Tesis Doctoral

Hipersuperficies Reales del Espacio Hiperbólico Cuaterniónico

Miguel Ortega Titos

16 de marzo de 1999

Universidad de Granada

Hipersuperficies Reales
del Espacio Hiperbólico Cuaterniónico

Miguel Ortega Titos

Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de D. Juan de Dios Pérez Jiménez, Profesor Titular de dicho Departamento, para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

Fdo.: Juan de Dios Pérez Jiménez

Fdo.: Miguel Ortega Titos

.

Memoria defendida el día 16 de marzo de mil novecientos noventa y nueve, ante el Tribunal formado por los profesores Dr. D. Alfonso Romero Sarabia, Dr. D. Angel Ferrández Izquierdo, Dr. D. Oscar Garay Bengoechea, Dr. D. José Luis Cabrerizo Izquierdo y Dr. D. Antonio Martínez López, y que obtuvo por unanimidad una calificación de Apto cum laude.

A la memoria del marteño ilustre **D. Manuel Caballero Venzalá**,
al que conocí de niño. Culto como pocos, me enseñó que el
gusto por el conocimiento no tiene nada que ver con el ego.

Indice

Introducción General.

La Teoría de Subvariedades es una de las principales ramas de la Geometría Diferencial. Las subvariedades de una variedad de Riemann que suelen atraer con más fuerza la atención de los geómetras son las totalmente umbilicales, las Einstein y las hipersuperficies, estas últimas debido quizá a la simplicidad formal de sus ecuaciones de estructura. El estudio de las subvariedades de una variedad de Riemann es, por un lado, interesante por sí mismo y, por otro, permite comprender la geometría de la variedad ambiente. Para ello, dichas subvariedades se pueden contemplar desde dos perspectivas diferentes. La primera es la relativa a las propiedades que heredan las subvariedades de las propiedades de la variedad ambiente, propiedades que se denominan extrínsecas. La segunda considera aquellas características que estudian la subvariedad como variedad de Riemann aislada, denominadas intrínsecas, aunque en el fondo provengan de la métrica inducida y de la topología propia de la subvariedad. Las variedades de Riemann que tradicionalmente han sido más estudiadas desde este punto de vista son los espacios simétricos de rango uno, es decir, los modelos de espacios reales, complejos y cuaterniónicos. Esta perspectiva ha mostrado grandes diferencias cuando se comparan los distintos casos. Por ejemplo, las hipersuperficies totalmente umbilicales de un espacio euclídeo son abiertos de esferas o planos, y sin embargo, no existen hipersuperficies reales totalmente umbilicales en el espacio proyectivo complejo.

Las hipersuperficies (reales) de los modelos de espacios reales y complejos han sido estudiadas por muchos autores ([C], [CR], [K], [MD], [MO], [MU], [R], por citar unos pocos) durante muchos años. Asímismo, la teoría de hipersuperficies reales del espacio proyectivo cuaterniónico ha sido desarrollada en cierta medida por [B], [MP], [JP2], etc, obteniéndose gran cantidad de resultados sobre el endomorfismo de Weingarten, el tensor de Ricci, etc. Sin embargo, la situación del espacio hiperbólico cuaterniónico ha sido hasta hace poco bien distinta. El conocimiento que se tenía en 1995 de las hipersuperficies reales del espacio hiperbólico cuaterniónico se restringía casi completamente a los siguientes artículos:

1. J. Berndt, *Real hypersurfaces in quaternionic space forms*, J. Reine angew. Math. **419**(1991), 9-26.

2. B.Y. Chen, *Totally umbilical submanifolds of quaternion space forms*, J. Austr. Math. Soc. **26**(1978), 154-162.

3. A. Martínez, J.D. Pérez and F.G. Santos, *Generic submanifolds of quaternion Kaehlerian manifolds*, Soochow Math. J. **10**(1984), 79-98.

4. J.S. Pak, *Real hypersurfaces in quaternionic Kaehlerian manifolds with constant Q-sectional curvature*, Kodai Math. Sem. Rep. **29**(1977), 22-61.

5. Y. Tashiro and S. Tachibana, *On Fubinian and C-Fubinian manifolds*, Kodai Math. Sem. Rep. **15**(1963), 176-183.

Por diferentes caminos, Chen y Tashiro-Tachibana obtienen que el espacio hiperbólico cuaterniónico no admite hipersuperficies reales totalmente umbilicales. Tashiro-Tachibana demuestran también el resultado de que no existen hipersuperficies reales en el espacio hiperbólico cuaterniónico cuya segunda forma fundamental sea paralela. El tercer artículo de la lista incluye la definición de hipersuperficie real reglada de una variedad Kaehleriana cuaterniónica, obteniéndose una caracterización de dichas hipersuperficies (ver Proposición 2.1.1) Nótese además que no son artículos dedicados específicamente a hipersuperficies. Por otra parte, el trabajo que escribió Pak es bastante general. De hecho, presta bastante más atención al espacio proyectivo cuaterniónico, y no incluye resultados específicos de hipersuperficies reales del espacio hiperbólico cuaterniónico. Introduce el concepto de 3-estructura casi de contacto, en un primer momento concibiéndola como una generalización de la definición de estructura de contacto, aunque su desarrollo posterior obliga a desechar esa idea. Berndt, sin embargo, sí avanza en dicho camino. Define el concepto de hipersuperficie real de curvatura adaptada, y obtiene la clasificación completa en el caso del espacio proyectivo cuaterniónico. En el espacio hiperbólico cuaterniónico clasificó las hipersuperficies reales de curvatura adaptada que además son isoparamétricas (ver Teorema 2.3.1). Cuando la hipersuperficie real es de curvatura adaptada pero admite curvaturas principales no constantes, Berndt obtuvo restricciones bastante fuertes, como se puede comprobar en los resultados del Capítulo 2, sección 3. Berndt dedica casi toda su atención al endomorfismo de Weingarten, pero no se plantea qué ocurre con el tensor de Ricci o con otras herramientas geométricas.

En este contexto, consideramos adecuado realizar un estudio específico acerca de las hipersuperficies reales del espacio hiperbólico cuaterniónico que desarrollara y profundizara la teoría que Berndt había comenzado. Con la excepción de los resultados del Capítulo 5, el enfoque que se ha dado es sobre todo tensorial, es decir, se ha partido de una fórmula tensorial y se ha obtenido la clasificación de las hipersuperficies reales que la verifican, aunque en algunos casos haya que imponer que la dimensión cuaterniónica del espacio ambiente sea al menos tres. Los dos tensores que hemos utilizado son el endomorfismo de Weingarten y el tensor de Ricci de tipo (1,1).

La presente memoria se divide en cinco capítulos.

En el primero se exponen generalidades bien conocidas de Teoría de Subvariedades, las definiciones de submersión semirriemanniana, de fibrado principal y de variedad

Kaehleriana cuaterniónica. Esta última se puede realizar de dos maneras distintas, aunque por supuesto son equivalentes. La primera consiste en la existencia de un fibrado vectorial tridimensional de tensores de tipo (1,1), y es la que se ha incluido. La segunda establece que una variedad de Riemann es una variedad Kaehleriana cuaterniónica si su grupo de holonomía es un subgrupo de $Sp(n) \cdot Sp(1)$. Se ha incluido también la definición de 3-estructura Sasakiana, a partir de la cual se pueden construir variedades Kaehlerianas cuaterniónicas mediante un cociente que aparece de manera natural. Por otra parte, se destaca el resultado debido a Gray ([G]) que afirma que toda subvariedad cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica es totalmente geodésica. Como aplicación de todo esto, se construye un modelo explícito del espacio hiperbólico cuaterniónico de curvatura seccional cuaterniónica constante -4, que denotaremos en lo sucesivo por $\mathbb{Q}H^m$. La métrica de curvatura seccional cuaterniónica constante -4 la llamaremos g.

El segundo capítulo se dedica a fijar notaciones para el resto de la memoria y compilar las herramientas geométricas necesarias, entre las que conviene destacar la 3-estructura casi de contacto, que juega un papel básico. Por simplicidad, siempre consideraremos hipersuperficies reales conexas. Si M es una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, el subfibrado cuaterniónico maximal de TM se denota por $\mathbb{D}$, que va a jugar un papel crucial. Si se leen por encima los enunciados de los resultados obtenidos en los Capítulos 3 y 4, se observa que varias condiciones tensoriales en las que se eligen campos de vectores de TM son tan restrictivas que ninguna hipersuperficie real las verifica, y sin embargo, eligiendo secciones en $\mathbb{D}$, se llega a clasificar. Por otra parte, se describen los ejemplos de hipersuperficies reales que se van a manejar a lo largo de la memoria, que son de dos tipos: la horosfera junto con los tubos sobre ciertas subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{Q}H^m$ y las regladas. Tanto los tubos sobre dichas subvariedades de $\mathbb{Q}H^m$ como la horosfera son de curvatura adaptada e isoparamétricas y ya aparecen en [B]. Sin embargo, la familia de hipersuperficies reales regladas es nueva. Recordemos que en el espacio proyectivo cuaterniónico se conocen algunas hipersuperficies reales regladas similares (ver [MA]). Se finaliza con los resultados que aparecen en el artículo de Berndt, y a los que ya hemos hecho mención.

El tercer capítulo se centra en la segunda forma fundamental, quedando dividido en dos secciones. En la primera se estudian condiciones directas sobre el endomorfismo de Weingarten, con el objetivo de acercarse a la geometría extrínseca de las hipersuperficies. En un primer paso, se estudia una relación entre el endomorfismo de Weingarten y la estructura casi de contacto en el Teorema 3.1.1. Con anterioridad ya se apuntó que no existen hipersuperficies reales totalmente umbilicales en $\mathbb{Q}H^m$. Así, se buscan condiciones más débiles que permitan escribir un teorema de clasificación del que se obtenga como corolario el antiguo teorema de no existencia. En primer lugar se considera la restricción de la métrica g al fibrado $\mathbb{D}$, y se define la métrica g^0 en el fibrado $\mathbb{D}$ por $g^0(X,Y) = g(AX,Y)$ para todos $X, Y \in \mathbb{D}$. El Teorema 3.1.2 clasifica las hipersuperficies reales en las que existe una función diferenciable a tal que $g^0 = ag$, con la hipótesis adicional de que la dimensión cuaterniónica es al menos 3. La definición usual de métricas conformes obliga a que la función de proporcionalidad sea positiva (o que no se anule), pero en nuestra situación esa restricción se puede y debe debilitar porque, en el fondo, la condición $g^0 = ag$ es una generalización de la siguiente caracterización de las hipersuperficies reales regladas: $g(AX, Y) = 0$ para todos $X, Y \in \mathbb{D}$, que aparece en [MPS]. Otro camino consiste en clasificar las hipersuperficies reales que tengan exactamente dos curvaturas principales en cada punto. El resultado es el Teorema 3.1.3, pero con la misma restricción sobre la dimensión que aparece en el teorema anterior. La segunda sección se dedica a estudiar la acción del operador de curvatura como derivación sobre el endomorfismo de Weingarten. La no existencia de hipersuperficies reales de $\mathbb{Q}H^m$ cuya segunda forma fundamental sea paralela nos induce a buscar un camino en el que se consigan condiciones más débiles que admitan teoremas de clasificación.

En el cuarto capítulo se considera el tensor de Ricci de tipo (1,1), como primera parte del estudio intrínseco de las hipersuperficies reales. Al igual que el Capítulo 3, este se divide en dos secciones. En la primera se buscan condiciones sobre sus autovalores, siendo el problema más importante la clasificación de las hipersuperficies reales Einstein en $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. En primer lugar, se estudia el caso en que existe una función diferenciable ρ en M tal que el tensor de Ricci verifique $SX = \rho X$ para todo $X \in \mathbb{D}$, las hipersuperficies reales llamadas $\mathbb{D}$-*Einstein*. Estas se clasifican en el Teorema 4.1.1 cuando la dimensión cuaterniónica es al menos 3. Como consecuencia, se obtiene la clasificación de las hipersuperficies reales *pseudo-Einstein* cuando la dimensión cuaterniónica es al menos 3 en el Corolario 4.1.1. Con estos resultados ya se puede decidir la existencia de hipersuperficies reales Einstein en $\mathbb{Q}H^m$, pero lo ideal sería poder bajar la dimensión cuaterniónica a 2. Para ello se consideran las hipersuperficies reales *casi-Einstein*, que se clasifican en el Teorema 4.1.2, con la ventaja de que la dimensión cuaterniónica es ahora al menos 2. El Corolario 4.1.1 admite una demostración que hace uso del Teorema 2.11, en vez del Teorema 4.1.1, por lo que se mantiene la hipótesis sobre la dimensión. El corolario es la no existencia de hipersuperficies reales Einstein en $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. En la segunda sección se intenta abordar el paralelismo del tensor de Ricci desde el punto de vista de la acción del operador de curvatura como derivación, repitiéndose en cierto modo el esquema seguido en el capítulo 3. Como consecuencia, se obtiene la no existencia de hipersuperficies reales de $\mathbb{Q}H^m$ tanto con el tensor de Ricci paralelo como localmente simétricas cuando la dimensión cuaterniónica es al menos 3.

El quinto capítulo se ocupa de las curvaturas seccionales, y se puede presentar como la segunda parte del estudio intrínseco de las hipersuperficies reales. Las definiciones de la curvatura seccional cuaterniónica y de la curvatura seccional totalmente real aparecen de manera natural en las variedades Kaehlerianas cuaterniónicas y en sus hipersuperficies. Obsérvese que si la dimensión cuaterniónica es 2, no existen planos tangentes a las hipersuperficies que sean totalmente reales. En las variedades Kaehlerianas cuaterniónicas, la constancia de la curvatura seccional cuaterniónica es equivalente a la constancia de la curvatura seccional totalmente real ([PSU]). En este sentido, nos planteamos si esta situación se repite en las hipersuperficies reales de $\mathbb{Q}H^m$. Por un lado, el Teorema 5.1.2 clasifica las hipersuperficies con curvatura seccional cuaterniónica constante si la dimensión cuaterniónica es al menos 3 y, por otro, el Teorema 5.1.3 clasifica las hipersuperficies reales con curvatura seccional totalmente real constante si la dimensión cuaterniónica es al menos 3. Obsérvese que aparecen los mismos ejemplos, por lo que se establece que, efectivamente, la constancia de la curvatura seccional cuaterniónica equivale a la constancia de la curvatura seccional totalmente real.

Evidentemente, quedan muchos problemas por resolver en este estudio, pero consideramos que la extensión de la presente memoria es ya razonable, e incluir más resultados puede convertirla en inacabable.

Agradecimientos.

No puedo olvidar en este momento a una serie de personas que ha habido a mi alrededor en los últimos años y que me han apoyado de muy diversas maneras.

En primer lugar, mi director Juan de Dios Pérez Jiménez, por sus ideas, apoyo, paciencia, indicaciones y total flexibilidad a la hora de trabajar juntos. De hecho, hay más de un teorema que ha nacido gracias a las discrepancias.

En segundo lugar mi familia, que siempre creyó en mí, especialmente María, por quitarme unos cuantos pájaros de la cabeza en momentos de depresión y en los que no tenía las ideas claras. Mi futuro laboral estará siempre ligado a la suerte tan tremenda que tuve de poder aprender inglés primero en Oxford House y después en Lingo.

Los profesores del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, sobre todo a Leonor Ferrer, que me introdujo en el farragoso mundo del LaTeX, perdiendo parte de una mañana cuando ella estaba escribiendo su tesis.

El ambiente que hay alrededor de *Poza's*: Javi, Martín, LA, Fran, Miguel, Antonio, Juanma, el otro Javi, Fátima, Eva, etc, etc, etc, etc...

El ambiente tan estupendo del que disfruté en mi época de estudiante con Jorge, Fran, Sito y el Socio. Ellos vieron nacer los primeros resultados incluidos en esta memoria.

La peña de S.J. de Letrán, que me acogió y me brindó la oportunidad de desarrollar aspectos de mi vida que ahora son fundamentales, especialmente el gurú Antonio.

Y cómo no, mis amigos de siempre de Jaén: José Emilio, Lola, Trini, Antonio *Pica*, por comprender mis larguísimas ausencias.

Escrita entre Palos de la Frontera y Jaén, 1998.

Capítulo 1

Preliminares de Geometría Diferencial.

1.1 Teoría de subvariedades (semi)riemannianas.

En este apartado se exponen resultados elementales y bien conocidos de la teoría general de subvariedades de una variedad semirriemanniana, aceptando el convenio de que una variedad (semi)riemanniana de índice cero es una variedad de Riemann, y si el índice es mayor que cero, es una variedad semirriemanniana de índice el dado. Se recomienda al lector poco habituado a las variedades semirriemannianas el libro de O'Neill [ON2]. Aunque existen grandes diferencias entre un tipo de geometría y otro, las ecuaciones de estructura son formalmente las mismas, por lo que no hay lugar a confusión. Asímismo, se definen los conceptos de submersión semirriemanniana y de fibrado principal. Aunque la definición de submersión riemanniana se encuentra en [ON1], en este artículo no se concreta el caso semirriemanniano, que quedó un poco en el aire hasta que Kwon y Suh lo explicitaron en [KS].

A lo largo de esta memoria, todas las variedades y subvariedades se considerarán de clase infinito, conexas y sin borde, salvo que en un momento dado se diga explícitamente lo contrario.

Sea (P, g) una variedad (semi)riemanniana de dimensión n e índice i, $0 \leq i \leq n-1$. El fibrado tangente se denota por TP y la conexión de Levi-Civita se denota por ∇. Recordemos que dicha conexión viene caracterizada como la única que verifica:

(a) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$,

(b) **Fórmula de Koszul:** $2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y])$

para todos $X, Y, Z \in TP$. El operador de curvatura se define como $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ para cualesquiera $X, Y, Z \in TP$. Se conoce como *tensor de curvatura de* P al producto $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W)$, para todos $X, Y, Z, W \in TP$. El operador de curvatura, o equivalentemente el tensor de curvatura, verifica la siguiente expresión

Primera Identidad de Bianchi:

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \ = \ 0 \tag{1.1}$$

para todos $X, Y, Z \in TP$. A la contracción respecto del segundo y tercer argumentos del operador de curvatura se le conoce como *tensor de Ricci de* P *de tipo (1,1)* y se denota por S. Se dice que la variedad (semi)riemanniana (P, g) es *Einstein* si existe una constante real ρ tal que $SX = \rho X$ para todo $X \in TP$.

Dado un tensor T de tipo (1,1) en P, se define su derivada covariante ∇T como $(\nabla_X T)Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y$ para todos $X, Y \in TP$. Se dice que T es *paralelo* si verifica $\nabla T = 0$. Se define la acción del operador de curvatura sobre T, RT o bien $R(X,Y)T$, como $(R(X,Y)T)Z = (\nabla_X \nabla_Y T)Z - (\nabla_Y \nabla_X T)Z - (\nabla_{[X,Y]} T)Z$, para todos $X, Y, Z \in TP$. Un cálculo directo prueba

$$(R(X,Y)T)Z = R(X,Y)TZ - TR(X,Y)Z \tag{1.2}$$

para todos $X, Y, Z \in TP$.

Se escoge un punto $x \in P$. Se sabe que existe $\delta > 0$ tal que si $exp_x : B(0,\delta) \subset T_xP \longrightarrow P$ es la aplicación exponencial, $exp_x : B(0,\delta) \longrightarrow exp_x(B(0,\delta))$ es un difeomorfismo. Se dice que P es *localmente simétrica* si para cada punto $x \in P$, existe $\delta > 0$ tal que la aplicación $f : exp_x(B(0,\delta)) \longrightarrow exp_x(B(0,\delta))$ dada por $f(q) = exp_x(-exp_x^{-1}(q))$ es una isometría. Si R es el tensor de curvatura, se verifica que P es localmente simétrica si y sólo si R es paralelo.

Una *distribución diferenciable* $\mathcal{T}$ en P k-dimensional ($1 \leq k \leq \dim P$) es una aplicación que a cada punto $x \in P$ asocia un subespacio vectorial $\mathcal{T}(x) \subset T_xP$, de manera que para cada punto $x \in P$, existe un entorno U de x en P, y una familia de campos diferenciables $X_1, ..., X_k$ definidos en U y tangentes a P con la propiedad de que $\{X_1(y), ..., X_k(y)\}$ es una base de $\mathcal{T}(y)$ para todo $y \in U$. Un campo X tangente a P se dice que *pertenece a* $\mathcal{T}$, y se escribe $X \in \mathcal{T}$, si $X(x) \in \mathcal{T}(x)$ para todo $x \in P$. La distribución $\mathcal{T}$ se dice *involutiva* si $[X,Y] \in \mathcal{T}$ para todos $X, Y \in \mathcal{T}$. Asímismo, se dice que $\mathcal{T}$ es *integrable* si para cada punto $x \in P$, existe una subvariedad diferenciable $\tilde{M}$ de P tal que $T_x\tilde{M} = \mathcal{T}(x)$. Dichas subvariedades reciben el nombre de *hojas de la distribución* y verifican $T_x\tilde{M} \subset \mathcal{T}(x)$ para todo $x \in \tilde{M}$, o más brevemente, $T\tilde{M} \subset \mathcal{T}$. El teorema de Fröbenius afirma que una distribución diferenciable $\mathcal{T}$ es integrable si y sólo si $[X,Y] \in \mathcal{T}$ para todos $X, Y \in \mathcal{T}$.

Un *grupo de Lie* G es un grupo algebraico que admite una estructura de variedad diferenciable tal que el producto $G \times G \longrightarrow G$, $(g,h) \mapsto gh$, y la aplicación elemento inverso $G \xrightarrow{-1} G$, $g \mapsto g^{-1}$ son aplicaciones diferenciables. El elemento neutro de G se denota por e. Dados un grupo de Lie G y un subgrupo algebraico suyo G', se dice que G' es un *subgrupo de Lie de* G, si G' es además una subvariedad diferenciable de G. Cuando G' es un subconjunto cerrado de G, se dice que G' es un *subgrupo de Lie cerrado de* G.

Dada P una variedad diferenciable, una *acción (por la derecha) libre* es una acción algebraica (por la derecha) $P \times G \longrightarrow P$ que es una aplicación diferenciable y tal que dados $x \in P$, $g \in G$, si $xg = x$ entonces $g = e$. En tal caso, el cociente $\pi : P \longrightarrow P/G$ admite una estructura diferenciable que convierte a π en una aplicación diferenciable.

Sea M una variedad diferenciable. Un *fibrado principal* sobre M se compone de un grupo de Lie G y una variedad diferenciable P tales que

1. $P \times G \longrightarrow P$, $(x,g) \mapsto xg = R_g(x)$ es una acción libre.
2. $P/G = M$ y la proyección $\pi : P \longrightarrow M$ es diferenciable.
3. *Trivialidad local.* Para cada $x \in M$, existen un entorno U de x en M y una aplicación diferenciable $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ tales que
   (a) La aplicación $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ dada por $\psi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$ para todo $p \in \pi^{-1}(U)$ es un difeomorfismo.
   (b) Para cada $p \in \pi^{-1}(U)$, $g \in G$, se tiene $\varphi(pg) = \varphi(p)g$.

Usualmente, un fibrado se denota por $P(M,G)$ o bien $P(M,G,\pi)$. La variedad P recibe el nombre de *espacio total*, M se suele llamar *espacio base* y G es el *grupo estructural*. A lo largo de esta memoria usualmente sólo haremos mención al espacio total. En el caso en que el grupo G sea un espacio vectorial, el fibrado recibe el nombre de *fibrado vectorial* en vez de fibrado principal.

Dado un punto $x \in M$, claramente $\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad cerrada de P llamada *fibra sobre* x. Si se escoge $p \in P$, existe $x(= \pi(p)) \in M$ tal que $p \in \pi^{-1}(x) = \{pg : g \in G\}$, que se denomina *fibra que pasa por* p. Nótese que toda fibra es difeomorfa a G.

Consideremos dos fibrados principales $P(M,G)$ y $P'(M,G')$ sobre el mismo espacio base M. Si G' es un subgrupo de Lie de G y P' es una subvariedad diferenciable de P, se dice que $P'(M,G')$ es un *subfibrado* de $P(M,G)$. Cuando se hace mención solamente a los espacios totales, se dice que P' es un subfibrado de P.

Sea $\tilde{M}$ una subvariedad (semi)riemanniana de (P,g), es decir, una subvariedad diferenciable tal que la restricción de la métrica a $T\tilde{M}$ no tiene radical en ningún punto. La métrica inducida en $\tilde{M}$ se denota igualmente por g. Sea $\tilde{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de $\tilde{M}$. Se consideran $X, Y \in T\tilde{M}$, N un campo normal a $\tilde{M}$ en P localmente definido. Las fórmulas de Gauss y Weingarten son

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \sigma(X,Y) \tag{1.3}$$

$$\nabla_X N = -\tilde{A}_N X + \nabla^{\perp}_X N \tag{1.4}$$

donde σ es la segunda forma fundamental, $\tilde{A}_N$ es el endomorfismo de Weingarten asociado a N, y $\nabla^{\perp}$ es la conexión normal. Se dice que $\tilde{M}$ es *totalmente geodésica* si $\sigma = 0$. Se dice que $\tilde{M}$ es *totalmente umbilical* si existe un campo de vectores $\tilde{H}$ normal a $\tilde{M}$ tal que $\sigma(X,Y) = g(X,Y)\tilde{H}$. A la contracción de σ se le suele llamar *vector curvatura media.* En caso de que dicho vector sea idénticamente nulo, la subvariedad recibe el nombre de *minimal*. Se denota por R, $\tilde{R}$ al operador o al tensor de curvatura de P y $\tilde{M}$ respectivamente. Las siguientes ecuaciones son bien conocidas.

Ecuación de Gauss:

$$R(X,Y,Z,W) = \tilde{R}(X,Y,Z,W) + g(\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)) - g(\sigma(X,W),\sigma(Y,Z)) \tag{1.5}$$

para todos $X, Y, Z, W \in T\tilde{M}$. Si N_1, N_2 son dos campos de vectores normales a $\tilde{M}$ en P definidos localmente,

Ecuación de Ricci:

$$R(X,Y,N_1,N_2) = R^{\perp}(X,Y,N_1,N_2) - g([\tilde{A}_{N_1}, \tilde{A}_{N_2}]X, Y) \tag{1.6}$$

para todos $X, Y \in T\tilde{M}$, donde $R^{\perp}$ denota el tensor de curvatura asociado a la conexión normal. Si $(*)^{\perp}$ denota la componente de $(*)$ normal a $\tilde{M}$, se tiene

Ecuación de Codazzi:

$$\{R(X,Y)Z\}^{\perp} = (\nabla_X \sigma)(Y,Z) - (\nabla_Y \sigma)(X,Z) \tag{1.7}$$

para todos $X, Y, Z \in T\tilde{M}$, donde $(\nabla_X \sigma)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X \sigma(Y,Z) - \sigma(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - \sigma(Y, \tilde{\nabla}_X Z)$.

Se denota por $B^{\perp}\tilde{M}$ el fibrado principal de los vectores normales a $\tilde{M}$ y unitarios. Fijemos $r > 0$. Dados $p \in \tilde{M}$, $v \in B^{\perp}_p\tilde{M}$, se define $\Phi(v)$ como el punto que se alcanza al recorrer la geodésica de punto inicial p y vector inicial v una distancia r. La imagen de $\Phi : B^{\perp}\tilde{M} \longrightarrow M$ se denomina *tubo de radio $r > 0$ sobre $\tilde{M}$*. En ciertas situaciones, como por ejemplo si $r > 0$ es suficientemente pequeño o las geodésicas de la variedad ambiente no admiten puntos conjugados, dicha imagen es una hipersuperficie real. Bajo ciertas condiciones es posible demostrar que para ciertos radios, dicho tubo es una subvariedad de P de codimensión mayor que 1, (Ver [CR], [MP]) mediante la teoría de puntos focales.

Sea P una variedad conexa semirriemanniana $(m+n)$-dimensional de índice $r+s$ con $0 \leq r \leq m$, $0 \leq s \leq n$, que usualmente se denota por P^{m+n}_{r+s}. Sea B^n_s una variedad conexa semirriemanniana n-dimensional y de índice s, B^n_s. Una *submersión semirriemanniana* $\pi : P^{m+n}_{r+s} \longrightarrow B^n_s$ es una aplicación diferenciable tal que:

(a) π es una submersión diferenciable, es decir, tanto π como su diferencial $d\pi$ en cada punto son sobreyectivas.

(b) Para cada $b \in B^n_s$, el conjunto $\pi^{-1}(b)$ es una subvariedad semirriemanniana de P^{m+n}_{r+s}, llamada *fibra*.

(c) La diferencial $d\pi$ de π respeta el producto escalar de vectores normales a las fibras.

Si $\pi : P^{m+n}_{r+s} \longrightarrow B^n_s$ es una submersión semirriemanniana, un vector tangente (respectivamente, normal) a una fibra se denomina *vertical* (respectivamente *horizontal*). Es importante resaltar que para cada punto $x \in P^{n+m}_{r+s}$ existe una fibra que contiene al punto. Así, dado un campo de vectores $X \in TP^{n+m}_{r+s}$, se puede escribir la descomposición ortogonal $X = X' + X''$, donde X' (respectivamente X'') es vertical (respectivamente horizontal) en cada punto. Con esto, se definen dos tensores de tipo (1,2) en P^{n+m}_{r+s} por

$$T(X,Y) = (\nabla_{X'}Y'')' + (\nabla_{X'}Y')'', \quad A(X,Y) = (\nabla_{X''}Y'')' + (\nabla_{X''}Y')''$$

para todos $X, Y \in TP^{n+m}_{r+s}$, llamados *tensores de integrabilidad* de la submersión $\pi : P^{n+m}_{r+s} \longrightarrow B^n_s$. Estos dos tensores resumen las propiedades de π e incluso en algunos textos el primero de ellos recibe el nombre de tensor fundamental.

1.2 Variedades Kaehlerianas cuaterniónicas.

La presente memoria se puede encuadrar dentro de la geometría cuaterniónica, por lo que es conveniente exponer la definición de variedad Kaehleriana cuaterniónica y ciertos teoremas necesarios con posterioridad.

Sea (P, g) una variedad de Riemann. Se dice que P es una variedad Kaehleriana cuaterniónica si existe un fibrado vectorial tridimensional $\hat{\mathcal{V}}$ de tensores de tipo (1,1) de manera que para cada punto de P existe un entorno (coordenado) U y una base $\{J_1, J_2, J_3\}$ del fibrado $\hat{\mathcal{V}}$ definida en U que verifique

$$(1.8) \qquad \begin{array}{ll} (a) & J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -Id, \;\; J_1J_2 = -J_2J_1 = J_3 \\ (b) & g(J_kX,Y) + g(X,J_kY) = 0 \;\; \text{k=1,2,3} \\ (c) & \nabla_X J_i = -q_j(X)J_k + q_k(X)J_j \\ (d) & (dq_i + q_j \wedge q_k)(X,Y) = 4g(X,J_iY) \end{array}$$

para todos $X, Y \in TP$, donde (i,j,k) es una permutación cíclica de (1,2,3) y q_1, q_2, q_3 son 1-formas definidas en U. La condición (c) de la definición anterior es equivalente a que para cada sección cruzada ϕ de $\hat{\mathcal{V}}$, $\nabla_X \phi$ es otra sección cruzada de $\hat{\mathcal{V}}$. Una condición necesaria es que la dimensión de P sea un múltiplo de 4, es decir, $\dim P = 4m$. Al natural m se le llama *dimensión cuaterniónica de P*. A lo largo de esta memoria, se trabajará con variedades cuya dimensión cuaterniónica sea mayor o igual que 2.

Sea (P, g) una variedad de Riemann. Una *estructura 3-Sasakiana* en P es una terna de campos de Killing χ_1, χ_2, χ_3 tangentes a P tales que $[\chi_1, \chi_2] = 2\chi_3$, $[\chi_2, \chi_3] = 2\chi_1$, $[\chi_3, \chi_1] = 2\chi_2$. Ishihara demostró que la distribución $\mathbf{D} = Span\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ es integrable y sus hojas son totalmente geodésicas. Además, el cociente $\pi : P \longrightarrow P/\mathbf{D}$, llamado *espacio base*, tiene estructura de variedad diferenciable. Dado un tensor $\bar{T}$ en P, existe un tensor T en $P/\mathbf{D}$ tal que $\bar{T} = \pi^* T$ si y sólo si $L_{\chi_i}\bar{T} = 0$ para i=1,2,3, donde L denota la derivada de Lie. En tal caso, se dice que T *es proyectable*.

Proposición 1.2.1 **[I1]** *El espacio base de una variedad de Riemann que admite una 3-estructura Sasakiana es una variedad Kaehleriana cuaterniónica.*

En las variedades Kaehlerianas cuaterniónicas aparecen de manera natural los siguientes tipos de planos tangentes. Dado un punto $x \in P$, y un vector $X \in T_xP$ no cero, se define $Q(X) = Span\{X, J_1X, J_2X, J_3X\}$. Un 4k-plano $\pi \subset T_xP$, $(1 \leq k \leq m)$, se dice *cuaterniónico* si $J_k\pi = \pi$ para $k = 1, 2, 3$. Un 2k-plano $\pi \subset T_xP$ $(1 \leq k \leq 2m)$ se dice *semicuaterniónico* si existe una base $\{\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3\}$ de $\hat{\mathcal{V}}(x)$ tal que $\hat{J}_1\pi = \pi$, $\hat{J}_2\pi \perp \pi$, $\hat{J}_3\pi \perp \pi$. En el caso de que π sea un 2-plano, dicha definición es equivalente a que π admita una base $\{X, Y\}$ tal que $Q(X) = Q(Y)$. Un k-plano $\pi \subset T_xP$, $(1 \leq k \leq m)$, se dice *totalmente real* si $Q(\pi) \perp \pi$. Una distribución $\mathcal{T}$ se dirá *cuaterniónica* (respectivamente *puramente compleja, totalmente real*) si para cada punto $x \in P$, $\mathcal{T}(x)$ es un subespacio cuaterniónico (respectivamente, semicuaterniónico, totalmente real). Dada $\tilde{M}$ una subvariedad de P, se dirá que $\tilde{M}$ es *cuaterniónica* (respectivamente, *puramente compleja, totalmente real*) si para cada punto $x \in \tilde{M}$, $T_x\tilde{M}$ es un subespacio vectorial cuaterniónico (respectivamente, semicuaterniónico, totalmente real) de T_xP. El siguiente resultado muestra que la geometría cuaterniónica no es una generalización de la geometría compleja.

Proposición 1.2.2 **[G]** *Sea $\tilde{M}$ una subvariedad cuaterniónica de una variedad Kaehleriana cuaterniónica P. Entonces $\tilde{M}$ es totalmente geodésica.*

La curvatura seccional de 2-planos semicuaterniónicos (respectivamente, totalmente reales) recibe el nombre de *curvatura seccional cuaterniónica* (respectivamente, *totalmente real*) de la variedad. Una variedad Kaehleriana cuaterniónica se dice un *modelo de espacio cuaterniónico* si es simplemente conexa, completa y tiene curvatura seccional cuaterniónica constante c. Si $c > 0$, dicho modelo de espacio cuaterniónico recibe el nombre de *espacio proyectivo cuaterniónico* y si $c < 0$, recibe el nombre de *espacio hiperbólico cuaterniónico*. El siguiente apartado se dedica a la construcción efectiva de este último modelo de espacio cuaterniónico. Para concretar la relación entre ambos tipos de curvatura seccional conviene resaltar la siguiente proposición:

Proposición 1.2.3 [PSU] *Sea P una variedad Kaehleriana cuaterniónica de dimensión cuaterniónica ≥ 2. Entonces P tiene curvatura seccional cuaterniónica constante si y sólo si P tiene curvatura seccional totalmente real constante.*

1.3 El espacio hiperbólico cuaterniónico.

Se pretende realizar una construcción del espacio hiperbólico cuaterniónico. Las notaciones que se introduzcan en este apartado no se cambiarán en el resto de la memoria.

Sea $\mathbb{Q}$ el álgebra de los cuaternios con unidades cuaterniónicas $\{j_1, j_2, j_3\}$. En $\mathbb{Q}^{m+1}$, $m \geq 2$, se define la forma hermítica $b(z, w) = -\bar{z}_0 w_0 + \sum_{k=1}^{m} \bar{z}_k w_k$, donde $z = (z_0, ..., z_m)$, $w = (w_0, ..., w_m) \in \mathbb{Q}^{m+1}$, y $\bar{z}_k$ es el conjugado cuaterniónico de z_k. El producto escalar simpléctico $\bar{g} = \mathrm{Re}(b)$ es una métrica indefinida de índice 4 sin radical en $\mathbb{Q}^{m+1}$. Las unidades cuaterniónicas definen de manera natural en $\mathbb{Q}^{m+1}$ una estructura de variedad Kaehleriana cuaterniónica. Concretamente, si $X = (X_0, \ldots, X_m) \in T\mathbb{Q}^{m+1}$ se define $j_k X = (j_k X_0, \ldots, j_k X_m)$ para $k = 1, 2, 3$, donde "$j_k X_i$" es el producto usual de cuaternios. Esta estructura se conoce como estructura cuaterniónica usual de $\mathbb{Q}^{m+1}$. Consideremos la hipersuperficie real de $\mathbb{Q}^{m+1}$

$$H_3^{4m+3} = \{z \in \mathbb{Q}^{m+1} : b(z, z) = -1\} \tag{1.9}$$

El espacio tangente a H_3^{4m+3} en un punto z es

$$T_z H_3^{4m+3} = \{a \in \mathbb{Q}^{m+1} : \bar{g}(a, z) = 0\} \tag{1.10}$$

De aquí, el vector de posición $\chi : H_3^{4m+3} \longrightarrow \mathbb{Q}^{m+1}$ es un campo normal globalmente definido cuya longitud es $|\chi|^2 = -1$. Por tanto, H_3^{4m+3} es una subvariedad semirriemanniana de $\mathbb{Q}^{m+1}$ de índice 3. Sean D, $\bar{D}$ la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{Q}^{m+1}$ y H_3^{4m+3} respectivamente. La fórmula de Gauss de χ queda

$$D_X Y = \bar{D}_X Y + \bar{g}(X, Y)\chi \tag{1.11}$$

para todos $X, Y \in H_3^{4m+3}$. Sea $\tilde{R}$ el operador o el tensor de curvatura de H_3^{4m+3}. Como el tensor de curvatura de $\mathbb{Q}^{m+1}$ es idénticamente cero, por (1.5), (1.11) y $\bar{g}(\chi, \chi) = -1$, se tiene $\bar{R}(X, Y)Z = -\{\bar{g}(Y, Z)X - \bar{g}(X, Z)Y\}$, para todos $X, Y, Z \in TH_3^{4m+3}$, de donde

H_3^{4m+3} es un espacio de curvatura constante -1. Consideremos $\mathbb{S}^3 = \{\lambda \in \mathbb{Q} : \bar{\lambda}\lambda = 1\}$ y la acción $\lambda \in \mathbb{S}^3$, $z = (z_0, ..., z_m) \in H_3^{4m+3}$ dada por $\lambda z = (\lambda z_0, ..., \lambda z_m) \in H_3^{4m+3}$. Si $z = (z_0, ..., z_m) \in H_3^{4m+3}$, necesariamente alguno de los $z_i \neq 0$. Por tanto, si suponemos $(\lambda z_0, ..., \lambda z_m) = (z_0, ..., z_m)$, se tiene $\lambda z_i = z_i \neq 0$, de donde $\lambda = 1$. Así, esta acción es libre, y el cociente tiene estructura de variedad diferenciable, que denotaremos por $\mathbb{Q}H^m$. Si se denota por $\mathbb{B} = \{(z_1, ..., z_m) \in \mathbb{Q}^m : \sum_{i=1}^m \bar{z}_i z_i < 1\}$ la bola unidad de $\mathbb{Q}^{m+1}$, la aplicación $H_3^{4m+3} \longrightarrow \mathbb{B}$ dada por $(z_0, ..., z_m) \longmapsto (z_0^{-1} z_1, ..., z_0^{-1} z_m)$ es una identificación topológica que permite construir un homeomorfismo de $\mathbb{Q}H^m$ a $\mathbb{B}$. Por tanto, $\mathbb{Q}H^m$ es conexo y simplemente conexo. Dado un punto $z \in H_3^{4m+3}$, el subespacio horizontal de esta fibración es

$$T'_z = \{X \in \mathbb{Q}^{m+1} : \bar{g}(X, z) = \bar{g}(X, j_1 z) = \bar{g}(X, j_2 z) = \bar{g}(X, j_3 z) = 0\} \tag{1.12}$$

Dados $X, Y \in T\mathbb{Q}H^m$, denotaremos sus levantamientos horizontales por X', Y' respectivamente, y definiremos una métrica en $\mathbb{Q}H^m$ dada por $g(X, Y) = \bar{g}(X', Y')$. Esta métrica convierte a la fibración π en una submersión semirriemanniana. Dados $z \in H_3^{4m+3}$, k=1,2,3, denotemos $j_k z = (j_k \chi)(z)$. Como $\bar{g}(j_k \chi, j_k \chi) = -1$, las fibras de la submersión son temporales. De hecho, el conjunto $\{j_1\chi, j_2\chi, j_3\chi\}$ es una estructura 3-Sasakiana en H_3^{4m+3}. En efecto, dados $X, Y \in TH_3^{4m+3}$, k=1,2,3, por (1.11),

$$\begin{aligned}
&(L_{j_k\chi} g)(X, Y) = (j_k\chi)(g(X, Y)) - g([j_k\chi, X], Y) - g(X, [j_k\chi, Y]) = g(\bar{D}_{j_k\chi} X, Y) \\
&+ g(X, \bar{D}_{j_k\chi} Y) - g(\bar{D}_{j_k\chi} X, Y) + g(\bar{D}_X j_k\chi, Y) - g(X, \bar{D}_{j_k\chi} Y) + g(X, \bar{D}_Y j_k\chi) \\
&= g(D_X j_k\chi, Y) + g(X, D_Y j_k\chi) = g(j_k X, Y) + g(X, j_k Y) = 0
\end{aligned}$$

Trivialmente se verifica la condición de los corchetes. Aunque la Proposición 1.2.1 se demostró para el caso riemanniano, en la demostración de los tensores proyectables sólo hace falta que la métrica usada para el cálculo de la derivada de Lie correspondiente no tenga radical. Por tanto, dicha proposición es aplicable en nuestro caso y la proyección $\pi : H_3^{4m+3} \longrightarrow \mathbb{Q}H^m$ induce una estructura de variedad Kaehleriana cuaterniónica en $\mathbb{Q}H^m$. Sea $\hat{\mathcal{V}}$ el fibrado tridimensional de estructuras casihermíticas en $\mathbb{Q}H^m$. Se puede decir entonces que una base local de estructuras casihermíticas en $\mathbb{Q}H^m$ es $J_k X = (d\pi)(j_k X')$, para k=1,2,3, para todo $X \in T\mathbb{Q}H^m$. Sea $\bar{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de $\mathbb{Q}H^m$. Dados $X, Y, Z \in T\mathbb{Q}H^m$, por la definición de la métrica g y la fórmula de Koszul, $\bar{g}(\bar{D}_{X'} Y', Z') = g(\bar{\nabla}_X Y, Z)$. Además, de (1.11) y las consideraciones anteriores sobre las estructuras casihermíticas de $\mathbb{Q}H^m$, se obtiene fácilmente $\bar{g}(\bar{D}_{X'} Y', j_k\chi) = g(J_k X, Y)$, k=1,2,3. Como los campos $j_k\chi$ son temporales, uniendo ambas expresiones,

$$\bar{D}_{X'} Y' = (\bar{\nabla}_X Y)' + \sum_{k=1}^{3} g(J_k X, Y) j_k\chi \tag{1.13}$$

para todos $X, Y \in T\mathbb{Q}H^m$. Sea $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{Q}H^m$ una geodésica de $\mathbb{Q}H^m$. Consideremos $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow H_3^{4m+3}$ un levantamiento horizontal de γ. De, (1.8) y (1.13),

$\bar{D}_{\dot{\beta}}\dot{\beta} = (\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})' = 0$, por lo que β es geodésica. Dados $z \in H_3^{4m+3}, v \in T_z H_3^{4m+3}$ unitario horizontal, la geodésica que pasa por z con vector inicial v es $\beta(s) = \cosh(s)z + \sinh(s)v$. Así, H_3^{4m+3} es una variedad espacialmente completa, y por los cálculos anteriores, $\mathbb{Q}H^m$ también es completo. Por otro lado, del hecho de que H_3^{4m+3} tenga curvatura seccional constante -1, dados $X, Y, Z \in T\mathbb{Q}H^m$ se tiene $-\bar{g}(Y', Z')X' + \bar{g}(X', Z')Y' = \bar{R}(X', Y')Z' = \bar{D}_{X'}\bar{D}_{Y'}Z' - \bar{D}_{Y'}\bar{D}_{X'}Z' - \bar{D}_{[X,Y]'}Z'$. Si se introduce (1.13) en esta última expresión, por las habituales propiedades de la conexión de Levi-Civita, y tomando componentes horizontales, se obtiene

$$\begin{aligned} (1.14) \quad \bar{R}(X,Y)Z &= -g(Y,Z)X + g(X,Z)Y \\ &+ \sum_{k=1}^{3}\{-g(J_kY,Z)J_kX + g(J_kX,Z)J_kY + 2g(J_kX,Y)J_kZ\} \end{aligned}$$

para todos $X, Y, Z \in T\mathbb{Q}H^m$. De aquí se obtiene fácilmente que $\mathbb{Q}H^m$ tiene curvatura seccional cuaterniónica constante -4. Por lo tanto, $\mathbb{Q}H^m$ es el espacio hiperbólico cuaterniónico.

Capítulo 2

Hipersuperficies reales del espacio hiperbólico cuaterniónico.

2.1 Elementos geométricos elementales.

En esta sección se exponen las herramientas esenciales de las hipersuperficies reales del espacio hiperbólico cuaterniónico. No se van a deducir las ecuaciones que se escriben porque sus demostraciones se puede encontrar en [JP1]. Dada una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, se le dota con una 3-estructura casi de contacto, es decir, de una familia de tres tensores de tipo (1,1) y de tres campos de vectores (localmente definidos) que juegan un papel crucial en la comprensión de la geometría de la hipersuperficie. Se definen también el endomorfismo de Weingarten y el tensor de Ricci, que no son más que otros tensores de tipo (1,1) que se emplearán en nuestro estudio. Asímismo, se incluyen las ecuaciones de Gauss y Codazzi, también llamadas ecuaciones de estructura, que completan el ambiente general. Se concluye la sección con la definición de hipersuperficies reales regladas y una caracterización muy sencilla pero muy útil. Las notaciones que se fijen en esta sección no se variarán a lo largo de esta memoria, salvo que se diga expresamente lo contrario.

Sea M una hipersuperficie real conexa y sin borde de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Se considera N un campo unitario normal a M localmente definido. Se denota por ∇ la conexión inducida de $\mathbb{Q}H^m$ en M. Sea A el endomorfismo de Weingarten asociado a N. Las fórmulas de Gauss y Weingarten quedan

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)N \tag{2.1}$$
$$\bar{\nabla}_X N = -AX \tag{2.2}$$

para todos X, Y tangentes a M. Un campo de vectores X tangente a M se dirá *principal* si existe una función diferenciable $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $AX = \lambda X$. En tal caso, la función λ recibe el nombre de *curvatura principal* de M. Dado un punto $p \in M$, se denotará por $T_\lambda(p) = \{X \in T_pM : A_pX = \lambda(p)X\}$, que llamaremos *distribuciones principales.* En general, la dimensión de una distribución principal no es constante, sino que depende del punto escogido. Sin embargo, siempre se puede escoger un abierto de M denso en el que dicha dimensión sí sea localmente constante. Se dice que M es isoparamétrica si todas sus curvaturas principales son localmente constantes.

Se define $U_k = -J_kN$, para k=1,2,3. Dado un campo de vectores X tangente a M, se considera la descomposición $J_kX = \phi_kX + f_k(X)N$, k=1,2,3, donde ϕ_kX es la componente tangencial de J_kX y $f_k(X) = g(X, U_k)$, k=1,2,3. Los tensores de tipo (1,1) ϕ_k, k=1,2,3, definidos en M verifican las siguientes propiedades. De (1.8) se obtiene

$$\phi_k^2X = -X + f_k(X)U_k, \quad f_k(\phi_kX) = 0, \quad \phi_kU_k = 0 \tag{2.3}$$

para todo X tangente a M, k=1,2,3.

$$\begin{aligned} \phi_1X &= \phi_2\phi_3X - f_3(X)U_2 = -\phi_3\phi_2X + f_2(X)U_3 \\ \phi_2X &= \phi_3\phi_1X - f_1(X)U_3 = -\phi_1\phi_3X + f_3(X)U_1 \\ \phi_3X &= \phi_1\phi_2X - f_2(X)U_1 = -\phi_2\phi_1X + f_1(X)U_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

para todo X tangente a M.

$$\phi_1U_2 = -\phi_2U_1 = U_3, \quad \phi_2U_3 = -\phi_3U_2 = U_1, \quad -\phi_1U_3 = \phi_3U_1 = U_2 \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} f_1(X) &= f_2(\phi_3X) = -f_3(\phi_2X) \\ f_2(X) &= f_3(\phi_1X) = -f_1(\phi_3X) \\ f_3(X) &= f_1(\phi_2X) = -f_2(\phi_1X) \end{aligned} \tag{2.6}$$

para todo X tangente a M.

$$g(\phi_iX, Y) + g(X, \phi_iY) = 0, \quad g(\phi_iX, \phi_iY) = g(X, Y) - f_i(X)f_i(Y) \tag{2.7}$$

para todos X, Y tangentes a M, i=1,2,3.

$$
(2.8) \qquad \begin{array}{rcl}
(\nabla_X \phi_1)Y &=& q_3(X)\phi_2 Y - q_2(X)\phi_3 Y + f_1(Y)AX - g(AX,Y)U_1 \\
(\nabla_X \phi_2)Y &=& -q_3(X)\phi_1 Y + q_1(X)\phi_3 Y + f_2(Y)AX - g(AX,Y)U_2 \\
(\nabla_X \phi_3)Y &=& q_2(X)\phi_1 Y - q_1(X)\phi_2 Y + f_2(Y)AX - g(AX,Y)U_3
\end{array}
$$

Aunque estas propiedades se deducen de las propiedades de las estructuras casihermíticas del fibrado $\hat{\mathcal{V}}$, Pak definió en [P] una 3-estructura casi de contacto sobre una variedad de Riemann como una familia de tres tensores de tipo (1,1) que verifican las propiedades (2.3), (2.4), (2.6) y (2.7). Evidentemente, los ejemplos sencillos vienen dados en las hipersuperficies reales de las variedades Kaehlerianas cuaterniónicas. De la expresión del tensor de curvatura de $\mathbb{Q}H^m$ y de la definición de la 3-estructura casi de contacto se puede calcular la ecuación de Codazzi:

$$
(2.9) \qquad (\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = \sum_{k=1}^{3} \{-f_k(X)\phi_k Y + f_k(Y)\phi_k X + 2g(\phi_k X, Y)U_k\}
$$

para todos $X, Y \in TM$. De (1.8), (2.2) y (2.8) se obtiene

$$
(2.10) \qquad \begin{array}{rcl}
\nabla_X U_1 &=& q_3(X)U_2 - q_2(X)U_3 + \phi_1 AX \\
\nabla_X U_2 &=& -q_3(X)U_1 + q_1(X)U_3 + \phi_2 AX \\
\nabla_X U_3 &=& q_2(X)U_1 - q_1(X)U_2 + \phi_3 AX
\end{array}
$$

para todos X, Y tangentes a M. La expresión del tensor de curvatura de M es

$$
\begin{array}{rcl}
R(X,Y)Z &=& -g(Y,Z)X + g(X,Z)Y + \sum_{k=1}^{3}\{-g(\phi_k Y, Z)\phi_k X \\
(2.11) \qquad &+& g(\phi_k X, Z)\phi_k Y + 2g(\phi_k X, Y)\phi_k Z\} + g(AY,Z)AX - g(AX,Z)AY
\end{array}
$$

para todos $X, Y, Z \in TM$. Denotemos por $h = traza(A)$. Si se contrae (2.11) en los argumentos segundo y tercero se obtiene el tensor de Ricci de tipo (1,1)

$$
(2.12) \qquad SX = -(4m+7)X + 3\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k + (hA - A^2)X
$$

para todo $X \in TM$. El último sumando se suele reescribir $HX = (hA - A^2)X$ para todo $X \in TM$. H así definido es un tensor de tipo (1,1) autoadjunto que conmuta con el endomorfismo de Weingarten. Esto implica que existe una base local de TM que diagonaliza ambos tensores a la vez. En M se denota por $\mathbb{D}$ la distribución cuaterniónica maximal. Si $\mathbb{D}^{\perp}$ denota su complemento ortogonal en TM, nótese que localmente $\mathbb{D}^{\perp} = Span\{U_1, U_2, U_3\}$.

Definición 2.1.1 *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Se dice que M es reglada si la distribución $\mathbb{D}$ es integrable.*

Debido al Teorema 1.2.2, en caso de que $\mathbb{D}$ sea integrable, las hojas son totalmente geodésicas en $\mathbb{Q}H^m$, es decir, las hojas son localmente isométricas a $\mathbb{Q}H^{m-1}$. En [MA] se demuestra la siguiente caracterización de las hipersuperficies reales regladas.

Proposición 2.1.1 [**MA**] *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Entonces M es reglada si y sólo si $g(AX, Y) = 0$ para todos $X, Y \in \mathbb{D}$.*

2.2 Ejemplos.

En esta sección se describen los ejemplos que aparecen en todos los teoremas de la memoria. En primer lugar aparece una familia de hipersuperficies reales regladas minimales, que no se conocía anteriormente, a continuación se detallan los tubos sobre $\mathbb{Q}H^k$, $0 \leq k \leq m-1$, totalmente geodésicos y sobre $\mathbb{C}H^m$ totalmente geodésico y se termina la sección con una descripción de la horosfera.

Ejemplo 2.2.1 *Una familia de hipersuperficies reales regladas.*

Consideremos la métrica en $\mathbb{Q}$ dada por $g_0(a, b) = \Re(\bar{a}b)$, donde $a, b \in \mathbb{Q}$. Ahora se puede reescribir la métrica $\bar{g}$ de la forma $\bar{g}(z, w) = -g_0(z_0, w_0) + \sum_{k=1}^{m} g_0(z_k, w_k)$, donde $z = (z_0, \ldots, z_m)$, $w = (w_0, \ldots, w_m) \in \mathbb{Q}^{m+1}$. Si escogemos $\mu \in \mathbb{Q}$, es fácil comprobar que $\mu^2 = -1$ si y sólo si $\mu \in \mathbb{S}^3$ y además $\Re\mu = 0$. Dado $\mu \in \mathbb{S}^3$ tal que $\Re\mu = 0$, definamos la hipersuperficie de H_3^{4m+3}

$$\bar{M} = \Big\{ z = (r\cosh(t)q_0, r\,\mathrm{senh}(t)q_1, \sqrt{r^2-1}q_2, \ldots, \sqrt{r^2-1}q_m) \in H_3^{4m+3} :$$
$$t \in \mathbb{R}, r > 1, |q_0| = |q_1| = 1, \sum_{k=2}^{m} |q_k|^2 = 1, g_0(\cosh(t)q_0, \sinh(t)q_1\mu) = 0 \Big\}$$

Claramente, $\bar{M}$ es invariante bajo la acción de $\mathbb{S}^3$ y por lo tanto $M = \pi(\bar{M})$ es una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$. Si $z = (z_0, \ldots, z_m) \in \bar{M}$, el espacio tangente a $\bar{M}$ en z es

$$T_z\bar{M} = \{X = (X_0, \ldots, X_m) \in \mathbb{Q}^{m+1} : \bar{g}(X, z) = 0, \tag{2.13}$$

$$g_0(X_0, z_1\mu) + g_0(z_0, X_1\mu) = 0\}$$

Consideremos los siguientes campos de vectores tangentes a $\bar{M}$

$$\begin{array}{lcll}
\bar{E}_k(z) & = & (\cosh(t)j_kq_0, \sinh(t)j_kq_1, 0, \ldots, 0) & k = 1,2,3 \\
\bar{E}_{k+3}(z) & = & (\mathrm{senh}(t)j_kq_1\mu, \cosh(t)j_kq_0\mu, 0, \ldots, 0) & k = 1,2,3 \\
\bar{E}_7(z) & = & (\cosh(t)q_0, \mathrm{senh}(t)q_1, rq_2/\sqrt{r^2-1}, \ldots, rq_m/\sqrt{r^2-1}) & \\
\bar{E}_{k+7}(z) & = & (0, 0, j_k\sqrt{r^2-1}q_2, \ldots, j_k\sqrt{r^2-1}q_m) & k = 1,2,3
\end{array}$$

para todo $z \in \bar{M}$. Un cálculo engorroso pero directo demuestra que el conjunto $\{\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_{10}\}$ es un sistema ortogonal. A veces es útil recordar las siguientes propiedades: $g_0(\lambda a, b) = -g_0(a, \lambda b)$, $g_0(a\lambda, b) = -g_0(a, b\lambda)$, para todos $a, b \in \mathbb{Q}$, $\lambda \in \mathbb{S}^3$. Además, el subespacio vectorial $\bar{W}_z = \{X = (0, 0, X_2, \ldots, X_m) \in \mathbb{Q}^{m+1} : \sum_{k=2}^m \bar{z}_k X_k = 0\}$ verifica

$$T_z\bar{M} = \bar{W}_z \oplus Span\{\bar{E}_1(z), \ldots, \bar{E}_{10}(z)\} \tag{2.14}$$

para cualquier $z \in T_z\bar{M}$. En efecto, trivialmente $\bar{W}_z \subset T_z\bar{M}$ y además $\bar{W}_z \cap Span\{\bar{E}_1(z), \ldots, \bar{E}_{10}(z)\} = \{0\}$. En consecuencia, $\bar{W}_z \oplus Span\{\bar{E}_1(z), \ldots, \bar{E}_{10}(z)\} \subseteq T_z\bar{M}$. Además, $\dim \bar{W}_z + 10 = 4(m-2) + 10 = 4m+2 = \dim T_z\bar{M}$, por lo que ambos espacios vectoriales son iguales. Un campo unitario globalmente definido $\bar{N}$ normal a $\bar{M}$ en H_3^{4m+3} es

$$\bar{N}_z = (\mathrm{senh}(t)q_1\mu, \cosh(t)q_0\mu, 0, \ldots, 0) = \frac{1}{r}(z_1\mu, z_0\mu, 0, \ldots, 0) \tag{2.15}$$

$z \in \bar{M}$, que ha sido calculado mediante (2.13). Sea $\bar{A}$ el endomorfismo de Weingarten asociado a $\bar{N}$. De (1.11) y (2.2), se tiene $-\bar{A}\bar{X} = D_{\bar{X}}\bar{N}$ para todo $\bar{X} \in T\bar{M}$. Un cálculo directo que usa esta última fórmula y (2.15) da

$$\begin{gathered}
\bar{A}\bar{E}_k = -(\frac{1}{r})\bar{E}_{k+3}, \quad \bar{A}\bar{E}_{k+3} = (\frac{1}{r})\bar{E}_k, \quad \text{k=1,2,3} \\
\bar{A}\bar{X} = 0 \quad \text{if} \quad \bar{X} \in \bar{W}_z \oplus Span\{\bar{E}_7, \ldots, \bar{E}_{10}\}(z), \quad z \in \bar{M}
\end{gathered} \tag{2.16}$$

Claramente, $N = \pi_*\bar{N}$ es un campo unitario normal definido globalmente en M. Es fácil ver $j_k\bar{N} = \bar{E}_{k+3}$ para todos $k = 1, 2, 3$. Además, de (2.16), dado $\bar{X} \in T\bar{M}$, $\bar{A}\bar{X} \in \mathrm{Span}\{\bar{E}_k, \bar{E}_{k+3} : k = 1, 2, 3\}$. Por otro lado, de (1.13) se tiene $\bar{A}X' = (AX)' - \sum_{k=1}^3 f_k(X)j_k\chi$ para todo $X \in TM$,

$$\begin{array}{rl}
g(AX, Y) = \bar{g}(\bar{A}X', Y'), & \text{para todos } X, Y \text{ tangentes a } M \\
(AX)' = \bar{A}X', & \text{para todo } X \in \mathbb{D}
\end{array} \tag{2.17}$$

De (2.16) y (2.17), es claro que M es minimal. Dados $X, Y \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} g(AX,Y) = \bar{g}(\bar{A}X',Y') &= \textstyle\sum_{k=1}^{3}\{\bar{g}(\bar{A}X',\bar{E}_{k+3})\bar{g}(\bar{E}_{k+3},Y') + \bar{g}(\bar{A}X',\bar{E}_k)\bar{g}(\bar{E}_k,Y') \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{3}\bar{g}(X',-(1/r)\bar{E}_{k+3})\bar{g}(\bar{E}_k,Y') = 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto, M es reglada. □

Ejemplo 2.2.2 *Tubos sobre $\mathbb{Q}H^k$ totalmente geodésicos.*

Dados $r > 0$, $0 \leq k \leq m-1$ se define la hipersuperficie de H_3^{4m+3}

$$\bar{M}_k(r) = \left\{ q = (q_0, \dots, q_m) \in H_3^{4m+3} : -\bar{q}_0 q_0 + \sum_{i=1}^{k} \bar{q}_i q_i = -\cosh^2(r) \right\}$$

En el caso $k = 0$, el sumatorio no se considera. Veamos que $\bar{M}$ es un tubo de radio $r > 0$ sobre un H_3^{4k+3} totalmente geodésico. En efecto, se considera $H_3^{4k+3} = \{q = (q_0, \dots, q_m) \in H_3^{4m+3} : q_{k+1} = \dots = q_m = 0\}$. Como H_3^{4m+3} es un espacio pseudohiperbólico de $\mathbb{Q}^{m+1}$, sus subvariedades totalmente geodésicas se obtienen mediante intersecciones con hiperplanos de $\mathbb{Q}^{m+1}$. Claramente, $H_3^{4k+3} = H_3^{4m+3} \cap \{(q_0, \dots, q_m) \in \mathbb{Q}^{m+1} : q_{k+1} = \dots = q_m = 0\}$. Dado $q \in H_3^{4k+3}$, el espacio normal en q a H_3^{4m+3} es $T_q^{\perp} H_3^{4k+3} = \{(X_0, \dots, X_m) \in \mathbb{Q}^{m+1} : X_0 = \dots = X_k = 0\}$. Obsérvese que este subespacio es espacial. Recordemos que las geodésicas espaciales p.p.a. de H_3^{4m+3} son de la forma $\gamma(t) = \cosh(t)q + \operatorname{senh}(t)v$ para cualesquiera $q \in H_3^{4m+3}$, $v \in T_q H_3^{4m+3}$ espacial y unitario. Así, dado $v \in T_q^{\perp} H_3^{4k+3}$, se tiene $\gamma(r) = \cosh(r)q + \operatorname{senh}(r)v = (\cosh(r)q_0, \dots, \cosh(r)q_k, \operatorname{senh}(r)v_{k+1}, \dots, \operatorname{senh}(r)v_m) \in \bar{M}_k(r)$. Recíprocamente, dado $q \in \bar{M}_k(r)$ se consideran el punto $p = (1/\cosh(r))(q_0, \dots, q_k, 0, \dots, 0) \in H_3^{4k+3}$ y el vector $v = (1/\operatorname{senh}(r))(0, \dots, 0, q_{k+1}, \dots, q_m) \in T_p^{\perp} H_3^{4k+3}$ que es unitario por la famosa fórmula $\cosh^2(r) - \operatorname{senh}^2(r) = 1$. En consecuencia, si llamamos $M_k(r) = \pi(\bar{M}_k(r))$, esta hipersuperficie real es un tubo de radio $r > 0$ o bien sobre un $\mathbb{Q}H^k = \pi(H_3^{4k+3})$ totalmente geodésico si $k > 0$ o bien sobre un punto $\{z\} = \pi(H_3^3)$. Este último caso se suele denominar *hiperesfera geodésica*. □

Ejemplo 2.2.3 *Tubos sobre $\mathbb{C}H^m$ totalmente geodésicos.*

En este caso particular no se obtiene este tipo de hipersuperficie mediante una fórmula explícita, sino que se va a construir un embebimiento totalmente geodésico del espacio hiperbólico complejo $\mathbb{C}H^m$ en $\mathbb{Q}H^m$, y se define dicha hipersuperficie como un tubo sobre dicha subvariedad. Conviene resaltar que el método aquí expuesto es muy flexible y permite, con ligeros cambios, construir otros muchos embebimientos de $\mathbb{C}H^m$ en $\mathbb{Q}H^m$. Simplemente se ha descrito el que tiene la notación más simple.

En primer lugar necesitamos revisar una construcción del espacio hiperbólico complejo. No nos vamos a detener en los detalles geométricos puesto que se sale del espíritu de la memoria. $\mathbb{C}$ denota el cuerpo de los números complejos con unidad imaginaria i. Dado $m \geq 2$, en $\mathbb{C}^{m+1}$ se define la hipersuperficie real

$$H_1^{2m+1} = \left\{ z = (z_0, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1} : -|z_0|^2 + \sum_{k=1}^{m} |z_k|^2 = -1 \right\}$$

En $\mathbb{C}^{m+1}$ se define la métrica $h((z_0, \ldots, z_m), (w_0, \ldots, w_m)) = \Re\{-\bar{z}_0 w_0 + \sum_{k=1}^{m} \bar{z}_k w_k\}$, que es una métrica sin radical de índice 2. En H_1^{2m+1} se considera la métrica inducida, que la convierte en una subvariedad semirriemanniana de $\mathbb{C}^{m+1}$ de índice 1. Denotemos por $\mathbb{S}^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Este grupo define una acción en H_1^{2m+1} por $\lambda \in \mathbb{S}^1$, $(z_0, \ldots, z_m) \in H_1^{2m+1}$ dada por $(\lambda z_0, \ldots, \lambda z_m) \in H_1^{2m+1}$. Dicha acción es libre, y el cociente $\pi' : H_1^{2m+1} \longrightarrow \mathbb{C}H^m$ se denomina espacio hiperbólico complejo m-dimensional. La métrica en $\mathbb{C}H^m$ es aquella que convierte dicha proyección en una submersión semirriemanniana. Toda geodésica de $\mathbb{C}H^m$ se expresa como proyección de una geodésica de H_1^{2m+1} pero en la que el vector inicial es horizontal, es decir, es espacial. Recordemos que dados $p \in H_1^{2m+1}$, $v \in T_p H_1^{2m+1}$ unitario espacial, la geodésica de H_1^{m+1} de punto incial p y vector inical v es de la forma $\gamma(t) = \cosh(t)p + \operatorname{senh}(t)v$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Recordemos que el álgebra de los cuaternios la estamos denotando como

$$\mathbb{Q} = \{a + bj_1 + cj_2 + dj_3 : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

con los convenios

$$j_k^2 = -1, k = 1, 2, 3, \quad j_1 j_2 = -j_2 j_1 = j_3, \quad j_2 j_3 = -j_3 j_2 = j_1, \quad j_3 j_1 = -j_1 j_3 = j_2$$

Identifiquemos $\mathbb{Q}$ con $\mathbb{C}^2 = \{\alpha + \beta j_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$ con las reglas aritméticas

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \beta_1 j_2) + (\alpha_2 + \beta_2 j_2) &= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) j_2 \\ (\alpha_1 + \beta_1 j_2) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 j_2) &= (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \bar{\beta}_2) + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \bar{\alpha}_2) j_2 \end{aligned}$$

donde $\bar{\alpha}$ denota el conjugado complejo de α. Nótese $\alpha j_2 = j_2 \bar{\alpha}$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$. El conjugado cuaterniónico se sigue denotando igual que con anterioridad. Si tenemos $q = \alpha + \beta j_2$, entonces $\bar{q} = \bar{\alpha} - \beta j_2$. Desde este punto de vista, si se elige $a + bi \in \mathbb{C}$, se tiene la identificación $a + ib = a + bj_1 \in \mathbb{Q}$. De esta manera, se embeben $\mathbb{C}$ en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^3$.

Uniendo ambas situaciones, se define $\varphi : H_1^{2m+1} \longrightarrow H_3^{4m+3}$ dado por $\varphi(z_0, \ldots, z_m) = (z_0, \ldots, z_m)$, simplemente viendo los números complejos como cuaternios bajo la identificación anterior. Este embebimiento respeta las relaciones de equivalencia, por lo que se puede construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} & H_1^{2m+1} & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & H_3^{4m+3} & \\ \pi' & \downarrow & & \downarrow & \pi \\ & \mathbb{C}H^m & \stackrel{\varphi'}{\longrightarrow} & \mathbb{Q}H^m & \end{array}$$

donde φ' es el embebimiento inducido por φ. Desde este punto de vista, $\mathbb{C}H^m$ es una subvariedad riemanniana de $\mathbb{Q}H^m$. Sólo queda darse cuenta de que φ es totalmente geodésico, y como π y π' son submersiones semirriemannianas, entonces φ' es también totalmente geodésico.

Como subvariedad de $\mathbb{Q}H^m$, sobre $\mathbb{C}H^m$ se pueden construir tubos de radio arbitrario. En efecto, H_3^{4m+3} no es más que un espacio pseudohiperbólico de $\mathbb{Q}^{m+1}$, y como tal, ninguna subvariedad totalmente geodésica tiene puntos focales puesto que sus geodésicas no admiten puntos conjugados. $\square$

Ejemplo 2.2.4 *La horosfera.*

Se define la hipersuperficie en H_3^{4m+3} dada por

$$\bar{M}_h = \{q = (q_0, \ldots, q_m) \in H_3^{4m+3} : (\bar{q}_0 - \bar{q}_1)(q_0 - q_1) = 1\}$$

Dicha hipersuperficie se denomina horosfera. Sea $q \in \bar{M}_h$. Un cálculo sencillo muestra que el espacio tangente en q a $\bar{M}_h$ es

$$\begin{aligned} T_q\bar{M}_h = \{X = (X_0, \ldots, X_m) \in \mathbb{Q}^{m+1} : \bar{g}(X, q) = 0, \\ \Re((\bar{X}_0 - \bar{X}_1)(q_0 - q_1)) = 0\} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Para cada $q \in \bar{M}_h$, se define el campo unitario normal a $\bar{M}_h$ en H_3^{4m+3} como

$$\tilde{N}_q = (-q_1, q_0 - 2q_1, -q_2, \ldots, -q_m) \tag{2.19}$$

Este campo es espacial y globalmente definido. Denotemos por $\tilde{A}$ al endomorfismo de Weingarten asociado a $\tilde{N}$. De (1.11) y (2.2), dado $X \in T\bar{M}_h$, $-\tilde{A}X = \bar{D}_X\tilde{N} = D_X\tilde{N} = (-X_1, 2X_1 - X_0, -X_2, \ldots, -X_m)$, es decir

$$\tilde{A}X = (X_1, X_0 - 2X_1, X_2, \ldots, X_m) \tag{2.20}$$

para todo $X \in T\bar{M}_h$. Para cada k=1,2,3, se define el campo tangente a $\bar{M}_h$ como $\tilde{U}_k(q) = (-j_k\tilde{N})_q = (j_kq_1, 2j_kq_1 - j_kq_0, j_kq_2, \ldots, j_kq_m)$, para todo $q \in \bar{M}_h$. De (2.20) se tiene $(\tilde{A}\tilde{U}_k)_q = (2j_kq_1, 3j_kq_1 - 2j_kq_0, j_kq_2, \dots, j_kq_m) = -j_k\chi(q) + 2(j_kq_1, 2j_kq_1 - j_kq_0, j_kq_2, \dots, j_kq_m) = (-j_k\chi + 2\tilde{U}_k)(q)$. En consecuencia,

$$\tilde{A}\tilde{U}_k = -j_k\chi + 2\tilde{U}_k, \qquad k{=}1{,}2{,}3. \tag{2.21}$$

Dado $X \in T\bar{M}_h$, de (2.20), se verifica $\tilde{A}X = X \iff (X_1, X_0 - 2X_1, X_2, \dots, X_m) = (X_0, X_1, \dots, X_m) \iff X_0 = X_1$. Dado $q \in \bar{M}_h$, si denotamos por $\tilde{T}(q) = \{X \in T_q\bar{M}_h : \tilde{A}_qX = X\}$, los cálculos anteriores muestran

$$\tilde{T}_1 = \{X \in T\bar{M}_h : X_0 = X_1\} \tag{2.22}$$

El siguiente objetivo es demostrar $\dim \tilde{T}_1(q) \cap T'_q = 4m - 4$. Por un lado, recordemos $T'_q = \{X \in \mathbb{Q}^{m+1} : \bar{g}(X, q) = \bar{g}(X, j_kq) = 0, k = 1, 2, 3\}$. Por otro, $X_0 = X_1$ son en realidad cuatro ecuaciones resumidas en una. Esto unido a (2.22) implica $\tilde{T}_1(q) \cap T'_q = \{X \in \mathbb{Q}^{m+1} : \bar{g}(X, j_kq) = 0, k = 1, 2, 3, X_0 = X_1\}$ y finalmente $\dim \tilde{T}_1(q) \cap T'_q = 4(m + 1) - 8 = 4m - 4$. Definamos $\tilde{\mathbb{D}}$ como el ortogonal de $Span\{\tilde{U}_k, j_k\chi : k = 1, 2, 3\}$ en $T\bar{M}_h$. Claramente, $\dim \tilde{\mathbb{D}} = (4m + 2) - 6 = 4m - 4$ y este subespacio es horizontal. Si se escoge $X \in \tilde{T}_1(q) \cap T'_q$, entonces $\bar{g}(X, \tilde{U}_k(q)) = \bar{g}(\tilde{A}_qX, \tilde{U}_k(q)) = \bar{g}(X, \tilde{A}_q\tilde{U}_k(q)) = 2\bar{g}(X, \tilde{U}_k(q))$, por lo que $\bar{g}(X, \tilde{U}_k(q)) = 0$. Esto significa $X \in \tilde{\mathbb{D}}_q$, por lo que necesariamente $\tilde{T}_1(q) \cap T'_q \subseteq \tilde{\mathbb{D}}_q$. Al tener la misma dimensión,

$$\tilde{T}_1(q) \cap T'_q = \tilde{\mathbb{D}}_q \tag{2.23}$$

para todo $q \in \bar{M}_h$. Se define la hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$, como $M_h = \pi(\bar{M}_h)$. El campo $N = \pi_*(\tilde{N})$ es un campo unitario y normal a M_h en $\mathbb{Q}H^m$ globalmente definido. Usando las notaciones prefijadas, $g(AX, Y) = \bar{g}(\tilde{A}X', Y')$ para todos $X, Y \in T\mathbb{Q}H^m$. Claramente, $U_k = -J_kN = \pi_*(\tilde{U}_k)$, para k=1,2,3, y además, $\mathbb{D} = \pi_*(\tilde{\mathbb{D}})$. De (2.21), (2.22) y (2.23) se tiene $AU_k = \pi_*(\tilde{A}\tilde{U}_k) = \pi_*(2\tilde{U}_k - j_k\chi) = 2U_k$ y dado $X \in \mathbb{D}$, $AX = \pi_*(\tilde{A}X') = \pi_*(X') = X$.

Una vez calculadas sus curvaturas principales, intentemos justificar su nombre. Para ello, consideremos la matriz

$$\mathcal{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \cosh(r) & -\operatorname{senh}(r) & \\ -\operatorname{senh}(r) & \cosh(r) & 0 \\ \hline & 0 & I_n \end{array}\right)$$

Obsérvese que dados $q, w \in \mathbb{Q}^{m+1}$ se verifica $\bar{g}(q\mathcal{A}, w\mathcal{A}) = \bar{g}(q, w)$, es decir, la matriz $\mathcal{A}$ induce la isometría $\tilde{f}_{\mathcal{A}} : H_3^{4m+3} \longrightarrow H_3^{4m+3}$ dada por $\tilde{f}_{\mathcal{A}}(q) = q\mathcal{A}$ para todo $q \in H_3^{4m+3}$, donde "$q\mathcal{A}$" es el producto usual vector-matriz. Además, esta isometría respeta la relación de equivalencia, por lo que induce una isometría $f_{\mathcal{A}} : \mathbb{Q}H^m \longrightarrow \mathbb{Q}H^m$ dada por $f_{\mathcal{A}}(\pi(q)) = \pi(\tilde{f}_{\mathcal{A}}(q))$ para todo $\pi(q) \in \mathbb{Q}H^m$. Del ejemplo 2.2 se sabe que, dado $r > 0$, *la* hiperesfera geodésica de radio $r > 0$ de $\mathbb{Q}H^m$ es $M_0(r) = \pi\{q = (q_0, \ldots, q_m) \in H_3^{4m+3} : \bar{q}_0 q_0 = \cosh^2(r)\}$. Si se aplica la isometría $f_{\mathcal{A}}$ a $M_0(r)$ se obtiene la siguiente hiperesfera geodésica de radio $r > 0$:

$$
\begin{aligned}
M_0'(r) = \pi(\{w = (w_0, \ldots, w_m) \in H_3^{4m+3} : \\
(\bar{w}_0 - \tanh(r)\bar{w}_1)(w_0 - \tanh(r)w_1) = 1\})
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Denotemos $p = (1, 0, \ldots, 0) \in H_3^{4m+3}$ y $x = \pi(p)$. En primer lugar, el punto x pertenece tanto a M_h como a $M_0'(r)$ para todo $r > 0$. Veamos que $T_x M_h = T_x M_0'(r)$ para todo $r > 0$. En efecto, por un lado, de (2.18),

$$T_x M_h = (d\pi)_p \{X = (X_0, \ldots, X_m) \in \mathbb{Q}^{m+1} : \Re(X_0) = 0, \Re(X_1) = 0\}$$

Por otro, de (2.24) se calcula fácilmente

$$T_x M_0'(r) = (d\pi)_p \{X = (X_0, \ldots, X_m) \in \mathbb{Q}^{m+1} : \Re(X_0) = 0, \Re(X_1) = 0\}$$

De estas dos ecuaciones se obtiene que M_h y $M_0'(r)$ son tangentes en x para todo $r > 0$. En segundo lugar, si tomamos límite cuando $r \to \infty$ en la fórmula que define a $M_0'(r)$ se tiene $\lim_{r\to\infty}(\bar{w}_0 - \tanh(r)\bar{w}_1)(w_0 - \tanh(r)w_1) = (\bar{w}_0 - \bar{w}_1)(w_0 - w_1)$, que es la ecuación que define a la horosfera.

La interpretación geométrica es que la horosfera se puede considerar como la hipersuperficie real límite que aparece al considerar una familia de hiperesferas geodésicas que son todas tangentes en un mismo punto y hacer tender el radio a infinito.

$\square$

2.3 Resultados conocidos.

Se incluyen los resultados que obtuvieron Berdnt en [B], Chen en [CH] y Tashiro-Tachibana en [TT]. En primer lugar se define el concepto de hipersuperficie real de curvatura adaptada. El enunciado principal es la clasificación de dichas hipersuperficies que además son isoparamétricas. En cuanto a las hipersuperficies reales de curvatura adaptada no isoparamétricas, obsérvense las fuertes restricciones sobre las curvaturas principales y las distribuciones principales.

Una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$ se dice *de curvatura adaptada* si su operador de Jacobi normal $K_N = \bar{R}(\cdot, N)N$ conmuta con el endomorfismo de Weingarten. J. Berndt demostró en [B] que las tres siguientes premisas son equivalentes:

(a) M es de curvatura adaptada.

(b) $\mathbb{D}$ (o equivalentemente, $\mathbb{D}^\perp$) es invariante por el endomorfismo de Weingarten.

(c) $\mathbb{D}^\perp$ es un subfibrado autoparalelo de TM.

De las tres premisas anteriores, usualmente intentaremos demostrar la condición b) debido a su carácter puntual, es decir, se intentará demostrar que se verifica para cada punto de la hipersuperficie real. En este sentido, diremos que una hipersuperficie real es *de curvatura adaptada en* $G \subset M$ si se verifica la condición b) para cada punto de G. También usaremos la expresión M *verifica la condición b) en* G, donde $G \subset M$.

El próximo lema establece las relaciones que existen entre las curvaturas principales de una hipersuperficie real de curvatura adaptada. Aunque no se haya explicitado, estas relaciones fuerzan a que las distribuciones principales sean totalmente reales, semicuaterniónicas o cuaterniónicas.

Lema 2.3.1 [B] *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Supongamos que cada U_k es principal con curvatura principal μ_k, k=1,2,3. Entonces:*

(a) *μ_k es localmente constante, k=1,2,3.*

(b) *Si $X \in \mathbb{D}$ y X es principal con curvatura principal λ, dado k=1,2,3 se verifica $(2\lambda - \mu_k)A\phi_k X = (\lambda\mu_k - 2)\phi_k X$.*

El siguiente resultado muestra lo restrictiva que es la definición de hipersuperficie real de curvatura adaptada en $\mathbb{Q}H^m$. En los modelos de espacios complejos también se puede definir el mismo concepto, aunque está mucho más extendida la nomenclatura hipersuperficies reales de Hopf. Sin embargo, se conocen muchos tipos de hipersuperficies reales de Hopf que no son isoparamétricas en el espacio proyectivo complejo (ver [MD]).

Teorema 2.3.1 [B] *Sea M una hipersuperficie real de curvatura adaptada de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Supongamos que existe una curvatura principal λ no constante en un abierto G de M. Entonces*

(a) $A_{|\mathbb{D}^\perp} = 2I_{\mathbb{D}^\perp}$ *en G.*

(b) *La función constante 1 es una curvatura principal.*

(c) $\phi_k T_\lambda \subset T_1$, *k=1,2,3.*

Teorema 2.3.2 **[B]** *Sea M una hipersuperficie real conexa de curvatura adaptada de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$, isoparamétrica. Entonces M es orientable y es un abierto de una de las siguientes:*

(a) *Un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$ totalmente geodésico, $k \in \{0, \dots, m-1\}$,*

(b) *un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{C}H^m$ totalmente geodésico,*

(c) *una horosfera.*

La siguiente tabla muestra las curvaturas principales de cada modelo que aparece en la lista del Teorema 2.3.2. Dichas curvaturas principales fueron calculadas por Berdnt en [B].

Modelo	Curvaturas principales	Multiplicidades
a)	$\mu_1 = 2\coth(2r)$ $\lambda_1 = \coth(r)$ $\lambda_2 = \tanh(r)$	3 4(m-k-1) 4k
b)	$\mu_1 = 2\coth(2r)$ $\mu_2 = 2\tanh(2r)$ $\lambda_1 = \coth(r)$ $\lambda_2 = \tanh(r)$	1 2 2m-2 2m-2
c)	$\mu = 2$ $\lambda = 1$	3 4m-4

Tabla 1.

Las distribuciones T_{μ_i}, i=1,2 están incluidas en $\mathbb{D}^\perp$ y T_{λ_i}, i=1,2 están incluidas en $\mathbb{D}$.

Teorema 2.3.3 **[CH]** *No existen hipersuperficies reales de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$, totalmente umbilicales.*

Teorema 2.3.4 **[TT]** *No existen hipersuperficies reales de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$, cuya segunda forma fundamental sea paralela.*

Capítulo 3

La segunda forma fundamental.

3.1 El endomorfismo de Weingarten.

Esta sección está dedicada al endomorfismo de Weingarten. En primer lugar se clasifican aquellas hipersuperficies reales cuyo endomorfismo de Weingarten conmuta con la 3-estructura casi de contacto, pero restringiéndonos a campos de vectores en $\mathbb{D}$. Por otro lado, como el Teorema 2.3.3 es un teorema de no existencia, nuestro objetivo es buscar condiciones más débiles que permitan clasificar. En este sentido, los resultados más interesantes son los Teoremas 3.1.2 y 3.1.3. En el primero de estos dos se clasifican las hipersuperficies reales de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, para las que la restricción de la métrica g a $\mathbb{D}$ y la nueva métrica g^0 en $\mathbb{D}$ dada por $g^0(X,Y) = g(AX,Y)$ para todos $X, Y \in \mathbb{D}$ son proporcionales. En el segundo se clasifican las hipersuperficies reales de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, con exactamente dos curvaturas principales en cada punto.

Comenzamos demostrando una generalización del Lema 3.6 de [B], aunque se puede ver el resultado original en el Lema 5.1 de [MP], donde sólo se prestaba atención al espacio projectivo cuaterniónico. Se denotarán por $(*)_{\mathbb{D}^\perp}$ y $(*)_{\mathbb{D}}$ la $\mathbb{D}^\perp$-componente y la $\mathbb{D}$-componente de $(*)$ respectivamente.

Lema 3.1.1 [OP4] *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Entonces existe un abierto denso $\tilde{M}$ de M que verifica: Dado $p \in \tilde{M}$, existen un entorno abierto $\hat{G}$ de p en $\mathbb{Q}H^m$ y una base $\{J_1, J_2, J_3\}$ de $\hat{\mathcal{V}}$ definida en $\hat{G}$ tal que $p \in G := M \cup \hat{G} \subseteq \tilde{M}$, y existen tres campos de vectores diferenciables $\{E_1, E_2, E_3\}$ definidos en G, y tres funciones diferenciables μ_k definidas en G, $k = 1, 2, 3$, tales que los correspondientes $U_k = -j_k N$, $k = 1, 2, 3$, verfifican $AU_k = \mu_k U_k + E_k$, para $k = 1, 2, 3$.*

Demostración: Consideremos el fibrado vectorial $\mathrm{Hom}(\mathbb{D}^\perp, \mathbb{D}^\perp)$, en el que definimos $A^0 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{D}^\perp, \mathbb{D}^\perp)$ como $A^0 X = (AX)_{\mathbb{D}^\perp}$ para todo $X \in \mathbb{D}^\perp$. Podemos repetir la demostración de J. Berndt en [B], pero usando A^0 en vez de A. Al final de su prueba llegamos a $A^0U_k = \mu_k U_k$ para $k = 1, 2, 3$ en G. Como la projección ortogonal $p : TM \longrightarrow \mathbb{D}$ es diferenciable, dado $k \in \{1, 2, 3\}$, la descomposición ortogonal $AU_k = A^0U_k + p(AU_k)$ obliga a que los campos de vectores $E_k = p(AU_k)$ sean diferenciables y estén definidos en G. $\square$

Observación 3.1.1 Si M es de curvatura adaptada, cada campo de vectores E_k, $k = 1, 2, 3$ es idénticamente nulo en G y el lema toma la forma del Lema 3.6 de [B].

Teorema 3.1.1 **[OP4]** *Sea M una hipersuperficie real conexa de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$, que verifique*

(3.1) $$A\phi_k X = \phi_k AX \quad \text{para todo } X \in \mathbb{D},\ k=1,2,3$$

Entonces M es un abierto de una de las siguientes:

(a) *Un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$ totalmente geodésico, $k = 0, \ldots, m-1$,*

(b) *una horosfera.*

Demostración: Sea $\{U_1, U_2, U_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{D}^\perp$. Se fija un $k \in \{1, 2, 3\}$. Dado $X \in \mathbb{D}$, existe $Y \in \mathbb{D}$ tal que $X = \phi_k Y$. De aquí, por (3.1), $g(AX, U_k) = g(A\phi_k Y, U_k) = g(\phi_k AY, U_k) = 0$. Por lo tanto M es de curvatura adaptada. Supongamos que M admite una curvatura principal λ no constante en un abierto G de M. Por el Teorema 2.3.1, $AZ = 2Z$ para todo $Z \in \mathbb{D}^\perp$. Se elige $X \in V_\lambda$. Del Teorema 2.3.1 y (3.1), $\phi_k X = A\phi_k X = \phi_k AX = \lambda\phi_k X$, de donde $\lambda = 1$ en cualquier punto de G. Por lo tanto, M es isoparamétrica y solamente hay que comprobar cuales de las hipersuperficies reales del Teorema 2.3.2 verifican (3.1).

a) Horosfera y tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$ totalmente geodésico, $k = 0, \ldots, m-1$. En todos los casos, las distribuciones principales incluidas en $\mathbb{D}$ son cuaterniónicas, por lo que todos estos modelos verifican (3.1).

b) Tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{C}H^m$ totalmente geodésico. Supongamos que sí verifique (3.1). En este caso, $\mathbb{D}^\perp = T_{\mu_1} \oplus T_{\mu_2}$, $\mathbb{D} = T_{\lambda_1} \oplus T_{\lambda_2}$, donde $\mu_1 = 2\coth(2r)$, $\mu_2 = 2\tanh(2r)$, $\lambda_1 = \coth(r)$ y $\lambda_2 = \tanh(r)$. Dado $X \in T_{\lambda_1}$, por el Teorema 2.3.1 y (3.1), $\lambda_1\phi_k X = \phi_k AX = A\phi_k X = \frac{\lambda_1\mu_k - 2}{2\lambda_1 - \mu_k}\phi_k X$, k=1,2, de donde $\lambda_1 = \frac{\lambda_1\mu_k - 2}{2\lambda_1 - \mu_k}$, y ahora $\lambda_1^2 - \mu_1\lambda_1 + 1 = \lambda_1^2 - \mu_2\lambda_1 + 1$. Como $\lambda_1 \neq 0$, se tiene $\mu_1 = \mu_2$, es decir, $1 \leq \coth(r) = \tanh(r) < 1$, lo que supone una contradicción. $\square$

Por un lado, una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$, es totalmente umbilical si existe una función diferenciable $a : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(AX, Y) = ag(X, Y)$ para todos

$X, Y \in TM$. Por otro, de la Proposición 2.1.1, una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$, es reglada si y sólo si $g(AX, Y) = 0$ para cualesquiera $X, Y \in \mathbb{D}$. Nuestro objetivo es estudiar una condición que conjugue y generalice ambas ideas a la vez. Para ello, en el fibrado vectorial $\mathbb{D}$ se define la métrica g^0 dada por $g^0(X, Y) = g(AX, Y)$ para todos $X, Y \in \mathbb{D}$. La restricción de la métrica g a $\mathbb{D}$ la seguiremos denotando por la misma letra. Cabe preguntarse qué ocurre si ambas métricas son conformes, pero en ese caso dejaríamos de considerar las hipersuperficies reales regladas. El próximo resultado estudia qué ocurre si ambas métricas son proporcionales mediante una función que, en principio, puede admitir ceros y cambiar de signo.

Teorema 3.1.2 **[OP4]** *Sea M una hipersuperficie real conexa de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$. Supongamos que existe una función diferenciable $a : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g^0 = ag$. Entonces a es constante y M es una de las siguientes:*

(a) *Reglada, $a = 0$,*

(b) *un abierto de un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^{m-1}$ totalmente geodésico, $0 < a = \tanh(r) < 1$,*

(c) *un abierto de una horosfera, $a = 1$,*

(d) *un abierto de un tubo de radio $r > 0$ sobre un punto, $1 < a = \coth(r)$.*

Demostración: Nuestra hipótesis es $g(AX, Y) = ag(X, Y)$ para todos $X, Y \in \mathbb{D}$. Esto equivale a

$$AX = aX + \sum_{l=1}^{3} f_l(AX)U_l \tag{3.2}$$

para todo $X \in \mathbb{D}$. En primer lugar, si $a \equiv 0$, es claro que se verifica $g(AX, Y) = 0$ para todos $X, Y \in \mathbb{D}$, por lo que la hipersuperficie es reglada. En segundo lugar, supongamos que el abierto $\{p \in M : a(p) \neq 0\}$ no es vacío. Recordemos el abierto denso $\tilde{M}$ de M que aperece en el Lema 3.1.1. Claramente, el conjunto $\Delta = \{p \in \tilde{M} : a(p) \neq 0\}$ no puede ser vací0. Dado un punto $x \in \Delta$, sea G un abierto conexo de x en $\tilde{M}$ como los del Lema 3.1.1. Siguiendo las notaciones de dicho lema, supongamos que M no es de curvatura adaptada en un cierto punto p de G. Entonces alguno de los vectores $E_k(p) \neq 0$, y podemos elegir un entorno Ω incluido en G en donde M no sea de curvatura adaptada. En lo sucesivo, todos los cálculos se realizarán en Ω hasta a menos que se diga lo contrario.

$$AU_k \;=\; \mu_k U_k + E_k \tag{3.3}$$

$$AE_k = aE_k + \sum_{l=1}^{3} g(E_k, E_l)U_l \tag{3.4}$$

Los campos de vectores E_1, E_2, E_3 no tienen que ser ortonormales. Con dicho convenio, podemos ahorrarnos escribir el punto en el que se está evaluando. Definamos $V = Span\{E_1, E_2, E_3\}$ y W el complemento ortogonal de V en $\mathbb{D}$. De (3.2),

$$AX = aX \quad \text{para todo } X \in W \tag{3.5}$$

Dados $X, Y \in W$ y $k \in \{1, 2, 3\}$, teniendo en cuenta (2.9), (2.10), (3.2), (3.3) y (3.5),

$$\begin{aligned}
&g((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, E_k) = \\
&= \sum_{l=1}^{3}\{-f_l(X)g(\phi_l Y, E_k) + f_l(Y)g(\phi_l X, E_k) + 2g(\phi_l X, Y)g(U_l, E_k)\} = 0 \\
&= g(\nabla_X AY, E_k) - g(A\nabla_X Y, E_k) - g(\nabla_Y AX, E_k) + g(A\nabla_Y X, E_k) \\
&\quad = ag(\nabla_X Y, E_k) - ag(\nabla_X Y, E_k) - \sum_{l=1}^{3} g(E_k, E_l)g(\nabla_X Y, U_l) \\
&\quad -ag(\nabla_Y X, E_k) + ag(\nabla_Y X, E_k) + \sum_{l=1}^{3} g(E_k, E_l)g(\nabla_Y X, U_l) \\
&\quad = \sum_{l=1}^{3} g(E_k, E_l)\{g(Y, \nabla_X U_l) - g(X, \nabla_Y U_l)\} \\
&\quad = 2\sum_{l=1}^{3} g(E_k, E_l)g(Y, \phi_l AX) = 2a\sum_{l=1}^{3} g(E_k, E_l)g(Y, \phi_l X)
\end{aligned}$$

Y uniendo todo,

$$0 = \sum_{l=1}^{3} \lambda_l g(E_k, E_l)g(Y, \phi_l X) \tag{3.6}$$

para todos $X, Y \in W$, k=1,2,3 en Ω. Podemos considerar (3.6) un sistema lineal homogéneo cuyos coeficientes son $g(E_k, E_l)$, de manera que tenemos que distinguir tres casos. Para ello definimos la matriz de coeficientes del sistema $G = (g(E_k, E_l))_{k,l=1,2,3}$.

<u>Caso 1</u> Definamos $\Omega_1 = \{q \in \Omega : \dim V(q) = 3\} = \{q \in \Omega : \det G(q) \neq 0\}$, que es un abierto de M. En tal caso, la matriz tiene rango máximo y el sistema tiene solución única $0 = g(Y, \phi_l X)$ para todos $l = 1, 2, 3$ y $X, Y \in W$ en Ω_1. Por lo tanto, $\phi_1 W \subset V$, y así, $3 = \dim V \geq \dim W = 4m - 7$, es decir, $4m \leq 10$, lo que contradice $m \geq 3$. Por lo tanto, Ω_1 es vacío.

<u>Caso 2</u> Se define $\Omega_2 = \{q \in \Omega : \dim V(q) = 2\}$. Podemos elegir sin perder generalidad un abierto Ω_2^0 incluido en Ω_2 en el que se verifique $V = Span\{E_1, E_2\}$. Al ser el sistema

homogéneo y tener la matriz G rango 2, se puede olvidar la tercera ecuación de (3.6) y reescribir las otras dos así:

$$\begin{aligned} g(Y,\phi_1X)g(E_1,E_1)+g(Y,\phi_2X)g(E_1,E_2) &= -g(Y,\phi_3X)g(E_1,E_3) \\ g(Y,\phi_1X)g(E_1,E_2)+g(Y,\phi_2X)g(E_2,E_2) &= -g(Y,\phi_3X)g(E_2,E_3) \end{aligned} \tag{3.7}$$

para todos $X,Y\in W$ en Ω_2^0. Se tienen dos subcasos.

Caso 2.a Existe un punto $q\in\Omega_2^0$ y un vector unitario $Z\in(W\cap\phi_3W)(q)$. Evaluando en q, se eligen $X=Z$, $Y=\phi_3Z$ y se introduce en (3.7), por lo que $0=g(E_1,E_3)$, $0=g(E_2,E_3)$, de donde $\lambda_3=0$. El sistema (3.7) queda ahora $0=g(Y,\phi_1X)$, $0=g(Y,\phi_2X)$ para todos $X,Y\in W(q)$. A partir de aquí, se pueden repetir los cálculos del Caso 1 sobre las dimensiones, obteniendo de nuevo una contradicción.

Caso 2.b $W\cap\phi_3W=\{0\}$ en algún punto $q\in\Omega_2^0$. Como $(\phi_3W\oplus W)(q)\subset\mathbb{D}(q)=(V\oplus W)(q)$, entonces $4m-6=\dim W(q)=\dim\phi_3W(q)\leq\dim V(q)=2$, y así $m\leq 2$. Contradicción.

La única posibilidad es que Ω_2^0 sea vacío, lo que obliga a que el conjunto de los puntos interiores de Ω_2 sea vacío.

Caso 3 Definamos $\Omega_3=\{q\in\Omega:\dim V(q)=1\}$. Dado un punto $q\in\Omega$, podemos suponer sin perder generalidad $E_1(q)\neq 0$. Sólo escribimos la primera de las ecuaciones, teniendo

$$g(Y,\phi_1X)g(E_1,E_1)+g(Y,\phi_2X)g(E_1,E_2)+g(Y,\phi_3)g(E_1,E_3)=0 \tag{3.8}$$

para todos $X,Y\in W$ en q. Como $m\geq 3$, $\dim W_q\cap(V\oplus\phi_1V\oplus\phi_2V\oplus\phi_3V)^{\perp}(q)\geq 4$. Dado un vector no nulo X de este subespacio, se escoge $Y=\phi_1X\in W_q$, por lo que de (3.8), $0=g(E_1,E_1)$ lo que supone una contradicción. Por lo tanto, Ω_3 es vacío.

Teniendo en cuenta estos tres casos, se tiene que Ω es un abierto de M, $\Omega=\Omega_2$, y Ω_2 no tiene puntos interiores, por lo que Ω es vacío, lo que significa que G es una hipersuperficie real de curvatura adaptada, y la ecuación (3.2) se convierte en $AX=aX$ para todo $X\in\mathbb{D}$ en G. Por el Teorema 3.1.1, G puede ser un abierto de un tubo de radio $r>0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, k=0,...,m-1, o un abierto de una horosfera. Por la Tabla 1, sólo son posibles los tubos de radio $r>0$ sobre $\mathbb{Q}H^k$, k=0, m-1 o la horosfera. Además, en tales casos, a es constante en G. Es decir, a es localmente constante en Δ. Dada una componente conexa C de Δ, como Δ es un abierto de M, C también lo es. Además a es constante en C y M es de curvatura adaptada en C, por lo que C es una de las tres hipersuperficies reales antes mencionadas.

Definamos $H_0=\{q\in\tilde{M}:a(q)=0$ y supongamos que H_0 no es vací0. Como $\tilde{M}$ es denso en M y Δ no es vacío, existe una sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en una componente conexa de Δ cuyo límite q pertenece a H_0. Pero al ser a continua en M, dado $n \in \mathbb{N}$, $0 \neq a(p_n) = a(q)$, lo que es una contradicción. En consecuencia, $\Delta = \tilde{M}$. Como $\tilde{M}$ es denso en M, a es continua en M y localmente constante en $\tilde{M}$, y M es conexa, entonces a es constante en M, y M no es más que una de las tres hipersuperficies reales antes mencionadas. $\square$

Otra manera de buscar una condición más débil que la considerada en el Teorema 2.3.3 es intentar la clasificación de las hipersuperficies reales que admitan dos curvaturas principales en cada punto.

Teorema 3.1.3 [**OP2**] *Sea M una hipersuperficie real conexa de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, que admite como máximo dos curvaturas principales en cada punto. Entonces M es un abierto de una de las siguientes:*

(a) *Una hiperesfera geodésica,*

(b) *un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^{m-1}$ totalmente geodésico,*

(c) *una horosfera.*

Demostración: Denotemos por λ, μ las dos curvaturas principales de M. Repitiendo la demostración del Teorema 6.1 de [MP], para cada punto $p \in M$, existe un entorno abierto y conexo G de p en M y una base $\{U_1, U_2, U_3\}$ de $\mathbb{D}^\perp$ definida en G tales que dichos vectores son principales y tienen la misma curvatura principal, digamos μ. Dichos cálculos se pueden repetir porque, por un lado, la ecuación de Codazzi en el espacio proyectivo cuaterniónico difiere de la del espacio hiperbólico cuaterniónico en el signo del segundo miembro, y, por otro, porque se recurre a la ecuación de Codazzi mediante productos escalares en los que se obtienen sistemas de ecuaciones homogéneos, y a posteriori no interviene el signo del segundo miembro de la ecuación de Codazzi. En consecuencia, M es de curvatura adaptada. Por el Lema 2.3.1 y la conexión de M, μ es constante. Supongamos que la curvatura principal λ no es constante en un cierto abierto G de M. Restringiéndolo si es necesario, se puede suponer que λ no toma el valor 1 en ningún punto de G. Por el Teorema 2.3.1, $\mu = 2$ en G. Se elige $X \in \mathbb{D}$ tal que $X \in T_\lambda$. Por el Lema 2.3.1, $2(\lambda - 1)A\phi_i X = 2(\lambda - 1)\phi_i X$. Como $\lambda \neq 1$ en todo punto de G, entonces $A\phi_i X = \phi_i X$. Esto implica que M admite tres curvaturas principales $\{\mu = 2, \lambda, 1\}$ en G, que es una contradicción. Al ser M de curvatura adaptada e isoparamétrica, M es uno de los ejemplos del Teorema 2.3.2. La Tabla 1 muestra cuáles de ellos admiten dos curvaturas principales en cada punto. $\square$

3.2 El Operador de Curvatura.

El Teorema 2.3.4 establece la no existencia de hipersuperficies reales de $\mathbb{Q}H^m$ cuyo endomorfismo de Weingarten sea paralelo. Nuestro objetivo en esta sección es encontrar una condición más débil que permita clasificar. La búsqueda no fue sencilla al ir estudiando condiciones más y más débiles que ninguna hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$ verificaba, hasta llegar a la que se ha incluido en primer lugar, obteniendo las demás como corolarios. El camino seguido plantea la acción del operador de curvatura como derivación sobre el endomorfismo de Weingarten.

Teorema 3.2.1 [**OP4**] *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$, que verifica*

(3.9) $(R(X,Y)A)Z + (R(Y,Z)A)X + (R(Z,X)A)Y = 0$ *para todos $X, Y, Z \in \mathbb{D}$*

Entonces M es un abierto de una de las siguientes:

(a) *Un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, k=0,m-1, totalmente geodésico,*

(b) *una horosfera.*

Demostración: De (1.2) y la primera identidad de Bianchi, (3.9) es equivalente a

$$R(X,Y)AZ + R(Y,Z)AX + R(Z,X)AY = 0 \tag{3.10}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathbb{D}$. De (2.11), la equación (3.10) se transforma en

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_{k=1}^{3}\{2g(\phi_k X, Y)\phi_k AZ + 2g(\phi_k Z, X)\phi_k AY \\ & + \; 2g(\phi_k Y, Z)\phi_k AX + g((A\phi_k + \phi_k A)Z, Y)\phi_k X \\ & + \; g((A\phi_k + \phi_k A)X, Z)\phi_k Y + g((A\phi_k + \phi_k A)Y, X)\phi_k Z\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathbb{D}$. Se considera $\{E_1, \ldots, E_{4m-4}\}$ una base ortonormal de $\mathbb{D}$ definida en un abierto G de M. Para cada $k, l \in \{1,2,3\}$ se define la función $a_{kl} : G \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $a_{kl} = (1/2)\sum_{i=1}^{4m-4} g((A\phi_k + \phi_k A)\phi_l E_i, E_i)$ en G. En lo sucesivo, todos los cálculos se realizarán en G salvo que se exprese lo contrario. Si se introducen $X = E_i$, $Y = \phi_l E_i$, l=1,2,3 en (3.11) y se suma en i=1,...,4m-4, se obtiene

$$0 = 4(m-1)\phi_l AZ + \sum_{k=1}^{3}\{a_{kl}\phi_k Z - (\phi_k\phi_l(A\phi_k + \phi_k A)Z)_{\mathbb{D}} + 2\phi_k A\phi_l\phi_k Z\} \tag{3.12}$$

para todos $Z \in \mathbb{D}$, l=1,2,3. Si se multiplica escalarmente (3.12) por U_l, de (2.3), (2.4), (2.7), (3.11), se obtiene $0 = \sum_{k=1}^{3} g(\phi_k A\phi_l\phi_k Z, U_l) = g(\phi_{l+1}A\phi_l\phi_{l+1}Z, U_l) + g(\phi_{l+2}A\phi_l\phi_{l+2}Z, U_l) = g(A\phi_{l+2}Z, \phi_{l+1}U_l) + g(\phi_{l+1}Z, U_{l+1})$ luego $0 = g(Z, \phi_{l+2}AU_{l+2}) + g(Z, \phi_{l+1}AU_{l+1})$ para todo $Z \in \mathbb{D}$, l=1,2,3, de donde $\phi_{l+2}AU_{l+2} + \phi_{l+1}AU_{l+1} \in \mathbb{D}^\perp$, es decir, $\phi_1 AU_1 + \phi_2 AU_2 = Z_1$, $\phi_2 AU_2 + \phi_3 AU_3 = Z_2$, $\phi_1 AU_1 + \phi_3 AU_3 = Z_3$, donde $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{D}^\perp$ están definidos en G. Cálculos muy sencillos demuestran que cada $\phi_k AU_k$ es combinación lineal de los campos Z_l, l=1,2,3, de donde $\phi_k AU_k \in \mathbb{D}^\perp$, k=1,2,3. Si se aplica ahora ϕ_k, se tiene $AU_k \in \mathbb{D}^\perp$, k=1,2,3, es decir, M es de curvatura adaptada en G. Como el entorno G es arbitrario, M es de curvatura adaptada. Por el Lema 3.1.1, existe un abierto denso $\tilde{M}$ en el que se puede suponer que los campos $\{U_1, U_2, U_3\}$ están definidos en $G \subset M$ y son principales con curvaturas principales respectivas μ_k, $k = 1, 2, 3$. Por otro lado, las funciones a_{kl} son independientes de la base de $\mathbb{D}$ escogida para calcularlas. Además, si $k \neq l$, entonces a_{kl} es idénticamente nula en G. En efecto, si la base $\{E_i : i = 1, \ldots, 4m-4\}$ es tal que $AE_i = \lambda_i E_i$ en cierto punto de G y para ciertos números reales λ_i, $i = 1, \ldots, 4m-4$, entonces $\sum_{i=1}^{4m-4} g(A\phi_k\phi_l E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{4m-4} \lambda_i g(\phi_k\phi_l E_i, E_i) = 0$. Por otro lado, si la base $\{E_i : i = 1, \ldots, 4m-4\}$ es tal que $A\phi_l E_i = \lambda_i \phi_l E_i$ en cierto punto de G y para ciertos números reales λ_i, $i = 1, \ldots, 4m-4$, entonces $\sum_{i=1}^{4m-4} g(\phi_k A\phi_l E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{4m-4} \lambda_i g(\phi_k\phi_l E_i, E_i) = 0$. Estos dos cálculos demuestran nuestra afirmación. Del hecho de que M sea de curvatura adaptada, el sumando de (3.12) $(\phi_k\phi_l(A\phi_k + \phi_k A)Z)_{\mathbb{D}} = \phi_k\phi_l(A\phi_k + \phi_k A)Z$. Además, de (2.3), (2.4), (2.7) y al ser $a_{kl} = 0$ si $k \neq l$, la ecuación (3.12) se transforma en

$$\begin{aligned}
0 &= 4(m-1)\phi_l AZ + \sum_{k=1}^{3}\{a_{kl}\phi_k Z - \phi_k\phi_l(A\phi_k + \phi_k A)Z + 2\phi_k A\phi_l\phi_k Z\} \\
&= 4(m-1)\phi_l AZ + a_{ll}\phi_l Z + \sum_{k=1}^{3}\{\phi_l\phi_k A\phi_k Z + \phi_l\phi_k\phi_k AZ + 2\phi_k A\phi_l\phi_k Z\} \\
&= (4m-7)\phi_l AZ + a_{ll}\phi_l Z + \phi_l^2 A\phi_l Z + \phi_l\phi_{l+1}A\phi_{l+1}Z + \phi_l\phi_{l+2}A\phi_{l+2}Z \\
&\quad +2\phi_l A\phi_l^2 Z + 2\phi_{l+1}A\phi_l\phi_{l+1}Z + 2\phi_{l+2}A\phi_l\phi_{l+2}Z
\end{aligned}$$

Y finalmente,

$$0 = a_{ll}\phi_l Z + (4m-9)\phi_l AZ - A\phi_l Z + \phi_{l+1}A\phi_{l+2}Z - \phi_{l+2}A\phi_{l+1}Z \tag{3.13}$$

para todo $Z \in \mathbb{D}$, l=1,2,3. Se aplica $-\phi_l$ a (3.13) y por (2.4) y ser M de curvatura adaptada,

$$0 = a_{ll}Z + (4m-9)AZ + \phi_l A\phi_l Z - \phi_{l+1}A\phi_{l+1}Z - \phi_{l+2}A\phi_{l+2}Z \tag{3.14}$$

para todo $Z \in \mathbb{D}$, l=1,2,3. Si se sustituye Z por $\phi_l Z$ en (3.13), de (2.4) se tiene

$$0 = -a_{ll}Z + (4m-9)\phi_l A\phi_l Z + AZ + \phi_{l+1}A\phi_{l+1}Z + \phi_{l+2}A\phi_{l+2}Z \tag{3.15}$$

para todo $Z \in \mathbb{D}$, l=1,2,3. Se suman (3.15) y (3.14) y se obtiene $0 = (4m-8)AZ + (4m-8)\phi_l A\phi_l Z$ para todo $Z \in \mathbb{D}$. En este momento hemos de distinguir los dos siguiente casos.

Caso 1. $m \geq 3$ De los cálculos anteriores se observa que $A\phi_l Z = \phi_l AZ$ para todo $Z \in \mathbb{D}$. Sólo queda comprobar cuáles de las hipersuperficies reales del Teorema 3.1.1 verifican (3.10).

Caso 2. $m = 2$ Supongamos que M admite curvaturas principales no constantes en un abierto O. Como el abierto G en donde estábamos trabajando es arbitrario, restringiendo O y G si es necesario, se puede suponer sin perder generalidad $O = G$, y existe $\lambda : G \longrightarrow \mathbb{R}$ una curvatura principal no constante definida en G. El Teorema 2.3.1 obliga a que $AU_k = 2U_k$, k=1,2,3, y $\phi_k T_\lambda \subset T_1$, k=1,2,3. Como $m = 2$, necesariamene, $\dim T_\lambda = 1$ y $T_1 = \phi_1 T_\lambda \oplus \phi_2 T_\lambda \oplus \phi_3 T_\lambda$ en todo punto de G. En consecuencia, sólo existe esta curvatura principal no constante. Se escoge $Z \in T_\lambda$ unitario. Una base de $\mathbb{D}$ definida en G es $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ donde $E_i = \phi_i Z$, i=1,2,3, $E_4 = Z$. Con esto, $2a_{ll} = \sum_{i=1}^{4} g((A\phi_l + \phi_l A)E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{4}\{-g(AE_i, E_i) + g(\phi_l A\phi_l E_i, E_i)\} = -\lambda - 3 + \lambda + 3 = 0$ en todo punto de G. Por otro lado, se introduce Z en (3.13) teniendo en cuenta las puntualizaciones anteriores, por lo que $0 = (4m-9)\lambda\phi_l Z - \phi_l Z - \phi_{l+2}\phi_{l+1}Z + \phi_{l+1}\phi_{l+2}Z = \{(4m-9)\lambda + a_{ll} + 1\}\phi_l Z$. Es claro $0 = (4m-9)\lambda + 1$. Esto significa que λ es constante en G, lo que es una contradicción. En consecuencia, si $m = 2$, M es de curvatura adaptada e isoparamétrica, por lo que se puede recurrir al Teorema 2.3.2.

En ambos casos se tienen los mismos tipos de hipersuperficies, por lo que ya sólo queda comprobar cuáles de ellos verifican (3.10).

a) Horosfera, tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, k=0,m-1. De la Tabla 1, existe un número real λ tal que $AX = \lambda X$ para todo $X \in \mathbb{D}$. Por lo tanto, se verifica (3.10).

b) Tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, k=1,...,m-2, totalmente geodésico. La Tabla 1 muestra $\mathbb{D} = T_{\lambda_1} \oplus T_{\lambda_2}$, donde $\lambda_1 = \coth(r)$, $\lambda_2 = \tanh(r)$. Además, T_{λ_i}, i=1,2 es cuaterniónico. Se toman $X \in T_{\lambda_1}$ unitario, $Y = \phi_1 X$, y $Z \in T_{\lambda_2}$ unitario y se introducen en (3.11), teniendo en cuenta (2.4) y (2.7), $0 = -2\lambda_1\phi_1 Z + 2\lambda_2\phi_1 Z$, de donde $\lambda_1 = \lambda_2$. Pero la ecuación $\coth(r) = \tanh(r)$ no tiene soluciones reales. Esta contradicción concluye el teorema. □

Corolario 3.2.1 **[OP4]** *No existen hipersuperfies reales de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$, tales que*

$$(R(X,Y)A)Z + (R(Y,Z)A)X + (R(Z,X)A)Y = 0 \tag{3.16}$$

para todos $X, Y, Z \in TM$.

Demostración: Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$, que verifica (3.16). Entonces M verifica (3.9). Sólo hay que comprobar cuáles de las hipersuperficies reales del Teorema 3.2.1 verifican (3.16). En todos los casos, de la Tabla 1, existen dos constantes reales no nulas x, y tales que

$$AX = xX + y\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k \tag{3.17}$$

para todo $X \in TM$. La primera identidad de Bianchi y (1.2) implican que (3.16) es equivalente a $R(X,Y)AZ + R(Y,Z)AX + R(Z,X)AY = 0$ para todos $X, Y, Z \in TM$. Se substituye (3.17) en la última ecuación recordando la primera identidad de Bianchi y que $y \neq 0$, por lo que $0 = \sum_{k=1}^{3}\{f_k(Z)R(X,Y)U_k + f_k(Y)R(Z,X)U_k + f_k(X)R(Y,Z)U_k\}$ para todos $X, Y, Z \in TM$. Se introducen $Y \in \mathbb{D}$ unitario, $Z = \phi_2 Y$, $X = U_1$ en esta última ecuación. De (2.11) y (3.17), entonces $0 = R(Y, \phi_2 Y)U_1 = -2U_3$. Esto constituye una contradicción que concluye la demostración. $\square$

Corolario 3.2.2 [OP4] *No existen hipersuperficies reales de* $\mathbb{Q}H^m$*,* $m \geq 2$*, que verifiquen* $R \cdot A = 0$*.*

Capítulo 4

El Tensor de Ricci.

4.1 Hipersuperficies Reales Einstein.

En este capítulo dedicamos nuestra atención al tensor de Ricci de tipo (1,1). El estudio de las variedades Einstein es siempre un tema interesante. En nuestro estudio dicha relevancia se ha de concretar en la clasificación de las hipersuperficies reales Einstein de $\mathbb{Q}H^m$. Sin embargo, la no existencia de tales hipersuperficies nos indujo a estudiar tres definiciones más débiles que permitieran obtener teoremas de clasificación. En [OP2] se incluyeron las definiciones de hipersuperficies reales casi-Einstein y pseudo-Einstein y en [OP5] la de hipersuperficies reales $\mathbb{D}$-Einstein.

Definición 4.1.1 *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Se dice que M es $\mathbb{D}$-Einstein si existe una función $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable que verifique*

$$SX = \rho X, \quad \text{para todo } X \in \mathbb{D}. \tag{4.1}$$

Recordemos que se había definido el tensor H de tipo (1,1) como $H = hA - A^2$, donde $h = traza(A)$, que es autoadjunto y que conmuta con A.

Lema 4.1.1 [OP2] *Sea M una hipersuperficie real conexa de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Supongamos que M es de curvatura adaptada y que existe una función $x : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $HX = xX$ para todo $X \in \mathbb{D}$. Entonces M es isoparamétrica.*

Demostración: Supongamos que M admite curvaturas principales no constantes en un abierto G. Por el Teorema 2.3.1, $AZ = 2Z$ para todo $Z \in \mathbb{D}^\perp$ y la función constante 1 es una curvatura principal en G. Restringiendo G si es necesario se puede suponer sin perder generalidad que la dimensión de cada distribución principal es constante en G y que ninguna otra curvatura principal toma los valores 1 y 2 en ningún punto de G. Dado $X \in T_1$, por la definición de H, $xX = HX = (h-1)X$, lo que implica

$$x = h - 1 \tag{4.2}$$

en G. Sea λ una curvatura principal en G distinta de 1 y 2. Dado $X \in T_\lambda$, análogamente, $xX = (h\lambda - \lambda^2)X$, de donde $x = h\lambda - \lambda^2$. Se sustituye (4.2) aquí y se obtiene $\lambda^2 - h\lambda + h - 1 = 0$. Esta ecuación es equivalente a $(\lambda - 1)(\lambda + 1 - h) = 0$. Como $\lambda \neq 1$ en G,

$$\lambda = h - 1 \tag{4.3}$$

De (4.3), necesariamente G admite exactamente tres curvaturas principales $\{2, 1, \lambda\}$ en cada punto. Sean $k = \dim T_\lambda$, $t = \dim T_1$ y $n = \dim T_2$. Como $h = traza(A)$, de (4.3) entonces $\lambda + 1 = h = 2n + k\lambda + t$, de donde $\lambda - k\lambda = 2n - 1 + t > 0$ y entonces $\lambda = \frac{2n-1+t}{1-k}$, que implica que λ es constante, lo que es una contradicción. $\square$

Teorema 4.1.1 [OP5] *Sea M una hipersuperficie real conexa $\mathbb{D}$-Einstein de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$. Entonces M es un abierto de una de las siguientes:*

(a) *un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, k=0,m-1,*

(b) *una horosfera.*

Demostración: Como M es $\mathbb{D}$-Einstein, de (4.1) y (2.12) se tiene $SX = \rho X = -(4m + 7)X + HX$ para todo $X \in \mathbb{D}$. En particular, $HX = xX$, para todo $X \in \mathbb{D}$, donde $x = \rho + 4m + 7$ es una función diferenciable en M. Se denota $\Lambda_p = \{X \in T_pM : H_pX = x(p)X\}$ para todo $p \in M$. Claramente, H conmuta con A, de manera que M admite una base local ortonormal de TM que diagonaliza H y A a la vez. En consecuencia, $\mathbb{D} \subset \Lambda$ y $A\Lambda \subset \Lambda$. Se discute sobre la dimensión de Λ.

Al tener que distinguir muchos casos particulares, hemos decidido partir la demostración en varios lemas. Una hipótesis necesaria en la demostración de los siguientes lemas es la constancia de las dimensiones de las distribuciones principales.

Lema 4.1.2 *Sea M una hipersuperficie real conexa $\mathbb{D}$-Einstein de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$. Si* $\dim \Lambda = 4m - 4$, *entonces M es de curvatura adaptada.*

Demostración: Como $\mathbb{D} \subset \Lambda$ y $\dim \Lambda = \dim \mathbb{D}$, entonces $\mathbb{D} = \Lambda$. Por lo tanto, $A\mathbb{D} \subseteq \mathbb{D}$, y M verifica la condición b). $\square$

Lema 4.1.3 *Sea M una hipersuperficie real $\mathbb{D}$-Einstein de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, tal que* $\dim \Lambda = 4m - 3$. *Entonces M verifica la condición b).*

Demostración: Supongamos que M no verifica la condición b) en algún punto $q \in M$. Por el Lema , existe un abierto conexo G de M tal que $q \in G$, M no verifica la condición b) en G y la base $\{U_1, U_2, U_3\}$ está globalmente definida en G. Salvo reordenación de subíndices 1,2,3 se puede suponer sin perder generalidad $U_1(p) \in \Lambda_p$, $T_pM = Span\{U_2, U_3\}(p) \oplus \Lambda_p$ y $(AU_i)(p) = (\mu_i U_i)(p)$, i=2,3, en todo punto $p \in G$. Si existieran un punto $p \in G$, $i \in \{2, 3\}$ y $j \in \{1, 2\}$ tales que $\mu_i(p) = \lambda_j(p)$ entonces $(HU_i)(p) = (xU_i)(p)$, lo que contradice la constancia de $\dim \Lambda$. En particular, la descomposición anterior es ortogonal. Además, U_1 no puede ser principal en ningún punto de G. Como $H_{|\Lambda} = xI_{|\Lambda} = (hA - A^2)_{|\Lambda}$, $A_{|\Lambda}$ en G tiene como máximo dos curvaturas principales, digamos λ_1, λ_2. Se define $V_{\lambda_i}(p) = \{X \in \Lambda_p : A_pX = \lambda_i(p)X\}$, i=1,2 para todo $p \in G$. Se puede suponer sin perder generalidad $\dim V_{\lambda_1} \geq \dim V_{\lambda_2}$ debido a que G es conexo y estas dimensiones son constantes. Si existiera un punto $q \in G$ tal que $\lambda_1(q) = \lambda_2(q)$, entonces $A_{|\mathbb{D}}(q) = (\lambda_1 I_{\mathbb{D}})(q)$ y M verifica la condición b) en $p \in G$, que es una contradicción. Entonces $\lambda_1 \neq \lambda_2$ en G. En lo sucesivo, todos los cálculos se realizarán en un entorno abierto de un punto $p \in G$ cualquiera salvo que se diga expresamente lo contrario. Como $\dim \Lambda$ es un número impar,

$$\dim V_{\lambda_1} > \dim V_{\lambda_2}, \quad \dim V_{\lambda_1} \geq 2m - 1, \quad 2m - 2 \geq \dim V_{\lambda_2} \ \text{ en } G \tag{4.4}$$

Ya que U_1 no es principal, se escogen $E \in V_{\lambda_1}$ y $F \in V_{\lambda_2}$ unitarios y dos funciones a, b diferenciables definidas en G tales que

$$U_1 = aE + bF, \quad a^2 + b^2 = 1, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0 \text{ en } G \tag{4.5}$$

Denotemos $\Gamma_1(p) = \{X \in V_{\lambda_1}(p) : g_p(X, E) = 0\}$, $\Gamma_2(p) = \{X \in V_{\lambda_2}(p) : g_p(X, F) = 0\}$, para todo $p \in G$. Dado $X \in \Gamma_i$, i=1,2, entonces $g(X, U_1) = ag(X, E) + bg(X, F) = 0$. Por lo tanto,

$$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \subseteq \mathbb{D}, \quad \dim \Gamma_1 \geq 2m - 2 \geq 4, \quad 2m - 3 \geq \dim \Gamma_2 \ \text{ en } G \tag{4.6}$$

Sean $X, Y \in \Gamma_1$. De (4.6) y (2.9) se tiene

$(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X =$

$$\begin{aligned} &= -2\sum_{k=1}^{3} g(\phi_k X, Y)U_k \\ &= \nabla_X(\lambda_1 Y) - A\nabla_X Y - \nabla_Y(\lambda_1 X) + A\nabla_Y X \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= X(\lambda_1)Y + \lambda_1\nabla_X Y + A[Y,X] - Y(\lambda_1)X - \lambda_1\nabla_Y X \\
&= (A-\lambda_1 I)[Y,X] + X(\lambda_1)Y - Y(\lambda_1)X
\end{aligned}
$$

Tomando la componente en Γ_1 en la última igualdad, se tiene $X(\lambda_1)Y - Y(\lambda_1)X = 0$ y al ser $\dim\Gamma_1 \geq 4$, entonces

$$
X(\lambda_1) = 0 \quad \text{para todo } X \in \Gamma_1 \;\text{ en } G \tag{4.7}
$$

De (4.7) se tiene $(A-\lambda_1 I)[Y,X] = -2\sum_{k=1}^{3} g(\phi_k X, Y)U_k$, para todo $X, Y \in \Gamma_1$. Se multiplica escalarmente esta ecuación por E, teniendo en cuenta (4.5), y se obtiene $0 = ag(\phi_1 X, Y)$. Como $a \neq 0$ en G, entonces

$$
\phi_1\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1^{\perp} \;\text{ en } G \tag{4.8}
$$

Si se escoge $X \in \Gamma_1$, de (2.9), (4.5), (4.6) y (4.7),

$(\nabla_X A)E - (\nabla_E A)X =$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{k=1}^{3}\{f_k(E)\phi_k X - 2g(\phi_k X, E)U_k\} = -a\phi_1 X - 2\sum_{k=1}^{3} g(\phi_k X, E)U_k \\
&= \nabla_X(\lambda_1 E) - A\nabla_X E - \nabla_E(\lambda_1 X) + A\nabla_E X \\
&\quad = A[E,X] + \lambda_1\nabla_X E - E(\lambda_1)X - \lambda_1\nabla_E X \\
&\quad = (A-\lambda_1 I)[E,X] - E(\lambda_1)X
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
(A-\lambda_1 I)[E,X] - E(\lambda_1)X = -a\phi_1 X - 2\sum_{k=1}^{3} g(\phi_k X, E)U_k
$$

para todo $X \in \Gamma_1$. Se multiplica escalarmente esta ecuación por E, y de (4.5) se tiene $0 = 3ag(\phi_1 X, E)$, y como $a \neq 0$ en G, $0 = g(\phi_1 X, E)$ para todo $X \in \Gamma_1$. De aquí y (4.8), $\phi_1 V_{\lambda_1} \subseteq V_{\lambda_1}^{\perp} \subseteq V_{\lambda_2} \oplus Span\{U_2, U_3\}$. Dados $X \in V_{\lambda_1}$, i=2,3, de (2.3) y (2.7), $g(\phi_1 X, U_i) = -g(X, \phi_1 U_i) = 0$. Esto significa $\phi_1 V_{\lambda_1} \subset V_{\lambda_2}$, por lo que se puede definir $\psi = \phi_{1|V_{\lambda_1}} : V_{\lambda_1} \longrightarrow V_{\lambda_2}$. De (4.6), $2m-2 \geq \dim \mathrm{Im}\psi = \dim V_{\lambda_1} - \dim\ker\psi \geq 2m-1-\dim\ker\psi$, es decir, $\dim\ker\psi \geq 1$ y como $\ker\psi \subseteq \ker\phi_1$, entonces $U_1 \in V_{\lambda_1}$ en G. Esto es una contradicción que finaliza el lema. $\square$

Lema 4.1.4 *Sea M una hipersuperficie real $\mathbb{D}$-Einstein de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, tal que $\dim\Lambda = 4m-2$. Entonces M es de curvatura adaptada.*

Demostración: Supongamos que M no verifica la condición b) en cierto punto $q \in M$. Por el Lema 3.1.1, existe un abierto conexo O de M tal que M no verifica la condición b) en ningún punto de O y la base $\{U_1, U_2, U_3\}$ está globalmente definida en O. Salvo reordenación de subíndices, 1,2,3, se puede suponer sin perder generalidad $U_1(p), U_2(p) \in \Lambda_p$ para todo $p \in O$, y $AU_3 = \mu U_3$ para cierta función diferenciable μ definida en O. Denotemos V_{λ_i}, i=1,2, al igual que en el Lema anterior. Observemos que la descomposición $T_pM = V_{\lambda_1}(p) \oplus V_{\lambda_2}(p) \oplus Span\{U_3(p)\}$ es ortogonal. Como la dimension de V_{λ_i}, i=1,2, es constante, podemos suponer $\dim V_{\lambda_1} \geq \dim V_{\lambda_2}$. Se eligen $E_1, E_2 \in V_{\lambda_1}$, $F_1, F_2 \in V_{\lambda_2}$ unitarios definidos en O tales que

$$U_1 = a_1E_1 + b_1F_1, \quad a_1^2 + b_1^2 = 1 \text{ en } O \tag{4.9}$$

$$U_2 = a_2E_2 + b_2F_2, \quad a_2^2 + b_2^2 = 1 \text{ en } O \tag{4.10}$$

Sea $G = \{p \in O : (a_1a_2b_1b_2)(p) \neq 0\}$. Claramente, G es abierto de M y M no verifica la condición b) en ningún punto de G. Además, $U_k \notin V_{\lambda_i}$ para todos k=1,2,3 e $i = 1, 2$. Esto implica

$$\dim(\mathbb{D}^{\perp} \cap V_{\lambda_i}) = \{0\}, \quad \text{i=1,2, en } O \tag{4.11}$$

Se distinguen los siguientes casos:

<u>CASO A:</u> Se define G_A como el conjunto de puntos de $p \in G$ tales que $\{E_1(p), E_2(p)\}$, y $\{F_1(p), F_2(p)\}$ son linealmente dependientes. Dado cualquier $p \in G_A$, el conjunto $\{E_1(p), F_1(p), U_3(p)\}$ es una base de vectores principales que pertenecen a $\mathbb{D}^{\perp}(p)$ y así M verifica la condición b) en $p \in G_A$, que es una contradicción. Esto significa que G_A es vacío.

<u>CASO B:</u> Sea G_B el conjunto de puntos de $p \in G$ tales que $\{E_1(p), E_2(p), F_1(p), F_2(p)\}$ es un sistema linealmente independiente. Claramente, G_B es un subconjunto abierto de M. Durante este caso, todos los cálculos se realizarán en un entorno abierto de cualquier punto $p \in G_B$. Se definen $\Gamma_1 = \{X \in V_{\lambda_1} : g(X, E_1) = g(X, E_2) = 0\}$, $\Gamma_2 = \{X \in V_{\lambda_2} : g(X, F_1) = g(X, F_2) = 0\}$. Claramente, $\dim \Gamma_i = \dim V_{\lambda_i} - 2$, i=1,2. Como $\dim \Lambda$ es un número par,

$$\dim V_{\lambda_1} \geq 2m - 1 \geq \dim V_{\lambda_2}, \quad \dim \Gamma_1 \geq 2m - 3 \geq \dim \Gamma_2 \quad \text{en } O \tag{4.12}$$

Al ser $m \geq 3$, entonces $\dim \Gamma_1 \geq 3$. Se elige $X \in \Gamma_1$. De (4.9) y (4.10), $g(X, U_i) = a_ig(X, E_i) + b_ig(X, F_i) = 0$, i=1,2. En consecuencia,

$$\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \subseteq \mathbb{D} \tag{4.13}$$

Se escogen $X, Y \in \Gamma_1$. Por los mismos cálculos que en el Lema 4.1.3,

$$X(\lambda_1) = 0 \tag{4.14}$$

$$(A - \lambda_1 I)[Y, X] = -2\sum_{k=1}^{3} g(\phi_k X, Y)U_k \tag{4.15}$$

para todos $X, Y \in \Gamma_1$. Se multiplica escalarmente (4.15) por E_1 (respectivamente por E_2) y, teniendo en cuenta (4.9) y (4.10), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= g(\phi_1 X, Y)a_1 + g(\phi_2 X, Y)a_2 g(E_1, E_2) \\ 0 &= g(\phi_1 X, Y)a_1 g(E_1, E_2) + g(\phi_2 X, Y)a_2 \end{aligned}$$

Al ser E_1 y E_2 unitarios y linealmente independientes, $g(E_1, E_2)^2 \neq 1$, y el anterior sistema lineal homogéneo admite solución única, que es $a_1 g(\phi_1 X, Y) = a_2 g(\phi_2 X, Y) = 0$. Además, $a_1 a_2 \neq 0$ en G_B, y de (4.13) se tiene

$$\phi_1\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1^{\perp} \cap \mathbb{D}, \quad \phi_2\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1^{\perp} \cap \mathbb{D} \tag{4.16}$$

Se elige $X \in \Gamma_1$. De (2.9), (4.9), (4.13) y (4.14),

$$\begin{aligned} (\nabla_X A)E_1 - (\nabla_{E_1} A)X = \\ &= \sum_{k=1}^{3}\{-f_k(E_1)\phi_k X + 2g(\phi_k X, E_1)U_k\} \\ &= -a_1\phi_1 X - a_2 g(E_1, E_2)\phi_2 X + 2\sum_{k=1}^{3} g(\phi_k X, E_1)U_k \\ &= \lambda_1\nabla_x E_1 - A\nabla_X E_1 - E_1(\lambda_1)X - \lambda_1\nabla_{E_1} X + A\nabla_{E_1} X \\ &= (A - \lambda_1 I)[E_1, X] - E_1(\lambda_1)X \end{aligned}$$

Y uniendo todo,

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1)[E_1, X] - E_1(\lambda_1)X &= -a_1\phi_1 X - a_2 g(E_1, E_2)\phi_2 X \\ &+ 2\sum_{k=1}^{3} g(\phi_k X, E_1)U_k\} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Igualmente,

$$(4.18) \qquad \begin{aligned} (A-\lambda_1)[E_2,X]-E_2(\lambda_1)X &= -a_1 g(E_1,E_2)\phi_1 X - a_2\phi_2 X \\ &+ 2\sum_{k=1}^{3} g(\phi_k X, E_2)U_k\} \end{aligned}$$

Se multiplica escalarmente (4.17) por E_1 (respectivamente, (4.18) por E_1) y se obtiene

$$(4.19) \qquad 0 = a_1 g(\phi_1 X, E_1) + a_2 g(E_1,E_2) g(\phi_2 X, E_1)$$

respectivamente

$$(4.20) \qquad \begin{aligned} 0 &= a_1 g(E_1,E_2) g(\phi_1 X, E_1) + a_2 g(\phi_2 X, E_1) + 2a_1 g(\phi_1 X, E_2) \\ &+ 2a_2 g(E_1,E_2) g(\phi_2 X, E_2) \end{aligned}$$

El mismo procedimiento con E_2 da

$$(4.21) \quad \begin{aligned} 0 &= a_1 g(\phi_1 X, E_2) + a_2 g(E_1,E_2) g(\phi_2 X, E_2) + 2a_1 g(E_1,E_2) g(\phi_1 X, E_1) \\ &+ 2a_2 g(\phi_2 X, E_1) \end{aligned}$$

y

$$(4.22) \qquad 0 = a_1 g(E_1,E_2) g(\phi_1 X, E_2) + a_2 g(\phi_2 X, E_2)$$

Estas cuatro últimas ecuaciones se pueden considerar un sistema lineal homogéneo cuyas incógnitas son $g(\phi_1 X, E_1)$, $g(\phi_2 X, E_1)$, $g(\phi_1 X, E_2)$ y $g(\phi_2 X, E_2)$. El determinante de la matriz de coeficientes es $-3a_1^2 a_2^2((g(E_1,E_2)^2-1)^2$. Como E_1 y E_2 son linealmente independientes y unitarios y $a_1 a_2 \neq 0$, dicho determinante no se anula. En consecuencia, $g(\phi_1 X, E_1) = g(\phi_2 X, E_1) = g(\phi_1 X, E_2) = g(\phi_2 X, E_2) = 0$. Esto junto a (4.16) implica

$$(4.23) \qquad \phi_1 \Gamma_1 \subseteq V_{\lambda_1}^{\perp} \cap \mathbb{D}, \quad \phi_2 \Gamma_1 \subseteq V_{\lambda_1}^{\perp} \cap \mathbb{D}$$

Recordemos $V_{\lambda_1}^{\perp} = V_{\lambda_2} \oplus Span\{U_3\}$, de donde $V_{\lambda_1}^{\perp} \cap \mathbb{D} = V_{\lambda_2} \cap \mathbb{D}$. Por otro lado, $V_{\lambda_2} \cap \mathbb{D} = \Gamma_2$. En efecto, si $X \in V_{\lambda_2} \cap \mathbb{D}$ entonces $X \in V_{\lambda_2}$ y $g(X, U_1) = g(X, U_2) = 0$, y así de (4.9) y (4.10), $0 = g(X, U_i) = a_i g(X, E_i) + b_i g(X, F_i) = b_i g(X, F_i)$, i=1,2, y como $b_1 b_2 \neq 0$ en G_B, se ha de cumplir $X \in \Gamma_2$. De aquí y (4.23) se deduce

$$\phi_1 \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2, \quad \phi_2 \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \tag{4.24}$$

De (4.12), (4.13) y (4.24), $\dim \Gamma_2 \leq \dim \Gamma_1 = \dim \phi_1 \Gamma_1 \leq \dim \Gamma_2$, esto es,

$$\phi_1 \Gamma_1 = \Gamma_2, \quad \phi_2 \Gamma_1 = \Gamma_2, \quad \dim \Gamma_1 = \dim \Gamma_2 = 2m - 3 \tag{4.25}$$

Se elige $X \in \Gamma_1$. De (4.13) y (4.25), $\phi_3 X = \phi_1 \phi_2 X \in \Gamma_1$, que implica, $\phi_3 \Gamma_1 = \Gamma_1$, y así Γ_1 ha de tener dimensión par. Esto contradice (4.25), es decir, G_B es vacío.

CASO C: Se define G_C como el conjunto de puntos $p \in G$ tales que $\{E_1(p), E_2(p)\}$ es un sistema linealmente independiente y $\{F_1(p), F_2(p)\}$ es un sistema linealmente dependiente. Veamos que G_C es abierto. Dado $p \in G_C$, existe un entorno abierto de p, Ω tal que $\Omega \subset G$ y $E_1(q), E_2(q)$ son linealmente independientes para todo $q \in \Omega$. Dado $q \in \Omega$, en el caso de que $F_1(q), F_2(q)$ fueran linealmente independientes, entonces $q \in G_B$, que es una contradicción, por lo que $q \in G_C$, es decir, $\Omega \subset G_C$. Durante este caso, todos los cálculos se realizarán en un entorno abierto de cualquier punto $p \in G_C$. Los mismos cálculos que en el Caso B implican

$$\phi_1 \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2, \quad \phi_1 \Gamma_1 \subseteq V_{\lambda_1}^{\perp} \tag{4.26}$$

Si en las ecuaciones (4.17) y (4.18) se toma la componente en Γ_1, entonces $E_1(\lambda_1) = E_2(\lambda_1) = 0$. Teniendo esto en cuenta, de (2.9),

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{E_1} A)E_2 - (\nabla_{E_2} A)E_1 = \\
&\qquad = \sum_{k=1}^{3} \{-f_k(E_1)\phi_k E_2 + f_k(E_2)\phi_k E_1 + 2g(\phi_k E_1, E_2)U_k\} \\
&\qquad = \lambda_1 \nabla_{E_1} E_2 - A\nabla_{E_1} E_2 - \lambda_1 \nabla_{E_2} E_1 + A\nabla_{E_2} E_1 \\
&\qquad\quad = (A - \lambda_1 I)[E_2, E_1]
\end{aligned}$$

Y de aquí,

$$(A - \lambda_1 I)[E_2, E_1] = \sum_{k=1}^{3} \{-f_k(E_1)\phi_k E_2 + f_k(E_2)\phi_k E_1 + 2g(\phi_k E_1, E_2)U_k\} \tag{4.27}$$

Si se multiplica escalarmente esta ecuación por E_1, de (4.9) y (4.10),

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{3}\{f_k(E_1)g(\phi_k E_2, E_1) + 2g(\phi_k E_1, E_2)g(U_k, E_1) \\ &= a_1 g(\phi_1 E_2, E_1) + a_2 g(E_1, E_2)g(\phi_2 E_2, E_1) \\ &\quad +2g(\phi_1 E_1, E_2)a_1 + 2g(\phi_2 E_1, E_2)a_2 g(E_1, E_2) \\ &= a_1 g(\phi_1 E_1, E_2) + a_2 g(E_1, E_2)g(\phi_2 E_1, E_2) \end{aligned}$$

$$0 = a_1 g(\phi_1 E_1, E_2) + a_2 g(E_1, E_2)g(\phi_2 E_1, E_2) \tag{4.28}$$

Por otro lado, se multiplica escalarmente (4.27) por E_2, y de (4.9) y (4.10),

$$0 = a_1 g(E_1, E_2)g(\phi_1 E_1, E_2) + a_2 g(\phi_2 E_1, E_2) \tag{4.29}$$

Las ecuaciones (4.28) y (4.29) forman un sistema lineal homogéneo cuyas incógnitas son $a_1 g(\phi_1 E_1, E_2)$ y $a_2 g(\phi_2 E_1, E_2)$. El determinante de matriz de coeficientes es $1 - g(E_1, E_2)^2$ que no se anula en ningún punto de G_C porque E_1, E_2 son linealmente independientes y unitarios. Por lo tanto, $0 = a_1 g(\phi_1 E_1, E_2) = a_2 g(\phi_2 E_1, E_2)$ y como $a_1 a_2 \neq 0$ en G, entonces $g(\phi_1 E_1, E_2) = g(\phi_2 E_1, E_2) = 0$. Esto junto a (4.26) implica

$$\phi_1 V_{\lambda_1} \subseteq V_{\lambda_1}^{\perp} = V_{\lambda_2} \oplus Span\{U_3\} \tag{4.30}$$

Obsérvese $\dim \Gamma_1 + \dim \Gamma_2 = \dim V_{\lambda_1} - 2 + \dim V_{\lambda_2} - 1 = 4m - 5$. De (4.26), $\dim \Gamma_1 \leq \dim \Gamma_2$, de manera que $\dim \Gamma_1 = 2m - 3$, que implica

$$\dim V_{\lambda_1} = 2m - 1, \quad \dim \Gamma_2 = 2m - 2 \tag{4.31}$$

Se multiplica (4.9) escalarmente por $\phi_1 F_1$, y de (2.7) y $a_1 \neq 0$ en G,

$$0 = g(\phi_1 E_1, F_1) \tag{4.32}$$

Igualmente, se multiplica escalarmente (4.10) por $\phi_1 F_2$, de (2.7), $a_2 \neq 0$ en G, y que F_1, F_2 son linealmente dependientes,

$$0 = g(\phi_1 E_2, F_1) \tag{4.33}$$

De (4.30), (4.32), (4.33) y la definición de Γ_2, se tiene $\phi_1 V_{\lambda_1} \subseteq \Gamma_2 \oplus Span\{U_3\}$. Como $U_1 \notin V_{\lambda_1}$, $\phi_{1|V_{\lambda_1}}$ es inyectiva, de manera que por (4.31), $2m-1 = \dim V_{\lambda_1} = \dim \phi_1 V_{\lambda_1} \leq \dim \Gamma_2 + 1 = 2m-1$. Se verifica $\phi_1 V_{\lambda_1} = \Gamma_2 \oplus Span\{U_3\}$. Se puede eligir $Z \in V_{\lambda_1}$ tal que $U_3 = \phi_1 Z$. De (2.3) y (2.5), $U_2 = -\phi_1 U_3 = -\phi_1^2 Z = Z - f_1(Z)U_1$, donde $Z \in \mathbb{D}^{\perp}$, es decir, $1 \leq \dim V_{\lambda_1} \cap \mathbb{D}^{\perp}$. Esto contradice (4.11), obligando a que G_C sea vacío.

<u>CASO D:</u> Se define G_D como el conjunto de puntos $p \in G$ tales que $\{F_1(p), F_2(p)\}$ es un sistema linealmente independiente y $\{E_1(p), E_2(p)\}$ es un sistema linealmente dependiente. Se llega a contradicción por un razonamiento análogo al Caso C, de manera que G_D es vacío.

Estos cuatro casos obligan a que G sea vacío. Si para algún punto $q \in O$, se verifica $(a_1 a_2)(q) = 0$ o $(b_1 b_2)(q) = 0$, entonces M verificaría la condición b) en $q \in O$. Por lo tanto, exactamente una de las funciones a_1, a_2, b_1 y b_2 es idénticamente cero en O, al ser este conexo. El caso en que a_1 o a_2 son idénticamente cero en O no se verifica por un razonamiento similar al del Lema 4.1.3. Finalmente, si b_1 o b_2 son idénticamente cero en O, se repiten los cálculos del Caso C con ligeras modificaciones. Por lo tanto, O es también vacío. Esto concluye la demostración. $\square$

Lema 4.1.5 *Sea M una hipersuperficie real $\mathbb{D}$-Einstein $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, tal que* $\dim \Lambda = 4m-1$. *Entonces M es de curvatura adaptada.*

Demostración: En este caso $\Lambda = TM$ y M tiene exactamente dos curvaturas principales distintas en cada punto. Sólo hay que recurrir al Teorema 3.1.3. $\square$

Como ya se señaló, M admite un abierto denso O en el que la dimensión de cada distribución principal es constante. De los Lemas 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4 y 4.1.5, M verifica la condición b) en O. Además, $H_p X = x(p)X$ para todo $X \in T_p M$ y todo $p \in O$. Por el Lema 4.1.1, O es una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$ con curvaturas principales localmente constantes. En consecuencia, O es localmente congruente a una de las hipersuperficies reales que aparecen en el Teorema 2.3.2. Pero al ser O denso, M tiene curvaturas principales localmente constantes. La conexión de M obliga a que M tenga curvaturas principales constantes y que sea exactamente un abierto de las hipersuperficies del Teorema 2.3.2. Veamos cuáles de ellas son $\mathbb{D}$-Einstein.

a) Horosfera, tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, k=0,m-1. En todos estos casos, por la Tabla 1, existe una constante real λ tal que $AX = \lambda X$ para todo $X \in \mathbb{D}$. Entonces $SX = (-4m - 7 + h\lambda - \lambda^2)X$ para todo $X \in \mathbb{D}$. Estos modelos sí son $\mathbb{D}$-Einstein.

b) Tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, $k \in \{1, \ldots, m-2\}$ totalmente geodésico. De la Tabla 1, las curvaturas principales son $\mu = 2\coth(2r)$, $\lambda_1 = \coth(r)$, $\lambda_2 = \tanh(r)$ con multiplicidades respectivas 3, 4k y 4(m-k-1). Supongamos que M es $\mathbb{D}$-Einstein. En tal caso, dado $X \in T_{\lambda_i}$, i=1,2, de (2.12), $\rho X = SX = (-4m - 7 + h\lambda_i - \lambda_i^2)X$, de donde $h\lambda_1 - \lambda_1^2 = h\lambda_2 - \lambda_2^2$, es decir, $0 = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - h)$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $h = \lambda_1 + \lambda_2$. Pero al ser $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 = h = 3\mu + 4k\lambda_1 + 4(m-k-1)\lambda_2$ implica $0 = (4k+2)\lambda_1 + (4m - 4k - 2)\lambda_2 > 0$, lo que es una contradicción.

c) Tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{C}H^m$ totalmente geodésico. Se comprueba que este modelo no es $\mathbb{D}$-Einstein mediante el mismo método que el caso anterior. La expresión final queda $0 = 4k\lambda_1 + 4(m-k-1)\lambda_2 + 4\tanh(2r) > 0$. □

En el estudio que realizaron Martínez y Pérez en [MP], definieron las hipersuperficies reales pseudo-Einstein y casi-Eintein del espacio proyectivo cuaterniónico. A partir de este momento se van a formalizar las mismas definiciones que en el caso proyectivo y se van a clasificar. Las primeras son en realidad un caso particular de las $\mathbb{D}$-Einstein, por lo que se obtiene su clasificación como corolario del Teorema 4.1.1, aunque en [OP2] se incluya una demostración del mismo resultado que no usa dicho teorema.

Definición 4.1.2 *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Se dice que M es pseudo-Einstein si existen dos funciones diferenciables $a, b : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $SX = aX + b\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k$ para todo $X \in TM$.*

Corolario 4.1.1 [OP2] *Sea M una hipersuperficie real pseudo-Einstein conexa de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$. Entonces M es un abierto de una de las siguientes:*

(a) *un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, k=0,m-1, totalmente geodésico,*

(b) *una horosfera.*

Demostración: Supongamos que M es una hipersuperficie real pseudo-Einstein de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$. En tal caso, existen dos funciones diferenciables $a, b : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $SX = aX + b\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k$ para todo $X \in TM$. En particular, si $X \in \mathbb{D}$, entonces $SX = aX$, es decir, M es $\mathbb{D}$-Einstein. Sólo hay que contrastar cuáles de las hipersuperficies reales del Teorema 4.1.1 son pseudo-Einstein. Como ya sabemos, estas hipersuperficies admiten dos constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $AX = aX + b\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k$ para todo $X \in TM$. De (2.12), dado $X \in TM$,

$$\begin{aligned} SX + (4m+7)X - 3\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k &= (hA - A^2)X \\ &= haX + hb\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k - aAX - b\sum_{k=1}^{3} f_k(X)AU_k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= aX + hb\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k - a^2X - ab\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k - b(a+b)\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k \\
&= (ha-a^2)X + (hb-2ab-b^2)\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k
\end{aligned}
$$

luego $SX = (ha-4m-7-a^2)X + (hb-2ab-b^2+3)\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k$, es decir, todas ellas son pseudo-Einstein. $\square$

A continuación estudiamos las hipersuperficies reales casi-Einstein. Aunque se podría realizar una demostración en la que se haga uso del Teorema 4.1.1, el precio a pagar sería el de no clasificar cuando la dimensión de $\mathbb{Q}H^m$, m fuera 2. A cambio de realizar una demostración que no utilice dicho teorema se obtiene la clasificación sin restricciones sobre la dimensión.

Definición 4.1.3 *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Se dice que M es casi-Einstein si existen dos funciones diferenciables $a, b : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $SX = aX + b\sum_{k=1}^{3} f_k(AX)U_k$ para todo $X \in TM$.*

Teorema 4.1.2 [OP2] *Sea M una hipersuperficie real casi-Einstein conexa de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Entoces M es un abierto de una de las siguientes:*

(a) *un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, k=0,m-1, totalmente geodésico,*

(b) *una horosfera.*

Demostración: De la definición de hipersuperficie real casi-Einstein, la definición de H y (2.12), se tiene

$$
\begin{aligned}
SX &= -(4m+7)X + 3\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k + (hA-A^2)X \\
&= aX + b\sum_{k=1}^{3} f_k(AX)U_k
\end{aligned}
$$

de donde

$$HX = (a + 4m + 7)X + b\sum_{k=1}^{3} f_k(AX)U_k - 3\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k \tag{4.34}$$

para todo $X \in TM$. Como H es autoadjunto, dados $X \in \mathbb{D}$, $Y \in \mathbb{D}^{\perp}$, por (4.34) se tiene

$$\begin{aligned}
g(HX, Y) &= b\sum_{k=1}^{3} f_k(AX)f_k(Y) = bg(AX, Y) \\
&= \\
g(X, HY) &= (a + 4m + 7)g(X, Y) + b\sum_{k=1}^{3} f_k(AY)f_k(X) - 3\sum_{k=1}^{3} f_k(X)f_k(Y) \\
&= 0
\end{aligned}$$

de donde

$$bg(AX, Y) = 0 \tag{4.35}$$

para todos $X \in \mathbb{D}$, $Y \in \mathbb{D}^{\perp}$. Sean $M_1 = \{p \in M : b(p) \neq 0\}$, $M_2 = \{p \in M : b(p) = 0\}$. De (4.35), M verifica la condición b) en M_1. Dado $p \in M_2$, la ecuación (4.34) se transforma en

$$H_pX = (a(p) + 4m + 7)X - 3\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k(p) \tag{4.36}$$

para todo $X \in T_pM$, con $p \in M_2$. El objetivo es demostrar que M también verifica la condición b) en M_2. Por comodidad, se prescindirá de escribir el punto en que se esté trabajando, aunque sin perder de vista que se está eligiendo en M_2. Como $AH = HA$ se tiene de (4.36) que dado $X \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
HAX &= (a + 4m + 7)AX - 3\sum_{k=1}^{3} f_k(AX)U_k = \\
AHX &= (a + 4m + 7)AX - 3\sum_{k=1}^{3} f_k(X)AU_k = (a + 4m + 7)AX
\end{aligned}$$

de donde $\sum_{k=1}^3 f_k(AX)U_k = 0$. De aquí, dados $X \in \mathbb{D}$, $Y \in \mathbb{D}^\perp$, entonces $0 = \sum_{k=1}^3 f_k(AX)f_k(Y) = g(AX,Y)$, por lo que, efectivamente, M verifica la condición b) en M_2. Al ser $M = M_1 \cup M_2$, entonces M es de curvatura adaptada. La ecuación (4.34) se transforma en $HX = (a+4m+7)X$ para todo $X \in \mathbb{D}$. Por el Lema 4.1.1, M es isoparamétrica. Sólo queda comprobar cuáles de las hipersuperficies reales que aparecen en el Teorema 2.3.2 son casi-Einstein.

a) Horosfera, tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, k=0,m-1. En todos estos casos, por la Tabla 1, existen dos constantes reales (y positivas) λ y μ tales que $AX = \lambda X + \mu \sum_{k=1}^3 f_k(X)U_k$ para todo $X \in TM$. Entonces

$$\begin{aligned}
SX &= -(4m+7)X + 3\sum_{k=1}^3 f_k(X)U_k + (hA - A^2)X \\
&= -(4m+7)X + 3\sum_{k=1}^3 f_k(X)U_k + (h\lambda - \lambda^2)X + (h\mu - 2\lambda\mu - \mu^2)\sum_{k=1}^3 f_k(X)U_k \\
&= (h\lambda - \lambda^2 - 4m - 7)X + (3 + h\mu - 2\lambda\mu - \mu^2)\sum_{k=1}^3 f_k(X)U_k \\
&= (h\lambda - \lambda^2 - 4m - 7)X + \frac{3 + h\mu - 2\lambda\mu - \mu^2}{\lambda+\mu}\sum_{k=1}^3 f_k((\lambda+\mu)X)U_k \\
&= (h\lambda - \lambda^2 - 4m - 7)X + \frac{3 + h\mu - 2\lambda\mu - \mu^2}{\lambda+\mu}\sum_{k=1}^3 f_k(AX)U_k
\end{aligned}$$

Esto muestra que, efectivamente, M es casi-Einstein.

b) Tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, $k \in \{1, \ldots, m-2\}$, totalmente geodésico. Exactamente los mismos cálculos realizados para comprobar que este ejemplo no es $\mathbb{D}$-Einstein sirven para demostrar que tampoco es casi-Einstein.

c) Tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{C}H^m$ totalmente geodésico. Se pueden repetir los cálculos realizados para comprobar que este ejemplo no es $\mathbb{D}$-Einstein, obteniendo que tampoco es casi-Einstein. $\square$

Corolario 4.1.2 [OP2] *No existen hipersuperficies reales Einstein en $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$.*

Demostración: Supongamos que existe una hipersuperficie real Einstein M en $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. Entonces M es casi-Einstein con $b = 0$. Sólo tenemos que comprobar cuál de las hipersuperficies reales que aparecen en el Teorema 4.1.2 es Einstein. En todos los casos, por la Tabla 1, existen dos constantes $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$AX = xX + (y - x)\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k \tag{4.37}$$

para todo $X \in TM$. Se eligen $X \in \mathbb{D}$, $Y \in \mathbb{D}^{\perp}$. De (2.12) y (4.37) se tiene

$$SX = (-4m - 7 + hx - x^2)X, \quad SY = (-4m - 4 + hy - y^2)Y$$

Y al ser M Einstein, $-4m - 7 + hx - x^2 = -4m - 4 + hy - y^2$, es decir,

$$x^2 - hx - y^2 + hy + 3 = 0 \tag{4.38}$$

a) Hiperesfera geodésica. En este modelo, $y = 2\coth(2r) = \coth(r) + \tanh(r)$, $x = \coth(r)$, $h = (4m-4)\coth(r) + 6\coth(2r) = (4m-1)\coth(r) + 3\tanh(r)$. Se introduce esta información en (4.37) y se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \coth^2(r) - ((4m-1)\coth(r) + 3\tanh(r))\coth(r) - (\coth(r) + \tanh(r))^2 \\ &\quad +((4m-1)\coth(r) + 3\tanh(r))(\coth(r) + \tanh(r)) + 3 \\ &= 4m + 2\tanh^2(r) > 0 \end{aligned}$$

Que es una contradicción.

b) Tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^{m-1}$ totalmente geodésico. Ahora $x = \tanh(r)$, $y = 2\coth(2r) = \coth(r) + \tanh(r)$, $h = 3\coth(r) + (4m-1)\tanh(r)$. Se introduce en (4.38) y se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \tanh^2(r) - (3\coth(r) + (4m-1)\tanh(r))\tanh(r) - (\coth(r) + \tanh(r))^2 \\ &\quad +(3\coth(r) + (4m-1)\tanh(r))(\coth(r) + \tanh(r)) + 3 \\ &= 2\coth^2(r) + 4m > 0 \end{aligned}$$

Esto es de nuevo una contradicción.

c) Horosfera. Finalmente $x = 1$, $y = 2$, $h = 4m + 2$. Se introduce en (4.38) y entonces

$$0 = 1 - (4m + 2) - 4 + 2(4m + 2) + 3 = 4m + 2$$

Esta contradicción finaliza el corolario. $\square$

4.2 El paralelismo del tensor de Ricci.

En esta sección se plantea la clasificación de las hipersuperficies reales de $\mathbb{Q}H^m$ cuyo tensor de Ricci sea paralelo. El problema no se resuelve directamente, sino que se escogen condiciones más débiles y se obtiene como corolario la no existencia de hipersuperficies reales de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, con tensor de Ricci paralelo. El camino escogido es bastante parecido al seguido en el estudio del paralelismo del endomorfismo de Weingarten, es decir, se ha planteado la acción del operador de curvatura sobre el tensor de Ricci de tipo (1,1). El esquema se repite, teniendo que llegar hasta una condición bastante débil que permite clasificar, obteniendo como consecuencia varios resultados de no existencia.

El siguiente resultado es una caracterización de las hipersuperficies reales $\mathbb{D}$-Einstein.

Teorema 4.2.1 [**OP5**] *Sea M una hipersuperficie real conexa de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$. Supongamos que M verifica*

$$(R(X,Y)S)Z + (R(Y,Z)S)X + (R(Z,X)S)Y = 0$$

para todos $X, Y, Z \in \mathbb{D}$. Entonces M es un abierto de una de las siguientes:

(a) *un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, k=0,m-1, totalmente geodésico,*

(b) *una horosfera.*

Demostración: De la primera identidad de Bianchi y (1.2), la anterior ecuación es equivalente a

$$R(X,Y)SZ + R(Y,Z)SX + R(Z,X)SY = 0 \tag{4.39}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathbb{D}$. De (2.12) y (2.11) se desarrolla esta última ecuación y se obtiene

$$\begin{aligned} 0 \; = \; & \sum_{k=1}^{3}\{2g(\phi_k Y, Z)\phi_k X + 2g(\phi_k Z, X)\phi_k Y + 2g(\phi_k X, Y)\phi_k Z \\ & + \; g((S\phi_k + \phi_k S)Z, Y)\phi_k X + g((S\phi_k + \phi_k S)X, Z)\phi_k Y \\ & + \; g((S\phi_k + \phi_k S)Y, X)\phi_k Z\} + g((SA - AS)Y, Z)AX \\ & + \; g((SA - AS)Z, X)AY + g((SA - AS)X, Y)AZ \end{aligned} \tag{4.40}$$

para todos $X, Y, Z \in \mathbb{D}$. Se fija $p \in M$ y se escoge G un entorno abierto conexo de p en M en donde se realizarán todos los cálculos, aunque no se haga mención explícita por comodidad. Sea $\{E_1, ..., E_{4m-4}\}$ una base local ortonormal de $\mathbb{D}$. Restringiendo G si es necesario, se supone que la base está definida en G. Se escogen $Z = E_j, Y = \phi_1 E_j$, j=1,...,4m-4, y se introducen en (4.40), obteniendo

$$
\begin{array}{lrcl}
 & 0 & = & \{g(E_j, SE_j) + g(\phi_1 E_j, S\phi_1 E_j)\}\phi_1 X \\
 & & + & \{g(\phi_3 E_j, SE_j) + g(\phi_2 E_j, S\phi_1 E_j)\}\phi_2 X \\
 & & + & \{g(\phi_3 E_j, S\phi_1 E_j) - g(\phi_2 E_j, SE_j)\}\phi_3 X - 2\phi_1 SX \\
 & & + & \{g(\phi_1 E_j, SX) - g(\phi_1 X, SE_j)\}E_j \\
 & & - & \{g(E_j, SX) + g(\phi_1 X, S\phi_1 E_j)\}\phi_1 E_j \\
(4.41) & & + & \{g(\phi_3 X, SE_j) - 2g(\phi_3 E_j, SX) - g(\phi_2 X, S\phi_1 E_j)\}\phi_2 E_j \\
 & & + & \{2g(\phi_2 E_j, SX) - g(\phi_2 X, SE_j) - g(\phi_3 X, S\phi_1 E_j)\}\phi_3 E_j \\
 & & + & 2g(X, E_j)\phi_1 SE_j - 2g(\phi_3 X, E_j)\phi_2 SE_j + 2g(\phi_2 X, E_j)\phi_3 SE_j \\
 & & + & 2g(\phi_1 E_j, X)\phi_1 S\phi_1 E_j + 2g(\phi_2 E_j, X)\phi_2 S\phi_1 E_j + 2g(\phi_3 E_j, X)\phi_3 S\phi_1 E_j
\end{array}
$$

para todos $X \in \mathbb{D}$, $j \in \{1, \ldots, 4m-4\}$. Se multiplica escalarmente (4.41) por X y se suma en j, de donde $(16-8m)g(\phi_1 SX, X) = 0$. Como $m \geq 3$, se tiene $g(SX, \phi_1 X) = 0$. De forma análoga se obtiene

$$
g(SX, \phi_i X) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.42}
$$

para todo $X \in \mathbb{D}$. Se eligen $X, Y \in \mathbb{D}$ unitarios y se introduce en (4.42) $X + Y$ en vez de X y se utiliza (4.42), obteniendo

$$
g(S\phi_i X, Y) = g(\phi_i SX, Y) \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.43}
$$

para todos $X, Y \in \mathbb{D}$. Dados $X, Z \in \mathbb{D}$ unitarios tales que $Q(X) \perp Q(Z)$, se multiplica escalarmente (4.41) por Z y se suma en j, resultando

$$
0 = g(S\phi_1 X, Z) + (4m-7)g(\phi_1 SX, Z) + g(S\phi_2 X, \phi_3 Z) - g(S\phi_3 X, \phi_2 Z)
$$

De (4.43), es claro $(4m-4)g(SX, Z) = 0$, y como $m \geq 3$,

$$
g(SX, Z) = 0 \tag{4.44}
$$

para todos $X, Z \in \mathbb{D}$ unitarios tales que $Q(X) \perp Q(Z)$. Se multiplica escalarmente (4.41) por $\phi_1 X$ y se suma en j, y entonces

$$
\begin{array}{lrcl}
(4.45) & 0 & = & (14-8m)g(SX, X) - 2g(S\phi_1 X, \phi_1 X) - 2g(S\phi_2 X, \phi_2 X) \\
 & & - & 2g(S\phi_3 X, \phi_3 X) + \displaystyle\sum_{j=1}^{4m-4} \{g(E_j, SE_j) + g(\phi_1 E_j, S\phi_1 E_j)\}
\end{array}
$$

para todo $X \in \mathbb{D}$. Si se introduce (4.43) en (4.45) entonces

$$(4m-4)g(SX,X) = \sum_{j=1}^{4m-4} g(E_j, SE_j) = a \tag{4.46}$$

para todo $X \in \mathbb{D}$ unitario, donde a es una función diferenciable definida en G. Si se multiplica escalarmente (4.41) por U_1 y se suma en j se obtiene $0 = g(\phi_2 X, SU_2) + g(\phi_3 X, SU_3)$. De manera similar obtenemos

$$g(\phi_i X, SU_i) + g(\phi_j X, SU_j) = 0 \quad i \neq j, i, j \in \{1,2,3\}.$$

para todo $X \in \mathbb{D}$ unitario. Unos cálculos muy simples muestran $g(\phi_i X, SU_i) = 0$ para todos $X \in \mathbb{D}$ unitario, i=1,2,3. Cambiando X por $\phi_i X$, i=1,2,3, entonces

$$g(X, SU_i) = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{4.47}$$

para todo $X \in \mathbb{D}$. De (4.42), (4.44), (4.46) y (4.47) se tiene que para cada punto $p \in M$ existen un entorno abierto conexo G de p en M y una función diferenciable $a : G \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para cada $q \in G$, $S_q X = \frac{a(q)}{4m-4} X$ para todo $X \in \mathbb{D}_q$. Por el Teorema 4.1.1, G es un abierto de un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^k$, k=0, m-1, o un abierto de una horosfera. Como todas estas hipersuperficies reales son isoparamétricas, la conexión de M obliga a que toda la hipersuperficie real M sea uno de los ejemplos mencionados. Además, todos ello verifican que existe una constante real λ tal que $AX = \lambda X$ para todo $X \in \mathbb{D}$. Por (2.12), se tiene $SX = (h\lambda - \lambda^2 - 4m - 7)X$ para todo $X \in \mathbb{D}$. Esta expresión junto a la primera identidad de Bianchi implican que estos modelos verifican (4.39). Esto concluye el teorema. $\square$

Corolario 4.2.1 [OP5] *No existen hipersuperficies reales M de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, que verifiquen $0 = (R(X,Y)S)Z + (R(Z,X)S)Y + (R(Y,Z)S)X$ para todos $X, Y, Z \in TM$.*

Demostración: Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, que verifique esta condición. Entonces verifica las hipótesis del Teorema (4.2.1). En consecuencia, sólo hay que comprobar cuáles de las hipersurperficies reales de dicho teorema verifican nuestra hipótesis. Por la primera identidad de Bianchi y (1.2), nuestra hipótesis es equivalente a

$$0 = R(X,Y)SZ + R(Z,X)SY + R(Y,Z)SX \tag{4.48}$$

para todos $X, Y, Z \in TM$. Por otro lado, por el Corolario 4.1.1, dichas hipersuperficies reales son pseudo-Einstein, por lo que existen dos constantes reales a, b no nulas tales que $SX = aX + b\sum_{k=1}^{3} f_k(X)U_k$. Se escogen $X \in \mathbb{D}$ unitario, $Y = \phi_1 X$, $Z = U_2$. Entonces $SX = aX$, $S\phi_1 X = \phi_1 X$, $SU_2 = (a+b)U_2$. Se sustituyen en (4.48), teniendo en cuenta (2.11), la primera identidad de Bianchi y que dichas hipersuperficies reales son de curvatura adaptada: $0 = bR(X, \phi_1 X)U_2 = 2U_3$. Esto es una contradicción. $\square$

Los tres últimos resultados se comprueban inmediatamente.

Corolario 4.2.2 *No existen hipersuperficies reales de* $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, *que verifiquen* $R \cdot S = 0$.

Corolario 4.2.3 *No existen hipersuperficies reales de* $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, *cuyo tensor de Ricci sea paralelo.*

Corolario 4.2.4 *No existen hipersuperficies reales de* $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, *que sean localmente simétricas.*

Capítulo 5

Curvaturas Seccionales.

Una de las primeras herramientas a la hora de clasificar variedades (semi)riemannianas es la curvatura seccional, en el sentido de que la constancia de ciertos tipos de curvaturas seccionales sirve para distinguir unas variedades de otras. Es natural, pues, dedicar un capítulo a estudiar la constancia de ciertas curvaturas seccionales de las hipersuperficies reales de $\mathbb{Q}H^m$. En el primer teorema se clasifican las hipersuperficies reales con curvatura seccional cuaterniónica constante cuando la dimensión cuaterniónica de $\mathbb{Q}H^m$, m es al menos 3. En el segundo teorema se clasifican las hipersuperficies reales con curvatura seccional totalmente real constante. Nótese que en ambas clasificaciones aparecen los mismos ejemplos de hipersuperficies.

Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$. Dados $p \in M$, $X \in \mathbb{D}_p$, denotaremos por $Q(X) = Span\{X, \phi_1 X, \phi_2 X, \phi_3 X\}$. Dado $\Pi \subset \mathbb{D}_p$ un 2-plano tangente a M, diremos que Π es semicuaterniónico si admite una base $\{X, Y\}$ tal que $Q(X) = Q(Y)$. Se dice que Π es totalmente real si $J_k\Pi = \phi_k\Pi$ es ortogonal a Π para todo k=1,2,3. Obsérvese que para que exista algún 2-plano totalmente real, la dimensión real de $\mathbb{D}$ ha de ser al menos 8, es decir, la dimensión cuaterniónica de $\mathbb{Q}H^m$ ha de ser $m \geq 3$.

Definición 5.1.1 *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 2$. La curvatura seccional cuaterniónica de M es la curvatura seccional de planos tangentes semicuaterniónicos.*

Teorema 5.1.2 **[OP4]** *Sea M una hipersuperficie real conexa de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$, con curvatura seccional cuaterniónica constante q. Entonces M es una de las siguientes:*

(a) *Un abierto de un tubo de radio $r > 0$ sobre un punto, $-3 < q = -4 + \coth^2(r)$,*

(b) *un abierto de una horosfera, $q = -3$,*

(c) *un abierto de un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^{m-1}$ totalmente geodésico, $-4 < q = -4 + \tanh^2(r) < -3$,*

(d) *reglada, $q = -4$.*

Demostración: Sea $p \in M$ un punto y denotemos por $\mathbf{U}\mathbb{D}_p = \{X \in \mathbb{D}_p : \|X\| = 1\}$. Si $X \in \mathbf{U}\mathbb{D}_p$, entonces $q = R(X, \phi_k X, \phi_k X, X)$, k=1,2,3. De (2.11) se tiene

$$q = -4 + g(AX, X)g(A\phi_k X, \phi_k X) - g(AX, \phi_k X)^2 \tag{5.1}$$

para todo $X \in \mathbf{U}\mathbb{D}_p$. Sea $X(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, una curva contenida en un círculo máximo de $\mathbf{U}\mathbb{D}_p$ tal que $X(0) = X$, $X'(0) = Y$. Se sustituye en (5.1),

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\left\{g(AX(t), X(t))g(A\phi_k X(t), \phi_k X(t)) - g(AX(t), \phi_k X(t))^2\right\} \\
&= 2g(AX'(t), X(t))g(A\phi_k X(t), \phi_k X(t)) + 2g(AX(t), X(t))g(A\phi_k X'(t), \phi_k X(t)) \\
&- 2g(AX(t), \phi_k X(t))(g(AX'(t), \phi_k X(t)) + g(AX(t), \phi_k X'(t))) \\
&= 2g(AX'(t), X(t))g(A\phi_k X(t), \phi_k X(t)) + 2g(AX(t), X(t))g(A\phi_k X'(t), \phi_k X(t)) \\
&- 2g(AX(t), \phi_k X(t))g((A\phi_k - \phi_k A)X(t), X'(t))
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Evaluando en $t = 0$ y simplificando por 2 se tiene

$$\begin{gathered}
g(AX, Y)g(A\phi_k X, \phi_k X) + g(AX, X)g(A\phi_k Y, \phi_k X) \\
-g(AX, \phi_k X)g((A\phi_k - \phi_k A)X, Y) = 0
\end{gathered} \tag{5.3}$$

para todos $X, Y \in \mathbf{U}\mathbb{D}_p$, k=1,2,3. Se deriva de nuevo (5.2)

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2}{dt^2}\left\{g(AX(t), X(t))g(A\phi_k X(t), \phi_k X(t)) - g(AX(t), \phi_k X(t))^2\right\} \\
&= \frac{d}{dt}\{2g(AX'(t), X(t))g(A\phi_k X(t), \phi_k X(t)) \\
&+ 2g(AX(t), X(t))g(A\phi_k X'(t), \phi_k X(t)) \\
&- 2g(AX(t), \phi_k X(t))g((A\phi_k - \phi_k A)X(t), X'(t))\} \\
&= 2g(AX''(t), X(t))g(A\phi_k X(t), \phi_k X(t)) + 2g(AX'(t), X'(t))g(A\phi_k X(t), \phi_k X(t)) \\
&+ 4g(AX'(t), X(t))g(A\phi_k X'(t), \phi_k X(t)) + 4g(AX'(t), X(t))g(A\phi_k X'(t), \phi_k X(t)) \\
&+ 2g(AX(t), X(t))(g(A\phi_k X''(t), \phi_k X(t)) + g(A\phi_k X'(t), \phi_k X'(t))) \\
&- 2g(AX'(t), \phi_k X(t))g((A\phi_k - \phi_k A)X(t), X'(t)) \\
&- 2g(AX(t), \phi_k X'(t))g((A\phi_k - \phi_k A)X(t), X'(t)) \\
&- 2g(AX(t), \phi_k X(t))g((A\phi_k - \phi_k A)X'(t), X'(t)) \\
&- 2g(AX(t), \phi_k X(t))g((A\phi_k - \phi_k A)X(t), X''(t))
\end{aligned}$$

Evaluando en $t=0$ y simplificando por 2 se tiene

$$(5.4)\qquad 2(q+4) = g(AY,Y)g(A\phi_k X,\phi_k X) + 4g(AY,X)g(A\phi_k Y,\phi_k X)$$

$$+g(AX,X)g(A\phi_k Y,\phi_k Y) - 2g(AX,\phi_k X)g(AY,\phi_k Y) - g(Y,A\phi_k X - \phi_k AX)^2$$

k=1,2,3, para cualesquiera $X,Y \in \mathbf{U}\mathbb{D}_p$. Se considera ahora $\{E_1,\ldots,E_{4m-4},U_1,U_2,U_3\}$ una base ortonormal de TM definida en un abierto G de M

$$(5.5)\qquad (AE_j)_{\mathbb{D}} = a_j E_j$$

donde a_j son funciones continuas definidas en G. De hecho, dichas funciones son diferenciables en un abierto denso de G. Si se sustituye $X=E_j$, $Y=E_l$, $j\neq l$ en (5.3), entonces $0 = a_j g(A\phi_k E_j,\phi_k E_l)$, lo que obliga a que haya dos casos: $a_j = 0$ o bien $g(A\phi_k E_j,\phi_k E_l) = 0$, $j\neq l$. En el segundo, $g(\phi_k A\phi_k E_j, E_l) = 0$, $j\neq l$, y como la base elegida es ortonormal, entonces $\phi_k A\phi_k E_j \in Span\{E_j\}\oplus\mathbb{D}^\perp$. Aplicando $-\phi_k$ se tiene $A\phi_k E_j \in Span\{\phi_k E_j\}\oplus\mathbb{D}^\perp$. Con todo esto, el subespacio de $\mathbb{D}_p$, $(p\in M)$, definido por $Span\{E_j : j\in\{1,\ldots 4m-4\}, a_j\neq 0\}$ admite una base de la forma $\{F_i,\phi_1 F_i,\phi_2 F_i,\phi_3 F_i : i=1,\ldots,t\}$, por lo que es cuaterniónico, así como su ortogonal en $\mathbb{D}$, que es el subespacio $Span\{E_j : j\in\{1,\ldots,4m-4\}, a_j = 0\}$. Por lo tanto, se puede encontrar una base local ortonormal de $\mathbb{D}$ definida en G de la forma $\{E_1,\phi_1 E_1,\phi_2 E_1,\phi_3 E_1,\ldots,E_{m-1},\phi_1 E_{m-1},\phi_2 E_{m-1},\phi_3 E_{m-1}\}$ tal que

$$(5.6)\qquad (AE_j)_{\mathbb{D}} = a_j E_j,\quad (A\phi_k E_j)_{\mathbb{D}} = a_{jk}\phi_k E_j$$

donde a_k, a_{jk} son funciones continuas definidas en G, j=1,...,m-1, k=1,2,3. Al igual que antes, dichas funciones son también diferenciables en un abierto denso de G. Si se introduce $X=E_j$ en (5.1), por (5.6),

$$(5.7)\qquad 2(q+4) = 2a_j a_{jk},\quad \text{k=1,2,3, j=1,}\ldots\text{,m-1}$$

Igualmente, tomando $X=E_j$, $Y=\phi_k E_j$ en (5.4), por (5.6),

$$(5.8)\qquad 2(q+4) = a_{jk}^2 + a_j^2,\quad \text{k=1,2,3, j=1,}\ldots\text{,m-1}$$

Si se restan (5.7) y (5.8), $0 = a_{jk}^2 - 2a_j a_{jk} + a_j^2 = (a_{jk}-a_j)^2$, y así

$$(5.9)\qquad a_j = a_{j1} = a_{j2} = a_{j3},\quad \text{j=1,}\ldots\text{,m-1}$$

A continuación se eligen $X=E_j$, $Y=E_l$, $j\neq l$ y se introducen en (5.4), siempre teniendo en cuenta (5.6), $q+4 = a_j a_l$. De aquí, (5.7) y (5.9), $a_l a_j = q+4 = a_l^2 = a_j^2$ para todos $j\neq l$. Si para algún $j\neq l$, $a_l\neq a_j$ en cierto punto de G, entonces $a_l = -a_j$. Volviendo atrás, $a_l^2 = a_l a_j = -a_l^2$ y por lo tanto $a_l = a_j = 0$, lo que es una contradicción. En consecuencia, $a_1 = \ldots = a_{m-1} = a$. De (5.8), la función a es constante en todo G. De (5.6) y (5.9), entonces $(AX)_{\mathbb{D}} = aX$ para cualquier $X\in\mathbb{D}$ en G, es decir, $g(AX,Y) = ag(X,Y)$ para todos $X,Y\in\mathbb{D}$ en G. Al ser G arbitrario, M es localmente congruente a una de las hipersuperficies reales que aparecen en el Teorema 3.1.2. Sólo queda comprobar cuáles de ellas tienen curvatura seccional cuaterniónica constante. Si M es reglada, por (2.11) y la Proposición 2.1.1, M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante. Si M es una de las otras tres, de la Tabla 1 se obtiene que todas admiten una función constante $a : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $AX = aX$ para todo $X \in \mathbb{D}$. De aquí y (2.11) es claro que M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante. □

Definición 5.1.2 *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$. La curvatura seccional totalmente real de M es la curvatura seccional de planos tangentes totalmente reales.*

Teorema 5.1.3 [**OP3**] *Sea M una hipersuperficie real conexa de $\mathbb{Q}H^m$, $m \geq 3$ con curvatura seccional totalmente real constante T. Entonces M es una de las siguientes:*

(a) *Un abierto de una hiperesfera geodésica de radio $r > 0$, $0 < T = -1 + \coth^2(r)$,*

(b) *un abierto de una horosfera, $T = 0$,*

(c) *un abierto de un tubo de radio $r > 0$ sobre un $\mathbb{Q}H^{m-1}$ totalmente geodésico, $-1 < T = -1 + \tanh^2(r) < 0$,*

(d) *reglada, $T = -1$.*

Demostración: Dado $p \in M$, denotemos por $\mathbf{U}\mathbb{D}_p = \{X \in \mathbb{D}_p : |X| = 1\}$. Del tensor de curvatura de M, (2.11), se obtiene la siguiente expresión de la curvatura seccional totalmente real de M,

$$T = -1 + g(AX, X)g(AY, Y) - g(AX, Y)^2 \tag{5.10}$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathbb{D}$ ortonormales tales que $Span\{X, Y\}$ es totalmente real. Dados $X, Y, Z \in \mathbf{U}\mathbb{D}_p$ tales que $Span\{X, Y\}$, $Span\{X, Z\}$ son totalmente reales y $g(Z, Y) = 0$, sea $Y(t)$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ una curva en $\mathbf{U}\mathbb{D}_p$ tal que $Span\{X, Y(t)\}$ es totalmente real, $Y(0) = Y$, $Y'(0) = Z$. De (5.10),

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left\{g(AX, X)g(AY(t), Y(t)) - g(AX, Y(t))^2\right\} \\ &= 2g(AX, X)g(AY(t), Y'(t)) - 2g(AX, Y(t))g(AX, Y'(t)) \end{aligned}$$

Evaluando en $t = 0$ y simplificando por 2 se tiene

$$(5.11) \qquad 0 = g(AX,X)g(AY,Z) - g(AX,Y)g(AX,Z)$$

para todos $X, Y, Z \in \mathbf{U}\mathbb{D}_p$ tales que $Span\{X, Y\}$ y $Span\{X, Z\}$ son totalmente reales y $g(Y, Z) = 0$. En lo sucesivo, denotaremos por $(*)_{\mathbb{D}}$ la componente de $(*)$ en $\mathbb{D}$. Sea $\{U_1, U_2, U_3, E_1, \ldots, E_{4m-4}\}$ una base local ortonormal de TM definida en un entorno abierto conexo G de p tal que

$$(5.12) \qquad (AE_i)_{\mathbb{D}} = a_i E_i, \quad i = 1, \ldots, 4m-4$$

donde a_i, $i = 1, \ldots, 4m-4$, son funciones diferenciables definidas en G. Dado $i \in \{1, \ldots, 4m-4\}$, se sustituye $X = E_i$ en (5.11), de donde

$$(5.13) \qquad 0 = a_i g(AY, Z)$$

donde $Y, Z \in \mathbf{U}\mathbb{D}$, $Span\{Y, Z\} \perp Q(E_i)$ y $g(Y, Z) = 0$. De (5.13), se tienen que discutir dos casos:

A) Sea $G_1 = \{q \in G : a_1 = \ldots = a_{4m-4} = 0\}$. Suponemos G_1 abierto de M.

B) Sea $G_2 = \{q \in G : \exists i \in \{1, \ldots, 4m-4\} / a_i \neq 0\}$, que es un abierto de M.

Nótese $G = G_1 \cup G_2$. Comencemos con el caso A). Supongamos que G_1 es un abierto no vacío. En tal caso, de (5.12) se tiene $g(AX, Y) = 0$ para todos $X, Y \in \mathbb{D}$ en G_1. Por la Proposición 2.1.1, G_1 es una hipersuperficie real reglada de $\mathbb{Q}H^m$.

Nos dedicamos ahora al caso B). Restringiendo G si es necesario, pero manteniéndolo conexo, se puede suponer sin perder generalidad $i = 1$, $a_1 \neq 0$ en G_2. De (5.13),

$$(5.14) \qquad g(AY, Z) = 0$$

para todos $Y, Z \in \mathbb{D}$ tales que $Y, Z \in Q(E_1)^{\perp}$ y $g(Y, Z) = 0$ en G_2. Dados $Y, Z \in \mathbf{U}\mathbb{D}$ en estas condiciones, se toma $X = \phi_k E_1$, k=1,2,3 en (5.11) y se obtiene

$$(5.15) \qquad 0 = g(A\phi_k E_1, Y)g(A\phi_k E_1, Z), \quad \text{k=1,2,3}$$

para todos $Y, Z \in \mathbf{U}\mathbb{D}$ tales que $Y, Z \in Q(E_1)^{\perp}$ y $g(Y, Z) = 0$ en G_2. Dados $Y, Z \in \mathbf{U}\mathbb{D}$ en estas condiciones, los vectores $Y' = (1/\sqrt{2})(Y + Z)$, $Z' = (1/\sqrt{2})(Y - Z)$ también verifican las condiciones de (5.15). En efecto, Y', Z' son claramente ortonormales, y como $Y, Z \in Q(E_1)^{\perp}$, toda combinación lineal de ellos también pertenece a $Q(E_1)^{\perp}$, en particular Y', Z'. Se introducen Y', Z' en (5.15) y entonces

$$0 = g(A\phi_k E_1, Y + Z)g(A\phi_k E_1, Y - Z) = g(A\phi_k E_1, Y)^2 - g(A\phi_k E_1, Y)g(A\phi_k E_1, Z)$$

$$+g(A\phi_k E_1, Z)g(A\phi_k E_1, Y) - g(A\phi_k E_1, Z)^2 = g(A\phi_k E_1, Y)^2 - g(A\phi_k E_1, Z)^2$$

es decir, $g(A\phi_k E_1, Y)^2 = g(A\phi_k E_1, Z)^2$. De aquí y (5.15) se tiene

$$g(A\phi_k E_1, Y) = 0 \tag{5.16}$$

para todo $Y \in \mathbb{D} \cap Q(E_1)^\perp$, k=1,2,3, en G_2. Por otro lado, dados $Y, Z \in \mathbf{U}\mathbb{D}$ que verifiquen las condiciones de (5.14), los vectores $Y' = Y + Z$, $Z' = Y - Z$ también las verifican, como ya se ha visto. Se introducen en (5.14) y se obtiene $0 = g(A(Y + Z), Y - Z) = g(AY, Y) - g(AZ, Z)$, es decir

$$g(AY, Y) = g(AZ, Z) \tag{5.17}$$

para todos $Y, Z \in \mathbb{D}$ tales que $Y, Z \in Q(E_1)^\perp$ y $g(Y, Z) = 0$ en G_2. Restringiendo G_2 si es necesario, de (5.14), (5.16) y (5.17), existen una función diferenciable $b : G_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\{U_1, U_2, U_3, E_1, \phi_1 E_1, \phi_2 E_2, \phi_3 E_3, ..., E_{m-1}, \phi_1 E_{m-1}, \phi_2 E_{m-1}, \phi_3 E_{m-1}\}$ base ortonormal de TM definida en G_2 tal que

$$\begin{aligned} (AE_1)_{\mathbb{D}} &= a_1 E_1, \quad a_1 \neq 0 \\ (A\phi_k E_1)_{\mathbb{D}} &\in Span\{\phi_1 E_1, \phi_2 E_1, \phi_3 E_1\}, \quad \text{k=1,2,3.} \\ (AX)_{\mathbb{D}} &= bX, \quad \text{para todo } X \in \mathbb{D} \cap Q(E_1)^\perp \end{aligned} \tag{5.18}$$

Supongamos que existe un abierto $\Omega \subset G_2$ en el que la función b se anula. Si se toman $X = E_1$, $Y = E_2$, de (5.10) y (5.18) se tiene

$$T = -1 \text{ en } \Omega \tag{5.19}$$

Se consideran los vectores $X = (1/\sqrt{2})(E_1 + E_2)$, $Y = (1/\sqrt{10})(2E_1 + \phi_k E_1 - 2E_2 - \phi_k E_2)$. Veamos que $Span\{X, Y\}$ es totalmente real. En primer lugar, $g(X, Y) = (1/\sqrt{20}) g(E_1 + E_2, 2E_1 + \phi_k E_1 - 2E_2 - \phi_k E_2) = (1/\sqrt{20})(2g(E_1, E_1) - 2g(E_2, E_2)) = 0$. Por otro, dado $l \in \{1, 2, 3\}$, $g(\phi_l X, Y) = (1/\sqrt{20}) g(\phi_l E_1 + \phi_l E_2, 2E_1 + \phi_k E_1 - 2E_2 - \phi_k E_2) = (1/\sqrt{20})(g(\phi_l E_1, \phi_k E_1) - g(\phi_l E_2, \phi_k E_2)) = (1/\sqrt{20})(\delta_{lk} - \delta_{lk}) = 0$, donde δ_{kl} es la delta de Kronecker. Se sustituyen los vectores X, Y en (5.10) teniendo en cuenta (5.18) y (5.19), entonces $T = -1 = -1 + g((1/\sqrt{2})A(E_1 + E_2), (1/\sqrt{2})(E_1 + E_2)) g((1/\sqrt{10})A(2E_1 + \phi_k E_1 - 2E_2 - \phi_k E_2), (1/\sqrt{10})(2E_1 + \phi_k E_1 - 2E_2 - \phi_k E_2)) - g((1/\sqrt{2})A(E_1 + E_2), (1/\sqrt{10})(2E_1 + \phi_k E_1 - 2E_2 - \phi_k E_2))^2$, es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= g(A(E_1 + E_2), E_1 + E_2) \cdot \\ &\cdot\ g(A(2E_1 + \phi_k E_1 - 2E_2 - \phi_k E_2), 2E_1 + \phi_k E_1 - 2E_2 - \phi_k E_2) \\ &-\ g(A(E_1 + E_2), 2E_1 + \phi_k E_1 - 2E_2 - \phi_k E_2)^2 = \{g(AE_1, E_1) + 2g(AE_1, E_2) \\ &+\ g(AE_2, E_2)\}\{g(2AE_1 + A\phi_k E_1 - 2AE_2 - A\phi_k E_2, 2E_1 + \phi_k E_1 - 2E_2 - \phi_k E_2)\} \\ &-\ g(AE_1 + AE_2, 2E_1 + \phi_k E_1 - 2E_2 - \phi_k E_2)^2 \\ &= a_1\{4g(AE_1, E_1) + 2g(AE_1, \phi_k E_1) - 4g(AE_1, E_2) - 2g(AE_1, \phi_k E_2) \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{rl}
+ & 2g(A\phi_k E_1, E_1) + g(A\phi_k E_1, \phi_k E_1) - 2g(A\phi_k E_1, E_2) - g(A\phi_k E_1, \phi_k E_2) \\
- & 4g(AE_2, E_1) - 2g(AE_2, \phi_k E_1) + 4g(AE_2, E_2) + 4g(AE_2, \phi_k E_2) \\
- & 2g(A\phi_k E_2, E_1) - g(A\phi_k E_2, \phi_k E_1) + 2g(A\phi_k E_2, E_2) + g(A\phi_k E_2, \phi_k E_2)\} \\
- & \{2g(AE_1, E_1) + g(AE_1, \phi_k E_1) - 2g(AE_1, E_2) - g(AE_1, \phi_k E_2) \\
+ & 2g(AE_2, E_1) + g(AE_2, \phi_k E_1) - 2g(AE_2, E_2) - g(AE_2, \phi_k E_2)\}^2 \\
= & a_1(4a_1 + g(A\phi_k E_1, \phi_k E_1)) - 4a_1^2 = a_1^2 g(A\phi_k E_1, \phi_k E_1)
\end{array}
$$

que escrito aparte es

$$0 = g(A\phi_k E_1, \phi_k E_1), \qquad k\text{=1,2,3}. \tag{5.20}$$

Dado $i \in \{1,2,3\}$, se eligen $k \in \{1,2,3\} \setminus \{i\}$, $X = (1/\sqrt{2})(\phi_i E_1 + \phi_i E_2)$, $Y = (1/\sqrt{10})(2\phi_i E_1 + \phi_k E_1 - 2\phi_i E_2 - \phi_k E_2)$. Veamos que $Span\{X, Y\}$ es totalmente real. Por un lado, como $k \neq i$, $g(\phi_k E_1, \phi_i E_1) = 0$ y entonces $g(X, Y) = (1/\sqrt{20})g(\phi_i E_1 + \phi_i E_2, 2\phi_i E_1 + \phi_k E_1 - 2\phi_i E_2 - \phi_k E_2) = (1/\sqrt{20})(2g(\phi_i E_1, \phi_i E_1) - 2g(\phi_i E_2, \phi_i E_2)) = 0$. Por otro, dado $l \in \{1,2,3\}$, $\sqrt{20}g(\phi_l X, Y) = g(\phi_l\phi_i E_1 + \phi_l\phi_i E_2, 2\phi_i E_1 + \phi_k E_1 - 2\phi_i E_2 - \phi_k E_2) = g(\phi_l\phi_i E_1, \phi_k E_1) - g(\phi_l\phi_i E_2, \phi_k E_2) = 0$. De (5.10), (5.18), (5.19) y (5.20) se tiene $T = -1 = -1 + g(AX, X)g(AY, Y) - g(AX, Y)^2$, que se convierte en

$$
\begin{array}{rcl}
0 & = & \sqrt{20}\{g(AX, X)g(AY, Y) - g(AX, Y)^2\} \\
 & = & g(A\phi_i E_1 + A\phi_i E_2, \phi_i E_1 + \phi_i E_2) \cdot \\
 & \cdot & g(2A\phi_i E_1 + A\phi_k E_1 - 2A\phi_i E_2 - A\phi_k E_2, 2\phi_i E_1 + \phi_k E_1 - 2\phi_i E_2 - \phi_k E_2) \\
 & - & g(A\phi_i E_1 + A\phi_i E_2, 2\phi_i E_1 + \phi_k E_1 - 2\phi_i E_2 - \phi_k E_2)^2 \\
 & = & \{g(A\phi_i E_1, \phi_i E_1) + 2g(A\phi_i E_1, \phi_i E_2) + g(A\phi_i E_2, \phi_i E_2)\} \cdot \\
 & \cdot & g(2A\phi_i E_1 + A\phi_k E_1 - 2A\phi_i E_2 - A\phi_k E_2, 2\phi_i E_1 + \phi_k E_1 - 2\phi_i E_2 - \phi_k E_2) \\
 & - & \{2g(A\phi_i E_1, \phi_i E_1) + g(A\phi_i E_1, \phi_k E_1) - 2g(A\phi_i E_1, \phi_i E_2) - g(A\phi_i E_1, \phi_k E_2) \\
 & & +2g(A\phi_i E_2, \phi_i E_1) + g(A\phi_i E_2, \phi_k E_1) - 2g(A\phi_i E_2, \phi_i E_2) - g(A\phi_i E_2, \phi_k E_2)\}^2 \\
 & = & -g(A\phi_i E_1, \phi_k E_1)^2
\end{array}
$$

de donde

$$0 = g(A\phi_i E_1, \phi_k E_1), \qquad k \neq i. \tag{5.21}$$

La hipótesis $b = 0$ en Ω y las fórmulas (5.18), (5.20) y (5.21) implican

$$(AX)_{\mathbb{D}} = a_1 g(X, E_1)E_1 \tag{5.22}$$

para todo $X \in \mathbb{D}$ en Ω. Dados $k \in \{1,2,3\}$ y $X \in \mathbf{U}\mathbb{D}$, de (2.11) y (5.22) se tiene $R(X, \phi_k X, \phi_k X, X) = -4 + g(AX, X)g(A\phi_k X, \phi_k X) - g(AX, \phi_k X)^2 = -4$. Por el Teorema 5.1.2, Ω es una hipersuperficie real reglada, y por la Proposición 2.1.1, $g(AX,Y)=0$ para todos $X,Y\in\mathbb{D}$ en Ω. En particular, la función a_1 ha de ser idénticamente cero en Ω, lo que es una contradicción.

Tenemos así demostrado que la función b no se anula en ningún abierto de G_2. Se escogen ahora $X=E_2$ e $Y,Z\in Q(E_1)\cap\mathbf{U}\mathbb{D}$ tales que $g(Y,Z)=0$, y se introducen en (5.11). Nótese que $Span\{X,Y\}$ y $Span\{X,Z\}$ son totalmente reales. De (5.18), se tiene $0=bg(AY,Z)$, es decir, $g(AY,Z)=0$ para todos $Y,Z\in Q(E_1)$ tales que $g(Y,Z)=0$. Esto unido a (5.18) implica $g(AE_i,E_j)=g(A\phi_kE_i,E_j)=0$ para todos $i,j=1,\dots,m-1$, $k=1,2,3$ en G_2. Como estos vectores forman una base ortonormal de $\mathbb{D}$ definida en G_2, entonces $g(AX,Y)=0$ para todos $X,Y\in\mathbb{D}$ ortogonales en G_2. En el caso de que se escojan $X,Y\in\mathbf{U}\mathbb{D}$ entonces $X+Y,X-Y\in\mathbb{D}$ y son ortogonales, por lo que $0=g(A(X+Y),X-Y)=g(AX,X)-g(AY,Y)$, es decir, $g(AX,X)=g(AY,Y)$, que junto a (5.18) implica la existencia de una función $b:G_2\longrightarrow\mathbb{R}$ que no se anula en ningún punto de G_2 tal que

$$g(AX,Y)=bg(X,Y) \tag{5.23}$$

para todos $X,Y\in\mathbb{D}$ en G_2. En realidad, $b=a_1$. Si se introduce esta última condición en (5.10) entonces $T=-1+b^2$, lo que significa que $b=a_1$ es constante en G_2.

Obtenemos así que para cada punto $p\in M$, existe un entorno abierto conexo G de p en M y una función diferenciable $a_1:G\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $g(AX,Y)=a_1g(X,Y)$ para todos $X,Y\in\mathbb{D}$ en G. Además, si $G_2=\{t\in G:a_1(t)\neq0\}$, $G_1=\{t\in G:a_1(t)=0\}$ entonces a_1 es constante en G_2. La continuidad de a_1 y la conexión de G implican que a_1 es constante en G. Si se introduce (5.23) en (5.1), se observa $q=-4+a_1^2$, por lo que G_2 tiene curvatura seccional cuaterniónica constante. Al ser el punto arbitrario y el entorno también, M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante. Sólo queda comprobar cuáles de los modelos del Teorema 5.1.2 tienen curvatura seccional totalmente real constante.

a) Si M es reglada, por la Proposición 2.1.1, $g(AX,Y)=0$ para todos $X,Y\in\mathbb{D}$. En particular, si $Span\{X,Y\}$ es un plano totalmente real, de (5.10) se tiene $T=-1$.

b) Si M es cualquiera de las hipersuperficies reales de curvatura adaptada que aparecen en el Teorema 5.1.2, existe una constante $a\neq0$ tal que $AX=aX$ para todo $X\in\mathbb{D}$. Si $Span\{X,Y\}$ es un plano totalmente real, introducido en (5.10) obliga $T=-1+a^2$. $\square$

Corolario 5.1.5 [OP3] *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{Q}H^m$, $m\geq3$. Entonces M tiene curvatura seccional cuaterniónica constante si y sólo si M tiene curvatura seccional totalmente real constante.*

Bibliografía

[B] J. BERNDT, *Real hypersurfaces in quaternionic space forms*, J. Reine angew. Math. 419(1991), 9-26.

[C] E. CARTAN, *Familles des surfaces isoparamétriques dans les espaces à curvature constante*, Ann. Mat. 17(1938), 177-191.

[CR] C.E. CECIL, P.J. RYAN, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. A.M.S. 269, No 2(1982), 481-499.

[CH] B.Y. CHEN, *Totally umbilical submanifolds of quaternion space forms*, J. Austr. Math. Soc. 26(1978), 154-162.

[G] A. GRAY, *A note on manifolds whose holonomy group is a subgroup of* $Sp(m) \cdot Sp(1)$, Michigan Math. J. 16(1969), 125-128.

[I1] S. ISHIHARA, *Quaternion Kählerian manifolds and fibred riemannian spaces with Sasakian 3-structure*, Kodai Math. Sem. Rep. 25(1973), 321-329.

[I2] S. ISHIHARA, *Quaternion Kählerian manifolds*, J. Differential Geometry 9(1974), 483-500.

[K] M. KIMURA, *Sectional curvatures of holomorphic planes on a real hypersurface in* $P^n(\mathbb{C})$, Math. Ann. 276(1987), 487-497.

[KN] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, I-II, John-Wiley & Sons Inc. New York, 1963-1969.

[KS] J.H. KWON, Y.J. SUH, *On sectional and Ricci curvatures of semiriemannian submersions*, Kodai Math. J. 20(1997), 53-66.

[MA] A. MARTINEZ, *Ruled real hypersurfaces in quaternionic projective space*, An. Sti. Univ. Al I Cuza 34(1988), 73-78.

[MP] A. MARTINEZ, J.D. PÉREZ, *Real hypersurfaces in quaternionic projective space*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV) 145(1986), 35-384.

[MPS] A. MARTINEZ, J.D. PÉREZ, F.G. SANTOS, *Generic submanifolds of quaternion Kaehlerian manifold*, Soochow J. Math. 10(1984), 79-98.

[MD] S. MAEDA, *Ricci tensors of real hypersurfaces in a complex projective space*, Proc. A.M.S. 122, No 2(1994), 1229-1235.

[MO] S. MONTIEL, *Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space*, J. Math. Soc. Japan 37, No 3(1985), 515-535.

[MU] H. MÜNZNER, *Isoparametrische hyperflächen in sphären*, I-II, Math. Ann. 251(1980), 57-71 y 256(1981), 215-232.

[ON1] B. O'NEILL, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. 13(1966), 459-469.

[ON2] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press Inc. San Diego (USA) 1983.

[OP1] M. ORTEGA, J.D. PÉREZ, *Constant holomorphic sectional curvature and type number of real hypersurfaces of complex hyperbolic space*, Proc. 4th International Congress of Geometry, Thessaloniki (1997), 327-335.

[OP2] M. ORTEGA, J. D. PÉREZ, *On the Ricci tensor of a real hypersurface of quaternionic hyperbolic space*, Manusc. Math., **93**(1997), 49-57.

[OP3] M. ORTEGA, J.D. PÉREZ, *Totally real sectional curvature of a real hypersurface in quaternionic space forms*, Tsukuba J. Math. 22, No 1(1998), 227-233.

[OP4] M. ORTEGA, J.D. PÉREZ, *On the second fundamental tensor of a real hypersurface of Quaternionic Hyperbolic Space*, preprint.

[OP5] M. ORTEGA, J.D. PÉREZ, $\mathbb{D}$*-Einstein Real Hypersurfaces in Quaternionic Space Forms*, aparecerá en Ann. Mat. Pura Appl.

[OPS1] M. ORTEGA, J.D. PÉREZ, Y.J. SUH, *Two conditions on the Ricci tensor of a real hypersurface in a complex projective space*, Nihonkai Math. J. **7**(1996), No 2, 147-154.

[OPS2] M. ORTEGA, J.D. PÉREZ, Y.J. SUH, *Real hypersurfaces with constant totally real sectional curvature in a complex space form*, aparecerá en Czech. Math. J.

[P] J.S. PAK, *Real hypersurfaces in quaternionic Kaehlerian manifolds with constant Q-sectional curvature*, Kodai Math. Sem. Rep. **29**(1977), 22-61.

[JP1] J.D. PÉREZ, *Geometría de variedades Kaehlerianas cuaterniónicas*, Tesis doctorales de la Univ. Granada, Departamento de Geometría y Topología, 1983.

[JP2] J.D. PÉREZ, *A characterization of real hypersurfaces of quaternionic projective space*, Tsukuba J. Math. 15, No 2(1991), 315-323.

[PSU] J.D. PÉREZ, F.G. SANTOS, F. URBANO, *On the axioms of planes in quaternionic geometry*, Ann. Mat. Pura App. 130(1982), 215-221.

[R] P.J. RYAN, *Curvature conditions for hypersurfaces*, Tohôku Math. J. 212(1969), 363-388.

[TT] Y. TASHIRO, S. TACHIBANA, *On Fubinian and C-Fubinian manifolds*, Kodai Math. Sem. Rep **15**(1963), 176-183.