SEMIGRUPOS NUMÉRICOS

Por

José Carlos Rosales González

Departamento de Algebra.
Facultad de Ciencias.
Universidad de Granada.

Memoria realizada para optar al grado de
Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas.
Realizada bajo la dirección del Profesor
Dr. D. Enrique R. Aznar García.

E. Aznar

A mi padre

INDICE

INTRODUCCION

¿Para que valores de a admite la ecuación

$$10x+14y+24z+28t+18s=a$$

solución en $\mathbb{N}$?

La misma pregunta cambiando $\mathbb{N}$ por $\mathbb{R}$ o por $\mathbb{Z}$ sería de respuesta inmediata. ¡Con $\mathbb{N}$ la cosa cambia!

Para resolver esta cuestión podrían seguirse los siguientes pasos:

i) Del problema originario pasaríamos al siguiente:

¿Para que valores de b admite la ecuación

$$5x + 7y + 12z + 14t + 9s = b$$

solución en $\mathbb{N}$?

Una vez resuelto este, bastará con multiplicar por dos los posibles valores de b, para obtener los valores de a.

ii) Puesto que $12 = 1\times5 + 1\times7$ y $14 = 2\times7$, el problema se vuelve a reducir a:

¿Para que valores de b admite la ecuación

$$5x + 7y + 9s = b$$

solución en $\mathbb{N}$?

iii) No vemos ya más simplificaciones, por lo que no nos queda más remedio que atacar este problema dando valores a x, y, s de forma ordenada. Obtenemos de esta manera que el conjunto de valores de b para los cuales la ecuación $5x + 7y + 9s = b$ tiene solución en $\mathbb{N}$ es $\{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, \ldots\}$.

Pues bien, acabamos así de construir el semigrupo numérico con generadores minimáles 5, 7 y 9.

Un *semigrupo numerico* no es más que un subconjunto de números naturales que contiene al cero, que es cerrado para la suma y para el cual existe un conjunto minimal de generadores con máximo común divisor uno (estos semigrupos clasifican, salvo isomorfismo, todos los semigrupos de $\mathbb{N}$). Nuestro objetivo -a grandes rasgos- en esta memoria será hacer un estudio de estos semigrupos.

Todo semigrupo numérico S, con m generadores minimales, es isomorfo a un cociente de la forma $\mathbb{N}^m/\sigma$, donde σ es una congruencia en $\mathbb{N}^m$. Una *relacion minima* para S es un subconjunto δ de σ verificando:

1) Cualquier congruencia que contiene a δ contiene a σ.

2) El cardinal de δ es mínimo de entre todos los cardinales de los subconjuntos de σ que verifican 1).

Nos iniciamos en el tema tratando de dar respuesta a un problema muy concreto:

" Dado un semigrupo numérico ¿como construir una relación mínima para él? "

Dicho problema nos lo planteamos al leer el articulo [6] de Herzog. Con este artículo entramos en contacto con el concepto de relación mínima y vemos como ahí se resuelve la cuestión anterior para semigrupos con solo dos o tres generadores minimales.

Comezamos a consultar bibliografía y comprobamos:

a) Solo estaba resuelto el problema de encontrar relaciones mínimas para semigrupos numéricos muy especiales (libres, simétricos con 4 generadores minimales, etc.).

b) La mayoría de los resultados se probaban utilizando técnicas de teoria de anillos.

c) El problema estaba en manos de los estudiosos de Geometría Algebraica (que estudian los semigrupos numéricos para a partir de ellos extraer información de ciertas curvas).

Nosotros abordamos este tema desde un punto de vista puramente semigrupista. Estabamos convencidos que de tener solución un problema tan fácil de plantear, a esta se debería de llegar sin necesidad de utilizar herramientas que no surjan de manera espontanea de los conceptos de relación y semigrupo.

Con esta mentalidad, interpretando y reinterpretando la definición de relación mínima para un semigrupo numérico, llegamos a vislumbrar la manera de elegir los elementos de una relación binaria para que esta fuese mínima. Luego, tan solo tubimos que introducir algo de teoría de grafos para clarificar las ideas y demostraciones. Fruto de todo esto es el capítulo 1, en el que describimos un método algorítmico para determinar una relación mínima para un semigrupo numérico arbitrario. Más aún caracterizamos todas las relaciones mínimas para él.

Sea S un semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0, n_1, \ldots, n_p\}$, la idea de dicho algoritmo, consiste en asociar a cada elemento $n\in S$ un grafo $G_n=(V_n,E_n)$, donde $V_n=\{n_i \ / \ n-n_i\in S\}$ y $\overline{n_i n_j}\in E_n \Leftrightarrow n-(n_i+n_j)\in S$. Para obtener una relación mínima para S, basta fijarse solo en aquellos G_n no conexos (de los cuales hay un número finito) y construir distintas expresiones de n utilizando en cada una de ellas los generadores de una de las componentes conexas.

Una vez resuelto el problema que dio origen a nuestro trabajo, y teniendo caracterizados los elementos de las relaciones mínimas, la siguiente cuestión nos venía casi obligada:

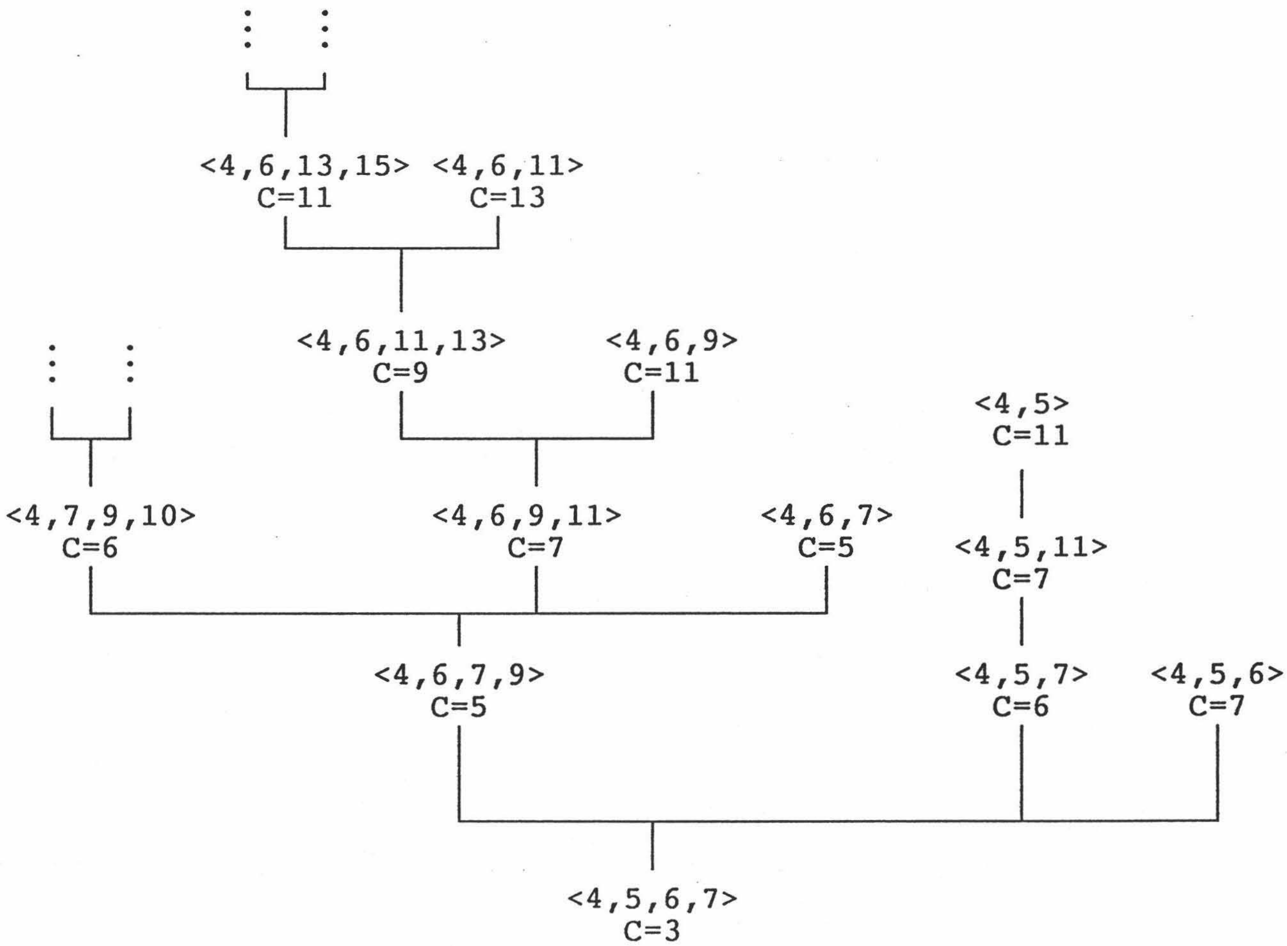
" Dado un semigrupo numérico acotar (y si fuese posible determinar) el cardinal de una relación mínima para él, en función de sus generadores minimales".

Sabíamos, por [6], que el cardinal de una relación mínima para un semigrupo numérico S (#{RMS}) con n generadores minimales está acotado inferiormente por n-1 (dicha cota es alcanzable, siendo los semigrupos *interseccion completa* los que la alcanzan), así como que dicho cardinal no puede ser acotado superiormente en función de n.

Por otro lado, nuestro método para calcular una relación mínima nos sugería -de modo inmediato- una cota superior para el cardinal de esta, en función de un generador minimal y del número de estos. El capítulo 2 surge al refinar esta cota, estableciendose en él que $\#\{RMS\} \leq \frac{(2n_0-p)(p-1)}{2} + 1$.

Como mencionamos anteriormente, los semigrupos numéricos son muy estudiados en Geometría Algebraica para obtener propíedades de ciertas curvas, de ahí que en la bibliografía a n_0 se le suele llamar multiplicidad y a p+1 dimensión de inmersión. Puesto que nuestro trabajo es puramente semigrupista, hemos preferido referirnos a estos terminos, como mínimo generador minimal y número de generadores minimales respectivamente.

En el estudio del problema anterior, nos dimos cuenta que si S era un semigrupo numérico y C su *conductor* (i.e. el máximo número natural no perteneciente al semigrupo), entonces el conjunto $\bar{S} = S \cup \{C\}$ es también un semigrupo numérico muy parecido a S, en el sentido de que se diferencian en tan solo un elemento. ¿Ocurriría igual con sus relaciones mínimas?, esto es ¿se diferenciarían estas también en tan solo un elemento?. La respuesta a esta pregunta dio origen al capítulo 3. En este veremos como a partir de una relación mínima para S podemos construir fácilmente una para $\bar{S}$, diferenciandose estas tan solo en unos pocos elementos que además caracterizamos. Este estudio nos permitirá ordenar y representar mediante un árbol al conjunto de todos los semigrupos numéricos que tienen como "mínimo generador minimal" a un mismo número natural.



Al avanzar por las ramas de este árbol encontramos semigrupos que tienen mayor conductor, mientras que el número de elementos de sus relaciones mínimas y de sus conjuntos de generadores minimales van decreciendo (aunque no estrictamente).

Damos también en este capítulo una nueva cota superior para el cardinal de una relación mínima de un semigrupo numérico (no comparable con la obtenida en el capítulo anterior):

$$\#\{RMS\} \leq \frac{n_0(n_0-5)}{2} + 2(p+1) = \frac{n_0(n_0-1)}{2} - 2(n_0-1-p).$$

Reformulamos dicha cota de dos maneras, la primera para separar la aportación a la cota de la multiplicidad y de la dimensión de inmersión, la segunda y puesto que siempre $n_0-1-p \geq 0$, para deducir inmediatamente que $\#\{RMS\} \leq \frac{n_0(n_0-1)}{2}$. Observese que los semigrupos numéricos que alcanzan esta última cota, verifican que el número de elementos de sus relaciones mínmas es máximo de entre todos los que tienen el mismo mínimo generador minimal. A estos semigrupos los llamaremos *relacionalmente maximos* y serán el tema de estudio del capítulo 4, del cual destacamos los siguientes resultados:

-) Un semigrupo es relacionalmente máximo si, y solo si, su número de generadores minimales coincide con su mínimo generador minimal.

-) Se tiene de forma explícita una relación mínima para este tipo de semigrupos.

-) Existe una correspondencia biyectiva entre los semigrupos numéricos con conductor C y mínimo generador minimal m, y los semigrupos relacionalmente máximos con conductor C+m, mínimo generador minimal m y con los demás generadores minimales mayores que 2m.

-)Un semigrupo numérico con n generadores minimales se puede expresar como suma de n semigrupos relacionalmente máximos.

$$\#\{RMS\} \leq \frac{n_0(n_0-1)}{2}$$

ó

#{RMS} máximo

ó

$p+1=n_0$

ó

p+1 máximo

Semigrupos Numéricos $\longrightarrow$ Semigrupos Relacional. Máximos

Semigrupos Numéricos $\longleftarrow$ Semigrupos Relacional. Máximos

Teorema de generación para la suma.

La interpretación geométrica de los semigrupos relacionalmente máximos hay que buscarla en los semigrupos Arf, dichos semigrupos fueron introducidos por Lipman en [11] y han sido abundantemente tratados en la literatura.

A continuación estudiamos un tipo de semigrupos numéricos que aparecen con especial insistencia en la bibliografía, los *semigrupos simetricos*, debido fundamentalmente a los resultados obtenidos a partir de ellos en Geometría Algebraica. Digamos al respecto que los semigrupos simétricos geométricamente significan curvas Gorenstein, un artículo de Bass [12], da carta de naturaleza a la noción Gorenstein. Kunz [13] demostró que una curva es Gorenstein si, y solamente si, su semigrupo asociado es simétrico.

Desde el punto de vista puramente semigrupista estos semigrupos tienen también una gran importancia, sirva como ejemplo de esta las dos caracterizaciones siguientes:

1) Un semigrupo numérico S con conductor C es simétrico si, y solo si,

$$x \in S \Leftrightarrow C-x \notin S,$$

para todo $x \in \mathbb{N}$.

2) Un semigrupo numérico S, con conductor C impar, es +270Xsimétrico si, y solo si, S es maximal respecto de la inclusión el conjunto de todos los semigrupos numéricos con conductor C.

Como ya hemos mencionado anteriormente, el cardinal de una relación mínima para un semigrupo numérico arbitrario no puede ser acotado superiormente en función del número de generadores minimales de este. Este resultado fue probado por Bresinsky en [7], para lo cual muestra una familia de semigrupos numéricos con 4 generadores minimales y con los cardinales de sus relaciones mínimas arbitrariamente grandes. Sin embargo, el propio Bresinsky prueba en [9] que el cardinal de una relación mínima para un semigrupo simétrico con 4 generadores minimales es 3 ó 5. Estos resultados le hicieron conjeturar que posiblemente el cardinal de una relación mínima para un semigrupo simétrico arbitrario si se pueda acotar superiormente, en función de su número de generadores minimales.

Ante este panorama, no podíamos pasar por alto los semigrupos simétricos. El capítulo 5 está dedicado a ellos.

Por un lado, probamos que un semigrupo simétrico con mínimo generador minimal m tiene a lo sumo m-1 generadores minimales. Esto nos lleva a definir los semigrupos *totalmente simetricos* como aquellos semigrupos simétricos que alcanzan dicha cota. Estudiamos estos semigrupos y obtenemos entre otros los siguientes resultados, que guardan un sorprendente paralelismo con los obtenidos al estudiar los semigrupos relacionalmente máximos:

-) Existe una correspondencia biyectiva entre los semigrupos simétricos con conductor C y mínimo generador minimal m, y los semigrupos totalmente simétricos con conductor C+2m, mínimo generador minimal m y con los demás generadores minimales mayores que 2m.

-) Un semigrupo simétrico con n generadores minimales se puede expresar como suma de n semigrupos totalmente simétricos.

-) Un semigrupo simétrico con mínimo generador minimal m es totalmente simétrico si, y solo si, el número de elementos de sus relaciones mínimas es máximo de entre todos aquellos semigrupos simétricos con mínimo generador minimal m.

-) Conocemos de forma explícita una relación mínima para este tipo de semigrupos.

$$\#\{RMS\} \leq \frac{n_0(n_0-3)}{2}$$

ó

#{RMS} máximo

ó

$$p+1=n_0-1$$

ó

p+1 máximo

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Semigrupos}\\ \text{Simétricos}\end{array}} \;\; \begin{array}{c}\xrightarrow{\hspace{6cm}}\\ \xleftarrow{\hspace{6cm}}\end{array} \;\; \boxed{\begin{array}{l}\text{Semigrupos}\\ \text{Totalmente}\\ \text{Simétricos}\end{array}}$$

Teorema de generación
para la suma.

Por otro lado, está nuetro empeño por responder a la conjetura de Bresinsky (cosa que aún no hemos logrado). Fruto de este empeño obtenemos algunos resultados, encaminados a la construcción de semigrupos simétricos, así como un refinamiento de la cota obtenida en el capítulo 3 en el caso en que el semigrupo sea simétrico. Digamos al respecto que si S es un semigrupo simétrico podemos asegurar que:

$$\#\{RMS\} \leq \frac{n_0(n_0-5)}{2} + (p+2) = \frac{n_0(n_0-3)}{2} + (p+2-n_0).$$

Terminamos este capítulo apoyando la conjetura de Bresinsky y reforzandola con una posible cota que surge fruto de nuestras experiencias.

En el capitulo 6, bajo el nombre de *pegadas y semipegadas*, estudiamos unos semigrupos numéricos S con la propiedad de que se pueden descomponer en dos subsemigrupos S_1 y S_2, de tal manera que una relación mínima para S se puede construir, uniendo una relación mínima para S_1, una relación mínima para S_2 y a lo sumo un elemento mas. Daremos también construcciones para obtener los semigrupos de este tipo.

Las descomposiciones y construcciones anteriores seran la clave del capítulo 7, en él estudiaremos los semigrupos intersección completa. En este capítulo, daremos un nueva demostracción del hecho mencionado anteriormente, de que, el cardinal de una relación mínima para un semigrupo numérico con n generadores minimales, está acotado inferiormente por n-1. Probaremos además que un semigrupo es intersección completa si, y solo si, es pegada de dos semigrupos intersección completa. Lo cual nos permite conocer perfectamente estos semigrupos y sus relaciones mínimas. Terminaremos el capítulo demostrando que todo semigrupo intersección completa es simétrico.

Nos parece ético aclarar, que una vez terminado nuestro trabajo, fue cuando tuvimos conocimiento de la existencia del articulo de Delorme [14]. Una vez estudiado dicho artículo, debemos confesar que lo referido en los capítulos 6 y 7 no es tan novedoso como nosotros esperábamos. Digamos al respecto que en [14] se se demuestra lo siguiente:

Si S_1 y S_2 son dos semigrupos numéricos, $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$ primos entre sí. Entonces el semigrupo numérico $a_1S_1+a_2S_2$ es intersección completa si, y solamente si, S_1 y S_2 lo son.

Este resultado, le permite dar una una caracterización recursiva de los semigrupos intersección completa, así como su construcción sistemática por medio de sus generadores minimales.

En el presente trabajo, nosotros analizamos detalladamente la construcción anterior para el caso en que S_1 y S_2 son semigrupos numéricos arbitrarios, dando de forma explicita una relación mínima para $a_1S_1+a_2S_2$ a partir de una relación mínima para S_1 y S_2. Este estudio mas general y detallado, nos permite obtener los resultados anteriores de forma inmediata.

Añadamos, que aunque algunos de nuestros resultados aparecen enunciados por Delorme en forma parecida, sus demostracciones se apoyan, en la versión equivalente de relación mínima que consiste en mirarla como los generadores minimales de un determinado ideal del anillo de polinomios en varias indeterminadas y con coeficientes en un cuerpo. En este sentido, nos gustaría calificar nuestro trabajo de autosuficiente, pues parte de unos mínimos elementales y cada resultado que se obtiene es consecuencia de los anteriores.

Puesto que en el presente trabajo hemos intentado narrar los resultados, ciñendonos a nuestro camino seguido en la investigación - creemos que de esta forma se consique una gran naturalidad en la exposición - y para que no sorprenda al lector, advertimos que en los capítulos 6 y 7 no mencionaremos a Delorme. Esperando que esta introducción sirva como constatación de su presencia en el tema.

Para terminar este apartado, comentemos que el resultado "intersección completa $\Rightarrow$ simétrico", puede atribuirse a Kunz, pues como hemos mencionado anteriormente, demostro que Gorenstein $\Leftrightarrow$ simétrico, y es un resultado clásico de Algebra Conmutativa que intersección completa $\Rightarrow$ Gorenstein.

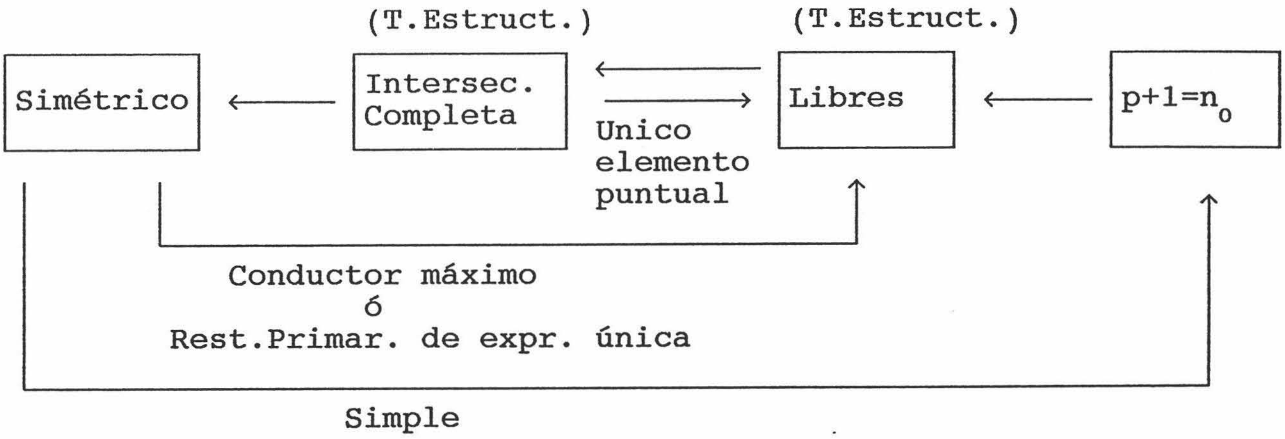
Como una clase distinguida dentro de los semigrupos intersección completa, encontramos a los semigrupos *libres*. La fuerza de su definición ha hecho que de estos se tenga una gran información (se conoce su conductor, sus relaciones mínimas, etc.). Nosotros estudiamos estos semigrupos en el capítulo 8, en el que damos de ellos un gran número de caracterizaciones en función de sus generadores minimales, de sus relaciones mínimas, de su conductor, de sus elementos puntuales, de sus restos primarios, etc...

En el capítulo 1, a cada elemento de un semigrupo numérico, le asociabamos un grafo y veíamos como los elementos de una relación mínima para dicho semigrupo estaban intimamente ligados con los elementos del semigrupo cuyo grafo fuese no conexo.

Comenzaremos el capítulo 9 dando, para cada semigrupo numérico, una familia de elementos suyos, cuyos correspondientes grafos son no conexos. Veremos que estos son todos los elementos con grafo no conexo en el caso en que el semigrupo verifique la propiedad de que los *restos primarios* de un generador minimal tengan expresión única (i.e. estos se pueden escribir de forma única como suma de múltiplos de los generadores minimales).

En este capítulo 9, probaremos que un semigrupo simétrico con conductor C y mínimo generador minimal m, que verifique además la condición de que C+m tenga expresión única, es un semigrupo libre. Terminaremos el capítulo estudiando un tipo de semigrupos a los que llamaremos *simples* (y que engloban entre otros a los relacionalmente máximos y a los semigrupos con solo dos generadores minimales) y para los cuales es muy fácil de determinar una relación mínima. Veremos que la clase de los semigrupos simétricos que además son simples, esta constituida por los semigrupos numéricos con tan solo dos generadores minimales.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Semigrup}\\\text{Numérico}\end{array}} \xrightarrow[\substack{p+1=2\\ \text{ó}\\ p+1=n_0}]{} \boxed{\text{Simples}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Rest.Prim}\\\text{Exp.Unica}\end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Minimal numero}\\\text{graf. no conexo}\end{array}}$$



Es claro, de lo expuesto hasta aquí, el interés de estudiar el conjunto "$\mathscr{S}(m,C)$" de los semigrupos numéricos con conductor C y mínimo generador minimal m. Al comienzo de nuestro estudio sobre estos conjuntos, nos dedicamos a examinar los casos más sencillos:

-) $C = m-1$.

En este caso $\mathscr{S}(m,C)$ es un conjunto unitario, cuyo único elemento es el semigrupo $< m, m+1, \dots , m+(m-1) >$.

-) $C = m+i$, con $1 \le i \le m-1$.

En este caso, comprobamos que

$$\mathscr{S}(m,C) = \left\{ <m,C+1,C+2, \dots ,C+m> \cup B \ / \ B \subseteq \{m+1,\dots,m+i-1\} \right\}$$

y que por tanto $\mathscr{S}(m,C)$ es cerrado para la unión y la intersección. Más aún, se tiene que $\left(\mathscr{S}(m,C), \cup, \cap \right)$ es isomorfo al álgebra de Boole de las partes del conjunto $\{m+1,\dots,m+i-1\}$.

$\mathscr{S}(7,11)$:

$$\begin{tikzcd}
 & SU\{8,9,10\} & \\
SU\{8,9\} \arrow[ur] & SU\{8,10\} \arrow[u] & SU\{9,10\} \arrow[ul] \\
SU\{8\} \arrow[u] \arrow[ur] & SU\{9\} \arrow[ul] \arrow[ur] & SU\{10\} \arrow[u] \arrow[ul] \\
 & S=\langle 7,12,13,15,16,17,18\rangle \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Nuestro siguiente paso fue estudiar el caso en que $C>2m$, aquí $\mathscr{S}(m,C)$ pierde tan maravillosa estructura. Este conjunto seguirá siendo cerrado para la intersección pero no para unión. A pesar de ello veremos que existen subconjuntos de $\mathscr{S}(m,C)$ que se siguen comportando bien respecto de la unión e intersección. Nuestros resultados a este respecto estan recogidos en el capítulo 10. En este capítulo construimos una partición de $\mathscr{S}(m,C)$, de manera que los elementos de dicha partición son retículos distributivos respecto a la unión y la intersección.

Veremos como los máximos de dichas particiones son justamente los elementos maximales de $\mathscr{S}(m,C)$, mientras que los mínimos de estas serán caracterizados como aquellos semigrupos que no tienen generadores minimales en el intervalo abierto $]C/2,C[$. También veremos como conocidos los elementos mínimos (máximos) de estas particiones, es fácil determinar los máximos (mínimos). Así como que conocidos los máximos o los mínimos de estas particiones podemos calcular rapidamente todos los elementos de $\mathscr{S}(m,C)$.

Terminamos el capítulo con algunos resultados sobre los elementos maximales de $\mathscr{S}(m,C)$, mostraremos como todos estos elementos máximales pueden ser construidos a partir de uno (que daremos de forma explícita) al que llamaremos semigrupo *maximal canonica*.

$\mathscr{S}(5,13)$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathscr{A}_1 & & \mathscr{A}_2 \\
 & & S_1\cup\{7,9,11,12\} & & S_2\cup\{9\} \\
 & S_1\cup\{9,11,12\} \arrow[ur] & S_1\cup\{7,9,12\} \arrow[u] & S_1\cup\{7,11,12\} \arrow[ul] & S_2=\langle 5,6,14\rangle \arrow[u] \\
S_1\cup\{9,11\} \arrow[ur] & S_1\cup\{9,12\} \arrow[u] \arrow[ur] & S_1\cup\{11,12\} \arrow[ul] \arrow[ur] & S_1\cup\{12,7\} \arrow[u] \arrow[ul] & \\
S_1\cup\{9\} \arrow[u] \arrow[ur] & S_1\cup\{11\} \arrow[ul] \arrow[ur] & S_1\cup\{12\} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & & \\
 & S_1=\langle 5,14,16,17,18\rangle \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Si analizamos el ejemplo anterior, vemos que solo existen dos semigrupos numéricos S_1 y S_2 que no contienen generadores miniales en el intervalo$]C/2,C[$, por tanto la partición de $\mathscr{S}(5,13)$ consta de dos elementos $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$, siendo S_1 y S_2 los mínimos y $S_1\cup\{7,9,11,12\}$ y $S_2\cup\{9\}$ los máximos de dichos elementos.

Para finalizar, nos gustaría recomendar este trabajo a tres tipos de lectores:

1) A los que quieren iniciarse en el tema, puesto que los conocimientos previos para entender el trabajo son mínimos y obtendrán una visión bastante precisa de la situación.

2) A los que han intentado anteriormente introducirse en el tema y no han quedado convencidos de la necesidad de utilizar

anillos de polinomios para estudiar estructuras mas elementales. Nosotros les prometemos que en ningun momento nos salimos del ambito de los semigrupos numéricos.

3) A los ya introducidos en el tema, además de los resultados novedosos y de los problemas de investigación que les pueda sugerir, creemos que este trabajo en su conjunto les aportará una nueva técnica clara y alternativa para atacar sus problemas.

DEFINICION 0.1

Sea F un semigrupo libre, conmutativo y finitamente generado. Un subconjunto σ de FxF -i.e. una relación binaria en F- se dice una congruencia sobre F si verifica:

1.- σ es una relación de equivalencia.

2.- Si $(v,v')\in \sigma$ y $w\in F$, entonces $(v+w,v'+w)\in \sigma$.

Escribiremos $v\ \sigma\ v'$ cuando $(v,v')\in \sigma$.

La congruencia dada por el conjunto

$$\tau = \{\ (v,v)\in FxF\ /\ v\in F\ \}$$

es llamada congruencia trivial.

PROPOSICION 0.2

Para cualquier subconjunto δ de FxF, existe una nenor congruencia $\bar{\delta}$ que conteniene a δ. Esta congruencia $\bar{\delta}$ es construida en tres etapas:

1.- $\delta_*=\delta \cup \delta^{-1}\cup \tau$, donde $\delta^{-1}=\{\ (v',v)\in FxF\ /\ (v,v')\in \delta\ \}$,

2.- $\delta_1=\{\ (v+w,v'+w)\in FxF\ /\ (v,v')\in \delta_*$ y $w\in F\ \}$,

3.- $\bar{\delta}=\{\ (v,v')\in FxF\ /\ \exists\ v_0,v_1,\ldots,v_e; v_0=v, v_e=v'$ y $(v_i,v_{i+1})\in \delta_1,$
$\forall\ i \in \{0,1,\ldots,e-1\}\ \}$.■

DEFINICION 0.3

Diremos que un subconjunto δ de FxF genera una cogruencia σ sobre F, si $\bar{\delta} = \sigma$. Si además δ es finito diremos que σ es finitamente generada.□

En el capítulo 2, veremos una demostración directa de este último hecho.

DEFINICION 0.4

Un semigrupo conmutativo S se dice finitamente presentado si existe un semigrupo libre, conmutativo y finitamente generado, F, y una congruencia finitamente generada σ sobre F, con F/σ isomorfo a S. Donde F/σ denota el semigrupo cociente de F por la congruencia σ.□

Tenemos entonces:

PROPOSICION 0.5 (Ver [1] o [2]).

Todo semigrupo conmutativo y finitamente generado es finitamente presentado.■

DEFINICION 0.6

Sea F un semigrupo conmutativo, libre y finitamente generado, y σ una congruencia sobre F. Un subconjunto δ de FxF se llamara relación mínima para σ si verifica :

1.- $\bar{\delta}= \sigma$.

2.- δ tiene cardinal mínimo entre los subconjuntos de FxF que verifican 1.

SEMIGRUPOS NUMERICOS.

DEFINICION 0.7

Un semigrupo numérico es un subconjunto S de $\mathbb{N}$, que es cerrado para la suma, conteniene al cero y genera a $\mathbb{Z}$ como grupo.

DEFINICIONES Y PROPIEDADES 0.8

Sea S un semigrupo numérico.

1.- Puesto que S genera a $\mathbb{Z}$ como grupo y es cerrado para la suma, existen elementos u y v en S primos entre sí. Resultando asi que S admite un conductor C (i.e: un natural $C \notin S$ y tal que $C+n \in S \; \forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$).

2.- Un sistema de generadores de S es un conjunto finito de números naturales $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$, que verifica:

$$S=\sum_{i=0}^{p} n_i\mathbb{N} .$$

Un tal sistema se dice minimal si $n_j \notin \sum_{i\neq j} n_i\mathbb{N}$, $j = 0,1, \ldots,n$.

3.- Todo semigrupo numérico admite un único sistema minimal de generadores.

(La demostración de estas propiedades se puede ver en [3] y [4])

4.- Sea $\{ n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ un sistema minimal de generadores de S. Entonces S es un semigrupo conmutativo y finitamente generado y por tanto S es finitamente presentado. Una presentación finita de S puede ser obtenida como sigue:

Consideramos el homomorfismo de semigrupos $\varphi:\mathbb{N}^{p+1}\longrightarrow \mathbb{N}$, definido por:

$$\varphi(k_0,k_1,\ldots k_p)=\sum_{i=0}^{p} k_i n_i ,$$

sea σ la congruencia núcleo de φ, i.e.

$$(k_0,k_1,\ldots,k_p)\ \sigma\ (\bar{k}_0,\bar{k}_1,\ldots,\bar{k}_p)\Leftrightarrow\varphi(k_0,k_1,\ldots,k_p)=\varphi(\bar{k}_0,\bar{k}_1,\ldots\bar{k}_p).$$

Claramente $S \cong \mathbb{N}^{p+1}/\sigma$. □

DEFINICIONES 0.9

Un grafo G es un par (V,E) donde: $V=\{v_1,v_2, \ldots ,v_n\}$ es un conjunto finito de elementos que llamaremos vértices del grafo y E es un subconjunto del conjunto de todos los pares no ordenados de elementos distintos de V. Al par no ordenado $\{v_i,v_j\}$ lo denotaremos $\overline{v_i v_j}$ y si pertenece a E diremos que es un lado del grafo.

Una sucesión de m lados del grafo de la forma:

$$\overline{v_{i_0} v_{i_1}}, \overline{v_{i_1} v_{i_2}}, \ldots , \overline{v_{i_{m-1}} v_{i_m}}$$

se dice que es un camino de longitud m conectando los vértices v_{i_0} y v_{i_m}.

Un grafo se dice conexo si dados dos vertices cualesquiera suyos existe un camino que los conecta.□

PROPOSICION 0.10 (Ver [5]).

Un grafo conexo con n vertices tiene al menos n-1 lados.■

DEFINICION 0.11

Dados dos grafos G=(V,E) y G'=(V',E') diremos que G'es un subgrafo de G si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.□

DEFINICION 0.12

Un árbol generador para un grafo conexo G con n vértices es un subgrafo conexo suyo con n vértices y n-1 lados.□

CAPITULO 1

MÉTODO ALGORÍTMICO PARA EL CÁLCULO DE UNA RELACIÓN MÍNIMA.

En el desarrollo de este capítulo, S denotará un semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$, $\varphi:\mathbb{N}^{p+1}\longrightarrow \mathbb{N}$ será el morfismo de semigrupos definido por

$$\varphi(k_0,k_1,\ldots,k_p)=\sum_{i=0}^{p} k_i n_i$$

y σ la congruencia núcleo de φ. Se tiene entonces un isomorfismo de semigrupos $S \cong \mathbb{N}^{p+1}/\sigma$.

Daremos aquí un algoritmo que nos permite encontrar una relación mínima para σ. Este algoritmo nos dirá también como es cualquier relación mínima para σ.

<u>DEFINICION 1.1</u>

Dado $n \in \mathbb{N}$, denotaremos

$$[n]=\{\ (k_0,k_1,\ldots,k_p)\in \mathbb{N}^{p+1}/\varphi(k_0,k_1,\ldots,k_p)=n\ \}.$$

Definimos la siguiente relación R en $\mathbb{N}^{p+1}$:

Dados $\mathscr{k}=(k_0,k_1,\ldots,k_p)$ y $\bar{\mathscr{k}}=(\bar{k}_0,\bar{k}_1,\ldots,\bar{k}_p)$, dos elementos en $\mathbb{N}^{p+1}$, diremos que $\mathscr{k}$ está R-relacionado con $\bar{\mathscr{k}}$, $\mathscr{k}R\bar{\mathscr{k}}$, si y solo si:

$\mathscr{k} = \bar{\mathscr{k}} = 0$ ó

existen $n\in\mathbb{N}$ y elementos $(k_0^0,k_1^0,\ldots,k_p^0)$, ... ,$(k_0^e,k_1^e,\ldots,k_p^e)$ en $[n]$ tales que:

$$\mathscr{k} = (k_0^0,k_1^0,\ldots,k_p^0),$$
$$\bar{\mathscr{k}} = (k_0^e,k_1^e,\ldots,k_p^e) \quad \text{y}$$

$$k_0^i k_0^{i+1} + k_1^i k_1^{i+1} + \ldots + k_p^i k_p^{i+1} \neq 0, \quad \forall\ i \in \{ 0,1,\ldots,e-1 \}.$$

Claramente R es una relación de equivalencia en $\mathbb{N}^{p+1}$. A los elementos del conjunto cociente $\mathbb{N}^{p+1}/R$ los llamaremos R-clases y al número de R-clases contenidas en [n] lo denotaremos por NR[n]. Notemos que si dos elementos k y $\bar{k}$ estan en [n], entonces para todo $\delta \in \mathbb{N}^{p+1}$, tal que $\delta \neq (0, \ldots, 0)$, se verifica que $k+\delta$ está R-relacionado con $\bar{k}+\delta$.∎

DEFINICION 1.2

Sea X un conjunto, $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ una partición de X y γ una relación binaria en X. El grafo asociado a γ respecto de la partición $\mathcal{P}$ será $G_\gamma = (V,E)$, donde $V=\mathcal{P}$ y el lado $\overline{X_i X_j} \in E$, $i \neq j$, si y solo si existen $x \in X_i$ e $y \in X_j$ tales que $(x,y) \in \gamma \cup \gamma^{-1}$.∎

LEMA 1.3

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $X_1, X_2, \ldots, X_r$ las distintas R-clases contenidas en [n]. Si β es una relación binaria en $\mathbb{N}^{p+1}$ que genera a σ y denotamos $\beta_n = \beta \cap ([n] \times [n])$.

Tesis

El grafo G_{β_n}, asociado a β_n respecto de la partición $\{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ de [n], es conexo.

\- Demostración -

Sean $t,s \in \{1,2, \ldots, r\}$, $t \neq s$, veamos que existe en G_{β_n} un camino conectando los vértices X_t y X_s.

Tomemos $k \in X_t$ y $h \in X_s$, claramente $k \sigma h$ y como por hipótesis $\bar{\beta} = \sigma$, han de existir $b_0, b_1, \ldots, b_e \in \mathbb{N}^{p+1}$, que consideramos distintos (para evitar redundancias), tales que:

$$b_0=k,\ b_e=h \quad \text{y} \quad (b_i,b_{i+1})\in\beta_1,\ i = 0,1,\ \dots\ ,e-1.$$

Ahora bien $(b_i,b_{i+1})\in\beta_1$, $b_i\neq b_{i+1}$ y por tanto existen $(k_i,h_i)\in\beta\cup\beta^{-1}$ y $s_i\in\mathbb{N}^{p+1}$, tales que $(b_i,b_{i+1})=(k_i+s_i,h_i+s_i)$.

Tenemos entonces:

$$k= b_0 = k_0+s_0,$$

$$b_i= h_{i-1}+s_{i-1} = k_i+s_i\in[n]\ ,\ i =1,2,\ \dots\ ,e-1,$$

$$b_e =h_{e-1}+s_{e-1} = h.$$

Por último observese que:

a) Si $s_i\neq 0$ entonces $(h_i+s_i)R(k_i+s_i)$, por tanto $(h_i+s_i)R(h_{i-1}+s_{i-1})$ y asi b_i y b_{i+1} estan en la misma R-clase de [n].

b) Si $s_i= 0$ entonces $(b_i,b_{i+1})=(k_i,h_i)\in\beta_n\cup\beta_n^{-1}$.

Y como consecuencia, los elementos b_i con $s_i=0$ determinan un camino en G_{β_n} que conecta X_t con X_s.■

NOTACION

Denotaremos por NR[n] al número de R-clases de [n].

TEOREMA 1.4

Sea $n\in\mathbb{N}$ y NR[n]= r. Si $(a_0^1,a_1^1,\dots,a_p^1),\ \dots\ ,(a_0^r,a_1^r,\dots,a_p^r)\in[n]$ son representantes de cada una de las R-clases contenidas en [n], sea:

$\delta_n= \phi$ si $r \leq 1$ y

$\delta_n= \{\ ((a_0^1,a_1^1,\dots,a_p^1),(a_0^i,a_1^i,\dots,a_p^i))\in[n]x[n];\ i=2,\dots,r\ \}$, si $r\geq 2$

Tesis

La relación binaria $\delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \delta_n$ es una relación mínima para σ.

- Demostración -

1.- Veamos que $\bar{\delta} = \sigma$, lo cual reduce a demostrar que para todo número natural n:

$$\mathbf{k},\bar{\mathbf{k}}\in[n] \Rightarrow \mathbf{k}\bar{\delta}\bar{\mathbf{k}}.$$

Hacemos esta demostración por inducción sobre n:

Para $n = 0$, tenemos $[0] = \{ (0,0,...,0) \}$ y claramente

$$(0,0,...,0)\ \bar{\delta}\ (0,0,...,0).$$

Supongamos que el resultado es cierto para valores menores que n y demostrémoslo para n.

Si $n \notin S$, $[n]=\phi$ y por tanto el resultado ya estaría demostrado. Supongamos ahora que $n\in S$ y $\mathbf{k} = (k_0,k_1,...,k_p)$ y $\bar{\mathbf{k}} = (\bar{k}_0,\bar{k}_1,...,\bar{k}_p)$ son dos elementos en $[n]$. Pueden ocurrir dos casos :

i.- $\mathbf{k}R\bar{\mathbf{k}}$.

ii.- $\mathbf{k}\not R\bar{\mathbf{k}}$.

Supongamos que se da i). Entonces han de existir elementos

$$(k_0^0,k_1^0,...,k_p^0),\ ...\ ,(k_0^e,k_1^e,...,k_p^e) \in [n]$$

tales que:

$$\mathbf{k} = (k_0^0,k_1^0,...,k_p^0),$$
$$\bar{\mathbf{k}} = (k_0^e,k_1^e,...,k_p^e) \text{ y}$$
$$k_0^i k_0^{i+1}+k_1^i k_1^{i+1}+ \ ...\ +k_p^i k_p^{i+1}\neq 0, \qquad \forall\ i \in \{ 0,1,...,e-1 \}.$$

veamos que $(k_0^i,k_1^i,...,k_p^i)\ \bar{\delta}\ (k_0^{i+1},k_1^{i+1},...,k_p^{i+1})$:

Sea b_j= mínimo $\{k_j^i,k_j^{i+1}\}$, $j=0,1,\ ...\ ,p$. Puesto que

$$k_0^i k_0^{i+1}+k_1^i k_1^{i+1}+ \ ...\ +k_p^i k_p^{i+1}\neq 0,$$

se tiene $(b_0,b_1,...,b_p)\neq (0,\ ...\ ,0)$ ademas existen $(b_0^i,b_1^i,...,b_p^i)$ y $(b_0^{i+1},b_1^{i+1},...,b_p^{i+1})$ verificando:

$$(k_0^i,k_1^i,\ldots,k_p^i) = (b_0^i,b_1^i,\ldots,b_p^i)+(b_0,b_1,\ldots,b_p),$$

$$(k_0^{i+1},k_1^{i+1},\ldots,k_p^{i+1}) = (b_0^{i+1},b_1^{i+1},\ldots,b_p^{i+1})+(b_0,b_1,\ldots,b_p) \text{ y}$$

$$\varphi(b_0^i,b_1^i,\ldots,b_p^i) = \varphi(b_0^{i+1},b_1^{i+1},\ldots,b_p^{i+1}) = m \text{ con } m<n.$$

Aplicando la hipótesis de inducción tenemos

$$(b_0^i,b_1^i,\ldots,b_p^i)\bar{\delta}(b_0^{i+1},b_1^{i+1},\ldots,b_p^{i+1}),$$

y como $\bar{\delta}$ es una congruencia deducimos que

$$((b_0^i,b_1^i,\ldots,b_p^i)+(b_0,b_1,\ldots,b_p))\bar{\delta}((b_0^{i+1},b_1^{i+1},\ldots,b_p^{i+1})+(b_0,b_1,\ldots,b_p))$$

y así $(k_0^i,k_1^i,\ldots,k_p^i)\bar{\delta}(k_0^{i+1},k_1^{i+1},\ldots,k_p^{i+1})$, de donde, por la transitividad de $\bar{\delta}$, se tiene que $k\bar{\delta}\bar{k}$.

Supongamos ahora que se verifica ii). En este caso, $NR[n]\geq 2$ y entonces $\delta_n\neq\phi$. Supongamos $NR[n]=r$, recordemos que

$$\delta_n = \{ ((a_0^1,a_1^1,\ldots,a_p^1),(a_0^i,a_1^i,\ldots,a_p^i))\in[n]x[n];\ i=2,\ldots,r \}\subseteq \bar{\delta},$$

donde $(a_0^i,a_1^i,\ldots,a_p^i)$ era un representante de cada R-clase contenida en $[n]$. Existen por tanto $i,j \in \{1,\ldots,r\}$, $i\neq j$, verificando que :

$$k\ R\ (a_0^i,a_1^i,\ldots,a_p^i) \quad \text{y} \quad \bar{k}\ R\ (a_0^j,a_1^j,\ldots,a_p^j),$$

ahora, por i), tenemos que

$$k\ R\ (a_0^i,a_1^i,\ldots,a_p^i) \Rightarrow k\ \bar{\delta}\ (a_0^i,a_1^i,\ldots,a_p^i) \quad \text{y}$$

$$\bar{k}\ R\ (a_0^j,a_1^j,\ldots,a_p^j) \Rightarrow \bar{k}\ \bar{\delta}\ (a_0^j,a_1^j,\ldots,a_p^j).$$

Pero, puesto que $(a_0^i,a_1^i,\ldots,a_p^i)\bar{\delta}(a_0^j,a_1^j,\ldots,a_p^j)$, la transitividad de $\bar{\delta}$ implica que $k\bar{\delta}\bar{k}$.

Por lo tanto tenemos que δ genera a σ.

2.- Veamos por último que el cardinal de δ es el mínimo entre las relaciones que generan σ.

Supongamos que β es una relación que genera a σ, demostremos que $\# \delta \leq \# \beta$:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\beta_n = \beta \cap ([n] x [n])$. Claramente $\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \beta_n$ y esta union es disjunta. Para probar $\# \delta \leq \# \beta$, será suficiente ver que $\# \delta_n \leq \# \beta_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, puesto que β genera a σ, el grafo G_{β_n}, obtenido según el lema 1.3, es conexo. Por lo tanto - ver proposición (0.10) - G_{β_n} tiene al menos r-1 lados, para lo cual es necesario que $\# \beta_n \geq r-1 = \# \delta_n$.■

<u>OBSERVACION</u>

Para probar que $\bar{\delta} = \sigma$, en el apartado 1), del teorema anterior tan sólo se utiliza que G_{δ_n} es un grafo conexo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

<u>COROLARIO 1.5.</u>

Si β es una relación binaria contenida en σ, verificando que G_{β_n} es conexo, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bar{\beta} = \sigma$.■

Como una consecuencia inmediata del corolario anterior tenemos:

<u>COROLARIO 1.6.</u>

Una relación binaria β que genera a σ es mínima para σ si, y solamente si:

$\# \beta_n = NR[n]-1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $NR[n] \geq 2$ y

$\# \beta_n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $NR[n] \leq 1$.■

OBSERVACION

Sea $n\in\mathbb{N}$ y supongamos $NR[n]=r$. Entonces el grafo G_{σ_n}, asociado $\sigma_n=\sigma\cap([n]x[n])$, es el grafo completo de r vértices.

COROLARIO 1.7.

Un subconjunto β de σ es una relación mínima para σ si, y solamente si:

$\beta_n=\phi$, para todo $n\in N$ tal que $NR[n]\le 1$ y

$\#\beta_n=NR[n]-1$ y G_{β_n} es un grafo conexo, para todo $n\in\mathbb{N}$ tal que $NR[n]\ge 2$.

Notemos que en este caso G_{β_n} es un árbol que genera a G_{σ_n}.∎

NOTA

Para obtener una relación β mínima para σ, basta fijarse en aquellos $n\in S$ tales que $NR[n]\ge 2$.

Sea $n\in S$, $NR[n]=r\ge 2$ y $X_1, \ldots ,X_r$ las distintas R-clases contenidas en $[n]$, tomamos un árbol T_n que genere a G_{σ_n} (i.e. un subgrafo de G_{σ_n} que sea conexo, con los r vértices de G_{σ_n} y con r-1 lados). Sean $l_1, \ldots ,l_{r-1}$ los lados de T_n, tomamos

$$\beta_n=\{(k_1,h_1),\ (k_2,h_2),\ \ldots\ ,(k_{r-1},h_{r-1})\},$$

donde (k_i,h_i) es un elemento cualquiera de $X_t x X_k$ si $l_i=\overline{X_t X_k}$, y

$$\beta=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\beta_n.$$

DEFINICION 1.8.

Dada la congruencia σ y δ una relación sobre $\mathbb{N}^{p+1}$, diremos que δ es una relación minimal para σ si verifica :

i) $\overline{\delta} = \sigma$,

ii) $\overline{\delta-\{k\}} \neq \sigma$, para todo $k\in\delta$.

COROLARIO 1.9.

δ es relación mínima para σ si y solo si δ es relación minimal para σ.■

Nuestro próximo objetivo será dar un método algorítmico que nos permita determinar el número de R-clases de [n]. Para ello, asignaremos a cada $n\in S$ un nuevo grafo G_n, que tiene tantas componentes conexas como R-clases hay en [n].

DEFINICION 1.10.

Sea S un semigrupo numérico, con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ y $n\in S$. Definimos el grafo $G_n=(V_n,E_n)$, donde

$$V_n= \{n_i \ / \ n - n_i \in S \ ;i \in \{0,1,\ldots,p\}\} \quad \text{y}$$
$$E_n=\{ \ \overline{n_i n_j} \ / \ n - (n_i+n_j) \in S \ ;i,j \in \{0,1,\ldots,p\}, \ i \neq j \ \}.$$

Si $X_1,X_2,\ldots,X_r$ son las distintas R-clases contenidas en [n]. Denotaremos A_i, i=1,2, ... ,r, al subconjunto de $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ dado por:

$$A_i= \{n_j \ / \ \exists \ (a_0,\ldots,a_j,\ldots,a_p) \in X_i \ \text{con} \ a_j\neq 0\}.$$

Notemos que $A_i\subseteq V_n$, para todo i=1,2, ... ,r.

LEMA 1.11.

El conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ es una partición de V_n.

- Demostración -

1.- Veamos que $V_n = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$.

$n_k \in V_n \Leftrightarrow n - n_k \in S \Leftrightarrow \exists\ (a_0, \ldots, a_k, \ldots, a_p) \in X_i$ con $a_k \neq 0$ para algun $i \in \{1, 2, \ldots, r\} \Leftrightarrow \exists\ i$ tq $n_k \in A_i$

2.- Veamos que $A_i \cap A_j = \phi$, $\forall\ i \neq j$.

Sea $n_k \in A_i \cap A_j$, entonces

$n_k \in A_i \Rightarrow \exists\ (a_0, \ldots, a_k, \ldots, a_p) \in X_i$ con $a_k \neq 0$ y

$n_k \in A_j \Rightarrow \exists\ (b_0, \ldots, b_k, \ldots, b_p) \in X_j$ con $b_k \neq 0$,

claramente $(a_0, \ldots, a_k, \ldots, a_p) R (b_0, \ldots, b_k, \ldots, b_p)$, de donde $X_i = X_j$ y por tanto $i = j$.■

LEMA 1.12.

Sea $n \in S$, $n_k \in A_i$ y $n_t \in A_j$, con $i \neq j$.

Tesis

$\overline{n_k n_t} \notin E_n$

- Demostración -

Podemos suponer $k<t$. Si $\overline{n_k n_t} \in E_n$, tenemos que $n-(n_k+n_t) \in S$ y por tanto existe $(a_0, \ldots, a_k, \ldots, a_t, \ldots, a_p) \in [n]$, i.e.

$$n = a_0 n_0 + \ldots + a_k n_k + \ldots + a_t n_t + \ldots + a_p n_p,$$

con $a_k \neq 0$ y $a_t \neq 0$. Ahora,

$n_k \in A_i \Rightarrow \exists\ (b_0, \ldots, b_k, \ldots, b_p) \in X_i$ con $b_k \neq 0$,

$n_t \in A_j \Rightarrow \exists\ (c_0, \ldots, c_t, \ldots, c_p) \in X_j$ con $c_t \neq 0$,

claramente se tiene entonces

$(a_0, a_1, \ldots, a_p) R (b_0, \ldots, b_k, \ldots, b_p)$ y

$(a_0,a_1,\ldots,a_p)R(c_0,\ldots,c_t,\ldots,c_p)$,

luego $(b_0,\ldots,b_k,\ldots,b_p)R(c_0,\ldots,c_t,\ldots,c_p)$ y por tanto $X_i = X_j$, de donde $i = j$ (absurdo).■

<u>LEMA 1.13</u>

Sean $n_k, n_t \in A_s$ y $s\in\{1,2, \ldots ,r\}$.

<u>Tesis</u>

Existen $n_{k_0},\ldots,n_{k_e} \in A_s$ tales que:

$$n_{k_0} = n_k,$$

$$n_{k_e} = n_t \quad \text{y}$$

$$\overline{n_{k_j} n_{k_{j+1}}} \in E_n \ , \ j=0,1, \ldots ,e-1.$$

- Demostración -

$$n_k, n_t \in A_s \Rightarrow \begin{cases} \exists\ (b_0,\ldots,b_k,\ldots,b_p)\in X_s, \text{ con } b_k \neq 0 \\ \text{y} \\ \exists\ (c_0,\ldots,c_t,\ldots,c_p) \in X_s, \text{ con } c_t \neq 0 \end{cases}$$

luego $(b_0,\ldots,b_k,\ldots,b_p)R(c_0,\ldots,c_t,\ldots,c_p)$ y por tanto existen $(a_0^1,a_1^1,\ldots,a_p^1),\ldots,(a_0^q,a_1^q,\ldots,a_p^q)\in [n]$ tales que:

$$(b_0,\ldots,b_k,\ldots,b_p) = (a_0^1,a_1^1,\ldots,a_p^1),$$

$$(c_0,\ldots,c_t,\ldots,c_p) = (a_0^q,a_1^q,\ldots,a_p^q) \quad \text{y}$$

$$\sum_{j=0}^{p} a_j^i a_j^{i+1} \neq 0, \quad \forall\ i \in \{0,1,\ldots,q-1\}.$$

Así, para todo $i \in \{0,1,\ldots,p\}$, existe $k_i\in \{0,1,\ldots,p\}$ tal que $a_{k_i}^i a_{k_i}^{i+1} \neq 0$.

Veamos que $\overline{n_{k_j} n_{k_{j+1}}} \in E_n$, si $n_{k_j}\neq n_{k_{j+1}}$, o equivalentemente que $n -(n_{k_j}+n_{k_{j+1}})\in S$:

$$a^{j}_{k_j} a^{j+1}_{k_j} \neq 0 \Rightarrow a^{j+1}_{k_j} \neq 0 \quad \text{y}$$

$$a^{j+1}_{k_{j+1}} a^{j+2}_{k_{j+2}} \neq 0 \Rightarrow a^{j+1}_{k_{j+1}} \neq 0,$$

por tanto:

$$(a^{j+1}_0, a^{j+1}_1, \ldots, a^{j+1}_p) \in [n] \quad \text{y}$$

$$a^{j+1}_{k_j} \neq 0 \neq a^{j+1}_{k_{j+1}},$$

de lo que deducimos que $n-(n_{k_j}+n_{k_{j+1}}) \in S$. Así, suprimiendo los términos iguales, obtenemos una sucesión $n_k = n_{k_0}, n_{k_1}, \ldots, n_{k_{e-1}}$, $n_{k_e} = n_t$ con las condiciones requeridas.■

NOTACION

Dado un grafo G, denotaremos por NCC(G) al número de componentes conexas de G.

TEOREMA 1.14

Sea $n \in S-\{0\}$

Tesis

$NR[n] = NCC(G_n)$

- Demostración -

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_r$ las distintas R-clases contenidas en [n]. Para $i=1,2, \ldots, r$, consideremos el subgrafo $G^i_n = (V^i_n, E^i_n)$ de G_n, cuyos vértices son los elementos de A_i y cuyas aristas son aquellas aristas de G_n que tienen vértices en A_i, i.e.

$$\overline{n_k n_t} \in E^i_n \Leftrightarrow \overline{n_k n_t} \in E_n \text{ y } n_k, n_t \in A_i.$$

Claramente, aplicando los lemas (1.11), (1.12) y (1.13), se tiene que $G_n^1, G_n^2, \ldots, G_n^r$ son las distintas componentes conexas de G_n.■

NOTA

Observese que para obtener una relación mínima para σ, debemos fijarnos tan solo en aquellos $n \in S$ tales que $NR[n]>1$. esto es, en aquellos $n \in S$ tales que el correspondiente grafo G_n sea no conexo.

Supongamos $n \in S$ tal que G_n no es conexo y sean $G_n^1, G_n^2, \ldots, G_n^r$ sus componentes conexas. Si elegimos ahora, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, un vértice $n_{k_i} \in V_n^i$ y un elemento $a^i=(a_0^i, a_1^i, \ldots, a_p^i) \in [n]$, con $a_{k_i}^i \neq 0$, obtendremos un representante de cada R-clase.□

Sea $n \in S$ y supongamos que $n-n_i \in S$. Nuestro próximo objetivo será obtener un método para calcular un elemento $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ de $[n]$, con $a_i \neq 0$.

DEFINICION 1.15

Sea $m \in \mathbb{N}$. Un conjunto de números naturales forman un sitema de números incongruentes módulo m, cuando sus restos respecto de este módulo son todos distintos.

Un sitema de m números incongruentes módulo m se llama sitema completo módulo m.

DEFINICION 1.16

Para todo $n \in S$, existe un sistema completo módulo n contenido en S (tengase en cuenta la existencia de conductor del semigrupo). El conjunto de restos primarios de n es, por definición, un sistema completo módulo n de elementos de S,

$$RP(n) = \{W(0),W(1),\ldots,W(n-1)\},$$

verificando:

$$\left[m\in S \text{ y } W(i)\equiv m(\text{mód } n), \text{ para algún } i=0,1,\ \ldots\ ,n-1\right] \Rightarrow W(i)\leq m. \square$$

El siguiente lema tiene demostración inmediata.

LEMA 1.17

Sea $n,m,s \in S$.

Tesis

i) Existe un único $(W,k)\in RP(n)\times\mathbb{N}$, tal que $s = kn + W$.

ii) $m \in RP(n) \Leftrightarrow m-n \notin S$.

iii) $\left[m \in RP(n) \text{ y } m-s \in S\right] \Rightarrow s \in RP(n)$. ■

PROPOSICION 1.18

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Tesis

Dado $s \in S$, existe una única expresión de s en la forma

$$s = a_0n_0+a_1n_1+\ \ldots\ +a_pn_p,$$

con $a_{i+1}n_{i+1}+\ \ldots\ +a_pn_p\in RP(n_0)\cap RP(n_1)\cap\ \cdots\ \cap RP(n_i)$, para todo $i \in \{0,1,\ldots,p-1\}$.

- Demostración -

Pongamos, utilizando el lema (1.17),

$$s = a_0n_0+ W_0 \quad \text{y}$$

$$W_i = a_{i+1}n_{i+1}+ W_{i+1},$$

con $W_0\in RP(n_0)$ y $W_i\in RP(n_0)\cap RP(n_1)\cap\ \cdots\ \cap RP(n_i)$, $i=0,1,\ldots,p-1$.

Como las parejas (a_i, W_i) son únicas es claro el resultado.■

DEFINICION 1.19

La expresión

$$s = a_0 n_0 + a_1 n_1 + \dots + a_p n_p,$$

en la proposición anterior (1.18), es llamada "forma canónica de s, para la ordenación $n_0, n_1, \dots, n_p$ de los generadores".

NOTA

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0, n_1, \dots, n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Los elementos de S pueden ser obtenidos recurrentemente, sabiendo que:

i) $0 \in S$,

ii) $x \in \mathbb{N}-\{0\}$, $x \in S \iff x-n_i \in S$, para algún $i \in \{0,1,\dots,p\}$

Una vez construido el semigrupo

$$S = \{ o, s_1, s_2, \dots, s_k, C+1, C+2, \dots \},$$

donde C es su conductor. Calcular los restos primarios de cualquier elemento de S es fácil, teniendo en cuenta que

$$RP(n) = \{m \in S \ / \ m-n \notin S\}$$

y que $\# RP(n) = n$.

Dado $n \in S$ y $n_i \in \{n_0, n_1, \dots, n_p\}$ tal que $n-n_i \in S$. Queriamos dar un algoritmo que nos permitiera obtener una expresión de n en la forma $n = a_0 n_0 + a_1 n_1 + \dots + a_p n_p$, con $a_i \neq 0$. Pues bien, a este menester responde la proposición siguiente :

PROPOSICION 1.20

Sean $n \in S$, $n_i \in \{n_0, n_1, \ldots, n_p\}$ tal que $n-n_i \in S$ y

$$a_i n_i + a_0 n_0 + \ldots + a_{i-1} n_{i-1} + a_{i+1} n_{i+1} + \ldots + a_p n_p = n$$

la forma canónica de n para la ordenación de los generadores $n_i, n_0, \ldots, n_{i-1}, n_{i+1}, \ldots, n_p$.

Tesis

$a_i \neq 0$

- Demostración -

Teniendo en cuenta que

$n-n_i \in S \Rightarrow n \notin RP(n_i) \Rightarrow n = a_i n_i + W$, con $a_i \neq 0$ y $W \in RP(n_i)$,

la demostración de esta proposición es clara.■

NOTA

Obsevese que, dado un semigrupo numérico S, si fuesemos capaces de determinar un subconjunto finito suyo que contenga a todos los elementos de S de grafo no conexo, por lo expuesto hasta ahora, podríamos calcular una relación mínima para σ.

A esta cuestión contesta la siguiente proposición :

PROPOSICION 1.21

Sea S un semigrupo numérico, $\{n_0, n_1, \ldots, n_p\}$ su sistema minimal de generadores y C el conductor de S. Supongamos además que $n_0 < n_1 < \ldots < n_p$.

Tesis

Para todo $n \in S$ tal que $n > C + n_0 + n_p$, el grafo G_n es conexo.

- Demostración -

$n > C + n_0 + n_p \Rightarrow n - (n_0 + n_j) > C$, $\forall\, j \in \{0, 1, \ldots, p\} \Rightarrow$

$\Rightarrow n-(n_0+n_j)\in S,\ \forall\ j\in \{0,1,\dots,p\} \Rightarrow \overline{n_0 n_j}\in E_n,\ \forall\ j\in \{0,1,\dots,p\} \Rightarrow$

$\Rightarrow G_n$ es conexo.■

Vamos a reducir aun más el número de candidatos a tener grafo no conexo.

PROPOSICION 1.22

Sea S semigrupo numérico, $\{n_0,n_1,\dots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores y $n \in S$ tal que G_n es no conexo.

Tesis

Existe $W\in RP(n_0)-\{0\}$ y $j\in \{1,\dots,p\}$ tales que $n = W+n_j$.

- Demostración -

Si $n = n_j$, trivialmente el grafo G_n es conexo (ya que este se reduce a un vértice). Podemos suponer entonces $n\neq n_j$, para todo $j\in \{1,\dots,p\}$.

Hacemos la demostración por contrarecíproco.

Supongamos que para todo $n_j\in \{n_1,\dots,n_p\}$, tal que $n-n_j\in S$, se tiene que $n-n_j\notin RP(n_0)$. Entonces $n-n_j-n_0 \in S$ y así $\overline{n_j n_0} \in E_n$, $\forall\ n_j \in V_n-\{n_0\}$, por lo que el grafo G_n es conexo.■

NOTA

Observese que esta proposición (1.22) efectivamente refina a la anterior -proposición (1.21)-, ya que si $W \in RP(n_0)$ entonces $W \leq C + n_0$ y por consiguiente $W+n_j\leq C+ n_0+ n_p$.

METODO GENERAL PARA EL CALCULO DE RELACIONES MINIMAS EN UN SEMIGRUPO NUMERICO

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores. Supongamos que $n_0<n_1< \ldots <n_p$.

1.- Calculamos los $s \in S$ tales que $s \leq C+n_0+n_p$.

2.- Calculamos $RP(n_0)$, $RP(n_1),\ldots, RP(n_p)$.

3.- Calculamos los $n \in S$ de la forma $n = W+n_j$, con $W \in RP(n_0)-\{0\}$ y $j \in \{1,\ldots,p\}$.

4.- Calculamos los vértices que están en cada componente conexa de G_n, para cada n de los hallados en 3.

5.- Si G_n no es conexo, elegiremos un vértice n_i de cada una de sus componentes conexas y expresaremos n en forma canónica para la ordenación $n_i,n_0,\ldots,n_{i-1},n_{i+1},\ldots,n_p$.

6.- Construimos δ_n.

7.- Construimos δ.□

NOTA

Graficamente se aprecian perfectamente las componentes conexas de un grafo. También expresando un grafo mediante una matriz, existen métodos para determinar sus componentes conexas. No obtante, para finalizar, daremos un algoritmo que calcula los vértices que forman parte de las distintas componentes conexas de los grafos G_n.

Algoritmo para el calculo de los vértices de las componentes conexas de G_n.

Sea $n \in S$ y supongamos que $V_n = \{n_i \ / \ n-n_i \in S\} = \{n_0, n_1, \ldots, n_r\}$, denotemos $B_j = \{n_i \in V_n \ / \ n-(n_j+n_i) \in S\} \cup \{n_j\}$, $j \in \{0,1,\ldots,r\}$. Si $B_i \cap B_j \neq \phi$ y $i<j$, entonces llamamos B_i a $B_i \cup B_j$ y eliminamos B_j. Reiterando el proceso obtenemos V_n como una unión disjunta,

$$V_n = B_{i_1} \dot{\cup} B_{i_2} \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} B_{i_t}.$$

Es claro que $V_n^1 = B_{i_1}$, $V_n^2 = B_{i_2}$, ... , $V_n^t = B_{i_t}$ son los conjuntos de vértices correspondientes a las distintas componentes conexas de G_n.□

A continuación mostraremos, mediante un ejemplo, el funcionamiento del algoritmo para calcular las relaciones mínimas de un semigrupo numérico.

EJEMPLO

Consideremos el semigrupo numérico S, con sistema minimal de generadores {5,7,9,11}. Vamos a encontrar una relación mínima δ para la congruencia σ asociada a S.

1.- Calculamos los $s \in S$, tales que $s \leq C+5+11$ (Notemos que C=13, pues {14,15,16,17,18} es un sistema completo módulo 5).
{0,5,7,9,10,11,12,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29}

2.- Calculemos los conjuntos de restos primarios:

RP(5) = {0,7,9,11,18},

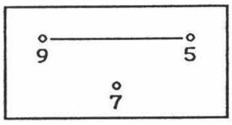
RP(7) = {0,5,9,10,11,15,20},

$RP(9) = \{0,5,7,10,11,12,15,17,22\}$.

3.- $[RP(5) - \{0\}] + \{7,9,11\} = \{14,16,18,20,22,25,27,29\}$.

4.- Estudiemos los grafos G_n, para

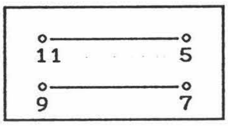
$$n \in \{14,16,18,20,22,25,27,29\}.$$

$G_{14} \equiv$ 

G_{14} no conexo, $V^1_{14} = \{5,9\}$, $V^2_{14} = \{7\}$,

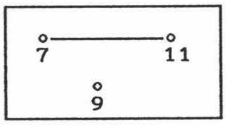
$$\text{f.c. de 14 respecto a la ordenación} \begin{cases} 5,7,9: & \underline{14 = 1x5 + 1x9} \\ 7,5,9: & \underline{14 = 2x7}\ . \end{cases}$$

Escribiremos en lo sucesivo $\underline{1x5 + 1x9 = 2x7}$.

$G_{16} \equiv$ 

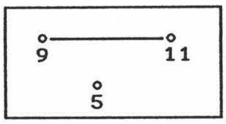
No conexo $V^1_{16} = \{5,11\}$, $V^2_{16} = \{7,9\}$

$\underline{1x5 + 1x11 = 1x7 + 1x9}$.

$G_{18} \equiv$ 

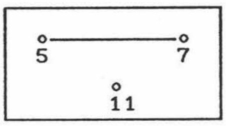
No conexo $V^1_{18} = \{7,11\}$, $V^2_{18} = \{9\}$

$\underline{2x9 = 1x7 + 1x11}$.

$G_{20} \equiv$ 

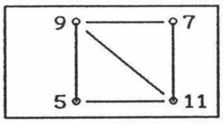
No conexo $V^1_{20} = \{5\}$, $V^2_{20} = \{9,11\}$

$\underline{4x5 = 1x9 + 1x11}$.

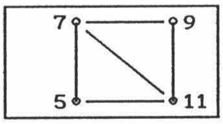
$G_{22} \equiv$ 

No conexo $V^1_{22} = \{5,7\}$, $V^2_{22} = \{11\}$

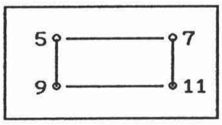
$\underline{2x11 = 3x5 + 1x7}$.

$G_{25} \equiv$ 

Conexo.

$G_{27} \equiv$ 

Conexo.

$G_{29} \equiv$ 

Conexo.

Luego la relación mínima para σ sería :

$\delta = \{ ((1,0,1,0),(0,2,0,0)),\ ((1,0,0,1),(0,1,1,0)),$
$((0,0,2,0),(0,1,0,1)),((4,0,0,0),(0,0,1,1)),((0,0,0,2),(3,1,0,0))\}.$□

NOTACION

Dado un subconjunto de números naturales A, denotaremos por $< A >$ al mínimo subsemigrupo de $\mathbb{N}$ que contiene a A. Denotaremos $< A >^* = < A > - \{0\}$.

Dados N y M dos subconjuntos de $\mathbb{N}$, denotaremos por N+M al conjunto

$$N+M = \{ h \in \mathbb{N} \ / \ h = n + m \text{ con } n \in N \text{ y } m \in M \}.$$

Sin embargo, denotaremos N-M al conjunto

$$N-M = \{ n \in N \ / \ n \notin M \}.□$$

TEOREMA 1.23

Sea S semigrupo numérico, $A=\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores y $n \in S$.

Tesis

G_n no es conexo $\Leftrightarrow \exists$ I subconjunto propio de A verificando que

$$n \in (< I >^* \cap < A - I >^*) - (< I >^* + < A - I >^*)$$

- Demostración -

$\boxed{\Rightarrow}$ Notemos que si V_n^i es el conjunto de vértices de una componente conexa de G_n, claramente $n \in < V_n^i >$. Así

$I = \{$ vértices que hay en una componente conexa de $G_n\}$,

puesto que G_n tiene más de una componente conexa, verifica las condiciones requeridas.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sean $n_i \in I$ y $n_j \in A - I$. Entonces $n-(n_i+n_j) \notin S$, y por lo tanto $\overline{n_i n_j} \notin E_n$. Asi los vértices de G_n contenidos en I no estan conectados con los contenidos en A - I y por tanto el grafo no es conexo. ■

A continuación, como aplicación de nuestra teoría, calcularemos relaciones mínimas correspondientes a los semigrupos numéricos generados por dos y tres elementos respectivamente. Estos semigrupos están ya estudiados en [6], aunque utilizando otros procedimientos.

<u>RELACIONES MINIMAS EN SEMIGRUPOS NUMERICOS CON DOS GENERADORES MINIMALES</u>.

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1\}$ su sistema minimal de generadores.

Veamos que $\delta = \{ ((n_1,0),(0,n_0)) \}$ es relación mínima para σ. En efecto, aplicando el teorema anterior sabemos que :

$$G_n \text{ no es conexo} \Leftrightarrow n \in (<n_0>^* \cap <n_1>^*)-(<n_0>^* + <n_1>^*),$$

y es claro que esto ocurre si, y solamente si,

$$n = \text{m.c.m.}\{n_0,n_1\} = n_0n_1.$$

Notemos que m.c.d.$\{n_0,n_1\}$= 1 (m.c.m y m.c.d. denotan mínimo común múltiplo y máximo común divisor respectivamente).□

<u>RELACIONES MINIMAS EN SEMIGRUPOS NUMERICOS CON TRES GENERADORES MINIMALES</u>.

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,n_2\}$ su sistema minimal de generadores.

Para $i\in \{0,1,2\}$, sea C_i= mínimo $\{ c \in \mathbb{N}-\{0\} \ / \ cn_i \in \langle n_j,n_k\rangle\}$, donde $\{i,j,k\} = \{0,1,2\}$.

Aplicando el teorema anterior tenemos que :

G_n no es conexo $\Leftrightarrow \exists\ i \in \{0,1,2\}$ tal que

$n \in (\langle n_i\rangle^* \cap \langle n_j,n_k\rangle^*) - (\langle n_i\rangle^* + \langle n_j,n_k\rangle^*)$, con $\{i,j,k\}= \{0,1,2\}$

$$\Leftrightarrow n \in \{C_0n_0,C_1n_1,C_2n_2\}.$$

Pueden darse entoces los tres siguientes casos:

a) $C_0n_0 = C_1n_1 = C_2n_2$.

En este caso,

$$\delta = \{ ((C_0,0,0),(0,C_1,0)) \ , \ ((C_0,0,0),(0,0,C_2)) \}.$$

b) $C_0n_0 = r_{0_1}n_1 + r_{0_2}n_2$ y

$C_1n_1 = C_2n_2 \neq C_0n_0$.

En este caso,

$$\delta = \{ ((C_0,0,0),(0,r_{0_1},r_{0_2})) \ , \ ((0,C_1,0),(0,0,C_2)) \}.$$

c) $C_0n_0 = r_{0_1}n_1 + r_{0_2}n_2$,

$C_1n_1 = r_{1_0}n_0 + r_{1_2}n_2$ y

$$C_2 n_2 = r_{2_0} n_0 + r_{2_1} n_1 .$$

En este caso,

$$\delta = \{ \ ((C_0,0,0),(0,r_{0_1},r_{0_2})) \ , \ ((0,C_1,0),(r_{1_0},0,r_{1_2})) \ ,$$
$$((0,0,C_2),(r_{2_0},r_{2_1},0)) \ \}. \ \square$$

CAPITULO 2

COTAS SUPERIORES PARA EL CARDINAL DE UNA RELACIÓN MÍNIMA.

Sea S un semigrupo numérico denotaremos por #{RMS} a $\#\delta$, donde δ es una relación mínima para la congruencia asociada a S.

En [7] se muestra una familia $\{ S_i \ / \ i \in I \}$ de semigrupos numéricos, con cuatro generadores minimales y $\#\{RMS_i\}$ arbitrariamente grande. Esto prueba que #{RMS} no puede ser acotado en función del número de generadores minimales de S.

En este capítulo S denota un semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0, n_1, \ldots, n_p\}$, $\varphi: \mathbb{N}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{N}$ el homomorfismo asociado a S ($Im(\varphi) = S$) y σ la congruencia núcleo de φ.

Nuestro propósito será acotar #{RMS} en función de n_0 y p.

Una primera cota para #{RMS} será dada en la siguiente proposición:

<u>PROPOSICION</u> <u>2.1.</u>

$\#\{RMS\} \le (n_0-1)p.$

- Demostración -

Sea δ la relación mínima para σ construida según el teorema (1.4). Tomando ,para cada $n \in \mathbb{N}$, las distintas R-clases $X_1, \ldots, X_r$ contenidas en [n] -con representantes $a_1, \ldots, a_r$ respectivamente- de tal forma que el conjunto A_1, definido según (1.10), tiene al generador n_k, con k = mínimo { $j\in\{0,1, \ldots ,p\}$ / $n-n_j\in S$ }.

Definimos una aplicación $f:\delta \longrightarrow (RP(n_0)-\{0\})x\{n_1,\ldots,n_p\}$ como sigue:

Sea $(a,b)\in\delta$, llamemos $n=\varphi(a)=\varphi(b)$. Entonces a estará en la R-clase X_1 (por construcción de δ_n) y b pertenecerá a una R-clase distinta X_j de [n]. Además, por la numeración que hemos asignado a las R-clases, $n_0\notin A_j$ (ya que si $n-n_0\in S$ obviamente se tiene que $n_0\in A_1$).

Sea t = mínimo { $e\in\{1, \ldots ,p\}$ / $n_e\in A_j$}. Entonces $n = W+n_t$, con $W\in RP(n_0)-\{0\}$.

Definimos $f(a,b) = (W,n_t)$.

Veamos que f es inyectiva, y tendremos demostrada la proposición:

Sean $(a,b),(a',b')\in\delta$ y supongamos

$$f(a,b) = f(a',b') = (W,n_k).$$

Entonces $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(a') = \varphi(b') = W+n_k= n$, por la construción de δ, tenemos $a = a'$. Además, si $b\in X_j$ y $b'\in X_{j'}$, entonces $n_k\in A_j\cap A_{j'}$, pero puesto que los A_e son una partición de V_n, ha de ser j=j' y por tanto $b = b'$.■

Mejoraremos aún más esta cota.

PROPOSICION 2.2.

Sea n un elemento de S tal que G_n es no conexo.

Tesis

Existen $n_k\in \{n_1,\ldots,n_p\}$ y $W \in RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1})$ verificando:

a) $n = W + n_k \notin RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1})$.

b) $W' + n_k \in RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1})$,

$\forall\ W' \in S,\ W' \neq W$ y tal que $W-W' \in S$.

- Demostración -

Sean:

$$i = \text{mínimo } \{\ j \in \{0,1,\ldots,p\}\ /\ n-n_j \in S\ \},$$

$$k = \text{mínimo } \{\ j \in \{0,1,\ldots,p\}\ /\ n_i \text{ y } n_j \text{ estan en distinta componente conexa de } G_n\}$$

(Existe k, por ser G_n no conexo).

Por ser k mínimo, podemos escribir

$$n = W + n_k,$$

con $W \in RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1})$ (notemos que $n-n_k \in S$, si además $n-n_k \notin RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1})$, existe -lema (1.17)- $j<k$ tal que $n-n_k-n_j \in S$ y así n_k y n_j estan en la misma componente conexa de G_n).

Por otra parte, $i<k$ y $n \notin RP(n_i)$, por lo tanto

$$n = W + n_k \notin RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1})$$

y tenemos a).

Sea $W' \in S$, con $W' \neq W$ y tal que $W-W' \in S$. Como $W-W' \neq 0$, existe n_t tal que $W-W'-n_t \in S$ (i.e. $W-W' \notin RP(n_t)$), esto implica que $n-(n_k+n_t) \in S$ y así n_k y n_t están en la misma componente conexa de G_n.

Si además $W' + n_k \notin RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1})$, existe $j<k$ tal que $W'+n_k-n_j \in S$, pero esto implica que $n-(n_t+n_j) \in S$ de donde n_t y n_j están en la misma componente conexa y por tanto n_j y n_k, lo que contradice la minimalidad de k. Así pues se verifica b).∎

TEOREMA 2.3.

Dado $k \in \{1,\dots,p\}$, sea

$$D_k = \{ W \in RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1}) \ / \ W \text{ verifica las condiciones a) y b) de la proposición (2.2)} \}.$$

Tesis

$$\#\{RMS\} \le \sum_{k=1}^{p} \#D_k.$$

- Demostración -

La demostración de este teorema es completamente análoga a la de la proposición (2.1). Sea δ la relación mínima dada en la proposición (2.1). Definimos $g:\delta \longrightarrow \dot{\bigcup}_{k\in\{1,\dots,p\}} D_k$ como sigue:

Los elementos de $\dot{\bigcup}_{k\in\{1,\dots,p\}} D_k$ serán denotados como pares (W,k), indicandose así que $W\in D_k$. Sea $(a,b)\in\delta$, llamemos $n=\varphi(a)=\varphi(b)$. Entonces a estará en la R-clase X_1 y b estará en una R-clase distinta, X_j, de $[n]$.

Sea t = mínimo $\{ e\in\{1, \dots ,p\} \ / \ n_e\in A_j\}$. Entonces, es fácil de comprobar que $n = W+n_t$, con $W\in RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{t-1})$.

Definimos $g(a,b) = (W,t)$.

Como en la proposición (2.1) se demuestra que g es inyectiva y por tanto $\#\,\delta\le \#\,(\dot{\bigcup}_{k\in\{1,\dots,p\}} D_k) = \sum_{k=1}^{p} \#D_k$.■

COROLARIO 2.4.

$$\#\{RMS\} \le \frac{(2n_0- p)(p - 1)}{2} + 1 .$$

- Demostración -

1.- Veamos que $\#D_p= 1$.

Sea C_p = mínimo $\{ m\in\mathbb{N}^* \ / \ mn_p\in\langle n_0, \dots ,n_{p-1}\rangle\}$. Entonces $D_p= \{ (C_p-1)n_p \}$, obsérvese que los elementos del conjunto

$RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{p-1})$ son de la forma mn_p con $0\leq m<C_p$.

2.- $\#D_k \leq \# \{ (RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1})) - \{0\} \} \leq n_0 - k$, ya que $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1} \in RP(n_0)$ y no pertenecen a $RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1})$.

3.- $\#\{RMS\} \leq \sum_{k=1}^{p} \#D_k \leq (\sum_{k=1}^{p-1} (n_0 - k)) + 1 = \dfrac{(2n_0 - p)(p - 1)}{2} + 1.$ ∎

Como corolario inmediato de (2.4) tenemos el ya conocido resultado:

<u>COROLARIO</u> <u>2.5</u>

"Todo semigrupo numérico es finitamente presentado".□

<u>NOTA</u>

En S podemos definir el siguiente orden:

$$n,m\in S \quad n\leq m \Leftrightarrow m-n\in S.$$

Observese que D_k está compuesto por los elementos minimales del conjunto

$$H_k=\{ W\in RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1}) \ / \ W+n_k \notin RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1}) \}$$

Esta visión nos da un método rápido para calcular los elementos de D_k ya que si tenemos ordenados los elementos del conjunto $RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1})$ y $W\in D_k$ automáticamente podemos asegurar que los elementos de $RP(n_0)\cap \cdots \cap RP(n_{k-1})$ que son mayores y los elementos que son menores que W (con el orden definido al comienzo de la nota) no pertenecen a D_k.

CAPITULO 3

CUANDO A UN SEMIGRUPO SE LE AÑADE SU CONDUCTOR.

Durante todo este capítulo S será un semigrupo numérico, con conductor C y sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$. Supondremos además que $n_0< n_1< \ldots < n_p$ y que $n_0< C$.

Consideraremos tanbién el semigrupo numérico

$$\bar{S} = <n_0,n_1,\ldots,n_p,C >.$$

Observese que $\bar{S}$ sigue teniendo a n_0 como generador minimal "mínimo".

La mayor parte de este capítulo está dedicada a la obtención de una relación mínima para $\bar{S}$ a partir de una relación mínima para S. Dada una relación mínima para S obtendremos una relación mínima para $\bar{S}$ suprimiendo algunas relaciones y añadiendo otras nuevas, tanto las que debemos suprimir como las que tenemos que añadir, serán caracterizadas.

Para realizar este estudio, distinguiremos dos casos:

a) Que $\{n_0,n_1,\ldots,n_p,C\}$ sea sistema minimal de generadores de $\bar{S}$.

b) Que $\{n_0,n_1,\ldots,n_p,C\}$ no sea sistema minimal de generadores de $\bar{S}$.

Veremos que cuando ocurre a) se tiene que:

$$\#\{RMS\}+2 \le \#\{RM\bar{S}\} \le \#\{RMS\}+p+2$$

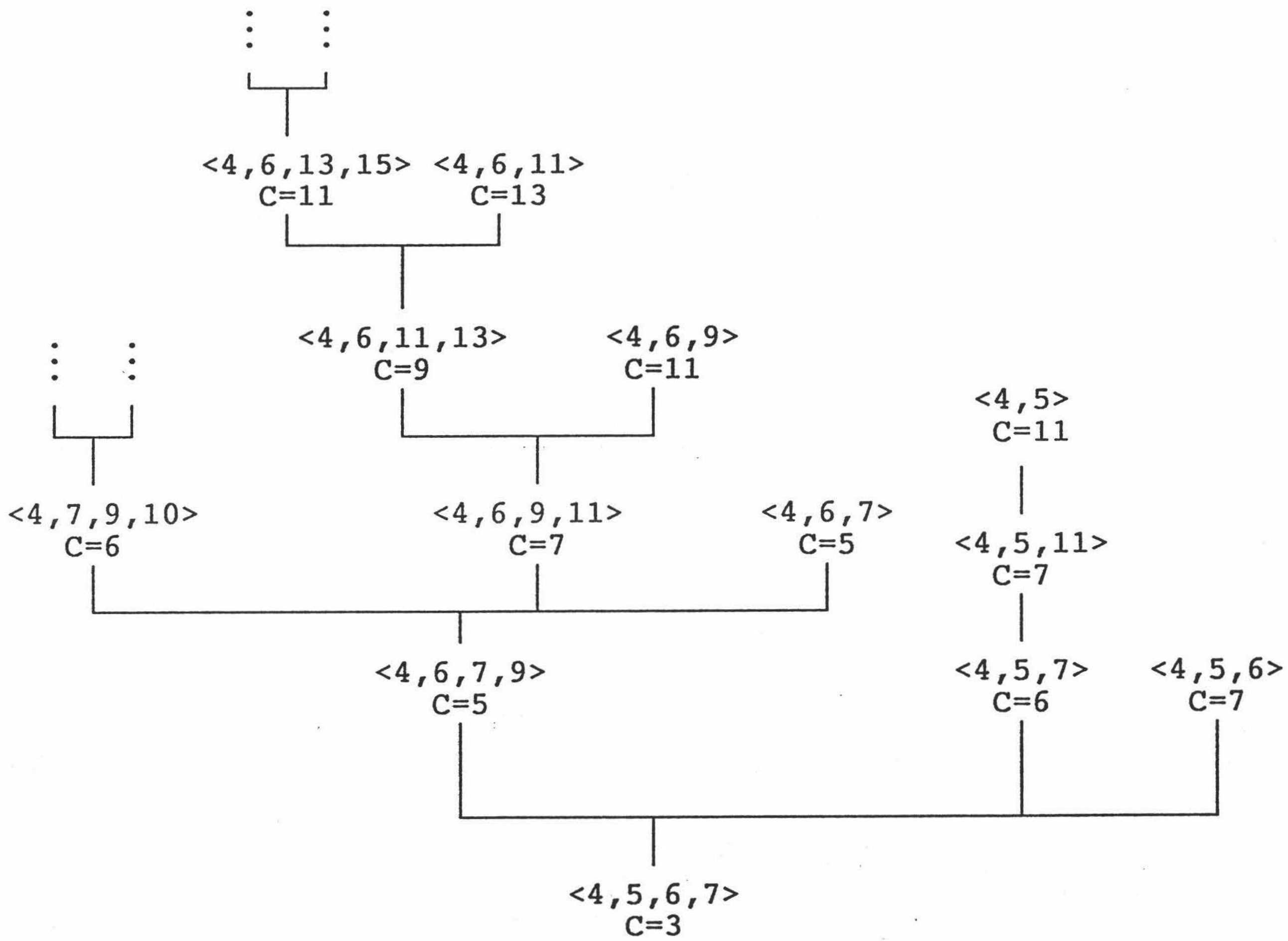
mientras que cuando ocurre b) se verifica que:

$$\#\{RMS\} = \#\{RM\bar{S}\}.$$

Si llamamos

$\mathcal{S}(n_0)$ = { Semigrupos numéricos con mínimo generador minimal n_0}. terminaremos el capítulo, dando un método ordenado para construir todos los elementos de $\mathcal{S}(n_0)$, lo que nos permitirá representar dicho conjunto mediante un árbol de la forma:

tomando $n_0 = 4$:



Veremos que este árbol tiene la propiedad de que al avanzar por sus ramas, los semigrupos S que nos vamos encontrando, tienen cada vez mayor conductor, menor o igual número de generadores minimales y menor o igual #{RMS}.

NOTACION.

$RP(n_0)$ y $\overline{RP}(n_0)$ denotarán los conjuntos de restos primarios de n_0 en S y $\bar{S}$ respectivamente.

Dado $n \in S \cap \bar{S}$ denotaremos por:

$G_n = (V_n, E_n)$, el grafo correspondiente a n en S y

$\bar{G}_n = (\bar{V}_n, \bar{E}_n)$, el grafo correspondiente a n en $\bar{S}$.

Denotaremos por $\subset$ la inclusión estricta.

LEMA 3.1.

En las condiciones anteriores se verifica:

1.- $\bar{S} = S \cup \{C\}$

2.- Si $RP(n_0) = \{ W(0) < W(1) < \ldots < W(n_0-2) < W(n_0-1) \}$,

entonces $\overline{RP}(n_0) = \{ \bar{W}(0), \bar{W}(1), \ldots, \bar{W}(n_0-2), \bar{W}(n_0-1) \}$,

donde:

$\bar{W}(i) = W(i)$, para $i = 0,1, \ldots, n_0-2$ y

$\bar{W}(n_0-1) = W(n_0-1) - n_0 = C$.

- Demostración -

1.- Bastará ver que $S \cup \{C\}$ es un semigrupo. Para demostrar esto bastará con probar que $u+C \in S \cup \{C\}$, para todo $u \in S \cup \{C\}$, pero esto es claro ya que C es el conductor de S y $C \leq u+C$.

2.- Es inmediato que

$$C = W(n_0-1) - n_0,$$

y puesto que $n_0 < C$, los demás restos primarios de n_0 en S, que sean distintos de $W(n_0-1)$, siguen siendo restos primarios de n_0 en $\bar{S}$ ya que $C+s > W(i)$, $\forall\ i \in \{0,\ldots,n_0-2\}$ y $\forall\ s \in \bar{S}$.■

NOTA

Para estudiar la relación entre S y $\bar{S}$ distinguiremos dos casos :

A) $\{n_0,n_1,...,n_p,C\}$ es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$.

B) $\{n_0,n_1,...,n_p,C\}$ no es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$.

LEMA 3.2.

Supongamos que $\{n_0,n_1,...,n_p,C\}$ es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$ y que $RP(n_0)= \{ W(0)<W(1)<...<W(n_0-2)<W(n_0-1) \}$. Sea $n \in S$.

Tesis

Las siguientes implicaciones son ciertas:

1.- $n \in \overline{RP}(C) \Rightarrow \bar{G}_n = G_n$.

2.- $n \notin \overline{RP}(C) \Rightarrow V_n \cup \{C\} \subseteq \bar{V}_n$.

3.- $V_n \cup \{C\} \subset \bar{V}_n \Rightarrow \exists\ n_i \in \{n_0,n_1,...,n_p\}$ tal que $n = C + n_i$.

4.- $\left[NCC(G_n)<NCC(\bar{G}_n) \text{ y } V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n \right] \Rightarrow n = 2C$.

5.- $\left[NCC(\bar{G}_n) < NCC(G_n) \text{ y } V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n \right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \Big[n = W(n_0-1)+n_j$, para algún $n_j \in \{n_1,...,n_p\}$ con n_j y n_0 en distintas componentes conexas de $G_n \Big]$.

\- Demostración -

1) y 2) son inmediatos.

3) $V_n \cup \{C\} \subset \bar{V}_n \Rightarrow \left[\exists\ n_i \in \{n_0,n_1,...,n_p\} \text{ tal que } n-n_i \in \bar{S}-S \right]$ $\Rightarrow$(por 1 del lema 3.1)$\Rightarrow n-n_i = C \Rightarrow n = C+n_i$.

4) Como C es el único vértice de $\bar{V}_n$ que no está en V_n y $NCC(G_n)<NCC(\bar{G}_n)$, el grafo $\bar{G}_n$ no tiene ninguna arista con vértice C

(ya que $\bar{G}_n$ se puede obtener a partir de G_n añadiendole el vértice C y nuevas aristas, si existiese una arista con vértice C tendríamos que $NCC(G_n) \geq NCC(\bar{G}_n)$). Así $n-(C + n_i) \notin \bar{S}$, para todo $n_i \in \{n_0, \ldots, n_p\}$.

Por otra parte, puesto que $C \in \bar{V}_n$, ha de ser $n = C+s$, con $s \in \bar{S}-\{0\}$. Pero como $s-n_i=n-(C + n_i) \notin \bar{S}$, $\forall\, n_i \in \{n_0, \ldots, n_p\}$, ha de ser s un elemento de $\bar{S}-S = \{C\}$, luego $n = C+C$.

5) $\bar{G}_n$ contiene un vértice más que G_n, el C, y nuevas aristas, que serán de la forma $\overline{n_i n_j}$ o $\overline{Cn_i}$ -con $n_i, n_j \in V_n$-.

Ahora bien, si $n-(n_i + n_j) \in \bar{S}-S$ entonces $n-(n_i + n_j) = C$, y por tanto $n = C+n_i+n_j$ de donde $\overline{Cn_i}, \overline{Cn_j} \in \bar{G}_n$. Así, a efectos del número de componentes conexas de $\bar{G}_n$, basta añadir a G_n las aristas de la forma $\overline{Cn_i}$.

Como $n = C+s$, con $s \in \bar{S}-\{0\}$, entonces $n \geq C+n_0 > \bar{C}+n_0$ (donde $\bar{C}$ es el conductor de $\bar{S}$) y por tanto $n \notin \overline{RP}(n_0)$, así $n_0 \in \bar{V}_n$. Pero $n_0 \neq C$, por lo que $n_0 \in V_n$.

Por otra parte, $NCC(\bar{G}_n) < NCC(G_n) \Rightarrow NCC(G_n) \geq 2$ y así $\exists\, n_j \in V_n$ tal que n_j y n_0 están en distintas componentes conexas de G_n y $n-(C + n_j) \in \bar{S}$.

Al estar n_j y n_0 en distintas componentes conexas de G_n ha de ser $n = W+n_j$, con $W \in RP(n_0)$. Tenemos así que

$n = W+n_j$ y

$n-(C + n_j) \in \bar{S}$,

por tanto $W+n_j = C+n_j+s$, con $s \in \bar{S}-\{0\}$, así $C+s = W \leq C+n_0$, pero $n_0 \leq s$, de donde $s = n_0$ y $W = W(n_0-1)$.∎

PROPOSICION 3.3.

Supongamos que $\{n_0,n_1,\ldots,n_p,C\}$ es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$ y sea $n \in S$.

Tesis

Son equivalentes :

1.- $NCC(G_n) < NCC(\bar{G}_n)$.

2.- $n \in \{C + n_0, C + n_1, \ \ldots \ , C + n_p, 2C\}$.

3.- $NCC(\bar{G}_n) = NCC(G_n) + 1$.

- Demostración -

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ Si $NCC(G_n) < NCC(\bar{G}_n)$, por (1) y (2) del lema 3.2, tenemos que $n \notin \overline{RP}(C)$ y que $V_n \cup \{C\} \subseteq \bar{V}_n$.

Si se verifica $V_n \cup \{C\} \subset \bar{V}_n$, por (3) del lema 3.2, existe $n_i \in \{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ tal que $n = C + n_i$ y por tanto se verifica 2.

Si $V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n$, por (4) del lema 3

2, también en este caso.

$\boxed{2\Rightarrow 3}$ Supongamos que $n \in \{C + n_0, C + n_1, \ldots, C + n_p, 2C\}$.

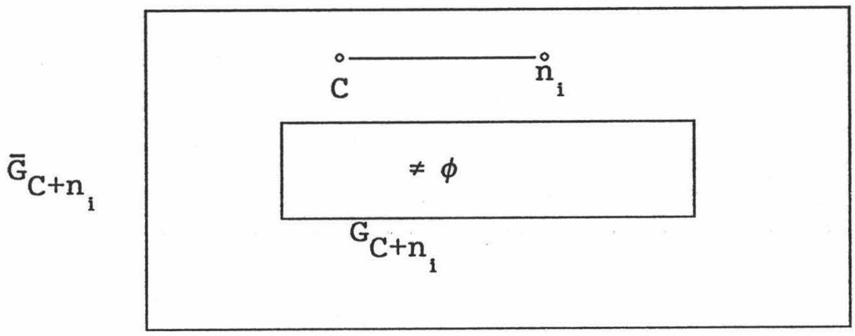
Puede entonces ocurrir dos casos:

a) $n = C+n_i$, $i \in \{0,1,\ldots,p\}$.

b) $n = 2C$.

Veamos como son los grafos G_n y $\bar{G}_n$:

Si estamos en el caso a), $\bar{G}_n$ es de la forma:



En efecto:

$G_{C+n_i} \neq \phi$ ya que $C + n_i \in S$, por ser C el conductor de S.

Veamos que $\bar{V}_{C+n_i} = V_{C+n_i} \cup \{C,n_i\}$:

Claramente $V_{C+n_i} \cup \{C,n_i\} \subseteq \bar{V}_{C+n_i}$. Para ver que $\bar{V}_{C+n_i} \subseteq V_{C+n_i} \cup \{C,n_i\}$, supongamos que $n_j \in (\bar{V}_{C+n_i} - V_{C+n_i})$. Entonces $C+n_i-n_j \in \bar{S}-S$, así $C+ n_i - n_j = C$ y por tanto $n_i = n_j$.

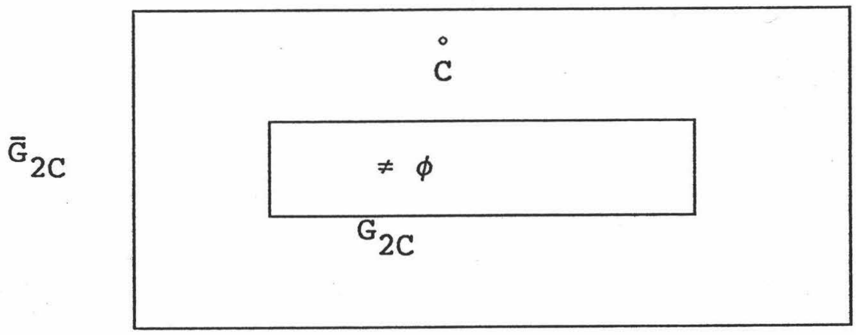
Veamos ahora que $\bar{E}_{C+n_i} = E_{C+n_i} \cup \{ \overline{Cn_i} \}$:

Claramente $E_{C+n_i} \cup \{ \overline{Cn_i} \} \subseteq \bar{E}_{C+n_i}$, veamos que también $\bar{E}_{C+n_i} \subseteq E_{C+n_i} \cup \{ \overline{Cn_i} \}$.

Si $C+n_i-(n_j + n_k) \in \bar{S}-S$, entonces $C+ n_i-(n_j + n_k) = C$ y por tanto $n_i = n_j + n_k$ lo que es absurdo.

Si $C+ n_i - (C + n_j) \in \bar{S}$, entonces $n_i = n_j$. Tenemos así la inclusión buscada.

Si estamos en el caso b), $\bar{G}_n$ es de la forma:



En efecto:

$G_{2C} \neq \phi$ ya que $2C \in S$ por ser C el conductor de S.

Veamos que $\bar{V}_{2C} = V_{2C} \cup \{C\}$:

Claramente $V_{2C} \cup \{C\} \subseteq \bar{V}_{2C}$. Para ver que $\bar{V}_{2C} \subseteq V_{2C} \cup \{C\}$, supongamos que $2C-n_j \in \bar{S}-S$, entonces $2C-n_j = C$ y por tanto $C = n_j$, que es absurdo.

Veamos ahora que $\bar{E}_{2C} = E_{2C}$

Claramente $E_{2C} \subseteq \bar{E}_{2C}$. Probemos la otra inclusión, $\bar{E}_{2C} \subseteq E_{2C}$:

Si $2C - (n_i+n_j) \in \bar{S}-S$. Entonces $2C - (n_i+n_j) = C$ y así $C = n_i+n_j$ lo que es absurdo.

Si $2C - (C+n_j) \in \bar{S}$, entonces $C- n_j \in \bar{S}$ que también es absurdo.

$\boxed{3\Rightarrow 1}$ Es inmediato.∎

PROPOSICION 3.4.

Supongamos que $\{n_0,n_1,...,n_p,C\}$ es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$ y sea $n \in S$.

Tesis

Son equivalentes :

1.- $NCC(\bar{G}_n) < NCC(G_n)$.

2.- $n \in \{W(n_0-1) + n_1 ,...,W(n_0-1) + n_p\}$ y además si $n = W(n_0-1)+n_i$, entonces n_i y n_0 están en distinta componente conexas de G_n.

3.- $NCC(G_n) = NCC(\bar{G}_n) + 1$

- Demostración -

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ Si $NCC(\bar{G}_n)<NCC(G_n)$, entonces $\bar{G}_n \neq G_n$. Ahora utilizando 1) del lema 3.2 tenemos que $n \notin \overline{RP}(C)$, de donde por 2) lema 3.2 tenemos $V_n \cup \{C\} \subseteq \bar{V}_n$.

Si el contenido fuese estricto, $V_n \cup \{C\} \subset \bar{V}_n$, ha de existir $n_i \in \{n_0,n_1,...,n_p\}$ tal que $n = C+n_i$, pero por la proposición 3.3 tendríamos $NCC(G_n) < NCC(\bar{G}_n)$. Así pues ha de darse la igualdad,

$V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n$, y entonces, aplicando 5) lema 3.2, tenemos (2).

$\boxed{2\Rightarrow 3}$ Veamos que $\bar{V}_n = V_n \cup \{C\}$:

Tenemos que $n = W(n_0-1)+n_i = C+n_0+n_i$, así $C\in\bar{V}_n$ y por tanto $V_n \cup \{C\} \subseteq \bar{V}_n$. Por otra parte si $n-n_j \in \bar{S}-S$ ha de ser $n-n_j = C$, pero $n = C+n_0+n_i$, de donde $n_j = n_0+n_i$ con lo que n_j no podría formar parte del sistema minimal de generadores de S. Así pues se tiene la igualdad buscada.

Notemos que

$$\overline{n_j n_k} \in \bar{E}_n - E_n \Leftrightarrow n-(n_j+n_k) \in \bar{S}-S \Rightarrow n = C+n_j+n_k \Rightarrow \overline{Cn_j} \text{ y } \overline{Cn_k} \in \bar{E}_n,$$

luego para calcular el número de componentes conexas de $\bar{G}_n$, en función del de G_n, basta añadir a G_n los lados de la forma $\overline{Cn_j}$.

Tenemos que $n = W(n_0-1)+n_i = C+n_0+n_i$ y por tanto $\overline{Cn_0}$ y $\overline{Cn_i} \in \bar{E}_n$, de donde $NCC(\bar{G}_n)+1 \leq NCC(G_n)$. Veamos que además no puede existir n_k en distinta componente conexa que n_i y n_0 y de forma que $\overline{Cn_k} \in \bar{E}_n$. Si tal n_k existiese, entonces $n = W+n_k$, con $W\in RP(n_0)$, (por estar n_k en distinta componente conexa que n_0) y además $n = C+n_k+s$, con $s\in\bar{S}$ (por $\overline{Cn_k} \in \bar{E}_n$). Por lo que ha de ser $W = C+s$, con $s\neq 0$, y por tanto $s\geq n_0$ y $W = W(n_0-1)$. En resumen, tenemos:

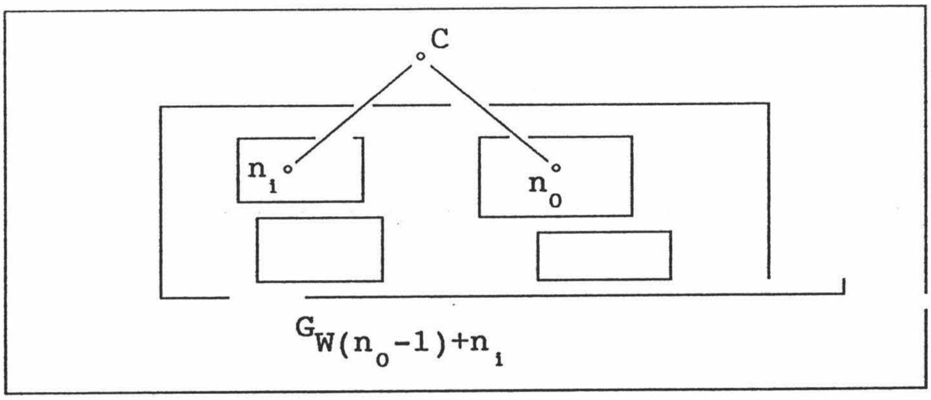
$$n = W(n_0-1)+n_k \quad \text{y} \quad n = W(n_0-1)+n_i,$$

de donde $n_k = n_i$ que es imposible. Tenemos por tanto

$$NCC(\bar{G}_n)+1 = NCC(G_n).$$

Además los grafos G_n y $\bar{G}_n$ son de la forma:

$\bar{G}_{W(n_0-1)+n_i}$



$\boxed{3\Rightarrow 1}$ Es inmediato.■

Resumiendo (y afinando un poco más) los resultados de las proposiciones (3.3) y (3.4) anteriores, tenemos:

<u>TEOREMA 3.5.</u>

Sea S un semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores, supongamos que $n_0 < n_1 < \ldots < n_p$ y que $n_0 < C$, donde C es el conductor de S.

Sea $n \in S$ y $\bar{S} = \langle n_0,n_1,\ldots,n_p,C \rangle$ verificandose que el conjunto $\{n_0,n_1,\ldots,n_p,C\}$ es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$.

<u>Tesis</u>

1.- $NCC(G_n) < NCC(\bar{G}_n) \iff NCC(\bar{G}_n) = NCC(G_n) + 1 \iff$

$\iff n \in \{C + n_0,\ C + n_1,\ \ldots\ ,\ C + n_p,\ 2C\}$.

2.- $NCC(\bar{G}_n) < NCC(G_n) \iff NCC(\bar{G}_n) + 1 = NCC(G_n) \iff$

$\iff$ [$n \in \{W(n_0-1)+ n_1\ ,\ \ldots\ ,\ W(n_0-1) + n_p\}$ y además si $n = W(n_0-1)+n_i$, entonces n_i y n_0 estan en distintas componentes conexas de G_n] .

3.- $\#\{RMS\} + 2 \le \#\{RM\bar{S}\} \le \#\{RMS\}+p+2$.

- Demostración -

3) Sean δ y δ' relaciones mínimas para S y $\bar{S}$ respectivamente.

Recordemos que para calcular #{RMS} y #{RM$\bar{S}$} basta con contar el número de componentes conexas de los grafos G_n y $\bar{G}_n$, respectivamente, que sean no conexos.

Ahora bien, si

$$n \notin \left[\{C+n_0,\ C+n_1,\ \dots\ ,\ C+n_p,\ 2C\} \cup \{W(n_0-1)+n_1,\ \dots\ ,W(n_0-1)+n_p\}\right],$$

claramente $NCC(G_n) = NCC(\bar{G}_n)$. Por otra parte:

a) Si $n \in \{C + n_0,\ C + n_1,\ \dots\ ,\ C + n_p,\ 2C\}$, entonces

$$NCC(\bar{G}_n) = NCC(G_n) +1$$

(apartado (1)) y por tanto, para estos n, $\#\delta'_n = \#\delta_n +1$.

b) Si $n \in \{W(n_0-1)+n_1,\ \dots\ ,W(n_0-1)+n_p\}$, entonces (por los apartados (1) y (2)) $\#\delta'_n \le \#\delta_n \le \#\delta'_n+1$.

Así, si llamamos

$A = \{C+n_0,C+n_1,\ \dots\ ,C+n_p,2C\}$ y

$B = \{W(n_0-1)+n_1,\ \dots\ ,W(n_0-1)+n_p\}$,

tenemos entonces:

$$\#\delta = \sum_{n\in\mathbb{N}} \#\delta_n = \sum_{n\in\mathbb{N}-(A\cup B)} \#\delta_n + \sum_{n\in A} \#\delta_n + \sum_{n\in B} \#\delta_n \le$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}-(A\cup B)} \#\delta'_n + \sum_{n\in A} (\#\delta'_n-1) + \sum_{n\in B} (\#\delta'_n+1) = \#\delta'-2.$$

$$\#\delta' = \sum_{n\in\mathbb{N}} \#\delta'_n = \sum_{n\in\mathbb{N}-(A\cup B)} \#\delta'_n + \sum_{n\in A} \#\delta'_n + \sum_{n\in B} \#\delta'_n \le$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}-(A\cup B)} \#\delta_n + \sum_{n\in A} (\#\delta_n+1) + \sum_{n\in B} \#\delta_n = \#\delta+p+2.$$

NOTA

Obsérvese que conocida una relación mínima para la congruencia núcleo de S, si $\{n_0,n_1,...,n_p,C\}$ es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$, es fácil calcular una relación mínima para la congruencia núcleo de $\bar{S}$ ya que sabemos las relaciones que tenemos que añadir y las que tenemos que suprimir.

Veamos un ejemplo:

Consideremos el semigrupo numérico S=<15,17,22> que tiene conductor C=87. Una relación mínima para S sería:

$$3x22=3x17+1x15.$$
$$6x15=4x17+1x22.$$
$$7x17=5x15+2x22.$$

Una relación mínima para $\bar{S}$=<15,17,22,87> será:

$$3x22=3x17+1x15.$$
$$6x15=4x17+1x22.$$
$$1x87+1x15=6x17.$$
$$1x87+1x17=2x22+4x15.$$
$$1x87+1x22=2x17+5x15.$$
$$2x87=2x17+5x22+2x15.$$

Observese que las cuatro últimas relaciones son las que se ganan al pasar de S a $\bar{S}$ mientras que las dos primeras son de las que se conservan. La relación 7x17=5x15+2x22, se pierde cuando pasamos de S a $\bar{S}$ puesto que $119=W(n_0-1)+17$.

Estudiemos ahora el caso en que $\{n_0,n_1,...,n_p,C\}$ no es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$.

LEMA 3.6.

Supongamos que $\{n_0,n_1,\ldots,n_p,C\}$ no es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$ y $n \in S$.

Tesis

1.- $n_p = C+n_0$.

2.- $\{n_0,n_1,\ldots,n_{p-1},C\}$ es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$.

3.- $n \in \overline{RP}(C) \Rightarrow \bar{G}_n = G_n$.

4.- $V_n \cup \{C\} \subset \bar{V}_n \Rightarrow \exists\, n_i \in \{n_1,\ldots,n_{p-1}\}$ tal que $C+n_i = n$.

5.- $\left[\ V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n \ \text{ y } \ NCC(G_n) < NCC(\bar{G}_n)\ \right] \Rightarrow n = 2C$.

6.- $n \notin RP(n_p) \Rightarrow NCC(\bar{G}_n) \leq NCC(G_n)$.

7.- $V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n \Rightarrow NCC(G_n) \leq NCC(\bar{G}_n)$.

8.- $\left[\ V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\} \ \text{ y } \ NCC(\bar{G}_n) < NCC(G_n)\ \right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow n \in \{n_p + n_1,\ldots,n_p + n_{p-1}, 2n_p\} .$$

- Demostración -

1) Como $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ es sistema minimal de generadores y $C \notin S$, si no fuese $\{n_0,n_1,\ldots,n_p,C\}$ sistema minimal de generadores de $\bar{S}$ existiría $n_j \in \{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ tal que $n_j = C+s$, con $s \in \bar{S}-\{0\}$, y por tanto $n_j \geq C+n_0 = W(n_0-1)$, pero como $n_j \in RP(n_0)$, también $n_j \leq W(n_0-1)$, así que ha de ser $n_j = W(n_0-1)$. Por otra parte, como $n_p \in RP(n_0)$ y $n_j \leq n_p$, ha de ser $n_j = n_p$.

2) Es claro teniendo en cuenta que $C \notin \langle n_0,n_1,\ldots,n_{p-1}\rangle$ y que $C+s > n_{p-1}$, $\forall\, s \in \bar{S}-\{0\}$.

3) Se tiene:

$$n \in \overline{RP}(C) \Rightarrow C \notin \bar{V}_n \Rightarrow n-C \notin \bar{S} \Rightarrow n-n_p = n-C-n_0 \notin \bar{S} \Rightarrow n_p \notin V_n .$$

Por tanto $V_n \subseteq \bar{V}_n$ y $E_n \subseteq \bar{E}_n$. Veamos que también $\bar{V}_n \subseteq V_n$ y $E_n \subseteq \bar{E}_n$.

Supongamos que existe n_i tal que $n-n_i \in \bar{S}-S$, entonces $n = C+n_i$

que no es un resto primario para C, lo cual contradice las hipótesis así $V_n = \bar{V}_n$.

Por otra parte, si $n-(n_i+n_j) \in \bar{S}-S$ entonces $n = C+n_i+n_j$ que no es un resto primario para C y por tanto contradice las hipótesis. Así $E_n = \bar{E}_n$ y en definitiva $G_n = \bar{G}_n$.

4) Tenemos que:

$$V_n \cup \{C\} \subset \bar{V}_n \Rightarrow \left[\exists\ n_i \in \{n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}\} \text{ tal que } n - n_i \in \bar{S} - S\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n-n_i = C \Rightarrow n = C + n_i.$$

Veamos que $n_i \neq n_0$. Si $n_i = n_0$ tendríamos (utilizando 1) que

$$n = C+n_0 = n_p,$$

y por tanto $n_p \in V_n$, mientras que $n_p \notin \bar{V}_n$ (absurdo).

5) Como $V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n$, tenemos que $C \in \bar{V}_n$ y así existe $s \in \bar{S}-\{0\}$ tal que $n = C+s$. Además, como $NCC(\bar{G}_n) > NCC(G_n)$, el grafo $\bar{G}_n$ no puede tener lados de la forma $\overline{Cn_i}$ (por el mismo argumento esgrimido en la demostración de 4 de la proposición 3.2) y por tanto $s-n_i = n-(C + n_i) \notin \bar{S}$, por lo que ha de ser $n = 2C$.

6) Tenemos que

$$n \notin RP(n_p) \Rightarrow n-n_p \in S \Rightarrow n-(C+n_0) \in S \Rightarrow n - C \in \bar{S},$$

luego $n_p \in V_n$ y $C \in \bar{V}_n$, así $V_n \cup \{C\} \subseteq \bar{V}_n \cup \{n_p\}$. Distinguimos entonces dos casos:

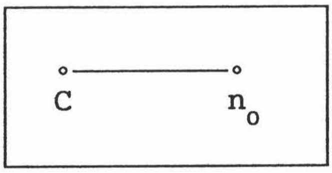
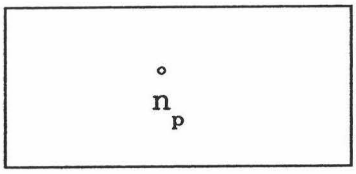
a) $V_n \cup \{C\} \subset \bar{V}_n \cup \{n_p\}$.

b) $V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$.

Veamos que si ocurre a) entonces $NCC(\bar{G}_n) = NCC(G_n)$. En efecto, si ocurre a), ha de existir $n_i \in \{n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}\}$ tal que $n-n_i \in \bar{S}-S = \{C\}$ así $n = C + n_i$. Por otro lado, $n \notin RP(n_p)$ y por tanto $n-n_p \in S$ pero, por el apartado 1), $n_p = C+n_0$ y así

$$n-n_p = n-(C + n_0) = C + n_i - (C+n_0) \in S,$$

por lo que tenemos $n_i - n_0 \in S$, de donde $n_i = n_0$ y como consecuencia $n = C+n_0 = n_p$, siendo entonces

$\bar{G}_n =$  y $G_n =$ 

Veamos ahora que si ocurre b) se tiene $NCC(\bar{G}_n) \le NCC(G_n)$. En efecto, obsérvese que si $n-(n_p+n_j) = n-(C+n_0+n_j) \in S$ entonces $n-(C+n_j) \in \bar{S}$. Así $\overline{n_p n_i} \in E_n$ implica que $\overline{Cn_i} \in \bar{E}_n$. Por otra parte, claramente $\overline{n_i n_j} \in E_n$ implica que $\overline{n_i n_j} \in \bar{E}_n$.

Como consecuencia el grafo $\bar{G}_n$ puede ser obtenido a partir de G_n, cambiando el nombre del vértice n_p por C y añadiendo lados (si ha lugar), pero no nuevos vértices. Claramente entonces

$$NCC(\bar{G}_n) \le NCC(G_n).$$

7) $\bar{G}_n$ contiene un vértice más que G_n, el C, y nuevas aristas que serán de la forma $\overline{n_i n_j}$ y $\overline{Cn_i}$, con $n_i, n_j \in V_n$.

Ahora bien si $n-(n_i+n_j) \in \bar{S}-S = \{C\}$, entonces $n = C+n_i+n_j$ y por tanto $\overline{Cn_i}, \overline{Cn_j} \in \bar{E}_n$. Así a efectos de componentes conexas de $\bar{G}_n$ basta añadirle a G_n las aristas de la forma $\overline{Cn_i}$.

Observese que $n = C+s$ con $s \in \bar{S}-\{0\}$ entonces $s \ge n_0$, y por tanto $n \ge W(n_0-1)$ de donde -por lema 3.1. (2)- $n \notin \overline{RP}(n_0)$. Así $n_0 \in \bar{V}_n$ y como $n_0 \ne C$, tenemos que $n_0 \in V_n$.

Si suponemos $NCC(\bar{G}_n) < NCC(G_n)$, entonces $NCC(G_n) \ge 2$ y por tanto existe $n_j \in V_n$ tal que n_j y n_0 estan en distintas componentes conexas de G_n y $n-(C + n_j) = s_1 \in \bar{S}$ (i.e. el lado $\overline{Cn_j} \in \bar{E}_n$). Ahora bien, si n_j y n_0 estan en distintas componentes conexas de G_n, ha de existir $W \in RP(n_0)$ tal que $n = W+n_j$. Por tanto

$$n = W+n_j = C+n_j+s_1,$$

de donde $W = C+s_1$ (y además $s_1 \neq 0$). Así $s_1 = n_0$ y $W = C + n_0 = n_p$, lo que contradice las hipótesis (ya que en este caso tendríamos que $n_p \in V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n$).

8) Como $V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$ tenemos que $n \notin RP(n_p)$ y por tanto podemos aplicar el mismo argumento que en (6) apartado b), para deducir que $\bar{G}_n$ puede ser obtenido a partir de G_n cambiando el nombre del vértice n_p por C y añadiendo lados (si ha lugar) pero no nuevos vértices. Ahora bien, a efectos de componentes conexas basta añadirle las de la forma $\overline{Cn_i}$.

Como C es un vértice de $\bar{V}_n$ (haciendo el mismo razonamiento que en 7) tenemos que $n_0 \in V_n$. Por otra parte $NCC(\bar{G}_n) < NCC(G_n)$, luego $NCC(G_n) \geq 2$ y asi existe $n_j \in V_n$ en distinta componente conexa que n_0.

Distinguimos ahora dos casos:

a) Que podamos elegir $n_j \neq n_p$.

b) Que el único vértice de V_n en distinta componente conexa que n_0 sea n_p.

Demostremos que si ocurre a) entonces $n = n_p+n_j$ y si ocurre b) entonces $n = 2n_p$. En efecto:

Supongamos a), por ser $NCC(\bar{G}_n)<NCC(G_n)$ y la forma en que hemos obtenido $\bar{G}_n$ a partir de G_n, podemos encontrar n_j en distinta componente conexa que n_0 y de forma que el lado $\overline{Cn_j}$ esté en $\bar{G}_n$. Así $n-(C + n_j) = s_1 \in \bar{S}$ y $n = W + n_j$, con $W \in RP(n_0)$, luego $n = W + n_j = C + n_j + s_1$ de donde $W = C + s_1$ lo que implica que

$s_1 = n_0$ y $W = C + n_0 = n_p$. Por tanto $n = n_p + n_j$.

Supongamos que b) es cierto. Entonces $(n-n_p)-n_j \notin S$, para todo $j=1,\dots,p-1$, por lo que claramente $n-n_p \in \{0,n_p\}$, ya que $n_p \in V_n$. Pero $NCC(G_n) \geq 2$, así $n \neq n_p$ y por tanto $n=2n_p$.■

PROPOSICION 3.7

Supongamos que $\{n_0,n_1,\dots,n_p,C\}$ no es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$. Sea $n \in S$.

Tesis

Son equivalentes :

1.- $NCC(G_n) < NCC(\bar{G}_n)$.

2.- $n \in \{C + n_1,\dots,C + n_{p-1},2C\}$.

3.- $NCC(\bar{G}_n) = NCC(G_n) + 1$.

- Demostración -

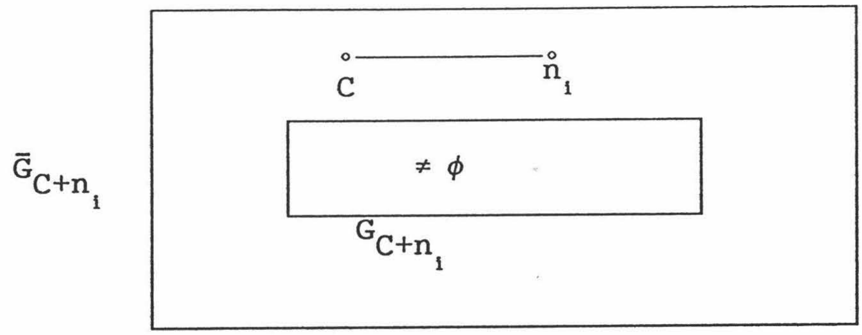
$\boxed{1\Rightarrow2}$ Si $n \notin RP(n_p)$, por 6) del lema 3.6, se tiene $NCC(\bar{G}_n) \leq NCC(G_n)$. Luego podemos suponer que $n \in RP(n_p)$. Además podemos suponer que $n \notin \overline{RP}(C)$ (ya que si $n \in \overline{RP}(C)$, entonces $G_n = \bar{G}_n$), así tenemos que $V_n \cup \{C\} \subseteq \bar{V}_n$. Ahora bién:

Si $V_n \cup \{C\} \subset \bar{V}_n$, por 4) del lema 3.6, existe $n_i \in \{n_1,\dots,n_{p-1}\}$ tal que $n = C + n_i$ y por tanto se tiene (2).

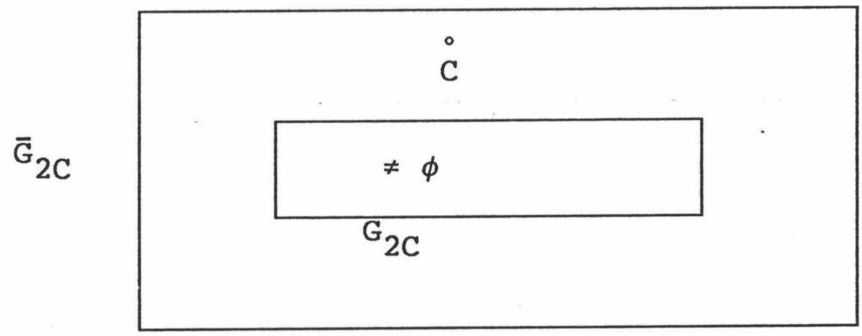
Si $V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n$, por 5) del lema 3.6, $n = 2C$ cumpliendose también en este caso (2).

$\boxed{2\Rightarrow3}$ Sea $n \in \{C + n_1,\dots,C + n_{p-1},2C\}$, veamos como son los grafos para estos n:

a) $n = C+n_i$. Entonces



b) $n = 2C$. Entonces



La demostración es análoga a la realizada para $\boxed{2 \Rightarrow 3}$ en la proposición (3.3), tengase en cuenta que $n_p \notin V_{C+n_i}$ y $n_p \notin V_{2C}$.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Es inmediato.■

PROPOSICION 3.8

Supongamos que $\{n_0, n_1, \ldots, n_p, C\}$ no es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$. Sea $n \in S$.

Tesis

Son equivalentes :

1.- $NCC(\bar{G}_n) < NCC(G_n)$.

2.- $n \in \{n_p + n_1, \ldots, n_p + n_{p-1}, 2n_p\}$.

3.- $NCC(\bar{G}_n) + 1 = NCC(G_n)$.

- Demostración -

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ Podemos distinguir dos casos:

a) $n \in RP(n_p)$.

b) $n \notin RP(n_p)$.

a) Supongamos que $n \in RP(n_p)$, podemos entonces suponer que $n \notin \overline{RP}(C)$, ya que de lo contrario deducimos que $G_n = \bar{G}_n$. Así $V_n \cup \{C\} \subseteq \bar{V}_n$:

Si $V_n \cup \{C\} \subset \bar{V}_n$, por 4) del lema 3.6, existe $n_i \in \{n_1,...,n_{p-1}\}$ tal que $n = C + n_i$ y así estaríamos en las condiciones de la proposición (3.7) anterior verificandose entonces $NCC(\bar{G}_n) > NCC(G_n)$. Por lo que este caso no puede darse.

Si $V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n$, por 7) del lema 3.6, tenemos que $NCC(\bar{G}_n) \geq NCC(G_n)$, luego este caso tampoco puede darse.

b) Supongamos que $n \notin RP(n_p)$. Entonces $n \neq n_p$ (ya que si $n = n_p$ tenemos $NCC(\bar{G}_n) = NCC(G_n)$ que contradice (1)).

Ahora

$$n \notin RP(n_p) \Rightarrow n-n_p \in S \Rightarrow n-(C+n_0) \in S \Rightarrow n-C \in \bar{S} \Rightarrow V_n \cup \{C\} \subseteq \bar{V}_n \cup \{n_p\}$$

Distinguimos de nuevo dos casos:

$V_n \cup \{C\} \subset \bar{V}_n \cup \{n_p\}$. Ha de existir en este caso n_i de $\{n_0, n_1, ..., n_{p-1}\}$ tal que $n-n_i \in \bar{S}-S$. Entonces $n-n_i = C$ y por tanto $n = C + n_i$, de donde $NCC(\bar{G}_n) \geq NCC(G_n)$ (que contradice (1)).

$V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$. En este caso, aplicando 8) del lema 3.6, tenemos que $n \in \{n_p + n_1, ..., n_p + n_{p-1}, 2n_p\}$.

$\boxed{2\Rightarrow 3}$ Distinguimos dos casos:

a) $n = n_p + n_i$, con $i \in \{1,...,p-1\}$.

b) $n = 2n_p$.

a) Supongamos $n = n_p+n_i$. Veamos que

$$\boxed{\overset{\circ}{n}_p \text{———————} \overset{\circ}{n}_i}$$

es una componente conexa de G_n.

Claramente n_p y n_i están en la misma componente conexa. Veamos que no hay ningún otro vértice en dicha componente.

Sea $n_j \in V_n$:

Si $n_p+n_i-(n_p+n_j) \in S$, entonces $n_i-n_j \in S$ y así $n_i = n_j$.

Si $n_p+n_i-(n_i+n_j) \in S$, entonces $n_p-n_j \in S$ y así $n_p = n_j$.

Denotemos V_n^1, V_n^2, ... , V_n^r los conjuntos de vértices correspondientes a las distintas componentes conexas de G_n, donde $V_n^1 = \{n_p,n_i\}$.

Por otra parte $n_p+n_i \notin RP(n_0)$ (ya que n_p es el mayor resto primario de n_0 en S) y por tanto $n_0 \in V_n$. Supongamos que $n_0 \in V_n^2$.

Veamos ahora que $V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$:

Claramente $V_n \cup \{C\} \subseteq \bar{V}_n \cup \{n_p\}$. Además, si la inclusión fuese estricta existiría n_j tal que $n_p+n_i-n_j \in \bar{S}-S$. Entonces $n_p+n_i-n_j = C$ y por tanto $n_p+n_i = C+n_j$, de donde $C+n_0+n_i = C+n_j$ y así $n_0+ n_i = n_j$ (que es absurdo).

Veamos ahora que los conjuntos de vértices correspondientes a las distintas componentes conexas de $\bar{G}_n$ son:

$$\bar{V}_n^1 = (V_n^1 - \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{C\} ,$$

$$\bar{V}_n^2 = V_n^3 , \ldots , \bar{V}_n^{r-1} = V_n^r .$$

Claramente $\{(V_n^1 - \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{C\}\} \subseteq \bar{V}_n^1$, ya que

$$n_p + n_i = C + n_0 + n_i$$

y por tanto n_0, n_i y C están en la misma componente conexa de $\bar{G}_n$.

Probemos que no hay más vértices en esta componente conexa, si esto no fuese cierto tendría que ocurrir uno de los siguientes casos:

i) Que existan $n_j \in (V_n^1 - \{n_p\}) \cup V_n^2$ y $n_k \notin V_n^1 \cup V_n^2 \cup \{C\}$ tales que $\overline{n_j n_k} \in \bar{E}_n$.

ii) Que exista $n_k \notin V_n^1 \cup V_n^2 \cup \{C\}$ tal que $\overline{Cn_k} \in \bar{E}_n$.

Supongamos que i) es cierto. Entonces $n_p+n_i-(n_j+n_k) \in \bar{S}-S$ y por tanto $n_p+n_i = C+(n_j+n_k)$. Ahora bien, como $n_k \notin V_n^2$ tenemos que $n = n_p+n_i = W+n_k$, con $W \in RP(n_0)$, luego $C+n_j+n_k = W+n_k$ de donde $C+n_j = W$ y por tanto $n_j = n_0$ y $W = W(n_0-1) = n_p$. Obtenemos así que $n_p + n_i = n_p + n_k$ lo que implica que $n_i = n_k$ y esto es absurdo (ya que n_k y n_i pertenecen a distintas componentes conexas de G_n).

Supongamos que ii) es cierto. Entonces $n_p+n_i - (C+n_k) \in \bar{S}$ y por tanto $n = C+n_k+s$, con $s \in \bar{S}$. Por otra parte $n = W+n_k$ con $W \in RP(n_0)$, luego $W = C+s$ de donde $s = n_0$ y $W = n_p$. Tenemos así que $n_p+n_i = n_p+n_k$, con lo que $n_i = n_k$ lo cual es también absurdo.

Por lo tanto tenemos $\bar{V}_n^1 = (V_n^1 - \{n_p\}) \cup V_n^2 \cup \{C\}$. Veamos ahora que $\bar{V}_n^e = V_n^{e+1}$, $2 \le e \le r-1$. Para ello bastará con probar que si $n_k \in \bar{V}_n^e$ y $n_j \in \bar{V}_n^t$, con $e,t \in \{2,\ldots,r-1\}$ y $e \ne t$, entonces

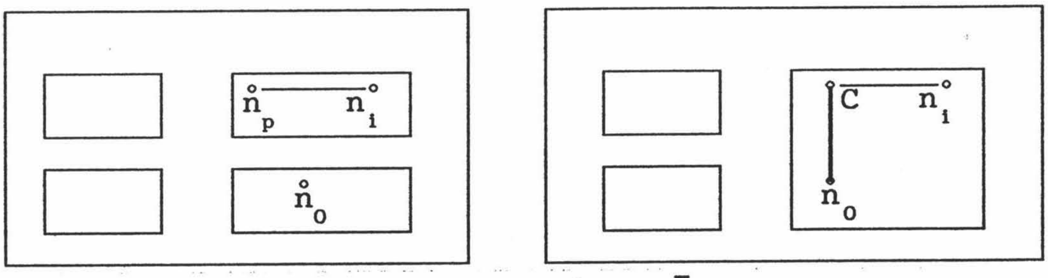
$$n-(n_k+n_j) \notin \bar{S}.$$

En efecto, supongamos que $n-(n_k+n_j) \in \bar{S}$, como n_k y n_j están en distintas componentes conexas de G_n, tenemos que $n-(n_k+n_j) \notin S$ y por tanto $n-(n_k+n_j) \in \bar{S}-S$, así $n = C+n_k+n_j$. Por otra parte $n_k \notin \bar{V}_n^1$ lo que implica que $n = W + n_k$ con $W \in RP(n_0)$, obtenemos así que

$$W+n_k = C+n_k+n_j$$

y por tanto $W = C+n_j$, de donde $n_j=n_0$ lo cual es absurdo.

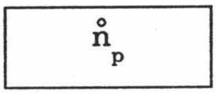
Graficamente sería :



$G_{n_p+n_i}$ $\bar{G}_{n_p+n_i}$

b) Supongamos ahora $n = 2n_p$.

Veamos que



es una componente conexa de G_n. Para ello, veremos que no hay más vértices en la componente conexa de n_p.

Supongamos que $2n_p-(n_p+ n_k)\in S$ entonces $n_p-n_k\in S$ y por tanto $n_p=n_k$ (ya que n_p y n_k pertenecen a un sistema minimal de generadores de S).

Denotemos por $V_n^1, V_n^2, \ldots, V_n^r$ los conjuntos de vértices correspondientes a las distintas componentes conexas de G_n y supongamos que $V_n^1=\{n_p\}$. Notemos que $2n_p \notin RP(n_0)$ y por tanto $n_0 \in V_n$, supongamos que $n_0\in V_n^2$.

Veamos que $V_n \cup \{C\} = \bar{V}_n \cup \{n_p\}$:

Claramente $V_n \cup\{C\} \subseteq \bar{V}_n \cup \{n_p\}$. Por otra parte, si existe $n_i\in (\bar{V}_n \cup \{n_p\})-(V_n \cup \{C\})$ entonces $2n_p - n_i \in \bar{S}-S$ y por tanto $2n_p = C+n_i$, pero como $n_p=C+n_0$, tendríamos que $n_0+n_p = n_i$ lo cual es absurdo.

Veamos que $\bar{V}_n^1 = V_n^2 \cup \{C\}$, $\bar{V}_n^2 = V_n^3$, ... , $\bar{V}_n^{r-1} = V_n^r$ son los conjuntos de vértices correspondientes a las distintas componentes conexas de $\bar{G}_n$:

1) $\bar{V}_n^1 = V_n^2 \cup \{C\}$. En efecto:

Claramente $V_n^2 \cup \{C\} \subseteq \bar{V}_n^1$, ya que $2n_p = 2C + 2n_0$ y por tanto n_0 y C están en la misma componente conexa de $\bar{G}_n$. Para ver la otra inclusión, basta con probar que se verifica i) e ii) siguientes:

i) Si $n_j \in V_n^2$ y $n_k \notin V_n^2 \cup \{C\} \cup \{n_p\}$, entonces $2n_p-(n_j+n_k) \notin \bar{S}$.

ii) Si $n_k \notin V_n^2 \cup \{C\} \cup \{n_p\}$, entonces $2n_p-(C+n_k) \notin \bar{S}$.

En efecto:

i) Si existe $n_j \in V_n^2$ y $n_k \notin V_n^2 \cup \{C\} \cup \{n_p\}$ tal que $2n_p-(n_j+n_k) \in \bar{S}$, como $2n_p-(n_j+n_k) \notin S$, tenemos que $2n_p-(n_j+n_k) \in \bar{S}-S$ y así $2n_p = C+n_j+n_k$. Ahora bien, $n_k \notin V_n^2$ y por tanto $2n_p = W+n_k$, con $W \in RP(n_0)$, luego $C+n_j+n_k = W+n_k$, de donde $C+n_j = W$ y tenemos $n_j = n_0$ y $W = W(n_0-1) = n_p$. Por tanto $2n_p = n_p+n_k$ y así $n_p = n_k$ (absurdo).

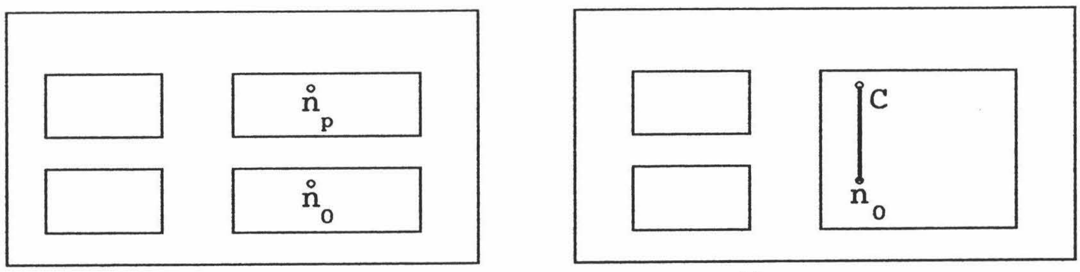
ii) Si existe $n_k \notin V_n^2 \cup \{C\} \cup \{n_p\}$ tal que $2n_p-(C+n_k) \in \bar{S}$, entonces $2n_p = C+n_k+s$, con $s \in \bar{S}$. Ahora
$n_k \notin V_n^2 \Rightarrow 2n_p = W+n_k$, con $W \in RP(n_0) \Rightarrow W = C+s \Rightarrow s = n_0$ y $W = n_p$, por tanto $2n_p = n_p+n_k$ y así $n_p = n_k$ (absurdo).

2) $\bar{V}_n^e = V_n^{e+1}$, $2 \le e \le r-1$. En efecto, bastará con probar que si $n_k \in \bar{V}_n^e$ y $n_j \in \bar{V}_n^t$, con $e,t \in \{2,\dots,r-1\}$ y $e \neq t$, entonces

$$n-(n_k+n_j) \notin \bar{S}.$$

Si se diera $n-(n_k+n_j) \in \bar{S}$, como $n-(n_k+n_j) \notin S$, tendríamos que $n-(n_k+n_j) \in \bar{S}-S$ y así $n = C+n_k+n_j$. Ahora bien, $n_k \notin \bar{V}_n^1$ y por tanto $n = W+n_k$, con $W \in RP(n_0)$, así $W+n_k = C+n_k+n_j$ de donde $W = C+n_j$ y tendríamos $n_j = n_0$ (absurdo).

Graficamente tendríamos:



G_{2n_p} $\qquad$ $\bar{G}_{2n_p}$

$\boxed{3\Rightarrow 1}$ Es inmediato. ■

Resumiendo los resultados de las proposiciones (3.7) y (3.8) obtenemos:

<u>TEOREMA 3.9</u>

Sea S un semigrupo numérico y $\{n_0, n_1, \ldots, n_p\}$ su sistema minimal de generadores, supongamos que $n_0 < n_1 < \ldots < n_p$ y que $n_0 < C$, donde C es el conductor de S.

Sea $n \in S$ y $\bar{S} = \langle n_0, n_1, \ldots, n_p, C \rangle$, supongamos que el conjunto $\{n_0, n_1, \ldots, n_p, C\}$ no es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$.

<u>Tesis</u>

1.- $NCC(G_n) < NCC(\bar{G}_n) \Leftrightarrow NCC(\bar{G}_n) = NCC(G_n) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \in \{C + n_1, \ldots, C + n_{p-1}, 2C\}$.

2.- $NCC(\bar{G}_n) < NCC(G_n) \Leftrightarrow NCC(\bar{G}_n) + 1 = NCC(G_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \in \{n_p + n_1, \ldots, n_p + n_{p-1}, 2n_p\}$.

3.- $\#\{RMS\} = \#\{RM\bar{S}\}$.

\- Demostración -

Notese que al pasar de S a $\bar{S}$ ganábamos p relaciones, que corresponden a $C + n_1, \ldots, C + n_{p-1}, 2C$, y se pierden otras p, las correspondientes a $n_p + n_1, \ldots, n_p + n_{p-1}, 2n_p$. Luego se mantiene el número de relaciones.■

NOTA

Obsérvese que si $\{n_0, n_1, \ldots, n_p, C\}$ no es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$, conocida una relación mínima para la congruencia núcleo de S es fácil calcular una relación mínima para la congruencia núcleo de $\bar{S}$, pues sabemos las relaciones que tenemos que añadir y las que tenemos que suprimir.

Los dos últimos teoremas (3.5 y 3.9) nos permiten calcular una relación mínima para la congruencia núcleo de $\bar{S}$ a partir de una relación mínima para la congruencia núcleo de S, tanto si $\{n_0, n_1, \ldots, n_p, C\}$ es sistema minimal de generadores como si no.

Veamos un ejemplo:

Consideremos el semigrupo numérico S=<15,17,22,80,87> que tiene como conductor C=72. Una relación mínima para S (observese que S se ha obtenido añadiendo el conductor al semigrupo numérico <15,17,22,87>) sería:

3x22=3x17+1x15.

6x15=4x17+1x22.

1x87+1x15=6x17.

1x87+1x17=2x22+4x15.

1x87+1x22=2x17+5x15.

2x87=2x17+5x22+2x15.

1x80+1x15=3x17+2x22.

1x80+1x17=5x15+1x22.

1x80+1x22=1x87+1x15.

$1x80+1x87=10x15+1x17.$

$2x80=2x17+3x22+4x15.$

Consideremos ahora el semigrupo $\bar{S}$=<15,17,22,72,80>. Observese que se obtiene a partir de S añadiendole su conductor C=72, estamos en las hipótesis del teorema 3.9. y por tanto podemos deducir que una relación mínima para $\bar{S}$ sería:

$3x22=3x17+1x15.$

$6x15=4x17+1x22.$

$1x72+2x15=6x17.$

$1x72+1x17=2x22+3x15.$

$1x72+1x22=2x17+4x15.$

$2x72=2x17+5x22.$

$1x80+1x15=3x17+2x22.$

$1x80+1x17=5x15+1x22.$

$1x80+1x22=1x72+2x15.$

$1x80+1x72=9x15+1x17.$

$2x80=2x17+3x22+4x15.$

<u>PROPOSICION 3.10</u>

Sea la sucesión de semigrupos numéricos siguiente:

$$S_1= S,\ S_2= S_1 \cup \{C_1\},\ \dots\ ,S_{i+1}= S_i \cup \{C_i\}\ ,\ \dots$$

donde C_i es el conductor de S_i.

<u>Tesis</u>

1.- $\exists\ e \in \mathbb{N}$ tal que $S_e= <n_0,n_0+1,\ \dots\ ,n_0+(n_0-1)>$.

2.- $\forall\ i \in \{1,\dots,e-1\}$ se verifica:

$$\#\{RMS_i\}+2 \le \#\{RMS_{i+1}\} \iff \begin{cases} C_i + n_0 \in RP(n_0) \\ y \\ C_i + n_0 \notin \{n_1, \ldots, n_p\} \end{cases}.$$

- Demostración -

1) Puesto que S_{i+1} se obtiene añadiendo a S_i el máximo natural que no pertenece a S_i, i.e. el conductor C_i de S_i, la demostración de 1) es clara.

2) $\boxed{\Rightarrow}$

$$C_i+n_0 \notin RP(n_0) \Rightarrow C_i \in S \Rightarrow C_i \in S_i$$

y esto es absurdo, así $C_i+n_0 \in RP(n_0)$.

Por otro lado, supongamos $C_i+n_0= n_j$, con $n_j\in \{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ y demostremos que n_j es generador minimal de S_i, así tendríamos (usando el teorema 3.9) $\#\{RMS_i\}=\#\{RMS_{i+1}\}$ lo que contradice las hipótesis.

En efecto, supongamos que n_j no es un generador minimal de S_i entonces existirán $k<i$ y $s_i\in S_i-\{0\}$ tales que $n_j= C_k+s_i$. Ahora bien, como $s_i\neq 0$, entonces $n_0\le s_i$ además $C_i<C_k$, por ser $i>k$. Luego $n_j= C_k+s_i> C_i+n_0= n_j$, absurdo.

$\boxed{\Leftarrow}$

Si $C_i+n_0\in RP(n_0)-\{n_1, \ldots ,n_p\}$, veamos que entonces C_i+n_0 no es un generador minimal de S_i aplicando entonces el teorema (3.5) tendremos que $\#\{RMS_i\} + 2 \le \#\{RMS_{i+1}\}$.

En efecto, si $C_i+n_0\in RP(n_0)-\{n_1, \ldots ,n_p\}$ y C_i+n_0 fuese un generador minimal de S_i tendríamos que $C_i+n_0=C_k$ para algún $k<i$, pero esto es absurdo ya que $C_i+n_0\in S$ y $C_k\notin S$.■

PROPOSICION 3.11

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores

$$\{n_0, n_0+1, \ldots, n_0+(n_0-1)\}.$$

Tesis

$$\#\{RMS\} = \frac{n_0(n_0-1)}{2}.$$

- Demostración -

Denotaremos por $n_0 = n_0$, $n_1 = n_0+1$, ... , $n_{n_0-1} = n_0+(n_0-1)$. Sea $n \in S$, tenemos entonces:

$$G_n \text{ no conexo} \Rightarrow \left[n = W+n_j, \text{ con } W \in RP(n_0)-\{0\} \right] \Rightarrow$$

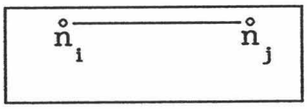
$$\Rightarrow \left[n = W+n_j, \text{ con } W, n_j \in \{n_1, n_2, \ldots, n_{n_0-1}\} \right].$$

Observese que tales $n \in S$ son de la forma

$n = n_i+n_j$ con $i \neq j$ ó

$n = 2n_j$.

con $i \neq 0 \neq j$. En el primer caso se tiene que



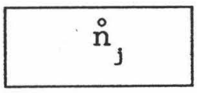
es *p+30Xuna componente conexa de $G_{n_i+n_j}$, ya que

$$n_i+n_j-(n_j+n_k) \in S \Rightarrow n_i-n_k \in S \Rightarrow n_i = n_k$$

y

$$n_i+n_j-(n_i+n_k) \in S \Rightarrow n_j-n_k \in S \Rightarrow n_j = n_k.$$

Analogamente en el segundo caso



es una componente conexa de G_{2n_j}.

Además n_i+n_j y $2n_j \notin RP(n_0)$, por tanto $n_0 \in V_n$ por lo que los grafos $G_{n_i+n_j}$ y G_{2n_i} tienen otras componentes conexas (al menos otra más en la que esté n_0). En definitiva, si G_n es no conexo entonces G_n tiene la componente conexa correspondiente a n_0 y una más (distinta de la anterior), para cada expresión de n en la forma $n = n_i + n_j$, con i y j distintos de cero. Por tanto una relación mínmia para S tendrá tantos elementos como expresiones de la forma n_i+n_j, i.e. conbinaciones con repetición de (n_0-1) elementos tomados de dos en dos. Así

$$\#\{RMS\} = \sum_{i=1}^{n_0-1} i = \frac{n_0(n_0-1)}{2} . \blacksquare$$

PROPOSICION 3.12

Sea S un semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ y supongamos que $n_0 < n_1 < \ldots < n_p$.

Tesis

$$\#\{RMS\} \leq \frac{n_0(n_0-1)}{2} - 2(n_0-1-p)$$

- Demostración -

Sabemos por la proposición 3.10 que dado S puedo considerar la sucesión de semigrupos

$S_1 = S,\ S_2 = S_1 \cup \{C_1\},\ldots,S_{i+1} = S_i \cup \{C_i\},\ldots$

$S_e = \langle n_0,n_0+1,\ldots,n_0+(n_0-1)\rangle$ donde C_i es el conductor de S_i.

En cada paso se mantiene o se aumenta (al menos en dos) el cardinal de cada relación mínima, además dichos aumentos se corresponden con los restos primarios de n_0 distintos de cero y no generadores minimales de S que sabemos que hay justamente

(n_0-1-p).

PROPOSICION 3.13

Sean S y $\bar{S}$ semigrupos numéricos y C el conductor de S.

Tesis

$\bar{S} = S \cup \{C\} \Leftrightarrow S = < \bar{S}-\{x\} \ , \ x+n_0 >$ donde x es un generador minimal de $\bar{S}$ mayor que el conductor de $\bar{S}$ y n_0 es el mínimo generador de $\bar{S}$.

- Demostración -

$\boxed{\Rightarrow}$ $S = < \bar{S} -\{C\} \ , \ C+n_0 >$ y claramente C es un generador minimal de $\bar{S}$ mayor que su conductor ya que C es el conductor de S.

$\boxed{\Leftarrow}$ Bastará ver que x es el conductor de S

Como x es un generador minimal de $\bar{S}$ es claro que $x \notin S$, ahora bien como, es mayor que el conductor de $\bar{S}$ es claro que $x + n \in S$ $\forall \ n \in \mathbb{N}-\{0\}$.

NOTA

La proposición (3.13) nos permite contruir a partir del semigrupo numérico $<n_0,n_0+1,n_0+2,...,n_0+(n_0-1)>$, todos los elementos de $\mathcal{S}(n_0)$. Pudiendo ordenarlos en forma de árbol como adelantamos en la introducción de este capítulo. Con lo visto hasta ahora es claro que al avanzar por las ramas de dicho árbol, los semigrupos que nos vamos encontrando, tienen cada vez mayor conductor, menor o igual número de generadores minimales y menor o igual cardinal de sus relaciones mínimas.

DEFINICION 3.14

Dados S y S' dos elementos de $\mathscr{S}(n_0)$, diremos que S' desciende de S, si existe un número finito $S_0, S_1, \ldots, S_r$ de elementos de $\mathscr{S}(n_0)$ verificando que $S_r=S'$, $S_0=S$ y $S_{i+1}=S_i \cup \{C_i\}$ donde C_i es el conductor de S_i para todo $i \in \{0,1,\ldots,r-1\}$.

DEFINICION 3.15

Un elemento de $\mathscr{S}(n_0)$ diremos que es final de rama si no desciende de ningun otro.

PROPOSICION 3.16

Un elemento de $\mathscr{S}(n_0)$ es final de rama si y solamente si no tiene generadores minimales mayores que el conductor.

- Demostración -

Es consecuencia inmediata de la proposición 3.13.■

NOTA

Observese que conocida una relación mínima para un elemento de $\mathscr{S}(n_0)$ aplicando reiteradamente los teoremas (3.5) y (3.9) podemos conocer facilmente una relación mínima para un semigrupo que descienda del dado. Destaquemos también el hecho de que algunos semigrupos númericos finales de rama son los responsables de que el cardinal de una relación mínima para un semigrupo numérico arbitrario no se pueda acotar en función del número de generadores minimales ya que los generadores minimales mayores que el conductor aportan a lo sumo p+2 relaciones en una relación mínima para el semigrupo numérico.

CAPITULO 4

SEMIGRUPOS RELACIONALMENTE MÁXIMOS.

En el capítulo anterior hemos visto como, a partir de un semigrupo numérico arbitrario con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,...,n_p\}$, construiamos una cadena de semigrupos numéricos obteniendose cada uno de estos a partir del anterior añadiendole el conductor; siendo el semigrupo

$$S(n_0)=<n_0,n_0+1,...,n_0+(n_0-1)>$$

el último de esta cadena. Además veíamos como los cardinales de los conjuntos de relaciones mínimas de los semigrupos en esta cadena estaban en orden no decreciente. Deducimos así que #{RMS} es máximo de entre todos aquellos semigrupos numéricos que tienen como mínimo generador minimal n_0.

También hemos visto (proposición 3.11) que

$$\#\{RMS(n_0)\}=\frac{n_0(n_0-1)}{2}.$$

El objetivo de este capítulo es estudiar aquellos semigrupos numéricos S con mínimo generador minimal n_0 y que tengan $\#\{RMS\}=\frac{n_0(n_0-1)}{2}$. Este tipo de semigrupos serán llamados "relacionalmente máximos".

Terminaremos este capítulo viendo que todo semigrupo numérico se puede poner como suma de semigrupos númericos relacionalmente máximos.

DEFINICION 4.1

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,...,n_p\}$ su sistema minimal de generadores. Diremos que S es un semigrupo relacinoalmente máximo si $\#\{RMS\} = \dfrac{n_0(n_0-1)}{2}$.

TEOREMA 4.2

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,...,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Tesis

S es relacionalmente máximo si, y solo si, $p = n_0-1$

- Demostracion -

Que la condición $p=n_0-1$ es necesaria es consecuencia inmediata de la proposición 3.12. Por otra parte la demostración de la suficiencia es idéntica a la de la proposición 3.11.∎

PROPOSICION 4.3

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,...,n_p\}$ su sistema minimal de generadores. Supongamos que

$$RP(n_0) = \{ W(0)=0, W(1), \dots ,W(n_0-1) \}$$

y consideremos $\bar{S} = \langle W(0)+n_0, W(1)+n_0, \dots ,W(n_0-1)+n_0\rangle$.

Tesis

$\bar{S}$ es relacionalmente máximo.

- Demostración -

En virtud del teorema 4.2, bastará probar que el conjunto $\{n_0, \bar{W}(1)= W(1)+n_0, \dots ,\bar{W}(n_0-1)= W(n_0-1)+n_0 \}$ es sistema minimal de generadores de $\bar{S}$.

Supongamos que

$$\bar{W}(i) = a_0 n_0 + a_1\bar{W}(1) + \ldots + a_{n_0-1}\bar{W}(n_0-1),$$

entonces

$$W(i)+n_0 = a_0 n_0 + a_1(W(1)+n_0) + \ldots + a_{n_0-1}(W(n_0-1)+n_0)$$

de donde

$$W(i) = (a_0+a_1+ \ldots +a_{n_0-1} - 1)n_0 + a_1W(1)+ \ldots + a_{n_0-1}W(n_0-1)$$

y por tanto, teniendo en cuenta que $W(i)\in RP(n_0)$, deducimos que

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{n_0-1} - 1 = 0,$$

así $a_0= \ldots =a_{i-1}=a_{i+1}= \ldots =a_{n_0-1}=0$ y $a_i=1$. Queda entonces probado que $W(i)$ es generador minimal de $\bar{S}$.■

<u>LEMA 4.4</u>

Sea $\{0,W(1), \ldots ,W(n_0-1)\}$ un sistema completo módulo n_0 y consideremos $S=<n_0,W(1), \ldots ,W(n_0-1)>$.

<u>Tesis</u>

$RP(n_0)=\{0,W(1), \ldots ,W(n_0-1)\}$ si, y solo si, para todo $i,j\in\{1,\ldots ,n_0-1\}$, existen $W(k)\in \{0,W(1), \ldots ,W(n_0-1)\}$ y $m\in\mathbb{N}$ tales que $W(i) + W(j) = W(k) + mn_0$.

\- Demostración -

$\boxed{\Rightarrow}$ Es inmediata.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $i\in\{1, \ldots ,n_0-1\}$ y supongamos que

$$W(i) = an_0 + a_1W(1)+ \ldots +a_{n_0-1}W(n_0-1),$$

veamos que a ha de ser cero. Teniendo en cuenta que, por hipótesis, la suma de dos restos primarios es un resto primario más un múltiplo de n_0, podemos poner

$$a_1W(1)+ \ldots +a_{n_0-1}W(n_0-1)= W(k) + bn_0,$$

para b un cierto número natural. Así $W(i) = W(k) + (a+b)n_0$ de donde (por ser $W(k)$ y $W(i)$ parte de un sistema completo módulo n_0) tenemos $W(k)=W(i)$ y $a+b=0$. Por tanto $a=0$ y por consiguiente $W(i)\in RP(n_0)$.■

PROPOSICION 4.5

Sea S semigrupo relacionalmente máximo, con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1, \ldots ,n_{n_0-1}\}$.

Consideremos el semigrupo $\bar{S} =<n_0,n_1-n_0, \ldots ,n_{n_0-1}-n_0>$.

Tesis

$\overline{RP}(n_0) = \{0,n_1-n_0, \ldots ,n_{n_0-1}-n_0\}$.

- Demostración -

Para la demostración utilizaremos el lema 4.4.

Claramente $\{0,n_1-n_0, \ldots ,n_{n_0-1}-n_0\}$ es un sistema completo módulo n_0.

Sean $i,j\in\{1,\ldots,n_0-1\}$, entonces

$$(n_i-n_0) + (n_j-n_0) = n_i+n_j-2n_0,$$

teniendo en cuenta ahora que $\{n_0,n_1,\ldots,n_{n_0-1}\}$ es sistema minimal generadores, tenemos que $n_i+n_j=n_k+rn_0$ con $k\in\{0,1, \ldots ,n_0-1\}$ y $r\in\mathbb{N}-\{0\}$. Así pues:

$$(n_i-n_0)+(n_j-n_0)=(n_k-n_0)+(r-1)n_0, \text{ con } r-1\in\mathbb{N},$$

luego (aplicando el lema 4.4) tenemos que

$$\overline{RP}(n_0)=\{0,n_1-n_0, \ldots ,n_{n_0-1}-n_0\}.■$$

COROLARIO 4.6

Existe una correspondencia biyectiva entre los semigrupos numéricos con conductor C y mínimo generador minimal n_0, y los semigrupos relacionalmente máximos con conductor $C+n_0$, con mínimo generador minimal n_0 y con los demás generadores minimales mayores que $2n_0$.

- Demostración -

Es inmediata aplicando las proposiciones 4.3 y 4.5.■

PROPOSICION 4.7

Sea S semigrupo numérico relacionalmente máximo con sistema minimal de generadores $\{n_0<n_1< \ldots <n_{n_0-1}\}$.

Consideremos $\bar{S} =<n_0,n_1-n_0, \ldots ,n_{n_0-1}-n_0>$.

$n_k\in\{n_1, \ldots ,n_{n_0-1}\}$.

Tesis

n_k-n_0 no es un generador minimal de $\bar{S}$ si, y solo si, existen $i,j\in\{1, \ldots ,k-1\}$ tales que $n_i+n_j=n_k+n_0$.

- Demostración -

$\boxed{\Leftarrow}$ $n_k+n_0=n_i+n_j \Rightarrow n_k-n_0=n_i-n_0+n_j-n_0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sabemos en virtud de la proposición 4.5. que:

$$\overline{RP}(n_0)=\{0,n_1-n_0, \ \ldots \ ,n_{n_0-1}-n_0\}.$$

Si n_k-n_0 no es generador minimal de $\bar{S}$, como $n_k-n_0\in\overline{RP}(n_0)$, deducimos que existen dos elementos de $\overline{RP}(n_0)$ tales que:

$$n_k-n_0=n_i-n_0+n_j-n_0$$

y por tanto que $n_k+n_0=n_i+n_j$.

Obviamente, teniendo en cuenta que $n_0 < n_1 < \ldots < n_{n_0 - 1}$ deducimos que $i,j \in \{1, \ldots, k-1\}$.

TEOREMA 4.8

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0, n_1, \ldots, n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Tesis

Existen $S_0, S_1, \ldots, S_p$ semigrupos relacionalmente máximos tales que $S = S_0 + S_1 + \ldots + S_p$.

- Demostración -

Dado $n_i \in \{n_0, n_1, \ldots, n_p\}$, consideremos el conjunto

$$RP(n_i) = \{0, W^i(1), \ldots, W^i(n_i - 1)\}$$

de igual manera que en la proposición 4.3, se puede probar que el semigrupo numérico

$$S_i = \langle n_i, W^i(1) + n_i, \ldots, W^i(n_i - 1) + n_i \rangle$$

es relacionalmente máximo.

Es claro entonces que $S = S_0 + S_1 + \ldots + S_p$ ya que $S_i \subseteq S$ y $n_i \in S_i$, $\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, p\}$.■

NOTA

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los semigrupos numéricos $(\mathcal{S},+)$ tiene estructura de semigrupo. El teorema anterior nos esta diciendo que los semigrupos relacionalmente máximos son un sistema de generadores de $(\mathcal{S},+)$.

Observese también que las relaciones mínimas de un semigrupo numérico relacionalmente máximo las conocemos perfectamente. El gran problema está en deducir las relaciones mínimas de un semigrupo que es suma de dos en función de las relaciones mínimas de estos.

CAPITULO 5

SEMIGRUPOS SIMÉTRICOS

En este capítulo estudiaremos los semigrupos simétricos. En primer lugar los caracterizaremos como aquellos semigrupos numéricos con un único resto primario maximal, de lo cual se deduce que este tipo de semigrupos tiene que tener al menos un resto primario que no sea generador minimal. Esto nos permitirá definir los semigrupos "totalmente simétricos" como aquellos semigrupos simétricos con el máximo número de generadores minimales en función de su mínimo generador minimal. También veremos como todo semigrupo simétrico se puede poner como suma de semigrupos totalmente simétricos. Por otro lado clasificaremos los semigrupos simétricos en función de los totalmente simétricos, estableciendo ciertas biyecciones.

En este capítulo también refinaremos la cota dada en la proposición 3.12 para #{RMS}, en el caso en que S sea un semigrupo simétrico.

Veremos que si C es un número natural impar, existen siempre semigrupos simétricos con conductor C (y recíprocamente, todo semigrupo simétrico tiene por conductor un número impar). Daremos una cota superior para el número de semigrupos simétricos con este conductor.

Terminaremos el capítulo, construyendo semigrupos simétricos a partir de otros semigrupos simétricos. Daremos también algunas sugerencias sobre la posibilidad de que #{RMS} este acotado en función del número de generadores minimales de S, en el caso en que S sea simétrico.

DEFINICION 5.1

Un semigrupo numérico S se dice simétrico si :

Existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que, para todo $z \in \mathbb{Z}$, $z \in S$ si y soló si $m - z \notin S$.

DEFINICION 5.2

Sea S un semigrupo numérico arbitrario y $s \in S$. Dado $W \in RP(s)$ diremos que W es un resto primario maximal de s en S si:

Para todo $s' \in S-\{0\}$ se tiene que $W+s' \notin RP(s)$.

Al conjunto de los restos primarios maximales de s en S lo denotaremos por RPM(s).

PROPOSICION 5.3

Sea S un semigrupo simétrico y $\{ n_0<n_1< \dots <n_p \}$ su sistema minimal de generadores.

Tesis

El entero m que existe por ser S simétrico (según la definición 5.1) coincide con el conductor C de S.

- Demostración -

$0 \in S$ y teniendo en cuenta que S es simétrico $m = m-0 \notin S$.

Por otra parte $1,2, \dots ,n_0-1 \notin S$ y por tanto

$$m-1,m-2, \dots ,m-(n_0-1) \in S,$$

de donde $m-1+n_0,m-2+n_0, \dots ,m-(n_0-1)+n_0 \in S$ o lo que es lo mismo

$$m+(n_0-1),m+(n_0-2), \dots ,m+1 \in S.$$

Por otro lado $m-(m+n_0) \notin S$ y así $m+n_0 \in S$.

Resumiendo tenemos que

$$m+n_0, m+(n_0-1), m+(n_0-2), \ldots, m+1 \in S \quad \text{y que } m \notin S$$

es claro entonces que $m=C$.∎

PROPOSICION 5.4

Sea S semigrupo numérico y $s \in S$.

Supongamos que $RP(s) = \{ W(0)<W(1)< \ldots <W(s-1) \}$.

Tesis

S es simétrico si, y solo si,

$$W(i)+W(s-1-i) = W(s-1),$$

para todo $i \in \{0,1, \ldots ,s-1\}$.

- Demostración -

$\boxed{\Rightarrow}$ Si probamos que $W(s-1) - W(i) \in S$, para todo $i \in \{0,1,\ldots,s-1\}$, aplicando el apartado iii) del lema 1.17, obtendremos que $W(s-1)-W(i) \in RP(s)$ y de esto se deduce que $W(s-1)-W(i) = W(s-1-i)$, para todo $i \in \{0,1,\ldots,s-1\}$.

Ahora bien, $W(s-1)-W(i)= C+s-W(i)$, ya que $C+s=W(s-1)$, por otro lado $W(i)-s \notin S$ y por tanto $C-(W(i)-s) \in S$ por lo que $C+s-W(i) \in S$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $z \in \mathbb{Z}$ veamos que $z \in S \Leftrightarrow C - z \notin S$.

Claramente si $z \in S$ tenemos que $C-z \notin S$, ya que de lo contrario tendríamos que $C \in S$.

Si $z \notin S$ existirá $i \in \{0,1,\ldots,s-1\}$ tal que $z = W(i)-ks$, con $k \in \mathbb{N}-\{0\}$, y entonces

$$C-z = W(s-1) - s -(W(i)-ks) = W(s-i-1)+(k-1)s \in S.$$ ∎

NOTA

En [4] puede verse el siguiente enunciado :

$$\text{" } S \text{ simétrico} \Leftrightarrow \# \{ S \cap \{0,1,\dots,C\} \} = \frac{C+1}{2} \text{ ".}$$

La demostración es ahora inmediata, a partir de la proposición 5.3, ya que de esta se deduce que un semigrupo es simétrico si, y solo si, existe una correspondencia biyectiva entre los números naturales menores que el conductor que pertenecen al semigrupo y los que no pertenecen al semigrupo.

LEMA 5.5

Sea S semigrupo numérico y $s \in S$.

Tesis

Dado $W \in RP(s)$ existe $s_W \in S$ tal que $W + s_W \in RPM(s)$.

\- Demostración -

Bastará con tomar $s_W = \max \{ s' \in S \text{ tal que } W + s' \in RP(s) \}$, es claro que $W + s_W \in RPM(s)$.■

TEOREMA 5.6

Sea S semigrupo numérico y $s \in S$.

Tesis

S es simétrico $\Leftrightarrow \#\{RPM(s)\} = 1$

\- Demostración -

$\boxed{\Rightarrow}$ $W(s-1)$ es claramente el único resto primario maximal.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\#\{RPM(s)\} = 1$, obviamente $RPM(s) = \{ W(s-1) \}$ (ya que el máximo resto primario siempre es resto primario maximal).

Sea $W(i) \in RP(s)$, aplicando el lema 5.5, existirá $s_{W(i)} \in S$ tal que $W(i) + s_{W(i)} = W(s-1)$ y por consiguiente (aplicando el apartado iii) del lema 1.17) tenemos que $s_{W(i)} = W(s-1-i)$. La proposición 5.4 nos dice entonces que S es simétrico.■

TEOREMA 5.7

Sea S semigrupo simétrico y $\{n_0, n_1, \dots, n_p\}$ su sistema minimal de generadores. Supongamos que $RP(n_0) = \{ 0<W(1)< \dots <W(n_0-1) \}$ y consideremos $\bar{S} = <n_0, W(1)+n_0, \dots ,W(n_0-2)+n_0>$.

Tesis

1.- $\{n_0, \bar{W}(1)=W(1)+n_0 , \dots , \bar{W}(n_0-2) = W(n_0-2)+n_0\}$ es sistema minimal de generadores para $\bar{S}$.

2.- $\overline{RP}(n_0)= \{ 0,\bar{W}(1), \dots ,\bar{W}(n_0-2), \bar{W}(n_0-1) = W(n_0-1)+2n_0\}$.

3.- $\bar{S}$ es simétrico.

\- Demostración -

1) Supongamos que existe $i \in \{1,\dots,n_0-2\}$ tal que

$$W(i) + n_0= a_0n_0+ a_1(W(1)+n_0) + \dots + a_{n_0-2}(W(n_0-2)+n_0),$$

por ser W(i) un resto primario de n_0 en S, deducimos que

$$a_0+ a_1+ \dots+ a_{n_0-2} \le 1$$

de donde esta suma ha de ser 1 y así $a_i= 1$ y $a_j= 0$ si $j\neq i$.

Es claro pues que $W(i)+n_0$ es un generador minimal de $\bar{S}$.

2) Sea $i \in \{1,\dots,n_0-2\}$, entonces $\bar{W}(i) = W(i)+n_0 \in \overline{RP}(n_0)$ puesto que, por el apartado 1), sabemos que es generador minimal de $\bar{S}$ y por tanto es resto primario.

Veamos ahora que $W(n_0-1)+2n_0 \in \overline{RP}(n_0)$. En efecto: claramente (por ser S simétrico) $W(n_0-1)+2n_0= W(i)+n_0+ W(n_0-i-1)+n_0$ y por tanto $W(n_0-1)+2n_0 \in \bar{S}$ y además $W(n_0-1)+2n_0- n_0 \notin \bar{S}$ ya que de otro modo existirian números naturales $a_0, a_1, \dots, a_{n_0-2}$ verificando que

$$W(n_0-1) + n_0 = a_0 n_0 + a_1(W(1)+n_0) + \dots + a_{n_0-2}(W(n_0-2)+n_0)$$

y por tanto $a_0 + a_1 + \dots + a_{n_0-2} - 1 = 0$, ya que $W(n_0-1) \in RP(n_0)$, de aquí se tendría que $W(n_0-1) = n_0$ ó $W(n_0-1) = W(i)$ con $i \le n_0-2$, lo cual es absurdo. Así ha de ser $\bar{W}(n_0-1) = W(n_0-1) + 2n_0$.

3) Es inmediato teniendo en cuenta que :

$W(n_0-1) + 2n_0 - (W(i)+n_0) = (W(n_0-1) - W(i)) + n_0 = W(n_0-i-1) + n_0$

y aplicando la proposición 5.4.■

TEOREMA 5.8

Sea S un semigrupo simétrico y $\{ n_0 < n_1 < \dots < n_{n_0-2} \}$ su sistema minimal de generadores. Consideremos

$$\bar{S} = \langle n_0, n_1-n_0, \dots, n_{n_0-2}-n_0 \rangle .$$

Tesis

$\bar{S}$ es simétrico.

- Demostración -

Claramente

$RP(n_0) = \{ 0, W(1)=n_1 , \dots , W(n_0-2)=n_{n_0-2} , W(n_0-1) = n_1+n_{n_0-2} \}$,

Veamos en primer lugar que:

$\overline{RP}(n_0) = \{0, \bar{W}(1)=n_1-n_0, \dots, \bar{W}(n_0-2)=n_{n_0-2}-n_0, \bar{W}(n_0-1)=W(n_0-1)-2n_0\}$.

Obviamente

$$\{ 0, \bar{W}(1)=n_1-n_0 , \dots , \bar{W}(n_0-2)=n_{n_0-2}-n_0, \bar{W}(n_0-1)=W(n_0-1)-2n_0 \}$$

es un sistema completo modulo n_0, para ver que este conjunto coincide con $\overline{RP}(n_0)$ aplicaremos el lema 4.4 :

a) Sean $i,j \in \{1, \dots ,n_0-1\}$ y tales que $W(i)+W(j) \ne W(n_0-1)$, entonces existen $W(k) \in RP(n_0)$ y $m \in \mathbb{N}-\{0\}$ tal que

$$W(i)+W(j) = W(k) + mn_0$$

y por tanto

$$(W(i)-n_0) + (W(j)-n_0) = (W(k)-n_0) + (m-1)n_0.$$

b) Sean $i,j\in\{1, \ldots ,n_0-1\}$ y tales que $W(i)+W(j)=W(n_0-1)$ entonces $(W(i)-n_0)+(W(j)-n_0) = W(n_0-1)-2n_0$.

Tenemos entonces que

$$\overline{RP}(n_0) = \{0,\bar{W}(1)=n_1-n_0,\ldots,\bar{W}(n_0-2)=n_{n_0-2}-n_0,\bar{W}(n_0-1)=W(n_0-1)-2n_0\}$$

Probar ahora que $\bar{S}$ es simétrico es fácil, utilizando la proposición 5.4, puesto que

$$\bar{W}(n_0-1)-\bar{W}(i) = W(n_0-1)-2n_0-(W(i)-n_0) = W(n_0-1)-W(i)-n_0 =$$

$$= W(n_0-i-1) - n_0 = \bar{W}(n_0-i-1).\blacksquare$$

DEFINICION 5.9

Sea S semigrupo simétrico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores. Diremos que S es totalmente simétrico si $p = n_0-2$.

NOTA

Observese que un semigrupo simétrico tiene que tener al menos un resto primario distinto del cero no generador minimal, por tanto los semigrupos totalmente simétricos que tienen a n_0 como mínimo generador minimal son aquellos semigrupos simétricos con n_0 como mínimo generador minimal y que tienen además un número máximo de generadores minimales de entre todos estos.

COROLARIO 5.10

Existe una correspondencia biyectiva entre los semigrupos simétricos con conductor C y mínimo generador minimal n_0, y los semigrupos totalmente simétricos con conductor $C+2n_0$, mínimo generador minimal n_0 y con los demás generadores minimales mayores que $2n_0$.

- Demostración -

Es inmediata aplicando los teoremas 5.7 y 5.8.■

NOTA

Un resultado análogo al de la proposición 4.7. podemos destacar aqui. Si S es un semigrupo totalmente simétrico con sistema minimal de generadores $\{n_0<n_1< \ldots <n_{n_0-2}\}$ y llamamos $\bar{S} = <n_0, n_1-n_0, \ldots ,n_{n_0-2}-n_0>$, entonces dado $n_k \in \{n_1, \ldots ,n_{n_0-2}\}$ podemos asegurar que:

n_k-n_0 es generador minimal de $\bar{S}$ si, y solo si, existen $n_i, n_j \in \{n_1, \ldots ,n_{k-1}\}$ tales que $n_i+n_j=n_k+n_0$.

Nuestro próximo objetivo en este capitulo será calcular una cota para #{RMS}, donde S es un semigrupo simétrico, así como el de calcular el valor de #{RMS} cuando S es totalmente simétrico.

LEMA 5.11

Sea S un semigrupo simétrico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Supongamos que $RP(n_0) = \{ 0<W(1)< \ldots <W(n_0-1) \}$ y sea $n_i \in \{n_1,\ldots,n_p\}$.

Tesis

$G_{W(n_0-1)+n_i}$ es conexo ó $W(n_0-1)+n_i = c_0 n_0$, donde

$c_0=$ mínimo$\{ x\in\mathbb{N}-\{0\} \ / \ xn_0\in\langle n_1,\ldots,n_p\rangle \}$.

- Demostración -

Observese que para todo $j \in \{1,\ldots,p\}$

$$W(n_0-1)+n_i-(n_i+n_j) = W(n_0-1)-n_j \in S$$

luego $n_1,\ldots,n_p$ estan en la misma componente conexa, por tanto la única posibilidad para que el grafo no sea conexo es que tenga a

$$\boxed{\mathring{n}_0}$$

como una componente conexa. Pero para que esto ocurra ha de ser

$$W(n_0-1)+n_i = c_0n_0.\blacksquare$$

<u>LEMA</u> <u>5.12</u>

Sea S semigrupo simétrico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Supongamos que $RP(n_0)=\{ 0<W(1)< \ldots <W(n_0-1) \}$ y que

$$W(n_0-1)+n_i= c_0n_0,$$

para algún $i\in\{n_1,\ldots,n_p\}$, donde c_0 es el natural del lema 5.11 anterior.

<u>Tesis</u>

$p=1$.

- Demostración -

Veamos que $W+n_i\in RP(n_0)$, para todo $W\in RP(n_0)$ tal que $W\neq W(n_0-1)$. En efecto, supongamos que $W+n_i\notin RP(n_0)$, entonces

$$W+n_i= a_0n_0+a_1n_1+ \ldots +a_pn_p, \text{ con } a_0\in\mathbb{N}-\{0\}.$$

Teniendo ahora en cuenta que S es simétrico, dado $W\in RP(n_0)$ sabemos que existe $\bar{W}\in RP(n_0)$ tal que $W+\bar{W}=W(n_0-1)$, podemos asegurar también que $\bar{W}=d_1n_1+\ldots+d_pn_p$. Tenemos así que

$$c_0n_0 = W(n_0-1)+n_i = \bar{W}+W+n_i = a_0n_0+(a_1+d_1)n_1+ \dots +(a_p+d_p)n_p,$$

por tanto $(c_0-a_0)n_0 \in \langle n_1,\dots,n_p\rangle$, pero como c_0 era el mínimo natural positivo con esta condición, deducimos entonces que $(c_0-a_0)=0$. Así $(a_1+d_1)n_1+\dots+(a_p+d_p)n_p=0$, de donde se desprende que $\bar{W}=0$ y $W = W(n_0-1)$.

Tenemos entonces que

$$0+n_i,\ W(1)+n_i,\ \dots,\ W(n_0-2)+n_i \in \{0,W(1),\dots,W(n_0-1)\},$$

por lo tanto $W(1) = n_i$, $W(2) = 2n_i$, ... , $W(n_0-1) = (n_0-1)n_i$, de donde deducimos claramente que $S = \langle n_0,n_i\rangle$.■

PROPOSICION 5.13

Sea S un semigrupo totalmente simétrico y $\{n_0,n_1, \dots ,n_{n_0-2}\}$ su sistema minimal de generadores.

Supongamos además que $n_0 \geq 4$.

Tesis

$$\#\{RMS\} = \frac{(n_0-2)(n_0-1)}{2} - 1$$

- Demostración -

Recordemos que si $n \in S$ y G_n es no conexo entonces $n = W + n_j$, con $W \in RP(n_0)-\{0\}$ y $n_j \in \{n_1, \dots ,n_{n_0-2}\}$.

Como S es simétrico (ver la demostración del teorema 5.8) tenemos que

$$RP(n_0) = \{ 0,n_1, \dots ,n_{n_0-2}, W(n_0-1)=n_1+n_{n_0-2} \}.$$

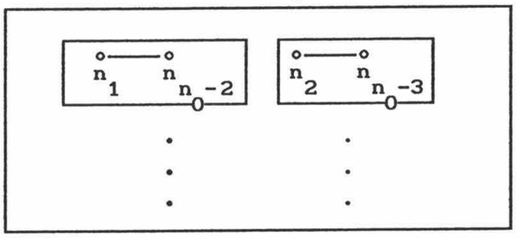
Aplicando por otra parte los lemas 5.11 y 5.12, obtenemos que $G_{W(n_0-1)+n_j}$ es conexo.

Como consecuencia tenemos que si G_n es no conexo entonces

$n = n_i + n_j$, con $n_i, n_j \in \{n_1, \ldots, n_{n_0-2}\}$ (puede ser $i = j$), y en este caso ha de ser $n_i+n_j = W(n_0-1)$ ó $n_i+n_j \notin RP(n_0)$. Por tanto solo tendremos que estudiar (para obtener una relación mínima) los grafos $G_{W(n_0-1)}$ y $G_{n_i+n_j}$ con $n_i+n_j \notin RP(n_0)$.

Ahora bién es fácil deducir que el grafo $G_{W(n_0-1)}$ es de la forma

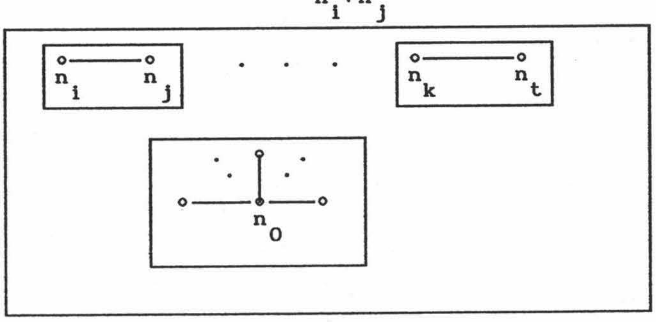
$G_{W(n_0-1)}$



es decir todos los lados $\overline{n_i n_j}$, con $n_i+n_j = W(n_0-1)$, estan en $G_{W(n_0-1)}$ (en particular siempre está el lado $\overline{n_1 n_{n_0-2}}$ y todos son de la forma $\overline{n_i n_{n_0-i-1}}$) y cada componente conexa de $G_{W(n_0-1)}$ tiene un lado, salvo en el caso de ser n_0 un número impar en el que existirá una componente conexa con sólo un vértice el $n_{\left(\frac{n_0-1}{2}\right)}$.

Por otra parte, el grafo $G_{n_i+n_j}$ es de la forma

$G_{n_i+n_j}$



es decir, todas las componentes conexas de $G_{n_i+n_j}$ tienen a lo sumo un lado que será de la forma $\overline{n_k n}$, con $n+n = n+n$ (en el caso $k=t\neq 0$ esta componente tendrá solo el vértice n_k). Salvo quizás una, la que correpode a n_0 (siempre un vértice en $G_{n_i+n_j}$) que puede tener a más de un lado, pero todos los vértices en esta componente son incidentes con n_0.

Deducimos así que los elementos de una relación mínima para S son de la forma:

$$n_i+n_j=a_0n_0+ s \quad \text{con } s \in S \text{ y } a_0 \neq 0$$

$$\text{o}$$

$$n_i+n_j = n_1+n_{n_0-2}$$

y por tanto $\#\{RMS\} = \left(\sum_{i=1}^{n_0-2} i \right) - 1 = \frac{(n_0-2)(n_0-1)}{2} - 1.$ ■

PROPOSICION 5.14

Sea S semigrupo simétrico, $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores y supongamos $p \geq 2$.

Tesis

$$\#\{RMS\} \leq \frac{(n_0-2)(n_0-1)}{2} - 1 + (p+2-n_0) .$$

- Demostración -

Como S es simétrico, si $RP(n_0)= \{0<W(1)< \ldots <W(n_0-1) \}$, se tiene que $W(n_0-1)$ no es generador minimal de S y por tanto, si denotamos por C el conductor de S, tenemos que (lema 3.6-1) $\{n_0, n_1, \ldots ,n_p, C \}$ es sistema minimal de generadores de $\bar{S} = \langle n_0,n_1,\ldots,n_p,C\rangle$.

Veamos que $\#\{RMS\}+p+2 = \#\{RM\bar{S}\}$, para ello recordemos que en el teorema 3.5, al pasar de una relación mínima para S a una de $\bar{S}$

ganábamos p+2 elementos y podíamos perder p, que correspondian a $W(n_0-1)+n_1,\ldots,W(n_0-1)+n_p$ (siempre que como mínimo los grafos para estos elementos fuesen no conexos). Pero en este caso particular, aplicando los lemas 5.11 y 5.12, se tiene que dichos grafos son siempre conexos, con lo cual no se pierden relaciones.

Por tanto (proposición 3.12)

$$\#\{RMS\}+p+2 = \#\{RM\bar{S}\} \le \frac{n_0(n_0-1)}{2} - 2(n_0-1-p-1),$$

de donde

$$\#\{RMS\} \le \frac{n_0(n_0-1)}{2} - 2(n_0-1-p-1)-p-2 =$$

$$= \frac{(n_0-2)(n_0-1)}{2} - 1 + (p+2-n_0).\blacksquare$$

<u>COROLARIO 5.15</u>

Sea S semigrupo simétrico, $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores y supongamos $p \ge 2$.

<u>Tesis</u>

$$\#\{RMS\} \le \frac{(n_0-2)(n_0-1)}{2} - 1$$

- Demostración -

Es inmediata aplicando la proposición 5.14 y teniendo en cuenta que por ser S simétrico $p+2 \le n_0$.■

<u>COROLARIO 5.16</u>

Sea S semigrupo simétrico, $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores y supongamos $p \ge 2$.

<u>Tesis</u>

$$S \text{ es totalmente simétrico} \Leftrightarrow \#\{RMS\} = \frac{(n_0-2)(n_0-1)}{2} - 1$$

- Demostración -

$\boxed{\Rightarrow}$ Ya lo hemos visto en la proposición 5.13.

$\boxed{\Leftarrow}$ Por la proposición 5.14, sabemos que

$$\#\{RMS\} \leq \frac{(n_0-2)(n_0-1)}{2} - 1 + (p+2-n_0)$$

luego para que $\#\{RMS\} = \dfrac{(n_0-2)(n_0-1)}{2} - 1$, debe de ocurrir que $p = n_0-2$ y por tanto que S sea totalmente simétrico.■

TEOREMA 5.17

Sea S semigrupo simétrico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Tesis

Existen $S_0,S_1,\ldots,S_p$ semigrupos totalmente simétricos tales que $S = S_0+S_1+ \ldots +S_p$.

- Demostración -

Dado $n_i \in \{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ supongamos que

$$RP(n_i) = \{\ 0<W^i(1)< \ldots <W^i(n_i-2)<W^i(n_i-1)\ \}.$$

Tomemos $S_i = \langle n_i,W^i(1)+n_i,\ldots,W^i(n_i-2)+n_i\rangle$, el teorema 5.7 nos garantiza que S_i es totalmente simétrico.

Es evidente entonces que $S = S_0+S_1+\ldots+S_p$.■

NOTA

El teorema anterior nos esta diciendo que todo semigrupo simétrico se puede poner como suma de semigrupos totalmente simétricos.

El reciproco no es cierto, la suma de semigrupos totalmente simétricos no tiene por que ser un semigrupo simétrico, sirva como ejemplo :

$$S_1 = \langle 4,5,6 \rangle,\ S_2 = \langle 4,6,7 \rangle \text{ y } S_1+S_2 = \langle 4,5,6,7 \rangle.$$

NOTA

Observese que el conductor de cualquier semigrupo simétrico es un número impar, ya que si C fuese par no se podría verificar que $\left(\frac{C}{2} \in S \Leftrightarrow C - \frac{C}{2} \notin S \right)$.

Si C es un número impar, claramente el semigrupo $S = \langle 2,C+2 \rangle$ es un semigrupo simétrico con conductor C. Por tanto existen semigrupos simétricos con cualquier tipo de conductor, siempre que este sea un número impar. Mas aún, en [8], se prueba el siguiente hecho :

PROPOSICION 5.18

Sea C un número impar, $\mathcal{S}(C)$ el conjunto de los semigrupos numéricos con conductor C y S un elemento de $\mathcal{S}(C)$. Entonces:
S es simétrico si, y solo si, S es maximal respecto de la inclusión en $\mathcal{S}(C)$.■

En el capitulo 10, estudiaremos algunas propiedades de estos maximales, de ahí que muchas de las cosas que narraremos en dicho capítulo, podrían haberse contado en este.

Nuestro próximo objetivo será ver que si C es un número impar, $n_0 \leq \frac{C+1}{2}$ y C no es un múltiplo de n_0. Entonces existe al menos un semigrupo totalmente simétrico con conductor C y mínimo generador minimal n_0.

LEMA 5.19

Sea S semigrupo simétrico, C su conductor y n_0 el mínimo generador minimal de S.

Tesis

$$n_0 \leq \frac{C+1}{2}.$$

- Demostración -

Sea $RP(n_0) = \{ 0<W(1)< \dots <W(n_0-1) \}$. Supongamos que $n_0>\frac{C+1}{2}$ y veamos que entonces llegamos a un absurdo. En efecto:

En primer lugar notemos que $W(1)>n_0$ y por tanto $W(1)\geq\frac{C+1}{2}+2$. Por otro lado $W(n_0-2) \geq n_0+(n_0-2) \geq \frac{C+1}{2} +1+n_0-2$. Aplicando ahora que S es simétrico tendremos que

$$W(n_0-1) = W(1) + W(n_0-2),$$

ahora bien

$$W(n_0-1) = W(1) + W(n_0-2) \geq \frac{C+1}{2} + 2 + \frac{C+1}{2} + n_0+1-2 = C + n_0+ 2 =$$
$$= W(n_0-1) + 2,$$

lo cual es absurdo.■

TEOREMA 5.20

Sea C un número impar y $3\leq n_0\leq\frac{C+1}{2}$, tal que n_0 no divide a C.

Tesis

El semigrupo

$$S = <n_0,\frac{C+1}{2}, \dots ,\frac{C+1}{2}+(m-1), \frac{C+1}{2}+(m+1), \dots ,\frac{C+1}{2}+(n_0-m-2),$$

$$\frac{C+1}{2}+(n_0-m),\ \ldots\ ,\frac{C+1}{2}+(n_0-1)\ >$$

es totalmente simétrico. Donde $m\in\{0,1,\ldots,n_0-1\}$ es el único que verifica

$$\frac{C+1}{2}+m = kn_0,\quad \text{con } k \in \mathbb{N}.$$

(Suponemos que $m<n_0-m-1$, a la hora de escribir los generadores de S).

Además C es el conductor S.

- Demostración -

Consideremos el conjunto

$$\{\ n_0,\frac{C+1}{2},\ \ldots\ ,\frac{C+1}{2}+(m-1),\ \frac{C+1}{2}+(m+1),\ \ldots\ ,\frac{C+1}{2}+(n_0-m-2),$$
$$\frac{C+1}{2}+(n_0-m),\ \ldots\ ,\frac{C+1}{2}+(n_0-1)\ \}$$

que es claramente sistema minimal de generadores de S, puesto que la suma de dos elementos de dicho conjunto distintos de n_0 es mayor o igual que C+1 y por consiguiente mayor que $\frac{C+1}{2}+(n_0-1)$ y por otra parte son incongruentes módulo n_0.

Observese que S tiene entonces n_0-1 generadores minimales.

Notemos que

$$C \equiv \frac{C+1}{2}+(n_0-m-1)\ (\text{mod } n_0),$$

ya que

$$C - \left(\frac{C+1}{2}+(n_0-m-1)\right) = \frac{C+1}{2}+m-n_0 = (k-1)n_0.$$

Y por tanto C no se puede poner como un múltiplo de n_0 mas un múltiplo de un elemento de la forma $\frac{C+1}{2}+i$, con $i\neq n_0-m-1$. Es claro entonces que $C\notin S$.

Observamos ahora que

$$C+n_0 = \frac{C+1}{2} + j + \frac{C+1}{2} + (n_0-j-1) \in S ,$$

y por tanto

$$RP(n_0) = \{ 0, \frac{C+1}{2}, \dots , \frac{C+1}{2}+(m-1), \frac{C+1}{2}+(m+1), \dots ,$$
$$\frac{C+1}{2}+(n_0-m-2), \frac{C+1}{2}+(n_0-m), \dots ,\frac{C+1}{2}+(n_0-1), C+n_0 \}.$$

Veamos ya que S es totalmente simétrico: S tiene n_0-1 generadores minimales, luego sólo tendremos que probar que es simétrico. En efecto,

$$C+n_0 - \left(\frac{C+1}{2}+j\right) = \frac{C+1}{2}+(n_0-j-1)$$

nos dice que $C+n_0$ es el único resto primario maximal, luego aplicando la proposición 5.6, obtenemos lo que queremos.■

En [8] aparece el siguiente hecho :

" Si denotamos por $\mathcal{S}_\Delta(C)$ al conjunto de los semigrupos simétricos con conductor C. Entonces $\#\mathcal{S}_\Delta(C) \geq 2^{E(C/8)}$, donde E(-) denota parte entera ".

Nuestro próximo objetivo, será dar una cota superior para $\#\mathcal{S}_\Delta(C)$.

<u>TEOREMA 5.21</u>

Sea $\mathcal{S}_\Delta(n_0,C)$ el conjunto de los semigrupos simétricos con conductor C y mínimo generador minimal n_0.

<u>Tesis</u>

Existe una aplicación inyectiva :

$$\varphi : \mathcal{S}_\Delta(n_0,C) \hookrightarrow \{1,2, \dots ,E(\frac{C}{n_0})\}^{E(\frac{n_0-2}{2})} .$$

Donde $\{1,2, \ldots ,E(\frac{C}{n_0})\}^{E(\frac{n_0-2}{2})}$ denota el producto cartesiano de $\{1,2, \ldots ,E(\frac{C}{n_0})\}$ consigo mismo $E\left(\frac{n_0-2}{2}\right)$-veces.

- Demostración -

Aplicando el algoritmo de Euclides a C y n_0 obtenemos que

$$C = qn_0 + r_{n_0-1}.$$

Sea $\{r_1,r_2, \ldots ,r_{n_0-2}\} = \{1,2, \ldots ,n_0-1\} - \{ r_{n_0-1}\}$. Y supongamos además que estan ordenados de manera que :

$$r_i + r_{n_0-i-1} \equiv r_{n_0-1} \pmod{n_0},$$

para todo $1 \leq i \leq n_0-2$. Llamamos $m = E(\frac{n_0-2}{2})$ y consideramos el subconjunto $\{ r_1,r_2,\ldots,r_m \}$.

Dado $S \in \mathcal{S}_{\Delta}(n_0,C)$, si $RP(n_0) = \{ 0,W(1),\ldots,W(n_0-2),W(n_0-1) \}$ podemos suponer que $W(i) \equiv r_i (\mathrm{mod}\, n_0)$, para todo $i \in \{1,2,\ldots,n_0-2\}$. Es claro que $r_i \leq W(i)$ y por tanto $W(i)= k_i n_0 + r_i$, para algún $k_i \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora que S queda perfectamente determinado por la m-upla $(k_1,k_2,\ldots,k_m)$, una vez fijado el conjunto $\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$, que no depende de S.

En efecto: esta m-upla nos determina $\{W(1),\ldots,W(m)\}$, y estos restos primarios (por ser S simétrico) nos determinan a su vez $\{W(n_0-2), \ldots ,W(n_0-m-1)\}$. Si n_0-2 es par, ya estarian determinados todos los restos primarios de S y en consecuencia S. Si n_0-2 es impar, nos queda por determinar el resto primario $W(\mathrm{central})=W(\frac{n_0-1}{2})$, pero es obvio (por ser S simétrico) que $W(\mathrm{central}) = \frac{W(n_0-1)}{2} = \frac{C+n_0}{2}$.

Por otra parte, tenemos que $k_i n_0+r_i<C$ y por tanto $k_i n_0 < C$, de donde $k_i \leq E(\frac{C}{n_0})$ y así $k_i \in \{1,2,\ldots,E(\frac{C}{n_0})\}$, para todo $i\in\{1,...,m\}$.

Para terminar, resaltemos el hecho de que la aplicación que asocia a cada elemento S de $\mathcal{S}_{\Delta}(n_0,C)$ la m-upla $(k_1,k_2,...,k_m)$, construida como hemos explicado anteriormente, es inyectiva (pues dos semigrupos que tuvieran la misma m-upla asociada, tendrian los mismos restos primarios y en consecuencia dichos semigrupos serían iguales), finalizando así la demostración.■

Como una consecuencia inmediata tenemos

COROLARIO 5.22

$$\#\mathcal{S}_{\Delta}(n_0,C) \leq E\left(\frac{C}{n_0}\right)^{E\left(\frac{n_0-2}{2}\right)} . \ ■$$

NOTA

1.- Obsevese que el teorema 5.21 anterior nos proporciona una cota superior para $\#\mathcal{S}_{\Delta}(C)$:

$$\#\mathcal{S}_{\Delta}(C) \leq \sum_{n_0=2}^{\frac{C+1}{2}} E\left(\frac{C}{n_0}\right)^{E\left(\frac{n_0-2}{2}\right)}$$

2.- Observese que si tomamos una m-upla cualquiera, $m = E\left(\frac{n_0-2}{2}\right)$,

$$(k_1,k_2,...,k_m) \in \{1,2,...,E\left(\frac{C}{n_0}\right)\}^m ,$$

y consideramos

$$X_1 = k_1n_0+r_1, \ ... \ ,X_m = k_mn_0+r_m$$

$$X_{n_0-i-1} = C+n_0-X_i \ \forall\ i \in \{1,\ldots,m\},$$

donde los r_i son los del teorema 5.21 anterior, y en el caso en que n_0-2 sea impar además tomamos

$$X(\text{central}) = \frac{C+n_0}{2}.$$

Entonces $S = \langle n_0, X_1, \ldots, X_{n_0-2}\rangle$ no tiene por que pertenecer a $\mathscr{S}_\Delta(n_0,C)$, ya que no tiene porque ser simétrico ni su conductor tiene porque ser C, esto nos dice que la aplicación del teorema 5.21 no es en general sobreyectiva.

Sin embargo el siguiente teorema nos mostrará como en las condiciones anteriores (nota 2) basta con que $C \notin S$ para poder asegurar que $S \in \mathscr{S}_\Delta(n_0,C)$.

<u>TEOREMA</u> <u>5.23</u>

Sea $S = \langle n_0, X_1, \ldots, X_{n_0-2}\rangle$, donde $X_1,\ldots,X_{n_0-2}$ son los del apartado 2) de la nota anterior.

<u>Tesis</u>

$S \in \mathscr{S}_\Delta(n_0,C)$ si, y solo si, $C \notin S$.

- Demostración -

$\boxed{\Rightarrow}$ Es inmediato ya que el conductor de S es C.

$\boxed{\Leftarrow}$ Veamos en primer lugar que C es el conductor de S, o lo que es equivalente que $C+n_0$ es el máximo resto primario módulo n_0. En efecto: por construcción

$$C+n_0 = X_1+X_{n_0-2} = X_2+X_{n_0-3} = \ldots \in S$$

y por hipótesis $(C+n_0)-n_0 = C \notin S$, por tanto $C+n_0 \in RP(n_0)$. Por otra parte $C+n_0-X_i = X_{n_0-i-1} \in S$, por tanto

deducimos -aplicando el apartado iii) del lema 1.17- que

$X_i \in RP(n_0)$, para todo $i \in \{1,\ldots,n_0-2\}$, y así podemos afirmar que

$$RP(n_0) = \{0,X_1,\ldots,X_{n_0-2}, C+n_0\}$$

por ser X_1, X_2, ... $,X_{n_0-2}$ un sistema incongruente módulo n_0 y cada X_i no ser congruente con $C+n_0$ ni con 0 módulo n_0. Claramente entonces $C+n_0$ es el máximo resto primario de n_0.

Por último para ver que S es simétrico basta con aplicar la proposición 5.4. ∎

<u>NOTA</u>

Supongamos que $S \in \mathscr{S}_\Delta(n_0,C)$ y que

$$RP(n_0) = \{\ 0<W(1)< \ \ldots\ <W(n_0-2)<W(n_0-1)\ \},$$

se tiene que $W(n_0-1)=C+n_0$. Sea

$$\{0,W(1),\ldots,W(m)\} = RP(n_0) \cap \{x \in \mathbb{N} \ /\ x \le \frac{C+n_0}{2}\ \}$$

y consideremos el semigrupo $\bar{S} = \langle n_0,W(1),\ \ldots\ ,W(m)\rangle$, es claro que $C\notin\bar{S}$ y que $\{0,W(1),\ldots,W(m)\} \subseteq \overline{RP}(n_0)$.

Observese que $m = E(\frac{n_0-2}{2})$, si n_0 es par, y que $m = E(\frac{n_0-2}{2})+1$, si n_0 es impar, en cuyo caso $W(m) = \frac{C+n_0}{2}$.

La siguiente proposición nos dice algo así como el recíproco de esta propiedad.

<u>PROPOSICION 5.24</u>

Sean

$$X_1,\ldots,X_m \in \{n_0+1,n_0+2,\ \ldots\ ,E(\frac{C+n_0}{2}\ )\},$$

donde $m = E(\frac{n_0-2}{2})$, si n_0 es par, y $m = E(\frac{n_0-2}{2})+1$, si n_0 es impar, en cuyo caso tomamos $X_m = \frac{C+n_0}{2}$, además $\{X_1,X_2,\ldots,X_m\}$ un sistema incongruente módulo n_0.

Consideremos $S = \langle n_0, X_1, \ldots, X_m \rangle$ y supongamos que $C \notin S$ y que $\{X_1, \ldots, X_m\} \subseteq RP(n_0)$.

<u>Tesis</u>

$$\bar{S} = \langle n_0, X_1, \ \ldots \ , X_m, C+n_0-X_1, \ \ldots \ , C+n_0-X_m \rangle \in \mathcal{S}_\Delta(n_0, C).$$

- Demostración -

Provemos que C es el conductor de $\bar{S}$, para lo cual bastará con probar que $C+n_0$ es el máximo en $\overline{RP}(n_0)$. En efecto, $C+n_0=X_1+(C+n_0-X_1)\in\bar{S}$ y $(C+n_0)-n_0=C\notin\bar{S}$ ya que en otro caso, tendríamos una expresión del tipo

$$C = a_0n_0+ a_1X_1+\ldots+ a_mX_m+ (C+n_0-X_j),$$

para algún $j\in\{1,\ldots,m\}$, (observese que como $C+n_0-X_j>\frac{C+n_0}{2}$ entonces a lo sumo puede aparecer un sumando de este tipo en la expresión anterior), despejando tendríamos

$$X_j= (a_0+1)n_0+ a_1X_1+ \ \ldots \ + a_mX_m \ ,$$

lo cual es absurdo puesto que $X_j \in RP(n_0)$. Así $C+n_0$ es un resto primario de n_0 en $\bar{S}$. Por otro lado es ya fácil de demostrar que

$$\overline{RP}(n_0)= \{0, X_1, \ \ldots \ , X_m, C+n_0-X_1, \ \ldots \ , C+n_0-X_m, C+n_0\},$$

y por tanto $C+n_0$ es máximo. Una vez calculado el conjunto $\overline{RP}(n_0)$, es inmediato comprobar (usando la proposición 5.4) que $\bar{S}$ es simétrico. ■

Hemos visto, como a partir de un semigrupo simétrico pasamos a un semigrupo totalmente simétrico y viceversa. Daremos a continuación dos proposiciones, encaminadas a construir semigrupos simétricos a partir de otros semigrupos simetricos.

PROPOSICION 5.25

Sea S semigrupo simétrico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,...,n_p\}$ y conductor C. Tomemos n_i tal que $n_i<C/2$, y consideremos $\bar{S}=\left(S-\{n_i\}\right)\cup\{C-n_i\}$.

Tesis

1.- $\bar{S}$ es semigrupo numérico.

2.- C es el conductor de $\bar{S}$.

3.- Un sistema minimal de generadores para $\bar{S}$ es de la forma:

$$\{n_0,...,n_{i-1},n_{i+1},...,n_p,C-n_i,m_0,...,m_q\}$$

donde $\{m_0,...,m_q\} \subseteq \{2n_i,3n_i,n_i+n_0,...,n_i+n_{i-1},n_i+n_{i+1},...,n_i+n_p\}$.

4.- $\bar{S}$ es simétrico.

- Demostración -

1) Probaremos que la suma de dos elementos x,y de $\bar{S}$ es un elemento de $\bar{S}$. Para ello distinguiremos tres casos:

a) $x,y\in S-\{n_i\}$.

b) $x\in S-\{n_i\}$, $y=C-n_i$.

c) $x=y=C-n_i$.

a) En este caso $x+y\in S-\{n_i\}$ y por tanto a $\bar{S}$.

b) Si $x=0 \Rightarrow x+y=C-n_i\in\bar{S}$.

Si $x>0 \Rightarrow n_i-x\notin S \Rightarrow$ (por ser S simétrico) $\Rightarrow C-(n_i-x)\in S \Rightarrow C-n_i+x\in\bar{S}$. Ya que de lo contrario tendríamos que $C-n_i+x=n_i$, de donde $2n_i=C+x$, así deducimos que $n_i>C/2$, lo cual es absurdo por hipótesis.

c) $(C-n_i)+(C-n_i)=2(C-n_i)>C \Rightarrow (C-n_i)+(C-n_i)\in\bar{S}$.

2) y 3) son inmediatos.

4) Veamos que $x\notin\bar{S} \Rightarrow C-x\in\bar{S}$. En efecto, distinguimos dos casos:

a) $x\notin S$.

b) $x\in S$.

a) $x\notin S \Rightarrow C-x\in S$. Si $C-x\neq n_i$ entonces $C-x\in\bar{S}$. El caso $C-x=n_i$, no se puede dar ya que de lo contrario tendríamos que $C-n_i=x\notin\bar{S}$.

b) $x\in S-\bar{S} \Rightarrow x=n_i \Rightarrow C-x=C-n_i\in\bar{S}$.■

PROPOSICION 5.26

Sean $S_1=\langle n_0, \ldots ,n_r\rangle$ y $S_2=\langle n_{r+1}, \ldots ,n_p\rangle$ dos semigrupos numéricos. Tomemos $\lambda,\mu\in\mathbb{N}$ tales que $(\lambda,\mu)=1$ y consideremos los siguientes semigrupos numéricos:

$$S=\langle\lambda\mu,\mu n_0, \ldots ,\mu n_r,\lambda n_{r+1}, \ldots ,\lambda n_p\rangle$$

$$S_1'=\langle\lambda,n_0, \ldots ,n_r\rangle$$

$$S_2'=\langle\mu,n_{r+1}, \ldots ,n_p\rangle$$

Tesis

S es simétrico si, y solo si, S_1' y S_2' son simétricos.

- Demostración -

Denotaremos por $RP(\lambda\mu)$, $RP^1(\lambda)$ y $RP^2(\mu)$ los restos primarios de los elementos $\lambda\mu$, λ y μ en los semigrupos S, S_1' y S_2' respectivamente.

Veamos que $RP(\lambda\mu)=\{\mu W_1+\lambda W_2/W_1\in RP^1(\lambda)$ y $W_2\in RP^2(\mu)\}$. En efecto, sea $W\in RP(\lambda\mu)$, $W=a_0\mu n_0+\ldots+a_r\mu n_r+a_{r+1}\lambda n_{r+1}+\ldots+a_p\lambda n_p=$ $\mu(a_0n_0+\ldots+a_rn_r)+\lambda(a_{r+1}n_{r+1}+\ldots+a_pn_p)$. Consideremos los elementos

$$W_1=a_0n_0+\ldots+a_rn_r \quad y \quad W_2=a_{r+1}n_{r+1}+\ldots+a_pn_p$$

obviamente, $W=\lambda W_1+\mu W_2$, probaremos que $W_1\in RP^1(\lambda)$ y $W_2\in RP^2(\mu)$. Supongamos que $W_1\notin RP^1(\lambda)$, entonces $W_1=a\lambda+b_0n_0+\ldots+b_rn_r$ con $a\neq0$. De donde $W=a\lambda\mu+b_0\mu n_0+\ldots+b_r\mu n_r+a_{r+1}\lambda n_{r+1}+\ldots+a_p\lambda n_p$ con $a\neq0$, lo cual es absurdo ya que $W\in RP(\lambda\mu)$. De lo visto podemos deducir que: $RP(\lambda\mu) \subseteq \{\mu W_1+\lambda W_2/W_1\in RP^1(\lambda)$ y $W_2\in RP^2(\mu)\}$. Para obtener la otra inclusión razonaremos sobre el cardinal de ambos conjuntos. Observese que $\#RP(\lambda\mu)=\lambda\mu$ y que $\#\{\mu W_1+\lambda W_2/W_1\in RP^1(\lambda)$ y $W_2\in RP^2(\mu)\}\leq\lambda\mu$ por tanto se ha de verificar la igualdad, osea que:

$$RP(\lambda\mu)=\{\mu W_1+\lambda W_2/W_1\in RP^1(\lambda) \text{ y } W_2\in RP^2(\mu)\}.$$

Es inmediato a partir de aquí que S es simétrico si, y solo si, S_1' y S_2' son simétricos.∎

<u>NOTA</u>

Observese que un caso especialmente interesante de la proposicion anterior es aquel en el que tomamos $\lambda\in S_1$ y $\mu\in S_2$, en dicho caso tenemos que:

$$S_1=S_1',\ S_2=S_2' \text{ y } S=<\mu n_0,\ \ldots\ ,\mu n_r,\lambda n_{r+1},\ \ldots.\ ,\lambda n_p>.$$

<u>NOTA</u>

El semigrupo $S = <n_0,n_1>$ es siempre simétrico y además $\#\{RMS\} = 1$.

En [6] se estudian los semigrupos simétricos S con tres generadores minimales y resulta que en estos casos $\#\{RMS\} = 2$.

En [7] como ya hemos dicho anteriormente, se muestra una familia de semigrupos numéricos con cuatro generadores minimales y con los cardinales de los conjuntos de relaciones mínimas no acotado superiormente. Sin embargo en [9] se estudian los semigrupos simétricos S con cuatro generadores minimales y resulta que en estas condiciones $\#\{RMS\} = 3$ ó 5. Este hecho ha llevado a pensar sobre la posibilidad de que el $\#\{RMS\}$ de un semigrupo simétrico S se pueda acotar en función del número de generadores minimales de este. Nosotros, aunque no hemos sido capaces de resolver esta cuestión, damos a continuación algunas observaciones a este respecto.

Sea S un semigrupo simétrico y $\{n_0,n_1,\dots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Sea $n \in S$ y supongamos que n_i y n_j estan en distintas componentes conexas de G_n. Entonces claramente $n = W_j+n_j = W_i+n_i$, donde $W_j \in RP(n_j)$ y $W_i \in RP(n_i)$. Por otro lado, al ser S simétrico, existen $\bar{W}_j \in RP(n_j)$ y $\bar{W}_i \in RP(n_i)$ verificando que

$$C+n_j = \bar{W}_j + W_j \quad \text{y} \quad C+n_i = \bar{W}_i + W_i$$

de donde deducimos que $\bar{W}_j = \bar{W}_i$. Tenemos entonces que

$$W = \bar{W}_j = \bar{W}_i \in RP(n_i) \cap RP(n_j).$$

Veamos que además se verifica que

$$W+n_k \notin RP(n_i) \cap RP(n_j), \text{ para todo } k \in \{0,1,\dots,p\}.$$

Para ello supongamos lo contrario, osea, que existe $k \in \{0,1,\dots,p\}$ tal que $W+n_k \in RP(n_i) \cap RP(n_j)$. Sea

$$W'_i = (C+n_i)-(W+n_k) \in RP(n_i) \quad \text{y} \quad W'_j = (C+n_j)-(W+n_k) \in RP(n_j),$$

observese que

$$W_i - W'_i = W_j - W'_j = n_k,$$

luego

$$n = W_i+n_j = W_j+n_i = W'_i+n_k+n_j = W'_j+n_k+n_i$$

y por tanto n_i y n_j están en la misma componente conexa de G_n lo cual es absurdo.

En las condiciones anteriores, denotaremos por $RPM(n_i,n_j)$ al conjunto de restos primários $W' \in RP(n_i) \cap RP(n_j)$ que verifiquen que $W'+n_k \notin RP(n_i) \cap RP(n_j)$, para todo $k \in \{0,1,\dots,p\}$.

Como consecuencia inmediata de esta nota tenemos

TEOREMA 5.27

Sea S un semigrupo simétrico y $\{n_0,n_1,...,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Tesis

$$\#\{RMS\} \le \sum_{i,j=0}^{p} \#(RPM(n_i,n_j)).\blacksquare$$

NOTA

Da la sensación de que si $\#RPM(n_i)$ y $\#RPM(n_j)$ son números pequeños, entoncen $\#RPM(n_i,n_j)$ es pequeño.Esto nos inclina a pensar, que los semigrupos simétricos son en cierto modo aquellos cuyas relaciones mínimas tienen menor cardinal,en función del número de generadores minimales, y que posiblemente tengan acotado este cardinal en función del número de sus generadores minimales. Puestos a hacer conjeturas, añadamos que si S es un semigrupo simétrico, con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,...,n_p\}$, una posible cota para #{RMS} sería el número combinatorio $\binom{p+1}{2}$. Damos esta cota ya que en todos los ejemplos concretos de semigrupos simétricos que hemos estudiado se ha verificado.

CAPITULO 6

PEGADAS Y SEMIPEGADAS

Watanabe en [10] nos proporciona la siguiente construcción:

Considera S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,\dots,n_p\}$, toma $n_{p+1}\in S-\{n_0,n_1,\dots,n_p\}$ y $\lambda\in\mathbb{N}^*$ tales que $(n_{p+1},\lambda)=1$. Llamando $\bar{S}=<\lambda n_0,\lambda n_1,\dots,\lambda n_p,n_{p+1}>$.

Watabane utiliza esta construcción para probar que:

S es simétrico si, y solo si, $\bar{S}$ es simétrico.

S es intersección completa si, y solo si, $\bar{S}$ es intersección completa.

Analizando dicha construcción observamos que si δ es una relación mínima para $<\lambda n_0,\lambda n_1,\dots,\lambda n_p>$, entonces

$$\bar{\delta}=\delta\cup\{\lambda n_{p+1}=a_0(\lambda n_0)+\dots+a_p(\lambda n_p)\}$$

es una relación mínima para $\bar{S}$.

Este capítulo nace extendiendo la idea anterior. Osea, dado un semigrupo numérico S con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,\dots,n_p\}$ ¿ Cuando existe una partición de dichos generadores de manera que si llamamos $S_1=<n_0,n_1,\dots,n_r>$ y $S_2=<n_{r+1},\dots,n_p>$ se verifica que si, δ_1 y δ_2 son relaciones mínimas para S_1 y S_2 respectivamente entonces S admita una relación mínima de la forma

$$\delta=\delta_1\cup\delta_2\cup\{a_0n_0+\dots a_rn_r=a_{r+1}n_{r+1}+\dots+a_pn_p\}\ ?$$

Cuando esto ocurre diremos que S es pegada de S_1 y S_2. En este capítulo, la caracterizaremos perfectamente. Daremos y caracterizaremos también una construcción muy parecida a esta y que denominaremos semipegada.

DEFINICIONES Y NOTACION 6.1

Dado S subsemigrupo de $\mathbb{N}$ con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$. Denotaremos por e(S) a las expresiones de la forma $a_0n_0+a_1n_1+\ldots+a_pn_p$. Diremos que e(S)=0 si $a_0=a_1=\ldots=a_p$. Dada una expresión $a_0n_0+a_1n_1+\ldots+a_pn_p$ diremos que otra expresión $b_0n_0+b_1n_1+\ldots+b_pn_p$ es una subexpresión de la dada si se verifica que $b_0\leq a_0$, $b_1\leq a_1$, ... , $b_p\leq a_p$. Por último, denotaremos por $\varphi(e(S))$ al número natural n tal que n=e(S).

PROPOSICION 6.2

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_p\}$. Denotemos por:

$$d=(n_0,\ldots,n_r) \qquad d'=(n_{r+1},\ldots,n_p)$$

$$S_1=\langle n_0,\ldots,n_r\rangle \qquad S_2=\langle n_{r+1},\ldots,n_p\rangle.$$

Supongamos que $dd'\in S_1\cap S_2$ y por tanto que:

$$dd'=a_0n_0+\ldots+a_rn_r=a_{r+1}n_{r+1}+\ldots+a_pn_p.$$

Sean δ_1 y δ_2 relaciones mínimas para S_1 y S_2 respectivamente.

Tesis

$\delta=\delta_1\cup\delta_2\cup\{a_0n_0+\ldots+a_rn_r=a_{r+1}n_{r+1}+\ldots+a_pn_p\}$ es una relación mínima para S.

- Demostración -

Para la demostración analizaremos como son las distintas R-clases de los [n] tales que $n\in S$. Una vez hecho esto el corolario 1.7. nos garantizará que la tesis es cierta.

1) Sea $n\in S$, observemos en primer lugar que dos elementos de

[n] en S de la forma $e(S_1)+e(S_2)$ y $e'(S_1)+e'(S_2)$ con $e(S_1)\neq 0$, $e(S_2)\neq 0$, $e'(S_1)\neq 0$ y $e'(S_2)\neq 0$, estan en la misma R-clase de [n]. En efecto, si suponemos que $\varphi(e(S_2))\geq\varphi(e'(S_2))$ tenemos:

$$\varphi(e(S_2))-\varphi(e'(S_2))=\varphi(e'(S_1))-\varphi(e(S_1))=\lambda dd' \quad \text{con } \lambda\in\mathbb{N}^*.$$

Así pues, $e(S_2)=e'(S_2)+(\lambda a_0)n_0+\ldots+(\lambda a_r)n_r$ es una relación en S. Es claro que la cadena de relaciones:

$$e(S_1)+e(S_2),\ e(S_1)+e'(S_2)+(\lambda a_0)n_0+\ldots+(\lambda a_r)n_r,\ e'(S_1)+e'(S_2)$$

prueba que las expresiones $e(S_1)+e(S_2)$ y $e'(S_1)+e'(S_2)$ estan en la misma R-clase de [n] en S.

2) Como consecuencia inmediata de 1) tenemos que:

$$NR^S[n]\geq 2 \Rightarrow n\in S_1\cup S_2.$$

3) Estudiemos el caso $n=dd'$.

Sean $X_1,\ldots,X_s$ las distintas R-clases de [n] en S_1 y $X_1',\ldots,X_k'$ las distintas R-clases de [n] en S_2. Entonces $X_1,\ldots,X_s,X_1',\ldots,X_k'$ son las distintas R-clases de [n] en S. La demostración es clara teniendo en cuenta que [dd'] en S no contiene expresiones de la forma $e(S_1)+e(S_2)$ con $e(S_1)\neq 0$ y $e(S_2)\neq 0$.

4) Veamos que si $e(S_1)$ y $e'(S_1)$ (respectivamente $e(S_2)$ y $e'(S_2)$) son dos expresiones que están en distintas R-clases de [n] en S_1 (respectivamente en S_2), estan también en distintas R-clases de [n] en S. En efecto, si $e(S_1)$ y $e'(S_1)$ estuvieran en la misma R-clase de [n] en S, existiría una cadena de elementos de [n] en S

$$e(S_1),\ e_1(S),\ e_2(S),\ \ldots\ ,e_m(S),\ e'(S_1)$$

de manera que dos elementos consecutivos de la cadena tienen subexpresiones no nulas en común. Ahora bien, $e_i(S)=e_i(S_1)+e_i(S_2)$, teniendo en cuenta que $n\in S_1$ deducimos que $\varphi(e_i(S_2))=\lambda dd'$ con $\lambda\in\mathbb{N}$, definimos entonces $e_i'(S_1)=e_i(S_1)+(\lambda a_0)n_0+\ldots+(\lambda a_r)n_r$, obtenemos así una cadena de elementos de [n] en S_1:

$$e(S_1),\ e'_1\ (S_1),\ e'_2\ (S_1),\ \ldots\ ,e'_m\ (S_1),\ e'(S_1)$$

verificando que dos elementos consecutivos de dicha cadena tienen subexpresiones no nulas en común y por tanto $e(S_1)$ y $e'(S_1)$ están en la misma R-clase de [n] en S_1. Lo cual es absurdo.

5) Sea $n\in S_1-S_2$ y $X_1,\ldots,X_s$ las distintas R-clases de [n] en S. Veamos que existe $i\in\{1,\ldots,s\}$ verificando, que si llamamos X'_i al conjunto de elementos de X_i que son de la forma $e(S_1)$, entonces X'_i es no vacio y además $X_1,\ldots,X_{i-1},X'_i,X_{i+1},\ldots,X_s$ son las distintas R-clases de [n] en S_1. En efecto, por 1) sabemos que a lo sumo existe una R-clase de [n] en S conteniendo elementos de la forma:

$$e(S_1)+e(S_2) \text{ con } e(S_1)\neq 0 \text{ y } e(S_2)\neq 0$$

supongamos que dicha R-clase es X_i, si no existiese dicha R-clase, tomariamos como X_i una R-clase cualquiera.

Veamos que X'_i es no vacio. Para ello tomemos un elemento $e(S_1)+e(S_2)\in X_i$, teniendo en cuenta que $n\in S_1$, podemos deducir que $\varphi(e(S_2))=\lambda dd'$ con $\lambda\in\mathbb{N}$. Obviamente $e(S_1)+(\lambda a_0)n_0+\ldots+(\lambda a_r)n_r\in X'_i$.

Como consecuencia inmediata de 4) tenemos que

$$X_1,\ldots,X_{i-1},X'_i,X_{i+1},\ldots,X_s$$

son las distintas R-clases de [n] en S_1.

6) Podemos afirmar lo dicho en 5) intercambiando S_1 y S_2.

7) Sea $n\in\left(S_1\cap S_2\right)-\{dd'\}$. $X_1,\ldots,X_s$ las distintas R-clases de [n] en S_1 y $X'_1,\ldots,X'_k$ las distintas R-clases de [n] en S_2.

Veamos que existen $i\in\{1,\ldots,s\}$ y $j\in\{1,\ldots,k\}$ verificando que las distintas R-clases de [n] en S son:

$$X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_s,X'_1,\ldots,X'_{j-1},X'_{j+1},\ldots,X'_k,X$$

donde X es una R-clase de [n] en S tal que $X_i \cup X'_j \subseteq X$.

Como $n \in \left(S_1 \cap S_2\right) - \{dd'\}$, entonces $n = \lambda dd'$ con $\lambda \geq 2$. Sea X_i la R-clase de [n] en S_1 que contiene a la expresión $(\lambda a_0)n_0 + \ldots + (\lambda a_r)n_r$ y X'_j la R-clase de [n] en S_2 que contiene al elemento $(\lambda a_{r+1})n_{r+1} + \ldots + (\lambda a_p)n_p$. Tomamos como X la única R-clase de [n] en S que contiene elementos de la forma $e(S_1)+e(S_2)$ con $e(S_1) \neq 0$ y $e(S_2) \neq 0$. Trivialmente,

$$((\lambda-1)a_0)n_0 + \ldots + ((\lambda-1)a_r)n_r + a_{r+1}n_{r+1} + \ldots + a_p n_p$$

es un elemento de X y por tanto $X_i \cup X'_j \subseteq X$. Para concluir este apartado, basta con recordar 4) y observar que si una R-clase de [n] en S contiene una expresión del tipo $e(S_1)$ y otra del tipo $e(S_2)$ entonces contiene otra del tipo $e'(S_1)+e'(S_2)$ con $e'(S_1) \neq 0$ y $e'(S_2) \neq 0$.

El análisis de las R-clases de los [n] tales que $n \in S$ y elcorolario 1.7. nos garantizan que la tesis es cierta.∎

EJEMPLO

Aplicaremos la proposición anterior para calcular una relación mínima para el semigrupo numérico:

$$S = \langle 60,80,85,90,187,221 \rangle.$$

Tomamos $S_1 = \langle 85,187,221 \rangle$ y $S_2 = \langle 60,80,90 \rangle$

$$(85,187,221)=17 \quad (60,80,90)=10$$

$$170 = 2x85 = 1x80 + 1x90 \in S_1 \cap S_2$$

Calculamos una relación mínima para S_1. Para ello consideremos el semigrupo:

$$\bar{S}_1 = \langle 85/17, 187/17, 221/17 \rangle = \langle 5,11,13 \rangle.$$

Una relación mínima para $\bar{S}_1$ sería:

$7x5=2x11+1x13$

$3x11=4x5+1x13$

$2x13=3x5+1x11$

luego una relación mínima para S_1 es:

$7x85=2x187+1x221$

$3x187=4x85+1x221$

$2x221=3x85+1x187$

Calculamos ahora, una relación mínima para S_2. Para ello consideremos el semigrupo $\bar{S}_2=<60/10,80/10,90/10>=<6,8,9>$. Una relación mínima para $\bar{S}_2$ sería:

$3x6=2x9$

$3x8=4x6$

luego una relación mínima para S_2 es:

$3x60=2x90$

$3x80=4x60$

Aplicando la proposición anterior tenemos que:

$2x85=1x80+1x90$

$7x85=2x187+1x221$

$3x187=4x85+1x221$

$2x221=3x85+1x187$

$3x60=2x90$

$3x80=4x60$

es una relación mínima para S.

<u>PROPOSICION 6.3</u>

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_p\}$. Denotemos por:

$$d=(n_0,\dots,n_r) \qquad d'=(n_{r+1},\dots,n_p)$$

$$S_1=<n_0,\dots,n_r> \qquad S_2=<n_{r+1},\dots,n_p>.$$

Supongamos que $dd'\in S_1$, $dd'\notin S_2$ y $dd'=a_0n_0+\dots+a_rn_r$.

Sea $S_2'=<dd',n_{r+1},\dots,n_p>$, δ_1 y δ_2' relaciones mínimas para S_1 y S_2' respectivamente y δ_2 el conjunto obtenido a paratir de δ_2' de la siguiente forma:

si $\lambda dd'+d_{r+1}n_{r+1}+\dots+d_pn_p=b_{r+1}n_{r+1}+\dots+b_pn_p$ es un elemento de δ_2' lo sustituimos en δ_2 por el elemento

$$(\lambda a_0)n_0+\dots+(\lambda a_r)n_r+d_{r+1}n_{r+1}+\dots+d_pn_p=b_{r+1}n_{r+1}+\dots+b_pn_p.$$

<u>Tesis</u>

$\delta=\delta_1\cup\delta_2$ es una relación mínima para S.

- Demostración -

1) Sea $n\in S$, observemos en primer lugar que dos elementos de $[n]$ en S de la forma $e(S_1)+e(S_2)$ y $e'(S_1)+e'(S_2)$ con $e(S_1)\neq 0$, $e(S_2)\neq 0$, $e'(S_1)\neq 0$ y $e'(S_2)\neq 0$, estan en la misma R-clase de $[n]$. La demostración es análoga a 1) de la proposición anterior.

2) Como consecuencia inmediata de 1) tenemos que:

$$NR^S[n]\geq 2 \Rightarrow n\in S_1\cup S_2.$$

Observemos también que $n\in S_2'-S_2 \Rightarrow NR^{S_2'}[n]=1$. Esta última afirmación es clara teniendo en cuenta que cualquier expresión de $[n]$ en S_2' es de la forma $\lambda dd'+d_{r+1}n_{r+1}+\dots+d_pn_p$ con $\lambda\in\mathbb{N}^*$.

3) Sea $n=dd'$. Si $X_1,\dots,X_s$ son las distintas R-clases de $[n]$ en S_1, entonces $X_1,\dots,X_s$ son las distintas R-clases de $[n]$ en S. La demostración es clara teniendo en cuenta que $[dd']$ en S no contiene expresiones de la forma $e(S_1)+e(S_2)$ con $e(S_2)\neq 0$.

4) Si $e(S_1)$ y $e'(S_1)$ son dos expresiones que están en distintas R-clases de $[n]$ en S_1, estan también en distintas

R-clases de [n] en S. La demostración es la misma que la de 4) de la proposición anterior.

4') Si $e(S_2)$ y $e'(S_2)$ son dos expresiones que están en distintas R-clases de [n] en S'_2, están también en distintas R-clases de [n] en S. En efecto, si $e(S_2)$ y $e'(S_2)$ estuvieran en la misma R-clase de [n] en S, existiría una cadena de elementos de [n] en S

$$e(S_2),\ e_1(S),\ e_2(S),\ \ldots\ ,e_m(S),\ e'(S_2)$$

de manera que dos elementos consecutivos de la cadena tienen subexpresiones no nulas en común. Ahora bien, $e_i(S)=e_i(S_1)+e_i(S_2)$, teniendo en cuenta que $n\in S_2$ deducimos que $\varphi(e_i(S_1))=\lambda dd'$ con $\lambda\in\mathbb{N}$, definimos entonces $e'_i(S'_2)=\lambda dd'+e_i(S_2)$, obtenemos así una cadena de elementos de [n] en S'_2:

$$e(S_1),\ e'_1\ (S_1),\ e'_2\ (S_1),\ \ldots\ ,e'_m\ (S_1),\ e'(S_1)$$

verificando que dos elementos consecutivos de dicha cadena tienen subexpresiones no nulas en común y por tanto $e(S_1)$ y $e'(S_1)$ están en la misma R-clase de [n] en S'_2. Lo cual es absurdo.

5) Sea $n\in S_1-S_2$ y $X_1,\ldots,X_s$ las distintas R-clases de [n] en S. Existe $i\in\{1,\ldots,s\}$ verificando, que si llamamos X'_i al conjunto de elementos de X_i que son de la forma $e(S_1)$, entonces X'_i es no vacio y además $X_1,\ldots,X_{i-1},X'_i,X_{i+1},\ldots,X_s$ son las distintas R-clases de [n] en S_1. La demostración es análoga a 5) de la proposición anterior.

6) Sea $n\in S_2-S_1$ y $X_1,\ldots,X_s$ las distintas R-clases de [n] en S. Sabemos que a lo sumo existe una R-clase conteniendo elementos de la forma $e(S_1)+e(S_2)$ con $e(S_1)\neq 0$ y $e(S_2)\neq 0$. Supogamos que dicha R-clase si existe es X_s y llamemos X'_s al conjunto obtenido a

partir de X_s de la siguiente forma:

Si $e(S_1)+e(S_2)\in X_s$, claramente $\varphi(e(S_1))=\lambda dd'$ con $\lambda\in\mathbb{N}$, pues bién, lo sustituiremos en X'_s por el elemento $\lambda dd'+e(S_2)$.

De 4') deducimos que $X_1,\ldots,X_{s-1},X'_s$ son las distintas R-clases de $[n]$ en S'_2.

7) Sea $n\in\left(S_1\cap S_2\right)-\{dd'\}$. $X_1,\ldots,X_s$ las distintas R-clases de $[n]$ en S_1 y $X'_1,\ldots,X'_k$ las distintas R-clases de $[n]$ en S'_2.

Veamos que existen $i\in\{1,\ldots,s\}$ y $j\in\{1,\ldots,k\}$ verificando que las distintas R-clases de $[n]$ en S son:

$$X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_s,X'_1,\ldots,X'_{j-1},X'_{j+1},\ldots,X'_k,X$$

donde X es la R-clase de $[n]$ en S tal que $X_i\subseteq X$.

Como $n\in\left(S_1\cap S_2\right)-\{dd'\}$, entonces $n=\lambda dd'$ con $\lambda\geq 2$. Sea X_i la R-clase de $[n]$ en S_1 que contiene a la expresión $(\lambda a_0)n_0+\ldots+(\lambda a_r)n_r$ y X'_j la R-clase de $[n]$ en S'_2 que contiene al elemento $\lambda dd'$. Tomamos como X la R-clase de $[n]$ en S que contiene al elemento $(\lambda a_0)n_0+\ldots+(\lambda a_r)n_r$. Obviamente $X_i\subseteq X$. Para concluir este apartado, basta con recordar 4), 4') y observar que si una R-clase de $[n]$ en S contiene una expresión del tipo $e(S_1)$ y otra del tipo $e(S_2)$ entonces contiene otra del tipo $e'(S_1)+e'(S_2)$ con $e'(S_1)\neq 0$ y $e'(S_2)\neq 0$.

El análisis de las R-clases de los $[n]$ tales que $n\in S$ y elcorolario 1.7. nos garantizan que la tesis es cierta.

<u>EJEMPLO</u>

Aplicaremos la proposición anterior para calcular una relación mínima para el semigrupo numérico $S=\langle 35,77,80,90,91\rangle$.

Tomamos $S_1=\langle 35,77,91\rangle$ y $S_2=\langle 80,90\rangle$

$(35,77,91)=7 \quad (80,90)=10$

$70=2x35 \in S_1$ y $70 \notin S_2$

Consideremos $S_2'=<70,80,90>$.

Calculamos una relación mínima para S_1. Para ello consideramos el semigrupo numérico $\bar{S}_1=<35/7,77/7,91/7>=<5,11,13>$ una relación mínima para $\bar{S}_1$ sería:

$7x5=2x11+1x13$

$3x11=4x5+1x13$

$2x13=3x5+1x11$

luego una relación mínima para S_1 es:

$7x35=2x77+1x91$

$3x77=4x35+1x91$

$2x91=3x35+1x77$

Calculamos ahora una relación mínma para S_2'. Para ello consideramos el semigrupo numérico $\bar{S}_2'=<70/10,80/10,90/10>=<7,8,9>$. Una relación mínima para $\bar{S}_2'$ sería:

$5x7=1x8+3x9$

$2x8=1x7+1x9$

$4x9=4x7+1x8$

luego una relación mínima para S_2' es:

$5x70=1x80+3x90$

$2x80=1x70+1x90$

$4x90=4x70+1x80$

Aplicando la proposición anterior tenemos que:

$7x35=2x77+1x91$

$3x77=4x35+1x91$

$2x91=3x35+1x77$

$$10x35=1x80+3x90$$

$$2x80=2x35+1x90$$

$$4x90=8x35+1x90$$

es una relación mínima para S.

NOTA

A raíz de estas proposiciones, puede pensarse en estudiar el caso:

S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores

$$\{n_0,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_p\}$$

$$d=(n_0,\ldots,n_r) \qquad d'=(n_{r+1},\ldots,n_p)$$

$$S_1=<n_0,\ldots,n_r> \qquad S_2=<n_{r+1},\ldots,n_p>$$

$$dd'\in S,\ dd'\notin S_1 \text{ y } dd'\notin S_2.$$

Veamos que este caso no se puede dar. En efecto, si $dd'\in S$, entonces existiran $s_1\in S_1$ y $s_2\in S_2$ tales que $dd'=s_1+s_2$, pero de aquí deducimos que $s_1=\lambda dd'$ y $s_2=\mu dd'$ con $\lambda,\mu\in\mathbb{N}^*$. Por tanto se ha de verificar una de las alternativas siguientes:

$\lambda=1$ y $\mu=0 \Rightarrow dd'=s_1\in S_1$.

$\lambda=0$ y $\mu=1 \Rightarrow dd'=s_2\in S_2$.

DEFINICION 6.4

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_p\}$. Diremos que S es pegada de los semigrupos $S_1=<n_0,\ldots,n_r>$ y $S_2=<n_{r+1},\ldots,n_p>$. Si S admite una relación mínima de la forma $\delta=R_1\cup R_2\cup\{a_0n_0+\ldots+a_rn_r=a_{r+1}n_{r+1}+\ldots+a_pn_p\}$, donde R_1 y R_2 es un conjunto de relaciones de S_1 y S_2 respectivamente.

NOTACION

Sea S semigrupo numérico y δ una relación mínima para S. Si consideramos una relación en S, e(S)=e(S') de la proposición 0.2. se desprende que podemos contruir una cadena de expresiones de φ(e(S):

$$e(S),\ e_1(S),\dots,e_m(S),\ e'(S)$$

de tal manera que que $e_1(S)=e(S)$, $e_m(S)=e'(S)$ y $e_{i+1}(S)$ se obtiene a partir de $e_i(S)$ sustituyendo una subexpresión de esta $e'_i(S)$ por $e''_i(S)$ donde $e'_i(S)=e''_i(S)$ es una relación de δ. Pues bién, a este hecho nos referiremos en los teoremas siguientes diciendo que e(S) y e'(S) se pueden encadenar mediante relaciones de δ.

TEOREMA DE PEGADA 6.5

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,\dots,n_r,n_{r+1},\dots,n_p\}$. Denotemos por:

$$d=(n_0,\dots,n_r) \qquad d'=(n_{r+1},\dots,n_p)$$

$$S_1=\langle n_0,\dots,n_r\rangle \qquad S_2=\langle n_{r+1},\dots,n_p\rangle.$$

Tesis

Son equivalentes:

1.- $dd'\in S_1\cap S_2$.

2.- S es pegada de S_1 y S_2.

3.- Existe $x\in S_1\cap S_2$ verificando que:

$s\in RP^S(x) \Leftrightarrow$ existe un único $(a,b)\in RP^{S_1}(x)\times RP^{S_2}(x)$ tal que $s=a+b$.

4.- Existe $x\in S_1\cap S_2$ verificando que:

i) $RP^{S_1}(x)\cap RP^{S_2}(x)=\{0\}$.

ii) $RP^{S_1}(x)\cup RP^{S_2}(x)\subseteq RP^S(x)$.

- Demostración -

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ Es consecuencia inmediata de la proposición 6.2.

$\boxed{2\Rightarrow 3}$ Si S es pegada de S_1 y S_2 sabemos que admite una relación mínima de la forma $\delta=R_1\cup R_2\cup\{a_0n_0+\ldots+a_rn_r=a_{r+1}n_{r+1}+\ldots+a_pn_p\}$, pues bién, tomemos $x=a_0n_0+\ldots+a_rn_r=a_{r+1}n_{r+1}+\ldots+a_pn_p$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $s\in RP^S(x)$, entonces $s=b_0n_0+\ldots+b_rn_r+b_{r+1}n_{r+1}+\ldots+b_pn_p$ si tomamos $a=b_0n_0+\ldots+b_rn_r$ y $b=b_{r+1}n_{r+1}+\ldots+b_pn_p$ claramente tenemos que $a\in RP^{S_1}(x)$ y $b\in RP^{S_2}(x)$. Veamos ahora que a y b son únicos. para ello supongamos que existiesen $a'\in RP^{S_1}(x)$ y $b'\in RP^{S_2}(x)$ tales que $s=a'+b'$. Tendríamos entonces que $s=a+b=a'+b'$, lo que nos da origen a una relación $e(S_1)+e(S_2)=e'(S_1)+e'(S_2)$ con $\varphi(e(S_1))=a$, $\varphi(e(S_2))=b$, $\varphi(e'(S_1))=a'$ y $\varphi(e'(S_2))=b'$. Esta relación se puede encadenar mediante relaciones de δ, ahora bién, como $s\in RP^S(x)$ en la construcción de dicha cadena solo podemos utilizar elementos de R_1 ó R_2. Es claro pues que $\varphi(e(S_1))=\varphi(e'(S_1))$ y $\varphi(e(S_2))=\varphi(e'(S_2))$. Luego $a=a'$ y $b=b'$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $(a,b)\in RP^{S_1}(x)xRP^{S_2}(x)$. Veamos que $a+b\in RP^S(x)$. Para ello supongamos que $a+b\notin RP^S(x)$, es claro que entonces $a+b=\lambda x+a'+b'$con $\lambda\in\mathbb{N}^*$ y $(a',b')\in RP^{S_1}(x)xRP^{S_2}(x)$. Esto nos da origen a una relación

$$e(S_1)+e(S_2)=(\lambda a_0)n_0+\ldots+(\lambda a_r)n_r+e'(S_1)+e'(S_2)$$

con $\varphi(e(S_1))=a$, $\varphi(e(S_2))=b$, $\varphi(e'(S_1))=a'$ y $\varphi(e'(S_2))=b'$. Esta relación se podrá encadenar mediante ralaciones de δ, es claro que existirá un primer elemento de la cadena obtenido utilizando la relación $a_0n_0+\ldots+a_rn_r=a_{r+1}n_{r+1}+\ldots+a_pn_p$, de donde podemos deducir que $\varphi(e(S_1))=a\notin RP^{S_1}(x)$ ó $\varphi(e(S_2))=b\notin RP^{S_2}(x)$. Lo cual es absurdo.

$\boxed{3\Rightarrow 4}$ Tomando el elemento x de 3) es obvio que se verifica 4).

$\boxed{4\Rightarrow 1}$ Trivialmente, $dd'=k_1x+s_1=k_2x+s_2$ con $s_1\in RP^{S_1}(x)$, $s_2\in RP^{S_2}(x)$ y $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$. Veamos que $k_1=k_2$. En efecto, si $k_1>k_2$ despejando tenemos que $(k_1-k_2)x+s_1=s_2$, luego $s_2 \notin RP^{S_2}(x)$, lo cual es absurdo. Veamos ahora que $dd'=x$. En efecto, $k_1=k_2 \Rightarrow s_1=s_2 \in RP^{S_1}(x) \cap RP^{S_2}(x)=\{0\} \Rightarrow s_1=s_2=0$, de donde $dd'=k_1x$, como $x \in S_1 \cap S_2$ es claro que $dd' \leq x$, podemos concluir por tanto que $dd'=x$.

DEFINICION 6.6

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_p\}$. Diremos que S es semipegada de los semigrupos $S_1=\langle n_0,\ldots,n_r\rangle$ y $S_2=\langle n_{r+1},\ldots,n_p\rangle$. Si S admite una relación mínima de la forma $\delta=R_1 \cup R_2$, donde R_1 es un conjunto de relaciones de S_1 y R_2 es un conjunto de relaciones de S de la forma $e(S_2)=e'(S_1)+e'(S_2)$ con la propiedad de que existe un elemento x de S tal que x divide a $\varphi(e'(S_1))$ para todo elemento $e(S_2)=e'(S_1)+e'(S_2)$ de R_2.

TEOREMA DE SEMIPEGADA 6.7

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,\ldots,n_r,n_{r+1},\ldots,n_p\}$. Denotemos por:

$$d=(n_0,\ldots,n_r) \qquad d'=(n_{r+1},\ldots,n_p)$$
$$S_1=\langle n_0,\ldots,n_r\rangle \qquad S_2=\langle n_{r+1},\ldots,n_p\rangle.$$

Tesis

Son equivalentes:

1.- $dd' \in S_1$.

2.- S es semipegada de S_1 y S_2.

3.- Existe $x \in S_1$ tal que si llamamos $S_2'=\langle x,n_{r+1},\ldots,n_p\rangle$ verifica que:

$$s \in RP^S(x) \Leftrightarrow \text{existe un único } (a,b) \in RP^{S_1}(x) \times RP^{S_2'}(x) \text{ tal que } s=a+b.$$

4.- Existe $x \in S_1$ verificando que si llamamos $S'_2=\langle x,n_{r+1},\dots,n_p\rangle$:

i) $RP^{S_1}(x) \cap RP^{S'_2}(x)=\{0\}$.

ii) $RP^{S_1}(x) \cup RP^{S'_2}(x) \subseteq RP^{S}(x)$.

- Demostración -

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ Es consecuencia inmediata de la proposición 6.6.

$\boxed{2\Rightarrow 3}$ Tomamos como elemento x justamente el x de la definición de semipegada.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $s \in RP^{S}(x)$, entonces $s=b_0n_0+\dots+b_rn_r+b_{r+1}n_{r+1}+\dots+b_pn_p$ si tomamos $a=b_0n_0+\dots+b_rn_r$ y $b=b_{r+1}n_{r+1}+\dots+b_pn_p$ claramente tenemos que $a \in RP^{S_1}(x)$ y $b \in RP^{S'_2}$. Veamos ahora que a y b son únicos. Para ello supongamos que existiesen $a' \in RP^{S_1}(x)$ y $b' \in RP^{S'_2}$ tales que $s=a'+b'$. Tendríamos entonces que $s=a+b=a'+b'$, lo que nos da origen a una relación $e(S_1)+e(S_2)=e'(S_1)+e'(S_2)$ con $\varphi(e(S_1))=a$, $\varphi(e(S_2))=b$, $\varphi(e'(S_1))=a'$ y $\varphi(e'(S_2))=b'$. Esta relación se puede encadenar mediante relaciones de δ, ahora bién, como $s \in RP^{S}(x)$ en dicha cadena solo podemos utilizar elementos de R_1 ó elementos de R_2 de la forma $e_1(S_2)=e'_1(S_1)+e'_1(S_2)$ con $\varphi(e'_1(S_1))=0$. Es claro pues que $\varphi(e(S_1))=\varphi(e'(S_1))$ y $\varphi(e(S_2))=\varphi(e'(S_2))$. Luego $a=a'$ y $b=b'$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $(a,b) \in RP^{S_1}(x) \times RP^{S'_2}(x)$. Veamos que $a+b \in RP^{S}(x)$. Para ello supongamos que $a+b \notin RP^{S}(x)$ es claro que entonces, $a+b=\lambda x+a'+b'$con $\lambda \in \mathbb{N}^*$ y $(a',b') \in RP^{S_1}(x) \times RP^{S'_2}(x)$. Si suponemos que $x=a_0n_0+\dots+a_rn_r$, esto nos da origen a una relación

$$e(S_1)+e(S_2)=(\lambda a_0)n_0+\dots+(\lambda a_r)n_r+e'(S_1)+e'(S_2)$$

con $\varphi(e(S_1))=a$, $\varphi(e(S_2))=b$, $\varphi(e'(S_1))=a'$ y $\varphi(e'(S_2))=b'$. Esta relación se podrá encadenar mediante ralaciones de δ, es claro que existirá un primer elemento de la cadena obtenido utilizando alguna relación de R_2 del tipo $e_1(S_2)=e'_1(S_1)+e'_1(S_2)$ con

$\varphi(e'_1(S_1))\neq 0$. De donde deducimos que $\varphi(e(S_2))=b\notin RP^{S'_2}(x)$. Lo cual es absurdo.

$\boxed{3\Rightarrow 4}$ Tomando como x el x de 3) es claro que se verifica 4).

$\boxed{4\Rightarrow 1}$ Trivialmente, $dd'=k_1x+s_1=k_2x+s_2$ con $s_1\in RP^{S_1}(x)$, $s_2\in RP^{S'_2}(x)$ y $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$. Veamos que $k_1=k_2$. En efecto, si $k_1>k_2$ despejando tenemos que $(k_1-k_2)x+s_1=s_2$, luego $s_2\notin RP^{S}(x)$, lo cual es absurdo. Veamos ahora que $dd'=x$. En efecto, $k_1=k_2 \Rightarrow s_1=s_2\in RP^{S_1}(x)\cap RP^{S'_2}(x)=\{0\} \Rightarrow s_1=s_2=0$, de donde $dd'=k_1x$, como $x\in S_1\cap S'_2$ es claro que $dd'\leq x$, podemos concluir por tanto que $dd'=x$.

NOTA

Los resultados vistos hasta ahora en este capítulo han servido para caracterizar cuando un semigrupo numérico dado es pegada o semipegada de dos subsemigrupos suyos. A continuacion daremos algunas construcciones para obtener semigrupos numéricos que sean pegadas o semipegadas de subsemigrupos suyos. La demostración la dejamos a cargo del lector.

CONSTRUCCION 6.8

Sean $S_1=\langle n_0,\dots,n_r\rangle$ y $S_2=\langle n_{r+1},\dots,n_p\rangle$ semigrupos numéricos, tomemos $\lambda\in S_1$ y $\mu\in S_2$ tales que $(\lambda,\mu)=1$. LLamemos

$$S=\langle \mu n_0,\dots,\mu n_r,\lambda n_{r+1},\dots,\lambda n_p\rangle.$$

A) Si $\lambda\notin\{n_0,\dots,n_r\}$ y $\mu\notin\{n_{r+1},\dots,n_p\}$. Entonces $\{\mu n_0,\dots,\mu n_r,\lambda n_{r+1},\dots,\lambda n_p\}$ es sistema minimal de generadores de S y además S es pegada de $\langle\mu n_0,\dots,\mu n_r\rangle$ y $\langle\lambda n_{r+1},\dots,\lambda n_p\rangle$.

B) Si $\lambda\in\{n_0,\dots,n_r\}$ y $\mu\notin\{n_{r+1},\dots,n_p\}$. Supongamos que $\lambda=n_0$. Entonces $\{\mu n_1,\dots,\mu n_r,\lambda n_{r+1},\dots,\lambda n_p\}$ es un sistema minimal de generadores de S y además si $e=(n_1,...,n_r)$, se verifica:

i) Si $en_0 \in \langle n_1,...,n_p \rangle$, S es pegada de $\langle \mu n_1,...,\mu n_r \rangle$ y $\langle \lambda n_{r+1},...,\lambda n_p \rangle$.

ii) Si $en_0 \notin \langle n_1,...,n_p \rangle$, S es semipegada de $\langle \lambda n_{r+1},...,\lambda n_p \rangle$ y $\langle \mu n_1,...,\mu n_r \rangle$.

C) Si $\lambda \in \{n_0,...,n_r\}$ y $\mu \in \{n_{r+1},...,n_p\}$. Supongamos que $\lambda = n_0$ y $\mu = n_{r+1}$. Entonces $\{\lambda\mu, \mu n_1,...,\mu n_r, \lambda n_{r+2},...,\lambda n_p\}$ es un sistema minimal de generadores de S y además si $e=(n_1,...,n_r)$ y $g=(n_{r+2},...,n_p)$ se verifica:

i) Si $en_0 \in \langle n_1,...,n_p \rangle$, S es pegada de $\langle \mu n_1,...,\mu n_r \rangle$ y $\langle \lambda n_{r+1},...,\lambda n_p \rangle$.

ii) Si $en_0 \notin \langle n_1,...,n_p \rangle$, S es semipegada de $\langle \lambda n_{r+1},...,\lambda n_p \rangle$ y $\langle \mu n_1,...,\mu n_r \rangle$.

iii) Si $gn_{r+1} \in \langle n_{r+2},...,n_p \rangle$, S es pegada de $\langle \mu n_0,...,\mu n_r \rangle$ y $\langle \lambda n_{r+2},...,\lambda n_p \rangle$.

iv) Si $gn_{r+1} \notin \langle n_{r+2},...,n_p \rangle$, S es semipegada de $\langle \mu n_0,...,\mu n_r \rangle$ y $\langle \lambda n_{r+2},...,\lambda n_p \rangle$.

<u>CONSTRUCCION 6.9</u>

Sean $S_1 = \langle n_0,...,n_r \rangle$ y $S_2 = \langle n_{r+1},...,n_p \rangle$ semigrupos numéricos, tomemos $\lambda \in S_1$ y $\mu \notin S_2$ tales que $(\lambda,\mu)=1$. LLamemos

$$S=\langle \mu n_0,...,\mu n_r, \lambda n_{r+1},...,\lambda n_p \rangle.$$

Consideremos el semigrupo $\langle \mu, n_{r+1},...,n_p \rangle$ y supongamos que $\{\mu, n_{r+1},...,n_s\}$ es un sistema minimal de generadores para dicho semigrupo.

A) Si $\lambda \notin \{n_0,...,n_r\}$. Entoces $\{\mu n_0,...,\mu n_r, \lambda n_{r+1},...,\lambda n_s\}$ es sistema minimal de generadores de S y además si $g=(n_{r+1},...,n_s)$ se verifica :

i) Si $g\mu \in <n_{r+1},...,n_s>$, S es pegada de $<\mu n_0,...,\mu n_r>$ y $<\lambda n_{r+1},...,\lambda n_s>$.

ii) Si $g\mu \notin <n_{r+1},...,n_s>$, S es semipegada de $<\mu n_0,...,\mu n_r>$ y $<\lambda n_{r+1},...,\lambda n_s>$.

B) Si $\lambda \in \{n_0,...,n_r\}$. Supongamos $\lambda = n_0$. Entoces $\{\mu n_0,...,\mu n_r, \lambda n_{r+1},...,\lambda n_s\}$ es sistema minimal de generadores de S y además si $g=(n_{r+1},...,n_s)$ y $e=(n_1,...,n_p)$ se verifica :

i) Si $g\mu \in <n_{r+1},...,n_s>$, S es pegada de $<\mu n_0,...,\mu n_r>$ y $<\lambda n_{r+1},...,\lambda n_s>$.

ii) Si $g\mu \notin <n_{r+1},...,n_s>$, S es semipegada de $<\mu n_0,...,\mu n_r>$ y $<\lambda n_{r+1},...,\lambda n_s>$.

iii) Si $en_0 \in <n_1,...,n_r>$, S es pegada de $<\mu n_1,...,\mu n_r>$ y $<\mu n_0, \lambda n_{r+1},...,\lambda n_s>$.

iv) Si $en_0 \notin <n_1,...,n_p>$, S es semipegada de $<\mu n_0, \lambda n_{r+1},...,\lambda n_s>$ y $<\mu n_1,...,\mu n_r>$.

CONSTRUCCION 6.10

Sean $S_1=<n_0,...,n_r>$ y $S_2=<n_{r+1},...,n_p>$ semigrupos numéricos, tomemos $\lambda \notin S_1$ y $\mu \notin S_2$ tales que $(\lambda,\mu)=1$. LLamemos

$$S=<\lambda\mu, \mu n_0,...,\mu n_r, \lambda n_{r+1},...,\lambda n_p>.$$

Supongamos que $\{\lambda, n_0,...,n_k\}$ y $\{\mu, n_{r+1},...,n_s\}$ son sistemas minimales de generadores para los semigrupos $<\lambda, n_0,...,n_r>$ y $<\mu, n_{r+1},...,n_p>$ respectivamente.

Entonces $\{\lambda\mu, \mu n_0,...,\mu n_k, \lambda n_{r+1},...,\lambda n_s\}$ es un sistema minimal de generadores de S y además si $e=(n_0,...,n_k)$ y $g=(n_{r+1},...,n_s)$ se verifica:

i) Si $g\mu\in\langle n_{r+1},\ldots,n_s\rangle$, S es pegada de $\langle\lambda\mu,\mu n_0,\ldots,\mu n_k\rangle$ y $\langle\lambda n_{r+1},\ldots,\lambda n_s\rangle$.

ii) Si $g\mu\notin\langle n_{r+1},\ldots,n_s\rangle$, S es semipegada de $\langle\lambda\mu,\mu n_0,\ldots,\mu n_k\rangle$ y $\langle\lambda n_{r+1},\ldots,\lambda n_s\rangle$.

iii) Si $e\lambda\in\langle n_0,\ldots,n_k\rangle$, S es pegada de $\langle\mu n_0,\ldots,\mu n_k\rangle$ y $\langle\lambda\mu,\lambda n_{r+1},\ldots,\lambda n_s\rangle$.

iv) Si $e\lambda\notin\langle n_0,\ldots,n_k\rangle$, S es semipegada de $\langle\lambda\mu,\lambda n_{r+1},\ldots,\lambda n_s\rangle$ y $\langle\mu n_0,\ldots,\mu n_k\rangle$.

<u>NOTA</u>

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{\lambda n_0,\lambda n_1,\ldots,\lambda n_{p-1},n_p\}$.

1) Si $\lambda n_p\in\langle\lambda n_0,\lambda n_1,\ldots,\lambda n_{p-1}\rangle$, entonces S es pegada de $S_1=\langle n_p\rangle$ y $S_2=\langle\lambda n_0,\lambda n_1,\ldots,\lambda n_{p-1}\rangle$. Luego si δ_2 es una relación mínima para S_2 tenemos que $\delta=\delta_2\cup\{\lambda n_p=a_0\lambda n_0+a_1\lambda n_1+\ldots+a_{p-1}\lambda n_{p-1}\}$ es una relación mínima para S.

2) Si $\lambda n_p\notin\langle\lambda n_0,\lambda n_1,\ldots,\lambda n_{p-1}\rangle$, entonces S es semipegada de $S_1=\langle n_p\rangle$ y $S_2=\langle\lambda n_0,\lambda n_1,\ldots,\lambda n_{p-1}\rangle$. Luego si δ_2' es una relación mínima para $S_2'=\langle\lambda n_p,\lambda n_0,\lambda n_1,\ldots,\lambda n_{p-1}\rangle$. El conjunto δ_2 obtenido a partir de δ_2' de la siguiente forma:

si $a_p(\lambda n_p)+a_0(\lambda n_0)+\ldots+a_{p-1}(\lambda n_{p-1})=b_0(\lambda n_0)+\ldots+b_{p-1}(\lambda n_{p-1})$ es una relación de δ_2' la sustituimos en δ_2 por la relación

$$(a_p\lambda)n_p+a_0(\lambda n_0)+\ldots+a_{p-1}(\lambda n_{p-1})=b_0(\lambda n_0)+\ldots+b_{p-1}(\lambda n_{p-1})$$

es una relación mínima para S.

3) Obviamente $S=\langle\lambda n_0,\lambda n_1,\ldots,\lambda n_{p-1},n_p\rangle$ y $S'=\langle\lambda n_0,\lambda n_1,\ldots,\lambda n_{p-1},\lambda n_p\rangle$ no tienen una relación mínima en común pero estas son muy parecidas. Sabemos que dos semigrupos que

tengan una relación mínima en común son isomorfos y ademas que dos semigrupos S y S'son isomorfos si, y solo si, existe $n\in\mathbb{N}^*$ verificando que $S=nS'$.

Lo mencionado anteriormente nos permite denominar a los semigrupos $S=<\lambda n_0,\lambda n_1,\ldots,\lambda n_{p-1},n_p>$ y $S'=<n_0,n_1,\ldots,n_{p-1},n_p>$ "casi - isomorfos".

4) Observese que los apartados anteriores nos están diciendo que para estudiar las relaciones mínimas de los semigrupos numéricos con p+1 generadores minimales, nos podemos centrar en aquellos con la propiedad de que el máximo comun divisor de p generadores cualesquiera vale 1.

CAPITULO 7

SEMIGRUPOS INTERSECCIÓN COMPLETA

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,...,n_p\}$. Diremos que dicho semigrupo es intersección completa si verifica que $\#\{RMS\}=p$. Es conocido que $\#\{RMS\}\geq p$, luego estos semigrupos son aquellos con mínimo $\#\{RMS\}$ en función del número de generadores minimales.

En este capítulo, daremos una nueva demostración de que $\#\{RMS\}\geq p$. Del capítulo anterior, podemos deducir que si un semigrupo numérico es pegada de dos semigrupos intersección completa, entonces dicho semigrupo es también interseccion completa. Veremos aquí como también es cierto el reciproco, osea, que todo semigrupo intersección completa, es pegada de semigrupos intersección completa.

Terminaremos el capítulo, probando que todo semigrupo intersección completa es simétrico.

<u>LEMA 7.1</u>

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $A=\{n_0,n_1,...,n_p\}$ y B un subconjunto propio de A.

$$n=\text{mínimo}\{x\in\langle B\rangle \ / \ x\notin RP(n_j) \text{ para algún } n_j\in A-B\}.$$

<u>Tesis</u>

$NR[n]\geq 2$.

- Demostración -

Supongamos por comodidad que $B=\{n_0,...,n_r\}$ y $n_j=n_{r+1}$. Entonces $n=a_0n_0+...+a_rn_r=b_0n_0+...+b_rn_r+b_{r+1}n_{r+1}+...+b_pn_p$ con $b_{r+1}\neq 0$. Estas dos expresiones están en distintas R-clases de $[n]$ ya que de lo contrario, existiría una relación en S de la forma $n=\lambda_0n_0+...+\lambda_rn_r=\mu_0n_0+...+\mu_rn_r+\mu_{r+1}n_{r+1}+...+\mu_pn_p$ verificando que existen $i\in\{0,...,r\}$ y $k\in\{r+1,...,p\}$ tales que $\lambda_i\neq 0$, $\mu_i\neq 0$ y $\mu_k\neq 0$. De donde deducimos que:

$$n-n_i=\lambda_0n_0+...+(\lambda_i-1)n_i+...+\lambda_rn_r=$$
$$=\mu_0n_0+...+(\mu_i-1)n_i+...+\mu_rn_r+\mu_{r+1}n_{r+1}+...+\mu_pn_p$$

lo cual es absurdo ya que tendríamos que $n-n_i\in\langle B\rangle$ y $n-n_i\notin RP(n_k)$ con $n_k\in A-B$, en contra de que n era mínimo con esta condición.

Así pues, $a_0n_0+...+a_rn_r$ y $b_0n_0+...+b_rn_r+b_{r+1}n_{r+1}+...+b_pn_p$ son dos expresiones que están en distintas R-clases de $[n]$ y por tanto $NR[n]\geq 2$.■

NOTACION

Denotaremos por

$$M(B)=\text{mínimo}\{x\in\langle B\rangle \ / \ x\notin RP(n_j) \text{ para algún } n_j\in A-B\}$$

DEFINICION 7.2

Definiremos recurrentemente, lo que entenderemos por etapa k-ésima de un semigrupo numérico.

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,...,n_p\}$.

ETAPA 1. $\{n_0\}$, $\{n_1\}$, ... , $\{n_p\}$.

....

ETAPA k. A_0, A_1, ... , A_r.

ETAPA k+1. $B_0, B_1, \dots, B_s$.

donde la etapa k+1 se define a partir de la etapa k de la siguiente forma:

Consideramos en $\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$ la siguiente relación de equivalencia. $A_i \sim A_j \Leftrightarrow M(A_i)=M(A_j)$.

Supongamos que el conjunto cociente asociado a la relación de equivalencia es el siguiente:

$$\{A_0, A_1, \dots, A_r\}/_\sim = \{ [A_{i1}], [A_{i2}], \dots ,[A_{is}] \}$$

definimos $B_k = \left(\bigcup_{A_j \in [A_{ik}]} A_j \right)$.

LEMA 7.3

1) $s \le r$. (r=número de elementos de la etapa k y s=número de elementos de la etapa k+1 de un semigrupo numérico S).

2) $\{B_0, B_1, \dots, B_s\}$ es una partición del conjunto A de los generadores minimales de S. ($\{B_0, B_1, \dots, B_s\}$ son los elementos de una etapa de S).

\- Demostración -

Es inmediata, haciendola por induccion sobre el número de etapa.■

DEFINICION 7.4

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,\dots,n_p\}$ y supongamos que:

ETAPA k. $A_0, A_1, \dots, A_r$.

ETAPA k+1. $B_0, B_1, \dots, B_s$.

Denotaremos por $e(A_j)$ a una expresión de $M(A_j)$ utilizando solo generadores de A_j. Definimos recurrentemente:

$\delta_{\{n_i\}}=\phi$, para $i=0,1,\ldots,p$.

Supongamos que $B_i=A_{i1}\cup A_{i2}\cup\ldots\cup A_{it}$, con $t\geq 2$.

$\delta_{B_i}=\delta_{A_{i1}}\cup\delta_{A_{i2}}\cup\ldots\cup\delta_{A_{it}}\cup\{e(A_{i1})=e(A_{i2}), \ldots , e(A_{i1})=e(A_{it})\}$

Si $t=1$, osea $B_i=A_{i1}$ definimos $\delta_{B_i}=\delta_{A_{i1}}$.

<u>TEOREMA</u> <u>7.5</u>

1.- $\delta_{B_i}\cap\delta_{B_j}=\phi$ para todo $i,j\in\{0,1,\ldots,s\}$ $i\neq j$.

2.- $\#\delta_{B_i}=\#B_i-1$ para todo $i\in\{0,1,\ldots,s\}$.

3.- Existe δ relación mínima para S, verificando que:

$$\delta_{B_0}\cup\delta_{B_1}\cup\ldots\cup\delta_{B_s}\subseteq\delta.$$

- Demostración -

1) Es claro, ya que $B_i\cap B_j=\phi$ y los elementos de δ_{B_i} y δ_{B_j} son relaciones en las que intervienen solo generadores de B_i y B_j respectivamente.

2) La demostración la hacemos por inducción sobre la etapa en la que nos encontremos. Claramente el resultado es cierto para la etapa 1. Supongamos cierto para la etapa K, y demostremoslo para la etapa k+1. En efecto, si $B_i=A_{i1}\cup A_{i2}\cup\ldots\cup A_{it}$, entonces tenemos que $\#\delta_{B_i}=\#\delta_{A_{i1}}+\#\delta_{A_{i2}}+\ldots+\delta_{A_{it}}+(t-1)=$(por hipótesis de inducción)$=(\#A_{i1}-1)+(\#A_{i2}-1)+\ldots+(\#A_{it}-1)+(t-1)=$ $\#A_{i1}+\#A_{i2}+\ldots+\#A_{it}-1=$ $\#B_i-1$, (tengase en cuenta que los A_i son disjuntos dos a dos).

3) La demostración es clara haciendo inducción sobre la etapa y teniendo en cuenta que $e(A_{i1})$, $e(A_{i2})$, ... , $e(A_{it})$ son representantes de distintas R-clases de $[M(e(A_{i1})]$.■

Como consecuencia inmediata, tenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 7.6

Sea S semigrupo numérico y supongamos que:

ETAPA k+1. B_0, B_1, ... , B_s.

Tesis

$\#\{RMS\} \geq (\#B_0-1)+(\#B_1-1)+ \ldots +(\#B_s-1)$.□

LEMA 7.7

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ y supongamos que:

ETAPA k. A_0, A_1, ... , A_r.

ETAPA k+1. B_0, B_1, ... , B_s.

Tesis

$\#\{RMS\} \leq p \Rightarrow s<r$.

- Demostración -

Sabemos por el lema 7.3. que $s \leq r$. Si suponemos que $s=r$, obviamente se ha de verificar que $M(A_i) \neq M(A_j)$ para todo $i,j \in \{0,1,\ldots,r\}$ $i \neq j$. Si denotamos por $e(A_i)$ a una expresión de $M(A_i)$ utilizando solo generadores de A_i y $e(A_i')$ a una expresión de $M(A_i)$ que esté en distinta R-clase que $e(A_i)$ (observese que el lema 7.1. nos garantiza que este proceso es realizable). Es claro que existe una relación mínima δ para S verificando que:

$$\delta_{A_0} \cup \ldots \cup \delta_{A_r} \cup \{e(A_0)=e(A_0'), \ldots ,e(A_r)=e(A_r')\} \subseteq \delta.$$

Luego $\#\delta \geq (\#A_0-1)+(\#A_1-1)+ \ldots +(\#A_r-1)+r+1=p+1-(r+1)+r+1=p+1$. Lo cual es absurdo ya que por hipótesis $\#\{RMS\} \leq p$. Por tanto se ha de verificar que $s<r$.■

TEOREMA 7.8

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,...,n_p\}$.

Tesis

$\#\{RMS\}\geq p$.

- Demostración -

Supongamos que $\#\{RMS\}\leq p$, veamos que entonces, $\#\{RMS\}=p$.

Puesto que $\#\{RMS\}\leq p$, sabemos por el lema 7.7. que el número de elementos de cada etapa va disminuyendo estrictamente. Es claro que existirá $n\in\mathbb{N}$ tal que:

ETAPA n. $\{n_0,n_1,...,n_p\}$.

Así pues, aplicando el corolario 7.6. tenemos que:

$$\#\{RMS\}\geq\#\{n_0,n_1,...,n_p\}-1=p.$$

deducimos por tanto que $\#\{RMS\}=p$.∎

DEFINICION 7.9

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,...,n_p\}$. Diremos que S es intersección completa si $\#\{RMS\}=p$.

TEOREMA 7.10

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,...,n_p\}$.

Tesis

S es intersección completa si, y solo si, S es pegada de dos semigrupos intersección completa.

- Demostración -

$\boxed{\Leftarrow}$ Si S es pegada de $S_1=<n_0,\dots,n_r>$ y $S_2=<n_{r+1},\dots,n_p>$, sabemos por la proposición 6.2. que:

$$\#\{RMS\}=\#\{RMS_1\}+\#\{RMS_2\}+1$$

si suponemos ahora que S_1 y S_2 son semigrupos intersección completa tenemos que $\#\{RMS\}=r+(p-r-1)+1=p$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Como S es intersección completa, osea que $\#\{RMS\}=p$, aplicando el lema 7.7. deducimos que existe $n\in\mathbb{N}$ verificando que:

ETAPA n-1. $A_0, A_1, \dots , A_r$.

ETAPA n. $\{n_0,n_1,\dots,n_p\}$.

Supongamos por comodidad que $A_r=\{n_{k+1},\dots,n_p\}$. Veamos que S es pegada de $S_1=<n_0,\dots,n_k>$ y $S_2=<n_{k+1},\dots,n_p>$. Para ello, aplicando el teorema 7.5. y teniendo en cuenta que $\#\{RMS\}=p$, deducimos que:

$$\delta=\delta_{A_0}\cup\delta_{A_1}\cup\dots\cup\delta_{A_r}\cup\{e(A_0)=e(A_1),\ \dots\ ,e(A_0)=e(A_r)\}$$

es una relación mínima para S.

Así pues, si llamamos $\delta_1=\delta_{A_0}\cup\ \delta_{A_1}\cup\ \dots\ \cup\ \delta_{A_{r-1}}\cup\ \{e(A_0)=e(A_1),\ \dots\ ,e(A_0)=e(A_{r-1})\}$ y $\delta_2=\delta_{A_r}$. Tenemos que $\delta=\delta_1\cup\delta_2\cup\{e(A_0)=e(A_r)\}$, donde δ_1 es un conjuto de relaciones de S_1, δ_2 es un conjunto de relaciones de S_2 y $e(A_0)=e(A_r)$ es una relación del tipo $e(S_1)=e(S_2)$. Por tanto, podemos concluir que S es pegada de S_1 y S_2.

<u>COROLARIO 7.11</u>

Todo semigrupo intersección completa es simétrico.

- Demostrción -

Sea S semigrupo intersección completa con sistema minimal de generadores $\{n_0, n_1, \ldots, n_p\}$.

La demostración la hacemos por inducción sobre p.

Si p=0 ó p=1 el resultado es trivialmente cierto. Supongamos cierto para $k<p$ y demostremoslo para p.

Por el teorema anterior sabemos que S es pegada de los semigrupos $S_1 = <n_0, \ldots, n_r>$ y $S_2 = <n_{r+1}, \ldots, n_p>$ que a su vez son intersección completa.

Sea $d=(n_0, \ldots, n_r)$ y $d'=(n_{r+1}, \ldots, n_p)$. Consideremos ahora los semigrupos numéricos $S'_1 = <n_0/d, \ldots, n_r/d>$ y $S'_2 = <n_{r+1}/d', \ldots, n_p/d'>$, obviamente son semigrupos intersección completa y por tanto simétricos, aplicando la hipótesis de inducción. Como S es pegada de S_1 y S_2, sabemos por el teorema de pegada 6.5. que $dd' \in S_1 \cap S_2$ y por tanto que $d' \in S'_1$ y $d \in S'_2$. Aplicando ahora la proposición 5.26. obtenemos que S es simétrico.■

<u>COROLARIO</u> <u>7.12</u>

Todo semigrupo numérico intersección completa tiene conductor impar.

- Demostración -

Todo semigrupo simétrico tiene conductor impar.■

<u>NOTA</u>

Observese que el teorema 7.10. junto con la construcción 6.8.A) nos permiten construir recurrentemente todos los semigrupos intersección completa. Pues todo semigrupo interseccion completa con p+1 generadores minimales se puede obtener aplicandole la construcción 6.8.A) a determinados semigrupos intersección completa con r y p+1-r generadores minimales respectivamente.

CAPITULO 8

SEMIGRUPOS LIBRES.

Como una clase distinguida, dentro de los semigrupos intersección completa, encontramos a los semigrupos libres. El estudio de dichos semigrupos constituye este capítulo.

A grandes rasgos diremos que los estudios realizados en este capítulo, los podríamos dividir en tres partes:

1) Caracterizaciones de semigrupo libre, atendiendo a propiedades numéricas.

2) Caracterizaciones de semigrupo libre, atendiendo a sus relaciones mínimas.

3) Caracterización de semigrupo libre, atendiendo a sus generadores minimales.

NOTACION

Durante este capítulo denotaremos por:

$(a_0,a_1,...,a_s)$=m.c.d.$\{a_0,a_1,...,a_s\}$.

$[a_0,a_1,...,a_s]$=m.c.m.$\{a_0,a_1,...,a_s\}$.

DEFINICION 8.1

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,...,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Denotaremos por :

$\bar{C}_i$= mínimo$\{x\in\mathbb{N}^* \ / \ xn_i\in n_0\mathbb{Z}+...+n_{i-1}\mathbb{Z}\}$, i=1,...,p.

$C_i^*=\text{mínimo}\{x\in\mathbb{N}^* \ / \ xn_i\in n_0\mathbb{N}+\ldots+n_{i-1}\mathbb{N}\}$, $i=1,\ldots,p$.

$C_i=\text{mínimo}\{x\in\mathbb{N}^* \ / \ xn_i\in n_0\mathbb{N}+\ldots+n_{i-1}\mathbb{N}+n_{i+1}\mathbb{N}+\ldots+n_p\mathbb{N}\}$, $i=0,1,\ldots,p$.

<u>LEMA</u> <u>8.2</u>

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

<u>Tesis</u>

1) $\bar{C}_i\leq C_i^*$ para todo $i=1,\ldots,p$.

2) $C_i\leq C_i^*$ para todo $i=1,\ldots,p$.

3) $\bar{C}_i=(n_0,\ldots,n_{i-1})/(n_0,\ldots,n_i)$ para todo $i=1,\ldots,p$.

4) $n_0=\bar{C}_1\bar{C}_2\ldots\bar{C}_p$.

\- Demostración -

1) y 2) son inmediatos.

3) Teniendo en cuenta que $n_0\mathbb{Z}+\ldots+n_{i-1}\mathbb{Z}=(n_0,\ldots,n_{i-1})\mathbb{Z}$, deducimos que $\bar{C}_in_i=[n_i,(n_0,\ldots,n_{i-1})]$ y por tanto que:

$$\bar{C}_i=(n_0,\ldots,n_{i-1})/(n_0,\ldots,n_i).$$

4)
$$\bar{C}_1\bar{C}_2\ldots\bar{C}_p=(n_0\ /(n_0,n_1)).((n_0,n_1)/(n_0,n_1,n_2))\ldots$$
$$\ldots((n_0,n_1,\ldots,n_{p-1})/(n_0,n_1,\ldots,n_p))=n_0\ .\blacksquare$$

<u>LEMA</u> <u>8.3</u>

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

<u>Tesis</u>

Todo $z\in\mathbb{Z}$ se puede expresar de manera única en la forma:

$$z=\lambda_0n_0+\lambda_1n_1+\ldots+\lambda_pn_p$$

donde $\lambda_0\in\mathbb{Z}$ y $\lambda_i\in\{0,1,\ldots,\bar{C}_i-1\}$, $i=1,\ldots,p$.

- Demostración -

Sea $z\in\mathbb{Z}$, puesto que $(n_0,n_1,\ldots,n_p)=1$, existiran $\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_p\in\mathbb{Z}$ tales que $z=\mu_0n_0+\mu_1n_1+\ldots+\mu_pn_p$. Aplicando el algoritmo de la división $\mu_p=q\bar{C}_p+\lambda_p$ con $0\le\lambda_p<\bar{C}_p$. Por tanto tenemos que $z=\mu_0n_0+\mu_1n_1+\ldots+\mu_{p-1}n_{p-1}+q\bar{C}_pn_p+\lambda_pn_p$, si ahora sustituimos $\bar{C}_pn_p$ por su expresión en función de $n_0,n_1,\ldots,n_{p-1}$ obtenemos que $z=\gamma_0n_0+\gamma_1n_1+\ldots+\gamma_{p-1}n_{p-1}+\lambda_pn_p$. Reiterando el proceso, llegamos a la expresión deseada.

Para probar la unicidad de la expresión supongamos que:

$$z=\lambda_0n_0+\lambda_1n_1+\ldots+\lambda_pn_p=\beta_0n_0+\beta_1n_1+\ldots+\beta_pn_p$$

con $\lambda_0,\beta_0\in\mathbb{Z}$ y $0\le\lambda_i,\beta_i<\bar{C}_i$ para $i=1,\ldots,p$. Veamos que ambas expresiones de z son la misma. En efecto, supongamos que $\lambda_p\ge\beta_p$, entonces despejando obtenemos:

$$(\lambda_p-\beta_p)n_p=(\beta_0-\lambda_0)n_0+\ldots+(\beta_{p-1}-\lambda_{p-1})n_{p-1}$$

teniendo en cuenta que $(\lambda_p-\beta_p)<\bar{C}_p$ deducimos que $(\lambda_p-\beta_p)=0$ de donde $\lambda_p=\beta_p$. Reiterando el proceso llegamos a que ambas expresiones coinciden.

<u>TEOREMA 8.4</u>

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

<u>Tesis</u>

Son equivalentes:

1.- $n_0=C_1^*C_2^*\ldots C_p^*$.

2.- $RP(n_0)=\{\lambda_1n_1+\ldots+\lambda_pn_p \;/\; \lambda_i\in\{0,1,\ldots,C_i^*-1\},\ i=1,\ldots,p\}$.

3.- $(C+n_0)=(C_1^*-1)n_1+(C_2^*-1)n_2+\ldots+(C_p^*-1)n_p$ donde C es el conductor de S.

4.- $\bar{C}_i=C_i^*$ para $i=1,\ldots,p$.

5.- $C_i=\bar{C}_i$ para $i=1,\ldots,p$.

6.- $C_i=\bar{C}_i=C_i^*$ para $i=1,\ldots,p$.

- Demostración -

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ Es inmediato que todo $W\in RP(n_0)$ admite una expresión de la forma $W=\lambda_1 n_1+\ldots+\lambda_p n_p$ con $\lambda_i\in\{0,1,\ldots,C_i^*-1\}$ para $i=1,\ldots,p$. Así pues es claro que:

$$RP(n_0)\subseteq\{\lambda_1 n_1+\ldots+\lambda_p n_p \ / \ \lambda_i\in\{0,1,\ldots,C_i^*-1\},\ i=1,\ldots,p\}$$

por otro lado, $\#\{\lambda_1 n_1+\ldots+\lambda_p n_p \ / \ \lambda_i\in\{0,1,\ldots,C_i^*-1\},\ i=1,\ldots,p\}\le n_0$ ya que $n_0=C_1^*C_2^*\ldots C_p^*$, de donde deducimos puesto que $\#RP(n_0)=n_0$ que se ha de verificar la igualdad o sea que:

$$RP(n_0)=\{\lambda_1 n_1+\ldots+\lambda_p n_p \ / \ \lambda_i\in\{0,1,\ldots,C_i^*-1\},\ i=1,\ldots,p\}.$$

$\boxed{2\Rightarrow 3}$ Es inmediato teniendo en cuenta que $C+n_0$=máximo de $RP(n_0)$.

$\boxed{3\Rightarrow 4}$ Por un razonamiento análogo al empleado en al demostración del lema 8.3. deducimos que $\bar{C}_i n_i$ admite una expresión de la forma $\bar{C}_i n_i=\lambda_0 n_0+\lambda_1 n_1+\ldots+\lambda_{i-1}n_{i-1}$ con $\lambda_0\in\mathbb{Z}$ y $0\le\lambda_j<\bar{C}_j$ para $j=1,\ldots,i-1$. En general sabemos que $\bar{C}_i\le C_i^*$, por tanto si probamos que $\lambda_0\in\mathbb{N}$, tendremos resuelta esta implicación.

Supongamos que $\lambda_0<0$, entonces despejando, obtenemos que: $\lambda_1 n_1+\ldots+\lambda_{i-1}n_{i-1}=\bar{C}_i n_i+(-\lambda_0)n_0\notin RP(n_0)$, teniendo en cuenta que $0\le\lambda_j<\bar{C}_j$ para $j=1,\ldots,i-1$, deducimos que:

$$(C+n_0)=(C_1^*-1)n_1+(C_2^*-1)n_2+\ldots+(C_p^*-1)n_p\notin RP(n_0)$$

y por tanto que $C\in S$, lo cual es absurdo.

$\boxed{4\Rightarrow 5}$ Obviamente $C_p=C_p^*$ y por tanto tenemos que $C_p=\bar{C}_p$. Supongamos que $\bar{C}_{j+1}=C_{j+1},\ldots,\bar{C}_p=C_p$, y demostremos que $\bar{C}_j=C_j$.

Por hipótesis tenemos que $\bar{C}_i=C_i^*$ para $i=1,\ldots,p$. De donde podemos deducir que $C_j n_j$ admite una expresión de la forma:

$$C_j n_j = a_0 n_0 + \ldots + a_{j-1} n_{j-1} + a_{j+1} n_{j+1} + \ldots + a_p n_p$$

donde $\{a_0, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_p\} \subseteq \mathbb{N}$ y $a_{j+k} < \bar{C}_{j+k}$ para $k=1, \ldots, p-j$.

Obviamente $a_p = 0$, ya que de lo contrario despejando $a_p n_p$ llegamos a una contradicción con la minimalidad de $\bar{C}_p$. Reiterando este proceso llegamos a que $a_{j+1} = \ldots = a_p = 0$. Por tanto, podemos asegurar que $C_j = C_j^*$ y por tanto que $C_j = \bar{C}_j$.

$\boxed{5 \Rightarrow 6}$ Veamos que $C_i = C_i^*$ para $i=1, \ldots, p$.

Claramente $C_p = C_p^*$, supongamos que $C_{j+1} = C_{j+1}^*, \ldots, C_p = C_p^*$, y demostremos que $C_j = C_j^*$.

Teniendo en cuenta que $\bar{C}_{j+k} = C_{j+k} = C_{j+k}^*$ para $k=1, \ldots, p-j$. Podemos deducir que $C_j n_j$ admite una expresión de la forma:

$$C_j n_j = a_0 n_0 + \ldots + a_{j-1} n_{j-1} + a_{j+1} n_{j+1} + \ldots + a_p n_p$$

donde $\{a_0, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_p\} \subseteq \mathbb{N}$ y $a_{j+k} < \bar{C}_{j+k}$ para $k=1, \ldots, p-j$. Aplicando ahora el, mismo razonamiento que el empleado en $4) \Rightarrow 5)$ obtenemos que $a_{j+1} = \ldots = a_p = 0$, y así que $C_j = C_j^*$.

$\boxed{6 \Rightarrow 1}$ Es obvio teniendo en cuenta que $\bar{C}_i = C_i^*$ para $i=1, \ldots, p$ y que por el lema 8.2. sabemos que $n_0 = \bar{C}_1 \bar{C}_2 \ldots \bar{C}_p$.■

<u>DEFINICION</u> <u>8.5</u>

Un semigrupo numérico S es libre, si una ordenación de sus generadores minimales $\{n_0, n_1, \ldots, n_p\}$, verifica alguna de las condiciones equivalentes del teorema anterior.

<u>NOTA</u>

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0, n_1, \ldots, n_p\}$ su sistema minimal de generadores. Denotemos por $C^* = (C_1^* - 1) n_1 + (C_2^* - 1) n_2 + \ldots + (C_p^* - 1) n_p - n_0$

observese que si C es el conductor de S, siempre se verifica que $C\leq C^*$. Por otra parte del teorema anterior deducimos que S es libre si, y solo si, $C=C^*$. Destacamos esta caracterización de libre ya que este resultado, puede verse en [4], con la definición de libre dada por 5) del teorema anterior. Observese también que esta caracterización nos da una visión de los semigrupos libres, como aquellos que en cierto sentido tienen conductor máximo.

<u>TEOREMA</u> <u>8.6</u>

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

<u>Tesis</u>

Son equivalentes:

1.- S es libre.(Para la ordenación de sus generadores minimales $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$).

2.- S es pegada de los semigrupos $S_1=\langle n_0,n_1,\ldots,n_{p-1}\rangle$ y $S_2=\langle n_p\rangle$. Además si $d=(n_0,n_1,\ldots,n_{p-1})$ se verifica que el semigrupo numérico $S_1'=\langle n_0/d,n_1/d,\ldots,n_{p-1}/d\rangle$ es libre.

- Demostración -

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ Para probar que S es pegada de S_1 y S_2, en virtud del teorema de pegada 6.5. bastará con ver que $dn_p\in S_1\cap S_2$. Evidentemente $dn_p\in S_2$, luego nos queda probar que $dn_p\in S_1$. Pero esto es claro ya que por ser S libre, $\bar{C}_p n_p\in S_1$ y $\bar{C}_p=d$.

Veamos ahora que $S_1'=\langle n_0/d,n_1/d,\ldots,n_{p-1}/d\rangle$ es libre. Para ello llamemos $C_i'^*=\text{mínimo}\{x\in\mathbb{N}^*\ /\ x(n_i/d)\in\langle n_0/d,n_1/d,\ldots,n_{i-1}/d\rangle\}$ donde i-1,...,p-1.

Obviamente $C_i'^*=C_i^*$ para i=1,...,p-1. Como S es libre sabemos que $n_0=C_1^*C_2^*\ldots C_p^*=C_1^*C_2^*\ldots C_{p-1}^*d$, de donde $n_0/d=C_1^*C_2^*\ldots C_{p-1}^*$. Así pues tenemos que $n_0/d=C_1'^*C_2'^*\ldots C_{p-1}'^*$ y por tanto que S_1' es libre.

$\boxed{2\Rightarrow 1}$ Si S es pegada de S_1 y S_2, tenemos que $dn_p\in S_1$ y por tanto que $C_p^*=d$. Obviamente $C_i'^*=C_i^*$ para $i=1,\ldots,p-1$. Como S_1' es libre sabemos que $n_0/d=C_1'^*C_2'^*\ldots C_{p-1}'^*$. Por tanto $n_0=C_1^*C_2^*\ldots C_{p-1}^*d$, de donde $n_0=C_1^*C_2^*\ldots C_p^*$. Así podemos afirmar que S es libre.

<u>COROLARIO 8.7</u>

Sea S semigrupo libre. (Para la ordenación de sus generadores minimales $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$).

<u>Tesis</u>

1.- S es intersección completa.

2.-
$$\begin{aligned}
&C_1^*n_1=a_{10}n_0\\
&C_2^*n_2=a_{20}n_0+a_{21}n_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_p^*n_p=a_{p0}n_0+a_{p1}n_1+\ldots+a_{pp-1}n_{p-1}.
\end{aligned}$$

es una relación mínima para S.

- Demostración -

La demostración la hacemos por inducción sobre el número de generadores de S. Para p=0 ó 1, el resultado es trivialmente cierto. Supongamos cierto para p-1 y demostremoslo para p.

En virtud del teorema anterior, S es pegada de los semigrupos $S_1=\langle n_0,n_1,\ldots,n_{p-1}\rangle$ y $S_2=\langle n_p\rangle$. Además si $d=(n_0,n_1,\ldots,n_{p-1})$ se verifica que el semigrupo numérico $S_1'=\langle n_0/d,n_1/d,\ldots,n_{p-1}/d\rangle$ es libre. Por hipótesis de inducción, una relación mínima para S_1' sería:

$$C_1'^{*}(n_1/d)=a_{10}(n_0/d)$$

$$C_2'^{*}(n_2/d)=a_{20}(n_0/d)+a_{21}(n_1/d)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{p-1}'^{*}(n_{p-1}/d)=a_{p-10}(n_0/d)+\ldots+a_{p-1p-2}(n_{p-2}/d).$$

Puesto que S_1 y S_1' son isomorfos y teniendo en cuenta que $C_i'^{*}=C_i^{*}$ para $i=1,\ldots,p-1$. Deducimos que:

$$C_1^{*}n_1=a_{10}n_0$$

$$C_2^{*}n_2=a_{20}n_0+a_{21}n_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{p-1}^{*}n_{p-1}=a_{p-10}n_0+\ldots+a_{p-1p-2}n_{p-2}$$

es una relación mínima para S_1.

Para concluir la demostración de este corolario, basta tener en cuenta que S es pegada de S_1 y S_2 y recordar la proposición 6.2.■

<u>COROLARIO 8.8</u>

Todo semigrupo libre es simétrico.

- Demostración -

Por el corolario anterior sabemos que todo semigrupo libre es intersección completa. Recordemos ahora el corolario 7.11. que nos decía que todo intersección completa es simétrico.■

<u>COROLARIO 8.9</u>

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores. Tomemos n_{p+1} $_{0}$ $_{1}$ $_{p}$

$(n_{p+1},\lambda)=1$. Llamamos $S'=<\lambda n_0,\lambda n_1,\ldots,\lambda n_p,n_{p+1}>$.

<u>Tesis</u>

S es libre si, y solo si, S'es libre.

- Demostración -

Consecuencia inmediata del teorema 8.6.

TEOREMA 8.10

Sea S semigrupo numérico.

Tesis

Son equivalentes:

1.- S es libre. (Para la ordenación de sus generadores minimales $\{n_0, n_1, \ldots, n_p\}$).

2.- Existe una relación mínima δ para S de la forma:

$$C_1 n_1 = a_{10} n_0$$
$$C_2 n_2 = a_{20} n_0 + a_{21} n_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_p n_p = a_{p0} n_0 + a_{p1} n_1 + \ldots + a_{pp-1} n_{p-1}.$$

- Demostración -

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Es consecuencia inmediata del corolario 8.7.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ La demostración de esta implicación la hacemos por inducción sobre el número de generadores minimales. Si p=0 ó 1, el resultado es trivialmente cierto. Supongamos cierto para p-1 y demostremoslo para p. Observese que δ nos está diciendo que S es pegada de $S_1 = \langle n_0, n_1, \ldots, n_{p-1} \rangle$ y $S_2 = \langle n_p \rangle$. Como consecuencia de ello tenemos que:

$$C_1 n_1 = a_{10} n_0$$
$$C_2 n_2 = a_{20} n_0 + a_{21} n_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{p-1} n_{p-1} = a_{p-10} n_0 + \ldots + a_{p-1p-2} n_{p-2}$$

es una relación mínima para S_1.(Vease teorema de pegada 6.5. y proposición 6.2.).

Una vez visto esto y aplicando hipótesis de inducción, deducimos que $S'_1=<n_0/d,n_1/d,\ldots,n_{p-1}/d>$ es libre donde $d=(n_0,n_1,\ldots,n_{p-1})$.

Aplicando ahora el teorema 8.6. tenemos que S es libre.■

NOTA

Observese que si S es un semigrupo interseccion completa, debe de existir al menos un $n\in S$ verificando que

$$n=C_0n_0=C_1n_1= \ldots =C_kn_k,$$

son todas sus expresiones. Un elemento $n\in S$ con esta condición diremos que es puntual (observese que G_n es no conexo y sus distintas componente conexas son puntos).

Por otro lado, si S es libre, del teorema anterior deducimos que S tiene un único elemento puntual.

TEOREMA 8.11

Sea S semigrupo numérico.

Tesis

Son equivalentes:

1.- S es libre.

2.- S es intersección completa y tiene un único elemento puntual.

- Demostración -

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ Esta razonado en la nota anterior.

$\boxed{2\Rightarrow 1}$ Supongamos que $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ es sistema minimal de generadores de S y que n es su único elemento puntual, cuyas diferentes expresiones son $n=C_0n_0=C_1n_1= \ldots =C_kn_k$. Puesto que S es intersección completa una relación mínima para S será de la forma:

$$C_1n_1=C_0n_0$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$C_kn_k=C_0n_0$$
$$C_{k+1}n_{k+1}=a_{k+1,0}n_0+\ldots+a_{k+1,p}n_p$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_pn_p=a_{p0}n_0+\ldots+a_{pp}n_p.$$

Veamos que podemos triangular dicho sistema. Para ello consideremos $m=\text{mínimo}\{x\in\langle n_0,n_1,\ldots,n_k\rangle \ / \ x\notin RP(n_j)$ para algún $j>k\}$, sabemos en virtud del lema 7.1. que $NR[m]\geq 2$. Puesto que S es intersección completa y n es su único elemento puntual, ha de existir $j>k$ verificando que $m=C_jn_j=b_{j0}n_0+b_{j1}n_1+\ldots+b_{jk}n_k$. Supongamos por comodidad que $j=k+1$. Si ahora reiteramos el proceso para $m=\text{mínimo}\{x\in\langle n_0,n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}\rangle \ / \ x\notin RP(n_j)$ para algún $j>k+1\}$ etc....

Legamos a obtener una relación mínima para S de la forma:

$$C_1n_1=C_0n_0$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$C_kn_k=C_0n_0$$
$$C_{k+1}n_{k+1}=b_{k+1,0}n_0+\ldots+b_{k+1,k}n_k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{p-1}n_{p-1}=b_{p-10}n_0+\ldots+b_{p-1p-2}n_{p-2}$$
$$C_pn_p=a_{p0}n_0+\ldots+a_{pp}n_p.$$

Aplicando el teorema 8.10. tenemos que S es libre.

COROLARIO 8.12

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Tesis

Son equivalentes:

1.- S es libre.

2.- S es intersección completa verificando que los elementos de cualquier relación mínima para S son de la forma:

$$C_i n_i = a_0 n_0 + \ldots + a_p n_p.$$

\- Demostración -

Es consecuencia del teorema 8.11. Observese que 2) de dicho teorema y 2) de este corolario son evidentemente equivalentes.

TEOREMA 8.13

Un semigrupo numérico S es libre, si y solo si, existen $x_1,x_2,\ldots,x_p \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ tales que, para una cierta ordenación de sus generadores minimales $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$, se verifica que:

$$\begin{aligned}
&n_0 = x_1 x_2 \ldots x_p\\
&n_1 = k_1 x_2 \ldots x_p\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&n_i = k_i x_{i+1} \ldots x_p\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&n_{p-1} = k_{p-1} x_p\\
&n_p = k_p
\end{aligned}$$

donde $k_i \in \mathbb{N}$, $(x_i,k_i)=1$ y

$$k_i \in \langle x_1 \ldots x_{i-1},\ k_1 x_2 \ldots x_{i-1},\ \ldots,\ k_{i-2} x_{i-1},\ k_{i-1} \rangle,$$

para todo $i\in\{1,\dots,p\}$.

- Demostración -

$\boxed{\Leftarrow}$ $\qquad k_i \in \langle x_1\dots x_{i-1},\ k_1x_2\dots x_{i-1},\ \dots\ ,k_{i-2}x_{i-1},\ k_{i-1}\rangle$

por tanto

$$k_ix_i\dots x_p \in \langle x_1\dots x_{i-1}x_i\dots x_p,\ k_1x_2\dots x_{i-1}x_i\dots x_p,\ \dots\ ,$$

$$\dots,k_{i-2}x_{i-1}x_i\dots x_p,\ k_{i-1}x_i\dots x_p\rangle,$$

así pues, $x_in_i \in \langle n_0,n_1,\dots,n_{i-1}\rangle$.

Por otro lado, es claro que

$$x_i = \frac{(n_0,n_1,\dots,n_{i-1})}{(n_0,n_1,\dots,n_{i-1},n_i)} = \bar{C}_i$$

y por tanto $C_i^*\le x_i=\bar{C}_i$, pero siempre $\bar{C}_i\le C_i^*$, de donde se deduce la igualdad $\bar{C}_i=C_i^*$ y así, que S es libre.

$\boxed{\Rightarrow}$ Veamos en primer lugar, por inducción sobre i, que

$$(n_0,n_1,\dots,n_i) = C_{i+1}^*\dots C_p^*.$$

Para i=0 el resultado es cierto ya que $n_0= C_1^*\dots C_p^*$.

Suponemos la hipótesis cierta para i-1 y demostremosla para i.

$$C_i^*= \bar{C}_i = \frac{(n_0,n_1,\dots,n_{i-1})}{(n_0,n_1,\dots,n_{i-1},n_i)},$$

de donde

$$(n_0,n_1,\dots,n_i)\ C_i^* = (n_0,n_1,\dots,n_{i-1}),$$

si ahora aplicamos la hipótesis de inducción y despejamos $(n_0,n_1,\dots,n_i)$ obtenemos que

$$(n_0,n_1,\dots,n_i) = C_{i+1}^*\dots C_p^*.$$

Una vez visto esto es claro que:

$$n_0= C_1^*C_2^*\dots C_p^*$$
$$n_1= k_1C_2^*\dots C_p^*$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$n_i = k_i C^*_{i+1} \dots C^*_p$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$n_{p-1} = k_{p-1} C^*_p$$

$$n_p = k_p$$

donde $(C^*_i, k_i) = 1$.

Por otro lado

$$C^*_i n_i \in \langle n_0, n_1, \dots, n_{i-1} \rangle$$

y por tanto

$$C^*_i k_i C^*_{i+1} \dots C^*_p \in \langle C^*_1 \dots C^*_p,\ k_1 C^*_2 \dots C^*_p\ ,\ \dots\ , k_{i-1} C^*_i \dots C^*_p \rangle,$$

de donde deducimos que

$$k_i \in \langle C^*_1 \dots C^*_{i-1},\ k_1 C^*_2 \dots C^*_{i-1},\ \dots\ , k_{i-2} C^*_{i-1},\ k_{i-1} \rangle,$$

luego basta tomar $x_i = C^*_i$, para probar que que esta implicación es cierta.■

<u>TEOREMA RESUMEN 8.14</u>

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0, n_1, \dots, n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

<u>Tesis</u>

Son equivalentes:

1.- S es libre. (Para la ordenación de sus generadores minimales $\{n_0, n_1, \dots, n_p\}$).

2.- $n_0 = C^*_1 C^*_2 \dots C^*_p$.

3.- $RP(n_0) = \{\lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_p n_p\ /\ \lambda_i \in \{0, 1, \dots, C^*_i - 1\},\ i = 1, \dots, p\}$.

4.- $(C + n_0) = (C^*_1 - 1) n_1 + (C^*_2 - 1) n_2 + \dots + (C^*_p - 1) n_p$ donde C es el conductor de S.

5.- $\bar{C}_i = C^*_i$ para $i = 1, \dots, p$.

6.- $C_i=\bar{C}_i$ para $i=1,\dots,p$.

7.- $C_i=\bar{C}_i=C_i^*$ para $i=1,\dots,p$.

8.- S es pegada de los semigrupos $S_1=\langle n_0,n_1,\dots,n_{p-1}\rangle$ y $S_2=\langle n_p\rangle$. Además si $d=(n_0,n_1,\dots,n_{p-1})$ se verifica que el semigrupo numérico $S_1'=\langle n_0/d,n_1/d,\dots,n_{p-1}/d\rangle$ es libre.

9.- Existe una relación mínima δ para S de la forma:

$$C_1n_1=a_{10}n_0$$
$$C_2n_2=a_{20}n_0+a_{21}n_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_pn_p=a_{p0}n_0+a_{p1}n_1+\dots+a_{pp-1}n_{p-1}.$$

10.- S es intersección completa y tiene un único elemento puntual.

11.- S es intersección completa verificando que los elementos de cualquier relación mínima para S son de la forma:

$$C_in_i=a_0n_0+\dots+a_pn_p.$$

12.- Existen $x_1,x_2,\dots,x_p\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ tales que:

$$n_0=x_1x_2\dots x_p$$
$$n_1=k_1x_2\dots x_p$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n_i=k_ix_{i+1}\dots x_p$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n_{p-1}=k_{p-1}x_p$$
$$n_p=k_p$$

donde $k_i\in\mathbb{N}$, $(x_i,k_i)=1$ y

$$k_i\in\langle x_1\dots x_{i-1},\ k_1x_2\dots x_{i-1},\ \dots,k_{i-2}x_{i-1},\ k_{i-1}\rangle,$$

para todo $i\in\{1,\dots,p\}$.□

CAPITULO 9

CUANDO LOS RESTOS PRIMARIOS TIENEN EXPRESIÓN ÚNICA.

Sea S semigrupo numérico con sistema minimal de generadores $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$. Sabemos que los elementos de S de la forma $C_i n_i$ tienen grafo no conexo. Pues bién, en este capítulo, para cualquier semigrupo numérico S, daremos una familia de elementos de S que tienen grafo no conexo. A continuación estudiaremos un tipo de semigrupos numéricos, "aquellos cuyos restos primarios tienen expresión única", y veremos que sus elementos con grafo no conexo son justamente los de la familia anterior. Veremos además, que si a estos últimos semigrupos le imponemos la condición de ser simétricos, entonces resultan libres.

Terminaremos el capítulo estudiando un tipo de semigrupos numéricos, que llamaremos simples (por la simplicidad de sus restos primarios), con la propiedad de que una relación mínima para ellos es muy fácil de calcular.

<u>PROPOSICION 9.1</u>

Sea S semigrupo numérico, $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores y $n_j \in \{n_1,\ldots,n_p\}$.

Consideremos el conjunto $RPm(n_0,n_j)$ de los elementos $W \in RP(n_0)$ verificando:

i) $W+n_j \in n_0\mathbb{N} + \ldots + n_{j-1}\mathbb{N} + n_{j+1}\mathbb{N} + \ldots + n_p\mathbb{N}$,

ii) si $W' \in RP(n_0)$ y $W-W' \in S-\{0\}$ entonces

$$W'+n_j \notin n_0\mathbb{N} + \ldots + n_{j-1}\mathbb{N} + n_{j+1}\mathbb{N} + \ldots + n_p\mathbb{N}.$$

<u>Tesis</u>

$W \in RPm(n_0,n_j) \Rightarrow G_{W+n_j}$ no es conexo.

- Demostración -

Para la demostración utilizaremos el teorema 1.23.

Sea $I = V_W \cup \{n_j\}$, $n = W+n_j$ y $A = \{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$.

Recordaremos que $V_W=\{n_i\in A \ / \ W-n_i\in S\}$.

Es inmediato que $n\in\langle I\rangle$, ya que $n = W+n_j$.

Veamos que $n\in\langle A - I\rangle$. En efecto, n admite una expresión de la forma $n = a_0n_0+ \ldots +a_pn_p$, con $a_j=0$. Probaremos que dicha expresión también verifica que $a_i=0$, para todo i tal que $n_i\in I$, con lo que quedaría probado nuestro resultado. Supongamos que existiese $n_k\in V_W$ tal que $a_k\neq 0$, tendríamos entonces que

$$(W-n_k)+n_j\in n_0\mathbb{N} + \ldots +n_{j-1}\mathbb{N} +n_{j+1}\mathbb{N} + \ldots +n_p\mathbb{N},$$

lo cual es absurdo ya que $W \in RPm(n_0,n_j)$.

Tenemos así probado que $n\in(\langle I\rangle^*\cap \langle A-I\rangle^*)$. Nuestro próximo objetivo será demostrar que $n \notin (\langle I\rangle^*+\langle A-I\rangle^*)$, para lo cual bastará ver que $n-(n_i+n_r)\notin S$, para todo $n_i\in I$ y todo $n_r\in A-I$. Distinguimos dos casos:

a) $n_i=n_j$,

b) $n_i\in V_W$.

a) $n-(n_j+n_r)\in S \Rightarrow n-(n_j+n_r)=W-n_r\in S \Rightarrow n_r\in V_W$. Lo cual es absurdo ya que $n_r\in A-I$.

b) Si $n-(n_i+n_r)\in S$, entonces existe una expresión de n de la forma

$$n = a_0n_0+ \ldots +a_pn_p$$

con a_i y a_r distintos de cero, pero dicha expresión (por el apartado a)) verifica que $a_j=0$. Aplicando el mismo razonamiento que en la demostración de que $n\in\langle A - I\rangle$, llegamos a que $a_i=0$, lo cual es absurdo pues teniamos que $a_i\neq 0$.

Resumiendo, tenemos que

$$n \in (\langle I\rangle^* \cap \langle A-I\rangle^*) - (\langle I\rangle^* + \langle A-I\rangle^*)$$

y así, el teorema 1.22 nos asegura que G_n no es conexo.■

NOTA

Observese que la proposición 9.1 anterior nos da, para cualquier semigrupo numérico, una familia de elementos cuyos grafos son no conexos. Nuestro próximo objetivo será estudiar un tipo especial de semigrupos numéricos, estos verificaran que todos sus elementos con grafo no conexo son de esta forma.

DEFINICION 9.2

Sea S un semigrupo numérico y $n\in S$. Diremos que n tiene expresión única si :

$$\left(n = a_0 n_0 + \dots + a_p n_p = b_0 n_0 + \dots + b_p n_p \right) \Rightarrow \left(a_i = b_i,\ 0\le i\le p \right).$$

PROPOSICION 9.3

Sea S un semigrupo numérico, $\{n_0, n_1, \dots, n_p\}$ su sistema minimal de generadores y $n_j\in \{n_1, \dots, n_p\}$.

Supongamos que para todo $W \in RP(n_0)$, W tiene expresión única.

Tesis

$W \in RPm(n_0, n_j)$ si, y solo si, $W+n_j \notin RP(n_0)$ y $W'+n_j\in RP(n_0)$, para todo $W'\neq W$ tal que $W - W'\in S$.

- Demostración -

$\boxed{\Rightarrow}$ $W \in RPm(n_0, n_j)$, entonces $W+n_j$ admite al menos dos expresiones y por tanto $W+n_j \notin RP(n_0)$ ya que por hipótesis los elementos de $RP(n_0)$ tienen expresión única.

Si existiese $W' \neq W$ tal que $W - W' \in S$ y $W'+n_j \notin RP(n_0)$, tendríamos que

$$W'+n_j \in n_0\mathbb{N} + \ldots + n_{j-1}\mathbb{N} + n_{j+1}\mathbb{N} + \ldots + n_p\mathbb{N}$$

ya que por $W'+n_j \notin RP(n_0)$ deducimos que $W'+n_j$ admite una expresión de la forma $W'+n_j = a_0 n_0 + \ldots + a_p n_p$ con $a_0 \neq 0$, pero si adémas en dicha expresión se verificara que $a_j \neq 0$, tendríamos que

$$W'+n_j-(n_j+n_0)=W'-n_0 \in S, \text{ en contra de que } W' \in RP(n_0).$$

Así pues si existiese $W' \neq W$ tal que $W - W' \in S$ y $W'+n_j \notin RP(n_0)$, tendríamos que

$$W'+n_j \in n_0\mathbb{N} + \ldots + n_{j-1}\mathbb{N} + n_{j+1}\mathbb{N} + \ldots + n_p\mathbb{N}$$

lo cual es absurdo, pues contradice el hecho de que $W \in RPm(n_0,n_j)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $W+n_j \notin RP(n_0)$, por tanto $W+n_j \in n_0\mathbb{N} + \ldots + n_{j-1}\mathbb{N} + n_{j+1}\mathbb{N} + \ldots + n_p\mathbb{N}$ ya que $W+n_j-(n_j+n_0) \notin S$. Por otro lado $W'+n_j \in RP(n_0)$, para todo $W' \neq W$ tal que $W - W' \in S$, y por consiguiente $W'+n_j$ tiene expresión única. De aquí $W'+n_j \notin n_0\mathbb{N} + \ldots + n_{j-1}\mathbb{N} + n_{j+1}\mathbb{N} + \ldots + n_p\mathbb{N}$ y así podemos concluir que $W \in RPm(n_0,n_j)$.■

<u>TEOREMA 9.4</u>

Sea S un semigrupo numérico, $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores y $n \in S$.

Supongamos que todo $W \in RP(n_0)$ tiene expresión única.

<u>Tesis</u>

G_n es no conexo si, y solo si, $n = W+n_j$ con $W \in RPm(n_0,n_j)$ y $j \in \{1,\ldots,p\}$

- Demostración -

$\boxed{\Leftarrow}$ Ya lo hemos visto en la proposición 9.1.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si G_n es no conexo, existirá $n_j \in \{n_1,...,n_p\}$ tal que n_j y n_0 estan en distintas componentes conexas (tengase en cuenta que los restos primarios de n_0 tienen expresión única y por tanto sus correspondientes grafos son conexos), así $n = W+n_j$ con $W \in RP(n_0)$ y además $W'+n_j \in RP(n_0)$, para todo $W' \neq W$ tal que $W-W' \in S$, ya que de lo contrario deduciríamos que n_j y n_0 están en la misma componente conexa de n. Así pues, aplicando la proposición 9.3, tenemos que $W \in RPm(n_0,n_j)$.■

NOTA

Nuestro próximo objetivo será estudiar los semigrupos simétricos con la propiedad de que sus restos primarios tienen expresión única.

LEMA 9.5

Sea S semigrupo simétrico y $\{n_0,n_1,...,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Supongamos que $RP(n_0) = \{ 0<W(1)< ... <W(n_0-1) \}$.

Tesis

$W(n_0-1)$ expresión única si, y solo si, todo $W \in RP(n_0)$ tiene expresión única.

- Demostración -

$W(n_0-1)$ expresión única $\Leftrightarrow \forall\ W \in S$ tal que $W(n_0-1)-W \in S$, W tiene expresión única $\Leftrightarrow$ (aplicando que S es simétrico) $\Leftrightarrow$ todo $W \in RP(n_0)$ tiene expresión única.■

TEOREMA 9.6

Sea S semigrupo simétrico y $\{n_0,n_1,...,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Supongamos que $RP(n_0) = \{ 0<W(1)< ... <W(n_0-1) \}$ y que $W(n_0-1)$ tiene expresión única.

Tesis

S es libre.

- Demostración -

Sea $C_j=$ mínimo $\{x \in \mathbb{N}-\{0\} \ / \ xn_j \in n_0\mathbb{N} +...+n_{j-1}\mathbb{N} +n_{j+1}\mathbb{N} +...+n_p\mathbb{N} \}$, $j=1,2,...,p$.

Obsérvese que $C_jn_j = a_{j0}n_0+...+a_{jp}n_p$, con $a_{j0}\neq 0$ (ya que los elementos de $RP(n_0)$ tienen expresión única).

Obsérvese también, que como $(C_j-1)n_j \in RP(n_0)$ y S es simétrico con $W(n_0-1)$ de expresión única, se ha de verificar

$$W(n_0-1) = (C_1-1)n_1+(C_2-1)n_2+...+(C_p-1)n_p+s, \text{ con } s \in S.$$

Veamos que $C_j= C_j^*$, para una cierta ordenación de los generadores. En efecto:

Existe $i \in \{1,...,p\}$ tal que $a_{ji}= 0$, para todo $j \in \{1,...,p\}$, ya que de lo contrario tendríamos que

$$(C_1-1)n_1+(C_2-1)n_2+...+(C_p-1)n_p =$$
$$=(a_{10}+...+a_{p0})n_0+(a_{21}+...+a_{p1}-1)n_1+...+(a_{1p}+...a_{p-1p}-1)n_p$$

con $a_{10}+ ... +a_{p0}\neq 0$ y así esta expresión no sería un resto primario de n_0 lo cual es absurdo ya que esa expresión es parte de $W(n_0-1)$.

Supongamos por comodidad que j=p. Reiterando el proceso entre los restantes C_i llegamos a que :

$$C_1n_1 = a_{10}n_0$$
$$C_2n_2 = a_{20}n_0 + a_{21}n_1$$
$$C_3n_3 = a_{30}n_0 + a_{31}n_1 + a_{32}n_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_pn_p = a_{p0}n_0 + a_{p1}n_1 + \ldots + a_{p\,p-1}n_{p-1}$$

por tanto se tiene que $C_j = C_j^*$, para todo $j \in \{1,\ldots,p\}$.

Así pues

$$W(n_0-1) = (C_1^*-1)n_1+(C_2^*-1)n_2+ \ \ldots \ +(C_p^*-1)n_p+ s, \text{ con } s \in S.$$

luego

$$C = (C_1^*-1)n_1+(C_2^*-1)n_2+ \ \ldots \ + (C_p^*-1)n_p+ s-n_0,$$

de donde deducimos que $s = 0$ y $C = C^*$. Por tanto, S es libre.■

NOTA

El recíproco de este teorema no es cierto en general ya que, por ejemplo en el semigrupo $S = <42,28,10,19>$ que es libre, $38 \in RP(42)$ y no tiene expresión única.□

Terminaremos este capítulo, estudiando un tipo de semigrupos cuyos restos primarios tienen expresión única y para los cuales es muy fácil calcular sus relaciones mínimas.

DEFINICION 9.7

Sea S semigrupo numérico y $\{n_0,n_1,\ldots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores.

Para $j=0,1,\ldots,p$, denotamos por

$$C_j = \text{mínimo}\{x \in \mathbb{N}-\{0\} \ / \ xn_j \in n_0\mathbb{N} +\ldots+n_{j-1}\mathbb{N} +n_{j+1}\mathbb{N} +\ldots+n_p\mathbb{N} \}.$$

Diremos que S es un semigrupo simple si, para alguna ordenación de sus generadores minimales, verifica que

$$n_0-1 = (C_1-1)+(C_2-1)+ \dots +(C_p-1).$$

NOTA

1) Obsérvese que en un semigrupo numérico arbitrario, siempre se tiene que $n_0-1 \geq (C_1-1)+(C_2-1)+\dots+(C_p-1)$.

2) Si S es simple se tiene que:

$$RP(n_0) = \{0,n_1,\dots,(C_1-1)n_1,n_2,\dots,(C_2-1)n_2,\dots,n_p,\dots,(C_p-1)n_p\}$$

con lo cual claramente los restos primários de n_0 tienen expresión única.

3) Notese que tanto los semigrupos relacionalmente máximos, así como los semigrupos numéricos con tan solo dos generadores minimales, son simples. Otros ejemplos de semigrupos simples serían <4,5,7> y <5,6,8,9>.

PROPOSICION 9.8

Sea S semigrupo simple, $\{n_0,n_1,\dots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores y $n \in S$.

Tesis

G_n no es conexo si, y solo si, $n = n_i+ n_j$ ó $n = C_jn_j$, con $i,j \in\{1,\dots,p\}$ e $i\neq j$.

- Demostración -

Es clara, aplicando el teorema 9.4, teniendo en cuenta que

$$RPm(n_0,n_j)=\{n_1,\dots,n_{i-1},n_{i+1},\dots,n_p,(C_i-1)n_i\}.\blacksquare$$

PROPOSICION 9.9

Sea S semigrupo simple y $\{n_0,n_1,\dots,n_p\}$ su sistema minimal de generadores y $n \in S$.

Tesis

S simétrico $\Rightarrow p=1$.

- Demostración -

Por se S simple sabemos que

$$RP(n_0) = \{0,n_1,\ldots,(C_1-1)n_1,n_2,\ldots,(C_2-1)n_2,\ldots,n_p,\ldots,(C_p-1)n_p\}$$

es claro entonces que $C+n_0=(C_i-1)n_i$ para algún $i\in\{1,\ldots,p\}$. Si ahora le exigimos a S que sea simétrico, se ha de verificar que $C+n_0-n_j\in S$ para todo $j\in\{1,\ldots,p\}$, así pues, $(C_i-1)n_i-n_j\in S$ para todo $j\in\{1,\ldots,p\}$, de donde deducimos que $n_i=n_j$ para todo $j\in\{1,\ldots,p\}$.

NOTA

Obsevese que dentro de los semigrupos númericos, verificando que sus restos primarios tienen expresión única, hemos estudiado en profundiddad dos tipos, los simétricos (que hemos visto que con esta condición resultan un tipo especial de libres) y los que hemos denominado simples, en esta última proposición hemos visto que la intersección de estos dos tipos esta constituida, por los semigrupos numéricos que tan solo tienen dos generadores minimales.

CAPITULO 10

UNA PARTICIÓN DE $\mathcal{S}(m,C)$.

Durante este capítulo y mientras no se diga lo contrario supondremos que $C>2n_0$.

Observese que $\mathcal{S}(n_0,C)$, es decir, el conjunto de todos los semigrupos numéricos con conductor C y mínimo generador minimal n_0, es cerrado para la intersección, no ocurre así para la unión. Pues bien, nuestro primer objetivo en este capítulo sera construir una partición de $\mathcal{S}(n_0,C)$ de manera que los elementos de dicha partición van a ser retículos distributivos respecto de la unión y la intersección.

Denotaremos por $M(n_0,C)$ al conjunto de los elementos maximales respecto de la inclusión de $\mathcal{S}(n_0,C)$, como veremos cada elemento de la partición anterior se corresponde biunivocamente con un elemento de $M(n_0,C)$.

Veremos también que conocer los elementos de $M(n_0,C)$ es equivalente a conocer los elementos de $\mathcal{S}(n_0,C)$ que no tienen generadores minimales pertenecientes al intervalo $]C/2,C[$.

Continuaremos el capítulo construyendo un semigrupo especial, $S(n_0,C)$, de $M(n_0,C)$ al que llamaremos "semigrupo maximal canónico". Este tiene entre otras, la propiedad de que todo elemento $S\in M(n_0,C)$ puede expresarse de la forma:

$$S=\left(S(n_0,C)-\{C-h_1,\ C-h_2,\ \dots\ ,C-h_r\}\right)\cup\{h_1,\ h_2,\ \dots\ ,h_r\},$$

donde $\{h_1,\ h_2,\ \dots\ ,h_r\}$ es un subconjunto de naturales del intervalo $]n_0,C/2[$ verificandose además que

$$\{C-h_1,C-h_2, \ldots ,C-h_r\}\subseteq S(n_0,C).$$

Para finalizar el capítulo estudiaremos $\mathscr{S}(n_0,C)$, en el caso en que $C<2n_0$. Veremos que entonces $\left(\mathscr{S}(n_0,C),\ \cup,\ \cap\right)$ es un álgebra de Boole.

La demostración de la siguiente proposición puede verse en [8].

<u>PROPOSICION 10.1</u>

Sea S un elemento de $\mathscr{S}(n_0,C)$.

1.- Si C es un número natural impar. Entonces:
S es un elemento de $M(n_0,C)$ si, y solo si, para todo par de naturales h y h' tales que $C=h+h'$se tiene que $h\in S$ o $h'\in S$ (i.e. S es simétrico).

2.- Si C es un número natural par. Entonces:
S es un elemento de $M(n_0,C)$ si, y solo si, para todo par de naturales distintos de C/2, h y h', tales que $C=h+h'$ se tiene que $h\in S$ o $h'\in S$.■

<u>LEMA 10.2</u>

Sea S un elemento de $\mathscr{S}(n_0,C)$ y denotemos por

$$h = \text{máximo } \{x \notin S \ / \ C-x \notin S \ ,x\neq {}^{C}/_{2}\}$$

<u>Tesis</u>

$S\cup\{h\} \in \mathscr{S}(n_0,C)$.

- Demostración -

Veamos en primer lugar que $S\cup\{h\}$ es semigrupo. Para esto bastará probar que $2h\in S$ y que $h+s\in S\cup\{h\}$, para todo $s\in S$. Pero $2h>C$, puesto que $h>C/2$, y consecuentemente $2h\in S$. Por otro lado, si $s\in S$ y $h+s\notin S$, tendríamos que $h+s\notin S$ y $C-(h+s)\notin S$ (ya que $C-h\notin S \Rightarrow C-h-s\notin S$), lo cual es absurdo ya que h era el máximo con esta condición.

Obviamente n_0 sigue siendo el mínimo generador minimal de $S\cup\{h\}$, debido a que $2n_0<C$ y por tanto $n_0<C/2<h$.

Para probar que C es el conductor de $S\cup\{h\}$, bastará ver que $C\notin S\cup\{h\}$. Pero esto es claro ya que $C\neq h$, puesto que $C-C=0\in S$.■

PROPOSICION 10.3

Sea S un elemento de $\mathcal{S}(n_0,C)$.

Tesis

Existe un subconjunto finito, $\{h_1,h_2, \ldots ,h_r\}$ de números naturales mayores que C/2, verificando que $S\cup\{h_1,h_2, \ldots ,h_r\}$ es un elemento de $M(n_0,C)$.

- Demostración -

Consideremos la siguiente sucesión de elementos de $\mathcal{S}(n_0,C)$:

$$S_0=S$$

$$S_{j+1}=S_j\cup\{h_j\},\ j\geq 0,$$

$$\text{donde } h_j= \text{máximo } \{ x \notin S_j \ / \ C-x \notin S_j, x\neq C/2 \},$$

el lema 10.2 nos asegura que los elementos de esta sucesión pertenecen a $\mathcal{S}(n_0,C)$, y por otro lado esta sucesión es finita (ya que los elementos añadidos a cada semigrupo son naturales entre C/2 y C). Existirá así un número natural r verificando que

$$\{ x \notin S_r \ / \ C-x \notin S_r,\ x \neq C/2 \} = \phi$$

y por tanto, aplicando la proposición 10.1, podemos concluir que S_r es un elemento de $M(n_0,C)$.∎

DEFINICION 10.4

Dado un elemento S de $M(n_0,C)$, diremos que un elemento S' de $\mathcal{S}(n_0,C)$ está en la capa de S, si existe un subconjunto finito $\{h_1,h_2, \ldots ,h_r\}$ de números naturales, mayores que $^C/_2$, verificando que $S' \cup \{h_1,h_2, \ldots ,h_r\}=S$.

Denotaremos por $\mathcal{A}_S$ el conjunto de todos los elementos de $\mathcal{S}(n_0,C)$ que estan en la capa de S.

PROPOSICION 10.5

Sea S un elemento de $M(n_0,C)$ y S_1, $S_2 \in \mathcal{A}_S$.

Tesis

1.- $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{A}_S$.

2.- $S_1 \cup S_2 \in \mathcal{A}_S$.

- Demostración -

S_1, $S_2 \in \mathcal{A}_S$ y por tanto existirán subconjutos finitos H_1 y H_2, de números naturales mayores que C/2, verificando que

$$S_1 \cup H_1 = S \quad y \quad S_2 \cup H_2 = S$$

1) Claramente $S_1 \cap S_2$ es un elemento de $\mathcal{S}(n_0,C)$, para probar que $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{A}_S$ veremos que $(S_1 \cap S_2) \cup (H_1 \cup H_2) = S$. En efecto,

$$(S_1 \cap S_2) \cup (H_1 \cup H_2) = \Big[S_1 \cup (H_1 \cup H_2)\Big] \cap \Big[S_2 \cup (H_1 \cup H_2)\Big] = S \cap S = S.$$

2) En primer lugar veremos que $S_1 \cup S_2$ es un elemento de $\mathcal{S}(n_0,C)$. Para lo cual bastará probar que es semigrupo ya que en este caso claramente su conductor es C y su mínimo generador minimal es n_0. Para ello basta con ver que si $x_1 \in S_1$ y $x_2 \in S_2$

entonces $x_1+x_2\in S_1 \cup S_2$, podemos suponer además (para evitar trivialidades) que $x_1\notin S_2$ y $x_2\notin S_1$ o lo que es equivalente $x_1\in H_2$ y $x_2\in H_1$. Así x_1 y x_2 son mayores que C/2. De esta manera podemos concluir que x_1+x_2 es mayor que C y por consiguiente pertenece a $S_1 \cup S_2$.

Para probar que $S_1\cup S_2\in \mathcal{A}_S$ veremos que $(S_1\cup S_2)\cup(H_1\cap H_2)=S$. En efecto:

$$(S_1\cup S_2)\cup(H_1\cap H_2)=\Big((S_1\cup S_2)\cup H_1\Big) \cap \Big((S_1\cup S_2)\cup H_2\Big)=S\cap S=S.\blacksquare$$

<u>DEFINICION</u> <u>10.6</u>

Dado un elemento S de $M(n_0,C)$, llamaremos elemento mínimo de la capa de S y lo denotaremos por m(S), a la intersección de todos los semigrupos que estan en la capa de S. Observese que el apartado 1) de la proposición 10.5, nos esta diciendo que m(S) esta en la capa de S, luego en realidad es el mínimo respecto de la inclusión.

<u>LEMA</u> <u>10.7</u>

Sea S un elemento de $M(n_0,C)$ y S'un elemento arbitrario de $\mathcal{S}(n_0,C)$.

<u>Tesis</u>

$$S'\in \mathcal{A}_S \Leftrightarrow m(S)\subseteq S'\subseteq S.$$

\- Demostración -

$\boxed{\Rightarrow}$ Trivial.

$\boxed{\Leftarrow}$ $m(S)\in\mathcal{A}_S$, luego existira un subconjunto finito H de números naturales mayores que C/2 y talque $m(S)\cup H=S$.Pues bien, denotemos por $H'=\{h\in H \ / \ h\notin S'\}$, claramente $S'\cup H'=S$ y por lo tanto S'está en la capa de S.■

PROPOSICION 10.8

Supongamos que $S^1, S^2, \ldots, S^n$ son todos los elementos de $M(n_0,C)$ y $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ sus capas asociadas.

Tesis

$\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$ es una partición de $\mathcal{S}(n_0,C)$.

- Demostración -

Aplicando la proposición 10.3, que nos dice que cualquier elemento de $\mathcal{S}(n_0,C)$ pertenece al menos a la capa de un maximal, tenemos que

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{A}_n = \mathcal{S}(n_0,C).$$

Veamos ahora que $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \neq \phi$ implica que $i=j$. En efecto, supongamos que $S \in \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j$, existen entonces conjuntos finitos H_i y H_j (de números naturales mayores que $C/2$) verificando que

$$S \cup H_i = S^i \quad y \quad S \cup H_j = S^j,$$

consideremos ahora el semigrupo $S'=\langle S,H_i,H_j\rangle$, S' tiene como mínimo generador minimal a n_0 y como conductor a C (ya que $C \notin \langle S,H_i\rangle$, $C \notin \langle S,H_j\rangle$ y la suma de un elemento de H_i y un elemento de H_j es mayor que C). Así S'es un elemento de $\mathcal{S}(n_0,C)$. Obviamente S^i y S^j estan contenidos en S', pero estos eran maximales, luego ha de verificarse que $S^i=S^j = S'$ y por tanto $i=j$.■

LEMA 10.9

Sea S un elemento de $M(n_0,C)$, con sistema minimal de generadores $\{ n_0,n_1, \ldots ,n_r,n_{r+1}, \ldots ,n_p\}$. Supongamos además que

$n_0<n_1< \ldots <n_r<(C/2)<n_{r+1}< \ldots <n_p$.

Tesis

$m(S)=<n_0,n_1, \ ... \ ,n_r,C+1,C+2, \ .... \ ,C+n_0>$.

- Demostración -

Claramente $S'=<n_0,n_1, \ ... \ ,n_r,C+1,C+2, \ .... \ ,C+n_0>$ está en la capa de S, puesto que sólo se diferencia de él en elementos mayores que C/2. Por otro lado, cualquier semigrupo que esté en la capa de S, tiene que contener a S'(ya que por debajo de C/2, tiene que tener los mismos elementos que S). De lo expuesto hasta aquí, es claro que S'es el mínimo de la capa de S,y por tanto coincide con m(S).■

DEFINICION 10.10

Sea S un elemento p+60Xde $_0M(n\ ,C)$, denotaremos por

$$D_S=S-m(S)=\{s\in S \ / \ s\notin m(S)\}.$$

Diremos que un subconjunto B de D_S es cerrado si verifica que

$$\left(h\in B,\ h'\in D_S \text{ y } h'-h\in m(S)\right) \Rightarrow h'\in B.$$

Denotaremos por $\mathcal{B}_S$ el conjunto de todos los subconjuntos *p+270Xcerrados de D_S.

TEOREMA 10.11

$\mathcal{A}_S$ es biyectivo con $\mathcal{B}_S$.

- Demostración -

$$\text{Definimos } \vartheta:\mathcal{B}_S \longrightarrow \mathcal{A}_S \text{ por } \vartheta(B)=m(S)\cup B.$$

En primer lugar probaremos que ϑ está bién definida, osea que, $\vartheta(B)\in\mathcal{A}_S$ para todo $B\in\mathcal{B}_S$. Para lo cual veremos que $\vartheta(B)$ semigrupo, pues una vez visto esto, aplicando el lema 10.7, obtenemos lo que queremos. Ahora bien, la suma de dos elementos de

B es mayor que C, luego pertenece a $m(S)\subseteq\vartheta(B)$, la suma de dos elementos de $m(S)$ pertenece a $m(S)$ y por tanto a $\vartheta(B)$, y por último la suma de un elemento $h\in B$ y un

siempre a $S=m(S)\cup D_S$, así $h+s\in m(S)\subseteq\vartheta(B)$ ó $h+s\in D_S$ (en cuyo caso, por definición de cerrado, $h+s\in B$) y por tanto pertenece a $\vartheta(B)=m(S)\cup B$.

Veamos ahora que ϑ es inyectiva:

$\vartheta(B)=\vartheta(B')$ implica que $m(S)\cup B=m(S)\cup B'$, de donde deducimos que $B=B'$ (tengase en cuenta que B y B'son subconjuntos de D_S y por tanto son disjuntos Xcon $m(S)$).

Veamos que ϑ es sobreyectiva:

Sea S'un elemento de $\mathcal{A}_S$, entonces (aplicando el lema 10.7) tenemos que $m(S)\leq S'\leq S$ y por tanto, existe un subconjunto B de D_S verificando que $S'=m(S)\cup B$. Veamos que B es cerrado. En efecto, como $S'=m(S)\cup B$ es semigrupo, la suma de un elemento de B y un +30Xelemento de $m(S)$ es un elemento de $m(S)\cup B$, es claro que B verifica la condición para ser cerrado.∎

Como consecuencia inmediata obtenemos

<u>COROLARIO</u> <u>10.12</u>

Sea S un elemento de $M(n_0,C)$.

<u>Tesis</u>

$(\mathcal{A}_S,\cup,\cap)$ y $(\mathcal{B}_S,\cup,\cap)$ son retículos distributivos isomorfos, con elementos 1 y 0 (en general no complementados).

- Demostración -

De la definición 10.10. se deduce facilmente que la unión y la intersección de cerrados es un cerrado, así como que el vacío y

D_S son cerrados . Por otro lado, la aplicación $\vartheta:\mathcal{B}_S \longrightarrow \mathcal{A}_S$ es claramente un isomorfismo de retículos con $1=\vartheta(D_S)=m(S)\cup D_S$ y $0=\vartheta(\phi)=m(S)$. Finalmente, teniendo en cuenta que la unión siempre es distributiva respecto de la intersección, tenemos probado el enunciado.

<u>PROPOSICION</u> <u>10.13</u>

Sea S'un elemento de $\mathcal{S}(n_0,C)$.

<u>Tesis</u>

$S'=m(S)$, para algún S de $M(n_0,C)$ si, y solo si, S' no tiene generadores minimales pertenecientes al intervalo]C/2,C[.

- Demostración -

$\boxed{\Rightarrow}$ Es inmediato aplicando el lema 10.9.

$\boxed{\Leftarrow}$ Como las capas son una partición de $\mathcal{S}(n_0,C)$ -Proposición 10.8- existirá un elemento S de $M(n_0,C)$, verificando que $S'\in\mathcal{A}_S$. Y por tanto (aplicando el teorema 10.11) exite un conjunto finito B, de números naturales pertenecientes al intervalo]C/2,C[, tal que $S'=m(S)\cup B$. Ahora bién, si $B\neq\phi$, el mínimo de B es claramente un generador minimal de S' y además dicho generador pertenece al intervalo]C/2,C[, lo que contradiría las hipótesis. Así pues $B=\phi$ y por consiguiente $S'=m(S)$.■

<u>NOTACION</u>

Denotaremos por $m(n_0,C)$, el conjunto de los semigrupos numéricos con mínimo generador minimal n_0, conductor C y tales que no tienen generadores minimales en el intervalo]C/2,C[.

PROPOSICION 10.14

La aplicación

$$m:M(n_0,C)\longrightarrow m(n_0,C)$$

que asigna, a un elemento S de $M(n_0,C)$, el mínimo de su capa $m(S)$, es biyectiva.

- Demostración -

Es inmediata aplicando las proposiciones 10.8 y 10.13.■

NOTA

Si denotamos por M a la aplicación inversa de m, la proposición 10.1 nos dice como construir esta aplicación. Tenemos así un método para conocer los elementos de $M(n_0,C)$ a partir de los elementos de $m(n_0,C)$, y así, utilizando el teorema 10.11, podemos determinar todos los elementos de $\mathcal{S}(n_0,C)$ a partir de $m(n_0,C)$.

PROPOSICION 10.15

Sea S un elemento de $m(n_0,C)$ y supongamos que existe

$$g=\text{máximo}\{x\in\mathbb{N} \;/\; x\in]n_0,C/2[,\ x\notin S \text{ y } C\notin\langle S,x\rangle\}.$$

Llamemos $S'=\langle S,g\rangle$.

Tesis

1.- $S'\in m(n_0,C)$.

2.- $M(S)\cup\{g\} = M(S')\cup\{C-g\}$.

- Demostración -

1) Puesto que $g\in\{x\in\mathbb{N}/x\in]n_0,C/2[,x\notin S \text{ y } C\notin\langle S,x\rangle\}$ es inmediato que $S'=\langle S,g\rangle$ no tiene ningún generador mayor que C/2, por tanto aplicando la proposición 10.13. $S'\in m(n_0,C)$.

2) Veamos que

$$(S'\cap[0,C/2])-(S\cap[0,C/2])=\{g\}.$$

En efecto, supongamos que $x\in(S'\cap[0,C/2])-(S\cap[0,C/2])$. Entonces existirán, $a\in\mathbb{N}-\{0\}$ y $s\in S$ tales que $x=ag+s$. Claramente

$$g\leq x,\ x\in]n_0,C/2[,\ x\notin S\ \text{ y } C\notin\langle S,x\rangle$$

por lo cual (teniendo en cuenta que g es máximo) se tiene que $x=g$.

Veamos ya que $M(S)\cup\{g\} = M(S')\cup\{C-g\}$. La demostración la haremos en cuatro etapas:

a)Sea $n<C/2$ y supongamos que $n\in M(S)-M(S')$. Entonces tenemos que $n\in M(S)$ y $n\notin M(S')$. Puesto que $n<C/2$, deducimos que $n\in S$ y $n\notin S'$ y esto es absurdo ya que $S-S'=\phi$.

b)Sea $n<C/2$ y supongamos que $n\in M(S')-M(S)$. Entonces, aplicando el mismo razonamiento que en a), tenemos que $n\in S'-S$. Por tanto, al ser $n<C/2$, podemos concluir que $n=g$.

c)Sea $n>C/2$ y supongamos que $n\in M(S)-M(S')$. Tenemos entonces que $n\in M(S)$ y $n\notin M(S')$. Ahora bien, teniendo en cuenta que $M(S)$ y $M(S')$ son maximales y aplicando la proposición 10.1, deducimos que $C-n\notin M(S)$ y $C-n\in M(S')$. Así pues $C-n\in M(S')-M(S)$ y además $C-n<C/2$, luego aplicando b), obtenemos que $C-n=g$ y por tanto que $n=C-g$.

d)Sea $n>C/2$ y supongamos que $n\in M(S')-M(S)$. Entonces, aplicando el mismo razonamiento que en c), obtenemos que $C-n\in M(S)-M(S')$. Además $C-n<C/2$, aplicando a) tenemos que este caso no se puede dar.

Es claro que de a), b), c) y d) se desprende que

$$M(S)\cup\{g\} = M(S')\cup\{C-g\}.\blacksquare$$

NOTA

Observese que dos semigrupos de $M(n_0,C)$, se diferencian al menos en dos elementos. La proposición 10.15 nos dice que si tenemos un elemento S de $M(n_0,C)$, verificando que m(S) no es un elemento maximal de $m(n_0,C)$ - observese que para realizar la construcción de S'en la proposición 10.15 necesitamos que el conjunto $\{x\in\mathbb{N} \ / \ x\in]n_0,C/2[,\ x\notin S \text{ y } C\notin\langle S,x\rangle\}$ sea no vacio -, podemos construir otro elemento M(S') de $M(n_0,C)$, de manera que S y M(S') se diferencian sólo en dos elementos.

PROPOSICION 10.16

Sean S y S' dos elementos distintos de $M(n_0,C)$, $s\in S$ y $s'\in S'$ dos elementos tales que

$$S\cup\{s'\}=S'\cup\{s\}$$

Tesis

$s'=C-s$.

- Demostración -

$s\in S-S' \Leftrightarrow \left(s\in S \text{ y } s\notin S'\right) \Leftrightarrow$

(aplicando que S y S'son maximales)

$\Leftrightarrow \left(C-s\notin S \text{ y } C-s\in S'\right) \Leftrightarrow C-s\in S'-S.$

Es claro pues que $C-s=s'$.■

DEFINICION 10.17

Diremos que dos elementos S y S', de $M(n_0,C)$, están conectados elementalmente si:

existen $s\in S$ y $s'\in S'$ tales que $S\cup\{s'\}=S'\cup\{s\}$.

Diremos que S y S' están conectados si:

existen S_0, S_1, ... , S_m elementos de $M(n_0,C)$ tales que $S=S_0$, $S'=S_m$, y para todo $i\in\{0,1, \ldots ,m-1\}$, S_i y S_{i+1} están conectados elementalmente.

Nuestro próximo objetivo es probar que dos elementos cualesquiera de $M(n_0,C)$ están conectados.

PROPOSICION 10.18

Sea S un elemento de $M(n_0,C)$ y S'un elemento de $\mathscr{S}(n_0,C)$.

Supongamos que existe un subconjunto finito de naturales $\{h_1, h_2, \ldots ,h_r\}$ contenido en el intervalo $]n_0,C[$, verificando que:

$$S\cup\{h_1, h_2, \ldots ,h_r\} = S'\cup\{C-h_1, C-h_2, \ldots ,C-h_r\}.$$

Tesis

S'es también un elemento de $M(n_0,C)$.

- Demostración -

Para la demostración, utilizando la proposición 10.1, nos bastará con probar que

para todo $x\in\mathbb{Z}$ se tiene que $x\in S'$ o $C-x\in S'$.

Para probar lo anterior distinguiremos dos casos:

Caso a) $x\in S$.

Caso b) $x\notin S$.

Supongamos que ocurre a). Entonces

$$x\in S' \text{ o } x\in\{C-h_1, C-h_2, \ldots ,C-h_r\}$$

por consiguiente existe $i\in\{1,2, \ldots ,r\}$ tal que

$$x\in S' \text{ ó } C-x=h_i\in S'.$$

Supongamos ahora que ocurre b). Entonces, puesto que

$S\in M(n_0,C)$, debe de verificarse que $C-x\in S$. Por tanto

$$C-x\in S' \text{ o } C-x\in\{C-h_1,\ C-h_2,\ \dots\ ,C-h_r\}$$

por consiguiente $C-x\in S'$ o $C-x=C-h_i$ para algún $i\in\{1,2,\dots,r\}$, y así $C-x\in S'$ o $x=h_i\in S'$.

Luego tanto en el caso a) como en el b) deducimos que $x\in S'$ ó $C-x\in S'$. De este modo obtenemos que $S'\in M(n_0,C)$.■

PROPOSICION 10.19

Sean S y S' dos elementos de $M(n_0,C)$.

Tesis

Existe un subconjunto finito de naturales $\{h_1,\ h_2,\ \dots\ ,h_r\}$ contenido en el intervalo $]n_0,C[$ verificando que:

$$S\cup\{h_1,\ h_2,\ \dots\ ,h_r\} = S'\cup\{C-h_1,\ C-h_2,\ \dots\ ,C-h_r\}.$$

- Demostración -

$x\in S-S' \Leftrightarrow \left(x\in S \text{ y } x\notin S'\right) \Leftrightarrow$ (aplicando la proposición 10.1, puesto que S y S' son maximales) $\Leftrightarrow \left(C-x\notin S \text{ y } C-x\in S'\right) \Leftrightarrow C-x\in S'-S$.■

NOTA

Si $S\cup\{h_1,h_2,\ \dots\ ,h_r\}=S'\cup\{C-h_1,C-h_2,\ \dots\ ,C-h_r\}$, como las uniones son disjuntas, tenemos que

$$S'=\left(S-\{C-h_1,\ C-h_2,\ \dots\ ,C-h_r\}\right)\cup\{h_1,\ h_2,\ \dots\ ,h_r\}$$

PROPOSICION 10.20

Supongamos que en las condiciones de la nota anterior

$$h_1=\text{máximo}\{h_1,h_2,\ \dots\ ,h_r\}.$$

Tesis

$\bar{S}=(S-\{C-h_1\})\cup\{h_1\}$ es un elemento de $M(n_0,C)$.

- Demostración -

En virtud de la proposición 10.18, bastará probar que $\bar{S}$ es un elemento de $\mathcal{S}(n_0,C)$. Pero es claro que de ser semigrupo, tendrá mínimo generador minimal n_0 y conductor C. Por tanto nos limitaremos a probar que es semigrupo, esto es que

$$x,y\in\bar{S} \Rightarrow x+y\in\bar{S}.$$

Para demostrar este hecho, distinguiremos cuatro casos (que cubren todas las posibilidades):

a) $x,y\in S-\{C-h_1\}$.

b) $x=y=h_1$.

c) $x\in S-\{C-h_1, C-h_2, \dots ,C-h_r\}$ e $y=h_1$.

d) $x=C-h_i$, para algún $i\in\{2,\dots,r\}$ e $y=h_1$.

a) Si $x,y\in S-\{C-h_1\}$ teniendo en cuenta que S es semigrupo, $x+y\in S$ y por tanto

$$x+y\in S-\{C-h_1\} \text{ o } x+y=C-h_1.$$

Ahora, si $x+y\in S-\{C-h_1\}$ tenemos que $x+y\in\bar{S}$.

Veamos que el casso $x+y=C-h_1$ no se puede dar. Para ello volvemos a distinguir dos casos:

i) $x,y\in S-\{C-h_1, C-h_2, \dots ,C-h_r\}$.

ii) $x\in\{C-h_2, \dots ,C-h_r\}$.

Si ocurre i), tenemos que $x,y\in S'$, luego $C=x+y+h_1\in S'$ llegamos a un absurdo ya que C es el conductor de S.

Si ocurre ii), tenemos que $C-h_i+y=C-h_1$ y por tanto $h_1=(h_i-y)$, lo cual es también absurdo ya que $h_i<h_1$.

Resumiendo, si $x,y\in S-\{C-h_1\}$ se tiene que $x+y\in\bar{S}$.

b) $h_1+h_1\in S'$ y por tanto

$$h_1+h_1\in S'=\left(S-\{C-h_1,\ C-h_2,\ \dots\ ,C-h_r\}\right)\cup\{h_1,\ h_2,\ \dots\ ,h_r\}$$

ahora bien, como $h_1>h_i$ para todo $i\in\{2,\ \dots\ ,r\}$, se tiene que

$$h_1+h_1\notin\{h_1,\ h_2,\ \dots\ ,h_r\}$$

y por lo tanto

$$h_1+h_1\in S-\{C-h_1,\ C-h_2,\ \dots\ ,C-h_r\},$$

asi pues, $h_1+h_1\in\bar{S}$.

c) $x+h_1\in S'$ y otra vez teniendo en cuenta que

$$x+h_1\notin\{h_1,h_2,\ \dots\ ,h_r\}$$

deducimos que $x+h_1\in S-\{C-h_1,C-h_2,\ \dots\ ,C-h_r\}$ y por tanto que $x+h_1\in\bar{S}$.

d) $x+h_1=C-h_i+h_1>C$ y por tanto $x+h_1\in\bar{S}$.

TEOREMA 10.21

Dos elementos cualesquiera de $M(n_0,C)$ están conectados.

\- Demostración -

Sean S y S' dos elementos de $M(n_0,C)$, aplicando la proposición 10.19, sabemos que existe un subconjunto finito de naturales $\{h_1,\ h_2,\ \dots\ ,h_r\}$, contenido en el intervalo $]n_0,C[$ y verificando que $S'=\left(S-\{C-h_1,\ C-h_2,\ \dots\ ,C-h_r\}\right)\cup\{h_1,\ h_2,\ \dots\ ,h_r\}$.

Supongamos que $h_1>h_2>\ \dots\ >h_r$ y consideremos la siguiente sucesión de semigrupos:

$$S_0=S\quad y\quad S_{i+1}=(S_i-\{C-h_{i+1}\})\cup\{h_{i+1}\},\ i\geq 0.$$

La proposición 10.20 nos garantiza que estos semigrupos son elementos de $M(n_0,C)$.

Obviamente $S_0=S$, $S_r=S'$ y además, para todo $i\in\{0,\ \dots\ ,r-1\}$, tenemos que S_i y S_{i+1} están conectados elementalmente. Por tanto S y S'están conectados.■

PROPOSICION 10.22

a) Supongamos que C es un número impar, $n_0 \geq 3$ y no divisor de C, sea $i \in [0, n_0-1]$ el único natural tal que $\frac{C+1}{2}+i=qn_0$.

Entonces, el semigrupo

$$<n_0, \frac{C+1}{2}, \ \ldots \ , \frac{C+1}{2}+(i-1), \frac{C+1}{2}+(i+1), \ldots, \frac{C+1}{2}+(n_0-i-2),$$
$$, \frac{C+1}{2}+(n_0-i), \ldots, \frac{C+1}{2}+(n_0-1)>$$

es un elemento de $M(n_0, C)$.

b) Supongamos que C es un número par, $n_0 \geq 4$ y no divisor de C, sea $i \in [0, n_0-1]$ el único natural tal que $\frac{C}{2}+i=qn_0$.

Entonces, el semigrupo

$$<n_0, \frac{C}{2}+1, \ldots, \frac{C}{2}+(i-1), \frac{C}{2}+(i+1), \ldots \ , \frac{C}{2}+(n_0-i-1),$$
$$, \frac{C}{2}+(n_0-i+1), \ldots, \frac{C}{2}+n_0>$$

es un elemento de $M(n_0, C)$.

- Demostración -

a)En el teorema 5.20, vimos que dicho semigrupo era simétrico. Por tanto es un elemento de $M(n_0, C)$ en virtud de la proposición 5.18.

b)Sea $h \in \mathbb{N} \cap]\frac{C}{2}, C[$ y supongamos que $h \notin S$. Entonces, claramente se ha de verificar que

$$h=\frac{C}{2}+(n_0-i)+kn_0, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto

$$C-h=C-\left(\frac{C}{2}+(n_0-i)+kn_0\right)=\frac{C}{2}+i-(k+1)n_0=(q-k-1)n_0 \in S.$$

Resumiendo, si $h \notin S$ entonces $C-h \in S$ y así, aplicando la proposición 10.1, tenemos que S es un elemento de $M(n_0, C)$.■

DEFINICION 10.23

Los semigrupos de los apartados a) y b) anteriores serán denotados por $S(n_0,C)$ y los llamaremos semigrupos maximales canónicos de $\mathscr{S}(n_0,C)$.

TEOREMA 10.24

Sea S un elemento de $\mathscr{S}(n_0,C)$. Son equivalentes:

1.- $S\in M(n_0,C)$.

2.- Existe un subconjunto finito de naturales $\{h_1, h_2,...,h_r\}$ contenido en el intervalo $]n_0,C[$, verificando que:

$$S(n_0,C)\cup\{h_1, h_2, \ ... \ ,h_r\} = S\cup\{C-h_1, C-h_2, \ ... \ ,C-h_r\}.$$

3.- Existe un subconjunto finito de naturales $\{h_1, h_2,...,h_r\}$ contenido en el intervalo $]n_0,C/2[$, verificando que:

$$S(n_0,C)\cup\{h_1, h_2, \ ... \ ,h_r\} = S\cup\{C-h_1, C-h_2, \ ... \ ,C-h_r\}.$$

- Demostración -

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ Es consecuencia inmediata de la proposición 10.19, ya que S y $S(n_0,C)$ son dos elementos de $M(n_0,C)$.

$\boxed{2\Rightarrow 3}$ Es claro puesto que si $h\in]C/2,C[$ y $h\notin S(n_0,C)$, se tiene que $C-h\in S(n_0,C)$ y $C-h<C/2$ y por tanto $C-h\in<n_0>$, de donde $h\notin S$. Ahora como todos los $h_i\in S$ y no pertenecen a $S(n_0,C)$, han de ser menores que $C/2$.

$\boxed{3\Rightarrow 1}$ Es consecuencia inmediata de la proposición 10.18.∎

NOTA

Dado $S\in M(n_0,C)$, en virtud del teorema 10.23, existe un subconjunto finito de naturales $\{h_1>h_2>...>h_r\}$, contenido en el intervalo $]n_0,C/2[$, verificando que:

$$S(n_0,C)\cup\{h_1,\ h_2,\ \ldots\ ,h_r\} = S\cup\{C-h_1,\ C-h_2,\ \ldots\ ,C-h_r\}.$$

Podemos entonces considerar la siguiente sucesión de elementos de $M(n_0,C)$:

$$S_0=S(n_0,C)$$

$$S_{i+1}=\left(S_i-\{C-h_{i+1}\}\right)\cup\{h_{i+1}\}.$$

Observese entonces que esta sucesión conecta a $S(n_0,C)$ y a S. Además en cada paso se gana un elemento de $]n_0,C/2[$ y se pierde un elemento de $]C/2,C[$.

NOTA

Estudiaremos ahora $\mathscr{S}(n_0,C)$, para el caso en que $C<2n_0$. Para ello distinguiremos dos casos:

a) $C=n_0-1$.

b) $C=n_0+i$, con $0<i<n_0$.

En el caso a), claramente tenemos que $\mathscr{S}(n_0,C)$ es un conjunto unitario cuyo único elemento es $<n_0,n_0+1,\ldots,n_0+(n_0-1)>$.

En el caso b), $\mathscr{S}(n_0,C)$ tiene un elemento máximo

$$S=<n_0,n_0+1,\ldots,n_0+i-1,n_0+i+1,\ldots,n_0+n_0-1>$$

y un elemento mínimo

$$S'=<n_0,C+1,C+2,\ldots,C+n_0>.$$

Es fácil de probar que los elementos de $\mathscr{S}(n_0,C)$ son todos los de la forma $S'\cup B$, donde B es un subconjunto de $\{n_0+1,\ldots,n_0+i-1\}$.

Podemos concluir por tanto que $(\mathscr{S}(n_0,C),\cup,\cap)$ es isomorfo al álgebra de Boole de las partes del conjunto $\{n_0+1,\ldots,n_0+i-1\}$.

REFERENCIAS

[1] CLIFFORD, A.H. and PRESTON, G.B.: The algebraic Theory of Semigroups. Vol 1, Providence Rhode Island, Am. Math. Soc.125-136 (1967).

[2] BERGER, R.:Über eine klasse unvergabelter lokaler Ringe. Math. Ann. 146, 98-102 (1962).

[3] ABELLANAS, P.: Estructura de semigrupos conmutativos. 17-22.

[4] BERTIN, J. and CARBONNE, P.: Semi-Groupes d'entiers et application aux branches. Journal of Algebra 49, 81-95. (1977).

[5] DEO, NARSINGH.: Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science. 42.(c) 1974 by Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J.

[6] HERZOG, JURGEN.: Generators and relations of abelian Semigroups and Semigroup Rings. Manuscripta math. 3, 175-193 (1970).

[7] BRESINSKY, H.: On prime ideals with generic zero $x_i=t^{n_i}$. Proc. Amer. Math. Soc. 47, 329-332 (1975).

[8] FRÖBERG, R. GOTTLIEB, C. and HÄGGKVIST, R. communicated by HOEHNKE, H.J.: On numerical Semigroups. Semigroups Forum Vol.35 (1987) 63-83.

[9] BRESINSKY, H.: Symmetric Semigroups of integers generated by 4 elements. Manuscripta math. 17, 205-219 (1975).

[10] WATANABE,K.: Some examples of one dimensional Gorenstein domains. Nagoya Math.J. Vol.49 (1973) 101-109.

[11] LIPMAN,J.: Stable ideals and Arf ring. Amer.J.Math.93. 649-685 (1971).

[12] BASS,H.: On the ubiquity of Gorenstein rings. Math.Zeitschr. 82, 8-28 (1963).

[13] KUNZ,E.: The Value semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring. Proc.A.M.S. 25, 748-751 (1970).

[14] DELORME,C.: Sous-monoïdes d'intersection compléte de $\mathbb{N}$. Ann.Scient.Éc.Norm.Sup. 4ª série,t.9, p.145-154 (1976).