

**UNIVERSIDAD DE GRANADA  
FACULTAD DE CIENCIAS**



**DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA**

**SUPERFICIES CON CURVATURA MEDIA  
CONSTANTE EN EN ESPACIO EUCLIDEO**

**TESIS DOCTORAL**

**RAFAEL LOPEZ CAMINO**

**Granada 1996**

T. PROV. 21/18

**SUPERFICIES CON CURVATURA MEDIA  
CONSTANTE EN EL ESPACIO EUCLIDEO**

**RAFAEL LOPEZ CAMINO**

**Tesis Doctoral**



**Departamento de Geometría y Topología  
Facultad de Ciencias  
Universidad de Granada**

**SUPERFICIES CON CURVATURA MEDIA  
CONSTANTE EN EL ESPACIO EUCLIDEO**

**RAFAEL LOPEZ CAMINO**

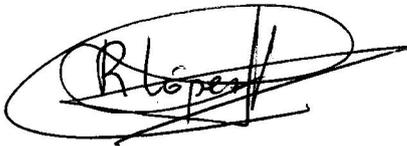
**SUPERFICIES CON CURVATURA MEDIA  
CONSTANTE EN EL ESPACIO EUCLIDEO**

**RAFAEL LOPEZ CAMINO**

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 12-03-96
ENTRADA NUM. 560

15052929 ✓  
116298111

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Profesor D. Sebastián Montiel Gómez, Profesor Titular del Area de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.



Rafael López Camino



Sebastián Montiel Gómez



*A María José*

# Contenidos

<b>Introducción</b>	<b>i</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Superficies con curvatura media constante . . . . .	2
1.2 Principios de comparación . . . . .	12
1.3 Principio de reflexión de Alexandrov . . . . .	18
1.4 El método de continuidad y la ecuación de curvatura media . . . . .	21
<b>2 Una fórmula de equilibrio y resultados de unicidad</b>	<b>29</b>
2.1 La fórmula de equilibrio . . . . .	30
2.2 Unicidad en cilindros . . . . .	37
2.3 Superficies $H$ -pequeñas . . . . .	44
<b>3 Una fórmula de crecimiento del área y sus aplicaciones</b>	<b>49</b>
3.1 La fórmula de crecimiento del área . . . . .	50
3.2 Consecuencias de la estimación de la altura . . . . .	57
3.3 Un teorema de existencia de grafos con curvatura media constante . .	62
3.4 Superficies de volumen pequeño . . . . .	66
3.5 Superficies de volumen pequeño y frontera no conexa . . . . .	73
<b>4 Superficies con borde circular</b>	<b>79</b>
4.1 Discos de área pequeña . . . . .	81
4.2 Discos de volumen pequeño . . . . .	84

4.3	Discos estables y con geometría pequeña . . . . .	86
4.4	Superficies embebidas en una banda . . . . .	91
	<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>

# Introducción

Nos ocuparemos en esta Memoria de algunos aspectos de la teoría de superficies con curvatura media constante (no nula) en el espacio euclídeo ordinario. Concretamente, estudiaremos el caso de las superficies compactas que tienen borde no vacío.

La curvatura media de las superficies puede introducirse de forma natural al considerar uno de los más antiguos problemas de la geometría, planteado ya en la antigüedad: el problema isoperimétrico, que podemos enunciar de la forma siguiente. De entre todas las superficies compactas del espacio euclídeo que encierran un volumen predeterminado, encontrar las que tienen área menor. La respuesta era (ya lo supieron los griegos) la esfera, como demostró por vez primera Schwarz usando ideas previas de Steiner y Minkowski. Si nos contentamos con menos y buscamos solamente soluciones infinitesimales del problema isoperimétrico, se llega a ver que el área de una inmersión de una superficie compacta orientable en el espacio euclídeo es estacionaria respecto de todas las variaciones que fijan su volumen algebraico si y sólo si esa inmersión tiene curvatura media constante. De otra forma: las superficies con curvatura media constante son los puntos críticos del funcional área con relación a las deformaciones locales que conservan el volumen. El caso de curvatura media constante cero, o sea, el caso minimal, es especial porque la inmersión es punto crítico del área para variaciones arbitrarias, sin restricción alguna sobre el volumen. Por todo lo anterior, las superficies (en un sentido amplio, es decir, permitimos que haya autointersecciones) de curvatura media constante se usan de manera habitual como modelos matemáticos de situaciones físicas en las que aparece una superficie ligada a un problema variacional en el que la energía o acción considerada es proporcional a su área. Por ejemplo, las llamadas *interfaces* ([61]) que separan dos medios de distintas características físicas o químicas, como dos gases a diferentes presiones;

por ejemplo, la superficie de un líquido sometido a fenómenos de capilaridad en ausencia de gravedad ([22]); y, el ejemplo quizás más conocido, las pompas de jabón (cuando se trabaja con superficies compactas sin borde) o incluso las películas de jabón (cuando se considera el caso con borde). En cualquier caso, son superficies para las que la presión exterior ejercida sobre ellas y las fuerzas de tensión superficial están en equilibrio.

El contenido de esta Memoria es, pues, una contribución a las respuestas a la cuestión siguiente ¿cómo es la forma de una superficie compacta inmersa en el espacio euclídeo con curvatura media constante? Esta pregunta tiene interés en sí misma al margen de la consideración del problema isoperimétrico y ha sido, de hecho, el hilo conductor de muchos trabajos en Geometría Diferencial.

Consideremos en primer lugar el caso cerrado, es decir, el caso de las superficies compactas con borde vacío. El único ejemplo conocido era, hasta 1986, la esfera y, por tanto, todos los teoremas eran, hasta entonces, caracterizaciones de la esfera. De hecho, en 1899 Liebmann ([44]) demostró que

*Un ovoide con curvatura media constante debe ser una esfera.*

Medio siglo más tarde, en 1951, H. Hopf ([35]) consiguió probar, asociando a cada superficie de curvatura media constante una diferencial holomorfa de orden dos, que

*Las únicas superficies cerradas con género cero inmersas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante son las esferas.*

En toda una serie de artículos entre 1956 y 1962, Alexandrov (véase [3]) obtuvo un resultado fundamental dentro de esta teoría. Demostró que

*Una superficie cerrada embebida (o sea, sin autointersecciones) en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante debe ser una esfera.*

Este resultado fue verdaderamente sorprendente, no por su contenido, que era esperado, sino por el método que Alexandrov inventó para demostrarlo, que era completamente distinto de los de Liebmann y Hopf y que se apoya esencialmente en una

utilización ocurrente del principio del máximo para las ecuaciones elípticas. Es el llamado método de reflexión de Alexandrov, que ha sido utilizado por numerosos autores, no sólo en problemas exclusivamente geométricos, y que sigue siendo un método fecundo de estudio en geometría diferencial y en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Aunque fue desarrollado con vistas a utilizarlo en el caso de las superficies sin borde, se adapta también al caso con borde en algunas circunstancias, de ahí que, en el Capítulo 1 de esta Memoria, dediquemos algunas páginas a recordarlo.

Tras esos tres resultados históricos, el estudio de las superficies compactas sin borde inmersas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante y, en general, de las hipersuperficies de este tipo en  $\mathbb{R}^n$ , ha seguido dos caminos distintos. Uno de ellos fue el descubrimiento por parte de R. Reilly en 1978 ([53]) de una nueva idea para demostrar el teorema de Alexandrov de una manera más fácil, aunque quizás menos geométrica. Después A. Ros ([54], [55]) y A. Ros y S. Montiel ([50]) han explorado otros métodos de los que han extraído algunos teoremas *tipo Alexandrov* para espacios ambientes y curvaturas más generales. El segundo camino de los que hemos hablado es el iniciado en 1986 por Wentz ([76]). En efecto,

*Wentz demostró que existen superficies cerradas inmersas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante que no son esferas. Construyó explícitamente toros inmersos de curvatura media constante.*

Después de él, y, tras haberse puesto de manifiesto la relación entre las superficies de curvatura media constante y ciertos sistemas integrables, los trabajos de Abresch [2], Pinkall y Sterling [52] y Bobenko [11] han estudiado en profundidad los toros de curvatura media constante en  $\mathbb{R}^3$ . Por último, por lo que respecta a la forma de las pompas de jabón, o sea a las superficies cerradas que se sumergen en el espacio ordinario con curvatura media constante, sólo queda añadir que, en 1991 ([37])

*Kapouleas consiguió construir superficies cerradas de género mayor que dos inmersas en  $\mathbb{R}^3$  y con curvatura media constante.*

En cuanto al caso de las superficies completas no compactas, los ejemplos clásicos, descubiertos por Delaunay ([19]) en 1838, son las superficies de revolución (no

esféricas) con curvatura media constante: los cilindros, las onduloideas y las nodoideas, cuyas curvas generatrices son las trazas del foco de una cónica conveniente (circunferencia, elipse o hipérbola) que rueda apoyada sobre la recta que será después el eje de revolución de la figura. Aparte de estos ejemplos, sólo en 1990, Kapouleas ([36]) construyó muchos ejemplos de superficies completas no compactas con curvatura media constante, con topologías finitas, aunque más complicadas que la del cilindro. De hecho, él diseñó su método de construcción para este caso y sólo después lo adaptó a la búsqueda de ejemplos compactos. Más o menos al mismo tiempo que Kapouleas construía sus ejemplos, Meeks [49] probaba que los finales de una superficie completa con curvatura media constante que esté embebida de forma propia en  $\mathbb{R}^3$  deben estar cilíndricamente acotados, como los de una superficie de Delaunay, y como consecuencia

*Meeks demostró en 1989 que no existen superficies completas con curvatura media constante no nula embebidas propiamente en el espacio euclídeo y con un solo final.*

Más tarde, en 1989, motivados por las construcciones de Kapouleas y los teoremas de Meeks, en [42], Korevaar, Kusner y Solomon vieron que

*Las únicas superficies completas embebidas de forma propia en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante y dos finales son las superficies de Delaunay.*

De hecho, llegaron a ver que todo final de una superficie de este tipo es asintótico (exponencialmente) a una superficie de Delaunay.

Junto a este flujo de investigación sobre las superficies compactas sin borde y completas inmersas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante, que arranca prácticamente desde que, en el siglo XVIII, los problemas de elasticidad que estudiaba Sophie Germain, la llevaron a la consideración de la curvatura media de las superficies y a polemizar, incluso con Gauss, por su prevalencia frente a la curvatura de Gauss, existe otra corriente de investigación sobre superficies con curvatura media constante, iniciada fundamentalmente por Heinz, desde los años 50. Se trata aquí del caso de las superficies compactas con borde no vacío y, siguiendo las directrices del problema de Plateau para el caso minimal, se consideran problemas de existencia de

superficies compactas inmersas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante, cuyo borde está prefijado de antemano. Incluso cuando este borde  $\Gamma$  de la superficie es una circunferencia (pongamos de radio uno) no sabemos mucho acerca del conjunto de superficies compactas  $S$  inmersas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  y tales que  $\partial S = \Gamma$ . Heinz señaló ([28]) en 1969 que, en este caso, los posibles valores de  $H$  (salvo orientación) pertenecen al intervalo cerrado  $[0, 1]$ . Además del disco plano minimal correspondiente al valor  $H = 0$ , para cada  $H \neq 0$  en ese intervalo, tenemos como únicos ejemplos conocidos los dos casquetes esféricos (grande y pequeño) de radio  $1/H$ . Usando su método de construcción (que ya mencionamos en los casos cerrado y completo),

*Kapouleas ([37]) dio en 1991 ejemplos de superficies compactas inmersas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H = 1/2$  cuyo borde es una circunferencia de radio uno. Tienen autointersecciones, género mayor que dos, están en uno de los semiespacios determinados por el plano de su borde y alcanzan alturas arbitrarias sobre él.*

Cuando la curva  $\Gamma$  del borde es una curva de Jordan cualquiera, hay toda una colección de teoremas de existencia de Heinz [27], Hildebrandt [29], Steffen [66], Wente [74], Werner [77] y algunos otros. Todos esos resultados pueden resumirse de esta forma:

*Dada una curva de Jordan  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^3$ , si  $H$  es un número suficientemente pequeño (en términos de la geometría de  $\Gamma$ ) existe un disco inmerso en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  y cuyo borde es  $\Gamma$ .*

Todas estas superficies de género cero se obtienen minimizando el funcional  $A - 2HV$ , donde  $A$  significa área de una inmersión y  $V$  volumen algebraico de una inmersión (respecto de un origen y una orientación dadas), dentro de una clase conveniente de inmersiones del disco en  $\mathbb{R}^3$  cuyo borde sea  $\Gamma$ . Para poder aplicar con éxito los teoremas de convergencia del análisis funcional, en orden a extraer subsucesiones convergentes de las sucesiones minimizantes, se suelen considerar inmersiones acotadas, o bien, superficies contenidas en esferas, para minimizar ese funcional. Por eso, todos los ejemplos que se obtienen así, proporcionan superficies de curvatura

media constante que se suelen llamar *pequeñas* porque se parecen más a los casquetes esféricos pequeñas que a los grandes. Cuando se añade alguna hipótesis suplementaria sobre la curva  $\Gamma$ , candidata a borde de la superficie, se puede decir algo más sobre la superficie de curvatura media constante que la bordea. Por ejemplo, Serrin ([62]) probó que

*Si  $\Gamma$  es un grafo sobre una curva plana, cerrada y convexa cuya función de curvatura satisface  $k \geq 2H$  para un cierto  $H > 0$ , entonces existe un grafo de curvatura media constante  $H$  sobre el dominio plano determinado por esa curva convexa cuyo borde es  $\Gamma$ .*

Todos estos resultados de existencia de tipo Plateau han sido culminados por Brézis y Coron [12] y por Struwe [69] que han demostrado la existencia, con las mismas hipótesis de los resultados anteriores, de una segunda superficie con la misma curvatura media constante y el mismo borde. De manera que hay una especie de situación general semejante a la de los casquetes esféricos con borde una circunferencia.

Los teoremas anteriores construyen discos inmersos en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante prefijada y borde prefijado que son *pequeños* y, a partir de ellos, otras soluciones *grandes*. Wente ([74]) ha seguido también una vía alternativa y, en lugar de fijar el valor de la curvatura media de la superficie, minimiza el área en un conjunto de inmersiones del disco que encierran un volumen predeterminado. De forma que

*Para cada número real  $V$  y cada curva de Jordan  $\Gamma$  existe una inmersión del disco en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante cuyo borde es  $\Gamma$  y que encierra un volumen  $V$ . Esa inmersión minimiza el área entre todas las que tienen ese borde y encierran ese volumen.*

En todo este marco anterior es donde pretende encuadrarse nuestra Memoria que tratará, no esencialmente sobre cuestiones de existencia, sino sobre teoremas de estructura para esta familia de superficies de  $\mathbb{R}^3$ : las superficies compactas con borde no vacío inmersas con curvatura media constante. La hemos dividido en

cuatro capítulos, el primero de los cuales se dedica a exponer los preliminares y herramientas fundamentales que se usarán posteriormente. Sólo se hacen en él algunas demostraciones que consideramos pueden aclarar o establecer algo de orden acerca de cuestiones siempre de dominio común. Como ya se ha comentado anteriormente, introduciremos en ese Capítulo 1 las superficies de curvatura media constante inmersas en  $\mathbb{R}^3$  como puntos críticos o bien del área para variaciones que conservan el volumen, o bien de una cierta combinación lineal de área y volumen para variaciones arbitrarias. Aparecerán, pues, las correspondientes ideas de estabilidad. El resto del capítulo se dedica a exponer cómo la teoría de ecuaciones elípticas puede ayudar de forma decisiva a entender el comportamiento local de estas superficies. Estudiaremos el principio del máximo que se aplica a estas superficies y cómo se explota en el método de Alexandrov. Cerraremos el capítulo repasando el método de continuidad que se usa en problemas de existencia de ecuaciones no lineales y cómo se aplica a nuestro caso.

En el Capítulo 2, damos una demostración elemental de la llamada *balancing formula*, que nosotros llamaremos *fórmula de equilibrio* y que aparece por primera vez en la tesis de Kusner ([43]). Aparece claro aquí que esta fórmula no es más que una fórmula de conservación del momento lineal para nuestras superficies, que proviene, por tanto, del hecho de que las traslaciones de  $\mathbb{R}^3$  conservan el área de una superficie cualquiera, con o sin borde. Usaremos esta fórmula a lo largo de toda la Memoria, pero en este Capítulo 2 la emplearemos para demostrar, entre otros, el siguiente resultado de unicidad (Teorema 2.2.1):

*Supongamos que  $\Omega$  es un dominio plano determinado por una curva de Jordan  $\partial\Omega$  y que existe un grafo  $G$  sobre  $\Omega$  de curvatura media constante  $H$ . Entonces toda superficie compacta inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  y borde  $\partial\Omega$  que esté contenida en el cilindro recto de base  $\Omega$  es el grafo  $G$  o su reflexión respecto del plano del borde.*

Este resultado, en el caso de superficies embebidas, se obtiene usando el método de reflexión de Alexandrov y nuestra contribución es haber involucrado por primera vez en estos resultados de unicidad las superficies que tienen autointersecciones. Con este resultado y, usando el teorema de la función implícita en espacios de Banach, se demuestra, en el Corolario 2.2.2, que

*Dado un dominio plano  $\Omega$  acotado por una curva de Jordan  $\partial\Omega$ , existe un número  $H_0(\Omega) > 0$  tal que toda superficie compacta inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  tal que  $|H| \leq H_0(\Omega)$ , con borde  $\partial\Omega$  y dentro del cilindro recto con base  $\Omega$ , es un grafo sobre  $\Omega$ .*

Cerraremos este Capítulo 2 obteniendo un teorema de unicidad análogo al anterior donde se debilita la hipótesis de que la superficie esté contenida en un cilindro para suponer que es *pequeña* (o sea, que está contenida en una esfera de radio el inverso de su curvatura media) y que su borde es una curva convexa.

El Capítulo 3 de esta Memoria, que podría considerarse como su núcleo, comienza por la obtención de una estimación del crecimiento del área de una superficie compacta con borde plano, no necesariamente convexo, inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante. Estimaciones de esta naturaleza son las llamadas fórmulas de monotonía ([41]), que controlan el área del fragmento de superficie que queda dentro de una esfera de radio  $r > 0$ , en función de  $r$ . Nosotros obtenemos una estimación del área en función de la altura que alcanza la superficie respecto del plano del borde. De hecho, en el Teorema 3.1.1 probamos que

*Si  $h$  es la altura de una superficie compacta con borde plano inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  al plano de su borde, se tiene que  $2\pi h \leq A^+|H|$ , donde  $A^+$  es el área de la región de la superficie que está por encima de ese plano del borde. Si se alcanza la igualdad, la superficie es un casquete esférico.*

Esta desigualdad, que puede verse también como una estimación de la altura, para una área dada de la superficie, implica, para valores pequeños de  $H$ , la estimación clásica de la altura de Serrin ([63]) para grafos y además tiene la ventaja de que funciona para superficies con autointersecciones. De camino, esta estimación nos permitirá demostrar un teorema de existencia para grafos, para borde plano, que mejora en algún sentido el resultado correspondiente de Serrin. Demostraremos de hecho que (Teorema 3.3.2)

*Si  $\Gamma$  es una curva plana, cerrada y convexa de longitud  $L$  y  $H$  es un*

*número real no negativo tal que  $LH < \sqrt{3}\pi$ , entonces existe un grafo con curvatura media constante  $H$  y borde  $\Gamma$ .*

Daremos además, en este Capítulo 3, una cota óptima en orden a que una superficie compacta embebida con curvatura media constante y borde plano y convexo esté contenida sólo en uno de los semiespacios determinados por el plano del borde. Así, demostraremos en los Corolarios 3.2.2 y 3.2.4 que

*Sea  $\Sigma$  una superficie compacta embebida con curvatura media constante  $H$  que tiene borde plano y convexo y cuya área cumple  $AH^2 \leq 2\pi$ . Entonces  $\Sigma$  está a un lado del plano del borde. Además, si  $AH^2 \leq \pi$ , entonces  $\Sigma$  es un grafo.*

Esta afirmación proporciona alguna respuesta parcial a cuestiones planteadas por Rosenberg [33] a partir de evidencias experimentales aportadas por Hoffman y los ordenadores de la Universidad de Amherst, siempre en el caso en el que las superficies sean *pequeñas* en algún sentido geométrico. Es conveniente señalar que, para superficies *grandes* sin autointersecciones, Ros y Rosenberg han obtenido ([58]) resultados esclarecedores. Si consideramos como variable a tener en cuenta el volumen encerrado por la superficie, y no su área, obtenemos (Teorema 3.4.5), entre otras cosas que

*Dada una curva  $\Gamma$  plana, cerrada y convexa existe una constante  $V(\Gamma) > 0$  que depende sólo de  $\Gamma$ , tal que cualquier superficie compacta con borde  $\Gamma$  y curvatura media constante con volumen menor que  $V(\Gamma)$  debe ser un grafo.*

Debemos señalar que una consecuencia de estos resultados acerca de las superficies de curvatura media constante, que hemos obtenido en el Capítulo 3, es su repercusión en la cuestión isoperimétrica. Si  $\Gamma$  es una curva de Jordan en un plano de  $\mathbb{R}^3$  y  $\Omega$  es el dominio plano que determina, para cada número  $V > 0$ , existe una región abierta  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  de volumen  $V$  tal que  $\partial M = \Omega \cup \Sigma$ , donde  $\Sigma$  es una superficie compacta embebida en  $\mathbb{R}^3$  con borde  $\Gamma$  que minimiza el área entre todas las que cumplen las condiciones anteriores. La existencia de esta solución isoperimétrica

viene garantizada por la teoría geométrica de la medida ([4], [72]). Respecto de la forma de esa solución, como consecuencia de los resultados reseñados anteriormente, podemos decir (Corolario 3.4.6) que

*Dado un dominio  $\Omega$  plano, acotado y convexo, existe una constante  $V(\Omega) > 0$  tal que las regiones isoperimétricas con respecto al par  $(\Omega, V)$  para  $V \leq V(\Omega)$  están acotadas por  $\Omega \cup \Sigma$ , donde  $\Sigma$  es un grafo de curvatura media constante sobre  $\Omega$ .*

Finalmente, cerraremos este Capítulo 3 generalizando estos resultados al caso de superficies con borde disconexo, concretamente, borde con dos componentes conexas que son curvas cerradas y convexas.

En el Capítulo 4 final de nuestra Memoria, estudiamos el caso en el que el borde de nuestra superficie con curvatura media constante es más que convexo: es circular (supondremos sin pérdida de generalidad que el borde es una circunferencia de radio uno). En este caso, una vieja restricción de Heinz ([28]) nos asegura que los valores posibles de la curvatura media  $H$  están entre 0 y 1 (si la orientación se toma para que  $H$  sea no negativo). Los resultados más significativos que obtendremos en este capítulo serán para el caso en que la superficie tiene género cero, o sea, es topológicamente un disco. En este caso una desigualdad de Barbosa y do Carmo [7] nos dice que la superficie debe tener área menor o igual que la del casquete esférico pequeño correspondiente o bien mayor o igual que la del casquete esférico grande con esos mismos borde y curvatura. Esta información, cruzada con la que nosotros obtenemos de la fórmula de equilibrio de Kusner, nos lleva a demostrar que el primer caso posible es inexistente, si la superficie no es el casquete pequeño. O sea (Corolario 4.1.2), que

*Un disco inmerso en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante que bordea una circunferencia y no es un casquete esférico ha de tener área mayor que la del correspondiente casquete esférico grande.*

Los mismos ingredientes que son necesarios para demostrar el resultado anterior, nos permiten identificar la mejor constante en los teoremas del Capítulo 3 que se refieren

a superficies de volumen pequeño, en este caso en que el borde de la superficie es una circunferencia. Obtenemos el siguiente resultado (Teorema 4.2.1)

*Un disco inmerso en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante que bordea una circunferencia es un casquete esférico pequeño si encierra un volumen algebraico (medido con origen en un punto del plano del borde) no mayor que  $2\pi/3$ , es decir, que el volumen de una semiesfera.*

Un resultado análogo se consigue en el Teorema 4.3.5 si, en vez de suponer que nuestro disco inmerso tiene área o volumen pequeños, se supone que la norma  $L^2$  de su segunda forma fundamental es menor que la de un casquete esférico. La última sección de este Capítulo 4 se dedica a estudiar superficies compactas inmersas en  $\mathbb{R}^3$  cuyo borde es una circunferencia y que tienen una coordenada acotada en mayor medida de lo que lo que las estimaciones habituales de la altura aseguran. Podemos, pues, resumir el contenido de este Capítulo 4 diciendo que las superficies (incluso de género cero e incluso embebidas) de curvatura media constante que bordean una circunferencia distintas de los casquetes esféricos que posiblemente se descubrirán en el futuro deben tener áreas, volúmenes y, en general, *geometrías* grandes.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentamos las definiciones y resultados de la teoría de superficies con curvatura media constante que serán necesarios a lo largo de esta Memoria y, aunque la mayor parte de las demostraciones se omitirán, daremos las oportunas referencias bibliográficas donde hallarlas. Nos detendremos en aquellos aspectos que se encuentran más dispersos y que hemos reelaborado para su mejor comprensión. Este capítulo está organizado en cuatro partes:

1. En la primera se introduce el concepto de superficie con curvatura media constante desde un punto de vista variacional, los correspondientes conceptos de estabilidad y se plantea el problema isoperimétrico.
2. En la segunda se hace un estudio local de las superficies con curvatura media constante, que se basa en el Principio del Máximo y el Principio de Comparación entre dos superficies.
3. La tercera parte se dedica a exponer el llamado método de reflexión de Alexandrov.
4. La última parte del capítulo describe el método de continuidad de ecuaciones, enfocándolo para su aplicación a la ecuación de curvatura media constante.

En definitiva, la idea principal es fijar claramente qué herramientas geométricas y analíticas se usarán en las demostraciones de esta Memoria.

## 1.1 Superficies con curvatura media constante

A lo largo de esta Memoria representaremos por  $\Sigma$  una superficie conexa y orientable y por  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión de  $\Sigma$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ . Diremos entonces que  $\Sigma$  está inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , si se sobreentiende la inmersión  $\phi$ . Una inmersión  $\phi$  que sea un homeomorfismo sobre su imagen se llamará *embebimiento* y en tal caso diremos que la superficie  $\Sigma$  *está embebida en  $\mathbb{R}^3$*  (si la superficie  $\Sigma$  es compacta, el hecho de que  $\phi$  sea un embebimiento es equivalente a que  $\phi(\Sigma)$  no tenga autointersecciones). En tal caso se identificará de manera natural  $\Sigma$  con  $\phi(\Sigma)$ . Representaremos por  $N : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  una aplicación de Gauss.

A la superficie  $\Sigma$  se le dota de estructura de superficie riemanniana considerando la métrica inducida por medio de  $\phi$  por la métrica usual de  $\mathbb{R}^3$ . Llamaremos  $d\Sigma$ ,  $\nabla$  y  $\Delta$  a su medida canónica y a los operadores gradiente y laplaciano respectivamente. Por sencillez en la exposición que sigue ahora, supondremos que  $\Sigma$  es una superficie compacta (con frontera  $\partial\Sigma$  posiblemente no vacía). El área de  $\Sigma$  viene dada entonces por

$$A = \int_{\Sigma} 1 \, d\Sigma.$$

Definimos ahora el volumen encerrado por la inmersión  $\phi$ . Para motivar la definición, consideramos primero el caso en el que la frontera de  $\Sigma$  sea vacía y  $\Sigma$  esté embebida. Entonces  $\phi$  determina en  $\mathbb{R}^3$  un dominio acotado  $\Omega$ . Llamaremos *volumen encerrado* por  $\phi$  al volumen de Lebesgue de  $\Omega$ . Aplicando el Teorema de la Divergencia al campo vector de posición definido en  $\bar{\Omega}$ , se obtiene

$$\text{Volumen}(\Omega) \equiv V(\Omega) = \int_{\Omega} 1 = -\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle N, \phi \rangle d\Sigma,$$

donde  $N$  es la aplicación de Gauss en  $\Sigma$  que apunta hacia el dominio  $\Omega$ . En general, si la superficie  $\Sigma$  no está embebida, sino que está inmersa, se define el *volumen algebraico* encerrado por  $\phi$  respecto de una orientación dada por una aplicación de Gauss  $N$  como

$$V = -\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle N, \phi \rangle d\Sigma.$$

El valor del volumen  $V$  no depende del origen elegido en  $\mathbb{R}^3$ , pero cambia de signo si se cambia de orientación en la superficie.

Si la superficie tiene frontera no vacía, la definición del volumen algebraico es la misma, haciendo la observación de que  $V$  depende ahora del origen. El número  $V$  representa, en este caso, el volumen algebraico del cono determinado por el origen y  $\partial\Sigma$ .

La curvatura media de una superficie puede ser introducida de una manera natural considerando una de las cuestiones más antiguas de la Geometría y planteada ya en la época griega: el llamado problema isoperimétrico.

**Problema isoperimétrico:** De entre todas las superficies compactas en el espacio euclídeo que encierran un volumen prefijado, encontrar cuáles son las que tienen un área mínima.

Si se modifica la cuestión y se pide buscar las superficies que son soluciones para el problema isoperimétrico hasta el primer orden, el problema se convierte en el siguiente:

**Problema variacional:** Caracterizar aquellas superficies de  $\mathbb{R}^3$  cuya área es crítica para todas las variaciones que dejan invariante el volumen de la superficie.

Por *variación* diferenciable de una inmersión  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  entendemos una familia uniparamétrica de inmersiones  $\phi_t : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\epsilon > 0$  y tal que  $\phi_0 = \phi$ . Diferenciable significa que la aplicación  $\Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\Phi(t, p) = \phi_t(p)$  es diferenciable. Se define el *campo variacional* de la variación  $\Phi$  como el campo vectorial a lo largo de  $\phi$  dado por  $\xi(p) = (d\Phi)_{(0,p)}(\partial/\partial t)$ .

Se definen las funciones *área* y *volumen* de la variación  $\{\phi_t\}$  por

$$A(t) = \int_{\Sigma} 1 d\Sigma_t, \quad V(t) = -\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle N_t, \phi_t \rangle d\Sigma_t, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon),$$

donde  $d\Sigma_t$  es la medida canónica determinada por la inmersión  $\phi_t$  y  $N_t$  es una aplicación de Gauss. A continuación expresamos las primeras derivadas en  $t = 0$  de las funciones  $A(t)$  y  $V(t)$  (ver [9], [10], [64])

**Proposición 1.1.1 (Fórmula de la primera variación del área)** Sea  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión y  $\{\phi_t; t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$  una variación de  $\phi$  con campo variacional  $\xi$ . Entonces

$$A'(0) = -2 \int_{\Sigma} H \langle \xi, N \rangle d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \langle \xi, \nu \rangle ds, \quad (1.1)$$

donde  $\nu$  es el conormal interior a la superficie a lo largo de su frontera y  $H$  es la curvatura media de la inmersión.

La curvatura media  $H$  de la inmersión que aparece en esta fórmula está dada por

$$H(p) = \frac{\lambda_1(p) + \lambda_2(p)}{2}, \quad p \in \Sigma$$

donde  $\lambda_1(p)$  y  $\lambda_2(p)$  son las curvaturas principales de la inmersión  $\phi$  en  $p$ , es decir, los valores propios del endomorfismo de Weingarten  $-(dN)_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$  ([16]). Representaremos por  $\sigma$  la segunda forma fundamental de la inmersión:  $\sigma_p(u, v) = -\langle (dN)_p(u), v \rangle$ , donde  $u, v$  son vectores tangentes a la superficie en  $p$ . Así, el valor  $2H(p)$  coincide con la traza de  $\sigma_p$ . La curvatura media  $H$  depende de la elección de la orientación: si se cambia  $N$  por  $-N$ , entonces la curvatura media asociada es  $-H$ , o lo que es lo mismo, el campo vectorial  $HN$  definido en la superficie es invariante al cambiar de orientación en  $\Sigma$ . Por último, diremos que  $\Sigma$  es una *superficie con curvatura media constante* si la función  $H$  es constante.

Respecto de la variación de la función volumen  $V(t)$  se tiene

**Proposición 1.1.2 (Fórmula de la primera variación del volumen)** Sea  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión y  $\{\phi_t; t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$  una variación de  $\phi$  con campo variacional  $\xi$ . Entonces

$$V'(0) = - \int_{\Sigma} \langle \xi, N \rangle d\Sigma. \quad (1.2)$$

Una consecuencia inmediata de las fórmulas (1.1) y (1.2) es la siguiente. Consideremos variaciones que fijan la frontera de  $\Sigma$ , es decir, con  $\phi_t|_{\partial\Sigma} = \phi|_{\partial\Sigma}$ , para cada  $|t| < \epsilon$ . Sea  $H_0$  el número real dado por  $H_0 A = \int_{\Sigma} H d\Sigma$  y consideremos la función  $f = H - H_0$ . Ya que  $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$ , es posible construir una variación de  $\phi$  que conserva el volumen y con campo variacional  $fN$  (ver dicha construcción en [9]). Si  $\Sigma$  es un punto crítico del área  $A(t)$ , de (1.1) se deduce que

$$\int_{\Sigma} (H - H_0)^2 d\Sigma = \int_{\Sigma} (H - H_0) f d\Sigma = \int_{\Sigma} H f d\Sigma - H_0 \int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$$

y por tanto  $H$  es una función constante. Recíprocamente, si  $H$  es constante es evidente a partir de la fórmula de la primera variación del área y del volumen, que  $\phi$  es un punto crítico del área para las variaciones que conservan el volumen. Resumiendo pues, se concluye

*A. Una superficie tiene curvatura media constante si y sólo si es un punto crítico del área para cualquier variación suya que fija su volumen y frontera.*

También existe otra caracterización variacional equivalente de las superficies con curvatura media constante. Para ello, dada una variación de una superficie  $\Sigma$  que fija la frontera y  $H_0$  un número real, se define la siguiente función:

$$J_{H_0}(t) = A(t) - 2H_0V(t), \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Entonces  $J'_{H_0}(0) = -2 \int_{\Sigma} (H - H_0) \langle \xi, N \rangle$ , donde  $\xi$  es el campo variacional de la variación. Por tanto

*B. Una superficie tiene curvatura media constante  $H_0$  si y sólo si para cualquier variación que fija la frontera,  $J'_{H_0}(0) = 0$ .*

Precisamente de esta forma, minimizando  $J_{H_0}$  en un espacio conveniente de inmersiones de un disco en  $\mathbb{R}^3$  y para valores de  $H_0$  pequeños en un cierto sentido, varios autores (Gulliver, Heinz, Hildebrandt, Steffen, Struwe...) han obtenido resultados de existencia para el problema de Plateau para superficies con curvatura media constante y con frontera prescrita: por ejemplo, [12], [24], [25], [27], [29], [30], [31], [66], [67], [69], [70], [73], [77].

De entre los puntos críticos del área, son interesantes de estudiar aquellos que son mínimos locales o, de manera más general, los que son estables. Ya que las superficies con curvatura media constante vienen caracterizadas variacionalmente de dos formas equivalentes, aparecen dos conceptos distintos de estabilidad, según de qué caracterización se trate.

**Proposición 1.1.3 (Fórmula de la segunda variación del área)** *Sea  $\Sigma$  una superficie con curvatura media constante y  $\{\phi_t; t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$  una variación suya que fija su frontera con  $f = \langle \xi, N \rangle$ .*

1. Si la variación conserva el volumen, entonces

$$A''(0) = \int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 - |\sigma|^2 f^2) d\Sigma.$$

2. La derivada segunda de la función  $J_{H_0}$  correspondiente a esa variación es

$$J''_{H_0}(0) = \int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 - |\sigma|^2 f^2) d\Sigma.$$

Respecto de los problemas variacionales A y B tenemos, pues, sendos conceptos de estabilidad, que a continuación se exponen:

**Definición 1.1.4** Sea  $\Sigma$  una superficie compacta con curvatura media constante.

1. Se dice que es estable si  $A''(0) \geq 0$  para cualquier variación que fija el borde y el volumen de  $\Sigma$  (Caracterización A).
2. Se dice que es fuertemente estable si  $J''_{H_0}(0) \geq 0$  para cualquier variación de la superficie que fija su borde (Caracterización B).

Por ejemplo, las soluciones del problema isoperimétrico son estables y las de Heinz, Hildebrandt son fuertemente estables. Definiendo una forma cuadrática  $Q$  en el espacio de Sobolev  $H^{1,2}(\Sigma)$  por

$$Q(f) = \int_{\Sigma} (|\nabla f|^2 - |\sigma|^2 f^2) d\Sigma,$$

se concluye de la Proposición 1.1.3 que una superficie  $\Sigma$  con curvatura media constante,

1. es estable si  $Q(f) \geq 0$ , para cualquier aplicación  $f \in H_0^{1,2}(\Sigma)$  tal que  $\int_{\Sigma} f d\Sigma = 0$ .
2. es fuertemente estable si  $Q(f) \geq 0$ , para cualquier  $f \in H_0^{1,2}(\Sigma)$ .

En el caso de que la superficie sea compacta y sin frontera, Barbosa y do Carmo probaron que

*Las esferas euclídeas son las únicas superficies con curvatura media constante que son estables ([9]).*

Recordemos que el problema variacional planteado era la versión infinitesimal del problema isoperimétrico. Volviendo a él y para precisar el problema, sea  $D$  una superficie compacta de  $\mathbb{R}^3$  con frontera  $\partial D$ . Se fija un número real  $V > 0$ . Una *región isoperimétrica* de  $\mathbb{R}^3$  respecto de  $(D, V)$  es una región abierta  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  de volumen  $V$  con

$$\partial\Omega = D \cup X$$

y  $X$  tiene menor área de entre todos los dominios  $\Omega$ . Al conjunto  $X$  se llamará *solución del problema isoperimétrico* respecto de  $(D, V)$ .

Clásicamente el problema isoperimétrico se ha planteado tomando  $D = \emptyset$ . En este caso el problema se convierte en lo siguiente: dado  $V > 0$ , encontrar de entre todos los abiertos  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  que encierran un volumen  $V$ , aquellos cuya frontera  $X$  tenga área mínima. En tal caso, el problema isoperimétrico tiene como solución la esfera euclídea de volumen  $V$ . Este hecho es consecuencia del Principio de Simetrización de Steiner, el cual asegura que si  $D = \emptyset$ , toda solución isoperimétrica tiene la propiedad de que, en cualquier dirección del espacio, existe un plano de simetría perpendicular a dicha dirección. Por tanto, la superficie es una esfera.

Un hecho fundamental referente al problema isoperimétrico es que siempre existe solución. Además el conjunto  $X$  es una superficie embebida con borde  $\partial D$ . A continuación se enuncia el resultado clásico de existencia y regularidad debido a Almgren y Taylor:

**Teorema 1.1.5** ([4], [72]) *En  $\mathbb{R}^3$ , dada una superficie compacta  $D$  y un número real positivo  $V$ , existen soluciones del problema isoperimétrico respecto de  $(D, V)$ . Además dichas soluciones son superficies embebidas.*

En particular, de la Proposición 1.1.1 y de la Definición 1.1.4 se deduce que las soluciones del problema isoperimétrico son superficies con curvatura media constante, que son además estables. Si comparamos con el problema variacional de la página 3, allí nos preguntábamos por puntos críticos del funcional área. En el problema isoperimétrico, la cuestión se refiere a mínimos globales. Hay que señalar

que los resultados de Almgren y Taylor no precisan la topología de las soluciones isoperimétricas. Por otra lado, Wente ([74]) probó que dada una curva de Jordan y un número real  $V > 0$ , existe un disco inmerso en  $\mathbb{R}^3$  con frontera  $\Gamma$ , volumen algebraico  $V$  y de menor área de entre todos los discos con su misma frontera y volumen. Por tanto, también las soluciones de Wente son estables. En el Capítulo 3 determinaremos la forma de las regiones isoperimétricas para el par  $(D, V)$ , siendo  $D$  un dominio acotado plano y convexo y  $V$  un número real suficientemente pequeño. Por último, si consideramos el caso en que  $D$  sea un disco, el Principio de Simetrización de Steiner asegura de nuevo que las soluciones isoperimétricas son casquetes esféricos ([39], [40])

Para finalizar esta sección, mostramos algunos ejemplos de superficies con curvatura media constante que serán necesarios en esta Memoria.

Una familia especial de superficies con curvatura media constante la componen aquellas superficies con curvatura media cero: son las llamadas superficies minimales. En este caso, por la Proposición 1.1.1, la superficie es un punto crítico del área para cualquier variación que fija la frontera (no sólo para las que conservan el volumen). El estudio de la familia de superficies minimales constituye ya de por sí un amplio campo de la Geometría Diferencial, debido en gran parte a su conexión con el Análisis Complejo. Sin embargo es necesario indicar que, ya que esta Memoria se dedica principalmente al estudio de las superficies con borde plano, si la superficie es minimal y tiene frontera no vacía, el principio del máximo (Sección 1.2) asegura que la superficie es un dominio de ese plano. En este sentido, las superficies minimales son sencillamente dominios de planos. Precisamente por ello, para las superficies minimales, los resultados de esta Memoria no son interesantes.

En lo referente a los ejemplos, nos centramos en aquéllos que son más fáciles de describir. Los dos más inmediatos son las superficies umbilicales: el plano, con curvatura media cero y la esfera de radio  $r > 0$ , con curvatura media  $1/r$  respecto de la elección del normal unitario interior.

Otra familia interesante de ejemplos es la formada por las superficies de revolución no compactas. Las superficies de revolución con curvatura media constante fueron clasificadas en 1838 por C. Delaunay ([19]): son obtenidas al rotar alrededor de una recta  $l$  la traza de un foco de una cónica cuando ésta rueda a lo largo de

$l$  (ver [20] para una descripción de ellas). La lista de estas superficies, aparte del plano y de la esfera, son (ver Figura 1.1):

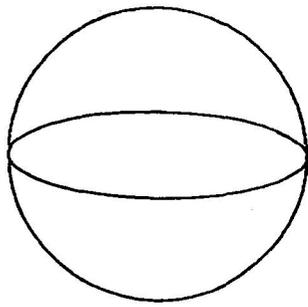
1. El cilindro circular recto, que aparece al girar la traza del centro de una circunferencia.
2. Las onduloides y nodoides, las cuales son generadas por las trazas de los focos de una elipse y una hipérbola respectivamente.
3. La catenoide, construida a partir de la traza del foco de una parábola.

Hasta 1986, la única superficie compacta sin borde conocida de curvatura media constante era la esfera. Hasta esa fecha se tenían las dos siguientes caracterizaciones de la esfera dentro de la familia de superficies compactas sin borde y con curvatura media constante:

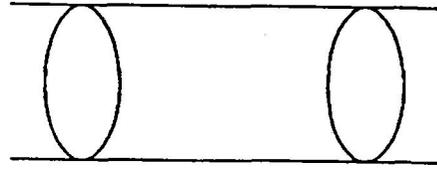
- Es la única de género cero (Teorema de Hopf ([35])).
- Es la única embebida (Teorema de Alexandrov ([3])).

Sin embargo, Wente ([76]) halló un toro inmerso de curvatura media constante, abriendo nuevas líneas en la búsqueda de ejemplos: [11], [52], etc. Kapouleas, usando técnicas diferentes a las de Wente, encontró superficies con género mayor o igual que tres ([37]).

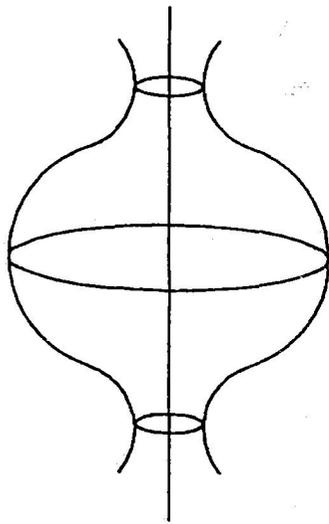
En lo que corresponde a superficies con curvatura media constante cuya frontera es no vacía, se pueden obtener ejemplos tomando simplemente cualquier dominio de una superficie de Delaunay acotado por una curva cerrada. Concretamente destacamos, por el papel que van a desempeñar en esta Memoria, los casquetes esféricos: son cada una de las partes de una esfera que resultan de intersectar dicha esfera con un plano. Si este plano no pasa por el centro de la esfera, se obtienen dos casquetes esféricos, uno más grande que el otro y que llamaremos respectivamente *casquete esférico grande* y *casquete esférico pequeño* (ver Figura 1.2). Si el plano pasa por el centro, los dos casquetes esféricos son dos semiesferas. Los dos casquetes esféricos tienen la misma circunferencia como frontera, tienen la misma curvatura media y son las únicas superficies de revolución compactas con curvatura media constante (no cero) cuya frontera es una circunferencia.



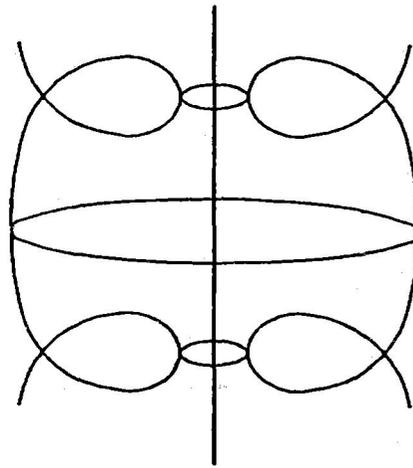
esfera



cilindro



onduloide



nodoide

Figura 1.1: Superficies de Delaunay

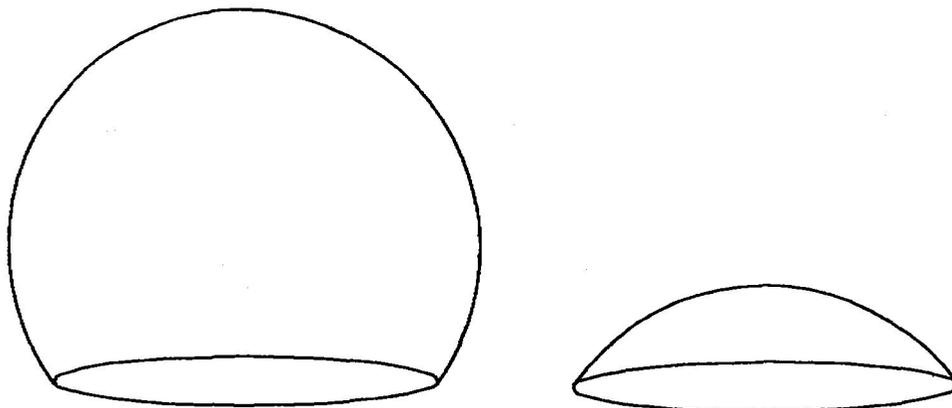


Figura 1.2: Casquetes esféricos

Respecto de la estabilidad de los casquetes esféricos y en general, de cualquier dominio esférico, se tiene el siguiente resultado:

*Cualquier dominio de una esfera es estable y aquellos dominios contenidos en una semiesfera son fuertemente estables. En particular, los casquetes esféricos son estables, pero sólo los pequeños son fuertemente estables.*

*Demostración:* 1. Sea  $\Omega$  un dominio cualquiera de una esfera  $S$ , que supondremos, sin perder generalidad, que tiene radio 1 y sea  $f$  una función diferenciable en  $\Omega$  que se anula en  $\partial\Omega$  y cuya integral es cero. Sea  $F \in H_0^{1,2}(S)$  una extensión de  $f$  por cero a toda la esfera. Ya que  $\int_S F dS = \int_\Omega f d\Omega = 0$ ,  $|\sigma|^2 = 2$  y el primer valor propio del laplaciano para la esfera es 2, se concluye que

$$Q(f) = \int_S (|\nabla F|^2 - 2F^2) dS \geq 0.$$

2. Supongamos ahora que  $\Omega$  es un dominio contenido en una semiesfera de  $S$ . Entonces el primer valor propio  $\lambda_1$  del laplaciano con condición de Dirichlet en el borde de  $\Omega$  es mayor o igual que el primer valor propio de la semiesfera ([17]), el cual es 2. Si  $f$  es una función diferenciable en  $\Omega$  que se anula en  $\partial\Omega$ .

$$2 \int_\Omega f^2 d\Omega \leq \lambda_1 \int_\Omega f^2 d\Omega \leq \int_\Omega |\nabla f|^2 d\Omega,$$

es decir,  $Q(f) = \int_{\Omega} (|\nabla f|^2 - 2f^2) d\Omega \geq 0$ .

□

## 1.2 Principios de comparación

Hemos introducido en la primera parte de este capítulo el concepto de superficie con curvatura media constante desde un punto de vista variacional. Nos centramos ahora en un estudio más local y analítico de dichas superficies. Para ello, recordemos que toda superficie se puede expresar, en un entorno de cada punto como grafo de una función diferenciable  $u = u(x_1, x_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un dominio  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  ([16]). Elegimos como aplicación de Gauss de ese grafo la dada por

$$N = \frac{(-u_1, -u_2, 1)}{\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}} = \frac{(-\nabla_0 u, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla_0 u|^2}}$$

donde el subíndice  $i \in \{1, 2\}$  representa  $\partial/\partial x_i$  y  $\nabla_0$  es el operador gradiente de la métrica euclídea de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces la curvatura media  $H(u)$  viene dada por

$$H(u) = \frac{1}{2} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla_0 u}{\sqrt{1 + |\nabla_0 u|^2}} \right), \quad (1.3)$$

siendo  $\operatorname{div}$  el correspondiente operador divergencia en  $\mathbb{R}^2$ . Por tanto, si  $\Sigma$  tiene curvatura media constante  $H$ , entonces la función  $u$  satisface la ecuación cuasilínea elíptica

$$(1 + u_2^2)u_{11} - 2u_1u_2u_{12} + (1 + u_1^2)u_{22} = 2H(1 + u_1^2 + u_2^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (1.4)$$

De este modo, para estudiar la conducta local de una superficie con curvatura media constante podemos aplicar la teoría de ecuaciones en derivadas parciales para ecuaciones elípticas (ver [23]). Cabe destacar el hecho de que las soluciones de la ecuación (1.4) son analíticas en  $\Omega$  si las condiciones sobre la frontera  $\partial\Omega$  también lo son. Supondremos en toda esta Memoria que dichas condiciones de analiticidad se dan en la frontera.

De entre los hechos que destacan en la teoría de ecuaciones elípticas se encuentra el llamado principio del máximo, el cual tendrá consecuencias muy importantes en

el estudio de las superficies con curvatura media constante. El propósito de esta sección es el dar un conjunto de resultados de comparación para estas superficies que son necesarios a lo largo de esta Memoria y se deducen de ese principio del máximo.

Sea un dominio acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  y un operador elíptico  $L : C^\infty(\bar{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$  definido por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}u_{ij} + \sum_{i=1}^2 b_i u_i + cu,$$

donde  $a_{ij}$ ,  $b_i$  y  $c$  son funciones diferenciables en  $\bar{\Omega}$ . El principio del máximo clásico para las ecuaciones elípticas es el siguiente:

**Teorema 1.2.1 (Principio del máximo [23], [65])** *Si  $u$  es una función definida en  $\bar{\Omega}$  tal que  $Lu \geq 0$  y  $u \leq 0$ , entonces  $u$  no puede alcanzar el valor 0 en  $\Omega$ , a no ser que sea idénticamente cero.*

Existe también una versión del teorema anterior cuando la función  $u$  alcanza su máximo en un punto frontera de  $\Omega$ :

**Teorema 1.2.2 ([23], [65])** *Si  $u$  es una función en  $\bar{\Omega}$  tal que  $Lu \geq 0$ ,  $u \leq 0$  y la derivada normal interior de  $u$  en un punto  $p \in \partial\Omega$  es no negativa, entonces  $u$  no puede alcanzar el valor 0 en  $p$ , a no ser que sea idénticamente cero.*

En el caso de que el operador elíptico tenga  $c = 0$ , los anteriores principios del máximo se convierten en los siguientes *principios fuertes del máximo* de E. Hopf ([34]).

**Corolario 1.2.3 (Hopf)** *Se considera el mismo operador  $L$  que en el Teorema 1.2.1 con  $c = 0$ . Sea además  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$  tal que  $Lu \geq 0$ .*

1. *Si  $u$  tiene un máximo relativo en algún punto interior de  $\Omega$ , entonces es una función constante (versión punto interior).*
2. *Si  $u$  tiene un máximo relativo en  $\Omega \cup \{p\}$  para algún punto  $p \in \partial\Omega$  y la derivada normal interior de  $u$  en  $p$  es no negativa, entonces  $u$  es constante (versión punto frontera).*

Aunque la ecuación de curvatura media constante no satisface las hipótesis del principio del máximo, el hecho fundamental es que la diferencia de dos funciones que son soluciones de la ecuación de curvatura media satisface una ecuación elíptica y cuasilineal (ver [23] para las definiciones).

**Proposición 1.2.4 (Teorema 10.1 de [23])** Sean dos funciones  $u, v$  definidas en  $\bar{\Omega}$  cuyos grafos tienen curvaturas medias  $H(u)$  y  $H(v)$  respectivamente. Si  $H(u) \geq H(v)$  en  $\Omega$ , entonces la función diferencia  $w = u - v$  satisface  $L(w) \geq 0$  donde

$$L = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^2 b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

es un operador elíptico cuasilineal.

*Demostración:* De la ecuación (1.3), se define

$$Q(u) = \operatorname{div} \left( \frac{\nabla_0 u}{\sqrt{1 + |\nabla_0 u|^2}} \right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2H(v) - 2H(u) = Q(v) - Q(u) \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1 + |\nabla_0 u|^2} \right) w_{ij} + \sum_{i,j=1}^2 \left( \frac{v_i v_j}{1 + |\nabla_0 v|^2} - \frac{u_i u_j}{1 + |\nabla_0 u|^2} \right) v_{ij}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Se considera  $\beta_{ij}(p_1, p_2) = \frac{p_i p_j}{1 + |p|^2}$  donde  $|p|^2 = p_1^2 + p_2^2$ . Por el teorema del valor medio aplicado a  $\beta_{ij}$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{v_i v_j}{1 + |\nabla_0 v|^2} - \frac{u_i u_j}{1 + |\nabla_0 u|^2} &= \beta_{ij}(v_1, v_2) - \beta_{ij}(u_1, u_2) \\ &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial p_k}(c_k) (v_k - u_k) = - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial p_k}(c_k) w_k, \end{aligned}$$

donde  $c_k = v_k + \theta(u_k - v_k)$ , para  $0 \leq \theta = \theta(p) \leq 1$ . Por tanto, la desigualdad (1.5) se transforma ahora en

$$\sum_{i,j=1}^2 \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1 + |\nabla_0 u|^2} \right) w_{ij} - \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial p_k}(c_k) v_{ij} \right) w_k \geq 0$$

Definiendo  $a_{ij}$  y  $b_k$  como

$$a_{ij} = \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{1 + |\nabla_0 u|^2} \right)$$

$$b_k = - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial p_k} (c_k) v_{ij}$$

se obtiene que  $L(w) \geq 0$ .

□

Como consecuencia de combinar el Corolario 1.2.3 y la Proposición 1.2.4, se obtiene el siguiente resultado:

**Corolario 1.2.5 (Principio del máximo interior para grafos)** Sean  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  dos grafos de  $\mathbb{R}^3$  dados, respectivamente, por funciones  $u, v : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Supongamos que  $u(p) = v(p)$  para algún  $p \in \Omega$  y que los planos tangentes de  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  coinciden en  $p$ . Si se dan las desigualdades  $H(u) \geq H(v)$  y  $u \leq v$  en un entorno de  $p$ , entonces  $u = v$  en  $\Omega$ .

*Demostración:* Se define en  $\Omega$  la función  $w = u - v$ . Por hipótesis,  $w$  tiene un máximo en el punto  $p$ , que es interior a  $\Omega$ . De la proposición anterior y del Corolario 1.2.3, apartado 1), se deduce que  $w$  es una función constante.

□

En particular, si  $p$  es un punto de  $\Omega$  donde  $u(p) = v(p)$  y  $u \leq v$  en un entorno de  $p$  y las curvaturas medias verifican las desigualdades  $H(v) < 0$  y  $|H(u)| \leq |H(v)|$ , entonces  $u$  y  $v$  coinciden en un abierto alrededor de  $p$ .

Con un razonamiento análogo al del Corolario 1.2.5 y usando el apartado 2 del Corolario 1.2.3 obtenemos:

**Corolario 1.2.6 (Principio del máximo frontera para grafos)** Sean  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  como en el corolario anterior. Supongamos que  $p \in \partial\Omega$  es un punto donde  $u(p) = v(p)$  y los planos tangentes a las dos superficies y a las curvas fronteras coinciden en  $p$ . Si  $H(u) \geq H(v)$  y  $u \leq v$ , entonces  $u = v$  en  $\bar{\Omega}$ .

Trasladamos la situación de los dos corolarios anteriores a dos superficies que no sean necesariamente grafos. Sean dos superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  con un punto común  $p$  y tal que los planos tangentes en  $p$  coinciden en ambas superficies (si  $p$  es un punto de la frontera en las dos superficies, suponemos también que las rectas tangentes a las curvas fronteras coinciden). Localmente como grafos, la hipótesis  $u \leq v$  significa que una de las superficies se encuentra a un lado de la otra. Como consecuencia de dichos corolarios y por analiticidad se concluye lo siguiente:

**Teorema 1.2.7 (Principio de Comparación y del Máximo)** *Sean dos superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  con curvaturas medias constantes  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente y supongamos que en un punto común  $p$  de tangencia las aplicaciones de Gauss coinciden, o sea,  $N_1(p) = N_2(p) = a$ . Entonces si en un entorno de  $p$ ,  $\Sigma_1$  se encuentra por debajo de  $\Sigma_2$  respecto de la dirección  $a$ , entonces  $H_1 \leq H_2$ . Además, si  $H_1 = H_2$ , se obtiene que una de las dos superficies se encuentra contenida en la otra.*

La última afirmación quiere decir que si dos superficies con la misma curvatura media constante tienen algún punto común de tangencia y una de las dos superficies está localmente por debajo de la otra, entonces una de las dos superficies está incluida en la otra. En esta Memoria el Principio de Comparación se usará en la siguiente situación: dadas dos superficies compactas de la misma curvatura media constante y disjuntas, se desplazará una de ellas hacia la otra hasta que la interseque por primera vez en un punto. Si en dicho punto, las dos superficies son tangentes, una de ellas estará a un lado de la otra en un entorno de ese punto. Si los vectores normales unitarios coinciden en el punto de intersección, entonces el Principio de Comparación asegura que dichas superficies coinciden en un abierto que contiene al punto, y por analiticidad, una de ellas está contenida en la otra.

Como ilustración del uso del Principio de Comparación, probamos el siguiente resultado sobre superficies cerradas con curvatura media constante:

**Ejemplo 1.** *No existen superficies compactas sin borde con curvatura media constante  $H \neq 0$  e incluidas en una región determinada por dos planos paralelos que se encuentran a una distancia  $1/|H|$ .*

*Demostración:* Podemos suponer que los planos paralelos son los planos  $P_1 = \{x_3 =$

$-1/2|H|$  y  $P_2 = \{x_3 = 1/2|H|\}$ . Sea una superficie  $\Sigma$  con curvatura media constante  $H$  sin frontera e incluida en la banda  $S = \{-1/2|H| \leq x_3 \leq 1/2|H|\}$  determinada por  $P_1$  y  $P_2$ . Se orienta  $\Sigma$  para que la curvatura media  $H$  sea positiva. Dado un vector unitario  $v = (v_1, v_2, 0)$  paralelo al plano  $\{x_3 = 0\}$ , se considera el vector  $w = (-v_2, v_1, 0)$  y el siguiente semicilindro de  $\mathbb{R}^3$ :

$$C_v = \{x \in \mathbb{R}^3; |x|^2 - \langle x, w \rangle^2 = 1/4H^2, \langle x, v \rangle \geq 0\},$$

es decir,  $C_v$  es un semicilindro de eje paralelo a los planos  $P_i$  y perpendicular al vector  $v$  y tal que las dos rectas que forman su frontera se encuentran cada una contenida en cada uno de los planos  $P_i$ . Además el vector  $v$  apunta hacia la componente no convexa que determina  $C_v$  en  $S$ . Se orienta  $C_v$  mediante una aplicación de Gauss  $N'$  para conseguir que  $C_v$  tenga curvatura media  $H > 0$ , es decir,  $N'$  satisface  $\langle N', v \rangle \leq 0$  en  $C_v$ . Se desplaza  $C_v$  en la dirección del vector  $v$  hasta que no interseque a  $\Sigma$  (esto es posible porque  $\Sigma$  es compacta).

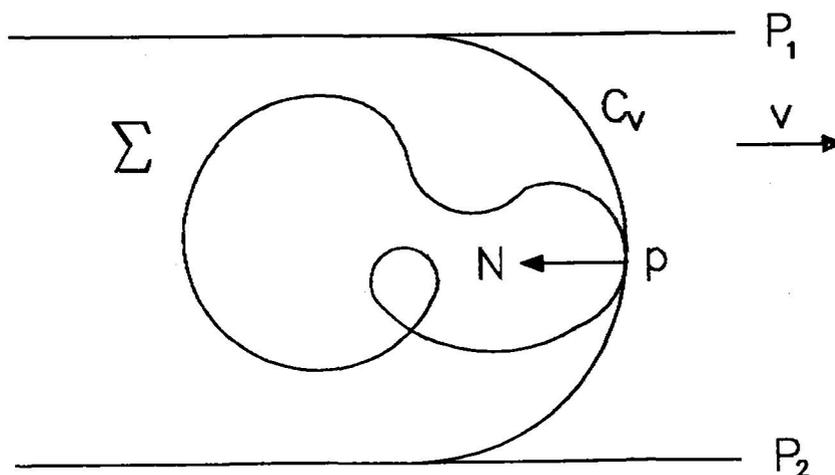


Figura 1.3: Ejemplo 1. Principio de Comparación.

Ahora se mueve  $C_v$  en la dirección  $-v$  hasta que toque por primera vez a  $\Sigma$  en un punto  $p$ . Entonces el punto  $p$  es un punto donde  $\Sigma$  y  $C_v$  son tangentes (esto ocurre incluso si  $p \in \partial C_v$ , pues en tal caso, el plano tangente a las dos superficies es alguno de los planos  $P_i$ ,  $i = 1, 2$ ). Ahora bien, respecto del vector normal unitario  $N(p)$ , la superficie  $\Sigma$  se encuentra por encima de  $C_v$  (ver Figura 1.3). El Principio

de Comparación afirma que las superficies  $\Sigma$  y  $C_v$  coinciden en un entorno de dicho punto. Por analiticidad y conexión  $\Sigma \subset C_v$ , llegando a una contradicción.

□

### 1.3 Principio de reflexión de Alexandrov

El final de la sección anterior ilustra la utilización del Principio de Comparación para el estudio de la geometría de una superficie con curvatura media constante: una superficie conocida con curvatura media constante (cilindro, esfera, etc) actúa como barrera para establecer ciertas acotaciones de la superficie dada. En 1956 Alexandrov publica una serie de artículos donde usa de una manera muy ingeniosa este Principio de Comparación para una superficie embebida con curvatura media constante: utiliza la propia superficie como superficie barrera. Concretamente, si la superficie no tiene frontera, Alexandrov va tomando planos que intersecan a la superficie y refleja respecto de estos planos la parte de la superficie que queda a un lado de los planos y la hace comparar con la parte de la superficie que queda en el otro lado. De esta manera demuestra que en toda dirección, la superficie tiene un plano de simetría y por tanto:

*Las únicas superficies embebidas compactas sin borde con curvatura media constante son las esferas euclídeas ([3]).*

Una demostración sencilla de este teorema puede encontrarse en [65]. Para ilustrar el uso del método de Alexandrov dentro de esta Memoria, mostramos cómo se usa cuando la superficie tiene como frontera una curva de Jordan plana.

**Teorema 1.3.1** *Sea  $\Gamma$  una curva de Jordan contenida en un plano  $P$  y simétrica respecto de una recta  $l$  de  $P$ . Supongamos además que cada lado de  $\Gamma$  determinado por  $l$  es un grafo sobre  $l$ . Entonces toda superficie embebida, compacta, con curvatura media constante cuya frontera sea  $\Gamma$  e incluida en uno de los semiespacios abiertos determinados por  $P$ , es simétrica respecto del plano  $\Pi$  que es perpendicular a  $P$  y contiene a  $l$ . Además, el plano  $\Pi$  divide a la superficie en dos grafos sobre  $\Pi$  con frontera común incluida en dicho plano.*

*Demostración:* Después de un cambio de coordenadas, podemos suponer que la curva  $\Gamma$  está contenida en el plano vectorial  $P = a^\perp$ , donde  $a = (0, 0, 1)$  y que  $l$  es la recta generada por el vector  $(1, 0, 0)$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , llamamos  $\Pi(t)$  al plano  $\{x_2 = t\}$  (obsérvese que  $\Pi = \Pi(0)$ ). Si  $A$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , se consideran los conjuntos  $A_{t+} = A \cap \{x_2 > t\}$  y  $A_{t-} = A \cap \{x_2 < t\}$ , es decir, cada una de las partes que determina  $\Pi(t)$  en  $A$ . Sea también  $A_t^*$  la reflexión de  $A$  respecto del plano  $\Pi(t)$ , es decir,

$$A_t^* = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; (x_1, 2t - x_2, x_3) \in A\}.$$

Si  $B$  es otro subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , escribimos  $A \geq B$  si para cualquier  $x \in A$  e  $y \in B$  tal que  $x_i = y_i$ ,  $i = 1, 3$ , se tiene  $x_2 \geq y_2$ .

Sea ahora una superficie embebida  $\Sigma$  con curvatura media constante cuya frontera sea  $\Gamma$  y tal que  $\Sigma \subset \{x_3 \geq 0\}$ . Se construye una superficie sin frontera, embebida y diferenciable excepto a lo largo de  $\Gamma$ , dada por  $F = \Sigma \cup \Omega$ , donde  $\Omega$  es el dominio acotado determinado por  $\Gamma$  en  $P$ . Se llama  $W$  al dominio interior determinado por  $F$  y se escoge la aplicación de Gauss  $N$  que apunta hacia  $W$ . Se considera  $t > 0$  suficientemente grande para que  $\Sigma \cap \Pi(t) = \emptyset$  y se va desplazando  $\Pi(t)$  hacia la izquierda ( $t \rightarrow 0$ ) hasta que interseque por primera vez a  $\Sigma$  en un plano  $\Pi(\bar{t})$ ,  $\bar{t} > 0$ . Ya que  $W$  es un dominio embebido de  $\mathbb{R}^3$ , existe  $\delta > 0$  y suficientemente pequeño tal que  $\Sigma_{(\bar{t}-\delta)^+}^* \subset \overline{W}$  y  $\Sigma_{(\bar{t}-\delta)^+}^* \geq \Sigma_{(t-\delta)^-}$  (esto ocurre incluso si  $\Pi(\bar{t}) \cap \Sigma$  es un punto de  $\Gamma$ ). Ahora se hace este proceso de reflexión con planos  $\Pi(t)$  que se van acercando a  $\Pi = \Pi(0)$ . Obsérvese que la superficie reflejada  $\Sigma_{t+}^*$  también tiene curvatura media constante  $\pm H$  y que si se elige como valor a  $H$ , entonces su aplicación de Gauss también apunta hacia  $W$  (ya que el dominio acotado determinado por  $\Sigma_{t_0^+}^* \cup \Sigma_{t_0^-}$  está incluido en  $\overline{W}$ ). Por la compacidad de  $\Sigma$  y por el hecho de que  $\Gamma_{0+}$  es un grafo sobre  $l$ , existe un primer momento  $t_0 \geq 0$  tal que  $\Sigma_{t_0^+}^*$  interseca a la superficie  $\Sigma_{t_0^-}$  en un punto  $p$ . Si este punto  $p$  se encuentra por encima del plano  $P$ , entonces es un punto interior de la superficie y por tanto es un punto de tangencia entre  $\Sigma_{t_0^+}^*$  y  $\Sigma_{t_0^-}$ . Pueden darse entonces dos situaciones:

1. Si el punto  $p$  no pertenece al plano  $\Pi(t_0)$ , entonces es un punto interior a  $\Sigma_{t_0^+}^*$  y a  $\Sigma_{t_0^-}$  y podemos aplicar el Principio del Máximo.
2. Si el punto  $p$  pertenece a  $\Pi(t_0)$ , entonces es un punto interior de  $\partial\Sigma_{t_0^+}^* \cap \partial\Sigma_{t_0^-}$  y de nuevo es posible usar el Principio del Máximo, en su versión frontera.

Ya que las aplicaciones de Gauss de  $\Sigma_{t_0^+}^*$  y  $\Sigma_{t_0^-}$  coinciden en dicho punto, el Principio del Máximo nos dice que  $\Sigma_{t_0^+}^* = \Sigma_{t_0^-}$ . Por tanto  $\Pi(t_0)$  es un plano de simetría de  $\Sigma$  y, en particular, de  $\Gamma$ . Entonces  $t_0 = 0$  y  $\Pi(t_0) = \Pi$ . Si el punto  $p$  es un punto frontera y puesto que  $\Gamma_{0+}$  es un grafo sobre  $l$ , este punto procede de un punto de  $\Gamma_{0+}$  y entonces  $t_0 = 0$ . Si  $\Sigma_{0+}^*$  y  $\Sigma_{0-}$  tienen un punto de tangencia en  $p$ , de nuevo  $\Pi$  es un plano de simetría de la superficie (ver Figura 1.4).

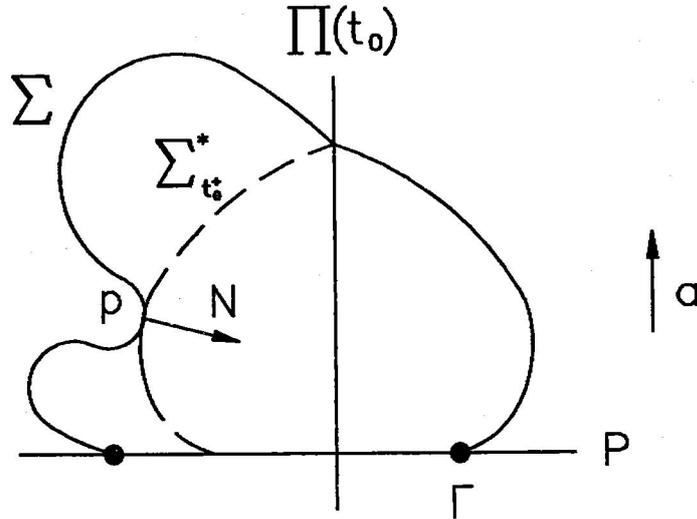


Figura 1.4: Método de Alexandrov

Por el contrario, si no existiese un punto de tangencia, entonces  $\Sigma_{0+}^* \geq \Sigma_{0-}$ . En este caso, se hace un razonamiento análogo al anterior pero con planos  $\Pi(t)$  a la izquierda de  $\Pi$ . Por tanto se deduce que existe  $t_1 < 0$  tal que  $\Sigma_{t_1^+}$  tiene un punto de tangencia con  $\Sigma_{t_1^-}^*$  y  $\Sigma_{t_1^-}^* \geq \Sigma_{t_1^+}$ . El Principio del Máximo nos asegura que  $\Sigma_{t_1^+} = \Sigma_{t_1^-}^*$  y  $\Pi(t_1)$  es un plano de simetría de  $\Sigma$ , lo cual es falso pues  $t_1 < 0$ .

□

En las hipótesis del Teorema 1.3.1 se ha supuesto que  $\Sigma - \Gamma \subset \{x_3 > 0\}$ . Si suponemos que  $\Sigma \subset \{x_3 \geq 0\}$  entonces ocurre lo siguiente:

1. No hay puntos de intersección de  $\Sigma$  con  $\Omega$ . Concretamente, si existe un punto  $p \in \Omega \cap \Sigma$ , se considera la superficie  $F = \Sigma \cup (\Gamma \times [-1, 0]) \cup (\Omega \times \{-1\})$ . Entonces la aplicación de Gauss  $N$  de  $\Sigma$  que hace que  $H$  sea positiva es aquella que apunta

hacia el dominio  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  acotado por  $F$ . Por tanto,  $N(p) = -a$ . Por otra parte, considerando una esfera de radio  $1/H$  por debajo de  $P$  y tangente a  $P$  en el punto  $p$ , el Principio del Máximo asegura que la superficie está incluida en la esfera, o la esfera incluida en la superficie, lo cual es falso.

2. Si existe  $q \in (\Sigma - \bar{\Omega}) \cap P$ , repitiendo la demostración del Teorema 1.3.1 se obtiene que dicho punto debe pertenecer a la recta  $l$ .

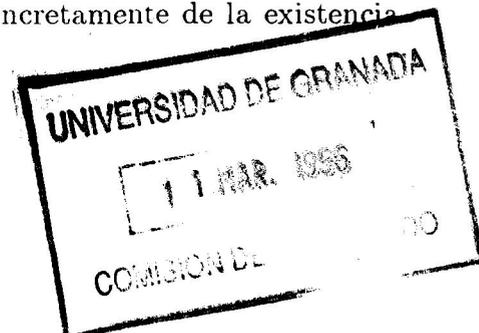
El Teorema 1.3.1 se puede aplicar pues a curvas planas y convexas. En particular, si la frontera es una circunferencia, y ya que toda recta que pasa por el origen es una recta de simetría de la circunferencia, se deduce:

**Corolario 1.3.2** *Los casquetes esféricos y los discos circulares planos son las únicas superficies compactas embebidas con curvatura media constante cuya frontera es una circunferencia y están contenidas en uno de los semiespacios determinados por el plano que contiene a la frontera.*

El uso de planos para reflejar una superficie con curvatura media constante y usar la misma superficie como barrera de comparación para ella misma, se llama *método de reflexión de Alexandrov*. Esta técnica es usada frecuentemente en Geometría Diferencial y en la teoría de existencia de ecuaciones en derivadas parciales (ver por ejemplo el Capítulo 9 de [23]). Una demostración detallada del Corolario 1.3.2 se halla en [38] (para el caso no compacto, existe un resultado análogo al Corolario 1.3.2 en [56].)

## 1.4 El método de continuidad y la ecuación de curvatura media

En las dos anteriores secciones nos hemos preocupado por el estudio cualitativo de las superficies: el carácter local, acotaciones mediante el uso de otras superficies con curvatura media constante como superficies barrera, simetrías, etc. En esta última parte del Capítulo 1 nos centramos en el problema de existencia de algún tipo de superficies con curvatura media constante, concretamente de la existencia



de grafos con frontera plana. Ya que la ecuación (1.4) es una ecuación elíptica, podemos utilizar las herramientas habituales de la teoría de existencia de ecuaciones en derivadas parciales. Nosotros nos centraremos en una de ellas: el método de continuidad (la mayor parte de resultados de esta sección están descritos en [23]; el artículo de Serrin ([62]) es una buena muestra de su uso en la teoría de grafos con curvatura media constante).

Se plantea en un dominio acotado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  un problema de Dirichlet del tipo

$$\begin{cases} Qu = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, u, \nabla_0 u) u_{ij} + b(x, u, \nabla_0 u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = \varphi & \text{en } \partial\Omega \quad \varphi \in C^\infty(\partial\Omega) \end{cases} \quad (1.6)$$

donde  $Q$  es un operador elíptico cuasilineal, es decir, determinar una función diferenciable  $u = u(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  tal que  $Qu = 0$  en  $\Omega$  y  $u = \varphi$  en  $\partial\Omega$ . Para establecer la existencia de soluciones del anterior problema de Dirichlet se usará la técnica de estimaciones *a priori* de las normas de las eventuales soluciones. Este método se puede resumir en el siguiente teorema:

**Teorema 1.4.1 (Método de continuidad [23])** *Sea una función diferenciable  $\varphi$  en  $\partial\Omega$  y  $t \in [0, 1]$ . Supongamos que existe una constante  $M$  independiente de  $t$  tal que si  $u$  es una función diferenciable en  $\bar{\Omega}$  que es solución del problema*

$$\begin{cases} Q_t u = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, u, \nabla_0 u) u_{ij} + t b(x, u, \nabla_0 u) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = t\varphi & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

entonces cumple

$$\sup_{\Omega} (|u| + |\nabla_0 u|) \leq M. \quad (1.8)$$

En tal caso, el problema de Dirichlet (1.6) tiene solución.

Un esquema de la demostración es el siguiente. Se considera el espacio de Banach  $\mathcal{B} = C^\infty(\bar{\Omega})$  con la norma  $\sup_{\Omega} (|u| + |\nabla_0 u|)$  y el operador  $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  dado mediante  $Tv = u$ , donde  $u$  es la única solución del problema *lineal* de Dirichlet

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, v, \nabla_0 v) u_{ij} + b(x, v, \nabla_0 v) = 0 & \text{en } \Omega \\ u = \varphi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

El problema de Dirichlet (1.6) es equivalente a encontrar un punto fijo del operador  $T$  definido anteriormente. Para la existencia de dicho punto fijo es suficiente probar

que  $T$  es una aplicación compacta y continua. La estimación (1.8) y el Teorema de Ascoli prueban que el operador  $T$  es compacto. Para probar que  $T$  es continua, sea  $\{v_n\} \rightarrow v$  en  $C^\infty(\bar{\Omega})$ . Como la sucesión  $\{Tv_n\}$  es un conjunto precompacto en  $C^\infty(\bar{\Omega})$ , posee una parcial convergente en  $C^\infty(\bar{\Omega})$ , que se representará de la misma forma y sea  $u$  su límite. Tomando límites en la igualdad

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, v_n, \nabla_0 v_n)(Tv_n)_{ij} + b(x, v_n, \nabla_0 v_n) = 0$$

y como  $Tv_n \rightarrow u$  y  $v_n \rightarrow v$ , se obtiene

$$\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, v, \nabla_0 v)u_{ij} + b(x, v, \nabla_0 v) = 0.$$

Por unicidad,  $Tv = u$  y por tanto,  $Tv_n \rightarrow Tv$ .

Establecido el método de continuidad en el Teorema 1.4.1, nos dedicamos ahora a aplicar dicha técnica para encontrar grafos con curvatura media constante sobre dominios planos. Previamente probaremos una serie de resultados sobre grafos de curvatura media constante. Para ello, escribimos la ecuación (1.4) en la forma equivalente

$$\Delta_0 u(1 + |\nabla_0 u|^2) - \sum_{i,j=1}^2 u_i u_j u_{ij} - 2H(1 + |\nabla_0 u|^2)^{\frac{3}{2}} = 0, \quad (1.9)$$

donde  $\Delta_0$  es el laplaciano euclídeo. Se identifica  $\mathbb{R}^2$  con el plano de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $P = \{x_3 = 0\}$  y sea el vector  $a = (0, 0, 1)$ . Se considera un dominio acotado  $\Omega$  contenido en  $P$ .

**Lema 1.4.2** *Sea un dominio acotado  $\Omega$  y  $\Sigma$  un grafo de curvatura media constante  $H \neq 0$  determinado por una función diferenciable  $u$  definida en  $\Omega$  que se anula en  $\partial\Omega$ . Entonces si  $\max_\Omega u > 0$ , la función  $u$  es positiva en  $\Omega$ , es decir,  $\Sigma$  se encuentra contenida en uno de los dos semiespacios determinados por  $P$ . Además, con la elección del normal unitario apuntando hacia arriba,  $H$  es negativa.*

*Demostración:* Este hecho es una consecuencia inmediata del Corolario 1.2.3. Supongamos que el grafo tiene curvatura media constante  $H$ . Si  $p \in \Omega$  es un punto

donde la función  $u$  alcanza el máximo, entonces  $\Delta_0 u(p) \leq 0$ . De la ecuación (1.9),  $\Delta_0 u(p) - 2H = 0$  y  $H$  es negativo. Si la función  $u$  es negativa en algún punto, entonces en el mínimo absoluto  $q$  se obtiene de forma análoga  $\Delta_0 u(q) \geq 0$  y  $\Delta_0 u(q) - 2H = 0$  y por tanto  $H > 0$ , llegando a una contradicción.

□

**Lema 1.4.3** *Sea  $\Sigma$  un grafo de curvatura media constante  $H \neq 0$  determinado por una función diferenciable  $u$  definida en  $\Omega$  y cuya frontera es  $\partial\Omega$ . Entonces*

$$\max_{\Omega} |u| \leq \frac{1}{|H|}.$$

*Demostración:* (debida a Serrin ([63])) Sin perder generalidad, suponemos que  $u > 0$  en  $\Omega$ . Si  $\phi(p) = (p, u(p))$ ,  $p \in \Omega$ , es la inmersión, se considera la función definida mediante

$$f(p) = -H \langle \phi(p), a \rangle - \langle N(p), a \rangle.$$

Ya que  $\langle N, a \rangle > 0$ , se tiene

$$\Delta f = (|\sigma|^2 - 2H^2) \langle N, a \rangle \geq 0,$$

donde  $\Delta$  es el operador laplaciano en  $\Sigma$  y  $\sigma$  es la segunda forma fundamental de la inmersión. El Teorema 1.2.1 asegura que  $f$  alcanza su máximo en  $\partial\Omega$ , es decir,

$$-H \langle \phi, a \rangle - \langle N, a \rangle \leq \max_{\partial\Omega} (-\langle N, a \rangle) \leq 0$$

$$|Hu| \leq \langle N, a \rangle \leq 1,$$

obteniendo la estimación buscada.

□

**Nota.** En el lema anterior, si la superficie  $\Sigma$  es embebida, no necesariamente un grafo, podemos usar el método de reflexión de Alexandrov mediante planos paralelos al plano  $P$  que contiene a  $\Omega$ , para demostrar que la superficie no puede alejarse de dicho plano más de una distancia  $2/|H|$  ([49]). Además, la parte de la superficie que se encuentra a una distancia respecto de  $P$  mayor que la mitad de la altura máxima de la superficie, es un grafo sobre  $P$ .

**Lema 1.4.4** Sean ahora dos grafos  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  de funciones  $u_1$  y  $u_2$  definidas en  $\Omega$ , con curvaturas medias constantes  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente y tales que  $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2 = \partial\Omega$ . Si las dos superficies se encuentran por encima de  $P$  y  $0 \leq H_1 \leq H_2$ , entonces  $u_1 \leq u_2$  en  $\Omega$ . Además, si  $\nu_i$  representa el conormal interior a la superficie  $\Sigma_i$ ,  $i = 1, 2$ , se obtiene  $\langle \nu_1, a \rangle \leq \langle \nu_2, a \rangle$  en  $\partial\Omega$ .

*Demostración:* La prueba de esta afirmación usa el Principio de Comparación. Se toma la superficie  $\Sigma_2$  y se desplaza hacia arriba (en la dirección del vector  $a$ ) hasta que no interseque a  $\Sigma_1$ . A continuación se mueve hacia abajo hasta que toque en un primer momento a  $\Sigma_1$ . Como las curvaturas medias son positivas, en ambas superficies las aplicaciones de Gauss correspondientes apuntan hacia abajo (Lema 1.4.2). El Principio de Comparación asegura que no puede haber un punto (interior o frontera) de tangencia. Luego  $\Sigma_2$  puede moverse hacia abajo hasta que la frontera llegue a  $\partial\Omega$ , quedando entonces  $\Sigma_1$  por debajo de  $\Sigma_2$ .

□

**Teorema 1.4.5 (Unicidad de grafos)** Dado un dominio plano acotado  $\Omega$  y  $H \in \mathbb{R}$ , existe, salvo reflexión, a lo más un grafo sobre  $\Omega$  con curvatura media constante  $H$  y cuya frontera es  $\partial\Omega$ .

**Lema 1.4.6** Sea una función  $u$  cuyo grafo tiene curvatura media constante  $H$  y  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ . Entonces

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |\nabla_0 u| = \max_{x \in \partial\Omega} |\nabla_0 u|.$$

*Demostración:* Como la curvatura media de la superficie es constante, la función  $\langle N, a \rangle$  verifica la siguiente ecuación:

$$\Delta \langle N, a \rangle + |\sigma|^2 \langle N, a \rangle = 0.$$

Entonces  $\Delta \langle N, a \rangle = -|\sigma|^2 \langle N, a \rangle < 0$  y por el Corolario 1.2.3,  $\langle N, a \rangle$  alcanza su mínimo en  $\partial\Omega$ . Ya que

$$\langle N, a \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_0 u|^2}}$$

se obtiene lo pedido.

□

Se interpreta ahora el número  $\max_{\partial\Omega} |\nabla_0 u|$  en términos de la geometría del grafo. Se simboliza por  $\nu$  el vector conormal interior a  $\Sigma$  a lo largo de  $\partial\Omega$ . Ya que la frontera de  $\Sigma$  es una curva contenida en un plano perpendicular al vector  $a$ ,

$$\langle \nu, a \rangle^2 + \langle N, a \rangle^2 = 1 \quad \text{en } \Gamma.$$

Por tanto,

$$\langle \nu, a \rangle = \langle N, a \rangle |\nabla_0 u| = \frac{|\nabla_0 u|}{\sqrt{1 + |\nabla_0 u|^2}}. \quad (1.10)$$

Como la función  $x \mapsto x/\sqrt{1+x^2}$  es creciente, entonces el máximo de la función  $|\nabla_0 u|$  en  $\partial\Omega$  se alcanza en el punto donde  $\langle \nu, a \rangle$  alcanza también su máximo en  $\partial\Omega$ . Además, si  $p \in \partial\Omega$  es el punto donde la función  $\langle \nu, a \rangle$  alcanza el máximo y si  $\lambda_0 = \langle \nu(p), a \rangle$ , entonces

$$\max_{\partial\Omega} |\nabla_0 u| = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \lambda_0^2}} \in \mathbb{R}.$$

Del anterior razonamiento y del Lema 1.4.4 se concluye lo siguiente:

**Lema 1.4.7** Sean dos funciones  $u_1, u_2$  definidas en  $\bar{\Omega}$  tales que sus grafos son superficies con fronteras  $\partial\Omega$  y con curvaturas medias constantes  $H_1$  y  $H_2$  respectivamente. Si  $0 < H_1 < H_2$ , entonces

$$\max_{\Omega} |\nabla_0 u_1| = \max_{\partial\Omega} |\nabla_0 u_1| < \max_{\partial\Omega} |\nabla u_2| = \max_{\Omega} |\nabla_0 u_2|. \quad (1.11)$$

Estamos ahora en condiciones de usar el método de continuidad para resolver el siguiente problema de existencia:

*Dado un número real  $H$  no nulo, encontrar un grafo  $\Sigma$  sobre un dominio plano acotado  $\Omega$  que tenga curvatura media constante  $H$  y cuya frontera sea  $\partial\Omega$ .*

O lo que es lo mismo, encontrar una función diferenciable  $u$  definida en  $\bar{\Omega}$ , solución de la ecuación (1.9) y tal que  $u = 0$  a lo largo de  $\partial\Omega$ . Para ello, usaremos el método de continuidad. Si comparamos con el problema (1.6), se deduce que los términos  $b$  y  $\varphi$  son

$$b(x, u, \nabla_0 u) = -2H(1 + |\nabla_0 u|^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \varphi = 0.$$

Siguiendo la notación del método de continuidad, la solución  $u_t$  del problema

$$Q_t u = (1 + |\nabla_0 u|^2) \Delta_0 u - \sum_{i,j=1}^2 u_i u_j u_{ij} - 2tH(1 + |\nabla_0 u|^2)^{\frac{3}{2}} = 0$$

con  $u_t = 0$  en  $\partial\Omega$ , representa un grafo sobre  $\bar{\Omega}$  cuya frontera es  $\partial\Omega$  y con curvatura media constante  $tH$ , para cada  $t \in [0, 1]$ . El método de continuidad nos asegura la existencia del grafo  $\Sigma$  si encontramos una constante positiva  $M$  tal que, para cada  $t \in [0, 1]$ , tengamos la estimación

$$\max_{\Omega} (|u_t| + |\nabla_0 u_t|) \leq M.$$

Para analizar el número  $\max_{\Omega} (|u_t| + |\nabla_0 u_t|)$  estudiamos las normas  $\max_{\Omega} |u_t|$  y  $\max_{\Omega} |\nabla_0 u_t|$ . Ahora bien, de los Lemas 1.4.3 y 1.4.4 se obtiene

$$\max_{\Omega} |u_t| \leq \max_{\Omega} |u| \leq \frac{1}{|H|},$$

y de la ecuación (1.11), concluimos el siguiente resultado:

**Proposición 1.4.8** *Dado un dominio plano acotado  $\Omega$ , para encontrar un grafo con curvatura media constante  $H$  sobre  $\Omega$  y con frontera  $\partial\Omega$  es suficiente encontrar un número positivo  $C < 1$  tal que, para cada grafo  $G$  que existiera en esas condiciones, se cumple que*

$$\max\{|\langle \nu_G(q), a \rangle|; q \in \partial\Omega\} \leq C,$$

donde  $\nu_G$  representa el conormal interior a  $G$  a lo largo de  $\Omega$  y a un vector unitario perpendicular al plano  $P$ .

En el siguiente ejemplo ilustramos el método de continuidad para encontrar grafos con curvatura media constante.

**Ejemplo 2.** *Consideramos un dominio acotado  $\Omega$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  y supongamos que existe un grafo  $G$  sobre  $\Omega$  con curvatura media constante  $H$  y frontera  $\partial\Omega$ . Entonces para cada  $0 < t \leq H$  existe un grafo  $G_t$  sobre  $\Omega$  con curvatura media constante  $t$  y frontera  $\partial\Omega$ .*

*Demostración:* Según la Proposición 1.4.8, para probar la existencia de un grafo  $G_t$  sobre  $\Omega$  con curvatura media  $t$  y frontera  $\partial\Omega$  hay que establecer una estimación a priori del número  $\max\{|\langle \nu(q), a \rangle|; q \in \partial\Omega\}$ , donde  $a$  es un vector unitario perpendicular al plano que contiene a  $\Omega$  y  $\nu$  es el conormal interior a  $G_t$  a lo largo de su frontera. Pero como  $t \leq H$ , de (1.10) y (1.11) se concluye que

$$\max\{|\langle \nu(q), a \rangle|; q \in \partial\Omega\} \leq \max\{|\langle \nu_G(q), a \rangle|; q \in \partial\Omega\} =: C < 1,$$

obteniendo pues la estimación a priori que se buscaba.

□

## Capítulo 2

# Una fórmula de equilibrio y resultados de unicidad

Todos los resultados que hemos reseñado en el Capítulo 1 anterior, tales como los teoremas de Hopf y de Alexandrov o incluso el Principio del Máximo de superficies con curvatura media constante, pueden verse como teoremas de unicidad para este tipo de superficies. Para el caso de superficies compactas con borde, el teorema de unicidad más simple, es sin duda el Teorema 1.4.5 que afirma la unicidad para los grafos con curvatura media constante, una vez fijado el valor de esa curvatura y la frontera de la superficie. No es más que un resultado de unicidad habitual cuando se resuelve un problema de Dirichlet para una ecuación lineal o, en este caso, cuasilineal.

Comenzaremos, en este Capítulo 2, obteniendo una llamada *fórmula de equilibrio* válida para superficies con curvatura media constante inmersas en  $\mathbb{R}^3$ , compactas y con borde no vacío (en el caso de borde vacío no será significativa). Aparte de su utilidad fundamental, que se pondrá de manifiesto en los capítulos posteriores, obtendremos aquí algunas consecuencias rápidas de esa fórmula, aplicándola para conseguir resultados de unicidad que generalizan los mencionados antes y que serán fundamentales en lo que sigue.

## 2.1 La fórmula de equilibrio

Hemos caracterizado en la afirmación A de la página 5 del Capítulo 1 las superficies compactas con curvatura media constante como superficies de área estacionaria para variaciones que fijan su frontera y el volumen algebraico que determinan respecto de un origen y una orientación cualesquiera prefijados.

Si  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una inmersión de ese tipo, con curvatura media constante  $H$ , la fórmula (1.1) de la primera variación del área, nos da la media del cambio del área de  $\phi$  cuando se somete a una variación cualquiera  $\phi_t$  (no necesariamente fijando la frontera ni el volumen). Se tiene

$$A'(0) = -2H \int_{\Sigma} \langle \xi, N \rangle d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} \langle \xi, \nu \rangle ds,$$

donde  $\xi$  es el correspondiente campo variacional. Supongamos que  $\phi_t = M_t \circ \phi$ , donde  $M_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un grupo uniparamétrico de movimientos rígidos del espacio euclídeo, o si se quiere, una curva integral de un campo de Killing  $X$  en  $\mathbb{R}^3$ . Como el área de una inmersión es invariante por movimientos rígidos de  $\mathbb{R}^3$ , se tiene que

$$0 = 2H \int_{\Sigma} \langle X, N \rangle d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle ds \quad (2.1)$$

para nuestra superficie con curvatura media constante. Puesto que la fórmula integral anterior representa la invariancia del área por movimientos rígidos de  $\mathbb{R}^3$  y nuestra superficie es un punto crítico para el funcional área, esa fórmula no es más que la fórmula de la conservación del momento asociado al campo  $X$  (puede consultarse el teorema de Noether en [1], sección 5.5). Veamos ahora que, en el caso del momento lineal, o sea, si  $X \equiv a$ , donde  $a \in \mathbb{R}^3$ , la integral del primer sumando se puede transformar en una integral sobre el borde  $\partial\Sigma$  (y esto no es exclusivo de las superficies con curvatura media constante). En efecto, definamos una 1-forma  $\beta$  sobre la superficie  $\Sigma$ , asociada a la inmersión  $\phi$  por

$$\beta_p(v) = \det(\phi(p), (d\phi)_p(v), a), \quad p \in \Sigma, v \in T_p\Sigma.$$

Tenemos entonces, si  $u$  también es tangente a  $\Sigma$  en  $p$ ,

$$(\nabla\beta)_p(u, v) = \det((d\phi)_p(u), (d\phi)_p(v), a) + \sigma_p(u, v) \det(\phi(p), N(p), a).$$

Quedándonos con la parte antisimétrica, se tiene

$$(d\beta)_p(u, v) = 2 \det((d\phi)_p(u), (d\phi)_p(v), a) = 2 \langle (d\phi)_p(u) \wedge (d\phi)_p(v), a \rangle.$$

Entonces, dado  $p \in \Sigma$ , si  $e_1, e_2 \in T_p\Sigma$  es una base ortonormal orientada positivamente, se tiene

$$(d\beta)_p(e_1, e_2) = \langle (d\phi)_p(e_1) \wedge (d\phi)_p(e_2), a \rangle = 2 \langle N(p), a \rangle.$$

Combinando la ley de conservación (2.1) para el campo  $X \equiv a$ , la igualdad anterior y el teorema de Stokes, se llega a la siguiente fórmula de equilibrio, que apareció por primera vez en la tesis doctoral de R. Kusner ([43]) y posteriormente en [41] y [42], y ha sido usada por numerosos autores, casi siempre cuando la superficie está embebida ([13], [14], [37], etc). Por supuesto, tal y como hemos visto, la fórmula sigue siendo cierta en el caso inmerso (ver [42], pág. 484 y [47])

**Teorema 2.1.1 (Fórmula de Equilibrio [43])** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta y orientable con borde no vacío  $\partial\Sigma$  y sea  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión con curvatura media constante  $H$ . Entonces*

$$H \int_{\partial\Sigma} \phi \wedge d\phi + \int_{\partial\Sigma} N \wedge d\phi = 0, \quad (2.2)$$

donde  $\wedge$  es el producto vectorial de  $\mathbb{R}^3$  y  $N$  es la correspondiente aplicación de Gauss.

**Observaciones:**

1. En la demostración de la fórmula de equilibrio anterior se ha visto que

$$2 \int_{\Sigma} N \, d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \phi \wedge d\phi \, ds$$

para cualquier inmersión  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie compacta orientable en  $\mathbb{R}^3$ , no necesariamente de curvatura media constante. De ahí que, si  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  son dos superficies de ese tipo con  $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2 = \Gamma$  y  $\phi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $\phi_2 : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  son dos inmersiones que coinciden en  $\Gamma$  se tiene que

$$\int_{\Sigma_1} N_1 \, d\Sigma_1 = \int_{\Sigma_2} N_2 \, d\Sigma_2.$$

Así, en nuestro caso, si  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiene curvatura media constante  $H$ , tenemos

$$2H \int_{\Omega} N_{\Omega} d\Omega - \int_{\partial\Sigma} N \wedge d\phi ds = 0, \quad (2.3)$$

donde  $\Omega$  es cualquier superficie con el mismo borde  $\partial\Sigma$  que  $\Sigma$  y  $N_{\Omega}$  es la orientación inducida en  $\Omega$  cuando se orienta el 2-ciclo  $\Sigma \cup \Omega$  compatiblemente con  $\Sigma$ . Esta relación puede interpretarse diciendo que las fuerzas de tensión superficial de  $\Sigma$  que actúan sobre su borde están en equilibrio con las fuerzas exteriores que actúan sobre la misma.

2. Hay otra forma de acceder a la Fórmula de Equilibrio del Teorema 2.1.1 anterior, distinta de la original de Kusner, también fácil y que puede quizás contribuir a entenderla mejor. Sea  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión cualquiera. Asociada a ella, definimos una 1-forma sobre  $\Sigma$  con valores vectoriales

$$\omega = (H\phi + N) \wedge d\phi.$$

Si  $p \in \Sigma$  y  $u, v \in T_p\Sigma$ , tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla\omega)_p(u, v) &= \langle \nabla H_p, u \rangle \phi(p) \wedge (d\phi)_p(v) + H(p)(d\phi)_p(u) \wedge (d\phi)_p(v) \\ &\quad - (dN)_p(u) \wedge (d\phi)_p(v) + H(p)\sigma_p(u, v)\phi(p) \wedge N(p). \end{aligned}$$

Calculando la parte antisimétrica de esta derivada se llega a que

$$(d\omega)_p(u, v) = \langle \nabla H_p, u \rangle \phi(p) \wedge (d\phi)_p(v) - \langle \nabla H_p, v \rangle \phi(p) \wedge (d\phi)_p(u),$$

y si  $e_1, e_2 \in T_p\Sigma$  es una base ortonormal orientada positivamente se tiene que

$$(d\omega)_p(e_1, e_2) = \phi(p) \wedge [(N(p) \wedge (d\phi)_p(\nabla H_p))].$$

De forma que, si  $H$  es constante, la 1-forma  $\omega$  es cerrada y el Teorema 2.1.1 se sigue por el teorema de Stokes. Por otro lado, si la Fórmula de Equilibrio

$$\int_{\gamma} (H\phi + N) \wedge d\phi = 0$$

se cumple para cada curva cerrada  $\gamma$  sobre  $\Sigma$ , el teorema de De Rham nos dice que  $d\omega = 0$  y así

$$\langle \phi(p), N(p) \rangle (d\phi)_p(\nabla H_p) - \langle \phi(p), (d\phi)_p(\nabla H_p) \rangle N(p) = 0$$

para cada  $p \in \Sigma$ . Es fácil, a partir de aquí, ver que en el abierto donde  $\nabla H$  no sea cero, la superficie es llana.

3. Sea  $\gamma$  una parametrización de  $\partial\Sigma$  por la longitud de arco tal que, si  $\alpha = \phi \circ \gamma$ ,

$$N \wedge \alpha' = \nu$$

donde  $\nu$  es el conormal de  $\phi$  a lo largo de  $\partial\Sigma$ . Entonces la Fórmula de Equilibrio (2.2) se escribe así

$$\int_{\partial\Sigma} \nu = -H \int_{\partial\Sigma} \alpha \wedge \alpha' \quad (2.4)$$

y, por tanto, para cada  $a \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\int_{\partial\Sigma} \langle \nu, a \rangle = -H \int_{\partial\Sigma} \det(\alpha, \alpha', a).$$

Ahora bien, si  $|a| = 1$ , y  $\alpha_a = \alpha - \langle \alpha, a \rangle a$  es la proyección de  $\phi(\partial\Sigma)$  sobre el plano  $P_a$  perpendicular a  $a$  que pasa por el origen, tenemos

$$\int_{\partial\Sigma} \det(\alpha, \alpha', a) = \int_{\partial\Sigma} \det(\alpha_a, \alpha'_a, a) = \int_{\partial\Sigma} \langle \alpha_a, n_a \rangle,$$

donde  $n_a = \alpha'_a \wedge a$  es un normal unitario a la curva  $\alpha_a$ . Por lo tanto,

$$\int_{\partial\Sigma} \langle \nu, a \rangle = 2H \overline{A}_a, \quad a \in \mathbb{R}^3, |a| = 1,$$

donde  $\overline{A}_a$  es el área algebraica de la proyección  $\Gamma_a$  de  $\Gamma = \phi(\partial\Sigma)$  sobre un plano perpendicular a la dirección señalada por  $a$ . Si  $\phi(\partial\Sigma) = \Gamma$  está contenida en el plano  $P_a$  y  $\overline{A}$  es el área algebraica de  $\Gamma$ , se tiene que

$$\int_{\partial\Sigma} \langle \nu, a \rangle = 2H \overline{A} \quad (2.5)$$

De esta Observación 3 precedente se deduce

**Corolario 2.1.2** Sea  $\Gamma$  una curva cerrada contenida en un plano  $P$ ,  $a \in \mathbb{R}^3$  un vector unitario perpendicular a  $P$  y  $H$  un número real.

1. Si  $\Sigma$  es una superficie compacta con curvatura media  $H$ , el número

$$\left| \int_{\partial\Sigma} \langle \nu_\Sigma(s), a \rangle ds \right|, \quad (2.6)$$

donde  $\nu_\Sigma$  representa el conormal interior a  $\Sigma$  a lo largo de  $\Gamma$ , no depende de  $\Sigma$ , sino sólo de  $\Gamma$  y  $H$ .

2. Si el área algebraica de  $\Gamma$  es no nula, entonces el rango de las posibles curvaturas medias  $H$  para una superficie compacta de curvatura media constante y con borde  $\Gamma$  es

$$|H| \leq \frac{L}{2|A|}, \quad (2.7)$$

donde  $L$  es la longitud de la curva  $\Gamma$ .

3. Si  $\Gamma$  es una circunferencia de radio  $r > 0$ , toda superficie compacta  $\Sigma$  con curvatura media  $H$  y con frontera  $\Gamma$ , tiene la propiedad de que  $0 \leq |H| \leq 1/r$  y  $|H| = 1/r$  si y sólo si  $|\langle \nu_\Sigma, a \rangle| = 1$ .

Como una consecuencia inmediata se obtiene el siguiente resultado de no existencia del tipo que aparece en [28]:

**Proposición 2.1.3** Sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  una curva plana de Jordan de longitud  $L$  y sea  $A$  el área del dominio acotado por  $\Gamma$ . Si  $H$  es un número real tal que  $|H| > L/2A$ , entonces no existe una superficie compacta en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  y frontera  $\Gamma$ . Además, si  $|H| = L/2A$ , el único disco inmerso en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  es una semiesfera de radio  $1/|H|$  y  $\Gamma$  es una circunferencia de radio  $1/|H|$ .

*Demostración:* Ya que  $\Gamma$  es una curva plana, si  $\Sigma$  es una superficie de curvatura media  $H$  y con borde  $\Gamma$ , la desigualdad (2.7) da  $|H| \leq L/2A$ .

Por otra parte, si hay igualdad, la ecuación (2.5) demuestra que el vector conormal  $\nu$  es constante y ortogonal al plano que contiene a  $\Gamma$ . Por tanto, si  $t$  es un vector tangente unitario a  $\partial\Sigma$ ,  $\sigma(t, \nu) = 0$  a lo largo de  $\partial\Sigma$ , donde  $\sigma$  es la segunda forma fundamental de la inmersión  $\phi$ . En particular, las direcciones determinadas por  $t$  y  $\nu$  son direcciones principales. Se considera la diferencial (de orden dos) de Hopf dada por  $h(z)(dz)^2$ , donde  $z = u + iv$  es un parámetro local isotermo y

$$h(z) = \langle \phi_z, N_z \rangle = -\frac{1}{4}(e - g + 2if),$$

donde  $e, f$  y  $g$  son los coeficientes de la segunda forma fundamental respecto de la base  $\{\phi_u, \phi_v\}$  (ver [35], pág. 137). Los ceros de dicha diferencial se encuentran justamente en los puntos umbilicales de la inmersión  $\phi$  ([35]). Ya que la superficie

tiene curvatura media constante, dicha 2-forma es holomorfa. Supongamos que la inmersión está definida en el disco unidad  $D = \{z = u + iv; |z| \leq 1\}$  y sean  $z = re^{i\theta}$  coordenadas polares. El hecho de que  $\sigma(t, \nu) = 0$  es equivalente a que  $\langle \phi_r(1, \theta), N_\theta(1, \theta) \rangle = 0$ , donde  $N$  es la aplicación de Gauss. En los puntos de  $\partial D = \{r = 1\}$ , tenemos

$$\phi_r = \cos \theta \phi_u + \sin \theta \phi_v \quad N_\theta = -\sin \theta N_u + \cos \theta N_v.$$

Entonces

$$0 = \frac{1}{2}(e - g) \sin(2\theta) - f \cos(2\theta).$$

Por otra lado, se considera en  $D$  la función holomorfa dada por  $\mu(z) = z^2 h(z)$ . Su parte imaginaria es justamente

$$-\frac{1}{4}(e - g) \sin(2\theta) + \frac{1}{2}f \cos(2\theta).$$

Por tanto,  $\mu(z)$  es una función holomorfa con parte imaginaria cero en el borde del disco  $D$ . Por el principio del máximo, en todo  $D$  la parte imaginaria de  $\mu$  es cero en todo  $D$  y ya que  $\mu$  es holomorfa, se concluye que  $\mu$  es una función real y constante.

Si existe algún punto  $z \in \partial D$  que es umbilical, entonces  $h(z) = 0$  y por tanto  $\mu(z) \equiv 0$  en  $D$ . En tal caso,  $h \equiv 0$  y la superficie es totalmente umbilical, es decir, es un casquete esférico, obteniéndose el resultado de la proposición, ya que la frontera es una curva plana y la superficie es ortogonal al plano de la frontera. Si ningún punto de  $\partial \Sigma$  es umbilical, vamos a llegar a una contradicción.

Representamos por  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las dos curvaturas principales en  $D$ . Correspondientes a cada una de estas curvaturas principales, tenemos dos campos de líneas (distribuciones unidimensionales) en  $D$ ,  $\mathcal{D}_i = \ker(A - \lambda_i I)$ ,  $i = 1, 2$  ( $A$  es el endomorfismo de Weingarten), los cuales tienen un número finito de singularidades en el interior de  $D$ , ya que la superficie no es totalmente umbilical y porque hemos supuesto que no hay puntos umbilicales en  $\partial D$ . Supongamos, por ejemplo, que el campo  $\mathcal{D}_1$  se corresponde a lo largo de  $\partial D$  con el vector  $\nu$ . El índice del campo  $\mathcal{D}_1$  en cada punto umbilical es no positivo (ver [35], pág. 137-139). Pero por otro lado, la suma de los índices para un campo en una superficie compacta con frontera que es transversal a lo largo de su frontera y tiene singularidades aisladas debe ser la característica de Euler de la superficie, según el teorema de Poincaré-Hopf ([32],

pág. 135). En nuestro caso, este número es uno, ya que  $D$  es un disco, llegando a una contradicción.

□

Cuando  $\Gamma$  es una circunferencia, se puede fortalecer la conclusión anterior de la manera siguiente:

**Proposición 2.1.4** *Sea  $\Gamma$  una circunferencia contenida en un plano  $P$ . Entonces las únicas superficies compactas con curvatura media constante y con frontera  $\Gamma$  que forman un ángulo constante con el plano  $P$  a lo largo de  $\Gamma$  son el disco plano acotado por  $\Gamma$  y los casquetes esféricos.*

*Demostración:* Sea una superficie  $\Sigma$  en la hipótesis de la proposición y supongamos, después de un cambio de coordenadas y una homotecia, que el plano  $P$  es el plano  $\{x_3 = 0\}$  y que la circunferencia frontera es de radio uno centrada en el origen. Se orienta la superficie por un campo normal unitario  $N$  y sea  $H$  la curvatura media de la superficie. Ya que la superficie hace un ángulo constante con el plano,  $\langle \nu(s), a \rangle = c \in \mathbb{R}$  es constante a lo largo de  $\partial\Sigma$ , donde  $\nu$  representa el conormal interior a  $\Sigma$  a lo largo de  $\partial\Sigma$  y  $a$  es un vector unitario perpendicular a  $P$ . Se elige el vector  $a$  y una orientación de  $\Gamma$  para que  $\{\phi_*(t), \nu, N\}$  y  $\{\phi, \phi_*(t), a\}$  sean bases positivamente orientadas ( $\phi_*(t)$  representa un campo tangente unitario a lo largo de  $\Gamma$ ). Entonces por la Fórmula de Equilibrio (2.5) se deduce que  $2\pi c = -2\pi H$ , luego  $\langle \nu(s), a \rangle = -H$  en  $\partial\Sigma$ . A lo largo de  $\Gamma$ ,

$$\langle N, \phi \rangle = \langle N \wedge \phi_*(t), a \rangle = \langle \nu, a \rangle$$

es una función constante, así como  $\langle N, a \rangle$ . Ya que  $N = \langle N, a \rangle a + \langle N, \phi \rangle \phi$  en  $\Gamma$ , derivando respecto de  $t$  se obtiene  $N' = \langle N, \phi \rangle \phi_*(t)$ . Por tanto,

$$\sigma(t, t) = -\langle N', \phi_*(t) \rangle = -\langle N, \phi \rangle = H.$$

$$\sigma(t, \nu) = -\langle N', \nu \rangle = 0.$$

$$\sigma(\nu, \nu) = 2H - \sigma(t, t) = H.$$

Luego todos los puntos de  $\partial\Sigma$  son umbilicales. Ya que en una superficie no umbilical con curvatura media constante los puntos umbilicales son puntos aislados ([35]), se concluye que  $\Sigma$  es totalmente umbilical.

□

En [13], Brito y Earp han probado que los casquetes esféricos son las únicas superficies con curvatura media constante  $H \neq 0$  y con frontera una circunferencia de radio  $1/|H|$ . Si se compara con la segunda parte de la Proposición 2.1.3, el resultado de Brito y Earp no presupone ninguna hipótesis sobre la topología de la superficie (como ocurre en 2.1.3), pero sí prescribe la frontera. Sin embargo en la Proposición 2.1.3, la frontera no es una circunferencia, sino, de forma más general, una curva plana de Jordan. Por otra parte, la Proposición 2.1.4 generaliza el resultado de [13], porque la hipótesis en el resultado de Brito y Earp es equivalente mediante la Fórmula de Equilibrio (2.5) a que la superficie sea perpendicular al plano que contiene a la frontera.

## 2.2 Unicidad en cilindros

En esta sección se representará por  $P$  un plano vectorial y  $a$  un vector unitario perpendicular a  $P$ . Entonces

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, a \rangle = 0\}.$$

Sea también  $\mathbb{R}_+^3$  el semiespacio cerrado superior (respecto de  $a$ ) determinado por  $P$  en  $\mathbb{R}^3$ , es decir,  $\mathbb{R}_+^3 = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, a \rangle \geq 0\}$ . Es conocido, gracias al Teorema 1.4.5, que dado un dominio acotado  $\Omega$  del plano  $P$  y un número real  $H$ , existe a lo más un grafo sobre  $\Omega$  con curvatura media constante  $H$  y con borde  $\partial\Omega$ . Este resultado de unicidad de grafos se puede extender a superficies embebidas y contenidas en el cilindro  $C = \Omega \times \mathbb{R}a$ . Concretamente, una superficie embebida compacta de curvatura media constante, con borde  $\Gamma$  y contenida en  $C$ , está incluida en uno de los dos semiespacios que determina  $P$ , pues la superficie no interseca  $P - \bar{\Omega}$  ([38]) (una demostración de este hecho se hará en el Lema 3.2.3). Supongamos, sin perder generalidad, que  $\Sigma \subset \mathbb{R}_+^3$ . Vamos a usar el método de reflexión de Alexandrov como en el Teorema 1.3.1 pero en este caso, respecto de planos horizontales  $P_t = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, a \rangle = t\}$  y por encima de  $\Sigma$ . Se considera  $W$  el dominio interior determinado por

$$\Sigma \cup (\partial\Omega \times [m, 0]a) \cup (\Omega \times \{m\}a)$$

donde  $-m > 0$  es suficientemente grande para que la reflexión de la superficie  $\Sigma$  respecto del plano  $P$  esté por encima del plano  $P_m$ . Después del primer punto de

intersección, vamos reflejando la parte de superficie por encima de  $P_t$  respecto de dicho plano hasta el primer punto de intersección con la parte de superficie  $\Sigma$  por debajo de  $P_t$ . Si este punto es un punto de tangencia, el método de Alexandrov nos diría que habría un plano de simetría de  $\Sigma$  por encima de  $P$ , lo cual es falso. Por consiguiente, en el proceso de ir reflejando la superficie  $\Sigma$  respecto de  $P_t$ , concluimos que podemos llegar hasta  $P_0 = P$ . Por tanto, la superficie es un grafo sobre el dominio  $\Omega$ . Podemos decir entonces que

*Dos superficies embebidas de la misma curvatura media constante, con la misma frontera plana y ambas contenidas en el cilindro sólido determinado por la frontera, son iguales (salvo reflexión).*

Aparte del estudio de las superficies con curvatura media constante  $H$  que alcanzan los extremos permitidos para  $H$  que hemos hecho en la sección anterior, la primera consecuencia importante de la Fórmula de Equilibrio (2.2) es la generalización de los resultados de unicidad anteriores a las superficies *inmersas*, o sea, con posibles autointersecciones.

**Teorema 2.2.1 (Unicidad en cilindros [48])** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado del plano  $P$  y supongamos que existe un grafo sobre  $\Omega$  con curvatura media constante  $H$  y borde  $\Gamma = \partial\Omega$ . Entonces, salvo reflexión respecto del plano  $P$ , la única superficie compacta inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$ , contenida en  $C = \Omega \times \mathbb{R}a$  y con frontera  $\Gamma$ , es dicho grafo.*

Los ingredientes para la demostración del teorema son el Principio de Comparación y del Máximo para superficies con curvatura media constante y la Fórmula de Equilibrio.

*Demostración:* Sea un grafo  $G$  sobre  $\Omega$  con curvatura media constante  $H$  y  $\Sigma$  una superficie compacta con curvatura media constante  $H$  contenida en  $C$ , ambas superficies con la misma frontera  $\Gamma$ . Supongamos que  $H$  es positivo y que  $G$  se encuentra por encima de  $P$ , es decir, la orientación en  $G$  es aquella en la que el normal unitario  $N_G$  apunta hacia abajo. La orientación en  $\Sigma$  viene dada por una aplicación de Gauss a la que se denotará por  $N_\Sigma$ .

Probemos primero que  $G$  se encuentra siempre por encima de  $\Sigma$ , a no ser que  $\Sigma$  sea  $G$ , es decir, si  $p \in G$  y  $q \in \Sigma$  son dos puntos (no frontera) que se proyectan sobre el mismo punto de  $P$ , entonces  $\langle p, a \rangle > \langle q, a \rangle$ . Si, por el contrario,  $\Sigma$  posee puntos por encima de  $G$ , se desplaza  $G$  hacia arriba hasta que no interseque a  $\Sigma$ . Esto es posible puesto que  $\Sigma$  es un conjunto compacto. A continuación se desplaza hacia abajo hasta que toque por primera vez a  $\Sigma$  en un punto  $p$ . Como parte de  $\Sigma$  estaba por encima de  $G$ , este punto  $p$  no es un punto frontera y por tanto, es un punto de tangencia. Los normales a  $G$  y a  $\Sigma$  en  $p$ ,  $N_G(p)$  y  $N_\Sigma(p)$ , son vectores proporcionales. Si coinciden, el Principio del Máximo asegura que  $\Sigma$  y  $G$  coinciden en un entorno de  $p$ , y por analiticidad,  $\Sigma = G$ . Si estos vectores son opuestos, se cambia la orientación en  $\Sigma$  y así la curvatura media de  $\Sigma$  cambia de signo. Sin embargo, la superficie  $\Sigma$  se encuentra por encima de  $G$  y la curvatura media de  $\Sigma$  es  $-H < 0$ , menor que la curvatura media de  $G$ , que es  $H > 0$ . Esto es imposible por el Principio de Comparación.

Por tanto, si  $\Sigma$  no es un grafo,  $G$  se encuentra estrictamente por encima de  $\Sigma$ . Con un razonamiento análogo, si  $G^*$  es la reflexión de  $G$  respecto de  $P$ , se puede probar, de la misma forma, que  $\Sigma$  se encuentra estrictamente por encima de  $G^*$ . Como consecuencia, si  $\Sigma$  no es un grafo, esta superficie se encuentra contenida en el dominio de  $\mathbb{R}^3$  determinado por  $G \cup G^*$  (ver la Figura 2.1).

Sean  $\nu_G, \nu_\Sigma$  los vectores conormales interiores a  $G$  y  $\Sigma$  respectivamente. La Fórmula de Equilibrio (2.4) aplicada a las superficies  $G$  y  $\Sigma$  nos da

$$2H \text{ area}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \langle \nu_G, a \rangle.$$

$$2H \text{ area}(\Omega) = \left| \int_{\partial\Omega} \langle \nu_\Sigma, a \rangle \right|.$$

Pero a lo largo de  $\Gamma$  se tiene la desigualdad

$$|\langle \nu_\Sigma, a \rangle| \leq \langle \nu_G, a \rangle.$$

Si se diera la igualdad en un punto, usando el Principio del Máximo en el borde para  $\Sigma$  y  $G$  o para  $\Sigma$  y  $G^*$ , se llegaría a una contradicción. Entonces tenemos la desigualdad estricta en la desigualdad anterior, llegando así a otra contradicción.

□

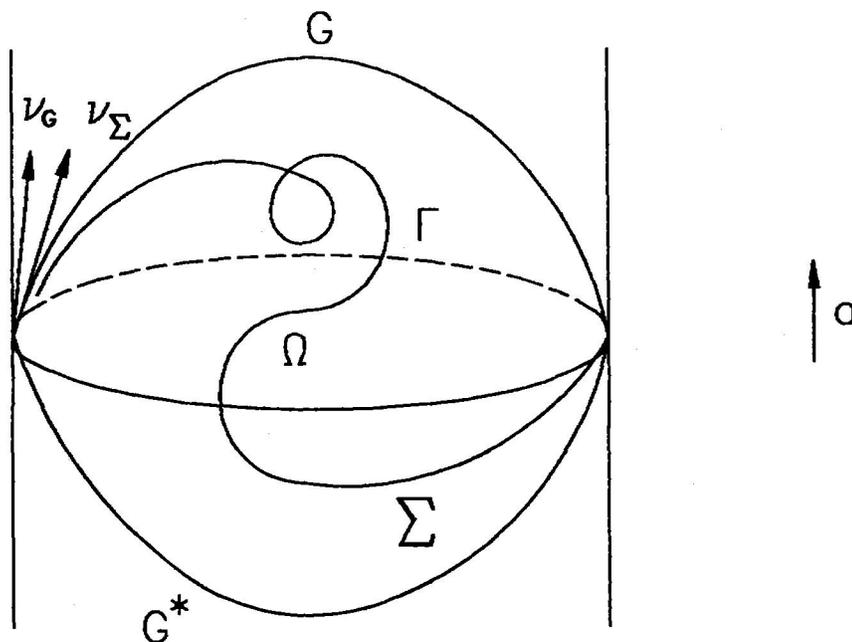


Figura 2.1:

Gracias al Teorema 2.2.1 se sospecha pues lo siguiente: si  $\Sigma$  es una superficie de curvatura media constante  $H$ , con frontera  $\partial\Omega$  y contenida en  $\Omega \times \mathbb{R}a$ , cabe esperar que sea un grafo, como ocurriría si estuviera embebida. Para demostrarlo usando el Teorema 2.2.1, sería necesario que hubiera un grafo con la misma frontera y la misma curvatura media. El problema de existencia de grafos con curvatura media constante con frontera plana es, en general, difícil de resolver. Dado un dominio plano y acotado  $\Omega$ , el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta_0 v &= 0 \\ v &= 0 \text{ en } \partial\Omega \end{aligned}$$

tiene la solución trivial  $v = 0$  en  $\Omega$ . El grafo de  $v$  es una superficie minimal con frontera  $\partial\Omega$  y se corresponde con la solución de la ecuación (1.9) para  $H = 0$ . El teorema de la función implícita en espacios de Banach aplicado a la ecuación de curvatura media (1.9) asegura que existe un número positivo  $H_0$ , que depende sólo de  $\Omega$ , tal que para cada  $H \in [-H_0, H_0]$ , existe un grafo sobre  $\Omega$  con curvatura media constante  $H$  y frontera  $\partial\Omega$  ([23], pág. 447). Del Teorema 2.2.1 se concluye, por tanto, el siguiente resultado de unicidad:

**Corolario 2.2.2** *Dado un dominio plano acotado  $\Omega$ , existe  $H_0 = H_0(\Omega) > 0$  tal que si  $|H| \leq H_0$ , existe una única superficie compacta con curvatura media constante  $H$  contenida en  $\Omega \times \mathbb{R}a$  y con borde  $\partial\Omega$ . Además esta superficie es un grafo sobre el dominio  $\Omega$ .*

Si la curva  $\Gamma$  es una curva estrictamente convexa, se puede estimar el valor  $H_0$  gracias a un teorema sobre existencia de grafos con curvatura media constante de Serrin ([62]):

**Corolario 2.2.3** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado del plano  $P$  y sea  $k$  la función curvatura de  $\partial\Omega$  respecto del normal interior. Si  $H$  es un número real tal que  $k \geq 2|H| > 0$ , entonces la única superficie inmersa con curvatura media  $H$  incluida en  $\Omega \times \mathbb{R}a$  y frontera  $\partial\Omega$ , es un grafo sobre  $\Omega$  (nótese que a posteriori  $\partial\Omega$  es estrictamente convexa.)*

*Demostración:* El resultado de Serrin asegura, bajo las hipótesis del corolario, la existencia de un grafo con curvatura media  $H$  con frontera  $\partial\Omega$ . Entonces se aplica el Corolario 2.2.2.

□

**Nota.** Daremos un nuevo resultado de existencia de grafos de curvatura media constante y con frontera plana prescrita en el Capítulo 3. De él se puede extraer una consecuencia análoga a la del corolario anterior.

Para finalizar esta sección, usaremos la Fórmula de Equilibrio para dar una condición suficiente para que una superficie embebida con curvatura media constante y con borde plano sea un grafo. De hecho, el siguiente resultado es conocido (por ejemplo en [58]).

**Teorema 2.2.4** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado en el plano  $P$  y sea  $\Sigma$  una superficie embebida con curvatura media constante cuyo borde es  $\Gamma = \partial\Omega$  y contenida en  $\mathbb{R}_+^3$ . Si  $\Sigma$  es localmente un grafo sobre  $\Omega$  en un entorno de  $\Gamma$ , entonces  $\Sigma$  es un grafo.*

Este teorema es un caso particular del resultado probado en la página 38 sobre superficies embebidas contenidas en un cilindro. A continuación se establece un resultado más general cambiando la hipótesis " $\Sigma \subset \mathbb{R}_+^3$ " por " $\Sigma \cap \Omega = \emptyset$ " (comparar también con [38]).

**Teorema 2.2.5** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado del plano  $P$  y sea  $\Sigma$  una superficie embebida de curvatura media constante, cuyo borde es  $\Gamma = \partial\Omega$  y tal que  $\Sigma \cap \Omega = \emptyset$ . Si  $\Sigma$  es localmente un grafo sobre  $\Omega$  en un entorno de  $\Gamma$ , entonces  $\Sigma$  es un grafo.*

*Demostración:* Se puede suponer, sin perder generalidad, que  $\Sigma$  se encuentra contenida en  $\mathbb{R}_+^3$  cerca de  $\Gamma$ . Se define la superficie  $T = \Sigma \cup \Omega$  y sea  $W \subset \mathbb{R}^3$  el dominio que acota en  $\mathbb{R}^3$ . Se orienta  $T$  mediante un campo normal unitario para que la orientación inducida en  $\Sigma$  haga que la curvatura media  $H$  de  $\Sigma$  sea positiva. Luego si  $N$  es la aplicación de Gauss de  $\Sigma$ , entonces  $N$  apunta hacia  $W$ .

Se prueba que  $\langle N, a \rangle < 0$  en  $\Gamma$ : si  $\nu$  es el conormal interior de  $\Sigma$  a lo largo de  $\Gamma$ , la Fórmula de Equilibrio en la forma (2.3) da

$$2H \int_{\Omega} \langle N_{\Omega}, a \rangle d\Omega = \int_{\partial\Sigma} \langle \nu, a \rangle ds.$$

Ya que  $\langle \nu, a \rangle > 0$ , entonces  $N_{\Omega} = a$ . Como  $\Sigma$  es un grafo cerca de la frontera, entonces  $\langle N, a \rangle < 0$  (ver Figura 2.2).

Obsérvese que  $\Sigma$  no es tangente a  $\Omega$  en ningún punto de  $\Gamma$ , ya que  $\Sigma$  es un grafo sobre  $\Omega$  en un entorno de  $\Gamma$  y  $N_{\Sigma}$  apunta hacia  $W$ : si existiera dicho punto  $p$ , entonces  $N_{\Sigma}(p) = -a$  y el Principio de Comparación aplicado a  $\Sigma$  y  $\Omega$  asegura que esto es imposible, pues  $\Omega$  es una superficie minimal. Como consecuencia, el dominio  $W$ , cerca de  $\Omega$ , está por encima de  $\Omega$ , es decir, existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$W \cap (\Omega \times (-\epsilon, \epsilon)a) = W \cap (\Omega \times (0, \epsilon)a).$$

La demostración del teorema se hace por reducción al absurdo: supongamos que  $\Sigma$  no es un grafo. La superficie  $\Sigma$  se usará como superficie barrera para encontrar un grafo con curvatura media constante  $H$  sobre  $\Omega$ , con frontera  $\Gamma$ , siendo  $H$  el mismo valor de curvatura media que  $\Sigma$ . Para ello se aplicará el método de continuidad de ecuaciones descrito en la sección 1.4. Es suficiente pues, con establecer estimaciones

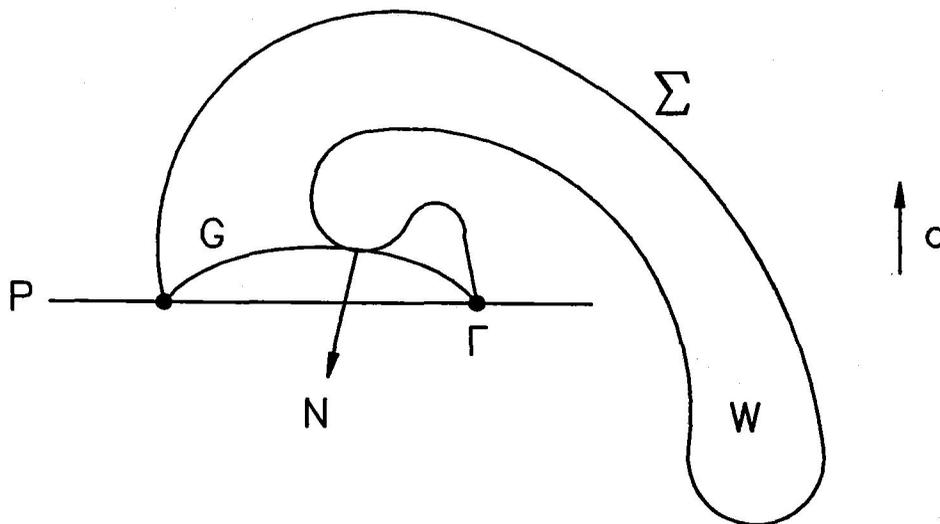


Figura 2.2: Teorema 2.2.5: a lo largo de  $\Gamma$ ,  $\langle N, a \rangle$  es negativo.

*a priori* de la pendiente de un grafo  $G$  con frontera  $\Gamma$  y curvatura media constante  $H$ , es decir, hallar una cota *a priori*  $C < 1$  del número

$$\max_{q \in \Gamma} |\langle \nu_G(q), a \rangle|,$$

donde  $\nu_G$  es el conormal interior de  $G$  a lo largo de  $\Gamma$  (ver Proposición 1.4.8).

El método de continuidad asegura la existencia, para cada  $0 \leq t \leq H$ , de grafos  $G_t$  sobre  $\Omega$  con curvatura media constante  $t$  y con frontera  $\Gamma$  (ver Ejemplo 2 del Capítulo 1). Si  $N_{G_t}$  representa la aplicación de Gauss correspondiente a  $G_t$ , entonces  $\langle N_{G_t}, a \rangle < 0$ .

La idea es probar que  $G$  está por debajo de  $\Sigma$  (respecto del vector  $a$ ) y por tanto, la pendiente del grafo  $G$  a lo largo de  $\Gamma$  estaría acotada por la pendiente de  $\Sigma$  en  $\Gamma$ , es decir, si  $\nu_\Sigma$  es el conormal interior de  $\Sigma$  a lo largo de  $\Gamma$ ,

$$\max_{\Gamma} \langle \nu_G, a \rangle < \max_{\Gamma} \langle \nu_\Sigma, a \rangle =: C \tag{2.8}$$

(este número  $C$  es menor estricto que 1 ya que  $\Sigma$  es localmente un grafo en un entorno de  $\Gamma$ ). Para  $t$  pequeño  $G_t \subset W$ , ya que la superficie  $\Sigma$  no es tangente a  $\Omega$  en ningún punto frontera. Para cada  $t \in (0, H]$ , se representa por  $W_t$  el dominio

interior determinado por  $G_t \cup \Omega$ . Si  $G \not\subset W$ , entonces existe un primer momento  $t_0 \in (0, H]$  tal que  $W_{t_0} \subset W$  y  $G_{t_0}$  tiene un punto de tangencia con  $\Sigma$ . En dicho punto los normales interiores de  $\Sigma$  y  $G_{t_0}$  respecto de su curvatura media (positiva) coinciden, pues los dos apuntan hacia  $W$ . Ahora bien, el Principio de Comparación y del Máximo da  $t_0 = H$  y  $\Sigma = G_{t_0}$ , pero se supuso que  $\Sigma$  no era un grafo. Por tanto, se tiene la estimación *a priori* establecida en (2.8) (ver Figura 2.2).

Se llega ahora a la contradicción de la siguiente manera. Ya que  $\Sigma$  se encuentra por encima de  $G$ , a lo largo de  $\Gamma$ , se tiene la desigualdad siguiente

$$0 < \langle \nu_G, a \rangle < \langle \nu_\Sigma, a \rangle \quad \text{en } \Gamma. \quad (2.9)$$

Entonces de (2.5) y (2.6) y representando por  $\bar{A} \neq 0$  el área algebraica de  $\partial\Omega$ , se concluye que

$$2|H||\bar{A}| = \int_\Gamma \langle \nu_G, a \rangle ds < \int_\Gamma \langle \nu_\Sigma, a \rangle ds = 2|H||\bar{A}|,$$

llegando a una contradicción.

□

De los teoremas anteriores surge la siguiente cuestión:

**Problema A.** *Sea  $\Gamma$  una curva de Jordan contenida en un plano  $P$  y  $\Omega$  el dominio acotado que determina en  $P$ . Entonces ¿toda superficie embebida de curvatura media constante con frontera  $\Gamma$  que sea localmente un grafo sobre  $\Omega$  alrededor de  $\Gamma$ , es un grafo?*

## 2.3 Superficies $H$ -pequeñas

Cuando mencionamos en el Capítulo 1 las superficies con curvatura media constante cuya frontera es una circunferencia vimos que existen casquetes esféricos grandes y pequeños. De hecho, siguiendo toda una línea de investigación (iniciada por Heinz y Hildebrandt) Struwe y Brézis y Coron han probado que dada una curva de Jordan  $\Gamma$  en  $\mathbb{R}^3$  y un número real  $H > 0$  *pequeño* en cierto sentido, existen al menos dos superficies con curvatura media constante  $H$  y frontera  $\Gamma$ . Una de ellas es fuertemente estable y pequeña, en el sentido de que está contenida en una bola de radio  $1/H$ . En general, se suele hacer la siguiente definición (ver [58]):

**Definición 2.3.1** Una superficie compacta inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H \neq 0$  se llama  $H$ -pequeña si está contenida en alguna bola euclídea de radio menor que  $1/|H|$ .

Si  $p \in \mathbb{R}^3$  y  $r > 0$ , usaremos la siguiente notación para las bolas y esferas euclídeas de centro  $p$  y radio  $r > 0$ .

$$B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^3; |x - p| < r\}.$$

$$S(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^3; |x - p| = r\}.$$

Barbosa ([5]) ha caracterizado los casquetes esféricos como las únicas superficies  $H$ -pequeñas con frontera una circunferencia: obsérvese que sólo el casquete pequeño es  $H$ -pequeño. También Ros y Rosenberg ([58]) han probado que dada una curva convexa plana  $\Gamma \subset P = \{x_3 = 0\}$ , si  $H$  es suficientemente pequeño (dependiendo sólo de  $\Gamma$ ), toda superficie embebida  $H$ -pequeña con frontera  $\Gamma$  y contenida en uno de los semiespacios determinados por  $P$  es un grafo. Generalizamos este último resultado, usando los teoremas de unicidad en cilindros de la sección anterior, para el caso inmerso y sin la hipótesis de estar la superficie a un lado de  $P$ .

**Nota:** Para simplificar las demostraciones, se supondrá a lo largo de esta sección que las superficies no son casquetes esféricos ni las fronteras son circunferencias. Ya hemos comentado que si la frontera es una circunferencia, las superficies  $H$ -pequeñas ya están caracterizadas en [5].

Antes de probar el principal resultado de esta sección, demostraremos un lema previo, que se da por supuesto en la literatura, pero cuya demostración no suele estar escrita.

**Lema 2.3.2** Sea una curva de Jordan plana  $\Gamma$ . Si  $\Sigma$  es una superficie  $H$ -pequeña con frontera  $\Gamma$ , entonces

$$\Sigma \subset \bigcap \{B(q, s); s \leq 1/|H|, \Gamma \subset B(q, s)\}.$$

*Demostración:* Se puede suponer sin restricción, que el plano que contiene a  $\Gamma$  es el plano vectorial  $P = \{x_3 = 0\}$ . Ya que la superficie es  $H$ -pequeña, existe una bola euclídea  $B(p, r)$  ( $r \leq 1/|H|$ ) tal que  $\Sigma \subset B(p, r)$ . La demostración se realiza en varios pasos.

1. Se mueve verticalmente  $B(p, r)$  hasta situar  $p$  en el plano  $P$ . Para ello, si por ejemplo, la semiesfera superior de  $S(p, r)$  no está incluida en  $\{x_3 \geq 0\}$ , entonces se mueve  $B(p, r)$  hacia arriba hasta llegar a la posición requerida. Si en algún momento,  $S(p, r)$  toca a  $\Sigma$  en algún punto, entonces este punto es un punto de tangencia interior. Pero la curvatura media de  $S(p, r)$  es  $1/r$ , mayor que  $|H|$ , en contradicción con el Principio de Comparación y del Máximo.
2. Sea una bola  $B(q, s)$  tal que  $\Gamma \subset B(q, s)$ ,  $s \leq 1/|H|$  y supongamos, por reducción al absurdo, que  $\Sigma \not\subset B(q, s)$ . Usando el Principio de Comparación y del Máximo y un argumento similar al del paso previo, se puede suponer que  $q \in P$ . Ahora se prueba que puede considerarse  $s = r$  y  $\Sigma \not\subset B(q, r)$ . Para ello, si  $s < r$ , es suficiente con incrementar el radio de  $B(q, s)$ : si existiera  $t \in (s, r]$  tal que  $\Sigma \subset B(q, t)$ , entonces se reduce el radio de  $S(q, t)$  hasta que toque a  $\Sigma$  en el primer momento en un punto interior. Pero la curvatura de  $S(q, t)$  es  $1/t \geq 1/r \geq |H|$ , en contradicción con el Principio de Comparación.  
Si  $s \geq r$ , basta con reducir el radio de  $B(q, s)$ .
3. Se ha conseguido pues que  $p, q \in P$ ,  $\Sigma \subset B(p, r)$  y  $\Sigma \not\subset B(q, r)$ . Se mueve  $B(p, r)$  hacia  $B(q, r)$  hasta que  $p$  coincida con  $q$ . En este movimiento, ya que  $\Gamma$  se encuentra en el dominio determinado por  $S(p, r) \cap S(q, r) \cap P$  y usando el Principio de Comparación, se concluye que  $\Sigma \subset B(q, r)$ , dando una contradicción.

□

**Teorema 2.3.3** *Sea  $\Gamma$  una curva plana cerrada y convexa. Entonces existe  $H(\Gamma) > 0$  dependiendo sólo de  $\Gamma$ , tal que cualquier superficie  $H$ -pequeña con frontera  $\Gamma$  y  $|H| \leq H(\Gamma)$  es un grafo.*

*Demostración:* Supongamos que  $\Gamma$  está contenida en un plano vectorial  $P$ . Sea  $k > 0$  la función curvatura de  $\Gamma$  y  $k_0 > 0$  el mínimo de  $k$ . Si  $s = 1/k_0$ , existe  $q \in P$  tal que  $\Gamma \subset B(q, s) \cap P$ . Sea  $H_1(\Gamma) = k_0$ . Ahora, si  $\Sigma$  es una superficie  $H$ -pequeña con frontera  $\Gamma$  y  $|H| \leq H_1(\Gamma)$ , entonces

$$\Gamma \subset B(q, s) \cap P \subset B\left(q, \frac{1}{|H|}\right) \cap P$$

y, del lema anterior,  $\Sigma \subset B(q, 1/|H|)$ .

Se mueve  $S(q, 1/|H|)$  en todas las direcciones paralelas a  $P$  hasta que interseque a  $\Sigma$ . Por el Principio del Máximo, no es posible que haya un punto de tangencia entre  $\Sigma$  y  $S(q, 1/|H|)$ . Entonces se puede llevar  $S(q, 1/|H|)$  hasta que toque a  $\Gamma$ . Ya que el radio de de la circunferencia  $S(q, 1/|H|) \cap P$  es  $1/|H|$  y mayor que  $k_0$ , es posible mover  $S(q, 1/|H|)$  en direcciones paralelas a  $P$  para que toque en *cada punto* de  $\Gamma$ . Como el centro de  $S(q, 1/|H|)$  se encuentra en el plano  $P$ ,  $\Sigma$  está incluida en el cilindro perpendicular a  $P$  determinado por el dominio  $\Omega$  que acota  $\Gamma$  en  $P$ . Si  $a$  es un vector perpendicular a  $P$ , se tiene exactamente

$$\Sigma \subset \overline{\Omega} \times \mathbb{R}a \quad \Sigma \cap (\Gamma \times \mathbb{R}a) = \Gamma.$$

La demostración finaliza usando el Corolario 2.2.2 y tomando el valor  $H(\Gamma) = \min\{H_0(\Gamma), H_1(\Gamma)\}$ .

□

Volviendo al contexto de la teoría de existencia de superficies con curvatura media constante, el resultado clásico es debido a S. Hildebrandt ([29]) (para mayores referencias puede consultarse [71]). Hildebrandt probó, cuando se prescribe el borde, que si  $\Gamma$  es una curva de Jordan contenida en  $B(0, R)$  y si  $H$  es un número real tal que  $|H|R < 1$ , entonces existe una inmersión  $\phi$  del disco unidad  $D \subset \mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ , con frontera  $\Gamma$  y de curvatura media constante  $H$ . Además  $|\phi| \leq R$ . Las superficies que aparecen así son mínimos del funcional  $J_H$  definido en la página 5 en una cierta familia de inmersiones de  $D$  en  $\mathbb{R}^3$ . Ya que  $|\phi| < 1/|H|$ , estas superficies son  $H$ -pequeñas. Del Teorema 2.3.3 se obtiene una caracterización de las soluciones de Hildebrandt para el caso en que la curva frontera sea una curva plana y convexa:

*Dada una curva de Jordan plana y convexa  $\Gamma$ , para  $H$  pequeño, dependiendo solamente de  $\Gamma$ , las soluciones de Hildebrandt en [29] con frontera  $\Gamma$  son grafos.*



## Capítulo 3

# Una fórmula de crecimiento del área y sus aplicaciones

En el Capítulo 2 anterior, generalizamos los resultados de unicidad que se conocían para grafos de curvatura media constante, y que se extendían a las superficies de ese tipo embebidas usando el método de Alexandrov, al caso de las superficies inmersas con borde plano que están dentro del cilindro recto determinado por ese borde. También dimos en ese capítulo algunas aplicaciones de esos resultados de unicidad. La herramienta allí, junto con el Principio de Comparación y el método de Alexandrov, que se expusieron en el Capítulo 1, fue fundamentalmente la Fórmula de Equilibrio de Kusner.

En este Capítulo 3 de la Memoria, comenzaremos deduciendo una fórmula, que podríamos llamar de crecimiento del área, válida para una superficie compacta de curvatura media constante cuyo borde es una curva plana. Esta fórmula estima inferiormente el área de una superficie de ese tipo en términos de la altura máxima de la superficie sobre el plano del borde. Este tipo de expresiones que controlan inferiormente áreas o energías de aplicaciones en términos de distancias (usualmente a un punto y no a un plano como aquí) suelen aparecer en distintos contextos (aplicaciones armónicas, ecuaciones cuasilineales, etc.) y se denominan *fórmulas de monotonía*. En ese sentido, la nuestra será una fórmula de monotonía del área para superficies de curvatura media constante con borde plano, que se puede contrastar con las clásicas de esta teoría, por ejemplo, en [41], [42].

De forma alternativa, podemos pensar que la fórmula de crecimiento del área que estableceremos en este Capítulo 3 es una estimación superior de la altura que alcanza nuestra superficie sobre el plano del borde en términos de su área. Estimaciones *a priori* de la altura no son nada infrecuentes en la teoría que estudiamos. Ya hablamos en el Lema 1.4.3 y en su Nota posterior de la clásica de Serrin para grafos y de cómo se pasa al contexto de las superficies embebidas usando el método de Alexandrov. Para superficies inmersas no se podía esperar una cota superior de la altura absoluta, puesto que los ejemplos de Kapouleas ([37]) tienen, para frontera y valor de  $H$  fijos, alturas arbitrariamente grandes.

Esta fórmula de crecimiento del área o de estimación de la altura será usada a lo largo del Capítulo 3 para establecer resultados inéditos referentes a las soluciones del problema isoperimétrico planteado en el Capítulo 1 para dominios planos convexos; superficies embebidas de curvatura media constante con borde convexo y área pequeña; superficies inmersas que encierran un volumen pequeño; y también para dar un teorema de existencia de grafos que, en algún sentido nada trivial, mejora al clásico de Serrin ([62]). La mayor parte de los resultados de este Capítulo están anunciados en [45] y se pueden ver en [48].

### 3.1 La fórmula de crecimiento del área

Una de las formas posibles de ver la Fórmula de Equilibrio de Kusner, que estudiamos en el capítulo anterior, es la siguiente: si  $\Sigma$  es una superficie compacta orientable con borde  $\partial\Sigma$  y  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una inmersión de curvatura media constante  $H$  tal que  $\phi(\partial\Sigma) = \Gamma$  es plana y  $\phi(\Sigma)$  está por encima del plano del borde, el flujo a través de  $\partial\Sigma$  del vector conormal  $\nu$  de la inmersión es, en la dirección normal al plano del borde,  $2H\bar{A}$ , donde  $\bar{A}$  es el área algebraica del dominio acotado por  $\Gamma$ . Usaremos esto, junto con la fórmula de la coárea, para obtener el resultado central de este capítulo.

**Teorema 3.1.1 ([48])** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta con curvatura media constante  $H$  inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con frontera incluida en un plano  $P$ . Si  $h$  representa la*

altura de  $\Sigma$  respecto de  $P$ , se obtiene que

$$h \leq \frac{A^+ |H|}{2\pi} \quad (3.1)$$

donde  $A^+$  es el área de la región de  $\Sigma$  que está por encima del plano  $P$ . La igualdad es cierta si y sólo si  $\Sigma$  es un casquete esférico.

*Demostración:* Sea  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  la inmersión. El caso minimal  $H = 0$  está claro, ya que, en este caso,  $\phi(\Sigma)$  está contenida en la envolvente convexa de  $\phi(\partial\Sigma) \subset P$  y por tanto  $\phi(\Sigma) \subset P$  y  $h = 0$ . Supongamos ahora  $H \neq 0$  y oriéntese  $\Sigma$  mediante un campo normal unitario  $N$  para que la curvatura media sea positiva. Después de un cambio de coordenadas, se puede suponer que

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, a \rangle = 0\} \quad a \in \mathbb{R}^3, |a| = 1$$

Se considera la función diferenciable  $f = \langle \phi, a \rangle : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ . Claramente se tiene que  $f|_{\partial\Sigma} = 0$ . Por otra parte, si  $p \in \Sigma$  y  $v \in T_p\Sigma$

$$\langle (\nabla f)_p, v \rangle = \langle (d\phi)_p(v), a \rangle \quad (3.2)$$

y así,  $p \in \Sigma$  es un punto crítico de  $f$  si y sólo si el vector  $a$  es perpendicular a  $\phi$  en  $p$ , esto es, si y sólo si  $N(p) = \pm a$ . Entonces el conjunto  $C$  de puntos críticos de  $f$  está contenido en

$$\{p \in \Sigma; \langle N(p), b \rangle = 0\} \cap \{p \in \Sigma; \langle N(p), c \rangle = 0\},$$

donde  $a, b, c$  son vectores que forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto, el conjunto  $C$  está contenido en una intersección de líneas nodales del operador de Schrödinger  $\Delta + |\sigma|^2$ , siendo  $\sigma$  la segunda forma fundamental de la inmersión  $\phi$ . Como, según [18], cada línea nodal de  $\Delta + |\sigma|^2$  es la imagen por una inmersión de una circunferencia o de un segmento de  $\mathbb{R}$ ,  $C$  ha de tener medida cero en  $\Sigma$ . En esta situación, la fórmula de la coárea ([21]) da

$$A'(t) = - \int_{\Gamma(t)} \frac{1}{|\nabla f|} ds_t. \quad t \in \mathbb{R},$$

donde  $A(t)$  es el área de

$$\Omega(t) = \{p \in \Sigma; f(p) \geq t\}.$$

Si se representa por  $L(t)$  la longitud de la curva

$$\Gamma(t) = \{p \in \Sigma; f(p) = t\},$$

la desigualdad de Schwarz da

$$L(t)^2 \leq \int_{\Gamma(t)} |\nabla f| ds_t \int_{\Gamma(t)} \frac{1}{|\nabla f|} ds_t = -A'(t) \int_{\Gamma(t)} |\nabla f| ds_t. \quad (3.3)$$

Pero de (3.2) se deduce que a lo largo de la curva  $\Gamma(t)$

$$|\nabla f|^2 = 1 - \langle N, a \rangle^2 = \langle \nu^t, a \rangle^2$$

donde  $\nu^t : \Gamma(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es el conormal interior de  $\Omega(t)$ . Ya que  $\Omega(t)$  está por encima del plano  $P(t) = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, a \rangle = t\}$ , se sabe que  $\langle \nu^t, a \rangle \geq 0$ . De aquí que

$$|\nabla f|_{|\Gamma(t)} = \langle \nu^t, a \rangle.$$

Entonces (3.3) puede ser escrito como sigue

$$L(t)^2 \leq -A'(t) \int_{\Gamma(t)} \langle \nu^t, a \rangle ds_t \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Se sabe que  $\Omega(t)$  es una superficie compacta con frontera  $\Gamma(t)$  para casi todo  $t \in \mathbb{R}$ . Nótese que, si  $t < 0$ , entonces  $\partial\Sigma \subset \Omega(t)$  y así,  $\phi(\Gamma(t))$  tiene una componente que se encuentra en el plano  $P$  y posiblemente otras en  $P(t)$ . Pero si  $t \geq 0$ , entonces  $\phi(\Gamma(t)) \subset P(t)$  y, en este caso, se puede usar la fórmula de equilibrio (2.5) y obtener

$$\int_{\Gamma(t)} \langle \nu^t, a \rangle ds_t = 2H |\bar{A}(t)|,$$

donde  $\bar{A}(t)$  es el área algebraica del dominio determinado por la curva cerrada  $\phi(\Gamma(t))$ . Sustituyendo en (3.4), se obtiene

$$L(t)^2 \leq -2H A'(t) |\bar{A}(t)| \quad \text{para casi todo } t \geq 0. \quad (3.5)$$

Representemos por  $\Omega_1(t), \dots, \Omega_{n_t}(t)$  los dominios acotados que determinan en el plano  $P(t)$  la curva cerrada  $\phi(\Gamma(t))$  y por  $A_i(t)$ , con  $i = 1, \dots, n_t$  el área de Lebesgue de los correspondientes dominios  $\Omega_i(t)$ . Entonces

$$\bar{A}(t) = \epsilon_1 A_1(t) + \dots + \epsilon_{n_t} A_{n_t}(t),$$

donde  $\epsilon_i \in \mathbb{Z}$  son los órdenes de las correspondientes las curvas  $\partial\Omega_i(t)$  respecto de un punto interior y de una orientación fija. Por tanto

$$|\bar{A}(t)| \leq |\epsilon_1|A_1(t) + \dots + |\epsilon_{n_t}|A_{n_t}(t).$$

Por otra parte, si  $L_i(t)$  es la longitud de la frontera de  $\Omega_i(t)$ , se deduce que  $L(t) = |\epsilon_1|L_1(t) + \dots + |\epsilon_{n_t}|L_{n_t}(t)$  y de aquí

$$L(t)^2 \geq \epsilon_1^2 L_1(t)^2 + \dots + \epsilon_{n_t}^2 L_{n_t}(t)^2.$$

Usando estas dos desigualdades y (3.5) se obtiene que para casi todo  $t \geq 0$

$$\epsilon_1^2 L_1(t)^2 + \dots + \epsilon_{n_t}^2 L_{n_t}(t)^2 \leq -2HA'(t)(|\epsilon_1|A_1(t) + \dots + |\epsilon_{n_t}|A_{n_t}(t)).$$

Si se aplica la desigualdad isoperimétrica para el dominio  $\Omega_i(t)$ , entonces  $L_i(t)^2 \geq 4\pi A_i(t)$ , y del hecho de que  $\epsilon_i^2 \geq |\epsilon_i|$ , entonces

$$2\pi \leq -HA'(t) \quad \text{para casi todo } t \geq 0.$$

Integrando esta desigualdad desde 0 hasta  $h = \max_{p \in \Sigma} f(p) \geq 0$ , se obtiene

$$2\pi h \leq H(A(0) - A(h)) = HA^+,$$

que es la desigualdad que buscábamos.

Si se da la igualdad con  $H > 0$ , entonces todas las desigualdades usadas antes se convierten en igualdades. En particular,  $|\nabla f|_{|\Gamma(t)} = \langle \nu^t, a \rangle$  es una constante para todo  $t \geq 0$  y  $\phi(\Gamma(t))$  es una circunferencia. Por tanto, en un entorno del punto de  $\Sigma$  donde se alcanza la altura máxima, la inmersión es un embebimiento cuya imagen es una superficie con curvatura media constante, con frontera una circunferencia y se encuentra por encima del plano que contiene a la frontera. El método de reflexión de Alexandrov (Corolario 1.3.2) implica que, en un entorno de dicho punto,  $\phi$  es umbilical. Por analiticidad, la superficie  $\Sigma$  debe ser un disco y  $\phi$  un embebimiento cuya imagen es un casquete esférico.

□

Las notas que siguen pueden ayudar a comprender en profundidad lo que acabamos de conseguir para las superficies compactas de  $\mathbb{R}^3$  que tienen curvatura media constante y borde plano.

**Nota 1.** Un cilindro recto de radio  $1/|H|$  y altura  $h$  tiene área  $2\pi h/|H|$ . Por tanto el Teorema 3.1.1 anterior puede parafrasearse de la siguiente forma:

*Una superficie compacta de curvatura media constante  $H \neq 0$  con frontera plana tiene área mayor que el área de un cilindro recto de radio  $1/|H|$  y de la misma altura que la superficie, a no ser que la superficie sea un casquete esférico de radio  $1/|H|$ , en cuyo caso, las dos áreas coinciden.*

Esto último es un viejo Teorema de Arquímedes (como puede verse por ejemplo en [26], página 293) que está grabado en su tumba de Siracusa.

Por otra parte, si se quiere comparar el crecimiento del área de una superficie  $\Sigma$  respecto de la superficie estándar de la misma curvatura media, el Teorema 3.1.1 dice que una superficie compacta inmersa con frontera plana y curvatura media constante  $H > 0$  tiene área mayor que el área de un rosario de esferas de radio  $1/H$ , cuyo punto más alto y su frontera distan lo mismo que los de la superficie  $\Sigma$  (ver Figura 3.1).

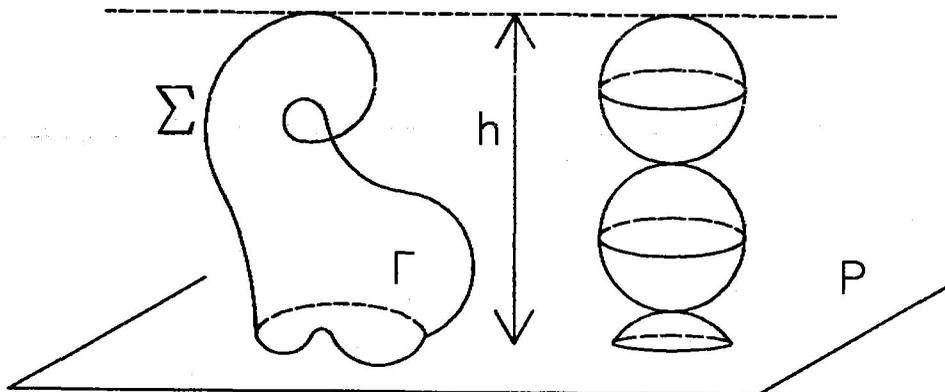


Figura 3.1:

**Nota 2.** Siguiendo la demostración del Teorema 3.1.1, el crecimiento del área de la superficie con relación a la altura  $t$  respecto del plano del borde viene dado por

$$A'(t) \leq \frac{-2\pi}{H}.$$

Es por ello que la desigualdad (3.1) es una especie de fórmula de *monotonía del área* válida para el caso *inmerso*, del mismo tipo que la que aparece en [41] y [42].

**Nota 3.** En su búsqueda de grafos de curvatura media constante  $H$  sobre dominios planos, Serrin ([62]), que usó fundamentalmente el método de continuidad descrito en la Sección 4 del Capítulo 1, demostró, como ya vimos, que un grafo compacto de esa naturaleza, con frontera plana, se eleva por encima del plano del borde no más de  $1/|H|$ . Como consecuencia de esto y del método de Alexandrov, una superficie compacta con curvatura media constante  $H$ , embebida en  $\mathbb{R}^3$  con frontera contenida en un plano  $P$  no puede alejarse de ese plano más de  $2/|H|$ , o sea, el doble de la altura máxima permitida para un grafo (Ver Lema 1.4.3 y su Nota correspondiente). Las dos estimaciones son buenas, ya que los dos casquetes esféricos pequeño y grande, se pueden aproximar tanto como uno quiera a esas cotas. Pero la estimación de Serrin no es buena para grafos con  $H$  pequeño, ni la otra estimación para superficies con  $H$  pequeño, que sean pequeñas en el sentido de la Sección 2.3 del capítulo anterior. Por otro lado, los ejemplos inmersos de Kapouleas ([37]) que son superficies inmersas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $1/2$  y cuyo borde es una circunferencia de radio uno, y que pueden alcanzar alturas arbitrarias sobre el plano del borde, prohíben la existencia de una estimación de la altura, sólo en términos de  $H$ , para las superficies inmersas. Así pues, la desigualdad (3.1) que hemos conseguido en el Teorema 3.1.1 anterior, puede verse como una estimación *a priori* de la altura de una superficie compacta  $\Sigma$  inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$ , en términos del área. En el caso en que  $\Sigma$  es un grafo, y  $H > 0$  es suficientemente pequeño se tiene que  $AH^2 \leq 2\pi$ , como se desprende de una desigualdad isoperimétrica de Barbosa y do Carmo ([7]) que usaremos y comentaremos con más detalle en la Sección 3.3. De ahí que nuestra estimación (3.1) nos dé en ese caso

$$h \leq \frac{AH^2}{2\pi} \leq \frac{1}{H}.$$

Así, al menos para  $H$  pequeño, la estimación de Serrin es una consecuencia de nuestro Teorema 3.1.1. Por otro lado, nuestra estimación (3.1) también es válida para superficies inmersas.

**Nota 4.** Si se repasa la demostración de la fórmula (3.1) de crecimiento del área, se puede observar que es válida, no sólo para superficies compactas, sino para una

superficie  $\Sigma$  de curvatura media constante con borde plano que cumpla

$$\int_{\partial\Sigma} \nu = 2H\bar{A}a$$

donde  $a$  es la dirección normal al plano. O sea, una superficie con fuerza cero, en el sentido de [41], [42]. En particular, es válida si  $\partial\Sigma = \emptyset$  obteniéndose:

**Corolario 3.1.2** *El diámetro  $D$  de una superficie compacta sin borde con curvatura media constante  $H$  inmersa en  $\mathbb{R}^3$  cumple*

$$D \leq \frac{A|H|}{2\pi},$$

donde  $A$  es el área de  $\Sigma$ . Además se obtiene igualdad si y sólo si la superficie es una esfera.

Con las mismas hipótesis que las del Teorema 3.1.1 se consigue

$$h^- \leq \frac{A^-|H|}{2\pi}$$

donde  $A^-$  representa el área de la región de la superficie  $\Sigma$  que está por debajo del plano que contiene a la frontera y  $h^-$  es la altura de dicha región respecto de dicho plano. Por tanto

**Corolario 3.1.3** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta con curvatura media constante  $H$  y cuyo borde se encuentra contenido en un plano  $P$ . Si  $A$  es el área de  $\Sigma$ , entonces  $\Sigma$  se encuentra en una banda paralela a  $P$  de anchura menor que  $A|H|/\pi$ , a no ser que  $\Sigma$  sea un casquete esférico.*

En el caso en que la superficie considerada no tiene frontera plana, también se puede obtener a partir de nuestro Teorema 3.1.1 el siguiente resultado, que para el caso del disco, había sido probado por Wente en [75] por métodos muy diferentes.

**Corolario 3.1.4** *Sea  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión con curvatura media constante  $H$  de una superficie compacta  $\Sigma$ . Entonces*

$$|\phi(x)| \leq r + \frac{A|H|}{2\pi},$$

donde  $r = \max\{|\phi(p)|; p \in \partial\Sigma\} > 0$ , aunque  $\phi(\partial\Sigma)$  no sea una curva plana.

*Demostración:* Sea  $B(0, r)$  la bola centrada en el origen de radio  $r$  y sea  $x_0 \in \Sigma$  un punto donde se alcanza el máximo de  $|\phi|$ . Sea un plano  $P$  tangente a  $\partial B(0, r)$  y perpendicular al vector  $\phi(x_0) \in \mathbb{R}^3$ . Se considera  $\Sigma^+$  la parte de  $\Sigma$  que se encuentra por encima del plano  $P$  y se aplica ahora el Teorema 3.1.1 a dicha superficie (con frontera plana). Entonces

$$|\phi(x_0)| = r + (|\phi(x_0)| - r) \leq r + \frac{A^+|H|}{2\pi} \leq r + \frac{A|H|}{2\pi}$$

donde  $A^+$  representa el área de la superficie  $\Sigma^+$ .

□

## 3.2 Consecuencias de la estimación de la altura

La estimación de la altura del Teorema 3.1.1 junto con el Principio de Comparación y del Máximo de superficies con curvatura media constante, permite obtener información de una superficie con curvatura media constante siempre que sea *pequeña* en un cierto sentido: respecto de su área, de su volumen, etc.

**Corolario 3.2.1** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  cuyo borde es plano. Si el área  $A$  de la superficie satisface*

$$AH^2 \leq \pi,$$

*entonces la superficie se encuentra en el cilindro recto determinado por la envolvente convexa de su frontera.*

*Demostración:* Si  $\Sigma$  es un casquete esférico con curvatura media  $H > 0$ , entonces es fácil ver (o bien consúltese la Sección 1 del Capítulo siguiente) que

$$AH^2 = 2\pi(1 - \sqrt{1 - H^2}) \quad \text{o bien} \quad AH^2 = 2\pi(1 + \sqrt{1 - H^2}),$$

dependiendo si es el casquete pequeño o el grande. Ya que se está suponiendo que  $AH^2 \leq \pi$ , entonces debe ser el casquete pequeño y el resultado es cierto.

En otro caso, usando la fórmula del crecimiento del área, la superficie  $\Sigma$  se encuentra contenida en una banda paralela al plano  $P$  que contiene a la frontera tal que

$$h, h^- < \frac{AH}{2\pi} \leq \frac{1}{2H}.$$

Entonces  $\Sigma$  se encuentra en una banda paralela a  $P$  y *simétrica* respecto de  $P$  con anchura menor que  $1/H$ . Supongamos ahora que existe un punto de  $\Sigma$  que se proyecta sobre un punto  $p$  del plano  $P$  de la frontera, que está fuera de la envolvente convexa  $C$  de esa frontera de  $\Sigma$  y sea  $q \in C$  el punto que minimiza la distancia a  $p$ . Representaremos por  $R$  la semirrecta del plano  $P$  con origen en  $q$  que pasa por  $p$  y sea  $C_R$  el semicilindro de radio  $1/2H$  cuyo eje está en  $P$  y es perpendicular a  $R$ . Movemos  $C_R$  a lo largo de  $R$  suficientemente lejos para que no toque a la superficie  $\Sigma$  y colocamos su parte cóncava mirando a  $\Sigma$ . Ahora vamos acercando el semicilindro  $C_R$  a  $\Sigma$  hasta conseguir un primer punto de contacto (por lo tanto de tangencia en el sentido que se dio en la Sección 1.2) entre las dos superficies. Como el eje de  $C_R$  está en  $P$  y hay un punto de  $\Sigma$  que se proyecta sobre el punto  $p$  fuera de la envolvente convexa del borde, ese punto de contacto que obtenemos así es un punto de  $\Sigma$  que no es del borde. Es también un punto interior del semicilindro  $C_R$  porque  $\Sigma$  está en una banda con anchura menor que la altura  $1/H$  de  $C_R$ . Por otro lado, este semicilindro tiene curvatura media constante  $H$  con respecto al normal que apunta a su parte cóncava. Como  $\Sigma$  está en esa parte cóncava, por el Principio de Comparación, sabemos que, con esa misma elección de normal en el punto de contacto,  $\Sigma$  tiene la misma curvatura media  $H$ . Por el Principio del Máximo, tendríamos que o bien  $C_R$  está contenida en  $\Sigma$ , cosa que es imposible por ser  $\Sigma$  compacta, o bien  $\Sigma \subset C_R$ , que también es imposible porque el borde de  $\Sigma$  es plano. Por lo tanto, todos los puntos de  $\Sigma$  deben proyectarse sobre la envolvente convexa de su borde.

□

La hipótesis  $AH^2 \leq \pi$  en el anterior corolario no es óptima, como muestran los casquetes pequeños. De esta forma, es lógico preguntarse

**Problema B.** *¿Es cierto que toda superficie compacta con curvatura media constante  $H$  y con frontera plana tal que*

$$AH^2 < 2\pi,$$

donde  $A$  es el área de la superficie, es un grafo?

Obsérvese que el número  $AH^2$  es invariante por homotecias del espacio ambiente. El hecho fundamental en el anterior resultado es que la banda que contiene a la superficie  $\Sigma$  es simétrica respecto del plano  $P$ : de ahí la hipótesis de que  $AH^2 \leq \pi$ . Si se debilita esta hipótesis y se cambia por  $AH^2 \leq 2\pi$ , entonces, o  $\Sigma$  es un casquete esférico, o en caso contrario,  $\Sigma$  se encuentra dentro de una banda  $S$  paralela a  $P$  de anchura menor que  $AH^2/2\pi \leq 1/H$ . Esta banda ya no tiene porqué ser simétrica respecto de  $P$ . Pero si se usan de nuevo, como superficies barreras, semicilindros de radio  $1/2H$  con eje en el plano central de  $S$ , se obtiene el siguiente resultado para el caso en que  $\Sigma$  sea una superficie embebida:

**Corolario 3.2.2 ([48])** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta embebida en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  y con frontera una curva cerrada y convexa contenida en un plano  $P$ . Si  $AH^2 \leq 2\pi$ , donde  $A$  es el área de la superficie, entonces  $\Sigma$  se encuentra contenida en uno de los dos semiespacios determinados por el plano  $P$  y es transversa a  $P$  a lo largo de su frontera.*

*Demostración:* La discusión anterior prueba que la superficie no corta al plano  $P$  en el que está contenido su borde más que, si acaso, en el dominio  $\Omega$  determinado por la frontera  $\Gamma$  en  $P$ . Basta entonces aplicar el Lema 3.2.3 siguiente para concluir que  $\Sigma$  está solo a un lado de  $P$ . Usando otra vez semicilindros de radio  $1/2H$  y eje en un plano paralelo a  $P$  a altura  $1/2H$ , como superficies barreras, el Principio del Máximo (en el borde) nos da la transversalidad en el borde.

□

El siguiente resultado fue establecido por Koiso en [38]. Para que esta Memoria sea autocontenida, a continuación incluimos la prueba de dicho resultado.

**Lema 3.2.3** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta embebida en  $\mathbb{R}^3$  de curvatura media constante y con frontera una curva de Jordan  $\Gamma$  contenida en un plano  $P$ . Si  $\Sigma$  no interseca el exterior de la región acotada por  $\Gamma$  en  $P$ , entonces la superficie está incluida en uno de los semiespacios determinados por el plano  $P$ .*

*Demostración:* Sin perder generalidad, se considera que  $P$  es el plano vectorial  $P = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, a \rangle = 0\}$ , donde  $a \in \mathbb{R}^3$ , con  $|a| = 1$ . Supongamos que la superficie tiene puntos a ambos lados del plano  $P$ . Sea  $\Omega$  el dominio acotado que determina  $\Gamma$  en  $P$  y una semiesfera  $L$  por debajo del plano, cuya frontera sea una circunferencia contenida en  $P$  y suficientemente grande para que el disco  $D$  acotado por  $L$  en  $P$  verifique  $\Omega \subset \text{int}(D)$ . Entonces  $L \cup (D - \Omega) \cup \Sigma$  es una superficie compacta embebida en  $\mathbb{R}^3$  y por tanto, determina un dominio interior. Representamos a este dominio por  $W$ . Se orienta  $\Sigma$  mediante un campo normal unitario  $N$  de forma que  $N$  apunte hacia  $W$  en cada punto de  $\Sigma$ .

Sea  $p \in \Sigma$  un punto donde la función altura respecto de  $P$  alcanza un máximo absoluto. Este punto no pertenece a  $\partial\Sigma$  y además, ya que  $N$  apunta hacia  $W$ ,  $N(p) = -a$ . Comparando con una esfera con curvatura media  $|H|$  tangente a  $\Sigma$  en  $p$  y por encima de  $\Sigma$ , la curvatura media de  $\Sigma$ , según la orientación dada por  $N$ , es positiva.

Por otra parte, si  $q$  es un punto de la superficie donde la función altura alcanza su mínimo absoluto y ya que de nuevo  $q \notin \partial\Sigma$ ,  $N(q) = -a$  ( $N(q)$  apunta hacia  $W$ , ver Figura 3.2).

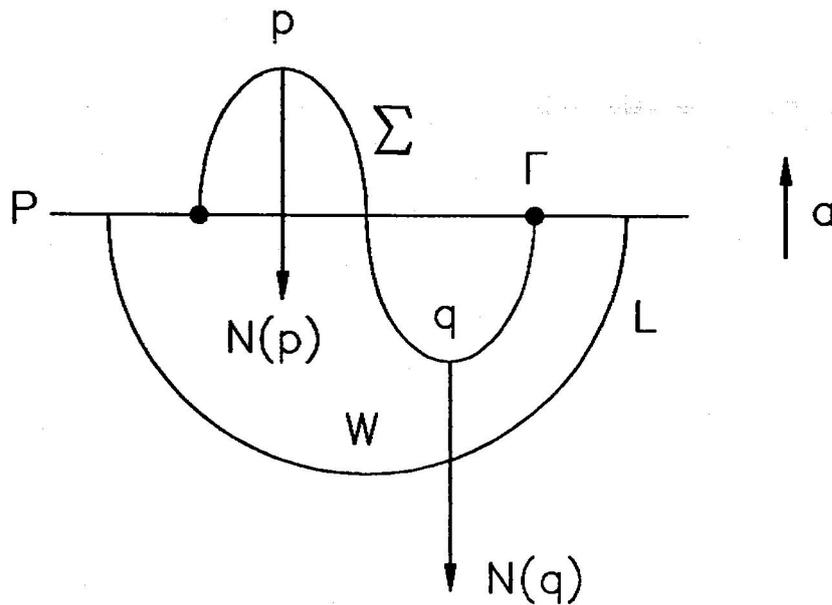


Figura 3.2: Demostración del Lema 3.2.3

Se considera ahora una esfera con curvatura media  $|H|$  tangente a  $\Sigma$  en  $q$  y por debajo de  $\Sigma$ . Ya que los vectores normales unitarios de  $\Sigma$  y de dicha esfera coinciden, el Principio del Máximo asegura que  $\Sigma$  está contenida en dicha esfera, lo cual es falso ya que  $\Sigma$  tiene puntos arriba y abajo de  $P$ .

□

Como consecuencia de los dos corolarios anteriores y usando el método de Alexandrov, obtenemos

**Corolario 3.2.4** *Una superficie compacta embebida con curvatura media constante  $H$ , cuyo borde es una curva plana convexa y de área  $A$  que satisface*

$$AH^2 \leq \pi,$$

*es un grafo sobre el dominio que determina la frontera en el plano en el que se encuentra.*

Acerca de estos corolarios cabe destacar las siguientes observaciones:

1. El Corolario 3.2.2 es del mismo tipo que el Teorema 1 en [14] y responde en parte al problema del semiespacio: dar condiciones para que una superficie embebida de curvatura media constante con frontera plana se encuentre a un lado del plano que contiene a la frontera. En este caso, la condición es que el área sea suficientemente pequeña respecto de la curvatura media.
2. Si la frontera es una curva cerrada y convexa, de la desigualdad (2.7) se deduce que  $H^2 \leq L^2/4\bar{A}^2$ , donde  $L$  es la longitud de la frontera y  $\bar{A}$  es el área del dominio que determina en el plano  $P$  donde se encuentra. Por tanto, de la estimación de la altura (3.1) y del Corolario 3.2.2 se deduce que

*Si  $\Sigma$  es una superficie compacta embebida con curvatura media constante cuyo borde es una curva plana y convexa y de área*

$$A \leq \frac{8\pi\bar{A}^2}{L^2},$$

*entonces  $\Sigma$  se encuentra en uno de los semiespacios determinados por  $P$  y es transversa a este plano a lo largo de la frontera.*

Nótese que cuando la curva frontera está próxima a una circunferencia, entonces el cociente isoperimétrico  $4\pi\bar{A}/L^2$  se aproxima a 1 y así la cota superior anterior está cerca de  $2\bar{A}$ .

### 3.3 Un teorema de existencia de grafos con curvatura media constante

El resultado clásico para la existencia de grafos con curvatura media constante se debe a Serrin ([62]) (también [23]) y dice lo siguiente: si  $\Omega$  es un dominio plano estrictamente convexo y la función curvatura de su borde  $\partial\Omega$  cumple  $k \geq 2H$  para cierto  $H > 0$ , entonces, dada una curva cerrada  $\Gamma$  que sea un grafo sobre  $\partial\Omega$ , existe un grafo sobre  $\Omega$  de curvatura media constante  $H$  y con borde  $\Gamma$ , es decir, si  $k \geq 2H$  para  $H > 0$ , se puede resolver el problema de Dirichlet para la ecuación (1.4) con cualquier dato en el borde. En esta sección, y como consecuencia de la estimación de la altura para superficies compactas con curvatura media constante (que hemos obtenido en la sección anterior), obtendremos estimaciones del gradiente para grafos con curvatura media constante, que sirven para demostrar el teorema de existencia que viene a continuación. Para ello necesitaremos usar la siguiente adaptación al caso de curvatura media constante de una desigualdad isoperimétrica de Barbosa y do Carmo (ver también en [15]).

**Lema 3.3.1** ([7]) *Si  $L$  y  $A$  representan la longitud del borde y el área de un disco inmerso en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$ , se tiene*

$$L^2 - 4\pi A + H^2 A^2 \geq 0$$

*y la igualdad se da solamente para los discos planos y los casquetes esféricos.*

*Demostración:* La desigualdad isoperimétrica de Barbosa y do Carmo asegura que una superficie riemanniana  $(M, ds^2)$  simplemente conexa tiene la propiedad

$$L^2 - 2A \left( 2\pi - \int_M (K - k)^+ dM \right) + kA^2 \geq 0, \quad (3.6)$$

donde  $A$  es el área de  $M$ ,  $L$  la longitud de  $\partial M$ ,  $K$  la función curvatura de Gauss,  $dM$  es la medida canónica en  $M$  asociada a la métrica  $ds^2$ ,  $k$  un número real arbitrario

y  $(K - k)^+$  representa la parte positiva de la función  $K - k$ . Además, la igualdad se da si y sólo si  $(M, ds^2)$  es un disco geodésico en una esfera con curvatura de Gauss  $k$ . Se aplica dicha desigualdad a la superficie  $\Sigma$ , eligiendo  $k = H^2 \in \mathbb{R}$ . Ya que  $\Sigma$  está inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , se tiene que la curvatura de Gauss  $K$  satisface  $K \leq H^2$  y la igualdad se da sólo en aquellos puntos que son umbilicales. Por tanto  $(K - H^2)^+ = 0$ . Entonces la desigualdad (3.6) se convierte en la desigualdad buscada. Si se diera la igualdad, entonces todos los puntos serían umbilicales, y por tanto, la superficie sería un dominio de un plano o de una esfera.

□

**Teorema 3.3.2 ([48])** *Sea  $\Gamma$  una curva plana, cerrada y convexa de longitud  $L$ . Si  $H$  es un número real no negativo tal que  $LH < \sqrt{3}\pi$ , entonces existe un grafo con curvatura media constante  $H$  cuya frontera es  $\Gamma$ .*

*Demostración:* Representaremos por  $\Omega$  el dominio plano convexo que encierra  $\Gamma$ . La existencia de un grafo con curvatura media constante  $H$  y frontera  $\Gamma$  equivale a encontrar una solución  $u$  del problema de Dirichlet que valga cero en  $\partial\Omega$  correspondiente a la ecuación (1.4). Usando el método de continuidad (Proposición 1.4.8), es suficiente dar estimaciones a priori de la inclinación del grafo de  $u$  a lo largo de su frontera.

Sea una solución  $u_H$  de (1.4) y  $G_H$  el correspondiente grafo con curvatura media constante  $H$ . El método de continuidad asegura la existencia, para cada  $0 \leq t \leq H$  de grafos  $G_t$  con curvatura media  $t$  y frontera  $\Gamma$  (Ejemplo 2 del Capítulo 1). Los correspondientes grafos  $G_t$  son discos topológicos, cuyas funciones curvaturas de Gauss  $K_t$  satisfacen  $K_t \leq t^2$ . Aplicando la desigualdad isoperimétrica del lema anterior, se consigue la siguiente desigualdad de segundo grado respecto de  $A_t$

$$t^2 A_t^2 - 4\pi A_t + L^2 \geq 0,$$

cuyo discriminante cumple

$$16\pi^2 - 4L^2 t^2 \geq 16\pi^2 - 4L^2 H^2 > 4\pi^2 > 0.$$

Entonces

$$A_t t^2 \leq 2\pi - \sqrt{4\pi^2 - L^2 t^2} \quad \text{o bien} \quad A_t t^2 \geq 2\pi + \sqrt{4\pi^2 - L^2 t^2}$$

para cada  $t \in [0, H]$ . Ya que  $A_t$  depende continuamente de  $t$  y la primera desigualdad ocurre cuando  $t = 0$ , se tiene que esta primera desigualdad vale para todo  $t$  con  $0 \leq t \leq H$ , y así, en particular, para  $t = H$ . Esto da

$$\frac{A_H H}{2\pi} \leq \frac{2\pi - \sqrt{4\pi^2 - L^2 H^2}}{2\pi H}.$$

Se define un número  $\epsilon = \epsilon(H, L)$ , que depende sólo de  $H$  y  $L$ , de la siguiente forma:

$$\epsilon = \frac{1}{2H} - \frac{2\pi - \sqrt{4\pi^2 - L^2 H^2}}{2\pi H}.$$

Usando la hipótesis  $H < \sqrt{3}\pi/L$ , se concluye que  $\epsilon$  es positivo y además

$$\frac{A_H H}{2\pi} \leq \frac{1}{2H} - \epsilon.$$

Ahora el Teorema 3.1.1 afirma que el grafo  $G_H$  se aleja del plano  $P$  que contiene a la curva  $\Gamma$  menos que  $1/2H - \epsilon$ .

Se considera cualquier banda  $S$  con anchura  $1/2H$  y paralela a  $P$ . Se mueve  $P$  y el grafo  $G_H$  de forma que el plano  $P$  esté a una altura  $\epsilon/2$  por encima del plano inferior que limita la banda  $S$ . Entonces el grafo  $G_H$  se encuentra contenido en la banda  $S$ . Para cada punto  $p \in \Gamma$ , sea  $C_p$  la parte del cilindro recto de radio  $1/2H$  que pertenece a la banda  $S$  cuyo eje se encuentra en el plano inferior de  $S$  y es paralelo a la recta tangente a  $\Gamma$  en  $p$ . Esta superficie tiene claramente curvatura media constante  $H$ .

Se separa  $C_p$  de  $G_H$  paralelamente a  $P$  hasta que no se intersequen, con el lado cóncavo de  $C_p$  mirando a la superficie  $G_H$ . Después de esto, se aproxima  $C_p$  a la superficie  $\Sigma$  hasta que la toque por primera vez. El Principio del Máximo y el hecho de que  $\Gamma$  sea convexa implica que este punto de contacto es  $p$ . Ya que esto es cierto para cada punto  $p$  de  $\Gamma$ , la superficie  $G_H$  está dentro de la región convexa delimitada por la curva  $\Gamma$  y todas las piezas de cilindros  $C_p$  con  $p \in \Gamma$ . Por tanto, la pendiente del grafo en cada punto  $p$  de la frontera  $\Gamma$  es usando de nuevo el Principio del Máximo, menor que la pendiente del correspondiente  $C_p$  en dicho punto. Pero esta pieza de cilindro corta al plano  $P$  con un ángulo que no depende de  $p$  y el cual es menor que  $\pi/2$ . De aquí, que si  $a \in \mathbb{R}^3$  es un vector unitario ortogonal al plano  $P$ , se ha obtenido un número positivo  $\delta(\epsilon)$  tal que

$$\langle \nu_p, a \rangle \leq 1 - \delta(\epsilon) \quad \text{para cada } p \in \Gamma,$$

donde  $\nu_p$  es el conormal interior a  $G_H$  en el punto  $p$  (ver Figura 3.3)

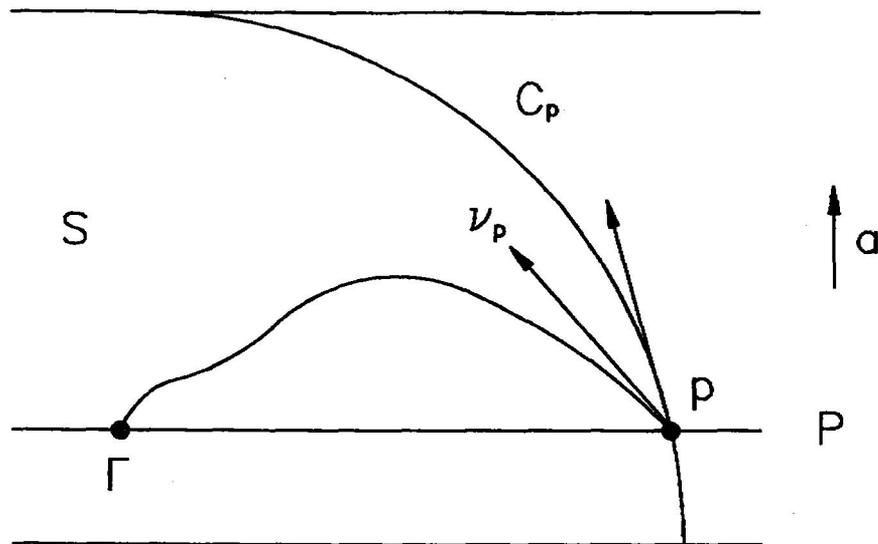


Figura 3.3:

De esta forma, tomando  $C = 1 - \delta(\epsilon)$  en la Proposición 1.4.8, se ha conseguido una estimación a priori de la pendiente de cualquier grafo de curvatura media constante  $H < \sqrt{3}\pi/L$  con frontera  $\Gamma$ .

□

Debemos reseñar que el resultado de Serrin y el Teorema 3.3.1 no son comparables, pero el resultado de Serrin tiene la desventaja de que cuando se aplica a la situación en que la curva  $\Gamma$  es plana, requiere que la curva sea *estrictamente convexa*. Este no es el caso de la hipótesis en el Teorema 3.3.1, que puede ser aplicado a curvas  $\Gamma$  que incluyan, por ejemplo, un trozo de recta.

Una consecuencia inmediata es el siguiente corolario, que se obtiene del resultado anterior, usando el teorema de las tangentes.

**Corolario 3.3.3** *Sea una curva plana, cerrada y convexa  $\Gamma$  cuya función curvatura  $k$  satisface*

$$\sqrt{3}k > 2H,$$

entonces existe un grafo con curvatura media constante  $H$  y frontera  $\Gamma$ .

Si pensamos en el caso en el que la frontera sea una circunferencia, parece lógico, después de los resultados anteriores, plantearse lo siguiente:

**Problema C.** *Dada una curva  $\Gamma$  plana, cerrada y convexa de longitud  $L$ , ¿existe un grafo de curvatura media  $H$  cuya frontera sea  $\Gamma$  y tal que*

$$|H| < \frac{2\pi}{L}?$$

### 3.4 Superficies de volumen pequeño

Se ha visto, en la sección anterior, que nuestra fórmula de crecimiento del área para las superficies compactas inmersas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante y borde plano, nos proporciona algún control sobre la forma de esas superficies y es especialmente significativa cuando la frontera de la superficie es convexa y la superficie tiene área pequeña. Consideraremos ahora como variable a estudiar el volumen algebraico de las superficies en cuestión. Es natural hacer esto ya que, en el problema isoperimétrico que planteábamos en la Sección 1.1 se pedía encontrar una superficie que minimice el área de entre las que tienen un borde dado y encierran un volumen dado. También, algunos teoremas de existencia de Wente ([74]) prefijan, junto al borde de la superficie, el volumen algebraico que encierra, y consiguen así discos inmersos regulares ([68]) de curvatura media constante, cuya conducta cuando ese volumen se hace muy grande está estudiada por el mismo Wente en [75]. No se conoce nada acerca de la forma, del área o en general de la conducta de las superficies compactas con curvatura media constante, con borde prefijado cuando su volumen algebraico es pequeño, salvo algunos datos de tipo *experimental* obtenidos por el G.A.N.G. de la Universidad de Amherst ([33]). Dar algunas respuestas acerca de estas cuestiones es ahora nuestro objetivo.

Sea una inmersión  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie compacta orientable, conexa y con frontera no vacía. Recuérdese que el volumen algebraico  $V$  estaba definido en la página 2 por

$$V = -\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle N, \phi \rangle d\Sigma,$$

donde  $N$  representa la aplicación de Gauss para la inmersión  $\phi$  compatible con la orientación de  $\Sigma$ . Este número  $V$  depende de la elección del origen de  $\mathbb{R}^3$  y de la orientación.

Supongamos ahora que la inmersión  $\phi$  tiene curvatura media constante  $H > 0$  y que la frontera es plana, por ejemplo,  $\phi(\partial\Sigma)$  se encuentra en un plano  $P$  que pasa por el origen. Sea un vector  $a \in \mathbb{R}^3$  unitario perpendicular a  $P$  y escojamos un nuevo origen  $b \in \mathbb{R}^3$ . Entonces el nuevo volumen algebraico  $V_b$  es

$$V_b = -\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle N, \phi - b \rangle d\Sigma = V + \frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle N, b \rangle d\Sigma.$$

Usando el hecho de que  $\Delta\phi = 2HN$ , el Teorema de la Divergencia y la Fórmula de Equilibrio (2.3) obtenemos que

$$\int_{\Sigma} \langle N, b \rangle d\Sigma = \pm \bar{A} \langle b, a \rangle,$$

donde  $\bar{A}$  es el área algebraica de la curva  $\phi(\partial\Sigma)$ . Así que, si el nuevo origen  $b$  se toma en el plano  $P$ , entonces  $\langle b, a \rangle = 0$  y el nuevo volumen  $V_b$  coincidirá con  $V$ . Esto es,

*Para inmersiones con curvatura media constante y frontera plana, el volumen algebraico es independiente de la elección del origen siempre que sea tomado en el plano que contiene a la frontera.*

Será así como se haga la elección a partir de ahora. Por otro lado, supongamos que la frontera de la superficie inmersa sea una curva de Jordan  $\Gamma$  en el plano  $P$  y sea  $\Omega$  el correspondiente dominio acotado en  $P$ . En esta situación, si  $\phi$  es un embebimiento con imagen  $M$  tal que  $M \cup \Omega$  acota una región  $W$  de  $\mathbb{R}^3$ , entonces, de nuevo por el Teorema de la Divergencia aplicado al campo de vectores de posición en  $W$ , se concluye que

$$\text{vol}(W) = -\frac{1}{3} \int_{M \cup \Omega} h,$$

donde  $\text{vol}(W)$  es el volumen de Lebesgue en  $\mathbb{R}^3$  y  $h$  es la función soporte de la superficie  $M \cup \Omega$  correspondiente al campo normal interior de  $W$ . En la última igualdad, la elección del origen no es significativa, pero si el origen es tomado en el plano  $P$ , entonces el lado de la derecha de dicha igualdad se reescribe así

$$\text{vol}(W) = -\frac{1}{3} \int_{M \cup \Omega} h = -\frac{1}{3} \int_{\Sigma} \langle N, \phi \rangle d\Sigma = V,$$

esto es,

*El volumen algebraico de una superficie compacta con borde plano embebida en  $\mathbb{R}^3$  coincide con la medida de Lebesgue de la región encerrada por su imagen junto con el dominio plano determinado por su frontera.*

Se estudia ahora la relación entre el signo de  $H$  y el de  $V$  para una superficie inmersa con curvatura media constante  $H$  y frontera plana. Primero se obtiene la siguiente igualdad integral:

**Lema 3.4.1** *Sea una inmersión  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie compacta con curvatura media constante  $H$  y frontera contenida en un plano  $P$ . Entonces*

$$2HV = \int_{\Sigma} |\nabla \langle \phi, a \rangle|^2 d\Sigma,$$

donde  $a$  es un vector unitario perpendicular al plano  $P$ .

*Demostración:* Sea  $N$  la aplicación de Gauss en la superficie. Se definen las dos siguientes 1-formas  $\beta$  y  $\gamma$  en  $\Sigma$ :

$$\beta_p(v) = \langle (d\phi)_p(v), a \rangle \langle \phi(p), a \rangle$$

$$\gamma_p(v) = \langle (d\phi)_p(v) \wedge N(p), \phi(p) \wedge a \rangle \langle \phi(p), a \rangle,$$

para cada  $p \in \Sigma$  y  $v \in T_p\Sigma$  y se calculan sus codiferenciales. Sean  $p \in \Sigma$  y  $\{e_1, e_2\}$  una base ortonormal del plano tangente de  $\Sigma$  en  $p$ . Entonces

$$\delta\beta(p) = \sum_{i=1}^2 \sigma_{ii} \langle N, a \rangle + \sum_{i=1}^2 \langle e_i, a \rangle^2.$$

$$\delta\gamma(p) = \sum_{i=1}^2 \langle e_i \wedge N, e_i \wedge a \rangle \langle \phi, a \rangle + \sum_{i=1}^2 \langle e_i \wedge N, \phi \wedge a \rangle \langle e_i, a \rangle.$$

Por tanto se deduce que sus codiferenciales  $\delta\beta$  y  $\delta\gamma$  son

$$\delta\beta = |\nabla \langle \phi, a \rangle|^2 + 2H \langle \phi, a \rangle \langle N, a \rangle$$

$$\delta\gamma = 3 \langle \phi, a \rangle \langle N, a \rangle - \langle N, \phi \rangle.$$

Ya que la curvatura media  $H$  es constante, integrando estas dos igualdades en  $\Sigma$  y teniendo en cuenta que  $\beta$  y  $\gamma$  se anulan a lo largo de la frontera  $\partial\Sigma$ , se llega a la fórmula deseada.

□

Con este lema se caracterizan las superficies minimales como aquellas superficies con curvatura media constante que tienen volumen cero. Este hecho no es trivial, pues podría haber ocurrido que hubiera regiones donde el volumen tuviera signo positivo y otras regiones donde el volumen fuera negativo, de forma que la suma fuera cero.

**Corolario 3.4.2** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta de curvatura media constante y con frontera una curva contenida en un plano  $P$ . Se orienta  $\Sigma$  para que la curvatura media sea  $H \geq 0$ . Entonces el volumen algebraico correspondiente a esa orientación y a un origen elegido en  $P$  cumple  $V \geq 0$ . Además, se da la igualdad si y sólo si la inmersión es minimal y por tanto, la imagen de la superficie se encuentra contenida en  $P$ .*

*Demostración:* Por el Lema 3.4.1,  $2HV = \int_{\Sigma} |\nabla \langle \phi, a \rangle|^2 d\Sigma \geq 0$ . Además si  $V = 0$ ,  $\int_{\Sigma} |\nabla \langle \phi, a \rangle|^2 d\Sigma = 0$  y por tanto, la función  $\langle \phi, a \rangle$  es constante en  $\Sigma$ . Como se anula en  $\partial\Sigma$ , entonces  $\langle \phi, a \rangle = 0$  en  $\Sigma$ .

□

Para comenzar nuestro estudio de las superficies con volumen pequeño, recordaremos la primera fórmula de Minkowski.

**Lema 3.4.3 (Fórmula de Minkowski)** *Sea una inmersión  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie compacta y con curvatura media constante  $H$ . Entonces*

$$A - 3HV = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma} \langle \nu, \phi \rangle ds, \quad (3.7)$$

donde  $A$  es el área de  $\Sigma$ ,  $V$  es el volumen algebraico de  $\phi$  y  $\nu$  es el conormal interior a lo largo de la frontera  $\partial\Sigma$ .

*Demostración:* Si se considera una inmersión  $\phi$  cualquiera, entonces se tiene la igualdad

$$\Delta |\phi|^2 = 4 + 4H \langle N, \phi \rangle,$$

donde  $\Delta$  es el operador laplaciano de la métrica inducida  $ds^2$  en  $\Sigma$ . Integrando en  $\Sigma$  se obtiene lo pedido.

□

Estudiamos a continuación como evolucionan las constantes geométricas de una inmersión cuando su volumen algebraico se hace cada vez más pequeño.

**Lema 3.4.4** Sea  $\phi_k : \Sigma_k \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $k \in \mathbb{N}$  una sucesión de inmersiones con curvatura media constante  $H_k$  de superficies compactas  $\Sigma_k$  en el espacio euclídeo con  $\phi_k(\partial\Sigma_k) = \Gamma_k$ , donde cada  $\Gamma_k$  es una curva de Jordan plana y estrellada. Supongamos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k = \Gamma$  donde  $\Gamma$  es otra curva de Jordan plana y estrellada y que la sucesión de los correspondientes volúmenes algebraicos satisface  $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = 0$ . Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bar{A} \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} H_k = 0,$$

siendo  $\bar{A}$  el área del dominio plano determinado por la curva límite  $\Gamma$  y  $A_k$  es el área de  $\Sigma_k$ .

*Demostración:* Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $\Omega_k$  el dominio plano determinado por la curva  $\Gamma_k$ ,  $\bar{A}_k$  su área correspondiente y  $L_k$  la longitud de  $\Gamma_k$ . Ya que  $\Gamma_k$  tiende a la curva  $\Gamma$  cuando  $k$  tiende a infinito, se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{A}_k = \bar{A} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} L_k = L,$$

donde  $L$  es la longitud de la curva  $\Gamma$ . Usando la desigualdad (2.7) y ya que  $\bar{A} > 0$ , se observa que

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} H_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{L_k}{2\bar{A}_k} = \frac{L}{2\bar{A}},$$

y así la sucesión de curvaturas medias  $\{H_k\}$  está acotada. Entonces, por la hipótesis sobre la sucesión de volúmenes  $\{V_k\}$ , se obtiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_k V_k = 0. \quad (3.8)$$

Se considera ahora la Fórmula de Minkowski (3.7) para cada inmersión  $\phi_k$ . Como  $\Gamma_k$  es una curva plana, se puede escoger un campo normal unitario  $n_k$  para  $\phi_k$  en el correspondiente plano  $P_k$ . Así obtenemos

$$A_k - 3H_k V_k = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma_k} \langle \phi_k, \nu_k \rangle ds_k = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma_k} \langle \phi_k, n_k \rangle \langle n_k, \nu_k \rangle ds_k.$$

Como la curva  $\Gamma_k$  es estrellada, después de una adecuada elección del origen, su función soporte  $\langle \phi_k, n_k \rangle$  es negativa en  $\partial\Sigma_k$ . También  $\langle \nu_k, n_k \rangle \leq 1$  y así

$$A_k - 3H_k V_k \leq -\frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma_k} \langle \phi_k, n_k \rangle ds_k = \bar{A}_k.$$

Por otro lado, la superficie  $\phi_k(\Sigma_k)$  se proyecta en el correspondiente plano  $P_k$  en un región que incluye a  $\Omega_k$  ya que, si existiera un punto en  $\Omega_k$  tal que la recta que pasa por dicho punto y es perpendicular al plano  $P_k$  no intersecara a la superficie  $\phi_k(\Sigma_k)$ , entonces la curva  $\phi_k(\partial\Sigma_k) = \Gamma_k$  no sería nulhomóloga en la proyección de  $\phi_k(\Sigma_k)$  en  $P_k$ . Sin embargo la frontera  $\partial\Sigma_k$  es nulhomóloga en la superficie  $\Sigma_k$  y esto da una contradicción. De aquí que

$$A_k \geq \bar{A}_k.$$

Tomando límites en las dos anteriores desigualdades, se concluye de (3.8) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bar{A}$$

que es la primera conclusión que se estaba buscando. Además se sigue

$$\bar{A} = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma_k} \langle \phi_k, \nu_k \rangle ds_k = \lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma_k} \langle \phi_k, n_k \rangle ds_k$$

y así

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} -\langle \phi_k, n_k \rangle (1 - \langle n_k, \nu_k \rangle) \frac{ds_k}{ds} ds = 0,$$

donde  $ds$  representa el elemento de longitud de arco de  $\Gamma$ . Ya que las curvas frontera son estrelladas, los integrandos anteriores son no negativos y por el Lema de Fatou, se obtiene que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} -\langle \phi_k, n_k \rangle (1 - \langle n_k, \nu_k \rangle) \frac{ds_k}{ds} = 0.$$

Pero  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \phi_k, n_k \rangle (ds_k/ds) < 0$  ya que la sucesión  $\Gamma_k$  converge a la curva estrellada  $\Gamma$ . Entonces, existe una parcial de la sucesión de inmersiones, que se representará de la misma forma, tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \nu_k, n_k \rangle = 1$ . Sea un vector  $a_k$  unitario de  $\mathbb{R}^3$  ortogonal al plano  $P_k$  donde se encuentra la curva  $\Gamma_k$ . Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \nu_k, a_k \rangle = 0.$$

De aquí, usando la Fórmula de Equilibrio (2.5) y el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se demuestra que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_k \bar{A}_k = 0.$$

Pero ya se sabía que la sucesión  $\bar{A}_k$  tiende a  $\bar{A} > 0$  cuando  $k$  va a infinito. Así que existe una subsecuencia de nuestra sucesión de inmersiones de curvatura media constante tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} H_k = 0$ . Ya que esto es cierto para cualquier sucesión, se deduce la segunda conclusión que se quería probar. □

Combinando las dos afirmaciones del lema anterior y por el Corolario 3.2.1, dada una curva  $\Gamma$  plana y estrellada, toda superficie  $\Sigma$  compacta inmersa en  $\mathbb{R}^3$ , con curvatura media constante con frontera  $\Gamma$  y volumen algebraico suficientemente pequeño se encuentra dentro del cilindro recto cuya base es la envolvente convexa de su frontera  $\Gamma$ . Por otro lado, si el volumen de  $\Sigma$  es suficientemente pequeño, por el Lema 3.4.4, su curvatura media será también pequeña. Según el Corolario 3.2.1 y el Teorema 3.3.2, siempre que la curva  $\Gamma$  sea convexa existirá un grafo  $G$  con frontera  $\Gamma$  y con curvatura media constante  $H$ , la misma que la de  $\Sigma$ . De aquí que, si  $\Gamma$  es una curva plana convexa y cerrada, existe un número positivo  $V_\Gamma$  tal que cualquier superficie compacta inmersa  $\Sigma$  con curvatura media constante con frontera  $\Gamma$  y volumen  $V \leq V_\Gamma$ , se encuentra dentro del cilindro recto determinado por el dominio plano  $\Omega$  que acota  $\Gamma$ . Además existe un grafo  $G$  en  $\Omega$  de la misma curvatura media que  $\Sigma$  y  $\partial G = \Gamma$ . Entonces por el resultado de unicidad de cilindros (Teorema 2.2.1), se obtiene el siguiente

**Teorema 3.4.5 ([48])** *Sea  $\Gamma$  una curva plana, cerrada y convexa. Entonces existe un número positivo  $V_\Gamma$  que depende solamente de  $\Gamma$  tal que, para cualquier  $0 \leq V \leq V_\Gamma$  existe un grafo  $G_V$  de curvatura media constante, con frontera  $\Gamma$  y que encierra un volumen  $V$ . Además, este grafo  $G_V$  es la única superficie compacta de curvatura media constante cuya frontera es  $\Gamma$  y con volumen algebraico  $V$ .*

Usando los resultados de existencia y regularidad de la teoría geométrica de la medida debidos a F. Almgren y J. Taylor y señalados en la Sección 1.1, sabemos que

existen soluciones diferenciables al problema isoperimétrico y que son superficies con curvatura media constante. Por tanto,

**Corolario 3.4.6 ([48])** *Sea  $\Omega$  un dominio plano acotado y convexo. Entonces existe un número positivo  $V_\Omega$  tal que, para cualquier número real  $0 \leq V \leq V_\Omega$ , la región isoperimétrica correspondiente al par  $(\Omega, V)$  está acotada por  $\Omega \cup G$ , donde  $G$  es un grafo con curvatura media constante sobre  $\Omega$  con frontera  $\partial\Omega$ .*

### 3.5 Superficies de volumen pequeño y frontera no conexa

En esta última parte del Capítulo 3 se generalizarán los resultados de la Sección 3.4 al caso en que la frontera de una superficie de curvatura media constante no sea conexa. Para simplificar los razonamientos, se centrará el estudio en el caso en que la frontera tenga exactamente dos componentes conexas (aunque la mayor parte de ellos son ciertos cuando la frontera tiene un número finito de componentes). Resultados de existencia de superficies de curvatura media constante con frontera no conexa y volumen prescrito han sido obtenidos en la tesis de U. Patnaik ([51]) con técnicas similares a las usadas en [74]. En esta sección estudiamos cómo afecta el volumen a la forma que adopta la superficie, especialmente cuando el volumen algebraico es pequeño. Concretamente, en [33] se plantea la siguiente cuestión:

¿Una superficie compacta de curvatura media constante, con frontera no conexa y volumen pequeño, es desconexa?

Probaremos que la respuesta es afirmativa en ciertas situaciones en las que la frontera es plana. Concretamente,

*Si  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son dos curvas planas cerradas y convexas incluidas en un mismo plano, con dominios disjuntos y de áreas distintas, entonces cualquier superficie compacta de curvatura media constante y con frontera  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  es desconexa (exactamente está formada por dos grafos) si el volumen algebraico de la superficie es suficientemente pequeño.*

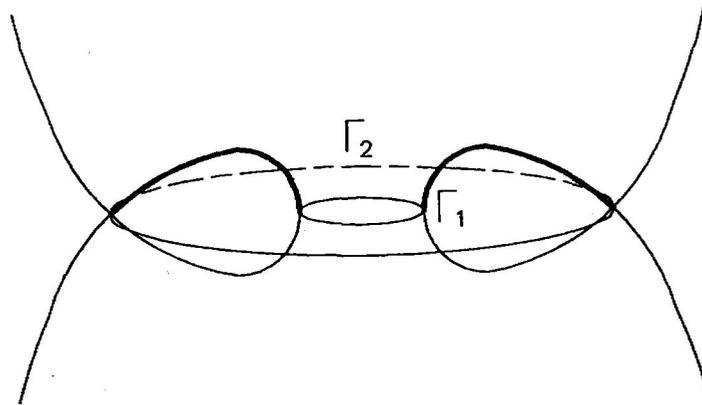


Figura 3.4:

Este resultado no es cierto si se supone, por ejemplo, que  $\Gamma_1 \subset \Omega_2$ , como muestran algunos dominios conexos de una nodoide (la parte subrayada de la Figura 3.4), los cuales pueden ser tomados con volumen algebraico arbitrariamente pequeño.

Como conclusión de esta sección, se obtendrán resultados parecidos a los del Teorema 3.4.5 y del Corolario 3.4.6 de la sección anterior. A continuación limitamos, en la siguiente definición, el tipo de curvas que serán frontera de nuestras superficies.

**Definición 3.5.1** Sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  dos curvas de Jordan contenidas en un mismo plano  $P$ . Se dice que  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  satisfacen la propiedad (S) si existe una recta de  $P$  que separa  $\Gamma_1$  de  $\Gamma_2$ .

En tal caso, los dominios interiores  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  determinados por  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son disjuntos. Además, si las dos componentes son curvas cerradas y convexas, la propiedad (S) es equivalente a que dichos dominios sean disjuntos.

**Lema 3.5.2** ([46]) Sean dos curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  con la propiedad (S). Entonces existe un número positivo  $K = K(\Gamma_1, \Gamma_2)$ , que depende sólo de las curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  tal que, cualquier superficie compacta de curvatura media constante  $H$  y frontera  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  es no conexa, siempre y cuando  $|H| < K$  y la altura  $h$  sobre el plano  $P$  cumple  $h < K$ .

*Demostración:* Después de un cambio de coordenadas, se supone que el plano  $P$  es el plano  $x_1x_2$ , es decir, el plano generado por los vectores  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 1, 0)$  y que la recta que separa a las dos curvas es el eje  $x_1$ . Sean dos circunferencias tangentes  $C_1$  y  $C_2$  incluidas en  $P$  de radios  $2a > 0$  suficientemente grandes, con centros en los puntos  $(0, -2a, 0)$ ,  $(0, 2a, 0)$  y tal que cada circunferencia  $C_i$  contiene en su dominio interior la curva  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ . Se escoge un número  $a$  con las siguientes propiedades:

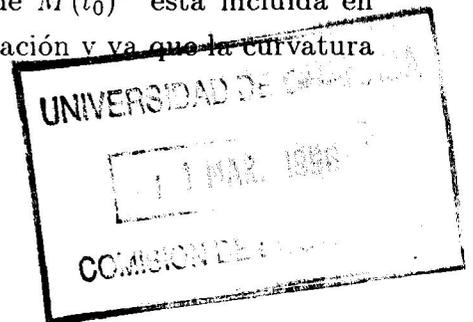
1.  $4a > |p - q|$ ,  $\forall p \in \Gamma_1, \forall q \in \Gamma_2$ .
2.  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset \{x \in \mathbb{R}^3; -a < x_2 < a\}$ .

Se considera la familia  $\mathcal{F}$  de onduloideas de curvatura media  $H = 1/2a$ , con generatrices situadas en el plano  $P$  y que giran respecto del eje  $x_2$ . Estas curvas tienen periodos entre  $4a$  y  $2\pi a$ , correspondiendo respectivamente cada uno de estos periodos a dos semicircunferencias tangentes de radios  $2a$  y a la recta que genera a un cilindro de radio  $a$ . Se parametriza cada elemento  $M(t)$  de  $\mathcal{F}$  por el periodo de su curva generatriz  $\gamma(t)$ :  $t \in [4a, 2\pi a]$  y sea  $m(t) \geq 0$  el valor mínimo de la coordenada  $x_1$  de la curva  $\gamma(t)$  (propiedades de las superficies de Delaunay las encontramos en [20] y [57]). Sean

$$M(t)^+ = M(t) \cap \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 \geq 0\} \quad M(t)^- = M(t) \cap \{x \in \mathbb{R}^3; x_1 \leq 0\}.$$

Si se orienta  $M(t)^+$  para que la curvatura media sea positiva ( $H = 1/2a$ ), el normal apunta según el semiespacio  $x_1 < 0$ , es decir,  $\langle N, (1, 0, 0) \rangle < 0$ . Sea  $t_0 > 4a$  suficientemente próximo a  $4a$  tal que para cada  $t \in I =: [4a, t_0]$ ,  $\gamma(t)$  no interseca a  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Resaltemos que este número  $t_0$  sólo depende de las curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ . Recuérdese también que la función definida en  $[4a, t_0]$  dada por  $t \mapsto m(t)$  es continua, estrictamente creciente y que  $\lim_{t \rightarrow 4a} m(t) = 0$ . Tomemos  $K = \min\{1/2a, m(t_0)\}$ .

Sea ahora una superficie compacta  $\Sigma$  de curvatura media constante  $H$ , con frontera  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  y tal que  $H$  y la altura sobre el plano  $P$  son menores que  $K$ . Probemos que  $M(t_0)$  no interseca a  $\Sigma$ . Para ello se toma la superficie  $M(t_0)^+$  y se mueve en la dirección del vector  $(1, 0, 0)$  hasta que no toque a  $\Sigma$  (esto es posible, porque  $\Sigma$  es compacta). Ahora se mueve hacia el plano  $x_2x_3$ . Obsérvese que por las propiedades 1 y 2 anteriores, la frontera de  $M(t_0)^+$  está incluida en  $\{x \in \mathbb{R}^3; |x_3| \geq m(t_0)\}$ . Usando el Principio de Comparación y ya que la curvatura



media de  $M(t_0)^+$  es mayor que la de  $\Sigma$ , conseguimos que  $M(t_0)^+$  no interseque a  $\Sigma$ . Con un razonamiento análogo,  $M(t_0)^-$  tampoco interseca a  $\Sigma$ . Por tanto  $M(t_0) \cap \Sigma = \emptyset$ . Se deforma ahora  $M(t_0)$  haciendo  $t_0 \rightarrow 4a$  hasta conseguir  $M(4a)$ , es decir, un rosario de esferas tangentes. Ya que  $1/2a > H$  y

$$(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap M(t) \subset (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap P = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap \gamma(t) = \emptyset \quad \forall t \in I,$$

el Principio de Comparación asegura que  $M(t)$  no interseca a  $\Sigma$ , para cada  $t \in I$ . Por tanto,  $\Sigma$  no interseca el plano vectorial  $x_1x_3$  y de ahí se concluye que no es conexa.

□

Como consecuencia, se deduce

**Proposición 3.5.3** *Sean dos curvas de Jordan  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  con la propiedad (S) y  $V_0 > 0$ . Entonces existe  $H_0 = H_0(\Gamma_1, \Gamma_2, V_0) > 0$  tal que cualquier superficie de curvatura media constante  $H$ , con frontera  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $|H| \leq H_0$  y volumen menor que  $V_0$ , no es conexa.*

*Demostración:* Si existe una sucesión  $\Sigma_k$  de superficies conexas y compactas de curvaturas medias constantes  $H_k$ , con volúmenes  $|V_k| \leq V_0$  y  $H_k \rightarrow 0$ , por la fórmula de Minkowski (3.7) se deduce que la sucesión de áreas  $A_k$  de  $\Sigma_k$  está acotada. La fórmula de la estimación de la altura prueba que la sucesión de alturas  $h_k$  sobre el plano que contiene a  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  converge a cero y aplicando el lema anterior se llega a una contradicción con el hecho de que las superficies sean conexas.

□

Esta proposición asegura que, dadas dos curvas de Jordan  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  con la propiedad (S), cualquier superficie con frontera  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  y de curvatura media constante  $H$  no es conexa si  $H$  y su volumen son suficientemente pequeños.

**Teorema 3.5.4 ([46])** *Sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  dos curvas cerradas y convexas con la propiedad (S). Si  $\text{area}(\Omega_1) \neq \text{area}(\Omega_2)$ , existe  $V_0 = V_0(\Gamma_1, \Gamma_2) > 0$  tal que cualquier superficie compacta de curvatura media constante, con frontera  $\Gamma$  y volumen  $|V| \leq V_0$  no es conexa.*

*Demostración:* El razonamiento es análogo al Teorema 3.4.5. Sólomente es necesario observar que la hipótesis sobre las áreas de los dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  permite, a partir de la igualdad (2.2), probar que la sucesión  $\{H_k\}$  está acotada. El resto de los pasos son análogos.

□

En el anterior teorema ha sido básico el hecho de que las áreas de los dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  fueran distintas. Una situación geométrica donde se tiene que dichas áreas son diferentes es el caso en que la superficie, localmente alrededor de la frontera, se encuentre contenida en uno de los dos semiespacios determinados por el plano de la frontera y sea transversa al plano a lo largo de ella. En este caso el miembro de la izquierda de la Fórmula de Equilibrio (2.5) no se anula. Por tanto, si la frontera está formada por dos curvas cerradas y convexas que se pueden separar por una recta de  $P$  y siguiendo los mismos pasos que en la demostración de Teorema 3.5.4, se concluye lo siguiente.

**Corolario 3.5.5** Sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  dos curvas de Jordan convexas con la propiedad (S). Entonces existe  $V_0 = V_0(\Gamma_1, \Gamma_2) > 0$  tal que cualquier superficie con frontera  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , contenida localmente alrededor de la frontera en uno de los dos semiespacios determinados por el plano que la contiene y con volumen  $|V| \leq V_0$ , no es conexa.

Ahora es fácil probar, a partir del Teorema 3.5.4 y junto con el Teorema 3.4.5 y el Corolario 3.4.6, los resultados siguientes

**Corolario 3.5.6** Sean  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  dos curvas cerradas y convexas con la propiedad (S). Si el área de  $\Omega_1$  es distinta de la de  $\Omega_2$ , existe un número real  $V_1 = V_1(\Gamma_1, \Gamma_2)$ ,  $0 < V_1 \leq V_0$  tal que, cualquier superficie compacta de curvatura media constante con frontera  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  y de volumen menor que  $V_1$ , está formada por dos grafos sobre  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ .

**Corolario 3.5.7** Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  dos dominios convexas acotados y disjuntos y con distintas áreas. Entonces existe un número positivo  $V_{1,2}$  que depende sólo de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  tal que, para cualquier número real  $V$  con  $0 < V \leq V_{1,2}$ , la región isoperimétrica

correspondiente al par  $(\Omega_1 \cup \Omega_2, V)$  está acotada por  $(\Omega_1 \cup G_1) \cup (\Omega_2 \cup G_2)$ , donde  $G_i$  es un grafo sobre  $\Omega_i$  de curvatura media constante y con frontera  $\partial\Omega_i$ ,  $i = 1, 2$ .

En el caso de que  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  sean dos circunferencias, se obtiene

**Corolario 3.5.8** Sean dos circunferencias  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  de distintos radios, incluidas en un plano  $P$  y que determinan discos disjuntos  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Entonces existe un número positivo  $V(\Gamma_1, \Gamma_2)$  tal que, cualquier superficie compacta de curvatura media constante con frontera  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  y volumen menor o igual que  $V(\Gamma_1, \Gamma_2)$ , está formada por dos casquetes esféricos pequeños. Además, las regiones isoperimétricas respecto al par  $(\Omega_1 \cup \Omega_2, V)$ , para  $V \leq V(\Gamma_1, \Gamma_2)$ , están acotadas por  $(\Omega_1 \cup S_1) \cup (\Omega_2 \cup S_2)$ , donde  $S_1$  y  $S_2$  son esos casquetes esféricos pequeños sobre  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

## Capítulo 4

# Superficies con borde circular

En los capítulos anteriores hemos combinado el uso de las herramientas clásicas en el estudio de las superficies de curvatura media constante, descritas en el Capítulo 1, con la más reciente Fórmula de Equilibrio debida a Kusner, que se ha usado en el Capítulo 2 para obtener resultados de unicidad. Por último, hemos deducido en el Capítulo 3 una Fórmula de Crecimiento del Area, que nos ha permitido estudiar con éxito la forma de las superficies compactas con curvatura media constante inmersas en  $\mathbb{R}^3$  cuyo borde es plano, sobre todo cuando la curva del borde es convexa y cuando la superficie es pequeña en algún sentido. La conclusión era, casi siempre, en ese Capítulo 3 obligar a la superficie a ser un grafo. La novedad fundamental de nuestros resultados de los Capítulos 2 y 3 es que se aplican igualmente a los casos embebido e inmerso, cosa no habitual en la literatura que trata estos temas.

En este Capítulo 4 final, endurecemos aún algo más nuestras hipótesis sobre el borde de las superficies que estudiamos e impondremos casi siempre que ese borde es una circunferencia, que, sin pérdida de generalidad, supondremos de radio uno. Así pues, trabajaremos con inmersiones  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $\Sigma$  es una superficie compacta con frontera  $\partial\Sigma$  conexa,  $\phi$  tiene curvatura media constante  $H$  y

$$\langle \phi(p), a \rangle = 0 \quad |\phi(p)| = 1$$

para cada  $p \in \partial\Sigma$  y para cierto  $a \in \mathbb{R}^3$ ,  $|a| = 1$ . Además supondremos que  $\phi|_{\partial\Sigma}$  es inyectiva, es decir, que  $\phi : \partial\Sigma \rightarrow \phi(\partial\Sigma)$  tiene grado uno. Consecuencia directa de la Fórmula de Equilibrio (Corolario 2.1.2) es que el rango de posibles valores de  $H$  es  $[-1, 1]$ , o sea, que  $|H| \leq 1$ . Además, en el caso minimal  $H = 0$ , está claro

que  $\phi(\Sigma)$  es el disco determinado por la circunferencia unidad  $\phi(\partial\Sigma)$ . En otro caso, elegimos siempre la orientación de  $\Sigma$  de forma que  $H$  sea positivo, y así tenemos que  $H \in (0, 1]$ . Ese mismo Corolario 2.1.2 afirma que el valor extremo  $H = 1$  se alcanza si y sólo si la superficie es perpendicular al plano del borde a lo largo de  $\partial\Sigma$ . En ese caso, Brito y Earp demostraron en [13] que  $\phi$  es umbilical y la superficie  $\phi(\Sigma)$  es una semiesfera de radio uno. En los restantes casos, o sea, cuando

$$0 < H < 1$$

se conoce realmente poco sobre la estructura del espacio de superficies compactas inmersas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  y con borde una circunferencia de radio uno. Sabemos, que para cada uno de esos valores de  $H$ , existen los dos casquetes correspondientes de radio  $1/H$ . Para el valor central  $H = 1/2$ , Kapouleas construyó ([37]) superficies de este tipo con género arbitrario mayor que dos, que están a un lado del plano del borde, que no son embebidas y que alcanzan sobre ese plano una altura arbitraria. Teniendo presente esta falta de ejemplos y los teoremas clásicos de Hopf ([35]), de Alexandrov ([3]) y de Barbosa y do Carmo ([9]) para el caso sin borde, nos proponemos en este Capítulo decir algo acerca de las tres siguientes preguntas:

**P1.** ¿Un disco inmerso en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante y borde una circunferencia es un casquete esférico?

**P2.** ¿Una superficie compacta embebida en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante y borde circular es forzosamente un casquete esférico?

**P3.** ¿Una superficie compacta inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante que sea estable es un casquete esférico?

Respecto de estas cuestiones, en la literatura caben resaltar dos resultados importantes. El primero es debido a Earp, Brito, Meeks y Rosenberg ([14]) y asegura que una superficie compacta, embebida y de curvatura media constante, cuyo borde es una circunferencia y que sea transversa a lo largo de ella al plano que la contiene, es un casquete esférico. El segundo resultado está enunciado en [40] por Koiso y

afirma que, fijado un volumen  $V > 0$  y una circunferencia, los casquetes esféricos son las superficies de menor área entre todas las superficies compactas con volumen  $V$  y con frontera dicha circunferencia.

Nosotros daremos también algunas respuestas parciales a las preguntas P1 y P2, fundamentalmente cuando el área de la superficie, el volumen que encierra o la integral de la norma de su segunda forma fundamental no sobrepasan los valores críticos que toman en los casquetes esféricos. Respecto de la tercera cuestión, reconocemos no haber tenido apenas éxito.

## 4.1 Discos de área pequeña

Supongamos que nuestra superficie  $\Sigma$  es topológicamente un disco y que la inmersión  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  tiene curvatura media constante  $H$  y su borde es una circunferencia de radio uno. Podemos entonces aplicar la desigualdad isoperimétrica de Barbosa y do Carmo ([7]) en la versión ya expuesta en el Lema 3.3.1. Como  $\phi$  restringida al borde de  $\Sigma$  es un embebimiento, la longitud de  $\partial\Sigma$  respecto de la métrica inducida por  $\phi$  es exactamente  $2\pi$ . Por lo tanto,

$$4\pi^2 - 4\pi A + H^2 A^2 \geq 0,$$

donde  $A$  es el área de nuestra superficie. Entonces

$$A \leq A_- = \frac{2\pi}{H^2}(1 - \sqrt{1 - H^2}) \quad \text{ó} \quad A \geq A_+ = \frac{2\pi}{H^2}(1 + \sqrt{1 - H^2}), \quad (4.1)$$

desigualdades que son significativas ya que  $|H| \leq 1$ . Además, si alguna de estas dos desigualdades llega a ser igualdad, entonces  $K = H^2$  en  $\Sigma$  y la inmersión es umbilical. En tal caso,  $\phi(\Sigma)$  es un casquete esférico. Justamente  $A_-$  y  $A_+$  son, respectivamente, las áreas de un casquete esférico pequeño y uno grande con curvatura media  $|H|$  y frontera una circunferencia de radio uno. Por otro lado, como consecuencia de la Fórmula de Equilibrio, tenemos este otro resultado.

**Teorema 4.1.1** ([47]) *Sea  $\Sigma$  un disco y  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión con curvatura media constante  $H \neq 0$  cuya frontera es una circunferencia de radio uno. Entonces*

el área de la superficie cumple

$$A \geq A_- = \frac{2\pi}{H^2} (1 - \sqrt{1 - H^2}).$$

Además se da la igualdad si y sólo si  $\phi$  es umbilical y la superficie es el casquete esférico pequeño de radio  $1/|H|$ .

*Demostración:* Se elige una parametrización  $\gamma$  por el arco de  $\partial\Sigma$  tal que, si llamamos  $\alpha$  a  $\phi \circ \gamma$ , se tenga  $\alpha(s) \wedge \alpha'(s) = a$ , para cada  $s$ , donde  $a$  es un vector unitario ortogonal al plano que contiene al borde. Se representa por  $k_g$  la curvatura geodésica de  $\partial\Sigma$  respecto de la métrica inducida. Ya que la frontera es una circunferencia de radio uno,

$$k_g^2(s) = 1 - k_n^2(s), \quad (4.2)$$

donde  $k_n(s)$  es la curvatura normal de  $\Sigma$  en la dirección de  $\alpha'(s)$ . Si  $N$  es la aplicación de Gauss correspondiente a  $H$ ,

$$\begin{aligned} k_n(s) &= -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle = \langle N(s), \alpha''(s) \rangle \\ &= -\langle N(s), \alpha(s) \rangle = -\langle N(s) \wedge \alpha'(s), a \rangle. \end{aligned}$$

La Fórmula de Equilibrio da

$$\int_{\partial\Sigma} k_n(s) ds = H \int_{\partial\Sigma} \langle \alpha(s) \wedge \alpha'(s), a \rangle ds = 2\pi H.$$

Se usa ahora dos veces la desigualdad de Cauchy-Schwarz y también (4.2):

$$\begin{aligned} 4\pi^2 H^2 &\leq 2\pi \int_{\partial\Sigma} k_n^2(s) ds = 4\pi^2 - 2\pi \int_{\partial\Sigma} k_g^2(s) ds \\ &\leq 4\pi^2 - \left( \int_{\partial\Sigma} k_g(s) ds \right)^2. \end{aligned}$$

Entonces se concluye que

$$\left| \int_{\partial\Sigma} k_g(s) ds \right| \leq 2\pi \sqrt{1 - H^2}.$$

De esta desigualdad, usando el Teorema de Gauss-Bonnet y teniendo en cuenta que  $\Sigma$  es un disco, se obtiene

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int_{\Sigma} K d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} k_g(s) ds \leq AH^2 + \int_{\partial\Sigma} k_g(s) ds \\ &\leq AH^2 + 2\pi \sqrt{1 - H^2}, \end{aligned}$$

y la demostración de la primera parte del teorema ha finalizado. La igualdad en la desigualdad del Teorema 4.1.1 es equivalente a que  $K = H^2$  en la superficie, es decir, a que la superficie sea umbilical. Como  $A = A_-$ , entonces es el casquete esférico pequeño de radio  $1/|H|$ .

□

Combinando este teorema y la desigualdad isoperimétrica que hemos obtenido en (3.6), se llega a la conclusión siguiente.

**Corolario 4.1.2 ([47])** *Si el área de un disco inmerso en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  y con frontera una circunferencia de radio uno satisface*

$$A \leq A_+ = \frac{2\pi}{H^2} (1 + \sqrt{1 - H^2}),$$

*entonces la inmersión es umbilical y su imagen es un casquete esférico.*

*Demostración:* Si  $A \leq A_+$ , entonces del Teorema 4.1.1 y por (4.1) se obtiene  $A = A_-$  o  $A = A_+$ , es decir,  $\phi$  es umbilical y su imagen es un casquete esférico (el pequeño o el grande respectivamente).

□

De manera que, con relación a la cuestión P1, podemos decir que si existe algún disco inmerso en  $\mathbb{R}^3$  que bordea una circunferencia con curvatura media constante, que no sea un casquete esférico, su área debe ser mayor que la del correspondiente casquete esférico grande.

Por otra parte, el Corolario 4.1.2 puede reformularse del siguiente modo: el único disco de curvatura media constante cuya frontera es una circunferencia y tiene área menor que la del correspondiente casquete esférico grande, es el casquete esférico pequeño. En el siguiente teorema, y gracias a la estimación de la altura obtenida en la Sección 1 del Capítulo 3 anterior, suponemos que el área es pequeña y eliminamos la hipótesis topológica a cambio de que la superficie no tenga autointersecciones. Concretamente tenemos.

**Teorema 4.1.3 ([48])** *Las únicas superficies compactas embebidas de curvatura media constante  $H \neq 0$  con frontera una circunferencia y cuya área  $A$  satisfacen*

$$AH^2 \leq 2\pi$$

*son los casquetes esféricos.*

*Demostración:* Por el Corolario 3.2.2, la superficie se encuentra contenida en uno de los dos semiespacios determinado por el plano que contiene a la circunferencia y es transversa, a lo largo de ella, a dicho plano. Ahora aplicamos el Corolario 1.3.2 para concluir que la superficie es un casquete esférico. □

Este resultado puede reformularse de la siguiente manera:

*Toda superficie compacta embebida en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante y frontera una circunferencia, cuya área sea menor o igual que el área de una semiesfera de la misma curvatura media, es un casquete esférico.*

## 4.2 Discos de volumen pequeño

En el Teorema 3.4.5 y en el Corolario 3.4.6 del Capítulo 3 anterior vimos que las superficies compactas de curvatura media constante inmersas en  $\mathbb{R}^3$  que bordean una curva convexa y tienen volumen pequeño deben ser grafos sobre el dominio plano determinado por la curva. Cuando la curva convexa es una circunferencia de radio unidad, la superficie es un disco y la inmersión es inyectiva sobre el borde, podemos calcular con exactitud los valores de las mejores constantes que aparecían en esos teoremas.

**Teorema 4.2.1 ([48])** *Un disco inmerso con curvatura media constante y con frontera una circunferencia es un casquete pequeño siempre que su volumen algebraico sea menor o igual que el volumen de una semiesfera.*

*Demostración:* Se representará por  $D$  el disco y por  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  la inmersión con curvatura media constante  $H$ , con área  $A$  y volumen algebraico  $V$ . El caso minimal  $H = 0$  es evidente. Supongamos pues que  $H > 0$ . Pongamos que  $\phi(\partial D)$  es una circunferencia de radio 1, es decir,

$$\{p \in \mathbb{R}^3; |p|^2 = 1, \langle p, a \rangle = 0\},$$

donde  $a$  es un vector unitario. Si  $\nu$  representa el conormal interior de  $\phi$  a lo largo de la frontera  $\partial D$ , la desigualdad de Schwarz da

$$\left( \int_{\partial D} \langle \nu, \phi \rangle ds \right)^2 \leq 2\pi \int_{\partial D} \langle \nu, \phi \rangle^2 ds = 2\pi \int_{\partial D} (1 - \langle \nu, a \rangle^2) ds. \quad (4.3)$$

Usando de nuevo la desigualdad de Schwarz y la igualdad (2.5), se obtiene

$$\int_{\partial D} \langle \nu, a \rangle^2 ds \geq \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\partial D} \langle \nu, a \rangle ds \right)^2 = 2\pi H^2.$$

Sustituyendo en (4.3) tiene

$$\left| \int_{\partial D} \langle \nu, \phi \rangle ds \right| \leq 2\pi \sqrt{1 - H^2}.$$

Esta desigualdad da una cota superior del miembro de la derecha en la fórmula de Minkowski (3.7) para la inmersión  $\phi$ . Entonces

$$A - 3HV \leq \pi \sqrt{1 - H^2}. \quad (4.4)$$

Por otro lado, se probó en el Corolario 4.1.2 que, si  $\phi(D)$  no es un casquete pequeño con curvatura media  $H$ , entonces el área  $A$  debe ser mayor que el área del correspondiente casquete grande. Esto es,

$$A > \frac{2\pi}{H^2} (1 + \sqrt{1 - H^2}).$$

Por tanto, por (4.4) y la última desigualdad tendremos, si la superficie no es un casquete pequeño, que

$$V > f(H) =: \frac{2\pi}{3H^3} (1 + \sqrt{1 - H^2}) - \frac{\pi}{3H} \sqrt{1 - H^2}.$$

Como la curvatura media  $H$  se mueve en el intervalo  $(0, 1]$  y  $f$  es una función creciente, se concluye que  $V > 2\pi/3$ , como se había afirmado.  $\square$

Podemos decir aquí, como al final de la sección anterior, que si existen discos de curvatura media constante que bordean una circunferencia, no siendo los casquetes esféricos, deben encerrar un volumen mayor que el que encierra el correspondiente casquete grande.

### 4.3 Discos estables y con geometría pequeña

La tercera cuestión que nos planteábamos en la introducción de este Capítulo 4 era tratar de averiguar alguna cosa sobre las superficies compactas con curvatura media constante que bordean una circunferencia, por ejemplo, de radio uno que son estables, incluso suponiendo que tienen la topología más simple posible: la del disco. En el Capítulo 1 hablamos de dos tipos de estabilidad (Definición 1.1.4) según que viéramos la inmersión como punto crítico de uno u otro problema variacional. Supongamos primeramente que nuestro disco es estable.

Sean  $\nabla^2$  y  $\Delta$  respectivamente los operadores hessiano y laplaciano asociados a la métrica en  $\Sigma$  inducida por el producto escalar  $\langle, \rangle$  usual de  $\mathbb{R}^3$ . Se define la función  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$h = \langle \phi \wedge N, a \rangle, \quad a \in \mathbb{R}^3,$$

esto es,  $h$  es la componente normal del campo de Killing de  $\mathbb{R}^3$  correspondiente a las rotaciones alrededor del vector  $a$ . Para cada  $p \in \Sigma$  y  $v \in T_p\Sigma$ , se tiene

$$(dh)_p(v) = \langle (d\phi)_p(v) \wedge N(p), a \rangle - \langle \phi(p) \wedge A_p v, a \rangle,$$

donde  $A$  es el endomorfismo de Weingarten de  $\phi$ . De aquí, se puede calcular el hessiano  $\nabla^2 h$  de la función  $h$ . De hecho, si  $p \in \Sigma$  y  $u, v \in T_p\Sigma$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 h)_p(u, v) &= -\langle (d\phi)_p(v) \wedge A_p u, a \rangle - \langle (d\phi)_p(u) \wedge A_p v, a \rangle \\ &\quad - \langle \phi(p) \wedge (\nabla A)_p(u, v), a \rangle - \langle A_p u, A_p v \rangle h(p), \end{aligned}$$

donde  $\nabla A$  es la derivada covariante de  $A$ . Tomando trazas en esta igualdad, se concluye que

$$\Delta h = -2\langle \phi \wedge \nabla H, a \rangle - |\sigma|^2 h.$$

Como la curvatura media de  $\Sigma$  es constante, la función  $h$  satisface una ecuación elíptica, que no es nada más que la ecuación de Jacobi correspondiente al operador

de la segunda variación del área. Además  $\int_{\Sigma} h d\Sigma = 0$  porque las rotaciones conservan el volumen. Resumimos lo anterior de la siguiente forma.

**Lema 4.3.1** *Sea una inmersión  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  de una superficie compacta con curvatura media constante y  $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación de Gauss suya. Entonces si  $a \in \mathbb{R}^3$ , la función  $h = \langle \phi \wedge N, a \rangle$  satisface*

$$\Delta h + |\sigma|^2 h = 0 \quad \int_{\Sigma} h d\Sigma = 0,$$

siendo  $\sigma$  la segunda forma fundamental de  $\phi$ . Además, si la frontera es una circunferencia y  $a$  es un vector perpendicular a ella, la función  $h$  se anula a lo largo de ella. Si  $h = 0$  en todo  $\Sigma$ , la superficie es rotacionalmente simétrica respecto del eje  $a$ , es decir, la superficie es un casquete esférico.

La función  $h$  del lema anterior es una función propia del operador elíptico  $L = \Delta + |\sigma|^2$  y por tanto sus líneas nodales están descritas en [18]. Si la frontera es una circunferencia, entonces la función  $h$  se anula en ella y por tanto la frontera es una línea nodal. En este caso si  $h$  tiene un único dominio nodal, como ocurre cuando la superficie es fuertemente estable, este dominio es toda la superficie y  $h$  tendría signo en ella. Pero  $\int_{\Sigma} h d\Sigma = 0$ . Por consiguiente,  $h$  es constantemente cero en  $\Sigma$ , es decir, es un casquete esférico. Por lo tanto,

**Teorema 4.3.2** *Los casquetes esféricos pequeños son las únicas superficies compactas de curvatura media constante, cuya frontera es una circunferencia y que son fuertemente estables.*

*Demostración:* Se considera la función  $h$  del lema anterior. Si  $h$  es constantemente cero en la superficie, entonces es un casquete esférico. En otro caso, se va a llegar a una contradicción. Si  $h$  no es constantemente cero,  $h$  cambia de signo ya que  $\int_{\Sigma} h d\Sigma = 0$ . Por tanto, la función  $h$  es una función propia del operador  $L = \Delta + |\sigma|^2$  para el problema de Dirichlet y con valor propio  $\lambda = 0$ . Como la superficie es estable, el primer valor propio del laplaciano es cero. Como la primera función propia no cambia de signo ([18]),  $h$  tiene signo en  $\Sigma$ , llegandose a una contradicción.

□

Cuando la superficie es sólo estable, y no fuertemente estable, se tiene:

**Lema 4.3.3** *Si  $\Sigma$  es una superficie compacta de curvatura media constante, estable y la función  $h$  cambia de signo, entonces  $h$  tiene exactamente dos dominios nodales.*

*Demostración:* Ya que  $\Delta h + |\sigma|^2 h = 0$ ,  $h$  es una función propia del operador  $L$  con valor propio igual a cero. Además la estabilidad implica que el operador  $L$  tiene un único valor propio negativo para el problema de Dirichlet. Por tanto el valor 0 es el segundo valor propio y  $h$  es una segunda función propia de  $L$ . Por el Teorema de Courant ([17]),  $h$  tiene a lo más dos dominios nodales. Por otra parte, como  $h$  cambia de signo, tiene al menos dos dominios nodales y por consiguiente, existen exactamente dos.

□

La proposición siguiente estudia la topología de los dominios nodales de la función  $h$  para una superficie de género cero con curvatura media constante y frontera una circunferencia.

**Proposición 4.3.4** *Sea  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión de un disco con curvatura media constante y frontera una circunferencia. Si  $\Sigma$  es estable, entonces los dos dominios nodales de la función  $h$  descrita en el Lema 4.3.1 son simplemente conexos, a no ser que  $\phi(\Sigma)$  sea un casquete esférico.*

*Demostración:* Supongamos que la imagen de la inmersión no es un casquete esférico y sean  $\Omega_1, \Omega_2$  los dominios nodales. Para probar que son simplemente conexos es suficiente con demostrar que existe una línea nodal que interseca a  $\partial\Sigma$ .

Sea  $\nu$  el conormal interior a lo largo de  $\partial\Sigma$ . Se orientan  $\partial\Sigma$  y  $\Sigma$  para que  $\{\phi_*(t), \nu, N\}$  y  $\{\phi_*(t), \phi, a\}$  sean bases positivamente orientadas de  $\mathbb{R}^3$ , donde  $\phi_*(t)$  es un campo tangente unitario a  $\Gamma$  y  $a$  es un vector unitario perpendicular al plano que contiene a la circunferencia. Ya que  $h|_{\partial\Sigma} = 0$ , se deduce que  $(dh)_p(t_p) = 0$  para cada  $p \in \partial\Sigma$ . Por otra parte,

$$(dh)_p \nu_p = \langle \nu_p \wedge N(p), a \rangle + \langle \phi(p) \wedge dN_p \nu_p, a \rangle = \sigma(t, \nu)(p). \quad (4.5)$$

En el siguiente paso, se prueba que la aplicación definida en  $\partial\Sigma$  por

$$p \longmapsto \sigma(t, \nu)(p)$$

tiene al menos un cero. Si no fuera así, entonces ningún punto de la frontera  $\partial\Sigma$  es umbilical y además los vectores  $t$  y  $\nu$  tampoco serían direcciones principales. Por tanto las distribuciones unidimensionales asociadas a las curvaturas principales son transversales a la frontera  $\partial\Sigma$  en todo punto. Usando el teorema de Poincaré-Hopf como en la demostración de la Proposición 2.1.3, se llega a una contradicción con el hecho de que  $\Sigma$  tenga género cero. Por tanto,  $\sigma(t, \nu)$  se anula al menos una vez. Si  $p \in \partial\Sigma$  es un punto donde  $\sigma(t, \nu)$  se anula, entonces el punto  $p$  es un punto crítico de la función propia  $h$  por (4.5). Se prueba ahora que hay otra línea nodal diferente de  $\partial\Sigma$  empieza en el punto  $p$  o  $h$  es idénticamente cero. De hecho, si  $h$  no cambia de signo en cada entorno del punto  $p$ , existiría un entorno  $U$  de  $p$  en  $\Sigma$  donde  $h$  sería, por ejemplo, no negativa. Así que

$$\Delta h|_U = -|\sigma|^2 h|_U \leq 0$$

y usando el principio del máximo (Teorema 1.2.2),  $h$  no puede alcanzar su mínimo cero en un punto interior o en  $p$ , ya que  $(dh)_p = 0$ . Pero como  $h(p) = 0$ , entonces  $h$  es constante y constantemente cero en  $U$  y de aquí, por el principio de continuación única, es cero en  $\Sigma$ , en contradicción con la hipótesis.

□

No sabemos utilizar la información conseguida hasta ahora sobre la función  $h$ , que es una función de Jacobi de nuestro problema variacional, para concluir, quizás, que un disco de curvatura media constante estable y que bordea una circunferencia es un casquete esférico. Sin embargo, existe una condición que Barbosa y do Carmo ([9]), siguiendo una idea de Ruchert ([59]), demostraron que es más fuerte que la estabilidad: el hecho de que la segunda forma fundamental sea pequeña en el sentido  $L^2$ . Con esa hipótesis sí tenemos éxito.

**Teorema 4.3.5** *Sea una inmersión  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  de curvatura media constante  $H$  de un disco  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}^3$  con frontera una circunferencia de radio uno. Si*

$$\int_{\Sigma} |\sigma|^2 d\Sigma < 8\pi,$$

entonces la imagen de  $\phi$  es un casquete esférico.

*Demostración:* Sea la función  $h$  del Lema 4.3.1. Se tienen dos posibilidades:

- a) La función  $h$  se anula en todo  $\Sigma$ . En tal caso,  $\phi(\Sigma)$  es un casquete esférico.
- b)  $h \neq 0$  en  $\Sigma$ . Por el resultado comentado anteriormente de Barbosa y do Carmo, la superficie es estable, y por el Lema 4.3.3, la función  $h$  tiene exactamente dos dominios nodales, que además son simplemente conexos. Se probará que este caso es imposible. La hipótesis nos asegura que, al menos, un dominio nodal, que se representará por  $\Omega$ , cumple  $\int_{\Omega} |\sigma|^2 d\Sigma \leq 4\pi$ . Se considera la métrica  $d\bar{s}^2 = |\sigma|^2/2 ds^2$ . Se comprueba que la superficie  $(\Sigma, d\bar{s}^2)$  tiene curvatura de Gauss  $\bar{K} \leq 1$ , y la igualdad se da si y sólo si  $\phi : (\Sigma, ds^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  es umbilical ([8]). Sea  $v = h|_{\Omega}$  la restricción  $h$  en  $\Omega$ . Por el Lema 4.3.1, se obtiene

$$\bar{\Delta}v + 2v = 0 \text{ en } \Omega$$

$$v = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

donde  $\bar{\Delta}$  es el operador laplaciano respecto de la métrica  $d\bar{s}^2$ . Ya que  $v$  tiene signo en  $\Omega$  y es una función propia para la métrica  $d\bar{s}^2$ , es una función propia para el primer valor propio con condición de frontera de tipo Dirichlet. Si se representa por  $\bar{\lambda}_1(\Omega)$  el primer valor propio del laplaciano con condición de Dirichlet en la superficie  $(\Omega, d\bar{s}^2)$ , se obtiene

$$\bar{\lambda}_1(\Omega) = 2.$$

Por otra parte,

$$\text{area}(\Omega, d\bar{s}^2) = \int_{\Omega} \frac{|\sigma|^2}{2} d\Sigma \leq 2\pi.$$

Sea un disco geodésico  $\Omega^*$  en la esfera unidad  $S^2(1)$  con

$$\text{area}(\Omega^*) = \text{area}(\Omega).$$

Se compara el primer valor propio de  $\Omega^*$  con primer valor propio de la semiesfera: ya que  $\text{area}(\Omega^*) \leq 2\pi$ , se obtiene  $\lambda_1(\Omega^*) \geq 2$ . Como  $\Omega$  es simplemente conexo, la Proposición 3.3 en [8] da

$$\lambda_1(\Omega^*) \leq \bar{\lambda}_1(\Omega)$$

y la igualdad es cierta si y sólo si  $(\Omega, d\bar{s}^2)$  tiene curvatura de Gauss  $\bar{K}$  igual a 1 en todo punto. Por consiguiente,  $\lambda_1(\Omega^*) = 2 = \bar{\lambda}_1(\Omega)$  y  $\bar{K} \equiv 1$ . Esto significa que  $\phi$  es una inmersión umbilical, la superficie es un casquete esférico y  $h \equiv 0$  en  $\Sigma$ , lo cual es una contradicción.

□

La desigualdad  $\int_{\Sigma} |\sigma|^2 d\Sigma < 8\pi$  y el hecho de que  $|\sigma|^2 \geq 2H^2$  implican que el área  $A$  de  $\Sigma$ , verifica la desigualdad  $AH^2 \leq 4\pi$ . Recuérdese que en el Corolario 4.1.2 se ha probado que los únicos discos inmersos con curvatura media constante  $H$  cuya frontera es una circunferencia de radio uno y con  $AH^2 \leq 2\pi(1 + \sqrt{1 - H^2})$  son los casquetes esféricos. Por tanto, el Corolario 4.1.2 es independiente del Teorema 4.3.5. De la misma forma, los Teoremas 4.1.3 y 4.3.5 son también independientes.

## 4.4 Superficies embebidas en una banda

Esta sección está motivada por la estimación de la altura de un grafo con curvatura media constante y frontera plana: en el Lema 1.4.3 se probó que dicho grafo no puede levantarse más de  $1/|H|$  respecto del plano  $P$  que contiene a la frontera, donde  $H \neq 0$  es el valor de la curvatura media. Usando la técnica de reflexión de Alexandrov (Sección 1.3 del Capítulo 1), Meeks ([49]) probó que si la superficie es embebida, aunque no sea un grafo, entonces la superficie no puede alejarse más de  $2/|H|$  respecto de  $P$ . Por tanto, la superficie está contenida en una banda paralela a  $P$  de anchura  $4/|H|$ .

Es natural, pues, el estudio de superficies con curvatura media constante incluidas en la región determinada por dos planos paralelos (a la que llamaremos *banda*) y analizar cómo influyen la anchura y la posición de la banda en la forma que adopta la superficie. Así, si  $S$  es una banda y  $a$  es un vector unitario perpendicular a los planos que definen  $S$ , tenemos que la componente en la dirección de  $a$  de los puntos de  $\Sigma$  está acotada. De hecho Barbosa ha estudiado el caso en que, en lugar de una coordenada acotada, la superficie tiene dos o tres ([5], [6]). Nosotros generalizamos sus resultados considerando, como parece más natural, una sólo dirección acotada.

**Teorema 4.4.1** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta y embebida con curvatura media*

constante  $H \neq 0$  y cuya frontera  $\partial\Sigma$  es una circunferencia. Si  $\Sigma$  está contenida en una banda de anchura  $1/|H|$ , entonces es un casquete esférico pequeño de radio  $1/|H|$ .

*Demostración:* Se escoge el campo normal unitario  $N$  de  $\Sigma$  para que la curvatura media  $H$  sea positiva. Se representa por  $S$  la banda que contiene a la superficie. Sea un vector  $v$  unitario paralelo a  $S$ . Se considera  $C_v$  el semicilindro cerrado de radio  $1/2H$  no acotado, con eje contenido en el plano intermedio de  $S$ , perpendicular al vector  $v$  y tal que  $\partial C_v \subset \partial S$ . El conjunto  $C_v$  divide a  $S$  en dos componentes. Supongamos que  $v$  apunta a la componente no convexa y se considera la dirección de  $v$  como la de arriba y la dirección de  $-v$  como la dirección de abajo. Se aleja  $C_v$  hacia arriba suficientemente para que no interseque a  $\Sigma$  (esto es posible ya que  $\Sigma$  es compacta). Ahora se mueve  $C_v$  hacia abajo hasta que toque a  $\Sigma$  en la primera vez. En esta posición,  $\Sigma$  se encuentra completamente en la región cerrada convexa de  $S$  por debajo de  $C_v$ . Si se considera en  $C_v$  el campo normal unitario que apunta hacia la parte convexa, entonces la curvatura media de  $C_v$  es positiva y coincide con el valor  $H$ .

**Lema 4.4.2** *No existe un punto  $p$  interior a  $\Sigma$  tal que  $p$  pertenezca a  $C_v$  y la superficie  $\Sigma$  se encuentre por debajo de  $C_v$  (ver Figura 4.1).*

*Demostración: (del lema).* Ya que  $\Sigma$  se encuentra por debajo de  $C_v$  y  $p$  pertenece a  $C_v \cap \Sigma$ , entonces  $C_v$  y  $\Sigma$  son tangentes en  $p$ . Esto es cierto, incluso si  $p \in \partial C_v$ , ya que en este caso, el punto  $p$  también pertenece a la frontera de la banda  $S$ . Si los campos normales unitarios a las dos superficies coinciden en  $p$ , entonces se concluye, usando el Principio del Máximo, que  $\Sigma$  debe ser un subconjunto de  $C_v$ , lo cual no es posible ya que  $\partial\Sigma$  es una circunferencia. Si los campos normales de  $\Sigma$  y  $C_v$  no coinciden en  $p$ , entonces deben ser opuestos. En este caso, se considera en  $\Sigma$  la aplicación de Gauss  $-N$  y por tanto, la curvatura media es negativa: el Principio del Máximo da de nuevo una contradicción. Por tanto, el lema queda probado.

□

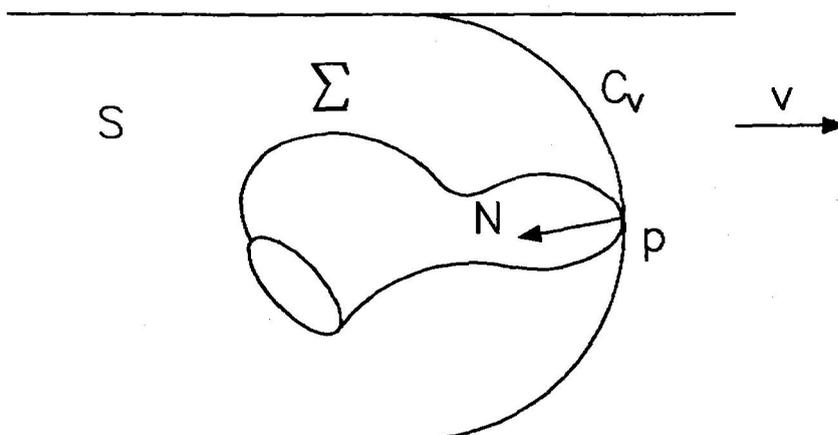


Figura 4.1: Demostración del Lema 4.4.2

**Lema 4.4.3** *Bajo las hipótesis del Teorema 4.4.1, no existe un punto  $p$  de  $\partial\Sigma$  perteneciente al interior de  $C_v$ , que sea punto de tangencia entre  $\Sigma$  y  $C_v$ , suponiendo que  $\Sigma$  se encuentra por debajo de  $C_v$ .*

*Demostración: (del lema).* Este lema puede ser probado de la misma forma que el anterior, ya que la hipótesis extra garantiza que se pueda aplicar el Principio del Máximo (versión frontera) como en el último lema.

□

De estos dos lemas se deduce que  $C_v$  toca a  $\Sigma$  solamente en puntos de  $\partial\Sigma$ . Estos puntos son puntos de la frontera de  $C_v$  o puntos de  $C_v$  donde  $\Sigma$  y  $C_v$  no son tangentes. Pueden ocurrir ahora dos posibilidades:

A) El plano  $P$  es perpendicular a  $S$ . En tal caso, sea una dirección  $v$  paralela a  $S$  y se consideran los semicilindros  $C_v$  y  $C_{-v}$ . Entonces  $\Sigma$  se encuentra contenida en el dominio convexo  $K_v$  que determinan  $C_v$  y  $C_{-v}$  en la banda  $S$ . Ya que  $v$  es perpendicular a  $P$ , los puntos en que  $C_v$  y  $C_{-v}$  tocan a  $\Sigma$  son idénticos y pertenecen a la frontera. Por tanto,  $C_v$  y  $C_{-v}$  se intersecan. Entonces  $K_v$  está contenido en un cilindro sólido de radio  $1/2H$ . Como  $1/2H < 1/H$ , el Teorema 3.1. de [6] afirma que  $\Sigma$  es un casquete esférico y el teorema está probado.

B) El plano  $P$  no es perpendicular a  $S$ . Como  $\partial\Sigma$  es una circunferencia no perpendicular a  $S$ , para cada vector  $v$  paralelo a  $S$ , los puntos de contacto entre  $C_v$  y  $C_{-v}$  con  $\partial\Sigma$  son opuestos en la circunferencia  $\partial\Sigma$ . Si se toman todos los vectores  $v$  en el conjunto de vectores paralelos a  $S$ , se obtiene que  $\Sigma$  se encuentra en el convexo  $K$  que determinan todos los conjuntos  $C_v$  (ver Figura 4.2). Además  $\partial\Sigma$  está incluido en la frontera de  $K$ . Sea  $\Omega$  el disco acotado por la circunferencia  $\partial\Sigma$  en el plano  $P$ . Ya que  $\Sigma \subset K$ ,  $\partial\Sigma \subset \partial K$  y  $K$  es un conjunto convexo, se obtiene  $(P - \overline{\Omega}) \cap \Sigma = \emptyset$ . Por el Lema 3.2.3, la superficie está contenida en uno de los semiespacios determinados por  $P$ . Usando ahora el método de Alexandrov, la superficie es un casquete esférico (ver Corolario 1.3.2).

□

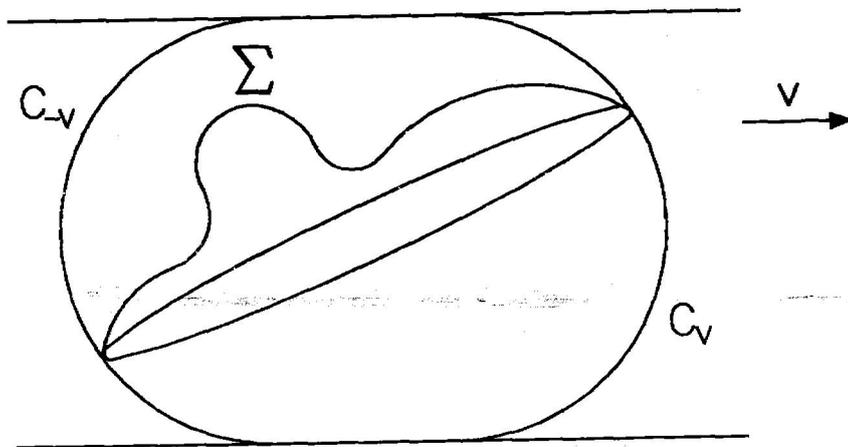


Figura 4.2: Apartado B de la demostración del Teorema 4.4.1

En el apartado A de la demostración anterior no se ha usado la hipótesis de embebimiento, es decir, el teorema, en esta situación, sigue siendo cierto para superficies inmersas. La hipótesis de embebimiento solamente se ha usado al final del apartado B, para poder aplicar el Lema 3.2.3. Por tanto, la demostración del Teorema 4.4.1 permite extraer la siguiente consecuencia:

**Corolario 4.4.4** Sea  $\Sigma$  una superficie compacta inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H \neq 0$  y cuya frontera es una circunferencia  $\partial\Sigma$  contenida en un plano  $P$ . Si  $\phi$  representa la inmersión y  $\phi(\Sigma)$  está incluida en una banda  $S$  de anchura  $1/|H|$ , en cualquiera de los siguientes casos,  $\phi(\Sigma)$  es un casquete esférico:

1.  $S$  es perpendicular a  $P$ .
2.  $\partial\Sigma$  tiene radio uno y  $|H| \leq 1/2$ .

*Demostración:* 1. Es la parte A) de la demostración del Teorema 4.4.1.

2. En este caso, el conjunto convexo  $K$  está contenido en un cilindro perpendicular a  $S$  de radio  $1 + 1/2|H|$ . Ya que  $|H| \leq 1/2$ , este radio es menor que  $1/|H|$  y podemos aplicar [6].

□

La demostración del Teorema 4.4.1 proporciona también la siguiente generalización en el caso de que la frontera  $\partial\Sigma$  sea una curva convexa.

**Corolario 4.4.5** Sea  $\Gamma$  una curva cerrada, convexa e incluida en un plano  $P$  y sea  $\Sigma$  una superficie compacta embebida de curvatura media constante  $H \neq 0$  y cuyo borde es  $\Gamma$ . Si la superficie está contenida en una banda no perpendicular a  $P$  y de anchura  $1/|H|$ , entonces la superficie está completamente contenida en uno de los semiespacios determinados por  $P$ .

*Demostración:* Si se repite el desarrollo de la demostración del Teorema 4.4.1 se concluye, con la misma notación, que para toda dirección paralela  $v$  a  $S$ , al mover los semicilindros  $C_v$  hacia  $\Sigma$ , éstos tocan a la superficie en puntos de  $\Gamma$ . Además, como  $\Gamma$  es una curva convexa, para cada punto de  $\Gamma$  existe una dirección  $v$  tal que  $C_v$  toca a  $\Sigma$  en dicho punto. Variando  $v$  y usando el hecho de que  $P$  no es perpendicular a  $S$ , se concluye que  $\Sigma$  no interseca a  $P - \bar{\Omega}$ . Por tanto, por el Lema 3.2.3, la superficie se encuentra en uno de los semiespacios determinados por  $P$ .

□

Siguiendo en la situación en que la curva  $\Gamma$  sea convexa, obtenemos el siguiente resultado para superficies inmersas:

**Corolario 4.4.6** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H \neq 0$  y cuya frontera es una curva plana, cerrada y convexa. Si la superficie se encuentra contenida en una banda de anchura  $1/|H|$  y simétrica respecto del plano  $P$  del borde, entonces la superficie está contenida en el cilindro recto determinado por su borde. Si además la superficie está embebida, entonces es un grafo.*

*Demostración:* Usando como en el anterior corolario semicilindros contenidos en  $S$  de radio  $1/2|H|$ , se deduce, por la convexidad del borde y por el Principio del Máximo, que la superficie se encuentra contenida en el cilindro sólido perpendicular a  $S$  y determinado por el borde de  $\Sigma$ .

Por otra parte, por el Principio del Máximo, si  $\nu$  es el conormal interior a  $\Sigma$  a lo largo del borde y  $a$  es un vector unitario perpendicular a  $P$ , se tiene que  $|\langle \nu, a \rangle| \neq 1$ . Por compacidad de la frontera, existe  $\delta > 0$  tal que  $|\langle \nu, a \rangle| \leq 1 - \delta$ . Por tanto, si la superficie está embebida, el Lema 3.2.3 y el método de Alexandrov prueban que la superficie es un grafo (ver el razonamiento de la página 38).

□

Combinando los Corolarios 2.2.2 y 4.4.6, se obtiene

**Corolario 4.4.7** *Sea  $\Gamma$  una curva cerrada y convexa contenida en un plano  $P$ . Entonces existe un número  $H_0 = H_0(\Gamma) > 0$ , que depende sólo de  $\Gamma$ , tal que si  $H \in \mathbb{R}$ ,  $0 < |H| \leq H_0$ , la única superficie de curvatura media constante  $H$  con frontera  $\Gamma$  contenida en una banda simétrica respecto de  $P$  y de anchura  $1/|H|$  es un grafo.*

Obsérvese que si  $H$  es pequeño, la anchura de la banda es grande (un comportamiento parecido ocurría en el Teorema 2.3.3 para superficies  $H$ -pequeñas). Por tanto, el anterior corolario puede reformularse de la siguiente manera

Sea  $\Gamma$  una curva cerrada y convexa contenida en un plano  $P$  y sea  $S$  una banda que contiene a  $P$ . Entonces toda superficie compacta inmersa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$ , con frontera  $\Gamma$  e incluida en  $S$  es un grafo sobre  $P$ , si  $H$  es suficientemente pequeño.

Para finalizar esta sección, se retoma el estudio de las superficies con curvatura media constante  $H \neq 0$  y con frontera una circunferencia  $\Gamma$  de radio uno. Es natural preguntarse si se puede generalizar el Teorema 4.4.1 para el caso inmerso. Si el plano que contiene a la frontera es el plano intermedio de la banda  $S$ , mediante un razonamiento análogo al del Corolario 4.4.5, la superficie se encuentra contenida en el cilindro sólido de radio uno, perpendicular a  $S$  y determinado por  $\Gamma$ . Ya que  $1 \leq 1/|H|$ , la superficie es un casquete esférico ([6]). No puede hacerse lo mismo si  $\Gamma$  se encuentra contenida en uno de los planos que definen la banda. Sin embargo, en esta situación, conseguimos un resultado parcial. Después de un cambio de coordenadas, se puede suponer que la banda  $S$  está determinada por los planos  $\{x_3 = -1/2|H|\}$  y  $\{x_3 = 1/2|H|\}$ .

**Teorema 4.4.8** Sea  $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión con curvatura media  $H > 0$  tal que

$$\phi(\partial\Sigma) = \Gamma = \left\{ (x_1, x_2, -\frac{1}{2H}) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

y  $\phi(\Sigma)$  está contenida en la banda  $S$ . Si  $H^2 \leq 3/4$ , entonces  $\phi(\Sigma)$  es el casquete pequeño de la esfera de radio  $1/|H|$ .

*Demostración:* Se probará que la superficie se encuentra en el cilindro sólido  $C = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 \leq 1/H^2\}$  y usando el resultado de [6] se tendrá que  $\phi(\Sigma)$  es un casquete esférico. Un razonamiento análogo al empleado en el Teorema 4.4.1 con semicilindros de radio  $1/2H$ , prueba que la superficie se encuentra en el convexo  $K$  determinado por la banda y todas las semicircunferencias de radio  $1/2H$  que se apoyan en  $\Gamma$ , contenidas cada una de ellas en un plano perpendicular a  $S$  y a  $\Gamma$ . La frontera de  $K$  es  $\partial K = T \cup D_1 \cup D_2$ , donde  $T$  es la parte convexa de un toro que resulta de girar una circunferencia de radio  $1/2H$ , perpendicular a  $S$  y a  $\Gamma$  y que se encuentra contenida en  $S$ ;  $D_1$  y  $D_2$  son dos discos de radio uno contenidos en cada uno de los planos de la banda,  $D_1$  es el disco acotado por  $\Gamma$  y  $D_2$  es  $D_1 + (0, 0, 1/H)$ .

Por el Corolario 4.4.4, se tiene que sólo es necesario probar el teorema cuando  $H$  varía en el intervalo  $(1/2, \sqrt{3}/2]$ . Un toro que resulta de girar respecto del eje  $x_3$  una circunferencia de radio  $r$  de la forma

$$t \mapsto (b, 0, 0) + r(\cos t, 0, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi], r > 0$$

tiene curvatura media

$$\bar{H} = \frac{b + 2r \cos t}{2r(b + r \cos t)}.$$

La parte convexa  $T$  del toro se corresponde con  $\cos t \geq 0$ . En nuestro caso,  $r = 1/2H$  y  $b = 1$ . Entonces la curvatura media  $\bar{H}$  es

$$\bar{H} = \frac{H + \cos t}{1 + \frac{1}{2H} \cos t},$$

y por tanto,  $H \leq \bar{H}$ . La idea ahora es ir deformando  $T$  a través de otros toros de revolución respecto del eje  $x_3$ . Concretamente se considera la siguiente familia de toros de revolución: se toma el siguiente trozo de circunferencia en el plano  $x_1x_3$

$$t \mapsto (\mu, 0, 0) + r(\cos t, 0, \sin t), \quad \mu + r \cos t \geq 1,$$

donde  $0 \leq \mu \leq 1$  y tal que  $r = \sqrt{\lambda^2 + \frac{1}{4H^2}}$ , con  $\lambda = 1 - \mu$ . Se representa por  $\mathcal{F} = \{T(\mu); \mu \in [0, 1]\}$  la familia de todas las regiones convexas de los toros de revolución que se obtienen de girar los anteriores trozos de circunferencias respecto del eje  $x_3$  (obsérvese que  $T(1) = T$ ). La curvatura media de  $T(\mu)$  es

$$H(\mu) = \frac{\mu + 2r \cos t}{2r(\mu + r \cos t)}.$$

Ya se ha comprobado que  $H(1) = \bar{H} \geq H$ . Se va a hacer variar  $\mu$  de 1 hasta 0. Si hubiera un punto de contacto entre uno de estos toros con la superficie  $\Sigma$ , y ya que las curvaturas medias de las dos superficies son positivas, el Principio de Comparación aseguraría que la curvatura del toro sería menor o igual que la de la superficie  $\Sigma$  (ver Figura 4.3).

Por tanto, para demostrar que  $\Sigma$  está incluida en  $C$ , se probará que la familia de toros de la deformación se puede considerar hasta  $\mu_0 + r_0 = 1/H$ . Para ello, basta

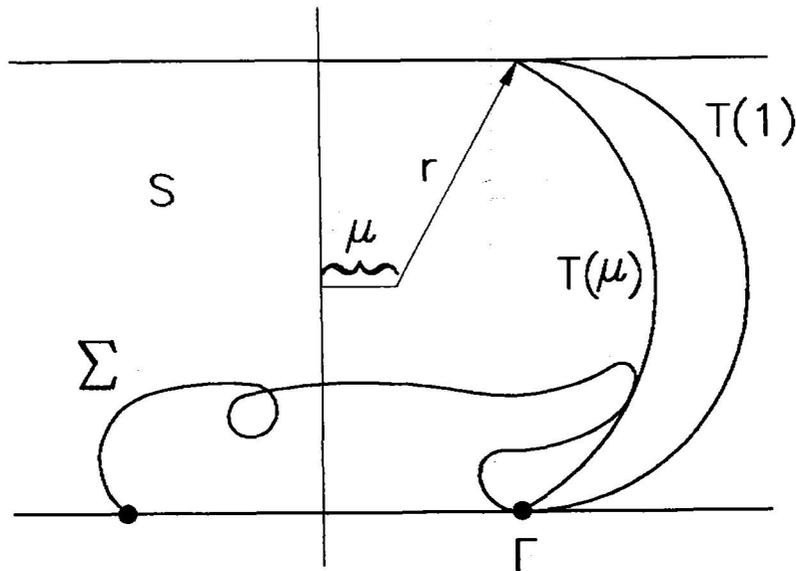


Figura 4.3:

con ver que  $H(\mu) \geq H$ . El centro  $(\mu, 0, 0)$  de la circunferencia que define  $T(\mu)$  va desde  $\mu = 1$  hasta  $\mu_0 = \frac{3-4H^2}{8H(1-H)}$ . Entonces

$$H(\mu) = \frac{1}{2r} \left( 2 - \frac{\mu}{\mu + r \cos t} \right).$$

Como  $\mu + r \cos t \geq 1$ ,

$$2 - \frac{\mu}{\mu + r \cos t} \geq 2 - \mu = 1 + \lambda.$$

Por tanto, para probar que  $H(\mu) \geq H$ , basta con que  $1 + \lambda \geq 2Hr$ . Elevando al cuadrado y despejando  $\lambda$  se obtiene que es suficiente que  $\lambda \leq \frac{2}{4H^2-1}$ . Ya que  $\lambda = 1 - \mu \leq 1 - \mu_0$ , se tendrá la desigualdad esperada si se prueba que  $1 - \mu_0 \leq \frac{2}{4H^2-1}$ , lo cual es cierto para cada  $H \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ .

□

De todo el estudio anterior sobre superficies con una coordenada acotada, surge de forma natural la siguiente cuestión.

**Problema D.** Una superficie compacta de curvatura media constante  $H \neq 0$ , con frontera una circunferencia y contenida en una banda de anchura  $1/|H|$  ¿es un casquete esférico pequeño?

Ya que los casquetes grandes con curvatura media  $H$  no están contenidos en una banda de anchura  $1/|H|$  sino de anchura  $2/|H|$ , es también natural la siguiente pregunta.

**Problema E.** *Una superficie compacta de curvatura media constante  $H \neq 0$  con frontera una circunferencia y contenida en una banda de anchura  $2/|H|$  ¿es un casquete esférico?*

# Bibliografía

- [1] R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings Pub. Co., Second edition, Canadá, 1980.
- [2] U. Abresch, *Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions*, *J. Reine Angew. Math.*, **394** (1987), 169–192.
- [3] A.D. Alexandrov, *A characteristic property of spheres*, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **58** (1962), 303–315.
- [4] F.J. Almgren, *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints*, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, **165**, 1976.
- [5] J.L. Barbosa, *Hypersurfaces of constant mean curvature on  $\mathbb{R}^{n+1}$  bounded by an Euclidean sphere*, *Geometry and Topology II*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1990), 1–9.
- [6] J.L. Barbosa, *Constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve*, *Matemática Contemporânea*, **1** (1991), 3–15.
- [7] J.L. Barbosa, M. do Carmo, *A proof of a general isoperimetric inequality for surfaces*, *Math. Z.*, **162** (1978), 245–261.
- [8] J.L. Barbosa, M. do Carmo, *Stability of minimal surfaces and eigenvalues of the laplacian*, *Math. Z.*, **173**, (1980), 13–28.
- [9] J.L. Barbosa, M. do Carmo, *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, *Math. Z.*, **185** (1984), 339–353.

- [10] J.L. Barbosa, M. do Carmo, J. Eschenburg, *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in Riemannian manifolds*, Math. Z., **197** (1988), 123–138.
- [11] A.I. Bobenko, *All constant mean curvature tori in  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^3$ ,  $H^3$  in terms of theta functions*, Math. Ann. **290** (1991), 209–245.
- [12] H. Brézis, J.M. Coron, *Multiple solutions of H-systems and Rellich's conjecture*, Comm. Pure Appl. Math., **37** (1984), 149–187.
- [13] F. Brito, R. sa Earp, *Geometric configurations of constant mean curvature surfaces with planar boundary*, An. Acad. Bras. Ci., **63** (1991), 5–19.
- [14] F. Brito, R. sa Earp, W.H. Meeks III, H. Rosenberg, *Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve*, Indiana Univ. Math. J., **40** (1991), 333–343.
- [15] Y. Burago, V. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Springer-Verlag, Berlín, 1988.
- [16] M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
- [17] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol 1, New York, Interscience, 1953.
- [18] S.Y. Cheng, *Eigenfunctions and nodal sets*, Comm. Math. Helv., **51** (1976), 43–55.
- [19] C. Delaunay, *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, (con un apéndice de Sturm), J. Math. Pures Appl., (1841), 309–315.
- [20] J. Eells, *The surfaces of Delaunay*, The Mathem. Intell., **9** (1987), 53–57
- [21] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [22] R. Finn, *Equilibrium Capillary Surfaces*, Springer-Verlag, Berlín, 1986.
- [23] D. Gilbart, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlín, 1983.

- [24] R. Gulliver, J. Spruck, *The Plateau problem for surfaces of prescribed mean curvature in a cylinder*, Invent. Math., **13** (1971), 169–178.
- [25] R. Gulliver, J. Spruck, *Existence theorems for parametric surfaces of prescribed mean curvature*, Indiana Univ. Math. J., **22** (1972) 445–472.
- [26] T.L. Heath, *Greek Mathematics*, Dover, New York, 1963.
- [27] H. Heinz, *Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung belvorgegebener Berandung*, Math. Ann., **127** (1954), 258–287.
- [28] H. Heinz, *On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary*, Arch. Rational Mech. Anal., **35** (1969), 249–252.
- [29] S. Hildebrandt, *On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature*, Commun. Pure Appl. Math., **23** (1970), 97–114.
- [30] S. Hildebrandt, *Nonlinear elliptic systems and harmonic mappings*. Proceedings of Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Science Press, Beijing, 1982.
- [31] S. Hildebrandt, H. Kaul, *Two-dimensional variational problems with obstructions, and Plateau's problem for  $H$ -surfaces in a Riemannian manifold*, Commun. Pure Appl. Math., **25** (1972), 187–223.
- [32] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [33] D. Hoffman, H. Rosenberg, *Soap bubble clusters and constant mean curvature surfaces*, en Journée Annuelle, Soc. Math. de France, 1993,
- [34] E. Hopf, *Elementare Bemerkungen Über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von Elliptischen Typen*, Preuss. Akad. Wiss., **19** (1927), 147–152.
- [35] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large*, Lecture Notes in Mathematics, **1000**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

- [36] N. Kapouleas, *Complete constant mean curvature surfaces in euclidean three-space*, Ann. Math., **131** (1990), 239–330.
- [37] N. Kapouleas, *Compact constant mean curvature surfaces in Euclidean three-space*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 683–715.
- [38] M. Koiso, *Symmetry of hypersurfaces of constant mean curvature with symmetric boundary*, Math. Z., **191** (1986), 567–574.
- [39] M. Koiso, *Symmetry of surfaces of constant mean curvature with symmetric boundary*, en "Geometry and Global Analysis", Sendai, Japan, 1993, 239–248.
- [40] M. Koiso, *A generalization of Steiner symmetrization for immersed surfaces and its applications*, Manuscripta Math., **87** (1995), 311–325.
- [41] N. Korevaar, R. Kusner, *The global structure of constant mean curvature surfaces*, Invent. Math., **114** (1993), 311–332.
- [42] N. Korevaar, R. Kusner, B. Solomon, *The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature*, J. Diff. Geom., **30** (1989), 465–503.
- [43] R. Kusner, *Global geometry of extremal surfaces in three-space*, Ph. D. thesis, Universidad de California, Berkeley, 1988.
- [44] H. Liebmann, *Eine neue Eigenschaft der Kugel*, Nachr. Kg. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Pys. Kl., (1899), 44–55.
- [45] R. López, *Constant mean curvature surfaces with boundary*, Abstracts of Amer. Math. Soc., **16** (3) (1995), 648.
- [46] R. López, *Surfaces of constant mean curvature with non connected boundary*, Preprint.
- [47] R. López, S. Montiel, *Constant mean curvature discs with bounded area*, Proc. A.M.S., **123** (1995), 1555–1558.
- [48] R. López, S. Montiel, *Constant mean curvature surfaces with planar boundary*, aparecerá en Duke Math. J.

- [49] W.H. Meeks III, *The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature*, J. Diff. Geom., **27** (1988), 539–552.
- [50] S. Montiel, A. Ros, *Compact hypersurfaces: the Alexandrov theorem for higher order mean curvatures*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **52** (1991), 279–296.
- [51] U. Patnaik, *Volume constrained Douglas problem and the stability of liquid bridges between two coaxial tubes*, Ph. D. thesis, Universidad de Toledo, Ohio, 1994.
- [52] U. Pinkall, I. Sterling, *On the classification of constant mean curvature tori*, Ann. Math. **130** (1989), 407–451.
- [53] R. Reilly, *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J., **26** (1977), 459–472.
- [54] A. Ros, *Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem*, J. Diff. Geom., **27** (1988), 215–220.
- [55] A. Ros, *Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures*, Revista Mat. Iberoamericana, **3** (1987), 447–453.
- [56] H. Rosenberg, R. sa Earp, *Some structure theorems for complete constant mean curvature surfaces with boundary a convex curve*, Proc. A.M.S., **113** (1991), 1045–1053.
- [57] H. Rosenberg, R. sa Earp, *Some remarks on surfaces of prescribed mean curvature*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, **52** (1991), 123–148.
- [58] A. Ros, H. Rosenberg, *Constant mean curvature surfaces in a half-space of  $\mathbb{R}^3$  with boundary in the boundary of the half-space*, aparecerá en J. Diff. Geom..
- [59] H. Ruchert, *Ein Eindeutigkeitssatz für Flächen konstanter mittlerer Krümmung*, Arch. Math. (Basel) **33** (1979), 91–104.
- [60] R. Schoen, *Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 791–804.

- [61] L.E. Scriven, *Equilibrium bicontinuous structure*, Nature **263** (1976), 123–125.
- [62] J. Serrin, *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic equations with many independent variables*, Philos. Trans. Roy. Soc. London A **264** (1969), 413–496.
- [63] J. Serrin, *On surfaces of constant mean curvature which span a given space curve*, Math. Z., **112** (1969), 77–88.
- [64] L. Simon, *Lectures on geometric measure theory*, Proc. C.M.A., **3**, Australian Natl. U. 1983.
- [65] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1-5, Publish or Perish Inc., Berkeley, 1979.
- [66] K. Steffen, *On the existence of surfaces with prescribed mean curvature and boundary*, Math. Z., **146** (1976), 113–135.
- [67] K. Steffen, *On the nonuniqueness of surfaces with prescribed constant mean curvature spanning a given contour*, Arch. Rational Mech. Anal., **94** (1986), 101–122.
- [68] K. Steffen, H.C. Wente, *The non-existence of branch points in solutions to certain classes of Plateau type variational problems*, Math. Z., **163** (1978), 211–238.
- [69] M. Struwe, *Large H-surfaces via the mountain-pass-lemma*, Math. Ann., **270** (1985), 441–459.
- [70] M. Struwe, *Nonuniqueness in the Plateau-problem for surfaces of constant mean curvature*, Arch. Rational Mech. Anal., **93** (1986), 135–157.
- [71] M. Struwe, *Plateau's Problem and the Calculus of Variations*, Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, Princeton 1988.
- [72] J.E. Taylor, *The structure of singularities in solutions to ellipsoid problems with constraints in  $\mathbb{R}^3$* , Ann. Math., **103** (1976), 541–546.
- [73] H.C. Wente, *An existence theorem for surfaces of constant mean curvature*, J. Math. Anal. Appl., **26** (1969), 318–344.

- 
- [74] H.C. Wente, *A general existence theorem for surfaces of constant mean curvature*, Math. Z., **120** (1971), 277–288.
- [75] H.C. Wente, *Large solutions to the volume constrained Plateau problem*, Arch. Rational Mech. Anal., **75** (1980), 59–77
- [76] H.C. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math. **121** (1986), 193–243.
- [77] H. Werner, *Problem von Douglas für Flächen konstanter mittlerer Krümmung*, Math. Ann., **135** (1957), 303–319.