DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES DE PSICOLOGÍA EN EL CÁLCULO DE PROBABILIDADES INVERSAS MEDIANTE EL TEOREMA DE BAYES

Carmen Díaz
Universidad de Huelva
Juan J. Ortiz
Luis Serrano
Universidad de Granada

RESUMEN

En este trabajo realizamos un análisis teórico de los pasos necesarios en el cálculo de probabilidades inversas por medio del teorema de Bayes y presentamos un estudio empírico de errores en una muestra de 414 estudiantes de Psicología, después de la enseñanza del tema. Presentamos también los resultados de una experiencia de enseñanza del teorema de Bayes y sus aplicaciones a 78 alumnos de Psicología, apoyada en Excel, dirigida a superar las dificultades descritas. Los resultados indicaron la consecución de los objetivos didácticos en la mayoría de los alumnos participantes.

Palabras clave: Probabilidad, Educación Estadística.

ABSTRACT

In this paper we present a theoretical analysis of the steps needed to compute probabilities in applying the Bayes' theorem. Then, we present an empirical study of difficulties and mistakes in a sample of 414 Psychology students, after instruction. We also describe a teaching experience of the Bayes theorem in a sample of 78 students supported by Excel and aimed to overcome the described difficulties. Results suggested that didactical objectives were achieved by the most of the students who took part in the experience.

Key words: probability, Statistics Education.

INTRODUCCIÓN

La probabilidad condicional es fundamental en las aplicaciones de la Estadística porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información. Es también un concepto teórico básico requerido en la construcción del espacio muestral producto. Por ello, su correcta comprensión y el razonamiento sobre la misma son requisitos en el estudio de la inferencia estadística, tanto clásica como bayesiana, así como en el estudio de la asociación entre variables, la regresión y los modelos lineales. En el terreno profesional e incluso en la vida cotidiana, la toma de decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre se basa en gran medida en el razonamiento condicional (Díaz, 2004; Díaz y de la Fuente, 2005). Más específicamente, el cálculo de probabilidades inversas $P(A_i/B)$ a partir de la probabilidad $P(B/A_i)$ y $P(A_i)$ es muy importante en tareas profesionales, como el diagnóstico, evaluación, toma de decisiones y aplicación de la inferencia estadística en la investigación empírica.

Sin embargo, hay una tendencia a suprimir la enseñanza de la probabilidad condicional y el teorema de Bayes en la educación secundaria y universitaria, debido a la influencia de las primeras investigaciones en psicología (Tversky y Kahneman, 1982a y b; Bar-Hillel, 1987; Teigen, Brun y Frydenlund, 1999) que sugirieron la dificultad del razonamiento relacionado.

En este trabajo llevamos primeramente a cabo un análisis a priori de los pasos involucrados en la aplicación del teorema de Bayes. Presentamos después un estudio empírico de las dificultades encontradas al resolver un problema abierto de aplicación de dicho teorema en una muestra de 414 estudiantes de primer año de Psicología que habían estudiado el tema. Puesto que estos problemas también se estudian en otras especialidades universitarias y en el Bachillerato, los resultados podrían servir para informar a los profesores sobre las dificultades de los estudiantes y guiarlos en la enseñanza de estrategias adecuadas que ayuden a superarlos.

ANTECEDENTES

Como hemos indicado, las investigaciones en psicología del razonamiento y didáctica de la matemática (ver revisión en Koehler, 1996 o Díaz y de la Fuente, 2005) muestran la existencia de intuiciones incorrectas, sesgos de razonamiento y errores de comprensión y aplicación de la probabilidad condicional.

Aparentemente este concepto es sencillo ya que, intuitivamente, podemos definir la probabilidad condicional $P(A/B)$ de un suceso A dado otro suceso B simplemente como la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado. La dificultad, no obstante, aparece en las aplicaciones ya que se confunde con frecuencia la probabilidad condicional $P(A/B)$ con su probabilidad inversa $P(B/A)$, o bien con una probabilidad simple $P(A)$ e incluso compuesta $P(A \cap B)$.

Falacia de las tasas base

El estudio particular de las dificultades de aplicación del teorema de Bayes fue investigado por Tversky y Kahneman (1982a) en su trabajo sobre la heurística de representatividad. Una regla fundamental en estadística es que la verosimilitud de que una evidencia se deba a una supuesta causa depende de la probabilidad a priori de la causa, pero esta regla se olvida. Denominan *falacia de las tasas base* al hecho de ignorar la probabilidad a priori de una supuesta causa en la valoración de una evidencia. Estos autores, al proponer en sus investigaciones el problema 1, observan que la mayoría de participantes elige la respuesta a) (que coincide con la fiabilidad del testigo); aunque la respuesta correcta al resolver el problema mediante el teorema de Bayes es la d).

Problema 1. *Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verdes y el 15% Azules. Un testigo identificó el taxi como Azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?*

a) 80 % *b) 15%* *c) (15/100) x (80/100)%* *d) 41 %*

En el enunciado del problema 1 hay tres informaciones relevantes para la solución: a) las *tasas base* o probabilidad a priori del suceso (en este caso 15%); b) la evidencia específica del caso individual (lo que dijo el testigo); c) la precisión esperada de la predicción (el número de aciertos del testigo, 80%). El teorema de Bayes establece que la precisión esperada queda modificada por la evidencia y la probabilidad a priori, pero, en lugar de usar esta regla, las personas sólo usan el dato de la fiabilidad del testigo (Tversky y Kahneman, 1982b). Los autores denominan *falacia de las tasas base* al hecho de ignorar la probabilidad a priori del suceso en la población en la toma de decisiones en problemas que involucran la probabilidad inversa.

Estrategias en la resolución de los problemas

Trabajos posteriores (p. ej. Totohasina, 1992; Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares, 1998) indican que el análisis realizado desde la psicología es incompleto, pues hay otros factores que afectan la capacidad de aplicar el teorema de Bayes. Según Totohasina (1992), la estrategia más frecuente al resolver un problema que involucra este teorema es cambiar el espacio muestral de referencia y a continuación aplicar la regla de Laplace. En su estudio con 67 estudiantes de Secundaria sólo el 25% dio una respuesta correcta antes de una instrucción explícita sobre el teorema. El autor realiza también un experimento de enseñanza con 65 alumnos, en el que no se introduce formalmente el teorema de Bayes, aunque se plantean y resuelven problemas de probabilidad condicional inversa basándose en árboles y tablas de doble entrada. Aproximadamente la mitad llegan a obtener la probabilidad total; pero solo 9 alumnos llegan a la solución completa (probabilidad a posteriori).

Para explicar estas dificultades Totohashina analiza los procedimientos y representación usados. Indica que la representación en tabla de doble entrada dificulta la percepción de la naturaleza secuencial de los problemas, porque queda más visible la intersección de los sucesos y puede llevar a los alumnos a confundir la probabilidad condicional y la conjunta. El diagrama en árbol es el recurso más efectivo para determinar la probabilidad a posteriori cuando se refiere a un problema diacrónico (dirigido en el tiempo) (Gras y Totohasina, 1995). La dificultad también está influida por la confusión del papel de condición y condicionado en una probabilidad condicional o falacia de la condicional transpuesta (Falk, 1986, 1989; Lonjedo y Huerta, 2004, 2005; Batanero y Sánchez, 2005).

Formato del enunciado

La investigación reciente sugiere que la aplicación del teorema de Bayes es más sencilla cuando la información se da en frecuencias absolutas, en lugar de usar probabilidades, porcentajes o frecuencias relativas (Cosmides y Tooby, 1996; Gigerenzer, 1994; Gigerenzer y Hoffrage, 1995). Las frecuencias absolutas son la forma habitual en que recogemos información de sucesos aleatorios en una situación de *muestreo natural* a lo largo de nuestra experiencia (por ejemplo, un médico en su consulta). El cálculo de la probabilidad inversa es entonces más natural porque el sujeto no tiene que aplicar toda la complejidad del teorema de Bayes, sino sólo tener en cuenta los casos favorables y posibles, de modo que el problema se transforma en un problema simple de probabilidad. En el problema 2, por ejemplo, (Cosmides y Tooby, 1996) las personas razonarían simplemente usando la proporción de que en un total de 1030 pruebas positivas, solo 80 corresponden a personas enfermas. Por tanto, entre 103 personas con la prueba positiva habría 8 realmente enfermas (respuesta c).

Problema 2. *100 de cada 10000 personas tiene una enfermedad X. Se ha desarrollado una prueba para diagnosticarla. La prueba da positiva en 80 de cada 100 personas que tienen la enfermedad pero también en 950 de cada 9900 que están sanas. Suponemos que la prueba da positiva en 103 personas. ¿Cuántas estarán realmente enfermas?*

a) 80 personas *b) 1 ó 2 personas* *c) 8 personas*

Nuestra hipótesis es que la aplicación del teorema de Bayes involucra un proceso complejo, en que los estudiantes deben recordar y aplicar varios conceptos y procedimientos probabilísticos, que a veces se olvidan causando errores. Esta hipótesis se generó en el estudio de Díaz y de la Fuente (2006), donde no encontramos diferencia de dificultad en la aplicación del teorema en problemas matemáticamente equivalentes, cuando los datos son dados en frecuencias absolutas o en probabilidades. Por otro lado, el formato de frecuencias absolutas es difícil de usar en caso de múltiples sucesos o múltiples experimentos, mientras que el formato probabilístico tiene una aplicación general. En consecuencia, se decidió evaluar las dificultades específicas de los estudiantes al resolver los problemas y diseñar un proceso educativo que las tuviesen en cuenta y permitiesen, a la vez, trabajar con formato probabilístico.

ESTUDIO DE EVALUACIÓN

La muestra participante en el estudio de evaluación estuvo formada por 414 estudiantes de primer curso de Psicología (entre 18 y 20 años) de las Universidades de Granada y Murcia (6 grupos), que seguían una asignatura de análisis de datos (12 créditos). La probabilidad condicional se enseñó al final del primer cuatrimestre, finalizada la estadística descriptiva y la probabilidad simple. Se dedicó una semana al tema (3 horas teóricas y 2 prácticas), incluyendo el teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Los estudiantes recibieron instrucción sobre el uso de diagramas de árbol y tablas de doble entrada y se les advirtió sobre la existencia de sesgos como la falacia de las tasas base o la confusión de una probabilidad condicional y su transpuesta. Se mostraron aplicaciones del teorema de Bayes al diagnóstico psicológico y médico, alarmas, pruebas de evaluación, predicción y accidentes, entre otros en experimentos compuestos de dos o tres experimentos simples, con un pequeño número de sucesos en el espacio muestral.

Método

Un mes después de la enseñanza, se dio a los estudiantes el problema que reproducimos a continuación, que fue resuelto en forma individual, pidiéndoles que describiesen con detalle los razonamientos seguidos en la resolución y dando libertad respecto al procedimiento.

> ***Problema 3.*** *Una fábrica dispone de dos máquinas M1 y M2 que fabrican bolas. La máquina M1 fabrica el 40 % de las bolas y la M2 el 60%. El 5% de las bolas fabricadas por M1 y el 1% de las fabricadas por M2 son defectuosas. Tomamos una bola al azar que resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por M1?*

La solución prevista a priori supone el uso de un diagrama en árbol como la figura 1, que, realizado correctamente, ayuda a encontrar la solución (Martignon y Waisner, 2002) debido a la estrecha relación entre esta representación y la forma en que procesamos la información al aplicar el teorema de Bayes. En primer lugar dividimos la población (producción de las máquinas en ejemplo) en función de las probabilidades a priori (40 y 60 por ciento) obteniendo una división en dos grupos (piezas producidas respectivamente por M1 y M2). Cada división en el primer nivel del árbol produce otra división binaria (piezas con o sin defectos). Seguidamente incluimos la información dada por las verosimilitudes y llegamos al tercer nivel del árbol que produce cuatro sucesos intersección, cuyas probabilidades conjuntas se obtienen multiplicando las probabilidades de las ramas que llevan a ellos.

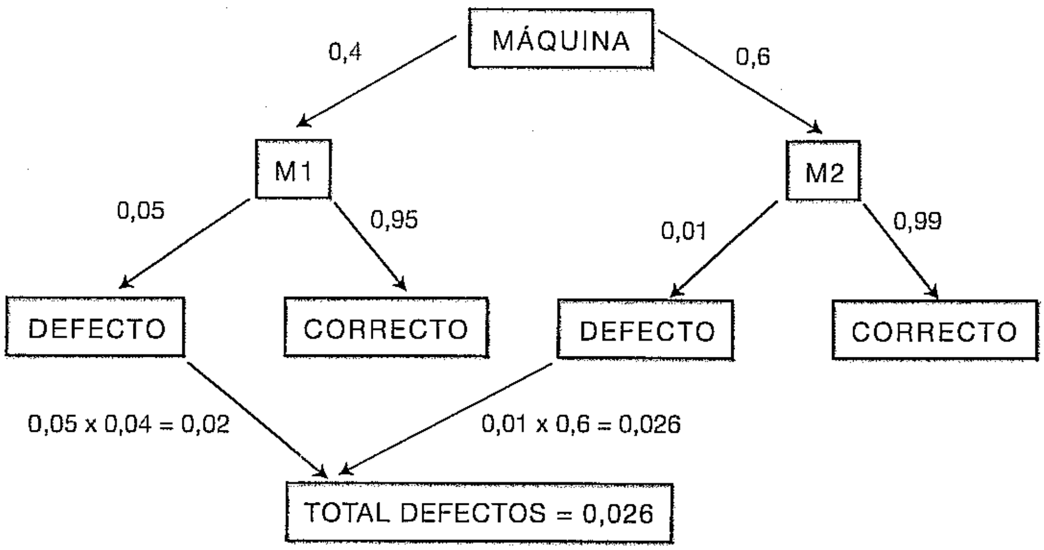

Figura 1. Representación mediante árbol de la tarea

A partir de aquí, sumamos las probabilidades de los sucesos que correspondan a la condición nueva (productos defectuosos) que se identifican fácilmente y obtenemos la cuarta rama con la probabilidad total de piezas defectuosas. Entonces el problema se resuelve simplemente aplicando la fórmula de la probabilidad condicional, como cociente entre las probabilidades conjuntas (que corresponden a la intersección de piezas defectuosas producidas por M1) y totales (probabilidad de defectos en la población), esto es $P(M1/D)=P(M1 \cap D)/P(D)$=0,02/0,026=0,76.

Resultados y discusión

Las repuestas escritas de los estudiantes fueron analizadas con detalle, comparándola con el proceso descrito con un análisis cualitativo y descriptivo. Con un proceso inductivo se clasificaron las respuestas semejantes, llegando a una categorización de las mismas, de acuerdo a si se completan o no los pasos que se describen a continuación. Además, se estudiaron los posibles errores en cada paso, utilizando tantas variables como posibles errores y analizando para cada una su presencia o ausencia en la respuesta de cada alumno.

a) Identificar los datos del problema

El primer paso para resolver la tarea (figura 2) es identificar todos los datos, lo que requiere diferenciar entre probabilidad a priori $P(M1)$, $P(M2)$ y verosimilitud $P(D/M1)$, *P(D/M2)*; diferenciar una probabilidad condicional *P(D/M1)* y su inversa *P(M1/D)* y determinar las probabilidades de sucesos contrarios *P(C/M1)*. El estudiante debe discriminar todos estos conceptos, realizar correctamente las sucesivas particiones del espacio muestral (figura 1) e identificar todos estos datos en el enunciado del problema. Algunos estudiantes no llegan a deducirlos o producen errores en su identificación, en la partición del espacio muestral (por ejemplo, no considerar la subdivisión de una de las partes) o bien hacen una restricción incorrecta del mismo (consideran sólo los productos fabricados por la máquina M1).

b) Construir una representación adecuada

El segundo paso es construir un diagrama de árbol adecuado (pocos estudiantes usaron una tabla) para representar el experimento y partición secuencial de la población (figura 3). Esta representación potencialmente debe servir al estudiante para reconocer que el conjunto de sucesos favorables (productos defectuosos) viene de dos subpoblaciones, la de los producidos por la máquina M1 y los producidos por M2. En algunos casos los diagramas en árbol son incompletos o se consideran dos poblaciones separadas.

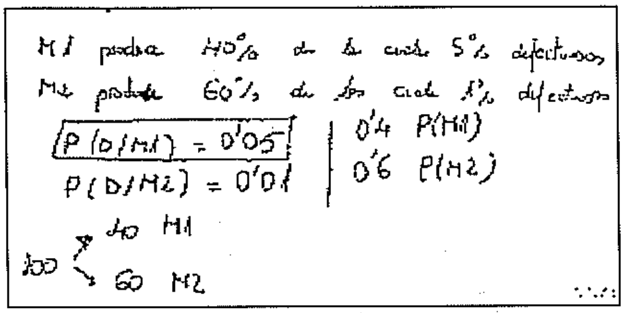

Figura 2. Identificación de los datos

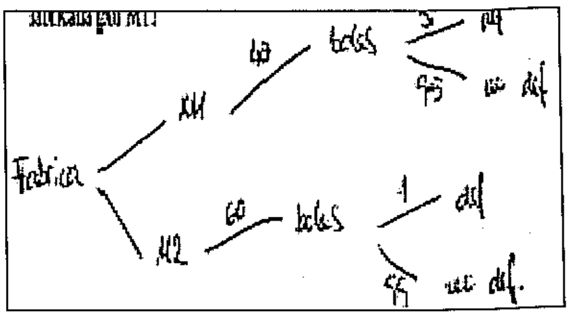

Figura 3. Diagrama en árbol correcto

c) Identificar la probabilidad condicional que se pide

Para continuar, los estudiantes deben identificar qué probabilidad se pide en el problema, que es una probabilidad condicional inversa (probabilidad a posteriori). No es sencillo pues algunos estudiantes asocian el condicionamiento con el orden temporal de los sucesos y no encuentran natural que se condicione un suceso por otro que ocurre con posterioridad (fenómeno denominado *falacia del eje de tiempos* por Falk (1986) y *concepción cronologista de la probabilidad condicional* por Gras y Totohasina (1995)). Los estudiantes pueden confundir la probabilidad condicional con su inversa, con una probabilidad simple o con una probabilidad conjunta (errores frecuentes en la investigación de Pollatsek, Well, Konold y Hardiman, 1987 y Ojeda, 1995). El estudiante de la figura 4 llega a este paso, utilizando una notación adecuada para la probabilidad condicional pedida.

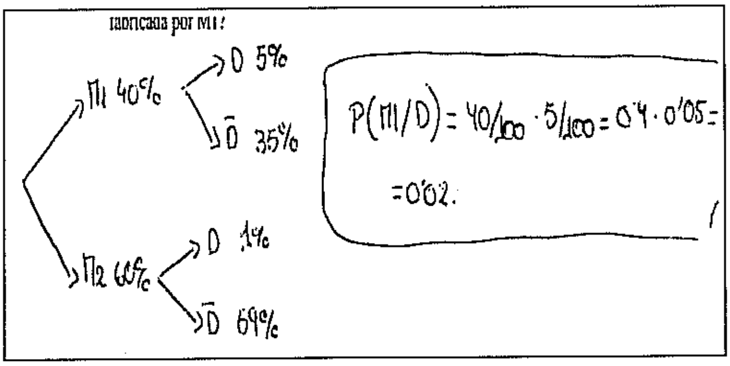

Figura 4. Identificar la probabilidad condicional

d) Calcular el denominador de la fórmula de Bayes

Después de identificar el problema como el cálculo de una probabilidad condicional, el estudiante debe calcular el numerador y denominador de la fórmula de Bayes. El denominador debe ser calculado con la regla de la probabilidad total (figura 5), esto es, multiplicando las probabilidades de cada rama del árbol y sumando cada una de esas probabilidades conjuntas. El alumno debe entender que se trata de sucesos dependientes, para aplicar correctamente la regla del producto en este caso. Algunos estudiantes cometen errores al calcular la probabilidad total, ya que las probabilidades a priori en la población no son tenidas en cuenta, es decir, suman las proporciones de defectos en las máquinas M1 y M2 sin ponderar por la proporción de productos fabricados por cada máquina.

e) Calcular la probabilidad inversa (teorema de Bayes)

Finalmente, el estudiante debe sintetizar todos los pasos anteriores y calcular el numerador (probabilidad conjunta) y denominador (probabilidad total) para obtener la probabilidad inversa o a posteriori, es decir, aplicar el teorema de Bayes (figura 6). También en la fórmula de Bayes se producen errores, sustituyendo los productos por sumas o invirtiendo el numerador y denominador. En otros casos, el estudiante simplemente no la recuerda o no la desarrolla.

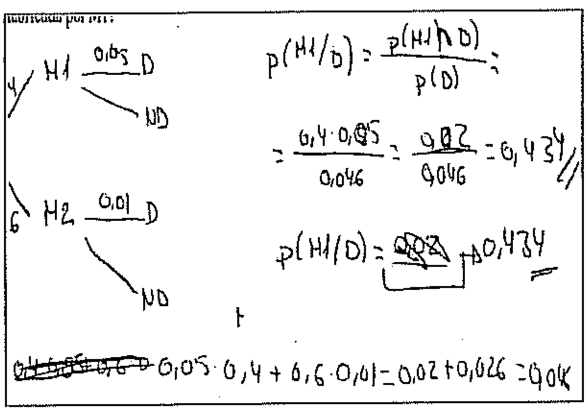

Figura 5. Calcular la probabilidad total

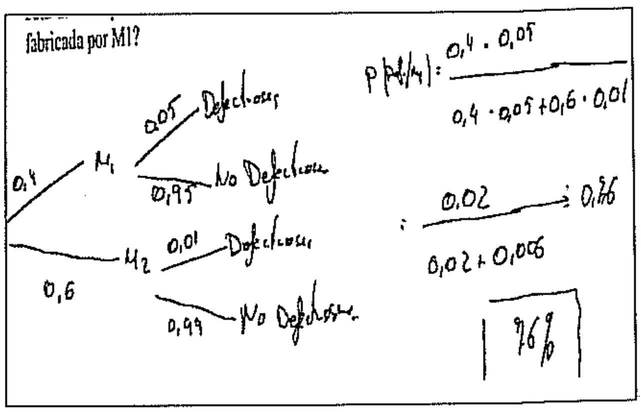

Figura 6. Alcanzar la solución final

En la tabla 1 presentamos el porcentaje de estudiantes que han llegado a completar cada uno de los pasos descritos, donde el alumno que llega a completar correctamente hasta un paso completa también correctamente todos los anteriores. Un porcentaje alto de alumnos (casi la mitad) llega a completar satisfactoriamente todos los pasos, lo que indica que el uso de diagrama en árbol y hacer hincapié en la enseñanza sobre los posibles sesgos en el proceso de solución lleva a un aprendizaje razonable. Si se añaden los que llegan al menos a la probabilidad total se obtiene más de la mitad de los estudiantes.

Para completar el estudio, se realizó un análisis de los errores (tabla 2) en el proceso en los 227 alumnos que no llegaron a la solución final, tratando de explicar la dificultad de los problemas, donde un alumno puede presentar más de un error. Por ello la suma de errores es mayor que el tamaño de la muestra. Los porcentajes se calculan respecto a 227 (alumnos que hacen algún error).

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes de respuestas después de la instrucción (n=414)

	Frecuencia	Porcentaje
En blanco, no identifica los datos o diagrama árbol incorrecto	57	13,8
Identifica los datos y realiza el diagrama de árbol, pero no continúa	50	12,1
Datos y diagrama correcto e identifica la probabilidad condicional inversa a calcular	78	18,8
Calcula correctamente la probabilidad total	42	10,1
Solución completa correcta	187	45,2

La falacia de las tasas base (olvido de las probabilidades a priori) no se presentó de forma generalizada, al menos explícitamente. Fue mayor el número de alumnos que no consiguen identificar correctamente todos los datos o la pregunta. También hay errores en la partición incorrecta del espacio muestral, o la restricción del mismo (tomando sólo los objetos fabricados por la máquina M1); la confusión entre una probabilidad condicional y otra conjunta y entre una probabilidad condicional y su inversa y, en menor medida, de una probabilidad simple con la condicional y conjunta.

Llama la atención el número de errores en la fórmula de Bayes, que algunos alumnos no recuerdan, invirtiendo denominador y numerador, omitiendo algún término o cambiando las probabilidades que intervienen por otras, lo que de nuevo sugiere la confusión de probabilidad simple, condicional y conjunta señalada por varios autores citados con anterioridad.

Tabla 2. Tipos de errores en el proceso de resolución (n=227)

	Frecuencia	Porcentaje
Blanco o no identifica los datos	49	21,6
Diagrama en árbol incorrecto	8	3,5
No identifica la pregunta	27	11,9
Restricción incorrecta del espacio muestral	22	9,7
Confunde probabilidad condicional y conjunta	77	33,9
Confunde probabilidad simple y condicional	7	3,1
Confunde una probabilidad condicional con su inversa	14	6,2
Falacia de las tasas base	22	9,7
Error en la formula de Bayes	40	17,6
Confunde un suceso y su complementario	10	4,4
Error partición del espacio muestral	21	9,3
Fallos razonamiento proporcional y operación fracciones	26	11,5
Probabilidad mayor que 1	4	1,8
Total errores	321	

Observamos también fallos en el razonamiento proporcional, por lo que algunos estudiantes no eran capaces de operar con fracciones o hallar el inverso de una fracción. Por ejemplo, al obtener el cinco por ciento del cuarenta por ciento, algunos alumnos restan las fracciones, en lugar de multiplicarlas; multiplican incorrectamente las fracciones o aplican inadecuadamente una regla de tres. Finalmente, algunos alumnos operan conjuntamente probabilidades y porcentajes o cambian el numerador y denominador en la fórmula, obteniendo como consecuencia valores mayores que la unidad para la probabilidad de un suceso, sin ser conscientes del error que esto supone.

EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA

A partir de los resultados de la prueba de evaluación se organizó una experiencia de enseñanza dirigida a superar estos errores, dentro de un curso breve de introducción a la inferencia bayesiana, apoyado en el uso de nuevas tecnologías. El número de errores encontrados al aplicar la fórmula de Bayes indicó la conveniencia de buscar una forma más intuitiva de presentar dicha fórmula que ayude a los alumnos a recordarla. Los fallos en razonamiento proporcional nos indicaron también la posible utilidad de darles una herramienta de cálculo, al igual que se hace para facilitar la aplicación de otros conceptos (por ejemplo, para calcular medias o correlaciones).

Los alumnos participantes son también estudiantes del primer año de Psicología en la Universidad de Granada ($n = 78$), todos voluntarios. Se dedicó a la enseñanza del Teorema de Bayes un total de 3 horas, las dos primeras de las cuales se llevaron a cabo en aula tradicional y la tercera en el laboratorio de informática donde los alumnos trabajaban en parejas resolviendo problemas con ayuda de subprogramas Excel preparados para la experiencia, con objeto de facilitar el cálculo.

Los alumnos se dividieron en cuatro pequeños grupos de entre 15 y 20 alumnos cada uno, repitiéndose la experiencia en cada uno de los grupos con la misma profesora. Se proporcionó a los estudiantes un material de estudio que constaba de objetivos, parte teórica, ejemplos, ejercicios resueltos y ejercicios para resolver. Se hizo énfasis en los siguientes objetivos, dirigidos a superar las dificultades encontradas en el estudio de evaluación:

- Diferenciar entre probabilidades iniciales y finales y verosimilitudes.
- Identificar los sucesos de interés, sus probabilidades iniciales y verosimilitudes a partir del enunciado de un problema.
- Analizar el teorema de Bayes como herramienta para transformar probabilidades iniciales en finales.
- Organizar los datos en una tabla de forma que se facilite el cálculo, bien manual o con recursos informáticos (hoja Excel) para calcular las probabilidades finales a partir de las probabilidades iniciales y de las verosimilitudes.

Se presentaron ejemplos de diagnóstico en psicología (sensibilidad y especificidad de pruebas de narcolepsia o depresión) y otros relativos a alarmas de incendio, pruebas de alcoholemia, exámenes, defectos de fabricación y predicción del género en ecografía. El teorema de Bayes fue descrito como una fórmula que permite aprender de la experiencia al transformar las probabilidades iniciales en finales por medio de la verosimilitud. Supuesto que A_i representa un conjunto de posibles sucesos y D los datos, el teorema se presentó con la formulación siguiente, más fácil de recordar para los estudiantes:

$$(1) \qquad P(A_i/D) = K \, x \, P(A_i) \, x \, P(D/A_i), \text{ donde}$$

$$K = \frac{1}{P(A_1)\times P(D/A_1)+P(A_2)\times P(D/A_2)+\ldots+P(A_n)\times P(D/A_n)}$$

La expresión (1) lleva fácilmente a los estudiantes a comprender la organización de los cálculos en una tabla Bayes (tabla 3) en la cual, una vez identificados a partir del enunciado de un problema las probabilidades iniciales $P(A_i)$ y verosimilitudes $P(A_i/D)$, se calcula la columna de productos $P(A_i)xP(B/A_i)$ y se suma. Cada elemento de esta columna dividido por la suma da una probabilidad final $P(A_i/D)$. Las columnas $P(A_i)$ y $P(A_i/D)$ son distribuciones de probabilidad, por tanto su suma ha de ser igual a la unidad. El resto de la sesión se dedica a la resolución de problemas, realizando los cálculos por una tabla Bayes como la presentada en la tabla 3. Adicionalmente, se enseña a los estudiantes a representar en un diagrama en árbol el espacio muestral y las sucesivas particiones, identificando las probabilidades de cada rama del árbol (figura 1).

Tabla 3. Organización del cálculo de la probabilidad final

Sucesos	Probabilidad inicial	Verosimilitud	Producto	Probabilidad final
A_1	$P(A_1)$	$P(D/A_1)$	$P(A_1)xP(D/A_1)$	$P(A_1)xP(D/A_1)/S$
A_2	$P(A_2)$	$P(D/A_2)$	$P(A_2)xP(D/A_2)$	$P(A_2)xP(D/A_2)/S$
...				
A_n	$P(A_n)$	$P(D/A_n)$	$P(A_n)xP(D/A_n)$	$P(A_n)xP(D/A_n)/S$
Suma	1		S	1

En la sesión de laboratorio, se introduce el *Programa Bayes* preparado en Excel que calcula las probabilidades finales $P(A_i/D)$ de un conjunto de sucesos A_i, dadas sus probabilidades iniciales $P(A_i)$ y las verosimilitudes $P(D/A_i)$ de unos ciertos datos D, dados los sucesos A_i para un máximo de 8 sucesos. Proporciona el producto de las probabilidades iniciales por las verosimilitudes y las probabilidades finales (figura 6) mediante la fórmula de Bayes. Los estudiantes trabajaron en el laboratorio para resolver nuevos problemas realizando los cálculos con ayuda del programa. Se eligió Excel para preparar el programa, al ser una herramienta que los alumnos están acostumbrados a utilizar y ser de uso generalizado.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES FINALES MEDIANTE TEOREMA DE BAYES

– –DATOS– –

Sucesos	Probabilidad inicial	Verosimilitud	Producto	Probabilidad final
A1	0,1	0,5	0,05	0,1220
A2	0,9	0,4	0,36	0,8780
A3			0	0,0000
A4			0	0,0000
A5			0	0,0000
A6			0	0,0000
A7			0	0,0000
A8			0	0,0000
	1		0,41	1,0000

Figura 6. Programa Bayes

Finalizada la enseñanza se propuso a los estudiantes los siguientes problemas abiertos que los alumnos resolvieron por escrito, ya sin ayuda del ordenador. El alumno podía aportar sus soluciones, comentarios y esquemas, tales como diagramas en árbol.

Problema 4*. Una fábrica de enlatados produce 5000 envases diarios. La máquina A produce 3000 de estos envases, de los que el 2% son defectuosos y la máquina B produce los 2000 restantes de los que se sabe que el 4% son defectuosos.*

a. Organiza los cálculos utilizando una tabla Bayes.

b. Si seleccionamos al azar un envase defectuoso, calcula la probabilidad de haber sido fabricado por A. Calcula la probabilidad de que haya sido fabricado por B.

Problema 5*. Un edificio está equipado de un sistema de alarma contra incendios. De existir peligro la alarma se activa en el 99 por ciento de las veces. También puede producirse una falsa alarma con probabilidad 0,005 en el caso de no haber incendio. Si la probabilidad de incendio es 0,002, responde a las siguientes preguntas:*

a. Organiza los cálculos utilizando una tabla Bayes.

b. Si hay una alarma, ¿cuál es la probabilidad de que sea infundada? ¿Y de que sea cierta?

Como observamos en la tabla 4, la mayoría de los estudiantes llegaron a la solución final. El porcentaje de éxito fue bastante mayor que lo que se informa en investigaciones previas, posiblemente porque la disposición en forma de tabla ayudó a los estudiantes a identificar los datos en los problemas propuestos y a recordar la fórmula de Bayes. Los fallos en la identificación de los datos fueron mucho menores que en la experiencia con enseñanza tradicional. Fueron también pocos los errores de cálculo que los alumnos realizaron sólo con la calculadora.

Tabla 4. Porcentaje de estudiantes según completitud de respuestas a los problemas

	Problema 1	Problema 2
Solución correcta completa	83,7	83,4
Identificación correcta de datos (probabilidad inicial y verosimilitud) y algoritmo correcto con fallo en interpretación	1,2	7,9
Error al identificar parte o todos los datos	11,5	4,3
Error de cálculo	3,6	4,4

CONCLUSIONES

En el estudio de evaluación se confirmaron los resultados obtenidos en Díaz y de la Fuente (2006) en un estudio reducido de estudiantes. Dichos errores no se limitan a falacia de las tasas base (Tversky y Kahneman, 1982) o a la dificultad de operar con probabilidades y fracciones. Los errores se producen en los diferentes pasos del proceso de resolución, comenzando por la identificación correcta de los sucesos y sus probabilidades, y la correcta partición y subpartición del espacio muestral. A muchos estudiantes les fue difícil diferenciar entre probabilidades simples, compuestas y condicionales, o confundieron una probabilidad condicional *P(A/B)* con su inversa *P(B/A)*, dificultades ya señaladas en las investigaciones previas sobre probabilidad condicional. El olvido de la fórmula de Bayes también ocasionó un número importante de errores, pero su número es pequeño, en comparación con los causados por identificación de datos y errores en los conceptos que intervienen.

Los resultados de la experiencia de enseñanza mejoran notablemente la capacidad de los participantes para aplicar el teorema de Bayes, ya que la mayoría de estudiantes fueron capaces de identificar los datos en los problemas abiertos, organizar los datos en una tabla, realizar los cálculos en forma manual e interpretarlos en el contexto de los problemas. También se obvian muchos de los errores intermedios descritos en el estudio de evaluación.

Más aún, la organización de los cálculos en los problemas tipo Bayes en forma de tabla es fácil de generalizar a mayor número de sucesos, sin más que añadir nuevas filas en la tabla. Es también inmediata la extensión a experimentos múltiples, puesto que en este caso se procede por pasos: Las probabilidades finales del primer experimento se usan como probabilidades iniciales en el segundo y así sucesivamente, pudiendo resolverse el problema como una serie de problemas simples, lo que es especialmente sencillo si se usa la hoja Excel para simplificar el cálculo.

Por el contrario, incluso cuando el formato de frecuencias pueda ayudar a los estudiantes a resolver algunos problemas, es difícil de generalizar a situaciones más complejas, pues se requieren cálculos de tipo proporcional que se van complicando cuando aumenta el número de sucesos o experimentos. Concluimos con el interés de continuar enseñando el teorema de Bayes y los problemas relacionados y su resolución con diversos formatos (frecuencias, porcentajes, probabilidad) usando tanto el diagrama en árbol como la tabla Bayes como ayuda, si es posible, realizando los cálculos con Excel u otro software. Se impone también la necesidad de replicar la investigación y mejorar el diseño de la enseñanza con objeto de facilitar a los estudiantes la adquisición de este importante teorema.

En consecuencia, aportamos argumentos para continuar su enseñanza a los universitarios, pues además de su utilidad en la toma de decisiones, diagnóstico y evaluación es la base de la inferencia estadística. Por ello estamos de acuerdo con Rossman y Short (1995) que sugieren que este tema puede enseñarse dentro del espíritu de la reforma de la educación estadística, presentando a los estudiantes una variedad de aplicaciones en problemas reales, proponiendo situaciones interactivas y usando la tecnología para facilitar el aprendizaje.

Agradecimientos. Este trabajo está realizado con el proyecto SEJ2004-00789/EDUC, MEC, Madrid, España y Grupo FQM-126, Junta de Andalucía.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bar-Hillel, M. (1987). The base rate fallacy controversy. En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty.* (pp 39-61) Amsterdam: North Holland.

Batanero, C. y Sánchez, E. (2005). What is the nature of high school student's conceptions and misconceptions about probability? En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning,* (pp. 260-289), Dordrecht: Kluwer.

Cosmides, L. y Tooby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition, 58,* 1-73.

Díaz, C. (2004). *Elaboración de un instrumento de evaluación del razonamiento condicional. Un estudio preliminar.* Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon, 59,* 245-260.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006). Dificultades en la resolución de problemas bayesianos: un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática. 18 (2),* 75-94.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics.* (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probability. En R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education,* vol. 7, (pp. 175-184), Paris: UNESCO.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright & P. Ayton (Eds.). *Subjective probability* (pp. 129-161). Chichester: Wiley.

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: Frequency formats (pp. 129-161). *Psychological Review, 102,* 684-704.

Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15(1), 49-95.

Koehler, J.J. (1996). The base rate fallacy reconsidered: Descriptive, normative, and methodological challenges. *Behavior and Brain Sciences, 19,* 1-54.

Lonjedo, M.A. y Huerta, P. (2004). Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos. En Castro, E. y De la Torre, E. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* (pp. 229-238). Universidade da Coruña.

Lonjedo, M.A. y Huerta, P. (2005). The nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem resolution. En M. Bosch (Ed.). *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Sant Feliu de Guissols: CERME. CD ROM. ISBN 84-611-3282-3.

Martignon, L. y Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Confe-*

rence on Teaching of Statistics. Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education. CD ROM.

Ojeda, A.M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.

Pollatsek, A.; Well, A.D.; Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes, 40,* 255-269.

Serrano, L.; Batanero, C.; Ortiz, J.J. y Cañizares, M.J. (1998). Un estudio componencial de heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria. *Educación Matemática, 10(1),* 7-26.

Rossman, A. y Short, T. (1995). Conditional probability and education reform: Are they compatible? *Journal of Statistics Education,* 3(2), [On line], http://www.amstat.org/publications/jse/v3n2/rossman.html.

Teigen, K.H.; Brun, W. y Frydenlund, R. (1999). Judgments of risk and probability: the role of frequentist information. *Journal of Behavioral Decision Making*, *12(2),* 123.

Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de concetpions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.* Tesis Doctoral. Universidad Rennes I.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a). Evidential impact of base rates. En D. Kahneman P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 153-160). New York: Cambridge University Press.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982b). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge, MA: Cambridge University Press.