

Proo. T. 13/95

P.N

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

**APORTACIONES AL ESTUDIO  
DE DIFUSIONES ESTOCASTICAS  
NO HOMOGENEAS**

**TESIS DOCTORAL**

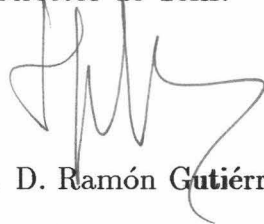
**Sección de Matemáticas**

T  
14  
59

APORTACIONES AL ESTUDIO DE DIFUSIONES  
ESTOCASTICAS NO HOMOGENEAS

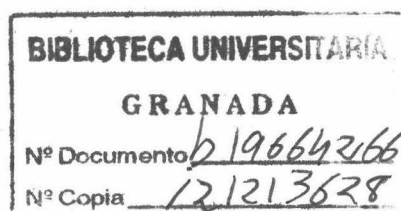
Memoria que para optar al grado  
de Doctor en Ciencias , sección  
Matemáticas, presenta Francisco  
Torres Ruiz.

Vº.Bº.  
Director de Tesis:



Prof. Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez

DEPARTAMENTO DE ESTADISTICA E INVESTIGACION OPERATIVA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA





Deseo expresar mi agradecimiento a D. Ramón Gutiérrez Jáimez, director de esta memoria, por el interés y apoyo constantes que de él he recibido en su elaboración.

Asimismo quiero mostrar mi reconocimiento a D. Andrés González Carmona, por su colaboración en el campo informático, a D<sup>a</sup> Patricia Román Román, por sus inestimables sugerencias, al Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada y, en general, a todas aquellas personas que, de un modo u otro, han ayudado en la realización de esta memoria.

# INDICE

Introducción	5
<b>1 Aplicación del Cálculo Diferencial Matricial a la Inferencia en Procesos de Difusión.</b>	<b>11</b>
1 Breve introducción al Cálculo Diferencial Matricial . . . . .	11
1.1 Introducción . . . . .	11
1.2 Diferencial primera de una función vectorial . . . . .	12
1.3 Diferencial primera de una función matricial . . . . .	13
1.4 Identificación de <b>Matrices Jacobianas</b> . . . . .	15
1.5 Algunas propiedades de la diferencial . . . . .	16
1.6 Definición de matrices hessianas . . . . .	17
1.7 Diferencial segunda de una función escalar . . . . .	18
1.8 Diferencial segunda de una función vectorial . . . . .	20
1.9 Diferencial segunda de una función matricial . . . . .	22
1.10 Fórmula explícita para las matrices jacobiana y hessiana .	23
2 Inferencia por muestreo discreto en el proceso Ornstein-Uhlenbeck.	24
2.1 Introducción . . . . .	24
2.2 El proceso de Ornstein-Uhlenbeck Multivariante. . . . .	25
2.3 Estimación en el proceso O.U. Multivariante. . . . .	29
2.4 Proceso de Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos . .	54
2.5 Estimación en el proceso O.U. con factores exógenos. . . .	56
<b>2 Inferencia en el Proceso Lognormal Multivariante con Factores Exógenos.</b>	<b>61</b>
1 Introducción . . . . .	61
2 El Proceso Lognormal Multivariante . . . . .	63
2.1 Aproximación vía las ecuaciones de Kolmogorov . . . . .	63

2.2	El Proceso Lognormal como solución de una E.D.E. . . . .	65
3	Momentos de las variables endógenas . . . . .	66
4	Estimación de los parámetros . . . . .	68
5	Distribución de los estimadores. . . . .	72
5.1	Distribución de $\hat{\beta}$ . . . . .	72
5.2	Distribución de $\hat{B}$ . . . . .	75
6	Cálculo de la matriz de información de Fisher. . . . .	78
7	Cota de Cramer-Rao. . . . .	81
8	Contrastes de hipótesis . . . . .	82
8.1	Contrastes sobre los parámetros $\beta$ . . . . .	83
8.2	Contrastes sobre subvectores . . . . .	98
8.3	Contrastes sobre independencia por bloques. . . . .	98
9	Ejemplo Práctico . . . . .	109
<b>3</b>	<b>Tiempos de primer paso</b> . . . . .	<b>123</b>
1	Introducción . . . . .	123
2	La ecuación integral . . . . .	126
3	Transformaciones al proceso Wiener . . . . .	132
4	Casos particulares en tiempo no homogéneo . . . . .	135
4.1	Proceso log-normal con factores exógenos . . . . .	135
4.2	Proceso Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos . . . . .	144
5	Generalización de la ecuación integral . . . . .	149
5.1	Introducción . . . . .	149
5.2	Densidad de tiempo de primer paso para barreras variables	151
5.3	Caracterización de $k(t)$ en función de los momentos infi- nitesimales de la difusión . . . . .	155
5.4	Ejemplos de Aplicación . . . . .	159
<b>A</b>	<b>Distribución Exacta del U-Estadístico</b> . . . . .	<b>165</b>
<b>B</b>	<b>Desarrollo asintótico del criterio de razón de verosimilitudes para hipótesis lineales</b> . . . . .	<b>171</b>
<b>C</b>	<b>Aproximación numérica de la solución de E.D.E.</b> . . . . .	<b>187</b>
<b>D</b>	<b>Programas de Ordenador</b> . . . . .	<b>191</b>
1	Inferencia en el proceso Lognormal . . . . .	191

1.1	Listado del programa Fortran . . . . .	195
1.2	Listado del programa Basic . . . . .	215
2	Inferencia en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	238

<b>Bibliografía</b>		<b>243</b>
---------------------	--	------------



# Introducción

El empleo de los procesos de difusión en diversos campos de aplicación ha sido muy desarrollado en las últimas décadas, siendo de especial mención los casos de los procesos de Ornstein-Uhlenbeck y el proceso logarítmico normal.

En cuanto al proceso de Ornstein-Uhlenbeck, cabe destacar su aplicación en Biología, como base de modelos neuronales, (Ricciardi, [41]), y en Ecología en estudios de movimientos de animales (radio-telemetría), (Dunn y Gipson, [13], Dunn y Brisbin, [14]).

Por otra parte, el proceso logarítmico normal encuentra en la economía uno de sus principales campos de aplicación (Tintner, [51], [52], [50]), siendo de especial interés este proceso en predicción debido a su tendencia exponencial y a la facilidad que muestra a la hora de introducir factores exógenos que afecten dicha tendencia.

El uso de los procesos de difusión en estos y otros campos de aplicación ha llevado consigo el desarrollo de diversos aspectos, concernientes, sobre todo, a la inferencia.

En general, la estimación de la tendencia en procesos de difusión ha sido muy estudiada en los últimos años; particular interés han recibido los modelos cuya tendencia depende linealmente de los parámetros. Esta situación ha sido estudiada para procesos homogéneos por Brown y Hewitt, [8], en el caso unidimensional, mientras que el caso de difusiones multidimensionales ha sido abordado, entre otros, por Taraskin, [49] y por Basawa y Prakasa Rao, [4]. Estos autores han hecho uso de muestreo continuo, considerando una trayectoria del proceso hasta un tiempo de parada y, por medio de máxima verosimilitud, han obtenido los estimadores correspondientes, probando asimismo su consistencia y normalidad asintótica.

En el caso de los procesos logarítmico normal y Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos, la estimación ha sido estudiada por Molina, [32], y Gutiérrez, Hermoso y Molina, [21] y por García, Gutiérrez y Hermoso, [17], respectiva-

mente.

Asimismo se ha estudiado la construcción de contrastes de hipótesis sobre los parámetros del coeficiente tendencia, pudiéndose mencionar en este sentido los trabajos de Hermoso, [26] y de Gutiérrez, Hermoso y Molina, [22], aplicando posteriormente dicho estudio al proceso logarítmico normal con factores exógenos.

Hay que hacer notar que todos estos resultados han sido obtenidos considerando los procesos de difusión como solución de una ecuación diferencial estocástica de Itô y haciendo uso de muestreo continuo.

Ahora bien, el carácter markoviano de estos procesos hace posible el empleo de muestreo discreto para la estimación de los parámetros. De esta forma es fácil la construcción de la verosimilitud asociada con una muestra dada a partir de las transiciones.

Antecedentes en este sentido los podemos encontrar para los procesos anteriormente citados:

1. En cuanto al proceso de Ornstein-Uhlenbeck están los ya mencionados trabajos de radio-telemetría de Dunn y Brisbin y Dunn y Gipson. En ellos las muestras se toman mediante *hojas de datos* referidas a la posición de los animales a través del tiempo, medidas en instantes discretos y distinguiendo la observación inicial de las restantes en cada una de las hojas.
2. En cuanto al proceso logarítmico normal, tenemos los trabajos de Tintner ya citados, así como el de Gutiérrez, Angulo, González y Pérez, [23], que generaliza los anteriores resultados. En estos trabajos, casi siempre enfocados al campo de la economía, las variables son observadas en instantes discretos y casi siempre a intervalos regulares de tiempo.

Es precisamente este aspecto, o sea, la inferencia basada en muestreo discreto, el que va a ocupar los dos primeros capítulos de esta memoria.

El primer capítulo está dedicado a introducir el procedimiento que aplicaremos tomando como modelo base el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Tal procedimiento hace uso de las técnicas del Cálculo Diferencial Matricial y del Cálculo de Neudecker, [29], las cuales serán herramientas vitales en el proceso de inferencia ya que agilizan la obtención de las ecuaciones de verosimilitud; por esta razón hemos considerado conveniente extendernos un tanto en los desarrollos de tipo técnico.

Comenzaremos este capítulo con una breve introducción conceptual al Cálculo Diferencial Matricial. Concretamente nos centraremos en las definiciones básicas y en algunas de sus propiedades, sobre todo en lo que concierne a las reglas de identificación de matrices jacobianas y hessianas.

Posteriormente, ilustraremos este tipo de cálculo con una aplicación en la inferencia de los parámetros del proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Comenzaremos presentando dicho proceso en su versión estacionaria multidimensional, tal y como lo emplean Dunn y Gipson, [13], para lo cual partiremos de la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas. Tras ello pasaremos a la inferencia sobre los parámetros del proceso basándonos en el muestreo discreto de una trayectoria. La estimación concluirá hallando la matriz de información de Fisher, la cual fue empleada por los autores anteriormente citados para la obtención de estimadores ponderados en el caso en que la distribución inicial del proceso no fuera constante. En este capítulo no abordaremos la cuestión sobre contrastes de hipótesis, tema ya tratado por Román, [45].

Concluiremos este capítulo estudiando dicho proceso, en su versión univariante, una vez introducidos en él factores exógenos. En dicho desarrollo se observará la gran complicación de índole técnica que acarrea tal introducción, lo cual nos llevará a considerar un caso particular, para el cual se ha efectuado una simulación que muestra las posibilidades del método empleado.

En el segundo capítulo centraremos nuestro estudio en el proceso logarítmico normal multidimensional con factores exógenos que afecten a su tendencia. El motivo que nos lleva a la introducción de los factores exógenos en la tendencia del proceso, tanto en este caso como en el anteriormente expuesto, es el de la utilización de procesos estocásticos de difusión para la descripción de la tendencia continua de ciertos fenómenos dinámicos, apoyándose en su observación discreta. De esta forma se puede introducir una *explicación* del comportamiento de un vector de variables (endógenas) en función de otro conjunto de variables independientes (exógenas) que afectan a aquellas y cuya evolución en el tiempo sea conocida.

Centrándonos en el contenido de este capítulo, presentaremos dicho proceso desde dos puntos de vista: como solución de una ecuación diferencial estocástica y a partir de las ecuaciones de Kolmogorov. Tras ello abordaremos la estimación de los parámetros y su distribución, para lo cual volveremos a hacer uso del Cálculo Matricial de Neudecker. Asimismo calcularemos la matriz de información de Fisher y la cota de Crámer-Rao.

También presentaremos contrastes basados en la razón de verosimilitudes



para los parámetros que ponderan el efecto de los factores exógenos. Con ellos podremos contrastar la posible influencia o no de algún (o algunos de forma conjunta) factor sobre el proceso. Asimismo se tratará el problema de la independencia de las componentes del vector de variables endógenas. En los casos en que sea posible se mostrará la distribución exacta del cociente de razón de verosimilitudes resultante, proponiendo desarrollos asintóticos en los que este hecho no sea viable.

En el campo práctico, se ha elaborado un programa de ordenador (del cual mostramos dos versiones, una en FORTRAN y otra en BASIC), para la aplicación de los resultados obtenidos. Dicho programa ha sido realizado implementando el Cálculo Matricial de Neudecker (empleado en el desarrollo teórico). Tal elección conlleva una importante simplificación desde el punto de vista computacional, tanto en la precisión de los resultados como en tiempo de ejecución. Asimismo el programa proporciona los contrastes sobre los parámetros de modo simplificado al implementar matrices de trasposición que permiten la escritura de los contrastes de modo único, sin más que especificar la matriz deseada.

Ilustraremos todo ello con un ejemplo práctico, haciendo uso de un conjunto de datos, suficientemente conocido en la literatura, como es el empleado por Tintner, [50].

Otro problema de interés en los procesos de difusión, además de la inferencia, es el de los tiempos de primer paso.

El problema de determinar tiempos de primer paso a través de barreras móviles para procesos de difusión y otros procesos de Markov surge en modelos de muy variados campos de investigación, por ejemplo:

1. En poblaciones genéticas, donde el tiempo de fijación de un gen a una población es el tiempo en que  $X(t)$  alcanza por primera vez a  $N(t)$ , siendo  $X(t)$  el número de una cierta clase de genes en el instante  $t$  de una determinada población con un total de  $N(t)$  genes.
2. En Ecología, obteniendo el tiempo de primer paso de animales por determinadas zonas.
3. En Neurobiología, donde la actividad de una neurona puede ser estudiada a través del primer paso por un umbral del proceso que modeliza la diferencia de potencial de la membrana neuronal.

4. En estudios de poblaciones, donde la extinción de una población puede ser descrita como el primer paso a través de una barrera para el proceso que represente el número de individuos de dicha población.

Por ello han sido bastantes los esfuerzos dirigidos a encontrar métodos analíticos y numéricos para la estimación de la distribución del tiempo de primer paso a través de barreras, generalmente dependientes del tiempo, para procesos de difusión.

En el tercer capítulo de esta memoria abordamos dicha cuestión. Nuestro objetivo va a ser el de generalizar los resultados obtenidos por Giorno, Nobile, Ricciardi y Sato, [19], para el caso de procesos homogéneos. Nos centraremos en procesos en tiempo no homogéneo, con el fin de aplicarlo a los procesos con factores exógenos comentados en los anteriores capítulos. Dicha generalización consiste en la obtención de una ecuación integral de Volterra de segunda especie, cuya solución sea la densidad de tiempo de primer paso a través de barreras dependientes del tiempo. Este resultado ha sido establecido para procesos de difusión que puedan ser obtenidos a partir del proceso de Wiener. Con ello se ha encontrado solución a posibles problemas, fundamentalmente de tipo técnico, que se pueden encontrar si se trata de aplicar las conocidas transformaciones de las densidades de tiempo de primer paso de un proceso de difusión, que pueda obtenerse a partir del Wiener, a través de una barrera, conocida la densidad de tiempo de primer paso para el proceso de Wiener a través de la barrera transformada.

Se ha aplicado este resultado a los casos anteriormente citados, obteniéndose expresiones explícitas para la densidad de tiempo de primer paso a través de unas familias de barreras.

Por último, y antes de pasar al desarrollo de los contenidos de esta memoria, esbozemos ligeramente algunos aspectos que son, y están siendo de hecho, fuente de estudios posteriores:

1. En cuanto a la inferencia en el proceso logarítmico normal con factores exógenos:
  - (a) En el desarrollo realizado se ha partido del hecho de que los factores exógenos que afectan a cada variable endógena son los mismos. Una

extensión interesante de este modelo multidimensional sería considerar, para cada variable endógena, un conjunto distinto de factores exógenos.

- (b) Cabe investigar asimismo qué factores exógenos son óptimos para la descripción del vector endógeno, lo cual representa, en esencia, un problema dinámico paralelo al problema estático de la búsqueda del conjunto óptimo de regresores que se plantea en la teoría general de Regresión Lineal Múltiple.

2. En cuanto a tiempos de primer paso:

- (a) De una parte la extensión de estos resultados al caso de procesos de difusión multidimensionales, cuestión todavía muy poco desarrollada, [11].
- (b) Por otra parte está la unión formal de los dos aspectos tratados en esta memoria, a saber, estimación en procesos de difusión y tiempos de primer paso. En efecto, conocida la densidad de tiempo de primer paso para un proceso a través de una barrera, puede plantearse si dicho conocimiento pudiera ayudar a la estimación de los parámetros del proceso. Notemos la ventaja que tal procedimiento puede acarrear, ya que no sería necesario disponer de los datos correspondientes a las observaciones discretas de las trayectorias, sino solamente el instante de tiempo de primer paso de dicha trayectoria a través de una cierta barrera.

# CAPITULO 1

## Aplicación del Cálculo Diferencial Matricial a la Inferencia en Procesos de Difusión.

### 1 Breve introducción al Cálculo Diferencial Matricial

#### 1.1 Introducción

El Cálculo Diferencial es una herramienta empleada con mucha frecuencia en Estadística. Un ejemplo muy claro lo tenemos en los problemas de optimización de ciertas funciones como es el caso de la estimación de un parámetro por máxima verosimilitud. También es preciso su uso en el cálculo de la matriz de información de Fisher para una muestra extraída de una distribución multivariante, ya que hay que calcular el hessiano de la función de verosimilitud respecto de los parámetros.

Esta cuestión puede parecer trivial si pensamos solamente en funciones de una variable o en funciones a lo sumo vectoriales, para las cuales los procedimientos clásicos del Análisis funcionan perfectamente y no tienen por qué plantear excesivos inconvenientes.

Sin embargo, en el ambiente estadístico se suelen presentar situaciones bastante más complejas, sobre todo en lo que concierne al Análisis Multivariante, en el cual el empleo de funciones matriciales está a la orden del día, precisándose continuamente el uso de este tipo de cálculo.

En estas situaciones la cuestión se vuelve bastante tediosa y se hace impres-

cindible el poseer una serie de mecanismos que permitan poder trabajar con cierta soltura y hagan los cálculos lo más simples y manejables posible.

Varios son los autores que han estudiado la aplicación de la derivación matricial al campo estadístico, entre los cuales destacan Rogers, ([44]), Nel, ([34]), Magnus y Neudecker, ([29]). Nosotros seguiremos la línea de estos últimos autores, quienes trabajan directamente con las diferenciales de las funciones matriciales para, posteriormente, identificar las matrices jacobianas y hessianas resultantes. Con ello se gana en claridad y sobre todo en operatividad, puesto que la obtención de las derivadas se transforma en una serie de reglas casi elementales de diferenciación.

No es nuestra intención en este capítulo la de hacer un desarrollo amplio del cálculo diferencial matricial. Así hemos optado por introducir los conceptos básicos sobre diferenciación matricial, haciendo hincapié en los procedimientos de identificación de matrices jacobianas y hessianas más que en las diferenciales en sí de ciertas funciones. Asimismo, presentaremos la aplicación del cálculo diferencial con un ejemplo concreto como es el de la inferencia en el proceso de difusión Ornstein-Uhlenbeck, lo cual nos permitirá familiarizarnos con este tipo de cálculo. En este ejemplo, así como cuando sea preciso a lo largo de esta memoria, haremos referencia a pie de página sobre la expresión de las diferenciales que necesitemos, así como sobre las cuestiones de álgebra matricial que sean precisas.

## 1.2 Diferencial primera de una función vectorial

**Definición 1.1** *Consideremos una función vectorial  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sea  $c$  un punto interior de  $S$  y consideremos una bola centrada en  $c$  y de radio  $r$ ,  $B(c, r)$ . Sea  $u$  un punto de  $\mathbb{R}^n$  con  $\|u\| < r$ , o sea  $c + u \in B(c, r)$ .*

*Diremos que  $f$  es diferenciable en  $c$  si existe una matriz real de orden  $m \times n$ , que depende de  $c$  y no de  $u$ , tal que se verifique:*

$$f(c + u) - f(c) = A(c)u + r_c(u)$$

donde se verifica:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{r_c(u)}{\|u\|} = 0$$

*Se define la primera diferencial de  $f$  en el punto  $c$  con incremento  $u$  como:*

$$df(c; u) = A(c)u$$

Notemos que, en realidad, una función  $f$  es diferenciable en el punto  $c$  si  $f(c + u)$  puede ser aproximada por una función lineal de  $u$ . Asimismo, notemos que la diferencial es un vector  $m$  dimensional y además es única.

El siguiente teorema será muy útil para identificar los jacobianos asociados a este tipo de funciones:

**Teorema 1.2** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $f$  es diferenciable en un punto  $c$  interior de  $S$ . Sea  $u$  un vector  $n$ -dimensional. Entonces:*

$$df(c; u) = Df(c)u$$

donde  $Df(c)$  es una matriz  $m \times n$ , cuyos elementos  $D_j f_i(c)$  son las derivadas parciales de  $f$  evaluadas en  $c$ , que recibe el nombre de matriz jacobiana.

Recíprocamente, si  $A(c)$  es una matriz que verifique

$$df(c; u) = A(c)u \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

entonces

$$A(c) = Df(c)$$

Notemos que la existencia de las derivadas parciales es necesaria y no suficiente para la diferenciabilidad de una función.

### 1.3 Diferencial primera de una función matricial

En el caso matricial lo que se va a hacer es extrapolar lo que ocurría en el caso vectorial, amparándonos en el uso de la operación  $\text{Vec}$ .

Consideremos una función matricial  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$  con  $S \subseteq \mathbb{R}^{n \times q}$ . Sea  $C$  un punto interior de  $S$  y consideremos una bola abierta centrada en  $C$  y de radio  $r$ ,  $B(C, r)$ . Sea  $U$  un punto de  $\mathbb{R}^{n \times q}$  con  $\|U\| < r$ , o sea  $C + U \in B(C, r)$ .

**Definición 1.3** *En las condiciones anteriores, se dice que la función  $F$  es diferenciable en  $C$  si existe una matriz real  $A$  de dimensiones  $mp \times nq$  que dependa de  $C$  y no de  $U$  y tal que:*

$$\text{Vec}(F(C + U)) - \text{Vec}(F(C)) = A(C)\text{Vec}(U) + \text{Vec}(R_C(U))$$

donde

$$\lim_{U \rightarrow 0} \frac{R_C(U)}{\|U\|} = 0$$

siendo

$$\|U\| = [\text{tr}(U'U)]^{\frac{1}{2}}$$

Se define la matriz diferencial de  $F$  en  $C$  con incremento  $U$  como la matriz  $dF(C; U)$  de dimensiones  $m \times p$  y tal que se verifique

$$\text{Vec}(dF(C; U)) = A(C)\text{Vec}(U)$$

y a  $A(C)$  se le llama la primera derivada de  $F$  en  $C$ .

A la vista de la anterior definición, todas las propiedades de cálculo para las funciones matriciales se siguen de las correspondientes propiedades de las funciones vectoriales ya que en lugar de la función matricial  $F$  se considerará la función vectorial  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{mp}$  dada por

$$f(\text{Vec}(X)) = \text{Vec}(F(X))$$

Además, es fácil verificar que

$$\text{Vec}(dF(C; U)) = df(\text{Vec}(C); \text{Vec}(U))$$

definiéndose la matriz jacobiana de  $F$  en  $C$  como

$$DF(C) = DF(\text{Vec}(C))$$

que es una matriz  $mp \times nq$ , cuyo  $ij$ -ésimo elemento es la parcial del  $i$ -ésimo elemento de  $\text{Vec}(F(X))$  respecto al  $j$ -ésimo elemento de  $\text{Vec}(X)$ , evaluada en  $X = C$ .

Al igual que ocurría en el caso vectorial, también nos hace falta ahora un teorema que ayude a identificar los jacobianos de funciones matriciales que se consideren con posterioridad.

**Teorema 1.4** Sea  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$  una función matricial definida en  $S \subseteq \mathbb{R}^{n \times q}$ . Supongamos que  $F$  es diferenciable en un punto interior  $C$  de  $S$ . Entonces

$$\text{Vec}(dF(C;U)) = A(C)d\text{Vec}(U) \Leftrightarrow DF(C) = A(C)$$

## 1.4 Identificación de Matrices Jacobianas

Antes de continuar con la diferencial y sus propiedades, vamos a profundizar un poco más en la identificación de jacobianos de funciones.

1. Si tenemos una función vectorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  entonces la derivada o jacobiano de dicha función es una matriz de orden  $m \times n$  que notaremos

$$Df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x'}$$

El teorema de identificación conduce a la existencia de una correspondencia biunívoca entre la diferencial de una función vectorial  $f$  y su matriz jacobiana. Concretamente, si tenemos para una función vectorial la relación  $df(x) = A(x)$  entonces se tiene:

$$Df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x'} = A(x)$$

2. Generalizando estos conceptos al caso matricial, si  $F : \mathbb{R}^{m \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times q}$  es una función matricial diferenciable, entonces la derivada o jacobiano de  $F$  es la matriz siguiente

$$DF(X) = \frac{\partial \text{Vec}(F(X))}{\partial \text{Vec}(X)'}$$

Si  $d\text{Vec}(F(X)) = A(X)d\text{Vec}(X)$ , el teorema de identificación conduce ahora a

$$DF(X) = \frac{\partial \text{Vec}(F(X))}{\partial \text{Vec}(X)'} = A(X)$$

Así pues, para calcular la derivada de una función matricial  $F$  se procederá de la siguiente manera:

- (a) Se calcula la diferencial de  $F(X)$ .



(b) Se vectoriza la expresión resultante, obteniendo:

$$d \text{Vec}(F(X)) = A(X)d \text{Vec}(X)$$

(c) Con ello se concluye con  $DF(X) = A(X)$ .

Por ejemplo, si  $F(X) = AXB$ , con  $A$  y  $B$  matrices de constantes, se tiene

(a)  $dF(X) = A(dX)B$

(b)  $d \text{Vec}(F(X)) = \text{Vec}(A(dX)B) = (B' \otimes A)d \text{Vec}(X)$

(c)  $DF(X) = B' \otimes A$

## 1.5 Algunas propiedades de la diferencial

Veamos ahora algunas de las propiedades que posee la diferencial de una función, la mayoría de las cuales serán de gran utilidad práctica en el cálculo explícito de algunas diferenciales de funciones y por ende en la obtención de los jacobianos asociados.

**Proposición 1.5** *Si  $u$  y  $v$  son dos funciones real-valuadas y  $\alpha$  es un escalar, entonces*

1.  $d\alpha = 0$
2.  $d(\alpha u) = \alpha du$
3.  $d(u \pm v) = du \pm dv$
4.  $d(uv) = (du)v + u(dv)$
5.  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du) - u(dv)}{v^2}$
6.  $du^\alpha = \alpha u^{\alpha-1}(du)$
7.  $d \log(u) = u^{-1}(du) \quad (u > 0)$
8.  $de^u = e^u(du)$
9.  $d\alpha^u = \alpha^u \log(\alpha)(du) \quad (u > 0)$

Asimismo, para funciones matriciales se tiene

**Proposición 1.6** *Sea  $A$  una matriz real constante y  $U, V$  dos funciones matriciales. Entonces se verifica:*

1.  $dA = 0$
2.  $d(\alpha U) = \alpha(dU)$
3.  $d(U \pm V) = (dU) \pm (dV)$
4.  $d(UV) = (dU)V + U(dV)$
5.  $d \text{Vec}(U) = \text{Vec}(dU)$
6.  $dU' = (dU)'$
7.  $d(U \otimes V) = [(dU) \otimes V] + [U \otimes (dV)]$
8.  $d \text{tr}(U) = \text{tr}(dU)$

## 1.6 Definición de matrices hessianas

Tras haber visto con anterioridad las diferenciales de primer orden y los correspondientes jacobianos, surge de forma inevitable el tratamiento de la diferencial segunda y de las matrices que van asociadas a ellas, que no son otras que las matrices hessianas.

### Matriz hessiana para una función escalar de un vector

**Definición 1.7** *Sea una función  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  con  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Consideremos  $c$  un punto interior de  $S$  donde las  $n^2$  parciales de segundo orden,  $D_{kj}^2 \Phi(c)$ , existan. Entonces se define la matriz hessiana  $H\Phi(c)$  como la matriz cuadrada de orden  $n \times n$  siguiente:*

$$H\Phi(c) = \begin{pmatrix} D_{11}^2 \Phi(c) & \cdots & \cdots & D_{1n}^2 \Phi(c) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{n1}^2 \Phi(c) & \cdots & \cdots & D_{nn}^2 \Phi(c) \end{pmatrix}$$

### Matriz hessiana para una función vectorial de un vector

**Definición 1.8** Sea una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Consideremos  $c$  un punto interior de  $S$  donde existan las  $mn^2$  parciales de segundo orden,  $D_{kj}^2 f_i(c)$ . Se define la matriz hessiana  $Hf(c)$  como la matriz  $mn \times n$  siguiente:

$$Hf(c) = \begin{pmatrix} Hf_1(c) \\ \vdots \\ Hf_m(c) \end{pmatrix}$$

### 1.7 Diferencial segunda de una función escalar

Consideremos una función real  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$  con  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  que sea diferenciable en un punto interior  $c$  de  $S$ . Sabemos que si existe un vector  $a$  que dependa de  $c$  y no de  $u$  tal que se verifique la relación

$$\Phi(c+u) = \Phi(c) + a'u + r(u) \quad \text{con} \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{r(u)}{\|u\|} = 0$$

entonces el vector  $a$  es la derivada  $D\Phi(c)$ .

**Definición 1.9** En las condiciones anteriores, supongamos que existe una matriz  $B$  que dependa de  $c$  y no de  $u$  y tal que se verifique la relación

$$\Phi(c+u) = \Phi(c) + D\Phi(c)u + \frac{1}{2}u'Bu + r(u)$$

donde

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{r(u)}{\|u\|^2} = 0$$

En tal caso se dice que la función  $\Phi$  es dos veces diferenciable en  $c$ .

Profundizando un poco más en esta cuestión, dada una función  $\Phi$  que sea dos veces diferenciable en un punto  $c$  interior de  $S$ , si definimos la función  $\Psi(x) = d\Phi(x; u)$ , entonces la diferencial segunda de  $\Phi$  no es más que la diferencial de la función  $\Psi$ . Así pues:

$$\Psi(x) = \sum_{j=1}^n u_j D_j \Phi(x)$$

con parciales

$$D_i \Psi(x) = \sum_{j=1}^n u_j D_{ij}^2 \Phi(x) \quad i = 1, \dots, n.$$

Con ello, la primera diferencial en  $u$  de  $\Psi$  será:

$$d\Psi(x; u) = \sum_{i=1}^n u_i D_i \Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j D_{ij}^2 \Phi(x)$$

de donde se deduce

$$d^2 \Phi(x; u) = u' [H\Phi(x)] u$$

expresión que no es más que una forma cuadrática. Además la matriz hessiana es única.

A continuación lo que conviene es tener alguna expresión que nos permita identificar, al hacer la diferencial segunda de una función, quién es la matriz hessiana asociada a tal función. Para ello tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 1.10** *Sea  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , dos veces diferenciable en un punto interior  $c$  de  $S$ . Sea  $u$  un vector cualquiera de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces:*

$$d^2 \Phi(x; u) = u' [H\Phi(x)] u$$

*Además, si existe una matriz  $B$  que dependa de  $c$  y no de  $u$  y tal que*

$$d^2 \Phi(x; u) = u' [B(c)] u \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

*entonces*

$$H\Phi(c) = \frac{1}{2} [B(c) + (B(c))']$$

## 1.8 Diferencial segunda de una función vectorial

**Definición 1.11** Consideremos una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Sea  $c$  un punto interior de  $S$ . Si  $f$  es diferenciable en alguna bola abierta  $B(c)$  y cada una de las derivadas parciales  $D_j f_i$  es diferenciable en  $c$ , diremos que  $f$  es dos veces diferenciable en  $c$ .

La diferencial segunda no es más que la diferencial de la primera diferencial, o sea  $d^2 f = d(df)$ . Consideraremos que  $df$  es una función sólo de  $x$ , mientras que  $u$  se considerará constante, con lo cual el mismo valor de  $u$  vale tanto para la primera como para la segunda diferencial.

**Definición 1.12** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , dos veces diferenciable en un punto interior  $c$  de  $S$ . Sea  $B(c)$  una bola abierta en  $S$  de tal forma que  $f$  sea diferenciable en cada punto de  $B(c)$  y sea la función  $g : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida de la forma

$$g(x) = df(x; u)$$

Entonces la diferencial de  $g$  en  $c$  con incremento  $u$  se llama la diferencial segunda de  $f$  en  $c$  con incremento  $u$  y la notaremos  $d^2 f(c; u)$ .

Vamos a desarrollar la expresión anterior para ver la forma exacta que adopta la diferencial segunda de la función  $f$ .

$$d^2 f(c; u) = \begin{pmatrix} d^2 f_1(c; u) \\ \vdots \\ d^2 f_m(c; u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' [Hf_1(c; u)] u \\ \vdots \\ u' [Hf_m(c; u)] u \end{pmatrix} = [I_m \otimes u'] \begin{pmatrix} Hf_1(c) \\ \vdots \\ Hf_m(c) \end{pmatrix}$$

y con ello

$$d^2 f(c; u) = [I_m \otimes u'] [Hf(c)] u$$

Al igual que ocurría en el caso escalar, conviene tener un teorema que nos permita identificar quién es la matriz hessiana asociada a una determinada función vectorial. Necesitamos una definición previa

**Definición 1.13** Sean  $A_1, \dots, A_m$  matrices cuadradas de orden  $n$  y sea la matriz  $A = [A_1, \dots, A_m]$ . Definamos la matriz de orden  $m \times n$  siguiente:

$$A_v = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

En particular, si  $B_1, \dots, B_m$  son matrices cuadradas y tenemos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

entonces  $B' = [B'_1, \dots, B'_m]$ . Con ello se tiene

$$B'_v = \begin{pmatrix} B'_1 \\ \vdots \\ B'_m \end{pmatrix}$$

**Teorema 1.14** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida en  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , dos veces diferenciable en un punto  $c$  interior de  $S$ . Sea  $u \in \mathbb{R}^n$ . Entonces se tiene:

$$d^2 f(c; u) = [I_m \otimes u'] [Hf(c)] u$$

Además, si existe una matriz  $B(c)$  tal que se verifique

$$d^2 f(c; u) = [I_m \otimes u'] B(c) u \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

entonces

$$Hf(c) = \frac{1}{2} [B(c) + (B(c)_v)']$$

## 1.9 Diferencial segunda de una función matricial

Para abordar esta situación lo que se va a hacer es trasladar la situación matricial a la vectorial. Para ello la herramienta válida no es otra que la operación  $\text{Vec}$ .

Así, dada la función  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$  con  $S \subseteq \mathbb{R}^{n \times q}$ , se tiene asociada una función vectorial  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{mp}$  definida como  $f(\text{Vec}(X)) = \text{Vec}(F(X))$ .

De esta manera se tiene que  $DF(C) = Df(\text{Vec}(C))$ , lo que lleva a definir la matriz hessiana asociada a  $F$  como

$$HF(C) = Hf(\text{Vec}(C))$$

Esta es una matriz de orden  $mpq \times nq$  y está formada a partir de los hessianos de las  $mp$  funciones de las que está formada  $F$ , a saber,  $F_{st}$   $s = 1, \dots, m$ ;  $t = 1, \dots, p$ .

$$Hf(c) = \begin{pmatrix} HF_{11}(C) \\ \vdots \\ HF_{s1}(C) \\ \vdots \\ HF_{1p}(C) \\ \vdots \\ HF_{mp}(C) \end{pmatrix}$$

Las matrices  $HF_{st}(C)$  son de orden  $nq \times nq$  y el  $ij$ -ésimo elemento de  $HF_{st}(C)$  es la segunda derivada parcial de  $F_{st}(X)$  respecto a los  $i$ -ésimo y  $j$ -ésimo elementos de  $\text{Vec}(X)$ , evaluados en  $X = C$ .

Si notamos por  $G(X) = dF(X; U)$ , entonces, al igual que antes, se tiene:

$$d^2F(C; U) = dG(C; U)$$

Así como las diferenciales primeras de  $F$  y  $f$  están relacionadas por la relación

$$\text{Vec}(dF(C; U)) = df(\text{Vec}(C); \text{Vec}(U))$$

las segundas diferenciales lo están también por la relación siguiente:

$$\text{Vec}(d^2F(C; U)) = d^2f(\text{Vec}(C); \text{Vec}(U))$$

Para finalizar, vamos a ver el homólogo del teorema de identificación, visto en el caso vectorial, para el caso matricial.

**Teorema 1.15** *Sea  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$  una función matricial, con  $S \subseteq \mathbb{R}^{n \times q}$ . Supongamos que la función  $F$  es dos veces diferenciable en un punto  $C$  interior de  $S$ . Entonces se verifica:*

$$\begin{aligned} \text{Vec} \left( d^2 F(C; U) \right) &= \left[ I_{mp} \otimes \text{Vec}(U) \right]' B(C) \text{Vec}(U) \quad \forall U \in \mathbb{R}^{n \times p} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow HF(C) = \frac{1}{2} [B(C) + (B(C))_v]' \end{aligned}$$

### 1.10 Fórmula explícita para las matrices jacobiana y hessiana

En ocasiones es difícil encontrar la matriz jacobiana o la hessiana de una función matricial a partir de los teoremas de identificación. En tales casos es conveniente tener un mecanismo que permita encontrar tales matrices a partir de las derivadas parciales.

Así pues, sea  $F(X)$  una matriz de dimensión  $m \times p$ , función de una matriz  $X$  de dimensión  $n \times q$  (obviamente si  $q = 1$  tenemos un vector  $n$ -dimensional). Sean  $e_i$  y  $e_j$  los vectores básicos canónicos de  $\mathbb{R}^n$  cuyas componentes  $i$ -ésima y  $j$ -ésima, respectivamente, sean uno y sean  $E_{ij}$  y  $E_{st}$  las matrices básicas canónicas del espacio de matrices de orden  $n \times q$  cuyas componentes  $ij$ -ésima y  $st$ -ésima, respectivamente, sean uno.

Entonces la matriz jacobiana de  $F(X)$  viene dada por la expresión:

$$\left\{ \begin{array}{l} DF(x) = \sum_{i=1}^n \left[ \text{Vec} \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \right] e_i' \quad \text{si } q = 1 \\ DF(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \left[ \text{Vec} \left( \frac{\partial F}{\partial x_{ij}} \right) \right] \text{Vec}'(E_{ij}) \quad \text{si } q \neq 1 \end{array} \right.$$

Igualmente se puede establecer expresiones del mismo tipo para la matriz hessiana. Concretamente:



$$\left\{ \begin{array}{l} HF(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \left[ \text{Vec} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_s \partial x_i} \right) \right] \otimes e_i e'_s \quad \text{si } q = 1 \\ HF(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^q \left[ \text{Vec} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_{st} \partial x_{ij}} \right) \right] \otimes \text{Vec}(E_{ij}) \text{Vec}'(E_{st}) \quad \text{si } q \neq 1 \end{array} \right.$$

## 2 Inferencia por muestreo discreto en el proceso Ornstein-Uhlenbeck.

### 2.1 Introducción

Como es bien conocido, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck tuvo su origen en el estudio de la velocidad de una partícula en el movimiento Browniano. Si el movimiento Browniano representa la posición de la partícula, su derivada representará la velocidad; sin embargo, como es sabido, su derivada no existe en ningún punto. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck es un modelo alternativo que solventa este defecto ya que modeliza directamente la velocidad de la partícula como una función del tiempo, considerando la fuerza de fricción del medio y las colisiones aleatorias de las partículas colindantes como factores que afectan a la velocidad de la partícula, (para más detalles ver por ejemplo [7]).

Asimismo, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck puede ser obtenido a partir del paso al límite de modelos probabilísticos discretos, [28], lo cual no es más que la extensión, al proceso de Ornstein-Uhlenbeck, de la idea de obtener el proceso de Wiener a través de esquemas discretos de recorridos aleatorios que, por paso al límite y bajo determinadas hipótesis, generan las ecuaciones de Kolmogorov del proceso de Wiener.

De igual manera se puede introducir el proceso de Ornstein-Uhlenbeck por medio de modelos discretos, como el de multiurnas de Ehrenfest y algunas variaciones suyas como el modelo de urnas de Iglehardt, [27], [45].

En cuanto a las aplicaciones, son diversos los campos en los que este proceso ha sido empleado; por ejemplo, y por centrarnos en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante que va a ser centro de un estudio más pormenorizado, uno de los campos donde ha tomado cuerpo de forma significativa, ha sido el de la Ecología, concretamente en el estudio de *home range* (región más pequeña

que responde del 95 % de la utilización del animal de su hábitat). Esta elección se debió a que este proceso verifica ciertas propiedades, como son el ser continuo muestral casi seguro (como la trayectoria de un animal), estacionario (que corresponde a un *home range* estable) y Markoviano, con lo cual se tiene en cuenta la posibilidad de correlación entre sucesivas observaciones; para más detalles sobre este particular ver [13], [14] y [45].

En este capítulo nos vamos a centrar casi de forma exclusiva en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante. Para introducirlo partiremos de la ecuación diferencial estocástica de la cual es solución, para caracterizarlo con posterioridad atendiendo a sus propiedades. A continuación abordaremos el tema de la estimación discreta de sus parámetros, llegando a unas expresiones que deberán ser resueltas de forma numérica. Finalizaremos este apartado de estimación calculando la expresión de la matriz de información asociada, la cual fue empleada por Dunn y Gipson, [13], para la obtención de estimadores ponderados de los parámetros.

Finalmente vamos a plantear, para este proceso, el caso de la introducción de factores exógenos en su tendencia. Nos centraremos en el caso univariante, puesto que la estructura de covarianza en este caso hace muy difícil el abordar un caso general. A título de ejemplo se abordará un caso particular de factor exógeno y se realizará una simulación con el fin de mostrar las posibilidades del método empleado.

## 2.2 El proceso de Ornstein-Uhlenbeck Multivariante.

Consideremos la ecuación diferencial estocástica lineal

$$\begin{aligned} dX_t &= AX_t dt + BdW_t \\ X_{t_0} &= c ; (t_0 \leq t \leq T) \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $A_{k \times k}$  y  $B_{k \times k}$  son matrices constantes y  $\{W_t; t_0 \leq t \leq T\}$  es un proceso de Wiener  $k$ -dimensional con componentes independientes.

La ecuación (2.1), para cada valor inicial  $X_{t_0} = c$ , tiene una única solución continua en el intervalo  $[t_0, T]$ . Dicha solución es un proceso estocástico Gaussiano si y solo si  $c$  es normal o constante (para más detalles, ver [2], p. 128-133).

Además, la media y la covarianza del proceso vienen dadas por las expresiones

$$m_t = E[X_t] = \Phi(t) E[c]$$

$$K(s, t) = \Phi(s) \left[ \text{Cov}[c] + \int_{t_0}^{\text{Min}(t,s)} \Phi(u)^{-1} B B' \Phi'(u)^{-1} du \right] \Phi'(t)$$

donde  $\Phi(t)$  es la solución de la ecuación matricial

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= A\Phi(t) \\ \Phi(t_0) &= I_k \end{aligned}$$

En particular

$$K(t, t) = K(t) = \Phi(t) \left[ \text{Cov}[c] + \int_{t_0}^t \Phi(u)^{-1} B B' \Phi'(u)^{-1} du \right] \Phi'(t)$$

de donde  $K(t)$  es la única solución simétrica definida no negativa de la ecuación matricial

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= AK(t) + K(t)A' + BB' \\ K(t_0) &= \text{Cov}[c] \end{aligned} \quad (2.2)$$

y en nuestro caso concreto tendremos

$$m_t = e^{A(t-t_0)} E[c] \quad (2.3)$$

$$K(s, t) =$$

$$= e^{A(s-t_0)} \left[ \text{Cov}[c] + \int_{t_0}^{\text{Min}(s,t)} e^{-A(u-t_0)} B B' e^{-A'(u-t_0)} du \right] e^{A'(t-t_0)} \quad (2.4)$$

A continuación nos planteamos cuándo este proceso será estacionario. Para ello sabemos que una condición necesaria y suficiente es que la media  $m_t$  sea constante y la varianza verifique  $K(s, t) = K(s-t)$ , lo cual implica que  $K(t, t) = K(0) = \text{Cov}[c]$

Notemos que, como  $K(t) = K(0)$ , entonces se tiene de (2.2)

$$BB' = -(AK(0) + K(0)A')$$

La ecuación anterior tiene una solución definida no negativa si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa (o equivalentemente, la ecuación determinística  $\dot{X}_t = AX_t$  es asintóticamente estable).

De (2.4) se tiene, para  $t = s$ ,

$$K(0) = e^{A(t-t_0)} \left[ K(0) + \int_{t_0}^t e^{-A(u-t_0)} BB' e^{-A'(u-t_0)} du \right] e^{A'(t-t_0)}$$

de donde

$$e^{-A(t-t_0)} K(0) e^{-A'(t-t_0)} = K(0) + \int_{t_0}^t e^{-A(u-t_0)} BB' e^{-A'(u-t_0)} du$$

y con ello, la covarianza queda de la forma siguiente

Si  $t \geq s$

$$\begin{aligned} K(s, t) &= e^{A(s-t_0)} \left[ K(0) + \int_{t_0}^s e^{-A(u-t_0)} BB' e^{-A'(u-t_0)} du \right] e^{A'(s-t_0)} e^{A'(t-s)} = \\ &= K(0) e^{A'(t-s)} \end{aligned}$$

Si  $t \leq s$

$$\begin{aligned} K(s, t) &= e^{A(s-t)} e^{A(t-t_0)} \left[ K(0) + \int_{t_0}^t e^{-A(u-t_0)} BB' e^{-A'(u-t_0)} du \right] e^{A'(t-t_0)} = \\ &= e^{A(s-t)} K(0) \end{aligned}$$

Resumiendo

$$K(s, t) = \begin{cases} K(0) e^{A'(t-s)} & \text{si } t \geq s \\ e^{A(s-t)} K(0) & \text{si } t \leq s \end{cases}$$

Por último, para que la media sea constante basta con que  $E[c] = 0$ , lo cual implica  $m_t = 0$ .

Así pues, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante estacionario se puede definir de la siguiente forma:

**Definición 2.16** *El proceso de Ornstein-Uhlenbeck estacionario es la solución de la ecuación (2.1), donde la matriz  $A$  tiene valores propios con partes reales negativas y  $c$  se distribuye de forma normal de media cero y varianza  $K$ , siendo  $K$  la solución de la ecuación matricial  $AK + KA' = -BB'$*

Con ello es fácil la obtención de la densidad de transición para este proceso. Concretamente se tiene:

$$X(t+s)|X(s) = x_s \rightsquigarrow N_k [e^{At}x_s; K - e^{At}Ke^{A't}]$$

Además el proceso de Ornstein-Uhlenbeck estacionario está unívocamente caracterizado por las propiedades citadas anteriormente. De hecho, esencialmente, es el único proceso de Markov Gaussiano, estacionario, continuo en probabilidad y con media cero. *Esencialmente* significa que es el único salvo transformaciones lineales. De hecho, si un proceso es estacionario, de Markov, gaussiano y continuo en probabilidad, entonces es de la forma  $X(t) + c$ , donde  $X(t)$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Además, se puede caracterizar a este proceso por su covarianza. Así se tiene:

**Teorema 2.17** *Sea  $\{X(t)\}$  un proceso Gaussiano  $k$ -variante con media cero. Entonces es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck estacionario si y sólo si su covarianza tiene la forma*

$$\text{Cov}[X(s), X(t+s)] = Ke^{B't}$$

**Teorema 2.18** *Un proceso de Markov  $k$ -variante  $\{X(t)\}$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck si y solo si para cada  $s, t$ , la distribución condicionada de  $X(s+t)$ , dada  $X(s)$  es  $N[\mu; \Sigma]$ , con momentos de la forma*

$$\begin{aligned} \mu &= e^{Bt}X(s) \\ \Sigma &= K - e^{Bt}Ke^{B't} \end{aligned}$$

donde  $K$  es una matriz de covarianza.

Las demostraciones de estos teoremas pueden verse en [47].

Además, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante, como solución de la ecuación (2.1), es un proceso de difusión ([2], p. 152-153) con media infinitesimal el vector  $Ax$  y con matriz de covarianzas infinitesimal  $BB' = -(AK + KA')$ .

### 2.3 Estimación en el proceso O.U. Multivariante.

A continuación vamos a proceder a estimar, vía muestreo discreto, los parámetros del proceso de Ornstein-Uhlenbeck introducido en la sección anterior.

Vamos a hacer alguna modificación en el planteamiento del proceso hecho con anterioridad:

1. Consideraremos una traslación ( $\mu \neq 0$ ) del proceso de Ornstein-Uhlenbeck multivariante.
2. El muestreo se realiza a intervalos regulares de tiempo.

Con ello:

1. La distribución de  $X(t), \forall t$ , es normal  $k$ -variante de media  $\mu$  y matriz de covarianzas  $\Lambda$ , con  $\Lambda$  la solución de la ecuación  $BB' = -(A\Lambda + \Lambda A')$ .<sup>1</sup>
2. La covarianza entre dos observaciones sucesivas es

$$\text{Cov}[X(s), X(s+t)] = \Lambda e^{At}$$

3. La distribución condicionada del proceso en el instante  $t+s$ , una vez conocido en el instante  $s$ , es normal  $k$ -variante. Concretamente

$$X(t+s)|X(s) = x_s \rightsquigarrow N_k [\mu + e^{At}(x_s - \mu); \Phi(t)]$$

$$\text{donde } \Phi(t) = \Lambda - e^{At}\Lambda e^{A't}$$

Consideremos un muestreo discreto del proceso  $\{X_{t_1} = x_{t_1}, \dots, X_{t_n} = x_{t_n}\}$  en los instantes  $\{t_1, \dots, t_n\}$ , donde cada  $X_{t_\alpha}$  representa el vector  $k$ -dimensional  $X_{t_\alpha} = (X_{t_\alpha,1}, \dots, X_{t_\alpha,k})$ , que escribiremos como  $X_\alpha = (X_{\alpha,1}, \dots, X_{\alpha,k})$  y del mismo modo escribiremos los valores de  $X_\alpha$  como  $x_\alpha = (x_{\alpha,1}, \dots, x_{\alpha,k})$ .

A continuación hacemos la siguiente reparametrización:

$$\Gamma = e^{At} \quad \text{para un } t \text{ fijo}$$

$$v_\alpha = x_\alpha - \mu + \Gamma\mu - \Gamma x_{\alpha-1}$$

$$v_1 = x_1 - \mu$$

<sup>1</sup>Notemos que la distribución inicial será asimismo normal de igual media y varianza.

### Obtención de las ecuaciones de verosimilitud

La función de verosimilitud asociada al proceso para la muestra dada es:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(v_1, \dots, v_n; \Lambda, \Gamma, \mu) &= (2\pi)^{-k/2} |\Lambda|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} v_1' \Lambda^{-1} v_1\right) \times \\ &\times \prod_{\alpha=2}^n (2\pi)^{-k/2} |\Phi|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} v_\alpha' \Phi^{-1} v_\alpha\right) \end{aligned}$$

y el logaritmo de ella es:

$$\begin{aligned} \log \mathbf{L}(v_1, \dots, v_n; \Lambda, \Gamma, \mu) &= -\frac{k}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\Lambda| - \frac{1}{2} (v_1' \Lambda^{-1} v_1) + \\ &+ \sum_{\alpha=2}^n \left[ -\frac{k}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\Phi| - \frac{1}{2} (v_\alpha' \Phi^{-1} v_\alpha) \right] \end{aligned}$$

Para hallar las ecuaciones de verosimilitud tenemos que hallar las parciales primeras con respecto a los parámetros, lo cual se hará a partir de la diferencial primera del logaritmo de la verosimilitud. Así se tiene <sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} d \log \mathbf{L}(v_1, \dots, v_n; \Lambda, \Gamma, \mu) &= \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} [\Lambda^{-1} (d\Lambda)] - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ [-(d\mu)' \Lambda^{-1} v_1] - v_1' \Lambda^{-1} (d\Lambda) \Lambda^{-1} v_1 - v_1' \Lambda^{-1} (d\mu) \right\} + \\ &+ \sum_{\alpha=2}^n \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{tr} [\Phi^{-1} (d\Phi)] - \right. \\ &\left. -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ [-(d\mu) + (d\Gamma)\mu + \Gamma(d\mu) - (d\Gamma)x_{\alpha-1}]' \Phi^{-1} v_\alpha - \right. \right. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>En Magnus y Neudecker, [29], podemos encontrar las siguientes relaciones:

1.  $d \log |X| = \operatorname{tr} [X^{-1} (dX)]$
2.  $d \operatorname{tr} [X^{-1}] = \operatorname{tr} [d(X^{-1})] = \operatorname{tr} [-X^{-1} (dX) X^{-1}]$

$$\begin{aligned}
& -v'_\alpha \Phi^{-1}(d\Phi)\Phi^{-1}v_\alpha + v'_\alpha \Phi^{-1}[-(d\mu) + (d\Gamma)\mu + \Gamma(d\mu) - (d\Gamma)x_{\alpha-1}]\} = \\
& = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} [\Lambda^{-1}(d\Lambda)] + \frac{1}{2} \operatorname{tr} [v'_1 \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1}v_1 + 2v'_1 \Lambda^{-1}(d\mu)] + \\
& + \sum_{\alpha=2}^n -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \Phi^{-1} [(d\Lambda) - (d\Gamma)\Lambda\Gamma' - \Gamma(d\Lambda)\Gamma' - \Gamma\Lambda(d\Gamma)'] \right\} + \\
& + \sum_{\alpha=2}^n -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ 2v'_\alpha \Phi^{-1} [-(d\mu) + (d\Gamma)\mu + \Gamma(d\mu) - (d\Gamma)x_{\alpha-1}] - \right. \\
& \quad \left. -v'_\alpha \Phi^{-1} [(d\Lambda) - (d\Gamma)\Lambda\Gamma' - \Gamma(d\Lambda)\Gamma' - \Gamma\Lambda(d\Gamma)'] \Phi^{-1}v_\alpha \right\} = \\
& = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[ \left\{ \Lambda^{-1} (v_1 v'_1 - \Lambda) \Lambda^{-1} - \Gamma' \Phi^{-1} \left( \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha v'_\alpha - (n-1)\Phi \right) \Phi^{-1} \Gamma + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \Phi^{-1} \left( \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha v'_\alpha - (n-1)\Phi \right) \Phi^{-1} \right\} (d\Lambda) \right] + \\
& + \operatorname{tr} \left[ \left\{ (n-1)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1} + \sum_{\alpha=2}^n [x_{\alpha-1} - \mu] v'_\alpha \Phi^{-1} - \Lambda\Gamma'\Phi^{-1} \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha v'_\alpha \Phi^{-1} \right\} (d\Gamma) \right] + \\
& + \operatorname{tr} \left[ \left\{ \sum_{\alpha=2}^n v'_\alpha \Phi^{-1} (I - \Gamma) + v'_1 \Lambda^{-1} \right\} (d\mu) \right] =^3 \\
& = \frac{1}{2} \operatorname{Vec} \left[ \Lambda^{-1} (v_1 v'_1 - \Lambda) \Lambda^{-1} - \Gamma' \Phi^{-1} \left( \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha v'_\alpha - (n-1)\Phi \right) \Phi^{-1} \Gamma + \right. \\
& \quad \left. + \Phi^{-1} \left( \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha v'_\alpha - (n-1)\Phi \right) \Phi^{-1} \right]' d \operatorname{Vec}(\Lambda) +
\end{aligned}$$

---

<sup>3</sup> $\operatorname{tr}[AB] = \operatorname{Vec}(A)' \operatorname{Vec}(B) = \operatorname{Vec}(B)' \operatorname{Vec}(A)$



$$\begin{aligned}
& + \text{Vec} \left[ (n-1)\Phi^{-1}\Gamma\Lambda + \Phi^{-1} \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} [x_{\alpha-1} - \mu]' - \right. \\
& \left. - \Phi^{-1} \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} v'_{\alpha} \Phi^{-1}\Gamma\Lambda \right]' d\text{Vec}(\Gamma) + \text{Vec} \left[ (I - \Gamma)' \Phi^{-1} \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} + \Lambda^{-1} v_1 \right]' d\mu
\end{aligned}$$

Igualando dicha diferencial a cero se obtiene que las ecuaciones de verosimilitud son:

$$\begin{aligned}
& \Lambda^{-1} (v_1 v'_1 - \Lambda) \Lambda^{-1} - \Gamma' \Phi^{-1} \left( \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} v'_{\alpha} - (n-1)\Phi \right) \Phi^{-1} \Gamma + \\
& + \Phi^{-1} \left( \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} v'_{\alpha} - (n-1)\Phi \right) \Phi^{-1} = 0 \\
& (n-1)\Gamma\Lambda + \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} [x_{\alpha-1} - \mu]' - \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} v'_{\alpha} \Phi^{-1}\Gamma\Lambda = 0 \\
& (I - \Gamma)' \Phi^{-1} \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} + \Lambda^{-1} v_1 = 0
\end{aligned}$$

Obviamente, estas ecuaciones han de resolverse con el uso de procedimientos numéricos.

Un caso en el cual los estimadores pueden obtenerse de forma directa a partir de las ecuaciones de verosimilitud, es aquél en el que la distribución inicial es constante (fijada por nosotros) <sup>4</sup>.

En tal caso se tienen las ecuaciones de verosimilitud siguientes

$$\begin{aligned}
& \Gamma' \Phi^{-1} \left( \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} v'_{\alpha} - (n-1)\Phi \right) \Phi^{-1} \Gamma - \Phi^{-1} \left( \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} v'_{\alpha} - (n-1)\Phi \right) \Phi^{-1} = 0 \\
& (n-1)\Gamma\Lambda + \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} [x_{\alpha-1} - \mu]' - \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} v'_{\alpha} \Phi^{-1}\Gamma\Lambda = 0
\end{aligned}$$

<sup>4</sup>Hagamos notar que en tal caso el proceso no tiene por qué ser estacionario. No obstante, si mantenemos la hipótesis de que la distribución de  $X(t)$ ,  $\forall t > t_0$ , es normal  $k$ -variante de media  $\mu$  y matriz de covarianzas  $\Lambda$ , las densidades de transición conservan la misma forma, con lo cual el procedimiento empleado hasta ahora es perfectamente válido.

$$(I - \Gamma)' \Phi^{-1} \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} = 0$$

De la primera de ellas resulta

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} v'_{\alpha}$$

mientras que de la tercera se tiene

$$\sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} = 0$$

de donde (deshaciendo la reparametrización)

$$\sum_{\alpha=2}^n x_{\alpha} - \hat{\Gamma} \sum_{\alpha=2}^n x_{\alpha-1} = (n-1)(I - \hat{\Gamma})\hat{\mu}$$

Por último, de la segunda, sustituyendo al valor de  $\hat{\Phi}$ , se tiene

$$\sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} x'_{\alpha-1} = 0$$

Realizando operaciones en esta última expresión queda

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &= \left[ \sum_{\alpha=2}^n x_{\alpha} x'_{\alpha-1} - \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n x_{\alpha} \sum_{\alpha=2}^n x'_{\alpha-1} \right] \times \\ &\times \left[ \sum_{\alpha=2}^n x_{\alpha-1} x'_{\alpha-1} - \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n x_{\alpha-1} \sum_{\alpha=2}^n x'_{\alpha-1} \right]^{-1} \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que

$$\Phi = \Lambda - \Gamma \Lambda \Gamma'$$

y haciendo uso del lema de Neudecker <sup>5</sup>, se tiene

<sup>5</sup>

$$\text{Vec}(ABC) = (C' \otimes A) \text{Vec}(B)$$

$$\text{Vec}(\hat{\Phi}) = \text{Vec}(\hat{\Lambda}) - (\hat{\Gamma} \otimes \hat{\Gamma}) \text{Vec}(\hat{\Lambda}) = [I_{k^2} - (\hat{\Gamma} \otimes \hat{\Gamma})] \text{Vec}(\hat{\Lambda})$$

con lo cual

$$\text{Vec}(\hat{\Lambda}) = [I_{k^2} - (\hat{\Gamma} \otimes \hat{\Gamma})]^{-1} \text{Vec}(\hat{\Phi})$$

concluyéndose, en lo que respecta a los parámetros  $A$  y  $\mu$ , que

$$\hat{\mu} = [I_k - \hat{\Gamma}]^{-1} \hat{\eta} ; \quad \hat{\eta} = [I_k - \hat{\Gamma}] \hat{\mu}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{t} \log(\hat{\Gamma})$$

donde  $\hat{\eta}$  se ha obtenido de la tercera ecuación. Concretamente

$$\hat{\eta} = \frac{1}{n-1} \left[ \sum_{\alpha=2}^n x_{\alpha} - \hat{\Gamma} \sum_{\alpha=2}^n x_{\alpha-1} \right]$$

En [45] puede consultarse un programa de ordenador que realiza todas estas operaciones.

### Hessiano y matriz de información.

A la hora de obtener la matriz de información vamos a considerar por separado la observación inicial de las sucesivas, con el fin de aclarar más los de por sí ya engorrosos cálculos.

Anteriormente se obtuvo, para la observación inicial, la siguiente diferencial primera:

$$d \log \mathbf{L}(v_1; \Lambda, \mu) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[ \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1}(d\Lambda) \right] + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[ -2(d\mu)' \Lambda^{-1}(d\mu) - 2v_1' \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1}(d\mu) - \right. \\
&\quad \left. -(d\mu)' \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1}v_1 - 2v_1' \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1}v_1 - v_1' \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1}(d\mu) \right] = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[ \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1}(d\Lambda) \right] - \operatorname{tr} \left[ (d\mu)' \Lambda^{-1}(d\mu) \right] - 2 \operatorname{tr} \left[ \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1}(d\mu)v_1' \right] - \\
&\quad - \operatorname{tr} \left[ \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1}v_1v_1' \right] = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Vec} \left[ \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1} \right]' d \operatorname{Vec}(\Lambda) - (d\mu)' \Lambda^{-1}(d\mu) - \\
&\quad - 2 \operatorname{Vec} \left[ \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ (d\mu)v_1' \right] - \operatorname{Vec} \left[ \Lambda^{-1}(d\Lambda)\Lambda^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ (d\Lambda)\Lambda^{-1}v_1v_1' \right] = \\
&\quad {}^6 = \frac{1}{2} \left[ (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} d \operatorname{Vec}(\Lambda) \right]' d \operatorname{Vec}(\Lambda) - (d\mu)' \Lambda^{-1}(d\mu) - \\
&\quad - 2 \left[ (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} d \operatorname{Vec}(\Lambda) \right]' [v_1 \otimes I_k] (d\mu) - \\
&\quad - \left[ (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} d \operatorname{Vec}(\Lambda) \right]' [v_1v_1'\Lambda^{-1} \otimes I_k] d \operatorname{Vec}(\Lambda) = {}^7
\end{aligned}$$

<sup>6</sup>Dadas dos matrices  $A_{n \times m}$  y  $B_{m \times q}$  se tiene

$$\operatorname{Vec}(AB) = (B' \otimes I_n) \operatorname{Vec}(A) = (I_q \otimes A) \operatorname{Vec}(B)$$

<sup>7</sup> $D_k$  es la matriz de duplicación, ([29], p.48-53), que verifica

$$\operatorname{Vec}(A) = D_k v(A)$$

donde  $A$  es una matriz cuadrada  $n$ -dimensional y donde  $v(A)$  es el vector formado a partir de  $\operatorname{Vec}(A)$ , una vez eliminados los elementos de la diagonal superior de  $A$ .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} D_k dv(\Lambda) \right]' D_k dv(\Lambda) - (d\mu)' \Lambda^{-1} (d\mu) - \\
&\quad - 2 \left[ (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} D_k dv(\Lambda) \right]' [v_1 \otimes I_k] (d\mu) - \\
&\quad - \left[ (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} D_k dv(\Lambda) \right]' [v_1 v_1' \Lambda^{-1} \otimes I_k] D_k dv(\Lambda) = \\
&= \frac{1}{2} dv(\Lambda)' D_k' (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} D_k dv(\Lambda) - (d\mu)' \Lambda^{-1} (d\mu) - \\
&\quad - 2 dv(\Lambda)' D_k' (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} [v_1 \otimes I_k] (d\mu) - \\
&\quad - dv(\Lambda)' D_k' (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} [v_1 v_1' \Lambda^{-1} \otimes I_k] D_k dv(\Lambda) = \\
&= dv(\Lambda)' D_k' (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} \left[ \frac{1}{2} I_{k^2} - [v_1 v_1' \Lambda^{-1} \otimes I_k] \right] D_k dv(\Lambda) - (d\mu)' \Lambda^{-1} (d\mu) - \\
&\quad - 2 dv(\Lambda)' D_k' (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} [v_1 \otimes I_k] (d\mu)
\end{aligned}$$

Notando

$$\bar{A} = \left[ \frac{1}{2} I_{k^2} - [v_1 v_1' \Lambda^{-1} \otimes I_k] \right]$$

tenemos que la matriz hessiana, respecto de  $\mu$  y  $v(\Lambda)$ , asociada a la observación inicial es:

$$H(v_1, \mu, \Lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\Lambda^{-1} & -[v_1' \otimes I_k] (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} D_k \\ -D_k' (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} [v_1 \otimes I_k] & \frac{1}{2} D_k' \left[ (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} \bar{A} + \bar{A}' (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} \right] D_k \end{pmatrix}$$

y la matriz de información de Fisher correspondiente vendrá dada por:

$$I_1 = -E[H]$$

Vamos, por tanto, a hallar la esperanza matemática de cada una de las submatrices anteriores:

a)

$$E \left[ D'_k (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} [v_1 \otimes I_k] \right] = D'_k (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} E [v_1 \otimes I_k] = 0$$

b)

$$E [\bar{A}] = E \left[ \frac{1}{2} I_{k^2} - [v_1 v_1' \Lambda^{-1} \otimes I_k] \right] = \frac{1}{2} I_{k^2} - E [v_1 v_1' \Lambda^{-1} \otimes I_k] =$$

$$= \frac{1}{2} I_{k^2} - [I_k \otimes I_k] = -\frac{1}{2} I_{k^2} \quad \text{y con ello}$$

$$E \left[ \frac{1}{2} D'_k [(\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} \bar{A} + \bar{A}' (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1}] D_k \right] =$$

$$= \frac{1}{2} D'_k \left[ -\frac{1}{2} (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} I_{k^2} - \frac{1}{2} (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} I_{k^2} \right] D_k = -\frac{1}{2} D'_k (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} D_k$$

c)

$$E [\Lambda^{-1}] = \Lambda^{-1}$$

De ello se deduce que la matriz de información es:

$$I_1 = \begin{pmatrix} \Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} D'_k (\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} D_k \end{pmatrix}$$

Tratemos ahora las observaciones sucesivas, considerando en principio una sola muestra a efectos de un cálculo más clarificador.

Anteriormente se calculó la expresión de la diferencial primera para el logaritmo de la verosimilitud en el caso de las observaciones sucesivas, obteniéndose, para  $\alpha \geq 2$ , la expresión siguiente:

$$-\frac{1}{2} \text{tr} [\Phi^{-1} (d\Phi)] + \text{tr} [v'_\alpha \Phi^{-1} [(I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu)]] +$$

$$+\frac{1}{2} \text{tr} \left[ v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} v_\alpha \right]$$

Vamos a continuación a obtener la diferencial segunda para así poder deducir con posterioridad la matriz hessiana asociada y por ende la matriz de información de Fisher.

$$\begin{aligned} d^2 \log \mathbb{L}(v_\alpha; \Lambda, \Gamma, \mu) &= \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} (d\Phi) \right] + \text{tr} \left[ - \left[ (I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) \right]' \times \right. \\ &\quad \times \Phi^{-1} \left[ (I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) \right] - \\ &\quad - v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} \left[ (I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) \right] + v'_\alpha \Phi^{-1} \left[ -2(d\Gamma)(d\mu) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr} \left[ - \left[ (I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) \right]' \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} v_\alpha - \right. \\ &\quad - v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} v_\alpha - v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} v_\alpha - \\ &\quad \left. - v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} \left[ (I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) \right] \right] = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \left[ \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} \right] \left[ \Phi - 2v_\alpha v'_\alpha \right] - \right. \\ &\quad - \text{tr} \left[ \left[ (I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) \right]' \Phi^{-1} \left[ (I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) \right] \right] - \\ &\quad \left. - 2 \text{tr} \left[ v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} \left[ (I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) \right] \right] - 2 \text{tr} \left[ v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Gamma)(d\mu) \right] \right] \end{aligned}$$

Procedamos ahora por partes para hacer todos los cálculos que hay implicados en la expresión anterior:

a)

Como  $d\Phi = (d\Lambda) - (d\Gamma)\Lambda\Gamma' - \Gamma(d\Lambda)\Gamma' - \Gamma\Lambda(d\Gamma')$  se tendrá:

$$\begin{aligned}
& \Phi^{-1}(d\Phi)\Phi^{-1}(d\Phi)\Phi^{-1} = \\
& = \Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1} - \Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1} - \\
& - \Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1} - \Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1} - \\
& - \Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1} + \Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1} + \\
& + \Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1} + \Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1} - \\
& - \Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1} + \Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1} + \\
& + \Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1} + \Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1} - \\
& - \Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1} + \Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1} + \\
& + \Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1} + \Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1}
\end{aligned}$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \left[ \Phi^{-1}(d\Phi)\Phi^{-1}(d\Phi)\Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \right] = \\
& = \text{tr} \left[ \Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] - \right. \\
& - 2\Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] + \\
& + \Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] - \\
& \left. - 2\Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] + \right. \\
& \left. + \Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \right]
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& +2\Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1}[\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] - \\
& -2\Phi^{-1}(d\Lambda)\Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1}[\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] + \\
& +2\Phi^{-1}\Gamma(d\Lambda)\Gamma'\Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1}[\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] + \\
& +2\Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1}[\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] + \\
& +\Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1}[\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] + \\
& +\Phi^{-1}\Gamma\Lambda(d\Gamma')\Phi^{-1}(d\Gamma)\Lambda\Gamma'\Phi^{-1}[\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha]
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \left[ [(I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu)]' \Phi^{-1} [(I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu)] \right] = \\
& = \text{tr} \left[ (d\mu)'(I_k - \Gamma)' \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu) + 2(d\mu)'(I_k - \Gamma)' \Phi^{-1} (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) + \right. \\
& \quad \left. + (x_{\alpha-1} - \mu)' (d\Gamma)' \Phi^{-1} (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) \right]
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
& \text{tr} \left[ v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Phi) \Phi^{-1} [(I_k - \Gamma)(d\mu) + (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu)] \right] = \\
& = \text{tr} \left[ v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu) + v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) - \right. \\
& \quad \left. - v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu) - v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) - \right.
\end{aligned}$$

$$-v'_\alpha \Phi^{-1} \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu) - v'_\alpha \Phi^{-1} \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) -$$

$$-v'_\alpha \Phi^{-1} \Gamma \Lambda(d\Gamma') \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu) - v'_\alpha \Phi^{-1} \Gamma \Lambda(d\Gamma') \Phi^{-1} (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu)]$$

Con todo ello, retomando la diferencial segunda, sustituyendo y simplificando convenientemente tendremos:

$$\begin{aligned} d^2 \log \mathbb{L}(v_\alpha; \Lambda, \Gamma, \mu) = & \\ = \frac{1}{2} \operatorname{tr} & \left[ \Phi^{-1}(d\Lambda) \Phi^{-1}(d\Lambda) \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] - \right. \\ & - 2\Phi^{-1}(d\Lambda) \Phi^{-1} \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] + \\ & + \Phi^{-1} \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \left. - \right. \\ & \left. - \operatorname{tr} [(d\mu)'(I_k - \Gamma)' \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu)] + \right. \\ + \frac{1}{2} \operatorname{tr} & \left[ 2\Phi^{-1}(d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] + \right. \\ & + 4v'_\alpha \Phi^{-1} \Gamma \Lambda(d\Gamma') \Phi^{-1} (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) + \\ & + \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \Gamma \Lambda(d\Gamma') \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] + \\ & + \Phi^{-1} \Gamma \Lambda(d\Gamma') \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] - \\ & - 2(d\Gamma') \Phi^{-1} (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu)(x_{\alpha-1} - \mu)' + \\ & \left. + 4v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left[ 2\Phi^{-1} \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} \Gamma \Lambda(d\Gamma') \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] + \right. \\
& \quad + 4v'_\alpha \Phi^{-1} \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) + \\
& \quad + 2\Phi^{-1} \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] - \\
& \quad - 2\Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} \Gamma \Lambda(d\Gamma') \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] - \\
& \quad - 2\Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] - \\
& \quad \left. - 4v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} (d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu) \right] - \\
& - \operatorname{tr} \left[ 2(d\Gamma') \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu)(x_{\alpha-1} - \mu)' + 2v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Gamma)(d\mu) - \right. \\
& \quad \left. - 2v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu) - 2v'_\alpha \Phi^{-1} \Gamma \Lambda(d\Gamma') \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu) \right] - \\
& - 2 \operatorname{tr} \left[ v'_\alpha \Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu) - v'_\alpha \Phi^{-1} \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu) \right] = \\
& = \frac{1}{2} \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ (d\Lambda) \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \right] - \\
& \quad - \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \right] + \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ \Gamma(d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \right] - \\
& \quad - (d\mu)' (I_k - \Gamma)' \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)(d\mu) + \\
& + \operatorname{Vec} \left[ (d\Gamma') \Phi^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha \right]' \operatorname{Vec} [(d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu)] + \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{Vec} \left[ \Gamma \Lambda (d\Gamma') \Phi^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} \Gamma \Lambda (d\Gamma') \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \right] + \\
& + \frac{1}{2} \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \right] - \\
& - \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} (d\Gamma) \right]' \operatorname{Vec} [(d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu)(x_{\alpha-1} - \mu)'] + \\
& + 2 \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} \Gamma \Lambda (d\Gamma') \Phi^{-1} v_\alpha \right]' \operatorname{Vec} [(d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu)] + \\
& + \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} \Gamma (d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ \Gamma \Lambda (d\Gamma') \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \right] + \\
& + 2 \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} \Gamma (d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha \right]' \operatorname{Vec} [(d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu)] + \\
& + \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} \Gamma (d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \right] - \\
& - \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ \Gamma \Lambda (d\Gamma') \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \right] - \\
& - \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} \right]' \operatorname{Vec} \left[ (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \right] - \\
& - 2 \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} v_\alpha \right]' \operatorname{Vec} [(d\Gamma)(x_{\alpha-1} - \mu)] - \\
& - 2 \operatorname{Vec} \left[ (I_k - \Gamma)' \Phi^{-1} (d\Gamma) \right]' \operatorname{Vec} [(d\mu)(x_{\alpha-1} - \mu)'] - \\
& - 2 \operatorname{Vec} \left[ (d\Gamma') \Phi^{-1} v_\alpha \right]' d\mu + 2 \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} \Gamma \Lambda (d\Gamma') \Phi^{-1} v_\alpha \right]' \operatorname{Vec} [(I_k - \Gamma)(d\mu)] + \\
& + 2 \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} (d\Gamma) \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha \right]' \operatorname{Vec} [(I_k - \Gamma)(d\mu)] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} (d\Lambda) \Phi^{-1} v_\alpha \right]' \operatorname{Vec} [(I_k - \Gamma)(d\mu)] + \\
& + 2 \operatorname{Vec} \left[ \Phi^{-1} \Gamma (d\Lambda) \Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha \right] \operatorname{Vec} [(I_k - \Gamma)(d\mu)] = \\
& = \frac{1}{2} dv(\Lambda)' D'_k (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes I_k \right] D_k dv(\Lambda) - \\
& - dv(\Lambda)' D'_k (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \otimes \Gamma \right] D_k dv(\Lambda) + \\
& + \frac{1}{2} dv(\Lambda)' D'_k (\Gamma' \Phi^{-1} \otimes \Gamma' \Phi^{-1}) \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \otimes \Gamma \right] D_k dv(\Lambda) - \\
& - (d\mu)' (I_k - \Gamma)' \Phi^{-1} (I_k - \Gamma) (d\mu) + \\
& + d \operatorname{Vec}(\Gamma)' I_{(k,k)} (\Phi^{-1} \otimes I_k) \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \right] d \operatorname{Vec}(\Gamma) + \\
& + 2d \operatorname{Vec}(\Gamma)' (\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha \otimes \Phi^{-1}) [(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes I_k] d \operatorname{Vec}(\Gamma) + \\
& + \frac{1}{2} d \operatorname{Vec}(\Gamma)' I_{(k,k)} (\Phi^{-1} \otimes \Lambda \Gamma') \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \right] I_{(k,k)} d \operatorname{Vec}(\Gamma) + \\
& + \frac{1}{2} d \operatorname{Vec}(\Gamma)' (\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1}) \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes I_k \right] d \operatorname{Vec}(\Gamma) - \\
& - d \operatorname{Vec}(\Gamma)' (I_k \otimes \Phi^{-1}) [(x_{\alpha-1} - \mu)(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes I_k] d \operatorname{Vec}(\Gamma) +
\end{aligned}$$

<sup>8</sup> $I_{(k,k)}$  es la matriz de permutación, (D.G.Nel, [34]), que actúa de la siguiente forma

$$A_{m \times n} \otimes B_{p \times q} = I_{(p,m)} (B_{p \times q} \otimes A_{m \times n}) I_{(n,q)}$$

$$\begin{aligned}
& +2d \text{Vec}(\Gamma)' I_{(k,k)}(\Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Lambda\Gamma'\Phi^{-1}) [(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes I_k] d \text{Vec}(\Gamma) + \\
& +dv(\Lambda)' D'_k(\Gamma'\Phi^{-1} \otimes \Gamma'\Phi^{-1}) \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes \Gamma\Lambda \right] I_{(k,k)} d \text{Vec}(\Gamma) + \\
& +2dv(\Lambda)' D'_k(\Gamma'\Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Gamma'\Phi^{-1}) [(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes I_k] d \text{Vec}(\Gamma) + \\
& +dv(\Lambda)' D'_k(\Gamma'\Phi^{-1} \otimes \Gamma'\Phi^{-1}) \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma\Lambda \otimes I_k \right] d \text{Vec}(\Gamma) - \\
& -dv(\Lambda)' D'_k(\Phi \otimes \Phi)^{-1} \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes \Gamma\Lambda \right] I_{(k,k)} d \text{Vec}(\Gamma) - \\
& -dv(\Lambda)' D'_k(\Phi \otimes \Phi)^{-1} \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma\Lambda \otimes I_k \right] d \text{Vec}(\Gamma) - \\
& -2dv(\Lambda)' D'_k(\Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Phi^{-1}) [(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes I_k] d \text{Vec}(\Gamma) - \\
& -2d \text{Vec}(\Gamma)' \left[ I_k \otimes \Phi^{-1}(I_k - \Gamma) \right] [(x_{\alpha-1} - \mu) \otimes I_k] (d\mu) - \\
& \quad -2d \text{Vec}(\Gamma)' I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1}v_\alpha \otimes I_k \right] (d\mu) + \\
& +2d \text{Vec}(\Gamma)' I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Lambda\Gamma'\Phi^{-1} \right] (I_k - \Gamma)(d\mu) + \\
& +2d \text{Vec}(\Gamma)' \left[ \Lambda\Gamma'\Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Phi^{-1} \right] (I_k - \Gamma)(d\mu) - \\
& -2dv(\Lambda)' D'_k(\Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Phi^{-1})(I_k - \Gamma)(d\mu) + \\
& +2dv(\Lambda)' D'_k(\Gamma'\Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Gamma'\Phi^{-1})(I_k - \Gamma)(d\mu)
\end{aligned}$$

Vayamos ahora por partes para ver cada una de los términos de la anterior expresión:

a)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} dv(\Lambda)' D'_k (\Phi \otimes \Phi)^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes I_k \Big] D_k dv(\Lambda) - \\
& - dv(\Lambda)' D'_k (\Phi \otimes \Phi)^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \otimes \Gamma \Big] D_k dv(\Lambda) + \\
& + \frac{1}{2} dv(\Lambda)' D'_k (\Gamma' \Phi^{-1} \otimes \Gamma' \Phi^{-1}) [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \otimes \Gamma \Big] D_k dv(\Lambda) = \\
& = dv(\Lambda)' D'_k \left[ \frac{1}{2} (\Phi \otimes \Phi)^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes I_k \right] - \\
& - (\Phi \otimes \Phi)^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes I_k \Big] (\Gamma \otimes \Gamma) + \\
& + \frac{1}{2} (\Gamma \otimes \Gamma)' (\Phi \otimes \Phi)^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes I_k \Big] (\Gamma \otimes \Gamma) \Big] D_k dv(\Lambda) = \\
& = dv(\Lambda)' \overline{A} dv(\Lambda)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& d \text{Vec}(\Gamma)' I_{(k,k)} (\Phi^{-1} \otimes I_k) [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \Big] d \text{Vec}(\Gamma) + \\
& + 2d \text{Vec}(\Gamma)' (\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha \otimes \Phi^{-1}) [(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes I_k] d \text{Vec}(\Gamma) + \\
& + \frac{1}{2} d \text{Vec}(\Gamma)' I_{(k,k)} (\Phi^{-1} \otimes \Lambda \Gamma') [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \Big] I_{(k,k)} d \text{Vec}(\Gamma) + \\
& + \frac{1}{2} d \text{Vec}(\Gamma)' (\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \otimes \Phi^{-1}) [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes I_k \Big] d \text{Vec}(\Gamma) - \\
& - d \text{Vec}(\Gamma)' (I_k \otimes \Phi^{-1}) [(x_{\alpha-1} - \mu)(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes I_k] d \text{Vec}(\Gamma) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2d \text{Vec}(\Gamma)' I_{(k,k)} (\Phi^{-1} v_\alpha \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1}) [(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes I_k] d \text{Vec}(\Gamma) = \\
& = d \text{Vec}(\Gamma)' I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \right] + \\
& \quad + 2 \left[ \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha (x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes \Phi^{-1} \right] + \\
& \quad + \frac{1}{2} I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \Phi^{-1} \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \right] I_{(k,k)} + \\
& \quad \frac{1}{2} \left[ \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Phi^{-1} \right] - \\
& \quad - \left[ (x_{\alpha-1} - \mu) (x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes \Phi^{-1} \right] + \\
& \quad + 2 I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1} v_\alpha (x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \right] d \text{Vec}(\Gamma) = \\
& = d \text{Vec}(\Gamma)' \overline{B} d \text{Vec}(\Gamma)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
& dv(\Lambda)' D'_k (\Gamma' \Phi^{-1} \otimes \Gamma' \Phi^{-1}) \left[ [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \Phi^{-1} \otimes \Gamma \Lambda \right] I_{(k,k)} d \text{Vec}(\Gamma) + \\
& \quad + 2dv(\Lambda)' D'_k (\Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha \otimes \Gamma' \Phi^{-1}) [(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes I_k] d \text{Vec}(\Gamma) + \\
& \quad + dv(\Lambda)' D'_k (\Gamma' \Phi^{-1} \otimes \Gamma' \Phi^{-1}) \left[ [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes I_k \right] d \text{Vec}(\Gamma) - \\
& \quad - dv(\Lambda)' D'_k (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \left[ [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \Phi^{-1} \otimes \Gamma \Lambda \right] I_{(k,k)} d \text{Vec}(\Gamma) - \\
& \quad - dv(\Lambda)' D'_k (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \left[ [\Phi - 2v_\alpha v_\alpha'] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes I_k \right] d \text{Vec}(\Gamma) -
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -2dv(\Lambda)'D'_k(\Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Phi^{-1})[(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes I_k] d\text{Vec}(\Gamma) = \\
& = -dv(\Lambda)'D'_k \left[ [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)'] (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \{ [2v_\alpha(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes I_k] + \right. \\
& + \left. [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes I_k \right] + \left[ \Gamma \Lambda \otimes [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \right] d\text{Vec}(\Gamma) = \\
& = dv(\Lambda)' \overline{C} d\text{Vec}(\Gamma)
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
& -2d\text{Vec}(\Gamma)' \left[ I_k \otimes \Phi^{-1}(I_k - \Gamma) \right] [(x_{\alpha-1} - \mu) \otimes I_k] (d\mu) - \\
& -2d\text{Vec}(\Gamma)' I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1}v_\alpha \otimes I_k \right] (d\mu) + \\
& +2d\text{Vec}(\Gamma)' I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \right] (I_k - \Gamma) (d\mu) + \\
& +2d\text{Vec}(\Gamma)' \left[ \Lambda \Gamma' \Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Phi^{-1} \right] (I_k - \Gamma) (d\mu) = \\
& = 2d\text{Vec}(\Gamma)' \left[ I_{(k,k)} \left\{ \left[ \Phi^{-1}v_\alpha \otimes I_k \right] \left[ \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} - I_{k^2} \right] \right\} + \right. \\
& + \left. \left\{ \left[ \Lambda \Gamma' \Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Phi^{-1} \right] - \left[ (x_{\alpha-1} - \mu) \otimes \Phi^{-1} \right] \right\} (I_k - \Gamma) \right] (d\mu) = \\
& = d\text{Vec}(\Gamma)' \overline{D} d(\mu)
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
& -2dv(\Lambda)'D'_k(\Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Phi^{-1})(I_k - \Gamma)(d\mu) + \\
& +2dv(\Lambda)'D'_k(\Gamma' \Phi^{-1}v_\alpha \otimes \Gamma' \Phi^{-1})(I_k - \Gamma)(d\mu) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2dv(\Lambda)'D'_k \left[ [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)'] (\Phi \otimes \Phi)^{-1} [v_\alpha \otimes I_k] (I_k - \Gamma) \right] (d\mu) = \\
&= dv(\Lambda)' \overline{E} (d\mu)
\end{aligned}$$

Nos encontramos ahora ya en condiciones de poder hallar cada una de las parciales segundas que configurarán la matriz hessiana que pretendemos encontrar. Así tendremos en cada caso de los expuestos anteriormente, aplicando las reglas de identificación para hessianos (Magnus y Neudecker, [29])

**a) Parcial respecto a  $v(\Lambda)$  dos veces**

En este caso se tiene que la parcial segunda es  $H_1 = \frac{1}{2}(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{A}}')$ , donde

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{A}} &= D'_k \left[ \frac{1}{2} (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes I_k \right] - \right. \\
&\quad \left. - (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes I_k \right] (\Gamma \otimes \Gamma) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\Gamma \otimes \Gamma)' (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes I_k \right] (\Gamma \otimes \Gamma) \right] D_k
\end{aligned}$$

Tras hacer operaciones la parcial es

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{4} D'_k \left[ (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes I_k \right] [I_{k^2} - 2(\Gamma \otimes \Gamma)] + \right. \\
&\quad \left. + [I_{k^2} - 2(\Gamma \otimes \Gamma)'] \left[ \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \otimes I_k \right] (\Phi \otimes \Phi)^{-1} + \right. \\
&\quad \left. + (\Gamma \otimes \Gamma)' \left\{ (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes I_k \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[ \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \otimes I_k \right] (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \right\} (\Gamma \otimes \Gamma) \right] D_k
\end{aligned}$$

**b) Parcial respecto a  $\mu$  dos veces**

En este caso la parcial segunda es

$$H_2 = -(I_k - \Gamma)' \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)$$

**c) Parcial respecto a  $\text{Vec}(\Gamma)$  dos veces**

En este caso se tiene que la parcial segunda es  $H_3 = \frac{1}{2}(\overline{B} + \overline{B}')$ , donde

$$\begin{aligned} \overline{B} = & \left[ I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \right] + \right. \\ & \left. + 2 \left[ \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha (x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes \Phi^{-1} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \right] I_{(k,k)} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left[ \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Phi^{-1} \right] - \right. \\ & \left. - \left[ (x_{\alpha-1} - \mu)(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes \Phi^{-1} \right] + 2 I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1} v_\alpha (x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \right] \right] \end{aligned}$$

Tras hacer operaciones se tiene

$$\begin{aligned} H_3 = & \frac{1}{2} B_1 \quad \text{donde} \\ B_1 = & I_{(k,k)} (I_k \otimes \Lambda \Gamma') \left\{ \left[ \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \otimes I_k \right] + \right. \\ & \left. + \left[ I_k \otimes \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \right] \right\} (\Phi \otimes \Phi)^{-1} (\Gamma \Lambda \otimes I_k) + \\ & + 2 \left[ \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha (x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes \Phi^{-1} \right] + 2 \left[ (x_{\alpha-1} - \mu) v'_\alpha \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Phi^{-1} \right] + \\ & + \left[ \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \right] + \left[ \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Phi^{-1} \right] - \\ & - 2 \left[ (x_{\alpha-1} - \mu)(x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes \Phi^{-1} \right] + 2 I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1} v_\alpha (x_{\alpha-1} - \mu)' \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \right] + \\ & + 2 I_{(k,k)} \left[ \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes (x_{\alpha-1} - \mu) v'_\alpha \Phi^{-1} \right] \end{aligned}$$

d) **Parcial respecto a  $v(\Lambda)$  y  $\text{Vec}(\Gamma)$ .**

En este caso se tiene que la parcial segunda es  $H_4 = \frac{1}{2}\overline{C}$ , donde

$$\begin{aligned}\overline{C} = & -D'_k \left[ [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)'] (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \{ [2v_\alpha(x_{\alpha-1} - \mu)'] \otimes I_k \} + \right. \\ & \left. + [ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes I_k ] + [ \Gamma \Lambda \otimes [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} ] \right]\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}H_4 = & -\frac{1}{2}D'_k \left[ [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)'] (\Phi \otimes \Phi)^{-1} \{ [2v_\alpha(x_{\alpha-1} - \mu)'] \otimes I_k \} + \right. \\ & \left. + [ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes I_k ] + [ \Gamma \Lambda \otimes [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} ] \right]\end{aligned}$$

e) **Parcial respecto a  $\text{Vec}(\Gamma)$  y  $\mu$**

En este caso se tiene que la parcial segunda es  $H_5 = \frac{1}{2}\overline{D}$ , donde

$$\begin{aligned}\overline{D} = & 2 \left[ I_{(k,k)} \left\{ [\Phi^{-1} v_\alpha \otimes I_k] [\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} - I_{k^2}] \right\} + \right. \\ & \left. + \left\{ [\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha \otimes \Phi^{-1}] - [(x_{\alpha-1} - \mu) \otimes \Phi^{-1}] \right\} (I_k - \Gamma) \right]\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}H_5 = & I_{(k,k)} \left\{ [\Phi^{-1} v_\alpha \otimes I_k] [\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} - I_{k^2}] \right\} + \\ & + \left\{ [\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} v_\alpha \otimes \Phi^{-1}] - [(x_{\alpha-1} - \mu) \otimes \Phi^{-1}] \right\} (I_k - \Gamma)\end{aligned}$$

f) **Parcial respecto a  $v(\Lambda)$  y  $\mu$**

En este caso se tiene que la parcial segunda es  $H_6 = \frac{1}{2}\overline{E}$ , donde

$$\overline{E} = -2D'_k [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)'] (\Phi \otimes \Phi)^{-1} [v_\alpha \otimes I_k] (I_k - \Gamma)$$

por lo que

$$H_6 = -D'_k [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)'] (\Phi \otimes \Phi)^{-1} [v_\alpha \otimes I_k] (I_k - \Gamma)$$

De ello se deduce que la matriz hessiana buscada es:

$$H(v_\alpha, \Lambda, \mu, \Gamma) = \begin{pmatrix} H_1 & H_6 & H_4 \\ H'_6 & H_2 & H_5 \\ H'_4 & H'_5 & H_3 \end{pmatrix}$$

Para concluir nos falta hallar la matriz de información de Fisher. Para ello primeramente se calcularán las esperanzas de cada una de las submatrices anteriores:

a) Esperanza matemática de  $H_1$

$$\begin{aligned} E[H_1] &= \bar{I}_{11} = \\ &= \frac{1}{4} D'_k \left[ -(\Phi \otimes \Phi)^{-1} [I_{k^2} - 2(\Gamma \otimes \Gamma)] - [I_{k^2} - 2(\Gamma \otimes \Gamma)]' (\Phi \otimes \Phi)^{-1} - \right. \\ &\quad \left. -2(\Gamma \otimes \Gamma)' (\Phi \otimes \Phi)^{-1} (\Gamma \otimes \Gamma) \right] D_k = \\ &= -\frac{1}{2} D'_k [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)]' (\Phi \otimes \Phi)^{-1} [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)] D_k \end{aligned}$$

dado que

$$E \left[ [\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha] \Phi^{-1} \otimes I_k \right] = [E[\Phi - 2v_\alpha v'_\alpha]] \Phi^{-1} \otimes I_k = -I_k \otimes I_k = -I_{k^2}$$

b) Esperanza matemática de  $H_2$

$$E[H_2] = \bar{I}_{22} = -(I_k - \Gamma)' \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)$$

c) Esperanza matemática de  $H_3$

$$\begin{aligned} E[H_3] &= \bar{I}_{33} = -I_{(k,k)} (I_k \otimes \Lambda \Gamma') (\Phi \otimes \Phi)^{-1} (\Gamma \Lambda \otimes I_k) - \\ &\quad - (\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Phi^{-1}) - (\Lambda \otimes \Phi^{-1}) = \\ &= - \left[ (\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Phi^{-1}) + (\Lambda \otimes \Phi^{-1}) + (\Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1})_{(k)} \right] \end{aligned}$$

Donde se ha hecho uso, además de los resultados anteriores, de

$$E[(x_{\alpha-1} - \mu)(x_{\alpha-1} - \mu)'] = \Lambda$$

$$\begin{aligned} E[v_{\alpha}(x_{\alpha-1} - \mu)'] &= E[((x_{\alpha} - \mu) - \Gamma(x_{\alpha-1} - \mu))(x_{\alpha-1} - \mu)'] = \\ &= E[(x_{\alpha} - \mu)(x_{\alpha-1} - \mu)' - \Gamma(x_{\alpha-1} - \mu)(x_{\alpha-1} - \mu)'] = \Gamma\Lambda - \Gamma\Lambda = 0 \end{aligned}$$

$$E[(x_{\alpha-1} - \mu)v_{\alpha}'] = 0$$

así como de la permutación  $k$ -cíclica de las filas de una matriz, como definieron Tracy y Dwyer, [53].<sup>9</sup>

**d) Esperanza matemática de  $H_4$**

$$\begin{aligned} E[H_4] &= \bar{I}_{13} = -\frac{1}{2}D'_k [[I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)'](\Phi \otimes \Phi)^{-1} [-(\Gamma\Lambda \otimes I_k) - (\Gamma\Lambda \otimes I_k)]] = \\ &= D'_k [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)'](\Phi \otimes \Phi)^{-1}(\Gamma\Lambda \otimes I_k) \end{aligned}$$

**e) Esperanza matemática de  $H_5$**

$$E[H_5] = \bar{I}_{23} = 0$$

Puesto que  $E[v_{\alpha}] = 0$  y  $E[(x_{\alpha-1} - \mu)] = 0$

**f) Esperanza matemática de  $H_6$**

$$E[H_6] = \bar{I}_{12} = 0$$

Con todo ello, la matriz de información resulta ser:

$$I_2 = -E[H] = - \begin{pmatrix} \bar{I}_{11} & \bar{I}_{12} & \bar{I}_{13} \\ \bar{I}'_{12} & \bar{I}_{22} & \bar{I}_{23} \\ \bar{I}'_{13} & \bar{I}'_{23} & \bar{I}_{33} \end{pmatrix}$$

---

<sup>9</sup>

$$I_{(p,m)}(B_{p \times q} \otimes A_{m \times n}) = (B \otimes A)_{(m)}$$

y si consideramos las  $(n - 1)$  observaciones se tendrá

$$I_3 = -(n - 1) \begin{pmatrix} \bar{I}_{11} & \bar{I}_{12} & \bar{I}_{13} \\ \bar{I}'_{12} & \bar{I}'_{22} & \bar{I}'_{23} \\ \bar{I}'_{13} & \bar{I}'_{23} & \bar{I}'_{33} \end{pmatrix}$$

por último, considerando el total de observaciones, conjuntamente con la inicial, se tiene

$$I = \begin{pmatrix} I_\Lambda & 0 & I_{\Lambda\Gamma} \\ 0 & I_\mu & 0 \\ I'_{\Lambda\Gamma} & 0 & I_\Gamma \end{pmatrix}$$

donde

1.

$$I_\Lambda = \frac{1}{2} D'_k \times \\ \times [(\Lambda \otimes \Lambda)^{-1} + (n - 1) [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)'] (\Phi \otimes \Phi)^{-1} [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)]] D_k$$

2.

$$I_{\Lambda\Gamma} = -(n - 1) D'_k [I_{k^2} - (\Gamma \otimes \Gamma)'] (\Phi \otimes \Phi)^{-1} (\Gamma \Lambda \otimes I_k)$$

3.

$$I_\mu \Lambda^{-1} + (n - 1) (I_k - \Gamma)' \Phi^{-1} (I_k - \Gamma)$$

4.

$$I_\Gamma = (n - 1) [(\Lambda \Gamma' \Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Phi^{-1}) + (\Lambda \otimes \Phi^{-1}) + (\Phi^{-1} \Gamma \Lambda \otimes \Lambda \Gamma' \Phi^{-1})_{(k)}]$$

## 2.4 Proceso de Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos

### Introducción

El proceso de Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos surge al introducir, en el coeficiente tendencia del proceso homogéneo, una determinada función del tiempo, llamada factor exógeno, que pudiera influir en dicha tendencia.

Dicha función irá acompañada de unos parámetros que medirán el grado de influencia que dicho factor exógeno ejerce sobre el proceso, parámetros que serán desconocidos y por lo tanto habrá que estimar.

En el caso de muestreo continuo, esta situación ha sido abordada por García, Gutiérrez y Hermoso, [17], obteniendo los estimadores de máxima verosimilitud y estudiando algunas de sus propiedades.

Nuestro objetivo va a ser el de plantear este problema pero haciendo uso del muestreo discreto de las trayectorias del proceso. Vamos a plantear la situación general en el caso unidimensional y nos centraremos con posterioridad en un caso particular de factor exógeno (a título de ejemplo) puesto que, como se verá, la estructura de covarianza hace ciertamente complicado el tratamiento general (y aún lo sería más en el caso multidimensional).

La estimación se llevará a cabo por máxima verosimilitud, observándose cómo es preciso hacer uso de métodos numéricos para la resolución de las ecuaciones resultantes, lo cual incide aún más en la complicación que adquiere este problema.

Finalmente, mostraremos un ejemplo realizado por simulación, que muestra las posibilidades del método empleado.

### Obtención del proceso

Consideremos la ecuación diferencial estocástica lineal

$$\begin{aligned} dX_t &= -g(t)X_t dt + \sigma dW_t \\ X_{t_0} &= H ; 0 \leq t_0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

donde  $\sigma > 0$ ,  $W_t$  es el proceso de Wiener estándar unidimensional y  $g$  es una función continua en el intervalo  $[t_0, T]$

En tales condiciones, ([2], p.128), la ecuación anterior posee una única solución continua en el intervalo  $[t_0, T]$ , que corresponde al proceso de Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos <sup>10</sup>.

Además, sus momentos vienen dados por las relaciones

$$m(t) = e^{-\int_{t_0}^t g(v)dv} E[H]$$

$$K(s, t) = e^{-\int_{t_0}^s g(v)dv} \left[ \text{Cov}[H] + \sigma^2 \int_{t_0}^{\text{Min}(t,s)} e^{2\int_{t_0}^u g(v)dv} du \right] e^{-\int_{t_0}^t g(v)dv}$$

<sup>10</sup>Sobre la variable  $H$  hay que imponer (para que la solución sea un proceso Gaussiano) que sea constante o bien normalmente distribuida ([2], p. 132)



de donde:

$$K(s, t) = e^{-2 \int_{t_0}^s g(v) dv} e^{-\int_s^t g(v) dv} \left[ \text{Cov}[H] + \sigma^2 \int_{t_0}^s e^{2 \int_{t_0}^u g(v) dv} du \right] \quad (t \geq s)$$

$$K(s, t) = e^{-2 \int_{t_0}^t g(v) dv} e^{-\int_t^s g(v) dv} \left[ \text{Cov}[H] + \sigma^2 \int_{t_0}^t e^{2 \int_{t_0}^u g(v) dv} du \right] \quad (t \leq s)$$

Con ello podemos construir la densidad de transición para este proceso. Concretamente, si  $t \geq s$ , se tendrá:

$$X(t)|X(s) = x_s \rightsquigarrow N \left[ e^{-\int_s^t g(v) dv} x_s; \sigma^2 e^{-2 \int_s^t g(v) dv} \int_s^t e^{2 \int_s^u g(v) dv} du \right]$$

## 2.5 Estimación en el proceso O.U. con factores exógenos.

### Planteamiento general

Consideremos una muestra discreta del proceso  $\{x_{t_1}, \dots, x_{t_n}\}$  (que notaremos por comodidad  $\{x_1, \dots, x_n\}$ ) tomada en los instantes de tiempo  $\{t_1, \dots, t_n\}$ . Asimismo consideremos en este caso que  $P[X(t_1) = x_{t_1}] = 1$ , con lo cual se tiene la verosimilitud

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(x_2, \dots, x_n) &= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \left[ e^{-2 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} g(v) dv} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} e^{2 \int_{t_{\alpha-1}}^u g(v) dv} du \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha=2}^n \frac{\left[ x_\alpha - x_{\alpha-1} e^{-\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} g(v) dv} \right]^2}{e^{-2 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} g(v) dv} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} e^{2 \int_{t_{\alpha-1}}^u g(v) dv} du} \right) \end{aligned}$$

El logaritmo de dicha verosimilitud será:

$$\log \mathbb{L}(x_2, \dots, x_n) = -\frac{n-1}{2} \log(2\pi) - \frac{n-1}{2} \log(\sigma^2) -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n \log \left( e^{-2 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_{\alpha}} g(v) dv} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_{\alpha}} e^{2 \int_{t_{\alpha-1}}^u g(v) dv} du \right) -$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha=2}^n \frac{\left[ x_{\alpha} - x_{\alpha-1} e^{-\int_{t_{\alpha-1}}^{t_{\alpha}} g(v) dv} \right]^2}{e^{-2 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_{\alpha}} g(v) dv} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_{\alpha}} e^{2 \int_{t_{\alpha-1}}^u g(v) dv} du}$$

Observemos cómo la forma que adopta la varianza de la transición hace prácticamente imposible abordar el problema de forma genérica. Por ello vamos a mostrar un caso concreto.

### Caso particular

Tomemos la función

$$g(t) = \frac{\theta}{t+1} \quad \text{con } \theta > -\frac{1}{2}$$

Con ello se tiene que los momentos de la transición serán:

$$E[X(t)|X(s) = x_s] = x_s \left( \frac{s+1}{t+1} \right)^{\theta}$$

$$\text{Var}[X(t)|X(s) = x_s] = \frac{\sigma^2}{2\theta+1} \left[ (t+1) - (s+1) \left( \frac{s+1}{t+1} \right)^{2\theta} \right]$$

Con ello el logaritmo de la verosimilitud queda de la forma

$$\log L(x_2, \dots, x_n; \theta, \sigma^2) = -\frac{n-1}{2} \log(2\pi) - \frac{n-1}{2} \log(\sigma^2) + \frac{n-1}{2} \log(2\theta+1) -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n \log \left( (t_{\alpha}+1) - (t_{\alpha-1}+1) \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_{\alpha}+1} \right)^{2\theta} \right) -$$

$$-\frac{2\theta+1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha=2}^n \frac{\left[ x_{\alpha} - x_{\alpha-1} \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_{\alpha}+1} \right)^{\theta} \right]^2}{(t_{\alpha}+1) - (t_{\alpha-1}+1) \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_{\alpha}+1} \right)^{2\theta}}$$

En cuanto a las parciales de la verosimilitud se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n-1}{2\sigma^2} + \frac{2\theta+1}{2\sigma^4} \sum_{\alpha=2}^n \frac{\left[ x_\alpha - x_{\alpha-1} \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^\theta \right]^2}{(t_\alpha+1) - (t_{\alpha-1}+1) \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^{2\theta}} \\ \frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \theta} &= \frac{n-1}{2\theta+1} + \sum_{\alpha=2}^n \frac{(t_{\alpha-1}+1) \log \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right) \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^{2\theta}}{(t_\alpha+1) - (t_{\alpha-1}+1) \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^{2\theta}} - \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{\alpha=2}^n \frac{\left[ x_\alpha - x_{\alpha-1} \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^\theta \right]^2}{(t_\alpha+1) - (t_{\alpha-1}+1) \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^{2\theta}} + \\ &\quad + \frac{2\theta+1}{\sigma^2} \sum_{\alpha=2}^n \frac{\log \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right) \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^\theta \left[ x_\alpha - x_{\alpha-1} \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^\theta \right]}{\left[ (t_\alpha+1) - (t_{\alpha-1}+1) \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^{2\theta} \right]^2} \times \\ &\quad \times \left[ x_{\alpha-1}(t_\alpha+1) - x_\alpha(t_{\alpha-1}+1) \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^\theta \right] \end{aligned}$$

Planteamos las ecuaciones de verosimilitud

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \theta} = 0$$

obteniéndose, de la primera:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\theta}+1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n \frac{\left[ x_\alpha - x_{\alpha-1} \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^{\hat{\theta}} \right]^2}{(t_\alpha+1) - (t_{\alpha-1}+1) \left( \frac{t_{\alpha-1}+1}{t_\alpha+1} \right)^{2\hat{\theta}}}$$

mientras que de la segunda se tiene

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=2}^n \frac{(t_{\alpha-1} + 1) \log \left( \frac{t_{\alpha-1} + 1}{t_{\alpha} + 1} \right) \left( \frac{t_{\alpha-1} + 1}{t_{\alpha} + 1} \right)^{2\hat{\theta}}}{(t_{\alpha} + 1) - (t_{\alpha-1} + 1) \left( \frac{t_{\alpha-1} + 1}{t_{\alpha} + 1} \right)^{2\hat{\theta}}} + \\
& + \frac{2\hat{\theta} + 1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{\alpha=2}^n \frac{\log \left( \frac{t_{\alpha-1} + 1}{t_{\alpha} + 1} \right) \left( \frac{t_{\alpha-1} + 1}{t_{\alpha} + 1} \right)^{\hat{\theta}} \left[ x_{\alpha} - x_{\alpha-1} \left( \frac{t_{\alpha-1} + 1}{t_{\alpha} + 1} \right)^{\hat{\theta}} \right]}{\left[ (t_{\alpha} + 1) - (t_{\alpha-1} + 1) \left( \frac{t_{\alpha-1} + 1}{t_{\alpha} + 1} \right)^{2\hat{\theta}} \right]^2} \times \\
& \times \left[ x_{\alpha-1} (t_{\alpha} + 1) - x_{\alpha} (t_{\alpha-1} + 1) \left( \frac{t_{\alpha-1} + 1}{t_{\alpha} + 1} \right)^{\hat{\theta}} \right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $\hat{\sigma}^2$  en la segunda expresión, tenemos una ecuación bastante compleja para calcular el valor de  $\hat{\theta}$ , por lo que será necesario el empleo de métodos numéricos para su resolución.

### Ejemplo Numérico

A continuación mostramos un ejemplo en el que se hace uso de las expresiones anteriores para la estimación del proceso.

Los datos muestrales han sido simulados haciendo uso del algoritmo propuesto por Rao, [39], basado en la discretización de la ecuación estocástica integral que define al proceso de difusión, y que puede verse con más detalle en el apéndice C.

Asimismo, puede verse, en la segunda sección del apéndice D, el programa de ordenador con el cual ha sido simulada la trayectoria y estimado los valores de la difusión.

Los resultados obtenidos han sido:

SIMULACION				
Número de datos de la trayectoria	$h$	Valor Inicial	$\theta$	$\sigma$
100	0.01	3	0.5	0.25

ESTIMACION	
$\hat{\theta}$	$\hat{\sigma}$
0.5404686	0.2501877



## CAPITULO 2

# Inferencia en el Proceso Lognormal Multivariante con Factores Exógenos.

### 1 Introducción

El proceso de difusión lognormal ha sido amplio objeto de estudio en los últimos años; así Tintner y Sengupta, [52], estudiaron el caso unidimensional, aplicándolo a diversos problemas en economía.

Este proceso es especialmente interesante en predicción, debido a su tendencia de tipo exponencial y a la facilidad de introducir en él factores exógenos que afecten a dicha tendencia; en efecto, uno puede influir sobre las variables endógenas modelizadas por el proceso a través de variables exógenas elegidas de forma adecuada al problema considerado y al tipo de tratamiento matemático a realizar con posterioridad.

Asimismo, la aplicación del método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros del proceso y los coeficientes que afectan a los factores exógenos, han ayudado a resaltar la importancia de este proceso.

Con posterioridad, el caso multidimensional ha sido tratado por Tintner y Narayanan, [51], aplicándolo al campo de la economía. Tintner y Gómez, [50], iniciaron el estudio de este proceso desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales estocásticas, lo cual hizo posible el uso de métodos de la teoría de sistemas estocásticos.

Centrándonos ya en el proceso de difusión logarítmico normal multidimensional con factores exógenos, Gutiérrez, Hermoso y Molina, [21], estudiaron este

proceso como solución de una ecuación diferencial estocástica de Itô, y por medio de muestreo continuo obtuvieron la estimación máximo verosímil del vector asociado con los factores exógenos, probando, bajo ciertas condiciones sobre dichos factores, su consistencia y normalidad asintótica.

Asimismo Hermoso, [26], y Gutiérrez, Hermoso y Molina, [22], construyeron contrastes basados en la razón de verosimilitudes sobre los parámetros del coeficiente tendencia.

Recientemente, Gutiérrez, González, Angulo y Pérez, [23], trataron asimismo el problema de la estimación de los parámetros a partir de las ecuaciones de Kolmogorov. Concretamente, usando muestreo discreto, obtuvieron (en el caso de dos factores exógenos) la estimación de los parámetros del modelo por máxima verosimilitud, método ya iniciado por Tintner y Sengupta, [52] y por Gutiérrez, [20], extendiendo los resultados de Tintner y Sengupta y obteniendo expresiones para la estimación de la tendencia y la matriz de covarianzas del proceso.

En este capítulo pretendemos generalizar los resultados anteriormente citados, basados en muestreo discreto, al caso de  $q > 2$  factores exógenos.

Primeramente presentaremos el proceso desde dos puntos de vista: como solución de una ecuación diferencial estocástica y a partir de las ecuaciones de Kolmogorov. Tras ello abordaremos la estimación de los parámetros y su distribución, para lo cual volveremos a hacer uso del Cálculo Matricial, ya introducido en el capítulo anterior. Asimismo calcularemos la matriz de información de Fisher y la cota de Crámer-Rao.

También plantearemos contrastes basados en la razón de verosimilitudes para los parámetros que ponderan el efecto de los factores exógenos. Con dichos contrastes podremos:

1. Contrastar la posible influencia o no de algún factor sobre el proceso (o algunos de forma conjunta).
2. Contrastar la posible independencia de las componentes del vector de variables endógenas.

En los casos en que sea posible se mostrará la distribución exacta del cociente de razón de verosimilitudes resultante, proponiendo desarrollos asintóticos en los que este hecho no sea posible.

Ilustraremos todo ello con un ejemplo práctico, haciendo uso de un conjunto de datos, suficientemente conocido en la literatura, como es el empleado por Tintner, [50]. Para elaborar dicho ejemplo se ha empleado un programa de

ordenador diseñado a tal efecto y que puede consultarse en la sección primera del apéndice D.

## 2 El Proceso Lognormal Multivariante

### 2.1 Aproximación vía las ecuaciones de Kolmogorov

En primer lugar vamos a introducir el proceso de difusión logarítmico normal con factores exógenos por medio de las ecuaciones adelantadas y atrasadas de Kolmogorov.

Sea  $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$  un proceso de Markov con valores en  $(0, +\infty)^k$ , con trayectorias continuas casi seguro y con probabilidad de transición dada por

$$P(x, t|y, s) = P[X(t) = x|X(s) = y]$$

con  $X(t) = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ ,  $X(s) = (X_{s_1}, \dots, X_{s_k})$  y donde  $x$  e  $y$  son vectores  $k$ -dimensionales. Supongamos las siguientes condiciones:

1.  $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|x-y| > \epsilon} P(dx, t+h|y, s) = 0$
2.  $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|x-y| \leq \epsilon} (x-y)P(dx, t+h|y, s) = f(x, t) =$ 

$$= \begin{pmatrix} \left( f_{10} + \sum_{j=1}^q f_{1j} F_j(t) \right) x_1 \\ \left( f_{20} + \sum_{j=1}^q f_{2j} F_j(t) \right) x_2 \\ \vdots \\ \left( f_{k0} + \sum_{j=1}^q f_{kj} F_j(t) \right) x_k \end{pmatrix}$$

con  $F_j$  funciones continuas en  $[t_0, T]$

3.  $\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|x-y| \leq \epsilon} (x-y)(x-y)' P(dx, t+h|y, s) = B(x, t)$

donde  $B(x, t)$  es una matriz simétrica definida no negativa con elementos  $b_{ij}(x, t) = b_{ij}x_i x_j$ ;  $b_{ij} > 0$



4. Los momentos infinitesimales de orden superior son nulos.

En estas condiciones, así como bajo ciertas propiedades de diferenciabilidad de  $P(x, t|y, s)$ , se pueden obtener las ecuaciones adelantadas y atrasadas de Kolmogorov

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{ij} y_i y_j \frac{\partial^2 p}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^k \left( f_{i0} + \sum_{l=1}^q f_{il} F_l(t) \right) y_i \frac{\partial p}{\partial y_i} = 0 \quad (2.1)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{ij} \frac{\partial^2 (x_i x_j p)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^k \left( f_{i0} + \sum_{l=1}^q f_{il} F_l(t) \right) \frac{\partial (x_i p)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

donde  $p = p(x, t|y, s)$  es la función de densidad de transición.

La solución común de estas ecuaciones, con la condición inicial

$$p(x, s|y, s) = \delta(x - y)$$

es

$$p(x, t|y, s) = \left[ \left( \prod_{i=1}^k x_i \right) (2\pi)^{\frac{k}{2}} (t-s)^{\frac{k}{2}} |B|^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} \exp \left( -\frac{1}{2(t-s)} Q \right) \quad (2.3)$$

donde  $B$  es la matriz de elementos  $b_{ij}$  y donde  $Q$  es la forma cuadrática

$$Q = \left( \log(x) - \log(y) - \beta_0(t-s) - \sum_{i=1}^k \beta_i \int_s^t F_i(\tau) d\tau \right)' \times \\ \times B^{-1} \left( \log(x) - \log(y) - \beta_0(t-s) - \sum_{i=1}^k \beta_i \int_s^t F_i(\tau) d\tau \right)$$

**Observación 2.1** En la anterior densidad condicionada hemos notado:

$$\beta_0 = \left( f_{10} - \frac{1}{2} b_{11}, \dots, f_{k0} - \frac{1}{2} b_{kk} \right)' = f_0 - \frac{1}{2} \text{diag}(B)$$

$$\beta_i = (f_{1i}, \dots, f_{ki})' \quad i = 1, \dots, q$$

## 2.2 El Proceso Lognormal como solución de una E.D.E.

Supongamos la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = A(X_t, t)dt + B^{\frac{1}{2}}(X_t, t)dW_t$$

$$X_{t_0} = H \quad t_0 \leq t \leq T$$

donde  $\{W_t; t_0 \leq t \leq T\}$  es un proceso de Wiener  $k$ -dimensional con componentes independientes,  $H$  es un vector fijo de  $(0, +\infty)^k$ ,  $x \in (0, +\infty)^k$  para todo  $t \in [t_0, T]$ , siendo  $A(x, t)$  un vector  $k$ -dimensional y  $B(x, t)$  una matriz cuadrada de orden  $k$ , dadas por:

$$A_j(x, t) = \left( \sum_{i=0}^q f_{ij} F_i(t) \right) x_j \quad j = 1, \dots, k$$

$$B_{ij}(x, t) = b_{ij} x_i x_j, \quad b_{ij} > 0; \quad i, j = 1, \dots, k$$

donde  $F_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ), son funciones conocidas, continuas en  $[t_0, T]$  y con valores en  $\mathbb{R}$ ,  $F_0(t) = 1$ ,  $f = (f_{10}, \dots, f_{1q}, \dots, f_{k0}, \dots, f_{kq})'$  es un vector real  $k(q+1)$ -dimensional y  $B = (b_{ij})$  es una matriz simétrica y definida no negativa.

**Proposición 2.2** Sean las funciones anteriores  $A, \forall f \in \mathbb{R}^{k(q+1)}$  y  $B$ , definidas sobre  $[t_0, T] \times (0, +\infty)^k$ . Entonces existe  $Q > 0$  tal que  $\forall t \in [t_0, T]$  y  $\forall x, y \in (0, +\infty)^k$  se verifica:

$$1. \|A(x, t) - A(y, t)\| + \|B^{\frac{1}{2}}(x, t) - B^{\frac{1}{2}}(y, t)\| \leq Q \|x - y\|$$

$$2. \|A(x, t)\|^2 + \|B^{\frac{1}{2}}\|^2 \leq Q^2 (1 + \|x\|^2)$$

considerando la norma euclídea de un vector y tomando como norma de una matriz  $C$ ,  $\|C\| = [\text{tr}[CC^T]]^{\frac{1}{2}}$

### Demostración

La demostración es inmediata sin más que tomar:

$$Q = K_1^{\frac{1}{2}} + K_2^{\frac{1}{2}}$$

donde

$$K_1 = \text{Max}_{1 \leq i \leq K} \left\{ \text{Max}_{t_0 \leq t \leq T} \left[ \sum_{j=0}^q f_{ij} F_j(t) \right]^2 \right\}$$

y

$$K_2 = \text{Max}_{1 \leq i \leq K} \{b_{ii}\} \quad \blacksquare$$

Considerando la proposición anterior, así como las propiedades analíticas de las funciones  $A$  y  $B$ , se tiene que, para un valor  $f$  dado, se verifican las condiciones del teorema de existencia y unicidad de solución para ecuaciones diferenciales estocásticas, [2]. Por lo tanto la ecuación diferencial anterior posee una única solución, que será un proceso de difusión  $(0, +\infty)^k$  valuado con condición inicial  $H$ , media infinitesimal  $A(x, t)$  y varianza infinitesimal  $B(x, t)$ . A este proceso se le llama proceso logarítmico normal con  $q$  factores exógenos, que son precisamente las funciones  $F_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ .

### 3 Momentos de las variables endógenas

Si consideramos la variable  $Z(t) = \log X(t) | X(s) = x_s$  se tiene de forma inmediata que su distribución es normal

$$N_k \left[ \log(x_s) + \beta_0(t-s) + \sum_{i=1}^q \beta_i \int_s^t F_i(\tau) d\tau; (t-s)B \right]$$

de donde la función generatriz para  $Z(t)$  vendrá dada por

$$\begin{aligned} E \left[ e^{\sigma' Z(t)} \right] &= \\ &= \exp \left( \sigma' \left[ \log(x_s) + \beta_0(t-s) + \sum_{i=1}^q \beta_i \int_s^t F_i(\tau) d\tau \right] + \frac{1}{2} (t-s) \sigma' B \sigma \right) \end{aligned}$$

Con ello es fácil el cálculo de la media y las varianzas-covarianzas de las variables endógenas <sup>1</sup>, lo cual será de utilidad a la hora de estimar la tendencia del proceso y la dispersión de tal estimación.

<sup>1</sup>Notemos que los momentos son funciones de  $X(s)$ , ya que son los momentos de  $X(t)$  condicionados a  $X(s)$ .

$$V_t = (t - s)^{-\frac{1}{2}} (\log(X_t) - \log(x_s))$$

esta nueva variable sigue una distribución normal,  $V_t \sim N_k(\beta U_t; B)$ , donde

$$U_t = (t - s)^{-\frac{1}{2}} \left( t - s, \int_s^t F_1(\tau) d\tau, \dots, \int_s^t F_q(\tau) d\tau \right)'$$

Podemos expresar la densidad de  $X_t$  a partir de las expresiones anteriores así (empleamos  $v$  y  $u$  por comodidad de notación):

$$f(x_t, t | x_s, s) =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |B|^{-\frac{1}{2}} \left( \prod_{i=1}^k x_{ti}^{-1} \right) (t - s)^{-\frac{k}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (v_t - \beta u_t)' B^{-1} (v_t - \beta u_t) \right)$$

y, del mismo modo, la expresión de la densidad de  $V_t$  que es

$$f(v_t, t | v_s, s) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |B|^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{1}{2} (v_t - \beta u_t)' B^{-1} (v_t - \beta u_t) \right)$$

Consideremos un muestreo discreto del proceso  $\{X_{t_1} = x_{t_1}, \dots, X_{t_n} = x_{t_n}\}$  en los instantes  $\{t_1, \dots, t_n\}$  donde cada  $X_{t_\alpha}$  representa el vector  $k$ -dimensional

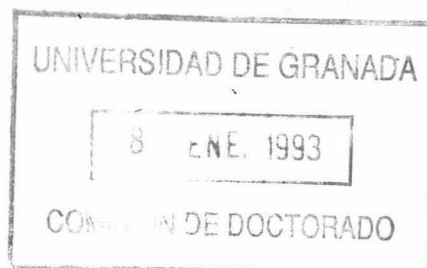
$$X_{t_\alpha} = (X_{t_\alpha,1}, X_{t_\alpha,2}, \dots, X_{t_\alpha,k})$$

que escribiremos abreviadamente como  $X_\alpha = (X_{\alpha,1}, \dots, X_{\alpha,k})$  y del mismo modo, escribiremos los valores de  $X_\alpha$  como  $x_\alpha = (x_{\alpha,1}, \dots, x_{\alpha,k})$ . Análoga notación seguiremos con  $U_\alpha, V_\alpha$ , etc.

Consideramos también la condición inicial  $P[X_1 = x_1] = 1$ .

En estas condiciones la función de verosimilitud asociada al proceso para la muestra dada es

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(x_1, \dots, x_n; \beta, B) &= p[x_1; t_1] \cdots p[x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}] = \\ &= (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |B|^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \left( \prod_{i=1}^k x_{\alpha i}^{-1} \right) (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{k}{2}} \times \\ &\quad \times \exp \left( -\frac{1}{2} (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right) \end{aligned}$$



o, en términos de  $v_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{1}{2}} [\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1})]$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) &= \\ &= (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |B|^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \exp\left(-\frac{1}{2}(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(v_\alpha - \beta u_\alpha)\right) \end{aligned}$$

El logaritmo de esta función es

$$\begin{aligned} \log \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) &= \\ &= -\frac{(n-1)k}{2} \log(2\pi) - \frac{n-1}{2} \log |B| - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(v_\alpha - \beta u_\alpha) \right\} \end{aligned}$$

Calculemos la diferencial de este logaritmo

$$\begin{aligned} d \log \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) &= \\ &= -\frac{n-1}{2} \operatorname{tr} [B^{-1}(dB)] - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \sum_{\alpha=2}^n \left[ -(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB) B^{-1}(v_\alpha - \beta u_\alpha) - \right. \\ &\quad \left. -2(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(d\beta) u_\alpha \right] = \tag{4.2} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \left[ \sum_{\alpha=2}^n \left[ B^{-1}(v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' - I_k \right] \right] B^{-1}(dB) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{\alpha=2}^n (d\beta) u_\alpha (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Vec} \left[ B^{-1} \sum_{\alpha=2}^n \left[ (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} - I_k \right] \right]' d \operatorname{Vec}(B) + \\ &\quad + \operatorname{Vec} \left[ B^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) u_\alpha' \right]' d \operatorname{Vec}(\beta) \end{aligned}$$

Igualando a cero la diferencial, obtenemos los estimadores de máxima verosimilitud.

$$\hat{B}^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \hat{\beta} u_{\alpha}) u'_{\alpha} = 0$$

$$\sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \hat{\beta} u_{\alpha}) u'_{\alpha} = 0$$

$$\sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} u'_{\alpha} = \hat{\beta} \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha} u'_{\alpha}$$

y por tanto,

$$\hat{\beta} = \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} u'_{\alpha} \left[ \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha} u'_{\alpha} \right]^{-1}$$

Llamando  $A = \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha} u'_{\alpha}$  y  $C = \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} u'_{\alpha}$ , podemos escribir

$$\boxed{\hat{\beta} = CA^{-1}}$$

Hemos supuesto que  $A$  es inversible<sup>2</sup>, para obtener la expresión de  $\hat{\beta}$ .  
Por otra parte,

$$\hat{B}^{-1} \sum_{\alpha=2}^n \left\{ \left[ (v_{\alpha} - \hat{\beta} u_{\alpha}) (v_{\alpha} - \hat{\beta} u_{\alpha})' \hat{B}^{-1} \right] - I_k \right\} = 0$$

$$\sum_{\alpha=2}^n \left\{ \left[ (v_{\alpha} - \hat{\beta} u_{\alpha}) (v_{\alpha} - \hat{\beta} u_{\alpha})' \hat{B}^{-1} \right] - I_k \right\} = 0$$

$$\sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \hat{\beta} u_{\alpha}) (v_{\alpha} - \hat{\beta} u_{\alpha})' \hat{B}^{-1} = (n-1)I_k$$

y por tanto,

$$\boxed{\hat{B} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \hat{\beta} u_{\alpha})(v_{\alpha} - \hat{\beta} u_{\alpha})'} \quad (4.3)$$

<sup>2</sup>Encontrar condiciones bajo las que se cumpla esta propiedad es un camino abierto, aunque la experiencia en su aplicación nos hace conjeturar que éstas son de tipo tamaño muestral.

Veamos la forma explícita de la matriz  $A$ . Llamando  $F_{i\alpha}$  a  $\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F_i(\tau) d\tau$  y puesto que  $u_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{1}{2}} (t_\alpha - t_{\alpha-1}, F_{1\alpha}, \dots, F_{q\alpha})'$ , y  $A = \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u_\alpha'$ , tenemos que:

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1}) & \sum_{\alpha=2}^n F_{1\alpha} & \cdots & \sum_{\alpha=2}^n F_{q\alpha} \\ \sum_{\alpha=2}^n F_{1\alpha} & \sum_{\alpha=2}^n \frac{F_{1\alpha} F_{1\alpha}}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} & \cdots & \sum_{\alpha=2}^n \frac{F_{q\alpha} F_{1\alpha}}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{\alpha=2}^n F_{q\alpha} & \sum_{\alpha=2}^n \frac{F_{1\alpha} F_{q\alpha}}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} & \cdots & \sum_{\alpha=2}^n \frac{F_{q\alpha} F_{q\alpha}}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} \end{pmatrix}$$

En el caso de dos factores exógenos, será:

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1}) & \sum_{\alpha=2}^n F_{1\alpha} & \sum_{\alpha=2}^n F_{2\alpha} \\ \sum_{\alpha=2}^n F_{1\alpha} & \sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1} [F_{1\alpha}]^2 & \sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1} F_{1\alpha} F_{2\alpha} \\ \sum_{\alpha=2}^n F_{2\alpha} & \sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1} F_{1\alpha} F_{2\alpha} & \sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1} [F_{2\alpha}]^2 \end{pmatrix}$$

que coincide con la expresión obtenida en [23] para dicho caso.

## 5 Distribución de los estimadores.

Estudiaremos a continuación un tema fundamental: la distribución de los estimadores hallados en la sección anterior.

### 5.1 Distribución de $\hat{\beta}$ .

En primer lugar vamos a comprobar que la matriz  $\hat{\beta}_{k \times (q+1)}$  se distribuye según una normal matricial<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Consideremos tres matrices  $M_{r \times s}$ ,  $C_{r \times r}$  y  $D_{s \times s}$  siendo  $C$  y  $D$  definidas positivas y sea  $Y_{r \times s}$  una matriz aleatoria. Decimos que  $Y$  sigue una distribución normal matricial,  $N(M, C \otimes D)$ , si  $\text{Vec}(Y')$  sigue una normal  $rs$ -dimensional  $N_{rs}(\text{Vec}(M'), C \otimes D)$ .

En efecto, si consideramos las matrices  $\mathbf{U} = (u_2, \dots, u_n)$  y  $\mathbf{V} = (v_2, \dots, v_n)$  se tiene

$$\widehat{\beta}' = A^{-1}\mathbf{U}\mathbf{V}'$$

de donde

$$\text{Vec}(\widehat{\beta}') = (I_k \otimes A^{-1}\mathbf{U}) \text{Vec}(\mathbf{V}')$$

y teniendo en cuenta que la matriz  $\mathbf{V}$  se distribuye de forma normal se deduce la normalidad de la matrix  $\widehat{\beta}$ .

Procedamos a calcular sus momentos. En cuanto a la media tenemos

$$\begin{aligned} E[\widehat{\beta}] &= E[CA^{-1}] = E[C]A^{-1} = E\left[\sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha}u'_{\alpha}\right]A^{-1} = \\ &= \left[\sum_{\alpha=2}^n E[v_{\alpha}]u'_{\alpha}\right]A^{-1} = \left[\sum_{\alpha=2}^n \beta u_{\alpha}u'_{\alpha}\right]A^{-1} = \beta \end{aligned}$$

y por tanto es insesgado.

Calculemos ahora la covarianza entre dos filas de  $\widehat{\beta}$  para poder calcular la covarianza de  $\text{Vec}(\widehat{\beta}')$ .

$$\begin{aligned} E\left[(\widehat{\beta}_i - \beta_i)'(\widehat{\beta}_j - \beta_j)\right] &= \\ &= A^{-1}E\left[\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}(v_{\alpha i} - E[v_{\alpha i}])' \sum_{\gamma=2}^n (v_{\gamma j} - E[v_{\gamma j}])u'_{\gamma}\right]A^{-1} = \\ &= A^{-1}\left(\sum_{\alpha=2}^n \sum_{\gamma=2}^n b_{ij}u_{\alpha}u'_{\gamma}\delta_{\alpha\gamma}\right)A^{-1} = A^{-1}b_{ij}AA^{-1} = b_{ij}A^{-1} \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\text{Cov}(\text{Vec}(\widehat{\beta}')) = B \otimes A^{-1}$$

Por tanto, podemos decir que  $\widehat{\beta}$  se distribuye como una normal matricial de media  $\beta$  y matriz de covarianzas  $B \otimes A^{-1}$  o lo que es lo mismo, que  $\text{Vec}(\widehat{\beta}')$  sigue una distribución  $N_{k(q+1)}(\text{Vec}(\beta'), B \otimes A^{-1})$ . La covarianza entre las columnas de la matriz  $\widehat{\beta}$ , debe estudiarse también, ya que éstos son los vectores



cuyas componentes determinan la influencia de los factores exógenos. Para ello debemos estudiar la covarianza para la matriz  $\hat{\beta}$  en vez de  $\hat{\beta}'$ , como hemos hecho antes.

En este caso tenemos:

$$\begin{aligned}\text{Vec}(\hat{\beta}) &= \text{Vec} \left[ \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} u'_{\alpha} A^{-1} \right] = (A^{-1} \otimes I_k) \text{Vec} \left[ \sum_{\alpha=2}^n v_{\alpha} u'_{\alpha} \right] = \\ &= (A^{-1} \otimes I_k) \left[ \sum_{\alpha=2}^n (u_{\alpha} \otimes I_k) v_{\alpha} \right]\end{aligned}$$

Expresando  $\text{Vec}(\beta)$  del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\text{Vec}(\beta) &= \text{Vec}(\beta A A^{-1}) = (A^{-1} \otimes I_k) \text{Vec}(\beta A) = \\ &= (A^{-1} \otimes I_k) \left[ \sum_{\alpha=2}^n (u_{\alpha} \otimes I_k) \beta u_{\alpha} \right]\end{aligned}$$

la covarianza de  $\text{Vec}(\hat{\beta})$  queda

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\text{Vec}(\hat{\beta})) &= E \left[ (\text{Vec}(\hat{\beta}) - \text{Vec}(\beta)) (\text{Vec}(\hat{\beta}) - \text{Vec}(\beta))' \right] = \\ &= E \left[ \left\{ (A^{-1} \otimes I_k) \left( \sum_{\alpha=2}^n (u_{\alpha} \otimes I_k) v_{\alpha} \right) - (A^{-1} \otimes I_k) \left( \sum_{\alpha=2}^n (u_{\alpha} \otimes I_k) \beta u_{\alpha} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ (A^{-1} \otimes I_k) \left( \sum_{\gamma=2}^n (u_{\gamma} \otimes I_k) v_{\gamma} \right) - (A^{-1} \otimes I_k) \left( \sum_{\gamma=2}^n (u_{\gamma} \otimes I_k) \beta u_{\gamma} \right) \right\}' \right] = \\ &= E \left[ (A^{-1} \otimes I_k) \left\{ \sum_{\alpha=2}^n (u_{\alpha} \otimes I_k) (v_{\alpha} - \beta u_{\alpha}) \right\} \right. \\ &\quad \left. \left\{ \sum_{\gamma=2}^n (v_{\gamma} - \beta u_{\gamma})' (u_{\gamma} \otimes I_k)' \right\} (A^{-1} \otimes I_k) \right] =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (A^{-1} \otimes I_k) E \left[ \left\{ \sum_{\alpha=2}^n (u_\alpha \otimes I_k) (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right\} \left\{ \sum_{\gamma=2}^n (v_\gamma - \beta u_\gamma)' (u_\gamma \otimes I_k)' \right\} \right] \times \\
&\quad \times (A^{-1} \otimes I_k) = \\
&= (A^{-1} \otimes I_k) \left\{ \sum_{\alpha=2}^n \sum_{\gamma=2}^n E \left[ (u_\alpha \otimes I_k) (v_\alpha - \beta u_\alpha) (v_\gamma - \beta u_\gamma)' (u_\gamma \otimes I_k)' \right] \right\} \times \\
&\quad \times (A^{-1} \otimes I_k) = \\
&= (A^{-1} \otimes I_k) \left\{ \sum_{\alpha=2}^n \sum_{\gamma=2}^n (u_\alpha \otimes I_k) E \left[ (v_\alpha - \beta u_\alpha) (v_\gamma - \beta u_\gamma)' \right] (u_\gamma \otimes I_k)' \right\} \times \\
&\quad \times (A^{-1} \otimes I_k) = \\
&= (A^{-1} \otimes I_k) \left[ \sum_{\alpha=2}^n \sum_{\gamma=2}^n (u_\alpha \otimes I_k) \delta_{\alpha\gamma} B (u_\gamma \otimes I_k)' \right] (A^{-1} \otimes I_k) = \\
&= (A^{-1} \otimes I_k) \left[ \sum_{\alpha=2}^n (u_\alpha \otimes I_k) B (u_\alpha \otimes I_k)' \right] (A^{-1} \otimes I_k) = \\
&= (A^{-1} \otimes I_k) (A \otimes B) (A^{-1} \otimes I_k) = (A^{-1} \otimes B)
\end{aligned}$$

de donde podemos deducir las matrices de covarianza de cada columna de  $\hat{\beta}$ , así como las covarianzas entre dos columnas cualesquiera.

## 5.2 Distribución de $\hat{B}$ .

A continuación obtendremos la distribución de  $\hat{B}$  utilizando el teorema<sup>4</sup> recogido en Anderson [1] p. 130.

<sup>4</sup>Sean  $Y_1, \dots, Y_m$  variables independientes distribuidas normalmente

$$Y_\alpha \rightsquigarrow N_k(\Gamma w_\alpha, \Phi); \alpha = 1, \dots, m$$

Recordemos que el objetivo es encontrar la distribución de la matriz (4.3) donde  $v_2, \dots, v_n$  son variables independientes distribuidas según una normal  $k$ -dimensional  $N_k(\beta u_\alpha, B)$ ;  $\alpha = 2, \dots, n$ .

Esta situación es similar a la del teorema citado, donde

$Y_\alpha$	$\Gamma$	$w_\alpha$	$H$	$G$	$C$	$m$	$r$
$v_\alpha$	$\beta$	$u_\alpha$	$A$	$\hat{\beta} = CA^{-1}$	$(n-1)\hat{B} = \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha v'_\alpha - \hat{\beta} A \hat{\beta}'$	$n-1$	$q+1$

de donde podemos deducir que  $(n-1)\hat{B} \sim W_k(n-q-2, B)$ .

El estimador es sesgado, por lo que hay que recurrir a

$$\hat{\hat{B}} = \frac{n-1}{n-q-2} \hat{B} = \frac{1}{n-q-2} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)'$$

Además la distribución de  $\hat{\hat{B}}$  es independiente de la de  $\hat{\beta}$ .

Calculemos a continuación la matriz de covarianzas asociada al estimador  $\hat{\hat{B}}$ . Para ello utilizaremos las relaciones<sup>5</sup> de Magnus y Neudecker, [29], p. 49. Vamos

donde  $w_\alpha$  son vectores  $r$ -dimensionales. Sean las matrices  $H = \sum_{\alpha=1}^m w_\alpha w'_\alpha$  y  $G = \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha w'_\alpha H^{-1}$  que supondremos no singulares. Por último, sea

$$C = \sum_{\alpha=1}^m (Y_\alpha - G w_\alpha)(Y_\alpha - G w_\alpha)' = \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha Y'_\alpha - G H G'$$

Entonces  $C$  se distribuye como  $\sum_{\alpha=1}^{m-r} u_\alpha u'_\alpha$  donde  $u_1, \dots, u_{m-r}$  son variables independientes idénticamente distribuidas según una normal  $N_k(0, \Phi)$ , siendo además  $C$  independiente de  $G$ .

Adviértase que  $\sum_{\alpha=1}^{m-r} u_\alpha u'_\alpha$  es una Wishart  $W_k(m-r, \Phi)$

5

1.  $D_n^- = (D'_n D_n)^{-1} D'_n$
2.  $\text{Vec}(A) = D_n v(A)$
3.  $D_n D'_n (A \otimes A) D_n = (A \otimes A) D_n$
4.  $D_n D_n^- = N_n$

$D_n^-$  es la inversa generalizada de Moore-Penrose de la matriz de duplicación  $D_n$

a expresar  $\text{Cov}(\text{Vec}(A))$  en terminos del vector  $v(B)$  - $\text{Vech}(B)$ - en función del cual se obtendrá la información de Fisher y la cota de Cramer-Rao.

$$\text{Cov} \left[ \text{Vec} \left( (n - q - 2) \widehat{B} \right) \right] = (n - q - 2)^2 D_k \text{Cov} \left[ v \left( \widehat{B} \right) \right] D_k'$$

Por otra parte, por el resultado<sup>6</sup> que aparece en Muirhead, [33], p. 90,

$$\text{Cov} \left[ \text{Vec} \left( (n - q - 2) \widehat{B} \right) \right] = 2(n - q - 2) N_k(B \otimes B)$$

Igualando ambas expresiones,

$$(n - q - 2) D_k \text{Cov} \left[ v \left( \widehat{B} \right) \right] D_k' = 2D_k D_k^- (B \otimes B)$$

$$(n - q - 2) D_k' D_k \text{Cov} \left[ v \left( \widehat{B} \right) \right] D_k' D_k = 2D_k' D_k D_k^- (B \otimes B) D_k$$

$$(n - q - 2) D_k' D_k \text{Cov} \left[ v \left( \widehat{B} \right) \right] D_k' D_k = 2D_k' (B \otimes B) D_k$$

$$(n - q - 2) \text{Cov} \left[ v \left( \widehat{B} \right) \right] = 2(D_k' D_k)^{-1} D_k' (B \otimes B) D_k (D_k' D_k)^{-1}$$

y por tanto

$$\text{Cov} \left( v \left( \widehat{B} \right) \right) = \frac{2}{n - q - 2} D_k^- (B \otimes B) (D_k^-)'$$

Luego la matriz de covarianza de los estimadores  $\widehat{\beta}$  y  $\widehat{B}$  es:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} B \otimes A^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{n - q - 2} D_k^- (B \otimes B) (D_k^-)' \end{pmatrix}$$

<sup>6</sup>Si  $A$  es una matriz de Wishart  $W_k(n, \Sigma)$ ,

$$\text{Cov}(\text{Vec}(A)) = n(I_{k^2} + I_{(k,k)})(\Sigma \otimes \Sigma) = 2nN_k(\Sigma \otimes \Sigma)$$

donde  $N_k = \frac{1}{2}(I_{k^2} + I_{(k,k)})$  siendo  $I_{(k,k)}$  la matriz de permutación, como define D.G. Nel, [34].

## 6 Cálculo de la matriz de información de Fisher.

A partir de (4.2) podemos calcular la segunda diferencial del logaritmo de la función de verosimilitud:

$$\begin{aligned}
d^2 \log L(v_2, \dots, v_n; \beta, B) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ (n-1) B^{-1} (dB) B^{-1} (dB) - \right. \\
&\quad \left. -2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (dB) B^{-1} (dB) B^{-1} - \right. \\
&\quad \left. -2 \sum_{\alpha=2}^n (d\beta) u_\alpha (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (dB) B^{-1} - 2 \sum_{\alpha=2}^n (d\beta u_\alpha)' B^{-1} (d\beta) u_\alpha - \right. \\
&\quad \left. -2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (dB) B^{-1} (d\beta) u_\alpha \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ B^{-1} (dB) B^{-1} (dB) B^{-1} \left( (n-1) B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) (v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right) - \right. \\
&\quad \left. -4 B^{-1} (dB) B^{-1} (d\beta) \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha (v_\alpha - \beta u_\alpha)' - 2 B^{-1} (d\beta) \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u_\alpha' (d\beta)' \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \text{Vec} \left( B^{-1} (dB) B^{-1} \right)' \times \\
&\quad \times \text{Vec} \left( (dB) B^{-1} \left\{ (n-1) B - 2 \left[ \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) (v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right] \right\} \right) - \\
&\quad -2 \text{Vec} \left( B^{-1} (dB) B^{-1} \right)' \text{Vec} \left( (d\beta) \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha (v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right) - \\
&\quad - \text{Vec} \left( (d\beta)' B^{-1} \right)' \text{Vec} \left( \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u_\alpha' (d\beta)' \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} dv(B)' D'_k (B \otimes B)^{-1} \times \\
&\times \left[ \left\{ (n-1)B - 2 \left[ \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right] \right\} B^{-1} \otimes I_k \right] D_k dv(B) - \\
&- 2 dv(B)' D'_k (B \otimes B)^{-1} \left( \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) u'_\alpha \otimes I_k \right) d \text{Vec}(\beta) - \\
&- d \text{Vec}(\beta)' I_{(k,q+1)} (B^{-1} \otimes I_{q+1}) (I_k \otimes A) I_{(q+1,k)} d \text{Vec}(\beta) = \\
&= \frac{1}{2} dv(B)' D'_k (B \otimes B)^{-1} \times \\
&\times \left[ \left\{ (n-1)B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right\} B^{-1} \otimes I_k \right] D_k dv(B) - \\
&- 2 dv(B)' D'_k (B \otimes B)^{-1} \left( \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) u'_\alpha \otimes I_k \right) d \text{Vec}(\beta) - \\
&- d \text{Vec}(\beta)' I_{(k,q+1)} (B^{-1} \otimes A) I_{(q+1,k)} d \text{Vec}(\beta)
\end{aligned}$$

Calculamos a continuación las parciales segundas respecto a los parámetros. Se tiene:

(•) Parcial respecto a  $\text{Vec}(\beta)$  dos veces:

$$F_1 = \frac{\partial \log \mathbb{L}}{\partial \text{Vec}(\beta) \partial \text{Vec}(\beta)'} = -I_{(k,q+1)} (B^{-1} \otimes A) I_{(q+1,k)}$$

y utilizando las matrices de permutación<sup>7</sup> ([34]; [29]) obtenemos

$$F_1 = - (A \otimes B^{-1}) \tag{6.1}$$

(•) Parcial respecto de  $v(B)$  y  $\text{Vec}(\beta)'$ :

<sup>7</sup>  $A_{m \times n} \otimes B_{p \times q} = I_{(p,m)} (B_{p \times q} \otimes A_{m \times n}) I_{(n,q)}$

$$F_2 = \frac{\partial \log \mathbb{L}}{\partial v(B) \partial \text{Vec}(\beta)'} = -D'_k (B \otimes B)^{-1} \left( \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) u'_\alpha \otimes I_k \right) \quad (6.2)$$

(•) Parcial respecto de  $v(B)$  dos veces:

$$F_3 = \frac{\partial \log \mathbb{L}}{\partial v(B) \partial v(B)'} = \frac{1}{2}(S + S')$$

siendo

$$S = \frac{1}{2} D'_k (B \otimes B)^{-1} \left[ \left\{ (n-1)B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right\} B^{-1} \otimes I_k \right] D_k$$

y por tanto

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{1}{4} D'_k \times \\ &\times \left\{ (B \otimes B)^{-1} \left[ \left( \left\{ (n-1)B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right\} B^{-1} \right) \otimes I_k \right] + \right. \\ &\left. + \left[ B^{-1} \left( (n-1)B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right) \otimes I_k \right] (B \otimes B)^{-1} \right\} D_k \quad (6.3) \end{aligned}$$

Así pues, la matriz hessiana será

$$H = \begin{pmatrix} F_1 & F_2' \\ F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

siendo los valores de  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  los correspondientes a (6.1), (6.2) y (6.3) respectivamente.

Vamos a calcular ahora los valores esperados de las submatrices anteriores

$$E[F_1] = - (A \otimes B^{-1})$$

$$E[F_2] = -D'_k (B \otimes B)^{-1} E \left[ \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) u'_\alpha \otimes I_k \right] = 0$$

$$E[F_3] = \frac{1}{4} D'_k \left[ -2(n-1)(B \otimes B)^{-1} \right] D_k = -\frac{n-1}{2} D'_k (B \otimes B)^{-1} D_k$$

Por tanto, la matriz de información de Fisher será

$$I = \begin{pmatrix} A \otimes B^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{n-1}{2} D'_k (B \otimes B)^{-1} D_k \end{pmatrix}$$

## 7 Cota de Cramer-Rao.

Como es sabido, la cota de Cramer-Rao viene dada por

$$|\Sigma| \geq CR = |D(\theta)| |I^{-1}| |D(\theta)'|$$

donde  $\Sigma$  es la matriz de covarianza del estimador de los parámetros y  $D(\theta)$  es la matriz de derivadas de la función paramétrica que ha sido estimada, respecto de los parámetros. Adviértase que los parámetros a que hacemos referencia son  $\text{Vec}(\beta)$  y  $v(B)$ , en tanto que la matriz de covarianza encontrada está referida a las funciones paramétricas  $\text{Vec}(\hat{\beta}')$  y  $v(\hat{B})$ , para las cuales la matriz  $D(\theta)$ , en este caso, presenta la forma

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} I_{(q+1,k)} & 0 \\ 0 & I_{k^2} \end{pmatrix}$$

puesto que la parcial de  $\text{Vec}(\beta)$  respecto a  $\text{Vec}(\beta')$  es  $I_{(q+1,k)}$ . De todo ello se deduce que

$$\begin{aligned} D(\theta) I^{-1} D(\theta)' &= \\ \begin{pmatrix} I_{(q+1,k)} & 0 \\ 0 & I_{k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} \otimes B & 0 \\ 0 & \frac{2}{n-1} D_k^- (B \otimes B) D_k^{-'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{(k,q+1)} & 0 \\ 0 & I_{k^2} \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} B \otimes A^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{n-1} D_k^- (B \otimes B) D_k^{-'} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Aplicando el resultado <sup>8</sup>, ([29] p. 50), la cota  $\mathcal{CR}$  puede expresarse como

$$\begin{aligned} \mathcal{CR} &\geq \left| B \otimes A^{-1} \right| \left| \frac{2}{n-1} D_k^- (B \otimes B) D_k^{-\prime} \right| = \\ &= (|A|^{-k} |B|^{q+1}) \left( \left[ \frac{2}{n-1} \right]^{\frac{k(k+1)}{2}} 2^{-\frac{k(k-1)}{2}} |B|^{-(k+1)} \right) = \\ &= (n-1)^{-\frac{k(k+1)}{2}} 2^k |A|^{-k} |B|^{q-k} \end{aligned} \quad (7.1)$$

y puesto que el determinante de la matriz  $\Sigma$  es

$$|\Sigma| = (n-q-2)^{-\frac{k(k+1)}{2}} 2^k |A|^{-k} |B|^{q-k}$$

y  $q \geq 0 \Rightarrow n-q-2 < n-1$ , es evidente que se verifica la relación (7.1).

El parámetro  $f_0$  se estima, aplicando el teorema de Zehna, por  $\widehat{f}_0 = \widehat{\beta}_0 + \frac{1}{2} \text{diag}(\widehat{B})$ , y las matrices de covarianza de  $\widehat{f}_0, \widehat{\beta}_1, \dots, \widehat{\beta}_p$  se calculan de modo similar. Finalmente se estima la tendencia (*drift*) y la varianza de las variables endógenas mediante las expresiones:

$$\widehat{EX}_{t,i} = x_{1i} \exp \left( \widehat{f}_{0i} t + \sum_{j=1}^q \widehat{\beta}_{ji} \sum_{\alpha=1}^t F_{j\alpha} \right); \quad i = 1, \dots, k$$

$$\widehat{\text{Var}} X_{t,i} = x_{1i}^2 \exp \left( 2 \left[ \widehat{f}_{0i} t + \sum_{j=1}^q \widehat{\beta}_{ji} \sum_{\alpha=1}^t F_{j\alpha} \right] \right) \left[ \exp \left( \widehat{b}_{ii} t \right) - 1 \right]; \quad i = 1, \dots, k$$

para  $i = 1, \dots, k$ ;  $t = 1, 2, \dots$ ,

## 8 Contrastes de hipótesis

A continuación nos planteamos algunos contrastes posibles sobre los parámetros que intervienen en el proceso.

Los contrastes pueden ser diversos, pero no cabe duda de que los más interesantes, en principio serán:

<sup>8</sup>

$$\left| D_n^- (A^{-1} \otimes A^{-1}) D_n^{-\prime} \right| = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} |A|^{n+1}$$

1. Contrastar que cualquiera de los parámetros  $\beta_i; i = 0, \dots, q$  sea igual a un vector determinado, en particular al vector cero lo cual nos haría ver la posible no influencia de algún factor exógeno, de forma individual, sobre el proceso.
2. Contrastar si algún subconjunto de parámetros es cero, con lo cual determinaríamos en tal caso si, de forma conjunta, algunos factores exógenos no influyen en el proceso.
3. Contrastar si algunas componentes determinadas de los vectores (o sub-vectores completos) son nulas, en cuyo caso se vería cuales de las componentes del proceso se ven realmente alteradas por la aparición de factores exógenos en él.
4. Contrastar la posible independencia entre algunas de las componentes del vector con el fin de comprobar las interrelaciones entre las variables que conforman el proceso.

### 8.1 Contrastes sobre los parámetros $\beta$

Particionemos la matriz  $\beta$  como  $\beta = (\mathcal{B}_1 | \mathcal{B}_2)$ , donde  $\mathcal{B}_1$  es de dimensión  $k \times q_1$  y  $\mathcal{B}_2$  de  $k \times q_2$ , con  $q_1 + q_2 = q + 1 = \bar{q}$ .

Empecemos por lo tanto con un caso genérico en el cual se desea contrastar la hipótesis

$$H_0 : \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^*$$

donde  $\mathcal{B}_1^*$  es una matriz fija de dimensión  $k \times q_1$ , siendo el caso en el que  $\mathcal{B}_1^*$  sea la matriz idénticamente nula aquél en el cual estaremos más interesados.

Las regiones del espacio asociadas a la hipótesis alternativa y nula serán:

$$\Omega = \{(\mathcal{B}, B) : B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{\bar{q}k + \frac{k(k+1)}{2}}$$

$$\omega = \{(\mathcal{B}, B) : \mathcal{B} = \mathcal{B}_1, B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{kq_2 + \frac{k(k+1)}{2}}$$

De una parte sabemos ya que, bajo la hipótesis alternativa:

$$\hat{B}_\Omega = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)(v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)' \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_\Omega = CA^{-1}$$

de donde se obtiene:

$$\max_{\Omega} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |\hat{B}_{\Omega}|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{(n-1)k}{2}}$$

Vamos a obtener ahora los estimadores para la hipótesis nula, o sea,  $\hat{B}_{\omega}$  y  $\hat{B}_{2\omega}$  (en donde en  $\hat{\beta}$  se ha considerado la misma partición que en  $\beta$ ).

Para ello llamemos

$$y_{\alpha} = v_{\alpha} - B_1^* u_{\alpha}^1$$

ya que en el vector  $U_{\alpha}$  se ha efectuado la partición  $U'_{\alpha} = (u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2)$ , donde  $u_{\alpha}^1$  es un vector de dimensión  $q_1$  y  $u_{\alpha}^2$  lo es de dimensión  $q_2$ .

Notemos ahora que  $y_{\alpha} \sim N_k(B_2 u_{\alpha}^2, B)$  con lo cual es inmediato obtener los estimadores máximo verosímiles bajo la hipótesis nula, sin más que repetir el proceso ya realizado anteriormente.

Para facilitar los cálculos hagamos las siguientes puntualizaciones:

Consideremos en la matriz  $C$  la partición  $C = (C_1|C_2)$ , quedando la matriz  $A$  como:

$$A = \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha} u'_{\alpha} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}^1 u_{\alpha}^{1'} & \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}^1 u_{\alpha}^{2'} \\ \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}^{2'} u_{\alpha}^1 & \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}^2 u_{\alpha}^{2'} \end{pmatrix}$$

Con ello se obtiene:

$$\hat{B}_{2\omega} = \sum_{\alpha=2}^n y_{\alpha} u_{\alpha}^{2'} \left[ \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}^2 u_{\alpha}^{2'} \right]^{-1} = \sum_{\alpha=2}^n y_{\alpha} u_{\alpha}^{2'} A_{22}^{-1}$$

$$\hat{B}_{\omega} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (y_{\alpha} - \hat{B}_{2\omega} u_{\alpha}^2) (y_{\alpha} - \hat{B}_{2\omega} u_{\alpha}^2)'$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=2}^n y_{\alpha} u_{\alpha}^{2'} A_{22}^{-1} &= \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - B_1^* u_{\alpha}^1) u_{\alpha}^{2'} A_{22}^{-1} = \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} u_{\alpha}^{2'} - B_1^* u_{\alpha}^1 u_{\alpha}^{2'}) A_{22}^{-1} = \\ &= (C_2 - B_1^* A_{12}) A_{22}^{-1} \end{aligned}$$

se tiene

$$\widehat{B}_{2\omega} = (C_2 - B_1^* A_{12}) A_{22}^{-1}$$

y como

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=2}^n (y_\alpha - \widehat{B}_{2\omega} u_\alpha^2) (y_\alpha - \widehat{B}_{2\omega} u_\alpha^2)' = \\ &= \sum_{\alpha=2}^n y_\alpha y_\alpha' + \widehat{B}_{2\omega} A_{22} \widehat{B}_{2\omega}' - \sum_{\alpha=2}^n y_\alpha (\widehat{B}_{2\omega} u_\alpha^2)' - \sum_{\alpha=2}^n \widehat{B}_{2\omega} u_\alpha^2 y_\alpha' = \\ &= \sum_{\alpha=2}^n y_\alpha y_\alpha' + \widehat{B}_{2\omega} A_{22} \widehat{B}_{2\omega}' - \widehat{B}_{2\omega} A_{22} \widehat{B}_{2\omega}' - \widehat{B}_{2\omega} A_{22} \widehat{B}_{2\omega}' = \\ &= \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - B_1^* u_\alpha^1) (v_\alpha - B_1^* u_\alpha^1)' - \widehat{B}_{2\omega} A_{22} \widehat{B}_{2\omega}' \end{aligned}$$

se concluye que

$$\begin{aligned} (n-1) \widehat{B}_\omega &= \sum_{\alpha=2}^n (y_\alpha - \widehat{B}_{2\omega} u_\alpha^2) (y_\alpha - \widehat{B}_{2\omega} u_\alpha^2)' = \\ &= \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - B_1^* u_\alpha^1) (v_\alpha - B_1^* u_\alpha^1)' - \widehat{B}_{2\omega} A_{22} \widehat{B}_{2\omega}' \end{aligned} \quad (8.1)$$

De resultados de todo ello tenemos:

$$\max_{\omega} \mathbf{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |\widehat{B}_\omega|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{(n-1)k}{2}}$$

Por lo tanto, el criterio de razón de verosimilitudes para contrastar la hipótesis

$$H_0 : B_1 = B_1^*$$

es:

$$\Lambda = \frac{\max_{\omega} \mathbf{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B)}{\max_{\Omega} \mathbf{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B)} = \frac{|\widehat{B}_\Omega|^{\frac{n-1}{2}}}{|\widehat{B}_\omega|^{\frac{n-1}{2}}}$$

### Invarianza del criterio.

Tal y como se ha planteado el criterio, éste posee una importante propiedad de invarianza frente a transformaciones del tipo  $v_\alpha^* = Dv_\alpha$ , donde  $D$  es una matriz cuadrada no singular.

Dicha propiedad se deduce de las relaciones siguientes

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^* &= DCA^{-1} = D\hat{\beta} \\ \hat{B}_\Omega^* &= D\hat{B}_\Omega D' \\ \hat{\beta}_{2\omega}^* &= DC_2 A_{22}^{-1} = D\hat{\beta}_{2\omega} \\ \hat{B}_\omega^* &= D\hat{B}_\omega D'\end{aligned}$$

siendo por ello por lo que hemos trabajado con  $v_\alpha$  en lugar de con  $x_\alpha$ .

### Distribución del criterio.

Para hallar la distribución del criterio anterior hemos de dar previamente una serie de pasos:

a) Por un lado tenemos:

$$\hat{\beta}_\Omega = CA^{-1} \Leftrightarrow \hat{\beta}_\Omega A = C \Leftrightarrow (\hat{B}_{1\Omega} | \hat{B}_{2\Omega}) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = (C_1 | C_2)$$

De donde se obtiene:

$$C_1 = \hat{B}_{1\Omega} A_{11} + \hat{B}_{2\Omega} A_{21}$$

$$C_2 = \hat{B}_{1\Omega} A_{12} + \hat{B}_{2\Omega} A_{22}$$

y en particular

$$\hat{B}_{2\Omega} = C_2 A_{22}^{-1} - \hat{B}_{1\Omega} A_{12} A_{22}^{-1}$$

b)

$$\hat{B}_{2\omega} - \hat{B}_{2\Omega} = (C_2 - B_1^* A_{12}) A_{22}^{-1} - (C_2 - \hat{B}_{1\Omega} A_{12}) A_{22}^{-1} = (\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*) A_{12} A_{22}^{-1}$$

c) Llamando

$$V = (v_2, \dots, v_n) \quad U_1 = (u_2^1, \dots, u_n^1) \quad U_2 = (u_2^2, \dots, u_n^2) \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

se tiene

$$A = UU'$$

d)

$$\begin{aligned} [V - \beta U] &= [V - \hat{B}_\Omega U] + [\hat{B}_\Omega U - \beta U] = \\ &= [V - \hat{B}_\Omega U] + (\hat{B}_{1\Omega}, \hat{B}_{2\Omega}) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} - (B_1^*, B_2) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \\ &= [V - \hat{B}_\Omega U] + [\hat{B}_{1\Omega} U_1 + \hat{B}_{2\Omega} U_2] - [B_1^* U_1 + B_2 U_2] = \\ &= [V - \hat{B}_\Omega U] + [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*] U_1 + [\hat{B}_{2\Omega} - B_2] U_2 = \\ &= [V - \hat{B}_\Omega U] + [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*] U_1 + [\hat{B}_{2\Omega} - B_2 + \hat{B}_{2\omega} - \hat{B}_{2\omega}] U_2 = \\ &= [V - \hat{B}_\Omega U] + [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*] U_1 - [\hat{B}_{2\omega} - \hat{B}_{2\Omega}] U_2 + [\hat{B}_{2\omega} - B_2] U_2 = \\ &= [V - \hat{B}_\Omega U] + [\hat{B}_{2\omega} - B_2] U_2 - [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*] [U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2] \end{aligned}$$

e) Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned} [V - \beta U] - [\hat{B}_{2\omega} - B_2] U_2 &= [V - B_1^* U_1 - B_2 U_2] - [\hat{B}_{2\omega} - B_2] U_2 = \\ &= [V - B_1^* U_1 - \hat{B}_{2\omega} U_2] \end{aligned}$$

Y, por lo tanto, restando  $[\hat{B}_{2\omega} - B_2] U_2$  a ambos miembros de la expresión obtenida en d) se tiene:

$$[V - B_1^* U_1 - \hat{B}_{2\omega} U_2] = [V - \hat{B}_\Omega U] - [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*] [U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2]$$

f) Por último se tiene:

$$\begin{aligned} & [U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2] [U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2]' = \\ & = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} + A_{12} A_{22}^{-1} A_{22} A_{22}^{-1} A_{21} = A_{11.2} \end{aligned}$$

$$[V - \hat{B}_\Omega U] [U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2]' = 0 \text{ puesto que } [V - \hat{B}_\Omega U] U' = 0$$

Tras estos cálculos se tiene:

$$\begin{aligned} (n-1) \hat{B}_\omega &= [V - B_1^* U_1 - \hat{B}_{2\omega} U_2] [V - B_1^* U_1 - \hat{B}_{2\omega} U_2]' = \\ &= ([V - \hat{B}_\Omega U] - [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*] [U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2]) \times \\ &\times ([V - \hat{B}_\Omega U] - [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*] [U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2])' = \\ &= (n-1) \hat{B}_\Omega + [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*] A_{11.2} [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*]' \end{aligned}$$

Con ello el criterio queda en la forma siguiente:

$$\Lambda = \frac{|(n-1) \hat{B}_\Omega|^{\frac{n-1}{2}}}{|(n-1) \hat{B}_\Omega + [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*] A_{11.2} [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*]'|^{\frac{n-1}{2}}}$$

Así pues resta por conocer la distribución de la matriz

$$[\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*] A_{11.2} [\hat{B}_{1\Omega} - B_1^*]'$$

Se puede demostrar ([1], p. 298-299) que dicha matriz se distribuye según una Wishart  $W_k [q_1; B]$ , siendo además su distribución independiente de la de  $\hat{B}_\omega$

Así se tiene que la distribución del criterio

$$\Lambda^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\widehat{B}_\Omega|}{|(n-1)\widehat{B}_\Omega + [\widehat{B}_{1\Omega} - B_1^*] A_{11.2} [\widehat{B}_{1\Omega} - B_1^*]'|}$$

es la misma que la de

$$U_{k,q_1,n-1-\bar{q}} = \frac{|G|}{|G+H|} \quad (8.2)$$

donde  $G$  y  $H$  son dos matrices independientes y distribuidas respectivamente según sendas distribuciones de Wishart  $W_k(n-1-\bar{q}, B)$  y  $W_k(q_1, B)$

Situación parecida tenemos en el caso en que el contraste es:

$$H_0 : B_2 = B_2^*$$

donde  $B_2^*$  es una matriz fija de dimensiones  $k \times q_2$ . El caso en el cual estaremos más interesados es aquel en que la matriz  $B_2^*$  es la matriz idénticamente nula.

Las regiones del espacio asociadas a la hipótesis alternativa y nula son, respectivamente:

$$\Omega = \{(B, B) : B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{\bar{q}k + \frac{k(k+1)}{2}}$$

$$\omega = \{(B, B) : B = B_2^*, B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{kq_1 + \frac{k(k+1)}{2}}$$

Sin más que repetir el proceso anterior, tomando

$$y_\alpha = v_\alpha - B_1^* u_\alpha^2$$

tendremos:

$$\widehat{B}_{1\omega} = (C_1 - B_1^* A_{21}) A_{11}^{-1}$$

$$(n-1)\widehat{B}_\omega = \sum_{\alpha=2}^n (y_\alpha - \widehat{B}_{1\omega} u_\alpha^1) (y_\alpha - \widehat{B}_{1\omega} u_\alpha^1)' =$$

$$= \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - B_2^* u_\alpha^2) (v_\alpha - B_2^* u_\alpha^2)' - \widehat{B}_{1\omega} A_{11} \widehat{B}_{1\omega}'$$

Por lo que el criterio de razón de verosimilitudes para este caso vendría dado por:



$$\Lambda^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\widehat{B}_\Omega|}{|(n-1)\widehat{B}_\Omega + [\widehat{B}_{2\Omega} - B_2^*] A_{22.1} [\widehat{B}_{2\Omega} - B_2^*]'|}$$

que posee la misma distribución que:

$$U_{k,q_2,n-1-\bar{q}} = \frac{|G|}{|G+H|} \quad (8.3)$$

donde  $G$  y  $H$  son dos matrices independientes y distribuidas según sendas distribuciones de Wishart,  $W_k(n-1-\bar{q}, B)$  y  $W_k(q_2, B)$ .

### Momentos del criterio.

En el apéndice A se puede observar que los momentos de orden  $h$  del estadístico  $U_{k,m,n}$  vienen dados por:

$$E[U_{k,m,n}^h] = \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n-i+1}{2} + h\right]}{\Gamma\left[\frac{n-i+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2} + h\right]}$$

por lo que se tendrá en este caso, tomando  $m = q_1$  y  $n = n - \bar{q} - 1$ :

$$E[\Lambda^h] = E\left[U_{k,q_1,n-\bar{q}-1}^{\frac{n-1}{2}h}\right] = \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma\left[\frac{n-q_2-i}{2}\right] \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-\bar{q}-i+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-\bar{q}-i}{2}\right] \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-q_2-i+1}{2}\right]}$$

### Algunos contrastes de interés.

**Contraste  $H_0 : \beta_0 = 0$ .**

Este contraste es un caso particular del estudiado en el apartado anterior

$$H_0 : B_1 = B_1^*$$

con  $B_1^* = 0$ ,  $q_1 = 1$ .

Así pues el criterio de razón de verosimilitudes adopta la forma:

$$\Lambda_0^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\widehat{B}_\Omega|}{|(n-1)\widehat{B}_\Omega + \widehat{\beta}_{0\Omega} A_{11.2} \widehat{\beta}'_{0\Omega}|} \quad (8.4)$$

donde

1.  $\hat{B}_\Omega = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha) (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)'$ .
2.  $\hat{\beta}_{0\Omega}$  es la primera columna de la matriz  $\hat{\beta} = CA^{-1}$ .
3.  $A_{11.2} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$

La distribution de (8.4) se obtiene de la anterior (8.2)

$$U_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(0)} = \frac{|G|}{|G+H|} \quad (8.5)$$

donde  $G$  y  $H$  son dos matrices independientes y distribuidas respectivamente según sendas distribuciones de Wishart,  $W_k(n-\bar{q}-1, B)$  y  $W_k(1, B)$ .

**Contraste**  $H_0 : \beta_i = 0$ . ( $i=0, \dots, q$ )

Este contraste puede ser expresado también en la forma

$$H_0 : B_1 = B_1^*$$

Para ello hemos de reordenar la matriz de los parámetros, teniendo ahora

$$\beta = (\beta_i, \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_0, \beta_{i+1}, \dots, \beta_q)$$

surgiendo el vector  $\tilde{u}_\alpha$  como:

$$\tilde{u}_\alpha = (F_{i\alpha}, F_{1\alpha}, \dots, F_{i-1\alpha}, (t_{\alpha-1} - t_\alpha), F_{i+1\alpha}, \dots, F_{q\alpha})'$$

vector que se puede expresar como  $\tilde{U}_\alpha = T_1 u_\alpha$ , donde la matriz  $T_1$  es la matriz de permutación siguiente:

$$T_i = \begin{pmatrix} e'_i \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_{i-1} \\ e'_0 \\ e'_{i+1} \\ \vdots \\ e'_q \end{pmatrix}$$

y  $e_j = (0, \dots, \overset{(j+1)}{1}, \dots, 0)'$ , ( $j = 0, \dots, q$ ).

Con ello el criterio de razón de verosimilitudes adopta la forma:

$$U_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)} = \Lambda_i^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\hat{B}_\Omega|}{|(n-1)\hat{B}_\Omega + \hat{\beta}_{i\Omega}\tilde{A}_{11.2}\hat{\beta}'_{i\Omega}|} \quad (8.6)$$

donde:

1.  $\hat{B}_\Omega = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)(v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)'$
2.  $\hat{\beta}_{i\Omega}$  es la  $(i+1)$ -ésima columna de la matriz  $\hat{\beta} = CA^{-1}$
3.  $\tilde{A}_{11.2}$  se obtiene de la matriz  $T_iAT_i'$ .

siendo la distribución de (8.6) la misma de (8.5).

**Contraste  $H_0 : \beta_{i_1} = \beta_{i_2} = \dots = \beta_{i_h} = 0$ .**

En este caso deseamos contrastar si una parte de la matriz paramétrica  $\beta$  es igual a cero.

Concretamente, sea  $\{i_1, \dots, i_h\} \subseteq \{0, \dots, q\}$ .

Primeramente reorganizamos la matriz de parámetros:

$$\beta = (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_h} | \beta_{i_{h+1}}, \dots, \beta_{i_q})$$

donde  $\{i_{h+1}, \dots, i_q\} = \{0, \dots, q\} - \{i_1, \dots, i_h\}$ , surgiendo el vector  $\tilde{u}_\alpha$

$$\tilde{u}_\alpha = T_{\{i_1, \dots, i_h\}} u_\alpha$$

donde la matriz  $T_{\{i_1, \dots, i_h\}}$  es la siguiente matriz de permutación:

$$T_{\{i_1, \dots, i_h\}} = \begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_h} \\ e'_{i_{h+1}} \\ \vdots \\ e'_{i_q} \end{pmatrix}$$

El cociente de la razón de verosimilitudes queda así en la forma:

$$\mathcal{U}_{k,h,n-\bar{q}-1}^{\{i_1,\dots,i_h\}} = \Lambda_{\{i_1,\dots,i_h\}}^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\hat{B}_\Omega|}{|(n-1)\hat{B}_\Omega + \hat{\beta}_{\{i_1,\dots,i_h\}\Omega} \tilde{A}_{11.2} \hat{\beta}'_{\{i_1,\dots,i_h\}\Omega}|} = \frac{|G|}{|G+H|} \quad (8.7)$$

donde:

1.  $\hat{B}_\Omega = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)(v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)'$
2.  $\hat{\beta}_{\{i_1,\dots,i_h\}\Omega}$  son las columnas  $\{i_1, \dots, i_h\}$  de la matriz  $\hat{\beta} = CA^{-1}$
3.  $\tilde{A}_{11.2}$  se extrae de la matriz  $T_{\{i_1,\dots,i_h\}} AT'_{\{i_1,\dots,i_h\}}$

y  $G$  y  $H$  son dos matrices aleatorias independientes distribuidas respectivamente según sendas distribuciones de Wishart  $W_k(n-\bar{q}-1, B)$  y  $W_k(h, B)$ .

### Distribuciones exactas.

Gracias a las caracterizaciones obtenidas en el apéndice A se puede obtener algunas distribuciones exactas para el anterior criterio en casos particulares.

En concreto:

Caso  $q_1 = 1$

En este caso se tiene:

$$\frac{1 - \mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}}{\mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}} \frac{n - \bar{q} - k}{k} \rightsquigarrow F_{k,n-\bar{q}-k}$$

de donde se deduce la región crítica siguiente:

$$\begin{aligned} \Lambda_i < \Lambda_i(\varepsilon) &\Leftrightarrow \Lambda_i^{\frac{2}{n-1}} < \Lambda_i^{\frac{2}{n-1}}(\varepsilon) \Leftrightarrow \mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)} < \mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}(\varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - \mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}}{\mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}} \frac{n - \bar{q} - k}{k} > \frac{1 - \mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}(\varepsilon)}{\mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}(\varepsilon)} \frac{n - \bar{q} - k}{k} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F_{k,n-\bar{q}-k} > F_{k,n-\bar{q}-k}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Caso  $q_1 = 2$

Este caso procede del contraste

$$H_0 : \beta_{i_1} = \beta_{i_2} = \dots = \beta_{i_h} = 0$$

con  $h = 2$  y  $(i_1, i_2) \subseteq (0, \dots, q)$

Es conocido (apéndice A) que

$$\frac{1 - \sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n}}}{\sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n}}} \frac{n - k + 1}{k} \rightsquigarrow F_{2k,2(n-k+1)}$$

por lo que se tiene en este caso:

$$\frac{1 - \sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}}}{\sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}}} \frac{n - k - \bar{q}}{k} \rightsquigarrow F_{2k,2(n-k-\bar{q})}$$

Con ello:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\{i_1, i_2\}} &< \Lambda_{\{i_1, i_2\}}(\varepsilon) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Lambda_{\{i_1, i_2\}}^{\frac{2}{n-1}} &< \Lambda_{\{i_1, i_2\}}^{\frac{2}{n-1}}(\varepsilon) \Leftrightarrow \mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}} < \mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}(\varepsilon) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}}}{\sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}}} \frac{n - k - \bar{q}}{k} &> \frac{1 - \sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}(\varepsilon)}}{\sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}(\varepsilon)}} \frac{n - k - \bar{q}}{k} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_{2k,2(n-k-\bar{q})} &> F_{2k,2(n-k-\bar{q})}(\varepsilon) \end{aligned}$$

### Distribución asintótica

Anteriormente se han obtenido los momentos del criterio. En concreto se tenía:

$$E[\Lambda^h] = E\left[\mathcal{U}_{k,q_1,n-\bar{q}-1}^{\frac{n-1}{2}h}\right] = \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma\left[\frac{n-q_2-i}{2}\right] \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-\bar{q}-i+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-\bar{q}-i}{2}\right] \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-q_2-i+1}{2}\right]} =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma\left[\frac{n-q_2-i}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-\bar{q}-i}{2}\right]} \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-\bar{q}-i+1}{2}\right]}{\prod_{i=1}^k \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-q_2-i+1}{2}\right]} = \\
&= K \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-\bar{q}-i+1}{2}\right]}{\prod_{j=1}^k \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-q_2-j+1}{2}\right]}
\end{aligned}$$

Con estos momentos se puede aplicar el desarrollo asintótico de la distribución del criterio de la razón de verosimilitudes para hipótesis lineales (apéndice B).

En dicho desarrollo tomemos:

$a = k$	$b = k$	$x_i = y_j = \frac{n-1}{2}$	$\epsilon_i = \delta_j = (1-\rho)\frac{n-1}{2}$
$\xi_i = -\frac{\bar{q}+i-1}{2} \quad (i = 1, \dots, k)$		$\eta_j = -\frac{q_2+j-1}{2} \quad (j = 1, \dots, k)$	

Por una parte, los grados de libertad vienen dados por:

$$f = -2 \left[ \sum_{i=1}^a \xi_i - \sum_{j=1}^b \eta_j - \frac{1}{2}(a-b) \right]$$

quedando en este caso:

$$f = -2 \left[ \sum_{i=1}^k -\frac{\bar{q}+i-1}{2} - \sum_{j=1}^k -\frac{q_2+j-1}{2} \right] = kq_1$$

Procedamos a calcular ahora  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , que vienen dados por:

$$\omega_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r(r+1)} \left[ \sum_{k=1}^a \frac{B_{r+1}(\epsilon_k + \xi_k)}{(\rho x_k)^r} - \sum_{j=1}^b \frac{B_{r+1}(\delta_j + \eta_j)}{(\rho y_j)^r} \right]$$

En primer lugar se tiene:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{B_2(\epsilon_i + \xi_i)}{\rho x_i} - \sum_{j=1}^k \frac{B_2(\delta_j + \eta_j)}{\rho y_j} \right] =$$

$$= \frac{1}{\rho(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^k B_2 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q_1 + q_2 + i - 1)}{2} \right) - \sum_{j=1}^k B_2 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q_2 + j - 1)}{2} \right) \right]$$

con

$$B_2(h) = h^2 - h + \frac{1}{6}$$

Tras hacer operaciones se tiene:

$$\begin{aligned} & B_2 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q_1 + q_2 + i - 1)}{2} \right) - \\ & - B_2 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q_2 + j - 1)}{2} \right) = \\ & = \frac{q_1}{4} [q_1 + 2i + 2q_2 - 2(1-\rho)(n-1)] \end{aligned}$$

y así:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k B_2 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q_1 + q_2 + i - 1)}{2} \right) - \\ & - \sum_{j=1}^k B_2 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q_2 + j - 1)}{2} \right) = \\ & = \frac{kq_1}{4} [q_1 + 2q_2 - 2(1-\rho)(n-1) + k + 1] \end{aligned}$$

Con ello:

$$\omega_1 = \frac{kq_1}{4\rho(n-1)} [q_1 + 2q_2 - 2(1-\rho)(n-1) + k + 1]$$

Si deseamos que  $\omega_1 = 0^9$ , entonces:

$$\rho = \frac{\gamma_1}{n-1} \quad \text{donde} \quad \gamma_1 = n - q_2 - \frac{1}{2} [q_1 + k + 3]$$

<sup>9</sup>El tomar  $\omega_1 = 0$  obedece al hecho de acortar el desarrollo asintótico

En segundo lugar

$$\omega_2 = -\frac{1}{6} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{B_3(\epsilon_i + \xi_i)}{(\rho x_i)^2} - \sum_{j=1}^k \frac{B_3(\delta_j + \eta_j)}{(\rho y_j)^2} \right]$$

que en este caso queda como:

$$-\frac{2}{3\rho^2(n-1)^2} \left[ \sum_{i=1}^k B_3 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q_1 + q_2 + i - 1)}{2} \right) - \sum_{j=1}^k B_3 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q_2 + j - 1)}{2} \right) \right]$$

con

$$B_3(h) = h^3 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{2}h$$

Tras realizar los cálculos oportunos se obtiene:

$$\omega_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2}$$

donde

$$\gamma_2 = \frac{kq_1[k^2 + q_1^2 - 5]}{48}$$

Con ello, como  $\mathcal{U}_{k,q_1,n-\bar{q}-1} = \Lambda^{\frac{2}{n-1}}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[-2\rho \log \Lambda \leq z] &= \mathbb{P}\left[-2\frac{\gamma_1}{n-1} \log \Lambda \leq z\right] = \\ &= \mathbb{P}\left[-\gamma_1 \log \Lambda^{\frac{2}{n-1}} \leq z\right] = \mathbb{P}\left[-\gamma_1 \log \mathcal{U}_{k,q_1,n-\bar{q}-1} \leq z\right] = \\ &= \mathbb{P}\left[\chi_{kq_1}^2 \leq z\right] + \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} \left[ \mathbb{P}\left[\chi_{kq_1+4}^2 \leq z\right] - \mathbb{P}\left[\chi_{kq_1}^2 \leq z\right] \right] + \theta(n^{-4}) \end{aligned}$$



## 8.2 Contrastes sobre subvectores

A continuación estaremos interesados en contrastar si algún subvector de los vectores paramétricos es nulo. Para ello basta con tomar una matriz  $D_l$  de dimensiones  $l \times k$  con rango por filas completo, o sea  $\text{rg}(D_l) = l; (l \leq k)$ . A continuación consideremos el vector  $Z_t = D_l V_t$ , verificándose:

$$Z_t \rightsquigarrow N_l(D_l \beta U_t, D_l B D_l') = N_l(\Delta U_t, \Phi)$$

En tales condiciones se tendrá:

$$\hat{\Delta} = D_l \hat{\beta} \quad \hat{\Phi} = D_l \hat{B} D_l'$$

Estaremos interesados en matrices  $D_l$  que estén compuestas por unos y ceros de tal forma que  $Z_t$  no sea más que el vector  $U_t$  reducido en su dimensionalidad. Por ejemplo, si  $K = 5$  y estamos interesados sólo en las componentes 1, 3 y 5, debemos tomar la matriz  $D_l$  de dimensión  $3 \times 5$ , de la forma

$$D_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(D_l) = 3$$

Si descomponemos la matriz  $\Delta$  en la forma  $\Delta = (\delta_1 | \delta_2) = (\beta_{0l} | \beta_{1l} | \dots | \beta_{ql})$  podemos hacer un estudio del mismo tipo al hecho en los apartados anteriores.

Por ejemplo, si  $\delta_1 = \beta_{i,l}$ , entonces, contrastar  $\delta_1 = 0$  es lo mismo que contrastar que un cierto subvector de  $\beta_i$  es nulo.

En el caso en que  $\delta_1 = (\beta_{i_1,l} | \dots | \beta_{i_h,l})$ , entonces el estudio de  $\delta_1 = 0$  equivale a contrastar si una parte de los vectores paramétricos exógenos es nulo.

Con ello vemos que este tipo de estudio sobre subvectores de los vectores paramétricos se reduce a un caso particular del visto con anterioridad, donde sólo cambia la dimensionalidad del espacio paramétrico considerado. Notemos por último que para otros contrastes de este tipo seguiríamos un procedimiento parecido, pero con la introducción de matrices de permutación para reducir dichos casos al caso anterior.

## 8.3 Contrastes sobre independencia por bloques.

Partamos del vector  $k$ -dimensional:

$$V_\alpha \rightsquigarrow N_k[\beta u_\alpha; B]$$

y consideremos en él la siguiente partición:

$$V_\alpha = (V_\alpha^1, V_\alpha^2, \dots, V_\alpha^{m-1}, V_\alpha^m)$$

donde los subvectores  $V_\alpha^i$  son de dimensión  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  con  $\sum_{i=1}^m p_i = k$ .

Esta partición en el vector  $V_\alpha$  conlleva las siguientes particiones en las matrices de parámetros  $\beta$  y  $B$ :

En cuanto a la matriz  $\beta$  tenemos:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix}$$

con  $\beta^i$  de dimensión  $p_i \times \bar{q}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , mientras que la matriz  $B$  se descompone como sigue:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & \dots & B_{mm} \end{pmatrix}$$

con  $B_{ij}$  de dimensión  $p_i \times p_j$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ .

Con todo ello se tiene:

$$V_\alpha^i \rightsquigarrow N_k [\beta^i u_\alpha; B_{ii}] \quad i = 1, \dots, m$$

En este caso estamos interesados en contrastar la independencia de los  $m$  bloques en los que se ha descompuesto el vector  $V_\alpha$ , lo cual lleva a la hipótesis nula:  $H_0 : B_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, \dots, m$ )

Sabemos que bajo la hipótesis alternativa la función de verosimilitud conjunta es:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) &= \\ &= (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |B|^{-\frac{(n-1)}{2}} \text{etr} \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right] \end{aligned}$$

mientras que, bajo la hipótesis nula, toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) &= \prod_{i=1}^m \mathbb{L}(v_2^i, \dots, v_n^i; \beta^i, B_{ii}) = \\ &= \prod_{i=1}^m (2\pi)^{-\frac{(n-1)p_i}{2}} |B_{ii}|^{-\frac{(n-1)}{2}} \text{etr} \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha^i - \beta^i u_\alpha)' B_{ii}^{-1} (v_\alpha^i - \beta^i u_\alpha) \right] \end{aligned}$$

Las regiones del espacio asociadas a la hipótesis alternativa y nula son:

$$\Omega = \{(B, B) : B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{\bar{q}k + \frac{k(k+1)}{2}}$$

$$\omega = \{(B, B_{11}, \dots, B_{mm}) : B_{ii} > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{k\bar{q} + \frac{k(p_1^2 + \dots + p_m^2)}{2}}$$

Bajo la hipótesis alternativa los estimadores máximo verosímiles son:

$$\hat{B}_\Omega = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha) (v_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)' \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_\Omega = CA^{-1}$$

de donde se obtiene

$$\max_{\Omega} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |\hat{B}_\Omega|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{(n-1)k}{2}}$$

Bajo la hipótesis nula, si descomponemos también la matrix  $C$  en la forma:

$$C = \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \\ \vdots \\ C^m \end{pmatrix}$$

con  $C^i$  de dimensión  $p_i \times \bar{q}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , se pueden obtener los estimadores máximo verosímiles, que serán:

$$\hat{B}_{\omega ii} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha^i - \hat{\beta}_\omega^i u_\alpha) (v_\alpha^i - \hat{\beta}_\omega^i u_\alpha)' \quad i = 1, \dots, m$$

$$\hat{\beta}_\omega^i = C^i A^{-1} \quad i = 1, \dots, m$$

de donde:

$$\max_{\omega} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} \prod_{i=1}^m |\hat{B}_{\omega ii}|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{(n-1)p_i}{2}}$$

Concluimos, por tanto, que el criterio de la razón de verosimilitudes para este contraste es:

$$\Lambda = \left[ \frac{|(n-1)\widehat{B}_\Omega|}{\prod_{i=1}^m |(n-1)\widehat{B}_{\omega ii}|} \right]^{\frac{(n-1)}{2}}$$

donde

$$(n-1)\widehat{B}_\Omega \rightsquigarrow W_k[n - \bar{q} - 1; B] \quad \text{y} \quad (n-1)\widehat{B}_{\omega ii} \rightsquigarrow W_{p_i}[n - \bar{q} - 1; B_{ii}]$$

Si notamos  $D_{ii} = (n-1)\widehat{B}_{\omega ii}$  y  $D = (n-1)\widehat{B}_\Omega$  y si consideramos

$$v = \Lambda^{\frac{2}{n-1}}$$

podemos expresar

$$v = v_2 \times \dots \times v_m$$

donde:

$$v_i = \frac{\begin{vmatrix} D_{11} & \dots & \dots & D_{1,i-1} & D_{1,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{i-1,1} & \dots & \dots & D_{i-1,i-1} & D_{i-1,i} \\ D_{i,1} & \dots & \dots & D_{i,i-1} & D_{ii} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_{11} & \dots & \dots & D_{1,i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{i-1,1} & \dots & \dots & D_{i-1,i-1} \end{vmatrix} |D_{ii}|} \quad i = 2, \dots, m$$

Notemos que  $v_i$  es la raíz  $\frac{(n-1)}{2}$ -ésima del criterio para contrastar la hipótesis

$$H_i : B_{1i} = B_{2i} = \dots = B_{i-1,i} = 0$$

o sea,  $V^i$  es independiente del vector  $(V^i, \dots, V^{i-1})'$ , y con ello la hipótesis nula

$$H_0 : B_{ij} = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, \dots, m)$$

es la intersección de todas las hipótesis  $H_i$ , ( $i = 1, \dots, m$ ).

### Distribución y momentos del criterio.

Vamos a obtener la distribución del criterio anterior. Para ello partimos del hecho de que  $D$  se distribuye de la misma forma que

$$\sum_{\gamma=1}^{n-\bar{q}-1} Z_{\gamma} Z_{\gamma}'$$

con  $Z_1, \dots, Z_{n-\bar{q}-1}$  variables independientes e igualmente distribuidas según una normal  $k$ -variante  $N_k [0; B]$ .

Particionemos el vector  $Z_{\gamma}$  en la forma  $Z_{\gamma} = (Z_{\gamma}^1, \dots, Z_{\gamma}^m)'$ . Así, la distribución condicionada

$$Z_{\gamma}^i \mid Z_{\gamma}^i = z_{\gamma}^i, \dots, Z_{\gamma}^{i-1} = z_{\gamma}^{i-1}$$

es normal

$$N_{p_i} \left[ \Psi_i \begin{pmatrix} z_{\gamma}^1 \\ \vdots \\ z_{\gamma}^{i-1} \end{pmatrix}; B_{ii} - \Psi_i \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1,i-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{i-1,i} & \dots & B_{i-1,i-1} \end{pmatrix} \Psi_i' \right]$$

donde

$$\Psi_i = (B_{i1}, \dots, B_{i,i-1}) \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1,i-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{i-1,i} & \dots & B_{i-1,i-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

Notemos que el vector  $\Psi_i$  es de dimensión  $p_i \times \bar{p}_i$  ( $\bar{p}_i = p_1 + \dots + p_{i-1}$ ).  
Planteemos la hipótesis nula

$$H_0 = B_{1i} = B_{2i} = \dots B_{i-1,i} = 0$$

que es equivalente a  $H_0 : \Psi_i = 0$ .

En estas condiciones, bajo la hipótesis nula, se tiene  $\Psi_i = 0$ , mientras que el estimador de la matriz  $B_{ii}$  es

$$\frac{D_{ii}}{n - \bar{q} - 1}$$

Bajo la hipótesis alternativa, el estimador de la matriz  $\Psi_i$  es

$$\hat{\Psi}_i = (D_{i1}, \dots, D_{i,i-1}) \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1,i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{i-1,i} & \dots & D_{i-1,i-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

mientras que el estimador de la matriz de covarianzas es:

$$\frac{D_{ii}}{n - \bar{q} - 1} - \hat{\Psi}_i \begin{pmatrix} \frac{D_{11}}{n - \bar{q} - 1} & \dots & \frac{D_{1,i-1}}{n - \bar{q} - 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{D_{i-1,i}}{n - \bar{q} - 1} & \dots & \frac{D_{i-1,i-1}}{n - \bar{q} - 1} \end{pmatrix} \hat{\Psi}_i'$$

Con ello el criterio para contrastar  $\Psi_i = 0$  es:

$$\frac{\left| D_{ii} - (D_{i1}, \dots, D_{i,i-1}) \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1,i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{i-1,i} & \dots & D_{i-1,i-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_{1i} \\ \vdots \\ D_{i-1,i} \end{pmatrix} \right|}{|D_{ii}|}$$

Aplicando el cálculo del determinante de una matriz descompuesta por bloques <sup>10</sup> tenemos:

$$\frac{\left| D_{ii} - (D_{i1}, \dots, D_{i,i-1}) \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1,i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{i-1,i} & \dots & D_{i-1,i-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_{1i} \\ \vdots \\ D_{i-1,i} \end{pmatrix} \right|}{|D_{ii}|} =$$

<sup>10</sup>Dada una matriz en la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$|A| = |A_{11}| |A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}|$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1,i-1} & D_{1i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{i-1,i} & \cdots & D_{i-1,i-1} & D_{i-1,i} \\ D_{i1} & \cdots & D_{i,i-1} & D_{i,i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1,i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{i-1,i} & \cdots & D_{i-1,i-1} \end{vmatrix} |D_{ii}|}$$

expresión que coincide con  $v_i$ .

Notemos que la distribución del criterio anterior no es otra que la del U-estadístico  $\mathcal{U}_{p_i, \bar{p}_i, n - \bar{q} - \bar{p}_i - 1}$ .

Notemos además que como la distribución de  $v_i$  no depende del condicionamiento sobre  $Z_\gamma^i, \gamma = 1, \dots, i-1$ , se deduce que la distribución de  $v_i$  es independiente de  $v_1, \dots, v_{i-1}$ .

Con todo ello el criterio para contrastar la hipótesis nula

$$H_0 : B_{ij} = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, \dots, m)$$

no es otro que

$$\prod_{i=2}^m \mathcal{U}_{p_i, \bar{p}_i, n - \bar{q} - \bar{p}_i - 1} = \prod_{i=2}^m \prod_{j=1}^{p_i} X_{ij}$$

donde

$$X_{ij} \rightsquigarrow \beta \left( \frac{n - \bar{q} - \bar{p}_i - j}{2}, \frac{\bar{p}_i}{2} \right) = \beta \left( \frac{n - q - 1 - \bar{p}_i - j}{2}, \frac{\bar{p}_i}{2} \right)$$

Así los momentos de orden  $h$  para  $v$  vienen dados por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v^h] &= \prod_{i=2}^m \prod_{j=1}^{p_i} \mathbb{E}[X_{ij}^h] = \\ &= \prod_{i=2}^m \prod_{j=1}^{p_i} \int_0^1 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n - j - q - 1))}{\Gamma(\frac{1}{2}(n - j - q - 1 - \bar{p}_i)) \Gamma(\frac{1}{2}\bar{p}_i)} v^{\frac{n - q - 1 - \bar{p}_i - j}{2} + h - 1} (1 - v)^{\frac{\bar{p}_i}{2} - 1} dv = \\ &= \prod_{i=2}^m \prod_{j=1}^{p_i} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n - j - q - 1)) \Gamma(\frac{1}{2}(n - j - q - 1 - \bar{p}_i) + h) \Gamma(\frac{1}{2}\bar{p}_i)}{\Gamma(\frac{1}{2}(n - j - q - 1 - \bar{p}_i)) \Gamma(\frac{1}{2}\bar{p}_i) \Gamma(\frac{1}{2}(n - j - q - 1) + h)} = \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=2}^m \prod_{j=1}^{p_i} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1-\bar{p}_i)+h) \Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1))}{\Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1-\bar{p}_i)) \Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1)+h)}$$

Dado que  $v = \Lambda^{\frac{2}{n-1}}$ , los momentos para  $\Lambda$  son:

$$\begin{aligned} E[\Lambda^h] &= E\left[v^{\frac{h(n-1)}{2}}\right] = \\ &= \prod_{i=2}^m \prod_{j=1}^{p_i} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1)) \Gamma(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-\bar{p}_i-j))}{\Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1-\bar{p}_i)) \Gamma(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-j))} = \\ &= \prod_{i=2}^m \prod_{j=1}^{p_i} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1)) \Gamma(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-\bar{p}_i-j))}{\Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1-\bar{p}_i)) \Gamma(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-j))} \times \\ &\quad \times \frac{\prod_{j=1}^{p_1} \Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1)) \prod_{j=1}^{p_1} \Gamma(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-j))}{\prod_{j=1}^{p_1} \Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1)) \prod_{j=1}^{p_1} \Gamma(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-j))} = \\ &= \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1)) \Gamma(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-\bar{p}_i-j))}{\Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1-\bar{p}_i)) \Gamma(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-j))} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(\frac{1}{2}(n-j-q-1)) \prod_{i=1}^k \Gamma(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-i))}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\frac{1}{2}(n-i-q-1)) \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-j))} \end{aligned}$$

donde se ha definido  $\bar{p}_1 = 0$  y se ha empleado que:

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma\left(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-\bar{p}_i-j)\right) = \prod_{i=1}^k \Gamma\left(\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-i)\right)$$

y

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma\left(\frac{1}{2}(n-j-q-1-\bar{p}_i)\right) = \prod_{i=1}^k \Gamma\left(\frac{1}{2}(n-i-q-1)\right)$$



### Distribución asintótica del criterio.

Según el apartado anterior tenemos que los momentos de la distribución del criterio de razón de verosimilitudes pueden expresarse como:

$$E[\Lambda^h] = K \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma\left(\frac{1}{2}((n-1)(1+h) - q - i)\right)}{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma\left(\frac{1}{2}((n-1)(1+h) - q - j)\right)}$$

donde:

$$K = \frac{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma\left(\frac{1}{2}(n - j - q - 1)\right)}{\prod_{i=1}^k \Gamma\left(\frac{1}{2}(n - i - q - 1)\right)}$$

Esta expresión permite emplear el desarrollo asintótico debido a *Box*, (apéndice **B**). En dicho desarrollo tomemos:

$a = k$	$b = p_1 + \dots + p_m = k$	$x_i = y_j = \frac{n-1}{2}$	$\epsilon_i = \delta_j = (1 - \rho) \frac{n-1}{2}$
$\xi_i = -\frac{q+i}{2} \quad (i = 1, \dots, k)$	$\eta_j = -\frac{q+j}{2} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p_i)$		

Por una parte, los grados de libertad, que vienen dados por:

$$f = -2 \left[ \sum_{i=1}^a \xi_i - \sum_{j=1}^b \eta_j - \frac{1}{2}(a - b) \right]$$

quedan en este caso como:

$$f = -2 \left[ \sum_{i=1}^k \left[ -\frac{q+i}{2} \right] - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} \left[ -\frac{q+j}{2} \right] \right] = \frac{1}{2} \left[ k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2 \right] = \sum_{i < j} p_i p_j$$

Procedamos a calcular ahora  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , que vienen dados por:

$$\omega_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r(r+1)} \left[ \sum_{k=1}^a \frac{B_{r+1}(\epsilon_k + \xi_k)}{(\rho x_k)^r} - \sum_{j=1}^b \frac{B_{r+1}(\delta_j + \eta_j)}{(\rho y_j)^r} \right]$$

En primer lugar se tiene

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{B_2(\epsilon_i + \xi_i)}{\rho x_i} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} \frac{B_2(\delta_j + \eta_j)}{\rho y_j} \right] = \\ &= \frac{1}{\rho(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^k B_2 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q+i)}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} B_2 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q+j)}{2} \right) \right]\end{aligned}$$

Tras los cálculos pertinentes se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k B_2 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q+i)}{2} \right) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} B_2 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q+j)}{2} \right) &= \\ &= \frac{1}{12} \left[ k^3 - \sum_{i=1}^m p_i^3 \right] + \frac{3}{8} \left[ k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2 \right] + \frac{9}{4} \left[ k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2 \right] - \\ &\quad - \frac{(1-\rho)(n-1)}{4} \left[ k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2 \right] = \\ &= \frac{2 \left[ k^3 - \sum_{i=1}^m p_i^3 \right] + [9 + 6q - 6(1-\rho)(n-1)] \left[ k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2 \right]}{24}\end{aligned}$$

De donde se concluye con:

$$\omega_1 = \frac{1}{24\rho(n-1)} \left[ 2 \left[ k^3 - \sum_{i=1}^m p_i^3 \right] + [9 + 6q - 6(1-\rho)(n-1)] \left[ k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2 \right] \right]$$

Para que se verifique  $\omega_1 = 0$  habrá que tomar el siguiente valor de  $\rho$ :

$$\rho = 1 - \frac{2 \left[ k^3 - \sum_{i=1}^m p_i^3 \right] + [9 + 6q] \left[ k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2 \right]}{6(n-1) \left[ k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2 \right]}$$

y en segundo lugar

$$\begin{aligned}\omega_2 &= -\frac{1}{6} \left[ \sum_{i=1}^k \frac{B_3(\epsilon_i + \xi_i)}{(\rho x_i)^2} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} \frac{B_3(\delta_j + \eta_j)}{(\rho y_j)^2} \right] = \\ &= -\frac{2}{3(\rho(n-1))^2} \left[ \sum_{i=1}^k B_3 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q+i)}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} B_3 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q+j)}{2} \right) \right]\end{aligned}$$

Concluyéndose, tras operaciones aritméticas, que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k B_3 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q+i)}{2} \right) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{p_i} B_3 \left( \frac{(1-\rho)(n-1) - (q+j)}{2} \right) = \\ = -\frac{1}{32} \left[ k^4 - \sum_{i=1}^m p_i^4 \right] + \frac{1}{48} \left[ \frac{k^3 - \sum_{i=1}^m p_i^3}{k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2} \right]^2 + \frac{5}{64} \left[ k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2 \right]\end{aligned}$$

y, en definitiva:

$$\omega_2 = \frac{1}{\rho^2(n-1)^2} \left[ \frac{1}{48} \left[ k^4 - \sum_{i=1}^m p_i^4 \right] - \frac{1}{72} \left[ \frac{k^3 - \sum_{i=1}^m p_i^3}{k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2} \right]^2 - \frac{5}{96} \left[ k^2 - \sum_{i=1}^m p_i^2 \right] \right]$$

Tras estos cálculos vemos la distribución asintótica del criterio:

Como  $v = \Lambda^{\frac{2}{n-1}}$ , entonces  $\log v = \frac{2}{n-1} \log \Lambda$  y así,  $2 \log \Lambda = (n-1) \log v$ .

Con ello:

$$\begin{aligned}P[-2\rho \log \Lambda \leq z] &= P[-(n-1)\rho \log v \leq z] = \\ &= P[\chi_f^2 \leq z] + \frac{\gamma}{M^2} [P[\chi_{f+4}^2 \leq z] - P[\chi_f^2 \leq z]] + \theta(M^{-3})\end{aligned}$$

donde:

$$M = [\rho(n-1)] \quad \gamma = M^2 \omega_2$$

### Estudio de algunos casos particulares:

#### a) Caso de dos bloques.

En esta situación es fácil calcular que:

$$1. f = p_1 p_2$$

$$2. \rho = 1 - \frac{p_1 + p_2 + 3 + 2q}{2(n-1)}$$

$$3. \omega_2 = \frac{p_1 p_2}{48 \rho^2 (n-1)^2} [p_1^2 + p_2^2 - 5]$$

#### b) Independencia de todas y cada una de las variables.

Se obtiene como caso particular, con  $p_i = 1 \quad i = 1, \dots, m$

$$1. f = \sum_{i < j}^k 1 = \frac{k(k-1)}{2}$$

$$2. \rho = 1 - \frac{2(k+1)(9+6q)}{6(n-1)}$$

$$3. \omega_2 = \frac{k(k-1)}{288 \rho^2 (n-1)^2} [2k^2 - 2k - 13]$$

## 9 Ejemplo Práctico

Como ejemplo de aplicación del programa de ordenador sobre inferencia en el proceso lognormal multivariante con factores exógenos, hemos empleado los datos de Tintner, [50], que aparecen en la tabla 2.1.

Dichos datos consisten en observaciones desde el año 1950 al 1972 de seis variables en Colombia. Las dos primeras corresponden a factores exógenos al proceso, los *Cambios relativos en la inversión privada* y los *Cambios relativos en los gastos del gobierno*, y las cuatro últimas son variables endógenas: *Producto*

*nacional real, Consumo privado real, Inversiones privadas reales y Gastos reales del gobierno.* La fuente original de los datos son las Cuentas nacionales del Banco de la República de Colombia en 1974.

Tabla 2.1: Datos de Tintner.

0	0	13790.4	10604.7	1952.1	760
-0.00125	0.12338	14657.2	11403.9	1949.7	853.8
0.08541	0.08166	15318.9	11876.2	2116.2	923.5
0.25937	0.17028	16021.9	12326.9	2665.1	1080.7
0.1588	0.13149	18226.9	13874	3088.3	1222.9
0.05702	0.05065	18150.4	13952.2	3264.4	1284.8
0.00522	-0.03022	19302.3	14587.4	3281.4	1246
-0.08462	-0.06827	20239.3	14759	3003.8	1160.9
0.11154	0.03031	20682.5	15004.9	3338.8	1196.1
0.08375	0.06016	21897	15924.3	3618.4	1268.1
0.16431	0.13786	23258	17034.2	4213	1442.9
0.06819	0.12679	24533.1	18213.3	4500.2	1625.8
0.04098	0.10620	26106.3	19618.1	4684.7	1798.5
-0.06135	0.07419	26702.8	20260.6	4397.2	1931.9
0.04127	-0.04593	28444.6	21940.5	4578.7	1843.2
0.01255	0.04652	29657.4	22186.4	4636.2	1928.9
0.13411	0.08789	31458.2	23864.4	5257.9	2098.5
0.0733	0.04379	32002	23769.5	5643.3	2190.3
0.195	0.07670	34559.7	25338.9	6743.8	2358.4
0.05288	0.1108	37108.1	27316.9	7100.4	2619.7
0.13065	0.18094	40556.1	29385.9	8028	3093.7
0.08950	0.21248	42951.3	31127	8746.6	3751
-0.02933	-0.02365	46383.8	33675.4	8490	3662.3

## Estimación de los parámetros

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$
	$4.716885E - 2$	$5.347716E - 2$	$5.366820E - 2$
	$4.127260E - 2$	$2.857017E - 2$	$1.200244E - 1$
	$-7.343767E - 4$	$9.264477E - 1$	$9.257071E - 3$
	$-6.192286E - 4$	$5.294689E - 3$	$9.368932E - 1$

## Matriz de Covarianzas del proceso

$6.572235E - 4$	$6.228153E - 4$	$-1.698838E - 6$	$-1.894744E - 5$
$6.228153E - 4$	$7.832140E - 4$	$1.475295E - 5$	$-8.552913E - 6$
$-1.698838E - 6$	$1.475295E - 5$	$1.426715E - 5$	$3.509804E - 6$
$-1.894744E - 5$	$-8.552913E - 6$	$3.509804E - 6$	$7.271212E - 6$

## Matriz de Covarianzas Insegada

$7.609957E - 4$	$7.211545E - 4$	$-1.967076E - 6$	$-2.193914E - 5$
$7.211545E - 4$	$9.068794E - 4$	$1.708236E - 5$	$-9.903373E - 6$
$-1.967076E - 6$	$1.708236E - 5$	$1.651986E - 5$	$4.063984E - 6$
$-2.193914E - 5$	$-9.903373E - 6$	$4.063984E - 6$	$8.419298E - 6$

## Covarianzas de los parámetros

Col1	Col2	Col3	Col4
$7.722049E - 5$	$7.317769E - 5$	$-1.996050E - 7$	$-2.226230E - 6$
$7.317769E - 5$	$9.202374E - 5$	$1.733398E - 6$	$-1.004924E - 6$
$-1.996050E - 7$	$1.733398E - 6$	$1.676319E - 6$	$4.123845E - 7$
$-2.226230E - 6$	$-1.004924E - 6$	$4.123845E - 7$	$8.543311E - 7$
$-1.719927E - 4$	$-1.629882E - 4$	$4.445793E - 7$	$4.958471E - 6$
$-1.629882E - 4$	$-2.049639E - 4$	$-3.860788E - 6$	$2.238263E - 6$
$4.445793E - 7$	$-3.860788E - 6$	$-3.733657E - 6$	$-9.185019E - 7$
$4.958471E - 6$	$2.238263E - 6$	$-9.185019E - 7$	$-1.902847E - 6$
$-3.947999E - 4$	$-3.741305E - 4$	$1.020507E - 6$	$1.138189E - 5$
$-3.741305E - 4$	$-4.704834E - 4$	$-8.862227E - 6$	$5.137809E - 6$
$1.020507E - 6$	$-8.862227E - 6$	$-8.570403E - 6$	$-2.108370E - 6$
$1.138189E - 5$	$5.137809E - 6$	$-2.108370E - 6$	$-4.367880E - 6$

Col5	Col6	Col7	Col8
$-1.719927E - 4$	$-1.629882E - 4$	$4.445793E - 7$	$4.958471E - 6$
$-1.629882E - 4$	$-2.049639E - 4$	$-3.860788E - 6$	$2.238263E - 6$
$4.445793E - 7$	$-3.860788E - 6$	$-3.733657E - 6$	$-9.185019E - 7$
$4.958471E - 6$	$2.238263E - 6$	$-9.185019E - 7$	$-1.902847E - 6$
$8.148608E - 3$	$7.721996E - 3$	$-2.106310E - 5$	$-2.349205E - 4$
$7.721996E - 3$	$9.710704E - 3$	$1.829149E - 4$	$-1.060435E - 4$
$-2.106310E - 5$	$1.829149E - 4$	$1.768917E - 4$	$4.351642E - 5$
$-2.349205E - 4$	$-1.060435E - 4$	$4.351642E - 5$	$9.015236E - 5$
$-5.433690E - 3$	$-5.149215E - 3$	$1.404539E - 5$	$1.566507E - 4$
$-5.149215E - 3$	$-6.475335E - 3$	$-1.219721E - 4$	$7.071244E - 5$
$1.404539E - 5$	$-1.219721E - 4$	$-1.179557E - 4$	$-2.901781E - 5$
$1.566507E - 4$	$7.071244E - 5$	$-2.901781E - 5$	$-6.011579E - 5$

Col9	Col10	Col11	Col12
$-3.947999E - 4$	$-3.741305E - 4$	$1.020507E - 6$	$1.138189E - 5$
$-3.741305E - 4$	$-4.704834E - 4$	$-8.862227E - 6$	$5.137809E - 6$
$1.020507E - 6$	$-8.862227E - 6$	$-8.570403E - 6$	$-2.108370E - 6$
$1.138189E - 5$	$5.137809E - 6$	$-2.108370E - 6$	$-4.367880E - 6$
$-5.433690E - 3$	$-5.149215E - 3$	$1.404539E - 5$	$1.566507E - 4$
$-5.149215E - 3$	$-6.475335E - 3$	$-1.219721E - 4$	$7.071244E - 5$
$1.404539E - 5$	$-1.219721E - 4$	$-1.179557E - 4$	$-2.901781E - 5$
$1.566507E - 4$	$7.071244E - 5$	$-2.901781E - 5$	$-6.011579E - 5$
$1.027926E - 2$	$9.741109E - 3$	$-2.657059E - 5$	$-2.963465E - 4$
$9.741109E - 3$	$1.224981E - 2$	$2.307427E - 4$	$-1.337713E - 4$
$-2.657059E - 5$	$2.307427E - 4$	$2.231446E - 4$	$5.489491E - 5$
$-2.963465E - 4$	$-1.337713E - 4$	$5.489491E - 5$	$1.137250E - 4$

## Cov. del Vech de la matriz de Cov. Insegada

Col1	Col2	Col3	Col4
$6.095942E - 8$	$5.776795E - 8$	$-1.575722E - 10$	$-1.757431E - 9$
$5.776795E - 8$	$6.369448E - 8$	$6.095285E - 10$	$-1.229365E - 9$
$-1.575722E - 10$	$6.095285E - 10$	$6.618638E - 10$	$1.650437E - 10$
$-1.757431E - 9$	$-1.229365E - 9$	$1.650437E - 10$	$3.625461E - 10$
$5.474357E - 8$	$6.884213E - 8$	$1.296739E - 9$	$-7.517750E - 10$
$-1.493227E + 10$	$5.544802E - 10$	$6.252511E - 10$	$1.552758E - 10$
$-1.665422E - 9$	$-1.423053E - 9$	$1.345257E - 10$	$3.309940E - 10$
$4.073042E - 13$	$-3.537086E - 12$	$-3.420613E - 12$	$-8.414914E - 13$
$4.542735E - 12$	$-1.869957E - 11$	$-1.949609E - 11$	$-5.564303E - 12$
$5.066592E - 11$	$2.287069E - 11$	$-9.385301E - 12$	$-1.944339E - 11$



Col5	Col6	Col7	Col8
$5.474357E - 8$	$-1.493227E - 10$	$-1.665422E - 9$	$4.073042E - 13$
$6.884213E - 8$	$5.544802E - 10$	$-1.423053E - 9$	$-3.537086E - 12$
$1.296739E - 9$	$6.252511E - 10$	$1.345257E - 10$	$-3.420613E - 12$
$-7.517750E - 10$	$1.552758E - 10$	$3.309940E - 10$	$-8.414914E - 13$
$8.657160E - 8$	$1.630699E - 9$	$-9.453858E - 10$	$3.071655E - 11$
$1.630699E - 9$	$8.038594E - 10$	$1.850721E - 10$	$2.970508E - 11$
$-9.453858E - 10$	$1.850721E - 10$	$4.070192E - 10$	$7.307628E - 12$
$3.071655E - 11$	$2.970508E - 11$	$7.307628E - 12$	$2.872692E - 11$
$-1.780768E - 11$	$-4.956835E - 12$	$5.451283E - 12$	$7.066995E - 12$
$1.032387E - 11$	$-4.236542E - 12$	$-8.776784E - 12$	$1.738523E - 12$

Col9	Col10
$4.542735E - 12$	$5.066592E - 11$
$-1.869957E - 11$	$2.287069E - 11$
$-1.949609E - 11$	$-9.385301E - 12$
$-5.564303E - 12$	$-1.944339E - 11$
$-1.780768E - 11$	$1.032387E - 11$
$-4.956835E - 12$	$-4.236542E - 12$
$5.451283E - 12$	$-8.776784E - 12$
$7.066995E - 12$	$1.738523E - 12$
$8.189558E - 12$	$3.601673E - 12$
$3.601673E - 12$	$7.461535E - 12$

**Transformación de los valores  $\beta$  estimados**

$f_0$	$f_1$	$f_2$
$4.754935E - 2$	$5.347716E - 2$	$5.366820E - 2$
$4.172603E - 2$	$2.857017E - 2$	$1.200244E - 1$
$-7.261167E - 4$	$9.264477E - 1$	$9.257071E - 3$
$-6.150189E - 4$	$5.294689E - 3$	$9.368932E - 1$

## Covarianzas de los estimadores transformados

Col1	Col2	Col3	Col4
7.723573E - 5	7.319138E - 5	-1.996049E - 7	-2.226217E - 6
7.319138E - 5	9.204538E - 5	1.733406E - 6	-1.004922E - 6
-1.996049E - 7	1.733406E - 6	1.676326E - 6	4.123849E - 7
-2.226217E - 6	-1.004922E - 6	4.123849E - 7	8.543330E - 7
-1.719927E - 4	-1.629882E - 4	4.445793E - 7	4.958471E - 6
-1.629882E - 4	-2.049639E - 4	-3.860788E - 6	2.238263E - 6
4.445793E - 7	-3.860788E - 6	-3.733657E - 6	-9.185019E - 7
4.958471E - 6	2.238263E - 6	-9.185019E - 7	-1.902847E - 6
-3.947999E - 4	-3.741305E - 4	1.020507E - 6	1.138189E - 5
-3.741305E - 4	-4.704834E - 4	-8.862227E - 6	5.137809E - 6
1.020507E - 6	-8.862227E - 6	-8.570403E - 6	-2.108370E - 6
1.138189E - 5	5.137809E - 6	-2.108370E - 6	-4.367880E - 6

Col5	Col6	Col7	Col8
-1.719927E - 4	-1.629882E - 4	4.445793E - 7	4.958471E - 6
-1.629882E - 4	-2.049639E - 4	-3.860788E - 6	2.238263E - 6
4.445793E - 7	-3.860788E - 6	-3.733657E - 6	-9.185019E - 7
4.958471E - 6	2.238263E - 6	-9.185019E - 7	-1.902847E - 6
8.148608E - 3	7.721996E - 3	-2.106310E - 5	-2.349205E - 4
7.721996E - 3	9.710704E - 3	1.829149E - 4	-1.060435E - 4
-2.106310E - 5	1.829149E - 4	1.768917E - 4	4.351642E - 5
-2.349205E - 4	-1.060435E - 4	4.351642E - 5	9.015236E - 5
-5.433690E - 3	-5.149215E - 3	1.404539E - 5	1.566507E - 4
-5.149215E - 3	-6.475335E - 3	-1.219721E - 4	7.071244E - 5
1.404539E - 5	-1.219721E - 4	-1.179557E - 4	-2.901781E - 5
1.566507E - 4	7.071244E - 5	-2.901781E - 5	-6.011579E - 5

Col9	Col10	Col11	Col12
$-3.947999E - 4$	$-3.741305E - 4$	$1.020507E - 6$	$1.138189E - 5$
$-3.741305E - 4$	$-4.704834E - 4$	$-8.862227E - 6$	$5.137809E - 6$
$1.020507E - 6$	$-8.862227E - 6$	$-8.570403E - 6$	$-2.108370E - 6$
$1.138189E - 5$	$5.137809E - 6$	$-2.108370E - 6$	$-4.367880E - 6$
$-5.433690E - 3$	$-5.149215E - 3$	$1.404539E - 5$	$1.566507E - 4$
$-5.149215E - 3$	$-6.475335E - 3$	$-1.219721E - 4$	$7.071244E - 5$
$1.404539E - 5$	$-1.219721E - 4$	$-1.179557E - 4$	$-2.901781E - 5$
$1.566507E - 4$	$7.071244E - 5$	$-2.901781E - 5$	$-6.011579E - 5$
$1.027926E - 2$	$9.741109E - 3$	$-2.657059E - 5$	$-2.963465E - 4$
$9.741109E - 3$	$1.224981E - 2$	$2.307427E - 4$	$-1.337713E - 4$
$-2.657059E - 5$	$2.307427E - 4$	$2.231446E - 4$	$5.489491E - 5$
$-2.963465E - 4$	$-1.337713E - 4$	$5.489491E - 5$	$1.137250E - 4$

## Tendencia estimada.

## Variable Endógena Número 1

Tiempo	Observado	Tendencia	Varianza
0	13790.400	13790.400	0.000
1	14657.200	14557.070	161322.680
2	15318.900	15403.214	361381.110
3	16021.900	16529.300	624465.161
4	18226.900	17605.879	944971.728
5	18150.400	18570.045	1314633.393
6	19302.300	19448.238	1730955.328
7	20239.300	20228.989	2185676.393
8	20682.500	21375.760	2790216.981
9	21897.000	22590.157	3507125.680
10	23258.000	24076.811	4428265.889
11	24533.100	25514.572	5472307.428
12	26106.300	26969.057	6672360.013
13	26702.800	28302.223	7963732.423
14	28444.600	29672.827	9430693.802
15	29657.400	31216.564	11187286.724
16	31458.200	33128.268	13444551.696
17	32002.000	34960.061	15914308.203
18	34559.700	37199.677	19085824.020
19	37108.100	39355.028	22556918.126
20	40556.100	41966.455	27010084.428
21	42951.300	44728.442	32228782.370
22	46383.800	46773.706	36935926.873



**Variable Endógena Número 2**

Tiempo	Observado	Tendencia	Varianza
0	10604.700	10604.700	0.000
1	11403.900	11221.104	114239.851
2	11876.200	11843.316	254636.174
3	12326.900	12696.644	439177.031
4	13874.000	13509.359	663234.322
5	13952.200	14193.968	915613.524
6	14587.400	14747.375	1186621.893
7	14759.000	15213.444	1473946.959
8	15004.900	15970.291	1857126.787
9	15924.300	16811.609	2316243.159
10	17034.200	17904.223	2920325.602
11	18213.300	18990.309	3615549.137
12	19618.100	20076.947	4410536.109
13	20260.600	21082.643	5271152.380
14	21940.500	21885.898	6120208.447
15	22186.400	22954.423	7216569.716
16	23864.400	24279.131	8615697.531
17	23769.500	25500.378	10102846.739
18	25338.900	26982.713	11982371.160
19	27316.900	28552.141	14168617.998
20	29385.900	30536.048	17066705.546
21	31127.000	32743.150	20613501.669
22	33675.400	34013.016	23313211.229

## Variable Endógena Número 3

Tiempo	Observado	Tendencia	Varianza
0	1952.100	1952.100	0.000
1	1949.700	1950.652	62.859
2	2116.200	2111.337	147.285
3	2665.100	2687.105	357.855
4	3088.300	3114.521	641.008
5	3264.400	3282.627	890.097
6	3281.400	3295.225	1076.339
7	3003.800	3042.624	1070.597
8	3338.800	3372.353	1503.111
9	3618.400	3643.816	1974.213
10	4213.000	4245.273	2977.512
11	4500.200	4524.143	3719.728
12	4684.700	4700.416	4380.294
13	4397.200	4440.532	4235.126
14	4578.700	4608.292	4912.071
15	4636.200	4660.808	5383.613
16	5257.900	5277.867	7363.779
17	5643.300	5646.918	8956.521
18	6743.800	6764.925	13610.356
19	7100.400	7106.724	15855.028
20	8028.000	8028.764	21301.271
21	8746.600	8733.695	26466.531
22	8490.000	8491.543	26210.857

**Variable Endógena Número 4**

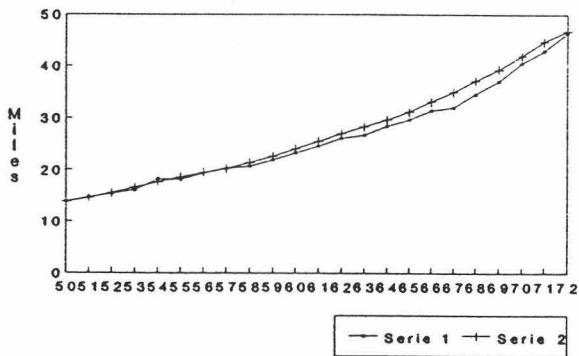
Tiempo	Observado	Tendencia	Varianza
0	760.000	760.000	0.000
1	853.800	852.600	6.120
2	923.500	920.240	14.260
3	1080.700	1080.228	29.474
4	1222.900	1222.123	50.301
5	1284.800	1281.114	69.092
6	1246.000	1244.620	78.255
7	1160.900	1166.264	80.164
8	1196.100	1199.828	96.966
9	1268.100	1269.178	122.062
10	1442.900	1444.531	175.690
11	1625.800	1626.320	244.963
12	1798.500	1795.744	325.813
13	1931.900	1923.195	404.846
14	1843.200	1841.462	399.719
15	1928.900	1922.441	466.767
16	2098.500	2087.640	587.133
17	2190.300	2174.576	676.870
18	2358.400	2337.568	828.151
19	2619.700	2592.399	1075.147
20	3093.700	3071.549	1588.756
21	3751.000	3747.586	2483.343
22	3662.300	3662.639	2485.004

## Contrastes de Hipótesis sobre los parámetros

Parámetros	Cociente	Fexp	G.L.
$\beta_0$	.3814361935	6.4866818289	(4, 16)
$\beta_1$	3.2213665765E - 03	1237.7090402554	(4, 16)
$\beta_2$	1.9415260635E - 03	2056.2350259891	(4, 16)
$\beta_0, \beta_1$	1.1794213030E - 03	112.4730658792	(8, 32)
$\beta_0, \beta_2$	6.10558389E - 04	157.8811906259	(8, 32)
$\beta_1, \beta_2$	4.4041605335E - 06	1902.0242462175	(8, 32)

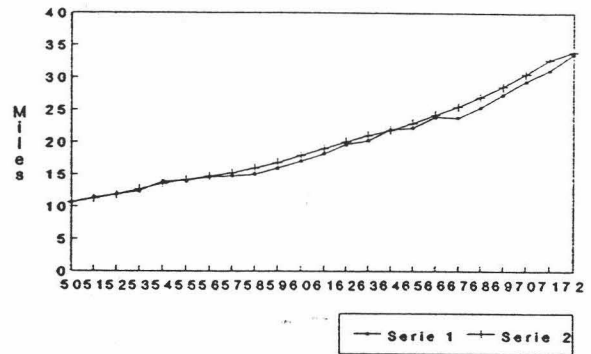


X1: Producto Nacional Real



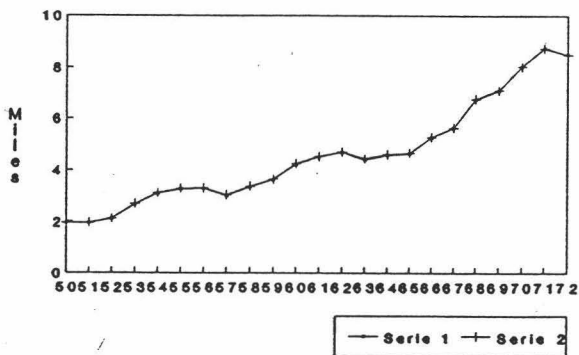
Serie1: Observado. Serie2: Predicho.

X2: Consumo Privado Real.



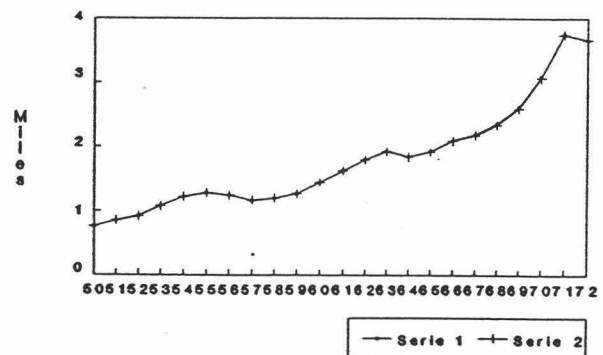
Serie1: Observado. Serie2: Predicho.

X3: Inversiones Privadas Reales



Serie1: Observado. Serie2: Predicho.

X4: Gastos Reales del Gobierno



Serie1: Observado. Serie2: Predicho.

# CAPITULO 3

## Tiempos de primer paso

### 1 Introducción

Como se comentó en la introducción de esta memoria, el problema de la determinación de tiempos de primer paso para procesos de difusión aparece frecuentemente, en la modelización de fenómenos aleatorios, en una gran variedad de campos de aplicación.

Unas de las primeras cuestiones de interés sobre este tema se encuentran en [12] y [48], donde se realiza un estudio para el proceso Wiener estándar y para cierto tipo de barreras (constantes y lineales en el tiempo).

Durbin, [15], estudió, centrándose en el proceso Wiener, el caso de barreras más generales, obteniendo una ecuación integral cuya solución da la probabilidad del tiempo de primer paso; sin embargo, dicha ecuación presentaba el inconveniente de no ser resoluble de forma analítica, presentándose métodos numéricos para paliar dicho problema.

Posteriormente Park y Paranjape, [38], consiguieron una expresión explícita para la solución de una ecuación integral como la planteada por Durbin, pero en el caso de barreras diferenciables verificando la condición  $|S'(t)| \leq Ct^{-p}$  con  $p < 1/2$  y  $C$  una cierta constante.

En un estudio posterior, Ricciardi, Sacerdote y Sato [43] establecieron que para un proceso de difusión, la función de densidad del tiempo de primer paso a través de una barrera continua en el tiempo y derivable con derivada acotada verifica una ecuación integral de Volterra de segunda especie, cuyo núcleo puede ser expresado en función de las *probability currents*, aplicándolo al caso concreto del proceso de Wiener y de Ornstein-Uhlenbeck. Este fue ya un buen avance en

dos sentidos: de una parte permitía resolver el problema para el proceso Wiener estándar no sólo para las barreras introducidas por Park y Paranjape, sino también para barreras del tipo  $S(t) = a + bt^{1/p}$  ( $p \geq 2$ ). Por otro lado, haciendo uso de las relaciones que transforman a un proceso de difusión en el Wiener, se podía obtener la densidad de tiempo de primer paso para ciertos procesos de difusión a través de barreras móviles si se conocía la del proceso Wiener a través de las correspondientes barreras transformadas. Ello fue de utilidad, por ejemplo, al considerarlo de forma recíproca; concretamente, a partir de la densidad del tiempo de primer paso para el proceso Ornstein-Uhlenbeck a través de barreras constantes se obtuvo, de forma explícita, la del Wiener a través de barreras del tipo  $S(t) = C\sqrt{t}$ , lo cual había sido investigado por Sato, [46].

No obstante, el resultado anterior tenía ciertas restricciones a la hora de encontrar aplicaciones a casos concretos; en efecto, la ecuación integral obtenida no tenía por qué poseer un núcleo no singular, a no ser que se trataran cierto tipos de barreras que hicieran evitar las posibles singularidades (como las que trataron en el citado artículo).

Es por ello por lo que se prosiguió con el estudio de las condiciones bajo las cuales ese tipo de ecuaciones integrales tuvieran núcleos no singulares, lo que garantizaría la existencia de solución. Buonocore, Nobile y Ricciardi, [6], demostraron que la densidad del tiempo de primer paso para difusiones unidimensionales en tiempo homogéneo a través de barreras variables satisfacían una nueva ecuación integral de Volterra de segunda especie (que ya no venía dada en función de las *probability currents*), ayudándose de dos funciones continuas, arbitrarias en principio. Con una conveniente elección de tales funciones probaron que, para los procesos Wiener y Ornstein-Uhlenbeck, la singularidad del núcleo podía ser evitada, siendo la clase de barreras para las cuales se podía aplicar dicho resultado la de funciones de clase  $C^2$ ; además encontraron tipos de barreras para las cuales era factible, sin necesidad de resolver la ecuación integral, encontrar formas explícitas para las densidades de tiempo de primer paso, al mismo tiempo que propusieron esquemas numéricos en el caso de no poder resolver de forma explícita la ecuación integral.

Siguiendo con esta idea, el siguiente paso fue intentar encontrar las funciones que garantizaran la regularización del núcleo de la ecuación integral obtenida. Giorno, Nobile, Ricciardi y Sato, [19], proporcionan la esperada generalización del caso anterior, probando que el método empleado para hacer no singular el núcleo de la ecuación integral es válido no sólo para el proceso Wiener y Ornstein-Uhlenbeck sino para una clase más general de difusiones cuyas densidades

de transición fueran conocidas.

Sin embargo, notemos que estos dos últimos resultados han sido establecidos para difusiones en tiempo homogéneo, por lo que sería interesante generalizar dichos resultados a procesos de difusión en tiempo no homogéneo.

Por último, Giorno, Nobile y Ricciardi, [18], han establecido un nuevo método de construir densidades de tiempo de primer paso para procesos homogéneos cuyas densidades de transición se pueden expresar en términos de las de otras difusiones, sin necesidad de recurrir a la clásica transformación de la ecuación de Kolmogorov; dicho resultado ha sido generalizado por Gutiérrez, De Juan y Román, [24], al caso de procesos en tiempo no homogéneo.

El objetivo principal de este capítulo será, por lo tanto, generalizar los resultados comentados anteriormente al caso de procesos de difusión no necesariamente homogéneos. Concretamente nos centraremos en la clase de procesos de difusión que pueden obtenerse como transformaciones del proceso de Wiener. Se podría pensar que esta clase es poco atractiva, ya que para ella se conocen perfectamente los mecanismos de cambio de un proceso al de Wiener, así como las relaciones entre las densidades del tiempo de primer paso. Sin embargo, como se verá en un ejemplo concreto, existen casos en que la situación no es tan fácil, no desde el punto de vista conceptual, sino desde el práctico, en lo que concierne a la obtención de expresiones explícitas para las densidades de tiempo de primer paso. En dichos casos uno se encuentra con problemas de índole operacional (como puede ser el de invertir una función), que conducen a abordar métodos numéricos.

Nosotros planteamos el hecho de la no necesidad de tener que llegar necesariamente a dichas situaciones, obteniendo, para tal clase de procesos, una ecuación integral de Volterra cuya solución es la densidad del tiempo de primer paso.

## 2 La ecuación integral

Sea  $\{X(t) : t \geq t_0; t_0 \in \mathbb{R}\}$  un proceso de difusión unidimensional con media y varianza infinitesimal  $A_1(x, t)$  y  $A_2(x, t)$ , respectivamente, definido sobre el intervalo  $I = (r_1, r_2)$ , con  $r_i, (i = 1, 2)$ , barreras naturales. Supongamos, asimismo, que  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ , con  $x_0 \in I$  y consideremos una función  $S(t)$ , en principio, continua en  $[t_0, +\infty)$ .

Definamos,  $\forall t \in I$  y  $\forall x \in [r_1, r_2]$

$$F(x, t | x_0, t_0) = P[X(t) \leq x | X(t_0) = x_0] \quad (2.1)$$

$$f(x, t | x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial x} F(x, t | x_0, t_0) \quad (2.2)$$

$$F^{[S(t)]}(x, t | x_0, t_0) =$$

$$= \begin{cases} P[X(t) < x | X(t_0) = x_0 \text{ y } X(\theta) < S(\theta) \forall \theta < t] & x_0 < S(t_0) \\ P[X(t) > x | X(t_0) = x_0 \text{ y } X(\theta) > S(\theta) \forall \theta < t] & x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$f^{[S(t)]}(x, t | x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial x} F^{[S(t)]}(x, t | x_0, t_0) \quad (2.4)$$

$$T = \begin{cases} \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) > S(t) | X(t_0) = x_0\} & x_0 < S(t_0) \\ \inf_{t \geq t_0} \{t : X(t) < S(t) | X(t_0) = x_0\} & x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} P[T < t] \quad (2.6)$$

Las expresiones (2.1) y (2.2) son, respectivamente, las funciones de distribución y densidad de transición del proceso; (2.3) y (2.4) corresponden a la distribución y densidad del proceso en presencia de la barrera absorbente  $S(t)$ ; (2.5) y (2.6) definen el tiempo de primer paso y su función de densidad de probabilidad respectivamente.

Existen varias expresiones que relacionan a estas funciones. En particular se tiene:

$$f(x, t | x_0, t_0) = \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) f(x, t | S(\tau), \tau) d\tau \quad (2.7)$$

si  $(x_0 < S(t_0) \text{ y } x \geq S(t))$  o  $(x_0 > S(t_0) \text{ y } x \leq S(t))$ .

$$\int_{r_1}^{S(t)} f^{[S(t)]}(x, t | x_0, t_0) dx = 1 - \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) d\tau \quad x_0 < S(t_0) \quad (2.8)$$

$$\int_{S(t)}^{r_2} f^{[S(t)]}(x, t | x_0, t_0) dx = 1 - \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) d\tau \quad x_0 > S(t_0) \quad (2.9)$$

Notemos que (2.7) es debida a Fortet,[16], mientras que (2.8) y (2.9) son identidades con claras interpretaciones probabilísticas <sup>1</sup>.

A continuación exponemos los resultados que proporcionan la ecuación integral de Volterra de segunda especie para la densidad del tiempo de primer paso. Se incluyen las demostraciones, con la idea de hacer ver que dichos resultados no dependen del carácter homogéneo o no del proceso de difusión.

**Lema 2.1** Sea  $S(t)$  una función continua en  $[t_0, +\infty)$  y sea  $\forall y \in I$  y  $\tau < t$

$$\phi(x, t | y, \tau) = \frac{d}{dt} F(x, t | y, \tau)$$

Entonces se verifica:

$$g(S(t), t | x_0, t_0) =$$

<sup>1</sup>Por ejemplo, (2.8) puede obtenerse como sigue:

$$\int_{r_1}^{S(t)} f^{[S(t)]}(x, t | x_0, t_0) dx = F^{[S(t)]}(S(t), t | x_0, t_0) - F^{[S(t)]}(r_1, t | x_0, t_0) =$$

$$= P[X(t) < S(t) | X(t_0) = x_0 \text{ y } X(\theta) < S(\theta) \forall \theta < t] =$$

$$= P[T \geq t] = 1 - \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) d\tau$$

$$= \begin{cases} -2\phi(S(t), t | x_0, t_0) + \\ + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \phi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau & x_0 < S(t_0) \\ 2\phi(S(t), t | x_0, t_0) - \\ - 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \phi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau & x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (2.10)$$

### Demostración

Supongamos que  $x_0 < S(t_0)$ . Integrando ambos miembros de (2.7), respecto a  $x$ , entre  $S(t)$  y  $r_2$  se tiene:

$$\begin{aligned} & 1 - F(S(t), t | x_0, t_0) = \\ & = \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) [1 - F(S(t), t | S(\tau), \tau)] d\tau \end{aligned} \quad (2.11)$$

Derivando la expresión (2.11) con respecto a  $t$  se tiene:

$$\begin{aligned} & -S'(t)f(S(t), t | x_0, t_0) - \phi(S(t), t | x_0, t_0) = \\ & = g(S(t), t | x_0, t_0) \lim_{\tau \uparrow t} [1 - F(S(t), t | S(\tau), \tau)] - \\ & - S'(t) \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) f(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau - \\ & - \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \phi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau \end{aligned}$$

Haciendo uso de (2.7) y del siguiente resultado,[16]

$$\lim_{\tau \uparrow t} F(S(t), t | S(\tau), \tau) = \frac{1}{2}$$

se tiene la primera relación de (2.10).

La demostración en el caso  $x_0 > S(t_0)$  es análoga, pero integrando ahora (2.7) entre  $r_1$  y  $S(t)$ . ■

**Teorema 2.2** Sean  $S(t)$ ,  $k(t)$  y  $r(t)$  funciones continuas en  $[t_0, +\infty)$ .  
Tomemos  $\forall y \in I$  y  $\tau < t$

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \begin{cases} \phi(S(t), t | y, \tau) + k(t)f(S(t), t | y, \tau) + \\ + r(t)[1 - F(S(t), t | y, \tau)] & x_0 < S(t_0) \\ \phi(S(t), t | y, \tau) + k(t)f(S(t), t | y, \tau) + \\ + r(t)F(S(t), t | y, \tau) & x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (2.12)$$

entonces se verifica:

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \begin{cases} -2\Psi(S(t), t | x_0, t_0) + \\ + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau & x_0 < S(t_0) \\ 2\Psi(S(t), t | x_0, t_0) - \\ - 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau & x_0 > S(t_0) \end{cases} \quad (2.13)$$

### Demostración

Consideremos  $x_0 < S(t_0)$  (el otro caso se resuelve de forma análoga). De (2.12) despejamos la función  $\phi$  y sustituimos su expresión en el miembro derecho de (2.10), obteniéndose

$$\begin{aligned} g(S(t), t | x_0, t_0) &= -2\Psi(S(t), t | x_0, t_0) + \\ &+ 2k(t)f(S(t), t | x_0, t_0) + 2r(t)[1 - F(S(t), t | x_0, t_0)] + \\ &+ 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau - \\ &- 2r(t) \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) [1 - F(S(t), t | S(\tau), \tau)] d\tau - \end{aligned}$$



$$-2k(t) \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) f(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau$$

y haciendo uso de (2.11) y (2.7) se concluye la demostración. ■

Estos resultados fueron aplicados por Buonocore, Nobile y Ricciardi, [6], a los procesos Wiener y Ornstein-Uhlenbeck. Concretamente se tienen los siguientes resultados:

### Proceso de Wiener:

**Teorema 2.3** Sea  $S(t)$  de clase  $C^2[t_0, +\infty)$ .

Entonces:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k(t) = \frac{1}{2} [\mu - S'(t)] \quad y \quad r(t) = 0 \end{aligned}$$

2.

$$\left. \begin{aligned} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \quad \forall \tau, t : t_0 \leq \tau < t \\ \lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S(t) = at + b \\ k(t) = \frac{\mu - a}{2} \\ r(t) = 0 \end{cases}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Para dicho proceso, con media infinitesimal  $A_1(x) = \alpha x + \beta$  y varianza infinitesimal  $A_2(x) = \sigma^2$ , se tiene:

**Teorema 2.4** Sea  $S(t)$  de clase  $C^2[t_0, +\infty)$ .

Entonces:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k(t) = \frac{1}{2} [\alpha S(t) + \beta - S'(t)] \quad y \quad r(t) = 0 \end{aligned}$$

2.

$$\left. \begin{aligned} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \quad \forall \tau, t : t_0 \leq \tau < t \\ \lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S(t) = -\frac{\beta}{\alpha} + Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t} \\ k(t) = B\alpha e^{-\alpha t} \\ r(t) = 0 \end{cases}$$

con  $A, B \in \mathbb{R}$ .

**Observación 2.5** Notemos que la condición 1 de cada teorema asegura que la ecuación integral sea no singular, mientras que la condición 2 nos proporciona una posibilidad de encontrar soluciones explícitas de dicha ecuación sin necesidad de integrarla.

Como se comentaba en la introducción, con posterioridad se demostró que la densidad del tiempo de primer paso para un proceso de difusión homogéneo a través de una barrera variable de clase  $C^2$ , satisface una cierta ecuación de Volterra de segunda especie, [19]. Concretamente se tiene:

**Teorema 2.6** Sea  $\{X(t) : t \geq t_0\}$  un proceso de difusión unidimensional homogéneo definido en  $I = (r_1, r_2)$ , donde  $r_i, (i = 1, 2)$ , son barreras naturales, con media y varianza infinitesimal respectivas  $A_1(x)$  y  $A_2(x)$ . Supongamos asimismo que  $P[X(t_0) = x_0] = 1, x_0 \in I$ . Si  $S(t)$  es una función de clase  $C^2$  en  $I$ , entonces la densidad del tiempo de primer paso para dicho proceso a través de  $S(t)$  satisface la ecuación integral

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \rho \{ -2\Psi(S(t), t | x_0, t_0) + \\ + 2 \int_{t_0}^t g(S(\tau), \tau | x_0, t_0) \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) d\tau \} \quad (2.14)$$

donde  $\rho = \text{Sgn}(S(t_0) - x_0)$  y donde

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{1}{2} \left[ S'(t) - A_1(S(t)) + \frac{3}{4} A_2'(S(t)) \right] f(S(t), t | y, \tau) + \\ + \frac{1}{2} A_2(S(t)) \left. \frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} \right|_{x=S(t)} \quad (2.15)$$

Notemos que dicha ecuación es no singular ya que

$$\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$$

Volveremos posteriormente con esta ecuación, ya que nuestra finalidad va a ser la de generalizarla, en lo que se pueda, al caso de procesos de difusión no homogéneos.

### 3 Transformaciones al proceso Wiener

Como ya hemos comentado, nuestra intención es la de generalizar la ecuación (2.14) para procesos no homogéneos. En concreto nos centraremos en la clase de procesos que pueden ser obtenidos como transformaciones del proceso Wiener. Por ello nos interesa conocer condiciones que aseguren el paso de un proceso de difusión a dicho proceso, así como las relaciones existentes, para las densidades del tiempo de primer paso, entre el proceso Wiener y cualquier otro proceso que pueda ser obtenido a partir de él.

Sea un proceso de difusión unidimensional  $\{X(t); t \geq t_0\}$  en tiempo no homogéneo con media y varianza infinitesimal  $A_1(x, t)$  y  $A_2(x, t)$ , respectivamente, definido sobre un intervalo  $I$  y verificando  $P[X(t_0) = x_0] = 1$  y sea el proceso Wiener estándar  $\{W(t'); t' \geq t'_0\}$  con

$$E[W(t')] = x'_0, \quad \text{Cov}[W(t'); W(s')] = t' \wedge s' \quad \text{y} \quad P[W(t'_0) = x'_0] = 1$$

y con media infinitesimal cero y varianza infinitesimal igual a uno.

Las transformaciones en las que estamos interesados son del tipo

$$x' = \bar{\Psi}(x, t) \quad x'_0 = \bar{\Psi}(x_0, t_0) \quad (3.1)$$

$$t' = \Phi(t) \quad t'_0 = \Phi(t_0)$$

que cambie la ecuación de Kolmogorov del proceso  $X(t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t_0} + A_1(x_0, t_0) \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{A_2(x_0, t_0)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^2} = 0 \quad (3.2)$$

en la del proceso Wiener estándar

$$\frac{\partial f'}{\partial t'_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f'}{\partial x_0'^2} = 0 \quad (3.3)$$

Se puede verificar que, si notamos por  $f'$  a la densidad de transición del proceso Wiener estándar y por  $f$  a la del proceso transformado, entonces ambas densidades están relacionadas por la expresión

$$f(x, t | x_0, t_0) = f'(x', t' | x'_0, t'_0) \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x} \quad (3.4)$$

En cuanto a la relación entre las densidades del tiempo de primer paso se tiene el siguiente resultado

**Teorema 3.7** Sea  $\{X(t); t \geq t_0\}$  un proceso de difusión unidimensional definido sobre un intervalo  $I$  con  $P[X(t_0) = x_0] = 1$  y sea el proceso Wiener estándar  $\{W(t'); t' \geq t'_0\}$  con  $E[W(t')] = x'_0$ ,  $\text{Cov}[W(t'); W(s')] = t' \wedge s'$  y  $P[W(t'_0) = x'_0] = 1$

Consideremos una función del tipo (3.1) que transforme el proceso  $X(t)$  en el proceso Wiener estándar.

Entonces, si  $\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \neq 0$ , se verifica

$$g_X(S(t), t | x_0, t_0) = g_W(S_w(t'), t' | x'_0, t'_0) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} \quad (3.5)$$

donde  $g_X$  es la función de densidad del tiempo de primer paso del proceso  $X(t)$  a través de la barrera  $S(t)$  y  $g_W$  es la de  $W(t')$  a través de la barrera

$$S_W(t') = \bar{\Psi} \left( S(\Phi^{-1}(t')), \Phi^{-1}(t') \right) \quad (3.6)$$

**Observación 3.8** *Notemos que, mediante la transformación dada y (3.5), la función de densidad de tiempo de primer paso para un proceso de difusión  $X(t)$  a través de la barrera*

$$S(t) = \bar{\Psi}^{-1}(t, S_W(\Phi(t)))$$

*se puede obtener a partir, si es conocida, de la función de densidad de tiempo de primer paso de  $W(t)$  a través de la barrera  $S_W(t')$ .*

*Asimismo, conocida la densidad de tiempo de primer paso para algún proceso de difusión a través de una barrera  $S(t)$ , se puede obtener la del proceso Wiener a través de la barrera transformada  $S_W(t)$ .*

Evidentemente, la pregunta que surge enseguida es cuándo se podrá transformar un proceso de difusión cualquiera en el Wiener. Cherkasov, [9], y Ricciardi, [40], estudiaron con detalle este problema, dando condiciones necesarias y suficientes para que exista tal tipo de transformación.

Dicho estudio se lleva a cabo observando cómo se ven alterados los momentos infinitesimales de  $X(t)$  por medio de la transformación (3.1) e igualando los nuevos momentos resultantes a los del Wiener estándar (media infinitesimal nula y varianza infinitesimal igual a uno), obteniéndose el siguiente teorema

**Teorema 3.9** *Sean  $C_1(t)$  y  $C_2(t)$  dos funciones arbitrarias de  $t$ . Entonces, si y sólo si*

$$A_1(x, t) = \frac{1}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} + \frac{[A_2(x, t)]^{\frac{1}{2}}}{2} \left\{ C_1(t) + \int^x \frac{C_2(t) A_2(y, t) + \frac{\partial A_2(y, t)}{\partial t}}{[A_2(y, t)]^{\frac{3}{2}}} dy \right\} \quad (3.7)$$

*existe una transformación del tipo (3.1) que cambia la ecuación (3.2) en (3.3) Además, de existir, dicha transformación viene dada, salvo constantes, por:*

$$x' = \bar{\Psi}(x, t) = \exp \left( -\frac{1}{2} \int^t C_2(s) ds \right) \int^x \frac{dy}{[A_2(y, t)]^{\frac{1}{2}}} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int^t C_1(s) \exp\left(-\frac{1}{2} \int^s C_2(\theta) d\theta\right) ds \\
 t' = \Phi(t) &= \int^t \exp\left(-\int^s C_2(\theta) d\theta\right) ds \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

**Observación 3.10** Hay que hacer notar que, para cada  $t$ , la transformación  $x' = \bar{\Psi}(x, t)$  es biunívoca, lo cual se puede deducir de

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} = \left[ \frac{\Phi'(t)}{A_2(x, t)} \right]^{\frac{1}{2}} > 0$$

## 4 Casos particulares en tiempo no homogéneo

A continuación nos proponemos, antes de entrar en la generalización de la ecuación (2.14), mostrar dos casos concretos de procesos de difusión en tiempo no homogéneo para los cuales seguiremos la misma metodología empleada en el caso homogéneo; concretamente nos referiremos al proceso logarítmico normal y Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos.

El interés de estos ejemplos radica en ver cómo lo expuesto en el caso homogéneo se traslada de forma natural a ellos, lo cual servirá de motivación para la generalización posterior.

### 4.1 Proceso log-normal con factores exógenos

Consideremos el proceso de difusión logarítmico normal unidimensional con factores exógenos, caracterizado por los momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = h(t)x \quad \text{y} \quad A_2(x, t) = \sigma^2 x^2$$

donde  $h$  es una función continua del tiempo y  $\sigma^2 > 0$ , estando definido dicho proceso en  $I = (0, +\infty)$ .

En primer lugar vamos a obtener la función de densidad de transición; para ello nos basaremos en el hecho de que este proceso puede ser obtenido a partir del proceso Wiener, haciendo uso del teorema 3.9.

En efecto, tomando

$$C_1(t) = \frac{2h(t)}{\sigma} - \sigma \quad y \quad C_2(t) = 0$$

se verifica (3.7). Con ello la transformación que lleva al proceso de Wiener es:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\log(x)}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \int^t h(s) ds + \frac{\sigma}{2} t & x'_0 &= \frac{\log(x_0)}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \int^{t_0} h(s) ds + \frac{\sigma}{2} t_0 \\ t' &= t & t'_0 &= t_0 \end{aligned}$$

obteniéndose, por (3.4)

$$f(x, t | y, \tau) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-\tau)}x} \exp\left(-\frac{\left[\log(x) - \log(y) - \int_{\tau}^t h(s) ds + \frac{\sigma^2}{2}(t-\tau)\right]^2}{2\sigma^2(t-\tau)}\right)$$

De la expresión anterior se puede calcular la función de distribución de transición. Se tiene

$$F(x, t | y, \tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{Erf} \left( \frac{\log(x) - \log(y) - \int_{\tau}^t h(s) ds + \frac{\sigma^2}{2}(t-\tau)}{\sqrt{2\sigma^2(t-\tau)}} \right) \right]$$

donde

$$\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-y^2) dy$$

Centrándonos en el cálculo de la densidad del tiempo de primer paso para este proceso, tendremos, aplicando (3.5)

$$g_X(S(t), t | x_0, t_0) = g_W[S_W(t'), t' | x'_0, t'_0]$$

**Ejemplo 4.11** Consideremos el caso concreto  $S_W(t') = a + bt'$

De (3.6) se tiene:

$$S(t) = \Psi^{-1}(S_W(t), t) = \exp\left(\sigma a + \left[\sigma b - \frac{\sigma^2}{2}\right]t + \int^t h(s)ds\right)$$

Como es sabido, para el proceso Wiener y  $S_W(t') = a + bt'$  se tiene, ([41], p. 70)

$$g_W(S_W(t'), t' | x'_0, t'_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(t' - t'_0)^{-\frac{3}{2}} |a - x'_0 + bt'_0| \exp\left(-\frac{[bt' + a - x'_0]^2}{2(t' - t'_0)}\right)$$

y por (3.5) se tendrá:

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \frac{\exp\left(\sigma a + \left[\sigma b - \frac{\sigma^2}{2}\right]t + \int^t h(s)ds\right)}{t - t_0} \times \\ \times \left| \sigma a + \left[\sigma b - \frac{\sigma^2}{2}\right]t_0 - \log(x_0) + \int^{t_0} h(s)ds \right| \times \\ \times f\left(\exp\left(\sigma a + \left[\sigma b - \frac{\sigma^2}{2}\right]t + \int^t h(s)ds\right), t | x_0, t_0\right) \quad (4.1)$$

Ahora bien, si quisiésemos conocer el comportamiento del proceso logarítmico normal a través de una barrera  $S(t)$  por este procedimiento, nos encontraríamos con que debería conocerse cómo se comporta el proceso Wiener a través de la barrera  $S_W(t')$  dada por (3.6). Por ejemplo, dada la barrera  $S(t) = a + bt$ , entonces la barrera correspondiente que habría que estudiar para el proceso Wiener sería:

$$S_W(t') = \frac{\log(a + bt')}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \int^{t'} h(s)ds + \frac{\sigma}{2}t'$$

para la cual no se tiene una forma explícita de la densidad del tiempo de primer paso para el proceso de Wiener estándar.



Precisamente este hecho el que nos lleva a profundizar un tanto más en el tema.

A continuación vamos a seguir con la misma metodología establecida en [6] para los procesos de Wiener y de Ornstein-Uhlenbeck, pero aplicada ahora al proceso logarítmico normal con factores exógenos.

**Lema 4.12** Sea  $S(t)$  derivable en  $[t_0, +\infty)$  y  $h(t)$  continua en el mismo intervalo.

Entonces para el proceso logarítmico normal con factores exógenos y  $\forall y \in \mathbb{R}^+$  y  $\tau < t$  se tiene:

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \begin{cases} f(S(t), t, | y, \tau) \bar{h}(t, \tau, y) + \\ + \frac{r(t)}{2} [1 - \text{Erf}(M(t, \tau, y))] & x_0 < S(t_0) \\ f(S(t), t, | y, \tau) \bar{h}(t, \tau, y) + \\ + \frac{r(t)}{2} [1 + \text{Erf}(M(t, \tau, y))] & x_0 > S(t_0) \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{h}(t, \tau, y) &= \\ &= S(t) \left[ \frac{S'(t)}{S(t)} - h(t) + \frac{\sigma^2}{4} - \frac{\log(S(t)) - \log(y) - \int_{\tau}^t h(s) ds}{2(t - \tau)} \right] + k(t) \end{aligned}$$

siendo  $r$  y  $k$  las funciones del teorema (2.2) y donde

$$M(t, \tau, y) = \frac{\log(S(t)) - \log(y) - \int_{\tau}^t h(s) ds + \frac{\sigma^2}{2}(t - \tau)}{\sqrt{2\sigma^2(t - \tau)}}$$

### Demostración

Para la demostración basta con hallar  $\frac{d}{dt} F(S(t), t | y, \tau)$ .

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F(S(t), t | y, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^{M(t, \tau, y)} e^{-u^2} du = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{[2\sigma^2(t - \tau)]^{\frac{3}{2}}} \exp(-M^2(t, \tau, y)) \times \\
&\quad \times \left\{ [2\sigma^2(t - \tau)] \left[ \frac{S'(t)}{S(t)} - h(t) + \frac{\sigma^2}{2} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \left[ \log(S(t)) - \log(y) - \int_{\tau}^t h(s) ds + \frac{\sigma^2}{2}(t - \tau) \right] \sigma^2 \right\} = \\
&= S(t) \left[ \frac{S'(t)}{S(t)} - h(t) + \frac{\sigma^2}{4} - \frac{\log(S(t)) - \log(y) - \int_{\tau}^t h(s) ds}{2(t - \tau)} \right] \times \\
&\quad \times f(S(t), t | y, \tau)
\end{aligned}$$

de donde se deduce directamente el resultado deseado. ■

Continuando con la metodología expuesta en [6] vamos a establecer un resultado análogo al teorema 2 de dicho artículo.

**Teorema 4.13** *Sea  $S(t)$  de clase  $C^2[t_0, +\infty)$  y  $h$  derivable en el mismo intervalo.*

*Entonces, para el proceso logarítmico normal con factores exógenos, se tiene*

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) &= 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow k(t) &= \frac{S(t)}{2} \left[ h(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right] - \frac{S'(t)}{2} \quad y \quad r(t) = 0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\left. \begin{aligned} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) &= 0 \quad \forall \tau, t : t_0 \leq \tau < t \\ \lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} S(t) = A \exp \left( Bt + \int^t h(s) ds \right) \\ k(t) = -\frac{1}{2} \left[ B + \frac{\sigma^2}{2} \right] S(t) \\ r(t) = 0 \end{cases} \quad A, B \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

con  $A, B \in \mathbb{R}$ .

Demostración

1) Supongamos que  $\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$

Aplicando la regla de L'Hopital se tiene:

$$\lim_{\tau \uparrow t} M(t, \tau, S(\tau)) = \lim_{\tau \uparrow t} \frac{1}{\sigma^2} \left[ \frac{S'(\tau)}{S(\tau)} - h(\tau) + \frac{\sigma^2}{2} \right] \sqrt{2\sigma^2(t - \tau)} = 0$$

con lo cual  $\lim_{\tau \uparrow t} \text{Erf}(M(t, \tau, S(\tau))) = 0$

y con ello:

$$\lim_{\tau \uparrow t} \frac{r(t)}{2} [1 \pm \text{Erf}(M(t, \tau, S(\tau)))] = \frac{r(t)}{2}$$

Ahora bien, tenemos que imponer la existencia del límite

$$\lim_{\tau \uparrow t} \bar{h}(t, \tau, S(\tau)) f(S(t), t | S(\tau), \tau)$$

y como  $f(S(t), t | S(\tau), \tau)$  diverge cuando  $\tau$  se aproxima a  $t$ , para la existencia de ese límite debe verificarse

$$\lim_{\tau \uparrow t} \bar{h}(t, \tau, S(\tau)) = 0$$

o sea:

$$\lim_{\tau \uparrow t} \left[ S'(t) - S(t)h(t) + S(t)\frac{\sigma^2}{4} - \frac{\log(S(t)) - \log(S(\tau)) - \int_{\tau}^t h(s)ds}{2(t - \tau)} + k(t) \right] = 0$$

lo que, junto al hecho de que

$$\lim_{\tau \uparrow t} \frac{\log(S(t)) - \log(S(\tau)) - \int_{\tau}^t h(s)ds}{2(t - \tau)} = -\frac{h(t)}{2} + \frac{S'(t)}{2S(t)}$$

conduce a

$$k(t) = \frac{S(t)}{2} \left[ h(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right] - \frac{S'(t)}{2} \quad \text{y} \quad r(t) = 0 \quad (4.2)$$

Se puede verificar que, en tal caso

$$\lim_{\tau \uparrow t} \bar{h}(t, \tau, S(\tau)) f(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$$

Esto demuestra la condición necesaria. Recíprocamente, si se verifica (4.2), entonces  $\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$ , teniéndose así la condición suficiente.

2) Por la hipótesis  $\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$  se tiene, del apartado 1

$$k(t) = \frac{S(t)}{2} \left[ h(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right] - \frac{S'(t)}{2} \quad \text{y} \quad r(t) = 0$$

Con ello

$$\Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = \frac{1}{2} f(S(t), t | S(\tau), \tau) \times \left[ S'(t) - h(t)S(t) - S(t) \frac{\log(S(t)) - \log(S(\tau)) - \int_{\tau}^t h(s)ds}{t - \tau} \right] \quad (4.3)$$

Por hipótesis, el miembro izquierdo de (4.3) tiende a cero para  $t_0 \leq \tau < t$  y para  $\tau \uparrow t$ , y por tanto ha de verificarse

$$S'(t) = h(t)S(t) + S(t) \frac{\log(S(t)) - \log(S(\tau)) - \int_{\tau}^t h(s)ds}{t - \tau}$$

Dicha expresión no es más que una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya solución general es del tipo

$$S(t) = A \exp \left( Bt + \int^t h(s)ds \right)$$

y con ello

$$k(t) = -\frac{1}{2} \left[ B + \frac{\sigma^2}{2} \right] A \exp \left( Bt + \int^t h(s)ds \right)$$

Así se verifica la condición necesaria. La condición suficiente es inmediata a partir de las expresiones de  $S(t)$ ,  $k(t)$  y  $r(t)$ . ■

Como corolario del anterior teorema se tiene:

**Corolario 4.14** *Para el proceso logarítmico normal con factores exógenos, la densidad del tiempo de primer paso a través de la barrera*

$$A \exp \left( Bt + \int^t h(s) ds \right)$$

viene dada por

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = f \left( A \exp \left( Bt + \int^t h(s) ds \right), t | x_0, t_0 \right) \times$$

$$\frac{A \exp \left( Bt + \int^t h(s) ds \right)}{t - t_0} \left| \log(A) + Bt_0 - \log(x_0) + \int^{t_0} h(s) ds \right|$$

#### Demostración

Se obtiene fácilmente aplicando (2.13) y 2) del teorema anterior. ■

**Observación 4.15** *Notemos que, tomando  $A = e^{\sigma a}$  y  $B = \left( \sigma b - \frac{\sigma^2}{2} \right)$  se obtiene la densidad dada en (4.1).*

Además se puede obtener el siguiente resultado basado en la teoría general de ecuaciones integrales y en particular para las ecuaciones de Volterra de segunda especie y que citamos aquí sin demostración.

**Corolario 4.16** *Sea  $S(t)$  de clase  $C^2[t_0, +\infty)$ . Para el proceso logarítmico normal con factores exógenos, si*

$$k(t) = \frac{S(t)}{2} \left[ h(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right] - \frac{S'(t)}{2} \quad y \quad r(t) = 0$$

entonces la ecuación (2.13) posee una única solución continua.

**Observación 4.17** Notemos que en el teorema (4.13), en su apartado 2) tenemos que suponer que la barrera es de clase  $C^2$ , lo cual se traduce en que la función  $h$  no sólo sea continua sino derivable.

Otra cuestión importante a destacar es que el conocimiento del comportamiento del proceso logarítmico normal a través de una barrera por ejemplo del tipo  $S(t) = a + bt$  puede estudiarse de forma directa a partir de las expresiones anteriores sin necesidad de tener que recurrir al paso al proceso de Wiener y su estudio, en dicho proceso, a través de una barrera como

$$S_W(t') = \frac{\log(a + bt')}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \int^t h(s) ds + \frac{\sigma}{2} t'$$

Volvamos por un instante a la ecuación (2.14) que satisface un proceso homogéneo en el tiempo, juntamente con la expresión (2.15) y consideremos el proceso logarítmico normal sin factores exógenos, con  $A_1(x) = mx$  y  $A_2(x) = \sigma^2 x^2$ .

Para dicho proceso se verifica (2.14), mientras que

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{1}{2} f(S(t), t | y, \tau) \times \left[ S'(t) - \frac{S(t)}{t - \tau} \log \left( \frac{S(t)}{y} \right) \right] \quad (4.4)$$

Sin embargo, para el proceso logarítmico normal con factores exógenos con  $A_1(x, t) = h(t)x$  y  $A_2(x, t) = \sigma^2 x^2$  se tiene, a partir del teorema (4.13) en su apartado 1)

$$\begin{aligned} \Psi(S(t), t | y, \tau) &= \frac{1}{2} f(S(t), t | y, \tau) \times \\ &\times \left[ S'(t) - \frac{S(t)}{t - \tau} \log \left( \frac{S(t)}{y} \right) - h(t)S(t) + S(t) \frac{\int_{\tau}^t h(s) ds}{t - \tau} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Notemos que el caso sin factores exógenos no es más que un caso particular del de factores exógenos con  $h(t) = m$  y tomando dicha función en (4.5) se obtiene (4.4).

Esto nos hace pensar que tal vez fuera posible demostrar la existencia de una ecuación del tipo (2.14) obtenida en [19] para el caso de un proceso de difusión en tiempo no homogéneo.

## 4.2 Proceso Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos

Consideremos ahora el proceso de difusión Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos, caracterizado por los momentos infinitesimales

$$A_1(x, t) = -h(t)x \quad \text{y} \quad A_2(x, t) = \sigma^2$$

donde  $h$  es una función continua del tiempo,  $\sigma^2 > 0$ , estando definido dicho proceso en  $I = (-\infty, +\infty)$ .

En primer lugar calculamos la transformación que lo lleva al proceso de Wiener. Tomando, en el teorema 3.9

$$C_1(t) = 0 \quad \text{y} \quad C_2(t) = -2h(t)$$

se tiene

$$t' = \int^t \exp\left(2 \int^s h(\theta)d\theta\right) ds \quad t'_0 = \int^{t_0} \exp\left(2 \int^s h(\theta)d\theta\right) ds$$

$$x' = \frac{x}{\sigma} \exp\left(\int^t h(s)ds\right) \quad x'_0 = \frac{x_0}{\sigma} \exp\left(\int^{t_0} h(s)ds\right)$$

Por tanto, para este proceso de difusión, se tiene

$$f(x, t | y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \exp\left(-2 \int^t h(s)ds\right) \int_\tau^t \exp\left(2 \int^s h(\theta)d\theta\right) ds}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{\left[x - y \exp\left(-\int_\tau^t h(s)ds\right)\right]^2}{2\sigma^2 \exp\left(-2 \int^t h(s)ds\right) \int_\tau^t \exp\left(2 \int^s h(\theta)d\theta\right) ds}\right)$$

Para facilitar cálculos posteriores expresaremos esta densidad en la forma

$$f(x, t | y, \tau) = \frac{\exp\left(\int^t h(s)ds\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \int_\tau^t \exp\left(2 \int^s h(\theta)d\theta\right) ds}} \times$$

$$\times \exp \left( - \frac{\left[ x \exp \left( \int_{\tau}^t h(s) ds \right) - y \right]^2}{2\sigma^2 \exp \left( -2 \int_{\tau}^t h(s) ds \right) \int_{\tau}^t \exp \left( 2 \int^s h(\theta) d\theta \right) ds} \right)$$

En cuanto a la función de distribución se tiene

$$F(x, t | y, \tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{Erf} \left( \frac{x \exp \left( \int_{\tau}^t h(s) ds \right) - y}{\left[ 2\sigma^2 \exp \left( -2 \int_{\tau}^t h(s) ds \right) \int_{\tau}^t \exp \left( 2 \int^s h(\theta) d\theta \right) ds \right]^{\frac{1}{2}}} \right) \right]$$

Continuando con la metodología empleada en el apartado anterior tenemos:

**Lema 4.18** Sea  $S(t)$  derivable en  $[t_0, +\infty)$  y  $h(t)$  continua en el mismo intervalo.

Entonces para el proceso Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos y  $\forall y \in \mathbb{R}$  y  $\tau < t$  se tiene:

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \begin{cases} f(S(t), t, | y, \tau) \bar{h}(t, \tau, y) + \frac{r(t)}{2} \left[ 1 - \operatorname{Erf} \left( \frac{M_1(t, \tau, y)}{[M_2(t, \tau)]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] & x_0 < S(t_0) \\ f(S(t), t, | y, \tau) \bar{h}(t, \tau, y) + \frac{r(t)}{2} \left[ 1 + \operatorname{Erf} \left( \frac{M_1(t, \tau, y)}{[M_2(t, \tau)]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] & x_0 > S(t_0) \end{cases}$$

donde

$$\bar{h}(t, \tau, y) =$$



$$\begin{aligned}
&= S'(t) + S(t)h(t) - \frac{S(t) \exp\left(2 \int_{\tau}^t h(s) ds\right)}{2 \exp\left(-2 \int_{\tau}^t h(s) ds\right) \int_{\tau}^t \exp\left(2 \int^s h(\theta) d\theta\right) ds} + \\
&\quad + \frac{y \exp\left(\int_{\tau}^t h(s) ds\right)}{2 \exp\left(-2 \int_{\tau}^t h(s) ds\right) \int_{\tau}^t \exp\left(2 \int^s h(\theta) d\theta\right) ds} + k(t)
\end{aligned}$$

siendo  $r$  y  $k$  las funciones del teorema 2.2 y donde

$$M_1(t, \tau, y) = S(t) \exp\left(\int_{\tau}^t h(s) ds\right) - y$$

$$M_2(t, \tau) = 2\sigma^2 \exp\left(-2 \int_{\tau}^t h(s) ds\right) \int_{\tau}^t \exp\left(2 \int^s h(\theta) d\theta\right) ds$$

#### Demostración

Al igual que antes, nos basta con hallar la expresión de

$$\frac{d}{dt} F(S(t), t | y, \tau)$$

obteniéndose en este caso:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F(S(t), t | y, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{M_1^2(t, \tau, y)}{M_2(t, \tau)}\right) \frac{1}{[M_2(t, \tau)]^{\frac{3}{2}}} \times \\
&\times \left\{ \left[ S'(t) \exp\left(\int_{\tau}^t h(s) ds\right) + S(t)h(t) \exp\left(\int_{\tau}^t h(s) ds\right) \right] M_2(t, \tau) - \right. \\
&\quad \left. - \sigma^2 \exp\left(2 \int_{\tau}^t h(s) ds\right) M_1(t, \tau, y) \right\}
\end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado deseado. ■

Vamos a continuar con un teorema análogo al establecido en el caso del proceso logarítmico normal pero aplicado ahora al proceso Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos.

**Teorema 4.19** Sea  $S(t)$  de clase  $C^2[t_0, +\infty)$  y  $h$  derivable en el mismo intervalo.

Entonces:

1.

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k(t) = -\frac{1}{2} [S'(t) + S(t)h(t)] \quad y \quad r(t) = 0 \end{aligned}$$

2.

$$\left. \begin{aligned} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \quad \forall \tau, t : t_0 \leq \tau < t \\ \lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S(t) = \exp\left(-\int^t h(s) ds\right) \times \\ \quad \times \left[A \int_{\tau}^t \exp\left(2 \int^s h(\theta) d\theta\right) ds\right] + B \\ k(t) = -\frac{1}{2} [S'(t) + S(t)h(t)] \\ r(t) = 0 \end{cases}$$

con  $A, B \in \mathbb{R}$ .

### Demostración

1) Supongamos

$$\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$$

De una parte tenemos, aplicando la regla de L'Hopital

$$\lim_{\tau \uparrow t} \frac{M_1(t, \tau, S(\tau))}{[M_2(t, \tau)]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

de donde

$$\lim_{\tau \uparrow t} \frac{r(t)}{2} \left[ 1 \pm \operatorname{Erf} \left( \frac{M_1(t, \tau, S(\tau))}{[M_2(t, \tau)]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] = \frac{r(t)}{2} \quad (4.6)$$

Ahora estamos interesados en que

$$\lim_{\tau \uparrow t} f(S(t), t | S(\tau), \tau) \bar{h}(t, \tau, S(\tau)) = 0$$

y dado que  $f$  diverge cuando  $\tau$  tiende a  $t$ , entonces ha de verificarse

$$\lim_{\tau \uparrow t} \bar{h}(t, \tau, S(\tau)) = 0$$

Ahora bien

$$\lim_{\tau \uparrow t} \bar{h}(t, \tau, S(\tau)) = \frac{S'(t)}{2} + \frac{S(t)h(t)}{2} + k(t)$$

de donde se deduce,

$$k(t) = -\frac{1}{2}[S'(t) + S(t)h(t)] \quad (4.7)$$

Así (4.6), junto con (4.7) establecen la condición necesaria, mientras que la suficiente es inmediata.

2) Para que se cumpla

$$\Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \quad \forall t_0 \leq \tau < t \quad \text{y} \quad \lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$$

se ha de verificar, además de (4.7) y  $r(t) = 0$

$$\begin{aligned} S'(t) + S(t)h(t) - \frac{S(t) \exp\left(2 \int_{\tau}^t h(s) ds\right)}{\exp\left(-2 \int_{\tau}^t h(s) ds\right) \int_{\tau}^t \exp\left(2 \int^s h(\theta) d\theta\right) ds} = \\ = - \frac{S(\tau) \exp\left(\int_{\tau}^t h(s) ds\right)}{\exp\left(-2 \int_{\tau}^t h(s) ds\right) \int_{\tau}^t \exp\left(2 \int^s h(\theta) d\theta\right) ds} \end{aligned}$$

expresión que es una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y cuya solución general es:

$$S(t) = \exp\left(-\int^t h(s)ds\right) \left[ A \int_{\tau}^t \exp\left(2 \int^s h(\theta)d\theta\right) ds + B \right]$$

quedando así demostrado el teorema, ya que la condición suficiente es inmediata. ■

Como corolario del anterior teorema se tiene:

**Corolario 4.20** *Para el proceso Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos, la densidad del tiempo de primer paso a través de la barrera*

$$S(t) = \exp\left(-\int^t h(s)ds\right) \left[ A \int_{t_0}^t \exp\left(2 \int^s h(\theta)d\theta\right) ds + B \right]$$

viene dada por:

$$\begin{aligned} g(S(t), t | x_0, t_0) &= \left| x_0 - B \exp\left(-\int^{t_0} h(s)ds\right) \right| \times \\ &\times \frac{\exp\left(\int_{t_0}^t h(s)ds\right)}{\exp\left(-2 \int_{t_0}^t h(s)ds\right) \int_{t_0}^t \exp\left(2 \int^s h(\theta)d\theta\right) ds} \times \\ &\times f\left(\exp\left(-\int^t h(s)ds\right) \left[ A \int_{t_0}^t \exp\left(2 \int^s h(\theta)d\theta\right) ds + B \right], t \mid x_0, t_0\right) \end{aligned}$$

#### Demostración

Se obtiene fácilmente aplicando (2.13) y 2) del teorema anterior. ■

## 5 Generalización de la ecuación integral

### 5.1 Introducción

A continuación vamos a abordar la, ya comentada en varias ocasiones, generalización de la ecuación 2.14 al caso de procesos no homogéneos. En concreto nos vamos a restringir al caso de procesos que puedan ser obtenidos a partir del proceso Wiener, via una transformación del tipo 3.1.

Puede parecer ésta una cuestión sin excesiva trascendencia, ya que el teorema 3.7 nos da la relación existente entre las densidades del tiempo de primer paso para el proceso Wiener y el proceso transformado de él.

Sin embargo, el citado teorema garantiza el conocimiento de la densidad de tiempo de primer paso para un proceso  $X(t)$  a través de la barrera  $S(t)$ , si es conocida la del proceso Wiener estándar a través de la barrera

$$S_W(t') = \bar{\Psi} \left( S(\Phi^{-1}(t')), \Phi^{-1}(t') \right)$$

Obviamente, el problema es ahora conocer dicha densidad, bien en forma explícita, lo cual podría hacerse (en virtud del teorema 2.3) si la barrera transformada es lineal, o bien teniendo que recurrir a aproximaciones de tipo numérico (véase [6]).

Aún así, se observa que la barrera transformada,  $S_W(t')$ , va expresada en términos de  $\Phi^{-1}(t')$ , lo cual obliga a conocer de forma explícita la inversa de la función  $\Phi(t)$ , (que sabemos que existe). Esta cuestión ya no es tan trivial, como se puede observar en el caso del proceso de Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos anteriormente estudiado. En dicho estudio se tenía que la función  $\Phi(t)$  era

$$t' = \int^t \exp \left( 2 \int^s h(\theta) d\theta \right) ds$$

y si pensamos en el caso particular  $h(\theta) = \theta$ , se tendría

$$t' = \int^t \exp(s^2) ds$$

Para invertir dicha función hay que hacer uso de aproximaciones numéricas, por lo que el problema del cálculo de la densidad del tiempo de primer paso se va complicando, y aún más se complicaría si hemos de aproximar también de forma numérica la correspondiente densidad para el proceso Wiener.

Es este planteamiento el que nos motiva a intentar generalizar la ecuación (2.14) al caso de procesos obtenidos a partir del Wiener.

Así pues, sea un proceso de difusión  $\{X(t); t \geq t_0\}$  no necesariamente homogéneo con momentos infinitesimales  $A_1(x, t)$  y  $A_2(x, t)$ , definido en  $I = (r_1, r_2)$ , con  $r_1$  y  $r_2$  barreras naturales, y tal que  $P[X(t_0) = x_0] = 1$ .

Supongamos que se dan las condiciones del teorema (3.9), de tal forma que existe una transformación del tipo (3.1).

Utilizando la conocida forma de la densidad de transición del Wiener, se puede calcular la densidad de transición para  $X(t)$

$$f(x, t | x_0, t_0) =$$

$$= [2\pi (\Phi(t) - \Phi(t_0))]^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{[\bar{\Psi}(x, t) - \bar{\Psi}(x_0, t_0)]^2}{2[\Phi(t) - \Phi(t_0)]} \right) \frac{\partial \bar{\Psi}(x, t)}{\partial x}$$

así como la función de distribución

$$F(x, t | x_0, t_0) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{Erf} \left( \frac{\bar{\Psi}(x, t) - \bar{\Psi}(x_0, t_0)}{[2(\Phi(t) - \Phi(t_0))]^{\frac{1}{2}}} \right) \right]$$

## 5.2 Densidad de tiempo de primer paso para barreras variables

Supongamos que  $S(t)$  es una barrera variable en el tiempo, derivable en el intervalo  $[t_0, +\infty)$ . Se tiene entonces el siguiente lema.

**Lema 5.21** *En las hipótesis generales, si  $S(t)$  es derivable en  $[t_0, +\infty)$ , entonces,  $\forall y \in I$  y  $\forall \tau < t$  se tiene:*

$$\frac{dF(S(t), t | y, \tau)}{dt} = f(S(t), t | y, \tau) \left\{ S'(t) + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} - \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)] \Phi'(t)}{2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]} \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} \right\}$$

Demostración

$$\frac{dF(S(t), t | y, \tau)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)}{[2(\Phi(t) - \Phi(\tau))]^{\frac{1}{2}}}} e^{-z^2} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)]^2}{2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]} \right) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \right]^{-1} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} S'(t) + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} - \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)] \Phi'(t)}{[2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]]^{\frac{3}{2}}}}{[2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]]^{\frac{1}{2}}} \right\} = \\
& = f(S(t), t | y, \tau) \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \right]^{-1} \times \\
& \times \left\{ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \Big|_{x=S(t)} S'(t) + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} - \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)] \Phi'(t)}{2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]} \right\} = \\
& = f(S(t), t | y, \tau) \times \\
& \times \left\{ S'(t) + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} - \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)] \Phi'(t)}{2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]} \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} \right\}
\end{aligned}$$

■

En nuestro caso, teniendo en cuenta la definición de la función  $\Psi(S(t), t | y, \tau)$  dada en el lema (2.1), se obtiene

**Teorema 5.22** *En las hipótesis del lema anterior y considerando  $k(t)$  y  $r(t)$  dos funciones continuas en el intervalo  $[t_0, +\infty)$  se tiene,  $\forall y \in I$  y  $\forall \tau < t$ :*

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) =$$

$$= \begin{cases} f(S(t), t, | y, \tau) \bar{h}(t, \tau, y) + \\ + \frac{r(t)}{2} \left[ 1 - \operatorname{Erf} \left( \frac{\bar{\Psi}(x, t) - \bar{\Psi}(y, \tau)}{[2(\Phi(t) - \Phi(\tau))]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] & x_0 < S(t_0) \\ f(S(t), t, | y, \tau) \bar{h}(t, \tau, y) + \\ + \frac{r(t)}{2} \left[ 1 + \operatorname{Erf} \left( \frac{\bar{\Psi}(x, t) - \bar{\Psi}(y, \tau)}{[2(\Phi(t) - \Phi(\tau))]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] & x_0 > S(t_0) \end{cases}$$

en donde

$$\bar{h}(t, \tau, y) = \left\{ S'(t) + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \frac{1}{\left. \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \right|_{x=S(t)}} - \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(y, \tau)] \Phi'(t)}{2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]} \frac{1}{\left. \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \right|_{x=S(t)}} + k(t) \right\}$$

### Demostración

La demostración es inmediata sin más que tomar la definición de la función  $\Psi$  y aplicar el lema anterior. ■

A continuación estudiamos, en términos de las funciones  $k(t)$  y  $r(t)$ , condiciones bajo las cuales

$$\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$$

Con ello analizamos la posibilidad de extender los resultados conocidos al caso de difusiones no homogéneas con barreras variables. Notemos que lo que intentamos con ello es encontrar una condición necesaria y suficiente para que el núcleo de la ecuación integral de Volterra de segunda especie (2.10) sea no singular.

**Teorema 5.23** *En las hipótesis del teorema anterior y si  $S(t)$  es de clase  $C^2[t_0, +\infty)$  se verifica*

$$\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r(t) = 0 \\ k(t) = -\frac{1}{2} \left[ S'(t) + \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \Big|_{x=S(t)}}{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} \right] \end{cases}$$

### Demostración

En primer lugar supongamos que  $\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$



Aplicando la regla de L'Hôpital se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \uparrow t} \frac{\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(S(\tau), \tau)}{[2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]]^{\frac{1}{2}}} &= \lim_{\tau \uparrow t} \frac{-\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(\tau)} S'(\tau) - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \tau}}{-\Phi'(\tau) [2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]]^{-\frac{1}{2}}} = \\ &= \lim_{\tau \uparrow t} \frac{1}{\Phi'(\tau)} \left\{ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(\tau)} S'(\tau) + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \tau} \right\} [2[\Phi(t) - \Phi(\tau)]]^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}$$

con lo cual

$$\lim_{\tau \uparrow t} \frac{r(t)}{2} \left[ 1 \pm \operatorname{Erf} \left( \frac{\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(S(\tau), \tau)}{[2(\Phi(t) - \Phi(\tau))]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] = \frac{r(t)}{2}$$

A continuación hay que imponer la existencia del límite siguiente:

$$\lim_{\tau \uparrow t} f(S(t), t, | S(\tau), \tau) \bar{h}(t, \tau, S(\tau))$$

Ahora bien, como  $f(S(t), t, | S(\tau), \tau)$  diverge cuando  $\tau$  se aproxima a  $t$ , para la existencia de dicho límite ha de verificarse

$$\lim_{\tau \uparrow t} \bar{h}(t, \tau, S(\tau)) = 0$$

lo cual junto a que

$$\lim_{\tau \uparrow t} \frac{\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(S(\tau), \tau)}{\Phi(t) - \Phi(\tau)} = \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} S'(t) + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t}}{\Phi'(t)}$$

conduce a

$$k(t) = -\frac{1}{2} \left[ S'(t) + \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \Big|_{x=S(t)}}{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} \right]$$

Se puede verificar que con esa elección de la función  $k(t)$  se tiene

$$\lim_{\tau \uparrow t} f(S(t), t, | S(\tau), \tau) \bar{h}(t, \tau, S(\tau)) = 0$$

Con ello y con  $r(t) = 0$  tenemos demostrada la condición necesaria. Recíprocamente, tomando  $r(t) = 0$  y la función  $k(t)$  anterior, se deduce fácilmente la condición suficiente. ■

**Observación 5.24** *Probado este lema se tiene*

$$\Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = \frac{1}{2} f(S(t), t | S(\tau), \tau) \times \left\{ S'(t) + \frac{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \Big|_{x=S(t)}}{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} - \frac{[\bar{\Psi}(S(t), t) - \bar{\Psi}(S(\tau), \tau)] \Phi'(t)}{[\Phi(t) - \Phi(\tau)]} \frac{1}{\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}} \right\} \quad (5.1)$$

de donde se puede intentar extraer más conclusiones. En efecto, podemos plantearnos bajo qué condiciones se verifica, además de la condición

$$\lim_{\tau \uparrow t} \Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0$$

el hecho de que la función  $\Psi$  se anule para valores  $t, \tau$  con  $t_0 \leq \tau < t$ .

Para ello, a partir de (5.1), se observa que es necesario y suficiente con que la expresión entre llaves sea idénticamente nula, lo cual conduce a una ecuación diferencial ordinaria en  $S(t)$ , para cuyas soluciones se obtendrán los tipos de barreras para los cuales se tiene una expresión explícita de la densidad del tiempo de primer paso sin necesidad de resolver la ecuación integral de Volterra.

### 5.3 Caracterización de $k(t)$ en función de los momentos infinitesimales de la difusión

Para obtener la deseada caracterización de la función  $k(t)$  vamos a hacer uso de la transformación, la cual hemos supuesto existe, que nos lleva un proceso de difusión al Wiener estándar y dada en el teorema (3.9)

$$\begin{aligned} x' = \bar{\Psi}(x, t) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int^t C_2(s) ds\right) \int^x \frac{dy}{[A_2(y, t)]^{\frac{1}{2}}} - \\ &\quad - \int^t C_1(s) \exp\left(-\frac{1}{2} \int^s C_2(\theta) d\theta\right) ds \\ t' = \Phi(t) &= \int^t \exp\left(-\int^s C_2(\theta) d\theta\right) ds \end{aligned}$$

Observemos que, de dichas expresiones, se puede deducir

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} = [\Phi'(t)]^{\frac{1}{2}} [A_2(x, t)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} [\Phi'(t)]^{\frac{1}{2}} [A_2(x, t)]^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + A_1(x, t) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial x} + \frac{A_2(x, t)}{2} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial x^2} = 0$$

de donde

$$\left. \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \right|_{x=S(t)} = -A_1(S(t), t) + \frac{1}{4} \left. \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=S(t)}$$

con lo cual se deduce una expresión de  $k(t)$  en función de los momentos infinitesimales, de tal forma que:

$$k(t) = \frac{1}{2} \left[ A_1(S(t), t) - S'(t) - \frac{1}{4} \left. \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=S(t)} \right] \quad (5.2)$$

**Observación 5.25** *Este resultado es restringido en el sentido de que se obtiene en las hipótesis en que estamos trabajando, es decir, para difusiones que pueden transformarse en el proceso de Wiener. Pero en cambio extiende, en tales hipótesis, los resultados respectivos de Giorno et al.,[19], obtenidos para difusiones homogéneas.*

### Obtención de la función $\Psi$ a partir de $k(t)$

Finalmente, vamos a analizar la relación existente entre las funciones  $\Psi$ , la función de distribución de transición y la función  $k(t)$  caracterizada por la ecuación (5.2) mediante una ecuación integral, siguiendo la idea desarrollada por Giorno et al.,[19].

Partiendo de:

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{d}{dt} F(S(t), t | y, \tau) + k(t) f(S(t), t | y, \tau)$$

(recordemos que  $r(t) = 0$ ) y teniendo en cuenta que  $f(x, t | y, \tau)$  verifica la ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial [A_1(x, t) f]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [A_2(x, t) f]}{\partial x^2}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \Psi(S(t), t | y, \tau) &= \frac{d}{dt} \int_{r_1}^{S(t)} f(x, t | y, \tau) dx + k(t) f(S(t), t | y, \tau) = \\ &= S'(t) f(S(t), t | y, \tau) + k(t) f(S(t), t | y, \tau) + \int_{r_1}^{S(t)} \frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial t} dx = \\ &= [S'(t) + k(t)] f(S(t), t | y, \tau) - \\ &\quad - \int_{r_1}^{S(t)} \left[ \frac{\partial [A_1(x, t) f(x, t | y, \tau)]}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [A_2(x, t) f(x, t | y, \tau)]}{\partial x^2} \right] dx = \\ &= [S'(t) + k(t)] f(S(t), t | y, \tau) - \\ &\quad - A_1(S(t), t) f(S(t), t | y, \tau) + \frac{1}{2} \frac{\partial [A_2(x, t) f(x, t | y, \tau)]}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} = \\ &= [S'(t) + k(t) - A_1(S(t), t)] f(S(t), t | y, \tau) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} f(S(t), t | y, \tau) + \frac{1}{2} A_2(S(t), t) \frac{\partial [f(x, t | y, \tau)]}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} = \end{aligned}$$

$$= f(S(t), t | y, \tau) \left[ S'(t) + k(t) - A_1(S(t), t) + \frac{1}{2} \frac{\partial [A_2(x, t)]}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \right] + \\ + \frac{1}{2} A_2(S(t), t) \frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)}$$

Con ello la expresión de la función  $\Psi$  resulta ser, en términos de los momentos infinitesimales, la siguiente:

$$\Psi(S(t), t | y\tau) = \\ = \frac{1}{2} f(S(t), t | y, \tau) \left[ S'(t) + \frac{3}{4} \frac{\partial A_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} - A_1(S(t), t) \right] + \\ + \frac{1}{2} A_2(S(t), t) \frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=S(t)} \quad (5.3)$$

**Observación 5.26** *La ecuación (5.3) coincide formalmente con la ecuación 1.5 (Lema 1.1) de Giorno et al., [19]. Obviamente la función  $k(t)$  es la caracterizada por (5.2), que por otra parte coincide con la expresión 2.11 del citado artículo. Pero téngase presente que hemos llegado a dicha conclusión para una clase de procesos de difusión no homogéneos (la definida por las difusiones homogéneas transformables al Wiener), mientras que en el citado trabajo se obtienen dichos resultados para difusiones homogéneas. Asimismo coincidirá la ecuación integral obtenida para la densidad del tiempo de primer paso, que será la dada por (2.14), donde ahora la función  $\Psi$  viene determinada por la relación (5.3).*

Por último hay que hacer notar que en el caso de que se verifique

$$\Psi(S(t), t | S(\tau), \tau) = 0 \quad \forall t, \tau \quad t_0 \leq \tau < t \quad \text{y} \quad \tau \uparrow t$$

la densidad del tiempo de primer paso vendrá dada por

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = 2 |\Psi(S(t), t | x_0, t_0)|$$

## 5.4 Ejemplos de Aplicación

A continuación calcularemos las densidades de tiempo de primer paso para algunos procesos de difusión en tiempo no homogéneo, para los cuales la ecuación integral de Volterra anterior es válida. En cada uno de estos ejemplos se calcula la expresión de la función  $\Psi(S(t), t | y, \tau)$ , las barreras para las cuales se puede obtener, de forma explícita, las densidades del tiempo de primer paso, así como dichas densidades.

No abordaremos el caso de los procesos logarítmico normal y Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos, por haber sido tratados anteriormente.

### Ejemplo 5.27 Proceso de Wiener con factores exógenos

En este caso los momentos infinitesimales son:

$$A_1(x, t) = h(t)\mu \quad A_2(x, t) = \sigma^2$$

donde  $h(t)$  es una función derivable y  $\sigma^2 > 0$ , estando definido en  $I = \mathbb{R}$ .

El cambio de variable, salvo constantes, que lo transforma en el proceso de Wiener estándar es:

$$x' = \bar{\Psi}(x, t) = \frac{x - \mu \int_{\tau}^t h(s) ds}{\sigma}$$

$$t' = \Phi(t) = t$$

y las funciones de densidad y distribución de transición son:

$$f(x, t | y, \tau) = \frac{1}{[2\pi\sigma^2(t - \tau)]^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{\left[x - y - \mu \int_{\tau}^t h(s) ds\right]^2}{2\sigma^2(t - \tau)}\right)$$

$$F(x, t | y, \tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{Erf} \left( \frac{\left[x - y - \mu \int_{\tau}^t h(s) ds\right]}{(2\sigma^2(t - \tau))^{\frac{1}{2}}} \right) \right]$$

Ahora bien, debido a que

$$\frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} = -f(x, t | y, \tau) \frac{x - y - \mu \int_{\tau}^t h(s) ds}{\sigma^2(t - \tau)}$$

se tiene entonces

$$\begin{aligned} \Psi(S(t), t | y, \tau) &= \\ &= \left[ \frac{S'(t)}{2} - \frac{h(t)\mu}{2} - \frac{S(t) - y - \mu \int_{\tau}^t h(s) ds}{2(t - \tau)} \right] f(S(t), t | y, \tau) \end{aligned}$$

La ecuación diferencial que habría que resolver para hallar una expresión explícita de la densidad del tiempo de primer paso sería:

$$S'(t) = h(t)\mu + \frac{S(t) - S(\tau) - \mu \int_{\tau}^t h(s) ds}{(t - \tau)}$$

lo cual se verifica para las barreras

$$S(t) = A + Bt + \mu \int_{\tau}^t h(s) ds$$

y en cuyo caso:

$$\begin{aligned} g(S(t), t | x_0, t_0) &= \\ &= \frac{|x_0 - Bt_0 - A - \mu \int_{t_0}^t h(s) ds|}{t - t_0} f\left(A + Bt + \mu \int_{t_0}^t h(s) ds, t | x_0, t_0\right) \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.28** Consideremos un proceso de difusión, (Gutiérrez et al., [24]), con momentos infinitesimales:

$$A_1(x, t) = \frac{x}{t} \quad A_2(x, t) = 1$$

definido en  $I = (-\infty, +\infty)$ .

La transformación al proceso de Wiener estándar, salvo constantes, es:

$$x' = \bar{\Psi}(x, t) = \frac{x}{t}$$

$$t' = \Phi(t) = -\frac{1}{t}$$

La función de densidad de transición es:

$$\begin{aligned} f(x, t | y, \tau) &= \sqrt{\frac{\tau}{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{[x\tau - yt]^2}{2t\tau(t-\tau)}\right) = \\ &= \frac{1}{[2\pi t((t/\tau) - 1)]^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2t((t/\tau) - 1)} \left(x - y\frac{t}{\tau}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Dado que

$$\frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} = -f(x, t | y, \tau) \left[ \frac{x\tau - yt}{t(t-\tau)} \right]$$

se tiene:

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = f(S(t), t | y, \tau) \left[ \frac{S'(t)}{2} - \frac{S(t)}{2(t-\tau)} + \frac{y}{2(t-\tau)} \right]$$

Veamos ahora las barreras para las cuales se puede obtener una forma explícita de la densidad del tiempo de primer paso. Para ello hay que resolver la ecuación diferencial

$$S'(t) = \frac{S(t)}{t-\tau} - \frac{S(\tau)}{t-\tau}$$

resultando las barreras de tipo lineal

$$S(t) = A + Bt$$

En este caso:

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \sqrt{\frac{t_0}{t}} \frac{|x_0 - A - Bt_0|}{\sqrt{2\pi}(t-t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{[At_0 + Btt_0 - x_0t]^2}{2tt_0(t-t_0)}\right)$$



Como caso particular, para  $B = 0$  y  $A = S$ , se tiene el caso de barreras constantes, (Gutiérrez et al., [24])

$$\begin{aligned} g(S, t | x_0, t_0) &= \sqrt{\frac{t_0}{t}} \frac{|x_0 - S|}{\sqrt{2\pi}(t - t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{[St_0 - x_0t]^2}{2tt_0(t - t_0)}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{t_0}{t}} \frac{|x_0 - S|}{\sqrt{2\pi}(t - t_0)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{[S - x_0]^2}{2(t - t_0)}\right) \frac{\exp\left(\frac{S^2}{2t}\right)}{\exp\left(\frac{x_0^2}{2t_0}\right)} \end{aligned}$$

**Ejemplo 5.29** Consideremos el proceso de difusión, (Gutiérrez et al., [24]), con momentos infinitesimales:

$$A_1(x, t) = \frac{x \log(x)}{t} + \frac{x\sigma^2}{2} \quad A_2(x, t) = \sigma^2 x^2$$

definido en  $I = (0, +\infty)$ .

La transformación al proceso de Wiener estándar, salvo constantes, es:

$$x' = \bar{\Psi}(x, t) = \frac{\log(x)}{\sigma t}$$

$$t' = \Phi(t) = -\frac{1}{t}$$

La función de densidad de transición es:

$$\begin{aligned} f(x, t | y, \tau) &= \sqrt{\frac{\tau}{t}} \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t - \tau)}} \exp\left(-\frac{[\tau \log(x) - t \log(y)]^2}{2\sigma^2 t \tau (t - \tau)}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{\tau}{t}} \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2(t - \tau)}} \exp\left(-\frac{[\log(x) - \log(y)]^2}{2\sigma^2(t - \tau)}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{\log^2(x)}{2\sigma^2 t} - \frac{\log^2(y)}{2\sigma^2 \tau}\right) \end{aligned}$$

Como

$$\frac{\partial f(x, t | y, \tau)}{\partial x} = -\frac{1}{x} f(x, t | y, \tau) \left[ 1 + \frac{\tau \log(x) - t \log(y)}{\sigma^2 t(t - \tau)} \right]$$

se tiene:

$$\Psi(S(t), t | y, \tau) = \frac{S(t)}{2} \left[ \frac{S'(t)}{S(t)} - \frac{\log(S(t))}{t - \tau} + \frac{\log(y)}{t - \tau} \right] f(S(t), t | y, \tau)$$

Para obtener las barreras para las cuales hay una forma explícita de la densidad del tiempo de primer paso, habrá que resolver la ecuación diferencial

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{\log(S(t))}{t - \tau} - \frac{\log(S(\tau))}{t - \tau}$$

de donde

$$S(t) = A \exp(Bt)$$

y con ello:

$$g(S(t), t | x_0, t_0) = \sqrt{\frac{t_0}{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t - t_0)}} \frac{|\log(x_0) - \log(A) - Bt_0|}{t - t_0} \times \\ \times \exp\left(-\frac{[\log(A) + Bt - \log(x_0)]^2}{2\sigma^2(t - t_0)}\right) \exp\left(\frac{(\log(A) + Bt)^2}{2\sigma^2 t} - \frac{\log^2(x_0)}{2\sigma^2 t_0}\right)$$

Como caso particular se tiene, con  $B = 0$  y  $A = S$ , (Gutiérrez et al., [24])

$$g(S, t | x_0, t_0) = \sqrt{\frac{t_0}{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t - t_0)}} \frac{|\log\left(\frac{S}{x_0}\right)|}{t - t_0} \times \\ \times \exp\left(-\frac{[\log(S) - \log(x_0)]^2}{2\sigma^2(t - t_0)}\right) \exp\left(\frac{\log^2(S)}{2\sigma^2 t} - \frac{\log^2(x_0)}{2\sigma^2 t_0}\right)$$



## APENDICE A

### Distribución Exacta del U-Estadístico

El estadístico  $U$  se define como

$$U_{k,m,n} = \frac{|G|}{|G+H|}$$

donde  $G$  y  $H$  son matrices independientes y distribuidas respectivamente según sendas distribuciones de Wishart,  $W_k[n, B]$  y  $W_k[m, B]$ . Se demuestra, [1], que este estadístico se distribuye como el producto de variables beta unidimensionales. Concretamente se tiene:

$$U = V_1 \times \dots \times V_k \text{ donde } V_i \sim \beta\left(\frac{n-i+1}{2}, \frac{m}{2}\right); i = 1, \dots, k$$

Vamos a calcular a continuación los momentos del estadístico anterior, sabiendo que:

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Con ello:

$$E[V_i^h] = \int_0^1 v^h \frac{\Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-i+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{m}{2}\right]} v^{\frac{n-i+1}{2}-1} (1-v)^{\frac{m}{2}-1} dv =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-i+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{m}{2}\right]} v^{\frac{n-i+1}{2}+h-1} (1-v)^{\frac{m}{2}-1} dv = \\
&= \frac{\Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-i+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{\Gamma\left[\frac{n-i+1}{2}+h\right] \Gamma\left[\frac{m}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2}+h\right]} = \frac{\Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n-i+1}{2}+h\right]}{\Gamma\left[\frac{n-i+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2}+h\right]}
\end{aligned}$$

Si  $h > -\frac{n-k+1}{2}$ , entonces:

$$E\left[\mathcal{U}_{k,m,n}^h\right] = \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n-i+1}{2}+h\right]}{\Gamma\left[\frac{n-i+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2}+h\right]}$$

pudiéndose intercambiar  $k$  por  $m$ ,  $m$  por  $k$  y  $n$  por  $n+m-k$ <sup>1</sup>. Como casos particulares podemos establecer las distribuciones del estadístico en las situaciones en que  $k$  sea par o impar.

**Caso en que  $k$  es par:** ( $k=2r$ ).

En este caso será muy útil el uso de la fórmula de duplicación de la función gamma:

$$\Gamma\left[\alpha + \frac{1}{2}\right] \Gamma[\alpha + 1] = \frac{\Gamma[2\alpha + 1]}{2^{2\alpha}} \sqrt{2\pi}$$

Partimos de:

$$E\left[\mathcal{U}_{2r,m,n}^h\right] = \prod_{i=1}^{2r} \frac{\Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n-i+1}{2}+h\right]}{\Gamma\left[\frac{n-i+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n+m-i+1}{2}+h\right]}$$

Agrupando los términos en pares e impares, la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^r \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+m+1-(2i-1))\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+m+1-2i)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n+m+1-(2i-1))+h\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n+m+1-2i)+h\right]} \times \\
&\times \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-(2i-1)+1)+h\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n-2i+1)+h\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n-(2i-1)+1)\right] \Gamma\left[\frac{1}{2}(n-2i+1)\right]} =
\end{aligned}$$

<sup>1</sup>En ([1], p.301-302) se puede encontrar el siguiente resultado:

Dado el estadístico  $\mathcal{U}_{k,m,n}$ , los índices  $k$  y  $m$  pueden ser intercambiados, o sea, las distribuciones de  $\mathcal{U}_{k,m,n}$  y  $\mathcal{U}_{m,k,n+m-k}$  son las mismas.

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^r \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n+m+2)-i] \Gamma[\frac{1}{2}(n+m+1)-i]}{\Gamma[\frac{1}{2}(n+m+2)-i+h] \Gamma[\frac{1}{2}(n+m+1)-i+h]} \times \\
&\quad \times \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n+2)-i+h] \Gamma[\frac{1}{2}(n+1)-i+h]}{\Gamma[\frac{1}{2}(n+2)-i] \Gamma[\frac{1}{2}(n+1)-i]} = \\
&\quad = \prod_{i=1}^r \frac{\frac{\Gamma[n+m-2i+1]}{2^{n+m-2i}} \frac{\Gamma[n-2i+2h+1]}{2^{n-2i+2h}}}{\frac{\Gamma[n+m-2i+2h+1]}{2^{n+m-2i+2h}} \frac{\Gamma[n-2i+1]}{2^{n-2i}}} = \\
&\quad = \prod_{i=1}^r \frac{\Gamma[n+m-2i+1] \Gamma[n-2i+2h+1]}{\Gamma[n+m-2i+2h+1] \Gamma[n-2i+1]}
\end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^r \frac{\Gamma[n+m-2i+1] \Gamma[n-2i+2h+1]}{\Gamma[n+m-2i+2h+1] \Gamma[n-2i+1]} = \\
&= \prod_{i=1}^r \frac{\Gamma[n+m-2i+1] \Gamma[n-2i+2h+1] \Gamma[m]}{\Gamma[n+m-2i+2h+1] \Gamma[n-2i+1] \Gamma[m]} = \\
&= \prod_{i=1}^r \int_0^1 \frac{\Gamma[n+m-2i+1]}{\Gamma[n-2i+1] \Gamma[m]} y^{(n-2i+1)+2h-1} (1-y)^{m-1} dy = \\
&= \prod_{i=1}^r \int_0^1 \frac{\Gamma[n+m-2i+1]}{\Gamma[n-2i+1] \Gamma[m]} y^{2h} y^{(n-2i+1)-1} (1-y)^{m-1} dy = \\
&= \prod_{i=1}^r E[Y_i^{2h}] = E\left[\prod_{i=1}^r Y_i^{2h}\right] = E\left(\left[\prod_{i=1}^r Y_i^2\right]^h\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\mathcal{U}_{2r,m,n}$  se distribuye según  $\prod_{i=1}^r Y_i^2$  donde  $Y_1, \dots, Y_r$  son variables independientes distribuidas según una distribución beta unidimensional de parámetros  $(n-2i+1, m)$ .

**Caso en que  $k$  sea impar:** ( $k = 2s + 1$ ).

En este caso basta con poner  $\mathcal{U}_{k,m,n}$  como  $V_1 \times \dots \times V_{2s} \times V_{2s+1}$ , con lo cual tenemos que  $\mathcal{U}_{2s+1,m,n}$  se distribuye como

$$\prod_{i=1}^s Y_i^2 Y_{s+1}$$

donde las  $Y_i$  son independientes, verificándose además que  $Y_1, \dots, Y_s$  se distribuyen según betas univariantes de parámetros  $(n - 2i + 1, m)$ , mientras que  $Y_{s+1}$  lo hace según una beta univariante de parámetros  $\frac{n-k+1}{2}$  y  $\frac{m}{2}$ . Esto último es debido a que en ese caso, además de lo obtenido en el apartado anterior y que se recoge en la distribución de  $Y_1, \dots, Y_s$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left[\frac{n+m-k+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n-k+1}{2} + h\right]}{\Gamma\left[\frac{n-k+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n+m-k+1}{2} + h\right]} &= \frac{\Gamma\left[\frac{n+m-k+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n-k+1}{2} + h\right] \Gamma\left[\frac{m}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-k+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{n+m-k+1}{2} + h\right] \Gamma\left[\frac{m}{2}\right]} = \\ &= \int_0^1 \frac{\Gamma\left[\frac{n+m-k+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-k+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{m}{2}\right]} y^{(n+1-k)/2+h-1} (1-y)^{m/2-1} dy = \\ &= \int_0^1 \frac{\Gamma\left[\frac{n+m-k+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-k+1}{2}\right] \Gamma\left[\frac{m}{2}\right]} y^h y^{(n+1-k)/2-1} (1-y)^{m/2-1} dy = E\left[Y^h\right] \end{aligned}$$

donde  $Y$  se distribuye según una beta univariante de parámetros  $\frac{n+1-k}{2}$  y  $\frac{m}{2}$ .

### Casos Particulares

$$k = 1$$

Gracias al resultado anterior se tiene que  $\mathcal{U}_{1,m,n}$  se distribuye según una beta univariante de parámetros  $\frac{n}{2}$  y  $\frac{m}{2}$ . Ahora bien, ese estadístico puede ser escrito, en este caso como:

$$\mathcal{U}_{1,m,n} = \frac{g_{11}}{g_{11} + \sum_{i=1}^m Z_i^2}$$

donde  $g_{11}$  es ahora el único elemento de la matriz de covarianzas estimada y donde las  $Z_i$  son variables aleatorias independientes y distribuidas según una  $\chi^2$  con un grado de libertad. Así pues:

$$\mathcal{U}_{1,m,n} = \frac{\chi^2(n)}{\chi^2(n) + \chi^2(m)} = \frac{1}{1 + \frac{\chi^2(m)}{\chi^2(n)}} = \frac{1}{1 + \frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n} \frac{m}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{m}{n} F_{m,n}}$$

de donde se tiene que  $\frac{1 - U_{1,m,n}}{U_{1,m,n}} \frac{n}{m}$  se distribuye según una  $F$  de Snedecor centrada con  $m$  y  $n$  grados de libertad.

Del hecho de que  $U_{k,m,n} = U_{m,k,n+m-k}$  se deduce que  $U_{k,1,n} = U_{1,k,n-k+1}$ , de donde, sin más que aplicar lo anterior,  $\frac{1 - U_{k,1,n}}{U_{k,1,n}} \frac{n - k + 1}{k}$  se distribuye según una  $F$  de Snedecor centrada con  $k$  y  $n - k + 1$  grados de libertad.

$k = 2$

Ahora se tiene que  $U_{2,m,n}$  se distribuye como  $Z^2$  donde  $Z$  lo hace según una beta univariante de parámetros  $n - 1$  y  $m$ . Así pues  $\sqrt{U_{2,m,n}}$  se distribuye como una beta univariante  $B(n - 1, m) = B\left(\frac{2(n-1)}{2}, \frac{2m}{2}\right)$ . Con ello:

$$\begin{aligned} \sqrt{U_{2,m,n}} &= \frac{\chi^2(2(n-1))}{\chi^2(2(n-1)) + \chi^2(2m)} = \frac{1}{1 + \frac{\chi^2(2m)}{\chi^2(2(n-1))}} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\chi^2(2m)/2m}{\chi^2(2(n-1))/2(n-1)} \frac{m}{n-1}} = \frac{1}{1 + \frac{m}{n-1} F_{2m, 2(n-1)}} \end{aligned}$$

De donde se tiene que  $\frac{1 - \sqrt{U_{2,m,n}}}{\sqrt{U_{2,m,n}}} \frac{n-1}{m}$  se distribuye según una  $F$  de Snedecor centrada con  $2m$  y  $2(n - 1)$  grados de libertad.

Al igual que antes, aplicando que

$$U_{k,m,n} = U_{m,k,n+m-k}$$

se deduce que  $U_{k,2,n} = U_{2,k,n-k+2}$  y por lo tanto  $\sqrt{U_{k,2,n}} = \sqrt{U_{2,k,n-k+2}}$  y por ello  $\frac{1 - \sqrt{U_{k,2,n}}}{\sqrt{U_{k,2,n}}} \frac{n+1-k}{k}$  se distribuye como una  $F$  de Snedecor centrada con  $2k$  y  $2(n + 1 - k)$  grados de libertad.





## APENDICE B

### Desarrollo asintótico del criterio de razón de verosimilitudes para hipótesis lineales

Vamos a proceder a obtener un desarrollo asintótico de la distribución de una variable aleatoria cuyos momentos vengan dados en términos de funciones gamma, debida a Box, [5].

Aunque dicho desarrollo puede encontrarse en Anderson, ([1], p. 311-318), vamos a centrarnos un tanto en su obtención con el fin de obtener un número de términos mayor que el que aparece en el texto citado anteriormente.

Consideremos una variable aleatoria  $W$  ( $0 \leq W \leq 1$ ) cuyo momento de orden  $h$  venga dado en la forma siguiente:

$$E[W^h] = K \left[ \frac{\prod_{j=1}^b y_j^{y_j}}{\prod_{k=1}^a x_k^{x_k}} \right]^h \frac{\prod_{k=1}^a \Gamma(x_k(1+h) + \xi_k)}{\prod_{j=1}^b \Gamma(y_j(1+h) + \eta_j)} \quad (0.4)$$

donde:

1.  $K$  sea una constante tal que  $E[W^0] = 1$
2.  $\sum_{k=1}^a x_k = \sum_{j=1}^b y_j$

Consideremos a continuación la variable aleatoria  $M = -2 \log W$  y tomemos la variable  $\rho M$  (donde  $\rho$  es tal que  $0 \leq \rho \leq 1$ ). Con ello la función característica de la variable  $\rho M$  será:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= E \left[ e^{it\rho M} \right] = E \left[ e^{-2it\rho \log W} \right] = E \left[ W^{-2it\rho} \right] = \\ &= K \left[ \frac{\prod_{j=1}^b y_j^{y_j}}{\prod_{k=1}^a x_k^{x_k}} \right]^{-2it\rho} \frac{\prod_{k=1}^a \Gamma(x_k(1-2it\rho) + \xi_k)}{\prod_{j=1}^b \Gamma(y_j(1-2it\rho) + \eta_j)}\end{aligned}\quad (0.5)$$

Hasta ahora no hemos impuesto ninguna condición sobre  $\rho$ , por lo que será arbitrario, aunque después pudiera depender de algún factor (por ejemplo del tamaño muestral). Notemos asimismo que en el caso en que  $a = b$ ,  $x_k = y_k$ ,  $\xi_k \leq \eta_k$ , la expresión (0.4) no es más que el momento de orden  $h$  del producto de potencias de distribuciones beta y entonces (0.4) existe para todo valor  $h$  para el cual las funciones gamma existan. En tal caso (0.5) existe para todo real  $t$ .

Supondremos que (0.5) es válida para todo real  $t$  y en cada caso donde quiera ser aplicado este resultado habrá que verificar este supuesto.

A continuación tomemos la función:

$$\Phi(t) = \log \phi(t) - \log \phi(0)$$

Se tiene, de una parte:

$$\begin{aligned}\log \phi(t) &= \log K - 2it\rho \left[ \log \prod_{j=1}^b y_j^{y_j} - \log \prod_{k=1}^a x_k^{x_k} \right] + \\ &+ \log \prod_{k=1}^a \Gamma(x_k(1-2it\rho) + \xi_k) - \log \prod_{j=1}^b \Gamma(y_j(1-2it\rho) + \eta_j) = \\ &= \log K + 2it\rho \left[ \sum_{k=1}^a x_k \log x_k - \sum_{j=1}^b y_j \log y_j \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^a \log \Gamma(x_k(1-2it\rho) + \xi_k) - \sum_{j=1}^b \log \Gamma(y_j(1-2it\rho) + \eta_j)\end{aligned}\quad (0.6)$$

y de otra parte:

$$\log \phi(0) = \log K + \sum_{k=1}^a \log \Gamma(x_k + \xi_k) - \sum_{j=1}^b \log \Gamma(y_j + \eta_j)\quad (0.7)$$

A continuación vamos a escribir la expresión (0.6) de otra forma, introduciendo dos nuevos valores  $\varepsilon_k = (1-\rho)x_k$  y  $\delta_j = (1-\rho)y_j$ , para ir aproximándonos a la expresión de la función característica de la distribución  $\chi^2$ . Tras este cambio (0.6) puede expresarse en la forma siguiente:

$$\log \phi(t) = \log K + 2it\rho \left[ \sum_{k=1}^a x_k \log x_k - \sum_{j=1}^b y_j \log y_j \right] + \\ + \sum_{k=1}^a \log \Gamma(\rho x_k(1-2it) + \xi_k + \varepsilon_k) - \sum_{j=1}^b \log \Gamma(\rho y_j(1-2it) + \eta_j + \delta_j)$$

mientras que (0.7) (cuyo valor es cero) adopta la forma:

$$\log \phi(0) = \log K + \sum_{k=1}^a \log \Gamma(\rho x_k + \xi_k + \varepsilon_k) - \sum_{j=1}^b \log \Gamma(\rho y_j + \eta_j + \delta_j)$$

Se concluye así con que la forma de la función  $\Phi$  es:

$$\Phi(t) = 2it\rho \left[ \sum_{k=1}^a x_k \log x_k - \sum_{j=1}^b y_j \log y_j \right] + \\ + \sum_{k=1}^a \log \Gamma(\rho x_k(1-2it) + \xi_k + \varepsilon_k) - \sum_{j=1}^b \log \Gamma(\rho y_j(1-2it) + \eta_j + \delta_j) - \\ - \left[ \sum_{k=1}^a \log \Gamma(\rho x_k + \xi_k + \varepsilon_k) - \sum_{j=1}^b \log \Gamma(\rho y_j + \eta_j + \delta_j) \right]$$

(notemos que  $\Phi(0) = 0$ ).

Haremos uso del desarrollo del logaritmo de la función gamma, [3], que es asintótico en  $x$  para  $h$  acotado, <sup>1</sup> aplicado a la función  $\Phi(t)$ . Procedamos por partes:

1

$$\log \Gamma(x+h) = \log(2\pi)^{\frac{1}{2}} + (x+h-\frac{1}{2}) \log x - x - \sum_{r=1}^m (-1)^r \frac{B_{r+1}(h)}{r(r+1)x^r} + R_{m+1}(x)$$

donde  $R_{m+1}(x) = \theta(x^{-m-1})$  y  $B_{r+1}$  es el polinomio de Bernoulli de grado  $r$  y orden uno.

Por un lado tenemos (tomando  $x = \rho x_k$  y  $h = \xi_k + \varepsilon_k$ )

$$\begin{aligned} & \log \Gamma(\rho x_k + \xi_k + \varepsilon_k) = \\ & = \log(2\pi)^{\frac{1}{2}} + \left(\rho x_k + \xi_k + \varepsilon_k - \frac{1}{2}\right) \log \rho x_k - \rho x_k - \\ & \quad - \sum_{r=1}^m (-1)^r \frac{B_{r+1}(\xi_k + \varepsilon_k)}{r(r+1)(\rho x_k)^r} + R_{m+1}(\rho x_k) = \\ & = \log(2\pi)^{\frac{1}{2}} + \left(\rho x_k + \xi_k + \varepsilon_k - \frac{1}{2}\right) \log \rho x_k - \rho x_k + \\ & \quad + \sum_{r=1}^m (-1)^{r+1} \frac{B_{r+1}(\xi_k + \varepsilon_k)}{r(r+1)(\rho x_k)^r} + R_{m+1}(\rho x_k) \end{aligned}$$

Por otro lado (tomando  $x = \rho y_j$  y  $h = \eta_j + \delta_j$ )

$$\begin{aligned} \log \Gamma(\rho y_j + \eta_j + \delta_j) & = \log(2\pi)^{\frac{1}{2}} + \left(\rho y_j + \eta_j + \delta_j - \frac{1}{2}\right) \log \rho y_j - \rho y_j - \\ & \quad - \sum_{r=1}^m (-1)^r \frac{B_{r+1}(\eta_j + \delta_j)}{r(r+1)(\rho y_j)^r} + R_{m+1}(\rho y_j) = \\ & = \log(2\pi)^{\frac{1}{2}} + \left(\rho y_j + \eta_j + \delta_j - \frac{1}{2}\right) \log \rho y_j - \rho y_j + \\ & \quad + \sum_{r=1}^m (-1)^{r+1} \frac{B_{r+1}(\eta_j + \delta_j)}{r(r+1)(\rho y_j)^r} + R_{m+1}(\rho y_j) \end{aligned}$$

Con ello tenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^a \log \Gamma(\rho x_k + \xi_k + \varepsilon_k) - \sum_{j=1}^b \log \Gamma(\rho y_j + \eta_j + \delta_j) = \\ & = \frac{1}{2}(a-b) \log 2\pi + \sum_{k=1}^a \left[ \left(\rho x_k + \xi_k + \varepsilon_k - \frac{1}{2}\right) \log \rho x_k - \rho x_k \right] - \\ & - \sum_{j=1}^b \left[ \left(\rho y_j + \eta_j + \delta_j - \frac{1}{2}\right) \log \rho y_j - \rho y_j \right] + \sum_{r=1}^m w_r + R_{m+1}(\rho x_k) - R_{m+1}(\rho y_j) \end{aligned}$$

donde

$$w_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r(r+1)} \left[ \sum_{k=1}^a \frac{B_{r+1}(\xi_k + \varepsilon_k)}{(\rho x_k)^r} - \sum_{j=1}^b \frac{B_{r+1}(\eta_j + \delta_j)}{(\rho y_j)^r} \right]$$

Además, tomando  $x = \rho x_k(1 - 2it)$  y  $h = \xi_k + \varepsilon_k$ , tenemos:

$$\begin{aligned} & \log \Gamma(\rho x_k(1 - 2it) + \xi_k + \varepsilon_k) = \\ & = \log(2\pi)^{\frac{1}{2}} + \left( \rho x_k(1 - 2it) + \xi_k + \varepsilon_k - \frac{1}{2} \right) \log(\rho x_k(1 - 2it)) - \rho x_k(1 - 2it) + \\ & \quad + \sum_{r=1}^m (-1)^{r+1} \frac{B_{r+1}(\xi_k + \varepsilon_k)}{r(r+1)(\rho x_k)^r(1 - 2it)^r} + R_{m+1}(\rho x_k(1 - 2it)) \end{aligned}$$

De la misma forma, tomando  $x = \rho y_j(1 - 2it)$  y  $h = \eta_j + \delta_j$ , se tiene:

$$\begin{aligned} & \log \Gamma(\rho y_j(1 - 2it) + \eta_j + \delta_j) = \\ & = \log(2\pi)^{\frac{1}{2}} + \left( \rho y_j(1 - 2it) + \eta_j + \delta_j - \frac{1}{2} \right) \log(\rho y_j(1 - 2it)) - \rho y_j(1 - 2it) + \\ & \quad + \sum_{r=1}^m (-1)^{r+1} \frac{B_{r+1}(\eta_j + \delta_j)}{r(r+1)(\rho y_j)^r(1 - 2it)^r} + R_{m+1}(\rho y_j(1 - 2it)) \end{aligned}$$

Con lo cual se verifica:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^a \log \Gamma(\rho x_k(1 - 2it) + \xi_k + \varepsilon_k) - \sum_{j=1}^b \log \Gamma(\rho y_j(1 - 2it) + \eta_j + \delta_j) = \\ & \quad = \frac{1}{2}(a - b) \log 2\pi + \\ & \quad + \sum_{k=1}^a \left[ \left( \rho x_k(1 - 2it) + \xi_k + \varepsilon_k - \frac{1}{2} \right) \log(\rho x_k(1 - 2it)) - \rho x_k(1 - 2it) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^b \left[ \left( \rho y_j (1 - 2it) + \eta_j + \delta_j - \frac{1}{2} \right) \log(\rho y_j (1 - 2it)) - \rho y_j (1 - 2it) \right] + \\
& + \sum_{r=1}^m w_r (1 - 2it)^{-r} + R_{m+1}(\rho x_k (1 - 2it)) - R_{m+1}(\rho y_j (1 - 2it))
\end{aligned}$$

Tras estos cálculos se obtiene la siguiente forma para la función  $\Phi(t)$ :

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= 2it\rho \left[ \sum_{k=1}^a x_k \log x_k - \sum_{j=1}^b y_j \log y_j \right] + \\
& + \sum_{k=1}^a \log \Gamma(\rho x_k (1 - 2it) + \xi_k + \varepsilon_k) - \sum_{j=1}^b \log \Gamma(\rho y_j (1 - 2it) + \eta_j + \delta_j) - \\
& - \left[ \sum_{k=1}^a \log \Gamma(\rho x_k + \xi_k + \varepsilon_k) - \sum_{j=1}^b \log(\rho y_j + \eta_j + \delta_j) \right] = \\
& = \sum_{k=1}^a \left\{ 2it\rho x_k \log x_k + \left[ \rho x_k (1 - 2it) + \xi_k + \varepsilon_k - \frac{1}{2} \right] \log(\rho x_k (1 - 2it)) - \right. \\
& \quad \left. - [\rho x_k (1 - 2it)] - \left[ \rho x_k + \xi_k + \varepsilon_k - \frac{1}{2} \right] \log \rho x_k + \rho x_k \right\} + \\
& + \sum_{j=1}^b \left\{ \left[ \rho y_j + \eta_j + \delta_j - \frac{1}{2} \right] \log \rho y_j - \rho y_j - 2it\rho y_j \log y_j + [\rho y_j (1 - 2it)] - \right. \\
& \quad \left. - \left[ \rho y_j (1 - 2it) + \eta_j + \delta_j - \frac{1}{2} \right] \log(\rho y_j (1 - 2it)) \right\} + \\
& + \sum_{r=1}^m w_r [(1 - 2it)^{-r} - 1] + \sum_{k=1}^a \theta(x_k^{-m-1}) + \sum_{j=1}^b \theta(y_j^{-m-1})
\end{aligned}$$

Sin embargo esta expresión se puede simplificar, teniendo en cuenta que:

a)

$$\begin{aligned}
& 2it\rho x_k \log x_k + \left[ \rho x_k(1 - 2it) + \xi_k + \varepsilon_k - \frac{1}{2} \right] \log(\rho x_k(1 - 2it)) - \\
& - [\rho x_k(1 - 2it)] - \left[ \rho x_k + \xi_k + \varepsilon_k - \frac{1}{2} \right] \log \rho x_k + \rho x_k = \\
& = \left[ \rho x_k + \xi_k + \varepsilon_k - \frac{1}{2} \right] \log(1 - 2it) - 2it\rho x_k \log \rho - 2it\rho x_k \log(1 - 2it) + 2it\rho x_k = \\
& = \left[ x_k + \xi_k - \frac{1}{2} \right] \log(1 - 2it) - 2it\rho x_k \log \rho - 2it\rho x_k \log(1 - 2it) + 2it\rho x_k
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& \left[ \rho y_j + \eta_j + \delta_j - \frac{1}{2} \right] \log \rho y_j - \rho y_j - 2it\rho y_j \log y_j + \left[ \rho y_j(1 - 2it) \right] - \\
& - \left[ \rho y_j(1 - 2it) + \eta_j + \delta_j - \frac{1}{2} \right] \log(\rho y_j(1 - 2it)) = \\
& = 2it\rho y_j \log \rho - 2it\rho y_j + 2it\rho y_j \log(1 - 2it) - \left[ \rho y_j + \eta_j + \delta_j - \frac{1}{2} \right] \log(1 - 2it) = \\
& = 2it\rho y_j \log \rho - 2it\rho y_j + 2it\rho y_j \log(1 - 2it) - \left[ y_j + \eta_j - \frac{1}{2} \right] \log(1 - 2it)
\end{aligned}$$

Con ello:

$$\begin{aligned}
\Phi(t) = & \sum_{r=1}^m w_r \left[ (1 - 2it)^{-r} - 1 \right] + \sum_{k=1}^a \left\{ \left[ x_k + \xi_k - \frac{1}{2} \right] \log(1 - 2it) - \right. \\
& \left. - 2it\rho x_k \log \rho - 2it\rho x_k \log(1 - 2it) + 2it\rho x_k \right\} +
\end{aligned}$$



$$+ \sum_{j=1}^b \left\{ 2it\rho y_j \log \rho - 2it\rho y_j + 2it\rho y_j \log(1 - 2it) - \right. \\ \left. - \left[ y_j + \eta_j - \frac{1}{2} \right] \log(1 - 2it) \right\} + R'_{m+1}$$

donde:

$$R'_{m+1} = \sum_{k=1}^a \theta(x_k^{-m-1}) + \sum_{j=1}^b \theta(y_j^{-m-1})$$

Esta expresión puede ser, de nuevo, simplificada, amparándose en el hecho de que  $\sum_{k=1}^a x_k = \sum_{j=1}^b y_j$ . En efecto:

$$\Phi(t) = \sum_{r=1}^m w_r \left[ (1 - 2it)^{-r} - 1 \right] + \sum_{k=1}^a \left\{ \left[ x_k + \xi_k - \frac{1}{2} \right] \log(1 - 2it) - \right. \\ \left. - 2it\rho x_k \log \rho - 2it\rho x_k \log(1 - 2it) + 2it\rho x_k \right\} + \\ + \sum_{j=1}^b \left\{ 2it\rho y_j \log \rho - 2it\rho y_j + 2it\rho y_j \log(1 - 2it) - \right. \\ \left. - \left[ y_j + \eta_j - \frac{1}{2} \right] \log(1 - 2it) \right\} + R'_{m+1} = \\ = \sum_{r=1}^m w_r \left[ (1 - 2it)^{-r} - 1 \right] + \\ + \log(1 - 2it) \left\{ \sum_{k=1}^a \left[ x_k + \xi_k - \frac{1}{2} \right] - \sum_{j=1}^b \left[ y_j + \eta_j - \frac{1}{2} \right] \right\} + \\ + 2it\rho \log \rho \left[ \sum_{k=1}^a x_k - \sum_{j=1}^b y_j \right] + 2it\rho \left[ \sum_{j=1}^b y_j - \sum_{k=1}^a x_k \right] + \\ + 2it\rho \log(1 - 2it) \left[ \sum_{j=1}^b y_j - \sum_{k=1}^a x_k \right] + R'_{m+1} =$$

$$= \sum_{r=1}^m w_r [(1 - 2it)^{-r} - 1] + \log(1 - 2it) \left\{ \sum_{k=1}^a \xi_k - \sum_{j=1}^b \eta_j - \frac{1}{2}(a - b) \right\} + R'_{m+1}$$

En definitiva:

$$\Phi(t) = \sum_{r=1}^m w_r [(1 - 2it)^{-r} - 1] + \hat{f} \log(1 - 2it) + R'_{m+1}$$

donde:

$$\hat{f} = \left[ \sum_{k=1}^a \xi_k - \sum_{j=1}^b \eta_j - \frac{1}{2}(a - b) \right]$$

A continuación vamos a realizar el cambio  $f = -2\hat{f}$ , con la finalidad de irnos aproximando a la función característica de la distribución  $\chi^2$ , que es  $(1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$ . Así, se tiene que:

$$\Phi(t) = \sum_{r=1}^m w_r [(1 - 2it)^{-r} - 1] - \frac{1}{2}f \log(1 - 2it) + R'_{m+1}$$

donde

$$f = -2 \left[ \sum_{k=1}^a \xi_k - \sum_{j=1}^b \eta_j - \frac{1}{2}(a - b) \right]$$

Como  $\Phi(t) = \log \phi(t) - \log \phi(0) = \log \phi(t)$ , entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \Psi(t) = \exp(\Phi(t)) &= (1 - 2it)^{-\frac{f}{2}} \exp \left( \sum_{r=1}^m w_r (1 - 2it)^{-r} - \sum_{r=1}^m w_r + R'_{m+1} \right) = \\ &= (1 - 2it)^{-\frac{f}{2}} \left[ \exp \left( \sum_{r=1}^m w_r (1 - 2it)^{-r} \right) \exp \left( - \sum_{r=1}^m w_r \right) \exp(R'_{m+1}) \right] \quad (0.8) \end{aligned}$$

Notemos que  $R'_{m+1}$  es a su vez una suma de infinitésimos, por lo que, al hallar su exponencial y desarrollarla en serie de potencias, nos quedaremos con el primer sumando (que es uno) y lo multiplicaremos por el otro producto de

exponenciales, mientras que el resto de la serie, junto con el producto de exponenciales lo almacenamos en otro infinitésimo que llamaremos  $R''_{m+1}$ . Con ello, la expresión (0.8) queda en la forma:

$$\begin{aligned}
 \Psi(t) &= (1 - 2it)^{-\frac{f}{2}} \left[ \exp \left( \sum_{r=1}^m w_r (1 - 2it)^{-r} \right) \exp \left( - \sum_{r=1}^m w_r \right) \exp (R'_{m+1}) \right] = \\
 &= (1 - 2it)^{-\frac{f}{2}} \left[ \left[ \prod_{r=1}^m \exp (w_r (1 - 2it)^{-r}) \right] \left[ \prod_{r=1}^m \exp (-w_r) \right] + R''_{m+1} \right] = \\
 &= (1 - 2it)^{-\frac{f}{2}} \left[ \prod_{r=1}^m \left[ 1 + w_r (1 - 2it)^{-r} + \frac{1}{2!} w_r^2 (1 - 2it)^{-2r} + \dots + \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \prod_{r=1}^m \left[ 1 - w_r + \frac{1}{2!} w_r^2 - \frac{1}{3!} w_r^3 + \dots + \right] + R''_{m+1} \right] = \\
 &= (1 - 2it)^{-\frac{f}{2}} \left[ \prod_{r=1}^m \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[w_r (1 - 2it)^{-r}]^k}{k!} \right\} \times \prod_{r=1}^m \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[-w_r]^l}{l!} \right\} + R''_{m+1} \right]
 \end{aligned}$$

A continuación desarrollamos esos productos de series, haciendo uso del producto de series de Cauchy, obteniendo:

$$\begin{aligned}
 \Psi(t) &= (1 - 2it)^{-\frac{f}{2}} \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l_1 + \dots + l_m = k} \frac{w_1^{l_1} w_2^{l_2} \dots w_m^{l_m} (1 - 2it)^{-l_1 - 2l_2 - \dots - ml_m}}{l_1! \dots l_m!} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left( \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{g_1 + \dots + g_m = p} \frac{(-1)^p w_1^{g_1} w_2^{g_2} \dots w_m^{g_m}}{g_1! \dots g_m!} \right) + R''_{m+1} \right] = \\
 &= (1 - 2it)^{-\frac{f}{2}} [1 + T_1(t) + T_2(t) + \dots + T_m(t) + R''_{m+1}]
 \end{aligned}$$

Ahora volvemos a multiplicar las series anteriores pero con la salvedad de que agrupamos los términos con potencias del tipo  $w_1^{s_1} \dots w_r^{s_r}$  con  $\sum_{i=1}^m i s_i = r$ .

Tabla B.1: Cálculo de  $T_2$ .

Primer Sumando	Segundo Sumando	Producto
$(0,1,0, \dots, 0)$	$(0,0,0, \dots, 0)$	$w_2(1 - 2it)^{-2}$
$(0,0,0, \dots, 0)$	$(0,1,0, \dots, 0)$	$-w_2$
$(1,0,0, \dots, 0)$	$(1,0,0, \dots, 0)$	$-w_1^2(1 - 2it)^{-1}$
$(2,0,0, \dots, 0)$	$(0,0,0, \dots, 0)$	$\frac{1}{2}w_1^2(1 - 2it)^{-2}$
$(0,0,0, \dots, 0)$	$(0,2,0, \dots, 0)$	$\frac{1}{2}w_1^2$

En múltiples ocasiones se tiene que  $x_k = c_k\theta$  e  $y_j = d_j\theta$  donde  $c_k$  y  $d_j$  son constantes y  $\theta$  es variable (por ejemplo puede variar con el tamaño muestral).

En tal caso, si tomamos  $\rho$  tal que  $(1-\rho)x_k$  y  $(1-\rho)y_j$  tengan límite, entonces  $R_{m+1}'''$  es un infinitésimo de  $\theta^{-m-1}$ . La razón de reagrupar los términos anteriores en la forma indicada es porque en ese caso dichos términos son infinitésimos de  $\theta^{-r}$ .

Con estas premisas vamos a calcular algunos de los  $T_i$  anteriores:

(•)  $T_1$  se obtendría tomando el término uno de la primera suma y el término cuyos superíndices son  $(1, 0, \dots, 0)$  de la segunda, y viceversa, obteniéndose así:

$$T_1(t) = w_1 \left[ (1 - 2it)^{-1} - 1 \right]$$

(•) Para la obtención de  $T_2$  tenemos que emparejar los términos que aparecen en la tabla B.1. Indicaremos los términos dando sus superíndices, en el orden de las dos sumas anteriores, así como el resultado del producto de ambos términos:

$T_2$ , que es la suma de todos esos términos, resulta ser:

$$T_2(t) = w_2 \left[ (1 - 2it)^{-2} - 1 \right] + \frac{1}{2}w_1^2 \left[ (1 - 2it)^{-2} - 2(1 - 2it)^{-1} + 1 \right]$$

(•) En este caso los términos que debemos buscar serán  $w_1^3$ ,  $w_3$ ,  $w_1w_2$ , para que se verifique que  $\sum_{i=1}^m is_i = 3$ , como se recoge en la tabla B.2.

Sumando dichos términos obtenemos:

$$T_3(t) =$$

Tabla B.2: Cálculo de  $T_3$ .

Primer Sumando	Segundo Sumando	Producto
$(0,0,0, \dots, 0)$	$(3,0,0, \dots, 0)$	$-\frac{1}{3!}w_1^3$
$(3,0,0, \dots, 0)$	$(0,0,0, \dots, 0)$	$\frac{1}{3!}w_1^3(1-2it)^{-3}$
$(1,0,0, \dots, 0)$	$(2,0,0, \dots, 0)$	$\frac{1}{2!}w_1^3(1-2it)^{-1}$
$(2,0,0, \dots, 0)$	$(1,0,0, \dots, 0)$	$-\frac{1}{2!}w_1^3(1-2it)^{-2}$
$(0,0,1, \dots, 0)$	$(0,0,0, \dots, 0)$	$w_3(1-2it)^{-3}$
$(0,0,0, \dots, 0)$	$(0,0,1, \dots, 0)$	$-w_3$
$(1,0,0, \dots, 0)$	$(0,1,0, \dots, 0)$	$-w_1w_2(1-2it)^{-1}$
$(0,1,0, \dots, 0)$	$(1,0,0, \dots, 0)$	$-w_1w_2(1-2it)^{-2}$
$(1,1,0, \dots, 0)$	$(0,0,0, \dots, 0)$	$w_1w_2(1-2it)^{-3}$
$(0,0,0, \dots, 0)$	$(1,1,0, \dots, 0)$	$w_1w_2$

$$= w_3 [(1-2it)^{-3} - 1] + \frac{1}{3!}w_1^3 [(1-2it)^{-3} - 3(1-2it)^{-2} + 3(1-2it)^{-1} - 1] +$$

$$+ w_1w_2 [(1-2it)^{-3} - (1-2it)^{-2} - (1-2it)^{-1} + 1]$$

(•) Notemos que en este caso los términos que debemos buscar son  $w_1^4$ ,  $w_1^2w_2$ ,  $w_1w_3$ ,  $w_4$ , para que se verifique que  $\sum_{i=1}^m is_i = 4$ , y están resumidos en la tabla B.3.

Sumando los términos tenemos:

$$T_4(t) = w_4 [(1-2it)^{-4} - 1] +$$

$$+ \frac{1}{4!}w_1^4 [(1-2it)^{-4} - 4(1-2it)^{-3} + 8(1-2it)^{-2} - 4(1-2it)^{-1} + 1] +$$

$$+ w_1w_3 [(1-2it)^{-4} - (1-2it)^{-3} - (1-2it)^{-1} + 1] +$$

$$+ \frac{1}{2!}w_1^2w_2 [(1-2it)^{-4} - 2(1-2it)^{-3} + 2(1-2it)^{-1} - 1]$$

Tabla B.3: Cálculo de  $T_4$ .

Primer Sumando	Segundo Sumando	Producto
$(0,0,0,0, \dots, 0)$	$(4,0,0,0, \dots, 0)$	$\frac{1}{4!}w_1^4$
$(4,0,0,0, \dots, 0)$	$(0,0,0,0, \dots, 0)$	$\frac{1}{4!}w_1^4(1-2it)^{-4}$
$(1,0,0,0, \dots, 0)$	$(3,0,0,0, \dots, 0)$	$-\frac{1}{3!}w_1^4(1-2it)^{-1}$
$(3,0,0,0, \dots, 0)$	$(1,0,0,0, \dots, 0)$	$-\frac{1}{3!}w_1^4(1-2it)^{-3}$
$(2,0,0,0, \dots, 0)$	$(2,0,0,0, \dots, 0)$	$-\frac{1}{2!2!}w_1^4(1-2it)^{-2}$
$(0,0,0,1, \dots, 0)$	$(0,0,0,0, \dots, 0)$	$w_4(1-2it)^{-4}$
$(0,0,0,0, \dots, 0)$	$(0,0,0,1, \dots, 0)$	$-w_4$
$(1,0,0,0, \dots, 0)$	$(1,1,0,0, \dots, 0)$	$w_1^2w_2(1-2it)^{-1}$
$(1,1,0,0, \dots, 0)$	$(0,0,0,0, \dots, 0)$	$-w_1^2w_2(1-2it)^{-3}$
$(2,1,0,0, \dots, 0)$	$(0,0,0,0, \dots, 0)$	$-\frac{1}{2!}w_1^2w_2$
$(0,0,0,0, \dots, 0)$	$(2,1,0,0, \dots, 0)$	$\frac{1}{2!}w_1^2w_2(1-2it)^{-4}$
$(2,0,0,0, \dots, 0)$	$(0,1,0,0, \dots, 0)$	$-\frac{1}{2!}w_1^2w_2(1-2it)^{-2}$
$(0,1,0,0, \dots, 0)$	$(2,0,0,0, \dots, 0)$	$\frac{1}{2!}w_1^2w_2(1-2it)^{-2}$
$(1,0,1,0, \dots, 0)$	$(0,0,0,0, \dots, 0)$	$w_1w_3(1-2it)^{-4}$
$(0,0,0,0, \dots, 0)$	$(1,0,1,0, \dots, 0)$	$w_1w_3$
$(1,0,0,0, \dots, 0)$	$(0,0,1,0, \dots, 0)$	$-w_1w_3(1-2it)^{-1}$
$(0,0,1,0, \dots, 0)$	$(1,0,0,0, \dots, 0)$	$-w_1w_3(1-2it)^{-3}$

Adviértase que  $T_r(t)$  es un polinomio de grado  $r$  en  $(1 - 2it)^{-1}$ , con lo que cada término de la forma  $(1 - 2it)^{-\frac{r}{2}} T_r(t)$  es una expresión del tipo  $(1 - 2it)^{-\frac{v}{2}}$  para un cierto  $v$ , lo cual nos hace recurrir a la distribución  $\chi^2$  con  $v$  grados de libertad, puesto que su función característica es  $\Phi_v(z) = (1 - 2it)^{-\frac{v}{2}}$  y su densidad (por la fórmula de inversión):

$$g_v(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} (1 - 2it)^{-\frac{v}{2}} e^{-itz} dt$$

Llamemos:

$$S_r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} (1 - 2it)^{-\frac{r}{2}} T_r(t) e^{-itz} dt$$

$$R^{iv} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} (1 - 2it)^{-\frac{r}{2}} R_{m+1}''' e^{-itz} dt$$

y así la densidad de  $\rho M$  es:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \Phi(t) e^{-itz} dt &= \sum_{r=0}^m S_r(z) + R_{m+1}^{iv} = \\ &= g_f(z) + w_1 [g_{f+2}(z) - g_f(z)] + w_2 [g_{f+4}(z) - g_f(z)] + \\ &+ \frac{1}{2} w_1^2 [g_{f+4}(z) - 2g_{f+2}(z) + g_f(z)] + w_3 [g_{f+6} - g_f(z)] + \\ &+ \frac{1}{6} w_1^3 [g_{f+6}(z) - 3g_{f+4}(z) + 3g_{f+2}(z) - g_f(z)] + \\ &+ w_1 w_2 [g_{f+6}(z) - g_{f+4}(z) - g_{f+2}(z) + g_f(z)] + w_4 [g_{f+8}(z) - g_f(z)] + \\ &+ \frac{1}{16} w_1^4 [g_{f+8}(z) - 4g_{f+6}(z) + 8g_{f+4}(z) - 4g_{f+2}(z) + g_f(z)] + \\ &+ \frac{1}{2} w_1^2 w_2 [g_{f+8}(z) - 2g_{f+6}(z) + 2g_{f+2}(z) - g_f(z)] + \\ &+ w_1 w_3 [g_{f+8}(z) - g_{f+6}(z) - g_{f+2}(z) + g_f(z)] + \cdots + S_m(z) + R_{m+1}^{iv} \end{aligned}$$

Llamemos ahora  $U_r(z_0) = \int_0^{z_0} S_r(z) dz$  y  $R_{m+1}^v = \int_0^{z_0} R_{m+1}^{iv} dz$ . Con ello,

$$\begin{aligned}
 P[M \leq M_0] &= P[\rho M \leq \rho M_0] = \sum_{r=0}^n U_r(\rho M_0) + R_{m+1}^v = \\
 &= P[\chi_f^2 \leq \rho M_0] + w_1 \{P[\chi_{f+2}^2 \leq \rho M_0] - P[\chi_f^2 \leq \rho M_0]\} + \\
 &\quad + w_2 \{P[\chi_{f+4}^2 \leq \rho M_0] - P[\chi_f^2 \leq \rho M_0]\} + \\
 &+ \frac{w_1^2}{2} \{P[\chi_{f+4}^2 \leq \rho M_0] - 2P[\chi_{f+2}^2 \leq \rho M_0] + P[\chi_f^2 \leq \rho M_0]\} + \\
 &\quad + w_3 \{P[\chi_{f+6}^2 \leq \rho M_0] - P[\chi_f^2 \leq \rho M_0]\} + \\
 &\quad + \frac{w_1^3}{6} \{P[\chi_{f+6}^2 \leq \rho M_0] - 3P[\chi_{f+4}^2 \leq \rho M_0] + \\
 &\quad + 3P[\chi_{f+2}^2 \leq \rho M_0] - P[\chi_f^2 \leq \rho M_0]\} + \\
 &\quad + w_1 w_2 \{P[\chi_{f+6}^2 \leq \rho M_0] - P[\chi_{f+4}^2 \leq \rho M_0] - \\
 &\quad - P[\chi_{f+2}^2 \leq \rho M_0] + P[\chi_f^2 \leq \rho M_0]\} + \\
 &\quad + w_4 \{P[\chi_{f+8}^2 \leq \rho M_0] - P[\chi_f^2 \leq \rho M_0]\} + \\
 &\quad + \frac{w_1^4}{16} \{P[\chi_{f+8}^2 \leq \rho M_0] - 4P[\chi_{f+6}^2 \leq \rho M_0] + \\
 &\quad + 8P[\chi_{f+4}^2 \leq \rho M_0] - 4P[\chi_{f+2}^2 \leq \rho M_0] + P[\chi_f^2 \leq \rho M_0]\} + \\
 &\quad + \frac{w_1^2 w_2}{2} \{P[\chi_{f+8}^2 \leq \rho M_0] - 2P[\chi_{f+6}^2 \leq \rho M_0] + \\
 &\quad + 2P[\chi_{f+2}^2 \leq \rho M_0] - P[\chi_f^2 \leq \rho M_0]\} + \\
 &\quad + w_1 w_3 \{P[\chi_{f+8}^2 \leq \rho M_0] - P[\chi_{f+6}^2 \leq \rho M_0] -
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & - \mathbb{P} \left[ \chi_{f+2}^2 \leq \rho M_0 \right] + \mathbb{P} \left[ \chi_f^2 \leq \rho M_0 \right] \} + \\ & + \cdots + U_m \{ \rho M_0 \} + R_{m+1}^v \end{aligned}$$

## APENDICE C

### Aproximación numérica de la solución de E.D.E.

A continuación mostramos, de forma somera, el procedimiento propuesto por Rao, [39], para aproximar, de forma numérica, la solución de una ecuación integral. En dicho método, de forma general, se parte de la ecuación integral de Itô

$$x(t, \omega) = x_u(\omega) + \int_u^t a(s, x(s, \omega)) ds + \int_u^t b(s, x(s, \omega)) dW(s)$$

donde  $W(t)$  es el proceso de Wiener. Dicha ecuación es la ecuación integral de la ecuación diferencial estocástica de Ito:

$$dx(t, \omega) = a(t, x(t, \omega)) dt + b(t, x(t, \omega)) dW(t)$$

con condición inicial  $x(u, \omega) = x_u(\omega)$

A las funciones  $a$  y  $b$  se les impone que tengan derivadas parciales sucesivas continuas hasta el tercer orden en el intervalo considerado,  $T$ . Dividiendo dicho intervalo en intervalos de amplitud  $h$ ,  $u = t_1 < t_2 < \dots < t_N = v$  con  $h = t_{i+1} - t_i$ , se puede discretizar la ecuación integral en la forma

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(t, x) ds + \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(t, x) dW(s) \quad n = 1, \dots, N - 1$$

A continuación se desarrollan por Taylor, sobre el punto  $(t_n, x_n)$  donde  $x_n = x(t_n)$ , hasta un cierto orden (dependiendo del orden deseado de error) y se evalúan las integrales resultantes.

En concreto en este algoritmo propuesto por Rao, se desarrolla la función  $a(t, x)$  hasta el segundo orden, mientras que para la función  $b(t, x)$  el desarrollo

es hasta el tercer orden. Ello es debido a que con estos desarrollos se consigue un orden de error de  $\theta(h^2)$  y  $\theta_p(h^2)$ , donde por  $\theta_p(h^2)$  se entiende

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{P[|x| > \epsilon]}{h^2} = 0 \quad \forall \epsilon$$

El algoritmo en cuestión queda en la forma

$$\begin{aligned} x_{n+1} = & x_n + a_n h + b_n Z_{1n} + \frac{1}{2} h^2 (a_{t_n} + a_{x_n} a_n - \frac{1}{2} a_{x_n} b_{x_n} b_n) + \\ & + (a_{x_n} b_n - b_{t_n} - b_{x_n} a_n + \frac{1}{2} b_n b_{x_n}^2) Z_{2n} + \frac{1}{2} b_{x_n} b_n (Z_{1n}^2 - h) + \\ & + (b_{t_n} + b_{x_n} a_n - \frac{1}{2} b_{x_n}^2 b_n) Z_{1n} h + b_{x_n} a_{x_n} b_n Z_{3n} + \\ & + \frac{1}{2} (a_{x_n} b_{x_n} b_n + a_{x_n x_n} b_n^2) (Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n}) + \\ & + \frac{1}{2} (b_{x_n x_n} b_n^2 + b_{x_n}^2 b_n) (\frac{1}{3} Z_{1n}^3 - Z_{2n}) + \\ & + \frac{1}{2} (b_{t_n x_n} b_n + b_{x_n x_n} a_n b_n - \frac{1}{2} b_{x_n x_n} b_{x_n} b_n^2) (Z_{1n}^2 h - \frac{1}{2} h^2 + Z_{3n} - Z_{1n} Z_{2n}) + \\ & + \frac{1}{2} (b_{x_n}^2 a_n + b_{x_n} b_{t_n} - \frac{1}{2} b_{x_n}^3 b_n) (Z_{1n}^2 h - \frac{1}{2} h^2 - Z_{3n} - Z_{1n} Z_{2n}) + \\ & + \frac{1}{2} (\frac{1}{3!} b_{x_n x_n x_n} b_n^3 + \frac{1}{2} b_{x_n x_n} b_{x_n} b_n^2) (\frac{1}{2} Z_{1n}^4 - 3 Z_{1n} Z_{2n} + 3 Z_{3n}) + \\ & + \frac{1}{2} (\frac{1}{2} b_{x_n} b_{x_n x_n} b_n^2 + \frac{1}{2} b_{x_n}^3 b_n) (\frac{1}{6} Z_{1n}^4 - Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n}) \end{aligned}$$

donde

$$a_n = a(t_n, x_n) \quad a_{t_n} = \frac{\partial a}{\partial t}(t_n, x_n) \quad a_{x_n} = \frac{\partial a}{\partial x}(t_n, x_n)$$

$$b_n = b(t_n, x_n) \quad b_{t_n} = \frac{\partial b}{\partial t}(t_n, x_n) \quad b_{x_n} = \frac{\partial b}{\partial x}(t_n, x_n)$$

$$b_{x_n x_n} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}(t_n, x_n) \quad b_{x_n x_n x_n} = \frac{\partial^3 b}{\partial x^3}(t_n, x_n)$$

$$Z_{1n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW(s)$$

$$Z_{2n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t dW(s) dt$$

$$Z_{3n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t (W(s) - W(n)) ds dW(t)$$

Se puede probar que  $Z_{1n}$  es una variable normal con media cero y varianza  $h$ ,  $Z_{2n}$  es una variable normal de media cero y varianza  $\frac{h^3}{3}$ , mientras que  $Z_{3n}$  no es normal, pero se puede aproximar, para valores pequeños de  $h$ , por una variable normal de media cero y varianza  $\frac{h^4}{12}$ , estando incorrelada ésta última con  $Z_{1n}$  y  $Z_{2n}$ , si bien  $Z_{2n}$  y  $Z_{1n}$  son dependientes.

En el caso concreto del proceso de difusión con momentos infinitesimales

$$a(t, x) = -\frac{\theta}{t+1}x \quad \text{y} \quad b(t, x) = \sigma$$

se tiene

$$a_n = -\frac{\theta}{t_n+1}x_n \quad b_n = \sigma$$

$$a_{t_n} = \frac{\theta}{(t_n+1)^2}x_n \quad b_{t_n} = 0$$

$$a_{x_n} = -\frac{\theta}{t_n+1} \quad b_{x_n} = 0$$

siendo nulas el resto de las parciales. Con ello el algoritmo queda en este caso de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n \left[ 1 - \frac{\theta}{t_n+1}h + \frac{h^2}{2} \frac{\theta}{(t_n+1)^2} [1 + \theta] \right] + \sigma Z_{1n} - \frac{\sigma\theta}{t_n+1} Z_{2n}$$



## APENDICE D

# Programas de Ordenador

### 1 Inferencia en el proceso Lognormal

Incluimos a continuación dos programas, uno escrito como una subrutina FORTRAN que implementa la estimación y el contraste que hemos desarrollado en el capítulo 2 y otro escrito en BASIC MICROSOFT que gestiona esta subrutina. Para poder comparar los resultados del programa con los valores observados, de modo gráfico, hemos utilizado un programa auxiliar. Analizamos a continuación la estructura del programa.

#### **Estructura del programa BASIC.**

Formalmente el programa BASIC es una implementación idéntica a la de FORTRAN, y aunque incluye una serie de facilidades de uso, ya que es un programa completo, que permite el trabajo interactivo y la realización de transformaciones usuales en los datos, seleccionar o generar contrastes, etc., para su estudio, nos referimos a la descripción del programa FORTRAN.

#### **Estructura del programa FORTRAN.**

El programa está realizado como una subrutina llamada DIFLOM. La forma de esta subrutina es SUBROUTINE DIFLOM(Casos, Ned, Nex, Datos, R1, R2, W, L, Solb, Cov, Cov2, Cov3, Cov6, Solb2, Cov7, Ten, VarTen, Uesta, Fexp, Grados1, Grados2, Gamma1, Gamma2), cuyos parámetros se describen en las tablas de entrada y salida. Además se incluye un programa de manejo de la

misma (*driver*) con instrucciones para adaptarlo a diferentes casos. La subrutina y el programa que la utiliza se han escrito según las normas JRSS.

Tabla de Entrada

Nombre	Tipo	Descripción
Casos	Entero	Número de casos
Ned	Entero	Número de variables endógenas
Nex	Entero	Número de variables exógenas
Datos	Matriz Real (Casos-1, Ned+Nex)	Matriz de datos
R1	Vector de Enteros (Ned)	Posición de las variables endógenas en la matriz de datos $1 \leq R1(i) \leq Ned+Nex; 1 \leq i \leq Ned$
R2	Vector de Enteros (Nex)	Posición de las variables exógenas en la matriz de datos $1 \leq R2(i) \leq Ned+Nex; 1 \leq i \leq Nex$
W	Entero	Número de parámetros a contrastar $1 \leq W \leq Nex+1$
L	Vector de Enteros (Nex+1)	L(i) es la posición del i-ésimo parámetro a contrastar; $1 \leq L(i) \leq Nex+1; 1 \leq i \leq W$

Tabla de Salida

Nombre	Tipo	Descripción
Solb	Matrix Real (Ned, Nex+1)	Estimación de los parámetros $\beta$ , ( $\hat{\beta}$ )
Cov	Matriz Real (Ned, Ned)	Estimación de la matriz de covarianzas ( $\hat{B}$ )
Cov2	Matriz Real (Ned, Ned)	Estimación insesgada de la matriz de covarianzas ( $\hat{B}$ )
Cov3	Matriz Real (Ned $\times$ (Nex + 1), Ned $\times$ (Nex + 1))	Matriz de covarianzas de $\hat{\beta}$
Cov6	Matriz Real (Ned $\times$ (Ned + 1)/2, Ned $\times$ (Ned + 1)/2)	Covarianza de Vech( $\hat{B}$ )
Solb2	Matriz Real (Ned, Nex + 1)	Estimación de los parámetros $\beta$ transfor- mados
Cov7	Matriz Real (Ned $\times$ (Nex + 1), Ned $\times$ (Nex + 1))	Covarianza de los parámetros $\beta$ transfor- mados
Ten	Matriz Real (Casos - 1, Ned)	Tendencia estimada
VarTen	Matriz Real (Casos - 1, Ned)	Varianza de las variables endógenas
Uesta	Real	Estadístico U
Fexp	Real	F experimental deducida del estadístico U (Caso W = 1, 2)
Grados1 Grados2	Real	Grados de libertad de la F de Snedecor correspondiente al estadístico U (Caso W = 1, 2)
Gamma1 Gamma2	Real	$\gamma_1$ y $\gamma_2$ en el desarrollo asintótico del estadístico U (Caso W > 2)



### Algoritmos auxiliares

Se utilizan además las siguientes subrutinas que se han escrito especialmente.

DUPLICA	Cálculo de la inversa de <i>Moore-Penrose</i> de la matriz de duplicación.
KRONECKER	Cálculo del producto de Kronecker de dos matrices.
DETER	Cálculo del determinante de una matriz.
INVERTIR	Cálculo de la inversa de una matriz.
PROMAT	Cálculo del producto de dos matrices.
TRANS	Cálculo de la traspuesta de una matriz.
TRAZA	Cálculo de la traza de una matriz.

### Precisión.

Hemos utilizado doble precisión en el algoritmo ya que el cálculo matricial necesita esta precisión (por ejemplo para la inversión de una matriz). Además es común (la experiencia con este algoritmo lo afirma) que se obtengan resultados del orden de  $10^{-12}$  (por ejemplo, en la matriz de covarianzas).

### Tiempo de cálculo.

El tiempo de cálculo depende obviamente del tamaño muestral y del número de variables endógenas y exógenas elegido. Algunos ejemplos realizados en un ordenador ICL DRS M75, basado en un procesador 80486 a 25 Mhz. muestran que para los datos de Tintner, que constan de 23 casos con 4 variables endógenas y 2 factores exógenos, el tiempo de cálculo es inferior a 1 segundo.

## 1.1 Listado del programa Fortran

```

C
C----- PROGRAMA PRINCIPAL-----
C
C-----En este ejemplo hay 4 variables endogenas y 2 exogenas.
C-----Hay 23 casos en el fichero.
C
      INTEGER Casos,Nex,Ned,R1(4),R2(2)
      INTEGER W,L(2),Grados1,Grados2,Grados3
      REAL*8 Datos(0:22,6),Solb(4,3),Cov(4,4),Cov2(4,4)
&      Cov3(12,12),Cov6(10,10),Solb2(4,3),Cov7(12,12)
&      Ten(0:22,4),VarTen(0:22,4)
      REAL*8 Uesta,Fexp,Gamma1,Gamma2
      INTEGER I,J,DM2,DM1
C
      Nex=2
      Ned=4
      Casos=23
      DM1=Ned*(Ned+1)/2
      DM2=Ned*Ned
C
C-----Lee los casos (del fichero DATA.DAT )
C
      WRITE (*,*)
      WRITE (*,*)
      WRITE (*,*) 'En este ejemplo los datos estan'
      WRITE (*,*) '  en el fichero DATA.DAT'
      WRITE (*,*)
      WRITE (*,*) 'Hay 6 variables en el fichero:'
      WRITE (*,*)
      WRITE (*,*) 'Las 2 primeras variables son factores'
      WRITE (*,*) 'exogenos y las otras son endogenas.'
      WRITE (*,*)
      WRITE (*,*) 'En este ejemplo, tras la estimacion de los'
      WRITE (*,*) 'parametros, se realiza los tests de'
      WRITE (*,*) 'hipotesis sobre  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .'

```

```
WRITE (*,*)
WRITE (*,*) 'Lea el programa para realizar otro tipo de'
WRITE (*,*) 'contrastes sobre los parametros'
WRITE (*,*)
WRITE (*,*) 'La salida esta en el fichero LIST.OUT '
C
OPEN (UNIT=8,FILE='DATA.DAT')
DO I=0,Casos-1
    READ (8,*) (Datos(I,J),J=1,6)
END DO
C
C-----En este ejemplo se contrastan 2 parametros: B1 y B2
C
W=2
L(1)=2
L(2)=3
C
C Se puede establecer otras combinaciones para 2 parametros
C L(1)=1,L(2)=2 o L(1)=1,L(2)=3
C (Sin cambios en las dimensiones)
C
C
C-----Lugar de las variables en la matriz de datos
C
R1(1)=3
R1(2)=4
R1(3)=5
R1(4)=6
R2(1)=1
R2(2)=2
C
C Para contrastar solo un parametro ponga:
C W=1,L(1)=Lugar que ocupa el parametro (1,2,3)
C y cambie las siguientes dimensiones:
C L(1) (En el Programa Principal)
C L1(1),M(4,1),M1(1,4),M2(4,1)
C A112(1,1),A11(1,1),A12(1,2),A22(2,2),
C A21(2,1),S(2,2),D(1,2),E(1,1)
```

```

C           (En la subrutina DIFLOM)
C           Para contrastar  $\beta_0, \beta_1$  y  $\beta_2$  ponga:
C           W=3, L(1)=1, L(2)=2, L(3)=3
C           Cambie las siguientes dimensiones:
C           L(3) (En el Programa principal)
C           L1(3),M(4,3),M1(3,4),M2(4,3)
C           A112(3,3),A11(3,3),A12(3,1),A22(1,1),
C           A21(1,3),S(1,1),D(3,1),E(1,1)
C           (En la subrutina DIFLOM)
C
C           CALL DIFLOM(Casos,Ned,Nex,Datos,R1,R2,W,L,
&                   Solb,Cov,Cov2,Cov3,Cov6,Solb2,Cov7,
&                   Ten,VarTen,Uesta,Fexp,Grados1,Grados2,
&                   Grados3,Gamma1,Gamma2)
C
C-----Escribe las matrices calculadas en DIFLOM (en LIST.OUT)
C
C           OPEN (UNIT=1,FILE='LIST.OUT')
C
C           WRITE (1,*) 'DATOS (2 Var. Exogenas y 4 Endogenas)'
C           WRITE (1,*) '-----'
C           DO I=0,Casos-1
C               WRITE (1,*) (Datos(I,J),J=1,6)
C               WRITE (1,*) '.....'
C           END DO
C           WRITE (1,*) '-----'
C
C           WRITE (1,*) 'Estimacion de los parametros  $\beta$ '
C           WRITE (1,*) '-----'
C           DO I=1,Ned
C               WRITE (1,*) (Solb(I,J),J=1,Nex+1)
C           END DO
C           WRITE (1,*) '-----'
C
C           WRITE (1,*) 'Matriz de Covarianzas del proceso'
C           WRITE (1,*) '-----'
C           DO I=1,Ned

```

```

        WRITE (1,*) (Cov(I,J),J=1,Ned)
        WRITE (1,*) '.....'
    END DO
    WRITE (1,*) '-----'
C
    WRITE (1,*) 'Matriz de Covarianzas Insesgada'
    WRITE (1,*) '-----'
    DO I=1,Ned
        WRITE (1,*) (Cov2(I,J),J=1,Ned)
        WRITE (1,*) '.....'
    END DO
    WRITE (1,*) '-----'
C
    WRITE (1,*) 'Covarianzas de los parametros  $\beta$ '
    WRITE (1,*) '-----'
    DO I=1,Ned*(Nex+1)
        WRITE (1,*) (Cov3(I,J),J=1,Ned*(Nex+1))
        WRITE (1,*) '.....'
    END DO
    WRITE (1,*) '-----'
C
    WRITE (1,*) 'Cov.del Vech de la matriz de Cov. Insesgada'
    WRITE (1,*) '-----'
    DO I=1,DM1
        WRITE (1,*) (Cov6(I,J),J=1,DM1)
        WRITE (1,*) '.....'
    END DO
    WRITE (1,*) '-----'
C
    WRITE (1,*) 'Transformacion de los valores  $\beta$  estimados'
    WRITE (1,*) '-----'
    DO I=1,Ned
        WRITE (1,*) (Solb2(I,J),J=1,Nex+1)
        WRITE (1,*) '.....'
    END DO
    WRITE (1,*) '-----'
C

```

```

WRITE (1,*) 'Covarianzas de los estimadores transformados'
WRITE (1,*) '-----'
DO I=1,Ned*(Nex+1)
  WRITE (1,*) (Cov7(I,J),J=1,Ned*(Nex+1))
  WRITE (1,*) '.....'
END DO
WRITE (1,*) '-----'
C
DO J=1,Ned
  WRITE (1,*) 'Tendencia estimada de la var.endogena#',J
  WRITE (1,*) '-----'
  WRITE (1,*) (Ten(I,J),I=0,Casos-1)
  WRITE (1,*) '-----'
END DO
C
DO J=1,Ned
  WRITE (1,*) 'Varianza de la variable endogena # ',J
  WRITE (1,*) '-----'
  WRITE (1,*) (VarTen(I,J),I=0,Casos-1)
  WRITE (1,*) '-----'
END DO
C
IF (W.LE.2) THEN
  WRITE (1,*) 'U-esta : ',Uesta
  WRITE (1,*) 'Fexp   : ',Fexp
  WRITE (1,*) 'D.F.1  : ',Grados1
  WRITE (1,*) 'D.F.2  : ',Grados2
ELSE
  WRITE (1,*) 'U-esta : ',Uesta
  WRITE (1,*) 'D.F.   : ',Grados3
  WRITE (1,*) 'Gamma1 : ',Gamma1
  WRITE (1,*) 'Gamma2 : ',Gamma2
END IF
C
C-----Fin del programa principal
END
C

```

```

SUBROUTINE DIFLOM(Casos,Ned,Nex,Datos,R1,R2,W,L,
&                Solb,Cov,Cov2,Cov3,Cov6,Solb2,Cov7,
&                Ten,VarTen,Uesta,Fexp,Grados1,Grados2,
&                Grados3,Gamma1,Gamma2)
C
C ESTIMACION EN EL PROCESO DE DIFUSION LOGNORMAL
C MULTIVARIANTE CON FACTORES EXOGENOS
C
INTEGER Casos,Ned,Nex,R1(4),R2(2),
&        W,L(2),Grados1,Grados2,Grados3
REAL*8 Datos(0:22,6),Solb(4,3),
&        Cov(4,4),Cov2(4,4),Cov3(12,12),Cov6(10,10),
&        Solb2(4,3),Cov7(12,12),
&        Ten(0:22,4),VarTen(0:22,4),
&        Uesta,Fexp,Gamma1,Gamma2
INTEGER L1(2),I,J,A,B,JJJ,
&        DM2,DM1,Q1
REAL*8 Endogenas(0:22,4),Exogenas(0:22,2),
&        Cov4(16,16),Cov5(10,16),Dup(10,16),
&        Dup2(16,10),AAAA(3,3),AINV(3,3),
&        C(4,3),SumExo(3),B1(4),B2(3,3),
&        H2(3,3),F(4,4),H1(3,3),H(3,3),A112(2,2),T1(4,4),
&        T2(4,4),M(4,2),M1(2,4),M2(4,2),
&        Sp,Det1,Det2,Razon,Sum,
&        A11(2,2),A12(2,1),A22(1,1),A21(1,2),
&        S(1,1),D(2,1),E(2,2)
C
DM1=Ned*(Ned+1)/2
DM2=Ned*Ned
Q1=Nex+1-W
C
C-----Si Casos <= Nex+1 no es posible hacer nada.
C
If (Casos.LE.Nex+1) RETURN
C
C-----Transformacion de las variables endogenas y exogenas.
C

```

```

DO J=1,Ned
  DO I=1,Casos-1
    Endogenas(I,J)=LOG(Datos(I,R1(J))/Datos(I-1,R1(J)))
  END DO
END DO
DO J=2,Nex+1
  DO I=1,Casos-1
    Exogenas(I,1)=1
    Exogenas(I,J)=Datos(I,R2(J-1))
  END DO
END DO
C
C-----Calculo de las matrices A y C.
C
DO I=1,Casos-1
  DO J=1,Nex+1
    DO K=1 ,Nex+1
      AAAA(J,K)=AAAA(J,K)+Exogenas(I,J)*Exogenas(I,K)
    END DO
  END DO
DO J=1,Ned
  DO K=1,Nex+1
    C(J,K)=C(J,K)+Endogenas(I,J)*Exogenas(I,K)
  END DO
END DO
C
C-----Calculo de las matrices Solb, Cov y Cov2.
C
CALL Invertir (AAAA, Nex+1, AINV)
CALL Promat (C, AINV, Ned, Nex+1, Nex+1, Nex+1, Solb)
C
DO I=1,Casos-1
  DO J=1 ,Ned
    B1(J)=0
    DO K=1,Nex+1
      B1(J)=B1(J)+Solb(J,K)*Exogenas(I,K)
    END DO
  END DO
END DO

```



```

        END DO
        B1(J)=Endogenas(I,J)-B1(J)
    END DO
    DO J=1,Ned
        DO K=1,Ned
            Cov(J,K)=Cov(J,K)+B1(J)*B1(K)
        END DO
    END DO
    END DO
    DO I=1,Ned
        DO J=1,Ned
            Cov(I,J)=Cov(I,J)/(Casos-1)
            Cov2(I,J)=Cov(I,J)*(Casos-1)/
&                (Casos-Nex-2)
        END DO
    END DO
C
C-----Calculo de las matrices Cov3 y Cov6.
C
    CALL Kronecker(AINV,Cov2,Nex+1,Nex+1,Ned,
&                Ned,Cov3)
    DO I=1,(Nex+1)*Ned
        DO J=1,(Nex+1)*Ned
            Cov7(I,J)=Cov3(I,J)
        END DO
    END DO
    CALL Duplica(Ned,Dup)
C
    CALL Trans (Dup, DM1, DM2, Dup2)
    CALL Kronecker(Cov2,Cov2,Ned,Ned,Ned,
&                Ned,Cov4)
C
    CALL Promat (Dup,Cov4,DM1,DM2,DM2,DM2,Cov5)
    CALL Promat (Cov5,Dup2,DM1,DM2,DM2,DM1,Cov6)
C
    DO I=1,DM1
        DO J=1,DM1

```

```

                Cov6(I,J)=Cov6(I,J)*2/(Casos-Nex-2)
            END DO
        END DO
C
C-----Calculo de las matrices Solb2 y Cov7.
C
        DO I=1,Ned
            DO J=1,Nex+1
                IF (J.EQ.1) THEN
                    Solb2(I,J)=Solb(I,J)+(Cov2(I,I)/2)
                ELSE
                    Solb2(I,J)=Solb(I,J)
                END IF
            END DO
        END DO
        DO I=1,Ned
            IF (I.EQ.1) THEN
                A=1
            ELSE
                A=A+Ned+2-I
            END IF
            DO J=1,Ned
                IF (J.EQ.1) THEN
                    B=1
                ELSE
                    B=B+ Ned+2-J
                END IF
                Cov7(I,J)=Cov3(I,J)+(Cov6(A,B)*.25)
            END DO
        END DO
C
C-----Estimacion de la Tendencia y las Varianzas.
C
        DO J=1,Ned
            DO K=2,Nex+1
                SumExo(K-1)=0
            END DO

```

```

DO I=0,Casos-1
  Sum=0.
  IF (I.GT.0) THEN
    DO K=2,Nex+1
      SumExo(K-1)=SumExo(K-1)+Datos(I,R2(K-1))
      Sum=Sum+Solb2(J,K)*SumExo(K-1)
    END DO
  END IF
  Sp=Solb2(J,1)*I+Sum
  Ten(I,J)=Datos(0,R1(J))*EXP(Sp)
  VarTen(I,J)=Datos(0,R1(J))*Datos(0,R1(J))*
&      EXP(2*Sp)*(-1+EXP(Cov2(J,J)*I))
  END DO
END DO

C
C-----Contrastes de hipotesis para la combinacion de parametros
C
C-----Numerador del Estadistico U.
C
DO I=1,Ned
  DO J=1,Ned
    T1(I,J)=Cov(I,J)*(Casos-1)
  END DO
END DO

C
CALL Deter(T1,Ned,Det1)

C
C-----Matriz de permutacion (H()) para la combinacion L().
C
DO I=1,Nex+1
  L1(I)=0
END DO
DO I=1,W
  L1(L(I))=1
END DO
DO I=1,Nex+1
  MN=1

```

```

      DO J=1,W
        IF (I.EQ.L(J)) THEN
              MN=1
              EXIT
        ELSE
              MN=0
        END IF
      END DO
      IF (MN.EQ.0) L1(I)=0
    END DO
    DO I=1,Nex+1
      DO J=1,Nex+1
        H(I,J)=0
      END DO
    END DO
    DO I=1,W
      H(I,L(I))=1
    END DO
    JJJ=W
    DO I=1,Nex+1
      IF (L1(I).EQ.0) THEN
            JJJ=JJJ+1
            H(JJJ,I)=1
      END IF
    END DO
  C
  C-----Reordenamiento en la matriz A.
  C
      CALL Trans(H,Nex+1,Nex+1,H1)
      CALL Promat(H,AAAA,Nex+1,Nex+1,Nex+1,Nex+1,H2)
      CALL Promat(H2,H1,Nex+1,Nex+1,Nex+1,Nex+1,B2)
  C
  C-----Denominador del Estadistico U.
  C
  C-----Calculo de la matriz A11.2 a partir de B2.
  C
      DO I=1,W

```

```
        DO J=1,W
          IF (Q1.EQ.0) THEN
            A112(I,J)=B2(I,J)
          ELSE
            A11(I,J)=B2(I,J)
          END IF
        END DO
      END DO
    IF (Q1.EQ.0) GOTO 10
    DO I=1,Q1
      DO J=1,Q1
        A22(I,J)=B2(W+I,W+J)
      END DO
    END DO
    DO I=1,W
      DO J=1,Q1
        A12(I,J)=B2(I,W+J)
      END DO
    END DO
    DO I=1,Q1
      DO J=1,W
        A21(I,J)=B2(W+I,J)
      END DO
    END DO
  C
  CALL Invertir (A22,Q1,S)
  CALL Promat(A12,S,W,Q1,Q1,Q1,D)
  CALL Promat(D,A21,W,Q1,Q1,W,E)
  C
  DO I=1,W
    DO J=1,W
      A112(I,J)=A11(I,J)-E(I,J)
    END DO
  END DO
10  DO I=1,Ned
    DO J=1,W
```

```

        M(I,J)=Solb(I,L(J))
    END DO
END DO
C
CALL Trans(M,Ned,W,M1)
CALL Promat(M,A112,Ned,W,W,W,M2)
CALL Promat(M2,M1,Ned,W,W,Ned,F)
C
DO I=1,Ned
    DO J=1,Ned
        T2(I,J)=T1(I,J)+F(I,J)
    END DO
END DO
C
CALL Deter(T2,Ned,Det2)
C
C-----Estadistico U.
C
    Uesta=Det1/Det2
    IF (W.LE.2) THEN
        IF (W.EQ.1) THEN
            Razon=Uesta
        ELSE
            Razon=SQRT(Uesta)
        END IF
        Fexp=((1-Razon)/Razon)*
&          ((Casos-1-Ned-Nex)/Ned)
        Grados1=W*Ned
        Grados2=W*(Casos-1-Nex-Ned)
    ELSE
        Grados3=Ned*W
        Gamma1=Casos-Q1-
&          (Ned+W+3)/2.
        Gamma2=Grados3*((Ned**2)+(W**2)-5)/48.
    END IF
RETURN
END

```

```
C
C
SUBROUTINE Duplica (N,Dup)
C
C   Calcula la inversa generalizada de Moore-Penrose
C   de la matriz de duplicacion
C
INTEGER N
REAL*8 DUP(N*(N+1)/2,N*N)
INTEGER I,J,A,B
C
DO I=1,N
  A=A+(I-1)
  DO J=I,N
    A=A+1
    B=B+1
    IF (I.NE.J) THEN
      Dup(B,A)=.5
      Dup(B,A+I+(J-I-1)*N+(N-J))=.5
    ELSE
      Dup(B,A)=1.
    END IF
  END DO
END DO
RETURN
END

C
C
SUBROUTINE Kronecker (A,B,N1,M1,N2,M2,KR)
C
C   Calcula el producto Kronecker de dos matrices.
C
INTEGER N1,M1,N2,M2
REAL*8 A(N1,M1),B(N2,M2),KR(N1*N2,M1*M2)
INTEGER I,J,K,L
C
DO I=1,N1
```

```

DO J=1,M1
  DO K=1,N2
    DO L=1,M2
      KR(N2*(I-1)+K,M2*(J-1)+L)=A(I,J)*B(K,L)
    END DO
  END DO
END DO
END DO
RETURN
END

C
C
SUBROUTINE Deter (A,N,DET1)
C
C   Calcula el determinante de una matriz
C
  INTEGER N
  REAL*8 A(N,N),R(16),DET(16)
  REAL*8 DET1,K
  INTEGER F,C,I,E,G,H,J,P
C
  DO F=1,N
    DO C=1,N
      DET(C - N + F * N) = A(F, C)
    END DO
  END DO
  E = 0.
  F = 0.
  DO I=1,(N-1)*N-1,N+1
    E = E + 1
    C = I
50    IF (DET(C).EQ.0.) THEN
      F = 1
      C = C + N
      IF (C.GE.N*N) THEN
        WRITE (*,*) 'El determinante vale cero'
        STOP
      END IF
    END IF
  END DO

```



```

                                END IF
ELSE
                                GOTO 60
END IF
IF (C.LT.N*N) GOTO 50
60  IF (F.EQ.1.) THEN
        DO G=I,I+N-E
                DET(G) = DET(G) + DET(C)
                C = C + 1
        END DO
END IF
R(E) = DET(I)
DO G=I,E * N
        DET(G) = DET(G) / R(E)
END DO
H = E
J = I + N
70  K = DET(J)
        P = J
        DO G=I,I+N-E
                DET(P) = DET(P) - DET(G) * K
                P = P + 1
        END DO
        J = J + N
        IF (H.LT.(N - 1)) THEN
                H = H + 1
        ELSE
                GOTO 80
        END IF
        GOTO 70
80  END DO
        R(E+1) = DET(N*N)
        DET1 = 1
        DO I=1,N
                DET1 = DET1 * R(I)
        END DO
RETURN
```

```
END
C
C
SUBROUTINE Invertir (A, N, INV)
C
C   Calcula la inversa de una matriz
C
INTEGER N
REAL*8 A(N,N),INV(N,N),O(3,3),O1(1,1)
REAL*8 TR
INTEGER I,J,K
C
DO I=1,N
  DO J=1,N
    IF (N.EQ.3) THEN
      O(I, J)=A(I, J)
    ELSE
      O1(I,J)=A(I,J)
    END IF
    IF (I.EQ.J) THEN
      INV(I, J) = 1
    ELSE
      INV(I, J) = 0
    END IF
  END DO
END DO
J=0
100 IF (N.EQ.3) THEN
  CALL Traza(O,N,TR)
ELSE
  CALL Traza(O1,N,TR)
END IF
J = J + 1
TR = TR / J
IF (J.EQ.N) GOTO 110
DO I=1,N
  DO K=1,N
```

```
        IF (I.EQ.K) THEN
            IF (N.EQ.3) THEN
                INV(I, I) = O(I, I) - TR
            ELSE
                INV(I,J)= O1(I,J) - TR
            END IF
        ELSE
            IF (N.EQ.3) THEN
                INV(I, K) = O(I, K)
            ELSE
                INV(I,K)= O1(I,K)
            END IF
        END IF
    END DO
END DO
IF (N.EQ.3) THEN
    CALL Promat(INV, A, N, N, N, N, O)
ELSE
    CALL Promat(INV, A, N, N, N, N, O1)
END IF
GOTO 100
110 IF (TR.EQ.0.) THEN
        WRITE (*,*) 'SISTEMA INCOMPATIBLE'
        STOP
    END IF
    DO I=1,N
        DO J=1,N
            INV(I, J) = INV(I, J) / TR
        END DO
    END DO
    RETURN
    END
C
C
SUBROUTINE Promat (A, Q, N1, M1, N2, M2, D)
C
C     Calcula el producto de dos matrices
```

```
C
      INTEGER N1,M1,N2,M2
      REAL*8 A(N1,M1),Q(N2,M2),D(N1,M2)
C
      DO I=1,N1
        DO J=1,M2
          D(I, J) = 0
          DO K=1,M1
            D(I, J) = A(I, K) * Q(K, J) + D(I, J)
          END DO
        END DO
      END DO
      RETURN
      END
```

```
C
C
      SUBROUTINE Trans (A, N1, M1, TRA)
C
C      Calcula la traspuesta de una matriz
C
```

```
      INTEGER N1,M1
      REAL*8 A(N1,M1),TRA(M1,N1)
      INTEGER I,J
C
      DO I=1,N1
        DO J=1,M1
          TRA(J, I) = A(I, J)
        END DO
      END DO
      RETURN
      END
```

```
C
C
      SUBROUTINE Traza(B,N,TR)
C
C      Calcula la traza de una matriz
C
```

```
      INTEGER N
      REAL*8 B(N,N),TR
      INTEGER I
C
      TR = 0
      DO I=1,N
         TR = TR + B(I, I)
      END DO
      RETURN
      END
C
```

## 1.2 Listado del programa Basic

```

'*****
'***** DECLARACION DE SUBROUTINAS *****
'*****
DECLARE SUB Agrupar (N#)
DECLARE SUB Inicia (N1#, N2#, N3#, PPos#())
DECLARE SUB Modifica (N1#, N2#, PPos#())
DECLARE SUB Test (NumExog#)
DECLARE SUB Calca112 (B2#(), Q1#, Q2#, A112#())
DECLARE SUB Deter (A#(), N#, Det#)
DECLARE SUB Trans (A#(), N1#, M1#, TRA#())
DECLARE SUB Centra (A$)
DECLARE SUB Transforma (Datos#(), Casos#, Variables%)
DECLARE SUB Invertir (A#(), N#, INV#())
DECLARE SUB Traza (B#(), N#, TR#)
DECLARE SUB Promat (A#(), C#(), N1#, M1#, N2#, M2#, D#())
DECLARE SUB Kronecker (A#(), B#(), N1#, M1#, N2#, M2#, KR#())
DECLARE SUB Duplica (N#, Dup#())
DECLARE SUB EscriMat (A#(), NumFilas#, NumColumnas#, Formato$)
COMMON Datos$, Llamador$, TipoFichero$
'*****
Forma$ = "####.##### "
DEFDBL A-Z
OPTION BASE 0
CLOSE
'*****
'***** FICHEROS DE ENTRADA Y SALIDA *****
'*****
CLS
INPUT "Fichero de datos ", Datos$
Datos2$ = LEFT$(Datos$, INSTR(Datos$, ".")) + "out"
INPUT "Fichero de salida. ENTER=Pantalla) ", Salida$
IF Salida$ = "" THEN
  Salida$ = "CON"
ELSE
  Salida$ = Datos2$

```

```
END IF
'*****
'***** DEFINICION DE VARIABLES *****
'*****
OPEN Datos$ FOR INPUT AS #1
Cuenta = 0
Centra "Estas son las cinco primeras lineas del fichero "+Datos$
DO UNTIL EOF(1)
  LINE INPUT #1, A$
  IF Cuenta < 5 THEN
    PRINT A$
  END IF
  Cuenta = Cuenta + 1
LOOP
CLOSE #1
OPEN Datos$ FOR INPUT AS 1
DO
  LOCATE 15, 1
  INPUT "¿Cuántas variables hay en el fichero ? ", Variables%
  IF Variables% <= 0 THEN
    BEEP
  END IF
LOOP UNTIL Variables% > 0
DIM Tiempo(Cuenta), Datos(Cuenta, Variables%)
DIM Ten(Cuenta, Variables%), VarTen(Cuenta, Variables%)
Casos = 0
DO WHILE NOT EOF(1)
  FOR J = 1 TO Variables%
    INPUT #1, Datos(Casos, J)
  NEXT
  Casos = Casos + 1
LOOP
CLOSE
PRINT USING "                Hay ### casos."; Casos
'*****
'***** Transformacion de casos *****
'*****
```

```

Transforma Datos(), Casos, Variables%
PRINT "          Data "
FOR I = 0 TO Casos - 1
  FOR J = 1 TO Variables%
    PRINT USING "#####.##"; Datos(I, J);
  NEXT
  PRINT
NEXT
LINE INPUT " Titulo ", TITULO$
PRINT USING " Hay ### casos"; Casos
PRINT USING " ¿Casos a considerar? (ENTER=###)"; Casos;
INPUT "", CasosEstudiados
IF CasosEstudiados = 0 THEN CasosEstudiados = Casos
CasosEstudiados = CasosEstudiados - 1
PRINT
INPUT "Lugar de la var. TIEMPO en la matriz de datos,(0=AUTO)",R
FOR I = 0 TO CasosEstudiados
  IF R = 0 THEN
    Tiempo(I) = I
  ELSE
    Tiempo(I) = Datos(I, R)
  END IF
NEXT
INPUT "          Numero de variables endogenas: ", NumEndog
DM1 = NumEndog * (NumEndog + 1) / 2
DM2 = NumEndog * NumEndog
DIM Cov(NumEndog, NumEndog), Cov2(NumEndog, NumEndog)
DIM Cov5(DM1, DM2), Cov4(DM2, DM2)
DIM Dup(DM1, DM2), Dup2(DM2, DM1), Cov6(DM1, DM1)
DIM Endogenas(Cuenta, NumEndog), R1(NumEndog), B1(NumEndog)
FOR J = 1 TO NumEndog
  PRINT USING "Lugar de la ## var. endogena en la"_
    "matriz de datos";J;
  INPUT "", R1(J)
  FOR I = 1 TO CasosEstudiados
    M = Tiempo(I) - Tiempo(I - 1)
    M1=M ^ (-1/2)
  
```



```

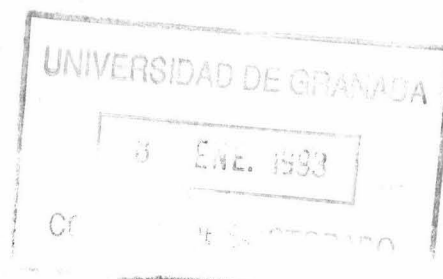
        Endogenas(I,J)=M1*LOG(Datos(I,R1(J))/Datos(I-1,R1(J)))
    NEXT
NEXT
PRINT
INPUT "          Numero de variables exogenas: ", NumExog
DIM Cov3(NumEndog * (NumExog + 1), NumEndog * (NumExog + 1))
DIM Cov7(NumEndog * (NumExog + 1), NumEndog * (NumExog + 1))
DIM Solb2(NumEndog, NumExog + 1), SumExo(NumExog + 1)
DIM Exogenas(Cuenta, NumExog + 1), R2(NumExog + 1)
DIM C(NumEndog, NumExog + 1), Solb(NumEndog, NumExog + 1)
DIM A(NumExog + 1, NumExog + 1), AINV(NumExog + 1, NumExog + 1)
FOR J = 2 TO NumExog + 1
    PRINT USING "Lugar de la ## var. exogena en la "_
        "matriz de datos";J-1;
    INPUT "", R2(J)
    FOR I = 1 TO CasosEstudiados
        M = Tiempo(I) - Tiempo(I - 1)
        Exogenas(I, 1) = M ^ (-1 / 2)
        Exogenas(I, J) = M ^ (-1 / 2) * Datos(I, R2(J)) * M
    NEXT
NEXT
'*****
'***** ELECCION DE LOS CONTRASTES *****
'*****
Test NumExog
'*****
'***** COMIENZA LA SALIDA *****
'*****
OPEN Salida$ FOR OUTPUT AS #6
'*****
'***** ESCRIBE LOS DATOS *****
'*****
PRINT #6, TITULO$
PRINT #6, USING "Tiempo, Factores Exogenos y "_
        "## Var. Endogenas";NumEndog
FOR I = 0 TO CasosEstudiados
    PRINT #6, USING "#### "; Tiempo(I);

```

```

FOR J = 2 TO NumExog + 1
  PRINT #6, USING "#####.## "; Datos(I, R2(J));
NEXT
FOR J = 1 TO NumEndog
  PRINT #6, USING "#####.## "; Datos(I, R1(J));
NEXT
PRINT #6, ""
NEXT
PRINT #6, ""
'*****
'***** CALCULO DE LAS MATRICES A y C *****
'*****
FOR I = 1 TO CasosEstudiados
  FOR J = 1 TO NumExog + 1
    FOR K = 1 TO NumExog + 1
      A(J, K) = A(J, K) + Exogenas(I, J) * Exogenas(I, K)
    NEXT
  NEXT
  FOR J = 1 TO NumEndog
    FOR K = 1 TO NumExog + 1
      C(J, K) = C(J, K) + Endogenas(I, J) * Exogenas(I, K)
    NEXT
  NEXT
NEXT
NEXT
'*****
'***** CALCULO DE LOS ESTIMADORES *****
'*****
Invertir A#(), NumExog + 1, AINV#()
Promat C(), AINV(), NumEndog, NumExog+1, NumExog+1, NumExog+1, Solb#()
PRINT #6, "          Valores Estimados"
PRINT #6, ""
FOR T = 1 TO NumEndog
  FOR W = 1 TO NumExog + 1
    PRINT #6, USING "#####.##### "; Solb(T, W);
  NEXT
  PRINT #6, ""
NEXT
NEXT

```



```

FOR I = 1 TO CasosEstudiados
  FOR J = 1 TO NumEndog
    B1(J) = 0
    FOR K = 1 TO NumExog + 1
      B1(J) = B1(J) + Solb(J, K) * Exogenas(I, K)
    NEXT
    B1(J) = Endogenas(I, J) - B1(J)
  NEXT
  FOR J = 1 TO NumEndog
    FOR K = 1 TO NumEndog
      Cov(J, K) = Cov(J, K) + B1(J) * B1(K)
    NEXT
  NEXT
NEXT
NEXT
PRINT #6, ""
PRINT #6, "          Matriz de Covarianzas"
PRINT #6, ""
FOR I = 1 TO NumEndog
  FOR J = 1 TO NumEndog
    Cov(I, J) = Cov(I, J) / CasosEstudiados
    Cov2(I, J) = CasosEstudiados / (CasosEstudiados - NumExog - 1)
    Cov2(I, J) = Cov(I, J) * Cov2(I, J)
  NEXT
NEXT
NEXT
EscriMat Cov#(), NumEndog, NumEndog, Forma$
PRINT #6, ""
PRINT #6, "          Matriz de Covarianzas Insesgada"
PRINT #6, ""
EscriMat Cov2#(), NumEndog, NumEndog, Forma$
'*****
'***** COVARIANZAS DE LOS ESTIMADORES *****
'*****
Kronecker AINV(), Cov2(), NumExog+1, NumExog+1, NumEndog, NumEndog, _
Cov3()
PRINT #6, ""
PRINT #6, "          Covarianzas de los estimadores"
PRINT #6, ""

```

```

FOR I = 1 TO (NumExog + 1) * NumEndog
  FOR J = 1 TO (NumExog + 1) * NumEndog
    Cov7(I, J) = Cov3(I, J)
  NEXT
NEXT
EscriMat Cov3#(), (NumExog+1)*NumEndog, (NumExog+1)*NumEndog, Forma$
'*****
'***** COVARIANZAS DEL VEC DE LA MATRIZ DE COVARIANZAS *****
'*****
Duplica NumEndog, Dup#()
Trans Dup#(), DM1, DM2, Dup2#()
Kronecker Cov2(), Cov2(), NumEndog, NumEndog, NumEndog, NumEndog, _
  Cov4()
Promat Dup#(), Cov4#(), DM1, DM2, DM2, DM2, Cov5#()
Promat Cov5#(), Dup2#(), DM1, DM2, DM2, DM1, Cov6#()
PRINT #6, ""
PRINT #6, "  Cov. del Vec de la matriz de Covarianzas Inssegada"
FOR I = 1 TO DM1
  FOR J = 1 TO DM1
    Cov6(I, J) = Cov6(I, J) * 2 / (CasosEstudiados - NumExog - 1)
  NEXT
NEXT
EscriMat Cov6#(), DM1, DM1, Forma$
'*****
'***** TRANSFORMACION DE LOS ESTIMADORES DE LA TENDENCIA *****
'*****
PRINT #6, ""
PRINT #6, "Transformacion de los valores estimados para"
PRINT #6, "la tendencia y varianza del proceso"
PRINT #6, ""
FOR I = 1 TO NumEndog
  FOR J = 1 TO NumExog + 1
    IF J = 1 THEN
      Solb2(I, J) = Solb(I, J) + (Cov2(I, I) / 2)
    ELSE
      Solb2(I, J) = Solb(I, J)
    END IF
  NEXT
NEXT

```

```

        PRINT #6, USING "#####.#####"; Solb2(I, J);
    NEXT
    PRINT #6, ""
NEXT
PRINT #6, ""
'*****
'***** COVARIANZAS DE LOS PARAMETROS TRANSFORMADOS *****
'*****
FOR I = 1 TO NumEndog
    IF I = 1 THEN
        A = 1
    ELSE
        A = A + NumEndog + 2 - I
    END IF
    FOR J = 1 TO NumEndog
        IF J = 1 THEN
            B = 1
        ELSE
            B = B + NumEndog + 2 - J
        END IF
        Cov7(I, J) = Cov3(I, J) + (Cov6(A, B) * (1 / 4))
    NEXT
NEXT
PRINT #6, ""
PRINT #6, " Covarianzas de los estimadores transformados"
EscriMat Cov7#(), (NumExog+1)*NumEndog, (NumExog+1)*NumEndog, Forma$
'*****
'***** REAJUSTE DE LA TENDENCIA *****
'*****
PRINT #6, ""
PRINT #6, "          Tendencia Estimada"
PRINT #6, ""
FOR J = 1 TO NumEndog
    Libre = FREEFILE
    OPEN MID$(STR$(J), 2) FOR OUTPUT AS Libre
    PRINT #6, " Tiempo          Valores Observados          Tendencia y "_
        "Var. de la # var.endogena "; J

```

```

FOR K = 2 TO NumExog + 1
    SumExo(K - 1) = 0
NEXT
FOR I = 0 TO CasosEstudiados
    Sum = 0
    IF I > 0 THEN
        FOR K = 2 TO NumExog + 1
            M=(Tiempo(I) - Tiempo(I - 1))
            SumExo(K - 1) = SumExo(K - 1) + Datos(I, R2(K))*M)
            Sum = Sum + Solb2(J, K) * SumExo(K - 1)
        NEXT
    END IF
    Sp = Solb2(J, 1) * (Tiempo(I) - Tiempo(0)) + Sum
    Ten(I, J) = Datos(0, R1(J)) * EXP(Sp)
    M = Datos(0, R1(J)) * Datos(0, R1(J))*EXP(2 * Sp)
    VarTen(I, J)=M*(-1+EXP(Cov2(J,J)*(Tiempo(I)-Tiempo(0))))
    PRINT #6, USING "####    #####.###    #####.###    "_
                "#####.###";
    PRINT #6, Tiempo(I);Datos(I,R1(J));Ten(I,J);VarTen(I, J)
    PRINT #Libre, Tiempo(I); Datos(I, R1(J)); Ten(I, J)
NEXT
PRINT #6, ""
CLOSE Libre
NEXT
PRINT #6, ""
'*****
'***** TEST SOBRE LOS PARAMETROS *****
'*****
DIM H#(NumExog + 1, NumExog + 1), H1#(NumExog + 1, NumExog + 1)
DIM L(NumExog + 1), L1(NumExog + 1)
DIM H2#(NumExog + 1, NumExog + 1), F#(NumEndog, NumEndog)
DIM SHARED B2#(NumExog + 1, NumExog + 1)
DIM SHARED A112#(NumExog + 1, NumExog + 1)
DIM T1#(NumEndog, NumEndog), T2#(NumEndog, NumEndog)
DIM SHARED A11#(NumExog, NumExog), A22#(NumExog, NumExog)
DIM SHARED A12#(NumExog, NumExog), A21#(NumExog, NumExog)
DIM SHARED S#(NumExog, NumExog)

```

```
DIM SHARED D#(NumExog, NumExog), E#(NumExog, NumExog)
DIM M#(NumEndog, K), M1#(K, NumEndog), M2#(NumEndog, K)
FOR I = 1 TO NumEndog
  FOR J = 1 TO NumEndog
    T1(I, J) = Cov(I, J) * CasosEstudiados
  NEXT
NEXT
Deter T1#(), NumEndog, Det1#
OPEN "paramet" FOR INPUT AS #3
DO WHILE NOT EOF(3)
  FOR I = 1 TO NumExog + 1
    L(I) = 0
    L1(I) = 0
  NEXT
  INPUT #3, K
  K1 = K
  PRINT #6, "Tests sobre los parametros ";
  FOR I = 1 TO K
    INPUT #3, L(I)
    L1(L(I)) = 1
    PRINT #6, L(I) - 1;
    IF I < K THEN PRINT #6, ", ";
  NEXT
  FOR I = 1 TO NumExog + 1
    MN = 1
    FOR J = 1 TO K
      IF I = L(J) THEN
        MN = 1
        EXIT FOR
      ELSE
        MN = 0
      END IF
    NEXT
    IF MN = 0 THEN L1(I) = 0
  NEXT
  PRINT #6, ""
  FOR I = 1 TO NumExog + 1
```

```

    FOR J = 1 TO NumExog + 1
        H(I, J) = 0
    NEXT
NEXT
FOR I = 1 TO K
    H(I, L(I)) = 1
NEXT
JJJ = K
FOR I = 1 TO NumExog + 1
    IF L1(I) = 0 THEN
        JJJ = JJJ + 1
        H(JJJ, I) = 1
    END IF
NEXT
FOR I = 1 TO NumEndog
    FOR J = 1 TO NumEndog
        T2(I, J) = 0
    NEXT
NEXT
Trans H#(), NumExog + 1, NumExog + 1, H1#()
Promat H(), A(), NumExog+1, NumExog+1, NumExog+1, NumExog+1, H2()
Promat H2(), H1(), NumExog+1, NumExog+1, NumExog+1, NumExog+1, B2()
CalcA112 B2#(), K1, NumExog + 1 - K1, A112#()
FOR I = 1 TO NumEndog
    FOR J = 1 TO K1
        M(I, J) = Solb(I, L(J))
    NEXT
NEXT
Trans M#(), NumEndog, K1, M1#()
Promat M#(), A112#(), NumEndog, K1, K1, K1, M2#()
Promat M2#(), M1#(), NumEndog, K1, K1, NumEndog, F#()
FOR I = 1 TO NumEndog
    FOR J = 1 TO NumEndog
        T2(I, J) = T1(I, J) + F(I, J)
    NEXT
NEXT
Deter T2#(), NumEndog, Det2

```



```

Razon = Det1 / Det2
IF K1 <= 2 THEN
  IF K1 = 1 THEN
    Razon2 = Razon
  ELSE
    Razon2 = Razon ^ (1 / 2)
  END IF
  Fexp = ((1 - Razon2) / Razon2)
  Fexp=Fexp*((CasosEstudiados-NumEndog-NumExog)/NumEndog)
  PRINT #6, ""
  PRINT #6, "Cociente : "; Razon
  PRINT #6, "Fexp : ";Fexp;" D.F: (";K1*NumEndog;" ,";
  PRINT #6, K1 * (CasosEstudiados - NumEndog - NumExog); ""
  PRINT #6, ""
ELSE
  Grados = NumEndog * K1
  Gamma1 = (CasosEstudiados + 1) - (NumExog + 1 - K1)
  Gamma1 = Gamma1 - (NumEndog + K1 + 3) / 2
  Gamma2 = Grados * ((NumEndog ^ 2) + (K1 ^ 2) - 5) / 48
  PRINT #6, ""
  PRINT #6, "U-Estadistico: "; Razon
  PRINT #6, "Grados de Libertad: "; Grados
  PRINT #6, "Gamma1: "; Gamma1
  PRINT #6, "Gamma2: "; Gamma2
  PRINT #6, ""
END IF
LOOP
END

'*****
'***** SUBRUTINAS ASOCIADAS *****
'*****

SUB CalcA112 (B2#(), Q1#, Q2#, A112#())
'*****
'***** CALCULA LA MATRIZ A11.2 DE UNA MATRIZ A *****
'*****

```

```
FOR I = 1 TO Q1
  FOR J = 1 TO Q1
    IF Q2 = 0 THEN
      A112(I, J) = B2(I, J)
    ELSE
      A11(I, J) = B2(I, J)
    END IF
  NEXT
NEXT
IF Q2 = 0 THEN EXIT SUB
FOR I = 1 TO Q2
  FOR J = 1 TO Q2
    A22(I, J) = B2(Q1 + I, Q1 + J)
  NEXT
NEXT
FOR I = 1 TO Q1
  FOR J = 1 TO Q2
    A12(I, J) = B2(I, Q1 + J)
  NEXT
NEXT
FOR I = 1 TO Q2
  FOR J = 1 TO Q1
    A21(I, J) = B2(Q1 + I, J)
  NEXT
NEXT
Invertir A22#(), Q2, S#()
Promat A12#(), S#(), Q1, Q2, Q2, Q2, D#()
Promat D#(), A21#(), Q1, Q2, Q2, Q1, E#()
FOR I = 1 TO Q1
  FOR J = 1 TO Q1
    A112(I, J) = A11(I, J) - E(I, J)
  NEXT
NEXT
END SUB
```

```
'*****
SUB Centra (A$)
```

```
'*****
'***** CENTRA UN TEXTO *****
'*****
PRINT TAB((80 - LEN(A$)) / 2); A$
END SUB

'*****
SUB Deter (A#(), N#, Det#)
'*****
'***** CALCULA EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ *****
'*****
DIM Det(N * N), R(N * N)
FOR F = 1 TO N
  FOR C = 1 TO N
    Det(C - N + F * N) = A(F, C)
  NEXT
NEXT
E = 0
F = 0
FOR I = 1 TO (N - 1) * N - 1 STEP N + 1
  E = E + 1
  C = I
  DO
    IF Det(C) = 0 THEN
      F = 1
      C = C + N
      IF C >= N ^ 2 THEN
        PRINT "El determinante vale cero"
        STOP
      END IF
    ELSE
      EXIT DO
    END IF
  LOOP UNTIL C >= (N ^ 2)
  IF F = 1 THEN
    FOR G = I TO I + N - E
      Det(G) = Det(G) + Det(C)
    
```

```

        C = C + 1
    NEXT
END IF
R(E) = Det(I)
FOR G = I TO E * N
    Det(G) = Det(G) / R(E)
NEXT
H = E
J = I + N
DO
    K = Det(J)
    P = J
    FOR G = I TO I + N - E
        Det(P) = Det(P) - Det(G) * K
        P = P + 1
    NEXT
    J = J + N
    IF H < (N - 1) THEN
        H = H + 1
    ELSE
        EXIT DO
    END IF
LOOP
NEXT
R(E + 1) = Det(N * N)
Det = 1
FOR I = 1 TO N
    Det = Det * R(I)
NEXT
ERASE Det
ERASE R
END SUB

'*****
SUB Duplica (N#, Dup#())
'*****
'***** CALCULA LA INVERSA DE LA MATRIZ DE DUPLICACION *****

```

```
'*****
FOR I = 1 TO N
  A = A + (I - 1)
  FOR J = I TO N
    A = A + 1
    B = B + 1
    IF I <> J THEN
      Dup(B, A) = 1 / 2
      Dup(B, A + I + (J - I - 1) * N + (N - J)) = 1 / 2
    ELSE
      Dup(B, A) = 1
    END IF
  NEXT
NEXT
END SUB

'*****
SUB EscriMat (A#(), NumFilas, NumColumnas, Formato$)
'*****
'***** ESCRIBE UNA MATRIZ SEGUN EL FORMATO DESEADO *****
'*****
Cinco = 5
Resto = NumColumnas
Largo = LEN(Formato$)
IF Largo < 7 THEN Formato$ = "##### "
Largo = LEN(Formato$)
Inicio = INT((Largo - 5) / 2)
Fin = Largo - Inicio - 5
Formato2$ = SPACE$(Inicio) + "Col##" + SPACE$(Fin)
DO UNTIL Resto = 0
  IF Resto < Cinco THEN
    Min = Resto
  ELSE
    Min = Cinco
  END IF
  Fin = Min
  FOR J = 1 TO Fin
```

```

        PRINT #6, USING Formato2$; NumColumnas - Resto + J;
    NEXT
    PRINT #6, ""
    PRINT #6, ""
    FOR I = 1 TO NumFilas
        FOR J = 1 TO Fin
            PRINT #6, USING Formato$;A(I, NumColumnas-Resto + J);
        NEXT
        PRINT #6, ""
    NEXT
    PRINT #6, STRING$(Fin * Largo, "*")
    Resto = Resto - Fin
LOOP
END SUB

'*****
'***** LAS DOS SIGUIENTES SUBROUTINAS CREAN LAS COMBINACIONES **
'***** DE PARAMETROS PARA LOS CONTRASTES EN EL CASO DE QUE **
'***** LA ELECCION SEA AUTOMÁTICA **
'*****
SUB Inicia (PElems#, PPrimeros#, PInic#, PPos#())
'*****
FOR I = 1 TO PPrimeros
    PPos(I) = PInic + I - 1
NEXT
FOR I = PPrimeros + 1 TO PElems
    PPos(I) = -1
NEXT
END SUB

SUB Modifica (PElems#, PGrupos#, PPos#())
'*****
IF PGrupos < 1 THEN EXIT SUB
Fin = 0
UnoMas = PPos(1) + 1
PPos(PGrupos) = PPos(PGrupos) + 1
DO WHILE (PPos(PGrupos) > PElems) AND (Fin = 0)

```

```
Modifica PElems, PGrupos - 1, PPos()
PPos(PGrupos) = PPos(PGrupos - 1) + 1
IF PPos(1) > PElems THEN
    Inicia PElems, PGrupos, UnoMas, PPos()
    Fin = 1
END IF
LOOP
END SUB
'*****
SUB Invertir (A#(), N#, INV#())
'*****
'***** CALCULA LA INVERSA DE UNA MATRIZ DADA *****
'*****
DIM B(N, N)
FOR I = 1 TO N
    FOR J = 1 TO N
        B(I, J) = A(I, J)
        IF I = J THEN
            INV(I, J) = 1
        ELSE
            INV(I, J) = 0
        END IF
    NEXT
NEXT
NEXT
J = 0
DO
    Traza B(), N#, TR
    J = J + 1
    TR = TR / J
    IF J = N THEN EXIT DO
    FOR I = 1 TO N
        FOR K = 1 TO N
            IF I = K THEN
                INV(I, I) = B(I, I) - TR
            ELSE
                INV(I, K) = B(I, K)
            END IF
        NEXT
    NEXT
NEXT
```

```

        NEXT
    NEXT
    Promat INV(), A(), N, N, N, N, B()
LOOP
IF TR = 0 THEN
    PRINT "SISTEMA INCOMPATIBLE"
    STOP
END IF
FOR I = 1 TO N
    FOR J = 1 TO N
        INV(I, J) = INV(I, J) / TR
    NEXT
NEXT
ERASE B
END SUB

'*****
SUB Kronecker (A#(), B#(), N1#, M1#, N2#, M2#, KR())
'*****
'***** CALCULA EL PRODUCTO KRONECKER DE DOS MATRICES *****
'*****
FOR I = 1 TO N1
    FOR J = 1 TO M1
        FOR K = 1 TO N2
            FOR L = 1 TO M2
                KR(N2*(I-1)+K,M2*(J-1)+L)=A(I,J)*B(K,L)
            NEXT
        NEXT
    NEXT
NEXT
END SUB

'*****
SUB Promat (A#(), C#(), N1#, M1#, N2#, M2#, D#())
'*****
'***** CALCULA EL PRODUCTO USUAL DE DOS MATRICES *****
'*****
FOR I = 1 TO N1

```



```
FOR J = 1 TO M2
  D(I, J) = 0
  FOR K = 1 TO M1
    D(I, J) = A(I, K) * C(K, J) + D(I, J)
  NEXT
NEXT
NEXT
END SUB

'*****
SUB Test (NumExog)
'*****
'***** ELECCION DE LOS CONTRASTES DE HIPOTESIS *****
'*****
OPEN "Paramet" FOR OUTPUT AS #3
PRINT "      Test sobre los parametros. "
PRINT
PRINT "      1.- Eleccion de los parametros"
PRINT "      2.- Automatico "
PRINT
DO
  INPUT "", Automatic$
LOOP UNTIL INSTR("12", Automatic$)
Automatic = VAL(Automatic$)
PRINT
IF Automatic = 1 THEN
  DO
    CLS
    DO
      INPUT "Numero de parametros a contrastar "; K
    LOOP UNTIL (K >= 0) AND (K <= NumExog + 1)
    IF K = 0 THEN EXIT DO
    PRINT #3, K
    FOR I = 1 TO K
      PRINT "Posicion del "; I; "-esimo parametro ";
    DO
      INPUT Lugar
```

```

        LOOP UNTIL (Lugar > 0) AND (Lugar <= NumExog + 1)
        PRINT #3, Lugar
    NEXT
LOOP
ELSE
    DIM VPos(NumExog + 1)
    VGrupo = 0
    DO
        VGrupo = VGrupo + 1
        VCont = 0
        C# = 1
        M = NumExog + 1
        N = VGrupo
        IF M > N / 2 THEN N = M - N
        FOR I = 1 TO N
            C# = C# * (M - I + 1) / I
        NEXT
        VComb = C#
        Inicia NumExog + 1, VGrupo, 1, VPos()
        DO
            VCont = VCont + 1
            PRINT #3, VGrupo
            FOR VCont2 = 1 TO NumExog + 1
                IF VPos(VCont2) > 0 THEN PRINT #3, VPos(VCont2)
            NEXT
            Modifica NumExog + 1, VGrupo, VPos()
        LOOP UNTIL VCont = VComb
    LOOP UNTIL VGrupo = NumExog + 1
END IF
CLOSE
END SUB

'*****
SUB Trans (A#(), N1#, M1#, TRA#())
'*****
'***** CALCULA LA TRASPUESTA DE UNA MATRIZ DADA *****
'*****

```

```
FOR I = 1 TO N1
  FOR J = 1 TO M1
    TRA(J, I) = A(I, J)
  NEXT
NEXT
END SUB

'*****
SUB Transforma (Datos(), Casos, Variables%)
'*****
'***** TRANSFORMACIONES DE LOS DATOS *****
'*****
IF Casos > 10 THEN
  Ver = 10
ELSE
  Ver = Casos
END IF
DO
  CLS
  FOR J = 1 TO Variables%
    PRINT USING "  ##  "; J;
  NEXT
  PRINT
  PRINT STRING$(70, "*")
  FOR I = 0 TO Ver
    FOR J = 1 TO Variables%
      PRINT USING "#####.## "; Datos(I, J);
    NEXT
    PRINT
  NEXT
  PRINT STRING$(70, "*")
DO
  PRINT "Variable a transformar (0=Fin) ";
  INPUT Elegida
LOOP UNTIL Elegida >= 0 AND Elegida <= Variables%
IF Elegida = 0 THEN EXIT DO
DO
```

```

PRINT "    +    Sumar un numero"
PRINT "    *    Multiplicar por un numero"
PRINT "    L    Calcular el logaritmo"
PRINT "    D    Diferenciar una variable"
Transf$ = UCASE$(INPUT$(1))
SELECT CASE Transf$
  CASE "+"
    INPUT "Numero a sumar ", Suma
    FOR I = 0 TO Casos - 1
      Datos(I, Elegida) = Datos(I, Elegida) + Suma
    NEXT
  CASE "*"
    INPUT "Numero a multiplicar ", Producto
    FOR I = 0 TO Casos - 1
      Datos(I, Elegida) = Datos(I, Elegida) * Producto
    NEXT
  CASE "L"
    FOR I = 0 TO Casos - 1
      Datos(I, Elegida) = LOG(Datos(I, Elegida))
    NEXT
  CASE "D"
    FOR I = Casos - 1 TO 1 STEP -1
      Datos(I,Elegida)=Datos(I,Elegida)-Datos(I-1,Elegida)
      Datos(I,Elegida)=Datos(I,Elegida)/Datos(I-1,Elegida)
    NEXT
    Datos(0, Elegida) = 0
END SELECT
EXIT DO
LOOP
LOOP
END SUB

'*****
SUB Traza (B#(), N#, TR#)
'*****
'***** CALCULA LA TRAZA DE UNA MATRIZ DADA *****
'*****

```

```

TR = 0
FOR I = 1 TO N
    TR = TR + B(I, I)
NEXT
END SUB

```

## 2 Inferencia en el proceso de Ornstein-Uhlenbeck

El siguiente programa de ordenador consta de dos partes claramente diferenciadas: de una parte se realiza la simulación de una trayectoria para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck unidimensional con un factor exógeno ya comentado con anterioridad. Para ello se emplea el procedimiento propuesto por Rao y que se puede ver en el apéndice C. Por otra parte, se calcula la estimación de los parámetros del proceso, a partir de la trayectoria simulada anteriormente. Para realizar dicha inferencia se ha hecho uso del procedimiento de bisección a la hora de encontrar la solución de la ecuación de verosimilitud,

```

'*****
'***** DECLARACION DE SUBROUTINAS Y FUNCIONES *****
'*****
DECLARE SUB Calcula (Numero,Tiempo#(),Datos#(),F#,Total#,G#)
DEF FNSIG (A,B,C,D,F1)
    C0=C/D
    C1=(B-(A*C0^F1))^2
    C2=D-(C*(C0^(2*F1)))
    FNSIG=C1/C2
END DEF
DEF FNY1(C,D,F1)
    C0=C/D
    C1=(C0^(2*F1))*C*LOG(C0)
    C2=D-(C*(C0^(2*F1)))
    FNY1=C1/C2
END DEF
DEF FNY2(A,B,C,D,F1)
    C0=C/D

```

```

      C1=B-(A*C0^F1)
      C2=(A*D)-(B*C*((C0)^(F1)))
      C3=(D-(C*(C0^(2*F1))))^2
      FNY2=(C1*(C0^(F1))*LOG(C0)*C2)/C3
END DEF
DEFDBL A-Z
'*****
'***** SIMULACION DE LA TRAYECTORIA *****
'*****
CLS
INPUT "FICHERO DONDE ESTAN LOS VALORES NORMALES: ", File1$
INPUT "FICHERO DONDE SALVAR LA TRAYECTORIA      : ", File2$
INPUT "PASO: ", Paso
INPUT "THETA: ", F1
INPUT "DESV. TIPICA INFINITESIMAL: ", Var
INPUT "VALOR INICIAL: ", X0
INPUT "NUMERO DE DATOS: ", Numero
DIM Datos(Numero-1,3), Trayectoria(Numero)
Trayectoria(1)=X0
OPEN File1$ FOR INPUT AS 1
FOR K=1 TO Numero-1
  FOR J=1 TO 3
    INPUT #1, Datos(K,J)
  NEXT
NEXT
CLOSE 1
OPEN File2$ FOR OUTPUT AS 2
PRINT #2, 1,Trayectoria(1)
FOR I=2 TO Numero
  Tiempo=Paso*(I-1)+1
  Suma11=1-(F1*Paso/Tiempo)
  Suma12=((Paso*Paso*F1)/(2*Tiempo*Tiempo))*(1+F1)
  Suma1=(Suma11+ Suma12)
  Suma2=(Var*Datos(I-1,1))-((Var*F1/Tiempo)*Datos(I- 1,2))
  Trayectoria(I)=Trayectoria(I-1)*Suma1+Suma2
  PRINT #2, Tiempo,Trayectoria(I)
NEXT

```

```
CLOSE
'*****
'***** ESTIMACION DE LOS PARAMETROS *****
'*****
DIM Datos1(Numero), Tiempo(Numero)
OPEN File2$ FOR INPUT AS 1
FOR I=1 TO Numero
    INPUT #1, Tiempo(I)
    INPUT #1, Datos1(I)
NEXT
CLS
INPUT "VALOR INICIAL DE THETA:", F1
INPUT "INCREMENTO PARA HALLAR LA SOLUCION INICIAL: ", Paso
INPUT "NUMERO DE ITERACIONES TRAS LA SOLUCION INICIAL: ", Itera
Calcula Numero,Tiempo(),Datos1(),F1>Total,G1
Anterior=Total
DO
    F1=F1+Paso
    Calcula Numero,Tiempo(),Datos1(),F1>Total2,G1
    IF SGN>Total2<>SGN>Anterior THEN
        EXIT DO
    ELSE
        Anterior=Total2
    END IF
LOOP
H1=F1-Paso
H2=F1
EX1=Anterior
EX2=Total2
FOR I=1 TO Itera
    H=(H1+H2)/2
    Calcula Numero,Tiempo(),Datos1(),H>Total,G
    IF Total=0 THEN
        Theta=H
        Sigma=G
        EXIT FOR
    END IF
```

```
IF SGN(Total)<>SGN(EX1) THEN
  H2=H
  EX2=Total
END IF
IF SGN(Total)<>SGN(EX2) THEN
  H1=H
  EX1=Total
END IF
NEXT
CLS
Theta=H
Sigma=G
PRINT "THETA:", Theta
PRINT "SIGMA:", Sigma
'*****
'***** ITERACION EN EL METODO DE BISECCION *****
'*****
SUB Calcula (Numero,Tiempo(),Datos(),F,Total,S1)
Suma0=0
Suma1=0
Suma2=0
Suma3=0
Suma4=0
FOR I=2 TO Numero
  Suma1=Suma1+FNSIG(Datos(I-1),Datos(I),Tiempo(I-1),Tiempo(I),F)
  Suma2=Suma2+FNY1(Tiempo(I-1),Tiempo(I),F)
  Suma3=Suma3+FNY2(Datos(I-1),Datos(I),Tiempo(I-1),Tiempo(I),F)
NEXT
S1=((2*F+1)/(Numero-1))*Suma1
S2=Suma2
S3=((2*F+1)/S1)*Suma3
Total=S2+S3

END SUB
```





## BIBLIOGRAFIA

- [1] Anderson T.W. (1984). *An introduction to Multivariate Statistical Analysis*, John Wiley & Sons.
- [2] Arnold, L. (1973). *Stochastic differential equations*, John Wiley & Sons.
- [3] Barnes, E.W. (1899). The theory of the gamma function, *Messenger of Mathematics*, **29**, 64-129.
- [4] Basawa I.V., Prakasa Rao B.L.S. (1980). *Statistical Inference for Stochastic Processes*. Academic Press.
- [5] Box, G.E.P. (1949). A general distribution theory for a class of likelihood criteria. *Biometrika*. **36**, 317-346.
- [6] Buonocore A., Nobile, A.G. y Ricciardi, L. (1987). A new integral equation for the evaluation of first-passage-time probability densities. *Adv. Appl. Prob.*, **19**, 784-800.
- [7] Breiman, L. (1968). *Probability*. Addison-Wesley.
- [8] Brown, B.M. y Hewitt, J.I. (1975). Asymptotic likelihood theory for diffusion processes. *J. Appl. Prob.*, **12**(12), 228-238.
- [9] Cherkasov, I.D. (1957). On the transformation of the diffusion process to a Wiener process. *Theory Probab. Its Appl.*, **2**, 373-377.
- [10] Cox, D.R. y Miller, H.D. (1965). *The theory of Stochastic processes*. Wiley.
- [11] Crescenzo, A., Giorno, V. Nobile, A.G. y Ricciardi, L.M. (1990). Some preliminary results on first crossing time densities for two-dimensional diffusion processes. *Cibernetics and System's 90. (Trappl. R. ed.)*, 427-433. World Scientific. Singapore.

- [12] Doob, J.F. (1953). *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons.
- [13] Dunn, J.E. y Gipson, P.S. (1977). Analysis of Radio Telemetry Data in studies of Home Range. *Biometrics*, **33**, 85-101.
- [14] Dunn J.E., Brisbin I.L. (1985). Characterizations of multivariate Ornstein-Uhlenbeck diffusion process in the context of home range analysis, en *Statistical Theory and Data Analysis*, Matusita K. ed., 181-205, North-Holland.
- [15] Durbin, J. (1971). Boundary crossing probabilities for Brownian motion and Poisson processes and techniques for computing the power of the Kolmogorov-Smirnov test. *J. Appl. Prob.*, **8**, 431-453.
- [16] Fortet, R. (1943). Les fonctions aléatoires du type de Markoff associées à certaines équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique. *J. Math. Pures Appl.*, **22**, 177-243.
- [17] García, J., Gutiérrez, R. y Hermoso, A. (1986). Estimación del coeficiente tendencia de un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con factores exógenos. *Cuadernos de Estadística.*, **10**, 13-19.
- [18] Giorno, V., Nobile, A.G. y Ricciardi, L. (1988). A new approach to the construction of first-passage-time densities. *Cibernetics and Sysytems*, **88**, 375-381.
- [19] Giorno, V., Nobile, A.G., Ricciardi, L. y Sato, S. (1989). On the evaluation of first-passage-time probability densities via non singular integral equations. *Adv. Appl. Prob.*, **21**, 20-36.
- [20] Gutiérrez R. (1981). Inferencia en los procesos de difusión logarítmico-normales multidimensionales con factores exógenos. *Cuadernos de Estadística*, **6**, 6-15.
- [21] Gutiérrez, R., Hermoso, A. y Molina, M. (1986). On the estimation of the drift coefficient in randomly stopped diffusion processes. *Trabajos de Estadística*, **1(2)**, 57-66.
- [22] Gutiérrez, R., Hermoso, A, y Molina, M. (1984). Test de razón de verosimilitudes para contrastes de hipótesis sobre el coeficiente tendencia en procesos logarítmico-normales multidimensionales con factores exógenos. *Cuadernos de Estadística*, **7-8**, 129-136.

- [23] Gutiérrez R., Angulo J.M., González A., Pérez R. (1991). Inference in log-normal multidimensional diffusion processes with exogenous factors: application to modelling in economics. *Applied Stochastics Models and Data Analysis*, **7**(4), 293-316.
- [24] Gutiérrez, R., De Juan, A. y Román, P. (1991). Construction of first-passage-time densities for a diffusion process which is not necessarily time-homogeneous. *J. Appl. Prob.*, **28**, 903-909.
- [25] Harvey A.C. (1984). Time Series Forecasting Based on the Logistic Curve. *Journal Operational Research Society*, **35**, 641-646.
- [26] Hermoso, A. (1984). Test de hipótesis sobre el coeficiente tendencia de un proceso de difusión multidimensional. Aplicación al proceso logarítmico-normal con factores exógenos. *Tesis Doctoral*, Univ. Granada.
- [27] Iglehardt, D.L. (1968). Limit theorems for the multi-urn Ehrenfest model. *Ann. Math. Statist.*, **39**, 864-876.
- [28] Karlin, S. y McGregor, J.L. (1965). Ehrenfest urn models. *J. Appl. Prob.*, **2**, 352-376.
- [29] Magnus J.R., Neudecker H. (1988). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley & Sons.
- [30] Mar-Molinero C. (1980). Tractors in Spain: a Logistic Analysis. *Journal Operational Research Society*, **31**, 141-152.
- [31] Meade N. (1985). Forecasting Using Growth Curves - An Adaptive Approach. *Journal Operational Research Society*, **36**, 1103-1115.
- [32] Molina, M. (1984). Estimación del coeficiente tendencia de un proceso de difusión multidimensional. Aplicación al proceso logarítmico normal con factores exógenos. *Tesis Doctoral*, Univ. Granada.
- [33] Muirhead R.J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons.
- [34] Nel D.G. (1980). On matrix differentiation in statistics, *South African Statistics Journal*, **14**, 137-193.

- [35] Nobile, A.G., Ricciardi, L. y Sacerdote, L. (1985). A note on first-passage-time and some related problems. *J. Appl. Prob.*, **22**, 346-359.
- [36] Oliver F.R. (1981). Tractors in Spain: a Further Logistic Analysis. *Journal Operational Research Society*, **32**, 499-502.
- [37] Oliver R.M. (1987). A Bayesian Model to Predict Saturation and Logistic Growth. *Journal Operational Research Society*, **38**, 49-56.
- [38] Park, C. y Paranjape, S. R. (1974). Probabilities of Wiener paths crossing differentiable curves. *Pacific J. Math.*, **53**, 579-583.
- [39] Rao, N.J., Borwankar, J.D. y Ramkrishna, D. (1974). Numerical solution of Itô Integral Equations, *SIAM J. Control*, **12(1)**, 124-139.
- [40] Ricciardi, L. (1976). On the transformation of diffusion processes into the Wiener Process. *J. Math. Anal. Appl.*, **54**, 185-199.
- [41] Ricciardi, L. (1977). *Diffusion Processes and Related Topics in Biology*. Lectures notes in Biomathematics. **14**, Springer Verlag.
- [42] Ricciardi, L. y Sato, S. (1983). A note on the evaluation of first-passage-time probability densities. *J. Appl. Prob.*, **20**, 197-201.
- [43] Ricciardi, L., Sacerdote, L. y Sato, S. (1984). On an integral equation for first-passage-time probability densities. *J. Appl. Prob.*, **21**, 302-314.
- [44] Rogers, S. (1980). Matrix Derivatives. *Lecture notes in Statistics*. Vol 2.
- [45] Román, P. (1988). Sobre difusiones Ornstein-Uhlenbeck multidimensionales y transformadas del Wiener. Aplicaciones a la ecología. *Tesis Doctoral*, Universidad de Granada.
- [46] Sato, S. (1977). Evaluation of the first passage time probability to a square root boundary for the Wiener process. *J. Appl. Prob.*, **14**, 850-866.
- [47] Schach, S. (1971). Weak convergence results for a class of multivariate Markov processes. *Ann. Math. Stat.*, **42(2)**, 451-465.
- [48] Shepp, L. A. (1966). Radom-Nikodym derivatives of Gaussian measures. *Ann. Math. Stat*, **37**, 321-354.

- 
- [49] Taraskin, A.F. (1974). On the asymptotic normality of vector-valued stochastic integrals and estimates of a multidimensional diffusion process. *Theory Prob. Math. Stat.*, **2**, 209-224.
- [50] Tintner G., Gómez G.L. (1979). Aplicación de los procesos de difusión a la planificación del desarrollo económico. Un ejemplo ilustrativo (Colombia). *Trabajos de Estadística*, **30(2)**, 33-55.
- [51] Tintner G., Narayanan R. (1966). A multidimensional stochastic process for the explanation of economic development. *Metrika*, **11**, 85-90.
- [52] Tintner G., Sengupta J.K. (1972). *Stochastics Economics*. Academic Press.
- [53] Tracy, D.S. y Dwyer, P.S. (1969). Multivariate maxima and minima with matrix derivatives. *Journal of the American Statistical Association*, **64**, 1576-1594.

