SUPERFICIES MINIMALES EN R^3 E HIPERSUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN R^{M+1}

FRANCISCO JOSÉ LÓPEZ FERNÁNDEZ

SUPERFICIES MINIMALES EN R^3 E HIPERSUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN R^{m+1}

por

FRANCISCO JOSE LOPEZ FERNANDEZ

MEMORIA

Presentada en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, para obtener el título de Graduado en Ciencias, Sección de Matemáticas.

GRANADA, Julio de 1986

SUPERFICIES MINIMALES EN R^3 E HIPERSUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN R^{m+1}.

Memoria de Licenciatura presentada para la la obtención del grado de Licenciado en Ciencias, Sección de Matemáticas, por Francisco José López Fernández.

Aspirante al título de Licenciado en Ciencias:

FRANCISCO JOSE LOPEZ FERNANDEZ

Director:

Prof. Dr. D. ANTONIO ROS MULERO

GRANADA, Julio de 1986

Quiero agradecer de forma sincera al director de esta memoria, Prof. Dr. D. Antonio Ros Mulero, Profesor Titular de la Sección de Matemáticas de la Universidad de Granada, su ayuda en la realización de la misma, asi como al Prof. Dr. D. Luis Esteban Carrasco, Director del Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada. Tambien a mis compañeros y amigos del Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada por su constante ayuda y estímulo, especialmente a los profesores D. Sebastián Montiel Gómez y D. Francisco Urbano Pérez-Aranda.

Un recuerdo emocionado a mi compañero Antonio López Linares.

a mi hermano Antonio

INDICE

NOTA.: La numeración que se seguirá para los Teoremas, Proposiciones y Lemas responde al siguiente criterio:

Cada Teorema (Proposición , Lema o Definición) lleva consigo tres números, que por este orden, indicarán sección del Capítulo en cuestión, apartado de dicha sección y por último, el número identificativo de dicho Teorema (Proposición, Lema o Definición). Nótese que siempre se sobreentiende que, si no se hace referencia al Capítulo al que pertenece un Teorema (Proposición, Lema o Definición), éste pertenece al Capítulo que se está estudiando.

INTRODUCCION

El estudio de las superfícies minimales del espacio Euclídeo tres dimensional es uno de los problemas centrales de la Geometría Diferencial clásica. Los métodos que se han desarrollado para el estudio de estas superfícies provienen tanto del Análisis en una variable compleja, como del Análisis de las ecuaciones en derivadas parciales, como de la propia Geometría Riemanniana.

Estas superfícies son los "puntos críticos" del funcional "Area" y se corresponden intuitivamente , siguiendo un modelo físico clásico descubierto por Plateau, con las formas que adoptan las peliculas de jabón que se pueden construir con un soporte de alambre de forma arbitraria. Geométricamente se pueden describir como las superfícies de curvatura media nula, y analíticamente como los grafos determinados por las funciones $f(x,y)$, que satisfacen la ecuación quasilineal y eliptica:

$$(1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0 \qquad \text{(I)}$$

Sin duda el problema más conocido en la teoría de superfícies minimales es el problema de Plateau. Consiste en construir una superfície minimal cuyo borde sea una curva dada de R^3. Este tipo de cuestiones no serán tratadas aquí. (Para más información sobre el problema de Plateay consultar por ejemplo "Solution of the problem of Plateau", Trans. Amer. Math.

Soc., 33, (1931), artículo debido a Douglas).

En este trabajo recojemos algunos resultados recientes acerca de la teoría global de estas superfícies.

El primer resultado de este tipo fué obtenido por Bernstein en 1915, y si se quiere se puede ver en [OS]. En su famoso Teorema demostraba que una superfície minimal que se puede representar como un grafo sobre un plano de R^3 es necesariamente un plano. Este resultado es equivalente al hecho de que las únicas soluciones de la ecuación (I) que están definidas sobre todo R^2 son las funciones lineales.

Este resultado ha originado importantes desarrollos posteriores.

Como una primera generalización del Teorema de Berstein, Niremberg conjeturó que la imagen por la aplicación de Gauss de una superfície minimal completa, y no llana, de R^3 es densa en la esfera S^2, resultado posteriormente demostrado por Oserman. (ver [OS]).

Una brillante generalización de este teorema ha sido obtenida recientemente por Xavier (ver [XA]), quien demostró que la aplicación de Gauss de una de estas superfícies omite a lo sumo 6 puntos de la esfera. Puesto que se conocen ejemplos de superfícies minimales completas cuya aplicación de Gauss omite K puntos, con $K=0,1,2,3$ y 4 (ver el Teorema 1.3.3. del Capítulo II), la cuestion queda abierta en lo que respecta a este problema a la existencia de superfícies minimales completas cuya aplicación de Gauss omita 5 ó 6 puntos.

Otra generalización del Teorema de Berstein, desde un punto de vista completamente distinto, ha sido obtenida independientemente por Schoen y Fischer-Colbrie (ver [CS]) y Do Carmo y Peng (ver [DCP]). Estos autores demuestran que la única superfície minimal completa y estable, esto es, que minimiza globalmente el area (hasta el segundo orden), de R^3 es el plano. Puesto que un grafo minimal minimiza el area absolutamente, este resultado generaliza tambien al de Berstein.

Otro problema global importante de la teoría de superfícies minimales es el de estudiar el tipo de acotaciones que admiten estas superfícies. Calabi fué el primero que se preguntó si existian superfícies minimales completas y distintas de un plano, contenidas en un semiespacio de R^3. Esta cuestión ha sido resuelta afirmativamente por Jorge y Xavier (ver[JX]), quienes construyen ejemplos de superfícies de este tipo contenidas entre dos planos paralelos. Queda por tanto por decidir si existen o no superfícies minimales completas contenidas en el interior de un cilindro, o incluso en un bola.

Estos son fundamentalmente los problemas que hemos estudiado, en lo que respecta a las superfícies minimales: los resultados anteriormente mencionados junto con algunos otros que aparecen recopilados en el Capítulo II.

Una generalización natural de la hipótesis de minimalidad es la condición de curvatura media constante.

Para las superfícies compactas de este tipo existen dos resultados clásicos: el Teorema de Hopf y el Teorema de Aleksandrof.(ver Teoremas 1.3. y 2.1. del Capítulo III).

El primero de ellos asegura que la única superfície inmersa en R^3 compacta, con curvatura media constante y homeomorfa a S^2 es la esfera estándar.

El segundo afirma que la única superfície compacta embebida en R^3 con curvatura media constante es la esfera estándar.

Durante mucho tiempo una cuestión importante, conocida como conjetura de Hopf, fué la de decidir si existian o no superfícies compactas inmersas en R^3 con curvatura media constante distintas de la esfera. Nuevos ejemplos de superfícies con estas caracteristicas han sido construidos recientemente por Wente (ver [WE]), con lo que la conjetura de Hopf ha sido resuelta negativamente.

En lo que respecta a la aplicación de estas superfícies un resultado de Hoffman-Oserman y Schoen (ver [HOF]), establece que si la imagen de la aplicación de Gauss de una superfície completa y con curvatura media constante de R^3 está contenida en un hemisferio abierto, entonces es un plano, y si lo está en uno cerrado, además puede ser un cilindro circular recto.

Existen superfícies de revolución, completas y de curvatura media constante en R^3 tales que su aplicación de Gauss recubre una banda arbitrariamente fina alrededor de un ecuador. Este hecho llevó a Do Carmo a conjeturar que la imagen por la aplicación de Gauss de una superfície completa, distinta de un plano, y con curvatura media constante en R^3 recubre siempre un ecuador de la esfera. Por el momento este es un problema abierto.

Otro resultado importante obtenido por Klotz y Oserman clasifica las superfícies completas con $H = $ constante tales que su curvatura de Gauss no cambia de signo.

Estos autores concluyen que con esas hipótesis la superfície es minimal ó es un plano ó un cilindro circular recto.

Las superfícies con curvatura media constante se pueden caracterizar tambien como los puntos críticos del funcional area con la restriccion adicional de que el volumen encerrado por la superfície en cada instante de la variacion en cuestión sea constante. La cuestión de la estabilidad se plantea entonces naturalmente de forma analoga al caso de minimales.(ver [BAR]).

Do Carmo y Barbosa han demostrado que en el caso compacto, la única superfície de este tipo estable es la esfera estándar de R^3. Queda por tanto por decidir que ocurre en el caso completo, no necesariamente compacto.

Los resultados anteriormente expuestos están recopilados en el Capítulo III. Puesto que, a diferencia de lo que ocurre en el caso minimal, algunos de los resultados anteriores se generalizan sin esfuerzo al caso de dimensión general, estos han sido establecidos para hipersuperfícies de un espacio euclídeo de cualquier dimensión.

Por último, indicar que para llegar a demostrar muchos resultados de los expuestos, ha sido necasario un material, en especial, referente a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (elipticas de segundo orden),como es de esperar de la ecuación (I), asi como contenidos de Analisis Funcional. Otro apartado importante ha sido el dedicado a la variable compleja, de gran interés a partir de la representación de Weierstrass de las superfícies minimales.

Asi por ejemplo, el Teorema de Liouville para funciones subarmónicas, principio del máximo clásico, desigualdad de Harnack, estimaciones interiores de Schauder, Teorema de la Alternativa de Fredholm serán mencionados y utilizados asiduamente.

A sistematizar y recopilar estos resultados está dedicado el Capítulo I de esta memoria.

Ya si finalizando, indicar que el inconveniente de no poder usar en ningún caso la hipótesis de compacidad (es conocido que las superfícies minimales en R^3 completas no soncompactas), que nos impide trabajar con herramientas tan potentes como el Teorema de la Divergencia con comodidad, es en cierto sentido paliado por el hecho de que podamos jugar con una estructura conforme en nuestra superfície, abriendose, a partir de métodos geométricos con interpretación clara en este sentido, todo el amplio avanico de posiblidades de la variable compleja. En este aspecto juega tambien un papel importante el Teorema de Uniformización, como se puede comprender.

No obstante, (ver [YAU]), damos algunos resultados más débiles que el Teorema de la Divergencia, pero que realizan, con las debidas matizaciones, el mismo papel que éste, pero esta vez en superfícies no compactas.

CAPITULO I

PRELIMINARES Y CONOCIMIENTOS BÁSICOS

1. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES. ANALISIS FUNCIONAL.

En este apartado se incluye, sin duda, la parte más importante y de más complicación del material que se utilizará a posteriori. De la dificultad y amplitud de los problemas que se van a mencionar, se desprende el que sean utilizados muchos de ellos en versiones reducidas y simplificadas, y que muchos otros se den sin demostración. No obstante, se dará la bibliografia necesaria que recoja todas las demostraciones omitidas y que permita entender los resultados que se exponen en este trabajo.

Comencemos con algunos conceptos y teoremas clásicos concernientes a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales elípticas de segundo orden.

1.1. Ecuaciones Diferenciales Elípticas de Segundo Orden.

Sea Ω un dominio de R^n.

1.1.1. Definición. Un operador diferencial elíptico en Ω es una expresión de la forma:

$$L(u) = \Sigma_{i,j} a_{ij}(x) D_{ij} u + \Sigma_i b_i(x) D_i u + c(x) u$$

actuando sobre $u \in C^2(\Omega)$ y donde $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, c son contínuas en Ω, y $D_{ij}u = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j$, $D_i u = \partial u/\partial x_i$.

1.1.2. Definición. L se dice elíptico en p punto de Ω si la matriz $a_{ij}(p)$ es definida positiva, esto es, existe $\lambda(p)$, $\Lambda(p)$ verificando:

$$0 < \lambda(p)|\xi|^2 \leq \Sigma_{i,j} a_{ij}(p)\, \xi_i\, \xi_j \leq \Lambda(p)\, |\xi|^2$$

para todo $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de $R^n - \{0\}$.

Si convenimos en llamar $\lambda(p)$ = menor valor propio de $a_{ij}(p)$ y $\Lambda(p)$ al mayor, entonces, se dice que L es uniformente elíptico en Ω si $\lambda(p) > 0$, para todo p de Ω, y si $\lambda \geq \lambda_o > 0$ en Ω, entonces se dice que es estrictamente elíptico en Ω.

1.1.1. TEOREMA. (Principio del máximo clásico).[GBT].

Sea L uniformemente elíptico en Ω. Supongamos $c=0$ y $Lu \geq 0$ (≤ 0) en Ω. Entonces, si u alcanza su máximo (mínimo) en el interior de Ω, u es constante. Si $c \leq 0$, y c/λ es acotado, entonces u no puede tomar máximo positivo (mínimo negativo) en el interior de Ω salvo que u sea constante.

1.1.3. Definición. Sea $u: \Omega \longrightarrow R$ localmente integrable, esto es, para todo compacto K contenido en Ω, existe $\int_K |u|dx$. Sea $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, con $\alpha_i \in N$, para todo i. Se dice que u tiene α-ésima derivada débil, si existe v función localmente integrable en Ω tal que para toda función ϕ de soporte compacto en Ω, que admita α-ésima derivada (existe $D_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}\phi = D^\alpha \phi$), verifique la igualdad:

$$\int_\Omega \phi v \, dx = \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} u D^\alpha \phi \, dx.$$

A v se le llama α-ésima derivada débil, y se la denota por $D^\alpha u$. Está determinada de forma única salvo conjuntos de medida nula.

Condideremos Ω un dominio de R^n, y el operador L siguiente: $L(u) = \Sigma_{i,j} D_i(a_{ij}(x) D_j u + b_i(x) u) + \Sigma_i (c_i(x) D_i(u)) + d(x) u$ donde a_{ij}, b_i, c_i, d son medibles en Ω.

Supongamos ahora que u tiene 1ª derivada débil en Ω, y que $a_{ij} D_j u + b_i u$, $c_i D_i u + du$ son localmente integrables. Entonces se dice que $Lu = 0$ ($\geq 0 \leq 0$) en sentido débil o generalizado si:

$I(u,v) = \int_\Omega \{ \Sigma_{i,j} (a_{ij} D_j u + b_i u) D_i v - (\Sigma_i (c_i D_i u) + du) v \} dx = 0 (\geq 0, \leq 0)$

para toda v de $C_0^1(\Omega) = \{ v : \Omega \longrightarrow R$, v de soporte compacto, $v \in C^1(\Omega) \}$.

Por definición, si u satisface esta condición, y $u \in C^2(\Omega)$ se tiene que si a_{ij}, b_i son funciones con derivadas primeras localmente integrables, u es solución clásica de $L(u) = 0$ ($\leq 0 \geq 0$), sin más que aplicar el teorema de Stokes.

Lo que es claro es que si $u \in C^2(\Omega)$ es solución clásica de $Lu = 0$ ($\geq 0 \leq 0$), entonces es solución en sentido débil o generalizado.

Hagamos ahora las hipótesis de que existan $\Lambda > 0$, $\nu > 0$, $\lambda > 0$, de forma que:

$$\Sigma_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j \geq |\xi|^2 , \quad \Sigma_{ij} |a_{ij}|^2 \leq \Lambda^2, \quad \lambda^{-2} \Sigma_i (|b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2) +$$

$+\lambda^{-1}|d(x)| \leq \nu^2$.

y esto para todo x de Ω, y para todo $\xi \varepsilon R^n$.

1.1.2. TEOREMA. (Desigualdad de Harnack). [GBT]

Supongamos que L satisface las hipotesis anteriores. Llamemos $W_{1,2}(\Omega) = \{u:\Omega \longrightarrow R$, tal que existen las primeras derivadas débiles $D_i u$, y $D_i u \varepsilon L^2(\Omega)$, y u es localmente integrable.$\}$

Sea $u \varepsilon W_{1,2}(\Omega)$, $u \geq 0$ en Ω y $Lu = 0$ en Ω. Entonces, si $B_{4r}(y)$ está contenida en Ω, se tiene que:

$$\sup_{B_{r(y)}} u \leq C \inf_{B_{r(y)}} u, \text{ donde } C = C(n, \Lambda/\lambda, r\nu).$$

1.1.1. Corolario. Sean L y u satisfaciendo las hipótesis del teorema anterior.

Entonces, si Ω' está contenido en Ω de forma propia, se tiene que si además $\overline{\Omega}'$ esta contenido en Ω y es acotado:

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u, \text{ donde } C = C(n, \Lambda/\lambda, \Omega', \Omega, \nu).$$

Demost.:

Sean x_1, x_2 puntos de $\overline{\Omega}'$ tales que $u(x_1) = \sup_{\overline{\Omega}'}(u)$, y $u(x_2) = \inf_{\overline{\Omega}'} u$. Sea Γ una curva en Ω' uniendo x_1 y x_2, y elijamos r tal que $4r < \operatorname{dist}(\Gamma, \partial\Omega')$. Segun el teorema de Heine Borel, podemos recubrir por un número finito N de bolas de radio r la curva Γ, y N dependiendo sólo de Ω' y Ω.

Tenemos asi, que si numeramos $x_1 \varepsilon B_1, \ldots, B_{n-1}, x_2 \varepsilon B_n$ de forma que B_i corte a B_{i+1}, para todo $i=1,..,n-1$ se tiene que $u(x_1)=\sup_{B_1} u \leq C_1 \inf_{B_1} u \leq C_1 \sup_{B_2} u \leq C_1 C_2 \inf_{B_2} u \leq \ldots \leq C_1 \ldots C_n \inf_{B_n} u = C_1 \ldots C_n u(x_2)$, sin más que aplicar reiteradamente el teorema 1.1.2..

En consecuencia $\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u$, con C verificando lo pedido. cqd

1.2. Estimaciones interiores de Schauder.

Comencemos con algunas definiciones:

Sea $x_o \in R^n$, y D un dominio acotado de R^n, con $x_o \in D$.

Sea $f\ D \longrightarrow R$. Sea α / $0<\alpha \leq 1$. Se dice que f es Hölder contínua en x_o con exponente α si:

$[f]_{\alpha:x_o} = \sup_D \{|f(x_o)-f(x)|/|x_o-x|^\alpha\}$ es finito.

Es claro que si f es Hölder contínua en x_o entonces es contínua en x_o. Si $[f]_{1:x_0}$ es finito, se dice que f es lipschtz contínua en x_o. Si $[f]_{\alpha:D} = \sup_{x,y \in D}\{|f(x)-f(y)|/|x-y|^\alpha\}$ con $0<\alpha \leq 1$ es finito, se dice que f es Hölder contínua en D con exponente α. Si $[f]_{\alpha:K}$ es finito para todo K compacto en D, se dice que f es localmente Hölder contínua.

Observemos que si $\alpha=1$, y $[f]_{1:D}$ es finito, f es lipschtziana en D.

1.2.1. Definicíon. Llamamos $C^k(\bar{\Omega}) = \{f : \Omega \longrightarrow R$ / $f \in C^k(\Omega)$ y todas las derivadas de orden menor o igual a k contínuas en $\bar{\Omega}\}$.

1.2.2. Definición. Llamamos $C^{k,\alpha}(\Omega) = \{f : \longrightarrow R$ / $f \in C^k(\Omega)$ y todas las derivadas de orden menor o igual a k son localmente Hölder contínuas con exponente α en $\Omega\}$.

1.2.3. Definición. Llamamos $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})=\{f:\Omega\longrightarrow R\ /\ f\epsilon C^{k}(\bar{\Omega})$ y con todas las derivadas de orden menor o igual a k Hölder contínuas con exponente α en $\Omega\}$.

Ponemos $C^{k,0}(\Omega)=C^{k}(\Omega)$ y $C^{k,0}(\bar{\Omega})=C^{k}(\bar{\Omega})$.

Se define $C_{o}^{k,\alpha}(\Omega)=\{f\epsilon C^{k,\alpha}(\Omega)\ /\ \text{sop}f$ es compacto en $\Omega\}$. En $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, se define la norma siguiente:

$$\|u\|_{k,\alpha,\Omega}=|u|_{k,\Omega}+[u]_{k,\alpha,\Omega}$$

donde entendemos por $|u|_{k,\Omega}=|u|_{k,o,\Omega}=\Sigma_{j=o}^{k}[u]_{j,o,\Omega}=\Sigma_{j=o}^{k}|D^{j}u|_{o,\Omega}$ donde a su vez $|D^{j}(u)|_{o,\Omega}=\sup_{\Omega}\sup_{|\beta|=j}|D^{\beta}u|$, y por último donde $[u]_{k,\alpha,\Omega}=[D^{k}u]_{\alpha,\Omega}=\sup_{|\beta|=k}[D^{\beta}u]_{\alpha,\Omega}$.

1.2.1. Proposición. $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ es un espacio de Banach con esta norma. (consultar [GBT]).

1.2.4. Definición. Para toda $u\epsilon C^{k}(\Omega)$, $C^{k,\alpha}(\Omega)$, se definen las cantidades:

Si $u\epsilon C^{k}(\Omega)$, $[u]_{k,\Omega}^{*}=\Sigma_{j=o}^{k}[u]_{j,\Omega}^{*}$, donde $[u]_{j,\Omega}^{*}=[u]_{j,o,\Omega}^{*}=\sup_{x\epsilon\Omega,|\beta|=j}d_{x}^{j}\ |D^{\beta}u(x)|$, donde $d_{x}=\text{dist}(x,\partial\Omega)$. ($\Omega$ se supone acotado).

Si $u\epsilon C^{k,\alpha}(\Omega)$, y $[u]_{j,\alpha,\Omega}^{*}=\sup_{x,y\epsilon\Omega}^{|\beta|=j}d_{x,y}^{k+j}\ |D^{\beta}u(x)-D^{\beta}u(y)|/\ /|x-y|^{\alpha}$ donde $d_{x,y}=\min\{d_{x},d_{y}\}$, entonces se define:

$$|u|_{k,\alpha,\Omega}^{*}=|u|_{k,\Omega}^{*}+[u]_{k,\alpha,\Omega}^{*}.$$

donde siempre $0<\alpha\leq 1$.

Con esta notación, entendemos $[u]^*_{0,\Omega}=|u|^*_{0,\Omega}=|u|_{0,\Omega}$. Se tiene que $|u|^*_{k,\Omega}$ y $|u|^*_{k,\alpha,\Omega}$ son normas en los subespacios de $C^k(\Omega)$, $C^{k,\alpha}(\Omega)$ en los que están definidas (son finitas).

Se define tambien $|f|^{(k)}_{0,\alpha,\Omega}=\sup_{x\in\Omega} d^k_x|f(x)|+\sup_{x,y\in\Omega} d^{k+\alpha}_{x,y}$ $|f(x)-f(y)|/|x-y|^\alpha$ para las funciones f que tenga sentido (funciones de $C^{k,\alpha}(\Omega)$ con esta expresión finita).

1.2.1. TEOREMA. [GBT]

Sea Ω un dominio de R^n. Sea $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$ solución acotada en Ω de la ecuación $Lu=f$, L como en Def.1.1.1, donde f y los coeficientes satisfacen.que existen λ, Λ dos constantes estrictamente positivas, tales que:

$$\Sigma_{ij}|a_{ij}|^{(0)}_{0,\alpha,\Omega},\Sigma_i|b_i|^{(1)}_{0,\alpha,\Omega},\ |c|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}\leq\Lambda\ ,\ |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}<\infty.$$

Entonces, $|u|^*_{2,\alpha,\Omega}\leq C(|u|_{0,\Omega}+|f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega})$, $C=C(n,\alpha,\lambda,\Lambda)$.

1.2.1. Corolario . Sea $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de funciones en las mismas hipótesis del teorema, y uniformemente acotada.

Si f=0, y K es un compacto contenido en Ω, entonces: u_λ, D_iu_λ, $D_{ij}u_\lambda$ son equicontinuas y uniformemente acotadas en K. Además, esta cota depende de C y $\sup_{\lambda\in\Lambda}|u_\lambda|_{0,K}$ sólamente.

Demost.:

Inmediata sin más que recordar la expresión de $|u|^*_{2,\alpha,\Omega}$ y aplicar el teorema 1.2.1.. cqd

Muchos de los conceptos y teoremas presentados , tienen su transcripción a variedades diferenciables. Para ello, hemos de introducir algunos operadores en estas, que nos daran el lenguaje apropiado para extender de forma coherente, y aplicar, con las debidas modificaciones , todos los resultados mencionados. Trabajaremos siempre con variedades de Riemann.

1.3. Análisis Funcional y ecuaciones sobre variedades de Riemann.

Sea $(M^n,<>)$ variedad de Riemann.

1.3.1. Definición. Sea $f \in C^\infty(M)$. Se define el gradiente de f como el único campo $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$ (conjunto de los campos diferenciables sobre M), que verifica:

Para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $<\nabla f, X> = df(X)$.

Algunas veces se escribe $\nabla f = \operatorname{grad} f$.

1.3.2. Definición. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, se define $\operatorname{div} X$ (divergencia de X), como aquella función de $C^\infty(M)$ que se obtiene de la forma:

$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{traza} \phi_p$, donde $\phi_p : T_pM \longrightarrow T_pM$, definida como $\phi_p(v) = \nabla_v X$, donde ∇ es la conexión métrica, y en T_pM se considera la métrica asociada a $<>$.

1.3.3. Definición. Dada $f \in C^\infty(M)$, se define $\operatorname{Hess} f$ (Hessiano de f) como la forma bilineal en M definida de la forma:

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f).$$

Es inmediato comprobar que $\operatorname{traza}(\operatorname{Hess} f) = \operatorname{div}(\nabla f)$, que es por definición el laplaciano de f: Δf.

1.3.1. TEOREMA. (de la Divergencia)

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, X de soporte compacto. Entonces se tiene que:

$$\int_M \mathrm{div}\, X dV = 0$$

donde dV es la forma de volumen asociada a <> .

Demost.:

Como sopX es compacto, puede ser recubierto por un número finito de abiertos coordenados. Asociamos a este recubrimiento un partición de la unidad (por supuesto, se supone que M tiene buenas condiciones topologicas, como por ejemplo, ser paracompacta). Esto hace que el cálculo de la integral anterior pueda reducirse al caso sencillo de que el soporte de X esté incluido en un entorno coordenado $(U,(x_1,\ldots,x_n))$

La expresión local de div X, si $X=\Sigma_{i=1}^{n} X_i \partial/\partial x_i$ en U, es

$$\mathrm{div}\, X = (\bar{g}^{-\frac{1}{2}})\, \Sigma_i \partial/\partial x_i((\bar{g})^{\frac{1}{2}} X_i), \text{ con } \bar{g}=|\det(g_{ij})|,\ g_{ij}= =\langle \partial/\partial x_i, \partial/\partial x_j \rangle$$

Luego $\int_M \mathrm{div}\ dV = \Sigma_{i=1}^{n} \int \partial/\partial x_i((\bar{g})^{\frac{1}{2}} X_i)\, dx_1 \ldots dx_n = 0$ por el Teorema fundamental del cálculo.cqd

1.3.1. Corolario. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es de soporte compacto, con $X=h(\mathrm{grad}\, f)$, h, $f \in C^{\infty}(M)$, entonces se tiene que:

$$\int_M \{h \Delta f + \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, h \rangle\}\, dV = 0$$

Demost.:

Aplicar el Teorema de la Divergencia a $X=h(\mathrm{grad}\, f)$, y observar que:

$\mathrm{div}(h\nabla f)=h\,\mathrm{div}(\nabla f)+\langle\nabla h,\nabla f\rangle$. cqd

1.3.2. Corolario. Si h, $f\in C^{\infty}(M)$, ambas con soporte compacto, entonces:

$$\int_M\{h\Delta f-f\Delta h\}\, dV=0$$

Demost. Usar el teorema de la divergencia, el corolario 1.3.1., y el hecho de que :

$\mathrm{div}(h\nabla f)=h\Delta f+\langle\nabla f,\nabla h\rangle$. cqd

Supongamos ahora que M tiene frontera ∂M, con métrica riemanniana y orientacion inducidas (siempre supondremos que nuestras variedades son orientables). Llamemos dA a la forma de volumen asociada a la métrica en ∂M. Sea $\nu(p)$ el vector normal exterior en $p\in \partial M$.

1.3.2. TEOREMA. (de la Divergencia). [WA]

Sea X un campo diferenciable en $\overline{M}$.

Entonces:

$$\int_M(\mathrm{div}\, X)\, dV=\int_{\partial M}\langle X,\nu\rangle\, dA.$$

1.3.3. Corolario. Si $h,f\in C^{\infty}(\overline{M})$, entonces se tiene que:

$$\int_M \{h\Delta f + <\text{grad } f, \text{grad } h>\}\, dV = \int_{\partial M} h\nu(f)\, dA \ .$$

1.3.4. Corolario. Si h, $f \in C^\infty(\bar{M})$, entonces se verifica lo siguiente:

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\}\, dV = \int_{\partial M} \{h\nu(f) - f\nu(h)\}\, dA \ .$$

Generalicemos a variedades algunos resultados ya vistos. comencemos por la desigualdad de Harnack.

1.3.3. TEOREMA.

Sea $q \in C^\infty(M)$, y sea g solución de la ecuación:

$$\Delta g - qg = 0 \text{ en } B_r(x_o),\ g(x) > 0, \text{ para todo } x \text{ de } B_r(x_o)$$

donde $B_r(x_o)$ es una bola en M, variedad que supondremos completa.

Entonces, si $B_r(x_o)$ contiene de forma propia a $B_\sigma(x_o)$, se tiene que:

$$\sup_{B_\sigma(x_o)} g \leq C \inf_{B_\sigma(x_o)}, \text{ con } C = C(n, \sigma, r).$$

Demost.:

Sea x_1, $x_2 \in B_\sigma(x_0) / \sup_{B_\sigma(x_o)} = g(x_1)$ y $\inf_{B_\sigma(x_o)} g = g(x_2)$. Tomemos Γ curva en $B_\sigma(x_0)$ uniendo x_1, x_2. Recubramos Γ con un número finito de entornos coordenados y apliquemos la desigualdad de Harnack ya conocida en cada entorno coordenado, válida pues la expresión local de Δg nos permite observar que estamos en las hipótesis de este teorema en cada entorno coordenado.

Para mayor rigor, tomar el recubrimiento de tal forma que cada entorno de este esté contenido en un entorno coordenado mayor, con referencia al cual se aplica la desigualdad de Harnack correspondiente. El globalizar el resultado, es seguir un razonamiento análogo al que ya se utilizó en el Corolario 1.1.1..

1.3.4. TEOREMA.

Sea M variedad de Riemann completa. Sea $B_\sigma(x_0)$ bola métrica contenida en $B_r(x_0)$ otra bola, de forma propia.

Sea $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ familia infinita de funciones, con dominio $B_r(x_0)$ y valuadas reales, verificando que $g_\alpha > 0$, para todo α y $\Delta g - qg = 0$ en $B_r(x_0)$, donde se supone $q\in C^\infty(M)$.

Supongamos que $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es uniformemente acotada en $B_\sigma(x_0)$ (y esto para cualquier $\sigma < r$).

Entonces, dado $0 < \sigma < r$, existe $\{g_n\}_{n\in N}$ sucesión de funciones extraída de $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, de tal forma que g_n y sus derivadas hasta el segundo orden convergen uniformemente en $B_\sigma(x_0)$ a una función $g\in C^2(B_\sigma(x_0))$ tal que $\Delta g - qg = 0$.

Demost.:

Recubrimos por un número finito de entornos coordenados $\{U_i\}_{i=1,\dots,m}$ la bola $B_\sigma(x_0)$. Sea U uno de estos entornos.

Expresamos en U vía la carta la ecuación $\Delta g - qg = 0$ en coordenadas. Observemos que se cumplen todas las hipótesis del Corolario 1.2.1.: como $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ son uniformemente acotadas en U, resulta que esta familia junto con las derivadas hasta el segundo orden son uniformemente acotadas y equicontínuas en U.

Por el Teorema de Ascoli-Arzelá, extraemos de $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una sucesión convergente uniformemente en U: $\{g_n\}_{n\in N}$.

Esto lo hacemos, por ejemplo en U_1, y extraemos $\{g_n^1\}_{n\in N}$ como se indica. De $\{g_n^1\}_{n\in N}$, extraemos otra parcial por el mismo razonamiento, que verifique lo mismo en U_2, etc... .

Resumiendo, tenemos $\{g_n\}_{n\in N}$ sucesión incluida en $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de forma que en cada U_i, $i=1,\ldots,m$, es convergente uniformemente junto con sus derivadas hasta el segundo orden.

Definimos $g:B_\sigma(x_o)\longrightarrow R$ como la función que en los puntos de intersección de U_i con $B_\sigma(x_o)$, toma el valor $\lim_{n\to\infty} g_n$, y esto para cada i.

Observemos que g está bien definida, ya que al cambiar de carta, g cambia como una función diferenciable, pues las g_n cambian bien y g es limite uniforme de estas.

Sabemos que g es derivable hasta el orden 2 y que verifica:

$$\Delta g-qg=0 \text{ en } B_\sigma(x_o), \text{ y } g\geq 0.$$

En particular, $g\in C^\infty(B_\sigma(x_o))$. cqd

Comentemos algunos resultados de Análisis Funcional que tendrán interés posteriormente, en su mayoria, concernientes a la formulación débil de la teoria de ecuaciones en derivadas parciales y por consiguiente a los espacios de Sobolev. Siempre, M designará una variedad de Riemann.

1.3.4. Definición. Sea M variedad de Riemann. Se define: $L^p_{loc}(M)=\{f:M\longrightarrow R \,/\, |f|^p$ es localmente integrable$\}$, donde $0<p$.

1.3.5. Definición. Sea M variedad de Riemann. Se define: $L^p_{loc}(\mathfrak{X}(M))=\{X$ campos de $M \,/\, |X|\in L^p_{loc}(M)\}$, para cada $0<p$.

1.3.6. Definición. Sea $u:M\longrightarrow R$ función, con $u\in L^2_{loc}(M)$. Supongamos que para todo Y campo con soporte compacto (se escribe $Y\in\mathfrak{X}_o(M)$), se verifica:

$$\int_M \langle X,Y\rangle\, dV + \int_M (\operatorname{div} Y)\, u\, dV = 0$$

para un cierto campo $X\in L^2_{loc}(\mathfrak{X}(M))$. Entonces, se dice que X es el gradiente débil de u, y se denota ∇u.

1.3.7. Definición. Sea M variedad de Riemann. Se define: $W(M)=\{u:M\longrightarrow R,\ u\in L^2_{loc}(M) \,/\, u$ tenga gradiente débil$\}$.

Por ejemplo, es claro que $C^1(M)$ está incluido en $W(M)$.

Veamos algunos resultados concernientes a W(M), que se pueden encontrar en [BR], [AU].

1) Si u,v son dos funciones de W(M) y son esencialmente acotadas en M, entonces $u\cdot v\in W(M)$ y $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$.

2) Sea $f:M\longrightarrow R$ lipschitziana (esto es suficiente para que $f\in L^2_{loc}(M)$). Entonces, $f\in W(M)$.

En particular dada M completa, considerando la funcion $d(q_o,\_):M\longrightarrow R$, con $q_o\in M$ fijo, resulta que $d(q_o,\_)\in W(M)$.

3) Si definimos, dada M completa y Ω un dominio acotado

de M, $H^{O}_{1,2}(\Omega)$={completado de $C^{\infty}_{O}(\Omega)$ respecto de la norma $\|u\|^{2}_{1,2}=$ $=\|u\|^{2}_{2}+\|\nabla u\|^{2}_{2}$, donde $\|.\|_{2}$ es la norma de $L^{2}(\Omega)$}, se tiene:

a) $H^{O}_{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Banach, y $H^{O}_{1,2}(\Omega)$ está incluido en W(M).

b) De hecho, $H^{O}_{1,2}(\Omega)$ contiene a las funciones de W(M) con soporte contenido en Ω.

c) $H^{O}_{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, con el producto escalar $<u,v>_{1,2}=\int_{\Omega} uv\, dV + \int_{\Omega} <\nabla u,\nabla v>\, dV$.

La norma anterior es la asociada a este producto escalar.

d) Si $u\in H^{O}_{1,2}(\Omega)$, y definimos $\tilde{u}:M\longrightarrow\mathbb{R}$ como la función que es igual a u en Ω, y es 0 fuera de Ω, entonces $\tilde{u}\in W(M)$.

e) Teorema del embebimiento de Kondrachov.

El embebimiento $H^{O}_{1,2}(\Omega)\longrightarrow L^{2}(\Omega)$ (inclusión natural) es compacto, esto es, para toda sucesión en $H^{O}_{1,2}(\Omega)$ acotada, su transformada en $L^{2}(\Omega)$ es precompacta: admite una parcial convergente.

En cuanto a resultados de Análisis Funcional teórico puro se refiere, comentemos algunos que serán de interés en lo sucesivo.

1.3.1. <u>Proposición</u>. <u>Sea</u> (H,<>) <u>un espacio de Hilbert</u>.

<u>Entonces, toda sucesión acotada en</u> H, <u>admite una parcial débilmente convergente en</u> H, <u>esto es</u>, <u>si</u> $\{x_n\}_{n\in N}$ <u>es acotada en</u> H, <u>existe</u> $\{x_{\sigma(n)}\}_{n\in N}$ <u>tal que para todo</u> $x\in H$, $<x_n,x> \rightarrow <x,y>$, <u>donde</u> $y\in H$ <u>es un vector fijo</u> ($\{x_{\sigma(n)}\}_{n\in N}\rightarrow y$ <u>débilmente</u>).

Se puede ver la demostración en [MI].

1.3.2. <u>Proposición</u>.<u>Sea</u> (H,<>) <u>espacio de Hilbert. Entonces,</u>

la función norma: $\|.\|: H \longrightarrow \mathbb{R}$ es semicontínua inferiormente para la topología débil, esto es:

Si $\{x_n\} \longrightarrow x$ débilmente, $\|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Demost.

Si x=0, el resultado es trivial. Supongamos que x no es 0. Sea entonces $\langle x_n, x/\|x\|\rangle \longrightarrow \|x\|$ por convergencia débil. Luego como $\langle x_n, x/\|x\|\rangle \leq \|x_n\|$ (Desigualdad de Schwartz), entonces $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x/\|x\|\rangle \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|$, lo que es equivalente a que $\|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|x_n\|$. cqd

1.3.5. TEOREMA. (Alternativa de Fredholm).[GBT] ó [MI].

Sea (H,<>) un espacio de Hilbert.

Sea $A: H \longrightarrow H$ un operador compacto (transforma conjuntos acotados en otros precompactos). Sea $I: H \longrightarrow H$ el operador identidad, y sea la ecuación:

$$(I-A)f = g, \text{ donde } g \in H.$$

Si la ecuación $(I-A)f = 0$ tiene como única solución la trivial, entonces, para todo $g \in H$, la ecuación $(I-A)f = g$ tiene una solución única.

1.3.6. TEOREMA.(Lax-Milgram).[BR].

Sea (H,<>) un espacio de Hilbert.

Sea a(u,v) una forma bilineal contínua verificando:

Existe $\alpha > 0 / a(u,v) \geq \alpha |v|^2$, para todo $v \in H$ (a es coerciva).

Entonces, para todo $w \in H$, existe un único $u \in H / a(u,v) =$

$=\langle w,v\rangle$ para todo $v\in H$.

Además, si a es simétrica, u se caracteriza por la propiedad:

$u\in H$, y $\frac{1}{2}a(u,u)-\langle w,u\rangle=\mathrm{Min}_{v\in H}\{\frac{1}{2}a(u,v)-\langle w,v\rangle\}$.

Veamos una consecuencia importante de estos dos teoremas.

1.3.7. TEOREMA.

Sea Ω un dominio acotado de M variedad de Riemann.

Sea el problema siguiente:

$$\Delta u - qu = 0, \quad u = 0 \ \underline{\text{en}} \ \partial\Omega$$

donde se supone q una función diferenciable en M. Supongamos que el problema anterior tiene solución única la trivial.

Entonces, para toda función g contínua en Ω, existe una solución única del problema:

$$\Delta u - qu = g, \quad u = 0 \ \underline{\text{en}} \ \partial\Omega. \qquad (1)$$

Demost.:

Definimos en $\overset{\circ}{H}_{1,2}(\Omega)$ la siguiente forma bilineal:

$a(u,v)=\int_\Omega(\langle\nabla u,\nabla v\rangle+quv)\,dV$. Construimos a partir de ella otra nueva forma bilineal de la forma $a(u,v)+\lambda\int_\Omega(uv)\,dV$, con λ=constante suficientemente grande para que esta forma bilineal sea coerciva.

Entonces, para toda $g\in L^2(\Omega)$, existe $u\in\overset{\circ}{H}_{1,2}(\Omega)$ única tal que $a(u,\rho)+\lambda\int_\Omega u\rho\,dV=\int_\Omega g\rho\,dV$, para toda $\rho\in\overset{\circ}{H}_{1,2}(\Omega)$, por el Teorema1.3.6..

Llamando $u=Tg$, $T:L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ es un operador lineal compacto, ya que $T:L^2(\Omega) \longrightarrow \overset{o}{H}_{1,2}(\Omega)$ es contínuo y aplicar en embebimiento de Kondrachov.

La ecuación (1) es entonces equivalente a la ecuación $u=T(g+\lambda u)$, y si $v=g+\lambda u$ es una nueva variable, (1) queda de la forma $v-\lambda Tv=g$, de donde aplicando el Teorema 1.3.5., se obtiene lo buscado. cqd

1.3.8. TEOREMA.

Sea M una variedad de Riemann completa.

Sea Ω un dominio de M acotado. Sea el siguiente número real

$$\lambda_1(\Omega)=\inf\{\int_\Omega (|\nabla u|^2+qu^2)\,dV, \text{ con } \int_\Omega u^2\,dV=1,\ u\in \overset{o}{H}_{1,2}(\Omega)\}$$

donde q se supone diferenciable (de clase $C^\infty(M)$).

Entonces la ecuación $\Delta u-qu+\lambda_1(\Omega)u=0$ en Ω, $u=0$ en $\partial\Omega$ tiene solución no trivial.

Demost.:

Notemos que como $C_o^\infty(\Omega)$ es denso en $\overset{o}{H}_{1,2}(\Omega)$ (ver [BR]), y además la aplicación :

$$F:\overset{o}{H}_{1,2}(\Omega) \longrightarrow R,\quad F(u)=\int_\Omega (|\nabla u|^2+qu^2)\,dV$$

es contínua, entonces tambien se puede definir $\lambda_1(\Omega)$ haciendo variar u en $C_o^\infty(\Omega)$.

Observemos tambien que $\lambda_1(\Omega)>-\infty$, pues si llamamos $c=$ $=\min_{x\in\Omega}\{q(x)\}$ entonces $F(u)\geq \int_\Omega (|\nabla u|^2+cu^2)dV=c+\int_\Omega |\nabla u|^2\,dV \geq c>-\infty$.

Llamamos $B=\{u\in \overset{o}{H}_{1,2}(\Omega) / \int_\Omega u^2\,dV=1\}$.

Definimos en B el operador siguiente:

$$J: B \longrightarrow R,\ J(u)=\int_\Omega (|\nabla u|^2+qu^2)\,dV$$

Tomando $\{u_n\}_{n\varepsilon N}$ sucesión en B $/\{J(u_n)\} \longrightarrow \lambda_1(\Omega)$, se tiene que $\{u_n\}_{n\varepsilon N}$ es acotada en $H^o_{1,2}(\Omega)$: en efecto, si $c=\inf_{x\varepsilon\Omega}\{q(x)\}$, entonces, $|\nabla u_n|^2+qu_n^2 \geq |\nabla u_n|^2+cu_n$, de donde se deduce que:

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^2+qu_n^2)\,dV \geq \int_\Omega (|\nabla u_n|^2+cu_n^2)\,dV=c+\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dV$$

y como $\{J(u_n)\}_{n\varepsilon N}$ es acotada, entonces $\{\|\nabla u_n\|_2^2\}$es acotada, de donde $\{u_n\}_{n\varepsilon N}$ es acotada en $H^o_{1,2}(\Omega)$.

Como $H^o_{1,2}(\Omega)$ es un Hilbert, podemos extraer de $\{u_n\}_{n\varepsilon N}$ una parcial débilmente convergente (Proposición 1.3.1.), y usando el embebimiento de Kondrachov, podemos extraer una parcial de $\{u_n\}_{n\varepsilon N}$ fuertemente convergente en $L^2(\Omega)$.

En definitiva, combinando los dos resultados:

1) Existe $\{u_n\}_{n\varepsilon N}$ / $\{u_n\} \longrightarrow u\varepsilon L^2(\Omega)$ fuertemente.

2) Existe$\{u_n\}_{n\varepsilon N}$ / $\{u_n\} \longrightarrow u\varepsilon H^o_{1,2}(\Omega)$ débilmente.

Por 1), 2) se tiene que $\int_\Omega u^2\,dV=1$, de donde $u\varepsilon B$.

Observemos que el ínfimo $\lambda_1(\Omega)$ se alcanza en B(es máximo), y que lo hace en u.

Como $H^o_{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, sabemos que $\|\cdot\|_{1,2}$ es semicontinua inferiormente, por la Proposición 1.3.2..
En consecuencia, $(\|\nabla u\|_2^2+\|u\|_2^2)^{\frac{1}{2}} \leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\inf(\|\nabla u_n\|_2^2+\|u_n\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$,

y como $\|u_n\|_2^2 \longrightarrow \|u\|_2^2$ por 1), entonces $\lim_{n\to\infty}\inf \int_\Omega \{|\nabla u_n|^2+qu_n^2\}\,dV$, que no es sino $\lambda_1(\Omega)$, es mayor o igual que $J(u)$, de donde $J(u)$ coincide con $\lambda_1(\Omega)$, por ser este un ínfimo.

Así pues, en u se alcanza el mínimo. Veamos que u es solución débil de la ecuación:

$$\Delta u-(q-\lambda_1(\Omega))u=0 \text{ en } \Omega,\ u=0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Por definición, hemos de comprobar :

$$\int_\Omega (\langle\nabla u,\nabla v\rangle+[q-\lambda_1(\Omega)]uv)\,dV=0, \text{ para toda } v\in \overset{\circ}{H}_{1,2}(\Omega).$$

Observemos que si definimos $J(v):\overset{\circ}{H}_{1,2}(\Omega)\to R$, como $J(v)=\int_\Omega(|\nabla v|^2+qv^2)\,dV$, e imponemos la condición $\int_\Omega u^2\,dV=1$, utilizando la función auxiliar:

$F(u,\lambda)=\int_\Omega(|\nabla v|^2+qv^2+\lambda(v^2-1))\,dV$, resulta que una aplicación estándar del método de los multiplicadores de Lagrange nos dice que:

$$\int_\Omega (2\langle\nabla u,\nabla v\rangle+2quv+2\lambda uv)\,dV=0$$

para toda $v\in\overset{\circ}{H}_{1,2}(\Omega)$, para algún λ, y esto por ser u punto crítico de J. En este caso, λ se puede conocer, y vale $-\lambda_1(\Omega)$(sustituir v por u en la expresión anterior y usar que $J(u)=\lambda_1(\Omega)$). Entonces es claro ya que u es solución débil de la ecuación anterior.

Por el Teorema de regularidad de soluciones débiles (ver [BR] ó [AU]), resulta que $u\varepsilon C^{\infty}(\Omega)$, y es solución fuerte ó clásica de nuestra ecuación anterior. Observemos que $u\neq 0$ ya que $\int_{\Omega} u^2\, dV=1$ y que $u\varepsilon C^{\infty}(\Omega)$ intersección con $\overset{\circ}{H}_{1,2}(\Omega)$. cqd

Es de interés señalar que como $u\varepsilon \overset{\circ}{H}_{1,2}(\Omega)$, entonces $|u|\varepsilon \overset{\circ}{H}_{1,2}(\Omega)$(ver [BR]), y además por ser $J(u)=\lambda_1(\Omega)$, tambien $J(|u|)=\lambda_1(\Omega)$, y por el mismo razonamiento, $|u|$ verifica la misma ecuación que u. Por esto siempre podemos suponer que $u\geq 0$.

1.3.9. TEOREMA.(Propiedad de la única continuación)[AR]ó[WU]

<u>Sea</u> $u\varepsilon C^2(\Omega)$, Ω <u>dominio acotado de</u> M, <u>con</u> M <u>variedad de Riemann completa</u>.

<u>Supongamos</u> $|\Delta u|\leq C(|u|+|\nabla u|)$, <u>para cierta constante</u> C.

<u>Entonces</u>, u <u>no es cero en ningún entorno abierto incluido en</u> Ω, <u>salvo que</u> u=0.

1.3.5.<u>Corolario</u>.

Sea u solución clásica de el problema:

$$\Delta u-qu+\lambda_1(\Omega)u=0 \text{ en } \Omega,\quad u=0 \text{ en } \partial\Omega$$

Entonces, u no es cero en ningún entorno abierto incluido en Ω, salvo que u sea cero.

<u>Demost</u>.:

Como $|\Delta u|\leq (\max_{\Omega}|q-\lambda_1(\Omega)|)|u|\leq C(|u|+|\nabla u|)$, con C constante que vale $\max_{\Omega}|q-\lambda_1(\Omega)|$, basta aplicar la propiedad de la continuación única.cqd

1.3.6. Corolario. Sea Ω un dominio contenido en Ω' otro dominio, ambos acotados y de forma que $\bar{\Omega}$ esté contenido tambien en Ω', ambos en M variedad de Riemann.

Entonces, $\lambda_1(\Omega) > \lambda_1(\Omega')$.

Demost.:

El que $\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\Omega')$ es trivial por definición. La desigualdad estricta surge de lo siguiente:

Si fuese $\lambda_1(\Omega)=\lambda_1(\Omega')$, dada u solución del problema

$$\Delta u - qu + \lambda_1(\Omega)u = 0 \text{ en } \Omega, \; u=0 \text{ en } \partial\Omega$$

definiendo $\tilde{u}$ como u en Ω, y 0 en el complemento de Ω en Ω', por la propiedad d)(ver definición 1.3.7.), resulta que $\tilde{u} \in \overset{o}{H}_{1,2}(\Omega)$, y como $J(\tilde{u})=\lambda_1(\Omega')=\lambda_1(\Omega)$, entonces $\tilde{u}$ es solución clásica de

$$\Delta\tilde{u} - q\tilde{u} + \lambda_1(\Omega')\tilde{u} = 0 \text{ en } \Omega', \; \tilde{u}=0 \text{ en } \partial\Omega'$$

de donde u no puede ser cero en ningún abierto contenido en Ω', salvo que sea idénticamente nula,(cosa que nos lleva a contradicción, pues por el Teorema 1.3.8., $u \neq o$) por el Teorema 1.3.9.. Esto claramente es absurdo. cqd

Por último veamos como se puede extender el teorema de la divergencia a una clase más amplia de regiones.

1.3.1. Lema. Sea Ω un dominio acotado en M variedad de Riemann. Sea $u \in C^1(\Omega)$ / $u/\partial\Omega=0$. Entonces, $u \in \overset{o}{H}_{1,2}(\Omega)$.

Demost.:

Tomemos $g:R\longrightarrow R$, con $|g(t)|\leq|t|$, $g(t)$ sea nula si $|t|\leq 1$, siendo además igual a t si $|t|\geq 2$, siendo $g\epsilon C^1(R)$.

Definimos $u_n=(1/n)g(nu)$, se comprueba que $u_n \epsilon W^O_{1,2}(\Omega)$ y $u_n \longrightarrow u$ en este espacio, de donde $u\epsilon W^O_{1,2}(\Omega)$. cqd

Para más aclaraciones, consultar [BR].

1.3.7. Corolario. Si $u\epsilon H^O_{1,2}(\Omega)$ y $u\epsilon C^2(\Omega)$, $u=0$ en $\partial\Omega$, se tiene que para toda $v\epsilon H^O_{1,2}(\Omega)$, $\int_\Omega (\langle\nabla u,\nabla v\rangle)\,dV = \int_\Omega (-v\Delta u)\,dV$.

Demost.:

Sea $F:H^O_{1,2}(\Omega)$— R, definida $F(v)=\int_\Omega \langle\nabla u,\nabla v\rangle\,dV$.

Observemos que F es lineal y contínua, y si $v\epsilon C^\infty_O(\Omega)$,

$$F(v) = \int_\Omega \langle\nabla u,\nabla v\rangle dV$$

pues basta aplicar el Teorema de la Divergencia al campo $v\nabla u$ que tiene soporte compacto incluído en Ω, y es de clase 2.

Como F es contínua, por la densidad en $H^O_{1,2}(\Omega)$ de $C_O(\Omega)$, se tiene que :

$$\int_\Omega \langle\nabla u,\nabla v\rangle\,dV = \int_\Omega (-v\Delta u)\,dV$$

para toda $v\epsilon H^O_{1,2}(\Omega)$. cqd

El teorema de la divergencia vale aunque Ω no sea regular, para las funciones de $H^O_{1,2}(\Omega)$.

Para acabar este apartado, comentemos un resultado técnico, que trata la existencia en $W(M)$ de unas funciones especiales, muy útiles posteriormente.

1.3.3. Proposición. Sea M una variedad de Riemann completa. Sean $s\geq r\geq 0$ números reales. Supongamos M no compacta.

Entonces, existe una función lipschitziana en M, $\Phi_{r,s}$, verificando, fijado $p \in M$:

$$|\nabla\Phi_{r,s}|_\infty \leq c/s-r, \quad 0 \leq \Phi_{r,s} \leq 1, \quad \Phi_{r,s}/B_r(p) = 1 \quad \Phi_{r,s}/M-B_s(p) = 0$$

donde c es una constante positiva.

Demost.:

Notemos que por ser $\Phi_{r,s}$ lipschitziana, $\Phi_{r,s} \in W(M)$, (consultar [BR] o [AU]).

Tiene sentido considerar $\nabla\Phi_{r,s}$, el gradiente generalizado. Para la construcción de $\Phi_{r,s}$, basta considerar la función $g:M \longrightarrow R$, dada por $g(q) = d(p,q)$, que es lipschitziana, y considerar tambien $\rho:R \longrightarrow R$ diferenciable, con $\rho(t) = 1$ si $t \leq 1$, $\rho(t) = 0$ si $t \geq 2$, y luego poner: $\Phi_{r,s} = \rho((g+s-2r)/s-r) \in W(M)$, por ser composición de una funcion de W(M) y otra diferenciable. (Consultar si se quiere [BR]). Una demostración de este resultado se puede encontrar en [YAU]. cqd

2. VARIABLE COMPLEJA

Se expondrán algunos resultados que se utilizarán posteriormente relativos al tema de la Teoría de las Funciones Analíticas. Algunas demostraciones se omitiran, aunque en cualquier caso, se darán referencias bibliográficas donde poder consultar y ampliar estos hechos.

2.1. Teorema de Liouville para funciones subarmónicas. Teorema de Runge.

2.1.1. Definición. Sea Ω un dominio de R^2 no vacio. Se dice que $f:\Omega \longrightarrow R$ es subarmónica, si $f \in C^2(\Omega)$ y $\Delta f \geq 0$.

2.1.1. Lema.(Teorema de Hadamard de los 3 circulos) [MA] Sea $f:\bar{C}(R_1,R_2) \longrightarrow R^2$ holomorfa, donde $\bar{C}(R_1,R_2)$ es la corona cerrada de radio interior R_1 y exterior R_2 ($R_1 \leq R_2$), centrada en 0. Llamamos $M_R = \text{máx}\{|f(x)|,\ x \in B_R(0)\}$, con $R_1 \leq R \leq R_2$.

Entonces:

$$\log M_R \leq [(\log R_2 - \log R)/(\log R_2 - \log R_1)] \log M_{R_1} +$$

$$+ [(\log R - \log R_1)/(\log R_2 - \log R_1)] \log M_{R_2}.$$

2.1.2. Lema. Sea u función subarmónica en Ω' dominio de R^2, y sea v función armónica en Ω', verificando que $v \geq u$ en $\partial\Omega$, donde Ω es otro dominio con cierre contenido en Ω', y que además supondremos acotado.

Entonces, $v \geq u$ en Ω.

Demost.:

Aplicación inmediata del Teorema 1.1.1.. cqd

2.1.1. TEOREMA. (Liouville)

Sea $u:R^2 \longrightarrow R$, $u \in C^2(R^2)$, $\Delta u \geq 0$ (subarmónica)

Supongamos que existe $M \in R / u(x) \leq M$, para todo $x \in R^2$.

Entonces, u es constante.

Demost.

Sea $C(R_1,R_2)$, $R_1 < R_2$, una corona, y elijamos $\alpha, \beta \in R$, soluciones del sistema compatible y determinado:

$$\begin{cases} R_1 \log \alpha + \beta = M_{R_1} \\ R_2 \log \alpha + \beta = M_{R_2} \end{cases}$$

donde como siempre, $M_R = \text{máx}\{u(x),\ x \in B_R(0)\}$.

Sea la función $h(x) = |z| \log\alpha + \beta$, $h:R^2 \longrightarrow R$ armónica. Es claro que $h \geq u$ en $C(R_1,R_2)$ por la elección de α,β. Luego $h \geq u$ en $C(R_1,R_2)$ por el lema 2.1.2. anterior. En consecuencia tomando la función holomorfa en R^2 $f(z) = \alpha^z e^\beta$, y aplicandole el Lema 2.1.1., se tiene:

$$\begin{aligned} &\text{máx}\{h(x),\ x \in B_R(0)\} \leq [(\log R_2 - \log R)/(\log R_2 - \log R_1)]\cdot \\ &\cdot \text{máx}\{h(x),\ x \in B_{R_1}(0)\} + [(\log R - \log R_1)/(\log R_2 - \log R_1)]\cdot \\ &\cdot \text{máx}\{h(x),\ x \in B_{R_2}(0)\} \end{aligned}$$

donde suponemos $R_1 \leq R \leq R_2$.

Luego como $u \leq h$ en $\bar{C}(R_1,R_2)$, entonces teniendo en cuenta la elección de α,β:

$$\begin{aligned} M_R \leq &[(\log R_2 - \log R)/(\log R_2 - \log R_1)]\ M_{R_1} + \\ &[(\log R - \log R_1)/(\log R_2 - \log R_1)]\ M_{R_2} \end{aligned}$$

con $R_1 \leq R \leq R_2$.

Si hacemos $M_{R_2} \leq M$ (u es acotada superiormente), y $R_2 \longrightarrow \infty$, entonces, $M_R \leq M_{R_1}$, si $R \geq R_1$. Tomando $R > R_1$, esto nos lleva a una contraciccíón con el Teorema 1.1.1., salvo que u sea constante. cqd

2.1.2. TEOREMA. (Runge) [MA]

Sea Ω un dominio de R^2. Llamamos agujero de Ω a toda componente conexa acotada de $R^2 - \{\Omega\}$

Llamamos $R(\Omega) = \{$funciones racionales con polos en los agujeros de $\Omega\}$. Si Ω es simplemente conexo, $R(\Omega) = P(\Omega)$ Polinomios en Ω.

Sea $H(\Omega)$ el espacio de las funciones holomorfas en Ω, dotado de la topologia de la convergencia uniforme sobre compactos.

Entonces, $R(\Omega)$ es denso en $H(\Omega)$.

2.2. Teorema de Uniformización.

Sabemos que una superficie de Riemann, es una variedad de dimensión 2, con cambio de carta holomorfo. Dos de tales superficies se considerarán isomorfas ó conformemente equivalentes, cuando existe un biholomorfismo de una a otra.

2.2.1. TEOREMA. (Uniformización) [SPR]

Una superficie de Riemann simplemente conexa es conformemente equivalente a S^2, $D(0,1)$, ó a R^2.

2.2.2. TEOREMA. [SPR]

R^2 sólo recubre a R^2, a un cilindro, ó a un toro como superficie de Riemann.

2.3. TEOREMA

Sea f función holomorfa en el disco unidad D. Supongamos que $f \neq 0, a$ con $a \neq 0$ (f no toma dos valores). Sea $\alpha = 1 - 1/k$, con

$k \epsilon Z^+$. Entonces:

$|f'| / (|f|^{\alpha} + |f|^{2-\alpha}) \epsilon L^p(D)$, donde se supone $0 < p < 1$

Demost.:

Se dice que una función g holomorfa en D es normal, si la familia $\{g(s(t))\}$, con s transformaciónes conformes de D en D, es normal en el sentido de Montel, es decir, que su cierre topológico en H(D) es compacto.

Usando un resultado (ver [HAY]) que afirma que si una función g en D omite dos valores, entonces es normal, concluimos que $f^{1/k}$ es normal.

Viendo [HAY] , esto implica que existe C constante tal que $|g'|/(1+|g|^2) \leq C/(1-|z|^2)$, y esto aplicado a $f^{1/k}$, nos resulta:

$|f'|/(k|f|^{1-1/k}(1+|f|^{2/k})) \leq C/(1-|z|^2)$, y esto es equivalente a

$|f'|/(|f|^{1-1/k}+|f|^{2-(1-1/k)}) \leq k\,C/(1-|z|^2)$, de donde como siempre

$k\,C/(1-|z|^2) \epsilon L^p(D)$, $0 < p < 1$, se deduce por fín lo apetecido. cqd

2.4. TEOREMA (Montel)[MA]

Sea F una familia de funciones de $H(\Omega)$, con Ω un dominio de R^2.

Se tiene que F es compacto sí y sólo sí F es cerrado en $H(\Omega)$ y para todo K compacto contenido en Ω, F es uniformemente acotada en K.

2.5. TEOREMA (Picard) [MA]

Sea $g: R^2 \longrightarrow R^2$ meromorfa. Entonces, $g(R^2)$ es todo R^2, salvo a lo más dos puntos, ó bien g es constante.

2.6. TEOREMA [SP]

Sea M una variedad riemanniana de dimensión dos orientable. Entonces, M tiene un subatlas holomorfo, que le da estructura de superficie de Riemann. Además, este atlas esta formado por cartas (U,x) de M isotermas, esto es, tales que $\langle x_u, x_v \rangle = 0$, $\langle x_u, x_u \rangle = \langle x_v, x_v \rangle = \lambda^2 > 0$, donde x_u, x_v es la base canónica de T_pM asociada a la carta (U,x).

2.6.1. Definición. Sea M una variedad dos-dimensional, y sean $\langle\rangle_1, \langle\rangle_2$ dos métricas sobre M que le dan estructuras de variedad de Riemann. Se dice que estas métricas son conformes, si para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\langle X,Y \rangle_1 = g\langle X,Y \rangle_2$, con $g: M \longrightarrow R^+$ diferenciable.

Es inmediato que dos métricas conformes tienen las mismas cartas isotermas, y por tanto dan la misma estructura de superficie de Riemann.

Lo recíproco es cierto: si dos métricas dan (mediante atlas isotermo) la misma estructura holomorfa, entonces estas métricas son conformes, y esto es consecuencia de que cualquier biholomorfismo conserva ángulos.

Por esto, cuando se habla de la estructura conforme de una variedad de Riemann M, no hay ambigüedad en entender, o bien la estructura holomorfa subyacente a la métrica dada en M, o bien el conjunto de todas las métricas conformes a la que se sobreentiende en M

El Teorema 2.6. no lo demostramos, pero si lo demostraremos, por ser de menor complicación y más acorde con muestro tema, en el caso de superficies minimales en R^3.

3. GEOMETRIA DIFERENCIAL

En este apartado, se comentarán algunos resultados específicos de Geometría Riemanniana. En general, serán resultados técnicos y fórmulas que implican bastante cálculo. Se fijarán algunas notaciones y se haran algunas definiciones para precisar ideas.

3.1. Completitud.

Sabemos que es lo que significa el apelativo "completa" en una variedad de Riemann. Por el Teorema de Hopf y Rinow, esto significaba, por ejemplo, que la aplicación exponencial estuviera definida , para todo punto, en todo el tangente, ó que la distancia canónica que se induce en la variedad sea completa.

En este apartado, veremos una caracterización nueva de completitud.

3.1.1. Definición. Sea M variedad de Riemann.

Sea $\alpha:[o,\infty[\longrightarrow M$ curva diferenciable. Se dice que α es divergente, si para todo compacto K de M, existe $t_o \varepsilon]0,\infty[$ / $\alpha(t) \notin K$ si $t > t_o$.

Se define la longitud de una curva divergente como:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty}\int_o^t |\alpha(t)|\, dt = L(\alpha)$$

3.1.1. Proposición. Sea M variedad de Riemann.

Se tiene que M es completa sí y sólo sí la longitud de cualquier curva divergente en M es infinita.

Demost.:

Supongamos que M es completa.

Sea α curva divergente, $\alpha:[o,\infty[\longrightarrow M$, y sea $p=\alpha(0)$. Consideremos $\exp_p: T_pM \longrightarrow M$ diferenciable, por ser M completa. Como $B_p(r)=\{v\in T_pM \;/\; |v|\leq r\}$ es compacto en T_pM, entonces su imagen por $\exp_p$ tambien es compacto, de donde como α es divergente, existe $t_o\in R^+ \;/\; t\geq t_o$ implica que $\alpha(t)\notin \exp_p(B_p(r))$.

Sea $t_1>t_o$. Sea $L(\alpha)$ que es claro que siempre es mayor que:

$$\int_o^{t_1} |\alpha'(t)|\,dt$$

Por el Teorema de Hopf y Rinow, como $\alpha(t_1)\notin \exp_p(B_p(r))$, resulta que $d(p,\alpha(t_1))>r$, de donde $L(\alpha)>r$, y como esto es para todo $r>0$, resulta por fín que $L(\alpha)=\infty$. cqd

Para el recíproco, supongamos ahora que la longitud de cualquier curva divergente es ∞. Veamos que M es completa.

Sea γ geodésica, con $\gamma(0)=p$, que tomamos parametrizada por el arco. En principio, γ está definida en $]-\varepsilon_1,\varepsilon_2[$ intervalo abierto maximal. Hemos de comprobar que lo esta en todo R.

Para ello, nos restringiremos a $\gamma:[0,\varepsilon_2[\longrightarrow M$. Reparametricemos γ, y pongamos $\gamma:[0,\infty[\longrightarrow M$, (aunque con esta reparametrización, γ deje de ser geodésica). Veamos que γ es divergente:

En efecto, si no lo fuese, existiría K compacto, de forma que existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in N}$ contenida $[o,\infty[\;/\; \{t_n\}\rightarrow\infty$ y $\gamma(t_n)\in K$. Como K es compacto, $\{\gamma(t_n)\}_{n\in N}$ tiene un punto de acumulación, que llamaremos q. La geodésica γ se puede extender más allá de ε_2 (con $\gamma(\varepsilon_2)=q$), y esto contradice el que $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ sea maximal. Asi pues, γ es divergente.

Por hipótesis, $L_0^\infty(\gamma)=\infty$, pero $L_0^\infty(\gamma)=\varepsilon_2$ obviamente. Esto fuerza a que γ esté definida en $[0,\infty[$. Analogamente se comprueba que lo está en $]-\infty,0]$. cqd

3.2.TEOREMA.

Sea M una variedad de Riemann de dimensión 2, y simplemente conexa. Supongamos que la curvatura de Gauss K de M es ≤ 0, y que M es completa. Entonces, el area de M es infinita.

Demost.:

Por el Teorema de Hadamard, $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ es un difeomorfismo, bajo todas nuestras hipótesis.

Por el Lema de Gauss y el Teorema de comparación de Rauch (ver si se quiere [DC]) se tiene que:

$$\|(d\exp_p)_v(w)\| \geq \|w\|, \text{ si } \langle v,w\rangle = 0 \quad \text{(Teorema de Rauch)}$$
$$\langle (d\exp_p)_v(v),(d\exp_p)_v(w)\rangle = \langle v,w\rangle \text{ si } w\in T_pM \quad \text{(Lema de Gauss)}$$

donde se supone $v\in T_pM$ un vector fijo.

El razonamiento a seguir, es usar la fórmula siguiente: si $g:(M,\langle\rangle_1)\longrightarrow(N,\langle\rangle_2)$ es un difeomorfismo, entonces se verifica

$$\int_M f\,dV_1 = \int_M (f(g^{-1}))\,|J_g{-1}|\,dV_2$$

donde dV_1, dV_2 son las formas de volumen asociadas a $\langle\rangle_1$, $\langle\rangle_2$ respectivamente, y $J_{g^{-1}} = \det(\langle d\,g^{-1}(e_i), \tilde{e}_j\rangle)$, con e_i base ortonormal en T_pN, y $\tilde{e}_j$ base ortonormal en $T_{g^{-1}(p)}M$.

Usando que $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ es difeomorfismo y esta última fórmula, nos quedaría:

$$\infty = \mathrm{Vol}(T_pM) = \int_{T_pM} dV_o = \int_M |J_{\exp_p^{-1}}|\, dV$$

donde dV_o es el elemento de Volumen asociado a la métrica llana de T_pM, y dV es el elemento de volumen de la métrica de M.

Comprobemos que $|J_{\exp_p^{-1}}| \leq 1$.

En efecto, sea $\{e_i\}$ base ortonormal en $(T_pM,\ dV_o)$, donde identificamos T_pM con $T_v(T_pM)$. Sea $v \in T_pM$, y hagamos la elección de $e_1 = v/\|v\|$, y e_2 con $\langle e_2, e_1\rangle = 0$, $\|e_2\| = 1$

Por el lema de Gauss, y por el Teorema de Rauch:

$\|(d\exp_p)_v(e_1)\| = \|e_1\| = 1$ y $\|(d\exp_p)_v(e_2)\| \geq \|e_2\| = 1$

donde $\langle (d\exp_p)_v(e_1), (d\exp_p)_v(e_2)\rangle = 0$.

Tomemos la base $\tilde{e}_1 = e_1$ y $\tilde{e}_2 = (d\exp_p)_v(e_2)/\|(d\exp_p)_v(e_2)\|$ en T_pM.

Teniendo en cuenta estas dos bases, resulta que :

$|J_{\exp_p}(v)| = \|(d\exp_p)_v(e_2)\| \geq 1$ de donde $|J_{\exp_p^{-1}}| \leq 1$.

Esto lo hacemos en todo v de T_pM.

Como consecuencia:

$\mathrm{Vol}(M) = \int_M dV \geq \int_M |J_{\exp_p^{-1}}|\, dV$, de donde se deduce que $\infty = \mathrm{Vol}(T_pM) \geq \mathrm{Vol}(M)$. cqd

3.3. <u>Fórmula de Simons. Fórmula de Reilly.</u>

Sea M^n una variedad de Riemann inmersa isométricamente en N^{n+r}

otra variedad de Riemann: $\Phi : M^n \longrightarrow N^{n+r}$ la inmersión.

3.3.1. Definición. Llamamos curvatura media en $p \in M$ (asociada a Φ) a:

$$H = (\Sigma_{i=1}^{n} \sigma(e_i, e_i))/n$$

con $\{e_i\}$ base ortonormal en T_pM, y σ la 2ª forma fundamental de la inmersión en p.

En el caso de que $M^n \longrightarrow N^{n+1}$ (hipersuperficies), tambien se llama curvatura media H al escalar: $\langle H,N\rangle$, asociado a la dirección normal unitaria N.

Observar que por ser en el caso de hipersuperficies H proporcional a N, entonces $H = \langle H,N\rangle N$.

Es claro que para definir globalmente el escalar H, hay que exigir orientabilidad, cosa que nosotros siempre suponemos.

Se entenderá que la inmersión es minimal, si $H = 0$.

Se entenderá que la inmersión es de curvatura media H constante, cuando el escalar H sea constante. Observese que el escalar H está bien definido, salvo el signo, según se tome una orientación u otra para definirlo.

3.3.1. Proposición. (Fórmula de Simons).

Sea M superficie inmersa isométricamente en R^3.

Supongamos que M es orientable y con $H =$ constante. Entonces:

$$\tfrac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 = |\nabla\sigma|^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)^2 K$$

donde K es la curvatura de Gauss de M, λ_1, λ_2 las curvaturas

<u>principales y</u> σ <u>es la 2ª forma fundamental asociada a la inmer-sión</u>.

<u>Demost</u>.:

Sean $\{e_i\}$ campos locales ortonormales, con $\nabla_{e_i} e_j = 0$ en $p\epsilon M$, con p un punto fijo de M.

Calculemos $\Delta|\sigma|^2$ en p:

$|\sigma|^2 = \Sigma_{i,j}\sigma(e_i,e_j)$, donde identificamos $\sigma(e_i,e_j)$ con la componente en la dirección de N del vector $\sigma(e_i,e_j)$.

Se tiene que $e_k(|\sigma|^2) = 2\Sigma_{i,j}\sigma(e_i,e_j)\, e_k\sigma(e_i,e_j)$, de donde $e_ke_k(|\sigma|^2)$ vale:

$$2\Sigma_{i,j}[\,\sigma(e_i,e_j)\, e_ke_k\sigma(e_i,e_j) + (e_k\sigma(e_i,e_j))^2]$$

de donde en consecuencia :

$$\Delta|\sigma|^2 = \Sigma_{k,i,j}2\,[\sigma(e_i,e_j)\nabla^2\sigma(e_k,e_k,e_i,e_j) + (\nabla\sigma(e_k,e_i,e_j))^2]$$

y teniendo en cuenta la simetria de σ, se tiene:

$$\Delta|\sigma|^2 = 2([\Sigma_{i,k}(\sigma(e_i,e_j)\nabla^2(e_k,e_i,e_k,e_i)] + \Sigma_{i,j,k}(\nabla\sigma(e_k,e_i,e_j))^2)$$

Sabemos que si T es un tensor (2,0), la identidad de Ricci nos dice que :

$$(\nabla^2T)(u,v,w,x,) - (\nabla^2T)(v,u,w,x) = T(R(u,v)w,x) - T(w,R(u,v)x)$$

Aplicando esta identidad en la última expresión, queda:

$$\Delta|\sigma|^2 = 2(\Sigma_{i,k}\sigma(e_i,e_i)[\nabla^2\sigma(e_i,e_k,e_k,e_i) - \sigma(R(e_k,e_i)e_i) -$$

$$- \sigma(e_k,R(e_k,e_i)e_i)] + \Sigma_{i,j,k}[\nabla\sigma(e_k,e_i,e_j)^2])$$

y esto es igual a (suponiendo que σ diagonaliza en esta base):

$$2\Sigma_{i,k}[\lambda_i\nabla^2\sigma(e_i,e_k,e_k,e_i)] + K(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 2K\lambda_1\lambda_2 + |\nabla\sigma|^2$$

Como $\Sigma_{i,k}[\lambda_i\nabla^2\sigma(e_i,e_k,e_k,e_i)] = 0$, pues $H =$ constante, se concluye lo querido. cqd

3.3.2. Proposición. (Fórmula de Reilly)

Supongamos $M^n, \tilde{M}^{n+1}$ variedades de Riemann, con M embebida isométricamente en $\tilde{M}$. Supongamos que M es compacta, y nos determina, por el Teorema de separación de Jordan-Brower, un dominio Ω en $\tilde{M}$ / $\partial\Omega = M$ (Consultar [GP]). Sea N la normal exterior a M^n. Sean $f_i:\Omega \longrightarrow R$, $i = 1,2$ funciones diferenciables. Llamemos z_i, $i = 1,2$ a f_i/M. Sea $u_i = \nabla f_i(N) = \langle\nabla f_i, N\rangle$, $i = 1,2$. Entonces:

$$\int_M \{\sigma(\nabla z_1,\nabla z_2) + nHu_1u_2 - (\Delta z_1)u_2 - (\Delta z_2)u_1\}\, dV = \int_\Omega \{\langle\nabla^2 f_1, \nabla^2 f_2\rangle +$$

$$+ Ric(\nabla f_1,\nabla f_2) - \Delta f_1 \Delta f_2\}\, d\tilde{V}.$$

Nota.: Escribimos $\nabla^2 f_i = \text{Hess}\, f_i$, $i = 1,2$

Demost.:

Tengamos presentes los cálculos siguientes:

(1) $(\nabla^2 z_i)(X,Y) = \nabla^2 f_i(X,Y) + \sigma(X,Y)\nabla f_i(N)$

para todo $X,Y\epsilon\mathfrak{X}(M)$.

(2) $\Delta<\nabla f_1,\nabla f_2> = 2<\nabla^2 f_1,\nabla^2 f_2> + 2Ric(\nabla f_1,\nabla f_2) + <\nabla f_1\nabla(\Delta f_2)> +$
$+ <\nabla(\Delta f_1,\nabla f_2>$.

(3) $\Sigma_i e_i(\Delta f_1\cdot\nabla f_2(e_i)) = <\nabla(\Delta f_1,\nabla f_2> + (\Delta f_1)(\Delta f_2)$

con $\{e_i\}$ base ortonormal en $T_p\tilde{M}$, en cada punto p de $\tilde{M}$.

(4) $\Sigma_i e_i(f_1\nabla f_2(e_i)) = <\nabla f_1,\nabla f_2> + f_1(\Delta f_2)$

con $\{e_i\}$ base ortonormal en $T_p\tilde{M}$, en cada punto de $\tilde{M}$.

(5) Por el Teorema de la Divergencia(Teorema 1.3.2.)

$$\int_\Omega \{<\nabla f_1,\nabla f_2> + f_1\Delta f_2\}\, d\tilde{V} = \int_M z_1 u_2\, dV$$

De (2),(3) se deduce:

$$\Delta<\nabla f_1,\nabla f_2> - \Sigma_i e_i(\Delta f_1\nabla f_2(e_i)) - \Sigma_i e_i(\nabla f_1(e_i)\Delta f_2) = 2<\nabla^2 f_1,\nabla^2 f_2> +$$
$$+ 2Ric(\nabla f_1,\nabla f_2) - 2(\Delta f_1)(\Delta f_2).$$

De aquí, usando el Teorema 1.3.2. (de la Divergencia)

$$2\int_\Omega \{<\nabla^2 f_1,\nabla^2 f_2> - (\Delta f_1)(\Delta f_2) + Ric(\nabla f_1,\nabla f_2)\}\, d\tilde{V} = \int_M \{\Sigma_i(\nabla^2 f_1)(e_i,N)\cdot$$
$$\cdot\nabla f_2(e_i) + \Sigma_i(\nabla^2 f_2)(e_i,N)\nabla f_1(e_i) - \Delta f_1\nabla f_2(N) - \Delta f_2\nabla f_1(N)\}\, dV \qquad *$$

Entonces, descomponiendo $T_p\tilde{M}$ en suma ortogonal de $\{e_1,\dots,e_n\}$ y $e_{n+1} = N$, con $\{e_1,\dots,e_n\}$ base ortonormal de T_pM, el integrando del segundo término queda, descomponiendo los sumatorios en dos, uno que suma en las direcciones tangentes a M, y otro correspondiente a la dirección N normal a M, de la forma siguiente:

$$<\nabla u_1, \nabla z_2> + <\nabla z_1, \nabla u_2> + 2\sigma(\nabla z_1, \nabla z_2) + 2nHu_1 u_2$$

En consecuencia, como por el Teorema 1.3.2.,

$$\int_M <\nabla u_1, \nabla z_2>\, dV = -\int_M u_1 \Delta z_2\, dV \qquad \int_M <\nabla u_2, \nabla z_1> = -\int_M u_2 \Delta z_1\, dV$$

resulta que la expresión * queda:

$$\int_M \{2\sigma(\nabla z_1, \nabla z_2) + 2nHu_1 u_2 - 2u_2 \nabla z_1 - 2u_1 \nabla z_2\}\, dV = 2\int_\Omega \{<\nabla^2 f_1, \nabla^2 f^2> +$$

$$+ Ric(\nabla f_1, \nabla f_2) - (\Delta f_1)(\Delta f_2)\}\, d\tilde{V}. \text{ cqd}$$

3.4. TEOREMA.

Sea M una variedad de Riemann completa, con $vol(M) = \infty$. Sea $u: M \longrightarrow R^+$, con $\Delta \log u = 0$. Entonces $\int_M u^p\, dV = \infty$, para todo $p > 0$.

Demost.:

Veamos que si $p = 2$ y $\int_M u^2\, dV < \infty$, llegaremos a contradicción, y en consecuencia, u no será una función de $L^2(M)$. A partir de aqui obtendremos que $u \notin L^p(M)$, para todo $p > 0$.

Como $0 = \Delta \log u = ((\Delta u)/u) - |\nabla u|^2/u^2$, entonces $u\Delta u = |\nabla u|^2$. En consecuencia $u\Delta u \geq 0$ en toda M. Sea ahora $p \in M$ fijo. Sea $\Phi_{r,s}$ función de M en R determinada según la Proposición 1.3.3., con $s > r > 0$.

Recordemos que $\Phi_{r,s}$ era 1 en $B_r(p)$ y era 0 en $M-\{B_s(p)\}$. Además, $0\leq\Phi_{r,s}\leq 1$, y $|\nabla\Phi_{r,s}|_\infty\leq C/(s-r)$, con C constante que no depende de r, s y $\Phi_{r,s}\in W(M)$. Se tiene que:

$$0\leq\int_M\Phi^2_{r,s}u\Delta u\,dV=-\int_M<\nabla(\Phi^2_{r,s}u),\nabla u>dV=-2\int_M\Phi_{r,s}u<\nabla\Phi_{r,s},\nabla u>dV-$$

$-\int_M\Phi^2_{r,s}|\nabla u|^2\,dV$, donde en la primera igualdad se usa el Teorema 1.3.2

En consecuencia:

$$\int_M\Phi^2_{r,s}|\nabla u|^2\,dV\leq-\int_M 2\Phi_{r,s}<\nabla\Phi_{r,s},\nabla u>dV\leq 2\int_M||\Phi_{r,s}\nabla u||\,||u\nabla\Phi_{r,s}||\,dV$$

$$\leq 2||\Phi_{r,s}\nabla u||_2||u\nabla\Phi_{r,s}||_2\leq(C/(s-r))||\Phi_{r,s}\nabla u||_2||u||_2$$

donde en la segunda desigualdad se usa la Desigualdad de Schwartz, y en la tercera la de Hölder. En resumen, se tiene que:

$$||\Phi_{r,s}\nabla u||^2_2\leq(C/(s-r))||\Phi_{r,s}\nabla u||_2||u||_2$$

de donde se deduce que $||\Phi_{r,s}\nabla u||_2\leq(C/(s-r))||u||_2$.

Como $\Phi_{r,s}=1$ en $B_r(p)$, se tiene que :

$$\left(\int_{B_r(p)}||\nabla u||^2\,dV\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_{B_r(p)}||\Phi_{r,s}\nabla u||^2\,dV\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\int_M||\Phi_{r,s}\nabla u||^2\,dV\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$||\Phi_{r,s}\nabla u||_2\leq(C/(s-r))||u||_2<\infty$ por ser $\int_M u^2\,dV<\infty$.

Luego si r lo fijamos, y $s\longrightarrow\infty$, entonces:

$$\int_{B_r(p)} |\nabla u|^2 \, dV = 0$$

de donde u es cote en $B_r(p)$, y esto para todo r, de donde u es constante.

En consecuencia, $u = c > 0$, de lo que $(\int_M u^2)^{\frac{1}{2}} dV = c \operatorname{vol}(M) = \infty$ Esto es absurdo si $u \in L^2(M)$. Así pues, $u \notin L^2(M)$.

Veamos que $u \notin L^p(M)$, para todo $p > 0$.

En efecto, como $\Delta \log u = 0$, entonces $p \Delta \log u = 0$, y esto equivale a que $\Delta \log u^p = 0$, de donde según nuestro razonamiento, $u^p \notin L^2(M)$, y esto para todo $p > 0$. cqd

3.4.1. TEOREMA.

Sea M una variedad de Riemann completa y orientable. Supongamos que $\dim M = 2$. Sea $\rho : M \longrightarrow R^2$ holomorfa. Sea $u = |\rho|$. Admitamos que pueda ser $u = 0$ en algunos puntos, o sea, cambiamos la hipótesis del teorema anterior de $u > 0$ por la de $u \geq 0$. Entonces, $u \notin L^p(M)$.

Nota.:El decir que ρ es holomorfa conlleva la existencia de un atlas conforme u holomorfo en M que le de estructura de superficie de Riemann. Esto siempre es posible como nos dice el Teorema 2.6., y es por esto que todo tiene sentido.

Demost.:

El proceso que se sigue es el mismo que en la demostración anterior.

Comencemos por notar que por ser ρ holomorfa, sus ceros no se acumulan. Siguiendo, y haciendo la misma demostración del teorema anterior, llegaremos al paso en que se aplica por primera vez el Teorema de la Divergencia.

Antes de proseguir, notemos que por tener ρ un múmero finito de ceros en $B_s(p)$, por ser este conjunto compacto, podemos hacer la restricción de suponer que sólo hay uno, ya que como se observará en la demostración, la existencia de más de uno no añade más complicación.

Así, en $B_s(p)$ hay un sólo cero de u, y supondremos por comodidad, que es $u(p) = 0$.

Aplicando el Teorema de la Divergencia:

$$0 \leq \int_M \Phi^2_{r,s}\, u\Delta u\, dV = -\int_{M - B_\varepsilon(p)} <\nabla(\Phi^2_{r,s}\, u), \nabla u> dV + \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \Phi^2_{r,s} u\, \partial u/\partial N\, ds$$

para ε suficientemente pequeño.

Proseguimos la demostración de forma análoga a antes.

Siguiendo un razonamiento idéntico al teorema anterior, se llega a que:

$$\|\Phi_{r,s}\nabla u\|_2 \leq (C/(s-r))\|u\|_2 + \int_{\partial B_\varepsilon(p)} \Phi^2_{r,s} u\, \partial u/\partial N\, ds$$

con la $\|.\|_2$ tomada en $L^2(M - B_\varepsilon(p))$.

Cuando razonemos con u^p, tendremos el término adicional por el Teorema de la Divergencia:

$$\int_{\partial B_\varepsilon(p)} \Phi^2_{r,s}\, u^p\, \partial u^p/\partial N\, ds$$

Observemos que podríamos acabar este teorema, si demostramos que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(p)} \phi^2_{r,s} u^p\, \partial u^p/\partial N\, ds = 0.$

Para ello, observemos que $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(p)} \phi^2_{r,s} u^p\, \partial u^p/\partial N\, ds_o = 0$ y habremos acabado, donde ds_o indica la metrica llana (componer con una carta y trasladar el problema al plano).

Como $\phi^2_{r,s} u^p$ es acotada en $B_\varepsilon(p)$, nos bastaría con comprobar que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon(p)} \partial u^p/\partial N\, ds_o = 0$$

Como $u = |\rho|$, entonces:
$|\partial(|\rho|^p)/\partial N| \leq |\nabla|\rho|^p|$, y $|\nabla|\rho|^p| = \nabla(\rho\,\bar{\rho})^{p/2} = p/2(\rho\,\bar{\rho})^{(p-2)/2}\cdot$
$\cdot[(\nabla(\rho))\bar{\rho} + \rho(\nabla\bar{\rho})$, de donde $|\nabla|\rho|^p| \leq p/2|\rho|^{p-2}2|\nabla\rho||\rho| =$
$= p|\rho|^{p-1}|\nabla\rho|$.

Como $\rho(p) = 0$, $\rho = z^n g(z)$, con $g(0) \neq 0$.

Luego $\rho' = nz^{n-1}g(z) + z^n g'(z)$, y así $|\rho'| = |z^{n-1}|h(z)$ con $h(z)$ conveniente.

En consecuencia, $|\nabla|\rho|^p| \leq p|z|^{n(p-1)}|g(z)|^{n(p-1)}|\nabla\rho| \leq$
$C|z|^{n(p-1)}|z|^{n-1} = C\varepsilon^{np-n+n-1} = C\varepsilon^{np-1}$. De aquí se deduce:

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(p)} \phi^2_{r,s}\, |\rho|^p \partial(|\rho|^p)/\partial N\, ds_o \leq C\int_{\partial B_\varepsilon(p)} \varepsilon^{pn}\varepsilon^{np-1}\, ds_o =\right.$$

$= C\varepsilon^{2np-1}\int_{\partial B_\varepsilon(p)} ds_o = C\varepsilon^{2pn}$, que tiende a 0 cuando $\varepsilon\to 0$. cqd

CAPITULO II

SUPERFICIES MINIMALES COMPLETAS EN R^3

1. HIPERSUPERFICIES MINIMALES EN R^n. INTRODUCCION. FORMULAS DE VARIACION.

Como es sabido, el origen del estudio de las superfícies minimales está en el problema de Plateau, ó en definitiva, en el establecer la existencia de superfícies de contorno prefijado con area mínima.

Una aproximación más técnica a este problema, con el lenguaje propio de la Geometría de Riemann, lo dará la 1ª Fórmula de variación, de la cual se extraerá la importancia en este problema del estudio de la curvatura media.

El siguiente paso, de aproximación al concepto de estabilidad, que en definitiva da información de cuando los puntos críticos de la función area definida en una variación (con contorno fijo), son efectivamente mínimos para el area, consistirá en el estudio de la 2ª Fórmula de Variación.

Es importante señalar, que daremos dos conceptos de estabilidad distintos, asociados a problemas variacionales distintos, que surgen de considerar la Hipersuperfícies con curvatura media constante como solución de un determinado problema variacional. Comencemos dando algunos conceptos y fijando notaciones.

1.1. 1ª Fórmula de Variación.

En este apartado, en realidad daremos dos fórmulas que responden al calificativo del título, una correspondiente al area, y otra correspondiente al volumen, como especificaremos con más claridad.

1.1.1. Definición. Sea M una variedad de Riemann. Sea $f : M \longrightarrow R^{m+1}$ una inmersión isométrica de M en el espacio euclideo, donde suponemos que $\dim M = m$. Llamamos variación diferenciable de M a:

$F: I \times M \longrightarrow R^{m+1}$ diferenciable, donde $I =]-1,1[$, verificando:

(a) $f_t = F(t,-) : M \longrightarrow R^{m+1}$ es inmersión isométrica, para todo $t \in]-1,1[$.

(b) $f_o = f$.

Cuando M es compacta con frontera ∂M (posiblemente $\partial M = \emptyset$), se dice que la variación es con frontera fija si es cierta esta otra propiedad:

(c) $f_t / \partial M = f / \partial M$, para todo $t \in]-1,1[$.

Siempre suponemos nuestras variedades orientables. Llamamos $E = (dF)((\partial/\partial t)|_{t=0})$ campo asociado a la variación F, llamado campo variacional.

Escribimos $A(t) = \int_M dV_t$, donde dV_t es el elemento de volumen inducido por la inmersión f_t.

1.1.1. TEOREMA (1ª Fórmula de Variación del Area)

Sea M^m una variedad de Riemann, y sea $f: M^m \longrightarrow R^{m+1}$ una inmersión isométrica de M en el espacio euclideo.

Supongamos que M es compacta con frontera ∂M.

Sea $F: I \times M \longrightarrow R^{m+1}$ variación diferenciable de f con frontera fija. Entonces se tiene que:

$$(dA/dt)|_{t=0} = -m\int_M \langle H,E\rangle\, dV_o$$

donde H es el campo vectorial curvatura media.

Demost.:

Se tiene que:

$$dA/dt = (d/dt)\int_M dV_t = \int_M (d/dt)dV_t$$

por el Teorema de derivación bajo el signo integral.

Calculemos $((d/dt)dV_t)|_{t=0}$. Vamos a probar que:

$$((d/dt)dV_t)|_{t=0} = -m\langle H,E\rangle dV_o + d\Omega$$

con Ω una $m-1$ forma en M tal que verifica $\Omega = *w$, con $w(X) = \langle E,X\rangle$, para todo $X\epsilon\mathfrak{X}(M)$.

Observese que como $E/\partial M = 0$, entonces $\Omega/\partial M = 0$.

Sea $p\epsilon M$ y sea $e_1,\ldots,e_m$ campos en M locales en p tales que

(1) $e_1,\ldots,e_m$ son ortonormales en la métrica inducida por f_o.

(2) $(\nabla_{e_j} e_i) = 0$, para todo i,j, en el punto p.

Esto se consigue trasladando paralelamente una base ortonormal de T_pM a lo largo de las geodésicas que salen de p. Sean $w_1,\ldots,w_m$ las 1-formas locales duales a $e_1,\ldots,e_m$.

La métrica inducida por f_t, se escribe:

$$d\,s_t = \Sigma_{i,j=1}^{m} g_{ij}(t)\, w_i \otimes w_j$$

donde $g_{ij} = <(d\,f_t)(e_i),(d\,f_t)(e_j)>$. Si llamamos $g(t) = \det(g_{ij}(t))$,

$$d\,V_t = (g(t))^{\frac{1}{2}}\, w_1 \wedge \ldots \wedge w_m = (g(t))^{\frac{1}{2}}\, d\,V_o$$

Luego $(d/dt)d\,V_t|_{t=0} = (d/dt)((g(t)^{\frac{1}{2}})|_{t=0}d\,V_o =$
$= (1/2)(\text{Traza}(d/dt)(g_{ij})(0))d\,V_o = (1/2)(\Sigma_{k=1}^{m}(d\,g_{kk}/d\,t)(0))d\,V_o$.
Ahora extendemos $e_1,\ldots,e_m$ sobre $I\times$(entorno de p en M) de la forma usual, y notamos que $[\partial/\partial t, e_k] = 0$, $k = 1,\ldots,m$. Sean $\bar{E}$, $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_m$ las imágenes de estos campos en $I\times M$ por F. Entonces:

$$g_{kk}(t) = <(d\,f_t)(e_k),(d\,f_t)(e_k)> = <\bar{e}_k,\bar{e}_k> \text{ en } F(t,p)$$ a

y además :

$$(d/dt)(g_{kk}) = \bar{E}<\bar{e}_k,\bar{e}_k> = 2<\bar{\nabla}_{\bar{E}}\bar{e}_k,\bar{e}_k> = 2<\bar{\nabla}_{\bar{e}_k}\bar{E},\bar{e}_k> =$$

$$= 2[\bar{e}_k<\bar{E},\bar{e}_k> - <\bar{E},\bar{\nabla}_{\bar{e}_k}\bar{e}_k>], \text{ y en p } (t=0) \text{ queda:}$$

$$\Sigma_{k=1}^{m}(1/2)(d\,g_{kk}/d\,t)(0) = -<E,mH> + \Sigma_{k=1}^{m} e_k<E,e_k>$$

Sólo nos queda probar que:

$$(d*w)_p(e_i,\ldots,e_m) = \Sigma_{k=1}^{m} e_k<E,e_k>$$

Por definición, $w = \Sigma_k <E,e_k> w_k$, y en consecuencia:

$$= *w = \Sigma_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\langle E, e_k\rangle\, w_1 \wedge \ldots \wedge \hat{w}_k \wedge \ldots \wedge w_m$$

de donde, como para una $m-1$ forma Ω en M, se tiene que:

$$(d\Omega)(e_1,\ldots,e_m) = \Sigma_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\; e_k\Omega(e_1,\ldots,\hat{e}_k,\ldots,e_m) +$$

$$+ \Sigma_{i<j}(-1)^{i+j}\Omega([e_i,e_j],e_1,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,\hat{e}_j,\ldots,e_m)$$

resulta tomando $\Omega = *w$, y usando que $[e_i,e_j] = (\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i) = 0$ en p, se tiene lo apetecido.

Una integración sencilla, usando el Teorema de la divergencia, nos da lo buscado. cqd

Nota.: Suponiendo que la variación es normal, o sea, que E es normal, entonces $w = 0$ y la fórmula permanece válida sin la condición adicional de la frontera fija.

Una lectura detenida de esta fórmula nos dice que una inmersión de M en R^{m+1} es crítica respecto a la función area, para cualquier variación suya (normal, ó con extremos ó frontera fija), sí y sólo sí, $H = 0$. De aquí el porqué de que a una tal superfície (con $H = 0$), ó mejor a la inmersión en concreto, se les llama minimales.

Dada una inmersión $f: M^2 \longrightarrow R^3$, y tomada una carta (U,x), la ecuación $H = 0$ en esta carta se expresa, si fijamos un campo N normal que nos de una orientación de M:

$$H = \langle H, N\rangle = (g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N))/(2\det(g_{ij}))$$

con (g_{ij}) la matriz de la métrica en esta carta, y $(b_{ij}(N))$ la de la segunda forma fundamental en la dirección de N.

El que $H=0$, equivale a que se tenga:

$$g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N) = 0.$$

Esta ecuación es conocida como ecuación de Euler-Lagrange de variación del area. Representa (escrita en la carta (U,x)) una ecuación (no lineal y eliptica) en derivadas parciales de segundo orden.

Intentando seguir interpretando el significado de H, y lo que conlleva el que $H=0$, tiene interés lo siguiente:

1.1.1. Proposición. Sea $M^m \longrightarrow R^{m+1}$ inmersión isométrica. Sea $H =$ vector curvatura media.

Entonces, $\Delta f = mH$, donde $\Delta f = (\Delta f_1, \ldots, \Delta f_{m+1})$, con f_i la i-ésima coordenada de f.

Demost.:

Sea $p \in M$, y sean $e_1, \ldots, e_m$ campos ortonormales y tangentes a M, con $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$. Es claro que para todo $k = 1, \ldots, m$, $e_k(f) = e_k$ y que $e_k e_k(f) = \overline{\nabla}_{e_k} e_k$, donde $\overline{\nabla}$ es la conexión euclídea.

Luego $\Delta f = \Sigma_k (e_k e_k(f) - {}_{e_k} e_k(f)) = \Sigma_k (\overline{\nabla}_{e_k} e_k - \nabla_{e_k} e_k) =$

$$= \Sigma_k (\overline{\nabla}_{e_k} e_k)^N = mH. \text{ cqd}$$

Esto quiere decir, que el Laplaciano de f (coordenada a coordenada) nos da la curvatura media, salvo una constante.

El que $H=0$ equivale a que $\Delta f = 0$, y esto a su vez a que f sea armónica. Por el principio del máximo (Teorema 1.1.1. del Capítulo I), cada f_k no puede admitir un máximo ni mínimo interiores locales, salvo que sea constante, y nuestra superficie esté contenida en un plano. Obtenemos ya un resultado importante. Observemos otras propiedades interesantes.

1.1.2. Definición. Dados $u,v\in R^{m+1}$, definimos $H_{u,v} = \{u + x\in R^{m+1} / \langle x,v\rangle \leq 0\}$. Dado X subconjunto de R^{m+1}, se define la clausura convexa de X, como el conjunto intersección de todos los $H_{u,v}$ que contengan a X.

Este conjunto es el más pequeño convexo que contiene a X y que es cerrado. Suponiendo que $f:M^m \longrightarrow R^{m+1}$ es una inmersión isométrica, y que además es minimal (esto es, $\Delta f = 0$), dados u,v de R^{m+1}, considerando:

$f_{u,v}:M \longrightarrow R$, definida como $f_{u,v}(x) = \langle f(x) - u,v\rangle$, es claro que $\Delta f_{u,v} = 0$.

1.1.2. Proposición. Sea $f:M^m \longrightarrow R^{m+1}$ una inmersión minimal donde M es una variedad compacta. Escribiendo $M° = M - \partial M$, entonces: f(M) está contenido en la clausura convexa de $f(\partial M)$.

Además, si f(M) no está contenido en ningún subespacio afín propio de R^{m+1}, entonces f(M°) está contenido en el interior de la clausura convexa de $f(\partial M)$.

En particular, si M^m es compacta sin frontera, no existen inmersiones minimales de M en R^{m+1}.

Demost.: Observar el comentario previo a esta proposición y utilizar el Teorema 1.1.1. del Capítulo I. cqd

Comentemos algunos ejemplos clásicos de superficies minimales en R^3. Será fácil fabricar muchos otros a partir de la representación de Weierstrass, que veremos en su momento. Señalaremos, ahora mismo, algunos que clásicamente tuvieron su importancia:

(a) El Helicoide: $f(x_1,x_2)=tg^{-1}(x_2/x_1)$.

(b) La catenoide: $f(x_1,x_2)=\cosh^{-1} r$, con $r=(x_1+x_2)^{\frac{1}{2}}$

(c) Superfície de Scherk : $f(x_1,x_2)=\log(\cos x_2/\cos x_1)$

Estas superfícies, son importantes por ser las únicas que verifican una determinada propiedad, siendo minimales.

Esta propiedad las caracteriza.

Por ejemplo, el Helicoide, es la única superficie minimal reglada, la catenoide, la única que es de revolución, y la superfície de Scherk , la única que es de traslación, esto es, que verifica: $f(x_1,x_2)=g(x_1)+g(x_2)$. Para estas comprobaciones, acudir a [DC].

Estas superfícies estan definidas como grafos de aplicaciones diferenciables (se dice en forma no paramétrica). La ecuación $H=0$ toma la forma sencilla:

$$(1+|\partial f/\partial x_2|^2)\,\partial^2 f/\partial x_1^2 - 2((\partial f/\partial x_1)(\partial f/\partial x_2))(\partial^2 f/\partial x_1\partial x_2) +$$

$$+ (1+|\partial f/\partial x_1|^2)(\partial^2 f/\partial x_2^2)=0$$

Es fácil comprobar que toda superfície (no necesariamente minimal), admite, localmente, una reparametrización que permite verla como grafo de una aplicación diferencible.

1.1.2. TEOREMA. (1ª Fórmula de Variación del Volumen)

Sea M^m variedad compacta con borde ∂M, y orientable.

Sea $x:M^m \longrightarrow R^{m+1}$ inmersión isométrica. Sea F una variación diferenciable de x que fija ∂M. Sea $x_t = F(t,-)$, para todo $t \in I$. Definimos $V(t) = (1/(m+1))[\int_M \langle x_t, N_t\rangle \, dV_t]$, donde N_t es el campo normal unitario a lo largo de M en el instante t.

Entonces: $V'(0) = \int_M \langle E,N\rangle \, dV_0$

Demost.:

$$V'(0) = (1/(m+1))\{\int_M \langle E,N\rangle \, dV_0 + \int_M \langle x, (\partial N_t/\partial t)|_{t=0}\rangle \, dV_0 +$$

$$+ \int_M \langle x,N\rangle (\partial/\partial t)|_{t=0} d\,V_t\}$$

Numeremos por orden los tres sumandos que hay entre llaves, y llamémosles (1),(2),(3) a cada uno de los integrandos.

Escribamos, en una carta $(U, (u_1,\dots,u_m))$, $x_i = \partial F/\partial u_i$, $N_t = (x_1 \wedge \dots \wedge x_m)/(|x_1 \wedge \dots \wedge x_m|)(t)$, $E_i = \partial E/\partial u_i$.

Expresemos los integrandos en esta carta:

$$(2) = -[\Sigma_i \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_m, x_1 \wedge \dots \wedge \overset{i}{E_i} \wedge \dots \wedge x_m\rangle / |x_1 \wedge \dots \wedge x_m|^2] \langle N,x\rangle d\,V_0 +$$

$$+ [1/|x_1 \wedge \dots \wedge x_m|] \Sigma_{i=1}^m \langle x_1 \wedge \dots \wedge \overset{i}{E_i} \wedge \dots \wedge x_m, x\rangle d\,V_0$$

Por análogo razonamiento:

$$(\partial/\partial t)|_{t=0} d\,V_t = (\partial/\partial t)|_{t=0} |x_1 \wedge .. \wedge x_m|(t)\, du_1 \ldots du_m =$$

$$= \Sigma_{i=1}^m < x_1 \wedge \ldots \wedge x_m, x_1 \wedge .. \wedge \overset{i}{E} \wedge .. \wedge x_m > / |x_1 \wedge \ldots \wedge x_m|^2 d\,V_o$$

de donde (3) queda:

$$(3) = \Sigma_{i=1}^m [<x_1 \wedge \ldots \wedge x_m, x_1 \wedge .. \wedge \overset{i}{E} \wedge .. \wedge x_m > / |x_1 \wedge \ldots \wedge x_m|^2] <x, N> d\,V_o$$

de aquí que :

$$(2)+(3) = (1/|x_1 \wedge \ldots \wedge x_m|)[\Sigma_{i=1}^m (\partial/\partial u_i) <x_1 \wedge .. \wedge \overset{i}{E_i} \wedge .. \wedge x_m, x>] d\,V_o -$$

$$-(1/|x_1 \wedge .. \wedge x_m|)[\Sigma_{i=1}^m \Sigma_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m <x_1 \wedge .. \wedge \overset{j}{x_{ij}} \wedge .. \wedge \overset{i}{E} \wedge .. \wedge x_m, x>] d\,V_o -$$

$$-(1/|x_1 \wedge \ldots \wedge x_m|)[\Sigma_{i=1}^m <x_1 \wedge .. \wedge \overset{i}{E} \wedge . \wedge x_m, x_i>] \, d\,V_o$$

Obsérvese que todas las expresiones son invariantes mediante cambios de coordenadas.

El segundo sumando de la última expresión de (2) + (3) vale 0, por las propiedades de anticonmutatividad de producto exterior, ya que cada sumando tiene su opuesto.

Queda en definitiva:

$$(2)+(3) = (1/|x_1 \wedge \ldots \wedge x_m|)[\Sigma_{i=1}^m (\partial/\partial u_i) <x_i \wedge .. \wedge \overset{i}{E} \wedge .. \wedge x_m, x>] dV_o -$$

$- n<E,N> d\,V_o$. De aquí que en definitiva quede:

$$V'(0) = \int_M <E,N> d\,V_o + \int_M \Sigma_{i=1}^m (\partial/\partial u_i) <x_1 \wedge .. \wedge \overset{i}{E} \wedge .. \wedge x_n, x> d\,V_o$$

donde estas integrales hay que entenderlas sabiendo que las expresiones del integrando son invariantes por cambios de coordenadas, y tienen sentido globalmente.

Como E sobre la frontera de M es 0, una aplicación del Teorema de la Divergencia nos dice que la segunda integral vale 0, y queda lo buscado. cqd

Obtengamos ahora tambien las hipersuperfícies en R^{m+1} con $H =$ constante como solución de un problema variacional.

Introduzcamos alguna notación necesaria.

Sea f_o una inmersión de M^m variedad de Riemann compacta con borde en R^{m+1}. Siempre supondremos que M es orientable.

1.1.3. Definición. Diremos que una variación F de f_o conserva el volumen, ó es de volumen constante, si:

$$V(0) = V(t), \text{ para todo } t \text{ de } I.$$

Sea E el campo variacional de F. Sea $f= \langle E,N\rangle$, donde N es un campo normal unitario elegido para definir V.

Si F fija la frontera de M, sabemos por el Teorema 1.1.1. que: $A'(0) = \int_M mHfdV_o$, y por el Teorema 1.1.2. que $V'(0) = \int_M f\,dV_o$.

1.1.4. Definición. Asociada a la variación F, se define:

$J:I \longrightarrow R$, por $J(t) = A(t) + mH_oV(t)$, donde se entiende por $H_o = A^{-1}(0)\int_M H\,dV_o$, con H la curvatura media asociada a f_o.

1.1.3. Proposición. Son equivalentes:

(1) f_o tiene curvatura media H_o constante, $H_o \neq 0$.

(2) Si F es una variación de volumen constante que fija ∂M, entonces $A'(0) = 0$.

(3) Si F es una variación(no necesariamente de volumen

<u>constante) que fija</u> ∂M, $J'(0) = 0$.

<u>Demost.</u>:

Necesitaremos el siguiente lema:

<u>Lema.</u>: Sea $f:\bar{M} \longrightarrow R$ una función diferenciable con $\int_M f\, dV_o = 0$ Entonces, existe una variación G con volumen constante, cuyo campo variacional es fN. Si además $f = 0$ en ∂M, G puede elegirse fijando ∂M.

<u>Demost.</u>: Sea $F(t,\bar{t}) = f_o + (tf + \bar{t}g)N$, donde $g:\bar{M} \longrightarrow R$ es una función diferenciable con $g = 0$ en ∂M y $\int_M g\, dV_o \neq 0$.

Sea $V(t,\bar{t})$ el volumen determinado por $F(t,\bar{t})$.

Consideremos la ecuación $V(t,\bar{t}) = \text{constante}$. (I)

Se tiene que en $t = \bar{t} = 0$, se verifica por la 1ª fórmula de variación del Volumen, que $(\partial V/\partial\bar{t})_o = \int_M g\, dV_o \neq 0$.

Luego aplicando a (I) el Teorema de la función implícita, queda $\bar{t} = z(t)$, con z diferenciable en un entorno de 0. Luego la variación $G(t) = F(t,z(t))$ es de volumen constante, y su campo variacional es: $(dG/dt)|_{t=0} = (f + z'(0)g)N = fN$, pues $z'(0) = (\partial V/\partial t)_o(\partial V/\partial\bar{t})_o^{-1} = (\int_M f\, dV_o)(\int_M g\, dV_o)^{-1} = 0$. Es claro que si $f = 0$ en ∂M, entonces G fija ∂M. G es la variación buscada. cqd

Volvemos a la demostración de la proposición.

El demostrar que (1) implica (3), y que (3) implica (2), se sigue de la 1ª Fórmula de Variación del Area y del Volumen, asi como de la definición de J.

Veamos que (2) implica (1). Supongamos que la curvatura media H no es constante.

Sea $p \in M / (H - H_0)(p) \neq 0$, con $H_0 = A(0)^{-1} \int_M H \, dV_0$.

Suponemos por comodidad que $(H - H_0)(p) > 0$.

Sean $M^+ = \{q \in M / (H - H_0)(q) > 0\}$ y $M^- = \{q \in M / (H - H_0)(q) < 0\}$.

Sean ρ, Ψ funciones diferenciables y ≥ 0 en $\bar{M}$ tales que satisfacen: $p \in \operatorname{sop} \rho$ este incluido en M^+, y $\operatorname{sop} \Psi$ incluido en M^-, siendo además $\int_M (\rho + \Psi)(H - H_0) \, dV_0 = 0$. Como $\int_M (H - H_0) \, dV_0 = 0$, esta elección es posible.

Sea $f = (\rho + \Psi)(H - H_0)$. Es claro que $f = 0$ en ∂M, y que $\int_M f \, dV_0 = 0$. Por el lema anterior, encontramos una variación con volumen constante con campo variacional fN. Por hipótesis, $A'(0) = 0$ para esta variación, y usando la 1ª Fórmula de Variación, se llega a que $0 = \int_M f(H - H_0) \, dV_0 = \int_M (\rho + \Psi)(H - H_0)^2 dV_0 > 0$. Esto es absurdo. De aquí que $H = H_0$ en M. cqd

1.2. <u>2ª Fórmula de Variación</u>.

1.2.1. TEOREMA.(2ª Fórmula de Variación).

<u>Supongamos</u> M^m <u>variedad de Riemann compacta con frontera</u> ∂M, <u>y sea</u> f_0 <u>una inmersión de</u> M <u>en</u> R^{m+1}, <u>con curvatura media</u> H_0 <u>constante. Sea</u> F <u>una variación de</u> f_0 <u>que fija</u> ∂M, <u>y sea</u> fN <u>la componente normal del campo variacional de</u> F.

<u>Entonces, si</u> $\|\sigma\|^2 = \Sigma_i k_i^2$ <u>es el cuadrado de la norma de la segunda forma fundamental asociada a</u> f_0, <u>se tiene</u>:

$$J''(0) = \int_M (-f \Delta f - \|\sigma\|^2 f^2) \, dV_0$$

Demost.:

Sea $p \in M$. Sean $(u_1,\ldots,u_m)$ coordenadas entorno de p en M. Fijemos notaciones: $\xi = (\partial F/\partial t)$, $X_j = (\partial F/\partial u_j)$, $N_j = (\partial N/\partial u_j)$, $\xi_j = (\partial \xi/\partial u_j)$.

Identifiquemos el producto exterior $v_1 \wedge \ldots \wedge v_m$ de m vectores $v_i \in R^{m+1}$, con un vector $v \in R^{m+1}$ positivamente orientado y normal al hiperplano generado por $v_1,\ldots,v_m$, y sea $|v| = |v_1 \wedge \ldots \wedge v_m|$. En particular, $N = (X_1 \wedge \ldots \wedge X_m)/|X_1 \wedge \ldots \wedge X_m|$.

Como N_j es un vector tangente, podemos escribir:

$$N_j = \Sigma a_{jk} X_k, \text{ con } k = 1,\ldots,m \tag{I}$$

Finalmente, sea $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, y sea $g = \det(g_{ij}) = |X_1 \wedge \ldots \wedge X_m|^2$.

Observemos que los cálculos posteriores son locales, y se hacen en el entorno de p con coordenadas $(u_1,\ldots,u_m)$. En consecuencia, cuando las expresiones obtenidas quieran globalizarse para integrar sobre M, debemos asegurarmos de que son independientes del entorno coordenado prefijado.

Utilizaremos las igualdades:

$$(mH)^2 - \Sigma_{k,j}(a_{jj}a_{kk} - a_{jk}a_{kj}) = \|\sigma\|^2 \tag{II}$$

$$\Sigma_j \langle X_1 \wedge \ldots \wedge \overset{j}{(\partial N/\partial t)} \wedge \ldots \wedge X_m, N \rangle_j = -g^{\frac{1}{2}} \Delta f + \Sigma_{j,k} \{ g^{jk} g^{\frac{1}{2}} \langle N_k, \xi \rangle \}_j \tag{III}$$

donde el subíndice al final de las expresiones significa derivar con respecto a u_j. Tambien entendemos $f = \langle \xi, N \rangle$.

Para obtener (II), se usa (I) con el fín de obtener los coeficientes de la 2ª forma fundamental σ respecto a $\{X_i\}$: h_{ij}. Estos h_{ij} son:

$h_{jl} = \langle N_j, X_l\rangle = \Sigma_k a_{jk} g_{kl}$, de donde se deduce que:

$\Sigma_{j,k} a_{jk} a_{kj} = \Sigma_{j,k}(\Sigma_l g^{lj} h_{lk})(\Sigma_m g^{km} h_{mj}) = \|\sigma\|^2$, y de aqui (II).

Para obtener (III), observemos que:

$$\partial N/\partial t = \partial/\partial t((X_1\wedge\ldots\wedge X_m)/|X_1\wedge\ldots\wedge X_m|) = |X_1 \;\ldots\; X_m|^{-1}\Sigma_j(X_1\wedge\ldots\wedge\overset{j}{\xi_j}\wedge\ldots\wedge X_m) +$$

$+$ parte normal.

En consecuencia:

$$\Sigma_j\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overset{j}{\partial N/\partial t}\wedge\ldots\wedge X_m, N\rangle_j = -\Sigma_j\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overset{j}{N}\wedge\ldots\wedge X_m, \partial N/\partial t\rangle_j =$$

$$= -\Sigma_{j,k}\{(-1)^{k+j}|X_1\wedge\ldots\wedge X_m|^{-1}\langle N,\xi_k\rangle\langle X_1\wedge\ldots\wedge\hat{X}_j\wedge\ldots\wedge X_m, X_1\wedge\ldots\wedge\hat{X}_k\wedge\ldots\wedge X_m\rangle\}_j =$$

$$= -\Sigma_{j,k}\, g^{\frac{1}{2}} g^{jk}\langle N,\xi_k\rangle\,\}_j = -g^{\frac{1}{2}}\Delta f + \Sigma_{j,k}\{g^{\frac{1}{2}} g^{jk}\langle N_k,\xi\rangle\,\}_j,$$ como deseabamos.

Comencemos a probar el Teorema:

Por ser $J'(t) = A'(t) + mH_oV'(t) = \int_M m(H - H_o)f|X_1\wedge\ldots\wedge X_m|du_1\ldots du_m$ y como $H = H_o$ para $t = 0$, resulta que:

$$J''(0) = \int_M \partial/\partial t\{m(H - H_o)\}f\, dV_o$$

donde $dV_o = |X_1\wedge\ldots\wedge X_m|du_1\ldots du_m$ para $t = 0$.

Sólo nos resta calcular $\partial/\partial t\, m(H - H_o)$. Como $H_o =$ constante:

$$-\partial/\partial t(mH - mH_o) = -\partial/\partial t\,\Sigma_j|X_1\wedge\ldots\wedge X_m|^{-1}\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overset{j}{N_j}\wedge\ldots\wedge X_m, N\rangle =$$

$$= |X_1\wedge\ldots\wedge X_m|^{-1}\{\Sigma_{j\neq k}\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overset{k}{\xi_k}\wedge\ldots\wedge\overset{j}{N_j}\wedge\ldots\wedge X_m, \partial N/\partial t\rangle \quad +$$

$$+\Sigma_j\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overset{j}{\partial N_j/\partial t}\wedge\ldots\wedge X_m, N\rangle + \Sigma_j\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overset{j}{N_j}\wedge\ldots\wedge X_m, \partial N/\partial t\rangle\} \;-$$

$$-|X_1 \;\ldots\; X_m|^{-3}\Sigma_{k,j}\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overset{k}{\xi_k}\wedge\ldots\wedge X_m, X_1\wedge\ldots\wedge X_m\rangle\langle X_1\wedge\ldots\wedge\overset{j}{N_j}\wedge\ldots\wedge X_m, N\rangle.$$

Como N_j y $\partial N/\partial t$ son vectores tangentes, el tercer sumando desaparece. Además, el último sumando puede escribirse: $+\,|X_1\wedge\ldots\wedge X_m|^{-1} mH\Sigma_k\langle X_1\wedge..\wedge\overset{k}{\xi_k}\wedge..\wedge X_m, N\rangle$. Se sigue pues que:

$$
\begin{aligned}
\partial/\partial t(mH - mH_o) = {} & |X_1\wedge\ldots\wedge X_m|^{-1}\{\Sigma_{j\neq k}\langle X_1\wedge..\wedge\overset{k}{\xi}\wedge..\wedge\overset{j}{N_j}\wedge..\wedge X_m, N\rangle_k - \\
& - \Sigma_{\substack{j\neq k\neq l\\ j\neq l}}\langle X_1\wedge..\wedge\overset{k}{\xi}\wedge..\wedge\overset{j}{N_j}\wedge..\wedge\overset{l}{X_{lk}}\wedge..\wedge X_m, N\rangle - \\
& - \Sigma_{j\neq k}\langle X_1\wedge..\wedge\overset{k}{\xi}\wedge..\wedge\overset{j}{N_{kj}}\wedge..\wedge X_m, N\rangle - \\
& - \Sigma_{j\neq k}\langle X_1\wedge..\wedge\overset{j}{N_j}\wedge..\wedge X_m, N_k\rangle - \\
& - \Sigma_j\langle X_1\wedge..\wedge\overset{j}{\partial N/\partial t}\wedge..\wedge X_m, N\rangle_j - \\
& - \Sigma_{j\neq k}\langle X_1\wedge..\wedge\overset{k}{X_{jk}}\wedge..\wedge\overset{j}{\partial N/\partial t}\wedge..\wedge X_m, N\rangle - \\
& - \Sigma_j\langle X_1\wedge..\wedge\overset{j}{\partial N/\partial t}\wedge..\wedge X_m, N_j\rangle + mH\Sigma_k\langle X_1\wedge..\wedge\overset{k}{\xi}\wedge..\wedge X_m, N\rangle_k - \\
& - mH\Sigma_{j\neq k}\langle X_1\wedge..\wedge\overset{k}{\xi}\wedge..\wedge\overset{j}{X_{jk}}\wedge..\wedge X_m, N\rangle - \\
& - mH\Sigma_k\langle X_1\wedge..\wedge\overset{k}{\xi}\wedge..\wedge X_m, N_k\rangle\}.
\end{aligned}
$$

El 2º, 3º, 6º y 9º sumandos, se anulan, pues cada uno de sus términos tiene uno correspondiente con signo opuesto. Cada término en el sumando 7º es cero. Usando (I), el 4º sumando es:

$\Sigma_{j \neq k}(a_{jj}a_{kk} - a_{jk}a_{kj})f|X_1\wedge \ldots \wedge X_m|$, y el último sumando es: $m^2H^2f|X_1\wedge \ldots \wedge X_m|$. Se sigue usando (II) que:

$$\partial/\partial t(mH - mH_o) = |X_1\wedge \ldots \wedge X_m|^{-1}\{\Sigma_{j \neq k}< X_1\wedge \ldots \wedge \overset{k}{\xi}\wedge \ldots \wedge X_m, N>_k +$$

$$+ \Sigma_j<X_1\wedge \ldots \wedge \overset{j}{\partial N/\partial t}\wedge \ldots \wedge X_m, N>_j + mH\Sigma_k<X_1\wedge \ldots \wedge \overset{k}{\xi}\wedge \ldots \wedge X_m, N>_k\} - ||\sigma||^2 f.$$

Ahora usando (III), y dandonos cuenta que los integrandos que aparecen abajo no dependen del sistema coordenado, obtenemos que:

$$J''(0) = \int_M (-f\Delta f - ||\sigma||^2 f^2)\, dV_o \quad +$$

$$+ \int_M \Sigma_{j \neq k} < X_1\wedge \ldots \wedge \overset{k}{\xi}\wedge \ldots \wedge \overset{j}{N_j}\wedge \ldots \wedge X_m, N>_k f\, du_1 \ldots du_m \quad -$$

$$-mH_o\int_M \Sigma_k<X_1\wedge \ldots \wedge \overset{k}{\xi}\wedge \ldots \wedge X_m, N>_k f\, du_1 \ldots du_m + \int_M \Sigma_{j,k}(g^{jk}g^{\frac{1}{2}}<N_k, \xi>)_j f du_1 \ldots du$$

Como $\xi = 0$ en ∂M, por el Teorema de la Divergencia, los tres últimos sumandos se anulan, y obtenemos lo apetecido. cqd

Observemos que si tenemos que la dimensión de M es 2, y además M es minimal ($H_o = 0$), entonces $||\sigma||^2 = -2K$, con K la curvatura de Gauss de M. Así resulta que:

$$J''(0) = A''(0) = \int_M -f\Delta f - f^2||\sigma||^2\, dV_o = \int_M (-f\Delta f + 2Kf^2)\, dV_o$$

Darse cuenta que si la inmersión de M^m es minimal, entonces $J''(0) = A''(0)$.

1.2.1. Definición. Sea M^m una hipersuperfície de R^{m+1} inmersa isométricamente y con $H = \text{constante} \neq 0$. Se dice que la inmersión es estable, cuando para todo D dominio relativamente compacto de M, con frontera ∂D, y para toda función diferenciable $f:\bar{D} \longrightarrow R$, con $f = 0$ en ∂D y $\int_D f\, dV_o = 0$, se verifica que:

$$J_D''(0) = \int_D (-f\Delta f - \|\sigma\|^2 f^2)\, dV_o \geq 0.$$

1.2.2. Definición. Sea M^m una hipersuperfície inmersa isométricamente en R^{m+1} y de forma minimal ($H = 0$). Se dice que la inmersión es estable, si para todo D dominio relativamente compacto de M, y para toda función $f:\bar{D} \longrightarrow R$ diferenciable, con $f = 0$ en ∂D, se verifica:

$$A''(0) = \int_D (-f\Delta f - \|\sigma\|^2 f^2)\, dV_o \geq 0$$

La segunda definición tiene una interpretación clara: una hipersuperfície minimal es estable si globalmente minimiza el area. La primera, sin embargo, no tiene una interpretación en principio sencilla. Para aclararla, sirve esta proposición:

1.2.1. Proposición. Sea M^m variedad inmersa isométricamente en R^{m+1}. Sea D un dominio de M relativamente compacto. Entonces son equivalentes:

(i) $A_D''(0) \geq 0$, para toda variación a volumen constante y que fije ∂D.

(ii) $J_D''(0)(f) \geq 0$, para toda función diferenciable f definida en $\bar{D}$, con $f = 0$ en ∂D y $\int_D f\, dV_o = 0$.

Demost.:

Supongamos (ii). Sea $F:\bar{D}\longrightarrow R^{m+1}$ una variación con volumen constante, fijando ∂D, y sea fN la componente normal de su campo variacional. Claramente $\int_D f\, dV_o = V_D'(0) = 0$. Luego tenemos una función f que verifica las hipótesis pedidas en (ii): en consecuencia ha de ser $J_D''(0) = A_D''(0) + mH_o V_D''(0) = A_D''(0) \geq 0$, y es lo que queríamos.

Supongamos ahora (i). Sea f dada como en (ii).

Por el lema visto en la demostración de la Proposición 1.1.3., existe F una variación en las hipótesis de (i), con campo variacional fN. Para esta variación, $V_D''(0) = 0$ y $J_D''(0)(f) = A_D''(0) \geq 0$. cqd

Así pues, la estabilidad para hipersuperfícies con H constante no nula, equivale a que minimicen el area globalmente para variaciones que preserven el volumen y fijen la frontera correspondiente.

1.3. Estructura conforme en una superfície minimal en R^3. Representación de Weierstrass.

Vamos a introducir en superfícies minimales un atlas conforme. Como siempre, para comprobar la existencia de un tal atlas, se construirán unas cartas ó parametrizaciones isotermas. Es conocido que para que esta construcción sea posible, basta con la orientabilidad, no es esencial la minimalidad para dar esta estructura conforme. Lo que ocurre, es que en el caso de minimalidad, el problema se resuelve fácilmente, y es por esto que quizás tenga interes su estudio.

1.3.1. Definición. Sea M^2 superfície inmersa isométricamente en R^3. Sea (U,x) carta de M. Sea $g = (g_{ij})$ la matriz de la 1ª forma fundamental en U. Se dice que (U,x) es carta isoterma ó que es una parametrización isoterma, si $g_{12} = g_{21} = 0$, y $g_{11} = = g_{22} = \lambda^2$, con $\lambda = \lambda(u,v): U \longrightarrow R$, $\lambda > 0$.

Es inmediato que en estas circunstancias, $\det g_{ij} = \lambda^4$ y que $H(N) = (b_{11}(N) + b_{22}(N))/2\lambda^2$, con $H(N)$ la curvatura media asociada a una orientación N tomada de M.

1.3.1. Lema. Sea M^2 superfície inmersa isométricamente en R^3, siempre orientable. Sea $(U,x(u,v))$ parametrización isoterma. Entonces, $\Delta_o x = 2\lambda^2 H$.

Demost.:

Entendemos $\Delta_o x = (\Delta_o x_1, \Delta_o x_2, \Delta_o x_3)$, con Δ_o el Laplaciano métrico en R^2 asociado a la métrica llana.

Considerando U con la métrica dV_o usual de R^2 inducida, y $x(U)$ con la métrica dV inducida por M, resulta que:

$dV = \lambda^2 dV_o$, de donde $\Delta = \Delta_o \lambda^{-2}$, donde Δ es el laplaciano métrico asociado a dV en M. Por la Proposición 1.1.1. de este Capítulo II, siempre $x = 2H$, de lo que se deduce que:

$$\Delta_o x = \lambda^2 \Delta x = 2\lambda^2 H. \text{ cqd}$$

1.3.1. Corolario. En las mismas hipótesis del lema 1.3.1., es condición necesaria y suficiente para que $x(U)$ sea superfície minimal, el que x sea armónica.

1.3.1. TEOREMA

Sea M^2 superfície minimal en R^3. Entonces, para todo $p \in M$, existe (U,x) carta entorno de p isoterma. En consecuencia, M admite un atlas isotermo.

Demost.:

Hagamos previamente algunos convenios ó notaciones.

Primero, notemos que podemos tomar en cada punto $\bar{p}\varepsilon M$, una reparametrización en forma no paramétrica ó como grafo.

En efecto, tomemos (U,x) carta entorno de $\bar{p}$. Como la aplicación $(u,v) \longrightarrow x(u,v)$ es regular en U, en particular lo es en $\bar{p}$, y si $x=(x_1,x_2,x_3)$, existen $i,j\varepsilon\{1,2,3\}$ tales que la aplicación $\phi(u,v)=(x_i(u,v),x_j(u,v))$ es un difeomorfismo en un entorno de $\bar{p}$ (Teorema de la Función Inversa). La composición $x\,\phi^{-1}$ nos da la parametrizacin en forma de grafo buscada.

Así pues, entorno de $\bar{p}$, podemos suponer que M es representada por un grafo: $x_3=f(x_1,x_2)$, $x_1,x_2\varepsilon D(r)$ disco de radio r en R^2. La minimalidad de M implica que se verifique:

$$(1+(\partial f/\partial x_2)^2)\partial^2 f/\partial x_1^2 \;-\; 2((\partial f/\partial x_1)(\partial f/\partial x_2))\partial^2 f/\partial x_2^2 \;+$$

$$+\;(1+(\partial f/\partial x_1)^2)\;\partial^2 f/\partial x_2^2 = 0 \qquad \text{(a)}$$

Si llamamos $p=\partial f/\partial x_1$, $q=\partial f/\partial x_2$, $r=\partial^2 f/\partial x_1^2$, $r=\partial^2 f/\partial x_1\partial x_2$ y $t=\partial^2 f/\partial x_2^2$, la ecuación (a) queda reducida a:

$$(1+q^2)r \;-\; 2(pq)s \;+\; (1+p^2)t=0 \qquad \text{(b)}$$

Escribamos $w=(\det g_{ij})^{\frac{1}{2}}=1+p^2+q^2+p^2q^2-(pq)^2=1+p^2+q^2.$

Veamos que de (a) se deduce que:

$$\partial/\partial x_1((1+q^2)/w) = \partial/\partial x_2(pq/w)$$

$$\partial/\partial x_1(pq/w) = \partial/\partial x_2((1+p^2)/w)$$

En efecto:

$$\partial/\partial x_1((1+q^2)/w) - \partial/\partial x_2(pq/w) = w^{-3}[(pq)q-(1+q^2)p][(1+q^2)r -$$

$$-2(pq)s+(1+p^2)t] = 0 \quad \text{por (b).}$$

Analogamente se comprueba la otra igualdad.

Estas dos igualdades en $D(r)$, implican la existencia de $F,G:D(r) \longrightarrow R$, verificando:

$$\partial F/\partial x_1 = (1+p^2)/w \ , \ \partial F/\partial x_2 = pq/w \ , \ \partial G/\partial x_1 = pq/w \ , \ \partial G/\partial x_2 = (1+q^2)/w.$$

Si ponemos $\xi_1 = x_1 + F(x_1,x_2)$, $\xi_2 = x_2 + G(x_1,x_2)$, se tiene:

$$\partial\xi_1/\partial x_1 = 1+(1+p^2)/w \ , \ \partial\xi_1/\partial x_2 = pq/w \ , \ \partial\xi_2/\partial x_1 = pq/w$$

$$\partial\xi_2/\partial x_2 = 1+(1+q^2)/w.$$

En consecuencia, el Jacobiano de esta transformación:

$$J = \partial(\xi_1,\xi_2)/\partial(x_1,x_2) = 2+(2+p^2+q^2)/w > 0$$

Luego la transformación señalada admite una inversa local $(\xi_1,\xi_2) \longrightarrow (x_1,x_2)$ entorno a $\bar{p}$, y poniendo:

$$x_3 = f(x_1(\xi_1,\xi_2), x_2(\xi_1,\xi_2)),\ x_2 = x_2(\xi_1,\xi_2),\ x_1 = x_1(\xi_1,\xi_2),$$

representamos localmente, entorno a $\bar{p}$, a M.

Tenemos pues una nueva parametrización en función de ξ_1,ξ_2. Observemos que:

$$\partial x_1/\partial\xi_1 = (w+1+q^2)/Jw,\ \partial x_2/\partial\xi_1 = -pq/Jw,\ \partial x_3/\partial\xi_1 = (w+1+q^2)p/Jw\ -$$

$$-\ (pq/Jw)q,\ \partial x_1/\partial\xi_2 = -pq/Jw,\ \partial x_2/\partial\xi_2 = (w+1+p^2)/Jw,\ \partial x_3/\partial\xi_2 =$$

$$= ((w+1+p^2)/Jw)q - (pq/w)p.$$

Se sigue que con los nuevos parametros ξ_1,ξ_2 se tiene:

$$g_{11} = g_{22} = |\partial x\ /\partial\xi_1|^2 = |\partial x/\partial\xi_2|^2 = w/J = w^2/(2w+2+p^2+q^2)$$

$$g_{12} = (\partial x/\partial\xi_1)(\partial x/\partial\xi_2) = 0$$

En consecuencia, (ξ_1,ξ_2) son parametros isotermos. cqd

1.3.2. <u>Corolario</u>. <u>Sea</u> M^2 <u>superficie minimal en</u> R^3, <u>siempre orientable. Entonces, se puede extraer de</u> M <u>un atlas conforme</u>, <u>que da a</u> M <u>estructura de superficie de Riemann</u>.

<u>Demost.</u>:

Sea A un atlas orientado de M. Sea $\bar{A}$ colección de las tripletas $(\bar{R}_\alpha,\bar{O}_\alpha,\bar{F}_\alpha)$, con $\bar{R}_\alpha$ incluido en R^2, $\bar{O}_\alpha$ contenido en M ambos abiertos y $\overline{F}_\alpha : \overline{R}_\alpha \longrightarrow \overline{O}_\alpha$ homeomorfismo , siendo además $(\overline{R}_\alpha, \overline{O}_\alpha, \overline{F}_\alpha) \varepsilon A$, y $\overline{F}_\beta^{-1} \overline{F}_\alpha$ preservando la orientación, y por último si $\phi : M^2 \longrightarrow R^3$ es la inmersión de M^2 en cuestión, $\phi \overline{F}_\alpha$ sea una parametrización isoterma.

Por el Teorema 1.3.1. de este Capítulo II, sabemos que $\{\overline{O}_\alpha\}$ recubre toda M, de donde $\overline{A}$ es un atlas sobre M.

Como el cambio de carta en $\overline{A}$ es siempre regular y conserva angulos(por ser las parametrizaciones isotermas y orientadas), resulta que este cambio de carta es holomorfo, y hemos acabado. cqd

1.3.2. Definición. Supongamos que $x : U \longrightarrow R^3$, con U un dominio de R^2, nos define una superfície regular. Llamamos:

$$\phi_k(\xi) = \partial x_k / \partial u - i \partial x_k / \partial v$$

donde $\xi = u + iv$, con i la unidad imaginaria, y $k = 1,2,3$.

Es inmediato que:

(1) $\Sigma_k \phi_k^2(\xi) = g_{11} - g_{22} - 2ig_{12}$

(2) $\Sigma_k |\phi_k|^2 = g_{11} + g_{22}$

En consecuencia se tiene:

1.3.1. Proposición.

(a) $\phi_k(\xi)$ es analítica en ξ si y sólo si x_k es armónica en u,v, y esto a su vez equivale a que x(U) sea minimal.

(b) u,v son parametros isotermos si y sólo si $\Sigma_k \phi_k^2(\xi) = 0$.

(c) x es regular si y sólo si $\Sigma_k |\phi_k(\xi)|^2 \neq 0$, supuesto (b).

1.3.2. TEOREMA.

Sea $x:U \longrightarrow R^3$, con U dominio de R^2, que supondremos nos define una superfície regular y minimal en parametros isotermos. Entonces las funciones $\phi_k(\xi)$ son analíticas y satisfacen las ecuaciones: $\Sigma_k \phi_k^2(\xi) = 0$ y $\Sigma_k |\phi_k(\xi)|^2 \neq 0$.

Reciprocamente, sean $\phi_k(\xi)$, $k = 1,2,3$, funciones analíticas que satisfacen $\Sigma_k \phi_k^2(\xi) = 0$ y $\Sigma_k |\phi_k(\xi)|^2 \neq 0$ en un dominio D simplemente conexo de R^2. Entonces, existe una superfície regular y minimal $x(u,v)$ definida en D, de tal forma que $\phi_k(\xi) = \partial x_k/\partial u - i\partial x_k/\partial v$.

Demost.:

La primera parte es inmediata por la Proposición 1.3.1.. La segunda, basta definir $x_k = \mathrm{Re}\int \phi_k(\xi)\,d\xi$, bien definida por ser D simplemente conexo, y comprobar de forma directa que se verifica lo pedido. cqd

Obsérvese que nuestra superfície queda determinada salvo constantes (traslaciones de R^3).

Tiene interés, a tenor de lo visto, el establecer todas las soluciones de la ecuación $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$, ϕ_k analíticas, en un dominio D de R^2 prefijado.

1.3.2. Lema. Sea D un dominio en el plano complejo R^2. Sea $g(\xi)$ una función meromorfa arbitraria en D y $f(\xi)$ una función holomorfa en D teniendo la propiedad de que en cada punto donde $g(\xi)$ tenga un polo de orden m, $f(\xi)$ tenga un cero de orden al menos 2m. Entonces las funciones:

$$\phi_1 = \tfrac{1}{2}f(1-g^2),\quad \phi_2 = \tfrac{1}{2}if(1+g^2),\quad \phi_3 = fg$$

son analíticas en D y satisfacen: $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0.$ (I)

Recíprocamente, cada tripleta de funciones analíticas en D que satisfacen $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ puede ser representada de esta forma para ciertas f,g, salvo que $\phi_1 = i\phi_2$, $\phi_3 = 0$.

Demost.:

Si a partir de f,g en las anteriores condiciones, definimos ϕ_k, $k = 1,2,3$, es inmediato comprobar que se satisface (I).

Recíprocamente, si se satisface (I), escribiendo:

$$f = \phi_1 - i\phi_2 \qquad\qquad g = \phi_3/(\phi_1 - i\phi_2)$$

tenemos que $(\phi_1 + i\phi_2)(\phi_1 - i\phi_2) = -\phi_3^2$, de donde se deduce que: $\phi_1 + i\phi_2 = -fg^2$, y teniendo en cuenta la definición de f,g, se tiene lo pedido.

La condición relativa a los ceros y polos de f,g, se obtiene fácilmente pues $\phi_1 + i\phi_2 = \phi_3^2/(\phi_1 - i\phi_2) = -fg^2$ es analítica.

Este razonamiento siempre se puede hacer salvo que el denominador en la expresión de g sea identicamente nulo, y esto equivale a que $\phi_1 = i\phi_2$ (y esto implica que $\phi_3 = 0$). cqd

Como consecuencia de esto, podemos enunciar la siguiente proposición:

1.3.2. Proposición. Toda superfície minimal simplemente conexa en R^3 puede representarse de la forma:

$x_k(\xi) = \mathrm{Re}\{\int_0^\xi \phi_k(z)\,dz\} + c_k$, $k = 1,2,3$, donde ϕ_k están definidas a partir de f,g como en el Lema 1.3.2., verificándose las condiciones de este lema, y el dominio de definición todo R^2

ó el disco unidad D. La integral se toma a lo largo de una curva arbitraria que une el origen y el punto ξ. La superfície así construída será regular si y sólo si, se verifica además la propiedad de que f se anula sólo en los polos de g, y el orden de estos ceros es exactamente el doble del orden de los polos de g correspondientes.

Demost.:

Usamos el siguiente lema:

1.3.3. Lema. Toda superfície minimal simplemente conexa tiene una reparametrización de la forma $x(\xi):Q \longrightarrow R^3$, con Q ó bien R^2, ó bien D disco unidad.

Demost.:

Tenemos $\phi:M \longrightarrow R^3$ inmersión minimal, con M simplemente conexa. Sabemos que M tiene asociada una estructura de superfície de Riemann (estructura conforme). Por el Teorema 2.2.1. del Capítulo I, sabemos que M es conformemente equivalente a R^2, D ó S^2, pero como por la Proposición 1.1.2. de este Capítulo II, M no puede ser compacta, resulta que M es conformemente equivalente a R^2 ó a D. Tenemos $\Psi:Q \longrightarrow M$ un biholomorfismo, y tomando $\phi\Psi:Q \longrightarrow R^3$, tenemos la reparametrización buscada. cqd

Así pues, nuestra superfície la representamos siempre en Q, siempre que esta sea simplemente conexa.

Como cada coordenada x_k es armónica, entonces ϕ_k es analítica en $\xi=(u,v)$, y además, $x_k(\xi) = \mathrm{Re}\{\int_0^\xi \phi_k(z)\,dz\} + c_k$, y hemos acabado la Proposición, pues basta observar que la superfície no será regular en un punto si y sólo si todas las ϕ_k

son nulas simultáneamente, que ocurre cuando $f=0$ donde g es regular ó cuando $fg^2=0$ donde g tenga un polo. cqd

La representación:

$$x_k(\xi) = \mathrm{Re}\,\{\int_0^{\xi}\phi_k(z)\,dz\} + c_k,\quad k=1,2,3 \text{ con } \phi_1 = \tfrac{1}{2}f(1-g^2),\quad \phi_2 = \tfrac{1}{2}if(1+g^2)$$

$$\phi_3 = fg$$

donde f,g verifican lo ya convenido, y están definidas en Q, es la llamada representación de Weierstrass(y Enneper) de la superfície minimal (simplemente conexa) en cuestión.

Si una superfície no es simplemente conexa y es minimal, en entornos simplemente conexos esta representación es factible. Aquí está el hecho fundamental por el que la teoría de variable compleja tiene gran aplicación al estudio de las superfícies minimales en R^3. Es por esto que tiene interés el intentar expresar en función de f,g todas las cantidades geométricas de la superfície minimal en cuestión, para poder aplicar asi la gran cantidad de posibilidades que nos ofrece la variable compleja.

Por ejemplo, el plano tangente es generado por:

$\partial x/\partial u, \partial x/\partial v$, donde $\partial x/\partial u - i\partial x/\partial v = (\phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3)$

Se sigue que $g_{ij} = \lambda^2\delta_{ij}$, donde: $\lambda^2 = |\partial x/\partial u|^2 = |\partial x/\partial v|^2 = $
$= \frac{1}{2}\Sigma_k|\phi_k|^2 = [\frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)]^2$.

Además: $(\partial x/\partial u)\mathrm{x}(\partial x/\partial v) = \mathrm{Im}\{\phi_2\bar{\phi}_3, \phi_3\bar{\phi}_1, \phi_1\bar{\phi}_2\}$, y sustituyendo cada ϕ_k en función de f,g, queda:

$(\partial x/\partial u)\mathrm{x}(\partial x/\partial v) = (1/4)|f|^2(1+|g|^2)(2\mathrm{Re}\,g, 2\mathrm{Im}\,g, |g|^2-1)$.

De esto se sigue que $|(\partial x/\partial u)x(\partial x/\partial v)| = [\frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)]^2$ y el vector normal es:

$$N = (\partial x/\partial u)x(\partial x/\partial v)/|(\partial x/\partial u)x(\partial x/\partial v)| =$$

$$= (2\mathrm{Re}\, g/(1+|g|^2), 2\mathrm{Im}\, g/(1+|g|^2), (|g|^2-1)/(1+|g|^2))$$

que nos da la orientación de nuestra superfície. Asi pues, si Q es un dominio de R^2, y tenemos $x(\xi)$ superfície minimal con parámetros isotermos y regular, se puede enunciar el siguiente:

1.3.3. Lema. Sea $N(\xi): Q \longrightarrow S^2$ aplicación de Gauss de nuestra superfície. Se tiene que N es una función analítica de Q en S^2, donde en S^2 se considera su estructura de superfície de Riemann estándar.

Demost.:

Recordando la fórmula de la proyección estereográfica de S^2 a R^2, desde el punto (0,0,1), resulta que al componer tal proyección con nuestra N, tenemos como consecuencia la función $g(\xi)$ meromorfa, lo que prueba lo pedido. cqd

Lo importante de este lema, es que le hemos dado significado geométrico a la función meromorfa g: es la aplicación de Gauss de la superfície minimal. Así por ejemplo, si $Q = R^2$, el Teorema 2.5. del Capítulo I, nos diria que si g omite más de 2 puntos, entonces nuestra superfície es un plano embebido de forma estándar en R^3. Sobre el complemento de la aplicación de Gauss de una superfície minimal completa en S^2, volveremos a hablar más adelante.

Por ejemplo, estudiemos ahora la segunda forma fundamental de una superficie minimal, y la curvatura, en función de la representación de Weierstrass.

Utilizando la orientación estándar asociada a nuestra $x(\xi):Q \longrightarrow R^3$, dada por $N = (\partial x/\partial u)x(\partial x/\partial v)/|(\partial x/\partial u)x(\partial x/\partial v)|$, y si $(b_{ij}(N))$ es la matriz de la segunda forma fundamental respecto a esta orientación, se tiene que, si escribimos $\xi = \xi_1 + i\xi_2$:

$\Sigma_{i,j} b_{ij}(N)(\partial\xi_1/\partial t)(\partial\xi_2/\partial t) = \mathrm{Re}\{-fg'(d\xi/dt)^2\}$, y como ya conocemos que $\Sigma_{i,j} g_{ij}(\partial\xi_1/\partial t)(\partial\xi_2/\partial t) = [\frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)]^2|d\xi/dt|^2$, se sigue que la curvatura normal de la curva $\xi(t)$ es:

$$(d^2x/ds^2)N = \Sigma_{i,j} b_{ij}(N)(d\xi_i/ds)(d\xi_j/ds) =$$
$$= (\Sigma_{i,j} b_{ij}(N)\xi_i'(t)\,\xi_j'(t))/(\Sigma_{i,j} g_{ij}\xi_i'(t)\xi_j'(t)),$$ donde s es el parámetro arco de nuestra curva.

Esta curvatura normal, en consecuencia, se puede expresar en función de f,g de la forma:

$(d^2x/ds^2)N = [2/(|f|(1+|g|^2)]^2\mathrm{Re}\{-fg'e^{2i\alpha}\}$, con $d\xi/dt = |d\xi/dt|e^{i\alpha}$.

El máximo y el mínimo de esta expresión, si α varía de 0 a 2π, que corresponden a las curvaturas principales, son respectivamente:

$$K_1 = 4|g'|/(|f|(1+|g|^2)^2 \qquad K_2 = -4|g'|/(|f|(1+|g|^2)^2$$

y en consecuencia, la curvatura de Gauss K queda:

$$K = K_1K_2 = -[4|g'|/(|f|(1+|g|^2)^2]^2$$

Aquí se observa, por ejemplo, que $K \leq 0$, y que una superficie minimal (que no sea un plano), tiene $K = 0$ sólo en puntos aislados, pues $g' \neq 0$, y esto fuerza a que g' se anule sólo en puntos aislados del dominio Q en cuestión.

Comentemos un resultado interesante acerca de la curvatura total de una superfície minimal.

Si nuevamente tenemos $x(\xi): Q \longrightarrow R^3$ superfície minimal con parametrización isoterma, recordemos que: $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$, donde $\lambda^2 = [\frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)]^2$. Teniendo presente la fórmula de la curvatura obtenida en función de f y g, es inmediato comprobar que $K = -(\Delta \log \lambda / \lambda^2)$, con Δ = laplaciano de R^2 con la métrica llana.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$Q \xrightarrow{x(\xi)} M \xrightarrow{N} S^2 \xrightarrow{\text{proy. estereog.}} w\text{-plano}$$

donde M representa nuestra superfície minimal.

La composición de todas estas aplicaciones, sabemos que es $g(\xi): Q \longrightarrow R^2$. Sea $\xi(t)$ curva diferenciable en Q, y su imagen por las aplicaciones antes indicadas. Si $s(t)$ es el parámetro arco de su imagen en M, se tiene que: $ds/dt = \frac{1}{2}|f|(1+|g|^2)|d\xi/dt|$. La longitud de arco (elemento longitud de arco) en el w-plano R^2 es: $|dw/dt| = |g'(\xi)||d\xi/dt|$. Si $\sigma(t)$ es el parámetro arco en S^2, por la fórmula de la proyección estereográfica, se tiene que:

$$(d\sigma/dt)/(ds/dt) = 4|g'|/|f|(1+|g|^2)^2 = (-K)^{\frac{1}{2}}$$

ya que $|d\sigma/dt| = (1+|w|^2)^{-1}|dw/dt|$.

Supongamos que Ω es un dominio en R^2 / $\bar{\Omega}$ esté contenido en Q. Entonces, restringiendo $x(\xi)$ a Ω, se tiene que:

$$\int_{\Omega} K\,dV = \int_{\Omega} K\lambda^2 d\xi_1 d\xi_2 = -\int_{\Omega} [\,2|g'|/(1+|g|^2)\,]^2 d\xi_1 d\xi_2$$

"La curvatura total en Ω es el area de la imagen de Ω por la aplicación de Gauss en S^2, cambiada de signo".

Esta fué de hecho la definición original usada por Gauss para definir la curvatura de Gauss de una superfície arbitraria.

Notemos que $g(\xi)$ ó $N(\xi)$ puede cubrir varias veces la misma región de S^2, y que el area en cuestión de tal región se contará con la correspondiente multiplicidad. A esta area en S^2, se le llama area esférica de la imagen por g de Ω.

En consecuencia, si M es una superfície minimal inmersa en R^3, se tiene que $\int_M K\,dV =$ area esférica de la imagen de M bajo la aplicación de Gauss.

Efectivamente, para verlo esto último, bastará comprobar que la normal N y el valor de g son independientes de parámetro tomado. En efecto, si $\xi(\bar{\xi})$ es una transformación conforme, se tiene que: $\bar{\phi}_k(\bar{\xi}) = \phi_k(\xi)(d\xi/d\bar{\xi})$, $k = 1,2,3$, y por la definición de g: $g = \phi_3/(\phi_1 - \phi_2) = \bar{\phi}_3/(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)$ es invariante como queríamos probar.

Para acabar este apartado dedicado a un estudio de los conceptos fundamentales y hechos esenciales concernientes a las superfícies minimales en R^3, volvamos a un problema que será objeto, posteriormente y con más profundidad, de nuestro estudio:

¿Cuántos puntos de S^2 omite (ó puede omitir) la aplicación de Gauss de una superfície minimal completa?.

Uno de los resultados más importantes de este trabajo nos dirá que una tal superfície no puede omitir siete puntos en S^2, salvo que esta sea un plano.

Nosotros enunciaremos ahora un teorema que nos dirá la existencia de superfícies minimales y completas en R^3, que omiten k puntos, con $k \leq 4$.

Este problema no está cerrado en la actualidad, y quizás de aquí su gran interés.

1.3.3. TEOREMA

Sea E un conjunto arbitrario de k puntos en S^2, con $k \leq 4$. Entonces, existe una superfície minimal y completa en R^3 cuya imagen por la aplicación de Gauss omite precisamente estos k puntos de E.

Demost.:

Salvo una rotación, podemos suponer que $(0,0,1) \in E$.

Entonces, razonamos así:

Si $E = \{(0,0,1)\}$, consta de un sólo punto, la superfície de Enneper, dada por $f(\xi) = 1$, $g(\xi) = \xi$, con f,g definidas en todo R^2, es la solución al problema.

Si no estamos en este caso, y $1 < k \leq 4$, entonces los puntos restantes de E distintos de $(0,0,1)$, los numeramos $\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{k-1}$, y llamamos $w_1, \ldots, w_{k-1}$ los puntos correspondientes bajo la proyección estereográfica desde $(0,0,1)$.

Definimos $f(\xi) = (\Pi_{i=1}^{k-1}(\xi - w_i))^{-1}$, $g(\xi) = \xi$, con f, g definidas en $R^2 - \{w_1, \ldots, w_{k-1}\}$. Obtenemos así una superfície minimal, cuya aplicación de Gauss omite precisamente los puntos de E, y que es completa porque una curva divergente c debe tender ó bien a $(0,0,1) = \infty$, ó bien a uno de los puntos w_i, $i = 1, \ldots, k-1$, y en este caso:

$$\int_c \lambda |d\xi| = \tfrac{1}{2}\int_c |f|(1 + |g|^2)|d\xi| = \infty.$$

Hemos de indicar que la superfície así construida, tiene: $x_k = \int \phi_k(z)\,dz, k=1,2,3$, y que estas integrales nos han de ser ó estar bien definidas (pueden tomar varios valores, según la curva sobre la que se integre, por no ser $R^2-\{w_1,\ldots,w_{k-1}\}$ simplemente conexo). Sin embargo, pasando al recubridor universal, estas funciones se convierten en funciones univaluadas (bien definidas), y esta nueva superfície verifica lo pedido, pues cumple las mismas propiedades que la anterior. cqd

1.4. Superfícies minimales conjugadas.

Sea M superfície minimal en R^3. Supongamos que M es simplemente conexa (si no, pasar al recubridor universal). Reparametrizamos M a partir del teorema de Uniformización, y como hemos visto, obtenemos $x:Q \longrightarrow R^3$, con $Q=R^2$ ó $Q=D$.

Sabemos que existen ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 holomorfas en Q, con: $\phi_1^2+\phi_1^2+\phi_1^2=0$, y además, $x_k(\xi)=\int_0^\xi \phi_k(z)\,dz$, $k=1,2,3$.
Para cada θ: $0 \leq \theta < \pi$, definimos:

$$x_\theta(\xi) = \mathrm{Re}\int_0^\xi e^{i\theta}\phi_k(z)\,dz \qquad k=1,2,3$$

De hecho, si x_θ está determinado por $\phi_{\theta 1}, \phi_{\theta 2}, \phi_{\theta 3}$ con $\phi_{\theta 1}^2+\phi_{\theta 2}^2+\phi_{\theta 3}^2=0$, resulta que $\phi_{\theta k}=e^{i\theta}\phi_k$, de donde la aplicación $M\equiv Q: \longrightarrow M\equiv Q$ dada por $\xi \longrightarrow e^{i\theta}\xi$ es una isometría.

Lo que no tenemos garantizado es que x, x_θ sean congruentes en R^3.

La inmersión particular $x_{\pi/2}$, nos determina lo que se llama la superfície minimal conjugada asociada a x.

El ejemplo clásico de dos superfícies minimales conjugadas, es el de el helicoide y la catenoide.

2. SUPERFICIES MINIMALES COMPLETAS EN R^3 CONTENIDAS ENTRE DOS PLANOS.

Fué E. Calabi quien se preguntó si era posible encontrar superfícies minimales completas contenidas en un semiespacio. Luquésio P. de M. Jorge y Federico Xavier respondieron esta cuestión, y probaron aún más, encontraron una familia de superfícies minimales contenidas entre dos planos paralelos en R^3, y claro está, no trivial, o sea, tales superfícies no son planos.

La idea, como se comprobará, está basada en una ingeniosa construcción de Rammert, para utilizar el Teorema de Runge.

Posteriormente, en este trabajo, se demostrará que una superfície minimal completa en R^3 que minimice el area globalmente, ha de ser un plano. Esto nos dará información en el sentido de que las superfícies que vamos a construir sólo minimizarán el area localmente. Es de interés tambien el señalar que B. Lawson ("Complete Minimal Surfaces in S^3", Ann. of Math. 92 (1970), 335-374), ha dado ejemplos de superfícies completas con curvatura media constante entre dos planos paralelos.

2.1. Lema.

Sean D_n discos contenidos en D disco unidad de R^2, y verificando, para todo $n\in N$, que D_n está contenido en el interior de D_{n+1}. Supongamos que estos D_n nos recubren D. Sean K_n compactos contenidos en D_n, para cada $n\in N$, de forma que K_n no corta a D_{n-1}, y $D - K_n$ simplemente conexo. Supongamos que tenemos f función holomorfa definida en un entorno de la unión de todos los K_n, que llamaremos V. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe g holomorfa en D tal que $|g - f| < \varepsilon$, en cada K_n, y esto para todo $n \in N$.

Demost.:

Consideremos U_1 la intersección de V y D_1. Es claro que K_1 está contenido en V, de donde por el Teorema 2.1.2. (de Runge), existe g_1 función holomorfa en D / $|f - g_1| < \frac{1}{2}\varepsilon$ en K_1 (para ello necesitamos que U_1 no tenga agujeros, cosa que podemos imponer a V: que V no tenga agujeros ni su corte con ningún D_n).

Ya tenemos construída una g_1 holomorfa en D, y por un proceso inductivo, construimos g_n holomorfa en D, si supuesto construída g_{n-1}, verificando que :

$|g_{n-1} - g_{n-2}| < \varepsilon/2^{n-1}$ en D_{n-2} y $|g_{n-1} - f| < \varepsilon/2^{n-1}$ en K_{n-1}, se define g_n como la función siguiente:

Sea U_n y K_n, K_n ovbiamente contenido en U_n que sabemos que no tiene agujeros. Por el Teorema de Runge, existe una función holomorfa g_n verificando:

$|g_n - g_{n-1}| < \varepsilon/2^n$ en D_{n-1} y $|g_n - f| < \varepsilon/2^n$ en K_n.

Obtenemos de esta forma $\{g_n\}_{n\varepsilon N}$ sucesión en H(D). Como para todo compacto de D, existe $m \in N$ / este compacto está contenido en D_m, resulta que dado K compacto en D, y fijado este m, $|g_n| \leq \max_{x \in K}\{|g_m(x)|\} + (\varepsilon/2^{m+1} + \ldots + \varepsilon/2^n)$, por la forma de construcción de $\{g_n\}_{n\varepsilon N}$, y esto para todo $n > m$.

Luego $|g_n|$ está uniformemente acotado en n sobre los compactos de D.

Por el Teorema 2.4. del Cap. I , $\{g_n\}_{n\in N}$ admite una parcial convergente uniformemente sobre compactos de D a una función g holomorfa en D, que por construcción, verifica que:

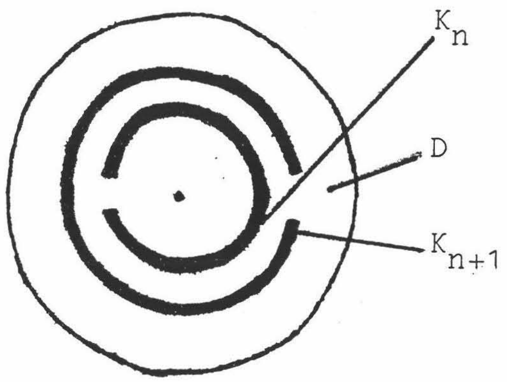
$|g-f| \leq \varepsilon$ en K_n, para todo $n\in N$, ya que $\Sigma_{k\geq 1} 2^{-k} = 1$ cqd

2.1. TEOREMA

Existen superfícies minimales completas y no llanas en R^3 contenidas entre dos planos.

Demost.:

Consideremos el dibujo siguiente:



Como se indica, K_n es la región compacta formada a partir de una corona ó anillo partiendole un pedazo.

Sea r_n = diferencia entre el radio interior y el exterior de K_n. Para construir el K_{n+1}, se rompe un trozo de otro anillo disjunto con el primero, pero rompemos por el lado opuesto al que lo hicimos con K_n, y asi sucesivamente.

Llamemos E = unión de los K_n, con n par, y llamemos O = = unión de los K_n, con n impar.

Diremos que una curva α cruza o atraviesa K_n, si intercepta tanto el radio interior como el exterior del anillo del que ha sido obtenido K_n, siempre, claro está, por el trozo de estos circulos que está en K_n.

Es fácil observar que:

Una curva divergente en D de longitud de arco euclídea finita debe atravesar todos, salvo un número finito, de los K_n de E (ó de O). (I)

Notar que si K_n es elegido de forma que es abierto a la derecha de (0,0), entonces el segmento [0,1[verifica el primer requerimiento, y no el segundo, supuesto que n es impar.

Sea $\{c_n\}_{n\in N}$ una sucesión de números positivos que especificaremos despues. Por el Lema 2.1. de este Capítulo, sabemos que existe h holomorfa en D, verificando que:

$|g - c_n| \leq 1$ en K_n. Sea $g = e^h$, y sea $f = g^{-1}$. Tenemos así dos funciones f,g holomorfas en D, que nos determinan, mediante la representación de Weierstrass, una superfície minimal.

Es inmediato que como $fg = 1$, nuestra superfície minimal tiene la coordenada x_3 acotada. Luego nuestra supefície está contenida entre dos planos.

Veamos que podemos elegir $\{c_n\}_{n\in N}$ de forma que la superfície sea completa. Sabemos que por la Proposición 3.1.1. del Capítulo I, basta conseguir que cualquier curva divergente, tenga longitud infinita. Sea pues α curva divergente. Distinguimos dos casos:

(1) Si α tiene longitud de arco euclídea infinita, esto es, $\alpha : [0,\infty[\longrightarrow D$, parametrizada por el arco. Como siempre se tiene $L(\alpha) = \int_0^\infty \lambda|\alpha(t)|dt$, con t el parametro arco euclídeo, y $\lambda = \frac{1}{2}(|g| + |g|^{-1}) > 1$, resulta que $L(\alpha) = \infty$.

(2) Supongamos que α tiene longitud de arco euclídea finita: $\alpha : [0,b[\longrightarrow D$, con $b < \infty$.

Consideremos, atendiendo a (I), la primera alternativa posible, y sea $m \in N$ / α atraviesa cada K_n de E, para todo $n \geq m$. Como $g = e^h = e^{c_n} e^{h-c_n}$, entonces $|g| \geq e^{c_n - 1}$ en K_n.

Sea $J_n = \{t \in [o,b[\ / \ \alpha(t) \in K_n\}$.

Entonces, $2L(\alpha) \geq \int_o^b |g(\alpha(t))| \, dt \geq \sum_{\substack{n \geq m \\ n \text{ par}}} \int_{J_n} |g(\alpha(t))| \, dt$

$\geq \sum_{\substack{n \geq m \\ n \text{ par}}} e^{c_n - 1} \int_{J_n} dt \geq \sum_{\substack{n \geq m \\ n \text{ par}}} r_n e^{c_n - 1}$.

Analogamente se razonaría en la otra alternativa de (I).

En definitiva, se llegaría a que: $2L(\alpha) \geq \sum_{\substack{n \geq k \\ n \text{ impar}}} r_n e^{c_n - 1}$.

En consecuencia, si elgimos c_n suficientemente buenos para que $\sum_n r_n e^{c_n - 1} = \infty$, tendremos que $L(\alpha) = \infty$ y habremos acabado. Basta, por ejemplo, elegir $c_n = -\log r_n$. cqd

3. LA APLICACION DE GAUSS DE UNA SUPERFICIE MINIMAL COMPLETA Y NO LLANA NO PUEDE OMITIR 7 PUNTOS EN S^2.

El tema sobre el complemento en la esfera de la imagen por la aplicación de Gauss de una superfície minimal completa y no llana, ha sido de los más estudiados. Así, en principio, se conocian resultados como que la imagen por la aplicación de Gauss tenía que ser densa en S^2, ó que su complemento en S^2 tenía capacidad logarítmica cero (esto es, es un subconjunto cerrado en S^2, con complemento parabólico en el sentido de la estructura conforme).

Por ejemplo, el Teorema de Berstein, que afirma: "si una superfície minimal es representada por $f: R^2 \longrightarrow R$ en forma no paramétrica, entonces f es lineal y nuestra superfície es un plano", es un hecho que da información sobre la aplicación de Gauss de superfícies de esta forma, afirmando que esta es trivial (consta de un solo punto).

Todos estos resultados, que tuvieron su interés histórico en cuanto al desarrollo del estudio de las superfícies minimales, seran corolarios triviales de nuestro teorema central: "La aplicación de Gauss de una superfície minimal completa y no llana, no puede omitir siete puntos". Todos los resultados clásicos antes mencionados, se pueden encontrar en [OS].

Los últimos trabajos sobre este tema, se orientaban hacia determinar cuantos puntos podía omitir la aplicación de Gauss de nuestras superfícies minimales completas. Por nosotros es ya conocido que existen superfícies minimales completas cuya aplicación de Gauss omite jústamente k puntos, con $0 \leq k \leq 4$.

Nuestro teorema dirá que además no pueden omitir 7 puntos. La investigación y el problema queda aún sin resolver y abierto en los casos críticos de 5 ó 6 puntos:

¿Existen superfícies minimales completas no llanas cuya aplicación de Gauss omita exactamente 5 ó 6 puntos?.

El resultado central de este apartado es debido a Frederico y Xavier, y se puede encontrar en [XA].

3.1. TEOREMA

El complemento de la imagen de la aplicación de Gauss de una superfície minimal completa no llana en R^3, contiene a lo más 6 puntos de S^2.

Demost.:

Supongamos que nuestra siperfície M omite 7 puntos de S^2

en su aplicación de Gauss. Pasando al recubridor universal de M, por no ser este compacto, el Teorema de Uniformización (Teorema 2.2.1. del Capítulo I), nos dice que éste ha de ser R^2 ó D disco unidad. Veamos que tampoco puede ser R^2(le llamamos M tambien al recubridor universal).

En efecto, si $M = R^2$, la aplicación de Gauss de M sería una función meromorfa en R^2, y el Teorema de Picard (Teorema 2.5. del Capítulo I), nos diría que a lo más omite 2 puntos de R^2, cosa absurda, pues omite 7 puntos.

Así pues, $M = D$ disco unidad.

Utilizando la representación de Weierstrass de nuestra superfície minimal, tenemos que la métrica de $M = D$ ha de ser de la forma $\lambda|dz|^2$, con $\lambda = |f|^2(1+|g|^2)^2$, donde f,g son holomorfas y $|f| \neq 0$ (suponemos que el punto del infinito de S^2 está entre los siete puntos omitidos y así g es holomorfa).

Resumiendo, tenemos $f,g\colon D \longrightarrow R^2$ holomorfas, $|f| \neq 0$, y existen a_i, $i = 1,\ldots,6$ números complejos todos distintos, de forma que la ecuación $g(z) = a_i$ no tiene solución para todo i.

La contradicción la encontraremos probando que la métrica $\lambda|dz|^2$ en D no es completa. Para ello razonamos así:

Sea la función $h = f^{-2/p} g' \Pi_{i=1}^{6} (g - a_i)^{-\alpha}$, donde $5/6 < \alpha < 1$ y $p = (5/6\alpha)$.

Como $|f| > 0$, $f^{-2/p}$ está bien definida.

Es sabido que el operador de Laplace Δ para la métrica $\lambda|dz|^2$ es $(1/\lambda)(\partial/\partial z)(\partial/\partial\bar{z})$, donde $\partial/\partial z = \frac{1}{2}\{\partial/\partial x + i^{-1}\partial/\partial y\}$ y $\partial/\partial\bar{z} = \frac{1}{2}\{\partial/\partial x - i^{-1}\partial/\partial y\}$.

Como h es holomorfa, la función $u = |h|$ verifica que

$\Delta \log u = 0$ en casi todo punto (sólo puede fallar esta ecuación en los puntos en los que $h = 0$).

Como M es completa y con curvatura $K \leq 0$, entonces M tiene area infinita, pues basta usar el Teorema 3.2. del Capítulo I. Por el Teorema 3.4.1. del Capítulo I, $u \notin L^p(M)$.

Pero como el elemento de area es $\lambda dxdy$, la condición $u \notin L^p(M)$, se expresa:

$$\int_D \{|g'|^p (1+|g|^2)^2 / \Pi_{i=1}^6 |g-a_i|^{p\alpha}\} \, dxdy = \infty \qquad \text{(I)}$$

La contradicción buscada proviene de probar que esta integral es finita, para una elección conveniente de α (y por tanto de p).

Sea $D_j = \{z \in D \,/\, |g(z) - a_j| \leq l\}$, donde l es tal que $0 < l < 4^{-1} \min_{i \neq k} |a_i - a_k|$.

Sea $D' = D - \cup_{j=1}^6 D_j$. Llamamos $H(z)$ al integrando de (I).

Hemos de probar que $\int_D H \, dxdy < \infty$.

Por la elección de los D_j, $D = (\cup_{i=1}^6 D_i) \cup D'$, siendo esta unión disjunta en todos sus miembros.

Luego $\int_D H \, dxdy = \Sigma_{j=1}^6 \int_{D_j} H \, dxdy + \int_{D'} H \, dxdy$.

En lo sucesivo, asumiremos que $l < 1$, por comodidad (si no es así, tomar $l' = \min\{l, \frac{1}{2}\}$ siempre para evitar problemas).

Observemos que para todo j, $\int_{D_j} H \, dxdy < \infty$.

Tenemos que:

$$|g'|^p / |g-a_j|^{p\alpha} \leq 2^p |g'|^p / (|g-a_j|^\alpha + |g-a_j|^{2-\alpha})^p$$

y esto es fácil comprobarlo pues siempre $|g-a_j|<1$, al ser $l<1$, y entonces siempre es cierto que, siendo $0<\alpha<1$:

$$|g-a_j|^{\alpha} \geq \tfrac{1}{2}(|g-a_j|^{\alpha}+|g-a_j|^{2-\alpha})$$

Por el Teorema 2.3. del Capítulo I, se tiene que:

$$|g'|/(|g-a_j|^{\alpha}+|g-a_j|^{2-\alpha}) \in L^p(D)$$

de donde $|g'|/|g-a_j|^{\alpha} \in L^p(D)$, y la integral $\int_{D_j} H\,dxdy \leq \infty$ (usar en el último razonamiento que en D_j la función: $(1+|g|^2)^2/\Pi_{i\neq j}|g-a_i|$ es acotada.)

Veamos que $\int_{D'} H\,dxdy$ es tambien finita.

Para ello, comprobemos que en D', $H \leq C|g'|^p|g-a_6|^{-(p\alpha+(5p\alpha-4))}$ para una cierta constante C en R^+. Vamos a ello:

Siempre $|g-a_6|/|g-a_i| \leq 1+|a_i-a_6|/l$ en D', de donde tenemos que $|g-a_6|^{p\alpha}/|g-a_i|^{p\alpha}$ es acotado en D', y esto para todo i.

En consecuencia, $(1+|g|^2)^2/\Pi_{i=1}^{5}|g-a_i|^{p\alpha} \leq C'(1+|g|^2)^2/|g-a_6|^{5p\alpha}$. Por un razonamiento análogo, $(1+|g|^2)^2/|g-a_6|^4 \leq N$ constante en D'.

Entonces, $(1+|g|^2)^2/|g-a_6|^{5p\alpha} \leq C|g-a_6|^4/|g-a_6|^{5p\alpha}$ en D'.

Es inmediato entonces que $H \leq C|g'|^p|g-a_6|^{-(p\alpha+(5p\alpha-4))} = C|g'|^p|g-a_6|^{-1}$, pues $p\alpha=5/6$, en D'.

Nos preguntamos ahora:

¿Existe $\alpha=1-k^{-1}$ / exista A constante con $|g-a_6|^{-1}$ acotado superiormente por $A(|g-a_6|^{\alpha}+|g-a_6|^{2-\alpha})^{-p}$ en D'?

Esto equivale a que:

$$A^{1/p} \geq |g - a_6|^{-\alpha/5} + |g - a_6|^{2-2\alpha-\alpha/5}.$$

En definitiva, ¿para que $\alpha = 1 - k^{-1}$ se verifica que en D' la función $|g - a_6|^{-\alpha/5} + |g - a_6|^{2-2\alpha-\alpha/5}$ es acotada superiormente?.

Como $|g - a_6|^{-\alpha/5} \leq 1^{-\alpha/5}$ es acotado en D', independientemente de α, hemos de acotar el otro sumando, que será acotado por el mismo razonamiento (usar que $|g - a_6| \leq 1$ en D'), si $2 - 2\alpha - \alpha/5 \leq 0$, y esto equivale a que $\alpha \geq 10/11$.

Resumiendo lo expuesto, si $\alpha \geq 10/11$, entonces tenemos que es cierto que $H \leq C|g'|^p(|g - a_6|^{\alpha} + |g - a_6|^{2-\alpha})^{-p}$, para cierta constante C positiva.

Como siempre $|g'|/(|g - a_6|^{\alpha} + |g - a_6|^{2-\alpha}) \in L^p(D)$, si $0 < p < 1$ (nuevamente por el Teorema 2.3. del Capítulo I), se deduce que:

$$\int_{D'} H\, dxdy \leq \int_{D'} C|g'|/(|g - a_6|^{\alpha} + |g - a_6|^{2-\alpha})\, dxdy < \infty .$$

Concluyendo, $H \in L^p(D)$, lo que es absurdo. cqd

4.LA UNICA SUPERFICIE MINIMAL COMPLETA Y ESTABLE QUE HAY EN R^3 ES UN PLANO.

Este podría ser quizás el resultado más importante de los que se exponen en este trabajo, no sólo por su fuerza intríseca, sino aún más por que de el se extraerán muchas consecuencias importantes, y muchos teoremas conocidos sobre este tema anteriormente serán evidentes a la luz de los teoremas que involucraremos en el desarrollo de este apartado.

El resultado es recogido en [CS], y atendiendo a esta referencia se hará la demostración, aunque otro desarrollo y solución de este mismo problema puede encontrarse en [DCP] .

Evidentemente, como se puede comprobar en el título del artículo en [CS], D.F. Colbrie y R. Schoen tratan este problema en un ambiente más general: nosotros nos restringiremos a su estudio en R^3. La estabilidad, en R^3, de una superfície minimal M sabemos que significa que M minimiza el area globalmente, hasta el segundo orden. Esto se traduce analíticamente (ver Teorema 1.2.1. de este Capítulo II) en que:

$$\int_M (-g\Delta g + 2Kg^2)\, dV \geq 0$$

para toda función g diferenciable con soporte compacto en M, y esto es decir (Teorema de la Divergencia), que:

$$\int_M (|\nabla g|^2 + 2Kg^2)\, dV \geq 0$$

para toda g en las mismas condiciones.

Usando un lenguaje más técnico, que no vamos a justificar aquí, propio de la teoria de ecuaciones, se diría que el operador $\Delta - 2K = \Delta + |\sigma|^2$, tiene su primer autovalor positivo.

Es evidente que el ya mencionado anteriormente Teorema de Berstein: "La única superfície minimal que viene presentada como el grafo de una aplicación diferenciable de todo R^2 en R es un plano", es una solución parcial de nuestro teorema, supuesto que admitimos que toda superfície construida de esta forma es estable.

Tambien es un plano la única superfície minimal completa cuya aplicación de Gauss omite 7 puntos.

El estudio de la relación entre las regiones estables de M superfície minimal, y su imagen por la aplicación de Gauss es debido a Barbosa y Do Carmo:" On the size of a stable minimal surface in R^3", Amer. J. Math. 98(2),1976,p.p.515-528.

Comencemos fijando notación y enunciando un teorema importante.

Supongamos que (M,ds^2) es una variedad m-dimensional,no compacta y completa. Sea q función diferenciable en M. Sea D dominio acotado de M. Ya definimos $\lambda_1(D)$, como el número real construído como $\inf\{\int_D (|\nabla f|^2 + qf^2)\, dV$, sop f en D, $\int_D f^2\, dV = 1\}$, donde ∇f es el gradiente de f respecto de ds^2 métrica de M, y dV es el elemento de volumen asociado a ds^2.

4.1. <u>TEOREMA</u>

<u>Son equivalentes</u>:

(i) $\lambda_1(D) \geq 0$, <u>para todo</u> D <u>dominio acotado de</u> M.

(ii) $\lambda_1(D) > 0$, <u>para todo dominio</u> D <u>acotado de</u> M.

(iii) <u>Existe</u> g <u>función positiva en</u> M, <u>con</u> $\Delta g - qg = 0$.

<u>Demost.</u>:

Veamos que (i) implica (ii).

Sea D dominio en M acotado. Sea $r \in R^+ / \bar{D}$ esté contenido en $B_r(x_o)$, donde $x_o \in M$ es un punto fijo. Por el Corolario 1.3.6. del Capítulo I, $\lambda_1(D) > \lambda_1(B_r(x_o)) \geq 0$, y de aquí lo buscado.

Veamos que (ii) implica (iii).

Consideremos el problema:

$$\Delta u - qu = 0 \text{ en } B_r(x_o), \quad u = 1 \text{ en } \partial B_r(x_o) \qquad \text{(I)}$$

Por hipótesis, $\lambda_1(B_r(x_o)) > 0$, de donde no existe u solución no nula del problema:

$$\Delta u - qu = 0 \text{ en } B_r(x_o), \quad u = 0 \text{ en } \partial B_r(x_o)$$

En efecto, si existiese una solución no nula de este problema, se tendría que usando el Teorema de la Divergencia, válido para funciones de $\overset{o}{H}_{1,2}(B_r(x_o))$ (ver Corolario 1.3.7. del Capítulo I) :

$$0 = \int_{B_r(x_o)} (u\Delta u - qu^2)\, dV = -\int_{B_r(x_o)} (|\nabla u|^2 + qu^2)\, dV \leq$$

$$\leq -\lambda_1(B_r(x_o)) \int_{B_r(x_o)} u^2\, dV < 0$$

lo que es absurdo.

En consecuencia, por el Teorema 1.3.7. del Capítulo I, existe una única solución v del problema:

$$\Delta v - qv = q \text{ en } B_r(x_o), \quad v = 0 \text{ en } \partial B_r(x_o)$$

Se sigue que $u = v + 1$ es solución de (I). Observemos que $u \geq 0$ en $B_r(x_o)$.

Si esto no fuera así, tendríamos que $\Omega = \{ x \varepsilon B_r(x_o) \,/\, u(x) < 0\}$ es un conjunto no vacio. Luego Ω es un dominio (contenido en $B_r(x_o)$) y en consecuencia $\lambda_1(\Omega) > 0$ por nuestras hipótesis.

Como $\Delta u - qu = 0$ en Ω, y $u = 0$ en $\partial\Omega$, se tendría que nuevamente por el Teorema de la Divergencia:

$$0 = \int_{\Omega} (u\Delta u - qu^2)\, dV \leq -\lambda_1(\Omega)\int_{\Omega} u^2\, dV < 0$$

cosa que es absurda. Así pues, $u \geq 0$ en $B_r(x_o)$. Veamos que de hecho, $u > 0$ en $B_r(x_o)$.

Si existe $x_1 \in B_r(x_o) \,/\, u(x_1) = 0$, entonces, considerando $c = \inf\{-q, 0\} \leq 0$, es claro que $\Delta u - cu \leq 0$, pues $u \geq 0$, en $B_r(x_o)$.

Por el Teorema 1.1.1. del Capítulo I(principio del máximo), u no puede alcanzar un mínimo ≤ 0 en un punto interior, salvo que u sea constante. Como x_1 es interior a $B_r(x_o)$, con $u(x_1) = 0$ y $u \geq 0$, esto nos lleva a contradicción (observar que u no puede ser constante si $u(x_1) = 0$ y $u = 1$ en $\partial B_r(x_o)$).

En resumen, existe $u > 0$, verificando (I).

Sea ahora $g_r = u(x_o)^{-1}u$, función definida en $B_r(x_o)$. Es claro que g_r verifica:

$$\Delta g_r - qg_r = 0 \text{ en } B_r(x_o),\ g_r(x_o) = 1 \text{ y } g_r > 0 \text{ en } B_r(x_o)$$

Por el Corolario 1.1.1. del Capítulo I (Desigualdad de Harnack), si $\sigma < r$, temenos que existe C constante dependiendo de σ y de r (y no de g_r) de tal forma que:

$\sup_{B_\sigma(x_o)} g_r \leq C \inf_{B_\sigma(x_o)} g_r \leq C$ (notar que $\inf_{B_\sigma(x_o)} g_r \leq 1$ pues $g_r(x_o) = 1$).

Luego para todo $r > \sigma$, $g_r \leq C$ en $B_\sigma(x_o)$, y las g_r son uniformemente acotadas en $B_\sigma(x_o)$. Es claro que si K es un compacto de M, existe σ / K está contenido en $B_\sigma(x_o)$, y sobre K las g_r,

, con $r > \sigma$, son uniformemente acotadas. Por el Corolario 1.2.1. del Capítulo I, g_r y sus derivadas hasta el segundo orden son uniformemente acotadas y equicontínuas en K, y esto para todo $r > \sigma$. Fijamos $\{K_n\}_{n\in N}$ sucesión de compactos en M / K_n esté contenido en K_{n+1}, y $U_n K_n = M$, siendo K_n contenido en K°_{n+1}. El Teorema 1.3.4. (y el hecho de que cada compacto está contenido en una conveniente bola métrica) del Capítulo I, nos diría que, para K_1, existe $\{r_{1k}\}_{k\in N}$ sucesión de reales positivos tendiendo a ∞, de forma que $\{g_{r_{1k}}\}_{k\in N}$ converge uniformemente en K_1, junto con sus derivadas hasta el segundo orden.

Por el mismo teorema, sacamos de $\{g_{r_{1k}}\}_{k\in N}$ una subsucesión que llamamos $\{g_{r_{2k}}\}_{k\in N}$ verificando lo mismo en K_2, y así sucesivamente, por inducción, construimos $\{g_{r_{nk}}\}_{k\in N}$ sucesión de funciones convergente uniformemente en K_n, junto con las derivadas hasta el segundo orden, para cada $n\in N$.

La sucesión diagonal $\{g_{ii}\}_{i\in N}$ verifica:

Converge uniformemente en compactos de M, junto con las derivadas hasta el segundo orden, y nos define una función g, $g:M \longrightarrow R$ verificando:

$$\Delta g - qg = 0, \quad g(x_o) = 1$$

Como tambien $g \geq 0$, y $g \neq 0$, nuevamente por el principio del máximo se obtiene que $g > 0$. cqd

Veamos que (iii) implica (i).

Sea $g > 0$, con $\Delta g - qg = 0$ en M. Definimos $w = \log g$. Es claro que $\Delta w = q - |\nabla w|^2$. Sea f función diferenciable con soporte compacto.

Se tiene: $f^2 \Delta w = qf^2 - f^2|\nabla w|^2$, y por el Teorema de la Divergencia:

$$-\int_M qf^2\, dV + \int_M |\nabla w|^2 f^2\, dV = 2\int_M f<\nabla f, \nabla w>\, dV \qquad \text{(a)}$$

Siempre $2|f|<\nabla f, \nabla w> \leq 2|f||\nabla f||\nabla w| \leq f^2|\nabla f|^2 + |\nabla w|^2$, de donde según (a):

$-\int_M qf^2\, dV \leq \int_M |\nabla f|^2\, dV$, ó lo que es lo mismo:

$$\int_M (|\nabla f|^2 + qf^2)\, dV \geq 0$$

Si D es un dominio acotado y sop f está contenido en D, tenemos que $\lambda_1(D) \geq 0$. cqd

4.2. TEOREMA

Sea M el disco unidad en R^2: $M = D(0,1)$. Sea ds^2 una métrica en M verificando $ds^2 = \mu(z)|dz|^2$ (una métrica conforme a la euclídea). Supongamos que ds^2 es completa. Sea K la curvatura de Gauss de M, y Δ el laplaciano métrico: $\Delta f = \mu^{-1}(f_{xx} + f_{yy})$, donde $z = x + iy$. Es conocido que $K = -\frac{1}{2}\log\mu$.

Entonces, si $a \geq 1$, no existe ninguna solución positiva de la ecuación: $\Delta g - aKg$ en M.

Demost.:

Veamos que podemos reducirnos al caso $a = 1$. Sea f con soporte compacto en M, y sea $a > 1$.

Como $a > 1$, $\int_M (|\nabla f|^2 + Kf^2)\, dV \geq a^{-1}\int_M (|\nabla f|^2 + aKf)\, dV$,

de donde se deduce que si $\lambda_1(D) \geq 0$, con D dominio acotado de M para el operador $\Delta - aK$, entonces $\lambda_1(D) \geq 0$ tambien para el operador $\Delta - K$. Es por esto que usando el Teorema 4.1. de este Capítulo, la existencia de una solución positiva para $\Delta g - aKg = 0$, implica la existencia de una solución positiva para $\Delta g - Kg = 0$ en M.

Es por esto que nos restringimos al caso $a = 1$.

Sea $h = \mu^{-\frac{1}{2}}$. Se tiene que $K = \Delta \log h$. Pero $\Delta \log h$ vale: $\Delta \log h = \Delta h/h - |\nabla h|^2/h^2$, de donde $\Delta h = Kh + |\nabla h|^2/h$. *

Sea ahora D un dominio acotado de M.

Sea ξ función diferenciable en M con soporte compacto incluido en D. Se tiene que por el Teorema de la Divergencia:

$$\int_M (|\nabla \xi h|^2 + K(\xi h)^2)\, dV = \int_M (-\xi h(\Delta \xi h) + K(\xi h)^2)\, dV =$$

$$= \int_M [(-\xi \Delta \xi) h^2 - 2\xi h <\nabla \xi, \nabla h> - \xi^2 h \Delta h + K(\xi h)^2]\, dV$$

de donde atendiendo a *, resulta que usando la definición de $\lambda_1(D)$:

$$\lambda_1(D) \int_M (\xi h)^2\, dV \leq \int_M [(-\xi \Delta \xi) h^2 - \tfrac{1}{2} <\nabla \xi^2, \nabla h^2>]\, dV -$$

$$- \int_M |\nabla h|^2 \xi^2\, dV$$

donde hemos usado que $\lambda_1(D) \int_M (\xi h)^2\, dV \leq \int_M (|\nabla \xi h|^2 + k(\xi h)^2)\, dV$.

Por el Teorema de la Divergencia:

$$\lambda_1(D) \int_M (\xi h)^2\, dV \leq \int_M |\nabla \xi|^2 h^2\, dV - \int_M |\nabla h|^2 \xi^2\, dV$$

Si existiese una solución positiva de $\Delta g - Kg = 0$, entonces por el Teorema 4.1. de este Capítulo, $\lambda_1(D) > 0$.

En consecuencia:

$$0 \leq \int_M |\nabla\xi|^2 h^2\, dV - \int_M |\nabla h|^2 \xi^2\, dV \qquad **$$

Sabemos que al ser M con ds^2 completa y no compacta, por la Proposición 1.3.3. del Capítulo I, se tiene que existe C constante fija verificando:

Para todo $r,s \,/\, 0 < r < s$, existe $\phi_{r,s}: M \longrightarrow R$, $\phi_{r,s} \varepsilon W(M)$, y $\phi_{r,s}/B_r(x_o) = 1$, $\phi_{r,s}/M - B_s(x_o) = 0$, $0 \leq \phi_{r,s} \leq 1$, $\|\nabla\phi_{r,s}\|_\infty \leq C/(s-r)$.

Tomando ahora $\xi = \phi_{r,s}$ y $D = B_s(x_o)$, resulta que con $x_o = 0$:

$$\int_M |\nabla\xi|^2 h^2\, dV \leq \int_M [C^2/(s-r)^2] h^2\, dV = \int_M [C^2/(s-r)^2] \mu\mu^{-1}\, dxdy =$$

$$= [C^2/(s-r)^2] \int_M dxdy = C^2\pi/(s-r)^2$$

Luego volviendo a $**$, se tiene que:

$$0 \leq \lambda_1(B_s(0)) \int_M (\xi h)^2\, dV \leq C^2\pi/(s-r)^2 - \int_M |\nabla h|^2 \xi^2\, dV$$

Si hacemos ahora que $s \longrightarrow \infty$, esta expresión sigue siendo válida y fuerza a que $\nabla h = 0$, esto es, $h =$ constante, ó lo que es lo mismo, μ es constante, de donde ds^2 no es completa. En consecuencia, no existe ninguna solución positiva de $\Delta g - qg = 0$ en M. cqd

4.2.1. <u>Corolario</u>. <u>En el mismo ambiente, si</u> $a \geq 1$, $P \geq 0$, <u>entonces no existe ninguna solución positiva de la ecuación:</u>

$$\Delta g - aKg + Pg = 0$$

Demost.:

Si existe $g > 0$ verificando la ecuación en cuestión, entonces por el Teorema 4.1., para todo D dominio acotado de M, y para toda función f con soporte en D:

$$\int_D (|\nabla f|^2 + (Ka - P)f^2)\, dV \geq 0$$

y como $P \geq 0$, entonces:

$$\int_D (|\nabla f|^2 + aKf^2)\, dV \geq 0$$

de donde nuevamente por el mismo teorema anterior, existe solución positiva de $\Delta g - aKg = 0$, lo que es absurdo, por el Teorema 4.2. de este Capítulo. cqd

4.2.2. Corolario. Sea M variedad de Riemann orientable, de dimensión dos y simplemente conexa. Supongamos que $K \geq 0$.

Entonces, M es conformemente equivalente a S^2 ó a R^2.

Demost.:

Por el Teorema de Uniformización (Teorema 2.2.1. del Capítulo I), sabemos que M es conformemente equivalente a R^2, $D(0,1)$, ó S^2.

Si fuese M conformemente equivalente a $D(0,1)$, tendremos en D una métrica para la que el operador $\Delta - K$ tiene $\lambda_1(D_1) \geq 0$, para todo D_1 dominio acotado de D, que por el Teorema 4.1., nos da una solución positiva de $\Delta g - Kg = 0$, cosa absurda según el Teorema 4.2 de este mismo Capítulo tambien. cqd

Este era un resultado clásico que es consecuencia sencilla de los dos resultados vistos en este apartado.

4.2.1. <u>Proposición</u>. <u>Si</u> M <u>es una superfície minimal(inmersa isométricamente en</u> R^3) <u>estable, entonces es conformemente equivalente a</u> R^2 <u>ó a un Cilindro</u>.

<u>Demost</u>.:

Sabemos que para variaciones normales de M representadas por una función f de soporte compacto en M, la condición de estabilidad se expresa (ver Teorema 1.2.1. de este Capítulo):

$$\int_M (|\nabla f|^2 + 2Kf^2)\, dV \geq 0$$

Observemos que el recubridor universal de M es conformemente equivalente a R^2.

Si esto no es así, como este recubridor universal es tambien una superfície minimal de R^3, no puede ser compacto, y al ser simplemente conexo, el Teorema de Uniformización fuerza a que sea D disco unidad. Por la condición de estabilidad y por el Teorema 4.1. de este Capítulo, existe $g > 0$ en M con :

$\Delta g - 2Kg = 0$. Levantando g al disco D que es el recubridor universal de M, obtenemos una solución positiva en el disco de esta ecuación, con una métrica completa, lo que contradice el Teorema 4.2. de este Capítulo.

Luego el recubridor universal de M ha de ser R^2, y como M no es compacta, por el Teorema 2.2.2. del Capítulo I, M es conformemente equivalente a R^2 ó a un cilindro. cqd

4.3. TEOREMA

La única superfície minimal completa y estable en R^3 es el Plano.

Demost.:

Es sabido que una superfície minimal completa no puede ser compacta.

Por la Proposición 4.2.1. anterior(de este Capítulo), M es conformemente equivalente a R^2 ó a un cilindro A.

Si M es conformemente equivalente a A, levantamos la solución de la ecuación $\Delta g - 2kg = 0$ que sabemos existe por el Teorema 4.1. de este Capítulo (observar que la hipótesis de estabilidad nos permite aplicar este Teorema).

En cualquier caso, tenemos una métrica en R^2, con $K \leq 0$ y $g > 0$ verificando $\Delta g - 2Kg = 0$. De esto se deduce que g es supermónica, pues $\Delta g = 2Kg \leq 0$. Como g es además positiva, es acotada inferiormente, de donde por el Teorema 2.1.1. del Capítulo I, g es constante. Como $\Delta g = 0 = 2Kg$, con $g \neq 0$, esto fuerza a que $K = 0$. Como M es minimal, si k_1, k_2 son las curvaturas principales , es claro que $k_1 = -k_2$, y como $K = -k_1^2 = 0$, entonces $k_1 = k_2 = 0$. Se deduce que M es umbilical con constante de umbilicidad 0, de donde tiene que ser un trozo de plano, más como es completa, M ha de ser un plano de R^3. cqd

Este teorema expresa lo restrictiva que es la hipótesis de estabilidad (minimizar area globalmente): sólo el plano la cumple.

El Teorema 4.2. de este Capítulo, es por sí solo importante, pues tendrá, como comprobaremos, muchas aplicaciones en situaciones y ambientes diferentes a este.

Un ejemplo claro e inmediato de su utilidad es el siguiente Teorema, muy sugerente geométricamente.

4.3.1. Lema. Sea M^2 superfície minimal en R^3. Sea N una orientación de M. Sea la función $f:M \longrightarrow R$ definida: $f(p) = \langle p,N(p)\rangle$. Entonces, $\Delta f + f|\sigma|^2 = 0$, donde σ es la 2ª forma fundamental asociada a la inmersión de M en R^3.

Demost.:

Se tiene que $d f_p(v) = \langle v,N(p)\rangle + \langle p,d N_p(v)\rangle = \langle p,d N_p(v)\rangle$, para todo v de T_pM.

Como $A_N(v) = -d N_p(v)$ es el endomorfismo de Weingarten, resulta que: $d f_p(v) = -\langle p,A_N(v)\rangle$. Escribiremos por comodidad $A = A_N$. Se deduce que $\nabla^2 f_p(u,v) = -\langle u,A(v)\rangle - \langle p,(\nabla_u A)(v)\rangle - \langle p,\sigma(u,A(v))\rangle$. Sea ahora $\{e_i\}$ base ortonormal de T_pM. Por definición:

$$\Delta f = \Sigma_i \nabla^2 f_p(e_i,e_i) = -\Sigma_i \langle e_i,A(e_i)\rangle - \Sigma_i \langle p,(\nabla_{e_i} A)(e_i)\rangle -$$
$$-\Sigma_i \langle p,\sigma(e_i,A(e_i))\rangle .$$

El primer sumando se anula por la minimalidad de M, y el segundo tambien por la ecuación de Codadazzi. Así queda:

$$\Delta f = -\Sigma_i \langle p,\sigma(e_i,A(e_i))\rangle = -f|\sigma|^2. \text{ cqd}$$

4.3.1. TEOREMA

Sea M superfície minimal completa y conexa de R^3. Entonces desde todo punto p de R^3, se puede trazar una recta tangente a M, salvo, claro está, que M sea un plano.

Demost.:

Razonemos por reducción al absurdo:

Supongamos que existe q punto de R^3(tomaremos $q=0$ por comodidad), desde donde no se puede trazar ninguna tangente a M. Esto quiere decir que si p es un punto de M, vista M ya dentro de R^3, $p \notin T_pM$.

Sea $\bar{M}$ el recubridor universal de M, al que seguiremos llamando M, y trabajaremos con el.

Es sabido que induciendo en este recubridor universal la estructura métrica y diferenciable de M, este se convierte en una superfície minimal completa inmersa isométricamente en R^3. La imagen por la aplicación de Gauss del recubridor universal es la misma que la de la variedad recubierta, y vistas desde R^3, M y $\bar{M}$ son lo mismo (el mismo conjunto de puntos).

En definitiva, que tambien para el recubridor universal, se verifica que $p \notin T_pM$, para todo punto p del recubridor.

Sea N una aplicación de Gauss elegida de M. Por ser $p \notin T_pM$, entonces $\langle p,N(p)\rangle \neq 0$, para todo $p \in M$. Luego se ha de tener que $\langle p,N(p)\rangle > 0$, ó bien $\langle p,N(p)\rangle < 0$, para todo punto $p \in M$, por la conexión de M. Elegimos N de forma que $\langle p,N(p)\rangle > 0$.

Consideremos la aplicación $f \doteq \langle p,N(p)\rangle$ definida en M.

Por el Lema 4.3.1. inmediatamente anterior, sabemos que $\Delta f + f|\sigma|^2 = 0$. Como M es minimal, $|\sigma|^2 = -2K$, con K la curvatura de Gauss de M. Luego $\Delta f - 2Kf = 0$. Como M es simplemente conexa, y no compacta, ha de ser M conformemente equivalente a R^2 ó a D disco unidad. Como $f > 0$, y $\Delta f - 2kf = 0$, el Teorema 4.2. de este Capítulo fuerza a que sea $M = R^2$.

Como $\Delta f = 2Kf \leq 0$, f es superarmónica y acotada inferiormente, de donde por el Teorema 2.1.1. del Capítulo I, f es constante. De aquí que $\Delta f = 0$, y así $K = 0$, de donde M es un plano, por ser minimal. cqd

CAPITULO III

HIPERSUPERFÍCIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN R^{M+1}

1. RESULTADOS GLOBALES SOBRE SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN R^3.

En este apartado de este Capítulo , se recogerán algunos resultados referentes a superfícies de curvatura media constante en R^3. Todos ellos están extraídos de artículos publicados por sus autores, a los que se hizo referencia explícita en la introducción

Será de nuestra atención el Teorema de Hopf, que caracteriza a la esfera S^2 como la única superfície inmersa en R^3 con curvatura media constante compacta y simplemente conexa.

Un trabajo de Ossermann y Klotz ([KL]), nos clasificará todas las superfícies completas en R^3 con $H = $ constante, y de forma que su curvatura de Gauss K no cambia de signo: estas son la esfera, el cilindro circular recto y las minimales. La demostración que se hará no será la misma que se hace en el citado artículo exactamente, y aprovecharemos, como se observará, resultados ya conocidos por nosotros referentes al Capítulo II.

Otro artículo de Hoffman, Ossermann y Schoen ([HOF]), nos servirá para comentar un resultado interesante respecto a la aplicación de Gauss de superfícies inmersas en R^3 con curvatura media constante. En este caso no tendremos teoremas tan fuertes como los que en este tema había para superfícies minimales en R^3, pero si será interesante el conocer, por ejemplo, que si una superfície completa tiene $H = $ constante, y la imagen por la aplicación de Gauss de toda la superfície está contenida en un hemisferio abierto, entonces esta es un plano, y si lo está en un hemisferio cerrado, entonces puede tambien ser un cilindro circular recto. Observemos que este resultado va en la línea de generalizar algunos ya conocidos por nosotros sobre superfícies minimales.

1.1. TEOREMA (Hopf)

Sea S superfície compacta inmersa isométricamente en R^3, con $H = $ constante. Supongamos que S es simplemente conexa. Entonces, S es S^2 con la estructura métrica y diferenciable estándar.

Demost.:

Supongamos que es $\psi : S \longrightarrow R^3$ la inmersión isométrica en cuestión. Sea $N : S \longrightarrow S^2$ la aplicación de Gauss de S.

Por el Teorema 2.6. del Capítulo I, podemos dotar a S de una estructura de superfície de Riemann, garantizando la existencia de un atlas conforme.

Definimos la diferencial cuadrática $w = \langle \partial N/\partial z, \partial \psi/\partial z \rangle$, bien definida globalmente, donde entendemos:

$\partial N/\partial z = \frac{1}{2}\{\partial N/\partial x - i\,\partial N/\partial y\}$, $\partial \psi/\partial z = \frac{1}{2}\{\partial \psi/\partial x - i\,\partial \psi/\partial y\}$ y el producto escalar considerado es el complexificado.

Observemos que al ser $H = $ constante, w es una diferencial cuadrática holomorfa. Para verlo, hemos de comprobar que es homorfa en S la función $\langle \partial N/\partial z, \partial \psi/\partial z \rangle$.

Para ello veamos que $\partial/\partial\bar{z}\langle\partial N/\partial z, \partial\Psi/\partial z\rangle = 0$.

Pero $\partial/\partial\bar{z}\langle\partial N/\partial z, \partial\Psi/\partial z\rangle = \langle\partial^2 N/\partial z\partial\bar{z}, \partial\Psi/\partial z\rangle + \langle\partial N/\partial z, \partial^2\Psi/\partial z\partial\bar{z}\rangle$, y como $\partial^2/\partial z\partial\bar{z} = (1/4)\Delta_o$, con Δ_o el laplaciano de la métrica llana, y como es claro que $\Delta_o = f\Delta$ pues la métrica en S y la llana son conformes (recordar que la estructura conforme de S se induce a partir de parametrizaciones isotermas), entonces se tiene que $\partial^2 N/\partial z\partial\bar{z}$ tiene dirección normal, ya que por ser H constante, $N = -|\sigma|^2 N$, y siempre $\partial^2\Psi/\partial z\partial\bar{z}$ es normal. Como $\partial N/\partial z$ y $\partial\Psi/\partial z$ son tangentes, es ahora claro que $\partial/\partial\bar{z}\langle\partial N/\partial z, \partial\Psi/\partial z\rangle = 0$.

En consecuencia, w es una diferencial holomorfa en S. Como S es compacta y simplemente conexa, por el Teorema de Uniformización (Teorema 2.2.1. del Capítulo I) es conformemente equivalente a S^2. Observemos que en S^2, la única diferencial cuadrática holomorfa es constante $= 0$.

En efecto, S^2 es recubierto por dos parametrizaciones conformes dadas por la proyección estereográfica desde (0,0,1) y desde (0,0,-1). La primera carta la llamamos k, y a la segunda z. El cambio de carta es $k = z^{-1} : R^2 - \{0\} \longrightarrow R^2 - \{0\}$.

Sea ϕdk^2, Ψdz^2 nuestra diferencial cuadrática holomorfa en cada una de nuestras dos cartas. En la intersección, $\phi dk^2 = \Psi dz^2$, y por la fórmula del cambio de coordenadas:

$$\phi(k) = \Psi(z)(dz/dk)^2 = \Psi(z)k^{-4} = \Psi(z)z^4.$$

Luego $\phi(k)$ es una función entera en R^2, y $\phi(\infty) = \Psi(0)0^4 = 0$. por el Teorema de Liouville, $\phi = 0$, que es lo que queríamos.

Volviendo a nuestra línea de razonamiento, resulta que como consecuencia de esta observación, $\langle\partial N/\partial z, \partial\Psi/\partial z\rangle = 0$.

Esto quiere decir que:

Como $\partial N/\partial z = -\frac{1}{2}\{A_N(\partial/\partial x) - iA_N(\partial/\partial y)\}$ y tambien analogamente $\partial\Psi/\partial z = \frac{1}{2}\{\partial\Psi/\partial x - i\partial\Psi/\partial y\} = \frac{1}{2}\{\partial/\partial x - i\partial/\partial y\}$, entonces:

$$<\partial N/\partial z, \partial\Psi/\partial z> = (1/4)\{<A_N(\partial/\partial x), \partial/\partial x - <A_N(\partial/\partial y), \partial/\partial y>\} +$$
$$+ (i/4)\{-<A_N(\partial/\partial x), \partial/\partial y> - < A_N(\partial/\partial y), \partial/\partial x>\} = 0.$$

De aquí que, como A_N es autoadjunto, S sea umbilical, y en consecuencia sea S^2. cqd

1.2. TEOREMA

Sea M superfície inmersa isométricamente en R^3, con H constante. Supongamos que su curvatura de Gauss no cambia de signo. Entonces, M es un cilindro circular recto, una esfera ó una superfície minimal.

Demost.:

Necesitaremos un lema previo, que será consecuencia de la fórmula de Simons.

1.2.1. Lema. Sea M superfície inmersa isométricamente en R^3 con H constante. Entonces:

$$\Delta\log(H^2 - K) = 4K$$

en los puntos no umbilicales de M, donde K = curvatura de Gauss.

Demost.:

Siempre $\Delta\log(H^2-K) = (\Delta(H^2-K))/(H^2-K) - |\nabla(H^2-K)|^2/(H^2-K) =$
$= (H^2-K)^{-1}\{-\Delta K - |\nabla K|^2/(H^2-K)\}$ pues H es constante.

Como $2K = H^2 - |\sigma|^2$, entonces $-\Delta K = \frac{1}{2}\Delta|\sigma|^2$.

Así, $\Delta\log(H^2-K) = (H^2-K)^{-1}\{\frac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 - 4^{-1}|\nabla|\sigma|^2|^2/(H^2-K)\}$ *

Como siempre $|\sigma|^2 = \Sigma_{i,j}\sigma(e_i,e_j)^2$, con $\{e_i\}$ base ortonormal de campos entorno a p punto de M no umbilical, y de forma que $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$, entonces se tiene que:

$e_k|\sigma|^2 = 2\Sigma_{i,j}\nabla\sigma(e_k,e_i,e_j)\sigma(e_i,e_j)$, y de aqui que:

$$|\nabla|\sigma|^2|^2 = 4\Sigma_k(\Sigma_{i,j}(\nabla\sigma)(e_i,e_j,e_k)\sigma(e_i,e_j))^2$$

Pero al ser H constante, $\Sigma_j\nabla\sigma(e_i,e_j,e_j) = 0$, y si tomamos $\{e_i\}$ de forma que en p diagonalicen σ con curvaturas principales λ_1,λ_2, entonces, usando de nuevo que $\Sigma_j\nabla\sigma(e_k,e_j,e_j) = 0$:

$$|\nabla|\sigma|^2|^2 = 4(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\Sigma_k\nabla\sigma(e_k,e_1,e_1)^2) \quad **$$

Calculemos ahora $|\nabla\sigma|^2$. Usando la simetría de $\nabla\sigma$, queda:

$$|\nabla\sigma|^2 = 4\Sigma_k\nabla\sigma(e_k,e_1,e_1)^2$$

y de aquí que en consecuencia se tenga que usando **:

$$|\nabla|\sigma|^2|^2 = |\nabla\sigma|^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 4|\nabla\sigma|^2(H^2 - K) \quad ***$$

Por la fórmula de Simons (Proposición 3.3.1. del Capítulo I), sabemos que:

$$\tfrac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 = |\nabla\sigma|^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2K$$

de donde usando *** y sustituyendo en *, llegamos a lo buscado. cqd

Procedamos ahora a la demostración del Teorema.

Supongamos primero que $K \geq 0$.

Si M no es simplemente conexa, consideramos su recubridor universal, al que seguiremos llamando M y que está en las mismas condiciones del Teorema. Suponemos pues M simplemente conexa.

Por el Corolario 4.2.2. del Capítulo II, M es conformemente equivalente a R^2 ó a S^2.

Si M es R^2, como $0 \leq 2K = 4H^2 - |\sigma|^2$, entonces $|\sigma|^2 \leq 4H^2$, y como $4H^2$ es constante por hipótesis, resulta que $|\sigma|^2$ es acotada superiormente.

Por la fórmula de Simons nuevamente, tenemos que $\Delta|\sigma|^2$ es mayor o igual que 0 (por ser $K \geq 0$). Se deduce que aplicando el Teorema de Liouville (Teorema 2.1.1. del Capítulo I), ha de ser $|\sigma|^2$ constante, de donde como H es constante, K ha de ser constante. Como $K \geq 0$, entonces $K = 0$, pues si fuese $K > 0$, por el Teorema de Bonet, M sería compacta, cosa absurda pues M es conformalmente equivalente a R^2. Como H es constante y K tambien, entonces las curvaturas principales son constantes en M.

Como $K = \lambda_1 \lambda_2 = 0$, las únicas posibilidades son:

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, en cuyo caso M es un plano.

(b) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Veamos que en este caso M es un cilindro. En efecto, sabemos que existe un cilindro circular recto con las mismas curvaturas seccionales que M. Por rigidez, ya que las segundas formas fundamentales, ó los endomorfismos de Weingarten son iguales, M y nuestro cilindro han de ser congruentes en R^3, y de aqui que M sea un cilindro circular recto.

Veamos ahora el caso $M = S^2$ y $K \geq 0$.

Este caso está ya resuelto por el Teorema de Hopf (Teorema 1.1. de este Capítulo), que nos dice que M es S^2.

Por último, nos resta el caso $K \leq 0$.

Como H es constante, del Lema 1.2.1. de este Capítulo, se deduce que en puntos no umbilicales:

$$\Delta \log (H^2 - K)^{\frac{1}{2}} = 2K$$

Sabemos que si en una variedad M, dos métricas ds^2, ds_1^2 están relacionadas de la forma $ds_1^2 = e^{2u} ds$, entonces se tiene que $\Delta u = K - K_1 e^{2u}$, donde Δ es el laplaciano asociado a ds^2, y K, K_1 las curvaturas de Gauss asociadas respectivamente a ds^2 y a ds_1^2. Sea $ds_1^2 = (H^2 - K)^{\frac{1}{2}} ds^2$, en puntos no umbilicales.

Si ponemos ahora $(H^2 - K)^{\frac{1}{2}} = e^{2u}$, entonces se tiene que $u = 4^{-1} \log (H^2 - K)$. Luego $\Delta u = 4^{-1} \Delta \log (H^2 - K) = K$, y como sabemos que $\Delta u = K - K_1 e^{2u}$, entonces $K_1 = 0$.

Así pues, el razonamiento a seguir es el siguiente:

Como tenemos M inmersa en R^3 con H constante, completa y $K \leq 0$, y previo paso por el recubridor universal, M simplemente conexa, podemos suponer que M es R^2, S^2 ó D, por el Teorema de Uniformización. Al ser $K \leq 0$, por el Teorema 3.2. del Capítulo I, M tiene area infinita, de donde M no puede ser S^2. (Si se quiere, comparar con el plano y obtener que M no puede ser compacta). Luego M es D ó R^2. Como H es constante, entonces $H = 0$ ó bien $H = c > 0$ (elegir una orientación conveniente para que H sea positiva).

Si $H = 0$, M es minimal y hemos acabado. Supongamos que $H = c > 0$. Como $K \leq 0$ y $H > 0$, entonces M no tiene puntos umbilicales. Luego podemos introducir en M la métrica $ds_1^2 = (H^2 - K)^{\frac{1}{2}} ds^2$, de la que sabemos que $K_1 = 0$.

Como $K \leq 0$ y H es constante, entonces $H^2 - K \geq c^2 = H^2$, de donde $ds_1^2 \geq c^2 ds^2$, y de aquí ds_1^2 es completa por serlo ds^2.

Así, M con ds_1^2 es completa y llana.

Como $\Delta H = 0$, por ser H constante, y además esta constante es positiva, tenemos en M una solución positiva de la ecuación $\Delta g - K_1 g = 0$ (observar que $K_1 = 0$). Por el Teorema 4.2. del Capítulo II, esto fuerza a que M se comformemente equivalente a R^2.

Así pues, tenemos $M = R^2$, y volvemos a considerar la métrica primitiva ds^2 en M, con la que $K \leq 0$.

Por el Lema 1.2.1. de este capítulo, tenemos que:

$\Delta \log (H^2 - K) = 4K \leq 0$, y como $H^2 - K \geq c^2$ constante, resulta que $\log (H^2 - K)$ es acotada inferiormente, y por el Teorema de Liouville de nuevo, por ser tambien superarmónica, ha de ser constante, de donde $\Delta \log (H^2 - K) = 0$, y de aquí que por el lema anterior de nuevo, $K = 0$.

En resumen, $M = R^2$, $K = 0$ y $H =$ constante. Siguiendo un razonamiento análogo al hecho antes, M ha de ser un plano ó un cilindro circular recto. cqd

1.3. <u>TEOREMA</u>

<u>Sea</u> S <u>una superfície completa inmersa en</u> R^3 <u>con curvatura media constante. Supongamos que la aplicación de Gauss está contenida en un hemisferio abierto de</u> S^2. <u>Entonces</u> S <u>es un plano</u>. <u>Si la aplicación de Gauss está contenida en un hemisferio cerrado, entonces</u> S <u>és ó un plano ó un cilindro circular recto</u>.

Demost.:

Sea $N:S \longrightarrow S^2$ aplicación de Gauss de S.

Como $H = \text{constante}$, entonces $\Delta N + |\sigma|^2 N = 0$. En efecto, el observar esto es usar que si $f:S \longrightarrow R$ se define como $f(p) = \langle N(p),a\rangle$, donde a es un vector de R^3 cualquiera fijo,se verifica de forma fácil que: $\Delta f + |\sigma|^2 f = 0$.

Distingamos ahora casos:

Sea $\bar{S}$ el recubridor universal de S. Si la imagen por la aplicación de Gauss de S está contenida en un hemisferio (abierto o cerrado), ocurre lo mismo con la de $\bar{S}$.

Aplicando el Teorema de Uniformización, tenemos las siguientes posibilidades:

(a) $\bar{S}$ es conformemente equivalente a S^2. Esto sería absurdo por el Teorema 1.1. de este Capítulo, pues entonces $\bar{S}$ sería S^2, y la aplicación de Gauss sería sobreyectiva, cosa contradictoria con nuestras hipótesis.

(b) Si $\bar{S}$ es conformemente equivalente a R^2. En este caso consideremos N aplicación de Gauss de S. Sabemos que se verifica: $\Delta N + |\sigma|^2 N = 0$.*. Podemos suponer que el hemisferio que contiene a $N(\bar{S})$ es el inferior, y si $N = (n_1,n_2,n_3)$, entonces $n_3 \leq 0$.

Luego como por *, $\Delta n_3 = -|\sigma|^2 n_3 \geq 0$, y además n_3 es acotada superiormente por 1, el Teorema de Liouville nos diría que n_3 es constante. Luego se tendrá que $N(\bar{S})$ está contenida en un círculo en S^2. Si $n_3 \neq 0$, como $\Delta n_3 = 0$, entonces $|\sigma|^2 = 0$, y de aquí que $\bar{S}$ es un plano, con la métrica llana.

Si $n_3 = 0$, entonces el vector vertical e_3 está contenido en el espacio tangente a $\bar{S}$ en todo punto de $\bar{S}$.

Esto implica que por cada punto pasa una línea paralela a e_3 contenida enteramente en $\bar{S}$(curva integral del campo e_3 constante). Luego $\bar{S}$ es un cilindro sobre una curva plana, y como H es constante, entonces $\bar{S}$ es un cilindro circular recto.

(c) Si $\bar{S}$ es comformemente equivalente al disco unidad D. Nuevamente como antes, $\Delta n_3 + |\sigma|^2 n_3 = 0$, siendo $-1 \leq n_3 \leq 0$.

Es claro que $|\sigma|^2 = 4H^2 - 2K$.

Luego $\Delta n_3 - 2Kn_3 + 4H^2 n_3 = 0$. Ahora bien, como n_3 es subarmónica en D, y $0 \geq n_3 \geq -1$, por el Teorema 1.1.1. del Capítulo I, si $n_3 = 0$ en un punto de D, entonces $n_3 = 0$ en todo D. De aquí que razonando como en (b), $\bar{S}$ habría de ser R^2 y no D, pues llegaríamos a que $\bar{S}$ es un cilindro circular recto. En resumen, $n_3 = 0$ es imposible, e incluso $n_3 < 0$.

Así pues, hemos de estudiar sólo el caso de $n_3 < 0$, con $\bar{S} = D$. Como $\Delta n_3 + |\sigma|^2 n_3 = 0$ en D, siendo la métrica considerada en D completa, tendremos que llegamos a contradicción con el Teorema 4.2. del Capítulo II. Este caso es pues imposible y hemos acabado. cqd

Observemos que de nuevo el Teorema de Berstein es consecuencia de este Teorema.

2. RESULTADOS GLOBALES SOBRE HIPERSUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN R^{m+1}

En este apartado, mencionaremos una consecuencia sencilla de la fórmula de Reilly, conodida en la literatura matemática como el Teorema de Aleksandrof. En concreto, demostraremos que la única hipersuperfície compacta con curvatura media constante embebida en R^{m+1} es S^m. La hipótesis de estar embebida es esencial, pues el teorema no es cierto para inmersas (ver [WE]).

En realidad, y es obligado decirlo, el Teorema de Aleksandrof fue demostrado por este matemático ruso en principio, con otras técnicas distintas a las que nosotros vamos a utilizar.

Por último, obtendremos un teorema de clasificación de la hipersuperfícies compactas de R^{m+1} con curvatura media constante que son estables, que de alguna forma será lo paralelo a lo visto con las minimales en R^3. La clasificación nuevamente será trivial: la única tal hipersuperfície será la esfera S^m, con su estructura métrica estandar. Este resultado es debido a J.L. Barbosa y M.P. do Carmo ([BAR]).

2.1. TEOREMA (Aleksandrof)

Sea M^m hipersuperfície embebida en R^{m+1} con H constante. Supongamos que M^m es compacta. Entonces M^m es S^m.

Demost.:

Tomemos una orientación de M en la que $H<0$. Para ello, comprobemos que existe un punto donde $H\neq 0$ y luego elegir la orientación conveniente.

Para comprobar esto, sea $f:M \longrightarrow R$, $f(p)=\langle p,p\rangle$. Sea x_o punto de M, con $f(x_o)=\max f$ (usamos la compacidad de M). El resto es comprobar que σ en este punto es definida, con lo que $H(x_o)\neq 0$. En realidad lo que estamos diciendo es que cualquier superfície minimal completa no puede ser compacta, cosa que conociamos nosotros ya. Supondremos pues que $H<0$.

Consideremos de nuevo la función $f:\Omega \longrightarrow R$, $f(p) = \langle p,p\rangle$, donde Ω es el dominio encerrado por M en R^{m+1} (usamos el Teorema de Jordan-Brower, válido pues M está embebida). Si se quiere consultar esto, ver [GP].

Es claro que $\Delta f = 2(m+1)$. Luego $\int_\Omega 2(m+1)\,dV_0 = \int_M \langle N,p\rangle\,dV$. * por el Teorema de la Divergencia.

Sea ahora $\langle p,p\rangle : M \longrightarrow R$.

Se tiene que $\Delta\langle p,p\rangle = 2m + 2mH\langle N,p\rangle$. En consecuencia:

$$2m\,\mathrm{Vol}(M) + 2mH\int_M \langle N,p\rangle\,dV = 0 \quad \text{**(Fórmula de Minkowski)}$$

nuevamente por el Teorema de la Divergencia.

Luego uniendo *,** queda:

$$m\mathrm{Vol}(M) + mH(m+1)\mathrm{Vol}(\Omega) = 0 \qquad \text{***}$$

Sea $f:\Omega \longrightarrow R$ verificando $\Delta f = 1$ y $f/M = 0$. Por la Fórmula de Reylli (Proposición 3.3.2. del Capítulo I), resulta que:

$$\int_\Omega \{|\nabla^2 f|^2 - 1\}dV_0 = mH\int_M u^2\,dV$$

donde $u = \langle\nabla f,N\rangle$. Ahora bien, como $|\nabla^2 f|^2 \geq (m+1)^{-1}(\Delta f)^2 = (m+1)^{-1}$ en Ω, se deduce que:

$$mH\int_M u^2\,dV \geq ((m+1)^{-1}-1)\mathrm{Vol}(\Omega) = -(m/m+1)\mathrm{Vol}(\Omega)$$

y de aquí que:

$$m(-H)\int_M u^2\,dV \leq (m/m+1)\,\mathrm{Vol}(\Omega) \qquad ****$$

Pero por la desigualdad de Schwarz: $(\int_M u\,dV)^2 \leq (\int_M u^2\,dV)\mathrm{Vol}(\Omega)$, y $\int_M u\,dV = \int_\Omega \Delta f\,dV_o = \mathrm{Vol}(\Omega)$, de donde uniendo estos dos últimos hechos: $(\mathrm{Vol}(\Omega))^2 \leq \int_M u^2\,dV\ \mathrm{Vol}(M)$.

Teniendo ahora en cuenta ****:

$$(m(-H)\,\mathrm{Vol}(\Omega)^2)/\mathrm{Vol}(M) \leq m/m+1\ \mathrm{Vol}(\Omega)$$

y de aquí que: $mH(m+1)\,\mathrm{Vol}(\Omega) \leq m\,\mathrm{Vol}(M)$.

Pero por ***, tenemos realmente en la última desigualdad la igualdad, de donde todo lo anterior son igualdades y en particular $\nabla^2 f(x,y) = (m+1)^{-1}\langle x,y\rangle$, de donde por una integración sencilla:

$$f(p) = (1/2(m+1))\langle p,p\rangle + \alpha\langle p,a\rangle + \beta$$

y al ser $f/M = 0$, lo que nos queda es que M es una esfera. cqd

2.2. Estabilidad de Hipersuperfícies en R^{m+1} con curvatura media constante $\neq 0$.

Ya se definió en la sección 1.2. del Capítulo II la estabilidad para hipersuperfícies en R^{m+1} con H = constante no nula, y comprobamos que es esencialmente distinto este concepto al de estabilidad para minimales.

La diferencia, en esencia, proviene de que hipersuperfícies minimales y hipersuperfícies con $H = \text{constante} \neq 0$, provienen de problemas variacionales distintos.

La estabilidad en hipersuperfícies con H constante no nula, vimos que se podía interpretar diciendo que nuestra hipersuperfície era minimo global para el area, en variaciones a volumen constante que fijaban la frontera, y se dió una caracterización más operativa en función de un operador J que definiamos asociado a cada variación.

Veamos, antes de nada, que la esfera S^m es estable en R^{m+1}.

Necesitamos el siguiente teorema:

2.2.1. TEOREMA [BE]

Sea S^m esfera m dimensional con su estructura diferenciable y métrica estándar. Sea $\lambda_1(S^m) = \inf\{\int_{S^m} |\nabla f|^2 dV,\ g \in C^\infty(S^m),\ \int_{S^m} g\, dV = 0$ y $\int_{S^m} g^2\, dV = 1\}$. Entonces, $\lambda_1(S^m) = m$.

Para comprobar la estabilidad de S^m, tomemos $f: S^m \longrightarrow R$ con $\int_{S^m} f\, dV = 0$. Se tiene que:

$$J''(0)(f) = \int_{S^m} (-f\Delta f - |\sigma|^2 f^2)\, dV = \int_{S^m} (|\nabla f|^2 - |\sigma|^2 f^2)\, dV$$

y como por el Teorema 2.2.1. inmediatamente anterior, $\lambda_1(S^m) = n$, resulta que:

$$J''(0)(f) \geq (n - |\sigma|^2)(\int_{S^m} f^2\, dV)$$

y como $|\sigma|^2 = n$, resulta que $J''(0)(f) \geq 0$, que es justo la definición de estabilidad.

Como consecuencia S^m es estable, y cualquier dominio D de S^m tambien es estable, por el mismo razonamiento.

Consideremos ahora M^m variedad de Riemann inmersa en R^{m+1}. Elijamos un punto $p \in M$, y $e_1, \ldots, e_n$ base ortonormal en T_pM.

Extendamos esta base, por traslado paralelo a lo largo de las geodésicas que salen de p en un entorno normal suyo, y denotaremos tambien por e_i los campos obtenidos en este entorno.

Llamemos $\bar{\nabla}$ la conexión de R^{m+1} y ∇ la de M^m inducida. Notemos que $\nabla_{e_i} e_j = o$ en p, y que $[e_i, e_j] = 0$ en p.

2.2.1. <u>Lema. Con la notación anterior, son ciertas</u>:

(i) $\Sigma_i <\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N> = -|\sigma|^2$

(ii) <u>Si</u> H <u>es constante, entonces</u> $\Sigma_i <\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k>(p) = 0$ $k = 1, \ldots, m$.

<u>Demost.</u>:

(i) Como $<N,N> = 1$, entonces $<\bar{\nabla}_{e_i} N, N> = 0$. Luego se tiene:

$$\Sigma_i <\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, N> = -\Sigma_i <\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} N> = -\Sigma_i <\Sigma_j <\bar{\nabla}_{e_i} N, e_j> e_j, \Sigma_k <\bar{\nabla}_{e_i} N, e_k> e_k> =$$
$$= -\Sigma_{i,j} <\bar{\nabla}_{e_i} N, e_j>^2 = -|\sigma|^2.$$

(ii) Como $<N, e_k> = 0$, entonces $<\bar{\nabla}_{e_i} N, e_k> = -<N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k>$, de donde:

$$<\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k> + <\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k> = -<\bar{\nabla}_{e_i} N, \bar{\nabla}_{e_i} e_k> - <N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k>.$$

Como $\bar{\nabla}_{e_i} N$ es tangente a M y la componente tangente de $\bar{\nabla}_{e_i} e_k(p) = 0$ por ser $\nabla_{e_i} e_k(p) = 0$, se tiene que:

$$<\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k>(p) = -<N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} e_k>(p) = -<N, \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i>(p).$$

Como R^{m+1} es llano, $\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_k} e_i(p) = \bar{\nabla}_{e_k} \bar{\nabla}_{e_i} e_i(p)$, pues $[e_k, e_i](p) = 0$.

Luego $\Sigma_i <\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_{e_i} N, e_k>(p) = -<N, \bar{\nabla}_{e_k} (\Sigma_i \bar{\nabla}_{e_i} e_i)>(p)$.

Por otro lado se tiene que: $<N, \Sigma_i \bar{\nabla}_{e_i} e_i> = H = \text{constante}$.

De aquí que:

$< \bar\nabla_{e_k} N, \Sigma_i \bar\nabla_{e_i} e_i> = -<N, \bar\nabla_{e_k} (\Sigma_i \bar\nabla_{e_i} e_i)>$, y por último:

$\Sigma_i <\bar\nabla_{e_i} \bar\nabla_{e_i} N, e_k>(p) = <\bar\nabla_{e_k} N, \bar\nabla_{e_i} e_i>(p) = 0$ cqd

Recordemos que si M tiene H constante, dado $v \in R^{m+1}$, definiendo la función $f: M \longrightarrow R$, $f(p) = <v, N(p)>$, se tiene que:

$$\Delta f + |\sigma|^2 f = 0$$

2.2.2. TEOREMA

Sea M^m compacta, orientable y sea $x: M^m \longrightarrow R^{m+1}$ una inmersión con H constante $\neq 0$. Entonces x es estable si y sólo si M^m es una esfera S^m.

Demost.:

Ya hemos visto que toda esfera es estable.

Supongamos M^m en las hipótesis del Teorema, y estable. Veamos que M^m es S^m. Necesitamos algunos lemas.

2.2.2. Lema. $|\sigma|^2 \geq mH^2$, y la igualdad se da si y sólo si p es umbilical.

Demost.:

Sean $k_1, \ldots, k_m$ las curvaturas principales de x en $p \in M$. Entonces $|\sigma|^2 = \Sigma_i k_i^2$, y $|\sigma|^2 - m^2H^2 = -2\Sigma_{i<j} k_i k_j$. Por inducción, $\Sigma_{i<j}(k_i - k_j)^2 = (m-1)\Sigma_i k_i^2 - \Sigma_{i<j} k_i k_j = (m-1)|\sigma|^2 - 2\Sigma_{i<j} k_i k_j$, de donde $m(|\sigma|^2 - mH^2) = \Sigma_{i<j}(k_i - k_j)^2 \geq 0$, y de aquí lo buscado. cqd

2.2.3. Lema. Sea $x: M^m \longrightarrow R^{m+1}$ con curvatura media H constante, e igual a H_o. Sea $g = <x, N>$ función soporte . Entonces:

$$\Delta g = -mH_o - |\sigma|^2 g$$

<u>Demost.</u>:

Se tiene que $\Delta g(p) = \{ e_i e_i <x,N>\}(p)$, donde $\{e_i\}$ es un referencial geodésico en p ($\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$, $[e_i, e_j](p) = 0$).

Luego se deduce que:

$\Delta g(p) = \{-\Sigma_i <\overline{\nabla}_{e_i} e_i, N> + \Sigma_i <x, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N>\}(p)$

Usando ahora el Lema 2.2.1. de este Capítulo y la definición de H, se obtiene lo apetecido. cqd

Demostremos ahora el Teorema:

Ahora M es compacta. Podemos usar la fórmula de Minkowski (ver ** en el Teorema 2.1. de este Capítulo):

$$\int_M g \, dV = -\int_M dV$$

Como $H = H_o$ = constante, y como $\Delta g = -mH_o - |\sigma|^2 g$ por el Lema 2.2.3. inmediatamente anterior, se tiene que:

$$-\int_M |\sigma|^2 H_o g \, dV = mH_o^2 \int_M dV \qquad *$$

sin más que usar el Teorema de la Divergencia.

Sea ahora $f = H_o g + 1$. Por la fórmula de Minkowski es claro que $\int_M f \, dV = 0$.

Consideremos una variación de M con componente normal fN (ver Proposición 1.1.3. del Capítulo II). Para esta variación, tenemos que:

$$J''(0) = \int_M (-f\Delta f - |\sigma|^2 f^2) \, dV$$

Por el Lema 2.2.3. inmediatamente anterior, se tiene que:

$-f\Delta f - |\sigma|^2 f^2 = -H_o(gH_o + 1)\, g - |\sigma|^2(gH_o + 1)^2 = -gH_o^2(-mH_o - |\sigma|^2 g) -$

$- H_o(-mH_o - |\sigma|^2) - |\sigma|^2(g^2H_o^2 + 2gH_o + 1) = mH_o^2 f - |\sigma|^2 f.$

En consecuencia:

$$J''(0) = -\int_M |\sigma|^2(gH_o + 1)\, dV \qquad **$$

Si $x: M^m \longrightarrow R^{m+1}$ es estable, entonces $J''(0) \geq 0$, y de *,**, y del Lema 2.2.2.visto anteriormente justo, se deduce:

$$\int_M mH_o^2\, dV_o = -\int_M |\sigma|^2 H_o^2 g\, dV \geq \int_M |\sigma|^2\, dV \geq \int_M mH_o^2\, dV$$

y $|\sigma|^2 = mH_o^2$, de donde todos los puntos de M son umbilicales.

De la compacidad de M, se deduce que es S^m. cqd

BIBLIOGRAFIA

[AR] ARONSAJN: "A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order", J. Math. Pures et Appl., 36, (1957).

[AU] AUBIN, Tierry: "Nonlinear Analisis on Manifolds and Monge-Ampère Equations", Springer-Verlag, (1982).

[BAR] J. L. BARBOSA and M. P. DO CARMO: "Stability of Hipersurfaces with Constant Mean Curvature", Math. Z. Springer-Verlag, (1984).

[BE] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET: "La spectre d'une varietè Riemannienne", Lecture Notes in Mathematics, 194, Springer-Verlag, (1971).

[BR] BREZIS, Haïm: "Analisis Funcional", Alianza Editorial Textos, (1984).

[CS] D. FISCHER-COLBRIE and R. SCHOEN: "The structure of complete stable minimal surfaces in

3-Manifolds of non-negative Scalar Curvature", Communications of Pure and Applied Mathematics, Vol XXXIII, (1980)

[DC] M. P. DO CARMO: "Differential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice Hall, (1976).

[DCP] M. P. DO CARMO and C. K. PENK: "Stable Complete MInimal Surfaces are Planes", Bulletin of the American Math. Society, Vol 1, (1979).

[GBT] GILBARD-TRUDINGER: "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Springer-Verlag, (1977).

[GP] V.GUILLEMIN and A. POLLACK: "Differential Topology", Prentice Hall, (1974).

[HAY] N.K. HAYMAN: "Meromorphics Functions", Oxford Mathematical Monographs, (1964).

[HOF] D.A. HOFFMAN, R. OSERMAN and R. SCHOEN: "On the Gauss Map of Complete Surfaces of Constant Mean Curvature in R^3 and R^4", Comment. Math. Helvetici, 57, (1982).

[JX] L. P. de M. JORGE and F. XAVIER: "A Complete Minimal Surface between two parallel Planes", Ann. of Math., (1979).

[KL] T. KLOTZ and R. OSERMAN: "Complete Surfaces in E^3 with Constant Mean Curvature", Comment. Math. Helvetici, 41, (1966-67).

[MA] A. MARKUSHEVICH: "Teoría de las Funciones Analíticas", Tomos I y II, Editorial Mir

[MI] V.P. MIJAILOV: "Ecuaciones Diferenciales en DErivadas Parciales", Editorial Mir

[OS] R. OSERMAN: "A Survey of Minimal Surfaces", Van Nostrand Reinhold Company, (1969).

[RE] R. REILLY: "Applications of the Hessian Operator in a Riemannian Manifold", Indiana University Mathem. J., 26, (1977).

[SP] SPIVAK: "A Comprehensive Introduction to Differential Geometry", Brandes Univ., (1970).

[SPR] SPRINGER: "Introduction to Riemann Surfaces", Adisson-Wesley P.C..

[WA] F. W. WARNER: "Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups", Scott Foresman and Company, (1971).

[WE] H. C. WENTE: "A Counterexample to a Conjecture by H. Hopf", Pacific Journal of Math., Vol 121, (1986), Pag.:193-243.

[WU] H. WU: "The Bochner Tecnique", Proc. of the 1980 Beijing Simp. Diff. Geom. and Diff. Equ. S. S. Chern Wu Wen-Tsuing.

[XA] F. XAVIER: "The Gauss Map of a Complete non flat Minimal Surface cannot omit 7 points of the Sphere", Ann. of Mathem., 113, (1981).

[YAU] S. T. YAU: "Some function theoretic properties of Complete Riemannian Manifolds and their applications to Geometry", Indiana Univ. Math., 25, (1976).