, y $p=\frac{aa}{c}$; quedará $\frac{2mbcdx}{aa}\times\sqrt{\left(\frac{a^4}{cc}-xx\right)}$ convertida en $\frac{2mbdx}{p}\sqrt{(pp+xx)}=\frac{2mb}{p}\times dx\sqrt{(pp+xx)}$. Siendo $dx\sqrt{(pp+xx)}=\frac{dx\times(pp+xx)}{\sqrt{(pp+xx)}}=\frac{ppdx+xxdx}{(\sqrt{pp+xx})}=\frac{ppxdx+x^3dx}{\sqrt{(ppxx+x^4)}}=\frac{\frac{1}{2}ppxdx+x^3dx}{\sqrt{(ppxx+x^4)}}+\frac{\frac{1}{2}ppxdx}{\sqrt{(ppxx+x^4)}}$: cuyo primer termino tiene por integral (514) à $\frac{1}{2}\sqrt{(ppxx+x^4)}$, y el segundo $\frac{\frac{1}{2}ppxdx}{\sqrt{(ppxx+x^4)}}$ ó $\frac{\frac{1}{2}ppdx}{\sqrt{(pp+xx)}}$ integrado por los logarítmos (528), da $\frac{1}{2}pp\times l(x+\sqrt{(pp+xx)})$; será la integral de $dx\sqrt{(pp+xx)}$, $\frac{1}{2}x\sqrt{(pp+xx)}+\frac{1}{2}pp\times l(x+\sqrt{(pp+xx)})$: multipliquese por $\frac{2mb}{p}$, y completándola despues (523), será la superficie del elipsoide aplanado $\frac{mbx}{p}\times\sqrt{(pp+xx)}+pbm\times l\left(\frac{x+\sqrt{(pp+xx)}}{p}\right)$.

572 5º *En el conoide hiperbólico*, siendo a y b los semieges, y x la distancia entre la ordenada y el centro de la curva; sacarémos de su equacion $y=\frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}$, $dy=\frac{bxdx}{a\sqrt{(xx-aa)}}$: y será $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dx\sqrt{((aa+bb)xx-a^4)}}{a\sqrt{(xx-aa)}}$. Luego $2mydu=\frac{2mbdx}{aa}\times(\sqrt{aa+bb})(xx-a^4)$, que con suponer $\frac{a^4}{aa+bb}=p^2$, se reduce à $\frac{2mbdx}{p}\sqrt{(xx-pp)}$.

A su integral $\frac{mbx\sqrt{(xx-pp)}}{p} - pbml(x + \sqrt{(xx - pp)})$ que se encuentra por el mismo camino que la anterior, se ha de añadir la constante que resulta de suponer $x = a$: y será finalmente, $\frac{mbx}{p}\sqrt{(xx - pp)} - mbb - pbm \times l\left(\frac{x + \sqrt{(xx-pp)}}{a + \frac{bp}{a}}\right)$, el verdadero valor de la superficie del hiperboloide.

573 6º *Para hallar la superficie del groin* (fig. 191); supondremos x la distancia à que está del vértice A una seccion *cpeg* paralela à la base, *u* el arco A*n* correspondiente à la seccion semicircular N*n*A, y su radio AB ó BN $= a$. Siendo $du = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ (530), multiplicando esta cantidad por $2\sqrt{(2ax - xx)}$ valor de $ge = 2gn$, resultará $2adx$ (567), elemento de una de las quatro superficies iguales que terminan al sólido: luego la superficie de todo él, no contando la de la base, será $8aa$, esto es, dupla de la dicha base.

Método inverso de las Tangentes.

574 Por este método se viene en conocimiento de la equacion de una curva por la

espresion de su tangente ó subtangente ó normal &c. de su rectificacion, cuadratura &c. que se nos dé. Para esto se forma una equacion de la espresion dada y de la correspondiente fórmula de las halladas (473 *y sig.* 537, 547 &c.) y si se puede integrar, se tendrá la de la curva que se busca.

575 Para encontrar la equacion à la curva cuya subtangente es $\frac{2yy}{a}$: igualaré à ella la fórmula $\frac{ydx}{dy}$ (473 1º), sacaré de $\frac{2yy}{a} = \frac{ydx}{dy}$, $adx = 2ydy$, é integrando tendré $ax = yy$, equacion à la parábola (361). Si la subtangente es tercera proporcional à $a - x$, y; haremos $a - x : y :: y : \frac{yy}{a-x}$: de consiguiente será $\frac{yy}{a-x} = \frac{ydx}{dy}$, $ydy = adx - xdx$, que integrada da $yy = 2ax - xx$, equacion del circulo (348).

576 Para encontrar la curva cuya subnormal es $a - x$; haremos (473 2º) $\frac{ydy}{dx} = a - x$, $ydy = adx - xdx$; y su integral $\frac{1}{2}yy = ax - \frac{1}{2}xx$ ó $yy = 2ax - xx$ nos muestra que es el circulo. Si la subnormal ha de ser constante ó igual à 1; tendremos $\frac{ydy}{dx} = 1$, $ydy = dx$, y $yy = 2x$, equacion à una parábola cuyo diámetro es 2.

577 *Hayase de hallar ahora la curva*

cuya area es $\frac{x^3}{3a}$. Diferencio esta espresion, é igualando el resultado $\frac{xxdx}{a}$ à la fórmula general ydx del elemento del area (537); tendré $\frac{xxdx}{a} = ydx$: de donde se saca $xx = ay$, equacion à la parábola. Finalmente, si dado el valor $\frac{c}{2r}\left(axx - \frac{x^3}{3}\right)$ de una solidez, se pidiese la equacion de la curva que produjo el sólido; formaremos la equacion $\frac{cyydx}{2r} = \frac{c}{2r} \times (2axdx - xxdx)$, de la fórmula de la sólidez y de la diferencial de la espresion dada; y sacarémos de ella $yy = 2ax - xx$, equacion al círculo: de consiguiente la espresion dada será la de la solidez de la esfera.

TRIGONOMETÍA ESFERICA.

578 El obgeto de esta parte de la geometría es *la resolucion de los triángulos esféricos*, que se forman en la esfera con arcos de círculo máxîmo. No se cuenta con los arcos de circulos menores; porque entre dos puntos de la esfera pueden tirarse infinitos de diferentes grados, al mismo tiempo que por ellos solo puede trazarse un círculo máxîmo, que es aquel cuyo plano es determinado por el centro, y dichos dos puntos (170).

579 Supuesta la doctrina que dejamos dada acerca de los planos y sólidos; llamarémos *ege* de un círculo máxîmo HTDM (fig. 210) à un diámetro AB perpendicular à su plano, que pasa por el centro C de la esfera; y cuyos dos estremos A, B se llaman *polos*; y así desde qualquier punto de la circunferencia de un círculo máxîmo à su polo hay siempre 90º De consiguiente, 1º si un círculo màxîmo AHBD ó qualquiera parte suya es perpendicular à otro HTDN, cada uno pasa por los polos del otro: y al contrario, si pasa por los polos, le será perpendicular: porque siendo perpendiculares los círculos, lo serán tambien sus planos; y por lo mismo el ege perpendicular al primero deberà estar en el segundo, y de consiguiente sus polos.

580 2º Dos círculos máxîmos trazados en la esfera, se cortan mútuamente en dos partes iguales de 180° cada una: porque debiendo pasar ambos por el centro de la esfera, será la comun seccion uno de sus diámetros, que dividirá cada círculo por medio (174).

581 La inclinacion de dos planos AEB, ADB que se mide (176) con el ángulo rectilíneo ECD ó con el arco ED descrito desde el centro C, es la medida del ángulo es-

ferico EAD, que se debe tomar trazando desde su vértice A como polo, el arco ED de círculo máximo entre sus lados AE, AD. Luego à los ángulos esféricos debe tambien convenir lo que dejamos demostrado (177) de los rectilíneos: y siempre se verificará que los lados contiguos de un ángulo esférico no pueden concurrir sino à una distancia de 180° : pues ambos son arcos de círculo maxîmo que se cortan en la superficie de la esfera.

582 Si desde los tres ángulos B, D, E de un triángulo esférico BDE se consideran tirados al centro de la esfera los radios BC, EC, DC se verá que dicho triángulo es la base de una pirámide CBED que tiene el vértice en el centro de la esfera, y cuyas superficies laterales son tres sectores de círculo. Tambien se puede considerar como un angulo sólido formado de los tres ángulos planos ECD, DCB, BCE: de suerte que cada ángulo del triángulo esférico es igual al ángulo de la inclinacion de las superficies, y cada lado es el árco que mide al ángulo plano del sector correspondiente. De lo qual, y de lo demostrado (211) podrémos inferir que dos lados de un triángulo esférico serán siempre mayores que el tercero; como tambien que sus tres lados valdrán siempre menos que 360°.

583 *Si desde los tres ángulos* A, B, C

(fig. 211) *de un triángulo esférico como centro se trazan tres arcos de círculo que formen otro triángulo* DEF ; *cada lado de este es suplemento del ángulo que es su polo : y cada ángulo suplemento del lado que se le opone en el triángulo* ABC. Pues siendo A polo del arco EF, distará el punto E de A 90° (579): y siendo C polo de DE, estará tambien à 90° de C : del mismo modo se probará que D es polo de BC, y F de AB.

En cuyo supuesto, alargando AB y AC hasta H y G en que encuentran á EF; por ser F polo de ABH, será tambien FH=90°: luego EG+FH ó EG+FG+GH=180°: y siendo GH medida del ángulo A (581); tendremos EF+A=180°, ó EF suplemento del ángulo A. Igualmente se prueba que DE es suplemento de C, y DF de B,

Finalmente, si se alarga AB hasta K, serán los dos arcos AH, BK de 90° cada uno, por ser A y B polos de EF y DF : luego AH+BK ó AH+AB+AK ó HK+AB=180°; y como HK es medida del ángulo F (581) por ser F polo de HK ; será F+AB=180°, ó F suplemento de AB: del mismo modo se demuestra que E es suplemento de AC, y D de BC. Del triàngulo DEF, que se llama *suplementario*, se hace mucho uso en la trigonometría esferica.

584 Puesto que los tres àngulos A, B, C

han de snmar con los tres lados EF,DF,ED tres veces 180° ó 540° ; será siempre la suma de los tres ángulos de qualquier triángulo esférico ABC menor que 540° : será tambien mayor que 180° ; pues la suma de los tres lados EF,DF,DE sus suplementos ha de ser menor que 360° (582).

De aquí es que un triángulo esférico puede tener sus tres ángulos rectos, y aun obtusos; y no siendo determinada la suma de los tres, no se podrá inferir el valor de uno, aunque se conozcan los otros dos como sucede en los rectilineos. En lo sucesivo llamarémos *hipotenusa* al lado opuesto al ángulo recto que por entónnces se considere, y à los otros dos ángulos, *oblicuos*.

585 Del mismo modo que en los triángulos rectilineos, se demuestra que los esféricos son iguales en los tres casos mencionados (89 *y sig.*): pero estos son tambien iguales quando los tres ángulos del uno son iguales à los tres del otro. Lo que se demuestra por medio de los triángulos suplementarios; pues siendo iguales los ángulos, lo serán sus suplementos y de consiguiente los lados.

586 *En un triángulo esférico isosceles* ABD (fig. 212) *son iguales los ángulos* B,D *opuestos à los lados iguales* AB, AD : *y si son iguales los ángulos, lo serán tambien los lados.* Pues tomando AE=AF, y tirando los

arcos ED, BF de círculo maxîmo ; serán iguales los triángulos AED, ABF que tienen el ángulo A comun comprendido entre los lados iguales AB, AF ; AD, AE : luego ED=BF, y los triángulos BED, BDF que tienen BD comun, BF=ED y EB=FD, serán iguales : y de consiguiente el ángulo ABD=ADB. Al contrario, si son iguales los ángulos B y C (fig. 211) lo serán tambien sus suplementos DF, DE (583) esto es, serà isosceles el triángulo DEF : luego sus ángulos E y F serán iguales. y de consiguiente sus suplementos los lados AB, AC.

587 *En todo triángulo esférico* ABC (fig. 212) *el mayor lado está opuesto al mayor ángulo, y al contrario.* Porque cortando en el ángulo B el ángulo ABD=A, será BD=AD (586) : y pues que BD+DC es mayor que BC; será tambien AD+DC ó AC opuesto à B mayor que BC. La segunda parte se demuestra fácilmente con el triángulo complementario DEF (fig. 210).

588 *Los ángulos oblicuos de un triángulo esférico son de la misma especie qne sus lados opuestos, es decir, agudos, obtusos ó rectos.* Sea el triángulo BFG (fig. 210) rectángulo en G, cuyos lados alargados hasta A serán de 180° cada uno; es claro que si BG fuere agudo, GA será obtuso, y por consiguiente el ángulo BFG agudo tendrá agudo su lado opuesto

BG: al obtuso AFG se opondrá el lado AG mayor que 90° en el triángulo AFG, y al recto BDE se opone BE de 90° en el triángulo BED que suponemos rectángulo en E.

589 *Si los lados de un triángulo esférico rectángulo fuesen de una misma especie, esto es, ambos agudos ó ambos obtusos, la hipotenusa será siempre aguda: y si fueren de distinta especie, la hipotenusa pasará de 90°.* Pues si en el triángulo BFG rectángulo en G, y cuyos lados BG, FG son agudos, se toma BD de 90°; será tambien BE de 90° por ser B el polo del arco ED; luego BF no llega á 90°.

Si en el triángulo AFG cuyos lados AF AG pasan de 90°, llega à ser recto el ángulo A; debe ser tambien aguda la hipotenusa FG: porque si AF, AG pasan de 90°, no llegarán à 90°, sus suplementos BF, BG: y en el triángulo BGF tambien rectángulo en B, será la hipotenusa FG menor que 90°. Últimamente, si los lados fueren de diferente especie como en el triángulo AFG rectángulo en G, cuyo lado AG pasa de 90° y GF no llega, la hipotenusa AF pasa de 90°; pues entónces su suplemento BF debe ser menor que 90° como se ha probado ya.

590 Siendo los ángulos oblicuos de la misma especie que los lados opuestos (588), tendremos 1º que si los ángulos oblicuos fuesen de una misma especie, será la hipotenusa menor que 90°, y será mayor si dichos angulos fuesen de diferente especie. 2º Si la hipotenusa fuere aguda, los ángulos y los lados serán de una misma especie, y de diferente si la hipotenusa pasa de 90º. 3º Si la hipotenusa y uno de los lados fueren de la misma especie, el otro lado y su àngulo opuesto serán agudos: y obtusos, si la hipotenusa y el lado fueren de diferente especie. Todo lo qual se verifica en los dos triángulos BFG, AFG.

591 Finalmente, como dichos triángulos tienen el lado FG comun, un ángulo recto en G, el ángulo A igual à B, y las demas partes son diferentes; no se podrá resolver un triángulo esférico rectángulo dados un ángulo y su lado opuesto, si no se sabe ademas, si las otras partes pasan ó no de 90°.

Resolucion de los triángulos esféricos.

592 Formen al triángulo ABD (fig. 213) rectángulo en A, los arcos DAF, DBF, ABE de círculo máxîmo, y tirados los radios BC, DC, AC al centro C de la esfera, bagese desde B al plano BAC la perpendicular BI, que lo será tambien à AC (173); trazando despues por BI un plano BIG à quien sea perpendicular el radio DC; se tendrá una pirá-

mide BICG formada de los triángulos rectángulos BIG, BCI, BCG, GIC cuyos tres ángulos ICG, ICB, BCG tienen respectivamente por medida los tres arcos AD, AB, BD del triángulo esférico ABD; y sus tres ángulos D, A, B son iguales à los rectilineos IGB, GIB, IBG.

593 Esto supuesto, en qualquier triángulo esférico ABD rectángulo en A, se verifica 1º *Que el seno del ángulo recto ó el radio es al seno de la hipotenusa, como el seno de uno de los otros ángulos es al seno de su lado opuesto*: esto es, *r* : *sen* BD::*sen* D: *sen* AB. Pues en el triángulo rectángulo BIG se tiene (281) *r*:BG:: *sen* G:BI : y como tomando BC por radio en los triángulos CGB, CIB, BG, BI son senos de los ángulos BCG. BCI ó de la hipotenusa BD y del lado AB; será *r*:BG ó *sen* BD::*sen* BGI ó *sen*D: *sen* AB.

594 De donde se infiere *que en qualquier triángulo esférico* ABD (fig. 214 y 215) *los senos de los ángulos son entre si como los senos de los lados opuestos*: pues bajando desde qualquiera de sus ángulos A el arco AC perpendicular à la base BD, alargada si es menester; se tendrá en los triángulos rectángulos BAC, ADC (593) *r*:*sen* AB::*sen* B: *sen* AC, y *r*: *sen* AD:: *sen*D : *sen* AC; de donde se saca *sen* AB×*sen*B=*sen* AD× *sen* D: luego

sen B : *sen* DC:: *sen* AD: *sen* AB.

595 2º *Que el radio es al coseno de un ángulo como la tangente de la hipotenusa es á la tangente del lado adyacente à dicho ángulo*: ó *r*: *cos* D:: *tang* BD:*tang* AD (fig. 213). Porque en el triángulo GBI, *r*: *cos* BGI::GB.GI (282) : y siendo en los triángulos rectángulos CGB, GCI, tomando à CG por radio, las GB, GI tangentes de los ángulos GCB, GCI ó de la hipotenusa BD y del lado AD; será *r*:*cos* BGI ó *cos* D:: *tang* GCB ó *tang* BD: *tang* GCT ó *tang* AD.

596 De consiguiente, en los dos triángulos esféricos ABC, ACD rectángulos en C (fig 214y215), que tienen un lado AC comun, *las tangentes de las hipotenusas* AB, AD *están en razon inversa de los cosenos de los ángulos* BAC, CAD *adyacentes al lado comun* AC. Pues de *r*: *cos* BAC:: *tang* AB: *tang* AC, y *r*: *cos* DAC:: *tang* AD: *tang* AC se saca *cos* BAC×*tang* AB=*r*×*tang* AC=*cos* DAC× *tang* AD : luego *tang* AB: *tang* AD:: *cos* DAC: *cos* BAC.

597 3º *Que el radio es al seno de un lado como la tangente de un ángulo adyacente es á la tangente del otro lado* : es decir (fig. 213) *r*: *sen* AD:: *tang* D: *tang* AB. Pues sacándose del triángulo BGI (182) *r* : *tang* BGI::IG:IB, y siendo en los triángulos rectángulos CBI, CGI, en la suposicion de ser

CI el radio, la IG, seno del ángulo ICG ó del lado AD, y BI tangente del ángulo ICB ó del lado AB su opuesto; se tendrá *r*: IG ó *sen* AD :: *tang* BGI ó *tang* D : *tang* ICB ó *tang* AB.

598 Luego *en los triángulos* ACD (fig. 214 *y* 215) *los senos de los lados* BC, CD *no comunes serán reciprocamente como las tangentes de los ángulos* B,D: pues de *r*:*sen* BC:: *tang* B:*tang* AC, y *r*: *sen* CD::*tan* D : *tang* AC se saca *sen* BC×*tang* B=*r*×*tang* AC=*sen* CD×*tang* D, y de consiguiente *sen* BC : *sen* CD :: *tang* D : *tang* B.

599 Dividanse ahora por medio en H, L (fig. 213) los semicírculos DAF, DBF, y trazando por ellos el arco LHP de círculo maximo que corte à ABE en un punto qualquiera P; serán rectos los ángulos en L y H: y de consiguiente PA, PL serán quadrantes (588), P será el polo de AL, D de DL(579) y LH medirá al angulo D y AL al ángulo P. Luego las seis partes que componen el triángulo *BHP* rectángulo en H, ó son iguales ó son complemento de las del triángulo ABD: pues ademas del ángulo recto A=H, y ABD=HBP (581); el arco HP es complemento, y LH medida del àngulo D: el lado AB lo es de la hipotenusa BP, el lado AD del arco AL medida del ángulo P, y el lado HB lo es de la hipotenusa BD.

600 Tendrase pues 4º *que en qualquier triángulo* ABD, *rectàngulo en* A, *el radio es al coseno de uno de los lados; como el coseno del otro es al coseno de la hipotenusa*: ó *r* : *cos* AB::*cos*AD:*cos*BD. Porque siendo en el triángulo *BHP* rectángulo en H, *r*:*sen* *BP*::*sen* P: *sen* BH (593); será tambien, poniendo *cos* AB en lugar de *sen* PB, y *cos* AD en lugar de *sen* P ó de su medida AL, *r*:*cos* AB:: *cos* AD:*cos*BD.

601 *Serán pues, proporcionales en los triángulos* BAC,ACD(fig 214 *y* 215) *los cosenos de las hipotenusas* AB, AD, *como los cosenos de los lados* BC, CD *segmentos de la base*. Lo qual se infiere de *r*:*cos* AC:: *cos* BC: *cos* AB, y *r*:*cos* AC::*cos* CD:*cos* AD: de donde se saca *cos* BC : *cos*AB::*cos* CD : *cos* AD, ó *cos* AB:*cos* AD::*cos* BC:*cos* CD.

602 Esta última proporcion se convierte en *cos* AB+*cos* AD:*cos* AB—*cos* AD::*cos*BC+*cos* CD: *cos* BC—*cos* CD : y sustituyendo en ella los valores de sus términos sacados (277), se tendrá *cotang*$\frac{1}{2}$(AB+AD) : *tang*$\frac{1}{2}$(AB—AD) :: *cotang* $\frac{1}{2}$(BC+CD) : *tang*$\frac{1}{2}$(BC—CD): y estando las tangentes en razon inversa de las cotangentes, será finalmente, *tang* $\frac{1}{2}$(BC+CD) : *tang* $\frac{1}{2}$(AB+AD) :: *tang*$\frac{1}{2}$(AB—AD) : *tang* $\frac{1}{2}$(BC—CD) : es decir, *que en qualquier triángulo esférico* ABD, *si se baja un arco* AC *perpendicular sobre la base, alarga-*

da si es menester, será la tangente de la mitad de la base, á la tangente de la mitad de la suma de los otros dos lados AB, AD; *como la tangente de la mitad de su diferencia á la tangente de la mitad de la diferencia de los segmentos* BC, CD; *ó á la tangente de la mitad de su suma, si el arco perpendicular cae fuera.*

603 *En dicho triángulo* ABD (fig. 213) *el radio es al seno de un ángulo, como el coseno del lado adyacente es al coseno del otro ángulo: ó r : sen* B :: *cos* AB : *cos* D. Porque en el triángulo BHP (592) *r*: *sen* PBH::*sen* PB: *sen* PH : pongase por seno PBH su igual ABD, por seno PB, coseno AB, y por seno PH, coseno LH=*cos* D; y resultará la proporcion referida.

604 De ella se infiere *que en los triángulos* BAC, CAD (fig. 214 *y* 215) *los cosenos de los ángulos* B, D *opuestos al lado comun* AC, *son como los senos de los ángulos adyacentes* BAC, DAC: pues de *r*: *sen* BAC :: *cos* AC : *cos* B y *r*: *sen* CAD:: *cos* AC : *cos* D, se saca *sen* BAC : *cos* B::*r*: *cos* AC:: *sen* CAC:*cos* D: y de consiguiente *cos* B: *cos* D::*sen* BAC: *sen* CAD.

605 6º Tambien se verificá en el triàngulo BAD (fig. 213) *que el radio es al coseno de la hipotenusa como la tangente de un ángulo à la cotangente del otro*: por sacarse del triángulo BPH (597) *r*: *sen* BH ó *cos* BD::*tang* B: *tang* PH=*cotang* LH=*cotang* D; luego *r*: *cos* BD:: *tang* B : *cotang* D, que viene á ser lo mismo que *r*: *cot* B:: *cot* D: *cos* BD.

606 Por lo demostrado (595) se tiene (fig. 213 *y* 214) *r*: *cos* BAD:: *tang* AB:*tang* AC::*cotang* AC: *cotang* AB (269), y de consiguiente *r*: *cotang* AC::*cos* BAD: *cotang* AB: por la misma razon *r* :*cotang* AD:: *cos* DAC: *cotang* AD: será pues, en el triángulo BAD *cos* BAC : *cos* DAC:: *cotang* AB : *cotang* AD: *ó los cosenos de los segmentos del vértice proporcionales á las cotangentes de los lados* AB, AD.

607 De lo dicho (597) se saca *r*:*sen*BC:: *tang* B : *tang* AC::*cotang* AC:*cotang* B (268), y *r* : *sen* DC:: *cotang* AC: *cotang* B: luego en el triángulo ABD *sen* BC:*sen* DC :: *cotang* B: *cotang* D: esto es, *los senos de los segmentos* BC, CD *de la base proporcionales à las cotangentes de los ángulos* B y D *adyacentes.*

608 Por medio de las proposiciones establecidas se pueden resolver todos los casos en que dadas tres cosas de las que componen un triángulo esférico, se pida encontrar las otras tres: como se puede ver en las dos tablas siguientes, la una para los triángulos rectángulos, y la otra para los oblicuángulos: en las que para mayor sencillez en los cálculos se ha supuesto el *r* igual á 1.

FIN.

PH = cotang I H = cotang B; luego r: cos B D = tang B : cotang D, que viene á ser lo mismo que r: cos B : cos B :: sen BD.

600 Por lo demostrado (595) se tiene (fig. 123 y 124) r: cos BAD :: tang AB : tang AC :: cotang AC : cotang AB (569) y de consiguiente r: cos . AC : cos BAD : cotang AD por la misma razon r: cotang D : cos DAC cotang AD; será pues, en el triangulo BAD cos BAC : cos DAC :: cotang AB : cotang AD; o los cosenos de los segmentos del vertice proporcionales á las cotangentes de los lados AB, AD.

601 De lo dicho (597) se saca r: sen B : tang B : tang AC : cotang AC : cotang B (569), y r: sen DC :: cotang AC : cotang B: luego en el triangulo ABC sen BC : sen DC :: cotang B : cotang D: esto es, los senos de los segmentos BC, CD de la base proporcionales á las cotangentes de los angulos B y D adyacentes.

602 Por medio de las proposiciones establecidas se puedan resolver todos los casos en que dadas tres cosas de las que componen un triangulo esferico, se pida encontrar las otras tres, como se puede ver en las dos tablas siguientes, la una para los triangulos rectangulos, y la otra para los obliquangulos; en las que para mayor sencillez en los calculos se ha supuesto el radio = 1.

FIN.

OS POSIBLE NGULOS.

s. … usca no llega á 90.°

… una misma especie.

(593).

(595).

(600).

… llega á 90.°

(593).

6º	Los tres angulos A, B, C, fig. 125.	Un por de los tres dos por el caso ante e F (583).	
5º	Los tres lados BC, AB, AC fig. (129 y 130)	El … $\frac{B\,D}{A\,B}$ (595). tang … =DC)=	
4º	dos ángulos adyacentes al mismo lado.	Ter ángulo dividido = $\frac{Cos\ ang}{Sen\ 1}$	

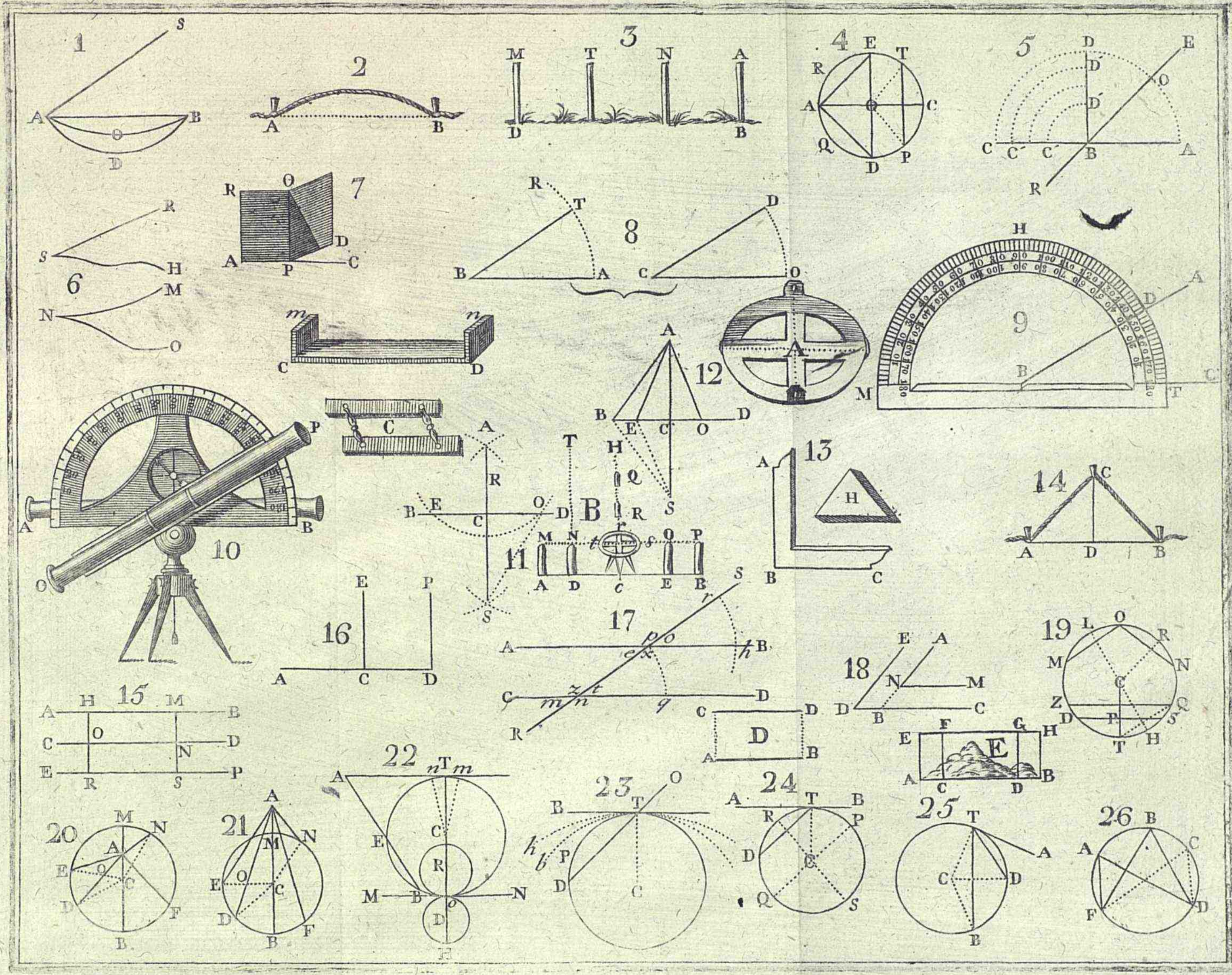
TABLA PARA LA RESOLUCION DE TODOS LOS CASOS POSIBLES DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS.

	Datos.	*Busco.*	*Valores.*	*Casos en que lo que se busca no llega á 90.°*
1.°	Hipotenusa y un lado.	Angulo opuesto al lado dado.	*Su sen* $=\frac{\text{sen lado dado}}{\text{sen hipotenusa}}$ (593).	Si los datos son de una misma especie.
		Angulo adyacente al lado dado.	*Su cos* $=\frac{\text{tang lado dado}}{\text{tang hipotenusa}}$ (595).	Lo mismo.
		El otro lado.	*Su cos* $=\frac{\text{cos hipotenusa}}{\text{cos lado dado}}$ (600).	Si el lado dado no llega á 90.°
2.°	Un lado y el ángulo opuesto.	Hipotenusa.	*Su sen* $=\frac{\text{sen lado dado}}{\text{sen ángulo dado}}$ (593).	Dudoso.
		El otro lado.	*Su sen* $=\frac{\text{tang lado dado}}{\text{tang ángulo dado}}$ (597).	Dudoso.
		El otro ángulo.	*Su sen* $=\frac{\text{cos ángulo dado}}{\text{cos lado dado}}$ (603).	Dudoso.
3.°	Un lado y un ángulo adyacente.	Hipotenusa.	*Su tang* $=\frac{\text{tang lado dado}}{\text{cos ángulo dado}}$ (595).	Si los datos son de una misma especie.
		El otro ángulo.	*Su cos = cos lado dado × seno ángulo dado* (603).	Si el lado dado es menor que 90.°
		El otro lado.	*Su tang = sen lado dado × tang ángulo dado* (597).	Si el ángulo dado es menor que 90.°
4.°	Hipotenusa y un ángulo.	Lado adyacente.	*Su tang = tang hipot. × cos ángulo dado* (595).	Si el ángulo fuere agudo.
		Lado opuesto al ángulo dado.	*Su sen = sen hipot. × sen ángulo dado* (593).	Si los datos fueren de una misma especie.
		El otro ángulo.	*Su tang* $=\frac{\text{cot ángulo dado}}{\text{cos hipotenusa}}$ (605).	Si la hipotenusa fuere menor que 90.°
5.°	Los dos lados.	Hipotenusa.	*Su cos = rectángulo cos ángulos dados* (600).	Si los datos fueren de una misma epecie.
		Un ángulo.	*Su tang* $=\frac{\text{tang lado opuesto}}{\text{sen lado adyacente}}$ (597).	Si el lado opuesto fuere agudo.
6.°	Los dos ángulos.	Hipotenusa.	*Su cos = rectángulo cot ángulos dados* (605).	Si los datos fueren de una misma especie
		Un lado.	*Su cos* $=\frac{\text{cos ángulo opuesto}}{\text{sen ángulo adyacente}}$ (603).	Si el ángulo opuesto fuere agudo.

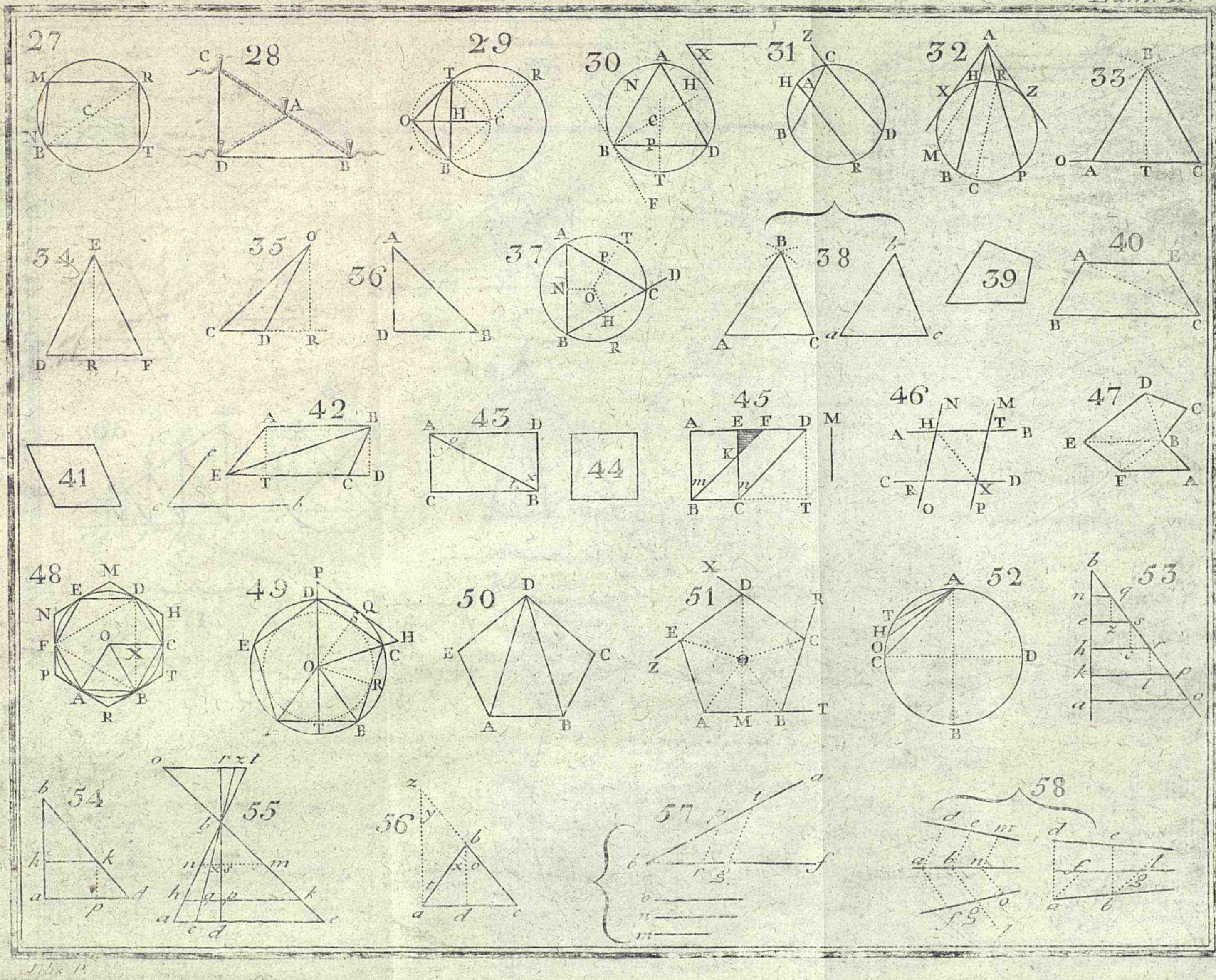
TABLA PARA LA RESOLUCION DE LOS TRIANGULOS ESFERICOS OBLICUANGULOS.

1 *Segm.* ó 2º *segm.* quiere decir: primero ó segundo segmento del ángulo ó lado dividido por la perpendicular.

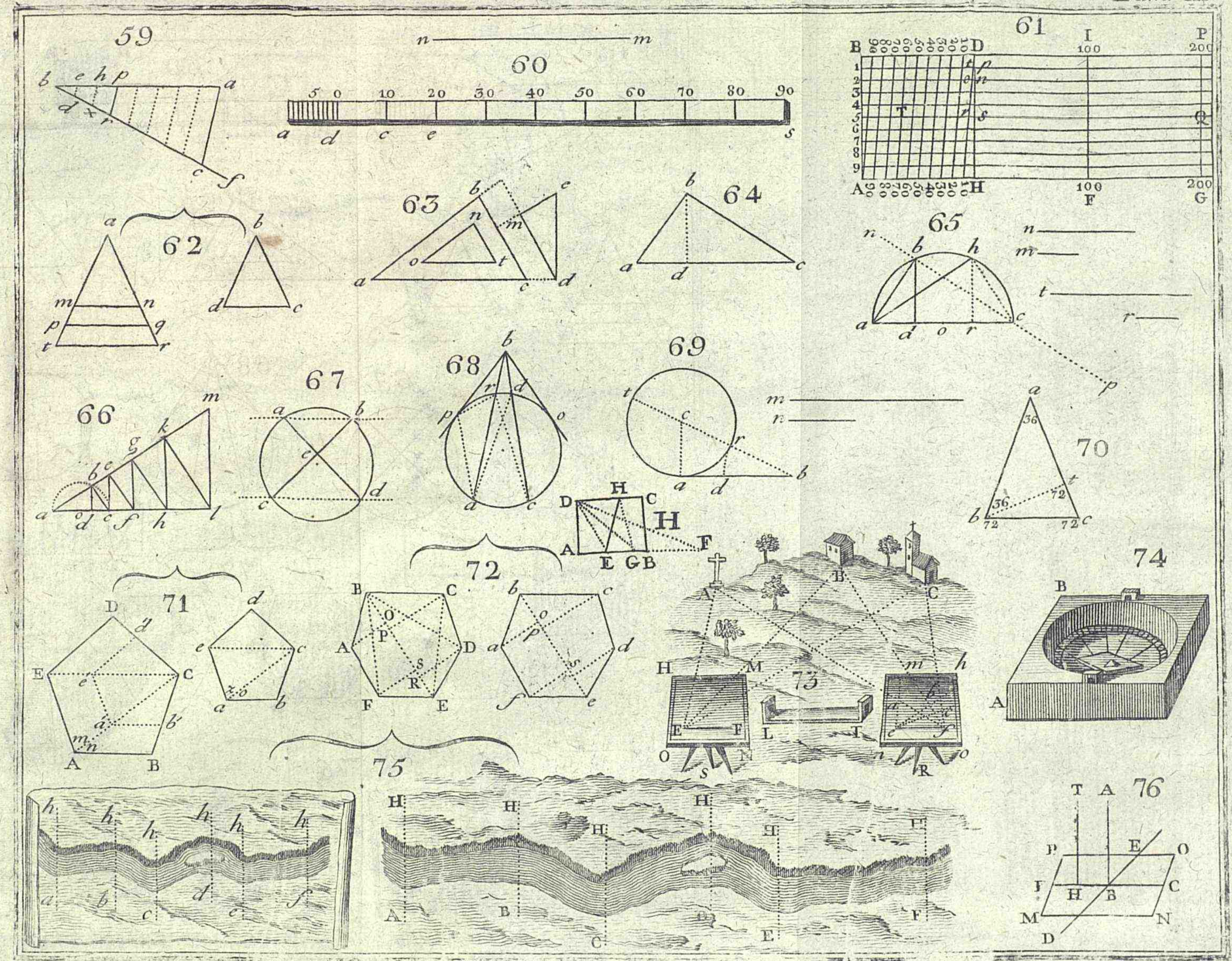
	Datos.	*Se busca.*		*Valores.*
1º	Dos ángulos y un lado opuesto á uno de dichos ángulos.	El lado opuesto al otro ángulo. Tercer lado.... Tercer ángulo.	Por la analogia comun. Bagese una perpendicular al lado que junta los ángulos dados. Sirve la misma perpendicular.	Los senos de los ángulos son como los senos de los lados opuestos (594). $Tang.$ 1 segm. del lado = cos ángulo adyacente × tang lado dado (595). Sen 2º segm. $= \frac{Sen\ 1\ segm.\ \times\ tang\ \text{ángulo adyacente al lado dado}}{Tang\ \text{ángulo opuesto al mismo lado dado}}$ (598). Cot 1 segm. del ángulo = cos lado dado × tang ángulo adyacente (605). Sen 2º segm. del mismo ángulo $= \frac{Sen\ 1\ segm.\ \times\ cos\ \text{ángulo opuesto al lado dado}}{cos\ \text{ángulo adyacente al lado dado}}$ (604).
2º	Dos lados y un ángulo opuesto á uno de estos lados.	El ángulo opuesto al otro lado Ángulo comprendido entre los lados dados. Tercer lado.	Por la analogía comun. Bagese una perpendicular desde el ángulo que forman los dos lados dados. Sirve la misma perpendicular.	Los senos de los lados son como los de los ángulos opuestos (594). Cot 1 segm. ángulo incognito = tang ángulo dado × cos lado adyacente (605). Cos 2º segm. del mismo ángulo $= \frac{Cos\ 1\ segm.\ \times\ tang\ \text{lado dado adyacente al ángulo dado.}}{tang\ \text{lado opuesto al ángulo dado.}}$ (596). $Tang$ 1 segm. de este lado = cos ángulo dado × tang lado adyacente á dicho ángulo (595). Cos 2º segm. del mismo $= \frac{Cos\ 1\ segm\ \times\ cos\ \text{lado opuesto al ángulo dado.}}{Cos\ \text{lado adyacente al ángulo dado.}}$ (601).
3º	Dos lados y el ángulo que forman.	Un ángulo opuesto á uno de los lados dados. Tercer lado.	Bagese una perpendicular desde el ángulo que no se busca. Bagese una perpendicular á uno de los lados dados.	$Tang$ 1 segm. del lado dividido = cos ángulo dado × tang lado adyacente á dicho ángulo (595). $Tang$ ángulo pedido $= \frac{Tang\ \text{ángulo dado}\ \times\ seno\ 1\ segm.}{seno\ 2.o\ seg.\ \text{del lado dividido.}}$ (598). $Tang$ 1 segm. del lado dividido = cos ángulo dado × tang lado no dividido (595). Cos lado pedido $= \frac{Cos\ \text{lado no dividido}\ \times\ cos\ 2.o\ sem.}{Cos\ 1\ segm.\ \text{del lado dividido.}}$ (601).
4º	Un lado y los dos ángulos adyacentes al mismo lado.	Un lado opuesto al uno de los ángulos dados. Tercer ángulo.	Bagese una perpendicular al lado que no se busca. Bagese una perpendicular desde el uno de los ángulos dados.	Cot 1 segm. del ángulo dividido = cos lado dado × tang ángulo opuesto al lado pedido (605). $Tang.$ lado pedido $= \frac{Tang\ \text{lado dado}\ \times\ cos\ 1\ segm.\ \text{ángulo dividido.}}{Cos\ 2.o\ segm.\ \text{del mismo ángulo.}}$ (606). Cot 1 segm. ángulo dividido = cos lado dado × tang ángulo dado no dividido (605). Cos ángulo pedido $= \frac{Cos\ \text{ángulo no dividido}\ \times\ 2.o\ segm.}{Sen\ 1\ segm.\ \text{del ángulo dividido.}}$ (604).
5º	Los tres lados BC, AB, AC fig.(129 y 130)	El ángulo B.	Bagese el arco AD perpendicular sobre BC.	$Tang\ \frac{1}{2}(BD \pm DC) = \frac{tang.\ \frac{1}{2}(AB + AC) \times tang\ \frac{1}{2}(AB - AC)}{tang.\ \frac{1}{2}BC.}$ (602). $Cos\ B = \frac{Tang\ BD}{Tang\ AB}$ (595).
6º	Los tres angulos A, B, C, fig. 125.	Uno de los lados AB.	Tracese un triangulo DEF suplemento de ABC segun se dijo (583).	Sepase el valor de los tres lados DE, EF, FD suplementos de los ángulos C, A, B (583). Averiguese por el caso anterior en dichos triángulos DEF el valor del ángulo F, y se tendrá el lado AB = suplemento de F (583).

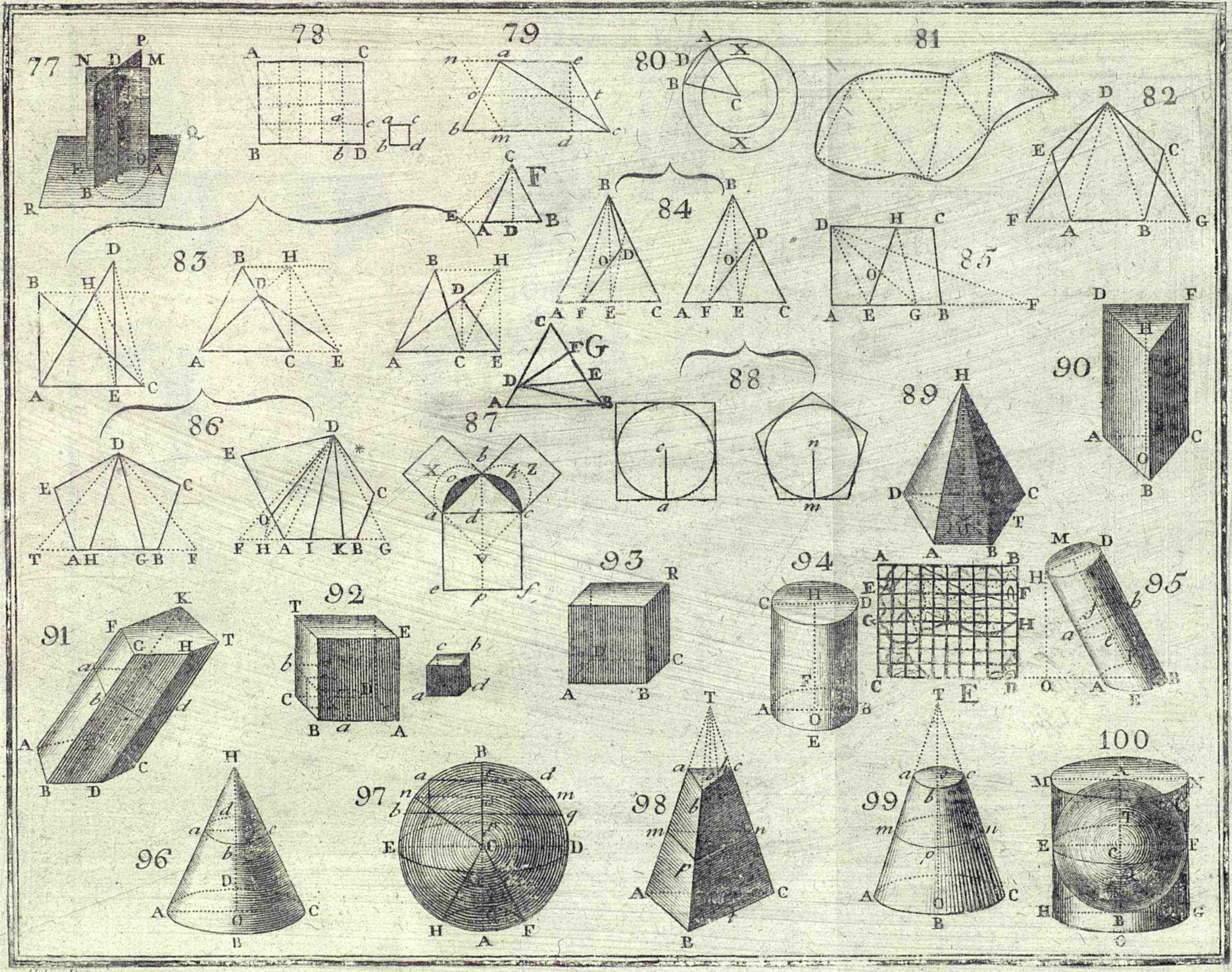


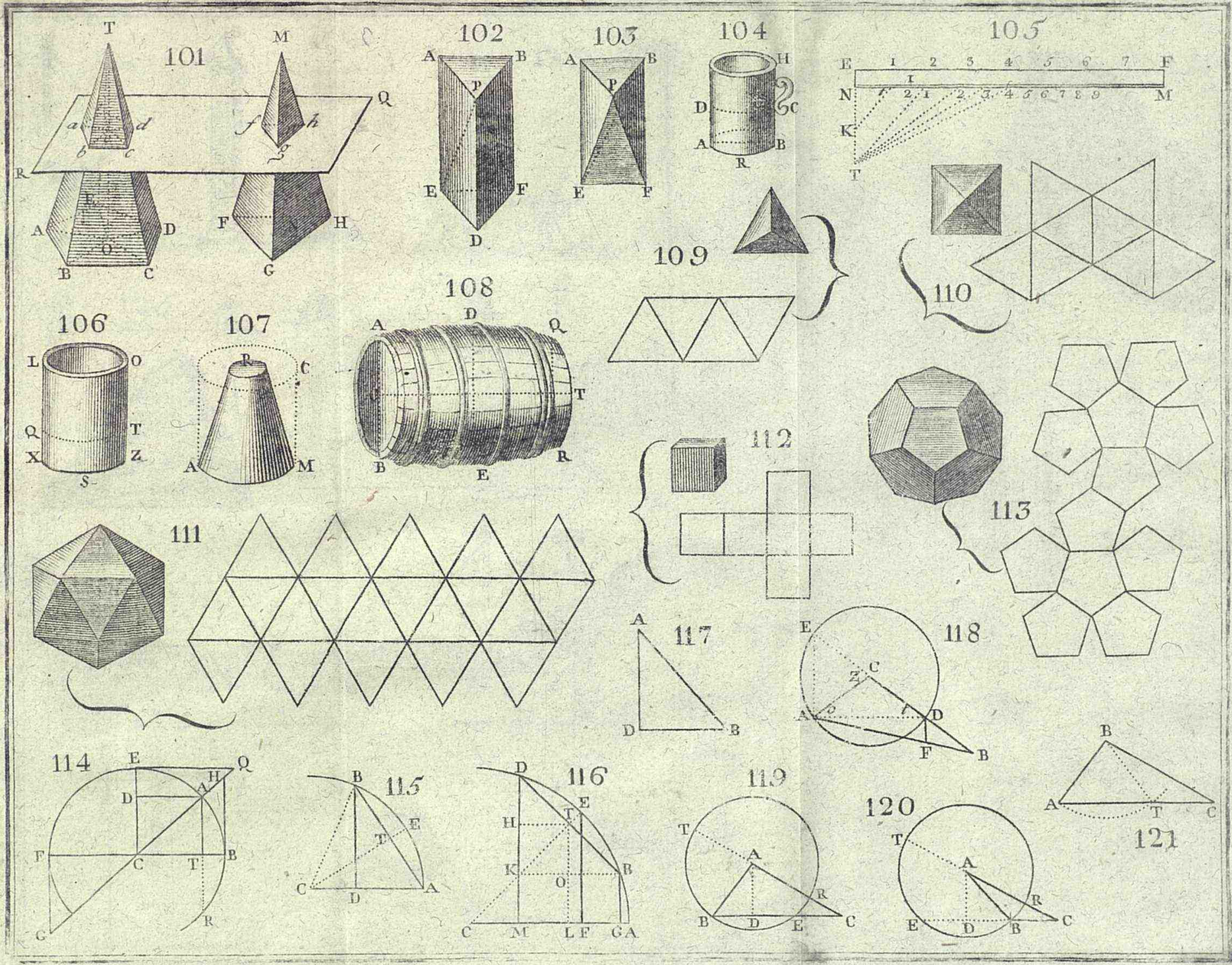
Aix Prieto lo Grabó, en Salamanca.

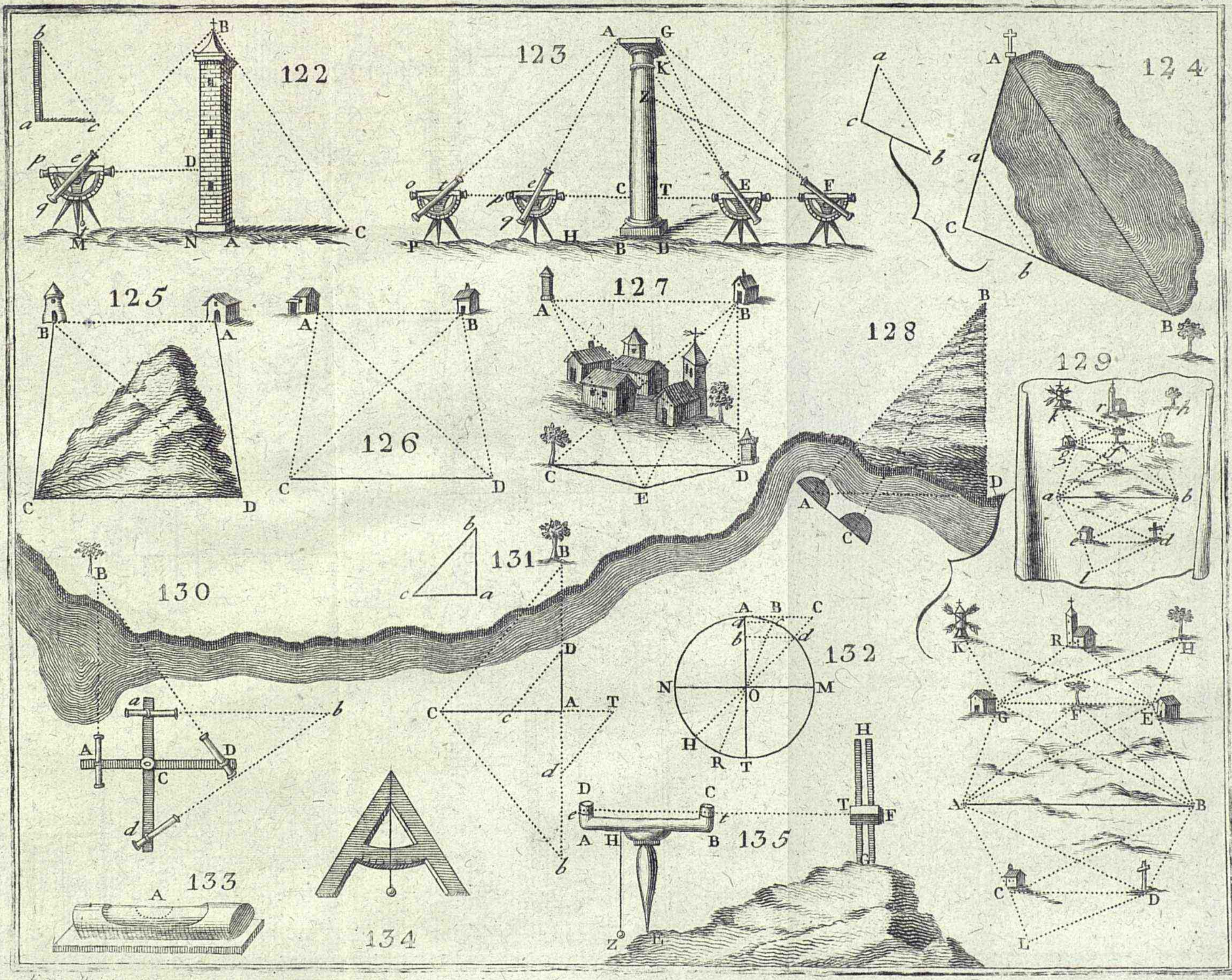

27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58

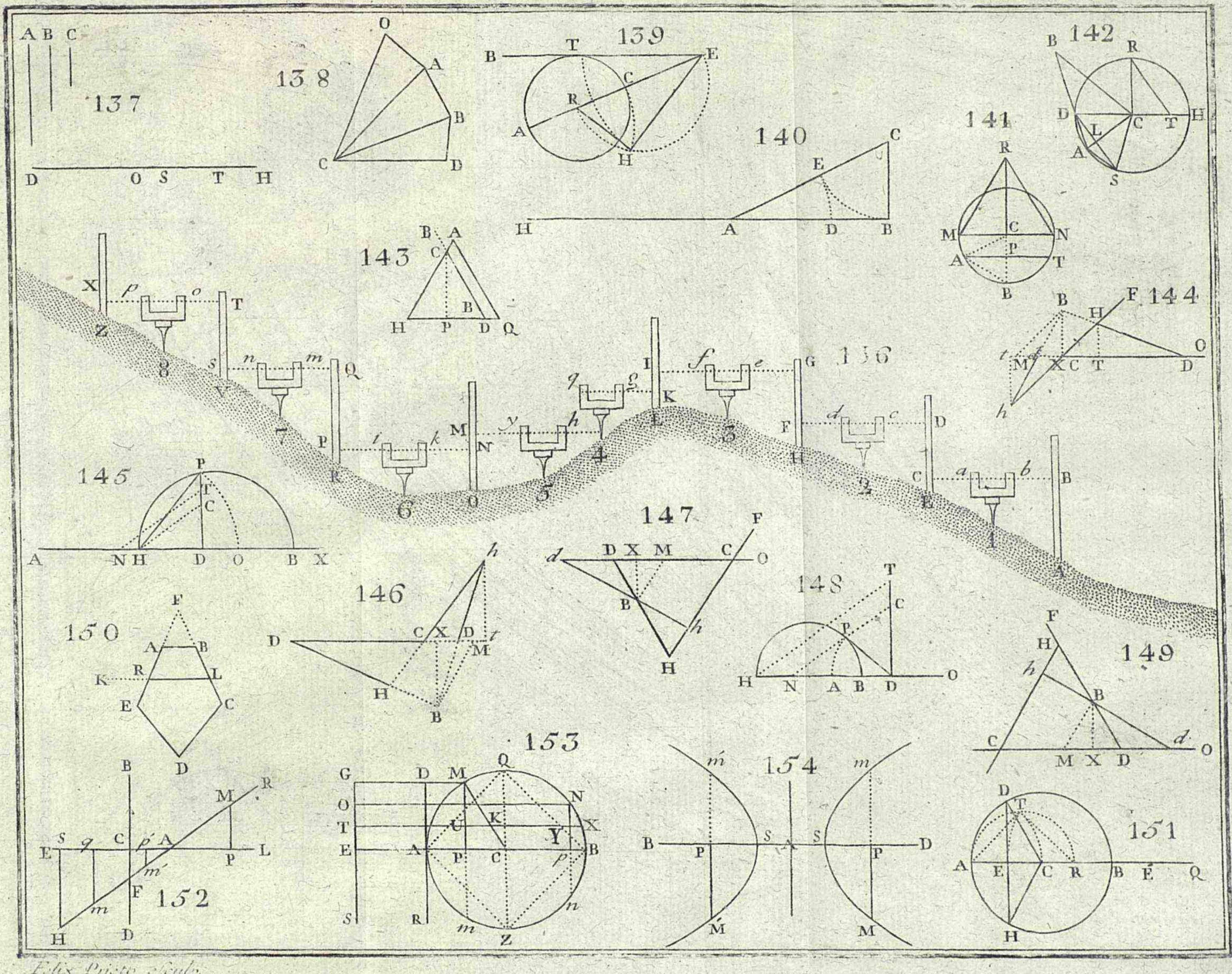
Jolis P.


59
60
5 0 10 20 30 40 50 60 70 80 90
61
100
200
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76

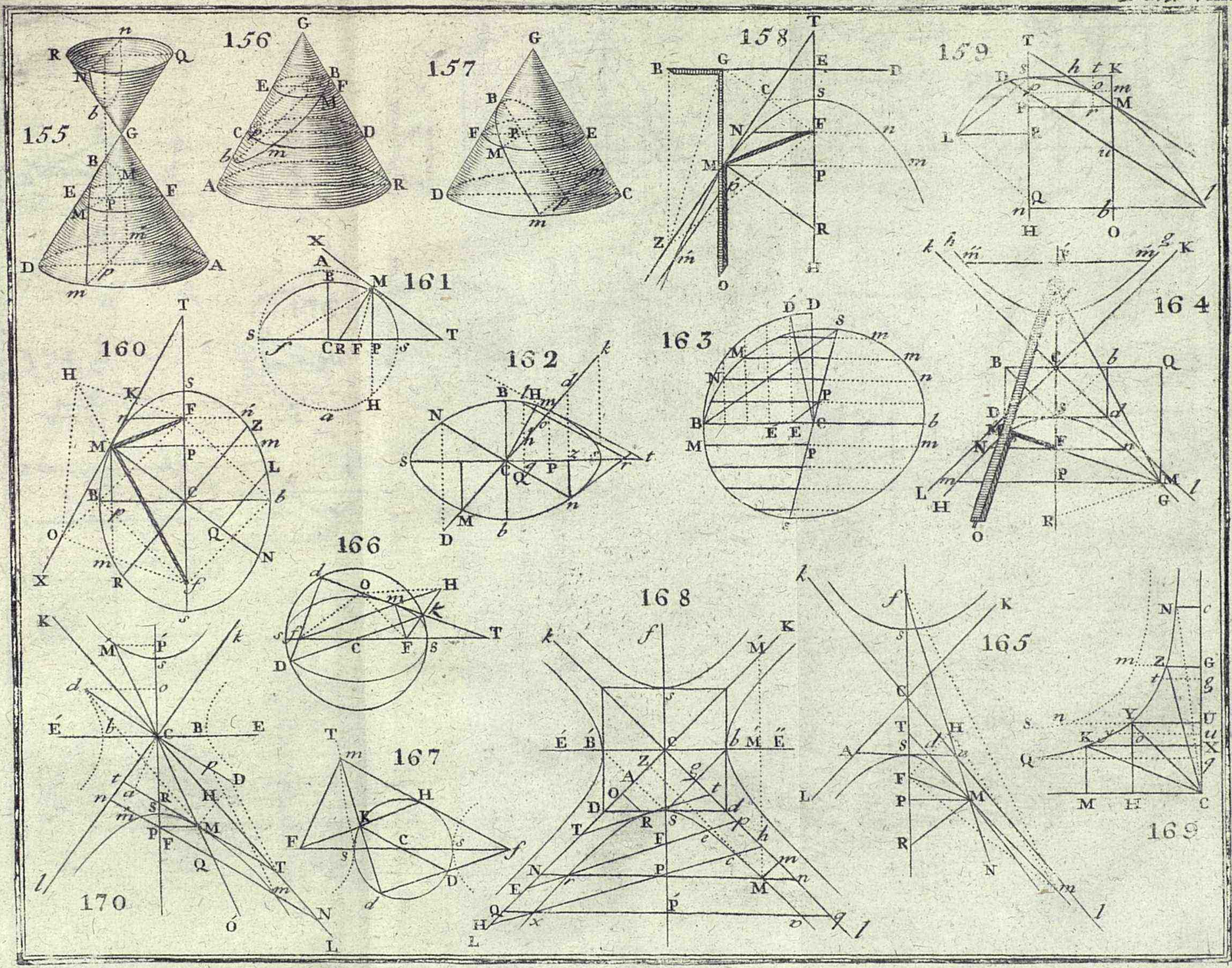

77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

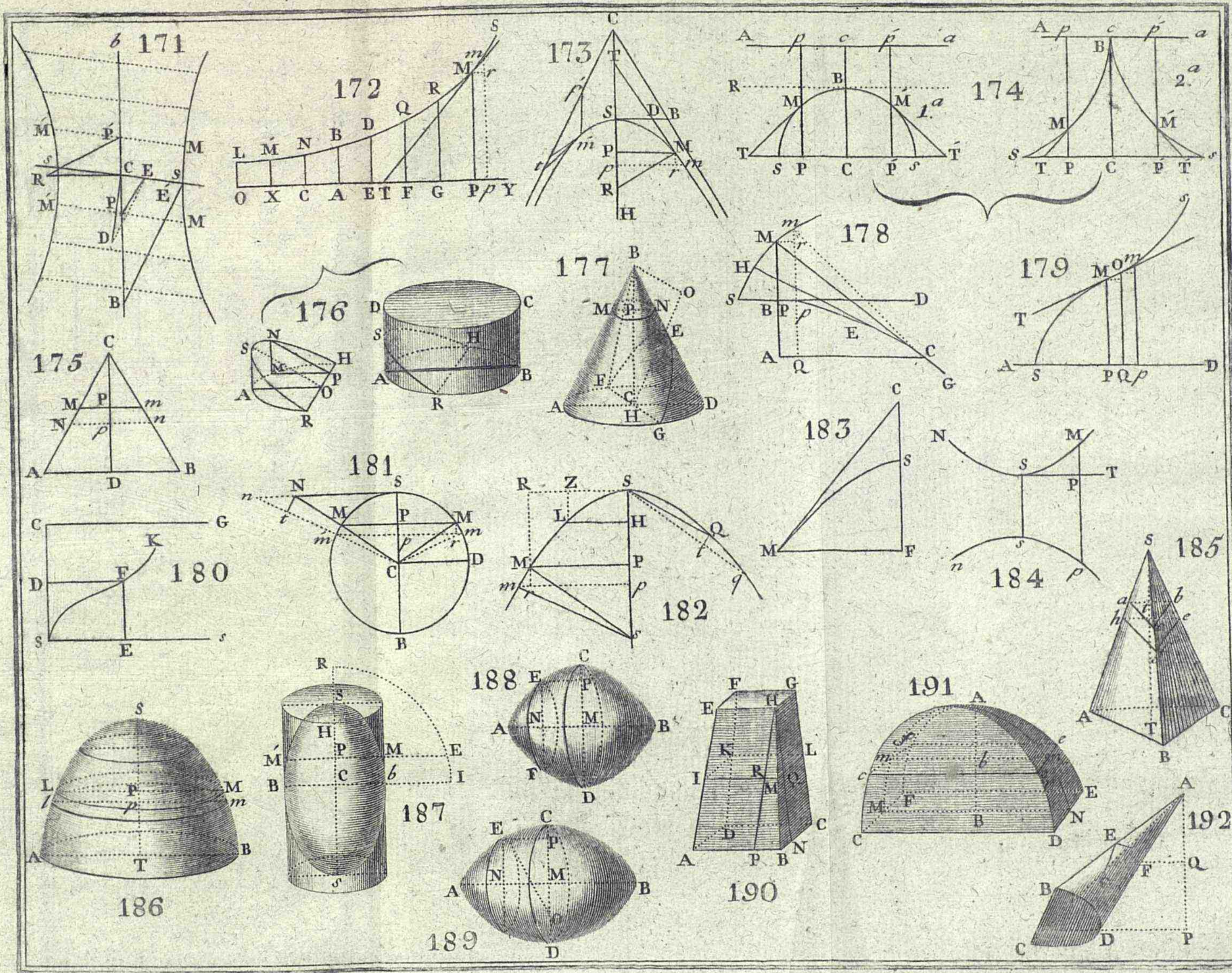

101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121


122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135

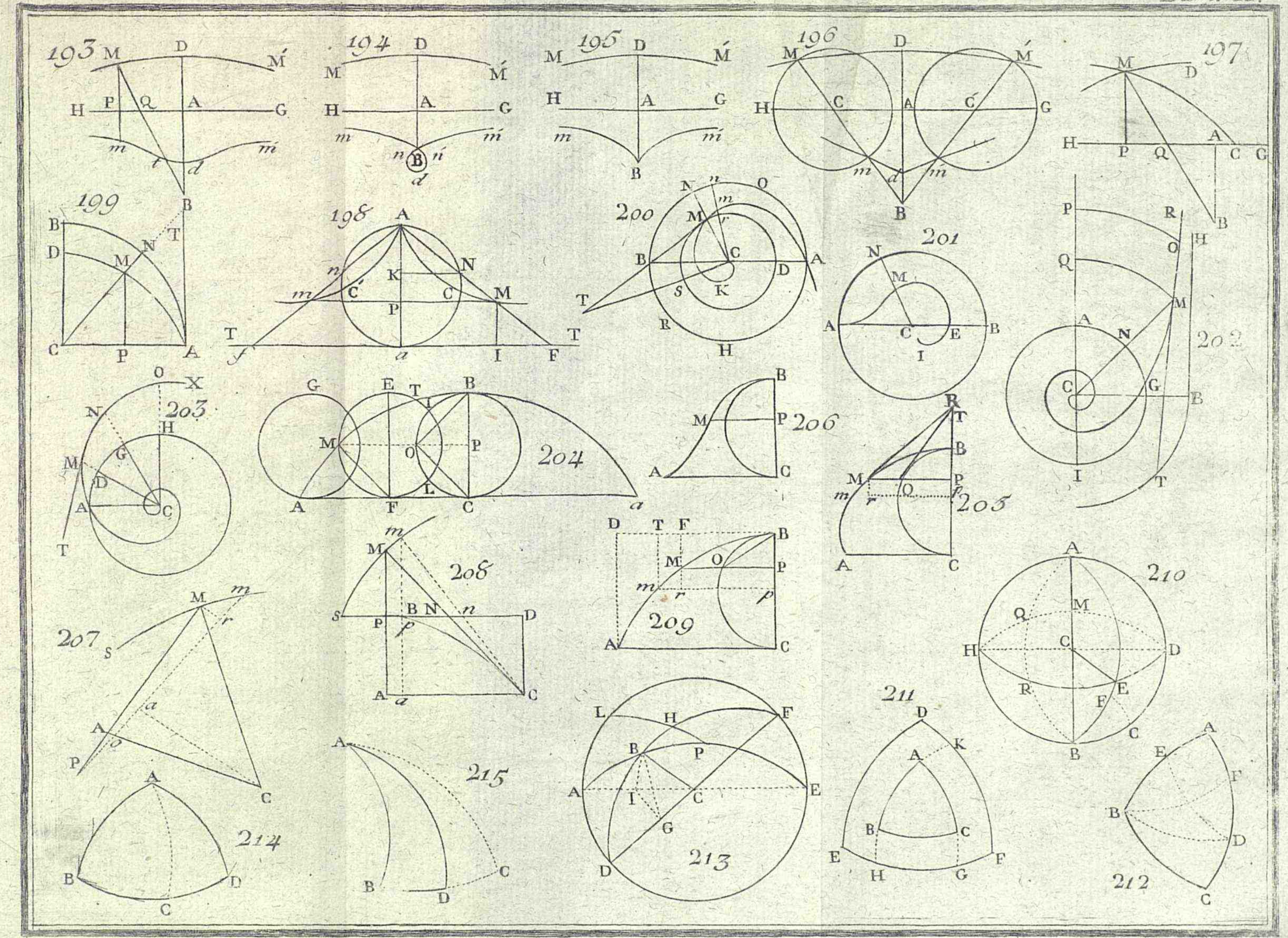


Felix Prieto sculp.


155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170



Felix Prieto las Grabó en Salam.ca



Prieto sculp.