Un estudio algebraico de la lógicas temporales

García Olmedo, Francisco

Un estudio algebraico de las lógicas temporales

Memoria realizada en el Departamento de Algebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Prof. Dr. Antonio Jesús Rodríguez Salas, para obtener el Grado de Doctor en Ciencias (Matemáticas) por la Universidad de Granada.

V° B° | *V° B°*

El aspirante | El director

Contenido

Introducción.

Introducción histórica.

La preocupación por las magnitudes es consustancial al conocimiento científico y técnico en la medida en que dicho conocimiento supone una investigación de la naturaleza de lo percibido, ya sea por simple deseo de conocerlo o por el interés de manipularlo.

Entre las magnitudes más inmediatas se tuvo al *espacio*, que es ocupado por los objetos y en el cual estos pueden ser medidos. Si el espacio alberga a los objetos en su dimensión material, y ello le confiere importancia, también debería tenerse en cuenta el tiempo, porque este puede ser considerado como la dimensión que permite relatar la *historia* de las evoluciones de todo aquello que cambia. Aristóteles llega a opinar que en los estados en que el alma no cambia, como es el estado de sueño, el tiempo cesa de sernos conocido.

Mientras que el espacio fue estudiado muy tempranamente[1] y dio lugar a ciencias como la geometría, la concepción que se tenía del tiempo era más oscura. Se debatía la existencia de un movimiento natural privilegiado, ampliamente perceptible, que fuese digno de ser llamado tiempo. La filosofía griega había ligado la objetividad del tiempo al movimiento de los astros, llegando algunos, como los Pitagóricos, a confiar en su regularidad basándose en la divinidad atribuida a los cuerpos celestes. En cualquier caso, la problemática de la búsqueda de un patrón para el tiempo generaba grandes dificultades formales.

La dimensión temporal se manifestaba con un carácter mucho menos aprehensible que la espacial, prueba de ello es que ninguna ciencia con la solidez de la geometría euclídea tenía como objeto el estudio del tiempo. Sin embargo, el tiempo parecía estar en la base de numerosos problemas que iban surgiendo en la consolidación de la lógica. Como ejemplo podemos destacar dos.

El primero surgió de parte de Aristóteles en el capítulo nueve de *Sobre la Interpretación*. En dicho capítulo se planteaba la validez de la extensión del

[1] Ya a mediados del siglo *IV*, Eudoxio de Cnido establece el volumen de la pirámide y del cono, reconociendo algunos en ello algo análogo a los modernos procedimientos de integración.

tercio excluso a futuros contingentes. El principio del tercio excluso establece que dada una proposición y su negación una al menos es necesariamente verdadera. Por tanto, si no se admitiera una dependencia del tiempo por parte del valor de verdad de las proposiciones y pretendieramos que el principio del tercio excluso valiera para todos los acontecimientos futuros, entonces habríamos admitido de hecho el determinismo en la historia. La extensión al futuro del principio del tercio excluso, en palabras de Aristóteles, conduce a que *"Nada es, ni nada llega a ser, ya sea por efecto del azar, ya sea de una manera indeterminada, nada hay que en el futuro pueda ser o no ser, sino que todo deriva de la necesidad, sin indeterminación alguna ... en virtud de este razonamiento no habría ya nada que deliberar, ni de qué inquietarse, en la creencia de que si llevamos a cabo tal acción se seguirá tal resultado, y de que si no la llevamos a cabo no se seguirá tal resultado"*. La preocupación por conservar en su lugar la capacidad de decisión humana obligaría así al Estagirita a limitar la validez del tercio excluso a los acontecimientos pasados o presentes, así como a los acontecimientos futuros únicamente en el caso de que fuesen efecto de un determinismo conocido.

Esta reflexión de Aristóteles tendría una gran importacia en el futuro del pensamiento y de hecho llegaría a estar siglos más tarde en el origen de la controversia escolástica acerca de los futuros contingentes, y después, en la época contemporánea, en la base de la construcción por Łucasiewicz de una lógica que rebasa los límites de lo verdadero y lo falso.

El segundo problema tiene que ver con Diodoro Cronos (Cronos es un sobrenombre que significa Caduco), pensador encuadrado en la Escuela de Megara y discípulo inmediato del fundador de dicha escuela, Euclides de Megara, quien a su vez había sido discípulo de Socrates. Filón de Megara había definido de forma muy precisa la implicación lógica a finales des siglo IV a. de J.C.. Filón sostenía que una implicación era cierta con la única condición de que no sea su antecedente cierto y su consecuente falso. En realidad esta implicación, que podemos denominar *filoniana* o *material* es la misma que reinventarán después Gotolb Frege y Bertrand Russell a finales del siglo XIX. Parece ser que Filón llegó incluso a dar una tabla de verdad para su concepto de implicación, tal como se utiliza en la actualidad sin más que cambiar la notación y el orden de las líneas.

Filón encontró en su definición de la implicación, y Russell reencontraría en la época moderna casi en los mismos términos, una incómoda paradoja. La implicación *Si es de noche, entonces es de día*, pronunciada de día, tenía que ser admitida como verdadera porque comporta un antecedente falso y un consecuente verdadero. Intuitivamente, Diodoro Cronos se resistía a admitir como verdadero tal enunciado porque si era emitido de noche resultaba falso. Ello le llevó a redefinir el concepto de implicación introduciendo para ello, de forma ineludible, el concepto de tiempo. Para Diodoro p implica a q si *Sea cual sea el momento t, no se da jamás que p sea verdadera en t y q falso en t.* Al introducir Diodoro la dimensión temporal en la definición de implicación resulta que ambas implicaciones, la *diodoriana* y la *filoniana*, son incomparables en el seno de la lógica clásica.

Los puntos de vista de Diodoro Cronos, relativos a la inclusión de la dimensión temporal en las consideraciones lógicas, tuvieron una repercusión notable en la Lógica Modal. Dicha lógica se encontraba en avanzado desarrollo y había sido cultivada por Aristóteles. La intención de la escuela megaro-estoica consistía en reducir la Lógica Modal a la Lógica Temporal, lógica esta que aún hoy es considerada por algunos como un tipo particular de Lógica Modal (ver [16]). Esta escuela definía lo posible como *"lo realizable en algún momento"* y lo necesario como *"lo que está realizado en todo tiempo"*, siendo obligatorio destacar la sutileza de que Diodoro Cronos concibe los funtores modales referidos al presente y al futuro. Parece también claro que en una u otra medida Averroes y Santo Tomás de Aquino se adhirieron a esta visión de la Lógica Modal. No obstante, ha habido autores que han considerado las modalidades no sólo referidas al presente y al futuro sino también al pasado. En este sentido se podría apuntar el axioma kantiano que dice *"Todo lo que existe de modo contingente, en algún momento no ha existido"*.

En la Edad Media la tradición islámica, aunque influida por las investigaciones de la Escuela Estoica, aportará un tratamiento con sello propio de la lógica del tiempo. Dicha tradición filosófica tendía a no considerarlo como aquello a lo que se iba a reducir las modalidades, sino que conjugaba sus propiedades con las modales. Los resultados de estos enfoques, particularmente en los trabajos de Avicena y en los del autor persa Al-Qazwinīnī al-Kātibī, están impregnados de una gama muy rica de matices, llegando a dar Al-Qazwinīnī seis tipos de proposiciones modales temporalizadas, frente a las cuatro del *cuadrado de Aristóteles*, que por conjunción generan otras siete, dando en total trece (vease [34]).

No parece que la tradición de la Edad Media haya conocido en la misma dirección desarrollos tan ricos. No obstante, encontramos en el Pseudo Scoto la distinción entre cuatro tipos de necesidades temporalizadas en las que Nicholas Rescher cree reconocer las proposiciones: absolutamente necesaria, absolutamente perpetua, generalmente condicional y generalmente absoluta de la tradición islámica. Se puede tratar de una influencia de dicha tradición sobre la cristiana o de una reinvención paralela a partir de un mismo punto de partida estoico.

La lógica del tiempo verá aún una nueva contribución dada por la teoría escolástica de la ampliación. La ampliación es ese ensanchamiento mediante el cual el sujeto recibe por su ajuste a la proposición misma una extensión cronológica más amplia de lo que el término deja esperar. En el siglo $XIII$, Pedro de España explicaba lo anterior con un ejemplo: *"cuando decimos: "un hombre puede ser el Anticristo", el término "hombre" no se aplica sólo a los que son ahora, sino también a los que serán. Se ha, pues, ampliado a los seres futuros"*. A finales del siglo XIV, Alberto de Saxe enumerará diez reglas concernientes a la ampliación.

A pesar de todo, el debate sobre la naturaleza del tiempo a lo largo de la Edad Media fue confuso. Sirvan como ejemplo las palabras de San Agustín cuando dice *"el presente mismo, si fuera siempre presente sin perderse en el pasado, ya no sería tiempo... por tanto, si el presente para ser tiempo debe perderse en el pasado, ¿cómo podemos afirmar que es él también, puesto que la única razón de su ser es no ser ya?"*.

La curiosidad por una lógica específica del tiempo parece estar embotada en el origen de los tiempos modernos. En el momento mismo en que la dinámica de Galileo abría con fuerza las puertas de la ciencia, el desarrollo combinado de la geometría analítica, del cálculo de derivadas y de los métodos de integración iba a desembocar en una espacialización del tiempo, cuyo éxito relativo parece haber desalentado investigaciones ya emprendidas o que hubieran podido encaminarse en otras direcciones. Leibniz, en cuyos innumerables borradores se encuentra tan frecuentemente el germen precursor de las teorías lógicas más recientes, parece muy en particular haber depositado toda su curiosidad relativa a la estructura lógica del tiempo en la aventura del cálculo infinitesimal.

En lo sucesivo los esfuerzos de los lógicos, salvo raras excepciones, tenderán más bien a la eliminación que al reconocimiento de la originalidad de la dimensión temporal. En la tradición lógica llamada aristotélica, que pretendía analizar toda proposición en tres elementos, *sujeto*, *cópula* y *predicado*, bajo el esquema:

S es P

la eliminación de la dimensión temporal consistirá, en general, en decir que la pretendida temporalidad de la proposición no recae en absoluto sobre la cópula, que ésta en efecto expresa la coexistencia, sea estrictamente presente, sea intemporal, de dos conceptos que en cambio pueden, en sí mismos, ser objetos de una temporalización. El análisis consistirá pues en retirar el tiempo de la cópula, nudo de la proposición, para concentrarlo en uno de los dos términos, sujeto o predicado.

Stuart Mill parece haber sido el único en protestar frente a estos esfuerzos por eliminar la dimensión temporal utilizando como medio la lógica tradicional. Escribe:
"Lo que afirmamos ser pasado, presente o futuro, no es lo que el sujeto significa , ni lo que el predicado significa, sino específica y expresamente lo que la predicación significa; lo cual no es expresado nada más que por la proposición en tanto que tal, no por uno u otro de los dos términos, ni por los dos. Es por ello por lo que la circunstancia del tiempo está propiamente considerada como vinculada a la cópula, que es el símbolo de la predicación, y no al predicado"
Desgraciadamente el filósofo inglés no dió a este original enfoque el desarrollo que merecía.

La lógica contemporánea, tal como se comenzó a edificar a finales del siglo XIX y principios del XX, aborda la labor de analizar el campo de la racionalidad al nivel de predicados de primer orden. En dicho análisis se pueden distinguir dos niveles bien diferenciados:

- El nivel del cálculo proposicional que se centra en el estudio de las leyes que regulan la combinación de las proposiciones elementales entre sí, descartando toda consideración sobre el contenido de dichas proposiciones.

- El nivel del cálculo de predicados que incluyendo al cálculo proposicional además se interesa por la estructura interna de las proposiciones elementales. En este nivel dichas proposiciones son vistas como sucesiones finitas de símbolos entre los que figuran los de predicado y los de variable. Aquellos pueden ser asimilados a los verbos del lenguaje natural (indoeuropeo) y estos a sujeto y complementos.

La anterior visión de la lógica se aparta bastante del análisis del discurso gramatical para acercarse y ponerse al servicio del interés matemático. En efecto, los símbolos de predicado no representan sino una aproximación al papel del verbo gramatical porque este, según sentenció Aristóteles, *"añade a su propia significación la del tiempo"*. Dicha aproximación grosera es más que suficiente para el matemático puesto que este en tanto que se sirve del lenguaje natural para su trabajo y en él no dispone de un verbo *intemporal* enuncia sus aserciones en presente, por ejemplo, *"La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa"*. Y es que el matemático trata con verdades ajenas al transcurso del tiempo, por tanto, ¿qué puede perder si no considera al tiempo en el aparato lógico?. No cuesta efectivamente trabajo ver, por ejemplo, como en el lenguaje matemático se llega a sustituir los verbos por símbolos, como pueden ser $\leq$ o $=$, desproveyéndolos claramente de la dimensión temporal.

En definitiva, si la lógica se pone exclusivamente al servicio de la matemática, su dimensión proposicional es insuficiente. No obstante la lógica de primer orden ha demostrado ser ampliamente satisfactoria para las necesidades del matemático a poco que este la utilice con pericia. Si por contra la lógica no renuncia a dejar al descubierto ninguna esfera de la racionalidad, entonces se verá obligada a incluir en su estructura y consideraciones la dimensión temporal. Surgirá así la necesidad de tener en cuenta enunciados como: *"En el momento t p y q, si y sólo si en el momento t p y en el momento t q"* o como *"Si se ha dado el caso de que p, entonces se dará siempre el caso de que se ha dado el caso de que p"*. Y se considerará de igual forma la posibilidad de extender a la expresión del tiempo ciertas propiedades del cálculo de predicados. Por ejemplo, la conocida tesis del cálculo de predicados

$$\forall x(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\phi \wedge \forall x\psi$$

puede extenderse a la lógica temporal como

$$\Box(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box\phi \wedge \Box\psi$$

aún corriendo el riesgo de inspirar con ello la peligrosa idea, que por otra parte aflora con bastante frecuencia a la pluma de Russell, de que la lógica del tiempo no tiene ninguna originalidad, y de que el cálculo de predicados basta para dar cuenta de todas sus propiedades.

J.N. Findlay, en el trabajo [17], señaló que la práctica de los tiempos gramaticales de nuestros lenguajes era ya suficientemente sistemática como para proporcionar la base de un cálculo formal. Findlay proponía como ejemplos explícitos de teoremas que debían normalmente surgir de él, algunas equivalencias que tomaba prestadas de textos de San Agustín y Sto. Tomás. Añadía además proposiciones más sutiles, como la que enuncia que todo suceso, pasado, presente o futuro, en el futuro será pasado:

$$\alpha \vee P\alpha \vee F\alpha \rightarrow FP\alpha$$

El indiscutible mérito histórico de Findlay consistió en abrir así la puerta a los trabajos de Prior y de su escuela.

A partir de la obra de Arthur N. Prior *Time and tense*, título difícilmente traducible al castellano, surge la lógica temporal formal moderna que se divide en cuatro grandes ramas:

(i) La lógica de la datación o de la fecha (time).

(ii) La lógica del tiempo gramatical (tense).

(iii) La lógica temporal de preposiciones y adverbios.

(iv) Las lógicas temporales de propósito específico.

Las lógicas de la datación se encuentran ya, más o menos hechas, en el mero nivel de nuestras lenguas indo-europeas. En ellas, las indicaciones temporales no se limitan a los recursos de los tiempos gramaticales sino que se dota a los acontecimientos de una indicación temporal suplementaria, que llamamos su fecha.

$$T_t(\alpha)$$

lo interpretamos como α en el instante t. Este tipo de notación simbólica fue inaugurado por el lógico polaco Jerzy Łos en 1947 intentando formalizar los métodos de inducción de J. Stuart Mill. Prior se inspiró en él para algunos desarrollos de *Time and modality* de 1957, en tanto que a partir de 1965, Nicholas Rescher iba a contribuir a la exploración de esta vía.

Las lógicas del tiempo gramatical son aquellas que se fundan en la distinción propia de las lenguas indo-europeas entre sus tiempos fundamentales: pasado, presente y futuro.

El sistema considerado como el más elemental de la lógica del tiempo gramatical es el minimal (minimal tense-logic) introducido por E.J. Lemmon en 1965 y que ha sido denominado $\mathbf{K}_t$. Resulta singular el hecho de que este sistema lógico no lleva apareada ni implica ninguna presunción adicional acerca de la estructura del tiempo. Otros sistemas ampliamente difundidos son los siguientes:

- El sistema $\mathbf{K}_c$ del *tiempo relativista causal*, introducido por Nino Cocchiarella en 1965, y que corresponde a una concepción del tiempo con transitividad en la relación de precedencia de los instantes temporales.

- El sistema $\mathbf{K}_b$ del *tiempo ramificado*, que se construye a partir del sistema $\mathbf{K}_c$ imponiendo además axiomas que presuponen la linealidad del tiempo hacia el pasado.

- El sistema $\mathbf{K}_l$, introducido por N. Cocchiarella en 1965 y que se construye a partir del sistema $\mathbf{K}_b$ imponiendo un nuevo axioma que en resumidas cuentas significa que el tiempo debe concebirse como lineal. Dicha concepción es sin duda la más popular en la tradición filosófica-científica. En efecto, Enmanuel Kant escribiría en la *Crítica de la Razón Pura* que *"El tiempo no tiene más que una dimensión; tiempos diferentes no son simultáneos sino sucesivos"*. Por otra parte, el tiempo absoluto de la física newtoniana es concebido como unidimensional lineal, incluso en la física relativista el orden de las series de tiempo locales es lineal.

- El sistema $\mathbf{K}_l^{\infty+}$ que se obtiene del sistema $\mathbf{K}_l$ cuando se le añade un axioma que implica una concepción del tiempo sin final.

- El sistema $\mathbf{K}_l^{\infty\pm}$ que se obtiene imponiendo al sistema $\mathbf{K}_l^{\infty+}$ un axioma que implica una concepción del tiempo sin principio, con lo cual los instantes de tiempo se concibe ordenados linealmente, sin uno primero y sin último.

- El sistema $\mathbf{K}_{ld}$ que lleva apareada una concepción del tiempo lineal y con densidad en los instantes de tiempo.

- El sistema $\mathbf{K}_{li}^{\pm}$ del *tiempo entero*, introducido por Prior en 1966 y que está de acuerdo con una concepción del tiempo en la que este aparece como lineal y discreto, con una apariencia como la de los números enteros.
- El sistema $\mathbf{K}_{lr}$ del *tiempo real (continuo)*, introducida también por Prior en 1966 y cuya concepción mantiene una estructura como la de los números reales.

Continuando con los lenguajes naturales, podemos observar en ellos elementos lógicos que no se pueden expresar ni a través de la datación, ni a través de los tiempos gramaticales, sino por medio de toda una serie de preposiciones y adverbios.

En 1965, Dana Scott introdujo un sistema de lógica que incluía los funtores temporales clásicos de la lógica del tiempo gramatical y dos nuevos, que representaba como T_s e Y. En el supuesto de que el tiempo fuese concebido como discreto, $T_s p$ podía ser interpretada como *Se dará el caso en el instante inmediatamente siguiente que p*, mientras que Yp podía ser interpretado como *Se dió el caso en el instante inmediatamente que p.* El sistema de Scott se construye sobre un sistema del tiempo gramatical no mesurable que implique ya transitividad, linealidad e infinitud como propiedades del tiempo. De los nuevos axiomas que se inponen se deducen propiedades del tiempo como que *"el instante presente coincide con el instante que sigue inmediatamente al instante inmediatamente precedente"* incluyéndose además lo que se podría denominar un modo de *razonamiento por recurrencia temporal.*

Georg Henrik von Wright, en 1965, concibió un nuevo sistema lógico en el que se presuponía una concepción discreta del tiempo, pero introduciendo en lugar del funtor T_s, otro con dos argumentos

$$T_{w1}pq$$

que podía ser interpretado como *p ahora, y q en el instante inmediatamente siguiente.* Posteriormente demostró John E. Clifford, en [13], que ambos operadores se pueden definir uno en función del otro.

El sistema de von Wright presupone una concepción lineal del futuro además de exigir la infinitud del tiempo (hacia el futuro). No obstante, ninguna de las propiedades expresadas por los axiomas de von Wright es original con respecto al sistema de Scott. En realidad el sistema de von Wright es un subsistema de la lógica del tiempo de Scott e incluso puede ser interpretado desde las lógicas del tiempo gramatical mensurable.

En la misma línea de los sistemas de Dana Scott y von Wright han sido propuestos otros como el de von Wright, en [40], que introduce funtores operadores cuya interpretación puede ser *ahora p y después (tarde o temprano)q*; el de G. E. M. Anscombe, en [2], que introduce un operador interpretado como *p en otro tiempo y después q* y, por último, destacamos el sistema propuesto por Kamp en [27] en el que introduce operadores interpetrables como *q desde que p* o *p hasta que q*.

Como último gran bloque de sistemas de lógica temporal, en nuestra clasificación se encuentran los sistemas de propósito específico. Dichos sistemas han sido propuestos casi siempre con el objeto de resolver problemas muy específicos dentro del campo de las Ciencias de la Computación o más concretamente dentro del campo de la Inteligencia Artificial. Muchos de ellos están expresados en un lenguaje de primer orden y alguno incluso ha llegado a proporcionar un lenguaje de programación de aplicabilidad en el diseño de circuitos.

En el año 1982 McDermott [29] introduce una lógica temporal en la que la relación de precedencia temporal es transitiva, lineal a la izquierda, sin extremos, densa y continua. Utiliza una lógica de primer orden con cuatro tipos de variables que toman valores *instantes*, *estados*, *hechos* y *acontecimientos*. Los *estados* son, intuitivamente, instantáneas del universo. Cada *estado* tiene asociada una *fecha*, *tiempo* en que se encuentra o puede encontrarse el universo en ese *estado*. El conjunto de los *estados* está parcialmente ordenado por un orden que es compatible con el orden de precedencia temporal. Los *estados* constituyen las crónicas. Una crónica es una historia, posible y completa del universo, es decir, un conjunto de *estados* totalmente ordenado que se extiende indefinidamente en el tiempo. Intuitivamente, una crónica describe la marcha que los *acontecimientos* podrían tomar. La importancia de los *estados* y las crónicas radica en que los *acontecimientos* y los *hechos* surgen de ellas. Los *hechos* pueden cambiar de valor de verdad a lo largo del tiempo. Esta curiosidad facilita la identificación de los *hechos* con conjuntos de *estados*: intuitivamente, un hecho es el conjunto de *estados* en que se verifica. Segun McDermott, los *acontecimientos* son más delicados de tratar que los *hechos* puros y simples.

Se identifican con conjuntos de intervalos, los intervalos a lo largo de los cuales el acontecimiento se produce, sin que quede tiempo ni al principio ni al final.

El intento de McDermott no está exento de ambición. Su lógica temporal permite demostrar resultados sobre *hechos*, acontencimientos, planes e historias. Facilita un análisis de la causalidad, de los cambios cuantitativos continuos y de las relaciones entre tareas y acciones. Incluso esboza una puesta a punto de una máquina de inferencias temporales basada sobre su lógica. Sin embargo, la complejidad aparentemente gratuita, la mezcla de conceptos y sus 44 axiomas arrojan serias dudas sobre la consistencia de su teoría.

En el año 1981 Allen [1] intenta incorporar el razonamiento temporal a los programas de inteligencia artificial. Allen se interesa por la formalización de los tipos de conocimiento que son necesarios para razonar con *acciones* y *acontecimientos*. Utiliza como McDermott un cálculo de predicados con varios tipos de variables que se refieren a *propiedades*, *intervalos de tiempo*, *acontecimientos* y otros. Para el estudio del tiempo parte de una base relativamente poco habitual, ya que toma como conceptos primitivos el de *intervalo temporal* y algunas relaciones que establece sobre los intervalos como son *inclusión*, *precedencia*, *solapamiento* y *estar pegados*.

En el año 1981 Manna y Pnuelli [28] presentan una aplicación de la lógica temporal a la especificación y verificación de programas concurrentes. Su modelo de tiempo es lineal y discreto. Utilizan un cálculo de predicados con varios tipos de variables, todos los operadores temporales de las lógicas temporales clásicas y los operadores *hasta que* y *siguiente*. Esto les permite hablar de la propiedades de los programas que clasifican en tres grupos:

(i) Propiedades de invarianza. Son las que permanecen a lo largo del desarrollo de un programa.

(ii) Propiedades eventuales.

(iii) Propiedades de precedencia.

según la estructura de la fórmula temporal que las expresa.

En el artículo de Halpern, Manna y Moszkowski [23] y el de Moszkowski [32] de 1983, los autores desarrollan una lógica temporal basada sobre la noción de intervalo temporal que facilita el proceso de especificación rigurosa y de verificación de gran variedad de componentes electrónicos. Además la aplicabilidad de esta lógica temporal parece que no se limita a la tarea de verificación y síntesis de circuitos con la ayuda del ordenador. Los autores afirman que el lenguaje podría utilizarse para describir el comportamiento de los sistemas digitales. En el libro de Moszkowski [31], el autor demuestra como la lógica temporal puede considerarse un lenguaje de programación, el Tempura.

A modo de justificación.

En la mayor parte de los estudios clásicos sobre lógica temporal se utiliza como conjunto de proposiciones temporales, $F_t(X)$, el universo del álgebra absolutamente libre de tipo $\langle 2, 1, 1, 0\rangle$ con conjunto de generadores libres X, que notamos $\mathcal{F}_t(X)$. Si α y β son elementos de $F_t(X)$ (proposiciones temporales) y $\rightarrow$, F, P y $\perp$ las operaciones del álgebra $\mathcal{F}_t(X)$, entonces

- α lo interpretamos como α es verdad ahora.
- $\alpha \rightarrow \beta$ lo interpretamos como α implica β ahora.
- $F\alpha$ lo interpretamos como α será verdad.
- $P\alpha$ lo interpretamos como α fue verdad.
- $\perp$ lo interpretamos como una proposición falsa ahora.

A partir de las operaciones primitivas de $\mathcal{F}_t(X)$ se definen las operaciones lógicas (booleanas) clásicas: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\top$ y otras como G, H, L, M, $\Box$, y $\Diamond$ de carácter temporal.

- $\top = \perp \rightarrow \perp$ que interpretamos como una proposición verdadera ahora.
- $\neg\alpha = \alpha \rightarrow \perp$ que interpretamos como α no es verdad ahora.
- $\alpha \vee \beta = \neg\alpha \rightarrow \beta$ que interpretamos como α o β es verdad ahora.
- $\alpha \wedge \beta = \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$ que interpretamos como α y β es verdad ahora.
- $G\alpha = \neg F\neg\alpha$, que interpretamos como α será verdad siempre.

- $H\alpha = \neg P \neg \alpha$, que interpretamos como α fue verdad siempre.
- $L\alpha = H\alpha \wedge \alpha \wedge G\alpha$, que interpretamos como α fue, es y será verdad; α es siempre verdad o α es necesariamente verdad en el sentido aristotélico de necesidad.
- $M\alpha = P\alpha \vee \alpha \vee F\alpha$, que interpretamos como α fue, es o será verdad; α es a veces verdad o α es posiblemente verdad en el sentido aristotélico de posibilidad.
- $\Box\alpha = \alpha \wedge G\alpha$ que interpretamos como α es necesariamente verdad en el sentido diodoriano de necesidad.
- $\Diamond\alpha = \alpha \vee F\alpha$ que interpretamos como α es posiblemente verdad en el sentido diodoriano de posibilidad.

Para definir los sistemas de lógica temporal se utilizan dos métodos: el sintáctico y el semántico. El primero de ellos utiliza los conceptos de axioma, regla de inferencia y demostración. Un *axioma* es una proposición temporal. Una *regla de inferencia* es una correspondencia que a algunos conjuntos finitos de proposiciones les hace corresponder una proposición. Los elementos del conjunto finito son las *premisas* de la regla y la proposición imagen es la *conclusión* de la regla. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son las premisas y β es la conclusión notaremos la regla como

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\beta}$$

Un sistema de lógica temporal es un par $\mathbb{L} = \langle Ax, \mathcal{R} \rangle$ donde Ax es un subconjunto de $F_t(X)$ llamado conjunto de los axiomas de $\mathbb{L}$ y $\mathcal{R}$ es un conjunto de reglas de inferencia. A partir de un sistema lógico $\mathbb{L}$ se definen los teoremas de dicho sistema como las proposiciones α tales que existe una sucesión finita de proposiciones $\langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle$ tal que:

(i) $\alpha = \alpha_m$

(ii) Para cada i, $0 \leq i \leq m$, se cumple alguna de las siguientes condiciones:

 (a) $\alpha_i \in Ax$

 (b) α_i es la conclusión de una regla de inferencia de $\mathcal{R}$ cuyas premisas pertenecen a $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}\}$.

El hecho de que α es un teorema de $\mathbb{L}$ se representa escribiendo $\vdash_{\mathbb{L}} \alpha$.

La reglas más usuales en los sistemas clásicos de lógica temporal son las conocidas como *regla de separación* o *modus ponens* y la *regla de generalización* que se formulan como:

$$\frac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta} \qquad \frac{\alpha}{L\alpha}$$

El concepto de *demostración*, que acabamos de exponer, se utiliza en los artículos que hemos consultado para determinar el conjunto de los teoremas. Cabría preguntarse sobre cuál es la buena generalización de este concepto a fin de que contemplara también el caso de la deducción a partir de hipótesis. La polémica surgiría quizás en torno al uso de la regla de generalización. Nosotros no nos pronunciamos en este trabajo; no obstante haremos más adelante algunas precisiones al respecto.

La vía sintáctica de definir lógicas temporales es considerarlas como el conjunto de teoremas que se obtienen a partir de un sistema lógico dado.

El método semántico de definir lógicas temporales se basa en el concepto de *estructura (temporal)* y *valoración (temporal)*. Una *estructura temporal* es un par $\mathcal{T} = \langle T, R\rangle$ tal que T es un conjunto no vacío y R es una relación binaria sobre T. Normalmente se escribe tRt' en lugar de $\langle t, t'\rangle \in R$ y se dice que el instante t precede al instante t' o que t es anterior a t'.

Dada una estructura temporal $\mathcal{T}$, una *valoración temporal* sobre $\mathcal{T}$ es una aplicación $v : X \longrightarrow \mathcal{P}(T)$ que, debido al carácter libre de $\mathcal{F}_t(X)$, proporciona una única aplicación, representada por v y a la que también llamamos valoración, de $T \times F_t(X)$ en $\{0, 1\}$ cumpliendo para todo $\alpha,\ \beta \in F_t(X)$ y todo $t \in T$ las siguientes condiciones:

(i) $v(t, x) = 1$ si, y sólo si, $t \in v(x)$

(ii) $v(t, \alpha \to \beta) = 1 + v(t, \alpha) + v(t, \alpha)v(t, \beta)$.

(iii) $v(t, F\alpha) = \sup\{v(t', \alpha) : t' \in f(t)\}$

(iv) $v(t, P\alpha) = \sup\{v(t', \alpha) : t' \in p(t)\}$

(v) $v(t, \perp) = 0$.

Surgen así los conceptos de validez de una fórmula respecto a una estructura y un instante, respecto a una estructura y respecto a una clase de estructuras:

(i) La proposición temporal α es *válida* en la estructura temporal $\mathcal{T}$ en el instante $t \in T$ si para toda valoración temporal v sobre $\mathcal{T}$ se cumple $v(t, \alpha) = 1$. Este hecho lo notaremos $\mathcal{T} \models \alpha[\![t]\!]$.

(ii) La proposición temporal α es *válida* en la estructura temporal $\mathcal{T}$ si para toda valoración temporal v sobre $\mathcal{T}$ se cumple $v(t, \alpha) = 1$ para toda $t \in T$. Este hecho lo notaremos $\mathcal{T} \models \alpha$.

(iii) La proposición temporal α es *válida* en una subclase $\mathfrak{S}$ de la clase de las estructuras temporales si es válida en cada miembro de $\mathfrak{S}$. Este hecho lo notaremos $\mathfrak{S} \models \alpha$.

(iv) La proposición temporal α es *universalmente válida* si es válida en la clase de todas las estructuras temporales. Este hecho lo notaremos $\models \alpha$.

Mediante el método semántico cada clase de estructuras temporales determina una lógica temporal que es el conjunto de fórmulas válidas en dicha estructura.

Se han definido hasta este momento dos conceptos de verdad sobre fómulas temporales, uno sintáctico, representado por el símbolo $\vdash$, y otro semántico simbolizado por $\models$. Además hemos presentado dos formas de definir lógicas. Un problema clásico consiste en preguntarse por la clase de estructuras temporales que determina a una lógica que se ha definido por medios sintácticos y recíprocamente.

Un sistema $\mathbb{L}$ es adecuado para una clase $\mathfrak{S}$ de estructuras temporales si $\mathbb{L} \vdash \alpha$ implica $\mathfrak{S} \models \alpha$ y es completo para dicha clase si $\mathfrak{S} \models \alpha$ implica $\mathbb{L} \vdash \alpha$.

Nosotros nos hemos interesado en esta memoria por el sistema minimal de Lemmon $\mathbb{L}_0 = \langle Ax, \mathcal{R} \rangle$, que puede darse por:

(i) El conjunto de esquemas de axiomas Ax que consiste en todas las proposiciones de las formas:

(a) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.

(b) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.

(c) $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$.

(d) $G(\alpha \to \beta) \to (F\alpha \to F\beta)$.

(e) $H(\alpha \to \beta) \to (P\alpha \to P\beta)$.

(f) $FH\alpha \to \alpha$.

(g) $PG\alpha \to \alpha$.

para todo $\alpha, \beta, \gamma \in F_t(X)$

(ii) El conjunto de las reglas de inferencia $\mathcal{R}$ consiste en

(a) Modus ponens (MP).

$$\frac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$$

(b) Generalización temporal (GT).

$$\frac{\alpha}{L\alpha}$$

Se sabe que $\mathbb{L}_0$ es correcto (adecuado o coherente) y completo, entre otras, para la clase de todas las estructuras temporales. Denominaremos logica minimal a la lógica que determina este sistema.

La semántica que hemos presentado ha sido llamada por S.K. Thomason, en su trabajo [39], *semántica de segundo orden.* Además de esta Thomason considera en el mismo trabajo otras dos semánticas, a saber, la de primer orden y la algebraica.

En la definición de la *semántica de primer orden* intervienen los mismos conceptos que en la de segundo orden, tan solo que en ella una estructura temporal es una terna $\langle T, R, \Pi\rangle$, donde $\langle T, R\rangle$ es una estructura temporal de la semántica de segundo orden y Π es un subconjunto de $\mathcal{P}(T)$ elegido de forma que sea cerrado para las operaciones booleanas y para las operaciones:

(i) $f_R(X) = \{t \in T : \textit{existe } r \in T \textit{ tal que } tRr \textit{ y } r \in X\}$

(ii) $p_R(X) = \{t \in T : \textit{existe } r \in T \textit{ tal que } rRt \textit{ y } r \in X\}$

A continuación se dan las mismas definiciones que se dieron para la semántica de segundo orden con la única salvedad que donde se considerara $\mathcal{P}(T)$ ahora se considerará el álgebra Π.

La *semántica algebraica* es en realidad una simple modificación de la semántica algebraica para lógica modal dada originalmente por McKinsey y Tarski en su trabajo [30].

El papel de las estructuras temporales de las semánticas anteriores lo desempeña, dentro de la semántica algebraica, las álgebras de tipo $\langle 2,1,1,0\rangle$. Las valoraciones temporales son las aplicaciones $v : X \longrightarrow A$, donde A el universo de un álgebra cualquiera $\mathcal{A}$ de tipo $\langle 2,1,1,0\rangle$. Dado que $\mathcal{F}(X)$ es absolutamente libre dentro de la clase de las álgebras de su tipo y $\mathcal{A}$ es un álgebra de dicha clase, v se extiende de forma única a un morfismo de $\mathcal{F}(X)$ en $\mathcal{A}$, que denominamos con el mismo nombre.

En esta semántica los conceptos de validez son los siguientes:

(i) La proposición temporal α es *válida* en el álgebra $\mathcal{A}$ de tipo $\langle 2,1,1,0\rangle$ si para toda valoración v sobre $\mathcal{A}$ se cumple $v(\alpha) = 1$. Este hecho lo notamos $\mathcal{A} \models \alpha$.

(ii) La proposición temporal α es *válida* en una clase $\mathfrak{S}$ de álgebras de tipo $\langle 2,1,1,0\rangle$ si es válida en cada miembro de $\mathfrak{S}$. Este hecho lo notamos $\mathfrak{S} \models \alpha$.

(iii) Un álgebra $\mathcal{A}$ de tipo $\langle 2,1,1,0\rangle$ es un *modelo* para un conjunto Λ de fórmulas temporales si $\mathcal{A} \models \alpha$, para todo $\alpha \in \Lambda$.

Dentro de las álgebras de tipo $\langle 2,1,1,0\rangle$ la variedad de las álgebras temporales desempeña un papel destacado. En efecto, Thomason demuestra que una álgebra $\mathcal{A}$ de tipo $\langle 2,1,1,0\rangle$ es un modelo del sistema minimal de lógica temporal si, y sólo si, $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal. La presentación que Thomason da de las álgebras temporales no coincide con la que nosotros estamos utilizando en esta introducción. Él emplea las operaciones $\wedge$, $\vee$, $\neg$, f, p, 0 y 1. Además en su definición no queda patente que la clase de las álgebras temporales sea una variedad. En la presente memoria hemos utilizado para hacer *"más fácil"* la exposición una presentación que no coincide con ninguna de las mencionadas y además hemos tomado una axiomatización ecuacional de la clase de álgebras temporales de donde obtenemos inmediatamente el carácter de variedad de esta clase.

Es claro a partir de las definiciones dadas que la estructura de segundo orden $\langle T, R\rangle$ valida las mismas proposiciones temporales que la estructura de primer orden $\langle T, R, \mathcal{P}(T)\rangle$ y por tanto son equivalentes desde un punto de vista semántico. Por otra parte, toda estructura temporal de primer orden (y por tanto de segundo) $\langle T, R, \Pi\rangle$ tiene asociada de forma canónica un álgebra temporal, que representamos como $\langle T, R, \Pi\rangle^+$, y que es exactamente $\langle \Pi, \rightarrow, f_R, p_R, \emptyset\rangle$, donde $X \rightarrow Y$ se define como $X^c \cup Y$ y las operaciones f_R y p_R son las consideradas anteriormente. Por otra parte, Thomason demuestra que $\langle T, R, \Pi\rangle$ y $\langle T, R, \Pi\rangle^+$ validan exactamente las mismas fórmulas temporales.

Por todo lo anterior, la semántica de primer orden constituye una generalización y una ampliación de la semántica de segundo orden, mientras que la semántica algebraica es a su vez una semántica más amplia que la de primer orden, aunque si nos limitamos a la variedad de las álgebras temporales, entonces la semántica algebraica y la semántica de primer orden son equivalentes.

La existencia de una semántica algebraica de la Lógica Temporal Minimal es una de las justificaciones, aunque no la única, para considerar en nuestra memoria el estudio de la variedad de las álgebras temporales.

Hemos abordado este estudio desde un punto de vista puramente algebraico y dentro del marco del Álgebra Universal. Los métodos y técnicas utilizados están inspirados por los de la escuela de Antonio Monteiro, también cultivados por la escuela de lógicos de la Central de Barcelona, métodos y técnicas que han demostrado sus excelencias en el estudio de otros cálculos proposicionales.

El punto de vista algebraico supone un cambio de perspectiva frente a los estudios tradicionales que permite abordar todos los problemas clásicos en lógica con una herramienta que consideramos más potente y proporciona una ampliación enriquecedora del panorama investigador dentro de la lógica temporal. Como muestra de lo dicho podemos reseñar, entre otros, los siguientes ejemplos:

- El estudio sintáctico de la lógica temporal puede considerarse un estudio del álgebra absolutamente libre de proposiciones temporales.
- El estudio de la deducción en lógica corresponde al estudio algebraico de los filtros (operador deducción sin regla de necesidad) o de las congruencias del álgebra temporal (operador deducción con regla de necesidad), con lo que se añaden nuevos datos a la polémica anteriormente mencionada.
- El estudio de las extensiones de un determinado sistema de lógica temporal se convierte en el estudio de subclases de la variedad de álgebras temporales. Y el estudio de las extensiones mediante esquemas de axiomas corresponde a la consideración de subvariedades de la variedad de las álgebras temporales.
- El estudio de los teoremas de completitud se corresponde con el estudio de los teoremas de generación de la variedad.

Breve comentario de contenidos.

Nuestras aportaciones al estudio de la variedada de álgebras temporales las hemos clasificado en nueve capítulos que describimos brevemente a continuación.

Comenzamos recogiendo en un capítulo preliminar o capítulo cero los conceptos previos necesarios para esta memoria, relativos a Relaciones Binarias, Álgebra Universal y Álgebras de Boole.

En el capítulo primero introducimos el concepto de álgebra temporal tal como lo vamos a utilizar en la presente memoria. Esencialmente nos centramos en dar diversas caracterizaciones de la definición, entre ellas la que Thomason toma como definición en su trabajo [39]. Nosotros no hemos privilegiado la definición de Thomason por no quedar explícito en ella el carácter de variedad de la clase de las álgebras de temporales, sin embargo la hemos utilizado en numerosas ocasiones.

Presentamos además el *Teorema de Stone generalizado* que es conocido, pero su demostración sin ser trivial no se encuentra en la bibliografía. Es sobradamente conocido que si se dispone de un conjunto no vacío, el conjunto de sus parte es el universo de un álgebra de Boole en la cual las operaciones son la unión, la intersección y la complementación conjuntistas en el conjunto total. El teorema de Stone para álgebras de Boole establece que toda álgebra de Boole es isomorfa a una subálgebra del álgebra de partes del conjunto de sus ultrafiltros. En el caso de las álgebras temporales también se puede tener un teorema similar, el *Teorema de Stone generalizado*. En este caso el álgebra temporal se inyecta homomórficamente en un álgebra temporal construida de forma canónica (como explicamos antes) a partir de la estructura temporal de segundo orden formada por el conjunto de ultrafiltros de su álgebra de Boole subyacente y la *relación de precedencia* entre ellos. Esta relación tiene su antecedente en la que aparece en el trabajo de John P. Burgess [10] con el nombre de *relación de seguimiento potencial* y que allí se establece para sistemas congruentes maximales de fómulas temporales, porque, en efecto, en el estudio algebraico los ultrafiltros del álgebra libre son lo análogo a dichos conjuntos de fórmulas.

En el segundo capítulo, *Álgebras Modales, Pretemporales y Temporales*, demostramos que dada un álgebra temporal cualquiera, con la presentación que hemos elegido, las dos operaciones temporales no son independientes. En efecto, una cualquiera de entre ellas determina a la otra, por lo que no es posible encontrar dos álgebras temporales que solamente se diferencien en una de las operaciones temporales. Este hecho sugiere el estudio de las álgebras que resultan de ignorar una de las operaciones temporales en un álgebra temporal. Las álgebras de este tipo las hemos llamado *Álgebras Pretemporales*.

La clase de las álgebras pretemporales es muy particular porque, siendo una subclase propia de la variedad de las álgebras modales, por una parte resulta ser equipotente a la variedad de las álgebras temporales, y por otra se demuestra que es una subclase generadora de la variedad de las álgebras modales.

Vemos en el hecho de que las álgebras pretemporales constituyan una clase equipotente a la variedad de las temporales un argumento algebraico para sustentar la afirmación de que *"la Lógica Temporal es un tipo especial de Lógica Modal"*. Por otra parte, el hecho de que la subclase de las álgebras pretemporales genere a la variedad de las álgebras modales es un argumento a favor de los que intuitivamente quisieron reducir la lógica modal a la lógica temporal, y más aún, de los que intentaron hacerlo viendo la necesidad como la concebía Diodoro.

En toda álgebra temporal podemos considerar dos tipos de congruencias, a saber, las del álgebra temporal o temporales y las del álgebra de Boole subyacente o congruencias booleanas, que no son en general congruencias temporales. El tercer capítulo, titulado *Congruencias y Espectros*, trata de las congruencias temporales y de algunas relaciones de estas con las booleanas. En primer lugar se identifican los subconjuntos del álgebra asociados a las congruencias. Tales subconjuntos, que evidentemente han de ser filtros booleanos, resultan coincidir con los filtros temporales, es decir, los cerrado para la operación L que asigna a cada elemento a el elemento $ha \wedge a \wedge ga$.

A continuación, y siguiendo la línea de los estudios clásicos, se procede a describir los filtros temporales engendrados por un conjunto de generadores. Estos teoremas están en el núcleo de la caracterización que posteriormente daremos de simplicidad para álgebras temporales.

Dado que todo filtro temporal es antes que nada un filtro, debe poderse expresar de forma única como la gran intersección de un conjunto de filtros booleanos maximales, es decir, de un conjunto de ultrafiltros (del álgebra de Boole subyacente). Esto constituye una relación obvia entre filtros temporales y filtros; pero lo destacable sería saber que condiciones particulares distinguen a los conjuntos de ultrafiltros que por la operación conjuntista de *gran intersección* dan un filtro temporal de aquellos que no lo realizan. La respuesta a esta pregunta viene del hecho de que en el conjunto de ultrafiltros se dispone de la relación de precedencia como testigo en este ámbito de la temporalidad del álgebra. Resulta que los conjuntos de ultrafiltros que generan filtros temporales son los cerrados para la relación de precedencia y que nosotros hemos denominado *saturados*. Demostramos que si bien todo conjunto saturado da un filtro temporal no todos ellos se pueden definir por la propiedad de *contener a un determinado filtro temporal*.

El capítulo finaliza caracterizando los filtros temporales maximales, irreducibles y completamente irreducibles.

En el capítulo cuarto, estudiamos los conceptos de simplicidad y semisimplicidad relativos a las álgebras temporales. En cuanto a la simplicidad, obtenemos una caracterización indicando en resumidas palabras que las álgebras temporales finitas son aquellas tales que para todo elemento distinto de la unidad hay una determinada potencia de L que lo anula. Esta caracterización es muy similar a la obtenida por Antonio J. Rodríguez para álgebras de Wajsberg simples en [35].

En este mismo capítulo introducimos el concepto de álgebra temporal balanceada. La definición de estas álgebras tiene que ver con una condición sobre las cadenas de filtros temporales en conjuntos saturados sencillos. En efecto, como hemos dicho, todo filtro temporal es la intersección de un conjunto saturado de ultrafiltros. Según esto, es plausible creer que los conjuntos saturados más *pequeños* generarán los filtros temporales más *grandes* (maximales). Esto en general no es cierto, y damos ejemplo de ello en el capítulo tercero, no obstante puede ocurrir en ciertas álgebras que son las que hemos llamado balanceadas. Como ejemplos de álgebras balanceadas damos las finitas y otros relacionados con los sistemas lógicos que postulan la linealidad del tiempo. Dado que toda álgebra balanceada es semisimple hemos dado a la vez importantes y abundantes ejemplos de álgebras temporales semisimples.

En el capítulo quinto, titulado *Álgebras temporales libres y filtraciones*, abordamos el estudio de las álgebras temporales libres. Dado un sistema lógico, existe una importante cuestión que estudiar, a saber, su decidibilidad. Como es bien conocido, la decidibilidad de la Lógica Temporal y de la Lógica Modal está íntimamente relacionada con la conocida como *propiedad del modelo finito* (para abreviar p.m.f.). Una lógica temporal concreta tiene la propiedad del modelo finito si, y sólo si, cada fórmula no perteneciente a la lógica es falsable mediante al menos un modelo finito. Por otra parte, si la lógica en cuestión es axiomatizable, entonces existe un test positivo para la validez de teoremas (ver [12]). El método usual de demostrar que una lógica temporal tiene la p.m.f. es el método de las filtraciones, introducido por E.J. Lemmon y K. Segerberg para la Lógica Modal (ver [37]). Por consiguiente, las filtraciones lógicas son una herramienta importante en Lógica Temporal.

En el capítulo quinto presentamos la construcción de lo que hemos llamado *filtraciones algebraicas*, denominación esta que justificamos por la similitud entre las propiedades de estas filtraciones y las clásicas de la lógica. Se obtiene un teorema de estructura para las álgebras temporales libres y como corolario, un resultado que pone de manifiesto como la variedad de las álgebras temporales está generada por la subclase propia de las álgebras temporales finitas. Este resultado en lenguaje algebraico es realmente equivalente a un teorema de completitud en lógica y pone de relieve la importancia teórica de las álgebras temporales finitas en el estudio de la variedad de las álgebras temporales.

En el capítulo sexto, denominado *Álgebras temporales desarticuladas*, estudiamos una subvariedad de la variedad de las álgebras temporales. Consideramos las álgebras temporales cuyas operaciones temporales primitivas son constantes. Dichas álgebras, que hemos denominado *álgebras temporales desarticuladas*, están muy relacionadas con las álgebras construidas de forma canónica a partir de las estructuras temporales de segundo orden para las cuales la relación es vacía. Si en el universo de cualquier estructura temporal (de segundo orden) es posible distinguir aquellos elementos que no aparecen en ningún par de la relación de la estructura, dada un álgebra temporal es también posible considerar los elementos en los cuales las operaciones temporales $f = \neg g \neg$ y $p = \neg h \neg$ se anulan. Estos elementos, con propiedades muy similares al elemento 0 y denominados *elementos desarticulados*, forman un ideal temporal principal, a través del cual siempre se puede dar un teorema de estructura para álgebras temporales.

Es sabido que toda álgebra temporal en una variedad es un cociente de una álgebra libre de la variedad. Así el álgebra libre sobre un conjunto X de la variedad de las álgebras temporales desarticuladas será un cociente de un álgebra temporal libre. Lo particular de este caso es que el mencionado cociente es el que resulta de tomar el álgebra temporal libre sobre el conjunto X y el filtro de los elementos desarticulados. Este resultado, combinado con otras caracterizaciones del álgebra desarticulada libre, nos permite realizar un estudio de la atomicidad de las álgebras temporales libres algo más extenso que el que lleva a cabo Fabio Bellissima es su trabajo [4]. Lo novedoso de nuestro estudio no es el utilizar menos herramientas sino que es el realizarlo con herramientas puramente algebraicas.

El capítulo séptimo se dedica al estudio de las álgebras temporales reflexivas, que son aquellas en las cuales las operaciones temporales primitivas coinciden con la identidad. A partir de estas álgebras también es posible dar teoremas de estructura generales.

En el octavo capítulo nos ocupamos de la variedad supremo de las dos anteriores, deteniéndonos en el estudio de las álgebras libres. Las tres subvariedades consideradas en estos capítulos resultan ser localmente finitas.

El capítulo novenoo está dedicado a las álgebras temporales finitas. Dicha clase es una subclase importante de la variedad de las álgebras temporales, no sólo por su importancia en las aplicaciones sino también por el hecho de que dicha clase genera la variedad de las álgebras temporales, como se puso de manifiesto en el capítulo quinto. Nos ha parecido interesante el estudio computacional de dichas álgebras y hemos realizado un programa que implementa una calculadora sobre un álgebra temporal finita (véase apéndice 1).

Cuando en una álgebra temporal finita una de sus operaciones temporales (no modales) es conocida, el resto de ellas pueden ser determinadas utilizando la relación existente entre las operaciones temporales primitivas que se presenta en el capítulo segundo. Como esta relación derrocha esfuerzos damos otra método mucho menos costoso.

Como consecuencia de la finitud y del hecho de que toda álgebra temporal finita es balanceada podemos encontrar para cada álgebra temporal finita otra, expresada como producto de álgebras simples, a la cual es isomorfa. Por último presentamos en este capítulo un método efectivo para encontrar la mencionada descomposición de las álgebras temporales finitas.

Agradecimientos.

Es inmenso el agradecimiento que guardo al Dr. D. Antonio Jesús Rodríguez Salas. De su mano me inicié en el estudio de la Lógica Algebraica, cuando me dirigió en la realización de mi memoria de licenciatura. Sin sus certeras ideas, sus consejos, sus indicaciones y su paciencia, éste y otros trabajos no se hubieran concluido.

Extiendo mis agradecimientos a los profesores Juan S. Soler y Manuel Bullejos, por sus valiosísimos consejos y a todo los componentes del Departamento de Algebra de la Universidad de Granada por brindarme su apoyo y todos los medios disponibles.

Capítulo 0

Definiciones y resultados previos.

§0.1 Relaciones binarias.

Definición 0.1.1 *Sea T un conjunto no vacío. Una relación binaria en T es un subconjunto σ de T^2. La relación binaria $\{\langle t,t\rangle : t \in T\}$ será notada por $\Delta(T)$, o simplemente Δ cuando no exista peligro de confusión, y se denomina relación diagonal en T.*

La relación $T \times T$ en T se representará por $\nabla(T)$, o simplemente ∇.

Lema 0.1.2 *Si $T \neq \emptyset$ y σ una relación binaria en T. La menor relación de equivalencia conteniendo a σ, que será notada σ^e, existe, es única y coincide con*

$$\bigcap\{\rho \subseteq T^2 : \sigma \subseteq \rho \text{ y } \rho \text{ es de equivalencia}\}$$

Definición 0.1.3 *Si $\mathcal{B}(T)$ es el conjunto de relaciones binarias en T y $\alpha, \beta \in \mathcal{B}(T)$ entonces $\alpha \circ \beta$ queda definida por la igualdad:*

$$\alpha \circ \beta = \{(t,s) \in T^2 : \text{existe } r \in T \text{ tal que } (t,r) \in \alpha \text{ y } (r,s) \in \beta\}$$

σ^{-1} queda definida por la igualdad

$$\sigma^{-1} = \{(t,s) : (s,t) \in \sigma\}$$

Lema 0.1.4 *Si $\alpha, \beta \in \mathcal{B}(T)$ entonces $\alpha \circ \beta$, σ^{-1} son elementos de $\mathcal{B}(T)$ y $(\mathcal{B}(T), \circ)$ es un semigrupo.*

Definición 0.1.5 *Si $\sigma \in \mathcal{B}(T)$ y $n \in \omega$, σ^n se define recurrentemente de la siguiente forma:*

(i) $\sigma^0 = \Delta$

(ii) $\sigma^{n+1} = \sigma \circ \sigma^n$

Si $n \in \omega$ *entonces* σ^{-n} *es por convenio* $(\sigma^{-1})^n$.

Definición 0.1.6 *Si* $\sigma \in \mathcal{B}(T)$, *el subconjunto de* T^2

$$\sigma^* = \bigcup\{\sigma^i : i \in \omega\}$$

es la clausura transitivo-reflexiva de σ *en* T.

Lema 0.1.7 *Si* $\sigma \in \mathcal{B}(T)$ *entonces* σ^* *es el menor elemento de* $\mathcal{B}(T)$ *verificando ser transitivo, reflexivo y contener a* σ.

Lema 0.1.8 *Si* $\sigma \in \mathcal{B}(T)$ *entonces* $\sigma^e = (\sigma \cup \sigma^{-1})^*$.

Teorema 0.1.9 *Si* $\sigma \in \mathcal{B}(T)$ *son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\langle r, s\rangle \in \sigma^e$.

(ii) $r = s$ *o existe* $n \in \omega$ *y* $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T^{n+1}$ *cumpliendo* $t_0 = r$, $t_n = s$ *y para todo* $0 \leq i \leq n-1$, $(t_i, t_{i+1}) \in \sigma \cup \sigma^{-1}$.

Definición 0.1.10 *Sea* $\langle T, \sigma\rangle$ *una estructura temporal y* $S \subseteq T$ *verificando que* $S \neq \emptyset$. S *es una componente conexa de* $\langle T, \sigma\rangle$, *o simplemente un subconjunto conexo de* T *respecto a* σ, *si* S *es una clase de equivalencia de la relación* σ^e *en* T.

$S \subseteq T$ *es saturado respecto* σ, *o simplemente saturado, si* S *es unión de componentes conexas de* $\langle T, \sigma\rangle$.

Definición 0.1.11 *El índice de conexión de la estructura temporal* $\langle T, \sigma\rangle$, *representado por* $c(\langle T, \sigma\rangle)$, *es el cardinal del conjunto de componentes conexas de* $\langle T, \sigma\rangle$, *esto es,* $c(\langle T, \sigma\rangle) = Card(T/\sigma^e)$.

Definición 0.1.12 *La estructura temporal* $\langle T, \sigma\rangle$ *es conexa si* T *es una componente conexa de* $\langle T, \sigma\rangle$, *esto es, si* $c(\langle T, \sigma\rangle) = 1$.

Lema 0.1.13 *Toda componente conexa de cualquier estructura temporal* $\langle T, \sigma\rangle$ *es un subconjunto de* T *saturado para* σ.

Lema 0.1.14 *Sea $\langle T, \sigma\rangle$ una estructura temporal y $S \subseteq T$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) S es saturado para σ.

(ii) Si $t \in S$ y $\langle t, t'\rangle \in \sigma \cup \sigma^{-1}$ entonces $t' \in S$.

Lema 0.1.15 *Sea $\langle T, \sigma\rangle$ una estructura temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\langle T, \sigma\rangle$ es conexa.

(ii) Para todo $t, t' \in T$ existe $n \in \omega$ y $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$ cumpliendo $t_0 = t$, $t_n = t'$ y para todo $i \in n$, $\langle t_i, t_{i+1}\rangle \in \sigma \cup \sigma^{-1}$.

Corolario 0.1.16 *La estructura temporal $\langle T, \sigma\rangle$ es conexa sii $\sigma^e = T \times T$.*

§0.2 Álgebra Universal.

El presente trabajo está redactado en el lenguaje del Álgebra Universal, por tanto son necesarias algunas nociones generales sobre esta disciplina. En la presente sección daremos algunas de ellas, extraidas casi en su totalidad de todas ellas de [11].

Definición 0.2.1 *Un tipo de álgebras es un par $\mathbf{F} = \langle F, \tau\rangle$ donde F es un conjunto cuyos elementos se denominan "símbolos de función" y τ es una aplicación de F en ω. Para todo $f \in F$, el número natural $\tau(f)$ se denomina "ariedad" de f. Si $\tau(f) = n$ entonces f recibe el nombre de "símbolo de función n-ario". El subconjunto de F formado por los símbolos de función n-arios se representa por F_n.*

En el caso de que F sea el conjunto $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, llamaremos tipo a la n-upla $\langle\tau(f_1), \ldots, \tau(f_n)\rangle$, donde $\tau(f_i) \geq \tau(f_{i+1})$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Definición 0.2.2 *Sea $\mathbf{F}$ un tipo de álgebras. Un álgebra $\mathcal{A}$ de tipo $\mathbf{F}$ es un par $\langle A, \mathrm{F}\rangle$ donde A es un conjunto no vacío y F es una familia de operaciones finitarias sobre A indexada en F tal que para todo $f \in F$, si $\tau(f) = n$ entonces el elemento de F que corresponde a f es una operación n-aria en A, $f_{\mathcal{A}}$. El conjunto A recibe el nombre de universo del álgebra $\mathcal{A}$. Si no hay peligro de confusión escribiremos f en lugar de $f^{\mathcal{A}}$. En caso de que $\mathbf{F} = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n\rangle$, escribiremos $\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_n\rangle$ en lugar de $\langle A, \mathrm{F}\rangle$, teniendo en cuenta que $\tau(f_i) \geq \tau(f_{i+1})$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

Definición 0.2.3 *Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos álgebras del mismo tipo* $\mathbf{F}$. *Una aplicación $\alpha : A \longrightarrow B$ se denomina morfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ si*

$$\alpha f_{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{B}}(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$$

para toda $f \in F$ tal que $\tau(f) = n$ y toda secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de elementos de A. Si, además, la aplicación α es sobreyectiva entonces se le da el nombre de epimorfismo y $\mathcal{B}$ se denomina "una imagen homomórfica de $\mathcal{A}$". Un morfismo inyectivo se denomina monomorfismo. Si α es simultaneamente monomorfismo y epimorfismo entonces se denomina isomorfismo.

Definición 0.2.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de tipo* $\mathbf{F}$ *y sea θ una relación de equivalencia en A. θ es una congruencia de $\mathcal{A}$ si θ satisface la siguiente relación de compatibilidad:*

Para todo $f \in \mathbf{F}$ tal que $\tau(f) = n$ y $\{\langle a_i, b_i \rangle : 1 \leq i \leq n\} \subseteq A^2$, si $a_i \theta b_i$, para todo $1 \leq i \leq n$ entonces

$$f^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \theta f_{\mathcal{A}}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Definición 0.2.5 *El conjunto de todas las congruencias de un álgebra $\mathcal{A}$ será representado por $Con(\mathcal{A})$.*

Si $\theta \in Con(\mathcal{A})$ entonces el álgebra cociente por la congruencia θ, abreviadamente $\mathcal{A}/\theta$, es el álgebra cuyo universo es A/θ y cuyas operaciones son las que satisfacen:

$$f^{\mathcal{A}/\theta}(a_1/\theta, \ldots, a_n/\theta) = f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\theta$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ y $f \in \mathbf{F}_n$.

Definición 0.2.6 *Un álgebra $\mathcal{A}$ es congruencia-distributiva (resp. congruencia-modular) si $Con(\mathcal{A})$ es un retículo distributivo (resp. modular). Si $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathcal{A})$ y $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ entonces decimos que θ_1 y θ_2 permutan. $\mathcal{A}$ es de congruencias permutables si cada par de congruencias de $\mathcal{A}$ permutan.*

Definición 0.2.7 *Una congruencia θ del álgebra $\mathcal{A}$ es una congruencia factor si existe $\theta^* \in Con(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ tal que:*

(i) $\theta \cap \theta^* = \Delta$

(ii) $\theta \vee \theta^* = \nabla$

(iii) θ *y* θ^* *permutan.*

Teorema 0.2.8 *Si* θ,θ^* *es un par de congruencias factor en* $\mathcal{A}$ *entonces*

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\theta_*$$

Definición 0.2.9 *Un álgebra* $\mathcal{A}$ *es un producto subdirecto de una familia de álgebras* $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ *si*

(i) $\mathcal{A}$ *es una subálgebra de* $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

(ii) $(\pi_i)_*(A) = A_i$.

Un monomorfismo $\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$ *es subdirecto si* $\alpha_*(A)$ *es un producto subdirecto de la familia* $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$.

Teorema 0.2.10 *Sea* $\{\theta_i : i \in I\}$ *una familia de congruencias del álgebra* $\mathcal{A}$. *Si* $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta$ *entonces el homomorfismo:*

$$v : \mathcal{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{A}/\theta_i$$

definido por $v(a)(i) = a/\theta_i$ *es un monomorfismo subdirecto.*

Definición 0.2.11 *Un álgebra* $\mathcal{A}$ *es subdirectamente irreducible si para todo monomorfismo subdirecto*

$$\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

existe $i \in I$ *tal que*

$$\pi_i \circ \alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}_i$$

es un isomorfismo.

Teorema 0.2.12 *Un álgebra* $\mathcal{A}$ *es subdirectamente irreducible si, y sólo si,* $\mathcal{A}$ *es trivial o existe una congruencia mínima en* $Con(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta\}$. *En el último caso, el elemento mínimo es* $\bigcap(Con(\mathcal{A}) \setminus \{\Delta\})$, *que es una congruencia principal.*

Definición 0.2.13 *Un álgebra $\mathcal{A}$ es simple si $Con(\mathcal{A}) = \{\Delta, \bigtriangledown\}$. Una congruencia θ es maximal si el íntervalo $[\theta, \bigtriangledown]$ tiene exactamente dos elementos.*

Teorema 0.2.14 *Sea $\theta \in Con(\mathcal{A})$. El álgebra $\mathcal{A}/\theta$ es simple si, y sólo si, θ es una congruencia maximal en $\mathcal{A}$ o $\theta = \bigtriangledown$.*

Definición 0.2.15 *Introducimos los siguientes operadores que aplican clases de álgebras en clases de álgebras (del mismo tipo):*

(i) $\mathcal{A} \in I(K)$ *si, y sólo si, $\mathcal{A}$ es isomorfa a algún miembro de K.*

(ii) $\mathcal{A} \in S(K)$ *si, y sólo si, $\mathcal{A}$ es una subálgebra de algún miembro de K.*

(iii) $\mathcal{A} \in H(K)$ *si, y sólo si, $\mathcal{A}$ es imagen homomórfica de algún miembro de K.*

(iv) $\mathcal{A} \in P(K)$ *si, y sólo si, $\mathcal{A}$ es un producto directo de una familia no vacía de álgebras de K.*

(v) $\mathcal{A} \in P_s(K)$ *si, y sólo si, $\mathcal{A}$ es un producto subdirecto de una familia no vacía de álgebras de K.*

Definición 0.2.16 *Una clase no vacía K de álgebras de tipo* **F** *es una variedad si es cerrada para subálgebras, imágenes homomorfas y productos directos.*

Definición 0.2.17 *Si K es una clase de álgebras del mismo tipo, representemos por $V(K)$ la menor variedad que contiene a K y nos referiremos a ella como "la variedad generada por K". Si K tiene un único elemento $\mathcal{A}$ escribiremos sencillamente $V(\mathcal{A})$. Una variedad V es finitamente generada si $V = V(K)$, para algún conjunto finito K de álgebras.*

Teorema 0.2.18 (Tarski) *Si K es una clase de álgebras, la variedad $V(K)$ coincide con $HSP(K)$.*

Definición 0.2.19 *Una variedad es de congruencias permutables si toda álgebra perteneciente a la variedad es de congruencias permutables.*

Teorema 0.2.20 *Sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$ álgebras simples en una variedad V de congruencias permutables. Si $C \in V$ es isomorfa a un producto subdirecto del de la familia de álgebras $\{S_i : 1 \leq i \leq n\}$ entonces $C \cong S_{i_1} \times \cdots \times S_{i_k}$ para algún $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$.*

Definición 0.2.21 *Sea X un conjunto cuyos elementos (todos distintos entre si) se denominarán variables. Sea $\mathbf{F}$ un tipo de álgebras. El conjunto $T(X)$ de términos de tipo $\mathbf{F}$ sobre X es el menor conjunto tal que:*

(i) $X \cup \mathbf{F}_0 \subseteq T(X)$.

(ii) Si $p_1, p_2, \ldots, p_n \in T(X)$ y $f \in \mathbf{F}_n$ entonces la cadena de símbolos $f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ pertenece a $T(X)$.

Si $p \in T(X)$, escribiremos a veces $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ indicando que las variables con ocurrencias en p son un subconjunto del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Definición 0.2.22 *Dado un término $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de tipo $\mathbf{F}$ sobre cierto conjunto X y dada un álgebra de tipo $\mathbf{F}$, definimos la aplicación $p^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$ como sigue:*

(i) Si p es una variable x_i, entonces $p^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i$, para $a_1, \ldots\ a_n \in A$, es decir, $p^{\mathcal{A}}$ es la i-ésima aplicación proyección.

(ii) Si p es de la forma

$$f(p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots\ , p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

entonces

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{A}}(p_1^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\ , p_k^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n))$$

En particular si $p = f \in \mathbf{F}$ entonces $p^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}}$.

Definición 0.2.23 *Dado un tipo $\mathbf{F}$ y un conjunto X, si $T(X) \neq \emptyset$ entonces el álgebra de términos de tipo $\mathbf{F}$ sobre X, representada por $\mathbf{T}(X)$, tiene como universo el conjunto $T(X)$ y las operaciones satisfacen:*

$$f_{\mathbf{T}(X)}(\langle p_1, p_2, \ldots, p_n \rangle) = f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

para todo $f \in \mathbf{F}_n$ y $p_i \in T(X)$, $1 \leq i \leq n$

Nótese que si $\mathbf{F}_0 \neq \emptyset$ entonces $\mathbf{T}(\emptyset)$ existe.

Definición 0.2.24 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra y $B \subseteq A$, B es un subuniverso de $\mathcal{A}$ si B es cerrado para las operaciones de $\mathcal{A}$, es decir, si para toda operación n-aria de $\mathcal{A}$, k, y para todo $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B$ se cumple que $k(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B$.*

Definición 0.2.25 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra y $X \subseteq A$. Definimos el subconjunto de A denominado $Sub(X)$ por la siguiente igualdad:*

$$Sub(X) = \bigcap\{B \subseteq A : \; B \textit{ es subuniverso de } \mathcal{A}\}$$

Dada un álgebra $\mathcal{A}$ y $X \subseteq A$, X genera a $\mathcal{A}$ (o $\mathcal{A}$ es generada por X, o X es un conjunto de generadores de $\mathcal{A}$) si $Sub(X) = A$. El álgebra $\mathcal{A}$ es finitamente generada si tiene un conjunto de generadores finito.

Definición 0.2.26 *Sea K una clase de álgebras de tipo $\mathbf{F}$ y sea $\mathbf{U}(X)$ un álgebra de tipo $\mathbf{F}$ generada por X. Si para todo $\mathcal{A} \in K$ y $\alpha : X \longrightarrow A$ existe un morfismo $\beta : \mathbf{U}(X) \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $\beta(x) = \alpha(x)$, para todo $x \in X$ (β extiende a α). En este caso se dice que $\mathbf{U}(X)$ tiene la propiedad universal para K sobre X. X se denomina un conjunto de generadores libres de $\mathbf{U}(X)$ y decimos que $\mathbf{U}(X)$ está libremente generada por X.*

Lema 0.2.27 *Sea X un conjunto y $\mathbf{F}$ un tipo. Si $T(X)$ existe entonces $\mathbf{T}(X)$ tiene la propiedad universal para la clase de las álgebras de tipo $\mathbf{T}$ sobre X.*

Lema 0.2.28 *Supongamos que $\mathbf{U}(X)$ tiene la propiedad universal para K sobre X. Si $\mathcal{A} \in K$ y $\alpha : X \longrightarrow A$, entonces existe una única extensión β de α tal que β es homomorfismo de $\mathbf{U}(X)$ en $\mathcal{A}$.*

En el caso de que la clase K de la definición 0.2.26 sea la variedad de las álgebras de Boole, es posible dar una definición equivalente de álgebra libre.

Definición 0.2.29 *Un álgebra de Boole es un álgebra $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ de tipo $\langle 2, 2, 1, 0\rangle$ que cumple las siguientes ecuaciones:*

(i) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

(ii) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

(iii) $x \vee y = y \vee x$.

(iv) $x \wedge y = y \wedge x$.

(v) $x \vee (x \wedge y) = x$.

(vi) $x \wedge (x \vee y) = x$.

(vii) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

(viii) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

(ix) $x \vee \neg x = 1$.

(x) $x \wedge \neg x = 0$.

donde 0 *es el nombre que recibe el elemento* $\neg 1$.

Definición 0.2.30 *Sea X un conjunto arbitrario. Un álgebra de Boole libre sobre el conjunto X es un par $\langle \iota, \mathcal{L} \rangle$ tal que $\mathcal{L}$ es un álgebra de Boole y ι es una aplicación de X en L tal que para toda álgebra de Boole $\mathcal{A}$ y toda aplicación α de X en A existe un único morfismo $\beta : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $\beta \circ \iota = \alpha$.*

Un álgebra de Boole $\mathcal{L}$ es libre si existe X y $\iota : X \longrightarrow L$ tal que $(\iota, \mathcal{L})$ es libre sobre X.

Definición 0.2.31 *Un subconjunto U de un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ es independiente si para cualquier pareja de conjuntos disjuntos:*

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \text{ y } \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

de U se cumple

$$0 < (\bigwedge\{u_i : 1 \leq i \leq n\} \wedge (\bigwedge\{\neg v_i : 1 \leq i \leq n\})$$

La subálgebra de A generada por U es, en tal caso, independientemente generada por U.

Teorema 0.2.32 *Sea ι una aplicación una aplicación de un conjunto X en un álgebra de Boole $\mathcal{L}$. El par $\langle \iota, \mathcal{L} \rangle$ es libre sobre X si, y sólo si, ι es inyectiva y $\iota_*(X)$ genera independientemente a $\mathcal{L}$.*

Teorema 0.2.33 *Supongamos que $\mathbf{U}_1(X_1)$ y $\mathbf{U}_2(X_2)$ son dos álgebras de la clase K con la propiedad universal sobre K para los conjuntos X_1 y X_2 respectivamente. Si X_1 es equipotente a X_2 entonces $\mathbf{U}_1(X_1)$ es isomorfa a $\mathbf{U}_2(X_2)$.*

Definición 0.2.34 *Sea K una familia de álgebras de tipo $\mathbf{F}$. Dado un conjunto X de variables, definamos la congruencia $\theta_K(X)$ en $\mathbf{T}(X)$ por*

$$\theta_K(X) = \bigcap \Phi_K(X)$$

donde $\Phi_K(X) = \{\phi \in Con\mathbf{T}(X) : \mathbf{T}(X)/\phi \in IS(K)\}$; y seguidamente definamos $\mathbf{F}_K(X)$, el álgebra K-libre sobre $\overline{X}$, por

$$\mathbf{F}_K(\overline{X}) = \mathbf{T}(X)/\theta_K(X)$$

donde $\overline{X} = \{x/\theta_K(X) : x \in X\}$

Lema 0.2.35 *Si la clase K posee álgebras no triviales y $\mathbf{T}(X)$ existe entonces $X \cap (x/\theta_K(X)) = \{x\}$*

Teorema 0.2.36 *Sea X un conjunto y K una clase de álgebras de tipo $\mathbf{F}$. Si $T(X)$ existe, entonces $\mathbf{F}_K(\overline{X})$ tiene la propiedad universal para K sobre X.*

Corolario 0.2.37 *Si K es una clase de álgebras de tipo $\mathbf{F}$ y $\mathcal{A} \in K$ entonces existe un conjunto X tal que $\mathcal{A} \in H(\mathbf{F}_K(\overline{X}))$.*

Definición 0.2.38 *Una álgebra $\mathcal{A}$ es localmente finita si toda subálgebra suya finitamente generada es finita. Una clase de álgebras K es localmente finita si todo miembro de $\mathcal{A}$ es localmente finito.*

Teorema 0.2.39 *Una variedad V es localmente finita si, y sólo si, toda álgebra libre de la variedad con conjunto de generadores libres finito es finita.*

Definición 0.2.40 *Una identidad de tipo $\mathbf{F}$ sobre X es una expresión de la forma*

$$p \approx q$$

donde $p, q \in T(X)$. Sea $Id(X)$ el conjunto de identidades de tipo $\mathbf{F}$ sobre X. Un álgebra $\mathcal{A}$ de tipo $\mathbf{F}$ satisface la identidad

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(o la identidad es cierta en $\mathcal{A}$, o se verifica en $\mathcal{A}$ o $\mathcal{A}$ verifica la identidad), y se abrevia como

$$\mathcal{A} \models p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \approx q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

o más concisamente como

$$\mathcal{A} \models p \approx q$$

si para toda elección $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, *se tiene*

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \approx q^{\mathcal{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Una clase de álgebras satisface $p \approx q$, *abreviadamente* $K \models p \approx q$, *si cada miembro de* K *satisface* $p \approx q$. *Si* Σ *es un conjunto de identidades decimos que* K *satisface a* Σ, *abreviadamente* $K \models \Sigma$, *si* $K \models p \approx q$, *para todo* $p \approx q \in \Sigma$. *Dado* K *y* X *sea*

$$Id_K(X) = \{p \approx q \in Id(X) : K \models p \approx q\}$$

Definición 0.2.41 *Sea* Σ *un conjunto de identidades de tipo* **F** *y definamos* $M(\Sigma)$ *como la clase de las álgebras* $\mathcal{A}$ *que satisfacen a* Σ. *Una clase de álgebras es una clase ecuacional si existe un conjunto de identidades* Σ *tal que* $K = M(\Sigma)$. *En este caso decimos que* K *esta definida, o axiomatizada, por* Σ.

Teorema 0.2.42 (Birkhoff) K *es una clase ecuacional si, y sólo si,* K *es una variedad.*

§0.3 Álgebras de Boole.

En el presente trabajo consideraremos siempre que las álgebras temporales están definidas sobre un álgebra de Boole, es decir, que poseen un sustrato Booleano. Realacionaremos a continuación las propiedades aritméticas y los teoremas más conocidos de las álgebras de Boole.

Definición 0.3.1 *Un semirretículo inferior acotado es un álgebra* $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, 1, 0\rangle$ *de tipo* $\langle 2, 0, 0\rangle$ *verificando las siguientes ecuaciones:*

(i) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

(ii) $x \wedge y = y \wedge x$.

(iii) $x \wedge 1 = x$.

(iv) $x \wedge 0 = 0$

Cuando en el presente trabajo hagamos alusión a las álgebra de Boole, se entenderá excluida de cualquier consideración el caso trivial del álgebra de Boole con un elemento.

Ejemplo 0.3.2 *Dado un conjunto no vacío X podemos considerar:*

(i) $\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$.

(ii) $\cap$, *la operación de intersección de conjuntos.*

(iii) $\cup$, *la operación de unión de conjuntos.*

(iv) $\neg$, *la operación definida por* $\neg Y = \{x \in X : x \notin Y\}$ *(complementación conjuntista).*

pues bien, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 0.3.3 *Dado un conjunto no vacío X, el álgebra $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, \neg, X\rangle$ es un álgebra de Boole.*

Definición 0.3.4 *Dada un álgebra de Boole $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ podemos definir las operaciones $\to$ y $\leftrightarrow$ como sigue:*

(i) $a \to b = \neg a \vee b$.

(ii) $a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a)$.

(iii) $a + b = (a \wedge \neg b)(\neg a \wedge b)$.

Lema 0.3.5 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole. Para todo $a, b \in A$ se cumple que:*

(i) $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$.

(ii) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$.

(iii) $a \vee b = \neg a \to b$.

(iv) $\neg(a \wedge \neg b) = a \to b$.

(v) $a \vee b = (a \to b) \to b$.

Definición 0.3.6 *En cualquier álgebra de Boole es posible definir una relación de orden de la siguiente forma:*

$$a \leq b \text{ si, y sólo si, } a \wedge b = b$$

Lema 0.3.7 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y $a, b \in A$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $a \leq b$.

(ii) $a \vee b = b$.

(iii) $\neg b \leq \neg a$.

(iv) $a \wedge \neg b = 0$.

(v) $\neg a \vee b = 1$.

(vi) $a \rightarrow b = 1$.

Lema 0.3.8 *En toda álgebra de Boole $\mathcal{A}$ se cumplen las siguientes ecuaciones:*

(i) $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$.

(ii) $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$.

(iii) *Si* $a \leq b \rightarrow c$ *entonces* $b \leq a \rightarrow c$.

(iv) $a \leq (a \rightarrow b) \rightarrow b$.

(v) $1 \rightarrow a = a$.

(vi) $a \rightarrow a = 1$.

(vii) *Si* $b \leq c$ *entonces* $a \rightarrow b \leq a \rightarrow c$.

(viii) *Si* $a \leq b$ *entonces* $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$.

(ix) $(a \rightarrow b) \rightarrow a = a$.

(x) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$.

(xi) $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$.

(xii) $a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$.

(xiii) $(a \to b) \to ((b \to a) \to b) = (b \to a) \to ((a \to b) \to a)$.

Lema 0.3.9 *En toda álgebra de Boole se verifican las siguientes ecuaciones:*

(i) $\neg\neg a = a$

(ii) $(\neg a \to \neg b) \to (b \to a) = 1$.

(iii) $(a \to \neg b) \to (b \to \neg a) = 1$

(iv) $(\neg a \to b) \to (\neg b \to a) = 1$

(v) $(a \to b) \to (\neg b \to \neg a) = 1$

(vi) $\neg a \to (a \to b) = 1$

(vii) $\neg a \to \neg 1 = a$

(viii) $\neg a \to b = \neg b \to a$

(ix) *Si* $a \leq b$ *entonces* $\neg b \leq \neg a$.

Lema 0.3.10 *En toda álgebra de Boole* $\mathcal{A}$ *se cumple:*

(i) $(a \wedge b) \to a = 1$.

(ii) $(a \wedge b) \to b = 1$.

(iii) $a \to (b \to (a \wedge b))$.

(iv) $a \to (a \vee b) = 1$.

(v) $b \to (a \vee b) = 1$.

(vi) $(a \to c) \to ((b \to c) \to ((a \vee b) \to c))$.

Lema 0.3.11 *En toda álgebra de Boole* $\mathcal{A}$ *se cumplen las siguientes ecuaciones:*

(i) $(a \wedge b) \to a = 1$.

(ii) $(a \wedge b) \to b = 1$.

(iii) $a \to (b \to (a \wedge b))$.

(iv) $a \to (a \vee b) = 1$.

(v) $b \to (a \vee b) = 1$.

(vi) $(a \to c) \to ((b \to c) \to ((a \vee b) \to c)) = 1$.

Lema 0.3.12 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y sean $a, b, c \in A$. Entonces*

$$a \leq b \to c \text{ si, y sólo si, } a \wedge b \leq c$$

Lema 0.3.13 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole. Para todo $a, b \in A$ existe $sup\{a, b\}$ e $inf\{a, b\}$. Además se tiene que $a \vee b = sup\{a, b\}$ y $a \wedge b = inf\{a, b\}$.*

Definición 0.3.14 *Sea $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ un álgebra de Boole. $D \subseteq A$ es un filtro de $\mathcal{A}$ si cumple las siguientes condiciones:*

(i) $1 \in D$.

(ii) Si $a, b \in D$ entonces $a \wedge b \in D$.

(iii) Si $a \in D$ y $a \leq b$ entonces $b \in D$.

El conjunto de filtros del álgebra temporal $\mathcal{A}$ se notará por $Fil(\mathcal{A})$. Un filtro D es un ultrafiltro si es maximal en el conjunto $Fil(\mathcal{A}) \setminus \{A\}$. El conjunto de ultrafiltros de $\mathcal{A}$ será notado como $Ult(\mathrm{A})$.

$D \in Fil(\mathcal{A})$ es primo si para todo $a, b \in A$, $a \vee b \in D$ implica $a \in D$ o $b \in D$. El conjunto de filtros primos de $\mathcal{A}$ será notado como $SpP(\mathcal{A})$.

Lema 0.3.15 *Para toda álgebra de Boole $\mathcal{A}$ se cumple que $SpP(\mathcal{A}) = Ult(\mathcal{A})$.*

Teorema 0.3.16 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y $D \subseteq A$. $D \in Fil(\mathcal{A})$ si, y solamente si, D verifica las siguientes condiciones:*

(i) $1 \in D$

(ii) si $a, a \to b \in D$ entonces $b \in D$.

Definición 0.3.17 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole. Si $X \subseteq A$, entonces $\neg X$ es por definición el conjunto $\{\neg x : x \in X\}$.*

Definición 0.3.18 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole e $I \subseteq A$. I es un ideal de $\mathcal{A}$ si $\neg I \in Fil(\mathcal{A})$. El conjunto de ideales de $\mathcal{A}$ será notado por $Ide(\mathcal{A})$.*

Lema 0.3.19 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole e $I \subseteq A$. I es un ideal de $\mathcal{A}$ si, y sólo si, verifica las siguientes condiciones:*

(i) $0 \in I$.

(ii) Si $a, b \in A$ entonces $a \vee b \in I$.

(iii) Si $a \in I$ y $b \leq a$ entonces $b \in I$.

Teorema 0.3.20 (Teorema de Stone) *Para toda álgebra de Boole $\mathcal{A}$ existe un conjunto X tal que $\mathcal{A}$ es isomorfa a una subálgebra del álgebra de Boole $\langle \mathcal{P}(X), \cap, \cup, \neg, X \rangle$.*

Demostración: Esquemáticamente la demostración empieza considerando $X = Ult(\mathcal{A})$ y la aplicación $s : A \longrightarrow \mathcal{P}(Ult(\mathcal{A}))$ definida como

$$s(a) = \{D \in Ult(\mathcal{A}) : a \in D\}$$

Se demuestra que s es un morfismo de álgebras de Boole y se concluye viendo que s es inyectiva. ■

En el caso finito el teorema de Stone puede ser particularizado mejorándolo. En efecto, es este caso particular lo que se obtiene es un isomorfismo.

Definición 0.3.21 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole. El elemento a de $A \setminus \{0\}$ es un átomo si para todo $x \in A$ tal que $0 \leq x \leq a$ se cumple que $x = 0$ o $x = a$. El conjunto de átomos de un álgebra $\mathcal{A}$ será notado como $Atm(\mathcal{A})$.*

El elemento $a \in A$ es un antiátomo si $\neg a \in Atm(\mathcal{A})$. El conjunto de antiátomos de $\mathcal{A}$ será notado como $Antat(\mathcal{A})$.

Teorema 0.3.22 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita. Para todo $a \in A \setminus 0$ se cumple que*

$$a = \bigvee \{x \in Atm(\mathcal{A}) : x \leq a\}$$

y no existe otro conjunto H de átomos que verifique la propiedad $a = \bigvee H$ salvo $\{x \in Atm(\mathcal{A}) : x \leq a\}$.

Teorema 0.3.23 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita. Para todo $a \in A \setminus 0$ se cumple que*

$$a = \bigwedge\{x \in Antat(\mathcal{A}) : a \leq x\}$$

y no existe otro conjunto H de antiátomos que verifique la propiedad $a = \bigwedge H$ salvo $\{x \in Antat(\mathcal{A}) : a \leq x\}$.

Teorema 0.3.24 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole finita con cardinal 2^n. Entonces $\mathcal{A}$ es isomorfa al álgebra de Boole $\langle \mathcal{P}(Atm(\mathcal{A})), \cap, \cup, \neg, Atm(\mathcal{A})\rangle$.*

Demostración: La demostración de este resultado consiste en probar que la aplicación $s : A \longrightarrow \mathcal{P}(Atm(\mathcal{A}))$ definida por $s(a) = \{x \in Atm(\mathcal{A}) : x \leq a\}$, para todo $a \in A$ es un isomorfismo de álgebras de Boole. ∎

Definición 0.3.25 *Un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ es atómica si $Atm(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ y para todo $x \in A \setminus \{0\}$ existe $a \in Atm(\mathcal{A})$ tal que $a \leq x$.*

Lema 0.3.26 *Toda álgebra de Boole finita $\mathcal{A}$ es atómica y si A tiene 2^n elementos entonces tiene n átomos.*

Lema 0.3.27 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de boole finita. Si X e Y son dos subcojuntos de $Atm(\mathcal{A})$ tales que $X \cup Y = Atm(\mathcal{A})$ y $X \cap Y = \emptyset$, entonces $\bigvee X = \neg \bigvee Y$.*

Teorema 0.3.28 *Toda álgebra de Boole infinita carece de átomos.*

Teorema 0.3.29 *La variedad $\mathfrak{B}$ de álgebras de Boole es localmente finita.*

Capítulo 1

Álgebras Temporales.

§1.1 Introducción.

Dado un lenguaje propocicional con operadores temporales $\mathcal{L}$, como el que se detalla en el ejemplo 1.3.4, las constantes lógicas del conjunto $\{K, A, N, G, H, \top\}$ pueden ser consideradas como operaciones en el conjunto de fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$ dando lugar al conjunto de funciones $\{\wedge, \vee, \neg, g, h, 1\}$. Si identificamos las fórmulas por medio de una relación de equivalencia apropiada, obtenemos un sistema algebraico que es en una primera aproximación un álgebra de Boole con la particularidad de estar dicha álgebra de Boole enriquecida con dos nuevas operaciones de significación temporal. En efecto, la operación g (resp. h) proviene de G (resp. H) y dicho símbolo se le puede asignar el significado de "Siempre se dará que" (resp. "Siempre se dió que").

Las álgebras de Boole reciben su nombre del eminente matemático inglés Georges Boole (1815-1864), quien consiguió en 1847 aplicar con exito las técnicas matemáticas a la lógica. Desde este momento han sido obtenidos diversos e interesantes resultados sobre las álgebras de Boole. Es especialmente destacable, por el interés que merece para el presente trabajo, el Teorema de Representación de Stone (ver [38]). Dicho teorema puede ser generalizado para álgebras temporales obteniendo un método standard de construirlas todas.

En el presente capítulo se dan algunas de las propiedades aritméticas esenciales de las álgebras temporales a la vez que distintas definiciones equivalentes. Se generaliza también el teorema de Stone al caso de álgebras temporales.

§1.2 Operaciones sobre Álgebras de Boole.

Como queda dicho, cada álgebra temporal cuenta con las operaciones de un álgebra de Boole y con dos operaciones monarias adiccionales. Vamos a estudiar en este apartado algunas de las propiedades que, bajo hipótesis convenientes a cada resultados, verifican las operaciones monarias definidas en las álgebras de Boole.

Definición 1.2.1 *Sea $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ un álgebra de Boole y g una operación binaria en A. Definimos la operación monaria asociada a g, f, según la igualdad*

$$f = \neg g \neg$$

Resulta evidente entonces que $g = \neg f \neg$ y por tanto la operación asociada a la asociada de g es la propia g.

Lema 1.2.2 *Sea $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ un álgebra de Boole, g una operación monaria en A y f la operación asociada a g. Si se verifican las condiciones:*

(i) $g(1) = 1$.

(ii) $g(a \to b) \to (fa \to fb) = 1$.

entonces tanto g como f son crecientes.

Demostración: Supongamos que $a \leq b$, entonces $a \to b = 1$ y $g(a \to b) = 1$. Así pues, $fa \to fb = 1$ y por tanto $fa \leq fb$. De aquí el crecimiento de f. Pero dado que $g = \neg f \neg$ y que f es creciente g también es creciente. ■

Lema 1.2.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y g una operación monaria en A que es monótona. Entonces se cumple que:*

$$ga \vee gb \leq g(a \vee b)$$

Demostración: Es evidente considerando que para todo $a, b \in A$ se cumple $a \vee b = sup\{a, b\}$. ■

Lema 1.2.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y g una operación monaria en A cumpliendo la ecuación:*

$$g(a \to b) \to (ga \to gb) = 1$$

Entonces también se cumplen las desigualdades:

(i) $g(a \vee b) \leq fa \vee gb$.

(ii) $ga \wedge fb \leq f(a \wedge b)$.

(iii) $ga \vee gb \leq fa \vee gb$.

(iv) $ha \wedge pb \leq p(a \wedge b)$.

(v) $g(a \vee b) \leq fa \vee gb$.

(vi) $h(a \vee b) \leq pa \vee hb$.

para todo $a, b \in A$.

Demostración: Por hipótesis tenemos que $g(\neg a \rightarrow b) \rightarrow (g\neg a \rightarrow gb) = 1$, esto es, $g(\neg a \rightarrow b) \rightarrow (\neg fa \rightarrow gb) = 1$. Lo anterior puede ser reescrito como $g(a \vee b) \rightarrow (fa \vee gb) = 1$ y ello demuestra lo deseado.

La segunda afirmación es una consecuencia inmediata de la primera. Para su demostración basta tener en cuenta la definición de f en función de g y aplicar la primera parte del lema.

La tercera afirmación es consecuencia inmediata de lo ya demostrado, el lema 1.2.3 y de la transitividad de $\leq$. El resto de las afirmaciones del enunciado es inmediato a partir de de lo ya demostrado y las definiciones. ■

Lema 1.2.5 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y g una operación monaria en A que cumple la ecuación:*

$$g(a \rightarrow b) \rightarrow (fa \rightarrow fb) = 1$$

Entonces también cumple la desigualdad

$$ga \vee gb \leq fa \vee gb$$

para todo $a, b \in A$, donde f es la aplicación asociada a g.

Demostración: Es totalmente análoga a la del lema 1.2.4. ■

Teorema 1.2.6 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y g una operación monaria en A tal que $g1 = 1$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $g(a \rightarrow b) \rightarrow (ga \rightarrow gb) = 1$

(ii) $g(a \to b) \to (fa \to fb) = 1$

(iii) $g(a \wedge b) = ga \wedge gb$

(iv) $f(a \vee b) = fa \vee fb$

Demostración: Veamos que i) implica ii). Como $g(b \vee \neg a) \leq fb \vee g\neg a$ (lema 1.2.4) tenemos la siguiente cadena de relaciones: $g(b \vee \neg a) \wedge fa \leq (fb \vee g\neg a) \wedge fa = (fb \vee \neg fa) \wedge fa$. Por las propiedades del álgebra de Boole esto se traduce en: $g(b \vee \neg a) \wedge fa \leq fb \wedge fa \leq fb$ lo cual implica, mediante la propiedad de residuación que $g(a \to b) \leq fa \to fb$ y por tanto lo que se quería. Para demostrar que ii) implica iii) razonamos como sigue. Si se da ii) sabemos que g es creciente (lema 1.2.2). Usando esto tenemos que $g(a \wedge b) \leq ga$ y que $g(a \wedge b) \leq gb$ y consiguientemente que $g(a \wedge b) \leq ga \wedge gb$. Por otro lado la propiedad de residuación implica $a \leq b \to a \wedge b$ y por la monotonía de g, $ga \leq g(b \to a \wedge b) = g(\neg a \vee (a \wedge b))$. Ahora bien, $g(\neg b \vee (a \wedge b)) \leq \neg gb \vee g(a \wedge b)$ (lema 1.2.5) y por tanto $ga \leq gb \to g(a \wedge b)$, esto es, $ga \wedge gb \leq g(a \wedge b)$, desigualdad esta que junto a la anterior de la propiedad. Por el siguiente razonamiento iii) implica iv). Usando la definición de f, iii) y las propiedades del álgebra de Boole tenemos la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} f(a \vee b) &= \neg g \neg a(a \vee b) \\ &= \neg g(\neg a \wedge \neg b) \\ &= \neg(g\neg a \wedge g \neg b) \\ &= \neg g \neg a \vee \neg g \neg b \\ &= fa \vee fb \end{aligned}$$

que demuestra lo requerido. Y por último si se da iv) también se da i). En efecto, es fácil ver que en la hipótesis iv) también se cumple iii) (razonar como en la demostración del apartado anterior) y que g es monótona creciente. De otro lado como $a \wedge b = a \wedge (a \to b)$ se tiene, en virtud de lo anterior, que $g(a \to b) \wedge ga = g(a \wedge b) \leq gb$ y esto implica claramente la propiedad i) si más que usar la residuación y la definición de orden. ■

Teorema 1.2.7 *Sea $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ un álgebra de Boole y g una operación monaria en A. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $g1 = 1$

(ii) $f0 = 0$

Lema 1.2.8 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y g y h dos operaciones monarias en A. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $pga \to a = 1$.

(ii) $a \to hfa = 1$.

donde f y p son las operaciones asociadas a g y h respectivamente.

Demostración: Veamos en primer lugar que i) implica ii). Según las definiciones dadas $hfa = \neg p \neg fa = \neg pg \neg a$. Pero si suponemos que es cierto i) entonces $pg\neg a \leq \neg a$, con lo cual $a \leq \neg pg \neg a = hfa$ y esto significa que $a \to hfa = 1$.

Para ver que ii) implica i) empleamos un razonamiento análogo al anterior. Si suponemos ii) tenemos que $\neg a \leq hf\neg a$ con lo cual $\neg hf \neg a \leq a$; pero $\neg hf\neg a = p\neg f \neg a = pga$ y por tanto $pga \to a = 1$. ■

§1.3 Álgebras Temporales.

En la bibliografía es posible encontrar diversas definiciones de álgebra temporal, algunas de ellas no ecuacionales. En la presente sección damos las demostraciones de la equivalencia entre las definiciones más conocidas. El hecho de que una de ellas sea ecuacional indica, según el teorema de Birkoff (ver 0.2.42), que la clase de las álgebras temporales es una variedad. Como consecuencia dicha clase es cerrada para productos, imágenes homomorfas y subálgebras, como asevera el teorema de Tarski (ver 0.2.18).

Definición 1.3.1 *Un álgebra temporal es un álgebra $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ de tipo $\langle 2, 2, 1, 1, 1, 0\rangle$, verificando las siguientes condiciones:*

(i) $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ *es un álgebra de Boole.*

(ii) $g(a \to b) \to (ga \to gb) = 1$.

(iii) $h(a \to b) \to (ha \to hb) = 1$.

(iv) $fha \to a = 1$.

(v) $pga \rightarrow a = 1$.

(vi) $g1 = 1$.

(vii) $h1 = 1$.

Representaremos por $\mathfrak{T}$ a la clase de las álgebras temporales.

Teorema 1.3.2 *La clase $\mathfrak{T}$ es una variedad de álgebras.*

En lo que sigue vamos a dar algunos de los ejemplos de álgebras temporales más conocidos. El primero de ellos se refiere a la clase de las álgebras temporal desarticuladas que nos será muy útil más adelante para el conteo de átomos. El segundo ejemplo presenta la particularidad de mostrar el camino por el que históricamente se llegó al álgebra a partir de la lógica. Se trata de construir el álgebra de Tarski-Lindembaum.

Ejemplo 1.3.3 *El álgebra $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$, donde $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ es un álgebra de Boole y $g(a) = h(a) = 1$ para todo $a \in A$, es un álgebra temporal.*

Ejemplo 1.3.4 *Sea el tipo $\mathbf{F} = \langle F, \tau\rangle$, donde $F = \{\wedge, \vee, \neg, g, h, \top\}$ y $\tau : F \longrightarrow \omega$ es la aplicación dada por*

$$\tau(x) = \begin{cases} 2 & , \textit{ si } x \in \{\wedge, \vee\} \\ 1 & , \textit{ si } x \in \{\neg, g, h\} \\ 0 & , \textit{ si } x = \top \end{cases}$$

y X un conjunto no vacío. Representaremos por $\mathbf{F}(X)$ al álgebra de términos de tipo $\mathbf{F}$ sobre el conjunto X.

Llamaremos $F^h(X)$ al menor subconjunto de $Exp(\mathcal{L})$ tal que

(i) *Si $X \cup \{\top\} \subseteq F(X)$.*

(ii) *Si $\alpha, \beta \in F(X)$ entonces $\alpha \wedge \beta \in F(X)$.*

(iii) *Si $\alpha, \beta \in F(X)$ entonces $\alpha \vee \beta \in F(X)$.*

(iv) *Si $\alpha \in F(X)$ entonces $\neg\alpha \in F(X)$.*

(v) *Si $\alpha \in F(X)$ entonces $g\alpha \in F(X)$.*

Según el lema 0.2.27, el álgebra $\mathbf{F}(X)$ *tiene la propiedad universal sobre el conjunto* X *para la clase de las álgebras de tipo* $\langle 2,2,1,1,1,0\rangle$.

Consideramos los siguientes conjuntos de elementos de $F(X)$ *cada uno de los cuales recibe el nombre de axioma:*

(i) $A_{01} = \{\alpha \to (\beta \to \alpha) : \alpha, \beta \in P(X)\}$

(ii) $A_{02} = \{(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) : \alpha, \beta, \gamma \in P(X)\}$

(iii) $A_{03} = \{(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha) : \alpha, \beta \in P(X)\}$

(iv) $A_{04} = \{G(\alpha \to \beta) \to (G\alpha \to G\beta) : \alpha, \beta \in P(X)\}$

(v) $A_{05} = \{H(\alpha \to \beta) \to (H\alpha \to H\beta) : \alpha, \beta \in P(X)\}$

(vi) $A_{06} = \{FH\alpha \to \alpha : \alpha \in P(X)\}$

(vii) $A_{07} = \{PG\alpha \to \alpha : \alpha \in P(X)\}$

donde $\alpha \to \beta$ *es la abreviatura de* $\neg\alpha \vee \beta$. *El conjunto de los axiomas del cálculo temporal clásico es el definido por la siguiente igualdad:*

$$Ax = \bigcup\{A_i : 1 \leq i \leq 7\}$$

Sea $\Delta \subseteq F(X)$. Δ *es cerrado por modus ponens si de* $\alpha, \alpha \to \beta \in \Delta$ *se deduce* $\beta \in \Delta$. Δ *es cerrado para* G *y* H *si siempre que* $\alpha \in \Delta$ *se cumple respectivamente que* $G\alpha\in \Delta$ *y* $H\alpha \in \Delta$. Δ *es sistema deductivo temporal si:*

(i) $Ax \subseteq \Delta$.

(ii) $\top \in \Delta$.

(iii) Δ *es cerrado para* G.

(iv) Δ *es cerrado para* H.

Podemos definir la aplicación $Ded : \mathcal{P}(F(X)) \longrightarrow \mathcal{P}(F(X))$ *como sigue:*

$$Ded(\Gamma) = \bigcap\{\Delta \subseteq F(X) : \Gamma \subseteq \Delta \text{ y } \Delta \text{ es sistema deductivo temporal}\}$$

Y también podemos definir asociada a $\Gamma = \emptyset$ *la relación binaria* $\leq$ *en* $F(X)$ *como sigue:*

$$\alpha \leq \beta \text{ sii } \alpha \to \beta \in Ded(\emptyset)$$

Es fácil demostrar que $\leq$ *es reflexiva y transitiva y que la relación* $\equiv$ *definida como la intersección de* $\leq$ *y* $\leq^{-1}$ *es una congruencia de* $\mathbf{F}(X)$.

Como la clase de las álgebras temporales es una variedad, posee para cada conjunto no vacío X un álgebra temporal libre con conjunto de generadores libres X. Denotaremos a esta álgebra como $\mathbf{F}_t(X)$.

Teorema 1.3.5 *Para cada $X \neq \emptyset$ el álgebra $\langle F(X)/\equiv, \wedge, \vee, \neg, g, h, [\top]\rangle$ es un álgebra temporal isomorfa al álgebra $\mathbf{F}_t(X)$.*

Daremos ahora un método de construir álgebras temporales. Se trata quizá del más importante puesto que es posible demostrar que cualquier álgebra temporal es isomorfa a una subálgebra de otra construida mediante él.

Ejemplo 1.3.6 *Una estructura temporal es un par $\mathcal{T} = \langle T, \sigma\rangle$, donde T es un conjunto no vacío y σ es un subconjunto de T^2.*

Definición 1.3.7 *Sea $\langle T, R\rangle$ una estructura temporal. Podemos construir un álgebra de tipo $\langle 2, 2, 1, 1, 1, 0\rangle$,*

$$\langle T, R\rangle^+ = \langle \mathcal{P}(T), \wedge, \vee, \neg, g_R, h_R, T\rangle$$

por medio de las siguientes definiciones:

(i) $\neg X = T \setminus X$

(ii) $X \wedge Y = X \cap Y$

(iii) $X \vee Y = X \cup Y$

(iv) $g_R X = \{a : \textit{ para todo } b \in A, \textit{ si } aRb \textit{ entonces } b \in X\}$

(v) $h_R X = \{a : \textit{ para todo } b \in A, \textit{ si } bRa \textit{ entonces } b \in X\}$

Lema 1.3.8 *Sea $\langle T, R\rangle$ una estructura temporal. En el álgebra $\langle T, R\rangle^+$ se cumple, para todo $X \in \mathcal{P}(T)$:*

(i) $f_R X = \{a : \textit{ existe } b \in A \textit{ tal que } aRb \textit{ y } b \in X\}$

(ii) $p_R X = \{a : \textit{ existe } b \in A \textit{ tal que } bRa \textit{ y } b \in X\}$

Demostración: *Según las definiciones para* $\langle T, R\rangle^+$, *se cumple que para todo* $X \in \mathcal{P}(T)$: $f_R X = \neg g \neg X$ *y* $p_R X = \neg g_R \neg X$. *Se tiene,*

$$\begin{aligned} \neg g_R \neg X &= T \setminus g_R(T \setminus X) \\ &= T \setminus \{a \in T : \textit{ para todo } b \in A,\ aRb \textit{ implica } b \in T \setminus X\} \\ &= \{a \in T : \textit{ existe } b \in A \textit{ tal que } aRb \textit{ y } b \in X\} \end{aligned}$$

La demostración para p_R *es totalmente análoga.* ■

Teorema 1.3.9 *Sea* $\langle T, R\rangle$ *una estructura temporal. El álgebra* $\langle T, R\rangle^+$ *es un álgebra temporal.*

Demostración: *Demostraremos esta afirmación basándonos en el teorema 1.3.10. Es inmediato comprobar que* $f_R(\emptyset) = \emptyset = p_R(\emptyset)$ *así como que* $f_R(X \cup Y) = f_R(X) \cup f_R(Y)$ *y que* $p_R(X \cup Y) = p_R(X) \cup p_R(Y)$. *Por otra parte, supongamos que* $f_R(X) \cap Y = \emptyset$ *y que* $X \cap p_R(Y) \neq \emptyset$. *Si* $u \in X \cap p_R(Y)$ *entonces* $u \in X$ *y existe* $v \in Y$ *tal que* vRu. *Esto implica que* $f_R(X) \cap Y \neq \emptyset$, *lo cual es absurdo. En definitiva, si* $f_R(X) \cap Y = \emptyset$ *entoces* $X \cap p_R(Y) = \emptyset$. *La implicación recíproca se demuestra de forma totalmente análoga. Por el teorema 1.3.10,* $\langle T, R\rangle^+$ *es un álgebra temporal.* ■

Teorema 1.3.10 *Sean* $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ *un álgebra de Boole y dos operaciones monarias en* A, g *y* h. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) La operaciones asociadas a g *y* h, f *y* p *respectivamente, cumplen:*

(a) $f(a \vee b) = fa \vee fb$

(b) $p(a \vee b) = pa \vee pb$

(c) $f0 = p0 = 0$

(d) $fa \wedge b = 0$ *sii* $a \wedge pb = 0$

(ii) $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ *es un álgebra temporal.*

Demostración: Comencemos demostrando que i) implica ii). En efecto, por los teoremas 1.2.6 y 1.2.6 de suponer i) podemos concluir $g(a \to b) \to (ga \to gb) = 1$ y $h(a \to b) \to (ha \to hb) = 1$. Además sabemos que $f0 = p0 = 0$ es equivalente a $g1 = h1 = 1$. Por otra parte es claro que $fa \wedge \neg fa = 0$ con lo cual, según i.4), ha de verificarse $a \wedge p\neg fa = 0$, o lo que es equivalente $a \leq \neg p \neg fa$. Esto según nuestras definiciones quiere decir que se cumple $a \longrightarrow hfa = 1$. Un razonamiento análogo nos lleva a que $a \longrightarrow gpa = 1$ y junto con todo lo dicho a que $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal.

Para ver que ii) implica i) lo único que hay que probar es la equivalencia de i.4) porque las demás condiciones de i) se deducen de suponer que $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal como ha quedado demostrado en resultados anteriores. Supongamos pues que $fa \wedge b = 0$, entonces $fa \leq \neg b$ y teniendo en cuenta que $a \leq hfa$ y que $h\neg b = \neg pb$ concluimos $a \leq \neg p$, esto es, $a \wedge pb = 0$. Recíprocamente si suponemos $a \wedge pb = 0$ entonces $pb \leq \neg a$ y por la monotonía de g que $gpb \leq g\neg a$; pero $b \leq gpb$ y $g\neg a = \neg fa$. Así pues, $b \wedge fa = 0$. ■

Teorema 1.3.11 *Sean $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ un álgebra de Boole y dos operaciones monarias en A, g y h. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) La operaciones g y h cumplen:

(a) $g(a \wedge b) = ga \wedge gb$

(b) $h(a \wedge b) = ha \wedge hb$

(c) $g1 = h1 = 1$

(d) $ga \vee b = 1$ sii $a \vee hb = 1$

(ii) $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ es un álgebra temporal.

§1.4 Dualidad. Propiedades.

Es claro que dada un álgebra temporal, si permutamos entre sí los papeles de las operaciones temporales g y h, entonces obtenemos de nuevo un álgebra temporal. En los siguientes resultados se formaliza este hecho.

Definición 1.4.1 *Sea X un conjunto no vacío y $\mathbf{F}(X)$ el álgebra absolutamente libre de tipo $\langle 2, 2, 1, 1, 1, , 0\rangle$. Una ecuación en $F_t(X)$ cualquier elemento del conjunto $F_t(X)^2$. Dada la ecuación $\langle t_1, t_2\rangle$, escribiremos en su lugar $t_1 = t_2$.*

Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$, una valoración de $F_t(X)$ en $\mathcal{A}$ es un morfismo $v : F_t(X) \longrightarrow \mathcal{A}$.

Sea e la ecuación $t_1 = t_2$ *en* $F_t(X)$. *La ecuación e es válida en* $\mathcal{A}$ *si para toda valoración de* $F_t(X)$ *en* $\mathcal{A}$ *se cumple que* $v(t_1) = v(t_2)$. *Este hecho se expresará escribiendo* $\mathcal{A} \models e$.

Definición 1.4.2 *Dada un álgebra temporal* $\mathcal{A} = \langle A, \rightarrow, \neg, g, h, 1\rangle$ *el álgebra* $\mathcal{A}^d = \langle A^d, \rightarrow^d, \neg^d, g^d, h^d, 1^d\rangle$ *donde:*

$$\begin{array}{ll} A^d = A & \wedge^d = \wedge \\ \vee^d = \vee & \neg^d = \neg \\ g^d = \vee & h^d = g \\ 1^d = 1 & \end{array}$$

es el álgebra dual de $\mathcal{A}$.

Lema 1.4.3 *Si* $\mathcal{A}$ *es un álgebra temporal entonces* $\mathcal{A}^d$ *es un álgebra temporal.*

Dado el carácter libre del álgebra $\mathbf{F}(X)$ se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.4.4 *Existe un único morfismo de álgebras temporales* $d : \mathbf{F}(X) \longrightarrow \mathbf{F}(X)^d$ *tal que:*

(i) $1^d = 1$.

(ii) $x^d = x$, *para todo* $x \in X$.

donde t^d *representa a* $d(t)$.

Definición 1.4.5 *Dada la ecuación* $e = \langle t_1, t_2\rangle$, *representaremos por* e^d *la ecuación* $\langle t_1^d, t_2^d\rangle$.

Teorema 1.4.6 (Principio de dualidad) *Sea e una ecuación de* $F_t(X)$. *Si e es válida en cualquier álgebra temporal entonces* e^d *también es válida en cualquier álgebra temporal.*

En lo que sigue damos algunas propiedades aritméticas para su utilización en los siguientes capítulos.

Lema 1.4.7 *En cualquier álgebra temporal se verifican las igualdades:*

(i) $fhf = f$

(ii) $pgp = p$

(iii) $gpg = g$

(iv) $hfh = h$

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y tomemos $x \in A$. Según el lema 1.2.8 se cumple $x \leq hfx$. Por la monotonía de f tenemos que $fx \leq fhfx$; pero nuevamente en virtud de la proposición 1.2.8 se verifica $fhfx \leq fx$. Uniendo ambas desigualdades podemos concluir que $fx = fhfx$. La segunda propiedad tiene una demostración análoga a la de la anterior.

Usando la propiedad primera se cumple $f\neg x = fhf\neg x$ y por tanto también se tiene $\neg f\neg x = \neg fhf\neg x$. Como consecuencia se verifica $gx = gpgx$ y ello demuestra la tercera propiedad. La cuarta tiene una demostración análoga. ■

Lema 1.4.8 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. En $\mathcal{A}$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $ga \wedge fb \leq f(a \wedge b)$

(ii) $a \wedge fb \leq f(pa \wedge b)$

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $a, b \in A$. Por el lema 0.3.12 $b \leq a \rightarrow (a \wedge b)$. La monotonía de g nos lleva a que $gb \leq g(a \rightarrow a \wedge b)$. Por otra parte sabemos que $g(a \rightarrow a \wedge b) \leq fa \rightarrow f(a \wedge b)$. Por transitividad concluimos que $gb \leq fa \rightarrow f(a \wedge b)$ y por el lema 0.3.12 nuevamente concluimos la primera afirmación.

La segunda afirmación se obtiene como sigue. Por una parte $a \leq gpa$ y además, usando la propiedad anterior, tenemos $gpa \wedge fb \leq f(pa \wedge b)$ o lo que es equivalente $gpa \leq fb \rightarrow f(pa \wedge b)$. Sirviendose de la transitividad de las relaciones de orden escribimos $a \leq fb \rightarrow f(pa \wedge b)$ y por tanto $a \wedge fb \leq f(pa \wedge b)$. ■

§1.5 Teorema de Stone generalizado

En lo que sigue vamos a demostrar que toda álgebra temporal es isomorfa a una subálgebra de otra construida a partir de una estructura temporal. Hemos denominado al resultado correspondiente "Teorema de Stone generalizado" porque incluye al "Teorema de Stone" para álgebras de Boole. Esta generalización es conocida; pero no hemos encontrado en la bibliografía la demostración. La que nosotros daremos requiere algunos lemas previos que usaremos también más adelante.

Definición 1.5.1 *Sea $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ un álgebra temporal. $D \subseteq A$ es un filtro de $\mathcal{A}$ si $D \in Fil(\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle)$ y un ultrafiltro si $D \in Ult(\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle)$. El conjunto de filtros (resp. ultrafiltros) de $\mathcal{A}$ será notado por $Sp(\mathcal{A})$ (resp. $Ult(\mathcal{A})$).*

Lema 1.5.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y sean $D_1, D_2 \in Ult(\mathcal{A})$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $p_*(D_1) \subseteq D_2$

(ii) $g^*(D_1) \subseteq D_2$

(iii) $f_*(D_2) \subseteq D_1$

(iv) $h^*(D_2) \subseteq D_1$

Demostración: Veamos que i) implica ii). Sea $a \in A$ tal que $ga \in D_1$. Como D_2 es filtro, $pga \in D_2$ por hipótesis y $pga \leq a$ entonces $a \in D_2$. Esto demuestra que $g^*(D_1) \subseteq D_2$.

Para ver que ii) implica iii) tomemos $a \in D_2$. Como $\neg a \notin D_2$ tenemos, por la hipótesis, que $g\neg a \notin D_1$ y por tanto $\neg g \neg a \in D_1$, esto es, $fa \in D_1$ con lo que concluimos $f_*(D_2) \subseteq D_1$.

Las demostraciones de que iii) implica iv) y que iv) implica i) son totalmente paralelas a i) implica ii) y ii) implica iii), respectivamente. ■

Burgess define en el trabajo [10] la relación binaria $\multimap$. Dicha relación está establecida entre conjuntos consistentes maximales de proposiciones. Los objetos que en álgebras temporales juegan el papel de los anteriores conjuntos de proposiciones son los ultrafiltros, filtros maximales del álgebra de Boole subyacente. Así pues trasladaremos la definición de $\multimap$ a ultrafiltros obteniendo la relación binaria $\prec$.

Definición 1.5.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Definimos en $Ult(\mathcal{A})$ la relación binaria $\prec$ que denominamos de precedencia en $Ult(\mathcal{A})$ como sigue:*

$$D_1 \prec D_2 \text{ si, y sólo si, } g^*(D_1) \subseteq D_2$$

o por cualquiera de las condiciones equivalentes que da el lema 1.5.2.

Teorema 1.5.4 (Teorema de Stone generalizado) *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$ existe una estructura temporal $\langle T, R\rangle$ y una aplicación $s : A \longrightarrow T$ que es un monomorfismo entre las álgebras $\mathcal{A}$ y $\langle T, R\rangle^+$.*

Demostración: Tomemos la estructura temporal $\langle T, R\rangle$ donde $T = Ult(\mathcal{A})$ y R es la relación de precedencia en $Ult(\mathcal{A})$. Consideramos la aplicación:

$$s : A \longrightarrow Ult(\mathcal{A})$$

definida por, $s(a) = \{D : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } a \in D\}$, para todo $a \in A$. Por el teorema de Stone (teorema 0.3.20) sabemos que s es morfismo para las operaciones del álgebra de Boole subyacente a $\mathcal{A}$ y que además dicha aplicación es inyectiva. Unicamente resta ver que s es morfismo para las operaciones temporales. Para ello sea $a \in A$ y $D \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $ga \in D$. En tal caso, $a \in g^*(D)$ y si $g^*(D) \subseteq D_1$ entonces $a \in D_1$. Con esto tenemos que $s(ga) \subseteq g_R(s(a))$. Recíprocamente, sea $D \in g_R(s(a))$, esto es, sea $D \in Ult(\mathcal{A})$ tal que para todo $D' \in Ult(\mathcal{A})$ si $g^*(D) \subseteq D'$ entonces $a \in D'$. Dado que $Ult(\mathcal{A})$ es una base de $Sp(\mathcal{A})$ y que $g^*(D) \in Sp(\mathcal{A})$ tenemos la igualdad:

$$g^*(D) = \bigcap\{D' : D' \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } g^*(D) \subseteq D'\}$$

Resulta pues que $a \in g^*(D)$ y por tanto $ga \in D$, o lo que es equivalente, $D \in s(ga)$. Así pues, s es morfismo para g. El ver que s es un morfismo para h supone un razonamiento análogo. ■

Corolario 1.5.5 *Toda álgebra temporal $\mathcal{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $\langle T, \prec\rangle^+$, donde $T = Ult(\mathcal{A})$ y $\prec$ es la relación de precedencia en $Ult(\mathcal{A})$.*

Capítulo 2

Álgebras Modales, Pretemporales y Temporales.

§2.1 Introducción.

La axiomática de las álgebras temporales refleja una compatibilidad y una simetría entre los operadores g y h. Esta observación invita a reflexionar acerca del conjunto de funciones h tales que $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ es un álgebra temporal, siendo $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ un álgebra de Boole y g una función apropiada y fija. Este conjunto podría ser unitario como consecuencia de la mencionada compatibilidad. Efectivamente esto es cierto y además es posible dar una forma de construir h a partir de g si esta es conocida (y recíprocamente).

En este capítulo se introduce un nuevo tipo de álgebras a las cuales les damos el nombre de Álgebras Pretemporales. Estas álgebras constituyen, según indican los resultados de este capítulo, un antecedente cercano de las álgebras temporales y las álgebras modales.

§2.2 Álgebras Modales.

En esta sección introducimos el concepto álgebra modal y damos algunas de las álgebras modales que se pueden definir a partir de un álgebra temporal, indicando además que tipo de álgebra modal es. Nos detenemos especialmente en las propiedades de los operadores L y M porque dichos operadores serán bastante utilizados en lo que sigue.

Definición 2.2.1 *Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$ definimos las siguientes operaciones monarias en A:*

(i) $La = ha \wedge a \wedge ga$, *para todo* $a \in A$.

(ii) $Ma = pa \vee a \vee fa$, *para todo* $a \in A$.

(iii) $\Box a = a \wedge ga$, *para todo* $a \in A$.

(iv) $\Diamond a = a \vee fa$, *para todo* $a \in A$.

Lema 2.2.2 *En todo álgebra temporal* $\mathcal{A}$ *se cumplen las siguientes ecuaciones:*

(i) $La \rightarrow a = 1$.

(ii) $L(a \rightarrow b) \rightarrow (La \rightarrow Lb) = 1$.

(iii) $a \rightarrow LMa = 1$.

(iv) $L1 = 1$.

(v) $L(a \wedge b) = La \wedge Lb$.

(vi) $MLa \rightarrow a = 1$.

(vii) $La = \neg M \neg a$.

(viii) $\neg La = M \neg a$.

(ix) $\neg Ma = L \neg a$.

(x) $M0 = 0$.

Demostración: La ecuación 1) es evidente tras recordar como está definida la operación L.

Para la ecuación 2) razonamos como sigue. Como $h(a \rightarrow b) \leq ha \rightarrow hb$ y también $g(a \rightarrow b) \leq ga \rightarrow gb$ entonces $h(a \rightarrow b) \wedge ha \leq hb$ y $g(a \rightarrow b) \wedge ga \leq gb$, usando la propiedad de residuación. Por otra parte, debido a la misma propiedad, $(a \rightarrow b) \wedge a \leq b$. Uniendo los tres resultados podemos concluir:

$$L(a \rightarrow b) \wedge La \leq Lb$$

que de nuevo la propiedad de residuación permite escribir:

$$L(a \rightarrow b) \rightarrow (La \rightarrow Lb) = 1$$

como se quería.

La ecuación 3) se cumple puesto que $\neg pa \wedge \neg a \wedge \neg fa \wedge pa = 0$, con lo cual se tiene

$$0 = a \wedge f(\neg pa \wedge \neg a \wedge \neg fa) = a \wedge \neg g(pa \vee a \vee fa)$$

y esto se traduce inmediatamente en $a \leq g(pa \vee a \vee fa)$. Un razonamiento análogo para h nos permite establecer $a \leq h(pa \vee a \vee fa)$ y como evidentemente $a \leq pa \vee a \vee fa$ se puede concluir $a \rightarrow (h(pa \vee a \vee fa) \wedge (pa \vee a \vee fa) \wedge g(pa \vee a \vee fa)) = 1$, que es precisamente lo que propone 3). El resto de la demostración es similar a otras anteriores o evidente a partir de las definiciones. ■

Definición 2.2.3 *Un álgebra modal es un álgebra $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, l, 1\rangle$ de tipo $\langle 2, 2, 1, 1, 0\rangle$ verificando:*

(i) $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ *es un álgebra de Boole.*

(ii) $l(a \wedge b) = la \wedge lb$

El álgebra modal $\mathcal{A}$ es un álgebra modal T si en ella se verifica la la desigualdad:

$$la \leq a$$

para todo $a \in A$. Por otra parte, el álgebra modal $\mathcal{A}$ es B ("álgebra modal broweriana") si es un álgebra T y además se cumple la desigualdad:

$$a \leq lma$$

para todo $a \in A$, donde m es por definición la operación $\neg l \neg$.

Corolario 2.2.4 *Sea $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ un álgebra temporal. Entonces se tiene que:*

(i) $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, 1\rangle$ *es un álgebra modal.*

(ii) $\langle A, \wedge, \vee, \neg, h, 1\rangle$ *es un álgebra modal.*

(iii) $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \Box, 1\rangle$ *es un álgebra modal T.*

(iv) $\langle A, \wedge, \vee, \neg, L, 1\rangle$ *es un álgebra modal B.*

Demostración: La primera y segunda afirmaciones son inmediata a partir de la definición de álgebra modal. La tercera afirmación es inmediata a partir de la definición del operador $\Box$. En cuanto a la cuarta, es consecuencia de las tres primeras afirmaciones de la proposición 2.2.2. ■

Corolario 2.2.5 *En cualquier álgebra temporal $\mathcal{A}$ las operación L y M son crecientes.*

Definición 2.2.6 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal y $x \in A$, definimos recursivamente L^n, donde $n \in \omega$, como:*

(i) $L^0 x = x$

(ii) $L^{n+1} x = L(L^n x)$

y M^n como:

(i) $M^0 x = x$

(ii) $M^{n+1} x = M(M^n x)$

Lema 2.2.7 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$, $a \in A$ y $m, n \in \omega$ se cumple que si $m \leq n$ entonces:*

(i) $L^n a \leq L^m a$.

(ii) $M^m a \leq M^n a$.

Demostración: Sea $a \in A$ y $m, n \in \omega$. Podemos suponer que $m \leq n$ con lo cual existe $s \in \omega$ tal que $m + s = n$. Razonamos por inducción sobre s. Si $s = 0$ el resultado es trivialmente cierto. Supongamoslo cierto para $s = k$ y veamos que también lo es cuando $s = k + 1$. En efecto, $L^{m+k+1} a = L(L^{m+k} a) \leq L(L^m a)$. Pero en vista de lo que afirma 2.2.2 se tiene que $L^{m+k+1} a \leq L^m a$.

Por otra parte como $L^n \neg a \leq L^m \neg a$ entonces se tiene que $\neg L^m \neg a \leq \neg L^n \neg a$, lo cual equivale según las definiciones a que $M^m a \leq M^n a$. ■

§2.3 Álgebras Pretemporales.

Definición 2.3.1 *Un álgebra pretemporal es un álgebra* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, 1\rangle$ *de tipo* $\langle 2, 2, 1, 1, 0\rangle$ *cumpliendo que:*

(i) $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ *es un álgebra de Boole.*

(ii) Para todo $a \in A$ *el conjunto* $F_k(a) = \{x \in A : a \vee kx = 1\}$ *es un filtro principal de álgebras de Boole.*

Consideraremos la operación unitaria en A, $\tau(k)$, *que asigna a cada* $a \in A$ *el único elemento* $\tau(k)a \in A$ *para el que se satisface la siguiente igualdad entre ideales del álgebra de Boole subyacente*

$$\neg F_k(a) = [0, \tau(k)a]$$

. En lo que sigue s *y* r *abreviarán a las operaciones* $\neg\tau(k)\neg$ *y* $\neg k \neg$ *respectivamente. Además usaremos* t *en lugar de* $\tau(k)$ *cuando ello no induzca a error.*

El concepto de álgebra pretemporal es natural en el sentido de que es muy secillo encontrar ejemplos. De hecho cada álgebra temporal proporciona dos y encontrar álgebras temporales es sencillo a partir de relaciones binarias en conjuntos como hemos hecho notar previamente.

Lema 2.3.2 *Para toda álgebra temporal* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$, *las álgebras* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, 1\rangle$ *y* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, h, 1\rangle$ *son álgebras pretemporales.*

Demostración: Sea $a \in A$ y consideremos $F_g(a)$. Dicho conjunto es un filtro principal. En efecto, es inmediato que $1 \in F_g(a)$ y además como g es monótona, si $x \in F_g(a)$ y $x \leq z$ entonces $1 = a \vee gx \leq a \vee gz$, con lo cual tenemos que $z \in F_g(a)$. Por otra parte, de la desigualdad $fha \leq a$ resulta claro que $p\neg a \in F_g(a)$. Además, si $x \in F_g(a)$ entonces, en virtud del teorema 1.3.11, $ha \vee x = 1$. Por las propiedades booleanas y las definiciones dadas se tiene $\neg x \wedge p\neg a = 0$ y de ello se sigue que $p\neg a \leq x$. Podemos concluir por tanto que $F_g(a)$ es el filtro generado por $p\neg a$. La demostración está concluida con el razonamiento anterior dado que $\langle A, \wedge, \vee, \neg, h, g, 1\rangle$ es otra álgebra temporal. ■

Lema 2.3.3 *Sea $\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, 1\rangle$ un álgebra pretemporal. Para todo $a, b \in A$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $k1 = t1 = 1$.

(ii) $a \vee kb = 1$ *si, y sólo si,* $b \vee ta = 1$.

(iii) $t(a \wedge b) = ta \wedge tb$.

(iv) t *es creciente.*

(v) s *es creciente.*

(vi) $ska \leq a$ *y* $rta \leq a$.

Demostración: Como $F_k(a)$ es un filtro princial para todo $a \in A$, $1 \in F_k(0)$ y por tanto$1 = 0 \vee k1 = k1$. Por otra parte $F_k(1) = A$ implica $t1 = 1$. Para demostrar la segunda afirmación basta con considerar que $a \vee kb = 1$ equivale a $\neg b \in [O, ta]$ y esto a su vez es equvivalente a $b \vee ta = 1$. Para demostrar la tercera afirmación supongamos que $x \in F_k(a \wedge b)$. Se tendrá por tanto $a \vee kx = b \vee kx = 1$. Considerando la última igualdad y las propiedades de $\wedge$ tenemos que $\neg x \leq ta \wedge tb$ y por consiguiente $\neg F_k(a \wedge b) \subseteq [0, ta \wedge tb]$. El razonamiento puede ser invertido obteniendo que $\neg F_k(a \wedge b) = [0, ta \wedge tb]$. De esta igualdad y la definiciónn de t se deduce $t(a \wedge b) = ta \wedge tb$ y por tanto t es una función monótona. Dado que $s = \neg t \neg$ y que t es una función monótona se concluye que s es también una función monótona. Demostraremos finalmente que $ska \leq a$. Como $ka \vee \neg ka = 1$, por la segunda afirmación de este lema se deduce que $\neg ska \vee a = tr \neg a \vee a = 1$, lo cual significa que $ska \leq a$. La desigualdad $rta \leq a$ se obtiene de forma análoga. ∎

Teorema 2.3.4 *Para toda álgebra pretemporal $\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, 1\rangle$, k es un $\wedge$-morfismo.*

Demostración: Sean $a, b \in A$. Como $\neg k(a \wedge b) \vee k(a \wedge b) = 1$ se tiene por 2.3.3 que $(a \wedge b) \vee t\neg k(a \wedge b) = 1$ y por tanto $a \vee t\neg k(a \wedge b) = b \vee t\neg k(a \wedge b) = 1$. Deshaciendo el cambio $ka \vee \neg k(a \wedge b) = 1$ y por tanto $k(a \wedge b) \leq ka$. Se puede demostrar de forma similar que $k(a \wedge b) \leq kb$. De esta forma tenemmos $k(a \wedge b) \leq ka \wedge kb$.

Por otra parte, dado que $s = \neg t \neg$ es monótona $s(ka \wedge kb) \leq ska \wedge skb$; pero, por el lema 2.3.3, $skx \leq x$, para todo $x \in A$. Por tanto $s(ka \wedge kb) \leq a \wedge b$, i.e., $\neg s(ka \wedge kb) \vee (a \wedge b) = 1$. Según la definición de s lo anterior significa que $t\neg(ka \wedge kb) \vee (a \wedge b) = 1$. Nuevamente por 2.3.3, la última igualdad nos conduce a $\neg(ka \wedge kb) \vee k(a \wedge b) = 1$, es decir, $ka \wedge kb \leq k(a \wedge b)$. Las dos desigualdades demuestran lo que pretendiamos. ■

Las condiciones que debe cumplir un álgebra $\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, 1\rangle$ para ser pretemporal implican que k debe ser un $\wedge$-morfismo. Sin embargo de que $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ sea un álgebra de Boole y k un $\wedge$-morfismo no podemos deducir que $\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, 1\rangle$ sea un álgebra pretemporal. Para justificar esta afirmación enunciamos y demostramos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.5 *Toda álgebra pretemporal es un álgebra modal. Sin embargo existen álgebras modales que no son pretemporales.*

Demostración: El teorema 2.3.4 afirma que cada álgebra pretemporal es un álgebra modal. Veamos ahora que hay existen ejemplos de álgebras modales que no son álgebras pretemporales. Para ello consideremos el álgebra $\langle \mathcal{P}(\omega), \wedge, \vee, \neg, i, \omega\rangle$, donde $\wedge = \cap$, $\vee = \cup$, $\neg$ es la complementación conjuntista e i es una aplicación sobre $\mathcal{P}(\omega)$ definida como sigue:

$$i(X) = \begin{cases} \omega & , \textit{ si } X = \omega \\ \omega^* & , \textit{ si } I \subseteq X \subset \omega \\ \omega \setminus \{1\} & , \textit{ si } P \subseteq X \subset \omega \\ \omega \setminus \{0,1\} & , \textit{ en otro caso} \end{cases}$$

teniendo en cuenta que P e I son respectivamente el cojunto de los números naturales pares e impares. Es inmediato ver que i es un $\wedge$-morfismo que deja fijo a ω. Consideremos ahora $\langle F(\omega), \wedge, \vee, \neg, \omega\rangle$, la subálgebra de Boole de $\langle \mathcal{P}(\omega), \wedge, \vee, \neg, \omega\rangle$ de los subconjuntos finitos y cofinitos de ω. $F(\omega)$ es cerrado para i puesto que en cualquier caso la imagen por i es un subconjunto cofinito. Podemos concluir que $\mathcal{F}(\omega) = \langle \mathcal{P}(\omega), \wedge, \vee, \neg, i, \omega\rangle$ es un álgebra modal. Sin embargo no es un álgebra pretemporal. En efecto, tomemos el conjunto:

$$F_i(\{1\}) = \{X : \{1\} \cup i(X) = \omega\}$$

es claro que $X \in F_i(\{1\})$ si, y sólo si, $P \subseteq X$ y X es cofinito. Si $X_0 \in F_i(\{1\})$ entonces $I \cap X_0 \neq \emptyset$. Sea $r_0 \in I \cap X_0$. El conjunto $X_1 = X_0 \setminus \{r_0\}$ cumple $X_1 \subseteq X_0$ y $X_1 \in F_i(\{1\})$. Por consiguiente obtenemos que $F_i(\{1\})$ no puede contener ningún mínimo y ello implica que $\mathcal{F}(\omega)$ no es un álgebra temporal. ■

El contraejemplo fué buscado entre las álgebras modales infinitas. Si se huebiese buscado entre las finitas no hubieramos tenido exito, como asegura el siguiente teorema.

Teorema 2.3.6 *La clase de las álgebras modales finitas coincide con la clase de las álgebras pretemporales finitas.*

Demostración: La demostración es inmediata a partir del teorema 2.3.4. ■

Corolario 2.3.7 *Sea* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, 1\rangle$ *un álgebra pretemporal. Entonces*

$$\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, \tau(k), 1\rangle$$

es un álgebra temporal.

Demostración: En efecto, por el lema 2.3.3, $k1 = \tau(k)1 = 1$. Además $a \vee kb = 1$ es equivalente a $b \vee \tau(k)a = 1$ y se cumple $\tau(k)(a \wedge b) = \tau(k)a \wedge \tau(k)b$. Además, por el teorema 2.3.4, $k(a \wedge b) = ka \wedge kb$. Así pues $\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, \tau(k), 1\rangle$ es un álgebra temporal. ■

Lema 2.3.8 *Sea* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, 1\rangle$ *un álgebra pretemporal y* t*,* t' *dos funciones verificando las siguientes propiedades para todo* $a, b \in A$*:*

(i) $rta \leq a$ *y* $rt'a \leq a$

(ii) $[a \vee kb = 1$ *sii* $b \vee ta = 1]$ *y* $[a \vee kb = 1$ *sii* $b \vee t'a = 1]$.

entonces $t = t'$.

Demostración: Sea a un elemento arbitrario de A. Según la primera hipótesis tenemos $a \vee k\neg ta = 1$ y por la segunda tenemos $t'a \vee \neg ta{=}1$. Podemos deducir por tanto que $ta \leq t'a$. Siguiendo un razonamiento análogo tenemos $t'a \leq ta$ y por tanto la igualdad $ta = t'a$. ■

Teorema 2.3.9 *Si* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ *y* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h', 1\rangle$ *son dos álgebras temporales entonces* $h = h'$.

En el siguiente corolario se demuestra que el operador τ es involutivo.

Corolario 2.3.10 *Sea* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, 1\rangle$ *un álgebra pretemporal. Entonces* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \tau(k)$ *es un álgebra pretemporal y además* $k = \tau^2(k)$.

Demostración: Por el corolario 2.3.7 y el lema 2.3.2, $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \tau(k), 1\rangle$ es un álgebra pretemporal. Así pues τ puede ser iterado. Por otra parte $\langle A, \wedge, \vee, \neg, \tau^2(k), \tau(k), 1$ y $\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, \tau(k), 1\rangle$ álgebras temporales. Por el corolario 2.3.9 deducimos que $k = \tau^2(k)$. ■

El concepto de álgebra pretemporal en el caso finito tiene una caracterización que lo hace muy natural indicando cual es su proximidad al álgebra de Boole.

Corolario 2.3.11 *Sea* $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, k, 1\rangle$ *un álgebra de tipo* $\langle 2, 2, 1, 1, 0\rangle$ *tal que* A *es finito y* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ *es un álgebra de Boole. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\langle A, \wedge, \vee, \neg, k, 1\rangle$ *es un álgebra pretemporal.*

(ii) k *es un* $\wedge$*-morfismo.*

Demostración: La primera afirmación implica la segunda como afirma el teorema 2.3.4. Por otra parte suponiendo la segunda es fácil demostrar que $F_k(a)$ es un filtro. Sin duda este filtro será principal puesto que el álgebra que estamos considerando es finita. ■

Corolario 2.3.12 *Para toda álgebra temporal* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ *y para todo* $a \in A$

$$ha = \neg min\{x \in A : a \vee gx = 1\}$$

Corolario 2.3.13 *Para toda álgebra temporal* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ *y para todo* $a \in A$

$$pa = max\{x \in A : a \wedge fx = 0\}$$

El corolario 2.3.12 demuestra un hecho de mucha significación, a saber, la operación temporal h queda determinada por g (y vicerversa puesto que si se permutan los paperles de g y h entonces se obtiene una nueva álgebra temporal). Sin embargo no es posible expresar h como una composición finita de las operaciones del conjunto $\{g, \wedge, \vee, \neg, 1\}$. La siguiente proposición demuestra este hecho.

Definición 2.3.14 *Sea X un conjunto no vacío. Una valoración temporal de X (valoración temporal) sobre el álgebra temporal $\mathcal{A}$ es una aplicación v de X en A.*

Definición 2.3.15 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, $n \in \omega$ y $k : A^n \longrightarrow A$ una aplicación. Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto con n elementos y consideremos $\mathbf{F}(X)$. La aplicación k es representable en $\{\wedge, \vee, \neg, g, 1\}$ si existe $\alpha \in F^h(X)$ tal que para toda $v : X \longrightarrow A$ se cumple que*

$$k(v(x_1), v(x_2), \ldots, v(x_n)) = \overline{v}(\alpha)$$

donde $\overline{v} : F(X) \longrightarrow A$ es el morfismo de álgebra de tipo $\langle 2, 2, 1, 1, 1, 0\rangle$ que extiende a la aplicación v.

Teorema 2.3.16 *Dada un álgebra temporal $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$, h no es, en general, una función representable en $\{\wedge, \vee, \neg, g, 1\}$.*

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ el álgebra temporal $\langle T, \prec\rangle^+$, donde $T = \{a, b, c\}$ y $\prec = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$. Sea m defininida sobre A como sigue:$m1 = 1$, $m0 = 0$,$ma_1 = a_1$, $ma_2 = 0$, $ma_3 = a_5$, $ma_4 = a_1$, $ma_5 = a_5$, $ma_6 = 1$, donde a_1, a_2 y a_3 son átomos cumpliendo $\neg a_1 = a_5$, $\neg a_2 = a_6$ y $\neg a_3 = a_4$. Es fácil comprobar que m es un morfismo para todas las operaciones salvo h, y esto porque $mha_3 = 0 \neq a_5 = hma_3$. Esto demuestra la proposición porque de ser h representable en $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, 1\rangle$ los morfismos para las operaciones del conjunto $\{\wedge, \vee, \neg, g, 1\}$ lo serían también para h. ■

La igualdad del corolario 2.3.12 tendrá importantes implicaciones computacionales. Pero además de ello puede ser empleada para demostrar ciertos resultados teóricos, como por ejemplo el siguiente.

Corolario 2.3.17 *Sea $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ un álgebra temporal. Entonces:*

(i) *($gx \leq ggx$, para todo $x \in A$) sii ($hx \leq hhx$, para todo $x \in A$).*

(ii) *($gx = ggx$, para todo $x \in A$) sii ($hx = hhx$, para todo $x \in A$).*

(iii) *$g = h$ sii para todo $x \in A$, $fgx \leq x$ y si $y \in A$ verifica $\neg gx \leq y$ entonces $\neg gy \leq x$.*

Demostración: Supongamos que en $\mathcal{A}$ se verifica la ecuación $gx \to ggx = 1$. Sea $a \in A$ y $z = min\{x \in A : ha \vee gx = 1\}$. Elijamos $x \in A$ tal que $a \vee gx = 1$. Como $gx \leq ggx$ entonces $1 = a \vee ggx$, y en virtud de la axiomática de álgebra temporal tenemos que $ha \vee gx = 1$. Dada la elección de z y de x tenemos que $z \leq x$, para todo $x \in A$ tal que $x \vee gx = 1$. En definitiva esto nos conduce a afirmar que $min\{x \in A : ha \vee gx = 1\} \leq \{x \in A : a \vee gx = 1\}$. Por el corolario 2.3.12 y las propiedades del álgebra de Boole podemos concluir que $ha \leq hha$. La implicación recíproca se demuestra análogamente.

El resto de la demostración se obtiene con razonamientos análogos a los anteriores. ∎

Definición 2.3.18 *Sea $\mathfrak{R}$ (resp. $\mathfrak{P}$) la categoría de las álgebras temporales (resp. pretemporal) y sus morfismos (resp. los morfismos de la estructura algebraica que son morfismos para t). El siguiente resultado es un resumen en lenguaje categórico de lo dicho en esta sección.*

Corolario 2.3.19 *El funtor $U : \mathfrak{R} \longrightarrow \mathfrak{P}$ que transforma el álgebra temporal $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ en el álgebra pretemporal $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, 1\rangle$ es un isomorfismo de categorías.*

§2.4 Álgebras Pretemporales y Álgebras Modales.

Como hemos demostrado, la clase de las álgebras pretemporales es una subclase propia de la clase de las álgebras modales. La importancia de esta subclase es considerable respecto a las álgebras pretemporales como aseguram los siguientes resultados.

Definición 2.4.1 *Sea $\langle T, R\rangle$ una estructura. $\langle T, R\rangle^+_m$ es el álgebra $\langle \mathcal{P}(T), \cap, \cup, \neg, i_R, T\rangle$, donde i_R coincide con la operación g_R de $\langle T, R\rangle^+$.*

Teorema 2.4.2 *Para cada álgebra modal $\mathcal{A}$ existe una estructura $\langle T, R\rangle$ tal que $\mathcal{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $\langle T, R\rangle^+_m$.*

Corolario 2.4.3 *Toda álgebra modal es isomorfa a una subálgebra de un álgebra pretemporal.*

Demostración: Si $\langle T, R\rangle$ es una estructura entonces $\langle T, R\rangle_m^+ = \langle \mathcal{P}(T), \cap, \cup, \neg, i_R, T\rangle$ es un álgebra modal cuyo operador necesidad coincide con g_R (proveniente de $\langle T, R\rangle_t^+$). Así pues $\langle T, R\rangle_m^+$ es un álgebra pretemporal. De hecho el conjunto $i_R(X)$, para $X \subseteq T$, es por definición

$$\{y \in T : \textit{para todo } y' \in T, \textit{ si } yRy' \textit{ entonces } y' \in X\}$$

y el filtro $F_{i_R}(X)$ es $\{Y \subseteq T : X \cup i_R(Y) = T\}$. El conjunto

$$Y_0 = \{y \in T : \textit{existe } y' \in T \textit{ tal que } y'Ry \textit{ e } y' \notin X\}$$

es un elemento de $F_{i_R}(X)$ y realmente es su mínimo. ■

Corolario 2.4.4 *Si $\mathcal{P}$ es la clase de álgebras pretemporales y $\mathcal{M}$ es la variedad de álgebras modales entonces $V(\mathcal{P}) = \mathcal{M}$, i.e. la clase $\mathcal{P}$ genera a la variedad $\mathcal{M}$.*

Demostración: Dado que $\mathcal{M}$ es una variedad y $\mathcal{P}$ es una subclase de $\mathcal{M}$ se tiene que $HSP(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{M}$. Por otra parte, si $\mathcal{A}$ es un álgebra modal entonces existe una subálgebra de un elemento de $\mathcal{P}$ que es isomorfo a $\mathcal{A}$, y como consecuencia $\mathcal{A}$ es una imagen homomorfa de esta subálgebra. Esto implica que $\mathcal{A} \in HSP(\mathcal{P})$. Se tiene por tanto que $HSP(\mathcal{P}) = \mathcal{M}$, como queríamos demostrar. ■

Hemos demostrado por tanto que la álgebras modales y las álgebras temporales tienen un antepasado en común que son las áglebras pretemporales. Por una parte la clase de las álgebras pretemporales es equipotente a la clase de las álgebras temporales y por otra es una clase generadora de la variedad de las álgebras modales, variedad de la que es subclase.

Capítulo 3

Congruencias y Espectros.

§3.1 Introducción.

Al hablar de álgebras temporales podemos distinguir dos tipos de congruencias, a saber, las congruencias del álgebra temporal propiamente dichas y las congruencias del álgebra de Boole subyacente. El presente capítulo trata de las congruencias temporales. En primer lugar es conveniente identificar a aquellos subconjuntos del álgebra asociados a las congruencias, resultando ser dicho conjuntos, en este caso, los filtros temporales. Seguidamente se procede a estudiar la cuestión de describir los filtros temporales engendrados por un conjunto de generadores. Siguiendo la línea de los estudios clásicos nos ocupamos de los filtros irreducibles, completamente irreducibles y maximales.

§3.2 Congruencias y Filtros.

Dado que las congruencias temporales son sin duda congruencias del álgebra de Boole subyacente los conjuntos asociados a ellas serán un tipo particular de filtros. Aparecen así los filtros temporales.

Definición 3.2.1 *Un filtro D de $\mathcal{A}$ es temporal si se cumple que para todo $a \in A$, $La \in D$, esto es, D es cerrado para la operación temporal L. Se designará al conjunto de los filtros temporales por $Spt(\mathcal{A})$.*

Definición 3.2.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $Cong(\mathcal{A})$ el conjunto de congruencias de $\mathcal{A}$. Definimos la aplicación:*

$$\Delta : Cong(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$$

como $\Delta(\theta) = \{x \in A : \langle x, 1\rangle \in \theta\}$, *para todo* $\theta \in Cong(\mathcal{A})$.

La aplicación anterior, en principio, toma valores en $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Veamos que realmente los toma en $Spt(\mathcal{A})$.

Teorema 3.2.3 *Si* $\mathcal{A}$ *es un álgebra y* Δ *es la aplicación de la definición 3.2.2 entonces* $\Delta(\theta) \in Spt(\mathcal{A})$, *para todo* $\theta \in Cong(\mathcal{A})$.

Demostración: Sea θ una congruencia de $\mathcal{A}$. Como $\langle 1, 1\rangle \in \theta$ se tiene que $1 \in \Delta(\theta)$. Si $a, b \in \Delta(\theta)$ entonces $\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle \in \theta$ y por tanto $\langle a \wedge b, 1\rangle \in \theta$ con lo cual tenemos que $a \wedge b \in \Delta(\theta)$. Supongamos que $a \in \Delta(\theta)$ y que $a \leq b$. Entonces se tiene que $a \rightarrow b = 1$ y por tanto que $\langle a \rightarrow b, 1\rangle \in \theta$. Dada la simetría de θ, $\langle 1, a\rangle, \langle 1, a \rightarrow b\rangle \in \theta$. Como θ es reflexiva, $\langle b, b\rangle \in \theta$. Puesto que $1 \rightarrow b = b$, $\langle a \rightarrow b, b\rangle \in \theta$. Por transitividad, tenemos que $\langle 1, b\rangle \in \theta$. Hemos demostrado que $\Delta(\theta) \in Sp(\mathcal{A})$. Como θ es congruencia, es fácil demostrar que $\Delta(\theta)$ es cerrado para la operación temporal L. ■

Nuestro objetivo es demostrar que la aplicación Δ es una biyección. Para ello definiremos otra que será su inversa.

Definición 3.2.4 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra temporal. Definimos la aplicación:*

$$\Theta : Spt(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(A^2)$$

definida por:

$$\Theta(D) = (a, b) \in A^2 : a \rightarrow b, b \rightarrow a \in D$$

Teorema 3.2.5 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra temporal. Si* $D \in Spt(\mathcal{A})$ *entonces* $\Theta(D) \in Cong(\mathcal{A})$.

Demostración: Veamos en primer lugar que $\Theta(D)$ es una relación de equivalencia. Dado que $\neg a \vee a = 1$ y $1 \in D$, $\langle a, a\rangle \in \Theta(D)$. Luego $\Theta(D)$ es reflexiva. La simetría es evidente. Para la transitividad, supongamos que $\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle \in \Theta(D)$. En tal caso tenemos que $a \rightarrow b, b \rightarrow a, b \rightarrow c, c \rightarrow b \in D$. Por el lema 0.3.8, $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)) \in D$, y por el teorema 0.3.16 deducimos que $a \rightarrow c \in D$. Este razonamiento se puede repetir con las hipótesis adecuadas para obtener $c \rightarrow a \in D$. De esta forma se tiene la transitividad de $\Theta(D)$.

Supongamos que $\langle a, b\rangle \in \Theta(D)$. Por el lema 0.3.9 tenemos que $(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a) \in D$, y por el teorema 0.3.16, $\neg b \rightarrow \neg a \in D$. De forma análoga obtendríamos que $\neg a \rightarrow \neg b \in D$, razonando a partir de la hipótesis $b \rightarrow a \in D$. Cloncluimos pues que $\langle \neg a, \neg b\rangle \in \Theta(D)$.

Supongamos ahora que $\langle a, b\rangle \in \Theta(D)$ y sea $c \in A$. Como $b \leq b \vee c$ entonces tenemos que $\neg a \vee b \leq \neg a \vee (b \vee c)$, esto es, $a \rightarrow b \leq a \rightarrow (b \vee c)$. Dado que por hipótesis $a \rightarrow b \in D$ y D es un filtro, ha de verificarse $a \rightarrow (b \vee c) \in D$. Como $(\neg a \wedge \neg c) \vee b \vee c = (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg c \vee b \vee c) = \neg a \vee b \vee c = a \rightarrow (b \vee c)$ se tiene que $(a \vee c) \rightarrow (b \vee c) \in D$. De forma análoga demostraríamos que $(b \vee c) \rightarrow (a \vee c) \in D$. Así pues, $\langle a \vee c, b \vee c\rangle \in \Theta(D)$ y, dada la conmutatividad de la operación $\vee$, también se tiene $\langle c \vee a, c \vee b\rangle \in \Theta(D)$. Si $\langle c, d\rangle \in \Theta(D)$, entonces, en virtud de lo ya demostrado, $\langle a \vee c, b \vee c\rangle \in \Theta(D)$ y $\langle b \vee c, b \vee d\rangle \in \Theta(D)$. Como $\Theta(D)$ es una relación transitiva, podemos concluir que $\langle a \vee c, b \vee d\rangle \in \Theta(D)$.

Supongamos que $\langle a, b\rangle \in \Theta(D)$. Tendremos por tanto que $L(a \rightarrow b) \in D$ y $L(b \rightarrow a) \in D$. Como consecuencia inmediata $g(a \rightarrow b), h(a \rightarrow b) \in D$. Por otra parte, según la axiomática de álgebras temporales, $g(a \rightarrow b) \rightarrow (ga \rightarrow gb) = 1 \in D$ y $h(a \rightarrow b) \rightarrow (ha \rightarrow hb) = 1 \in D$. Por el lema 0.3.16 se cumple que $ga \rightarrow gb, ha \rightarrow hb \in D$. De forma análoga demostraríamos que $gb \rightarrow ga, hb \rightarrow ha \in D$ y como conclusión tendríamos que $\langle ga, gb\rangle, \langle ha, hb\rangle \in \Theta(D)$.

Recapitulando tenemos que $\Theta(D)$ es una relación de equivalencia que además es congruencia para las operaciones del conjunto $\{\neg, \vee, g, h\}$. Como para todo $a, b \in A$, $a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b)$, $\Theta(D)$ es también congruencia para $\wedge$. Así pues, $\Theta(D) \in Cong(\mathcal{A})$. ■

Lema 3.2.6 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, $a, b \in A$ y $\theta \in Cong(\mathcal{A})$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\langle a, b\rangle \in \theta$.

(ii) $\langle a \rightarrow b, 1\rangle, \langle b \rightarrow a, 1\rangle \in \theta$

Demostración: Supongamos que $\langle a, b\rangle \in \theta$. Como $b \rightarrow b = 1$ y $\langle b, b\rangle \in \theta$, debe cumplirse que $\langle a \rightarrow b, 1\rangle, \langle b \rightarrow a, 1\rangle \in \theta$. Recíprocamente, dado que para todo $x, y \in A$ $(x \rightarrow y) \rightarrow x = x$, tenemos que $\langle (a \rightarrow b) \rightarrow a, a\rangle, \langle (b \rightarrow a) \rightarrow b, b\rangle \in \theta$. Como $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow b) = (b \rightarrow a) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow a)$, (cfr. lema 0.3.8) y θ es congruencia para $\rightarrow$, se deduce la primera afirmación. ■

Teorema 3.2.7 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal entonces Δ es una biyección y Θ es su inversa.*

Demostración: Sean $\theta \in Cong(\mathcal{A})$ y $D \in Spt(\mathcal{A})$. Sean además $a, b, c \in A$. Se tiene por una parte la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} c \in D \quad & sii \quad c \to 1, 1 \to c \in D \\ & sii \quad \langle c, 1 \rangle \in \Theta(D) \\ & sii \quad c \in \Delta(\Theta(D)). \end{aligned}$$

y por otra la siguiente, via el lema 3.2.6:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \in \theta \quad & sii \quad \langle a \to b, 1 \rangle, \langle b \to a, 1 \rangle \in \theta \\ & sii \quad a \to b, b \to a \in \Delta(\theta) \\ & sii \quad \langle a, b \rangle \in \Theta(\Delta(\theta)). \end{aligned}$$

Así pues, $\Delta \circ \Theta = I_{Spt(\mathcal{A})}$ y $\Theta \circ \Delta = I_{Cong(\mathcal{A})}$. ■

Teorema 3.2.8 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal entonces los retículos $(Spt(\mathcal{A}), \subseteq)$ y $(Cong(\mathcal{A}), \subseteq)$ son isomorfos.*

Demostración: Como hemos visto, la aplicación Δ es una biyección con inversa Θ. Es fácil comprobar que ambas conservan el orden. De esto se deduce lo que afirma el enunciado. ■

Teorema 3.2.9 *El retículo de los filtros temporales de cualquier álgebra temporal es distributivo.*

Demostración: La variedad de las álgebras temporales es aritmética y para ello basta considerar el término:

$$m(x, y, z) = (x \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)$$

Por tanto, la variedad de álgebras temporales es no sólo de congruencias permutables sino que el retículo de congruencias es distributivo. Esto implica que el retículo de filtros temporales de un álgebra temporal, que es isomorfo al de congruecias temporales de la misma álgebra sea distributivo. ■

A continuación vamos a estudiar algunas cuestiones elementales sobre los cocientes de álgebras temporales por filtros temporales. Para que este estudio introductorio quede completo introduciremos también los concepto de ideal e ideal temporal de un álgebra temporal.

Definición 3.2.10 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal y $X \subseteq A$. Definimos el conjunto $\neg X$ según la siguiente igualdad:*

$$\neg X = \{\neg a : a \in X\}$$

Definición 3.2.11 *Dea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal e $I \subseteq A$. I es un ideal (resp. ideal temporal) de $\mathcal{A}$ si, y sólo si, $\neg I$ es un filtro (resp. filtro temporal) de $\mathcal{A}$.*

Teorema 3.2.12 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y θ una relación de equivalencia sobre A. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\theta \in Cong(\mathcal{A})$.

(ii) $1/\theta$ *es un filtro temporal y para todo* $a,b \in A$ *se cumple:*

$$\langle a, b\rangle \in \theta \text{ si, y sólo si, } a \rightarrow b, b \rightarrow a \in 1/\theta$$

Lema 3.2.13 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, F un filtro temporal de $\mathcal{A}$ y $a, b \in A$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $a \rightarrow b, b \rightarrow a \in F$.

(ii) Existe $c \in F$ *tal que* $a \wedge c = b \wedge c$.

Lema 3.2.14 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, I un ideal temporal de $\mathcal{A}$ y $a, b \in A$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $a + b \in I$.

(ii) Existe $c \in I$ *tal que* $a \vee c = b \vee c$.

Lema 3.2.15 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, $F \in Spt(\mathcal{A})$ y $a, b \in A$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $a \rightarrow b, b \rightarrow a \in F$.

(ii) $a + b \in \neg F$.

Corolario 3.2.16 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, $\theta \in Cong(\mathcal{A})$ y $a,b \in A$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\langle a,b\rangle \in \theta$.

(ii) Existe $c \in \Delta(\theta)$ *tal que* $a \wedge c = b \wedge c$.

(iii) $a \rightarrow b, b \rightarrow a \in \Delta(\theta)$.

(iv) $a + b \in \neg\Delta(\theta)$.

(v) Existe $c \in \neg\Delta(\theta)$ *tal que* $a \vee c = a \vee c$.

§3.3 Generación de filtros. Teorema de la deducción.

Definición 3.3.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $X \subseteq A$. El filtro generado por X, $D_t(X)$, se define como:*

$$D_t(X) = \bigcap\{D \in Spt(\mathcal{A}) : X \subseteq D\}$$

esto es, $D_t(X)$ es el menor filtro temporal de $\mathcal{A}$ que contiene al conjunto X.

Lema 3.3.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, $X \subseteq A$ y $H(X)$ el conjunto:*

$$\{a \in A : existe\ Y \in \mathcal{P}_\omega(X)\ y\ n \in \omega\ tal\ que\ L^n(\bigwedge Y) \leq a\}$$

Entonces se cumple $D_t(X) = H(X)$.

Demostración: Es fácil verificar que $1 \in H(X)$ y que $H(X)$ es un filtro de orden cerrado para L, con lo cual $H(X)$ es un filtro temporal. Por otra parte, si tomamos $a, b \in H(X)$ entonces existen $n_a, n_b \in \omega$ y $Y_a, Y_b \in \mathcal{P}_\omega(X)$ verificando $L^{n_a}(\bigwedge Y_a) \leq a$ y $L^{n_b}(\bigwedge Y_b) \leq b$. El número natural $m = max\{n_a, n_b\}$ verifica $L^m(\bigwedge Y_a) \leq L^{n_a}(\bigwedge Y_a)$ a la vez que $L^m(\bigwedge Y_b) \leq L^{n_b}(\bigwedge Y_b)$. Por consiguiente podemos concluir que:

$$L^m(\bigwedge(Y_a \cup Y_b)) \leq a \wedge b$$

y por tanto $a \wedge b \in H(X)$. Puesto que $H(X)$ es un filtro y $X \subseteq H(X)$ tenemos que $D_t(X) \subseteq H(X)$. Para ver la otra inclusión tomemos $a \in H(X)$; existirán pues $Y_a \in \mathcal{P}_\omega(X)$ y $n_a \in \omega$ tal que $L^{n_a}(\bigwedge Y_a) \leq a$. Pero $X \subseteq D_t(X)$ y $D_t(X)$ es cerrado para las operaciones $\wedge$ y L, por tanto $a \in D_t(X)$. ∎

El conjunto $D_t(X)$ tiene una descripción especial en el caso de que X sea de la forma $D \cup \{a\}$, donde D es un filtro temporal y $a \in A$.

Teorema 3.3.3 (de la deducción) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Para todo $D \in Spt(\mathcal{A})$ y $a \in A$ se cumple la igualdad:*

$$D_t(D, a) = \{x \in A : \textit{existe } n \in \omega \textit{ tal que } L^n(a) \rightarrow x \in D\}$$

Demostración: Para más comodidad en la demostración sea F el miembro de la derecha en la igualdad conjuntista del enunciado. Lo que se afirma es que F es un filtro temporal de $\mathcal{A}$ que contiene a $D \cup \{a\}$ y que además es el menor entre los que verifican dicha propiedad.

Es inmediato verificar que F es un filtro de orden y que $D \cup \{a\} \subseteq F$. Además $L^0(a) \rightarrow 1 = 1 \in D$, con lo cual $1 \in F$. Si suponemos que $x, y \in F$ entonces existen dos números naturales n y m (por ejemplo $n \leq m$) tales que $L^n(a) \rightarrow x$, $L^m(a) \rightarrow y \in D$. De esto se sigue que $L^m(a) \rightarrow x$, $L^m(a) \rightarrow y \in D$ y por tanto $L^m(a) \rightarrow (x \wedge y) \in D$. Concluimos pues que $F \in Sp(\mathcal{A})$. Más aún, F es temporal porque si existe $m \in \omega$ tal que $L^m(a) \rightarrow x$ y D es temporal entonces $L(L^m(a) \rightarrow x) \in D$ y por tanto $L^{m+1}(a) \rightarrow Lx \in D$. De aquí la temporalidad de F.

Supongamos finalmente que D' es un elemento de $Spt(\mathcal{A})$ que contiene a $D \cup \{a\}$ y sea $x \in A$ y $m \in \omega$ tal que $L^m(a) \rightarrow x \in D$. En tal caso $L^m(a), L^m(a) \rightarrow x \in D'$, lo cual implica que $x \in D'$. Esto concluye la demostración. ∎

Corolario 3.3.4 *Sea D un elemento de $Spt(\mathcal{A})$ y $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un subconjunto finito de A. El filtro temporal generado por $D \cup X$ coincide con el conjunto de los elemento x de A tales que existe $m \in \omega$ cumpliendo:*

$$L^m(a_1) \wedge \ldots \wedge a_n) \rightarrow x \in D$$

§3.4 Saturación.

Dada un álgebra temporal A, se tiene por una parte el conjunto de sus filtros temporales y por otra el conjunto de sus ultrafiltros $Ult(\mathcal{A})$. Además se dispone de la estructura temporal $\langle Ult(\mathcal{A}), \prec\rangle$. Es sabido también que todos los filtros del $\mathcal{A}$ se pueden generar a partir de $Ult(\mathcal{A})$ como intersección de sus diversas partes. Nos planteamos ahora la cuestión de indagar sobre las condiciones particulares que debe verificar un subconjunto de $Ult(\mathcal{A})$ para que su gran intersección, que como queda dicho es un filtro, sea un filtro temporal. Sin duda la relación $\prec$ debe ser una pieza clave en el estudio porque ella lleva implícita bastante información sobre la temporalidad de $\mathcal{A}$, según se desprende de su definición y teoremas como el de Stone generalizado. Para comenzar definiremos las siguientes funciones.

Definición 3.4.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Definimos la aplicación μ : $Spt(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{P}(Ult(\mathcal{A}))$ como sigue:*

$$\mu(D_t) = \{D \in Ult(\mathcal{A}) : D_t \subseteq D\}$$

para todo $D_t \in Spt(\mathcal{A})$. Por otro lado podemos considerar también la aplicación $\sigma : \mathcal{P}(Ult(\mathcal{A})) \longrightarrow Sp(\mathcal{A})$ definida como:

$$\sigma(S) = \bigcap S$$

para todo $S \subseteq Ult(\mathcal{A})$.

$Sat_{\prec}(\mathcal{A})$ designará el conjunto de los subconjuntos de $Ult(\mathcal{A})$ saturados respecto a $\prec$. Sus elementos serán denominados conjuntos saturados de $Ult(\mathcal{A})$ o simplemente conjuntos saturados.

Obsérvese que dada un álgebra temporal cualquiera $\mathcal{A}$ se cumple que $\mu(D_t) \neq \emptyset$, para todo $D_t \in Spt(\mathcal{A})$, y ello debido a que el universo del álgebra temporal no se considera filtro del álgebra.

Lema 3.4.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. La aplicación μ es inyectiva y σ es sobreyectiva.*

Demostración: Es fácil deducir que para todo $D \in Sp(\mathcal{A})$ se cumple que $D = \bigcap\{D' \in Ult(\mathcal{A}) : D \subseteq D'\}$. Por tanto $\sigma \circ \mu = 1_{Spt(\mathcal{A})}$ y de ello se deduce lo que afirma el enunciado. ■

Lema 3.4.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y sea $D \in Ult(\mathcal{A})$. Entonces:*

(i) *g^*D es un filtro de álgebra de Boole.*

(ii) *$g^*D = \bigcap\{D' \in Ult(\mathcal{A}) : D \prec D'\}$.*

(iii) *h^*D es un filtro de álgebra de Boole.*

(iv) *$h^*D = \bigcap\{D' \in Ult(\mathcal{A}) : D' \prec D\}$.*

Demostración: Es inmediato comprobar que g^*D es cerrado para la operación booleana $\wedge$ debido a que g es un morfismo para dicha operación y a que $D \in Sp(\mathcal{A})$. Además por ser g $\wedge$-morfismo es creciente y como consecuencia si $x \in g^*D$ y $x \leq y$ entonces $y \in g^*D$. Por otra parte $g1 = 1$, lo cual implica que $1 \in g^*D$. Análogamente demostraríamos que h^*D es un filtro del álgebra temporal.

Como $D \prec D'$ si, y sólo si, $g^*D \subseteq D'$ se tiene que los conjuntos $\{D' \in Ult(\mathcal{A}) : D \prec D'\}$ y $\{D' \in Ult(\mathcal{A}) : g^*D \subseteq D'\}$ coinciden. De esto se sigue inmediatamente la propiedad segunda. La cuarta se demuestra análogamente. ■

El primer resultado que se obtiene es que si partimos de un filtro temporal entonces el conjunto de ultrafiltros que lo contienen es saturado desde el punto de vista de la relación de equivalencia que genera $\prec$.

Teorema 3.4.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $D_t \in Spt(\mathcal{A})$. Entonces $\mu(D_t)$ es un conjunto saturado de $\mathcal{A}$.*

Demostración: Sea $D \in \mu(D_t)$ y $D' \in Ult(\mathcal{A})$. Supongamos que $D \prec D'$, i.e., $g^*(D) \subseteq D'$. Como $D_t \subseteq D$ tenemos que $g^*(D_t) \subseteq g^*(D)$. Por otra parte tenemos que $g_*(D_t) \subseteq D_t$ debido a que D_t es temporal. Por consiguiente se tiene la siguiente cadena de inclusiones $D_t \subseteq g^*g_*(D_t) \subseteq g^*(D_t)$. Se deduce que $D_t \subseteq D'$, lo cual implica que $D' \in \mu(D_t)$. Si suponemos que $D' \prec D$ entonces se obtendría $D' \in \mu(D_t)$ de forma similar razonando en esta ocasión sobre h. La demostración queda completada con un sencillo razonamiento inductivo. ■

En efecto, no sólo ocurre que el conjunto de ultrafiltros que contienen a un filtro temporal es saturado sino que todo subconjunto saturado de $Ult(\mathcal{A})$ según la relación de equivalencia que genera $\prec$ proporciona un filtro temporal al efectuar su gran intersección.

Teorema 3.4.5 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Si S es un conjunto saturado de $Ult(\mathcal{A})$ entonces $\sigma(S) \in Spt(\mathcal{A})$.*

Demostración: Supongamos que S es un conjunto saturado de $\mathcal{A}$. Es claro que $\sigma(S)$ es un elemento de $Sp(\mathcal{A})$; pero además $\sigma(S)$ es también un filtro temporal. En efecto, si $D \in S$ se tiene:

$$\begin{aligned} g^*(D) &= \sigma(\{D' \in Ult(\mathcal{A}) : g^*(D) \subseteq D'\}) \\ &= \sigma(\{D' \in Ult(\mathcal{A}) : D \prec D'\}) \end{aligned}$$

y como $\{D' \in Ult(\mathcal{A}) : D \prec D'\} \subseteq S$ podemos concluir que $\sigma(S) \subseteq g^*(D)$, para todo $D \in S$. Por consiguiente, si $a \in \sigma(S)$ entoces $ga \in D$, para todo $D \in S$, es decir, $ga \in \sigma(S)$. Análogamente se demostraría que $\sigma(S)$ es cerrado para h y por tanto para L, con lo cual $\sigma(S)$ es un filtro temporal, como queríamos demostrar. ∎

Con esto tenemos dos funciones, a saber, aquella que aplica cada filtro temporal D_t en el conjunto saturado $\mu(D_t)$ y la que aplica cada conjunto saturado S de $Ult(\mathcal{A})$ en su gran intersección $\sigma(S)$ que es realmente un filtro temporal. Tenemos por tanto un método de obtener filtros temporales, a saber, efectuar la gran intersección de conjuntos saturados del álgebra en cuestión. Además todos los filtros temporales se obtienen de esta forma. Como hemos hecho observar, σ es inversa a izquierda de μ; sin embargo daremos ejemplos que μ no es sobreyectiva en general.

Es posible encontrar álgebras temporales en las cuales existen conjuntos saturados S para los que no existe $D_t \in Spt(\mathcal{A})$ verificando $\mu(D_t) = S$. En lo que sigue damos un sencillo a la vez que interesante ejemplo de esto.

Definición 3.4.6 *Dado $X \subseteq \mathbb{Z}$, sean $X - 1 = \{n - 1 : n \in X\}$ y $X + 1 = \{n + 1 : n \in X\}$. Consideremos además en $\mathbb{Z}$ la relación binaria $\theta = \{\langle m, m+1\rangle : m \in \omega\}$.*

Es sencillo comprobar que en el álgebra temporal $\langle \mathbb{Z}, \theta\rangle^+$ las aplicaciones g,h,f y p verifican lo siguiente:

(i) $g(X) = f(X) = X - 1$

(ii) $h(X) = p(X) = X + 1$

Representaremos por D_i el conjunto $\{X \subseteq \mathbb{Z} : i \in X\}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Como es bien conocido las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $D \in Ult(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$ y D es principal.

(ii) Existe $i \in \mathbb{Z}$ tal que $D = D_i$.

Teorema 3.4.7 *Existe una componente conexa C de $\langle Ult(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+), \prec \rangle$ distinta de $\mu(D_t)$, para todo $D_t \in Spt(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$. Además $\sigma(C) \notin SptM(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$.*

Demostración: Dado $X \subseteq \mathbb{Z}$ es fácil verificar a partir de la definición que $\neg(X - 1) = \neg X - 1$, y por tanto $\neg g(X) = g(\neg X)$. Por otra parte sea $D \in Ult(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$ y $X \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $X \notin g^*(D)$. Como D es maximal tenemos que $\neg g(X) \in D$. En virtud de la propiedad anterior se sigue que $g(\neg X) \in D$, i.e., $\neg X \in g^*(D)$. Hemos demostrado justamente que si $D \in Ult(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$ entonces $g^*(D) \in Ult(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$.

Por otra parte si $D, D' \in Ult(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$ son tales que $D \prec D'$ y cumplen por tanto $g^*(D) \subseteq D'$, entonces por la maximalidad de D, D' y $g^*(D)$, podemos concluir que $D' = g^*(D)$. Tomemos ahora $i \in \mathbb{Z}$ y $D \in Ult(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$ verificando $D_i \prec D$. Dado que $g^*(D_i) = D_{i+1}$, se tiene entonces $D = D_{i+1}$. Análogamente, si $D \prec D_i$ entonces $D = D_{i-1}$ puesto que $h^*(D_i) = D_{i-1}$. Esto basta para establecer que $D_i \prec D_j$ si, y solamente si, $j = i + 1$ y que $\{D_i : i \in \mathbb{Z}\}$ es una componente conexa de $\langle Ult(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+), \prec \rangle$. Llamemos C a dicha componente conexa.

Consideremos $Cofin(\mathbb{Z}) = \{X \subseteq \mathbb{Z} : \neg X \text{ } es \text{ } finito\}$ (el conjunto de los subconjuntos cofinitos de $\mathbb{Z}$). Es bien sabido que $Cofin(\mathbb{Z})$ es un filtro de $\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+$. Queda comprobar que dicho filtro es temporal. Para ello sea $X \in Cofin(\mathbb{Z})$. Como $g(\neg X) = \neg g(X)$ y g aplica conjuntos finitos en conjuntos finitos se sigue que $g(X) \in Cofin(\mathbb{Z})$. Para h vale un razonamiento similar. Por consiguiente $Cofin(\mathbb{Z})$ es cerrado para L y es un filtro temporal.

Veamos que no existe $D_t \in Spt(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$ tal que $\mu(D_t) = \{D_i : i \in \mathbb{Z}\}$. Si esto ocurriera entonces $D_t = \{\mathbb{Z}\}$ y ello contradice el hecho de que $\{D_i : i \in \mathbb{Z}\}$ sea un subconjunto propio de $Ult(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$. Además, $\sigma(C) = \{\mathbb{Z}\} \subset Cofin(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ y $Cofin(\mathbb{Z}) \in Spt(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$ con lo cual $\sigma(C) \notin SptM(\langle \mathbb{Z}, \theta \rangle^+)$, que es lo que queríamos demostrar. ■

Definición 3.4.8 *Un filtro de $\mathcal{A}$ es temporal maximal si es distinto de A, temporal y maximal en el conjunto de los filtros temporales distintos de A. Se* *designará al conjunto de los filtros temporales maximales de $\mathcal{A}$ por $SptM(\mathcal{A})$. El conjunto $\bigcap SptM(\mathcal{A})$ será notado como $Radt_M(\mathcal{A})$.*

Sin embargo es posible dar más información sobre $\langle Ult(\langle \mathbb{Z}, \theta\rangle^+), \prec\rangle$. De la demostración del último teorema se sigue que $Cofin(\mathbb{Z})$ es un filtro temporal. Sin embargo, dicho filtro no es temporal maximal y es el antepenúltimo elemento del retículo de filtros temporales de $\langle \mathbb{Z}, \theta\rangle^+$.

Lema 3.4.9 *Sea $\langle \mathbb{Z}, \theta\rangle^+$ y $Cofin(\mathbb{Z})$ el filtro (temporal) de Frechet sobre $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Si $D_t \in Spt(\langle \mathbb{Z}, \theta\rangle^+)$ y existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $\{z\}^c \in D_t$ entonces $Cofin(\mathbb{Z}) \subseteq D_t$.*

Demostración: Sea $A \in Cofin(\mathbb{Z})$ y $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}$ tal que $A = \{z_1\}^c \cap \ldots \cap \{z_n\}^c$. Supongamos que $\{z\}^c \in D_t$ y sea i un elemento de $\{1, \ldots, n\}$. Si $z < z_i$ entonces $\{z_i\}^c = \{z\}^c + (z_i - z) = h^{z_i - z}(\{z\}^c)$ y si $z_i < z$ entonces $\{z_i\}^c = g^{z - z_i}(\{z\}^c)$. En ambos casos $\{z_i\}^c \in D_t$ puesto que D_t es temporal y por consiguiente $A \in D_t$. ■

Teorema 3.4.10 *Sea $\langle \mathbb{Z}, \theta\rangle^+$ y $Cofin(\mathbb{Z})$ el filtro (temporal) de Frechet sobre $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Si $D_t \in Spt(\langle \mathbb{Z}, \theta\rangle^+)$ y $D_t \neq \{\mathbb{Z}\}$ entonces $Cofin(\mathbb{Z}) \subseteq D_t$.*

Demostración: Supongamos que $D_t \neq \{\mathbb{Z}\}$. Existe pues $A \in D_t$ y $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z \notin A$. Podemos concluir que $\{z\}^c \in D_t$ y considerando el lema 3.4.9 se tiene $Cofin(\mathbb{Z}) \subseteq D_t$. ■

Teorema 3.4.11 *Sea el álgebra temporal $\langle \mathbb{Z}, \theta\rangle^+$. $Cofin(\mathbb{Z})$ no es un filtro temporal maximal.*

Demostración: Si $Cofin(\mathbb{Z})$ fuera un filtro temporal maximal entonces $\emptyset \in D_t(Cofin(\mathbb{Z}), \mathbb{Z})$, i.e., $\emptyset \in Cofin(\mathbb{Z})$ y ello es una contradicción. ■

Corolario 3.4.12 *El álgebra temporal $\langle \mathbb{Z}, \theta\rangle^+$ es un álgebra temporal subdirectamente irreducible.*

Demostración: Como consecuencia del teorema 3.4.10 tenemos que el retículo de los filtros temporales de $\langle \mathbb{Z}, \theta\rangle^+$ posee penúltimo elemento, a saber, $Cofin(\mathbb{Z})$. Esto es equivalente a que $\langle \mathbb{Z}, \theta\rangle^+$ sea subdirectamente irreducible ([11]). ■

§3.5 Espectro temporal irreducible y completamente irreducible.

Esta sección está dedicada a obtener caracterizaciones de los filtros irreducibles y completamente irreducibles.

Definición 3.5.1 *El filtro $D \in Spt(\mathcal{A})$ es irreducible si es distinto de A y si para todo $D_1, D_2 \in Spt(\mathcal{A})$ tal que $D = D_1 \cap D_2$ se cumple que $D = D_1$ o $D = D_2$. El conjunto de los filtros irreducibles de $\mathcal{A}$ será representado por $SptI(\mathcal{A})$*

El filtro $D \in Spt(\mathcal{A})$ es completamente irreducible si es distinto de A y si para toda familia no vacía de filtros temporales, $\mathfrak{F} = \{D_i : i \in I\}$, tal que $D = \bigcap \mathfrak{F}$ existe $i \in I$ tal que $D = D_i$. El conjunto de los filtros completamente irreducibles de $\mathcal{A}$ será representado por $SptCI(\mathcal{A})$.

Definición 3.5.2 *Un filtro temporal D está ligado a un elemento $a \notin D$ si D es maximal en el conjunto de los filtros temporales que no contienen a a. Para referirnos a un filtro temporal ligado a $a \in A$ escribiremos D_a.*

Los filtros irreducibles y los completamente irreducibles tienen la propiedad de separación, esto es, los filtros temporales se pueden separar de puntos que no le pertenecen por medio de filtros irreducibles y por medio de filtros completamente irreducibles.

Lema 3.5.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, $D \in Spt(\mathcal{A})$ y $a \notin D$. Entonces:*

(i) Existe $D' \in SptI(\mathcal{A})$ tal que $D \subseteq D'$ y $a \notin D'$.

(ii) Existe $D' \in SptCI(\mathcal{A})$ tal que $D \subseteq D'$ y $a \notin D'$.

Demostración: Sea $\mathfrak{H} = \{D' \in Spt(\mathcal{A}) : D \subseteq D' \text{ y } a \notin D'\}$. En el conjunto ordenado $(\mathfrak{H}, \subseteq)$ toda cadena tiene evidentemente una cota superior. Por el lema de Zorn existe en $\mathfrak{H}$ un elemento maximal D'. Está claro que $D \subseteq D'$ y que $a \notin D'$. Sólo queda comprobar que D' es irreducible. Para ello supongamos que existen $D_1, D_2 \in Spt(\mathcal{A})$ tal que $D = D_1 \cap D_2$. Entonces $a \notin D_1$ o $a \notin D_2$. Por la maximalidad de D' en $\mathfrak{H}$ concluimos que $D' = D_1$ o bien $D' = D_2$. El resto de la demostración es totalmente análoga a lo anterior. ∎

Corolario 3.5.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $D \in Spt(\mathcal{A})$. Se cumple que:*

(i) $D = \bigcap\{D' \in SptI(\mathcal{A}) : D \subseteq D'\}$

(ii) $D = \bigcap\{D' \in SptCI(\mathcal{A}) : D \subseteq D'\}$

Lema 3.5.5 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Se cumple que $SpCI(\mathcal{A}) \subseteq SpI(\mathcal{A})$*

Teorema 3.5.6 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $D \in Spt(\mathcal{A})$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *D es irreducible.*

(ii) *Para todo $a, b \in A \setminus D$ existe $c \in A \setminus D$ y $n \in \omega$ tal que $L^n a \leq c$ y $L^n b \leq c$.*

Demostración: Supongamos que el filtro temporal D es irreducible y que existen $a, b \in A \setminus D$ tal que para todo $n \in \omega$, si $L^n a \leq c$ y $L^n b \leq c$ entonces $c \in D$. Esto implica que $D_t(a) \cap D_t(b) \subseteq D$ y por tanto:

$$D_t(D, D_t(a) \cap D_t(b)) = D$$

Dado que se tiene la igualdad:

$$D_t(D, D_t(a) \cap D_t(b)) = D_t(D, D_t(a)) \cap D_t(D, D_t(b))$$

entonces se tiene también la igualdad conjuntista:

$$D = D_t(D, D_t(a)) \cap D_t(D, D_t(b))$$

pero, evidentemente $D_t(D, D_t(a)) \neq D$ y $D_t(D, D_t(b)) \neq D$, y esto contradice el hecho de que D sea irreducible y se tiene por tanto demostrada la segunda afirmación.

Recíprocamente, sea $D \in Spt(\mathcal{A})$ tal que para todo $a, b \in A \setminus D$ existe $n \in \omega$ y $c \in A \setminus D$ tal que $L^n a \leq c$ y $L^n b \leq c$. Si D no fuese irreducible existirían $D_1, D_2 \in Spt(\mathcal{A})$ tales que $D = D_1 \cap D_2$ y $D \neq D_1$ y $D \neq D_2$. Sean, por tanto, $a \in D \setminus D_1$, $b \in D \setminus D_2$, $c \in A \setminus D$ y $n \in \omega$ tales que $L^n a \leq c$ y $L^n b \leq c$. Entonces $c \in D_1 \cap D_2$, lo cual contradice la hipótesis de que $c \notin D$. Como consecuencia el filtro temporal D debe ser irreducible. ■

Teorema 3.5.7 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $D \in Spt(\mathcal{A})$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) D es completamente irreducible.

(ii) Existe $a \in A$ tal que $D = D_a$.

(iii) Existe $x \in A \setminus D$ tal que para todo $y \in A \setminus D$ existe $n \in \omega$ cumpliéndose $L^n y \to x \in D$.

Demostración: Supongamos que D es completamente irreducible y veamos que $D = D_a$, para algún $a \in A \setminus D$. En efecto, si D no fuera ligado a ningún $a \in A$D, entonces existiría en virtud del lema 3.5.3 un filtro D_a tal que $a \notin D_a$ y $D \subset D_a$. Es claro que $D = \bigcap\{D_a : a \in A \setminus D\}$ puesto que si $x \in \bigcap\{D_a : a \in A \setminus D\}$ entonces $x \in D$, ya que de no ser así $x \in D_x$ y ello es imposible por la definición de D_x. Se tendría expresado D de esta forma como intersección de una familia de filtros temporales que lo contienen propiamente contradiciendo el carácter de completamente irreducible que tiene D.

Supongamos que existe $a \in A$ tal que $D = D_a$ y tomemos como x el elemento a. Si $y \notin D$ entonces $x \in D_t(D, y)$ y por tanto existe $n \in \omega$ tal que $L^n y \to x \in D$.

Para ver que la tercera afirmación implica a la primera tomemos un filtro temporal D' tal que $D \subset D'$. Sea ahora $y \in D' \setminus D$. Según nuestra hipótesis debe existir $n \in \omega$ tal que $L^n y \to x \in D$. Como $y \in D'$ y D' es filtro temporal entonces $L^n y, L^n y \to x \in D'$, consecuencia de lo cual es que $x \in D'$. Por tanto, D es maximal entre los filtros temporales que no contienen a x. Supongamos que $D = \bigcap\{D_i : i \in I\}$. Como $x \notin D$ entonces existe $i \in I$ tal que $x \notin D_i$ y como $D \subseteq D_i$ se concluye que $D = D_i$. Por tanto D es irreducible. ■

Teorema 3.5.8 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Se cumple que:*

(i) $RtI(\mathcal{A}) = \{1\}$.

(ii) $RtCI(\mathcal{A}) = \{1\}$.

Demostración: Es inmediata a partir del lema 3.5.3. ■

§3.6 Espectro temporal maximal.

La presente sección está dedicada a obtener algunas caracterizaciones de los filtros temporales maximales.

Teorema 3.6.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $D \in Spt(\mathcal{A})$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $D \in SptM(\mathcal{A})$.

(ii) $D = D_0$

(iii) Para todo $a \in A \setminus D$ *existe* $n \in \omega$ *tal que* $M^n(\neg a) \in D$.

Demostración: Es inmediato a partir de las definiciones que si $D \in SptM(\mathcal{A})$ entonces D está ligado a 0. Si $D = D_0$ entonces, por el teorema 3.5.7 y más concretamente por la demostración de que la afirmación segunda implica a la terceralemma, se tiene que para todo $a \in A \setminus D$ existe $n \in \omega$ tal que $L^n a \to 0 \in D$. Pero $L^n a \to 0 = M^n \neg a$, así que se tiene la tercera afirmación.

Para demostrar que la tercera afirmación implica a la primera supongamos aquella y que existe $D' \in Spt(\mathcal{A})$ tal que $D \subset D'$. Elijamos $a \in D'$ verificando $a \notin D$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $M^n(\neg a) \in D$ y por tanto $\neg L^n(a) \in D'$. Como a es un elemento de D' y este filtro es temporal se obtiene que $L^n(a) \in D'$. Ello implica que $0 \in D'$ y por tanto que $D' = A$. Como conclusión se tiene que $D \in SptM(\mathcal{A})$ como se quería demostrar. ∎

Corolario 3.6.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Se cumple que $SptM(\mathcal{A}) \subseteq SptCI(\mathcal{A})$.*

Corolario 3.6.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $D \in SptM(\mathcal{A})$. Para todo $a \in A$ existe $n \in \omega$ tal que $M^n a \in D$ o bien $M^n \neg a \in D$.*

Es posible caracterizar los filtros temporales maximales en función de la estructura $\langle Ult(\mathcal{A}), \prec \rangle$.

Teorema 3.6.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $D_t \in Spt(\mathcal{A})$ tal que $D_t \neq A$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $D_t \in SptM(\mathcal{A})$.

(ii) Si C es una componente conexa de $\langle Ult(\mathcal{A}), \prec \rangle$ tal que $C \subseteq \mu(D_t)$ entonces se cumple $\bigcap C = D_t$.

Demostración: Supongamos en primer lugar que $D_t \in SptM(\mathcal{A})$. Si suponemos que $C \subseteq \mu(D_t)$ entonces $D_t \subseteq \sigma(C)$. Como C es un conjunto saturado de $Ult(\mathcal{A})$, según 3.4.5, $\bigcap C \in Spt(\mathcal{A})$. Por otra parte, si $D_t \in SptM(\mathcal{A})$ entonces $D_t = \bigcap C$, a menos que $C = \{A\}$ lo cual es imposible dado que $A \notin Ult(\mathcal{A})$. Esto demuestra que la segunda afirmación es cierta.

Recíprocamente, sea $D \in Spt(\mathcal{A})\backslash\{A\}$ tal que $D_t \subseteq D$, y cumpliendose por tanto $\mu(D) \subseteq \mu(D_t)$. Es claro que $\mu(D) \neq \emptyset$ y, del teorema 3.4.4, que $\mu(D)$ es un conjunto saturado. Sea C una componente conexa verificando $C \subseteq \mu(D)$. De esto y de la hipótesis se tiene $\sigma\mu(D) = D \subseteq \sigma(C) = D_t$. Ello implica que $D = D_t$, i.e. D_t es maximal entre entre los filtros temporales, como queriamos demostrar. ∎

Capítulo 4

Álgebras temporales simples y semisimples.

§4.1 Introducción.

En el presente capítulo nos ocupamos de las álgebras temporales simples y semisimples, entendiendo estos conceptos en el sentido usual del Álgebra Universal. Daremos una caracterización de las álgebras temporales simples que es muy similar a la dada por A.J. Rodríguez para álgebras de Wajsberg en [35]. Estudiaremos además la clase de las álgebras temporales a las que hemos llamado "balanceadas". Como ejemplo encontramos dos amplísimas clases de álgebras, entre ellas las de las finitas. Demostraremos también que todas las álgebras temporales balanceadas son semisimples.

§4.2 Álgebras temporales simples.

En todo álgebra temporal simple es posible acotar inferiormente a los elementos por una determinada portencia del operador L, aplicado a otro determinado elemento. En la demostración de este lema y de los resultados sucesivos se aplican las descripciones dadas para los filtros temporales generados por un conjunto.

Lema 4.2.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal simple. Si $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, \{1\}\}$ y $a \in A$ entonces existe $Y_a \in \mathcal{P}_\omega(X)$ y $n_a \in \omega$ tal que $L^{n_a}(\bigwedge Y_a) \leq a$.*

Demostración: Si $X \notin \{\emptyset, \{1\}\}$ entonces $\{1\} \subset D_t(X)$. Como $\mathcal{A}$ es simple tenemos $D_t(X) = A$ y por tanto $a \in D_t(X)$. Teniendo en cuenta la definición de $D_t(X)$ obtenemos inmediatamente el lema. ■

Lema 4.2.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Para todo $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, \{1\}\}$ y $a \in A$ existe $Y_a \in \mathcal{P}_\omega(X)$ y $n_a \in \omega$ tal que $L^{n_a}(\bigwedge Y_a) \leq a$.

(ii) Para todo $x \in A \setminus \{1\}$ existe $n_x \in \omega$ tal que $L^{n_x}x = 0$.

Demostración: Tomemos como hipótesis la primera afirmación y sea $x \in A \setminus \{1\}$. Haciendo $X = \{x\}$ y $a = 0$ debe existir $n_x \in \omega$ tal que $L^{n_x}x \leq 0$. Esto nos da la segunda afirmación.

Recíprocamente, supongamos cierta la segunda afirmación y sea $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset, \{1\}\}$, $a \in A$ y $x \in X \setminus \{1\}$. Por hipótesis debe existir $n_x \in \omega$ verificando que $L^{n_x}(x) = 0$ y por tanto que $L^{n_x}(x) \leq a$. Basta tomar $Y_a = \{x\}$ y $n_a = n_x$ para tener la primera afirmación. ■

De los lemas anteriores se deduce que en las álgebras temporales simples los elementos pueden anularse aplicandoles el operador L un número finito de veces. Esto realmente constituye una caracterización de las álgebras temporales simples.

Corolario 4.2.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal simple. Para todo $a \in A \setminus \{1\}$ existe $n_a \in \omega$ tal que $L^{n_a}(a) = 0$.*

A.J Rodríguez en [35] utiliza una operación monaria a la que llama $*$ y a partir de ella define una potenciación de exponente natural. A partir de dicha operación $*$ le es posible caracterizar las álgebras de Wajsberg simples. En el caso de las álgebras temporales es posible dar una caracterización similar de las simples usando esta vez el operador temporal L que en cierto sentido se comporta de forma similar a la operación $*$.

Teorema 4.2.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{A}$ es simple.

(ii) Para todo $a \in A \setminus \{1\}$ existe $n_a \in \omega$ tal que $L^{n_a}(a) = 0$.

(iii) Para todo álgebra temporal $\mathcal{B}$ y todo morfismo de álgebras temporales $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ se cumple que φ es un morfismo.

Demostración: La primera afirmación implica la segunda como afirma el lema 4.2.1 y el lema 4.2.2.

De la segunda afirmación se obtiene la tercera. En efecto, sea φ un morfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ no inyectivo. En tal caso debe existir $a \in A \setminus \{1\}$ tal que $a \in Ker(\varphi)$. Por hipótesis existe $n \in \omega$ verificando $L^n(a) = 0$ y por tanto:

$$1 = L^n(1) = L^n(\varphi(a)) = \varphi(L^n(a)) = \varphi(0) = 0$$

Esto es un absurdo porque implicaría que $1 = 0$ y ello sólo ocurre en el caso de que el universo del álgebra temporal sea unitario, caso que hemos excluido en este trabajo. Se tiene por tanto la tercera afirmación.

Para demostrar que la tercera afirmación implica la primera basta considerar dicha afirmación y observar que todo filtro temporal de $\mathcal{A}$, distinto de A, es el núcleo de un morfismo de álgebras temporales. ■

Particularizaremos el anterior resultado a un caso concreto al que volveremos a referirnos posteriormente. Se trata del álgebra obtenida a partir del sistema $GH1$ del artículo [5], tras suprimir de su axiomática los esquemas $Gp \to Fp$ y $GGp \to Gp$. La axiomática resultante conserva únicamente los esquemas de transitividad y linealidad por lo que nosotros llamaremos a dichas álgebras "álgebras transitivas-lineales".

Definición 4.2.5 *Un álgebra temporal transitiva-lineal es un álgebra temporal tal que para todo $a, b \in A$:*

L.1) $ga \to gga = 1$

L.2) $g(a \vee b) \wedge g(a \vee gb) \wedge g(ga \wedge b) \to ga \vee gb = 1$

L.3) $h(a \vee b) \wedge h(a \vee hb) \wedge h(ha \wedge b) \to ha \vee hb = 1$

El siguiente teorema no se encuentra enunciado como tal en el trabajo [5] pero su demostración es una recopilación en lenguaje algebraico de ciertos resultados que aparecen en el mismo.

Teorema 4.2.6 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal transitiva-lineal. Entonces, para todo $a \in A$:*

(i) $La = LLa$

(ii) $Ma = MMa$

Demostración: Como $La \leq ga$ y p es monótona entonces $pLa \leq pga$. Por la axiomática del álgebra temporal se tiene que $pLa \leq a$, i.e., $h\neg La \vee a = 1$. Según la definición de L es también claro que $\neg La \vee a = 1$ y $\neg La \vee ha = 1$. Teniendo en cuenta este hecho, *L.4* y la igualdad $h1 = 1$ tenemos que $h\neg La \vee ha = 1$, i.e., $pLa \to ha = 1$. De esto deducimos que $gpLa \to gha = 1$ y por tanto $La \leq gha$. Considerando la definición de L y el axioma *L.1* se concluye que $La \leq ga$ y que $La \leq gga$. Por tanto se tiene que $La \leq g(ha \wedge a \wedge ga)$, i.e., $La \leq gLa$. Por la simetría de las hipótesis la desigualdad $La \leq hLa$ es también verdadera. Deducimos por tanto que $La \leq hLa \wedge La \wedge gLa$, i.e., $La \leq L^2a$. Dado que la desigualdad opuesta es una propiedad general de las álgebras temporales tenemos la igualdad $La = L^2a$. La segunda afirmación es una consecuencia inmediata de la primera. ∎

Teorema 4.2.7 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal transitiva-lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{A}$ es simple.*

(ii) *$La = 0$, para todo $a \in A \setminus \{1\}$.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{A}$ es simple. Entonces, para todo $a \in A \setminus \{1\}$ existe $n_a \in \omega$ tal que $L^{n_a}a = 0$. Pero $L^n = L$, para todo $n \in \omega$. Por tanto $La = 0$. El recíproco es un corolario inmediato de 4.2.4. ∎

§4.3 Álgebras temporales balanceadas y semisimples.

Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$ es posible considerar el cierre simétrico de $\prec$ y definir con dicha relación el concepto usual de cadena en $Ult(\mathcal{A})$. Por otra parte, dado un subconjunto C de $Ult(\mathcal{A})$ y $a \in A$ es posible clasificar los elementos de C según el criterio de "contener a a". Tras la clasificación anterior C, que no consta mas que de ultrafiltros, quedará particionado en dos subconjuntos. Nos centraremos en el estudio de cadenas de ultrafiltros que están contenidas en componentes conexas y que tienen el primer y último elemento en distintas subpartes de la componente, una vez clasificados los ultrafiltros de dicha componente como se dijo antes.

Definición 4.3.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita. El símbolo $\asymp$ representará a la relación binaria $\prec \cup \prec^{-1}$ en $Ult(\mathcal{A})$.*

Definición 4.3.2 *Una cadena en $Ult(\mathcal{A})$ es una n-upla $\langle D_0, D_1, \ldots, D_n\rangle$ verificando que para todo $i \in n$, $D_i \asymp D_{i+1}$ y además si $i \neq j$ entonces $D_i \neq D_j$. La cadena $\langle D_0, D_1, \ldots, D_n\rangle$ está incluida en $C \subseteq Ult(\mathcal{A})$ siempre que se verifique $\{D_i : 0 \leq i \leq n\} \subseteq C$.*

Sean $a \in A$ y C una componente conexa de $Ult(\mathcal{A})$. El conjunto $C(a)^+$ (resp. $C(a)^-$) es el conjunto de elementos de C que contienen al elemento a (resp. $\neg a$)..

Sean $a \in A$ y C una componente conexa de $Ult(\mathcal{A})$. Una cadena a-cruzada de C es una cadena incluida en C, $\langle D_0, D_1, \ldots, D_n\rangle$, verificando que $D_0 \in C(a)^-$ y $D_n \in C(a)^+$.

A continuación damos la definición de álgebra temporal balanceada. En su esencia esta propiedad es una propiedad de regularidad y se refiere a cadenas y consiste en que la pertenencia de un elemento a uno de los miembros de la cadena sea suficiente para inferir que pertenece al miembro consecutivo.

Definición 4.3.3 *Sean $n \in \omega$ y C una componente conexa de $Ult(\mathcal{A})$. Una cadena a-cruzada de C es n-interior si cada una de sus subcadenas incluidas en $C(a)^+$, $\langle D_{i_1}, D_{i_2} \ldots, D_{i_k}\rangle$, con logitud mayor estrictamente que n (es decir $n < k$) cumplen que $M^n \neg a \in D_{i_{n+1}}$.*

Sean $D \in C(a)^+$ y $D' \in C(a)^-$. D y D' son n-interiores a C si existe una cadena a-cruzada de C, $\langle D_0, D_1, \ldots, D_n\rangle$, verificando:

(i) $D_0 = D'$.

(ii) $D_n = D$.

(iii) $\langle D_0, D_1, \ldots, D_n \rangle$ *es n-interior a C.*

La componente conexa C es balanceada si para todo $a \in A$ *tal que* $C(a)^+ \neq \emptyset$ *y* $C(a)^- \neq \emptyset$ *existe* $n_a \in \omega$ *con la propiedad de que para todo* $D \in C(a)^+$ *es posible encontrar* $D' \in C(a)^-$ *tal que D y D′ son* n_a*-interiores.*

Un álgebra temporal $\mathcal{A}$ *es balanceada si todas y cada una de las componentes conexas de* $Ult(\mathcal{A})$ *son balanceadas.*

A continuación destacamos dos criterios para concluir el carácter de balanceada de un álgebra. El primero de ellos se refiere a la finitud de las componentes conexas.

Lema 4.3.4 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra temporal. Toda componente conexa de* $Ult(\mathcal{A})$ *que sea finita es balanceada.*

Como consecuencia inmediata se tiene un resultado sobre las álgebras temporales finitas, de tanto interés desde los puntos de vista teórico y práctico.

Corolario 4.3.5 *Toda álgebra temporal finita es balanceada.*

El segundo criterio se centra en el hecho de la posible idempotencia del operador temporal M, o en definitiva del operador temporal L. En caso de que haya una potencia de M superada la cual el operador no cambia se puede concluir que el álgebra temporal es balanceada. Esta circunstancia se da en la ámplia variedad de las álgebras temporales transitivo-lineales, cuyo estudio en términos lógicos es el centro del segundo capítulo del trabajo [10].

Lema 4.3.6 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra temporal. Si existe* $n \in \omega$ *tal que* $M^n = M^{n+1}$ *entonces* $\mathcal{A}$ *es balanceada.*

Demostración: Sea C una componente conexa de $\langle Ult(\mathcal{A}), \prec \rangle$ y $a \in A$ tal que $C(a)^+ \neq \emptyset$ y $C(a)^- \neq \emptyset$. Dado $D \in C(a)^+$, tomemos D', un elemento arbitrario de $C(a)^-$. Puesto que C es una componente conexa debe existir al menos una cadena $\langle D_0, D_1, \ldots, D_m \rangle$ tal que $D_0 = D'$ y $D_m = D$. Queremos verificar que $M^n \neg a \in D_i$, para todo $0 \leq i \leq m$. La demostración es por inducción sobre i. Para el paso básico de la inducción, puesto que $D_0 = D' \in C(a)^-$, basta recordar que $\neg a = M^0\neg a \in D_0$ y el lema 2.2.7; por consiguiente $M^n\neg a \in D_0$. Supongamos como hipótesis de inducción que la afirmación es cierta para k, i.e., $M^n\neg a \in D_k$ y demostremos que es válida también para $k+1$. Por la definición de $\prec$ se deduce que $fM^n\neg a \vee pM^n\neg a \in D_{k+1}$. Por consiguiente se tiene que $M^{n+1}\neg a \in D_{k+1}$; pero $M^n = M^{n+1}$, por tanto $M^n\neg a \in D_{k+1}$. De esto es fácil deducir que C es balanceada y por consiguiente también $\mathcal{A}$. ■

Corolario 4.3.7 *Toda álgebra temporal transitiva-lineal es balanceada.*

Demostración: Este resultado es consecuencia del teorema 4.2.6 y el lema 4.3.6. ■

En lo que sigue vamos a destacar algunas de las propiedades de las álgebras temporales balanceadas. El siguiente teorema tiene una demostración fácil pero laboriosa. Haremos uso del lema 2.2.7 sin previa indicación. Dicha teorema pone de manifiesto cierta relación de regularidad entre las componentes conexas de $Ult(\mathcal{A})$ que son balanceadas y los filtros temporales maximales de la misma. Como hemos dicho, los subconjuntos saturados de $Ult(\mathcal{A})$ generan por medio de su gran intersección filtros temporales. Cuando se elijen conjuntos saturados "grandes" no se generarán por este método filtros temporales "grandes", sino todo lo contrario. Por tanto es razonable esperar a priori que la forma de obtener filtros temporales maximales es hacer la gran intersección de los conjuntos saturados más pequeños, esto es, de las componentes conexas. Esto es falso en general como ha quedado demostrado con contraejemplos, sin embargo la condición necesaria y suficientes para que ello ocurra es que la componente conexa en cuestión sea balanceada.

Teorema 4.3.8 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, C una componente conexa de $Ult(\mathcal{A})$, y $D_t = \sigma(C)$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) C es balanceada.

(ii) $D_t \in SptM(\mathcal{A})$.

Demostración: Demostremos en primer lugar que si C es balanceada entonces $D_t \in SptM(\mathcal{A})$. Para ello sea a un elemento de $A \setminus D_t$, entonces $C(a)^- \neq \emptyset$.

Pueden darse ahora dos situaciones distintas. Si $C(a)^+$ es vacío se deduce inmediatamente que $M^{n_a}\neg a \in D_t$ puesto que $\neg a \in D_t$. Por contra, si $C(a)^+$ no es vacío sea D uno de sus elementos arbitrariamente elegido. Como C es una componente conexa balanceada debe existir $D' \in C(a)^-$ tal que D y D' son n_a-interiores gracias a cierta cadena $\langle D_0, D_1, \ldots, D_n\rangle$. Afirmamos que $M^{n_a}\neg a \in D_i$, para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$ (n_a es necesariamente mayor que 0). En efecto, si $D_i \in C(a)^-$ entonces la demostración esta acabada puesto que $\neg a = M^0\neg a \in D_i$ y por tanto $M^{n_a}\neg a \in D_i$. Si $D_i \in C(a)^+$, supongamos que $\langle D_{j_1}, \ldots, D_{j_k}\rangle$ es la subcadena de la cadena anterior de más longitud verificando que $\{D_{j_1}, \ldots, D_{j_k}\} \subseteq C(a)^+$ y $j_k = i$. Dado que $\neg a \in D_{j_1-1}$ se deduce que $p\neg a \vee f\neg a \in D_{j_1}$. Esto significa que $M\neg a$ es un elemento de D_{j_1}, y consecuentemente tambien $M^{n_a}\neg a$ es uno de sus elementos. Suponiendo que $M^r\neg a \in D_{j_r}$ entonces se tiene $M^{r+1}\neg a \in D_{j_{r+1}}$, dado que $pM^r\neg a \vee fM^r\neg a \leq M^{r+1}\neg a$ y $pM^r\neg a \vee fM^r\neg a \in D_{j_{r+1}}$. Es posible pues concluir que $M^{j_t}\neg a \in D_{j_t}$. Por consiguiente, si $i \leq n_a$ entonces $M^{n_a}\neg a \in D_i$ y si $i > n_a$, usando el hecho de que C es balanceada $M^{n_a}\neg a \in D_i$. Finalmente llegamos a que $M^{n_a}\neg a \in D$ y por consiguiente $M^{n_a}\neg a \in D_t$. Esto demuestra la maximalidad de D_t.

Recíprocamente, supongamos que D_t es un filtro temporal maximal y demostremos que C es balanceada. Si tomamos $a \in A$ tal que $C(a)^+$ y $C(a)^-$ son ambos no vacíos entonces $a \notin D_t$. Como este filtro es maximal debe existir n tal que $M^n\neg a \in D_t$, i.e., $M^n\neg a \in D$, para todo $D \in C$. De esto se deduce inmediatamente que C es balanceada como se quería. ■

Corolario 4.3.9 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal balanceada y $D_t \in Spt(\mathcal{A})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $D_t \in SptM(\mathcal{A})$.

(ii) Existe una componente conexa C de $Ult(\mathcal{A})$ cumpliendo $\sigma(C) = D_t$.

Demostración: La demostración es una sencilla consecuencia de los teoremas 3.6.4 y 4.3.8. ■

En lo que sigue vamos a dar un teorema de estructura para las álgebras temporales balanceadas. Dicho teorema de estructura que podrá ser particularizado a casos más concretos.

Corolario 4.3.10 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal balanceada entonces*

$$SptM(\mathcal{A}) = \{\bigcap C : C \text{ es una componente conexa de } Ult(\mathcal{A})\}$$

Definición 4.3.11 *Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$, su radical temporal, representado por $Radt(\mathcal{A})$, es el conjunto $\bigcap Spt(\mathcal{A})$.*

Corolario 4.3.12 *Para toda álgebra temporal balanceada $\mathcal{A}$, $Radt(\mathcal{A}) = \{1\}$.*

Definición 4.3.13 *El índice de conexión del álgebra temporal $\mathcal{A}$, representado por $c(\mathcal{A})$, es el el índice de conexión de la estructura $\langle SptM(\mathcal{A}), \prec\rangle$.*

Teorema 4.3.14 *Para toda álgebra temoral balanceada $\mathcal{A}$ existe una familia de filtros temporales $\{D_i : i \in I\}$ verificando:*

(i) $D_i \neq D_j$ *si* $i \neq j$.

(ii) $0 < card(I) \leq c(\mathcal{A})$.

(iii) $\mathcal{A}/D_i$ *es simple, para todo* $i \in I$.

y un morfismo de álgebras temporales $\iota : \mathcal{A} \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{A}/D_i$ tal que $\iota_*(\mathcal{A})$ es un producto subdirecto de la familia $\{\mathcal{A}/D_i : i \in I\}$.

Demostración: Consideremos el conjunto $SptM(\mathcal{A})$ indexado en un conjunto I equipotente a su cardinal disponiendose pues de la familia $\{D_i : i \in I\}$. Claramente esta familia satisface la primera condición del enunciado. Además, para todo $i \in I$, $\mathcal{A}/D_i$ es un álgebra temporal simple puesto que D_i es maximal. Por otra parte, sea i un elemento arbitrario del conjunto I, entonces $\mu(D_i)$ es no vacío y se puede expresar como una unión de componentes conexas de $\langle Ult(\mathcal{A}), \prec\rangle$ como asegura 3.4.4. Además, si $i \neq j$ el teorema 3.6.4 y la primera condición de este implican que $\mu(D_i)$ y $\mu(D_j)$ no tienen ninguna componente conexa en común. Tenemos por tanto que $0 < card(I) \leq c(\mathcal{A})$.

Definimos ι por $\iota(a)(i) = a/D_i$, para todo $a \in A$ y $i \in I$. Como $Radt(\mathcal{A}) = \{1\}$ podemos afirmar que ι es un monomorfismo de álgebras temporales. Más aún, ι es un embebimiento subdirecto y por tanto $\iota_*(\mathcal{A})$ es un producto subdirecto de la familia $\{\mathcal{A}/D_i : i \in I\}$, como queríamos demostrar. ■

Corolario 4.3.15 *Cada álgebra temporal balanceada es semisimple.*

Corolario 4.3.16 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal balanceada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{A}$ es subdirectamente irreducible.*

(ii) *$\mathcal{A}$ es simple.*

Demostración: Esta es una fácil consecuencia de la semisimplicidad de álgebras temporales balanceadas. ∎

Capítulo 5

Álgebras temporales libres y Filtraciones.

§5.1 Introducción

En la presente sección abordamos el estudio del las álgebras temporales libres. Dado un sistema lógico, existen una importante cuestión que estudiar, a saber, su decidibilidad. Como es bien conocido, la decidibilidad de la Lógica Temporal y de la Lógica Modal está íntimamente relacionada con la conocida como "propiedad del modelo finito" (para abreviar p.m.f.). Una lógica temporal concreta tiene la propiedad del modelo finito si, y sólo si, cada no-teorema de la lógica es falso en cierto modelo finito. Por otra parte, si la lógica en cuestión es axiomatizable, entonces existe un test positivo para la validez de teoremas (ver [12]). El método usual de demostrar que una lógica temporal tiene la p.m.f. es el método de las filtraciones, introducido por E.J. Lemmon y K. Segerberg para la Lógica Modal (ver [37]). Por consiguiente, las filtraciones lógicas son una herramienta importante en Lógica Temporal.

Si sustituimos el conjunto de proposiciones temporales por el álgebra absolutamente libre de tipo $\langle 2,2,1,1,1,0\rangle$, las leyes lógicas por ecuaciones y valoraciones temporales por morfismos de álgebras temporales, disponemos entonces de un "lenguaje algebraico" para la Lógica Temporal. En la presente sección damos una construcción en el mencionado lenguaje algebraico que presenta algunas propiedades similares a las de las filtraciones lógicas. La importancia en lógica de las filtraciones nos conduce a estudiar las filtraciones algebraicas, obteniendo de paso alguna información sobre la variedad de las álgebras temporales. En primer lugar se obtiene un teorema de estructura para las álgebras temporales libres y como corolario, un resultado que pone de manifiesto como la variedad de las álgebras temporales está generada por la subclase propia de las álgebras temporales finitas. Este resultado en lenguaje algebraico es realmente equivalente a un teorema de completitud en lógica. Este hecho pone de relieve la importancia teórica de las álgebras temporales finitas en el estudio de las álgebras temporales.

§5.2 La relación $\prec$ y átomos de un álgebra temporal.

Definición 5.2.1 *Si $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ es un álgebra de Boole y $X \subseteq A$, $\mathcal{B}(X)$ representará la subálgebra de Boole de $\mathcal{A}$ generada por X y $B(X)$ representará su universo. Con $Atm(\mathcal{A})$ simbolizaremos al conjunto de átomos de $\mathcal{A}$.*

Lema 5.2.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$ entonces $Ult(\mathcal{B}) = \{D \cap B : D \in Ult(\mathcal{A})\}$. Además, dado $D \in Ult(\mathcal{B})$ existe $D' \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $D' \cap B = D$.*

Dado un conjunto x, es sabido que $\mathbf{F}_t(X)$ es un cociente de $\mathbf{F}(X)$ (consultar el teorema 0.2.36) y por tanto podemos considerar la proyección canónica

$$\pi : \mathbf{F}(X) \twoheadrightarrow \mathbf{F}_t(X)$$

Lema 5.2.3 *Sea X un conjunto no vacío y v una valoración temporal de X en $\mathcal{A}$. Existen dos únicos morfismos v' y v^t que hacen el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "v"'] & F(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "v'"] & F_t(X) \arrow[dl, "v^t"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Demostración: Basta tener en cuenta el carácter libre de $\mathbf{F}(X)$ y $\mathbf{F}_t(X)$. ■

En el caso de las álgebras temporales finitas es sabido que el conjunto de ultrafiltros es equipotente al de átomos. Por tanto es posible considerar en el caso finito que la relación $\prec$ está definida entre átomos. Los siguientes lemas se demuestran fácilmente teniendo en cuenta el carácter no decrecientes de las operaciones temporales g, h, f y p.

Lema 5.2.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita y $a, b \in Atm(\mathcal{A})$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $g^*([a,1]) \subseteq [b,1]$ *(resp.* $h^*([a,1]) \subseteq [b,1]$*).*

(ii) Si $a \leq gx$ *(resp.* $a \leq hx$*), entonces* $b \leq x$.

Lema 5.2.5 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita y sea $a, b \in Atm(\mathcal{A})$. Entonces se cumplen las siguientes equivalencias:*

(i) $p_*([a,1]) \subseteq [b,1]$ *si, y sólo si,* $b \leq pa$.

(ii) $f_*([a,1]) \subseteq [b,1]$ *si, y sólo si,* $b \leq fa$.

Los lemas 5.2.4 y 5.2.5 permiten expresar el resultado 1.5.2 en términos de átomos como sigue:

Teorema 5.2.6 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita. Para todo $a, b \in Atm(\mathcal{A})$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $b \leq pa$

(ii) $a \leq fb$

(iii) si $a \leq gx$ *entonces* $b \leq x$

(iv) si $b \leq hx$ *entonces* $a \leq x$

Demostración: Es una particularización al caso finito del resultado 1.5.2, teniendo en cuenta que en toda álgebra temporal finita no existen más ultrafiltros que los generados por átomos del álgebra en cuestión. ■

El teorema 5.2.6 permite expresar la relación $\prec$ en términos de átomos como sigue:

Definición 5.2.7 *Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal finita. La relación binaria inducida en $Atm(\mathcal{A})$, $\prec$, se define como:*

$$a \prec b \text{ sii } a \leq fb$$

o usando cualquiera de las condiciones equivalentes que proporciona el corolario 5.2.6.

Mantendremos a lo largo del trabajo los mismos convenios notacionales para la relación $\prec$, esté definida en términos de ultrafiltros o en términos de átomos.

Definición 5.2.8 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole finita y R una relación binaria en $Atm(\mathcal{A})$, es posible construir un álgebra temporal finita $\langle Atm(\mathcal{A}), R\rangle^+$ cuya álgebra de Boole subyacente es la propia $\mathcal{A}$ y cuyas operaciones temporales están definidas de la siguiente forma:*

- $g_R(x) = \bigvee\{a \in Atm(\mathcal{A}) : \bigvee R^+(a) \leq x\}$
- $h_R(x) = \bigvee\{a \in Atm(\mathcal{A}) : \bigvee R^-(a) \leq x\}$

donde $R^+(a) = \{b \in Atm(\mathcal{A}) : aRb\}$ y $R^-(a) = \{b \in Atm(\mathcal{A}) : bRa\}$.

Teorema 5.2.9 *Sea $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ un álgebra temporal finita y $\prec$ la relación inducida en $Atm(\mathcal{A})$. El álgebra temporal $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g_\prec, h_\prec, 1\rangle$ coincide con $\mathcal{A}$.*

Demostración: En primer lugar demostraremos que $g_\prec = g$. Para ello sea $x \in A$ y $a \in Atm(\mathcal{A})$ tal que $a \leq gx$. Si $b \in Atm(\mathcal{A})$ y $a \prec b$, como $a \leq gx$ se ha de cumplir $b \leq x$. Así pues, $\bigvee \prec^+ (a) \leq x$ y consecuentemente $a \leq g_\prec(x)$. Por tanto, $gx \leq g_\prec x$. Recíprocamente, supongamos que $a \in Atm(\mathcal{A})$ y que $a \leq g_\prec x$. Por la definición de $g_\prec$ se debe cumplir que $\bigvee \prec^+ (a) \leq x$. Si $b \in Atm(\mathcal{A})$ y $b \leq pa$ entonces $a \prec b$, esto es, $b \in \prec^+ (a)$, con lo cual $b \leq x$. De lo anterior podemos deducir que $pa \leq x$. Aplicando las propiedades de las álgebras temporales a la última desigualdad tenemos que $a \leq gpa \leq gx$. En definitiva tenemos que $g_\prec x \leq gx$ y podemos concluir que $g_\prec = g$.

De lo anterior se deduce que $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h_\prec, 1\rangle$ es un álgebra temporal. Por el teorema 2.3.9, concluimos que $h_\prec = h$ y el teorema está demostrado. ■

Teorema 5.2.10 *Sea $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ un álgebra de Boole finita y R una relación en $Atm(\mathcal{A})$. La relación inducida por el álgebra temporal $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g_R, h_R, 1\rangle$ sobre $Atm(\mathcal{A})$ es R.*

Demostración: Sean $a, b \in Atm(\mathcal{A})$ y $x \in A$. Si aRb y $a \leq g_R x$ entonces $\bigvee R^+(a) \leq x$. Como $b \leq \bigvee R^+(a)$, entonces $b \leq x$. De ello se deduce que $a \prec b$ y por tanto $R \subseteq \prec$. Recíprocamente, supongamos que $a \prec b$ y que $a \leq g_R x$. Por el teorema 5.2.9 se tiene que $g_R = g_\prec$, así pues $a \leq g_\prec x$, con lo cual $b \leq x$. Esto implica que aRb y en definitiva que $\prec \subseteq R$. Concluimos, por tanto, que $\prec = R$, como se quería. ■

§5.3 Filtraciones algebraicas.

En esta sección introducimos una nueva construcción, a saber "*filtraciones algebraicas.* Empleamos este nombre puesto que del objeto que designa en álgebra temporal surgen resultados que recuerdan a los que se demuestran en Logica Modal sirviendose de las filtraciones. Sin embargo, las filtraciones algebraicas de un álgebra temporal $\mathcal{A}$ no son un cociente, sino una álgebra temporal (finita en nuestra concepción) que es consistente con $\mathcal{A}$ en un sentido que especificamos.

Lema 5.3.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole y $\mathcal{B}$ una subálgebra suya. Si $\mathcal{B}$ es finita entonces existe una aplicación sobreyectiva χ entre los elementos de $Ult(\mathcal{A})$ y $Atm(\mathcal{B})$.*

Demostración: Podemos definir la siguiente aplicación:

$$\chi : Ult(\mathcal{A}) \longrightarrow Atm(\mathcal{B})$$

como $\chi(D) = \bigwedge(D \cap B)$.

La aplicación χ está bien definida porque, según el lema 5.2.2, $D \cap B \in Ult(\mathcal{B})$ y por tanto, dada la finitud de $\mathcal{B}$, existe $a \in Atm(\mathcal{B})$ tal que $D \cap B = D(a)$. Es claro que $\bigwedge(D \cap B) = a$.

La aplicación χ es sobreyectiva porque dado $a \in Atm(\mathcal{B})$ podemos considerar $D(a) \in Ult(\mathcal{B})$. Sabemos por el lema 5.2.2 nuevamente que existe $D \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $D \cap B = D(a)$. Por tanto $\chi(D) = a$. ■

Definición 5.3.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, v una valoración sobre $\mathcal{A}$ y $\Gamma \subseteq F(X)$ tal que $v'_*(\Gamma)$ es finito (abreviadamente, Γ es v-finito). El álgebra temporal $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ es una $\langle\Gamma, v\rangle$-filtración de $\mathcal{A}$ si cumple:*

(i) $\mathcal{B}(v'_*(\Gamma)) = \langle B, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$.

(ii) Para todo $D_1, D_2 \in Ult(\mathcal{A})$,

$$\text{si } D_1 \prec D_2 \text{ entonces } \chi(D_1) \prec \chi(D_2)$$

(iii) Para todo $D_1, D_2 \in Ult(\mathcal{A})$,

$$\text{si } \chi(D_1) \prec \chi(D_2),\ g\alpha \in \Gamma \text{ y } v'(g\alpha) \in D_1 \text{ entonces } v'(\alpha) \in D_2$$

(iv) Para todo $D_1, D_2 \in Ult(\mathcal{A})$,

$$si\ \chi(D_1) \prec \chi(D_2),\ h\alpha \in \Gamma\ y\ v'(h\alpha) \in D_2\ entonces\ v'(\alpha) \in D_1$$

El siguiente lema es un útil resultado que puede ser enunciado para álgebras de Boole. Sin embargo, lo establecemos para álgebras temporales para hacerlo de más fácil aplicación. La demostración es inmediata.

Lema 5.3.3 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra temporal,* v *una valoración sobre* $\mathcal{A}$, $\Gamma \subseteq F(X)$ *un conjunto de fórmulas v-finito,* $D, D' \in Ult(\mathcal{A})$ *y* $\chi : Ult(\mathcal{A}) \longrightarrow Atm(\mathcal{B}(v'_*(\Gamma)))$ *definida como en el lema 5.3.1. Son equivalentes:*

(i) $\chi(D) = \chi(D')$.

(ii) Para todo $\alpha \in \Gamma$, $v'(\alpha) \in D$ *sii* $v'(\alpha) \in D'$.

Teorema 5.3.4 (de existencia de filtraciones) *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra temporal,* v *una valoración sobre* $\mathcal{A}$ *y* $\Gamma \subseteq F(X)$ *v-finito (y cerrado para subfórmulas). Existe una* $\langle \Gamma, v\rangle$*-filtración de* $\mathcal{A}$.

Demostración: Consideremos el álgebra de Boole finita $\mathcal{B} = \mathcal{B}(v'_*(\Gamma))$. Definimos en el conjunto $Atm(\mathcal{B})$ la relación binaria:

$a R b$ *sii existen* $D_a, D_b, \in Ult(\mathcal{A})$ *tales que* $a = \chi(D_a)$, $b = \chi(D_b)$ *y* $D_a \prec D_b$

Consideremos el álgebra temporal $\mathcal{B}_t = \langle B, \wedge, \vee, \neg, g_R, h_R, 1\rangle$. Afirmamos que $\mathcal{B}_t$ es una $\langle \Gamma, v\rangle$-filtración de $\mathcal{A}$. En efecto, es evidente que $\langle B, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle = \mathcal{B}(v'_*(\Gamma))$. Sean D_1, $D_2 \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $D_1 \prec D_2$. Como $\chi(D_i) \in D_i$, $i = 1, 2$, es evidente que $\chi(D_1) R \chi(D_2)$. Haciendo uso del teorema 5.2.10 queda demostrada la segunda condición. Por otra parte, supongamos que $g\alpha \in \Gamma$, que $\chi(D_1) \prec \chi(D_2)$ y que $v'(g\alpha) \in D_1$. Por el teorema 5.2.10, $\chi(D_1) R \chi(D_2)$ y por tanto existen $D'_1, D'_2 \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $\chi(D'_1) = \chi(D_1)$, $\chi(D'_2) = \chi(D_2)$ y $D'_1 \prec D'_2$. Usando el lema 5.3.3 tenemos que $v'(g\alpha) \in D_1$ sii $v'(g\alpha) \in D'_1$ sii $gv'(\alpha) \in D'_1$ sii $v'(\alpha) \in D'_2$ sii $v'(\alpha) \in D_2$. El resto de la demostración se reduce a hacer un razonamiento para h análogo al hecho para g. ■

Definición 5.3.5 *Dada una* $\langle \Gamma, v\rangle$*-filtración* $\mathcal{B}$ *del álgebra temporal* $\mathcal{A}$, *definimos la valoración* $\bar{v}$ *sobre* $\mathcal{B}$ *como:*

$$\bar{v}(x) = \bigvee \{\chi(D) :\ D \in Ult(\mathcal{A})\ \text{ y } v(x) \in D\}$$

para todo $x \in X$.

Obsérvese que $\bar{v}$ está bien definida ya que por ser $\mathcal{B}$ finita es completa.

El siguiente resultado demuestra que la extensión $\bar{v}'$ de $\bar{v}$ puede definirse de la misma forma que $\bar{v}$ se define a partir de v.

Teorema 5.3.6 (Fundamental de las filtraciones) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, v una valoración sobre $\mathcal{A}$, Γ un subconjunto v-finito de $\mathbf{F}(X)$ cerrado para subfórmulas y $\mathcal{B}$ una $\langle\Gamma, v\rangle$-filtración de $\mathcal{A}$. Entonces para todo $\alpha \in \Gamma$ se cumple la siguiente igualdad:*

$$\bar{v}'(\alpha) = \bigvee\{\chi(D) : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } v'(\alpha) \in D\}$$

Demostración: La demostración es por inducción. Si $\alpha = x \in X$ la afirmación se concluye inmediatamente teniendo en cuenta la definición de $\bar{v}$. Supongamos que existe β tal que $\alpha = \neg\beta$. Como consecuencia de que $\bar{v}'$ es un morfismo, la hipótesis de inducción y el hecho de que, según el lema 0.3.27, el elemento $\bigvee\{\chi(D) : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } v'(\beta) \notin D\}$ coincide con el elemento $\neg\bigvee\{\chi(D) : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ em } v'(\beta) \in D\}$ se tiene la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned}
\bar{v}'(\alpha) &= \neg\bar{v}'(\beta) \\
&= \neg\bigvee\{\chi(D) : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } v'(\beta) \in D\} \\
&= \bigvee\{\chi(D) : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } v'(\beta) \notin D\} \\
&= \bigvee\{\chi(D) : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } \neg v'(\beta) \in D\} \\
&= \bigvee\{\chi(D) : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } v'(\alpha) \in D\}
\end{aligned}$$

Supongamos que existe γ,δ tales que $\alpha = \gamma \vee \delta$ cumpliendose para ambas las hipótesis de inducción. Se tiene la igualdad $\bar{v}'(\alpha \vee \delta) = \bar{v}'(\alpha) \vee \bar{v}'(\delta)$; pero

$$(\bigvee\{\chi(D) : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } v'(\gamma) \in D\}) \vee (\bigvee\{\chi(D) : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } v'(\delta) \in D\})$$

es en realidad el elemento

$$\bigvee\{\chi(D) : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } v'(\gamma) \vee v'(\delta) \in D\}$$

con lo cual se ha demostrado

$$\bar{v}'(\alpha) = \bigvee\{\chi(D) : D \in Ult(\mathcal{A}) \text{ y } v'(\alpha) \in D\}$$

Supongamos que existe β tal que $\alpha = g\beta$ y que $\bar{v}'(\alpha) = \{\chi(D) : v'(\alpha) \in D\}$. Tomemos $D_0 \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $v'(g\alpha) \in D_0$ y supongamos que $\chi(D_0) \prec \chi(D)$. Por las condiciones que cumple $\mathcal{B}$, $v'(\alpha) \in D$ y como conclusión obtenemos que $\chi(D_0) \leq \bar{v}'(g\alpha) = g\bar{v}'(\alpha)$. Recíprocamente, sea $D_0 \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $\chi(D_0) \leq \bar{v}'(g\alpha)$ y tomemos $D \in Ult(A)$ tal que $D_0 \prec D$. Entonces $\chi(D_0) \prec \chi(D)$ y por tanto $\chi(D) \leq \bar{v}'(\alpha)$, o lo que es equivalente, $v(\alpha)' \in D$. Hemos concluido que para todo $D \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $D_0 \prec D$ se cumple que $v'(\alpha) \in D$. Como, según el lema 3.4.3, $g^*(D_0) = \bigcap\{D \in Ult(\mathcal{A}) : D_0 \prec D\}$ tenemos que $v(\alpha) \in g^*(D_0)$, esto es, $v'(g\alpha) \in D_0$. Se ha demostrado pues que:

$$\bar{v}'(g\alpha) = \bigvee\{\chi(D) : v'(g\alpha) \in D\}$$

y razonando análogamente obtendríamos que se cumple también:

$$\bar{v}'(h\alpha) = \bigvee\{\chi(D) : v'(h\alpha) \in D\}$$

En definitiva hemos demostrado por inducción lo que afirma el enunciado. ∎

§5.4 Estructura del álgebra temporal libre.

En la presente sección obtendremos el anunciado teorema de estructura para las álgebras temporales libres, a la vez que algunos corolarios sobre la variedad. Este teorema de estructura es esencialmente una consecuencia del teorema 5.3.6 aplicado a un caso particular escogido.

Teorema 5.4.1 *Sea π la proyección canónica de $\mathbf{F}(X)$ en $\mathbf{F}_t(X)$ y $\alpha \in F(X)$ tal que $\pi(\alpha) \neq 1$. Existe una valoración temporal w_α sobre un álgebra temporal finita $\mathcal{A}_\alpha$ verificando $w'_\alpha(\alpha) \neq 1$.*

Demostración: Tomemos como $\mathcal{A}$ el álgebra temporal $\mathbf{F}_t(X)$, como v la aplicación $\pi \circ i$ (con lo cual $v' = \pi$) y como Γ el conjunto de subfórmulas de α, que es finito. En este supuesto es claro que Γ es v-finito y cerrado para subfórmulas. Existe pues una $\langle\Gamma, v\rangle$-filtración $\mathcal{A}_\alpha$ de $\mathbf{F}_t(X)$. Como $\pi(\alpha) \neq 1$, existe $D \in Ult(\mathbf{F}_t(X))$ tal que $\pi(\alpha) \notin D$. Si existiera D' tal que $\pi(\alpha) \in D'$ y $\chi(D) = \chi(D')$ entonces, usando el lema 5.3.3, se tendría $\pi(\alpha) \in D$ y esto es absurdo. Por tanto, $\chi(D) z \pi(\alpha)$ y como consecuencia $\bar{v}'(\alpha) \neq 1$. Podemos tomar como w_α la aplicación $\bar{v}$. ∎

Corolario 5.4.2 *Para todo conjunto no vacío X se verifica que el álgebra temporal libre $\mathbf{F}_t(X)$ es producto subdirecto de álgebras temporales finitas.*

Demostración: Consideremos para cada $\alpha \in F(X)$ el morfismo de álgebras temporales w_α^t y el conjunto de congruencias temporales $C = \{ker(w_\alpha^t) : \alpha \in F(X)\}$. Es claro a partir del teorema 5.4.1 que la familia C de congruencias temporales de $\mathbf{F}_t(X)$ cumple que $\bigcap C = \{1\}$. Por tanto, $\mathbf{F}_t(X)$ es producto subdirecto de la familia de álgebras temporales:

$$\{\mathbf{F}_t(X)/ker(w_\alpha^t) : \alpha \in F(X)\}$$

Ahora bien, $\mathbf{F}_t(X)/ker(w_\alpha^t)$ es isomorfa a una subálgebra de $\mathcal{A}_\alpha$. Como consecuencia $\mathbf{F}_t(X)/ker(w_\alpha^t)$ es finita y se tiene lo que queríamos. ■

Corolario 5.4.3 *La variedad $\mathcal{T}$ de las álgebras temporales está engendrada por la clase de las álgebras temporales finitas.*

Corolario 5.4.4 *Una ecuación es válida en la variedad $\mathcal{T}$ sii es válida en cada álgebra temporal finita.*

Capítulo 6

Álgebras Temporales Desarticuladas.

§6.1 Introducción.

En este y algunos capítulos posteriores abordamos el estudio de una familia de álgebras temporales con la peculiaridad de que sus espectros temporales coinciden con los espectros del álgebra de Boole subyacente.

En la presente sección nos vamos a ocupar de las álgebras temporales para las que sus operaciones temporales son constantes. Dado que la operación g de toda álgebra temporal toma el valor 1 en el elemento 1, entonces ser g constante equivale a ser constantemente igual a 1. Análogamente se puede razonar para h, f y p.

Dada la simplicidad aritmética de estas álgebras podríamos pensar que su estudio puede no ser demasiado productivo. Sin embargo esto no es así porque, por ejemplo, el conocimiento de las álgebras temporales desarticuladas permite efectuar un estudio exhaustivo de la atomicidad de las álgebras temporales libres.

§6.2 Álgebras Desarticuladas.

Definición 6.2.1 *Un álgebra temporal desarticulada es un álgebra temporal $\mathcal{A}$ tal que $g0 = 1$.*

A continuación damos dos métodos para la construcción de ejemplos de álgebras temporales desarticuladas. Por el primero de ellos obtendremos el álgebra temporal desarticulada libre y el segundo servirá realmente para caracterizar a las álgebras temporales desarticuladas en términos de la relación entre sus ultrafiltros.

Ejemplo 6.2.2 *Sea* $\langle B, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ *un álgebra Boole y* $k : B \longrightarrow B$ *la aplicación definida por la ecuación* $k(x) = 1$*, para todo* $x \in B$*. El álgebra* $\langle B, \wedge, \vee, \neg, k, k, 1\rangle$ *es un álgebra temporal desarticulada. En el caso particular de que* $B = \{0, 1\}$*, el álgebra* $\langle B, \wedge, \vee, \neg, k, k, 1\rangle$ *será notada como* $\mathcal{E}_0$*.*

Ejemplo 6.2.3 *Sirviéndonos del método estandar de construir álgebras temporales a partir de una estructura, daremos un ejemplo de álgebra temporal desarticulada. Consideremos la estructura* $\langle T, \sigma\rangle$*, donde* $T \neq \emptyset$ *y* $\sigma = \emptyset$*, y el álgebra temporal* $\langle T, \sigma\rangle^+$*. Por la definición de* $g_\sigma(X)$*, se deduce que* $g_\sigma(\emptyset) = T$*. Por consiguiente* $\langle T, \sigma\rangle^+$ *es un álgebra temporal desarticulada.*

Definición 6.2.4 *Representaremos por* $\mathfrak{D}$ *la clase de las álgebras temporales desarticuladas.*

Es claro a partir de la definición que la clase $\mathfrak{D}$ admite una definición ecuacional. Por tanto se tiene el siguiente resultado.

Lema 6.2.5 *La clase* $\mathfrak{D}$ *de álgebras es una variedad.*

Es claro que podemos reemplazar en la anterior definición $g0 = 1$ por $f1 = 0$, obteniendo así una definición equivalente. Además se pueden obtener otras definiciones como indica el siguiente resultado.

Lema 6.2.6 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1) $p1 = 0$	5) h *es constantemente* 1
2) $f1 = 0$	6) f *es constantemente* 0
3) $g0 = 1$	7) g *es constantemente* 1
4) $h0 = 1$	8) p *es constantemente* 0

Demostración: Si suponemos que $p1 = 0$ entonces $1 \wedge p1 = 0$, pero esto es equivalente (lema 1.3.10) a $1 \wedge f1 = 0$ con lo cual $f1 = 0$. Esto demuestra que 1) implica 2).

En la hipótesis $f1 = 0$ tenemos que $g0 = 0$ puesto que $g0 = \neg f1$. Con eso hemos demostrado que 2) implica 3).

Veamos que 3) implica 4). Si se cumple la igualdad $g0 \vee 0 = 1$ entonces $0 \vee h0 = 1$ con lo cual $h0 = 1$.

Que 4) implica 5) es inmediato dado el carácter creciente de h y que 0 es menor o igual que cualquier elemento del álgebra.

Si suponemos que h es constantemente 1, tenemos en cuenta que $fha \leq a$, para todo $a \in A$ y particularizamos la anterior desigualdad al caso $a = 0$ entonces podemos concluir $0 \leq f1 \leq 0$, esto es, $f1 = 0$. Como f es creciente y 0 y 1 son respectivamente mínimo y máximo de A, se tiene que f es constantemente 0.

Si f es constantemente 0 entonces $g0 = 1$ (lema 6.2.6). Como g es creciente se tiene que g es constantemente igual a 1.

Por otra parte, según la definición de álgebra temporal, $pga \leq a$, para todo $a \in A$. Si suponemos que g es constantemente igual a 1, entonces $p1 \leq 0$, esto es, $p1 = 0$ dado que 0 es cota inferior de A. Nuevamente el crecimiento de p nos permite afirmar que p es constantemente cero. El resto de la demostración es inmediato. ■

El lema anterior permite dar siete definiciones alternativas a la dada para álgebras temporales desarticulada. Todas estas definiciones provienen de caracterizaciones aritméticas. Veremos a continuación la anteriormente mencionada caracterización involucrando la relación $\prec$. Esta caracterización justifica el nombre usado de álgebras temporales desarticuladas.

Teorema 6.2.7 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal desarticulada.

(ii) La relación $\prec$ en $Ult(\mathcal{A})$ coincide con $\emptyset$.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal desarticulada y sean $D, D' \in Ult(\mathcal{A})$. Si $D \prec D'$ entonces $p_*(D) \subseteq D'$. Como p1=0 se cumple $0 \in D'$, lo cual es imposible dado que $D \neq A$.

Recíprocamente, supongamos que $\prec = \emptyset$. Del ejemplo 6.2.3 resulta que $\langle Ult(\mathcal{A}), \emptyset\rangle^+$ es un álgebra temporal desarticulada. Por otra parte, es bien sabido que $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $\langle Ult(\mathcal{A}), \emptyset\rangle^+$. Por consiguiente $\mathcal{A}$ es desarticulada. ■

Corolario 6.2.8 *Toda álgebra temporal desarticulada es balanceada.*

Demostración: Basta tener en cuenta que si el álgebra temporal es desarticulada entonces las componentes conexas de $\prec$ en $Ult(\mathcal{A})$ son conjuntos unitarios. ∎

Corolario 6.2.9 *Toda álgebra temporal desarticulada es semisimple.*

Demostración: Este resultado es consecuencia de los corolarios 6.2.8 y 4.3.15. ∎

Daremos ahora varias propiedades sobre los diversos conjuntos de filtros de las álgebras temporales desarticuladas.

Lema 6.2.10 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal desarticulada. Se cumple que $Spt(\mathcal{A}) = Sp(\mathcal{A})$.*

Demostración: Dado que en cualquier álgebra temporal desarticulada el operador L es constantemente igual a 1 y que dicho elemento pertenece a cualquier filtro del álgebra, podemos concluir que todo filtro es un filtro temporal. Esto es suficiente para demostrar el lema. ∎

Definición 6.2.11 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Un filtro temporal D es primo si para todo $a, b \in A$, $a \vee b \in D$ implica $a \in D$ o $b \in D$. El espectro temporal primo, $SptP(\mathcal{A})$, es el conjunto de todos los filtros temporales primos de $\mathcal{A}$. Representaremos por $Radt_P(\mathcal{A})$ a su radical temporal primo que es $\bigcap SptP(\mathcal{A})$.*

Lema 6.2.12 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Se cumple que $SptP(\mathcal{A}) = Spt(\mathcal{A}) \cap Ult(\mathcal{A})$*

Teorema 6.2.13 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal desarticulada. Los conjuntos $SptM(\mathcal{A})$, $SptP(\mathcal{A})$, $SptCI(\mathcal{A})$ y $SptI(\mathcal{A})$ coinciden con $Ult(\mathcal{A})$.*

Demostración: Este resultado es consecuencia inmediata del lema 6.2.10. ∎

Como conclusión del teorema 6.2.13 es fácil calcular algunos radicales en las álgebra temporales desarticuladas. Se tiene el siguiente corolario.

Corolario 6.2.14 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal desarticulada. Entonces se cumple que $Radt_P(\mathcal{A}) = Radt_M(\mathcal{A}) = \{1\}$*

Dado que los filtros temporales maximales de un álgebra temporal desarticulada son en realidad sus ultrafiltros, resulta relativamente fácil identificar el álgebra cociente de una desarticulada por un filtro temporal maximal.

Lema 6.2.15 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal desarticulada y $D \in SptM(\mathcal{A})$. Se cumple que $\mathcal{A}/D = \mathcal{E}_0$.*

Demostración: Como el cociente de un álgebra temporal desarticulada es otro álgebra temporal desarticulada, se tiene que $\mathcal{A}/D$ es desarticulada. Ahora bien, dado que $SptM(\mathcal{A}) = Ult(\mathcal{A})$ entonces $D \in Ult(\mathcal{A})$ y por tanto el universo de $\mathcal{A}/D$ es $\{0, 1\}$. Como $g0 = 1$, de ello se deduce que $\mathcal{A}/D = \mathcal{E}_0$. ∎

El lema 6.2.15 proporciona un teorema de estructura para las álgebras temporales desarticuladas y un generador para las la variedad $\mathfrak{D}$.

Corolario 6.2.16 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal desarticulada. Entonces $\mathcal{A}$ es una potencia subdirecta del álgebra temporal $\mathcal{E}_0$.*

Demostración: Es consecuecia inmediata de que $RtM(\mathcal{A}) = \{1\}$, de que $\mathcal{A}/D = \mathcal{E}_0$ para todo $D \in SptM(\mathcal{A})$ y del teorema 0.2.10. ∎

Corolario 6.2.17 *La variedad $\mathfrak{D}$ está generada por el álgebra $\mathcal{E}_0$.*

Corolario 6.2.18 *La variedad $\mathfrak{D}$ es minimal en el retículo de subvariedades de la variedad $\mathfrak{T}$.*

Demostración: Supongamos que $\mathfrak{X}$ es otra subvariedad de $\mathfrak{T}$ y que $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{D}$. Sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{X}$ y $D \in SptM(\mathcal{A})$. Como consecuencia del lema 6.2.26 se tiene que $\mathcal{A}/D$ coincide con $\mathcal{E}_0$. Al ser $\mathfrak{X}$ una variedad, de ello se deduce que $\mathcal{E}_0 \in \mathfrak{X}$. Por tanto $\mathfrak{X}$ contiene a la variedad que genera $\mathcal{E}_0$, esto es, contiene a $\mathfrak{D}$. Como conclusión obtenemos $\mathfrak{X} = \mathfrak{D}$. ∎

Es posible construir el álgebra libre de la variedad $\mathfrak{D}$ como utilizando utilizando el método de construcción del ejemplo 6.2.2. Sea X un conjunto no vacío, $\mathbf{B}(X) = \langle B(X), \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ el álgebra de Boole libre con conjunto de generadores libres X y $k : B(X) \longrightarrow B(X)$ la aplicación definida por $k(a) = 1$, para todo $a \in B(X)$.

Definición 6.2.19 *Representaremos al álgebra desarticulada libre con conjunto de generadores libres X como $\mathbf{F}_d(X)$*

Teorema 6.2.20 *El álgebra $\mathbf{B}_d(X) = \langle B(X), \wedge, \vee, \neg, k, k, 1\rangle$ es un álgebra temporal desarticulada y es $\mathbf{F}_d(X)$.*

Demostración: Sea $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, g, h, 1\rangle$ un álgebra temporal desarticulada, $\eta : X \longrightarrow A$ una aplicación y $\overline{\eta} : B(X) \longrightarrow A$ el morfismo de álgebras de Boole respecto a las operaciones $\{\wedge, \vee, \neg, 1\}$ que extiende a η. Es claro que $\mathbf{B}_d(X)$ es un álgebra temporal desarticulada y que $\overline{\eta}$ es un morfismo para k. Entoces $\mathbf{B}_d(X)$ tienen la propiedad universal en la variedad de álgebras temporales desarticuladas y como obviamente está generada por X entonces coincide con $\mathbf{F}_d(X)$. ∎

Corolario 6.2.21 *La variedad $\mathfrak{D}$ es localmente finita.*

Demostración: Este teorema se demuestra a partir de los teoremas 0.3.29 y 6.2.20. ∎

Nos proponemos ahora dar un teorema de estructura para álgebras temporales generales utilizando la variedad de las álgebras temporales desarticuladas. Para ello introduciremos una nueva variedad de álgebras a las que llamaremos "álgebras temporales libres de desarticulación".

En toda álgebra temporal podemos considerar un tipo de elementos que, desde el punto de vista temporal, son muy similares al 0. Se trata de los elementos que al serles aplicados tanto f como p el resultado es cero.

Definición 6.2.22 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $a \in A$. El elemento a es desarticulado si verifica $pa = fa = 0$. $I_d(\mathcal{A})$ es el conjunto de los elementos del álgebra $\mathcal{A}$ desarticulados, es decir, $I_d(\mathcal{A}) = \{a \in A : pa = fa = 0\}$.*

Por tanto el primer ejemplo de elemento desarticulado es el elemento 0. Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$ y un elemento $a \in A$, $Ult(\mathcal{A})$ puede ser particionado en dos conjuntos a saber $\mu(a)$ y $\mu(\neg a)$. En el caso de que a sea desarticulado es fácil demostrar el siguiente resultado.

Teorema 6.2.23 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y a un elemento desarticulado de $\mathcal{A}$. Si $D \in \mu(a)$ entonces no existe $D' \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $D \prec D'$ o $D' \prec D$.*

Demostración: Sea a un elemento de A elemental, $D \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $a \in D$ y $D' \in Ult(\mathcal{A})$. Si se tuviera $D \prec D'$ entonces $p_*(D) \subseteq D'$ y por tanto $0 = pa \in D'$ lo cual es imposible puesto que D'. En el caso de que $D' \prec D$ se llegaría a la misma contradicción sirviendonos ahora de f en lugar de p. De esta forma el teorema queda demostrado. ■

Corolario 6.2.24 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y a un elemento desarticulado de A. Entonces la relación $\prec\mid \mu(a)$ es la relación vacía.*

El teorema 6.2.23 justifica por tanto la denominación de elemento desarticulado a todo elemento a tal que $pa = fa = 0$. La justificación en sí es qeu por medio de a es posible distinguir un subconjunto de ultrafiltros aislados según la relación $\prec$.

Demostraremos a continuación que el conjunto de los elementos desarticulados de un álgebra temporal es ideal temporal.

Lema 6.2.25 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $a \in I_d(\mathcal{A})$. El conjunto $[0, a]$ es un ideal temporal.*

Demostración: Que $[0, a]$ es un ideal es evidente. Pero además es temporal porque si $x \leq a$ entonces $px \leq pa = 0$, esto es, $px = 0 \in [0, a]$. De forma análoga $fx = 0 \in [0, a]$. ■

Lema 6.2.26 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. El elemento $h0 \wedge g0$ pertenence al conjunto $I_d(\mathcal{A})$.*

Demostración: Como $g0 \wedge h0 \leq g0$ tenemos que $p(g0 \wedge h0) \leq pg0 \leq 0$. Por otra parte, como $g0 \wedge h0 \leq h0$ tenemos que $f(g0 \wedge h0) \leq fh0 \leq 0$. Ambos hechos implican el resultado deseado. ■

Teorema 6.2.27 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Se cumple que $I_d(\mathcal{A}) = [0, h0 \wedge g0]$*

Demostración: Si $x \leq h0 \wedge g0$ entonces podemos razonar como en el lema 6.2.26 y concluir que $x \in I_d(\mathcal{A})$. Recíprocamente, supongamos que $x \in I_d(\mathcal{A})$. En general se tiene que $x \leq hfx \wedge gpx$. Como $fx = px = 0$ entonces de la anterior desigualdad se concluye que $x \leq h0 \wedge g0$. ■

Corolario 6.2.28 *Para todo álgebra temporal $\mathcal{A}$ se cumple que $I_d(\mathcal{A})$ es un ideal temporal.*

Definición 6.2.29 *Denominaremos $F_l(\mathcal{A})$ al filtro complementario del ideal temporal $I_d(\mathcal{A})$, es decir, $F_l(\mathcal{A}) = \{a \in A : \neg a \in I_d(\mathcal{A})\} = [f1 \vee p1, 1]$.*

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. $F_l(\mathcal{A})$ es un filtro temporal de $\mathcal{A}$.

Demostración: Basta tener en cuenta que $F_l(\mathcal{A}) = \neg I_d(\mathcal{A})$ y la teoría elemental de álgebras de Boole. ■

Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$ siempre podemos considerar el ideal $I_d(\mathcal{A})$. Estudiaremos a continuación las álgebras en las cuales dicho ideal toma valores extremos. Es decir, álgebras en que el único elemento desarticulado es 0 ($I_d(\mathcal{A}) = \{0\}$) y álgebras en las que todos los elementos son desarticulados ($I_d(\mathcal{A}) = A$), que son las álgebras desarticuladas.

Definición 6.2.31 *El álgebra temporal es articulada si $I_d(\mathcal{A}) = \{0\}$.*

El nombre utilizado de "álgebra temporal articulada" queda justificado por el siguiente teorema.

Teorema 6.2.32 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal articulada.

(ii) Para todo $D \in Ult(\mathcal{A})$ existe $D' \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $D \prec D'$ o bien $D' \prec D$.

Demostración: En primer lugar supongamos que $\mathcal{A}$ es articulada, i.e., $g0 \wedge h0 = 0$. Como $\mathcal{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $\langle Ult(\mathcal{A}), \prec \rangle^+$, entonces $g_\prec \emptyset \cap h_\prec \emptyset = \emptyset$. Por otra parte, si $D \in Ult(\mathcal{A})$ y no existe ningún $D' \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $D \prec D'$ o $D' \prec D$, entonces $D \in \emptyset$, lo cual es imposible. El recíproco se demuestra de forma análoga. ■

Definición 6.2.33 *Representaremos por $\mathfrak{A}$ a la de las álgebras temporales libres de desarticulación.*

A partir de lo dicho es inmediato dar una caracterización ecuacional de $\mathfrak{A}$.

Lema 6.2.34 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{A}$ *es articulada.*

(ii) $g0 \wedge h0 = 0$.

Demostración: Es inmediata considerando que $I_d(\mathcal{A}) = [0, g0 \wedge h0]$. ■

Dado que $\mathfrak{A}$ admite una definición ecuacional, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.2.35 *Las clase $\mathfrak{A}$ es una variedad.*

Definición 6.2.36 *En lo que sigue, y con el objeto de simplificar la notación escribiremos F_0 en lugar de $[h0 \wedge g0, 1]$ y F_1 en lugar de $[f1 \vee p1, 1]$.*

Lema 6.2.37 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Entonces:*

$$g_*(A) \cup h_*(A) \subseteq F_0$$

Demostración: Es evidente con sólo observar que si $x \in A$ entonces $g0 \leq gx$, según la monotonía de g y por tanto $h0 \wedge g0 \leq gx$. De forma análoga se demuestra que $h0 \wedge g0 \leq hx$. Esto demuestra lo que se quería. ■

Definición 6.2.38 *Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$ definimos el espectro temporal desarticulado de $\mathcal{A}$, $Spt_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$, y el radical desarticulado, $Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$, por la siguientes igualdades:*

$$Spt_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) = \{D \in Spt(\mathcal{A}) : \mathcal{A}/D \in \mathfrak{D}\} \text{ y } Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) = \bigcap Spt_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$$

Vamos a dar ahora una descripción del filtro $Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$.

Corolario 6.2.39 *Para todo álgebra temporal $\mathcal{A}$, $F_0 \in Spt_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$.*

Demostración: En primer lugar, se desprende del lema 6.2.37 que $F_0 \in Spt(\mathcal{A})$. El corolario queda probado demostrando que el álgebra temporal $\mathcal{A}/F_0$ es desarticulada. Se tiene $p(h0 \wedge g0) \leq pg0 = 0$; pero $1/F_0 = (h0 \wedge g0)/F_0$. Así pues, se cumple:

$$p(1/F_0) = 0/F_0$$

y esto demuestra lo que se quería. ■

Lema 6.2.40 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $D \in Spt(\mathcal{A})$. Si $D \in Spt_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$ entonces $h0 \wedge g0 \in D$*

Demostración: Supongamos que $D \in Spt_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$. Entonces $g(0/D) = h(0/D) = 1/D$, con lo cual $(g0 \wedge h0)/D = g(0/D) \wedge h(0/D) = 1/D$. Concluimos pues que $g0 \wedge h0 \in D$. ■

Teorema 6.2.41 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$ se verifica $Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) = F_0$.*

Demostración: Como consecuencia del corolario 6.2.39 tenemos que $Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) \subseteq F_0$. La otra inclusión es inmediata a partir de las definiciones y el lema 6.2.40. ■

Siguiendo el esquema seguido para $Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$, vamos a definir y describir un nuevo filtro temporal que será el llamado "radical articulado" en contraposición al radical desarticulado.

Definición 6.2.42 *Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$ definimos el espectro temporal articulado, $Spt_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$, y el radical articulado $Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$ por las igualdades:*

$$Spt_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A}) = \{D \in Spt(\mathcal{A}) : \mathcal{A}/D \in \mathfrak{A}\} \text{ y } Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A}) = \bigcap Spt_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$$

Corolario 6.2.43 *Para todo álgebra temporal $\mathcal{A}$, $F_1 \in Spt_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$.*

Demostración: Es fácil comprobar que $F_1 \in Spt(\mathcal{A})$. Además, es evidente que $g0 \wedge h0 \in [0, g0 \wedge h0] = \neg F_1$ y por tanto se tiene

$$(g0 \wedge h0)/F_1 = 0/F_1$$

de lo cual se deduce, según la caracterización de álgebras temporales articuladas, que $\mathcal{A}/F_1$ es articulada. ■

Lema 6.2.44 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $D \in Spt(\mathcal{A})$. Si $D \in Spt_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$ entonces $p1 \vee f1 \in D$*

Demostración: Si $D \in Spt_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$ entonces $\mathcal{A}/D$ es un álgebra temporal articulada, así que $g(0/D) \wedge h(0/D) = 0/D$ de donde $g0 \wedge h0 \in \neg D$, esto es, $f1 \vee p1 \in D$. ■

Teorema 6.2.45 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$ se verifica $Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A}) = F_1$.*

Demostración: Como consecuencia del corolario 6.2.43 tenemos que $Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A}) \subseteq F_1$ Las otras inclusiones son inmediatas a partir de las definiciones y del lema 6.2.44. ■

Corolario 6.2.46 *En cualquier álgebra temporal $\mathcal{A}$ se cumple $F_l(\mathcal{A}) = Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$.*

Demostración: Es consecuencia del corolario 6.2.30 y del teorema 6.2.45. ■

Lema 6.2.47 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal entonces $Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) \in Spt_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$.*

Demostración: Es claro que $Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) \in Spt(\mathcal{A})$. Veamos que $\mathcal{A}/Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) \in \mathfrak{D}$. En efecto, si $D \in Spt_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$ entonces $p(1/D) = 0/D$, esto es, $p1 \in \neg D$. Entonces se cumple:

$$p1 \in \bigcap\{\neg D : D \in Spt_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})\}$$

o lo que es equivalente:

$$p1 \in \neg \bigcap Spt_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) = \neg Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$$

y como consecuencia $p(1/Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})) = 0/Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$ y ello demuestra el enunciado. ■

Lema 6.2.48 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal entonces $Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A}) \in Spt_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$.*

Demostración: En efecto, si $D \in Spt_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$ entonces $g0 \wedge h0 \in \neg D$. Así pues:

$$g0 \wedge h0 \in \neg Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$$

y como consecuencia, siendo $Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A}) \in Spt(\mathcal{A})$, tenemos:

$$g(0/Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})) \wedge h(0/Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})) = 0/Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$$

lo que permite afirmar que $\mathcal{A}/Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$ es un álgebra temporal articulada y concluir lo que afirma el enunciado. ■

Definición 6.2.49 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Representaremos al álgebra temporal $\mathcal{A}/F_0$ por $\mathcal{A}_d$ y al álgebra $\mathcal{A}/F_1$ por $\mathcal{A}_l$.*

Para cualquier álgebra temporal $\mathcal{A}$, las álgebras $\mathcal{A}_d$ y $\mathcal{A}_l$ tienen la propiedad de ser la máxima imagen epimorfica de $\mathcal{A}$ en $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{A}$, respectivamente.

Teorema 6.2.50 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Para todo álgebra temporal desarticulada $\mathcal{B}$ y todo morfismo $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ existe un morfismo $\mu' : \mathcal{A}_d \longrightarrow \mathcal{B}$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[dl, "\mu'"] \\ A_d & \end{tikzcd}$$

Además si μ es inyectiva (resp. sobreyectiva) entonces μ' es inyectiva (resp. sobreyectiva).

Demostración: En efecto, dado que $\mathcal{B}$ es desarticulada entonces también lo será el álgebra $\mathcal{A}/\neg ker(\mu)$ y como consecuencia inmediata se tiene $Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) \subseteq \neg ker(\mu)$. Este hecho permite afirmar que la correspondencia:

$$\mu' : \mathcal{A}_d \longrightarrow \mathcal{B}$$

definida como $\mu'(x/Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})) = \mu(x)$ sea una aplicación. Efectivamente, si tomamos $x, y \in A$ tales que $x + y \in \neg Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$ entonces $x + y \in ker(r)$ y por tanto $\mu(x) = \mu(y)$. Es claro que μ', así definido, cumple la propiedad de conmutación deseada.

Si μ es inyectiva y $\mu'(x/Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})) = 0$ entonces $x \in ker(\mu)$ y por tanto $x = 0$ con lo cual $x/Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) = 0/Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$. Por tanto μ' es inyectiva.

Si μ es sobreyectiva, $y \in B$ y $\mu(x) = y$ entonces $\mu'(x) = y$, lo cual indica que μ' es sobreyectiva. ■

Teorema 6.2.51 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Para todo álgebra temporal articulada $\mathcal{B}$ y todo morfismo $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ existe un morfismo $\mu' : \mathcal{A}_l \longrightarrow \mathcal{B}$*

haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[dl, "\mu'"] \\ A_l & \end{tikzcd}$$

Además si μ es inyectiva (resp. sobreyectiva) entonces μ' es inyectiva (resp. sobreyectiva).

Demostración: Análoga a la del teorema 6.2.50 ■

Toda álgebra temporal es el producto de un álgebra totalmente desarticulada y otra articulada. Estos dos factores son precisamente las álgebra $\mathcal{A}_d$ y $\mathcal{A}_l$.

Teorema 6.2.52 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Entonces $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_d \times \mathcal{A}_l$.*

Demostración: Las congruencias de un álgebra temporal son congruencias de un álgebra de Boole, por tanto conmutan. Para demostrar este teorema basta demostrar que el filtro temporal generado por $Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A})$ y $Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A})$ es $\mathcal{A}$ y que $Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) \cap Rad_{\mathfrak{A}}(\mathcal{A}) = \{1\}$. Pero ambos hechos son evidentes a partir de los teoremas 6.2.41 y 6.2.45. ■

Corolario 6.2.53 *$\mathfrak{A}$ es una subvariedad maximal en el retículo de subvariedades de $\mathfrak{T}$.*

Demostración: Sea $\mathfrak{X}$ una subvariedad de $\mathfrak{T}$ tal que $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{X}$ y sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{X} \setminus \mathfrak{A}$. Como $\mathcal{A} \notin \mathfrak{A}$ entonces $F_0 \neq A$ y por tanto $\mathcal{A}_d$ es de un lado no trivial y de otro desarticulada, como indica el lema 6.2.47. Llamemos $\mathcal{B}$ al álgebra $\mathcal{A}_d$ y sea $D \in SptM(\mathcal{B})$. Por el lema 6.2.26 se tiene que $\mathcal{E}_0 = \mathcal{B}/D$ y, al ser $\mathfrak{X}$ cerrada para cocientes, $\mathcal{E}_0 \in \mathfrak{X}$. Como $\mathcal{E}_0$ genera a $\mathfrak{D}$, entonces debe cumplirse que $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{X}$ y como consecuencia $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{X}$. Por el teorema 6.2.52 se tiene que $\mathfrak{X} = \mathfrak{T}$, como queríamos demostrar. ■

§6.3 Átomos de álgebras temporales libres.

En esta sección nos ocuparemos de estudiar el problema de los átomos en las álgebras temporales libres. Veremos que en efecto dichas álgebras cuando, el conjunto de generadores libres es infinito no tienen átomos, sin embargo, si el conjunto es finito demostraremos que poseen átomos y los daremos explícitamente. Esto último resultado (caso finito) fue demostrado con anterioridad por F. Bellissima en su trabajo [4], no obstante Bellissima emplea propiedades cuya formulación no es totalmente algebraica, por ejemplo la conocida en lógica como "propiedad del modelo finito". Nuestra demostración, además de ser netamente algebraica prescinde de estas propiedades, facilitando así posibles generalizaciones.

Toda álgebra temporal es isomorfa a un cociente de determinada álgebra libre. A continuación vamos daremos el álgebra temporal libre y el filtro temporal convenientes para caracterizar al álgebra $\mathbf{F}_d(X)$.

Teorema 6.3.1 *Sea X un conjunto no vacío. Entonces $\mathbf{F}_d(X)$ es isomorfa a $\mathbf{F}_t(X)/F_0$.*

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ un álgebra cualquiera de la variedad de las desarticuladas y $\eta : X \longrightarrow A$. Por ser $\mathbf{F}_t(X)$ el álgebra temporal libre sobre X y ser $\mathcal{A}$ un álgebra temporal existe un morfismo $\overline{\eta}$ que hace el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\eta"'] & F_t(X) \arrow[dl, "\overline{\eta}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Dado que $\mathcal{A}$ es desarticulada $\overline{\eta}(h0 \wedge g0) = g0 \wedge h0 = 1$ y como consecuencia $F_0 \subseteq ker(\overline{\eta})$. Así pues, existe una aplicación $\overline{\overline{\eta}} : F_t(X)/F_0 \longrightarrow A$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} F_t(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{\eta}"'] & F_t(X)/F_0 \arrow[dl, "\overline{\overline{\eta}}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Concluimos pues que $\mathbf{F}_t(X)/F_0$ tiene la propiedad universal para la variedad de álgebras temporales desarticuladas.

Por otra parte $\pi \circ i$ es inyectiva. En efecto, sea $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Si $(\pi \circ i)(x) = (\pi \circ i)(y)$, es decir, $[x] = [y]$, entonces se debe cumplir que $x \wedge g0 \wedge h0 = y \wedge g0 \wedge h0$. El álgebra temporal $\mathcal{E}_0$ tiene un universo con dos elementos $\{0, 1\}$ y es desarticulada, con lo cual $g0 = h0 = 1$. Consideremos la aplicación $v : X \longrightarrow \{0, 1\}$ definida por $v(x) = 1$ y $v(y) = 0$ y sea $\overline{v} : F_t(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ el morfismo de álgebras temporales que extiende a v. Dado que $\overline{v}$ es morfismo de álgebras temporales, se tendría que:

$$\overline{v}(x) \wedge g\overline{v}(0) \wedge h\overline{v}(0) = \overline{v}(y) \wedge g\overline{v}(0) \wedge h\overline{v}(0)$$

es decir $v(x) = v(y)$, lo cual es imposible. Concluimos pues, la inyectividad de $\pi \circ i$ y como consecuencia podemos identificar a X con $X/F_0 = \{x/F_0 : x \in X\}$. Como X genera a $\mathbf{F}_t(X)$, X/F_0 también genera a $\mathbf{F}_t(X)/F_0$. Con lo demostrado podemos concluir que $\mathbf{F}_t(X)/F_0$ es isomorfa a $\mathbf{F}_d(X)$. ■

Definición 6.3.2 *Sea X un conjunto no vacío. Representaremos por $\mathbf{F}_l(X)$ el álgebra libre de la variedad $\mathfrak{L}$ con conjunto de generadores libres X.*

En analogía con el caso de $\mathbf{F}_d(X)$, también es posible dar explícitamente el filtro temporal adecuado para obtener $\mathbf{F}_l(X)$ como cociente de $\mathbf{F}_t(X)$. Dicho filtro como cabría esperar es F_1.

Teorema 6.3.3 *Sea X un conjunto no vacío. El álgebra $\mathbf{F}_l(X)$ es isomorfa al álgebra $\mathbf{F}_t(X)/F_1$.*

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ un álgebra cualquiera de la variedad $\mathfrak{L}$ y $\eta : X \longrightarrow A$. Por ser $\mathbf{F}_t(X)$ el álgebra temporal libre sobre X y ser $\mathcal{A}$ un álgebra temporal existe un morfismo $\overline{\eta}$ que hace el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\eta"'] & F_t(X) \arrow[dl, "\overline{\eta}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Dado que $\mathcal{A}$ es libre de desarticulada se tiene que $pl \vee fl = 1$ y por tanto $\overline{\eta}(pl \vee fl) = pl \vee fl = 1$ y como consecuencia $F_1 \subseteq ker(\overline{\eta})$. Así pues, existe una aplicación $\overline{\overline{\eta}} : F_t(X)/F_1 \longrightarrow A$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} F_t(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{\eta}"'] & F_t(X)/F_1 \arrow[dl, "\overline{\overline{\eta}}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Concluimos pues que $\mathbf{F}_t(X)/F_1$ tiene la propiedad universal para la variedad de álgebras temporales articuladas.

Por otra parte $\pi \circ i$ es inyectiva. En efecto, sea $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Si $(\pi \circ i)(x) = (\pi \circ i)(y)$, es decir, $[x] = [y]$, entonces se debe cumplir que $x \wedge (pl \vee fl) = y \wedge (pl \vee fl)$. Sea la estructura temporal $\langle \{t\}, \{\langle t, t \rangle\} \rangle$. El álgebra temporal $\langle \{t\}, \emptyset \rangle^+$ tiene un universo con dos elementos $\{0, 1\}$ y es libre de desarticulación, con lo cual $fl \vee pl = 1$. Consideremos la aplicación $v : X \longrightarrow \{0, 1\}$ definida por $v(x) = 1$ y $v(y) = 0$ y sea $\overline{v} : F_t(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ el morfismo de álgebras temporales que extiende a v. Dado que $\overline{v}$ es morfismo de álgebras temporales, se tendría que:

$$\overline{v}(x) \wedge g\overline{v}(1) = \overline{v}(y) \wedge g\overline{v}(1)$$

es decir $v(x) = v(y)$, lo cual es imposible. Concluimos que $\pi \circ i$ es inyectiva y por tanto X es identificable con $X/F_1 = \{x/F_1 : x \in X\}$. Como antes, es inmediato que X/F_1 genera a $\mathbf{F}_t(X)/F_1$. Uniendo resultados se tiene que $\mathbf{F}_t(X)/F_1$ es isomorfa a $\mathbf{F}_l(X)$. ■

El siguiente es un lema técnico que relaciona el orden en el álgebra $\mathbf{F}_t(X)/F_0$ con el del álgebra $\mathbf{F}_t(X)$.

Lema 6.3.4 *Sean $\alpha/F_0, \beta/F_0 \in F_t(X)/F_0$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\alpha/F_0 \leq \beta/F_0$

(ii) $h0 \wedge g0 \wedge \alpha \leq \beta$

(iii) $h0 \wedge g0 \wedge \alpha \leq h0 \wedge g0 \wedge \beta$

Demostración: Si $\alpha/F_0 \leq \beta/F_0$ entonces $\neg\alpha \vee \beta \in F_0$, o equivalentemente, $h0 \wedge g0 \leq \neg\alpha \vee \beta$. Esto es equivalente a su vez a $h0 \wedge g0 \wedge \alpha \leq \beta$. Por otra parte, si $h0 \wedge g0 \wedge \alpha \leq \beta$, entonces se deduce de inmediato que $h0 \wedge g0 \wedge \alpha \leq h0 \wedge g0 \wedge \beta$, dado que $h0 \wedge g0 \wedge \alpha \leq h0 \wedge g0$. Así, pues la segunda afirmación implica la tercera. Suponiendo ahora que $h0 \wedge g0 \wedge \alpha \leq h0 \wedge g0 \wedge \beta$, se tiene que $\neg(h0 \wedge g0 \wedge \alpha) \vee \beta = 1$. Por consiguiente $(\neg(h0 \wedge g0 \wedge \alpha) \vee \beta)/F_0 = 1/F_0$, de donde $\neg\alpha/F_0 \vee \beta/F_0 = 1/F_0$, o equivalentemente $\alpha/F_0 \leq \beta/F_0$. ∎

Lema 6.3.5 *Sea X un conjunto no vacío y $\alpha/F_0, \beta/F_0 \in F_t(X)/F_0$. Entonces $\alpha/F_0 \neq \beta/F_0$ si, y sólo si, $h0 \wedge g0 \wedge \alpha \neq h0 \wedge g0 \wedge \beta$.*

En los siguientes lemas se da la forma de pasar de átomos de $\mathbf{F}_t(X)/F_0$ a átomos de $\mathbf{F}_t(X)$. En sí esta forma consiste en, dado un átomo de $\mathbf{F}_t(X)/F_0$ elegir un representante y intersecarlo con el elemento $h0 \wedge g0$. Este procedimiento no depende del representante elegido por la congruencia elegida para hacer el cociente. Por otro lado, los átomos de $\mathbf{F}_t(X)$ se transforman en átomos de $\mathbf{F}_t(X)/F_0$ con sólo proyectarlos.

Lema 6.3.6 *Sea X un conjunto no vacío y $\alpha/F_0 \in F_t(X)/F_0$. Si α/F_0 es un átomo entonces $g0 \wedge h0 \wedge \alpha$ es un átomo de $F_t(X)$.*

Demostración: Supongamos que α/F_0 es un átomo de $\mathbf{F}_d(X)$. Si $h0 \wedge g0 \wedge \alpha = 0$ entonces se tendría que $0 = \alpha/F_0 \wedge (h0 \wedge g0)/F_0 = \alpha/F_0 \wedge 1 = \alpha/F_0$, lo cual es imposible. Por consiguiente $h0 \wedge g0 \wedge \alpha \neq 0$. Sea $\beta \in F_t(X)$ tal que $\beta \leq h0 \wedge g0 \wedge \alpha$. Tenemos entonces la desigualdad $h0 \wedge g0 \wedge \beta \leq h0 \wedge g0 \wedge \alpha$. Según el lema 6.3.4, lo anterior es equivalente a $\beta/F_0 \leq \alpha/F_0$, así pues $\beta/F_0 = 0$ o bien $\beta/F_0 = \alpha/F_0$. En el caso $\beta/F_0 = 0$ se tendría $h0 \wedge g0 \wedge \beta = 0$ y $\beta \leq h0 \wedge g0 \wedge \alpha \leq h0 \wedge g0$, lo cual implica que $\beta = h0 \wedge g0 \wedge \beta = 0$. En el caso $h0 \wedge g0 \wedge \alpha = h0 \wedge g0 \wedge \beta$ se deduce que $h0 \wedge g0 \wedge \alpha \leq \beta$. Podemos establecer, dado que la otra desigualdad se tiene por hipótesis, que $h0 \wedge g0 \wedge \alpha = \beta$. ∎

Lema 6.3.7 *Sea X un conjunto no vacío y $\alpha \in F_t(X)$. Si $\alpha \in Atm(\mathbf{F}_t(X))$ entonces $\alpha/F_0 \in Atm(\mathbf{F}_t(X)/F_0)$.*

Demostración: Supongamos que $\alpha \in Atm(F_t(X))$ y que $\beta/F_0 \leq \alpha/F_0$. Se deduce del lema 6.3.4 que $h0 \wedge g0 \wedge \beta \leq \alpha$. Esto implica que o bien $h0 \wedge g0 \wedge \beta = 0$ o bien $h0 \wedge g0 \wedge \beta = \alpha$. Lo primero es equivalente a $\beta/F_0 = 0$ y lo segundo a $\beta/F_0 = \alpha/F_0$. ■

Los lemas anteriores nos permiten deducir la ausencia de átomos en las álgebras $\mathbf{F}_t(X)$ en el caso de que X sea infinito.

Teorema 6.3.8 *Si X es un conjunto infinito entonces $\mathbf{F}_t(X)$ no tiene átomos.*

Demostración: Según el teorema 6.2.20,

$$\mathbf{F}_t(X)/F_0 \simeq \mathbf{B}_d(X)$$

Como el número de átomos de $\mathbf{B}_d(X)$ coincide con el de el álgebra de Boole libremente generada por X, entonces podemos afirmar que no posee ninguno. Así pues si $\alpha \in F_t(X)$ fuese un átomo entonces, por el lema 6.3.7, α/F_0 sería un átomo de $\mathbf{F}_t(X)/F_0$, lo cual es imposible como se ha hecho notar. Por tanto se tiene lo que queríamos. ■

Pasamos a estudiar ahora el caso en que el conjunto de generadores libres es finito. Previamente y como consecuencia del teorema 6.2.20 podemos enumerar los átomos del álgebra $\mathbf{F}_d(X)$ cuando X es de cardinal finito y conocido.

Definición 6.3.9 *Sea $n \in \omega^*$, $\sigma \in \{-1,1\}^n$ y $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Definimos el elemento $\xi_\sigma \in B(X)$ por la siguiente igualdad:*

$$\xi_\sigma = \bigwedge\{x_i^{\sigma_i} : 1 \leq i \leq n\}$$

donde $\alpha^r = \begin{cases} \neg\alpha, & si\ r = -1. \\ \alpha, & si\ r = 1. \end{cases}$

El concepto de átomo de un álgebra temporal depende justamente de la relación de orden en el álgebra de Boole subyacente. Por tanto, el conjunto de átomos de $\mathbf{B}_d(X)$ coincide con el conjunto de átomos de $\mathbf{B}(X)$, el cual es 2^n (ver [11]). De esto se deduce inmediatamente los siguientes corolarios.

Corolario 6.3.10 *Sean* $n \in \omega^*$ *y* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. *Entonces*

$$Atm(\mathbf{F}_d(X)) = \{\xi_\sigma : \sigma \in \{-1, 1\}^n\}$$

Corolario 6.3.11 *Sean* $n \in \omega^*$ *y* X *un conjunto tal que* $card(X) = n$. *El álgebra* $\mathbf{F}_d(X)$ *posee* 2^n *átomos.*

Podemos ahora demostrar que $\mathbf{F}_t(X)$ posee átomos cuando X es finito, dando además su número y forma.

Teorema 6.3.12 *Sea* $n \in \omega^*$ *y* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *un conjunto finito de cardinal* n. *El álgebra temporal* $\mathbf{F}_t(X)$ *tiene* 2^n *átomos y*

$$Atm(\mathbf{F}_t(X)) = \{\xi_\sigma \wedge h0 \wedge g0 : \sigma \in \{-1, 1\}^n\}$$

Demostración: Consideremos la siguiente aplicación:

$$\Psi : Atm(\mathbf{F}_t(X)/F_0) \longrightarrow Atm(\mathbf{F}_t(X))$$

definida por $\Psi(\alpha/F_0) = h0 \wedge g0 \wedge \alpha$, para todo $\alpha/F_0 \in Atm(\mathbf{F}_t(X)/F_0)$. Dicha aplicación está bien definida como asegura el lema 6.3.6. Consideremos ahora la aplicación:

$$\Upsilon : Atm(\mathbf{F}_t(X)) \longrightarrow Atm(\mathbf{F}_t(X)/F_0)$$

definida por $\Upsilon(\alpha) = \alpha/F_0$, la cual está también bien definida como indica el lema 6.3.7. Por una parte tenemos

$$\begin{aligned} (\Upsilon \circ \Psi)(\alpha/F_0) &= \Upsilon(h0 \wedge g0 \wedge \alpha) \\ &= (h0 \wedge g0)/F_0 \wedge \alpha/F_0 \\ &= 1/F_0 \wedge \alpha/F_0 \\ &= \alpha/F_0 \end{aligned}$$

y por la otra

$$(\Psi \circ \Upsilon)(\alpha) = \Psi(\alpha/F_0) = h0 \wedge g0 \wedge \alpha$$

Dado que $0 \leq h0 \wedge g0 \wedge \alpha \leq \alpha$ y $\alpha \in Atm(\mathbf{F}_t(X))$, entonces se cumple que $h0 \wedge g0 \wedge \alpha = 0$ o bien $h0 \wedge g0 \wedge \alpha = \alpha$. El primer caso es imposible ya que se tendría $\alpha/F_0 = h0 \wedge g0 \wedge \alpha/F_0 = 0/F_0$ y por tanto α/F_0 no sería un elemento de $Atm(\mathbf{F}_t(X)/F_0)$, contradiciendo el lema 6.3.7. Por consiguiente $h0 \wedge g0 \wedge \alpha = \alpha$, de lo cual se deduce $(\Psi \circ \Upsilon)(\alpha) = \alpha$, para todo $\alpha \in Atm(\mathbf{F}_t(X))$. Se sigue que Ψ es una biyección y que el cardinal de $Atm(\mathbf{F}_t(X))$ coincide con el de $Atm(\mathbf{F}_t(X)/F_0)$. Del teorema 6.3.1, el corolario 6.3.10 y de la definición de Ψ, concluimos que:

$$Atm(\mathbf{F}_t(X)) = \{\xi_\sigma \wedge h0 \wedge g0 : \sigma \in \{-1, 1\}^n\}$$

■

Una vez que hemos localizado los átomos del álgebra $\mathbf{F}_t(X)$, cuando X es finito, surge la pregunta de si $\mathbf{F}_t(X)$ es atómica. Veremos a continuación que esto no ocurre.

Lema 6.3.13 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras temporales. Entonces se cumple la igualdad:*

$$Atm(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \{\langle a, 0\rangle : a \in Atm(\mathcal{A})\} \cup \{\langle 0, b\rangle : b \in Atm(\mathcal{A})\}$$

Teorema 6.3.14 *Sea X un conjunto no vacío. El álgebra $\mathbf{F}_l(X)$ no tiene átomos.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que X es infinito. Aplicando lo que afirma el teorema 6.2.52 y teniendo en cuenta el teorema 6.3.3 se tiene, que

$$\mathbf{F}_t(X) \simeq \mathbf{F}_d(X) \times \mathbf{F}_l(X) = \mathbf{F}_t(X)/F_0 \times \mathbf{F}_t(X)/F_1$$

Dado que $\mathbf{F}_t(X)$ no tiene átomos tampoco puede tenerlos $\mathbf{F}_t(X)/F_1$, como asegura el lema 6.3.13. Pero, según el teorema 6.3.3, $\mathbf{F}_l(X) \simeq \mathbf{F}_t(X)/F_1$ de donde $F_l(X)$ no tiene átomos.

Supongamos ahora que X es finito. Utilizando de nuevo el teorema 6.2.52 y el lema 6.3.13 tenemos

$$Card(\mathbf{F}_t(X)) = Card(\mathbf{F}_d(X)) + Card(\mathbf{F}_l(X)$$

Como, según el teorema 6.3.12, se verifica que

$$Card(\mathbf{F}_t(X)) = Card(\mathbf{F}_d(X))$$

entonces deducimos inmediatamente que $\mathbf{F}_l(X)$ no tiene átomos. ■

A pesar de que en el caso de que X sea finito $\mathbf{F}_t(X)$ tiene átomos, dicha álgebra no es atómica como se demuestra a continuación.

Corolario 6.3.15 *Sea X un conjunto finito. El álgebra $\mathbf{F}_t(X)$ no es atómica.*

Demostración: Consideremos el álgebra temporal $\mathbf{F}_d(X) \times \mathbf{F}_l(X)$ y sea $a \in F_l(X) \setminus \{0\}$. Si $\mathbf{F}_d(X) \times \mathbf{F}_l(X)$ fuera atómica, existiría un átomo $\langle x, y \rangle$ tal que $\langle x, y \rangle \leq \langle 0, a \rangle$. Así pues se tendría que $x = 0$ e $y \in Atm(\mathbf{F}_l(X))$, lo cual es imposible porque $\mathbf{F}_l(X)$ no tiene átomos. Así pues $\mathbf{F}_d(X) \times \mathbf{F}_l(X)$ no es atómica y tampoco $\mathbf{F}_t(X)$ puesto que ambas álgebras son isomorfas. ∎

Capítulo 7

Álgebras Temporales Reflexivas.

§7.1 Introducción.

Una vez estudiadas las álgebras temporales con operaciones temporales primitivas constantes vamos a considerar en el presente capítulo la clase de las álgebras temporales cuyas operaciónes temporales son la identidad, álgebras temporales que hemos calificado como "reflexivas". Demostraremos que esta clase es una variedad y daremos un teorema de estructura para álgebras temporales que involucra a las álgebras reflexivas.

§7.2 Álgebras Reflexivas.

Definición 7.2.1 *Un álgebra temporal $\mathcal{A}$ es reflexiva si $g = 1_A$. Denominaremos $\mathfrak{R}$ a la clase de las álgebras temporales reflexivas.*

Ejemplo 7.2.2 *Como ejemplos destacados de álgebras temporales reflexivas tenemos los siguientes:*

(i) *Si $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ es un álgebra de Boole entonces $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1_A, 1_A, 1\rangle$ es un álgebra temporal reflexiva. En el caso particular de que $A = \{0, 1\}$ denominaremos $\mathcal{E}_1$ al álgebra $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1_A, 1_A, 1\rangle$.*

(ii) *Supongamos que T es un conjunto no vacío y consideremos la relación binaria en T, $\Delta(T) = \{\langle t,t\rangle : t \in T\}$. Se tiene según las definiciones que si $X \subseteq T$:*

$$g_{\Delta(T)}X = \{t : si\ t\Delta(T)t' \text{ entonces } t' \in X\} = X$$

Por tanto $\langle T, \Delta(T)\rangle^+$ *es un álgebra temporal reflexiva.*

Este segundo ejemplo es un caso particular del primero. En efecto, basta tomar $\mathcal{A}$ atómica y completa. Lo incluimos ilustrando una forma de obtener un álgebra temporal reflexiva a partir de una estructura temporal.

Lema 7.2.3 *La clase* $\mathfrak{R}$ *de álgebras es una variedad.*

Es posible caracterizar a las álgebras reflexivas de varias formas. En el siguiente lema damos algunas caracterizaciones ecuacionales. Se usa fundamentalmente el corolario 2.3.12 y ello simplifica bastante la demostración.

Lema 7.2.4 *Si* $\mathcal{A}$ *es un álgebra temporal, son equivalentes las afirmaciones:*

(i) $h = 1_A$.

(ii) $p = 1_A$.

(iii) $f = 1_A$.

(iv) $g = 1_A$.

Demostración: Supongamos que $g = 1_A$. Sabemos por el corolario 2.3.12 que para todo $a \in A$, $ha = \neg min\{x : a \vee gx = 1\}$; pero si $g = 1_A$ entonces $\{x : a \vee gx = 1\}$ coincide con el conjunto $\{x : a \vee x = 1\}$. Así pues $\neg min\{x : a \vee gx = 1\} = a$ y por tanto $h = 1_A$. Esta misma demostración es válida para la implicación recíproca.

Es inmediato demostrar que las igualdades $g = 1_A$ y $h = 1_A$ son equivalentes a las igualdades $f = 1_A$ y $p = 1_A$, respectivamente. ∎

Daremos ahora algunas propiedades de la relación $\prec$ cuando esta proviene de un álgebra temporal reflexiva. Comenzamos por una caracterización de las álgebras reflexivas en términos de $\prec$ que pone de manifiesto que sólo existe una forma de obtener un álgebra temporal reflexiva a partir de una estructura temporal, a saber, la del ejemplo anteriormente dado.

Teorema 7.2.5 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{A}$ *es reflexiva.*

(ii) La relación $\prec$ en $Ult(\mathcal{A})$ es $\Delta(Ult(\mathcal{A}))$.

Demostración: Supongamos que $\mathcal{A}$ es reflexiva y sea $D \in Ult(\mathcal{A})$. Es claro que $D \prec D$ puesto que $D = g^*(D) \subseteq D$, sin embargo no existe $D' \neq D$ tal que $D \prec D'$ dada la maximalidad de D y D'. Razonando análogamente con h para el caso $D' \prec D$ tenemos la segunda afirmación.

Recíprocamente, supongamos que $\prec = \Delta(Ult(\mathcal{A}))$. Entonces el álgebra $\langle Ult(\mathcal{A}), \Delta(Ult(\mathcal{A}))\rangle^+$ es reflexiva como se dijo en los ejemplos anteriores. Dado que $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $\langle Ult(\mathcal{A}), \Delta(Ult(\mathcal{A}))\rangle^+$ concluimos que $g = 1_A$ y por tanto $\mathcal{A}$ es reflexiva. ■

Daremos ahora otros resultados sobre álgebras temporales reflexivas en involucrando a sus filtros.

Lema 7.2.6 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal reflexiva entonces $Sp(\mathcal{A}) = Spt(\mathcal{A})$.*

Demostración: Basta demostrar que $Sp(\mathcal{A}) \subseteq Spt(\mathcal{A})$ puesto que lo otra inclusión se tiene por hipótesis. Pero esto es inmediato puesto que si $\mathcal{A}$ es reflexiva entonces $L = 1_A$ y todo conjunto es cerrado para la identidad, en particular cualquier filtro. ■

Teorema 7.2.7 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal reflexiva. Entonces coinciden los conjuntos $SptM(\mathcal{A})$, $SptP(\mathcal{A})$, $SptCI(\mathcal{A})$ y $SptI(\mathcal{A})$ con $Ult(\mathcal{A})$.*

Demostración: La demostración es inmediata a partir del lema 7.2.6 y las definiciones. ■

Como consecuencia se tiene el siguiente resultado sobre radicales temporales.

Corolario 7.2.8 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal reflexiva. Entonces se cumple*

$$Radt_P(\mathcal{A}) = Radt_M(\mathcal{A}) = \{1\}$$

Corolario 7.2.9 *Toda álgebra temporal reflexiva es semisimple.*

Teorema 7.2.10 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal reflexiva y $D \in SptM(\mathcal{A})$. Entonces $\mathcal{A}/D = \mathcal{E}_1$.*

Demostración: Sean $\mathcal{A}$ y D como en el enunciado. Dado que $\mathfrak{R}$ es una variedad, el cociente $\mathcal{A}/D$ es un álgebra temporal de $\mathfrak{R}$. Pero según el lema 7.2.6 $D \in Ult(\mathcal{A})$ con lo cual el universo de $\mathcal{A}/D$ tiene dos elementos. Por tanto $\mathcal{A}/D$ coincide con $\mathcal{E}_1$. ■

Corolario 7.2.11 *Toda álgebra temporal reflexiva es una potencia subdirecta del álgebra $\mathcal{E}_1$.*

Demostración: Esto es consecuencia inmediata de que $Radt_M(\mathcal{A}) = \{1\}$ y de que $\mathcal{A}/D = \mathcal{E}_1$, para todo $D \in SptM(\mathcal{A})$. ■

Al igual que concluiamos que la variedad de las álgebras temporales desarticuladas está generada por el álgebra temporal $\mathcal{E}_0$, también podemos demostrar que la de las reflexivas está generada por $\mathcal{E}_1$. De ello obtendremos también que la mencionada variedad es minimal en el retículo de las subvariedades de $\mathfrak{T}$.

Corolario 7.2.12 *La variedad $\mathfrak{R}$ está generada por el álgebra $\mathcal{E}_1$.*

Corolario 7.2.13 *La variedad $\mathfrak{R}$ es minimal en el retículo de subvariedades de $\mathfrak{T}$.*

Demostración: Supongamos que $\mathfrak{X}$ es otra subvariedad de $\mathfrak{T}$ y que $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{R}$. Sea $\mathcal{A} \in \mathfrak{X}$ y $D \in SptM(\mathcal{A})$. Como consecuencia del lema 7.2.11 se tiene que $\mathcal{A}/D$ coincide con $\mathcal{E}_1$. Al ser $\mathfrak{X}$ una variedad, de ello se deduce que $\mathcal{E}_1 \in \mathfrak{X}$. Por tanto $\mathfrak{X}$ contiene a la variedad que genera $\mathcal{E}_1$, esto es, contiene a $\mathcal{R}$. Como conclusión obtenemos $\mathfrak{X} = \mathcal{R}$. ■

Introducieremos a continuación el concepto de elemento reflexivo en una álgebra temporal y daremos a posteriori la justificación de tal elección de nombre.

Definición 7.2.14 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $a \in A$. El elemento a es reflexivo si $fx = px = x$, para todo $x \leq a$.*

Teorema 7.2.15 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal, $a \in A$ y $D, D' \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $a \in D$. Si el elemento a es reflexivo entonces son equivalentes*

(i) $D \prec D'$ *o* $D' \prec D$.

(ii) $D = D'$.

Demostración: Sea $a \in A$ reflexivo y $D \in Ult(\mathcal{A})$ tal que $a \in D$. Supongamos que $D' \in Ult(\mathcal{A})$ y que $D \prec D'$, lo cual equivale a que $p_*D \subseteq D'$ y por tanto $a \in D'$. Si $x \in D$ entonces, por una parte $x \wedge a \in D$ y por otra, al darse que $x \wedge a \leq a$, se tiene $x \wedge a = p(x \wedge a)$. Como $D \prec D'$, necesariamente se tendrá que $x \wedge a \in D'$ y como también $a \in D'$ entonces podemos deducir que $x \in D'$. Así pues hemos demostrado que $D \subseteq D'$ y como ambos son ultrafiltros entonces $D = D'$. En el caso de que se parta de la hipótesis de que $D' \prec D$, llegaríamos a que $D = D'$ razonando de forma análoga a partir de f.

Recíprocamente, tomemos $x \in D$. Como $p(x \wedge a) = x \wedge a$, p es creciente y $x \wedge a \leq x$, tenemos que $x \wedge a \leq px$. De ello se deduce inmediatamente que $px \in D$. Con lo anterior acabamos de demostrar que $p_*D \subseteq D$, o sea, que $D \prec D$. Esto completa la demostración del teorema. ■

Corolario 7.2.16 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $a \in A$ un elemento reflexivo. Entonces se cumple que $\prec\mid \mu(a) = \Delta(\mu(a))$.*

El último corolario da realmente la justificación para denominar "reflexivos" a los elementos a de un álgebra temporal $\mathcal{A}$ que cumplen que $fx = px = x$, para todo $x \leq a$. En efecto, si la relación $\prec$ se restringe al conjunto de ultrafiltros que contienen a a, entonces se obtiene la diagonal del producto cartesiano de dicho conjunto por el mismo (cf. el teorema 7.2.5).

Definición 7.2.17 *Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$ definimos el subconjunto $I_r(\mathcal{A})$ de A mediante la igualdad $I_r(\mathcal{A}) = \{a \in A : a \ es\ reflexivo\}$.*

Teorema 7.2.18 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$, $I_r(\mathcal{A})$ es un ideal temporal de $\mathcal{A}$.*

Demostración: Es evidente que $0 \in I_r(\mathcal{A})$ y que si $a \in I_r(\mathcal{A})$ y $b \leq a$ entonces $b \in I_r(\mathcal{A})$. Por otra parte tomemos $a, b \in I_r(\mathcal{A})$ y supongamos que $x \leq a \vee b$. En este caso se cumple $x = x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$ y en consecuencia $fx = f(x \wedge a) \vee f(x \wedge b)$; pero $f(x \wedge a) = x \wedge a$ y también $f(x \wedge b) = x \wedge b$ con lo cual $fx = x$. Esto permite afirmar que $a \vee b \in I_r(\mathcal{A})$. Hasta aquí se tiene que $I_r(\mathcal{A})$ es un ideal de $\mathcal{A}$.

La temporalidad es inmediata al coincidir tanto fx como px con x cuando $x \in I_r(\mathcal{A})$. En efecto, si $x \in I_r(\mathcal{A})$ entonces $Mx = x \in I_r(\mathcal{A})$. ■

Es obvio a partir de la definición anterior que otra forma de definir a las álgebras temporales reflexivas es imponer a un álgebra temporal la condición de que el elemento 1 sea reflexivo.

Lema 7.2.19 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. $\mathcal{A}$ es reflexiva si, y sólo si, $1 \in I_r(\mathcal{A})$.*

Definición 7.2.20 *Un álgebra temporal $\mathcal{A}$ es libre de reflexión si el único elemento reflexivo de $\mathcal{A}$ es el elemento 0, esto es , si $I_r(\mathcal{A}) = \{0\}$. Representaremos a esta clase de álgebras por la letra $\mathfrak{N}$ y las denominaremos álgebras temporales libres de reflexión.*

Definición 7.2.21 *Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$ definimos el espectro temporal libre de reflexión, $Spt_{\mathfrak{N}}(\mathcal{A})$, mediante $Spt_{\mathfrak{N}}(\mathcal{A}) = \{D \in Spt(\mathcal{A}) : \mathcal{A}/D \in \mathfrak{N}\}$. A partir de este espectro definimos el radical temporal libre de reflexión como $Rad_{\mathfrak{N}}(\mathcal{A}) = \bigcap Spt_{\mathfrak{N}}(\mathcal{A})$.*

Veremos ahora que $Spt_{\mathfrak{N}}(\mathcal{A})$ es no vacío, cualquiera que sea el álgebra temporal $\mathcal{A}$, y determinaremos el conjunto $Rad_{\mathfrak{N}}(\mathcal{A})$.

Definición 7.2.22 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Definimos el conjunto $F_{nr}(\mathcal{A})$ mediante la igualdad $F_{nr}(\mathcal{A}) = \{a \in A : \neg a \in I_r(\mathcal{A})\}$*

Lema 7.2.23 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$, $F_{nr}(\mathcal{A})$ es un filtro temporal de $\mathcal{A}$.*

Demostración: Es evidente a partir del hecho de que $I_r(\mathcal{A})$ es un ideal temporal de $\mathcal{A}$ y de la definición de $F_{nr}(\mathcal{A})$. ■

Lema 7.2.24 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $x \in A$. Si se cumplen las desigualdades:*

(i) $p(fx \wedge \neg x) \leq fx \wedge \neg x$

(ii) $f(px \wedge \neg x) \leq px \wedge \neg x$

entonces se cumplen las desigualdades

$$fx \vee px \leq x \leq gx \wedge hx$$

Demostración: Con las hipótesis de que disponemos y las propiedades de las álgebras temporales se tiene:

$$hfx \wedge \neg hx \leq p(fx \wedge \neg x) \leq fx \wedge \neg x$$

y por tanto

$$x \wedge \neg hx \leq hfx \wedge \neg hx \leq fx \wedge \neg x$$

de donde

$$x \wedge \neg hx = 0$$

o equivalentemente, $x \leq hx$. Dado $fx \leq fhx \leq x$ tenemos como conclusión que $fx \leq x$. Considerando además que $f(px \wedge \neg x) \leq px \wedge \neg x$ y razonando como antes obtendremos que $x \leq gx$ y, por tanto, que $px \leq x$. Se cumplen como consecuencia las siguientes desigualdades:

$$fx \vee px \leq x \leq gx \wedge hx$$

■

Teorema 7.2.25 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$, el álgebra $\mathcal{A}/F_{nr}(\mathcal{A})$ es un álgebra temporal libre de reflexión.*

Demostración: $\mathcal{A}/F_{nr}(\mathcal{A})$ es un álgebra temporal porque $F_{nr}(\mathcal{A})$ es un filtro temporal de $\mathcal{A}$. Veamos que dicha álgebra es libre de reflexión. Sea $a/F_{nr}(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}/F_{nr}(\mathcal{A})$ y supongamos que la condición $x/F_{nr}(\mathcal{A}) \leq a/F_{nr}(\mathcal{A})$ implica $fx/F_{nr}(\mathcal{A}) = px/F_{nr}(\mathcal{A}) = x/F_{nr}(\mathcal{A})$. Sea $x \in A$ tal que $x \leq a$. Entonces se cumplirá que $x/F_{nr}(\mathcal{A}) \leq a/F_{nr}(\mathcal{A})$ y como consecuencia, según nuestras hipótesis, se tendrá:

$$fx \vee \neg x, px \vee \neg x, x \vee \neg fx, x \vee \neg px \in F_{nr}(\mathcal{A})$$

luego

$$fx \wedge \neg x, px \wedge \neg x, x \wedge \neg fx, x \wedge \neg px \in I_r(\mathcal{A})$$

Así pues, se tiene:

$$p(fx \wedge \neg x) = fx \wedge \neg x \ \text{ y } \ f(px \wedge \neg x) = px \wedge \neg x$$

Según el lema 7.2.24 podemos establecer

$$fx \leq x \leq gx \ \text{ y } \ px \leq x \leq hx$$

Establezcamos ahora la igualdad entre px, fx y x. En primer lugar observemos que $x \wedge \neg fx \leq x$. Aplicando f, que es monótona, y teniendo en cuenta que $x \wedge \neg fx \in I_r(\mathcal{A})$ podemos escribir:

$$x \wedge \neg fx = f(x \wedge \neg fx) \leq fx$$

consecuentemente $x \wedge \neg fx = 0$, o lo que es equivalente, $x \leq fx$. De forma totalmente análoga se obtendría $x \leq px$. De ello y lo anterior concluiríamos que $a \in I_r(\mathcal{A})$. Por tanto $a/F_{nr}(\mathcal{A}) = 0/F_{nr}(\mathcal{A})$. Esto demuestra, como se quería, que $\mathcal{A}/F_{nr}(\mathcal{A})$ es libre de reflexión. ■

Como consecuencia del anterior resultado podemos identificar el radical, $Rad_{\mathfrak{N}}(\mathcal{A})$. Veremos que dicho conjunto coincide con $F_{nr}(\mathcal{A})$.

Teorema 7.2.26 *Para todo álgebra temporal $\mathcal{A}$ se cumple la igualdad:*

$$F_{nr}(\mathcal{A}) = Rad_{\mathfrak{N}}(\mathcal{A})$$

Demostración: La inclusión de derecha a izquierda es cierta trivialmente como consecuencia del teorema 7.2.25. Para la otra inclusión, sea $D \in Spt(\mathcal{A})$ y supongamos que $I_r(\mathcal{A}/D) = \{0/D\}$. Si $x \in F_{nr}(\mathcal{A})$ entonces se cumple $f\neg x = p\neg x = \neg x$ con lo cual,

$$f(\neg x/D) = p(\neg x/D) = \neg x/D$$

y por tanto $\neg x/D = 0/D$, esto es, $x \in D$. Como consecuencia inmediata obtenemos la inclusión de izquierda a derecha. ■

Definición 7.2.27 *Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$, representaremos el álgebra cociente $\mathcal{A}/F_{nr}(\mathcal{A})$ por $\mathcal{A}_{nr}$.*

El teorema 7.2.26 nos permite enunciar un teorema en el que se pone de manifiesto que $\mathcal{A}_{nr}$ es la máxima imagen epimórfica de $\mathcal{A}$ en $\mathfrak{N}$. Su demostración es similar al teorema análogo para álgebras desarticuladas.

Teorema 7.2.28 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Para todo álgebra temporal libre de reflexión $\mathcal{B}$ y todo morfismo $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ existe un morfismo $\mu' : \mathcal{A}_{nr} \longrightarrow$*

$\mathcal{B}$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[dl, "m_r"] \\ A_{nr} & \end{tikzcd}$$

Además si μ es monomorfismo (resp. epimorfismo) entonces μ' es monomorfismo (resp. epimorfismo).

Definición 7.2.29 *Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$, definimos el conjunto $F_r(\mathcal{A})$ mediante la igualdad $F_r(\mathcal{A}) = \{x \in A : x \vee a = 1,$ para todo $a \in F_{nr}(\mathcal{A})\}$.*

Lema 7.2.30 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$, si $a \in F_{nr}(\mathcal{A})$ entonces, para todo $x \in A$ tal que $a \leq x$ se cumple $px \vee fx \leq x$.*

Demostración: Sea $a \in F_{nr}(\mathcal{A})$. Si $a \leq x$ entonces $\neg x \leq \neg a$ y por tanto $f\neg x = \neg x$, es decir, $fx = x$. De ello se deduce que $gx \vee \neg x = 1$, o equivalentemente, $x \vee h\neg x = 1$. O sea, $\neg x \leq h\neg x$, es decir, $px \leq x$. De forma análoga demostraríamos que $fx \leq x$ y como consecuencia se tiene que $px \vee fx \leq x$. ■

Lema 7.2.31 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Entonces $F_r(\mathcal{A})$ es un filtro temporal de $\mathcal{A}$.*

Demostración: Veamos en primer lugar que $F_r(\mathcal{A})$ es un filtro temporal. Es evidente que $1 \in A$ y si $x, y \in F_r(\mathcal{A})$ entonces, para todo $a \in F_{nr}(\mathcal{A})$, $(x \wedge y) \vee a = (x \vee a) \wedge (y \vee a) = 1 \vee 1 = 1$, de donde $x \wedge y \in F_r(\mathcal{A})$. Por otro lado, si $x \in F_r(\mathcal{A})$, esto es, $x \vee a = 1$, para todo $a \in F_{nr}(A)$ entonces cualquier $z \in A$ que verifique $x \leq z$ cumple esta misma condición. De todo lo dicho se deduce que $F_r(\mathcal{A})$ es un filtro. Veamos a continuación que este filtro es también temporal. Para ello tomemos $x \in F_r(\mathcal{A})$ y un elemento cualquiera a de $F_{nr}(\mathcal{A})$. Usando la axiomática de álgebras de temporales y los lemas 1.2.4 y 7.2.30 se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= g(1) \\ &= g(x \vee a) \\ &\leq gx \vee fa) \\ &\leq gx \vee a \end{aligned}$$

de donde $gx \in F_r(\mathcal{A})$. De forma análoga demostraríamos que $hx \in F_r(\mathcal{A})$. De ambos hechos se deduce que para todo $x \in F_r(\mathcal{A})$, $Lx \in F_r(\mathcal{A})$, es decir, que $F_r(\mathcal{A})$ es temporal. ∎

Teorema 7.2.32 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$, el álgebra temporal $\mathcal{A}/F_r(\mathcal{A})$ es reflexiva.*

Demostración: Sea $x \in A$ y $a \in F_{nr}(\mathcal{A})$. Dado que $pg(\neg x \vee a) \leq \neg x \vee a$ podemos establecer

$$hx \vee pg(\neg x \vee a) \leq hx \vee (\neg x \vee a)$$

pero, $a \leq \neg x \vee a$ y $a \in F_{nr}(\mathcal{A})$ con lo cual $g(\neg x \vee a) = \neg x \vee a$. Usando esto junto a los lemas 1.2.4 y 7.2.30 tenemos la siguiente cadena de relaciones:

$$\begin{aligned} 1 &= h(1) \\ &= h(x \vee \neg x \vee a) \\ &\leq hx \vee p(\neg x \vee a) \\ &\leq hx \vee (\neg x \vee a) \end{aligned}$$

de donde deducimos que $hx \vee (\neg x \vee a) = 1$ Por otro lado

$$x \vee \neg hx \vee a = x \vee a \vee p\neg x = h(x \wedge a) \wedge p\neg x$$

Usando nuevamente el lema 1.2.4 tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= h(1) \\ &= h(x \vee a \vee \neg x) \\ &\leq h(x \wedge a) \wedge p\neg x \end{aligned}$$

de donde $x \vee \neg hx \vee a = 1$. Resumiendo, hemos obtenido que $\neg x \vee hx$, $x \vee \neg hx \in F_r(\mathcal{A})$. De forma análoga pordemos deducir que $\neg x \vee gx$, $x \vee \neg gx \in F_r(\mathcal{A})$ y de estas pertenencias se tiene inmediatamente que $h(x/F_r(\mathcal{A})) = x/F_r(\mathcal{A})$ y que $g(x/F_r(\mathcal{A})) = x/F_r(\mathcal{A})$. ∎

Definición 7.2.33 *Denominaremos $\mathcal{A}_r$ al álgebra temporal reflexiva $\mathcal{A}/F_r(\mathcal{A})$.*

Lema 7.2.34 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$ se cumple que $F_r(\mathcal{A}) \cap F_{nr}(\mathcal{A}) = \{1\}$.*

Demostración: Supongamos que $a \in F_r(\mathcal{A}) \cap F_{nr}(\mathcal{A})$. Como $a \in F_{nr}(\mathcal{A})$ y $a \in F_r(\mathcal{A})$ entonces $a = a \vee a = 1$ y esto demuestra lo que se quería. ■

A continuación vamos a dar un teorema en el que se pone de manifiesto que toda álgebra temporal es un producto subdirecto de dos álgebras temporales, una de ellas reflexiva y la otra libre de reflexión.

Teorema 7.2.35 *Toda álgebra temporal $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de las álgebras $\mathcal{A}_r$ y $\mathcal{A}_{nr}$.*

Demostración: Dada el álgebra temporal $\mathcal{A}$ consideramos las álgebras temporales $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}/F_r(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}_{nr}/F_{nr}(\mathcal{A})$. Por el lema 7.2.34, $F_r(\mathcal{A}) \cap F_{nr}(\mathcal{A}) = \{1\}$. Por tanto $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de las álgebras $\mathcal{A}_r$ y $\mathcal{A}_{nr}$, la primera de las cuales es reflexiva y la segunda libre de reflexión. ■

Capítulo 8

Álgebras Temporales Elementales.

En el presente capítulo abordamos el estudio de las álgebras temporales que hemos denominado elementales. Estas álgebras se caracterizan, desde el punto de vista aritmético, porque el elemento x acota inferiormente al elemento gx. La clase de todas ellas constituye una variedad que resultará ser la engendrada por $\mathfrak{D} \cup \mathfrak{R}$.

§8.1 Álgebras Elementales.

Definición 8.1.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. $\mathcal{A}$ es elemental si para todo $x \in A$ se cumple $x \leq gx$.*

Definición 8.1.2 *Llamaremos $\mathfrak{E}$ a la clase de las álgebras temporales elementales.*

Para ilustrar la definición podemos dar los siguientes ejemplos. Todos ellos serán de mucha utilidad en razonamientos posteriores.

Ejemplos 8.1.3 *(i) Sea T un conjunto no vacío y sea σ una relación binaria en T que cumple que $\sigma \subseteq \Delta(T)$. Consideremos ahora el álgebra temporal $\langle T, \sigma\rangle^+$. Dicha álgebra es elemental. En efecto, si $X \subseteq T$ entoces $X \subseteq \{t \in T : \text{si } t\sigma t' \text{ entonces } t' \in X\}$, o equivalentemente $X \subseteq g_\sigma X$.*

(ii) Sea $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ un álgebra de Boole y $a_0 \in A$. Definimos la aplicación $g : A \longrightarrow A$ mediante la igualdad $gx = x \vee a_0$, para todo $x \in A$. Es inmediato demostrar que el álgebra $\langle A, \wedge, \vee, \neg, g, g, 1\rangle$ es un álgebra temporal elemental.

(iii) *Sea Σ el conjunto de aplicaciones de $\{0, 1, \ldots, n\}$ en el conjunto $\{-1, 1\}$, esto es, $\Sigma = \{-1, 1\}^{n+1}$. Consideremos también el conjunto $\Sigma_0 = \{\sigma \in \Sigma : \sigma(0) = 1\}$ y definamos $g : \mathcal{P}(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma)$ como $gX = X \cup \Sigma_0$. Según el ejemplo anterior $\langle \mathcal{P}(\Sigma), \cap, \cup, \neg, g, g, \Sigma \rangle$ es un álgebra temporal elemental. Notaremos a esta álgebra como $\mathcal{E}(n)$ y a su universo como $E(n)$, esto es, llamamos $E(n)$ al conjunto $\mathcal{P}(\Sigma)$.*

Este ejemplo, que surge como caso particular del anterior, es a su vez un caso particular del primero. En efecto, si consideramos en Σ la relación binaria $R = \{\langle \sigma, \sigma \rangle : \sigma(0) = -1\}$, resulta que

$$\langle \Sigma, R \rangle^{+} = \langle \mathcal{P}(\Sigma), \cap, \cup, \neg, g, g, \Sigma \rangle$$

Es obvio a partir de la definición que las álgebras temporales elementales admiten una definición ecuacional y por tanto se tiene el siguiente resultado.

Lema 8.1.4 *La clase $\mathfrak{E}$ de álgebras es una variedad.*

Veremos ahora algunas de las propiedades aritméticas de las álgebras temporales elementales. Ello permitirá un mayor conocimiento de la variedad y nos proporcionará otras definiciones equivalentes a la dada para este tipo de álgebras.

Teorema 8.1.5 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *$\mathcal{A}$ es elemental.*

(ii) *$x \leq hx$, para todo $x \in A$.*

(iii) *$px \leq x$, para todo $x \in A$.*

(iv) *$fx \leq x$, para todo $x \in A$.*

Demostración: Si $\mathcal{A}$ es elemental entonces $\neg x \leq g\neg x$, para todo $x \in A$, esto es, $x \vee g\neg x = 1$. Por las propiedades de álgebra temporal se tiene que lo anterior es equivalente a $hx \vee \neg x = 1$, esto a su vez es equivalente a $x \leq hx$. Por tanto se tiene la segunda afirmación.

Supongamos que $x \leq hx$ para todo $x \in A$. Si x es un elemento arbitrario de A entonces $\neg x \leq h\neg x$ y por tanto $\neg h\neg x \leq x$, esto es, $px \leq x$. Esto demuestra la tercera afirmación.

Supongamos ahora que $px \leq x$ para todo $x \in A$. Elegido $x \in A$ se tiene que $p\neg x \leq \neg x$ y por tanto $x \wedge p\neg x = 0$. Por las propiedades del álgebra temporal lo anterior es equivalente a $\neg x \wedge fx = 0$ y por tanto $fx \leq x$. Que la cuarta afirmación implica a la primera se demuestra de forma análoga a como se demuestra que la segunda implica a la primera. ■

Teorema 8.1.6 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{A}$ *es elemental.*

(ii) $Lx = x$, *para todo* $x \in A$.

(iii) $Mx = x$, *para todo* $x \in A$.

Demostración: Es inmediato a partir de las definiciones y el teorema 8.1.5. ■

Los teoremas 8.1.5 y 8.1.6 aportan cinco definiciones equivalentes para álgebras temporales elementales, todas ellas de carácter aritmético.

Nuestro siguiente objetivo es ver que tanto g como h son morfismos para la operación $\vee$. De camino obtendremos otras cuatro definiciones equivalentes a la dada para álgebra temporal elemental.

Teorema 8.1.7 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{A}$ *es elemental.*

(ii) $gx = x \vee g0$, *para todo* $x \in A$.

(iii) $hx = x \vee h0$, *para todo* $x \in A$.

Demostración: Supongamos que $x \leq gx$, para todo $x \in A$. Como 0 es mínimo y g es monótona se tiene que $x \vee g0 \leq gx$. Por otro lado se tienen a través del lema 1.2.4 que $gx = g(x \vee 0) = fx \vee g0$. Pero, según afirma el teorema 8.1.5, $fx \leq x$ y por tanto tenemos que $gx \leq x \vee g0$. De las dos desigualdades obtenemos que $gx = x \vee g0$. Hemos demostrado que la primera afirmación implica la segunda. De forma análoga, usando el teorema 8.1.5, tendríamos que la primera implica a la tercera y cualquiera de ellas, segunda o tercera, implican a la primera, nuevamente a través del teorema 8.1.5. ■

Teorema 8.1.8 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *$\mathcal{A}$ es elemental.*

(ii) $fx = x \wedge f1$, *para todo* $x \in A$.

(iii) $px = x \wedge p1$, *para todo* $x \in A$.

Demostración: Si $\mathcal{A}$ es un álgebra elemental entonces, según el teorema 8.1.7, para todo $x \in A$ se tiene $gx = x \vee g0$. Si $x \in A$ tendremos en particular que $g\neg x = \neg x \vee g0$, lo cual es equivalente a $\neg fx = \neg(x \wedge f1)$ y por tanto $fx = x \wedge f1$. También a través del teorema 8.1.7, usando ahora la igualdad $hx = x \vee h0$, podríamos demostrar de forma análoga que $px = x \wedge p1$. Por otra parte, cualquiera de estas afirmaciones implican que $\mathcal{A}$ es elemental, porque de $fx = x \wedge f1$ se deduce que $fx \leq x$ y de $px = x \wedge p1$ que $px \leq x$. ■

Lema 8.1.9 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal elemental. Entonces:*

(i) $fg = f$.

(ii) $ph = p$.

Demostración: Sea $x \in A$. Por el teorema 8.1.8 tenemos que $fgx = gx \wedge f1$ y por el teorema 8.1.7 tenemos que $gx \wedge f1 = (x \vee g0) \wedge f1$. De ello se deduce que

$$fgx = (x \wedge f1) \vee (g0 \wedge f1) = (x \wedge f1) \vee 0 = x \wedge f1 = fx$$

La segunda afirmación se demuestra de forma similar a la primera o incluso a partir de ella si se desea. ■

Es posible demostrar ahora que en las álgebras temporales elementales los operadores g y h coinciden. De ello se sigue de forma inmediata que también coinciden los operadores f y p.

Corolario 8.1.10 *En toda álgebra temporal elemental $\mathcal{A}$ se verifican $g = h$ y $f = p$.*

Demostración: Teniendo en cuenta la hipótesis de este corolario y el lema 8.1.9 se siguen las siguientes relaciones, siendo x un elemento cualquiera de A:

$$\begin{aligned} 1 &= x \vee \neg x \\ &\leq x \vee g\neg x \\ &\leq x \vee \neg f x \\ &= x \vee \neg f g x \\ &= x \vee g\neg g x \end{aligned}$$

es decir $1 = x \vee g\neg gx$. Sabemos por las propiedades de las álgebras temporales que esto es equivalente a $hx \vee \neg gx = 1$, o sea, $gx \leq hx$. Por otra parte, según el teorema 8.1.5, si se tiene $x \leq gx$, para todo $x \in A$ entonces se tiene $x \leq hx$, para todo $x \in A$. Un razonamiento análogo al anterior partiendo de esta última hipótesis nos permitiría afirmar que $hx \leq gx$. En definitiva se tiene que para todo $x \in A$, $gx = hx$, como queríamos demostrar. ■

De lo anterior se deduce que tanto g como h, que son morfismos para la operación $\wedge$ también lo es para la operación $\vee$. Ello permite concluir que f y p son morfismos para la operación $\wedge$.

Corolario 8.1.11 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal elemental y $a, b \in A$. Se cumple:*

(i) $g(a \vee b) = ga \vee gb$.

(ii) $h(a \vee b) = ha \vee hb$.

(iii) $f(a \wedge b) = fa \wedge fb$.

(iv) $p(a \wedge b) = pa \wedge pb$.

Demostración: Sean $a, b \in A$. Teniendo en cuenta el teorema 8.1.7 y el hecho de que al encontramos en un álgebra temporal elemental se cumple $x \leq gx$, para todo $x \in A$, podemos escribir

$$g(a \vee b) = a \vee b \vee g0 = a \vee g0 \vee b \vee g0 = ga \vee gb$$

y ello demuestra la primera afirmación. Según el teorema 8.1.5 también se cumple que $x \leq hx$, para todo $x \in A$. Por tanto podemos repetir el razonamiento anterior para el caso de h y obtener la segunda afirmación.

Si $g(a \vee b) = ga \vee gb$, para todo $a, b \in A$, entonces

$$f(a \wedge b) = \neg g \neg (a \wedge b) = \neg g(\neg a \vee \neg b) = \neg(g\neg a \vee g \neg b) = \neg\neg(fa \wedge fb) = fa \wedge fb$$

y se tiene la tercera afirmación. La cuarta se demuestra de forma análoga a partir de la segunda. ■

En lo que sigue vamos a determinar el conjunto de todas las operaciones monarias de un álgebra temporal elemental $\mathcal{A}$ que se obtienen por composición a partir de las operaciones $\neg$ y g.

Lema 8.1.12 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal elemental entonces son ciertas las siguientes afirmaciones:*

(i) $gg = g$

(ii) $ff = f$

Demostración: Sea $x \in A$. Se tiene la siguiente cadena de igualdades sin más que tener en cuenta las definiciones, el lema 8.1.7 y su consecuencia el corolario 8.1.11

$$ggx = gx \vee g0 = g(x \vee 0) = gx$$

La idempotencia de f se deduce inmediatamente a partir de la de g. ■

Lema 8.1.13 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal elemental. Entonces $gf = g$.*

Demostración: Sea $x \in A$. Se tiene según el teorema 8.1.7 que $gfx = fx \vee g0$; pero a su vez $fx = x \wedge f1$, según afirma el teorema 8.1.8 por tanto

$$gfx = (x \wedge f1) \vee g0 = (x \vee g0) \wedge (\neg g0 \vee g0) = x \vee g0 = gx$$

■

Teorema 8.1.14 (de las temporalidades) *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal elemental entonces las únicas operaciones monaria de $\mathcal{A}$ que se obtienen por composición a partir de $\neg$ y g son $\neg$, g, 1_A, $\neg g$, $g\neg$ y f.*

Demostración: La composición $\neg\neg$ coincide con 1_A. La composición gg coincide con g como asegura el lema 8.1.12. Esto en cuanto a la composición de dos operaciones. En cuanto a las de tres, es sabido a partir de la definición que $\neg g \neg$ coincide con f y esta es la única nueva operación que aparece. Esta a su vez no genera nuevas operaciones por composición porque $fg = f$ (lema 8.1.9), $gf = g$ (lema 8.1.13), $\neg f = g\neg$ y $f\neg = \neg g$. ∎

Daremos seguidamente una caracterización de las álgebras temporales elementales que no es aritmética sino que se basan en las condiciones verificadas por los distintos espectros del álgebra temporal y por la relación de precedencia natural asociada al álgebra. En el siguiente teorema aparecen condiciones que en el caso de las álgebras temporales desarticuladas y reflexivas eran necesarias. En el caso de las álgebras temporales elementales dichas condiciones necesarias son también suficientes.

Teorema 8.1.15 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal elemental.

(ii) $Spt(\mathcal{A}) = Sp(\mathcal{A})$.

(iii) $SptM(\mathcal{A}) = Ult(\mathcal{A})$.

(iv) La relación $\prec$ en $Ult(\mathcal{A})$ cumple $\prec \subseteq \Delta(Ult(\mathcal{A}))$.

Demostración: Para ver que la primera afirmación implica a la segunda sólo hay que demostrar una de las inclusiones porque la otra se tiene por definición. Tomemos $D \in Sp(\mathcal{A})$ y $a \in D$. El hecho de que $a \leq ga$ y $a \leq ha$ y el de que D sea un filtro implica que $La \in D$. De esto se concluye que $D \in Spt(\mathcal{A})$.

Que la segunda afirmación implica a la tercera es inmediato a partir de las definiciones.

Supongamos que todos los sistemas deductivos maximales de $\mathcal{A}$ son temporales y sean $D, D' \in SpM(\mathcal{A})$ tales que $D \prec D'$, esto es, $g^*(D) \subseteq D'$. Si $a \in D$, como D es temporal, $ga \in D$ y como consecuencia $D \subseteq D'$. Así pues, concluimos que $D = D'$ y hemos demostrado por tanto que $\prec \subseteq \Delta(SpM(\mathcal{A}))$.

Por último consideremos sobre $\mathcal{P}(SpM(\mathcal{A}))$ las operaciones $g_\prec$ y $h_\prec$ y demostremos que para todo $X \subseteq SpM(\mathcal{A})$, $g_\prec(X) = h_\prec(X)$. En efecto, si $D \in g_\prec(X)$ y $D' \in SpM(\mathcal{A})$ cumple que $D' \prec D$ entonces $\langle D', D\rangle \in \prec \subseteq$

$\Delta(SpM(\mathcal{A}))$, con lo cual $D = D'$ y por tanto $D \prec D'$. Esto implica que $D' \in X$. Así pues, $D \in h_\prec(X)$ y tenemos demostrado que $g_\prec(X) \subseteq h_\prec(X)$, caso de que el primer conjunto sea no vacío, aunque si lo es la inclusión resulta trivial. La otra inclusión se demuestra de forma análoga y con ella se tiene la igualdad buscada.

Veamos ahora que $X \subseteq g_\prec(X)$. Si $D \in X$ puede ocurrir que $\langle D, D\rangle \notin \prec$; en este caso se tiene trivialmente que $D \in g_\prec(X)$. Pero puede ocurrir, y con ello agotamos los casos posibles, que $\langle D, D\rangle \in \prec$. Como por hipótesis $\prec \subseteq SpM(\mathcal{A})$ tenemos , tabién en este caso, que para todo $D' \in SpM(\mathcal{A})$ tal que $D \prec D'$, $D' \in X$. De forma inmediata se deduce que $D \in g_\prec(X)$. Dado que $\mathcal{A}$ es isomorfa a una subálgebra de $\langle \mathcal{P}(SpM(\mathcal{A})), \prec\rangle^+$ y esta es maximal, debe cumplirse que $\mathcal{A}$ sea un álgebra temporal elemental, como queríamos. ∎

Corolario 8.1.16 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra elemental entonces los espectros $SptM(\mathcal{A})$, $SptP(\mathcal{A})$, $SptCI(\mathcal{A})$ y $SptI(\mathcal{A})$ coinciden con $Ult(\mathcal{A})$.*

Demostración: La razón es que en las álgebras temporales elementales $Sp(\mathcal{A}) = Spt(\mathcal{A})$, como afirma 8.1.15. ∎

Corolario 8.1.17 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal elemental. Entonces*

$$Radt_M(\mathcal{A}) = Radt_P(\mathcal{A}) = \{1\}$$

Corolario 8.1.18 *Toda álgebra temporal elemental es semisimple.*

Hemos visto que las álgebras temporales elementales se caracterizan por el hecho de que en ellas la relación $\prec$ es un subconjunto de la diagonal del conjunto de los ultrafiltros del álgebra. Es obvio que como casos extremos pueden darse dos, a saber, que $\prec$ sea vacía y que $\prec$ coincida con la diagonal misma. El primer caso está caracterizado por ser álgebra desarticulada y el segundo por ser álgebra reflexiva. A continuación demostramos que la variedad $\mathfrak{E}$ está generada por la unión de las variedades $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{R}$.

Lema 8.1.19 *Sea $\mathcal{A}$ un elemento de $\mathfrak{E}$. El álgebra temporal $\mathcal{A}/F_1 \in \mathfrak{R}$.*

Demostración: En efecto, teniendo en cuenta que $F_1 = [f1, 1]$, sea $x/F_1 \in \mathcal{A}/F_1$. Dado que $(x \vee g0) \wedge f1 = x \wedge f1$ se tiene

$$\begin{aligned} g(x/F_1) &= gx/F_1 \\ &= x \vee g0/F_1 \\ &= (x/F_1) \vee (g0/F_1) \\ &= x/F_1 \end{aligned}$$

de donde $g = 1_{\mathcal{A}/F_1}$. ■

Teorema 8.1.20 *La variedad $\mathfrak{C}$ esta generada por el álgebra temporal $\mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_1$.*

Demostración: Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal elemental. Según el teorema 6.2.52 sabemos que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) \times \mathcal{A}/Rad_{\mathfrak{L}}(\mathcal{A})$, o más concretamente, dado que $Rad_{\mathfrak{D}}(\mathcal{A}) = F_0$ y $Rad_{\mathfrak{L}}(\mathcal{A}) = F_1$ (ver los teoremas 6.2.41 6.2.45), sabemos que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/F_0 \times \mathcal{A}/F_1$. Es igualmente conocido a partir del corolario 6.2.39 que $\mathcal{A}/F_0 \in \mathfrak{D}$. En cuanto al álgebra $\mathcal{A}/F_1$ sabemos, por el lema 8.1.19, que pertenece a $\mathfrak{R}$. Se deduce por tanto que $\mathfrak{C} = V(\mathfrak{D} \cup \mathfrak{R})$, pero como $V(\mathfrak{D} \cup \mathfrak{R}) = V(\mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_1)$ tenemos en definitiva que $\mathfrak{C} = V(\mathcal{E}_0 \times \mathcal{E}_1)$. ■

Corolario 8.1.21 *La variedad $\mathfrak{C}$ es el supremo de las variedades $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{R}$ en el retículo de las subvariedades de $\mathfrak{T}$.*

En la línea de los teoremas de descomposición de álgebras temporales por medio de álgebras desarticuladas y reflexivas es posible establecer otro para álgebras temporales elementales. Para ello comenzaremos definiendo, como en los casos anteriores, un tipo de elementos particular de elementos que en este caso reciben el nombre de elementales.

Definición 8.1.22 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. $a \in A$ es elemental si para todo $x \leq a$ se cumple que $px = fx \leq x$. Llamaremos $I_e(\mathcal{A})$ al conjunto de todos los elementos elementales de $\mathcal{A}$, esto es, $I_e(\mathcal{A}) = \{a \in A : a \text{ es elemental}\}$.*

A continuación daremos una justificaremos para la utilización de la palabra "elemental" en la definición anterior.

Teorema 8.1.23 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $a \in I_e(\mathcal{A})$. Para todo $D, D' \in Ult(\mathcal{A})$, si $a \in D$ y se cumple que $D \prec D'$ o bien que $D' \prec D$, entonces $D = D'$.*

Demostración: Sea $a \in I_e(\mathcal{A})$ y sean $D, D' \in Ult(\mathcal{A})$ tales que $a \in D$ y $D \prec D'$. Tomemos $x \in D$ y consideremos el elemento $x \wedge a$. Se tiene simultaneamente que $x \wedge a \leq a$ y que $a \in I_e(\mathcal{A})$, por tanto $p(x \wedge a) = x \wedge a$. Como $D \prec D'$ tenemos que $p_*(D) \subseteq D'$, con lo cual, teniendo en cuenta que $x \wedge a$ queda fijo por p, podemos deducir que $x \wedge a \in D'$. Así pues $x \in D'$ y por tanto $D \subseteq D'$. Dado que ambos, D y D', son maximales tenemos que $D = D'$. En el caso de que se tuviera $D' \prec D$ podríamos razonar de forma análoga a partir de f para concluir que D coincide con D'. ∎

Corolario 8.1.24 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$ y para todo $a \in I_e(\mathcal{A})$ la relación $\prec\mid \mu(a)$ es un subconjunto de $\Delta(\mu(a))$.*

Las álgebras elementales $\mathcal{A}$ se caracterizan por el hecho de que la relación de precendecia en $Ult(\mathcal{A})$ coincide exactamente con la diagonal de dicho conjunto. Según el corolario 8.1.24, dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$ cualquiera y $a \in I_e(\mathcal{A})$, la relación $\prec$ restringida al conjunto de ultrafiltros que contienen a a coincide con la diagonal del mismo. Este hecho nos ha sugerido dar el nombre de "elementales" a los elementos de $I_e(\mathcal{A})$.

Teorema 8.1.25 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$, $I_e(\mathcal{A})$ es un ideal temporal de $\mathcal{A}$.*

Demostración: Es evidente que $0 \in I_e(\mathcal{A})$. Supongamos que $a, b \in I_e(\mathcal{A})$ y tomemos $x \leq a \vee b$. Entonces $x = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$, siendo evidentemente $x \wedge a \leq a$ y $x \wedge b \leq b$, y por tanto

$$fx = f(x \wedge a) \vee f(x \wedge b) \leq (x \wedge a) \vee (x \wedge b) = x$$

análogamente tendríamos $px \leq x$. Pero $px = fx$ porque con las observaciones anteriores también podemos escribir:

$$fx = f(x \wedge a) \vee f(x \wedge b) = p(x \wedge a) \vee p(x \wedge b) = px$$

De lo anterior concluimos que $a \vee b \in I_e(\mathcal{A})$. Supongamos que $a \in I_e(\mathcal{A})$ y que $x \leq a$. Si $y \leq x$ entonces $y \leq a$ y por tanto

$$fy = py \leq y$$

con lo cual $x \in I_e(\mathcal{A})$. Esto prueba que $I_e(\mathcal{A})$ es ideal, pero el hecho de que es temporal se deduce de esto mismo porque si $a \in I_e(\mathcal{A})$, como $fa = pa \leq a$, entoces $fa, pa \in I_e(\mathcal{A})$ y por tanto $I_e(\mathcal{A})$ es cerrado para el operador M. ■

A continuación vamos a relacionar entre sí los ideales $I_d(\mathcal{A})$, $I_r(\mathcal{A})$ y $I_e(\mathcal{A})$.

Lema 8.1.26 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Se verifica la siguiente igualdad*

$$I(I_d(\mathcal{A}) \cup I_r(\mathcal{A})) = \{a \vee b : a \in I_d(\mathcal{A}) \text{ y } b \in I_r(\mathcal{A})\}$$

Demostración: El contenido de derecha a izquierda es claro. Para el recíproco tomemos x un elmento cualquiera del ideal generado por $I_d(\mathcal{A}) \cup I_r(\mathcal{A})$. Entonces existen $a \in I_d(\mathcal{A})$ y $b \in I_r(\mathcal{A})$ tales que $x \leq a \vee b$. En tal situación es evidente que $x = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$ y por tanto x es un elemento del conjunto de la derecha. Esto demuestra el lema. ■

Lema 8.1.27 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $a \in I_e(\mathcal{A})$. Entonces los elementos $x_a = a \wedge g0 \wedge h0$ e $y_a = a \wedge \neg(g0 \wedge h0)$ verifican:*

(i) $x_a \in I_d(\mathcal{A})$

(ii) $y_a \in I_r(\mathcal{A})$

(iii) $a = x_a \vee y_a$

Demostración: Como $x_a \leq g0 \wedge h0$ entonces $x_a \in I_d(\mathcal{A})$. Veamos ahora que $y_a \in I_r(\mathcal{A})$; para ello tomemos $z \leq y_a$. Como $z \leq a$ entonces se cumple

$$fz = pz \leq z$$

Es claro, dada la monotonía de f, que $f(z \wedge \neg fz) \leq fz$ a la vez que $f(z \wedge \neg fz) \leq z \wedge \neg fz$, porque $z \wedge \neg fz \leq z \leq a$. De ambas desigualdades concluimos

$$f(z \wedge \neg fz) = 0$$

y en forma totalmente análoga hubiésemos obtenido

$$p(z \wedge \neg fz) = 0$$

esto significa que $z \wedge \neg fz \in I_d(\mathcal{A})$ con lo cual se cumple

$$z \wedge \neg fz \leq g0 \wedge h0$$

pero $z \leq y_a$, por tanto, $z \wedge \neg fz \leq \neg(g0 \wedge h0)$. Como conclusión obtenemos

$$z = fz = pz$$

y en definitiva que $y_a \in I_r(\mathcal{A})$. Que $a = x_a \vee y_a$ es algo inmediato. ■

Lema 8.1.28 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal entonces $I_e(\mathcal{A}) = I(I_d(\mathcal{A}) \cup I_r(\mathcal{A}))$.*

Demostración: Es evidente que $I_d(\mathcal{A}) \cup I_r(\mathcal{A}) \subseteq I_e(\mathcal{A})$ y consecuentemente

$$I(I_d(\mathcal{A}) \cup I_r(\mathcal{A})) \subseteq I_e(\mathcal{A})$$

pero también se tiene la otra inclusión. En efecto, sea $a \in I_e(\mathcal{A})$ y consideremos los elementos $y = a \wedge g0 \wedge h0$ y $z = a \wedge \neg(g0 \wedge h0)$. Hemos demostrado que $a = y \vee z$, por lo que $a \in I(I_d(\mathcal{A}) \cup I_r(\mathcal{A}))$. ■

Definición 8.1.29 *Un álgebra temporal $\mathcal{A}$ es libre de elementalidad si el único elemento elemental es el 0. Representaremos por $\mathfrak{M}$ la clase de las álgebras temporales libres de elementalidad.*

Definición 8.1.30 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Definimos el conjunto $F_{ne}(\mathcal{A})$ mediante la igualdad $F_{ne}(\mathcal{A}) = \{a \in A : \neg a \in I_e(\mathcal{A})\}$*

Lema 8.1.31 *Para toda álgebra temporal elemental, $F_{ne}(\mathcal{A})$ es un filtro temporal de $\mathcal{A}$.*

Demostración: Este lema es consecuencia inmediata del teorema 8.1.25 y de la teoría elemental de álgebras de Boole. ■

Definición 8.1.32 *Dada un álgebra temporal $\mathcal{A}$ definimos su espectro temporal libre de elementalidad, representado por $Spt_{\mathfrak{M}}(\mathcal{A})$, según la siguiente igualdad:*

$$Spt_{\mathfrak{M}}(\mathcal{A}) = \{D \in Spt(\mathcal{A}) : \mathcal{A}/D \in \mathfrak{M}\}$$

De su definición surge la de radical libre de elementalidad, esto es, $Rad_{\mathfrak{M}}(\mathcal{A}) = \bigcap Spt_{\mathfrak{M}}(\mathcal{A})$.

Teorema 8.1.33 *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal entonces $\mathcal{A}/F_{ne}(\mathcal{A})$ es libre de elementalidad.*

Demostración: Sea $a/F_{ne}(\mathcal{A}) \in I_e(\mathcal{A}/F_{ne}(\mathcal{A}))$ y supongamos que $x \leq a$. Entonces $x/F_{ne}(\mathcal{A}) \leq a/F_{ne}(\mathcal{A})$ y por consiguiente $px \wedge \neg fx, fx \wedge \neg px$, $px \wedge \neg x, fx \wedge \neg x \in I_e(\mathcal{A})$.

En primer lugar, usando el lema 7.2.24 tenemos

$$fx \leq x \leq gx \text{ y } px \leq x \leq hx$$

Por otra parte tenemos

$$px \wedge \neg fx \leq g\neg x$$

con lo cual

$$p(px \wedge \neg fx) \leq pg\neg x \leq \neg x$$

Además sabemos, por el lema 8.1.27, que se cumple

$$px \wedge \neg fx = y \vee z$$

para cierto $y \in I_d(\mathcal{A})$ y $z = px \wedge \neg fx \wedge \neg(g0 \wedge h0) \in I_r(\mathcal{A})$. Por tanto, según se demostró anteriormente

$$p(px \wedge \neg fx) = px \wedge \neg fx \wedge \neg(g0 \wedge h0) \leq \neg x \wedge px \leq \neg x \wedge x = 0$$

Desigualdad de la cual concluimos

$$px \wedge \neg fx \leq h0$$

y dado que $x \leq gpx$ tenemos

$$x \wedge fg\neg x \leq gpx \wedge fg\neg x \leq f(px \wedge \neg fx) \leq fh0 \leq 0$$

esto es,

$$x \wedge fg\neg x = 0$$

o lo que es equivalente

$$px \wedge \neg fx = 0$$

de donde $px \leq fx$. De forma análoga, dada la simetría de las hipótesis, obtendríamos $fx \leq px$ y como consecuencia $fx = px$. Esto demuestra que $a \in I_e(\mathcal{A})$ y en definitiva que $a/F_{ne}(\mathcal{A}) = 0$, como se quería. ∎

Definición 8.1.34 *Representaremos por $\mathcal{A}_{ne}$ al álgebra $\mathcal{A}/F_{ne}(\mathcal{A})$.*

Podemos enunciar el siguiente teorema, siguiendo la línea de otros anteriores para álgebras temporales desarticuladas y reflexivas.

Teorema 8.1.35 *En cualquier álgebra temporal $\mathcal{A}$ se verifica la igualdad:*

$$Rad_{\mathfrak{M}}(\mathcal{A}) = F_{ne}(\mathcal{A})$$

Demostración: La inclusión de $F_{ne}(\mathcal{A})$ en $Rad_{\mathfrak{M}}(\mathcal{A})$ la da el teorema 8.1.33. Para la otra inclusión, sea $D \in Spt(\mathcal{A})$ y supongamos que $I_e(\mathcal{A}/D) = \{0/D\}$. Si $x \in F_{ne}(\mathcal{A})$ entonces se cumple $f\neg x = p\neg x \leq \neg x$ con lo cual,

$$f(\neg x/D) = p(\neg x/D) \leq \neg x/D$$

y por tanto $\neg x/D = 0/D$, esto es, $x \in D$. Como consecuencia inmediata obtenemos la inclusión de izquierda a derecha. ∎

El teorema anterior nos permite enunciar un teorema en el que se pone de manifiesto que $\mathcal{A}_{ne}$ es la máxima imagen epimórfica de $\mathcal{A}$ en $\mathfrak{M}$. Su demostración es análoga a la otros teoremas similares dados anteriormente.

Teorema 8.1.36 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Para todo álgebra temporal libre de elementalidad $\mathcal{B}$ y todo morfismo $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ existe un morfismo $\mu' : \mathcal{A}_{ne} \longrightarrow \mathcal{B}$ haciendo conmutativo el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"'] & B \arrow[dl, "\mu'"] \\
A_{ne} &
\end{tikzcd}$$

Además si μ es monomorfismo (resp. epimorfismo) entonces μ' es monomorfismo (resp. epimorfismo).

Definición 8.1.37 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y definamos el subconjunto de A, $F_e(\mathcal{A})$, por la igualdad:*

$$F_e(\mathcal{A}) = \{x \in A : x \vee a = 1, \text{ para todo } a \in F_{ne}(\mathcal{A})\}$$

Lema 8.1.38 *Para cualquier álgebra temporal $\mathcal{A}$ se cumple que $F_e(\mathcal{A})$ es un filtro temporal de $\mathcal{A}$.*

Demostración: Es inmediato demostrar que $F_e(\mathcal{A})$ es un filtro de $\mathcal{A}$. Veamos que dicho filtro es también un filtro temporal. Para ello tomemos $x \in F_e(\mathcal{A})$ y un elemento cualquiera a de $F_{ne}(\mathcal{A})$. Como $\neg a \in I_e(\mathcal{A})$ entonces $p\neg a = f\neg a \leq \neg a$ y equivalentemente se tiene $a \leq ga = ha$. Como $x \in F_e(\mathcal{A})$ entonces $x \vee a = 1$ y como consecuencia $1 = ha \vee x$. Aplicando el lema 1.2.4 se tiene

$$1 = g1 = g(ha \vee x) \leq fha \vee gx$$

como para todo $a \in A$, $fha \leq a$ entonces se tiene que $1 = a \vee gx$. Al ser a un elemento arbitrario de $F_{ne}(\mathcal{A})$, $gx \in F_e(\mathcal{A})$. Análogamente se demostraríamos que $hx \in F_e(\mathcal{A})$ y como consecuencia $F_e(\mathcal{A})$ es cerrado para L, o sea, es un filtro temporal. ∎

Teorema 8.1.39 *Para toda álgebra temporal $\mathcal{A}$ se verifica que $\mathcal{A}/F_e(\mathcal{A})$ es un álgebra temporal elemental.*

Demostración: Sea $x \in A$ y a un elemento fijo pero arbitrario de $F_{ne}(\mathcal{A})$. Vamos a demostrar que $\neg x \wedge fx \wedge \neg a = 0$. En efecto, como $\neg a \in I_e$ entonces existen $x_{\neg a} \in I_d(\mathcal{A})$ e $y_{\neg a} \in I_r(\mathcal{A})$ tales que $\neg a = x_{\neg a} \vee y_{\neg a}$. Teniendo en cuenta las propiedades elementales de la aritmética temporal, y las defininciones de $I_d(\mathcal{A})$ e $I_r(\mathcal{A})$ y el lema 1.2.4 se tiene la siguiente cadena de igualdades y desigualdades:

$$\begin{aligned} fx \wedge \neg x \wedge \neg a &= fx \wedge \neg x \wedge (x_{\neg a} \vee y_{\neg a}) \\ &\leq fx \wedge gp((\neg x \wedge x_{\neg a}) \vee (\neg x \wedge y_{\neg a})) \\ &\leq fx \wedge g(p(\neg x \wedge x_{\neg a}) \vee p(\neg x \wedge y_{\neg a})) \\ &= fx \wedge g(\neg x \wedge y_{\neg a}) \\ &\leq f(x \wedge \neg x \wedge y_{\neg a}) \\ &= f0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

por tanto $(x \vee \neg fx) \vee a = 1$, para todo $a \in F_{ne}(\mathcal{A})$. De donde $x \vee \neg fx \in F_e(\mathcal{A})$ y como consecuencia $f(x/F_e(\mathcal{A})) \leq x/F_e(\mathcal{A})$, para todo $x \in A$. Por el teorema 8.1.5 concluimos que $\mathcal{A}/F_e(\mathcal{A})$ es un álgebra temporal elemental. ■

Definición 8.1.40 *Representaremos por $\mathcal{A}_e$ al álgebra $\mathcal{A}/F_e(\mathcal{A})$.*

Lema 8.1.41 *En cualquier álgebra temporal se verifica*

$$F_{ne}(\mathcal{A}) \cap F_e(\mathcal{A}) = \{1\}$$

Teorema 8.1.42 *Toda álgebra temporal $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de las álgebras $\mathcal{A}_e$ y $\mathcal{A}_{ne}$.*

Demostración: Dada el álgebra temporal $\mathcal{A}$ consideramos las álgebras temporales $\mathcal{A}_e = \mathcal{A}/F_e(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}_{ne}/F_{ne}(\mathcal{A})$. Según el lema 7.2.34, $F_e(\mathcal{A}) \cap F_{ne}(\mathcal{A}) = \{1\}$. Por tanto $\mathcal{A}$ es producto subdirecto de $\mathcal{A}_e$ y $\mathcal{A}_{ne}$, la primera de las cuales es elemental y la segunda libre de elementalidad. ■

§8.2 Álgebras Elementales libres.

En la presente sección nos vamos a centrar en el estudio de las álgebras temporales elementales libres. El principal resultado al que llegaremos es el que establece que cuando el conjunto de generadores libres del álgebra temporal libre es finito el álgebra en cuestión resulta finita. Como consecuencia se tiene que la variedad $\mathfrak{E}$ es localmente finita.

Definición 8.2.1 *Denominaremos Σ al conjunto $\{-1,1\}^{n+1}$. Por otra parte, sea $n \in \omega^*$, $\sigma \in \Sigma$ y $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$. Definimos el elemento $\zeta_\sigma \in A$ por la siguiente igualdad:*

$$\zeta_\sigma = g0^{\sigma(0)} \wedge (\bigwedge\{x_i^{\sigma(i)} : 1 \leq i \leq n\})$$

De las definiciones se deducen de forma inmediata los siguientes lemas. Todos ellos son técnicos y serán usados posteriormente.

Lema 8.2.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra elemental, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$ y $\sigma, \sigma' \in \Sigma$. Si $\sigma \neq \sigma'$ entonces $\zeta_\sigma \wedge \zeta_{\sigma'} = 0$.*

Demostración: Si $\sigma \neq \sigma'$ entonces existe $0 \leq i \leq n$ tal que $\sigma(i) \neq \sigma(i)$. Supongamos, sin perder por ello generalidad, que $\sigma(i) = 1$ y que $\sigma'(i) = -1$. Si $i = 0$ entonces $\zeta_\sigma \wedge \zeta_{\sigma'} = g0 \wedge \neg g0 \wedge \xi = 0$ y si $i \neq 0$ entonces $\zeta_\sigma \wedge \zeta_{\sigma'} = x_i \wedge \neg x_i \wedge \xi = 0$. Por tanto, se tiene lo que queríamos en cualquier caso. ■

Lema 8.2.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra elemental y $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$. Entonces se tiene que $\bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma \in \Sigma\} = 1$.*

Demostración: Aplicando la distributividad de $\wedge$ respecto de $\vee$ al elemento $\bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$la siguiente igualdad:

$$\bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma \in \Sigma\} = (g0 \vee \neg g0) \wedge (x_1 \vee \neg x_1) \wedge \cdots \wedge (x_n \vee \neg x_n)$$

De ello resulta evidente que $\bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma \in \Sigma\} = 1$. ■

Lema 8.2.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra elemental, $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$ y $\sigma \in \Sigma$. Para todo $0 \leq i \leq n$ se cumple que:*

(i) $x_i \wedge \zeta_\sigma = \zeta_\sigma$ *si, y sólo si,* $\sigma(i) = 1$.

(ii) $x_i \wedge \zeta_\sigma = 0$ *si, y sólo si,* $\sigma(i) = -1$.

donde x_0 *se ha toma con el valor* $g0$.

Lema 8.2.5 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra elemental y* $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$. *Entonces, para todo* $1 \leq i \leq n$,

$$x_i = \bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma \in \Sigma \text{ y } \sigma(i) = 1\}$$

Demostración: Sea $1 \leq i \leq n$ y consideremos el elemento $x_i \in X$. Se tiene:

$$x_i = x_i \wedge 1 = x_i \wedge (\bigwedge_{j \neq i}(x_j \vee \neg x_j)$$

y como consecuencia inmediata se deduce que $x_i = s_M$, siendo M el conjunto $\{\sigma \in \Sigma : \sigma(i) = 1\}$. ∎

Para la siguiente definición tendremos en cuenta la notación introducida en uno de los ejemplos dados en 8.1.3.

Definición 8.2.6 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra elemental y* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$. *Definimos la aplicación* $s : E(n) \longrightarrow A$ *por la igualdad:*

$$s(M) = \bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma \in M\}$$

para todo $M \subseteq \Sigma$. *En lo que sigue notaremos a* $s(M)$ *como* s_M.

En la definición anterior tanto $\mathcal{E}(n)$ como $\mathcal{A}$ son álgebras temporales elementales y s es un morfismo para los sustratos booleanos, como es sabido. A continuación vamos a demostrar que s es un morfismo para g con lo cual también se tendrá que es un morfismo de álgebras temporales elementales.

Lema 8.2.7 *Sea* $\mathcal{A}$ *un álgebra elemental y* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$. *Entonces se verifica la igualdad:*

$$g0 = \bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma(0) = 1\}$$

Demostración: Teniendo en cuenta el lema 8.2.3 y el lema 8.2.4 es fácil seguir la siguiente cadena de igualdades:

$$\begin{aligned} g0 &= g0 \wedge 1 \\ &= g0 \wedge (\bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma \in \Sigma\}) \\ &= \bigvee\{\zeta_\sigma \wedge g0 : \sigma \in \Sigma\} \\ &= \bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma(0) = 1\} \end{aligned}$$

de donde se deduce lo que se quería. ∎

Teorema 8.2.8 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$. La aplicación s es un morfismo de álgebras temporales.*

Demostración: Sean $M, M' \in E(n)$. Según afirma el lema 8.2.3 s es morfismo para 1, esto es, $s_\Sigma = 1$. Es claro también que $s_{M\cup M'} = s_M \vee s_{M'}$ y por tanto s es un morfismo para $\vee$. Además s es también un morfismo para $\neg$ porque por una parte según lo anteriormente demostrado y el lema 8.2.3 $s_M \vee s_{\neg M} = s_\Sigma = 1$ y por otra aplicando la propiedad distributiva a $s_M \wedge s_{\neg M}$ y el lema 8.2.2 se deduce inmediatamente que $s_M \wedge s_{\neg M} = 0$. Del hecho de que s sea morfismo para $\vee$ y $\neg$ se deduce que es morfismo para $\wedge$ también puesto que esta operación se puede expresar como composición de las otras dos.

Vamos a demostrar ahora que s es morfismo para g y para ello sea $M \subseteq \Sigma$. Dado que $\mathcal{A}$ es un álgebra temporal elementa, y según el teorema 8.1.7 se tiene que $gs_M = g\bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma \in M\} = s_M \vee g0$, esto es, gs_M coincide con $(\bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma \in M\}) \vee (\bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma(0) = 1\})$, quien a su vez coincide con $s_{M\cup\Sigma_0}$, siendo $\Sigma_0 = \{\sigma \in \Sigma : \sigma(0) = 1\}$ (ver los ejemplos 8.1.3). Por otra parte, teniendo en cuenta los ejemplos 8.1.3, se tiene $gM = M \cup \Sigma_0$, de donde $s_{gM} = s_{M\cup\Sigma_0}$. Deducimos por tanto que $s_{gM} = gs_M$. Siendo s morfismo para g lo es también para h, porque en el caso de las álgebras temporales elementales $g = h$. En definitiva se tiene que s es morfismo de álgebras temporales. ∎

Con el hecho de s es un morfismo de álgebras temporales tenemos una descripción de todos los elementos de la subálgebra de un álgebra temporal generada por un conjunto X, que en este caso es finito.

Teorema 8.2.9 (de la forma normal) *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra elemental y $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq A$. Se cumple que $Sub(X) = s_*(E(n))$.*

Demostración: Dado que s es un morfismo de álgebras temporales se tiene que $s_*(E(n))$ es un subuniverso de $\mathcal{A}$ que además contiene a X según se desprende del lema 8.2.5. Por tanto se tiene que $Sub(X) \subseteq s_*(E(n))$. Recíprocamente, al ser $Sub(X)$ un subuniverso de $\mathcal{A}$ y contener a X es inmediato deducir que $s_*(E(n)) \subseteq Sub(X)$. De ambas inclusiones se deduce que $Sub(X) = s_*(E(n))$, como se quería. ■

A la vista del resultado anterior podemos deducir algunos otros de naturaleza combinatoria. De ello deduciremos que si X es finito entonces $\mathbf{F}_e(X)$ es finita y tendremos además una descripción de sus elementos.

Corolario 8.2.10 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra elemental y $X \subseteq A$ tal que $card(X) = n$. Entonces $card(Sub(X)) \leq 2^{2^{n+1}}$.*

Demostración: Este corolario se deduce inmediatamente a partir del teorema 8.2.9 teniendo en cuenta que

$$card(s_*(E(n))) \leq card(E(n)) = 2^{2^{n+1}}$$

■

Corolario 8.2.11 *La variedad $\mathfrak{E}$ es localmente finita.*

Demostración: Teniendo en cuenta la definición de variedad localmente finita, este teorema es consecuencia inmediata del corolario 8.2.10. ■

Definición 8.2.12 *Denominaremos $\mathbf{F}_e(X)$ al álgebra temporal elemental libre con conjunto de generadores libres X. En el caso de que el conjunto X sea finito y tenga n elementos escribiremos $\mathbf{F}_e(n)$ en lugar de $\mathbf{F}_e(X)$.*

Corolario 8.2.13 *Si $n \in \omega$ entonces $\mathbf{F}_e(n)$ es finita.*

Demostración: Si una variedad es localmente finita entonces en ella el álgebra libre finitamente generada es finita (ver [11]). ■

Teorema 8.2.14 *Sea $n \in \omega^*$. $\mathbf{F}_e(n)$ coincide con $\mathcal{E}(n)$.*

Demostración: Teniendo en cuenta como se definió $\mathcal{E}(n)$ en 8.1.3, consideremos para todo $1 \leq i \leq n$ el conjunto $\Sigma_i = \{\sigma \in \Sigma : \sigma(i) = 1\}$. Se cumple evidentemente que si $i \neq j$ entonces $\Sigma_i \neq \Sigma_j$. Sea pues $j : \{\Sigma_i\}_{i=1}^n \longrightarrow E(n)$ la inclusión de $\{\Sigma_i\}_{i=1}^n$ en $E(n)$. Sea a su vez $\mathcal{A}$ un álgebra elemental, $\varphi : \{\Sigma_i\}_{i=1}^n \longrightarrow A$ una aplicación y x_i el elemento $\varphi(\Sigma_i)$. Considerando el conjunto $X = \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$ podemos construir el morfismo de álgebras temporales $s : E(n) \longrightarrow A$ como se indica en la definición 8.2.6. De esta forma tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \{\Sigma_i\}_{i=1}^n \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi"'] & E(n) \arrow[dl, "s"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Veamos que dicho diagrama es conmutativo. Para ello consideremos $1 \leq i \leq n$ y Σ_i. Tenemos por definición que $s(\Sigma_i) = s_{\Sigma_i} = \bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma(i) = 1\}$; pero por el lema 8.2.4 se tiene que $\{\zeta_\sigma : \sigma(i) = 1\} = \{x_i \wedge \zeta_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$. Por tanto, $s(\Sigma_i) = \bigvee\{x_i \wedge \zeta_\sigma : \sigma \in \Sigma\} = x_i \wedge (\bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma \in \Sigma\})$. Dado que $\bigvee\{\zeta_\sigma : \sigma \in \Sigma\} = 1$ entonces concluimos que $s(\Sigma_i) = x_i = \varphi(\Sigma_i)$. Esto demuestra la conmutatividad del diagrama y por tanto $\mathcal{E}(n)$ es el álgebra libre con n generadores en $\mathfrak{C}$, salvo isomorfismo. ■

Corolario 8.2.15 *Sea* $n \in \omega^*$. $\mathbf{F}_e(n)$ *tiene* $2^{2^{n+1}}$ *elementos.*

Demostración: Basta tener en cuenta el teorema 8.2.14 y que $E(n)$ tiene $2^{2^{n+1}}$ elementos. ■

Capítulo 9

Álgebras temporales finitas.

§9.1 Introducción.

La clase de las álgebras temporales finitas es una subclase importante de la variedad de las álgebras temporales, no sólo por su importancia práctica sino también por el hecho, según afirma el corolario 5.4.3, de que dicha clase genera la variedad de las álgebras temporales. Por consiguiente resulta de interés el estudio computacional de dichas álgebras.

Cuando en una álgebra temporal finita una de sus operaciones temporales (no modales) es conocida, el resto de ellas pueden ser determinadas utilizando la forma indicada en el corolario 2.3.12. Sin embargo, el método que sugiere este corolario derrocha esfuerzos. Trataremos de establecer un método efectivo y daremos al tiempo metodos para expresar las álgebras temporales finitas como producto de otras simples.

§9.2 Dependencia entre operaciones temporales.

En lo que sigue supondremos que el álgebra temporal finita $\mathcal{A}$ tiene cardinalidad 2^n, y por tanto podemos considerar el conjunto de sus n átomos $Atm(\mathcal{A}) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y el conjunto de sus anti-átomos $Antat(\mathcal{A}) = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, donde cada z_i cumple la igualdad $z_i = \neg a_i$.

Lema 9.2.1 *Sea* $\mathbf{B}(n) = \langle B(n), \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ *el álgebra de Boole con* 2^n *elementos. Entonces* $\langle B(n), \wedge, 1, 0\rangle$ *es el semirretículo inferior acotado libre con* n *generadores.*

Demostración: Sea X un conjunto con n elementos, que por tanto será equipotente a $Antat(\mathcal{A})$, y consideremos cualquier biyección $\iota : X \longrightarrow Antat(\mathcal{A})$. Según el teorema 0.3.23 es claro que $\iota_*(X)$ genera $B(n)$. Además para todo semirretículo inferior $\mathbf{R}$, si $\eta : X \longrightarrow R$ es una aplicación y consideramos $\overline{\eta} : B(n) \longrightarrow R$ defininida como:

$$\overline{\eta}(a) = \begin{cases} 0 & , \textit{si } a = 0 \\ \eta(a) & , \textit{si } a \in Antat(\mathbf{B}(n)) \\ \eta(z_1) \wedge \dots \wedge \eta(z_k) & , \textit{si } z_1, z_2, \dots, z_k \in Antat(\mathbf{B}(n)) \textit{ y } a = z_1 \wedge \dots \wedge z_k \end{cases}$$

se tiene que $\overline{\eta}$ es un morfismo de semirretículos que extiende a η. ■

En virtud del lema 9.2.1 y dado que tanto g como h (resp. f como p) son $\wedge$-morfismos (resp. $\vee$-morfismo), para definir g y h (resp f y p), basta con dar los siguientes dos conjuntos $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ y $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ (resp. $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ y $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$), donde $g_i = gz_i$ y $h_i = hz_i$ (resp. $f_i = fa_i$ y $p_i = pa_i$), para todo $1 \leq i \leq n$. Llamemos análogamente l_i (resp. m_i) al elemento Lz_i (resp. Ma_i), para todo $1 \leq i \leq n$.

Es claro que para todo $1 \leq i \leq n$ se tiene el siguiente esquema de relaciones:

(i) $f_i = \neg g_i$.

(ii) $p_i = \neg h_i$.

(iii) $l_i = g_i \wedge z_i \wedge h_i$.

(iv) $m_i = f_i \vee a_i \vee p_i$.

Teorema 9.2.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita. Entonces, para todo $1 \leq i \leq n$ el elemento p_i verifica:*

$$p_i = \bigwedge \{z_j : a_i \leq g_j\}$$

Demostración: Sea $i \in 1, \dots, n$. El teorema 2.3.12 establece que:

$$p_i = \bigwedge \{x \in A : z_i \vee gx = 1\}$$

Elijamos $z_j \in Antat(\mathcal{A})$ tal que $a_i \leq g_j$. En realidad dicha desigualdad es equivalente a $z_i \vee g_j = 1$ y esto da la inclusión:

$$\{z_j : a_i \leq g_j\} \subseteq \{x \in A : z_i \vee gx = 1\}$$

o equivalentemente $\bigwedge\{x \in A : z_i \vee gx = 1\} \leq \bigwedge\{z_j : a_i \leq g_j\}$. Por otra parte, tomemos $x \in A$ tal que $z_i \vee gx = 1$. Existe $\{z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}\} \subseteq Antat(\mathcal{A})$ tal que $x = \bigwedge_{j=1}^{k} z_{i_j}$. Por consiguiente es posible concluir que

$$\bigwedge_{j=1}^{k} (z_i \vee gz_{i_j}) = 1$$

y esto nos lleva a que

$$z_i \vee gz_{i_j} = 1$$

para todo $1 \leq j \leq k$, i.e. x es una conjunción de anti-átomos que verifica la misma condición que sirvio para seleccionar x. Este hecho implica que

$$\bigwedge\{z_j : a_i \leq g_j\} \leq \bigwedge\{x \in A : z_i \vee gx = 1\}$$

Resumiendo lo anterior tenemos que

$$\bigwedge\{x \in A : z_i \vee gx = 1\} = \bigwedge\{z_j : a_i \leq g_j\}$$

igualdad esta que prueba el teorema. ∎

El siguiente lema nos proporciona un método rápido para calcular f sirviéndonos de los valores h_i.

Lema 9.2.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita. Para todo $1 \leq i \leq n$, $f_i = \bigwedge\{z_j : a_i \leq h_j\}$*

Recordemos que en el caso de $\mathcal{A}$ sea una álgebras temporal finita, la relación $\prec$ puede considerarse definida sobre $Atm(\mathcal{A})$ como sigue:

$$\prec = \{\langle a_i, a_j\rangle : a_j \leq p_i\} = \{\langle a_i, a_j\rangle : a_i \leq f_j\}$$

donde $Atm(\mathcal{A}) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (consultar el teorema 5.2.6 y la definición 5.2.7). En este caso podemos aportar una nueva expresión de los elementos p_i y f_i. El lema siguiente se puede demostrar fácilmente con las observaciones anteriores.

Lema 9.2.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita. Entonces, para todo $1 \leq i \leq n$:*

(i) $p_i = \bigvee\{a_j : a_i \prec a_j\}$

(ii) $f_i = \bigvee\{a_j : a_j \prec a_i\}$

§9.3 Factorización y Semisimplicidad.

Nuestro propósito inmediato en lo que sigue es dar un teorema de descomposición general para las álgebras temporales finitas.

Como hemos convenido, el símbolo $\asymp$ representará a la relación binaria $\prec \cup \prec^{-1}$ (ver definición 4.3.1).

Definición 9.3.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita y la relación $\prec$ definida en $Atm(\mathcal{A})$. Representaremos a la relación $\prec^e$ por el símbolo $\equiv$.*

Lema 9.3.2 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita, $a \in A$ y $b, c \in Atm(\mathcal{A})$. Si $b \leq a$ y $b \asymp c$ entonces $c \leq Ma$.*

Demostración: En las hipótesis del lema, tiene que darse $c \leq pb$ o bien $c \leq fb$. Se deduce por tanto que $c \leq fb \vee pb \leq Mb$. Puesto que $b \leq a$ y $Mb \leq Ma$ concluimos que $c \leq Ma$. ■

Lema 9.3.3 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita y $a, b, c \in Atm(\mathcal{A})$. Si $a \leq Mb$ y $b \equiv c$ entonces $a \equiv c$.*

Demostración: Como a es átomo y $a \leq Mb$ tenemos que $a \leq b$ o $a \leq fb$ o bien $a \leq pb$. Esto significa que $a = b$ o $a \prec b$ o $b \prec a$. Por consiguiente es obvio que $a \equiv c$. ■

Lema 9.3.4 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $a \in A$. Entonces:*

(i) Si $a \wedge f\neg a \neq 0$, entonces $Ma \wedge \neg a \neq 0$.

(ii) Si $a \wedge p\neg a \neq 0$, entonces $Ma \wedge \neg a \neq 0$.

(iii) Si $a \vee g\neg a \neq 1$, entonces $La \vee \neg a \neq 1$.

(iv) Si $a \vee h\neg a \neq 1$, entonces $La \vee \neg a \neq 1$.

Demostración: Supongamos que $a \wedge f\neg a \neq 0$. Por la definición de álgebra temporal lo anterior es equivalente a $pa \wedge \neg a \neq 0$. Como $Ma \wedge \neg a = (fa \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg a) \vee (pa \wedge \neg a)$, podemos concluir que $Ma \wedge \neg a \neq 0$. Por otra parte, supongamos que $a \vee g\neg a \neq 1$. Ello es equivalente a $ha \vee \neg a \neq 1$, por consiguiente $La \vee \neg a = (ga \vee \neg a) \wedge (a \vee \neg a) \wedge (ha \vee \neg a) \neq 1$. El resto de la demostración es análogo a lo anterior. ■

Definición 9.3.5 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. $a \in A$ es un elemento invariante si $Ma = a$. $In(A)$ es el conjunto de los elementos invariantes de $\mathcal{A}$.*

Teorema 9.3.6 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $a \in A$. Entonces $Ma = a$ si, y sólo si, $La = a$.*

Demostración: Supongamos que $Ma = a$ y $La < a$. Entonces $a \wedge \neg La \neq 0$, pero

$$\begin{aligned} a \wedge \neg La &= (\neg ga \vee \neg a \vee \neg ha) \wedge a \\ &= (a \wedge f\neg a) \vee (\neg a \wedge a) \vee (a \wedge p\neg a) \end{aligned}$$

Como $\neg a \wedge a = 0$, lo anterior nos permite afirmar que $a \wedge f\neg a \neq 0$ o $a \wedge p\neg a \neq 0$. Pero en ambos casos, del lema 9.3.4, podemos concluir $Ma \wedge \neg a \neq 0$, lo cual contradice la hipótesis incial.

Por otra parte, supongamos que $La = a$ y $a < Ma$. Tenemos pues $a \vee \neg Ma \neq 1$. Además

$$\begin{aligned} a \vee \neg Ma &= a \vee (\neg fa \wedge \neg a \wedge \neg pa) \\ &= (a \vee g\neg a) \wedge (a \vee \neg a) \wedge (a \vee h\neg a) \end{aligned}$$

Dado que $a \vee \neg a = 1$ entonces bien $a \vee g\neg a \neq 1$ o bien $a \vee h\neg a \neq 1$, pero esto es imposible puesto que en cualquiera de los casos, por el lema 9.3.4, $\neg a \vee La \neq 1$. ■

Veremos a continuación que $In(A)$ puede ser dotado de una estructura de álgebra de Boole.

Lema 9.3.7 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Si $a, b \in In(A)$ entonces $\neg a$, $a \wedge b$, $a \vee b \in In(A)$.*

Demostración: En efecto, si $La = a$ y $Lb = b$ entonces $L(a \wedge b) = La \wedge Lb = a \wedge b$, lo cual indica que $a \wedge b \in In(A)$. Por otra parte, si $Ma = a$ y $Mb = b$ entonces $M(a \vee b) = Ma \vee Mb = a \vee b$ y así $a \vee b \in In(A)$. Finalmente, si a es un elemento invariante entonces $L\neg a = \neg Ma = \neg a$. Se deduce del teorema 9.3.6 que $M\neg a = \neg a$ y por tanto $\neg a$ es invariante. ■

Como corolario de este resultado obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 9.3.8 $\mathbf{In}(\mathcal{A}) = \langle In(A), \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$ *es una subálgebra de Boole de* $\langle A, \wedge, \vee, \neg, 1\rangle$.

El universo de $\mathbf{In}(\mathcal{A})$ y sus átomos son las piezas clave para describir los filtros temporales de $\mathcal{A}$, y por tanto también el conjunto de sus congruencias temporales.

Teorema 9.3.9 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $a \in A$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $a \in In(A)$.

(ii) $[a, 1]$ *es un filtro temporal de* $\mathcal{A}$.

Demostración: Supongamos que $La = a$ y tomemos $x \in [a, 1]$. Dado que $a \leq x$ y que L es una operación monótona, se deduce que $a = La \leq Lx$, i.e. $Lx \in [a, 1]$. Por consiguiente el filtro booleano $[a, 1]$ es cerrado para la operación L y por tanto es un filtro temporal.

Por otra parte, si $[a, 1]$ es un filtro temporal entonces $a \leq La$. Dado que por definición de L se cumple $La \leq a$ entonces tenemos $La = a$ y por tanto $a \in \mathbf{In}(\mathcal{A})$. ■

Teorema 9.3.10 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita y $b \in A$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $b \in Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$.

(ii) $[b, 1]$ *es un filtro temporal maximal de* $\mathcal{A}$.

Demostración: Supongamos que $b \in Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$. Según el teorema 9.3.9, el filtro booleano $[b, 1]$ es un filtro temporal de $\mathcal{A}$. Por otra parte si existiera un filtro temporal $[z, 1]$ tal que $[b, 1] \subseteq [z, 1] \subseteq A$ entonces, por el teorema 9.3.11, z es invariante y obviamente $z \leq b$. Por consiguiente o $z = 0$, y por tanto $[z, 1] = A$, o $z = b$ lo cual significa que $[z, 1] = [b, 1]$. De aquí la maximalidad de $[b, 1]$. El recíproco puede ser demostrado de forma similar. ■

Definición 9.3.11 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal. Definimos la aplicación:*

$$I : A \longrightarrow In(A)$$

por la igualdad $I(a) = \bigwedge\{x \in In(A) : a \leq x\}$ (nótese que en virtud del lema 9.3.7 la aplicación anterior está bien definida).

Si extendemos de forma natural la defininición de operador clausura a los conjuntos parcialmente ordenados, acabamos de obtener un tal operador como prueba el teorema siguiente.

Teorema 9.3.12 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita y $a, b \in A$. La aplicación I verifica las siguientes propiedades:*

(i) $a \leq I(a)$.

(ii) *Si* $a \leq b$ *entonces* $I(a) \leq I(b)$.

(iii) $I^2(a) = I(a)$.

Demostración: De la definición de $I(a)$ es obvio que $a \leq I(a)$. Además, si $a \leq b$ es claro por la transitividad de $\leq$ que $\{x \in In(A) : b \leq x\} \subseteq \{x \in In(A) : a \leq x\}$, y por tanto $I(a) \leq I(b)$.

Para demostrar la tercera propiedad basta probar la desigualdad $I^2(a) \leq I(a)$ puesto que la otra se obtiene inmediatamente de la primera y la segunda propiedad. Sea $x_0 \in In(A)$ tal que $a \leq x_0$. El elemento $I(a)$ es una cota inferior de x_0, por consiguiente $x_0 \in \{y \in In(A) : I(a) \leq y\}$. Esto implica que el conjunto $\{x \in In(A) : a \leq x\}$ es un subconjunto de $\{y \in In(A) : I(a) \leq y\}$ y por tanto $I^2(a) \leq I(a)$. ∎

En la teoría de álgebras temporales, como en otras teorías algebraicas clásicas, es posible definir un concepto bastante útil, a saber, el de orden de un elemento.

Definición 9.3.13 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal y $a \in A$. Si existe $s \in \omega$ tal que $M^s a = M^{s+1} a$ entonces el orden de a, representado por $o(a)$, es el menor $r \in \omega$ tal que $M^r a = M^{r+1} a$. Si no existe ningún número natural con esta propiedad convenimos en tomar $o(a) = \infty$.*

Es claro que cada elemento de una álgebra temporal finita tiene orden finito. Por otra parte, dado el carácter no decreciente de la sucesión $\langle M^r a : r \in \omega \rangle$ existe $s \in \omega$ tal que $M^s a = \bigvee\{M^r a : r \in \omega\}$. Es posible caracterizar la aplicación I por medio del concepto de orden.

Lema 9.3.14 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita y $a \in A$. Entonces*

$$I(a) = M^{o(a)}a$$

Demostración: Supongamos que $o(a) = r$. Afirmamos que $M^r a \in \{x \in In(A) : a \leq x\}$. En efecto, por una parte $M(M^r a) = M^{r+1}a = M^r a$ y por la otra, considerando la definición, $a \leq M^r a$. Se deduce que $I(a) = \bigwedge\{x \in In(A) : a \leq x\} \leq M^r a$. Además, si $x \in In(A)$ y $a \leq x$ entonces, iterando M r veces se tiene $M^r a \leq M^r x = x$, y por tanto $M^r a \leq I(a)$. ∎

Conocemos ya la relación entre filtros temporales del álgebra temporal finita $\mathcal{A}$ y el conjunto $In(A)$. Pero, ¿cuál es la relación entre $Atm(\mathcal{A})$ y $Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$?. Obtendremos el teorema de descomposición y una nueva descripción de I por medio de $\equiv$.

Lema 9.3.15 *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra temporal finita. Si $a \in Atm(\mathcal{A})$ entonces $I(a) \in Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$.*

Demostración: Elijamos $x \in A$ tal que $0 \leq x \leq I(a)$ y $x \in In(A)$. Como x y $I(a)$ son ambos elementos invariantes, el elemento $z = \neg x \wedge I(a)$ es también invariante. Como $I(a) = x \vee z$ y a es un átomo, son posibles dos casos:

(i) $a \leq x$, lo cual implica $I(a) \leq x$ y realmente que $x = I(a)$.

(ii) $a \leq z$, lo cual implica $I(a) \leq z$. Esto nos conduce a la desigualdad $I(a) \leq \neg x$ y ello significa que $x = 0$ dado que $x = x \wedge I(a) \leq x \wedge \neg x$.

Con lo anterior hemos demostrado que $I(a)$ es un átomo de $Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$. ∎

Lema 9.3.16 *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra temporal finita. Si $b \in Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$ y $a \in Atm(\mathcal{A})$ verifica $a \leq b$, entonces $I(a) = b$.*

Demostración: Sea $a, b \in A$ en las condiciones que indica el enunciado. Las desigualdades $0 < a \leq b$ y el teorema 9.3.12 nos lleva a establecer $0 < I(a) \leq I(b) = b$. Como $I(a)$ es invariante y $b \in Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$, deducimos que $I(a) = b$, como queríamos demostrar. ∎

Como consecuencia inmediata de los lema 9.3.15 y 9.3.16 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 9.3.17 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita. Entonces se tiene la igualdad:*

$$Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A})) = \{I(a) : a \in Atm(\mathcal{A})\}$$

Lema 9.3.18 *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra temporal finita. Para cada $b \in Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$ existe $a \in Atm(\mathcal{A})$ tal que $I(a) = b$.*

Demostración: Es claro que si $b \in Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$ entonces $b \neq 0$. Por consiguiente existe $a \in Atm(\mathcal{A})$ tal que $a \leq b$. El lema 9.3.16 nos permite afirmar que $I(a) = b$. ∎

Podemos demostrar ahora que los filtros temporales maximales del álgebra temporal finita $\mathcal{A}$ son exactamente los generados por átomos del álgebras $\mathbf{In}(\mathcal{A})$.

Teorema 9.3.19 *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra temporal finita. Si $a \in Atm(\mathcal{A})$ entonces $[I(a), 1]$ es un filtro temporal maximal en $\mathcal{A}$.*

Demostración: Es inmediato a partir del lema 9.3.15 y el teorema 9.3.10. ∎

Corolario 9.3.20 *Sea $\mathcal{A}$ una álgebra temporal finita. Para todo filtro temporal maximal $[b, 1]$, existe $a \in Atm(\mathcal{A})$ tal que $I(a) = b$.*

Demostración: Es inmediato a partir del teorema 9.3.10 y el lema 9.3.18. ∎

Como resumen de los resultado 9.3.19 y 9.3.20 se tiene el siguiente.

Teorema 9.3.21 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita y $b \in A$. Entonces $[b, 1]$ es un filtro temporal maximal si, y sólo si, existe $a \in Atm(\mathcal{A})$ tal que $I(a) = b$.*

Teorema 9.3.22 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita y $a \in Atm(\mathcal{A})$. Se cumple la siguiente igualdad:*

$$I(a) = \bigvee\{x \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\}$$

Demostración: Supongamos en primer lugar que $b \in Atm(\mathcal{A})$ y que existe una sucesión $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ de elementos de $Atm(\mathcal{A})$ tal que $a_1 = a$, $a_s = b$ y $a_i \asymp a_{i+1}$. Afirmamos que para todo $1 \leq i \leq s$, $a_i \leq I(a)$. La demostración es por inducción en s. Si $s = 1$ entonces la afirmación se demuestra inmediatamente teniendo en cuenta que $a \leq I(a)$. Supongamos que si $i < s$ entonces $a_i \leq I(a)$. Como $a_i \asymp a_{i+1}$, por el lema 9.3.2, tenemo $a_{i+1} \leq MI(a)$; pero $I(a)$ es un elemento invariante, así pues concluimos que $a_{i+1} \leq I(a)$. Esto nos permite afirmar que $b \leq I(a)$ y por tanto $\bigvee\{x \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\} \leq I(a)$.

Recíprocamente, por una parte es claro que $M(\bigvee\{x \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\}) = \bigvee\{Mx \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\}$ y por otra, si tomamos $b \in Atm(\mathcal{A})$ tal que $b \leq \bigvee\{Mx \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\}$ entonces, dado que b es un átomo, existe x_0 tal que $x_0 \in Atm(\mathcal{A})$, $a \equiv x_0$ y $b \leq Mx_0$. Utilizando el lema 9.3.3 podemos concluir que $a \equiv b$ y por tanto $b \leq \bigvee\{x \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\}$. Esto nos permite afirmar que $M(\bigvee\{x \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\}) \leq \bigvee\{x \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\}$, y realmente $M(\bigvee\{x \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\}) = \bigvee\{x \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\}$, puesto que $x \leq Mx$ para todo $x \in A$. Por consiguiente obtenemos que $\bigvee\{x \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\}$ es un elemento invariante de $\mathcal{A}$ y una cota superior de a. Por consiguiente $I(a) \leq \bigvee\{x \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\}$, lo cual completa la demostración. ∎

Corolario 9.3.23 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita. Entonces, el número de átomos de* $\mathbf{In}(\mathcal{A})$ *coincide con el índice de conexión de $\mathcal{A}$, esto es,*

$$Car(Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A})) = c(\mathcal{A})$$

Demostración: Sea $a \in Atm(\mathcal{A})$. Representemos por $a/\equiv$ la clase del átomo a según la relación de equivalencia $\equiv$ y tengamos en cuenta que, según el teorema 9.3.17, para todo $d \in Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$ existe $a \in Atn(\mathcal{A})$ tal que $I(a) = d$. Consideremos la aplicación:

$$\delta : Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A})) \longrightarrow Atm(\mathcal{A})/\equiv$$

definida por $\delta(I(a)) = (a/\equiv)$. Esta aplicación está bien definida porque si $b \in Atm(\mathcal{A})$ e $I(b) = I(a)$ entonces, usando los teoremas 9.3.22 y 9.3.12, se tiene que $b \leq \bigvee(a/\equiv)$. Como en toda álgebra de Boole la expresión de cada elemento como disyunción de átomos es única, debe cumplirse que $b \in a/\equiv$ y por tanto las clases $a/\equiv$ y $b/\equiv$ coinciden.

Por otra parte, definimos la aplicación

$$\rho : Atm(\mathcal{A})/\equiv \longrightarrow Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$$

como $\rho(a/\equiv) = I(a)$. Esta aplicación está bien definida porque en primer lugar, según el lema 9.3.15, $I(a)$ es un átomos del álgebra $\mathbf{In}(\mathcal{A})$ y en segundo lugar si $a \equiv b$ entonces, vía el teorema 9.3.22 y el lema 9.3.16, se cumple $I(a) = I(b)$.

Afirmamos que ρ y δ son aplicaciones inversas. En efecto, si $b \in Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$ y $a \in Atm(\mathcal{A})$ cumple que $I(a) = b$, entonces $(\rho \circ \delta)(I(a)) = \rho(a/\equiv) = I(a)$. Por otra parte si $a/\equiv \in Atm(\mathcal{A})/\equiv$ entonces $(\delta \circ \rho)(a/\equiv) = \delta(I(a)) = a/\equiv$.

Por tanto, se acaba demostrar que $Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$ y $Atm(\mathcal{A})/\equiv$ son equipotentes de donde se tiene lo que se quería demostrar. ■

Teorema 9.3.24 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita. $\mathcal{A}$ es isomorfa a un producto de $c(\mathcal{A})$ álgebras temporales simples.*

Demostración: Sea $Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A})) = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$. Consideremos para cada $1 \leq i \leq m$, el filtro temporal maximal $[c_i, 1]$ y el álgebra temporal simple $\mathcal{A}/[c_i, 1]$. Utilizando el teorema 9.3.17 es posible verificar que se cumple la desigualdad

$$\bigvee\{c_i : 1 \leq i \leq m\} = 1$$

lo cual significa que

$$\bigcap\{[c_i, 1] : 1 \leq i \leq m\} = \{1\}$$

Se deduce a partir del teorema 0.2.10 (y la relación entre congruencias temporales y filtros temporales) que $\mathcal{A}$ es un producto subdirecto de la familia de álgebras temporales $\{\mathcal{A}_i : 1 \leq i \leq m\}$. En particular tenemos que la aplicación

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \prod\{\mathcal{A}_i : 1 \leq i \leq m\}$$

definida como $\pi(x) = \langle \pi_1(a), \ldots, \pi_m(a) \rangle$, donde π_i es la proyección natural de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}_i$, es un monomorfismo de álgebras temporales. Pero además este morfismo es un epimorfismo. En efecto, sea $\langle \pi_1(a_1), \ldots, \pi_m(a_m) \rangle$ un elemento arbitrario de $\prod\{\mathcal{A}_i : 1 \leq i \leq m\}$ y sea el elemento $a = \bigvee\{a_i \wedge c_i : 1 \leq i \leq m\}$. Es inmediato comporbar que $a \wedge c_i = a_i \wedge c_i$, para todo $1 \leq i \leq m$, lo cual significa que $\pi_i(a) = \pi_i(a_i)$ (ver el corolario 3.2.16). Concluimos que $\pi(a) = \langle \pi_1(a_1), \ldots, \pi_m(a_m) \rangle$; por tanto π es un isomorfismo. El teorema se concluye teniendo en cuenta que, según el corolario 9.3.23, $c(\mathcal{A}) = m$. ■

El teorema 9.3.22 es muy sugerente. En efecto, si tenemos una relación binaria finita R definida sobre un conjunto T y deseamos calcular la clausura equivalencial de R, R^e, podemos hacerlo usando una sencilla reformulación del algoritmo de Warshall (ver [3]); pero después de disponer del teorema 9.3.22 podemos obtener el mismo resultado procediendo como sigue. La relación R es en realidad una relación entre los átomos del álgebra de Boole finita $\mathcal{A}$ generada por el conjunto (finito) de los elementos involucrados en los pares de R. Por consiguiente, es posible transformar $\mathcal{A}$ en un álgebra temporal utilizando R y calcular $Atm(\mathbf{In}(\mathcal{A}))$ (sirviéndose del lema 9.3.14 y el teorema 9.3.17). La descomposición atómica de cada átomo de $\mathbf{In}(\mathcal{A})$ respecto a los átomos de $\mathcal{A}$ da una clase de equivalencia de R^e. No hemos llevado a cabo un estudio comparativo de los dos métodos pero que acabamos de esbozar parece economizar esfuerzos.

Corolario 9.3.25 *Toda álgebra temporal finita es semisimple.*

Corolario 9.3.26 *Toda álgebra temporal libre es semisimple.*

Demostración: Es consecuencia inmediata de los toremas 5.4.2 y 9.3.24. ■

Corolario 9.3.27 *La variedad de las álgebras temporales está generada por la clase de de las álgebras temporales finitas y simples.*

Demostración: Por el corolario 9.3.26 toda álgebra temporal libre es un producto subdirecto de álgebras temporales finitas libres. Por tanto, según el teorema 0.2.18 y el corolario 0.2.37, la variedad de las álgebras temporales está generada por la clase de las álgebras temporales finitas simples. ■

Corolario 9.3.28 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra temporal finita. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) La estructura $\langle Atm(\mathcal{A}), \prec\rangle$ es conexa.

(ii) $\mathcal{A}$ es simple.

Demostración: Si $\langle Atm(\mathcal{A}), \prec\rangle$ es conexa entonces $c(\mathcal{A}) = 1$. En este caso $\mathcal{A}$ será isomorfa a un álgebra simple y por tanto es simple.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{A}$ es simple y que existen al menos dos clases de equivalencia distintas, $a/\equiv$ y $b/\equiv$, en el conjunto $Atm(\mathcal{A})/\equiv$. En este caso $b \notin a/\equiv$ y por tanto $\bigvee\{x \in Atm(\mathcal{A}) : a \equiv x\} \neq 1$, esto es, $I(a) \neq 1$. Por consiguiente, el filtro temporal maximal $[I(a), 1]$ sería propio, lo cual contradice la hipótesis de que $\mathcal{A}$ es simple. Como consecuencia $Atm(\mathcal{A})/\equiv$ es unitario y esto es equivalente a que $\langle Atm(\mathcal{A}), \prec\rangle$ sea conexa. ■

El teorema 9.3.24 podría haber sido demostrado de otra forma. En efecto, sabemos por el corolario 4.3.5 que toda álgebra temporal finita es balanceada y como consecuencia se puede factorizar como indica el teorema 4.3.14. Por otra parte, toda álgebra temporal es de congruencias permutables con lo cual podrían ser suprimidos algunos de los factores (consultar el teorema 0.2.20) y concluir que el álgebra en cuestión es isomorfa al producto de los restantes. Pero una sencilla aplicación del teorema chino de los restos, enunciado para álgebras de Boole, nos conduciría a demostrar que no se puede suprimir ningún factor y tendríamos un enunciado similar al del teorema 9.3.24. Hemos despreciado esta vía de demostración porque nos parece que la que hemos seguido revela mucha más información sobre la estructura de las álgebras temporales finitas.

Apéndice A

Programa: Calculadora de álgebra temporal.

§A.1 Cabecera.

```
#ifndef _MACROS_
#define _MACROS_

#include <stdio.h>
#include <ctype.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/* Macros de proposito general y personal */

#define GLOBAL
#define SEMIGLOBAL extern
#define IMPORTA extern

#define ASM asm

#ifndef _ALMACENAMIENTO_
#define _ALMACENAMIENTO_

#define uint unsigned int
#define ulong unsigned long

typedef char *cadena;
```

```
#define LISTA struct lista_s

LISTA
{
 ulong cabeza;
 LISTA *cola;
};

typedef LISTA  *lista;

#define CABEZA(x) ((x)->cabeza)
#define COLA(x)   ((x)->cola)

#endif /* _ALMACENAMIENTO_ */

#define MEMERR 2

#endif /* _MACROS_ */
```

§A.2 Código.

```
#include "algebrat.h"

GLOBAL uint natomos, ninvariantes, error;
GLOBAL ulong uno;
GLOBAL ulong *g, *h, *f, *p, *l, *m, *inv;
GLOBAL ulong atomos[32], antiatomos[32];
GLOBAL uint relacion[32][32];

IMPORTA void yyparse();

/************************************************************
*                                                           *
*   Calculo de los elementos basicos del algebra temporal   *
*   desconectada con n atomos.                              *
```

```
*                                                              *
***************************************************************/

void desconectada(uint n)
{
 uint i;

 if(n>32) n=32;
 natomos=n;
 ninvariantes=n;

 if(n==32)
  uno=(ulong)-1;
 else
  uno=(ulong)(pow(2,n)-1);

 for(i=0;i<natomos;i++)
 {
  g[i]=uno;
  h[i]=uno;
  f[i]=0;
  p[i]=0;
  atomos[i]=(ulong)pow(2,i);
  m[i]=atomos[i];
  inv[i]=atomos[i];
  antiatomos[i]=no(atomos[i]);
  l[i]=antiatomos[i];
 }
}

/****************************************************
*                                                   *
*   Calculo de los elementos basicos del algebra    *
*   temporal reflexiva con n atomos.                *
*                                                   *
****************************************************/
```

```
void reflexiva(uint n)
{
 uint i;

 if(n>32) n=32;
 natomos=n;
 ninvariantes=n;

 if(n==32)
  uno=(ulong)-1;
 else
  uno=(ulong)(pow(2,n)-1);

 for(i=0;i<natomos;i++)
 {
  atomos[i]=(ulong)pow(2,i);
  antiatomos[i]=no(atomos[i]);
  g[i]=antiatomos[i];
  h[i]=antiatomos[i];
  f[i]=atomos[i];
  p[i]=atomos[i];
  l[i]=antiatomos[i];
  m[i]=atomos[i];
  inv[i]=atomos[i];
 }
}

/**********************************************
*                                             *
*   Funcion auxiliar para limpiar pantalla    *
*                                             *
**********************************************/

void cls()
{
 clrscr();
 printf(">: ");
```

```
}

/**********************************
*                                *
*   Inicializacion de constantes  *
*                                *
**********************************/

void inicio()
{
 cls();
 if ((g=(ulong *)malloc(32*7*sizeof(ulong)))==NULL) error=MEMERR;
 h=g+32;
 f=h+32;
 p=f+32;
 l=p+32;
 m=l+32;
 inv=m+32;
 desconectada(32);
}

/************************
*                      *
*   Programa principal  *
*                      *
************************/

void main()
{
 inicio();
 yyparse();
}

/************************************
*                                  *
*   Tratamiento ingenuo de errores  *
*                                  *
```

```
*************************************/

void yyerror(cadena s)
{
 printf("%s\n", s);
}

/*************************************************************
*                                                            *
*   Calculo de las funciones basicas del algebra de Boole   *
*                                                            *
*************************************************************/

ulong y(ulong a, ulong b)
{
 ulong resultado;

 resultado=a&b&uno;
 return resultado;
}

ulong o(ulong a, ulong b)
{
 ulong resultado;

 resultado=(a|b)&uno;
 return resultado;
}

ulong or(ulong a, ulong b)
{
 ulong resultado;

 resultado=(a^b)&uno;
 return resultado;
}
```

```
ulong implica(ulong a, ulong b)
{
 ulong resultado;

 resultado=(~a|b)&uno;
 return resultado;
}

ulong no(ulong a)
{
 ulong resultado;

 resultado=~a&uno;
 return resultado;
}

/*********************************************************
*                                                       *
*   Calculo de las de comparacion del algebra de Boole  *
*                                                       *
*********************************************************/

uint menori(ulong a, ulong b)
{
 return (a==(a&b));
}

uint mayori(ulong a, ulong b)
{
 return (b==(a&b));
}

/***************************************************************
*                                                             *
*   Calculo de las operaciones monarias g, h, f, p, l, m y i  *
*                                                             *
***************************************************************/
```

```
ulong gcalcula(ulong a)
{
 uint i;
 ulong resultado=uno;

 for(i=0;i<natomos;i++)
  if (mayori(antiatomos[i],a)) resultado=resultado&g[i];
 return resultado;
}

ulong hcalcula(ulong a)
{
 uint i;
 ulong resultado=uno;

 for(i=0;i<natomos;i++)
  if (mayori(antiatomos[i],a)) resultado=resultado&h[i];
 return resultado;
}

ulong lcalcula(ulong a)
{
 uint i;
 ulong resultado=uno;

 for(i=0;i<natomos;i++)
  if (mayori(antiatomos[i],a)) resultado=resultado&l[i];
 return resultado;
}

ulong fcalcula(ulong a)
{
 uint i;
 ulong resultado=0;

 for(i=0;i<natomos;i++)
```

```
  if (menori(atomos[i],a)) resultado=resultado|f[i];
 return resultado;
}

ulong pcalcula(ulong a)
{
 uint i;
 ulong resultado=0;

 for(i=0;i<natomos;i++)
  if (menori(atomos[i],a)) resultado=resultado|p[i];
 return resultado;
}

ulong mcalcula(ulong a)
{
 uint i;
 ulong resultado=0;

 for(i=0;i<natomos;i++)
  if (menori(atomos[i],a)) resultado=resultado|m[i];
 return resultado;
}

ulong i_calcula(ulong a)
{
 uint i;
 ulong resultado;

 resultado=a;

 for(i=0;i<natomos;i++)
  resultado=mcalcula(resultado);

 return resultado;
}
```

```
/*********************************************
*                                            *
*   Calculo de la relacion < entre atomos    *
*                                            *
*********************************************/

void calcula_relacion()
{
 uint i,j;

 for(i=0;i<natomos;i++)
 {
  for(j=0;j<natomos;j++)
   if(menori(atomos[i],f[j])) relacion[i][j]=1;
   else relacion[i][j]=0;
 }
}

/******************************************
*                                         *
*    Funcion par constructora de listas   *
*                                         *
******************************************/

lista par(ulong a, lista b)
{
 lista c;

 if((c=(lista) malloc(sizeof(LISTA)))==NULL)
  error=MEMERR;
 else
  {
   CABEZA(c)=a;
   COLA(c)=b;
  }
 return c;
}
```

```
/*********************************************************
*                                                       *
*    Funciones que asignan los valores leidos a alguna  *
*    de las operaciones monarias g, h, f o p            *
*                                                       *
*********************************************************/

void g_asigna(lista a)
{
 uint i;
 lista temporal;

 temporal=a;
 for(i=0;(i<natomos)&&temporal;i++)
  {
   g[i]=CABEZA(temporal);
   temporal=COLA(temporal);
  }
}

void h_asigna(lista a)
{
 uint i;
 lista temporal;

 temporal=a;
 for(i=0;(i<natomos)&&temporal;i++)
  {
   h[i]=CABEZA(temporal);
   temporal=COLA(temporal);
  }
}

void f_asigna(lista a)
{
 uint i;
```

```
 lista temporal;

 temporal=a;
 for(i=0;(i<natomos)&&temporal;i++)
  {
   f[i]=CABEZA(temporal);
   temporal=COLA(temporal);
  }
}

void p_asigna(lista a)
{
 uint i;
 lista temporal;

 temporal=a;
 for(i=0;(i<natomos)&&temporal;i++)
  {
   p[i]=CABEZA(temporal);
   temporal=COLA(temporal);
  }
}

/****************************************************************
*                                                               *
*   Calculo de las operaciones monarias a partir de una dada    *
*                                                               *
****************************************************************/

void g_recalcula()
{
 uint i, j;
 ulong resultado;

 for(i=0;i<natomos;i++)
  f[i]=no(g[i]);
```

```
 for(i=0;i<natomos;i++)
 {
  resultado=uno;
  for(j=0;j<natomos;j++)
   if(menori(atomos[i],g[j]))
    resultado=resultado&antiatomos[j];
  p[i]=resultado;
 }

 for(i=0;i<natomos;i++)
  h[i]=no(p[i]);
}

void h_recalcula()
{
 uint i, j;
 ulong resultado;

 for(i=0;i<natomos;i++)
  p[i]=no(h[i]);

 for(i=0;i<natomos;i++)
 {
  resultado=uno;
  for(j=0;j<natomos;j++)
   if(menori(atomos[i],h[j]))
    resultado=resultado&antiatomos[j];
  f[i]=resultado;
 }

 for(i=0;i<natomos;i++)
  g[i]=no(f[i]);
}

void f_recalcula()
{
 uint i, j;
```

```
 ulong resultado;

 for(i=0;i<natomos;i++)
  g[i]=no(f[i]);

 for(i=0;i<natomos;i++)
 {
  resultado=uno;
  for(j=0;j<natomos;j++)
   if(menori(atomos[i],g[j]))
    resultado=resultado&antiatomos[j];
  p[i]=resultado;
 }

 for(i=0;i<natomos;i++)
  h[i]=no(p[i]);
}

void p_recalcula()
{
 uint i, j;
 ulong resultado;

 for(i=0;i<natomos;i++)
  h[i]=no(p[i]);

 for(i=0;i<natomos;i++)
 {
  resultado=uno;
  for(j=0;j<natomos;j++)
   if(menori(atomos[i],h[j]))
    resultado=resultado&antiatomos[j];
  f[i]=resultado;
 }

 for(i=0;i<natomos;i++)
  g[i]=no(f[i]);
```

```
}

/*************************************************************
*                                                            *
*   Calculo de las operaciones monarias l y m a partir de    *
*   las operaciones g, h, f y p.                             *
*                                                            *
*************************************************************/

void recalcula_lm()
{
 uint i;

 for(i=0;i<natomos;i++)
 {
  l[i]=h[i]&antiatomos[i]&g[i];
  m[i]=p[i]|atomos[i]|f[i];
 }
}

/**********************************************
*                                             *
*   Calculo de los invariantes del algebra    *
*                                             *
**********************************************/

void invariantes()
{
 uint i, j, contador, utilizados[32];
 ulong resultado, auxiliar;

 for(i=0;i<natomos;i++)
  utilizados[i]=0;

 contador=0;

 for(i=0;i<natomos;i++)
```

```
 {
  if(utilizados[i])
   {}
  else
   {
    resultado=atomos[i];
    do
    {
     auxiliar=resultado;
     resultado=mcalcula(auxiliar);
    } while(auxiliar!=resultado);
    inv[contador++]=resultado;
    for(j=0;j<natomos;j++)
     if(utilizados[j])
      {}
     else
      {
       if(menori(atomos[j],resultado)) utilizados[j]=1;
      }
   }
 }
 ninvariantes=contador;
}

/***************************************************
*                                                  *
*   Funciones de salida que imprimen resultados    *
*                                                  *
***************************************************/

void p_atomos()
{
 uint i;

 printf(">> {");
 for(i=0;i<natomos-1;i++)
  printf(" %lu,",atomos[i]);
```

```
 printf(" %lu }\n>: ",atomos[i]);
}

void p_antiatomos()
{
 uint i;

 printf(">> {");
 for(i=0;i<natomos-1;i++)
  printf(" %lu,",antiatomos[i]);
 printf(" %lu }\n>: ",antiatomos[i]);
}

void imprime_g()
{
 uint i;

 printf(">> G={");
 for(i=0;i<natomos-1;i++)
  printf(" %lu,",g[i]);
 printf(" %lu }\n>: ",g[i]);
}

void imprime_h()
{
 uint i;

 printf(">> H={");
 for(i=0;i<natomos-1;i++)
  printf(" %lu,",h[i]);
 printf(" %lu }\n>: ",h[i]);
}

void imprime_f()
{
 uint i;
```

```
 printf(">> F={");
 for(i=0;i<natomos-1;i++)
  printf(" %lu,",f[i]);
 printf(" %lu }\n>: ",f[i]);
}

void imprime_p()
{
 uint i;

 printf(">> P={");
 for(i=0;i<natomos-1;i++)
  printf(" %lu,",p[i]);
 printf(" %lu }\n>: ",p[i]);
}

void imprime_l()
{
 uint i;

 printf(">> L={");
 for(i=0;i<natomos-1;i++)
  printf(" %lu,",l[i]);
 printf(" %lu }\n>: ",l[i]);
}

void imprime_m()
{
 uint i;

 printf(">> M={");
 for(i=0;i<natomos-1;i++)
  printf(" %lu,",m[i]);
 printf(" %lu }\n>: ",m[i]);
}

void imprime_invariantes()
```

```
{
 uint i;

 printf(">> I={");
 for(i=0;i<ninvariantes-1;i++)
  printf(" %lu,",inv[i]);
 printf(" %lu }\n>: ",inv[i]);
}

void imprime_relacion()
{
 uint i, j;

 printf(">> R={");
 for(i=0;i<natomos;i++)
 {
  for(j=0;j<natomos;j++)
  if(relacion[i][j])
   printf(" (a%u, a%u),",i,j);
 }
 printf("\b }\n>: ");
}
```

Bibliografía

[1] ALLEN, J.F. An interval-based representation of temporal knowledge. *Proc. 7th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence. Vancover.Canada.*, pages 221–226, 1981.

[2] ANSCOMBE, G.E.M. Before and after. *The philosophical review*, 73(1):3–24, enero 1964.

[3] BAASE, S. . *Computer Algorithms. Introduction to Desing and Analysis.* Addison-Wesley Publishing Company, 1983.

[4] BELLISSIMA, F. Atoms of tense algebras. *Algebra Universalis*, 28:52–78, 1991.

[5] BULL, R.A. An algebraic study of tense logics with linear time. *The Journal of Symbolic Logic*, 33(1):27–38, 1968.

[6] BULL, R.A. Note on a paper in tense logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 34(2):215–218, 1969.

[7] BULL, R.A. The algebraic foundations of logic. *Reports on Mathematical Logic*, 6:7–27, 1976.

[8] BURGESS, J. and GUREVICH Y. The decision problem for linear temporal logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 26, 1985.

[9] BURGESS, J.P. Decidability for branching time. *Studia Logica*, 39:203–218, 1980.

[10] BURGESS, J.P. Basic tense logic. In GABBAY, D.M. and GUENTHNER, F., editors, *Handbook of Philosophical Logic, vol. 2*, pages 89–133. D. Reidel Publishing Company, 1984.

[11] BURRIS, S. and SANKAPPANAVAR, H.P. *A Course in Universal Algebra.* Springer-Verlag, 1981.

[12] CHELLAS, B. F. *Modal Logic. An Introduction.* Cambridge University Press, 1980.

[13] CLIFFORD, J.E. Tense logic and the logic of change. *Logique et analyse*, (34), junio 1966.

[14] CRESSWELL, M.J. Omnitemporal logic and tense logic. *Reports on Mathematical Logic*, (4):17–24, 1975.

[15] DIEGO, A. *Sur les Alg bres de Hilbert.* Gauthier-Villars, 1966.

[16] EMERSON, E.A. Temporal and modal logic. In J. van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, pages 997–1067. Elsevier, 1990.

[17] FINDLAY, J.N. Time: a treatment of some puzzles. *Australasian Journal of Psychology and Philosophy.*, pages 216–235, 1941.

[18] GABBAY, D.M. Tense systems with discrete moments of time, part i. *Journal of Philosophical Logic*, 1:35–44, 1972.

[19] GABBAY, D.M. Decidability results in non-classical logics. part i. *Annals of Mathematical Logic*, 8:237–295, 1975.

[20] GABBAY, D.M. Model theory for tense logic. *Annals of Mathematical Logic*, 8:185–236, 1975.

[21] GABBAY, D.M. *Investigations in Modal and Tense Logics whit applications to problems in philosophy and linguistics.* D. Reidel Publishing Company, 1976.

[22] GUREVICH Y. and SHELAH S. The decision problem for branching time logic. *The Journal of Symbolic Logic*, 50(3):668–681, 1985.

[23] HALPERN, J., MANNA, Z., AND MOSZKOWSKI, B. *A Hardware semantics based on temporal intervals*, volume 54 of *Proc. 19th Int. Colloqu. on Automata, Languages and Programming.* Springer Lecture Notes in Computer Science, 1983.

[24] HANSOUL, G. A duality for boolean algebras with operators. *Algebra Universalis*, 17:34–49, 1983.

[25] HUGHES, G.E. Omnitemporal logic and nodal time. *Reports on Mathematical Logic*, 8:41–61, 1977.

[26] HUGHES, G.E. and CRESSWELL, M.J. *Introducci n a la L gica Modal.* Tecnos, 1973.

[27] KAMP, H. *On tense logic and the theory of order.* PhD thesis, University of California, Los Angeles, 1968.

[28] MANNA, Z. and PNUELI, A. Verification of concurrent programs: the temporal framework. In Boyer, R. and Moore, J.S., editors, *The correctness problem in computer science*, pages 215–273, New York, 1981. Academic Press.

[29] McDERMOTT, D. A temporal logic for reasoning about plans and actions. *Cognitive Science*, 6:101–105, 1982.

[30] McKINSEY J.C.C. and TARSKI, A. Some theorems about the sentencial calculi of lewis and heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, 13:1–15, 1948.

[31] MOSZKOWSKI. *Executing temporal logics programs.* Cambridge University Press, 1986.

[32] MOSZKOWSKI, B. *A temporal logic for multi-level reasoning about hardware.* Proc. IFIP 6th Int. Symp. on Computer Hardware Description Languages and their Applications., Pittsburgh, Pensylvania., may 1983.

[33] RASIOWA, H. *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics.* North-Holland, 1974.

[34] RESCHER, N. *Temporal modalities in arabic logic.* Dordrecht, Reidel Publishing Company, 1969.

[35] RODRÍGUEZ SALAS, A.J. *Un Estudio Algebraico de los Cálculos Proposicionales de Lucasiewicz.* PhD thesis, Universidad Autonoma de Barcelona, 1980.

[36] Schindler, P. Tense logic for discrete future time. *The Journal of Symbolic Logic*, 35(1):105–118, 1970.

[37] Segerberg, K. *An Essay in Classical Modal Logic.* PhD thesis, Standford University, May 1971.

[38] Stone, M.H. The representation theorem for boolean algebra. *Trans. Am. Math. Soc.*, 40:37–111, 1936.

[39] Thomason, S.K. Semantic analysis of tense logics. *The Journal of Symbolic Logic*, 37(1):150–157, 1972.

[40] von Wright, G.H. And then. *Commentationes physico-mathematicae*, 32(7), 1966.