Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Ecuaciones elípticas y parabólicas singulares con crecimiento natural en el gradiente

Tesis Doctoral

PEDRO J. MARTÍNEZ APARICIO

GRANADA, 2009

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Pedro J. Martínez Aparicio
D.L.: GR 3955-2009
ISBN: 978-84-692-7841-3

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Ecuaciones elípticas y parabólicas singulares con crecimiento natural en el gradiente

Tesis Doctoral

PEDRO J. MARTÍNEZ APARICIO

GRANADA, 2009

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

ECUACIONES ELÍPTICAS Y PARABÓLICAS SINGULARES CON CRECIMIENTO NATURAL EN EL GRADIENTE

Memoria realizada por **Pedro J. Martínez Aparicio** en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, bajo la dirección de **Dr. D. David Arcoya Álvarez**, Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, y de **Dr. D. José Carmona Tapia**, Profesor Titular del Departamento de Álgebra y Análisis Matemático de la Universidad de Almería, para optar al grado de *Doctor Europeo en Ciencias Matemáticas*.

Candidato al grado de Doctor Europeo en Ciencias Matemáticas	V^{o} B^{o} del director	V^{o} B^{o} del director
Pedro J. Martínez Aparicio	David Arcoya Álvarez	José Carmona Tapia

A mi familia

Índice general

Introduction

In this manuscript it is studied a suitable class of non linear elliptic and parabolic problems with quadratic growth in the gradient. This sort of problems arises naturally in the classic Calculus of Variations. For example, if we consider the following functional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(v)|\nabla v|^2 - \int_\Omega f v\,,$$

where a is a sufficient smooth, elliptic and bounded function (i.e., there exist constants $0<\alpha\le\beta$ such that $\alpha|\xi|^2 \le a(s)\xi\cdot\xi$ and $|a(s)|\le\beta$ for all $s\in\mathbb{R}$) and $f\in L^2(\Omega)$, the Euler-Lagrange equation associated is

$$-\mathrm{div}\big(a(v)\nabla v\big) + \frac{1}{2}a'(v)|\nabla v|^2 = f.$$

The study of critical points of the functional J is corresponded with the study of the existence of solution for a quasilinear problem with quadratic growth in the gradient. As we can observe in the previous equation *the lower order term* $\frac{1}{2}a'(v)|\nabla v|^2$ contains the gradient with quadratic dependence.

Following the terminology of Kazdan and Kramer [57], we say that the quadratic growth in ∇u of the non linear differential operator in the previous equation is *natural*. There are several reasons (additionals to those in Calculus of Variations) that can explain this expression. In first place, the class of equations with quadratic growth in the gradient is invariant to non-linear changes of variable $v = F(u)$ ($F\in C^1$). This is in stark contrast to what occurs for the semilinear equation $-\Delta u = f(x,u)$ and we again think that equations with quadratic growth constitute the right framework, both from the viewpoint of applications as well as from the purely mathematical. On the other hand, we must remember the non existence result by Serrin, specifically Theorem 1 of Chapter III.16 in [88], when the growth in ∇u is faster than quadratic at infinity. Specifically, he proved that given any smooth domain there are smooth data for which the Dirichlet problem has no solution.

Regarding the literature there are several papers about the existence and non existence of solutions for the elliptic model problem

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = f & \text{in } \Omega,\\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

where Ω is an open and bounded subset of $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$), $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a function and f belongs to a suitable Lebesgue space. It has been systematically studied by Bensoussan, Boccardo and Murat [20], Boccardo, Murat and Puel [32] and Boccardo and Gallouët [28] with datum f in a given Lebesgue space when the function g is continuous in $\mathbb{R}$. In [20] they impose the sign condition $g(s)s \geq 0$, for every $s \in \mathbb{R}$. Thanks to the presence of the lower order term with quadratic dependence with respect to the gradient, the sign condition and that $g \not\equiv 0$, the Dirichlet problem (1) is allowed to have finite energy weak solutions (see [28]), even if f belongs only to $L^1(\Omega)$. This result (regularizing effect of g) is somewhat surprising because it is not true in the linear case (for example if $g(x,s) \equiv 0$). On the other hand, in [32, 34] the authors consider the Dirichlet boundary value problem for an equation with a more general quadratic term $g(x,u,\nabla u)$ (instead of the term $g(u)|\nabla u|^2$). In that case, they require (see (2.10) in [32] and (3.10) in [34]) a more general *"one-side condition"* than the sign condition. However, we point out that in the case $g(x,u,\nabla u) = g(u)|\nabla u|^2$ this one-side hypothesis is equivalent to the sign condition. Porretta and Segura de León [83] (see also the work by Boccardo, Segura de León and Trombetti [35]), have not assumed the sign condition and they have proved the existence of solution of (1) provided by a certain asymptotic condition about g. On the other hand, Ferone and Murat [47] and Grenon and Trombetti [55] proved the existence of solution of (1) without assuming neither the sign condition nor the asymptotic condition at infinity, but requiring that the data $f(x)$ has small enough $L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$-norm. Some extensions to systems of elliptic partial differential equations are discussed by Alaa and Mounir [3], Bensoussan and Boccardo [19] and Landes [62]. The case of unbounded domains Ω is treated by Dall'Aglio, Giachetti and Puel [41]. Abdellaoui, Dall'Aglio and Peral [1] study the case $g \leq 0$ and decreasing.

Respect to the parabolic case, if we denote $\Omega \times (0,T)$ by Q, the corresponding quasilinear problem with quadratic gradient is the following.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = f & \text{in } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{2}$$

Again, the problem (2) was largely studied if g is bounded and continuous on $\mathbb{R}$ and many results concerning existence, nonexistence and regularity of the solution have been obtained depending on the regularity of the data and on the growth of g at infinity. We remark the works by Blanchard and Porretta [22], Boccardo, Murat and Puel [33], Dall'Aglio and Orsina [42] and Porretta [81] and references therein.

In the case that $f \in L^2((0,T);W^{-1,2}(\Omega))$ and $u_0 \in L^2(\Omega)$, the problem (2) was studied in [33], where the authors proved the existence of a weak solution in the distributional sense in Q. In [42] the authors studied the case in which f only belongs to $L^1(Q)$ and $u_0 = 0$ if there exists $\gamma > 0$ such that $g(x,t,s,\xi)\text{sign}(s) \geq \gamma|\xi|^2$ for all $s \in \mathbb{R}$. Thanks to that assumption the solution belongs to $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ (an extension to the case if u_0 belongs to $L^1(\Omega)$ was given in [81]), so that the extra term $g(x,t,s,\xi)$ may actually improve the standard regularity for the initial boundary value problems in L^1 without *lower order terms*. See also [4] (and the preceding work [5]) for the case in which a nonlinear term is considered in the right hand side.

The principal novelty of this manuscript is the study of the quasilinear elliptic and parabolic problems with natural growth in the gradient and a non linearity with a singularity at 0. It can be observed in the previous example of Calculus of Variations if we consider functions with unbounded derivative in zero. For example, if we consider now the functional J with $a(v) = 1+|v|^{1-\gamma}$ and $f \in L^q(\Omega)$, $q > \frac{N}{2}$, $\gamma \in (0,1)$. A purely formal computation shows that the Euler-Lagrange equation associated should be

$$-\mathrm{div}\big((1+|u|^{1-\gamma})\nabla u\big) + \frac{1-\gamma}{2}\frac{u}{|u|^{1+\gamma}}|\nabla u|^2 = f.$$

Observe that it is a non linear elliptic equation with quadratic growth in the gradient and singular at $u = 0$.

The case of a singular function g appears if some applications are described by equations. For instance, we can mention the study of *growth patterns in clusters and fronts of solidification* (see the work by Kardar, Parisi y Zhang [56] (*growth of tumors*, Berestychi, Kamin y Sivashinsky [21] for the sutdy of *flame propagation*) and the study of *groundwater flow in a water-absorbing fissurized porous rock* was dealt by Barenblatt, Bertsch, Chertock y Protokishin [17].

Therefore, it is natural to consider more general singular problems with variational structure or not. This type of problems has been studied very little in the current literature in a natural way we will study it in the present manuscript, both in elliptic and parabolic case. A simple model is $g(s) = \frac{1}{s^\gamma}$, is that to say

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} = f & \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Concretely, we look for a *ditributional solution* for the problem (3), i.e. a function $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ that verifies $u > 0$ almost everywhere in Ω, such that $\dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}$ is in $L^1(\Omega)$ and

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}\phi = \int_\Omega f\phi, \quad \forall 0 \le \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

If moreover $u \in H_0^1(\Omega)$, we say that u is a *finite energy solution* for problem (3). We will determine the optimal range of $\gamma > 0$ for which solutions exist.

Also we consider the parabolic version of these problems. Is that to say, we study the problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} = f & \text{in } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{4}$$

with f and u_0 in a suitable space of measurables functions.

A solution for (4) is a function $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^1(\Omega))$, such that $u > 0$ a.e. in Q, $\dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} \in L^1(Q)$ and $u(x,0) = u_0$ a.e. in Ω and that satisfies

$$-\int_\Omega u_0\varphi(0) - \int_0^T \langle \varphi_t, u\rangle + \int_Q \nabla u \nabla\varphi + \int_Q \frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}\varphi = \int_Q f\varphi,$$

for every $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ with $\varphi_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ and $\varphi(T) = 0$.

To study the problems (3) and (4) (or their more general versions) we divide the manuscript in several Chapters. In Chapter 1 we introduce the notation and we enumerate some basic properties of the boundary value problems. We make a review on some preliminary tools and basic results of the spaces of functions with values in a Banach space that is one of the most important tool to deal with evolution problems. Moreover, we analyze some fundamental aspects of the boundary value problems such as the comparison principle and uniqueness (we extend to the evolutive case the comparison principle proved by Arcoya and Segura de León [13]), regularity and a priori estimates.

Chapter 2 is dedicated to the study of singular elliptic problems. This study was initiated in [12], where we proved the existence of solution for the problem (3) for $0 < \gamma \leq 1$ and with datum f verifying

$$m_\omega(f) \stackrel{\text{def}}{=} \text{ess inf}\,\{f(x) : x \in \omega\} > 0, \quad \forall \omega \subset\subset \Omega. \tag{5}$$

Later we improve the existence of solution in [6] for the problem (3) in the case that g also can change of sign and f belongs to a better space. Moreover, the corresponding obstacle problem (variational inequality) has been dealt in [9]. Finally in [8] we have proved a necessary and sufficient condition about γ for the existence of solution.

Theorem 1. *Problem* (3) *has a finite energy solution for every* $f \in L^q(\Omega)$ *(*$q > \frac{2N}{N+2}$*) satisfying* (5) *if and only if* $\gamma < 2$.

This result is consequence of Theorems 2.1.1 and 2.4.1 of Chapter 2 where we consider also more general operators and non linearities g. We remark that such non linearities can change of sign. Moreover, we prove the existence of distributional solution for datums f belonging to $L^1(\Omega)$.

The idea to prove Theorem 1 consists in approximating the non linearity $g(s) = \dfrac{1}{s^\gamma}$ by non linearities g_n continuous in $\mathbb{R}$, such that non singular problems obtained for g_n fall into the framework in [34] and, therefore they have finite energy solution u_n for every $n \in \mathbb{N}$. We will prove that their solutions u_n converge to a positive solution of (1). As $f \in L^q(\Omega)$ it is easy to prove ([34]) that exist a priori estimates of the solutions u_n in $H_0^1(\Omega)$. Observe, that due to singularity of g, $g(u_n(x))$ and $g_n(u_n(x))$ blow up as $u_n(x)$ is converging to zero. This is the reason why it is not possible to apply the ideas of [20, 32, 34] to show the strong convergence of ∇u_n in $L^2(\Omega)$ (and thus the strong convergence of the approximated solutions u_n in $H_0^1(\Omega)$ to a solution of (3)). The keypoint to overcome this difficulty consists in proving that u_n are uniformly away from zero in every compact set in Ω (we will call it as the uniform strong maximum principle following the terminology of Vázquez [93]). This principle allows us to prove that the sequence of approximated solutions converges locally to a solution of (3). The non existence of solution is based in a very simple argument that consists in choosing a convenient test function and using the characterization of the first positive eigenvalue $\lambda_1(f)$ of the problem of eigenvalues with weight $f(x)$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x)\, u & \text{in } \Omega, \\ \qquad u = 0 & \text{in } \partial\Omega. \end{cases}$$

In sight of the non existence result and of the used technique for the existence, the natural question that arises is to know what occurs with the sequence of approximated solutions in the case $\gamma \geq 2$. In that sense, we prove that if $\gamma > 2$ the solutions v_n of the following approximated problems

$$\begin{cases} -\Delta v_n + \dfrac{|\nabla v_n|^2}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} = f & \text{in } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

converge to zero.

At the same time that we carried out our study about the problem (3), other authors have realized several works of a parallel and independent form. Giachetti and Murat [49] study a slightly different singular problem. Namely, if $\chi_{\{u>0\}}$ denotes the characteristic function of the set $\{x \in \Omega : u(x) > 0\}$, $0 \leq f \in L^\infty(\Omega)$, $\mu \in \mathbb{R}$ and $\lambda, \gamma > 0$, the differential equation

$$-\text{div}\,(M(x,u)\nabla u) + \lambda u + \mu \frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} \chi_{\{u>0\}} = f \text{ en } \Omega$$

is considered. The given results about existence of nonnegative solutions in $H_0^1(\Omega)$ depend on γ. Indeed, existence is proved for every $\mu \in \mathbb{R}$ if $\gamma < 1$, while the case $\gamma \geq 1$ requires that $\mu < 0$. Thus, if $\gamma \geq 1$ we have that the term with quadratic dependence in ∇u is negative (i.e., in some sense, the "opposite assumption" with respect to the sign condition). In this direction, result for similar equations can be also found in [51] and [84].

Otherwise, in an interesting work [24], Boccardo manages to eliminate the requirement of the condition (5). Concretely, he deals the following problem

$$\begin{cases} -\alpha\Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

He obtains the existence of positive solutions for the problem (6) if $0 \leq f \in L^q(\Omega)$ ($q > 2N/(N+2)$) with $f \not\equiv 0$ and

- $\gamma < 1$ and $\alpha > 0$
- $\gamma = 1$ and $\alpha > 2$.

From our point of view, we study the used technique in [24] and using also those in [8] we prove the following small improvement of this result.

Theorem 2. *Let $0 \leq f \in L^q(\Omega)$ for some $q \geq \frac{2N}{N+2}$ with $f \not\equiv 0$ in Ω and assume that $\alpha > 1$ holds. Then for $\gamma = 1$ there exists weak solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of the Dirichlet problem* (6).

In this case ($\gamma = 1$), in [24] the author proves that the limit of the approximated sequence is strictly positive if $\alpha > 1$ and to deduce that such limit is the solution of our problem (6) it is required that $\alpha > 2$. We establish that u_n are uniformly away from zero in every compact set in Ω assuming only that $\alpha > 1$. This improvement allows us to prove the convergence of the approximated solutions to a solution of (6).

In Chapter 3 of the manuscript we study the existence of solution for quasilinear parabolic problems with a singular *lower order term* with natural growth in the gradient. We consider the problem (4) with datum f being L^r-integrable in $(0,T)$ and with values in $L^q(\Omega)$ for some r,q. We will assume about the initial datum $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ that verifies (5). Specifically, our existence result for the model problem is the following.

Theorem 3. *Let $f \in L^r(0,T;L^q(\Omega))$ with $\dfrac{1}{r}+\dfrac{2}{Nq}<1$, $q\geq 1$, $r>1$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ and f and u_0 satisfying* (5)*. Then if $\gamma<2$ the problem* (4) *admits a solution in the space $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(Q)$.*

This theorem will be consequence of Theorem 3.1.1 of Chapter 3 where we consider more generals operators and non linearities g. Moreover, such non linearities can change of sign.

The proof is based on an approximation and compactness argument where the key role is again played by a uniform local estimate from below of the approximating sequence of solutions that we will deduce thanks to a result of Leoni and Pellacci [66]. Specifically the approximation of $g(s)=\frac{1}{s^\gamma}$ by continuous functions g_n and these non singular problems obtained for g_n fall into the framework studied by J.L. Lions [72]. So, we can deduce the existence of solution u_n. We need estimates of u_n in $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ that we obtain of [72] and in $L^\infty(Q)$ by Aronson and Serrin [15]. In order to pass to the limit and to obtain that u_n converges to a solution u of (4), we use a compactness argument of Aubin and Simon [89] and the uniform local estimate from below.

Furthermore, thanks to the comparison principle, that we prove in Chapter 1, for the problem (4) with $0<\gamma<1$ (see Theorem 1.3.16) we study the large time behavior of the solutions of problem (4) as t goes to infinity. We establish a stability result of parabolic solutions of the problem (4) toward the stationary solution of the same problem (see Theorem 3.3.1) using some techniques that Leonori and Petitta have introduced in [80].

We will study in Chapter 4 the existence of continua of solutions for quasilinear problems with quadratic gradient. Concretely, let $0\leq p<\frac{N+2}{N-2}$ and $0\leq f_0\in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. We study [11] the boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta u+g(u)|\nabla u|^2=\lambda u^p+f_0(x) & \text{in } \Omega,\\ u=0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

for a suitable non negative continuous function $g:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$. We say that $u\in H_0^1(\Omega)$ is a positive solution for (7) if $u>0$ a.e. $x\in\Omega$, $g(u)|\nabla u|^2\in L^1(\Omega)$ and

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi+\int_\Omega g(u)|\nabla u|^2\varphi=\lambda\int_\Omega u^p\varphi+\int_\Omega f_0\varphi,\quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \tag{8}$$

Observe that, in our case, the right hand side of the equation in (7) is linear if and only if $p=1$. This case has been studied by Abdellaoui, Peral and Primo [2] for $g\equiv 1$. They prove existence of a positive solution for every $\lambda\in[0,+\infty)$ provided that $f_0\gneqq 0$. Compare this result with the semilinear case ($g\equiv 0$) where existence of positive solution requires λ to be smaller than the first eigenvalue μ_1 of the Laplacian operator with zero Dirichlet boundary conditions. In this way, the authors stressed that the quadratic term in the gradient produces a strong regularizing effect and break down any resonance effect of the linear zero-order term.

To our knowledge, the case in which the (non-variational) differential operator is confronted with a nonlinear right hand side has been less studied [78, 86]. See also the works by Arcoya and Boccardo [7], Canino [38] and the references therein for the case of variational differential operators. If $f_0 \equiv 0$, g is continuous in $[0,+\infty)$ and $p > 1$, it is shown by Orsina and Puel [78] that the behavior of g at infinity has also an effect on the positive solution set. Specifically, the authors use a suitable change of variable which reduces the quasilinear equation to a semilinear one and thus they prove that if $g \in L^1(0,+\infty)$ then there exists positive solution for every $\lambda > 0$, while if $g(t)t \geq q > p$ for $t >> 1$, then there exists positive solution for $\lambda > 0$ large enough and no positive solution if $\lambda > 0$ is sufficiently small.

One of the our main purposes is to provide a common framework (based on topological methods) which handles the previous results and helps us to understand the true role of the different hypotheses imposed on the behavior of the non linearity g, revealing the different effects that take place in the solution set according as $p = 1$ or $p \neq 1$, $f_0 \equiv 0$ or $f_0 \gneqq 0$. As a particular case of our results we will show that even in the case $p = 1$, the behavior of g at infinity has a role in the solution set, for example, no "strong regularizing effect" is obtained for functions g which are sufficiently small at infinity although some differences with respect to the semilinear case are shown. This is not the case if $p < 1$ since the positive solution set for $g \not\equiv 0$ behaves like in the semilinear case $g \equiv 0$. Finally, if $p > 1$ and $f_0 \not\equiv 0$, the behavior of g at infinity is again determinant to have some kind of "regularizing effect".

Furthermore, another of the our goals is to extend the above results to handle, in addition to the case of continuous functions g on $[0,+\infty)$, the case of functions $g : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ which may be singular at zero. Specifically, to unify both cases: the continuous and the singular ones, we assume the following hypothesis:

(G) Either the function $g \geq 0$ is continuous in $[0,+\infty)$ or $g \geq 0$ is continuous in $(0,+\infty)$, decreasing and integrable in a neighborhood of zero with the property $\lim_{s\to 0} g(s) = +\infty$.

In this way, we can consider the operator $K : \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ by defining, for every $\lambda \in \mathbb{R}$ and for every $w \in H_0^1(\Omega)$, $K(\lambda, w)$ as the unique solution u in $H_0^1(\Omega)$ of the problem

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = \lambda^+ w^+(x)^p + f_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Indeed, in the case that g is singular at zero with $0 \lneqq f_0 \in L^{2N/(N+2)}(\Omega)$ the existence is due to [24] and the uniqueness to [13]. Moreover, if g is continuous at zero, the existence and uniqueness results remain also true in the case $f_0 \equiv 0$. With this notation, (7) can be rewritten as a fixed point problem, namely,

$$u = K_\lambda(u),$$

with $K_\lambda(u) = K(\lambda, u)$.

Compare this approach with this one in the recent work by Ruiz and Suárez [86], for $g \equiv 1$ and a logistic nonlinearity, where the authors cleverly combine regularity in

$C^1(\Omega)$ with the properties of the inverse $(-\Delta)^{-1}$ of the Laplacian operator in $C(\Omega)$ in order to use bifurcation techniques. Unfortunately, this idea does not work in the case g singular at zero by the lack of regularity.

We will prove the compactness of K which allows us to apply the Leray-Schauder degree techniques to study the existence of "continua of solutions" of (7), i.e. connected and closed subsets in the solution set

$$\{(\lambda,u)\in\mathbb{R}\times H_0^1(\Omega)\,:\,u=K_\lambda(u)\}.$$

It has been remarked that, following the original work by Leray and Schauder [70], the computation of the degree of the operators K_λ will be carried out by constructing suitable homotopies with a linear operator (the Laplacian one), reducing in this way the study of the quasilinear problem (7) to a linear one.

It is in this unified functional framework that we work and we obtain our results that we present here for a simple nonlinearity $f(\lambda,x,s)=\lambda s^p$ and $g(x,s)$ independent on $x\in\Omega$, although most of them hold true for a suitable perturbation of them. To be more specific, in the case $p=1$ we give sufficient conditions on g to have, as in the semilinear case, existence of solution for a bounded interval of values of the parameter λ. Roughly speaking, those conditions are related to how far from zero we can take g in order to remain true the "semilinear type" result. On the other hand, we also prove a regularizing effect, that is, existence of solution in an unbounded interval of values for the parameter λ provided that g is sufficiently far from zero.

Theorem 4. *Assume $p=1$, $0\lneqq f_0\in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ and suppose that condition (G) holds.*

1. *(No regularizing effect) If there are $s_0,\delta_0>0$ such that*
$$\frac{s}{\int_0^s e^{\int_r^s g(t)dt}dr}\geq\delta_0,\quad \forall s>s_0, \tag{9}$$
then there exist $\lambda^*,\lambda_*>0$ such that (7) has no solution for $\lambda>\lambda^*$ and admits a positive solution for every $\lambda\in[0,\lambda_*)$.

2. *(Regularizing effect) If there exist $s_1,c>0$, and $\gamma<1$ such that*
$$g(s)\geq\frac{c}{s^\gamma},\quad \forall s\geq s_1, \tag{10}$$
then (7) admits a positive solution for every $\lambda\in[0,+\infty)$.

Observe that there is a gap between both conditions (9) and (10) since, for instance, the function $g(s)=\dfrac{c}{s+1}$ with $c\geq 1$ satisfies neither (9) nor (10).

In the case $0\leq p<1$ we show that the behavior of g at infinity has no influence in the solution set and we have always existence of solution for every $\lambda\in(0,+\infty)$.

Theorem 5. *If $0\leq p<1$, $0\leq f_0\in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$and hypothesis (G) is satisfied, then (7) admits a positive solution for every $\lambda\in(0,+\infty)$.*

With respect to the case $p>1$, we have the following result.

Theorem 6. *Consider $p>1$, $0\lneqq f_0\in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ and assume that hypothesis (G) is satisfied.*

i) *If condition* (10) *holds with* $0 \leq \gamma < 2-p$*, then problem* (7) *admits a positive solution for every* $\lambda \in [0,+\infty)$.

ii) *If there are* $s_0, \delta_0 > 0$ *such that*

$$\frac{s^p}{\int_0^s e^{\int_r^s g(t)dt} dr} \geq \delta_0, \quad \forall s > s_0, \tag{11}$$

then there exist $\lambda^*, \lambda_* > 0$ *such that* (7) *admits a positive solution for every* $\lambda \in [0, \lambda_*)$ *and admits no solution for* $\lambda > \lambda^*$.

If g is continuous in zero, we can handle the case $f_0 \equiv 0$ and to obtain the following result.

Theorem 7. *Assume* $f_0 \equiv 0$ *and suppose that* $g \geq 0$ *is continuous in the interval* $[0,+\infty)$.

1. *(No regularizing effect) If* $p = 1$ *and* (9) *holds then there exist* $\lambda^*, \lambda_* > \mu_1$ *such that* (7) *has no solution for* $\lambda > \lambda^*$ *and admits a positive solution for every* $\lambda \in (\mu_1, \lambda_*)$.
2. *(Regularizing effect) If* $p = 1$ *and* (10) *holds then* (7) *admits a positive solution if and only if* $\lambda > \mu_1$.
3. *If* $0 \leq p < 1$*, then* (7) *admits a positive solution for every* $\lambda \in (0,+\infty)$.
4. *If* $p > 1$ *and there is a continuous non positive function* $h \in L^1(0,+\infty)$ *such that*

$$g(s) \geq h(s) + \frac{p}{s}, \quad \forall s \geq 1, \tag{12}$$

then there exists $\lambda^* > 0$ *such that* (7) *has no solution for* $\lambda > \lambda^*$.

We remark that cases (1)-(3) of the above result are new, while (4) is a slight improvement of [78] where it is required $g(s) > q/s$ for large s, with $q > p$.

Introducción

En esta memoria se estudian una cierta clase de problemas elípticos y parabólicos no lineales con crecimiento cuadrático en el gradiente. Este tipo de problemas aparece de forma natural en el Cálculo de Variaciones clásico. Por ejemplo, si consideramos el siguiente funcional

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} a(v)|\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v,$$

donde a es un función suficientemente regular, elíptica y acotada (es decir, existen constantes $0 < \alpha \leq \beta$ tales que $\alpha|\xi|^2 \leq a(s)\xi\cdot\xi$ y $|a(s)| \leq \beta$ para todo $s \in \mathbb{R}$) y el dato $f \in L^2(\Omega)$, la ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional es

$$-\mathrm{div}\big(a(v)\nabla v\big) + \frac{1}{2}a'(v)|\nabla v|^2 = f.$$

El estudio de los puntos críticos del funcional J se corresponde con el estudio de la existencia de solución para un problema casilineal con crecimiento cuadrático en el gradiente. Como podemos observar en la ecuación anterior el término de orden inferior $\frac{1}{2}a'(v)|\nabla v|^2$, al que nos referiremos como *lower order term*, contiene el gradiente con dependencia cuadrática.

Siguiendo la terminología de Kazdan y Kramer en [57], decimos que el crecimiento cuadrático en ∇u del operador diferencial no lineal en la ecuación anterior es *natural*. Varias razones (adicionales a la del Cálculo de Variaciones) se pueden dar para el uso de este término. En primer lugar, la clase de las ecuaciones con crecimiento cuadrático en el gradiente es invariante por cambios de variable no lineales $v = F(u)$, ($F \in C^1$). Esto está en claro contraste con lo que ocurre para las ecuaciones semilineales $-\Delta u = f(x,u)$ y nos hace pensar de nuevo que las ecuaciones con crecimiento cuadrático constituyen un marco adecuado tanto desde el punto de vista de las aplicaciones, como desde el puramente matemático. Por otro lado, Serrin demuestra, véase el Teorema 1 del Capítulo 3.16 en [88], que no existe solución cuando el crecimiento en ∇u es más rápido que el cuadrático en el infinito. Concretamente, demostró que dado cualquier dominio suave existen datos suaves para los cuales el problema de Dirichlet no tiene solución.

Respecto a la literatura hay diversos trabajos dedicados a la existencia y no existencia de soluciones refiriéndonos al problema modelo casilineal elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = f & \text{en } \Omega,\\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$), $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función y f pertenece a un cierto espacio de Lebesgue. Ha sido exhaustivamente estudiado desde los pioneros trabajos de Bensoussan, Boccardo y Murat [20], Boccardo, Murat y Puel [32] y Boccardo, Gallouët [28] con dato f en ciertos espacios de Lebesgue cuando la función g es continua en $\mathbb{R}$. En [20] imponen la condición de signo $g(s)s \geq 0$ para cada $s \in \mathbb{R}$. Gracias a la presencia del *lower order term* con dependencia cuadrática respecto del gradiente y a la condición de signo y que $g \not\equiv 0$, el problema de Dirichlet (1) puede tener soluciones de energía finita (véase [28]), incluso si el dato sólo pertenece a $L^1(\Omega)$. Este resultado (efecto regularizante de g) es sorprendente ya que no es verdad en el caso lineal (por ejemplo si $g(s) \equiv 0$). Por otro lado, en [32, 34] los autores consideran el problema de Dirichlet para una ecuación con un término cuadrático más general $g(x,u,\nabla u)$ (en lugar del término $g(u)|\nabla u|^2$). Imponen (véase (2.10) en [32] y (3.10) en [34]) una condición más general que la condición de signo. Sin embargo, señalamos que en el caso simple $g(x,u,\nabla u) = g(u)|\nabla u|^2$, dicha hipótesis no es más que la condición de signo. Porretta y Segura de León en [83] (ver también el trabajo de Boccardo, Segura de León y Trombetti [35]), no imponen la condición de signo y prueban la existencia de solución de (1) bajo una cierta condición asintótica sobre g. La existencia de solución para el problema (1) sin imponer ni la condición de signo ni la condición asintótica en infinito, pero requiriendo que el dato $f(x)$ sea suficientemente pequeño respecto a su norma en $L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ fue estudiada por Ferone y Murat en [47] y por Grenon y Trombetti en [55]. Algunas extensiones a sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales elípticas fueron discutidas por Alaa y Mounir [3], Bensoussan y Boccardo [19] y Landes [62]. De otra parte, Dall'Aglio, Giachetti y Puel realizan el estudio en dominios no acotados Ω en [41]. Abdellaoui, Dall'Aglio y Peral estudian el caso de $g \leq 0$ y decreciente en [1].

Respecto al caso parabólico, denotando $\Omega \times (0,T)$ por Q, el problema casilineal con gradiente cuadrático correspondiente sería el siguiente.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = f & \text{en } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{2}$$

De nuevo, el problema (2) ha sido extensamente estudiado si g está acotada y es continua en $\mathbb{R}$ y se han obtenido resultados tanto de existencia como de no existencia y regularidad de la solución dependiendo de la regularidad del dato y del crecimiento de g en infinito. Destacamos en este marco los trabajos de Blanchard y Porretta [22], Boccardo, Murat y Puel [33], Dall'Aglio y Orsina [42] y Porretta [81] así como las referencias citadas en cada uno de ellos.

En el caso que $f \in L^2((0,T);W^{-1,2}(\Omega))$ y $u_0 \in L^2(\Omega)$, el problema (2) fue estudiado en [33], donde probaron la existencia de solución débil en el sentido de las distribuciones en Q. En [42] los autores estudiaron el caso en que f sólo pertenece a $L^1(Q)$ y $u_0 = 0$ bajo la siguiente condición extra sobre g: existe $\gamma > 0$ tal que $g(x,t,s,\xi)\mathrm{sign}(s) \geq \gamma|\xi|^2$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Gracias a dicha hipótesis la solución pertenece a $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ (en [81] el autor ha tratado una extensión al caso en el que u_0 pertenece a $L^1(\Omega)$). Así, la introducción de los *lower order terms* $g(x,t,s,\xi)$ en la ecuación mejora sustancialmente los resultados de regularidad obtenidos. Véase [4] (y el trabajo precedente [5]) para el caso en el que se considera un término no lineal a la derecha.

La principal novedad de esta memoria es el estudio de los problemas elípticos y parabólicos casilineales con crecimiento natural en el gradiente y una no linealidad con singularidad en 0. En el ejemplo anterior del Cálculo de Variaciones esto se corresponde a considerar funciones con derivada no acotada en cero. Por ejemplo, si consideramos ahora el funcional J con $a(v) = 1 + |v|^{1-\gamma}$ y $f \in L^q(\Omega)$, $q > \frac{N}{2}$, $\gamma \in (0,1)$. Un cálculo puramente formal muestra que la ecuación de Euler-Lagrange asociada debería ser

$$-\mathrm{div}\big((1+|u|^{1-\gamma})\nabla u\big) + \frac{1-\gamma}{2}\frac{u}{|u|^{1+\gamma}}|\nabla u|^2 = f.$$

Observamos que se trata de una ecuación elíptica no lineal con crecimiento cuadrático en el gradiente y singular en $u = 0$.

El caso de una función g singular aparece también en un gran número de aplicaciones. Por ejemplo, podemos citar el estudio de *patrones de crecimiento en agrupaciones (clusters) y de frentes de solidificación* (véanse el trabajo [56] de Kardar, Parisi y Zhang (*crecimiento de tumores*), el realizado por Berestychi, Kamin y Sivashinsky [21] (*frentes de llamas*) y el trabajo de Barenblatt, Bertsch, Chertock y Protokishin [17] para *el estudio del flujo de absorción de agua en una roca porosa*).

Por lo tanto, es natural considerar problemas singulares más generales con o sin estructura variacional. Este tipo de problemas singulares ha sido poco estudiado en la literatura actual y de una manera natural lo abordaremos en la presente memoria, tanto en el caso elíptico como en el parabólico. Un modelo simple puede ser

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} = f & \text{en } \Omega, \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

Es decir, $g(s) = \frac{1}{s^\gamma}$. Concretamente, buscamos una *solución distribucional* del problema (3), es decir una función $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ que verifica $u > 0$ en casi todo punto en Ω, tal que $\dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}$ está en $L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi + \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}\phi = \int_\Omega f\phi, \quad \forall 0 \le \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Si además $u \in H_0^1(\Omega)$, decimos que u es una *solución de energía finita* para el problema (3). Determinaremos el rango óptimo de $\gamma > 0$ para el cual existe solución.

También consideramos la versión parabólica de estos problemas. Es decir, estudiamos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} = f & \text{en } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{4}$$

con f y u_0 en un cierto espacio de funciones medibles. Una solución de (4) es una función $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^1(\Omega))$, tal que $u > 0$ a.e. en Q, $\dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} \in L^1(Q)$

y $u(x,0) = u_0$ a.e. en Ω el cual satisface

$$-\int_\Omega u_0\varphi(0) - \int_0^T \langle \varphi_t, u\rangle + \int_Q \nabla u \nabla \varphi + \int_Q \frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}\varphi = \int_Q f\varphi,$$

para cualquier $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ con $\varphi_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ y $\varphi(T) = 0$.

Para llevar a cabo el estudio de los problemas (3) y (4) (o sus versiones más generales) dividimos la memoria en varios Capítulos. En el Capítulo 1 introducimos la notación detallando algunas propiedades básicas a la hora de estudiar los problemas de contorno. Recordamos algunas características de los espacios de funciones con valores en un espacio de Banach, ya que los problemas de evolución estarán planteados en este marco funcional. Además, analizamos algunos aspectos fundamentales de los problemas de contorno como son el principio de comparación y unicidad (extendemos al caso evolutivo el principio de comparación probado por Arcoya y Segura de León [13]), regularidad y estimaciones a priori.

El Capítulo 2 se dedica al estudio de los problemas elípticos singulares. Dicho estudio fue iniciado en [12], donde probamos la existencia de solución del problema (3) para $0 < \gamma \leq 1$ y con el dato f verificando

$$m_\omega(f) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ess\,inf}\{f(x) : x \in \omega\} > 0, \quad \forall \omega \subset\subset \Omega. \tag{5}$$

Posteriormente ampliamos la existencia de solución en [6] para el problema (3) en el caso en el que g pueda cambiar de signo abarcando el resultado anterior y mejorando el espacio al que pertenece el dato. Además, el problema de obstáculo (desigualdad variacional) correpondiente a dicho problema ha sido tratado en [9]. Seguidamente en [8] hemos probado una condición necesaria y suficiente sobre γ para la existencia de solución.

Teorema 1. *El problema* (3) *tiene una solución de energía finita para cada* $f \in L^q(\Omega)$ *(*$q > \frac{2N}{N+2}$*) satisfaciendo* (5) *si y solo si* $\gamma < 2$.

Este resultado es consecuencia de los Teoremas 2.1.1 y 2.4.1 del Capítulo 2 donde también consideramos operadores y no linealidades g más generales. Remarcamos que dichas no linealidades pueden cambiar de signo. Además, probamos que existe solución distribucional para datos f perteneciendo a $L^1(\Omega)$.

La idea para probar el Teorema 1 consiste en aproximar el *lower order term*, concretamente la no linealidad $g(s) = \dfrac{1}{s^\gamma}$ por no linealidades g_n continuas en $\mathbb{R}$, de forma que los problemas no singulares obtenidos para g_n caigan en el marco estudiado por [34] y, por tanto, posean solución u_n de energía finita para cada $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que u_n converge a una solución positiva de (1). Dado que $f \in L^q(\Omega)$ se puede probar ([34]) que existen estimaciones a priori en $H_0^1(\Omega)$ de las soluciones u_n. Observemos que debido a la singularidad de g, $g(u_n(x))$ y $g_n(u_n(x))$ divergen cuando $u_n(x)$ converge a cero. Ésta es la razón por la que no es suficiente con aplicar las ideas de [20, 32, 34] para mostrar la convergencia fuerte de ∇u_n en $L^2(\Omega)$ (y de este modo la convergencia de las soluciones aproximadas u_n en $H_0^1(\Omega)$ a una solución de (3)). La clave para evitar esta dificultad consiste en probar que u_n están "lejos de cero" en cada abierto compactamente contenido en Ω (lo llamaremos el principio del máximo fuerte uniforme siguiendo la nomenclatura de Vázquez [93]). Este principio permite deducir que la sucesión de soluciones aproximadas converge localmente a una solución de (3). La no existencia de solución se basa en un argumento muy simple consistente en elegir una función test conveniente y usar la caracterización del primer autovalor positivo $\lambda_1(f)$ del problema de autovalores con peso $f(x)$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x) u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

A la vista del resultado de no existencia y de la técnica usada para la existencia, la pregunta natural que surge es saber lo que ocurre con la sucesión de soluciones aproximadas en el caso $\gamma \geq 2$. En ese sentido, probamos que si $\gamma > 2$ las soluciones v_n de los siguientes problemas aproximados

$$\begin{cases} -\Delta v_n + \dfrac{|\nabla v_n|^2}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} = f & \text{en } \Omega, \\ v_n = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

convergen a cero.

A la vez que realizábamos nuestro estudio de (3), otros autores han llevado a cabo varios trabajos de una forma paralela e independiente. Giachetti y Murat [49] estudian un problema singular ligeramente diferente. Si $\chi_{\{u>0\}}$ denota la función característica del conjunto $\{x \in \Omega : u(x) > 0\}$, $0 \leq f \in L^\infty(\Omega)$, $\mu \in \mathbb{R}$ y $\lambda, \gamma > 0$, consideran la ecuación diferencial

$$-\text{div}\,(M(x,u)\nabla u) + \lambda u + \mu \frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} \chi_{\{u>0\}} = f \text{ en } \Omega.$$

Sus resultados sobre la existencia de soluciones no negativas en $H_0^1(\Omega)$ dependen de γ. De hecho, se prueba la existencia para cada $\mu \in \mathbb{R}$ si $\gamma < 1$, mientras que el caso $\gamma \geq 1$ requiere que $\mu < 0$. De este modo, si $\gamma \geq 1$ el término con dependencia cuadrática en ∇u es negativo (es decir, en algún sentido la hipótesis "contraria" a la condición de signo). En este ambiente, varios autores han obtenido resultados para ecuaciones similares, concretamente Giarrusso y Porru [51] y Porru y Vitolo [84].

De otra parte, en un interesante trabajo [24], Boccardo ha conseguido eliminar el requerimiento de la condición (5). Concretamente, ha tratado el siguiente problema

$$\begin{cases} -\alpha\Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Obtiene la existencia de soluciones positivas del problema (6) si el dato $0 \leq f \in L^q(\Omega)$ $(q > 2N/(N+2))$ con $f \not\equiv 0$ y

- $\gamma < 1$ y $\alpha > 0$
- $\gamma = 1$ y $\alpha > 2$.

Por nuestra parte, el estudio de la técnica usada en [24] además de las usadas en [8] nos lleva a la siguiente pequeña mejora de este resultado.

Teorema 2. *Sea* $0 \leq f \in L^q(\Omega)$ *con* $q \geq \frac{2N}{N+2}$ *y* $f \not\equiv 0$ *en* Ω *y suponemos que* $\alpha > 1$. *Entonces para* $\gamma = 1$ *existe solución débil* $u \in H_0^1(\Omega)$ *del problema de Dirichlet* (6).

En este caso ($\gamma = 1$), en [24] el autor prueba que el límite de la sucesión aproximante es estrictamente positivo si $\alpha > 1$ y para deducir que dicho límite es la solución del problema (6) necesita imponer que $\alpha > 2$. Nosotros establecemos que u_n están uniformemente lejos de cero en cada abierto compactamente contenido en Ω imponiendo sólo que $\alpha > 1$. Esta mejora nos permite probar la convergencia de las soluciones aproximadas a una solución de (6).

En el Capítulo 3 de la memoria estudiamos la existencia de solución de problemas casilineales parabólicos que presentan un *lower order term* singular con crecimiento natural en el gradiente. Consideramos el problema (4) con el dato f siendo L^r-integrable en $(0,T)$ y con valores en $L^q(\Omega)$ para ciertos r,q. Sobre el dato inicial $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ impondremos (5). Específicamente, nuestro resultado de existencia para el problema modelo es el siguiente.

Teorema 3. *Sea* $f \in L^r(0,T;L^q(\Omega))$ *con* $\dfrac{1}{r} + \dfrac{2}{Nq} < 1$, $q \geq 1$, $r > 1$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *y* f *y* u_0 *satisfacen* (5). *Entonces si* $\gamma < 2$ *el problema* (4) *admite una solución en* $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$.

Como antes en el Capítulo 2, este teorema será consecuencia del Teorema 3.1.1 del Capítulo 3 donde consideramos operadores y no linealidades g más generales. Además, dichas no linealidades pueden cambiar de signo.

La prueba está basada en un argumento de aproximación y compacidad en el que, de nuevo, la clave es una estimación local inferior uniforme de la sucesión de soluciones aproximadas y que deduciremos gracias a un resultado de Leoni y Pellacci [66]. Específicamente la aproximación de $g(s) = \frac{1}{s^\gamma}$ por las funciones continuas g_n nos lleva ahora a problemas parabólicos no singulares que caen en el marco clásico estudiado por J.L. Lions [72] y podemos deducir la existencia de solución u_n. Necesitamos estimaciones de u_n en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ que obtenemos de [72] y en $L^\infty(Q)$ debidas a Aronson y Serrin [15] . Para pasar al límite, y obtener que u_n converge a una solución u de (4), usamos un argumento de compacidad de Aubin y Simon [89] y la estimación local inferior uniforme.

Además, gracias al principio de comparación que hemos probado en el Capítulo 1 para el problema (4) con $0 < \gamma < 1$ (véase el Teorema 1.3.16) estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones del problema (4) cuando la variable temporal t tiende a infinito. Es decir, establecemos un resultado de estabilidad de las soluciones del problema parabólico (4) a la solución estacionaria del mismo problema (véase el Teorema 3.3.1). Para ello adaptamos algunas técnicas introducidas por Leonori y Petitta [80].

Dedicamos el Capítulo 4 de la memoria a estudiar la existencia de continuos de soluciones para problemas casilineales con gradiente cuadrático. Concretamente, sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$), $0 \leq p < \frac{N+2}{N-2}$ y $0 \leq f_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. Estudiamos [11] el problema de contorno

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = \lambda u^p + f_0(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

para una conveniente función no negativa $g : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$.

Decimos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución del problema (7) si $u > 0$ a.e. $x \in \Omega$, $g(u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega g(u)|\nabla u|^2 \varphi = \lambda \int_\Omega u^p \varphi + \int_\Omega f_0 \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{8}$$

Observamos que, en nuestro caso, el término de la derecha de la ecuación del problema (7) es lineal si y solo si $p = 1$. Abdellaoui, Peral y Primo en [2] estudiaron este caso para $g \equiv 1$. Probaron la existencia de una solución positiva para cada $\lambda \in [0,+\infty)$ si $f_0 \gneqq 0$. Notamos que en el caso semilineal ($g \equiv 0$) se tiene el resultado de existencia de solución positiva si λ es más pequeño que el primer autovalor μ_1 del operador Laplaciano con condiciones de Dirichlet en la frontera. En este sentido, los autores remarcan que el término cuadrático en el gradiente produce un efecto fuertemente regularizante y rompe cualquier efecto de resonancia que pudiera tener el término lineal de orden cero.

A nuestro parecer, el caso en el que el operador diferencial (no-variacional) tiene un término no lineal a la derecha ha sido menos estudiado [78, 86]. Véanse también los trabajos de Arcoya y Boccardo [7], Canino [38] y las referencias contenidas para el caso de operadores diferenciales variacionales. Si $f_0 \equiv 0$, g es continua en $[0,+\infty)$ y $p > 1$, Orsina y Puel [78] mostraron que el comportamiento de g en infinito tiene también efecto sobre el conjunto de soluciones positivas. Específicamente, los autores usan un cierto cambio de variable el cual reduce la ecuación casilineal a una semilineal y prueban que si $g \in L^1(0,+\infty)$ entonces existe solución positiva para cada $\lambda \in (0,+\infty)$, mientras que si $g(t)t \geq q > p$ para $t >> 1$, entonces existe solución positiva para $\lambda > 0$ suficientemente grande, y no existe solución positiva si $\lambda > 0$ es suficientemente pequeño.

Uno de los principales objetivos es proporcionar un marco común (basado en métodos topológicos) a los resultados previos y entender el verdadero juego de las diferentes hipótesis que imponemos a la no linealidad g, analizando los diferentes efectos que se producen en el conjunto de las soluciones positivas cuando consideramos $p = 1$ o $p \neq 1$, $f \equiv 0$ o $f_0 \gneqq 0$. Como un caso particular de nuestros resultados mostraremos que incluso en el caso $p = 1$, el comportamiento de g en infinito juega un papel destacado en el conjunto de las soluciones, por ejemplo, no obtenemos un “efecto fuertemente regularizante” para funciones g las cuales son suficientemente pequeñas en infinito aunque mostramos algunas diferencias respecto al caso semilineal. Esto no es el caso de $p < 1$ puesto que el conjunto de soluciones positivas para $g \not\equiv 0$ se comporta como en el caso semilineal $g \equiv 0$. Finalmente, si $p > 1$ y $f_0 \not\equiv 0$, el comportamiento de g en infinito es de nuevo determinante para tener algún tipo de “efecto regularizante”.

Asimismo, otro de nuestros objetivos es extender los resultados previos, abarcando además de funciones g continuas en $[0,+\infty)$, el caso $g : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tal que las funciones g puedan tener una singularidad en cero. Concretamente, para unificar ambos casos: el continuo y el singular, imponemos la siguiente hipótesis:

(G) La función $g \geq 0$ es continua en $[0,+\infty)$ o $g \geq 0$ es continua en $(0,+\infty)$, decreciente e integrable en un entorno de cero con $\lim_{s\to 0} g(s) = +\infty$.

De esta manera, podemos considerar el operador $K : \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ definiendo, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y para cada $w \in H_0^1(\Omega)$, $K(\lambda, w)$ como la única solución u en

$H_0^1(\Omega)$ del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = \lambda^+ w^+(x)^p + f_0(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

De hecho, en el caso en el que g es singular en cero con $0 \lneqq f_0 \in L^{2N/(N+2)}(\Omega)$ la existencia se debe a [24] y la unicidad a [13]. Además, si g es continua en cero, la existencia y la unicidad siguen siendo ciertas con $f_0 \equiv 0$. Con esta notación, podemos reescribir (7) como un problema de punto fijo, es decir,

$$u = K_\lambda(u),$$

con $K_\lambda(u) = K(\lambda, u)$.

En el trabajo reciente de Ruiz y Suárez [86], para $g \equiv 1$ y una no linealidad logística, los autores combinan ingeniosamente la regularidad en $C^1(\Omega)$ con las propiedades de $(-\Delta)^{-1}$ en $X = C(\Omega)$ para usar técnicas de bifurcación. Desafortunadamente, esta idea no funciona para el caso g singular en cero por la pérdida de regularidad.

Probaremos la compacidad del operador K lo cual nos permite usar las técnicas de grado de Leray-Schauder para estudiar la existencia de "continuo de soluciones" del problema (7), es decir subconjuntos conexos y cerrados del conjunto de soluciones

$$\{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \, : \, u = K_\lambda(u)\}.$$

Remarcamos que el cálculo del grado, siguiendo el trabajo original de Leray y Schauder [70], para operadores K_λ lo realizaremos construyendo ciertas homotopías con un operador lineal (el Laplaciano), reduciendo así el estudio del problema casilineal (7) al caso lineal.

Este es el marco funcional en el que trabajamos y presentamos nuestros resultados para una no linealidad simple $f(\lambda, x, s) = \lambda s^p$ y $g(x, s)$ independiente de $x \in \Omega$, aunque la mayoría de ellos son ciertos para funciones más generales como pondremos de manifiesto. Concretamente, en el caso $p = 1$ damos condiciones suficientes sobre g para obtener, como en el caso semilineal, existencia de solución para un intervalo acotado del parámetro λ. Hablando formalmente, dichas condiciones nos ponen de manifiesto como de lejos debemos tomar g para que siga siendo cierto el resultado del "caso semilineal". Por otro lado, también probamos un efecto regularizante, es decir, existencia de solución para un intervalo no acotado de valores del parámetro λ suponiendo que g está suficientemente lejos de cero.

Teorema 4. *Supongamos que $p = 1$, $0 \lneqq f_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ y que se verifica la condición (G).*

1. *(Sin efecto regularizante) Si tenemos $s_0, \delta_0 > 0$ tal que*

$$\frac{s}{\int_0^s e^{\int_r^s g(t)dt} dr} \geq \delta_0, \quad \forall s > s_0, \tag{9}$$

entonces existe $\lambda^*, \lambda_* > 0$ tal que (7) no tiene solución para $\lambda > \lambda^*$ y admite solución positiva para cada $\lambda \in [0, \lambda_*)$.

2. *(Efecto regularizante) Si existen* $s_1, c > 0$, *y* $\gamma < 1$ *tal que*

$$g(s) \geq \frac{c}{s^\gamma}, \quad \forall s \geq s_1, \tag{10}$$

entonces (7) *admite una solución positiva para cada* $\lambda \in [0, +\infty)$.

Observamos que existe un hueco entre las condiciones (9) y (10) ya que, por ejemplo, la función $g(s) = \dfrac{c}{s+1}$ con $c \geq 1$ no verifica (9) ni (10).

En el caso $0 \leq p < 1$ mostramos que el comportamiento de g en infinito no influye en el conjunto de soluciones y tenemos existencia de solución para cada $\lambda \in (0, +\infty)$.

Teorema 5. *Si* $0 \leq p < 1$, $0 \leq f_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ *y se verifica la hipótesis (G), entonces* (7) *admite una solución positiva para cada* $\lambda \in (0, +\infty)$.

Con respecto al caso $p > 1$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6. *Consideramos* $p > 1$, $0 \lneqq f_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ *y supongamos que se verifica la condición (G).*

i) *Si se satisface la hipótesis* (10) *con* $0 \leq \gamma < 2 - p$, *entonces el problema* (7) *admite una solución positiva para cada* $\lambda \in [0, +\infty)$.

ii) *Si tenemos* $s_0, \delta_0 > 0$ *tal que*

$$\frac{s^p}{\int_0^s e^{\int_r^s g(t)dt} dr} \geq \delta_0, \quad \forall s > s_0, \tag{11}$$

entonces existe $\lambda^*, \lambda_* > 0$ *tal que* (7) *admite una solución positiva para cada* $\lambda \in [0, \lambda_*)$ *y no admite solución para* $\lambda > \lambda^*$.

Si g es continua en cero, podemos abarcar el caso $f_0 \equiv 0$ y obtener el siguiente resultado.

Teorema 7. *Supongamos que* $f_0 \equiv 0$ *y que* $g \geq 0$ *es continua en el intervalo* $[0, +\infty)$.

1. *(Sin efecto regularizante) Si* $p = 1$ *y se verifica* (9) *entonces existe* $\lambda^*, \lambda_* > \mu_1$ *tal que* (7) *no tiene solución para* $\lambda > \lambda^*$ *y admite una solución positiva para cada* $\lambda \in (\mu_1, \lambda_*)$.

2. *(Efecto regularizante) Si* $p = 1$ *y se verifica* (10) *entonces* (7) *admite una solución positiva si y solamente si* $\lambda > \mu_1$.

3. *Si* $0 \leq p < 1$, *entonces* (7) *admite una solución positiva para cada* $\lambda \in (0, +\infty)$.

4. *Si* $p > 1$ *y hay una función continua no positiva* $h \in L^1(0, +\infty)$ *tal que*

$$g(s) \geq h(s) + \frac{p}{s}, \quad \forall s \geq 1, \tag{12}$$

entonces existe $\lambda^* > 0$ *tal que* (7) *no tiene solución para* $\lambda > \lambda^*$.

Remarcamos que los casos (1)-(3) del resultado anterior son nuevos, mientras que (4) es una pequeña mejora de [78] donde se requiere que $g(s) > q/s$ para s grande, con $q > p$.

Capítulo 1

Conceptos y resultados preliminares

A lo largo del presente capítulo introducimos la notación que usaremos en esta memoria, detallamos algunas propiedades básicas a la hora de estudiar los problemas de contorno. Además, realizamos un breve repaso histórico de resultados y desarrollamos algunos aspectos fundamentales de dichos problemas.

1.1. Notación y herramientas básicas

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, cuya frontera denotamos por $\partial\Omega$. Para cualquier $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por $L^p(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles Lebesgue (de hecho, clases de equivalencia, puesto que las funciones iguales en casi todo punto se identifican) $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que, si $p < \infty$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

o la cual es esencialmente acotada (con respecto a la medida de Lebesgue) si $p = \infty$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{C : |u(x)| \leq C \text{ a.e. en } \Omega\}.$$

Para $u \in L^p(\Omega)$ denotamos por $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ o u_{x_i} su derivada parcial en la dirección x_i definida en el sentido de las distribuciones, que es

$$\langle u_{x_i}, \varphi \rangle = -\int_\Omega u \varphi_{x_i} \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

y denotamos por $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_N})$ el gradiente de u.

Definimos el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$ como el espacio de las funciones $u \in L^p(\Omega)$ tal que $\nabla u \in (L^p(\Omega))^N$, dotado con la norma usual

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

mientras que $W_0^{1,p}(\Omega)$ indicará la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ respecto a dicha norma.

Recordemos que, para $1 < p < \infty$, el espacio dual de $L^p(\Omega)$ se puede identificar con

$L^{p'}(\Omega)$, donde $p' = \dfrac{p}{p-1}$ es el exponente conjugado de Hölder de p.
Para cada $0 < p < \infty$, introducimos el espacio de Marcinkiewicz $M^p(\Omega)$ (o espacio de Lebesgue débil) de las funciones medibles $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que existe $c > 0$, con

$$\text{meas}\{x : |v(x)| \geq k\} \leq \frac{c}{k^p}, \quad \forall k > 0. \tag{1.1.1}$$

El espacio $M^p(\Omega)$ es un espacio de Banach, y se le dota con la pseudo-norma

$$\|v\|^p_{M^p(\Omega)} = \inf \{c > 0 : \text{ (1.1.1) se verifica}\} .$$

Puesto que Ω es acotado, para $p > 1$ tenemos los siguientes embebimientos continuos

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow M^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p-\varepsilon}(\Omega), \tag{1.1.2}$$

para cada $\varepsilon \in (0, p-1]$.
A menudo usaremos la versión local de estos espacios; para cualquier $p > 1$, decimos que $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ si $u \in L^p(\omega)$, para todo ω abierto compactamente contenido en Ω, es decir, $\omega \subset\subset \Omega$. Observemos que a $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ no se le puede dotar de una cierta norma para obtener un espacio de Banach. Podemos definir de la misma forma espacios de Sobolev y Marcinkiewicz locales.
En lo que sigue, abusando de la notación, decimos que una sucesión u_n converge a u en $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ (o $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$) si u_n converge a u en $L^p(\omega)$ (o $W^{1,p}(\omega)$) para cualquier $\omega \subset\subset \Omega$.
Para las funciones en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ usaremos a menudo el *teorema de Sobolev* el cual dice que, si $p < N$, $W^{1,p}(\Omega)$ está continuamente embebido en $L^{p^*}(\Omega)$ con $p^* = \frac{Np}{N-p}$; si $p = N$, $W^{1,p}(\Omega)$ está continuamente embebido en $L^q(\Omega)$ para cada $q < \infty$, mientras que, si $p > N$, $W^{1,p}(\Omega)$ está continuamente embebido en $C(\overline{\Omega})$. También recordamos el *teorema de Rellich* el cual asegura que, si $p < N$, el embebimiento de $W^{1,p}(\Omega)$ en $L^q(\Omega)$ es compacto para cada $1 \leq q < p^*$, y la *desigualdad de Poincaré*, que establece la existencia de una constante $C(p, N, \Omega) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}, \quad \forall u \in W^{1,p}_0(\Omega).$$

Esto en particular implica que $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ es equivalente a la norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ para toda $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$. Además, la desigualdad de Poincaré combinada con el teorema de Sobolev implica la llamada desigualdad de Sobolev-Poincaré

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \mathcal{S} \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}$$

donde $\mathcal{S} = \mathcal{S}(N, p)$ es la constante de Sobolev que viene dada por

$$\mathcal{S} = \sup\{\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} : \|u\|_{H^1_0(\Omega)} = 1\}.$$

Usaremos a menudo las principales propiedades de los espacios de Lebesgue y Sobolev las cuales las podemos encontrar, por ejemplo, en [37]. Entre ellas, recordemos algunas herramientas que juegan un papel crucial en los métodos que usamos. Recordamos que Ω denota siempre un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^N$.

- Desigualdad de Young.

  Para $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ tenemos:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} \quad \forall a, b > 0.$$

- Desigualdad de Hölder.

  Para $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, tenemos, para cada $f \in L^p(\Omega)$ y cada $g \in L^{p'}(\Omega)$:

$$\left|\int_\Omega fg dx\right| \leq \left(\int_\Omega |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

- Sean $1 < p < \infty$,y $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$, $\{g_n\} \subset L^{p'}(\Omega)$ tal que f_n converge fuertemente a f en $L^p(\Omega)$ y g_n converge débilmente a g en $L^{p'}(\Omega)$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n g_n dx = \int_\Omega fg dx.$$

  Podemos llegar a la misma conclusión si $p = 1$, $p' = \infty$ y la convergencia débil de g_n la reemplazamos por la convergencia débil-$*$ en $L^\infty(\Omega)$. Además, para $1 < p < \infty$, si f_n converge a cero en $L^p(\Omega)$, y g_n está acotada en $L^{p'}(\Omega)$, tenemos también

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n g_n dx = 0.$$

- Si $\{f_n\}$ converge a f en medida y suponemos que

$$\exists C > 0, \quad q > 1 : \quad \|f_n\|_{L^q(\Omega)} \leq C \quad \forall n.$$

  Entonces

$$f_n \to f \quad \text{fuertemente en } L^s(\Omega), \text{ para cada } 1 \leq s \leq q.$$

- Lema de Fatou.

  Sea $1 \leq p < \infty$, y $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ una sucesión tal que

$$f_n \to f \text{ a.e. en } \Omega,$$

$$f_n \geq h(x) \text{ con } h(x) \in L^1(\Omega),$$

  entonces

$$\int_\Omega f dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

- Teorema generalizado de Lebesgue.

  Sea $1 \leq p < \infty$, y $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ una sucesión tal que

$$f_n \to f \text{ a.e. en } \Omega,$$

$$|f_n| \leq g_n \text{ con } g_n \text{ convergente fuertemente en } L^p(\Omega).$$

  Entonces $f \in L^p(\Omega)$ y f_n converge fuertemente a f en $L^p(\Omega)$.

- Sean $\{f_n\} \subset L^1(\Omega)$ y $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$f_n \geq 0, \quad f_n \to f \text{ a.e. en } \Omega,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n dx = \int_\Omega f dx.$$

  Entonces f_n converge fuertemente a f en $L^1(\Omega)$.

- Teorema de Vitali.

  Sean $1 \leq p < \infty$, y $\{f_n\} \subset L^p(\Omega)$ una sucesión tal que

$$\begin{gathered} f_n \to f \text{ a.e. en } \Omega, \\ \lim_{\text{meas}(E)\to 0} \int_E |f_n|^p dx = 0. \end{gathered} \tag{1.1.3}$$

  Entonces f pertenece a $L^p(\Omega)$ y f_n converge fuertemente a f en $L^p(\Omega)$.

- Teorema de Egorov.

  Sean $\{f_n\} \subset L^1(\Omega)$, $\{g_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ sucesiones tal que

$$f_n \to f \text{ débilmente en } L^1(\Omega),$$

$$g_n \to g \text{ débil-}* \text{ en } L^\infty(\Omega) \text{ y a.e. en } \Omega.$$

  Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n g_n dx = \int_\Omega f g dx.$$

Observación 1.1.1. *Nos referiremos a la propiedad* (1.1.3) *como la equiintegrabilidad de la sucesión* $\{|f_n|^p\}$. *Recordamos que el teorema de* Dunford-Pettis *asegura que la sucesión* $\{f_n\} \subset L^1(\Omega)$ *es débilmente convergente en* $L^1(\Omega)$ *si y sólo si es equiintegrable.*

Usaremos a menudo el siguiente resultado debido a G. Stampacchia.

Teorema 1.1.2. *Sea* $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función Lipschitziana tal que* $G(0) = 0$. *Entonces para cada* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tenemos que* $G(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *y* $\nabla G(u) = G'(u)\nabla u$ *en casi todo punto en* Ω.

Demostración. Ver [91]. □

Una consecuencia importante del resultado anterior es que, para cada $c \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\nabla u = 0 \text{ a.e. en } F_c = \{x \in \Omega : u(x) = c\}. \tag{1.1.4}$$

Además, podemos considerar la composición de funciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$ con algunas funciones auxiliares de variable real. Una de las más usadas en esta memoria es la función truncadura.

Definición 1.1.3. *Para $k>0$, usaremos los símbolos T_k y G_k para denotar a las funciones reales dadas por*

$$T_k(s) := \begin{cases} k, & s \geq k, \\ s, & -k \leq s \leq k, \\ -k, & s \leq -k, \end{cases} \quad y \quad G_k(s) := s - T_k(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

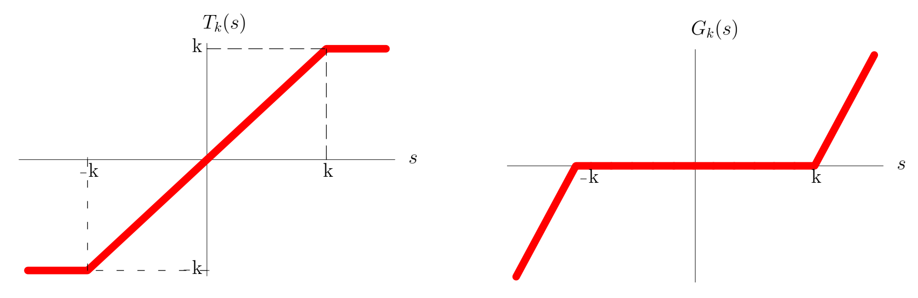

Figura 1.1: Representación de $T_k(s)$ y $G_k(s)$.

De este modo, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tenemos que $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Demos otro ejemplo de cómo usaremos (1.1.4) en lo sucesivo. Sean $u, \{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \text{ a.e. en } \Omega,$$

y asumimos que la función truncadura $T_j(u)$ pertenece a $W_0^{1,p}(\Omega)$ para cada $j>0$. Entonces tenemos

$$|\nabla T_j(u)|\chi_{\{|u_n|>j\}} \longrightarrow 0 \quad \text{fuertemente en } L^p(\Omega) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty.$$

De hecho, por (1.1.4) sabemos que $\nabla T_j(u) = 0$ en casi todo punto en $\{|u| \geq j\}$, lo cual junto con la convergencia en casi todo punto de u_n implica que $\chi_{\{|u_n|>j\}}|\nabla T_j(u)|$ converge en casi todo punto a cero en Ω. El teorema de Lebesgue prueba dicha propiedad.

Además, denotamos por $u^+ = \max\{u,0\}$ y $u^- = \min\{u,0\}$.

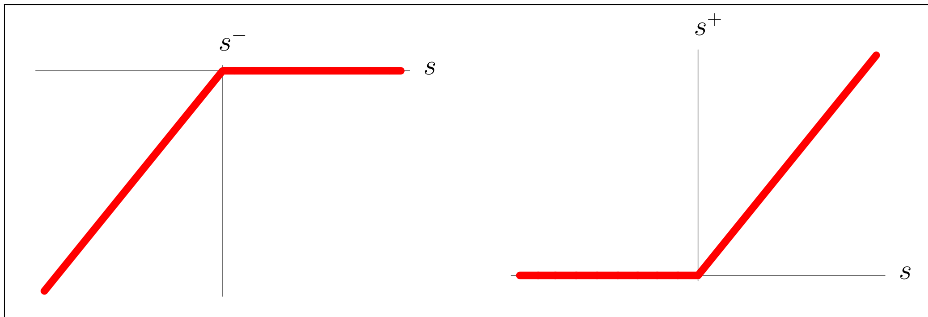

Figura 1.2: Representación de u^+ y u^-.

Notamos por $\varphi_\lambda(s) = se^{\lambda s^2}$, $\lambda>0$ (como en [32]); en lo que sigue usaremos que para cada a, $b>0$ tenemos

$$a\varphi_\lambda'(s) - b|\varphi_\lambda(s)| \geq \frac{a}{2}, \tag{1.1.5}$$

si $\lambda > \frac{b^2}{4a^2}$. Denotamos por $\varepsilon(n)$ cualquier cantidad que tiende a 0 cuando n diverge y por $\varepsilon(\nu, n)$ cualquier cantidad positiva tal que

$$\lim_{\nu\to\infty} \limsup_{n\to+\infty} |\varepsilon(\nu,n)| = 0.$$

Definición 1.1.4. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$. Diremos que f verifica la condición de Keller-Osserman si y sólo si existe una función $\tilde{h} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$ creciente y continua tal que*

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\int_a^x \tilde{h}(z)\,dz}} < +\infty, \quad \forall a > 0, \tag{1.1.6}$$

verificando

$$f(u) \geq \tilde{h}(u), \quad \forall u > 0.$$

Dicha condición fue introducida en [58, 79] para el estudio del problema

$$\Delta u = k(x)u^p, \text{ in } \Omega$$

$$\lim_{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\to 0} u(x) = +\infty,$$

donde $k \in L^\infty(\Omega)$ y $p > 1$.

Observaciones 1.1.5.
1. De hecho, en [58], la condición era más restrictiva ya que en lugar de (1.1.6), se imponía

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\int_0^x \tilde{h}(z)\,dz}} < +\infty.$$

2. Por otra parte, en un trabajo de Marcus y Veron [74] aparece en lugar de la condición de Keller de la nota anterior, una condición equivalente a la impuesta en (1.1.6), a saber:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\int_0^x \tilde{h}(z)\,dz}} < +\infty, \quad \forall a > 0.$$

1.2. Espacios de funciones con valores en un espacio de Banach

Ahora recordamos algunas características de los espacios de funciones con valores en un espacio de Banach, ya que son las herramientas más importantes para tratar con los problemas de evolución.

Dado un espacio de Banach real V, denotaremos por $C^\infty(\mathbb{R}; V)$ el espacio de las funciones $u : \mathbb{R} \to V$ que son infinitas veces diferenciables (de acuerdo a la definición de diferenciabilidad de Fréchet en un espacio de Banach) y por $C_c^\infty(\mathbb{R};V)$ el espacio de las funciones en $C^\infty(\mathbb{R};V)$ que tienen soporte compacto. Para $a,b \in \mathbb{R}$, $C_c^\infty([a,b];V)$ será el espacio de las restricciones al intervalo $[a,b]$ de funciones de $C_c^\infty(\mathbb{R};V)$, y $C([a,b];V)$ el espacio de todas las funciones continuas de $[a,b]$ en V.

Decimos que $u:[a,b]\to V$ es medible Lebesgue si existe una sucesión $\{u_n\}$ de funciones paso (es decir $u_n = \sum_{j=1}^{k_n} a_j^n \chi_{A_j^n}$ para un número finito k_n de subconjuntos Borel $A_j^n \subset [a,b]$ y con $a_j^n \in V$) convergiendo a u en casi todo punto respecto a la medida de Lebesgue en $[a,b]$.

Entonces, para $1 \le p < \infty$, $L^p(a,b;V)$ es el espacio de las funciones medibles $u:[a,b]\to V$ tal que

$$\|u\|_{L^p(a,b;V)} = \left(\int_a^b \|u\|_V^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

mientras $L^\infty(a,b;V)$ es el espacio de las funciones medibles tal que:

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;V)} = \sup_{[a,b]} \|u\|_V < \infty.$$

Por supuesto que ambos espacios se entienden como cocientes, como es usual, con respecto a la equivalencia en casi todo punto. Se pueden encontrar estas propiedades en [43].

Recordemos que, para $1 \le p \le \infty$, $L^p(a,b;V)$ es un espacio de Banach, además si para $1 \le p < \infty$ y V', el espacio dual de V, es separable, entonces el espacio dual de $L^p(a,b;V)$ se puede identificar con $L^{p'}(a,b;V')$.

En lo que concierne a esta memoria V será principalmente el espacio de Lebesgue $L^p(\Omega)$ o el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, con $1 \le p < \infty$ y Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. Como en este caso V es separable tenemos que $L^p(a,b;L^p(\Omega)) = L^p((a,b)\times\Omega)$, el espacio ordinario de Lebesgue definido en $(a,b)\times\Omega$ y $L^p(a,b;W_0^{1,p}(\Omega))$ consta de todas las funciones $u:[a,b]\times\Omega\to\mathbb{R}$ las cuales pertenecen a $L^p((a,b)\times\Omega)$ y tal que $\nabla u = (u_{x_1},\dots,u_{x_N})$ pertenece a $(L^p((a,b)\times\Omega))^N$ (a menudo, por simplicidad, notaremos este espacio por $L^p((a,b)\times\Omega)$); además,

$$\left(\int_a^b \int_\Omega |\nabla u|^p \, dxdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

define una norma equivalente por la desigualdad de Poincaré.

Dada una función en $L^p(a,b;V)$ se puede definir una derivada en el tiempo de u en el espacio de las distribuciones vector valuadas $\mathcal{D}'(a,b;V)$ el cual es el espacio de las funciones continuas lineales de $C_c^\infty(a,b)$ en V (véase [87]). De hecho, la definición es la siguiente:

$$\langle u_t, \psi\rangle = -\int_a^b u\psi_t \, dt\,, \quad \forall\ \psi \in C_c^\infty(a,b),$$

donde la igualdad se entiende en V. Si $u \in C^1(a,b;V)$ esta deficnición coincide claramente con la derivada de Fréchet de u. En lo sucesivo, cuando decimos que u_t pertenece al espacio $L^q(a,b;\tilde{V})$ ($\tilde{V}$ siendo un espacio de Banach) significa que existe una función $z \in L^q(a,b;\tilde{V}) \cap \mathcal{D}'(a,b;V)$ tal que:

$$\langle u_t, \psi \rangle = -\int_a^b u\,\psi_t\, dt = \langle z, \psi \rangle, \quad \forall\ \psi \in C_c^\infty(a,b).$$

Recordamos el siguiente resultado clásico de embebimiento.

Teorema 1.2.1. *Sea H un espacio de Hilbert tal que:*

$$V \underset{denso}{\hookrightarrow} H \hookrightarrow V'.$$

Sea $u \in L^p(a,b;V)$ tal que u_t, definida en el sentido distribucional, pertence al espacio $L^{p'}(a,b;V')$. Entonces u pertenece a $C([a,b];H)$.

Demostración. [43], Capítulo XVIII, Sección 2, Teorema 1. □

Este resulatdo nos permite deducir, para funciones u y v con estas propiedades, la fórmula de integración por partes:

$$\int_a^b \langle v, u_t \rangle\, dt + \int_a^b \langle u, v_t \rangle\, dt = (u(b), v(b)) - (u(a), v(a)), \tag{1.2.1}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la dualidad entre V y V' y $(\cdot, \cdot)$ el producto escalar en H. Notamos que (1.2.1) tiene sentido gracias al Teorema 1.2.1. Su prueba se basa en que $C_c^\infty(a,b;V)$ es denso en el espacio de las funciones $u \in L^p(a,b;V)$ tal que $u_t \in L^{p'}(a,b;V')$ dotado de la norma $\|u\| = \|u\|_{L^p(a,b;V)} + \|u_t\|_{L^{p'}(a,b;V')}$, junto a que (1.2.1) es cierto para funciones u, $v \in C_c^\infty(a,b;V)$ por la teoría de integración y derivación en espacios de Banach. Notamos sin embargo que en este contexto (1.2.1) está sujeto a la verificación de las hipótesis del Teorema 1.2.1; si, por ejemplo, $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$W_0^{1,p}(\Omega) \underset{denso}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$

solamente si $p \geq \frac{2N}{N+2}$; por simplicidad trabajaremos a menudo bajo esta restricción, que sólo es técnica.

Introducimos la regularización en el tiempo de las funciones u que pertenecen a $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ (véase [61]): dado $\nu > 0$, definimos

$$u_\nu(x,t) = \nu \int_{-\infty}^t \tilde{u}(x,s) e^{\nu(s-t)} ds + e^{-\nu t} u_0, \tag{1.2.2}$$

donde $\tilde{u}(x,s)$ es la extensión cero de u para $s \notin [0,T]$. De ahora en adelante, la letra ν la usaremos sólo en este sentido. Recordamos que u_ν converge a u fuertemente en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ cuando ν tiende a infinito, y $\|u_\nu\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|_{L^q(\Omega)}$ para cada $q \in [1,+\infty]$; además,

$$u_\nu(x,0) = u_0 \text{ para } t = 0 \quad \text{y} \quad (u_\nu)_t = \nu(u - u_\nu),$$

en el sentido de las distribuciones (véase [61] para la prueba de estas propiedades). Observamos que, si $u \in L^\infty(Q)$, entonces por la última propiedad la derivada de u_ν respecto al tiempo pertenece a $L^\infty(Q) \subset L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, y por lo tanto

$$\int_0^T \langle (u_\nu)_t, \phi \rangle = \nu \int_Q (u - u_\nu)\phi, \quad \forall \phi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{1.2.3}$$

La siguiente generalización de la fórmula de integración por partes se puede encontrar en [46] (véase también [39]).

Lema 1.2.2. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua C^1 a trozos tal que $f(0)=0$ y f' es cero lejos de un conjunto compacto de $\mathbb{R}$; notamos $F(s)=\int_0^s f(r)dr$. Si además $u\in L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$ es tal que $u_t\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))+L^1(Q)$ y si $\psi\in C^\infty(\overline{Q})$, entonces tenemos*

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle u_t, f(u)\psi\rangle\, dt &= \int_\Omega F(u(T))\psi(T)\, dx\\ -\int_\Omega F(u(0))\psi(0)\, dx &- \int_Q \psi_t\, F(u)\, dxdt.\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Observamos que gracias a que u_t pertenece al espacio $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))+L^1(Q)$ existen $\eta_1\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ y $\eta_2\in L^1(Q)$ tal que $u_t=\eta_1+\eta_2$. Obviamente η_1 y η_2 no están determinados únicamente puesto que la integración por partes es independendiente de u_t ya que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica la dualidad entre $H^{-1}(\Omega)+L^1(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.

Recordemos que, por un resultado en [81], una función $z\in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ tal que $z_t\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))+L^1(Q)$ pertenece a $C([0,T];L^1(\Omega))$; con lo que todos los términos de (1.2.4) tienen sentido.

1.3. Resultados previos

En el estudio de los problemas de contorno hay tres aspectos fundamentales que analizaremos en las siguientes subsecciones: regularidad, estimaciones a priori y principio de comparación y unicidad.

1.3.1. Regularidad de las soluciones

Analizamos en esta subsección de la memoria un aspecto fundamental de la teoría de los problemas de contorno, la regularidad de sus soluciones.

Para ello, consideramos el problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(M(x,u)\nabla u)+g(x,u)|\nabla u|^2 = f & \text{en } \Omega,\\ u=0 & \text{en } \partial\Omega,\end{cases} \tag{1.3.1}$$

donde $M(x,s)$ es una matriz simétrica cuyos coeficientes $m_{ij}:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ son funciones de Carathéodory tal que existen constantes $0<\alpha\le\beta$ satisfaciendo

$$\alpha|\xi|^2\le M(x,s)\xi\cdot\xi \text{ y } |M(x,s)|\le\beta,\quad \text{a.e. } x\in\Omega,\ \forall(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N. \tag{1.3.2}$$

Además, suponemos que g satisface la condición de signo

$$g(x,s)s\ge 0. \tag{1.3.3}$$

Nuestra noción de solución será la siguiente.

Definición 1.3.1. Una *supersolución (resp. subsolución)* para dicho problema es una función $u\in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tal que

1) $u>0$ en casi todo punto de Ω,

2) $g(x,u)|\nabla u|^2$ pertenece a $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$,

3) para cada $0 \le \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, se verifica

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi + \int_\Omega g(x,u)|\nabla u|^2 \phi \underset{(\le)}{\ge} \int_\Omega f\,\phi\,.$$

Una función $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ es una *solución distribucional* para el problema descrito si $g(x,u)|\nabla u|^2$ pertenece a $L^1(\Omega)$, y u es a la vez una supersolución y una subsolución para dicho problema.
Si además $u \in H_0^1(\Omega)$, decimos que u es una *solución de energía finita* para tal problema. En este caso, tenemos

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi + \int_\Omega g(x,u)|\nabla u|^2 \psi = \int_\Omega f\,\psi, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{1.3.4}$$

Observación 1.3.2. *En el caso no autónomo, el concepto de solución es similar. Concretamente, si además $f(x,u) \in L^1(\Omega)$ y se verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi + \int_\Omega g(x,u)|\nabla u|^2 \psi = \int_\Omega f(x,u)\psi, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Recordemos algunos resultados clásicos sobre la regularidad debidos a Stampacchia. En primer lugar, recordamos el lema de Stampacchia [91, Lemma 5.1].

Lema 1.3.3 ([91]). *Sea $\tau(j,\rho)\ : [0,+\infty) \times [0,R_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\tau(\cdot,\rho)$ es no-creciente y $\tau(j,\cdot)$ es no-decreciente. Además, supongamos que existen $K_0 > 0$, $\mu > 1$, y $C,\nu,\gamma > 0$ satisfaciendo*

$$\tau(j,\rho) \le C\frac{\tau(k,R)^\mu}{(j-k)^\nu (R-\rho)^\gamma}, \quad \forall\, j > k > K_0, \forall\, 0 < \rho < R < R_0.$$

Entonces para cada $\delta \in (0,1)$, existe $d > 0$ tal que:

$$\tau(K_0 + d, (1-\delta)R_0) = 0\,,$$

donde $d^\nu = 2^{(\nu+\gamma)\frac{\mu}{\mu-1}} C \frac{(\tau(K_0,R_0))^{\mu-1}}{\delta^\gamma R_0^\gamma}$.

El lema anterior será la herramienta principal para probar estimaciones en L^∞ mediante el método de Stampacchia:

Teorema 1.3.4. *Sea $f \in L^q(\Omega)$, con $q > \frac{N}{2}$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ es una subsolución de*

$$-\Delta u = f\,, \;\; x \in \Omega,$$

i.e., si verifica

$$-\Delta u \le f\,, \;\; x \in \Omega,$$

entonces $u \in L^\infty(\Omega)$, con

$$\|u\|_\infty \le \mathcal{S}^2 \|f\|_q |\Omega|^{\mu-1} 2^{\frac{2^*\mu}{\mu-1}}$$

siendo $\mathcal{S}$ la constante de inmersión de Sobolev y $\mu = 2^*\left[\frac{1}{(2^*)'} - \frac{1}{q}\right]$.

Demostración. Tomamos $G_k(u)$ como función test,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2 &\leq \int_\Omega f G_k(u) = \int_\Omega f\chi_{\{|u|>k\}} G_k(u) \\
&\leq \|G_k(u)\|_{2^*} \|f\chi_{\{|u|>k\}}\|_{(2^*)'} = \|G_k(u)\|_{2^*} \left[\int_\Omega f^{(2^*)'} \chi_{\{|u|>k\}} \right]^{\frac{1}{(2^*)'}} \\
(\text{Hölder y } q > (2^*)') &\leq \|G_k(u)\|_{2^*} \left[\left(\int_\Omega f^q \right)^{\frac{(2^*)'}{q}} |\{|u|>k\}|^{1-\frac{(2^*)'}{q}} \right]^{\frac{1}{(2^*)'}} \\
&= \|G_k(u)\|_{2^*} \|f\|_q \, |\{|u|>k\}|^{\frac{1}{(2^*)'}-\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

De otra parte, por la inmersión de Sobolev (con $\mathcal{S}$ la constante de Sobolev),

$$\|G_k(u)\|_{2^*}^2 \leq \mathcal{S}^2 \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2,$$

y así deducimos

$$\|G_k(u)\|_{2^*} \leq \mathcal{S}^2 \|f\|_q \, |\{|u|>k\}|^{\frac{1}{(2^*)'}-\frac{1}{q}} \tag{1.3.5}$$

Observemos ahora que si $h > k > 0$ entonces

$$\{|u| > h\} \subset \{|u| > k\} \tag{1.3.6}$$

y

$$|G_k(u)| = |u| - k > h - k, \quad \forall x \in \{|u| > h\}. \tag{1.3.7}$$

Por lo tanto, usando (1.3.7), (1.3.6) y (1.3.5) (en ese orden), obtenemos que

$$\begin{aligned}
(h-k)|\{|u|>h\}|^{1/2^*} &= \left(\int_{|u|>h} (h-k)^{2^*} \right)^{1/2^*} = \left(\int_{|u|>h} |G_k(u)|^{2^*} \right)^{1/2^*} \\
&\leq \left(\int_{|u|>h} |G_k(u)|^{2^*} \right)^{1/2^*} = \|G_k(u)\|_{2^*} \\
&\leq \mathcal{S}^2 \|f\|_q \, |\{|u|>k\}|^{\frac{1}{(2^*)'}-\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

es decir,

$$|\{|u|>h\}| \leq \frac{\mathcal{S}^2 \|f\|_q^{2^*}}{(h-k)^{2^*}} |\{|u|>k\}|^{2^*\left[\frac{1}{(2^*)'}-\frac{1}{q}\right]}.$$

Notemos que

$$\mu \equiv 2^* \left[\frac{1}{(2^*)'} - \frac{1}{q} \right] > 1 \Longleftrightarrow q > \frac{N}{2}.$$

Se concluye aplicando a la función $\tau(k,\rho) = |\{|u|>k\}|$ al Lema 1.3.3 de Stampacchia.

$\square$

Análogamente se puede probar el siguiente resultado.

Lema 1.3.5. *Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ una solución de*

$$-\Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = \lambda u^p \text{ en } \Omega.$$

Entonces $u \in L^\infty(\Omega)$ y además existen $\alpha, \beta > 0$ de manera que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \alpha \|u\|^{\beta}_{H_0^1(\Omega)}. \tag{1.3.8}$$

Demostración. Tomamos $G_k(u)$ como función test para obtener, razonando como en el Teorema 1.3.4, que si $u \in L^q(\Omega)$ entonces

$$(h-k)|\{|u|>h\}|^{1/2^*} \leq \lambda \mathcal{S}^2 \|u\|^p_{L^q(\Omega)} |\{|u|>k\}|^{\frac{1}{(2^*)'}-\frac{p}{q}}.$$

Podemos usar ahora el lema de Stampacchia 1.3.10 para asegurar que

i) si $u \in L^q(\Omega)$ con $q > \frac{N}{2}p$, entonces $u \in L^\infty(\Omega)$ y

$$\|u\|^{2^*}_{L^\infty(\Omega)} \leq \left(\lambda \mathcal{S}^2 \|u\|^p_{L^q(\Omega)}\right)^{2^*} |\Omega|^{2^*-2-2^*\frac{p}{q}} 2^{\frac{2^*(2^*-1-2^*\frac{p}{q})}{2^*-2-2^*\frac{p}{q}}}.$$

ii) Si $u \in L^q(\Omega)$ con $q = \frac{N}{2}p$, entonces $u \in L^t(\Omega)$ para cada $t \in [1,\infty)$.

iii) Si $u \in L^q(\Omega)$ con $q < \frac{N}{2}p$, entonces $u \in L^t(\Omega)$ con $t = \frac{2^*q}{(2-2^*)q+2^*p} - \delta$ y $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño.

Si $2^* > \frac{N}{2}p$ se concluye, a partir del item i) con $q = 2^*$.

En el caso $2^* = \frac{N}{2}p$ usamos el item ii) con $q = 2^*$, lo que nos proporciona $q_1 > \frac{N}{2}p$ de manera que usando el item i) con $q = q_1$ se tiene de nuevo que $u \in L^\infty(\Omega)$.

Ahora bien, si $2^* < \frac{N}{2}p$ podemos tomar

$$q_1 = \frac{2^*q_0}{(2-2^*)q_0+2^*p} - \delta_1 > 2^* \equiv q_0,$$

y gracias al item iii) se tiene que $u \in L^{q_1}(\Omega)$ y podemos volver a argumentar como antes: si $q_1 \geq \frac{N}{2}p$ se concluye gracias a los items i) y/o ii) . Por otra parte si $q_1 < \frac{N}{2}p$ aplicamos el item iii) y obtenemos que $u \in L^{q_2}(\Omega)$ con

$$q_2 = \frac{2^*q_1}{(2-2^*)q_1+2^*p} - \delta_2 > q_1.$$

Ahora podemos volver a razonar con $q = q_2$ y en general, razonando de manera inductiva, concluiríamos en un número finito de pasos. En efecto, en otro caso, tendríamos la sucesión dada por

$$\begin{cases} q_0 = 2^* \\ q_{n+1} = \dfrac{2^*q_n}{(2-2^*)q_n+2^*p} - \delta_{n+1} \end{cases}$$

con lim $\delta_n = 0$, $2^* \leq q_n \leq \frac{N}{2}p$ no-decreciente, y por tanto convergente a $q \in (2^*, \frac{N}{2}p]$ con

$$q = \frac{2^* q}{(2-2^*)q + 2^* p},$$

es decir $2^* = (2-2^*)q + 2^* p$, y teniendo en cuenta que $(2-2^*) < 0$ y $q < 2^*$ se tiene que $2^*(1-2+2^*) < 2^* p$, es decir $2^* - 1 < p$, lo cual es una contradicción.

Usando el item i) del Lema 1.3.10 con $q > \{2^*, \frac{N}{2}p\}$ y razonando como en el Teorema 1.3.4 deducimos

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{2^*} \leq \left(\lambda \mathcal{S}^2 \|u\|_{L^q(\Omega)}^p\right)^{2^*} |\Omega|^{2^*-2-2^*\frac{p}{q}} 2^{\frac{2^*(2^*-1-2^*\frac{p}{q})}{2^*-2-2^*\frac{p}{q}}}.$$

En particular $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^q(\Omega)}^p$. Ahora bien, puesto que $q > 2^*$,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_\Omega u^q = \int_\Omega u^{2^*} u^{q-2^*} \leq \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{2^*} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{q-2^*}.$$

Por tanto

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\frac{2^* p}{q}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{p(1-\frac{2^*}{q})}.$$

De donde finalmente se obtiene que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{\frac{2^* p}{q}}{1-p(1-\frac{2^*}{q})}} = C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{2^* p}{q-pq+p2^*}}.$$

Se concluye (1.3.8) observando que, $q > 2^*$ y $p \leq 1$ garantizan que $0 < 1 - p(1-\frac{2^*}{q})$. □

Demostremos ahora un resultado de regularidad que nos será de gran utilidad. Su prueba está contenida básicamente en [60] pero para comodidad del lector presentamos aquí la prueba para el caso específico que necesitamos.

Teorema 1.3.6. *Sea $f \in L^q(\Omega)$ ($q > N/2$) verificando* (5). *Suponemos que se satisfacen* (1.3.3) *y* (1.3.2). *Asumimos que $0 < u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $g(x,u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$ es solución de la ecuación del problema* (1.3.1) *Entonces $u \in C(\Omega)$.*

Demostración. Gracias al Teorema 1.3.4 tenemos que $u \in L^\infty(\Omega)$. Consideramos una función $\zeta \in C^\infty(\Omega)$ con $0 \leq \zeta(x) \leq 1$, para cada $x \in \Omega$ y soporte compacto en una bola B_ρ de radio $\rho > 0$, y sea $A_{k,\rho} = \{x \in B_\rho \cap \Omega : u(x) > k\}$. Siguiendo la idea de la prueba del Teorema 1.1 del Capítulo 4 en [60], tomamos $\phi = G_k(u)\zeta^2$ como función test en (1.3.4) para deducir gracias a (1.3.2) y la desigualdad de Hölder que

$$\alpha \int_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^2 \zeta^2 \leq \|f\|_{L^q(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(\Omega)} |\{A_{k,\rho}\}|^{1-\frac{1}{q}} + 2\beta \int_{A_{k,\rho}} |\nabla u||\nabla\zeta|\zeta G_k(u).$$

Usando de nuevo la desigualdad de Young llegamos a que

$$\int_{A_{k,\rho}} |\nabla u|^2 \zeta^2 \leq \frac{2\|f\|_{L^q(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}}{\alpha} |\{A_{k,\rho}\}|^{1-\frac{1}{q}} + \frac{4\beta}{\alpha^2} \int_{A_{k,\rho}} |\nabla\zeta|^2 G_k^2(u).$$

En particular, si para $\sigma \in (0,1)$ escogemos ζ tal que es constante igual a 1 en la bola concéntrica $B_{\rho-\sigma\rho}$ (a B_ρ) de radio $\rho-\sigma\rho$ y $|\nabla\zeta| < \frac{1}{\sigma\rho}$, obtenemos

$$\int_{A_{k,\rho-\sigma\rho}} |\nabla u|^2 \leq \gamma\left(1+\frac{1}{\sigma^2\rho^{2(1-\frac{N}{2q})}}\max_{A_{k,\rho}}(u-k)^2\right)|\{A_{k,\rho}\}|^{1-\frac{1}{q}},$$

donde $\gamma = \max\left\{\frac{2\|f\|_{L^q(\Omega)}\|u\|_{L^\infty(\Omega)}}{\alpha}, \frac{4\beta}{\alpha^2}\omega_N^{\frac{1}{q}}\right\}$ con ω_N denotando la medida de la bola unidad por $\mathbb{R}^N$.

Esto quiere decir que para $\delta > 0$ suficientemente pequeño y cada $M \geq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, la función u pertenece a la clase $\mathcal{B}_2(\Omega, M, \gamma, \delta, \frac{1}{2q})$ con $2q > N$ (véase [60], pag. 81). Aplicando el Teorema 6.1 de [60] deducimos que u es Hölder continua en Ω. $\square$

1.3.2. Estimaciones locales a priori

Dedicamos este epígrafe a calcular una estimación a priori uniforme en L^∞ que será fundamental para probar la existencia de solución de problemas elípticos casilineales con *lower order terms* teniendo dependencia cuadrática en el gradiente y con una sigularidad en $u = 0$. Dicha estimación la probamos usando un resultado de [65] (ver también [30, 48]). Concretamente, estudiamos la ecuación

$$-\mathrm{div}(\widetilde{M}(x,u)\nabla u) + P(x)\cdot\nabla u + f(x)b(u) = 0, \ \text{ en } \Omega, \tag{1.3.9}$$

donde $\widetilde{M}(x,s) \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{m}_{ij}(x,s))$, $i,j = 1,\ldots,N$ es una matriz simétrica cuyos coeficientes $\widetilde{m}_{ij} : \Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de Carathéodory tales que existen constantes verificando $0 < \alpha \leq \beta$ y (1.3.2). $P(x)$ es un campo vectorial acotado y $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ satisface (5). También suponemos que $b : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ es una función continua no negativa tal que

$$\begin{aligned} &b(s) \text{ es creciente y satisface la condición de Keller-Osserman (1.1.6),}\\ &b(s)/s \text{ es no-decreciente para } s \text{ grande .}\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

Entonces las subsoluciones de la ecuación (1.3.9) están uniformemente acotadas superiormente en $\omega \subset\subset \Omega$. Caben citar [16, 73, 74, 94] para la literatura "clásica" de estimaciones en L^∞ para *large solutions* y para estimaciones locales [30, 36, 48, 65, 92].

Teorema 1.3.7. *Supongamos que $\widetilde{M}(x,s)$ satisface (1.3.2), $b(s)$ verifica (1.3.10) y asumimos que $f \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ verifica (5). Entonces, para cada $\omega \subset\subset \Omega$ existe $C_\omega > 0$ tal que cualquier subsolución distribucional $u \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ de (1.3.9) con $u^+ \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$ y $b(u^+) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ satisface*

$$u(x) \leq C_\omega, \quad \forall x \in \omega.$$

Para probar este teorema, hacemos uso del siguiente lema.

Lema 1.3.8 (Lema 3.3 de [66]). *Sea $b : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una función continua, satisfaciendo la condición (1.1.6), tal que $\dfrac{b(s)}{s}$ es no-decreciente para s grande. Entonces,* *para cualquier* $C > 0$ *y* $\gamma \geq 0$, *existe una constante positiva* Γ *y una función diferenciable* $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *(*Γ *y* φ *dependediendo sólo de* b, C *y* γ*), con* $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ *y* $\varphi(s) > 0$ *para cada* $s > 0$, *satisfaciendo*

$$t^{\gamma+1} \frac{\varphi'(\tau)^2}{\varphi(\tau)} \leq \frac{1}{C} t^{\gamma} b(t) \varphi(\tau) + \Gamma, \qquad \forall \tau \in (0,1], \forall t \geq 0.$$

Observaciones 1.3.9.

1. En el Lema 3.3 de [66] se impone que $b(s)$ es creciente, $b(0) = 0$, y la función $\dfrac{b(s)}{s}$ es no-decreciente en $\mathbb{R}^+$. Sin embargo, es fácil ver que se puede rehacer la prueba (ver también [65]) usando la hipótesis más débil del Lema 1.3.8.

2. Además, en [65], la condición (1.1.6) es reemplazada por:

$$\int^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{sb(s)}} < +\infty.$$

   Notamos que, como una consecuencia de la monotonía de $b(s)$ para s grande, la hipótesis anterior es equivalente a (1.1.6).

Un resultado muy útil cuya prueba puede verse en el Lema 4.1 de [90] es el siguiente.

Lema 1.3.10. *Sea* $\varphi : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *una función real no negativa y no-decreciente tal que para algunas constantes positivas* C, α, β *tenemos*

$$\varphi(h) \leq \frac{C}{(h-k)^{\alpha}} \varphi(k)^{\beta}, h > k \geq 0.$$

Entonces

i) *Si* $\beta > 1$ *entonces* $\varphi(d) = 0$ *con* $d^{\alpha} = C\varphi(0)^{\beta-1} 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}$.

ii) *Si* $\beta = 1$ *entonces* $\varphi(h) \leq \varphi(0) \exp\left(1 - \dfrac{h}{(eC)^{(1/\alpha)}}\right)$.

iii) *Si* $\beta < 1$ *entonces* $\varphi(h) \leq \dfrac{2^{\frac{\alpha}{(1-\beta)^2}} C^{\frac{1}{1-\beta}} + 2^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \varphi(1)}{h^{\frac{\alpha}{1-\beta}}}$, $h > 1$.

Prueba del Teorema 1.3.7. Supongamos que $u^+ \in L^{\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ y se verifica además que $b(u^+) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Denotamos $\omega \subset\subset \omega' \subset\subset \Omega$ y una función cut-off $\eta(x)$ satisfaciendo $0 \leq \eta \leq 1$ y

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \omega, \\ 0, & x \in \Omega \backslash \omega'. \end{cases} \tag{1.3.11}$$

Notamos $p_0 = \|P(x)\|_{(L^{\infty}(\Omega))^N}$, fijamos σ y C tal que

$$\|\nabla \eta\|^2_{L^{\infty}(\Omega)} \left[\frac{\beta^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{16} \right] \frac{1}{C} + \frac{p_0^2 \sigma}{\alpha} \leq m_{\omega'}(f),$$

y fijamos k_0 tal que $\frac{s}{b(s)} \leq \sigma$ para cada $s > k_0$. Consideramos también la función φ dada por el Lema 1.3.8 con $\gamma = 1$ y esta constante C. Observamos que si $\xi = \sqrt{\varphi(\eta)}$, entonces $u\xi^2 = u\varphi(\eta) \in H_0^1(\Omega)$ y

$$\nabla(u\xi^2) = \begin{cases} \xi^2\nabla u + 2\xi u \nabla\xi, & \text{if } \xi(x) > 0, \\ 0, & \text{if } \xi(x) = 0, \end{cases} \tag{1.3.12}$$

a.e. in Ω. Como $f(x)G_k(u^+)b(u^+) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, entonces $v = G_k(u^+)\xi^2$ se puede tomar como función test. Usando esta función test además de (1.3.2), (5) y la desigualdad de Young deducimos que

$$\begin{aligned}
\alpha & \int_{\omega'} |\nabla G_k(u^+)|^2\xi^2 + m_{\omega'}(f)\int_{\omega'} b(u^+)G_k(u^+)\xi^2 \\
\leq\ & 2\beta\int_{\omega'} |\nabla\xi||\nabla G_k(u^+)|G_k(u^+)\xi + p_0\int_{\omega'} |\nabla G_k(u^+)|G_k(u^+)\xi^2 \\
\leq\ & \frac{\alpha}{2}\int_{\omega'} |\nabla G_k(u^+)|^2\xi^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_{\omega'} |\nabla\xi|^2(G_k(u^+))^2 \\
& + \frac{\alpha}{4}\int_{\omega'} |\nabla G_k(u^+)|^2\xi^2 + \frac{{p_0}^2}{\alpha}\int_{\omega'} (G_k(u^+))^2\xi^2 \\
\leq\ & \frac{3\alpha}{4}\int_{\omega'} |\nabla G_k(u^+)|^2\xi^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_{\omega'} |\nabla\xi|^2(G_k(u^+))^2 \\
& + \frac{{p_0}^2}{\alpha}\int_{\omega'} \frac{u^+}{b(u^+)} b(u^+)G_k(u^+)\xi^2 .
\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{8}\int_{\omega'} |\nabla[G_k(u^+)\xi]|^2 + m_{\omega'}(f)\int_{\omega'} b(u^+)G_k(u^+)\xi^2 \\
& \leq \left[\frac{2\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha}{4}\right]\int_{\omega'} |\nabla\xi|^2(G_k(u^+))^2 + \frac{{p_0}^2\sigma}{\alpha}\int_{\omega'} b(u^+)G_k(u^+)\xi^2.
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 1.3.8 con $\gamma = 1$, junto a la monotonía de $b(s)$ obtenemos

$$\frac{\alpha}{8}\int_{\omega'} |\nabla[G_k(u^+)\xi]|^2 \leq \Gamma\|\nabla\eta\|^2_{L^\infty(\Omega)}\left[\frac{\beta^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{16}\right] \text{meas}\,\{x \in \omega' : u(x) \geq k\},$$

para cada $k > k_0(m_{\omega'}(f), p_0)$. Deducimos por la desigualdad de Sobolev que

$$\left(\int_{\omega} |G_k(u^+)\xi|^{2*}\right)^{\frac{2}{2*}} \leq C_0 \text{ meas}\,\{x \in \omega' : u(x) \geq k\},$$

donde $C_0 = \mathcal{S}^2\Gamma\|\nabla\eta\|^2_{L^\infty(\Omega)}\left[\frac{\beta^2}{2\alpha} + \frac{\alpha}{16}\right]$. Por lo tanto, usando que $G_k(s) \geq j - k$ para $s \geq j > k$ deducimos que

$$(j-k)^2 \text{ meas}\,\{x \in \omega : u(x) \geq j\}^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{C_0}{\sigma} \text{ meas}\,\{x \in \omega' : u(x) \geq k\}. \tag{1.3.13}$$

Ahora para $\omega \subset\subset \Omega$ fijado, consideramos $R = \text{dist}\,(\omega, \partial\Omega)/2$, así como el conjunto

$$\omega_r = \{x \in \Omega : \text{dist}\,(x, \omega) < r\} \subset\subset \Omega$$

y la función

$$\tau(k,r) = \text{meas}\,\{x \in \omega_r : u(x) \geq k\},$$

para cada $r \in (0,R]$ y $k > 0$. Tomando $\omega = \omega_r$ y $\omega' = \omega_R$ en (1.3.13) y escogiendo η tal que $\|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{c}{R-r}$, obtenemos

$$(j-k)^2 \tau(j,r)^{2/2^*} \leq c_1 \frac{\tau(k,R)}{(R-r)^2}$$

para algún $c_1 > 0$ y la prueba la concluimos aplicando el Lema 1.3.3.

□

Observaciones 1.3.11.

1. Notamos explícitamente que en la prueba anterior la constante Γ obtenida aplicando el Lema 1.3.8 depende de $m_{\omega'}(f)$. En particular, como $m_{\omega'}(f) \leq m_\omega(f)$ para $\omega \subset\subset \omega'$, si $m_\omega(f)$ tiende a cero, entonces esta constante Γ y por lo tanto la estimación a priori C_ω dada por el Teorema 1.3.7 diverge positivamente.

2. Añadiendo una condición a $b(s)$ para valores negativos de s y usando ideas similares a las usadas en la prueba anterior, es posible dar estimaciones a priori para la norma L^∞ de la solución en cada subconjunto compacto ω de Ω. Concretamente, si, además de las hipótesis del Teorema 1.3.7, fortalecemos (1.3.10) imponiendo que

$$\begin{array}{l} b(s) \text{ es creciente y satisface (1.1.6), } b(s)/s \text{ es no-decreciente,} \\ \text{para } s \text{ suficientemente grande y para cada } \omega \subset\subset \Omega \text{ existe } m_\omega > 0 \text{ tal que:} \\ \forall s \in \mathbb{R}, \quad B(x,s)\,\text{sign}\, s \geq m_\omega b(|s|) \geq 0 \quad \text{a.e. } x \in \omega, \end{array} \tag{1.3.14}$$

entonces para cada $\omega \subset\subset \Omega$ existe $C_\omega > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq C_\omega, \quad \forall x \in \omega.$$

1.3.3. Principio de comparación para algunos tipos de operadores y unicidad de solución

Estamos interesados en esta subsección en probar un principio de comparación para problemas parabólicos casilineales con crecimiento natural en el gradiente, el cual es nuevo en el caso evolutivo. Básicamente, este resultado está inspirado en las ideas en el marco elíptico de [13] para el siguiente problema de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\text{div}(\alpha(u)\nabla u) + \beta(u)|\nabla u|^2 & = & f(x,u) & \text{en } \Omega; \\ u & = & 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1.3.15}$$

Las funciones α y β son reales y continuas definidas en un intervalo $I =]0, b[$ (no se excluye el valor $b = +\infty$), mientras que $f : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory.

Asumen que β es no negativa, y α es positiva. Remarcamos que α y β podrían ser singulares en los extremos del intervalo.

Además, asumen las siguientes hipótesis.

(H1) La función $t \mapsto \alpha(t)e^{-\gamma(t)}$ es integrable en un entorno a la derecha de cero.

(H2) La función $s \mapsto f(x,s)\,e^{-\gamma(s)}$ es decreceinte a.e. $x \in \Omega$.

El principio de comparación para subsoluciones y supersoluciones que toman valores en el intervalo I que demuestran es el siguiente.

Teorema 1.3.12. *Supongamos que se verifican (H1) y (H2). Sean $u, \widetilde{u} \in H^1(\Omega)$ respectivamente una subsolución y una supersolución del problema* (1.3.15) *para las cuales existe $\delta \in]0,b[$ tal que*

$$\begin{gathered} e^{-\sigma(T_\delta(u))}|\nabla T_\delta(u)| \in L^2(Q), \\ g(T_\delta(u))|\nabla T_\delta(u)|^2 e^{-\sigma(T_\delta(u))} \in L^1(Q), \quad f(x,t)e^{-\sigma(T_\delta(u))} \in L^1(Q). \end{gathered} \tag{1.3.16}$$

Si $u \leq \widetilde{u}$ en $\partial\Omega$ (en el sentido que $(u-\widetilde{u})^+ \in H_0^1(\Omega)$), entonces $u \leq \widetilde{u}$.

Nos centramos ahora en el principio de comparación para el caso evolutivo. Como consecuencia obtenemos ciertos resultados de unicidad que enunciamos posteriormente y un resultado de estabilidad cuando t tiende a infinito, el cual lo probamos en el Capítulo 3 dedicado a los problemas parabólicos de contorno.

Consideramos el problema

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = f(x,t) & \text{en } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{1.3.17}$$

con $f \in L^1(Q)$ una función no negativa, $u_0 \in L^1(\Omega)$, y g una función continua en I donde $I =]0,b[$ (el valor $b = +\infty$ no está excluido). Suponemos también que g es no negativa pudiendo ser singular en los extremos del intervalo.

Notamos a continuación lo que entendemos por subsolución, supersolución y solución del problema (1.3.17).

Definición 1.3.13. *Decimos que $z \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ tal que z_t pertenece al espacio $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^1(Q)$ es una* subsolución *(respectivamente,* supersolución*) del problema (1.3.17) si $g(z)|\nabla z|^2 \in L^1(Q)$, y se verifica*

$$\int_0^T \langle z_t, w\rangle + \alpha \int_Q \nabla z \cdot \nabla w + \int_Q g(z)|\nabla z|^2 w \overset{(\geq)}{\leq} \int_Q f(x,t)w,$$

para cada $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$, con $w \geq 0$.

Se dice que z es una solución cuando es a la vez subsolución y supersolución.

Observamos que formalmente, de la ecuación en (1.3.17) se espera que la derivada de u pertenezca al espacio $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))+L^1(Q)$. Para salvar esta cuestión técnica hacemos uso del Lema 1.2.2.

Fijamos un punto $a \in I$, y definimos dos funciones auxiliares:

$$\sigma(s) = \frac{1}{\alpha}\int_a^s g(r)dr, \quad s \in I,$$

y

$$\varpi(s) = \int_0^s e^{-\sigma(r)}dr \quad s \in I.$$

Asumimos la siguiente hipótesis.

$$t \mapsto e^{-\sigma(t)} \text{ es integrable en un entorno de cero.} \tag{1.3.18}$$

Observación 1.3.14. *Señalamos un hecho importante respecto al problema modelo* (4). *Observamos que*

$$e^{-\sigma(s)} \stackrel{def}{=} \begin{cases} e^{-\frac{1}{\alpha}(s^{1-\gamma}-a^{1-\gamma})} & si\ \gamma \neq 1, \\ \left(\frac{a}{s}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & si\ \gamma = 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, la función es integrable en cada intervalo que contiene al 0 *si y sólo si* $\alpha > 0$ *y* $0 < \gamma < 1$ *o* $\alpha > 1$ *y* $\gamma = 1$.

El siguiente resultado se prueba de la misma forma que la Proposición 2.2. de [13].

Proposición 1.3.15. *Sea u una subsolución (respectivamente una supersolución) de* (1.3.17) *satisfaciendo* (1.3.16) *entonces la desigualdad*

$$\int_0^T \langle u_t, e^{-\sigma(u)}w\rangle + \alpha \int_Q e^{-\sigma(u)}\nabla u \cdot \nabla w \overset{(\geq)}{\leq} \int_Q f(x,t)e^{-\sigma(u)}w$$

se verifica para cada $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$, *con* $w \geq 0$.

Específicamente, el principio de comparación que probamos es el siguiente.

Teorema 1.3.16. *Asumimos que la condición* (1.3.18) *se satisface. Sea* $f \in L^1(Q)$ *una función no negativa, u y v respectivamente una subsolución y una supersolución del problema* (1.3.17) *satisfaciendo* (1.3.16) *con datos iniciales* $u_0, v_0 \in L^1(\Omega)$ *tales que* $u_0(x) \leq v_0(x)$ *a.e. en* Ω. *Si* $u \leq v$ *en* $\partial\Omega \times (0,T)$ *para todo* $t \in [0,T]$ *(en el sentido que* $(u-v)^+ \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$*) entonces*

$$u(x,t) \leq v(x,t) \text{ a.e. en } \Omega, \quad \forall t \in [0,T].$$

Demostración. Gracias a (1.3.16) deducimos que $\varpi(u) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ (análogamente $\varpi(v) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$). Así que, $[\varpi(u)-\varpi(v)]^+ \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ puesto que $u \leq v$ en $\partial\Omega$ y ϖ es creciente. Por lo tanto $T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+ \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$. Aplicando la Proposición 1.3.15 a la subsolución u, con $w = T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+$, obtenemos que

$$\begin{aligned}&\int_0^T \langle \varpi(u)_t, T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+\rangle + \alpha \int_Q e^{-\sigma(u)}\nabla u \nabla T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+ \\ &\leq \int_Q f(x,t)e^{-\sigma(u)}T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+.\end{aligned} \tag{1.3.19}$$

De manera análoga tenemos para la supersolución v que

$$\begin{aligned}&\int_0^T \langle \varpi(v)_t, T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+\rangle + \alpha \int_Q e^{-\sigma(v)}\nabla v \nabla T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+ \\ &\geq \int_Q f(x,t)e^{-\sigma(v)}T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+.\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

Usando que $u_0 \leq v_0$, y el Lema 1.2.2 obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T \langle \varpi(u)_t, T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+\rangle - \int_0^T \langle \varpi(v)_t, T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+\rangle \\ &= \int_0^T \langle (\varpi(u)-\varpi(v))_t, T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+\rangle = \int_\Omega \Theta_k(\varpi(u)-\varpi(v))^+(T),\end{aligned}$$

donde $\Theta_k(s) = \displaystyle\int_0^s T_k(r)dr$.

Por lo tanto, si restamos (1.3.20) de (1.3.19), y usamos la igualdad anterior deducimos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Theta_k(\varpi(u)-\varpi(v))^+(T) + \alpha \int_Q \left(e^{-\sigma(u)}\nabla u - e^{-\sigma(v)}\nabla v\right) \nabla T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+ \\ &\leq \int_Q f(x,t)(e^{-\sigma(u)} - e^{-\sigma(v)})T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+.\end{aligned}$$

Observando que la función ϖ es creciente ($\varpi'(s) = e^{-\sigma(s)} > 0$) y $f \geq 0$, se sigue que

$$f(x,t)(e^{-\sigma(u)} - e^{-\sigma(v)})T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+ \leq 0$$

a.e. $x \in \Omega$. Consecuentemente, tenemos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Theta_k(\varpi(u)-\varpi(v))^+(T) \\ &+ \alpha \int_Q \left(e^{-\sigma(u)}\nabla u - e^{-\sigma(v)}\nabla v\right) \nabla T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+ \leq 0,\end{aligned}$$

es decir,

$$\int_\Omega \Theta_k(\varpi(u)-\varpi(v))^+(T) + \alpha \int_Q \left|\nabla T_k[\varpi(u)-\varpi(v)]^+\right|^2 \leq 0.$$

Por lo tanto, por la definición de $\Theta_k(s)$ obtenemos que

$$[\varpi(u)-\varpi(v)]^+(T) = 0, \quad \forall k > 0.$$

Como T es arbitrario, concluimos que

$$u(x,t) \leq v(x,t) \text{ a.e. en } \Omega, \quad \forall t \in [0,T].$$

$\square$

Unicidad de solución para problemas con creciemiento cuadrático

Enunciamos ahora los resultados de unicidad, para los problemas casilineales, que tenemos gracias al principio de comparación (Proposición 1.3.15) probado en esta subsección.

Teorema 1.3.17. *El problema* (1.3.17) *tiene como mucho una solución satisfaciendo* (1.3.16).

Gracias a la Observación 1.3.14, tenemos el siguiente resultado para el problema modelo.

Corolario 1.3.18. *El problema* (4) *tiene como mucho una solución si*

- *o bien* $\gamma < 1$ *y* $\alpha > 0$,
- *o bien* $\gamma > 1$ *verificando* (1.3.16).

Capítulo 2

Problemas elípticos con dependencia singular en la solución y crecimiento cuadrático en su gradiente

A lo largo del presente capítulo estudiamos tanto la existencia, como la no existencia de solución para un problema de Dirichlet que involucra operadores en forma de divergencia con *lower order term*. Dicho término de orden inferior juega el papel de término perturbativo. El problema que consideramos es (1.3.1) donde Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $M(x,s) \stackrel{\text{def}}{=} (m_{ij}(x,s))$, $i,j = 1,\ldots,N$ es una matriz simétrica cuyos coeficientes $m_{ij} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de Carathéodory y satisface (1.3.2).
El dato $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ y suponemos que satisface (5). Notemos que (5) implica que $f \geq 0$ en Ω y que $f \not\equiv 0$ en Ω.

Para estudiar la existencia de solución imponemos en el *lower order term* que la no linealidad $g : \Omega \times (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sea una función de Carathéodory verificando

$$-\mu \leq sg(x,s) \leq h(s), \quad \forall s > 0, \text{ a.e. } x \in \Omega, \tag{2.0.1}$$

para algún $\mu > 0$ con $\alpha > \mu$, donde $h : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ es una función continua, no negativa tal que

$$\begin{gathered} \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \sqrt{h(t)}\,dt < +\infty, \\ h(s) \text{ es decreciente cerca de cero}, \\ h(s) \neq 0 \text{ en un entorno de cero.} \end{gathered} \tag{2.0.2}$$

Respecto a la prueba de nuestro resultado de existencia, cabe destacar que, debido a que el *lower order term* $g(x,u)|\nabla u|^2$ es (posiblemente) singular cuando la solución está cerca de 0, aproximaremos la función $g(x,s)$ por funciones no singluares $g_n(x,s)$ de tal manera que los problemas aproximados correspondientes tengan soluciones de energía finita u_n para cada n en $\mathbb{N}$. La principal dificultad de la prueba del Teorema 2.1.1 reside así en una cierta estimación inferior local uniforme de estas soluciones. Para obtenerla, usamos la condición (2.0.1) para probar que si $\omega \subset\subset \Omega$ entonces cualquier supersolución $z > 0$ de la ecuación

$$-\text{div}\,(M(x,z)\nabla z) + h(z)|\nabla z|^2 = f \quad \text{en } \Omega$$

está acotada superiormente por alguna constante positiva

$$\forall \omega \subset\subset \Omega \quad \exists c_\omega > 0 : \quad z(x) \geq c_\omega > 0, \quad \text{a.e. } x \in \omega.$$

Lo probamos en la Proposición 2.1.3 de la Subsección 2.1.1. usando un cambio de variable que reduce la cuestión a probar la estimación local en L^∞ para soluciones de problemas semilineales que hemos estudiado en el Teorema 1.3.7 de la Subsección 1.3.3.

La Subsección 2.1.2. establece cual es el problema aproximado y las propiedades de las soluciones aproximadas. Además, probaremos el Teorema 2.1.1, es decir que dicha sucesión de soluciones converge a una solución del problema (1.3.1).

La Subsección 2.1.3. la dedicamos a extender el resultado de existencia para datos en espacios más generales. Combinando las ideas de arriba con las de [82] (ver también [64]), abarcamos el caso del dato f en $L^1(\Omega)$, probando la existencia de soluciones distribucionales u de (1.3.1), con u en $W_0^{1,q}(\Omega)$ para cada $q < \frac{N}{N-1}$.

En la Sección 2.2. generalizamos el Teorema 2.1.1 para operadores diferenciales más generales cuya parte principal no tiene forma de divergencia y dato f en $L^q(\Omega)$ con $q > \frac{N}{2}$. El problema que consideramos es el siguiente

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) + g(x,u)|\nabla u|^2 = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.0.3}$$

donde los coeficientes $a_{ij}(x)$ satisfacen la condición de elipticidad

$$0 < \alpha|\varsigma|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\varsigma_i\varsigma_j \leq \beta|\varsigma|^2, \quad \forall \varsigma \in \mathbb{R}^N, \tag{2.0.4}$$

para algunos $0 < \alpha \leq \beta$.

Usando las estimaciones necesarias (que tenemos en los resultados previos) podemos probar un resultado de existencia para otro tipo de ecuaciones no lineales como podemos ver en la Sección 2.3. En la Sección 2.4. probamos resultados de no existencia de soluciones positivas para el problema (1.3.1) con dato f en $L^q(\Omega)$ para algún $q > \frac{N}{2}$, con $f \geq 0$ y $f \not\equiv 0$. En contraste con los anteriores resultados de existencia, suponemos que la no linealidad $g(x,s)$ está por encima de una función $h(s)$ cuya raíz cuadrada no es integrable en $(0,1)$. Específicamente, asumimos que

$$0 \leq h(s) \leq g(x,s), \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall s > 0, \tag{2.0.5}$$

donde $h : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ es una función continua no negativa tal que

$$\lim_{s\to 0^+} h(s) = +\infty, \quad \lim_{s\to 0^+} \int_s^1 \sqrt{h(t)}\,dt = +\infty, \tag{2.0.6}$$

y

$$\lim_{s\to 0^+} \sqrt{h(s)}\, \mathrm{e}^{\int_1^s \sqrt{h(t)}dt} = h_0 \geq 0. \tag{2.0.7}$$

La Sección 2.5. está dedicada al papel de la elipticidad en algunos resultados de la existencia de solución cuando no se impone la hipótesis (5). Recientemente, en [24] se ha obtenido la existencia de solución suponiendo únicamente que $f \geq 0$ y $f \not\equiv 0$ pero dicho resultado depende de la constante de elipticidad. Por nuestra parte introducimos una pequeña mejora que amplia el rango de dicha constante. Además, extendemos el resultado con una no linealidad que pueda ser negativa o cambiar de signo como podemos observar en la Subsección 2.5.1.

Hemos elegido presentar los resultados y realizar las pruebas en el caso $N \geq 3$. Sin embargo, todos los resultados (menos el Teorema 2.1.1) son ciertos en el caso $N = 2$ (con pruebas más fáciles). Además, si $N = 2$ (lo cual implica que $\frac{2N}{N+2} = 1$), el Teorema 2.1.1 es cierto si reemplazamos la hipótesis $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ por $f \in L^m(\Omega)$, y asumimos que $m > 1$.

2.1. Existencia de solución

El objetivo de esta sección será probar la existencia de soluciones de energía finita de (1.3.1). Nuestro resultado de existencia (que se obtiene combinando las ideas de [6] y [8])) de soluciones de energía finita es el siguiente.

Teorema 2.1.1. *Sea f en $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ verificando* (5)*, y supongamos que se verifican las hipótesis* (1.3.2)*,* (2.0.1)*,* (2.0.2) *y $\alpha > \mu$. Entonces existe una solución de energía finita u para el problema* (1.3.1)*. Además, $u\,g(x,u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$.*

Observación 2.1.2. *Cabe destacar que el Teorema 2.1.1 engloba varios resultados que hemos ido obteniendo a lo largo de la investigación desarrollada sobre los problemas singulares con gradiente cuadrático. Concretamente, en [12] probamos la existencia de solución del problema* (3) *para $0 < \gamma \leq 1$ y con el dato f verificando* (5)*. Posteriormente ampliamos la existencia de solución en [6] para el problema* (3) *en el caso en el que g está entre una hipérbola positiva y una hipérbola negativa, es decir g puede cambiar de signo, donde abarcamos el resultado anterior y mejoramos el espacio al que pertenece el dato. También, estudiamos el problema de obstáculo (desigualdad variacional) correpondiente a dicho problema en [9, 10].*

Notamos que $u\,g(x,u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$ implica que la solución u se puede tomar como función test (ya que $f \in H^{-1}(\Omega)$) en la formulación débil de (1.3.1) (ver (1.3.4)).

La idea para demostrar el Teorema 2.1.1 consiste en aproximar la no linealidad $g(s)$ por no linealidades g_n continuas en $\mathbb{R}$, de forma que los problemas no singulares obtenidos para g_n caigan en el marco estudiado por [34] y, por tanto, posean solución u_n de energía finita para cada $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que u_n converge a una solución positiva de (1.3.1). La clave para evitar esta dificultad consiste en probar que u_n están "lejos de cero" en cada abierto compactamente contenido en Ω, el cual llamamos principio del máximo uniforme fuerte (siguiendo la terminología de [93]). Así, en la Subsección 2.1.1 probamos el principio del máximo uniforme fuerte y en la Subsección 2.1.2 aproximamos nuestro problema, probamos las estimaciones necesarias y pasamos al límite usando dicho principio.

2.1.1. Principio del máximo fuerte uniforme

En este epígrafe probamos que cualquier supersolución de

$$-\mathrm{div}\,(M(x,z)\nabla z)+h(z)|\nabla z|^2=f \quad \text{en } \Omega, \tag{2.1.1}$$

está acotada inferiormente en cada abierto compactamente contenido en Ω. Como veremos en la prueba, es natural imponer la hipótesis (2.0.2). Este resultado será crucial para probar la existencia de solución para el problema (1.3.1).

Proposición 2.1.3. *Supongamos que $f\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ verifica* (5) *y h satisface* (2.0.2). *Sea ω un subconjunto abierto compactamente contenido en Ω. Entonces existe una constante $c_\omega>0$ tal que para cada supersolución $0<z\in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\cap C(\Omega)$ de la ecuación* (2.1.1) *se cumple que*

$$z\geq c_\omega \quad \text{en } \omega.$$

Demostración. Sea $z>0$ una supersolución de (2.1.1). Vamos a considerar un cierto cambio de variable. Cambiando en (2.0.1) $h(s)$ por $h(s)+\alpha/s$ podemos suponer sin pérdida de generalidad que h no es integrable en cero. Definimos, para $s>0$, la función no-decreciente

$$H(s)=\int_1^s h(t)dt, \tag{2.1.2}$$

y la función no-creciente

$$\psi(s)=\int_s^1 \mathrm{e}^{-\frac{H(t)}{\alpha}}dt.$$

Observando que

$$\lim_{s\to 0^+}\psi(s)=+\infty, \qquad \lim_{s\to+\infty}\psi(s)=\psi_\infty\in[-\infty,0),$$

podemos definir

$$v\stackrel{\text{def}}{=}\psi(z).$$

Como z es continua y estrictamente positiva en Ω, tenemos que z está acotada lejos de cero (con la cota dependiendo de z) en cada conjunto abierto ω compactamente contenido en Ω. Consecuentemente, por la regla de la cadena, tenemos

$$\nabla v=-e^{-\frac{H(z)}{\alpha}}\nabla z\in L^2(\omega), \quad \forall\omega\subset\subset\Omega, \tag{2.1.3}$$

y de este modo $v\in H^1(\omega)$ para cada $\omega\subset\subset\Omega$, es decir, $v\in H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Sea $0\leq\phi\in C_c^\infty(\Omega)$, y tomamos (siguiendo las ideas de [24]) $\mathrm{e}^{-\frac{H(z)}{\alpha}}\phi$ como función test en (2.1.1) para deducir que

$$-\int_\Omega M(x,z)\nabla z\cdot\nabla z\frac{h(z)}{\alpha}e^{-\frac{H(z)}{\alpha}}\phi+\int_\Omega M(x,z)\nabla z\cdot\nabla\phi\, e^{-\frac{H(z)}{\alpha}}$$
$$+\int_\Omega h(z)|\nabla z|^2e^{-\frac{H(z)}{\alpha}}\phi=\int_\Omega fe^{-\frac{H(z)}{\alpha}}\phi.$$

Usando (1.3.2) junto con (2.1.3) obtenemos,

$$-\int_\Omega M(x,z)\nabla\psi(z)\cdot\nabla\phi\geq\int_\Omega f\mathrm{e}^{-\frac{H(z)}{\alpha}}\phi\geq\int_\Omega\left(\mathrm{e}^{-\frac{H(z)}{\alpha}}-1\right)f\phi.$$

Si definimos $\widetilde{M}(x,s) = M(x,\psi^{-1}(s))$ y

$$b(s) = \mathrm{e}^{-\frac{H(\psi^{-1}(s))}{\alpha}} - 1 \text{ para cada } s \in (\psi_\infty, +\infty), \tag{2.1.4}$$

entonces v es subsolución de

$$-\mathrm{div}\,(\widetilde{M}(x,v)\nabla v) + f(x)\,b(v) = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Si pudiésemos aplicar el Teorema 1.3.7 tendríamos que para cada $\omega \subset\subset \Omega$, existe $C_\omega > 0$ tal que

$$v \leq C_\omega \quad \text{en } \omega.$$

Por lo tanto, deshaciendo el cambio, concluimos que

$$z \geq \psi^{-1}(C_\omega) = c_\omega > 0 \quad \text{en } \omega.$$

Veamos que las funciones $\widetilde{M}(x,s)$, $b(s)$ y $f(x)$ verifican las hipótesis del Teorema 1.3.7. En primer lugar, $\widetilde{M}(x,s)$ verifica (1.3.2) y $f(x)$ satisface (5). Se observa que $\dfrac{b(s)}{s}$ es no-decreciente para $s > 0$ grande; de hecho, esto es equivalente a probar que $\Upsilon(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{H(t)}{\alpha}} - 1}{\psi(t)}$ es no-creciente en un entorno de $t = 0$. Par mostrar esto, sea $w_0 \in (0,1)$ tal que $h(t)$ es no-creciente en $(0, w_0]$, y, notamos que

$$-\mathrm{e}^{\frac{H(t)}{\alpha}}\psi^2(t)\Upsilon'(t) = \frac{h(t)}{\alpha}\psi(t) - (\mathrm{e}^{-\frac{H(t)}{\alpha}} - 1) = \int_t^1 \frac{[h(t) - h(s)]}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{H(s)}{\alpha}}\,ds$$

$$\geq \int_{w_0}^1 \frac{[h(t) - h(s)]}{\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{H(s)}{\alpha}}\,ds = h(t)M_1 - M_2$$

donde

$$M_1 = \frac{1}{\alpha}\int_{w_0}^1 \mathrm{e}^{-\frac{H(s)}{\alpha}}\,ds \quad \text{and} \quad M_2 = \frac{1}{\alpha}\int_{w_0}^1 h(s)\mathrm{e}^{-\frac{H(s)}{\alpha}}\,ds.$$

De este modo, si t pertenece al intervalo $(0, h^{-1}(\mathrm{mín}\{w_0, M_2/M_1\}))$ el término de la derecha de la desigualdad anterior es positivo, y por lo tanto $\Upsilon(t)$ es no-creciente en este intervalo.

Suponemos que puesto que $\int_0^1 \sqrt{h(s)}ds < +\infty$ y h es no-creciente en un entorno de cero, entonces la función $b(s)$ satisface la condición conocida como Keller-Osserman (1.1.6). Consecuentemente, para concluir la prueba basta mostrar (1.1.6) o, equivalentemente, que

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{H(\psi^{-1}(s))}{\alpha}}\,ds}} < +\infty.$$

Usando el cambio $\tau = \psi^{-1}(s)$, obtenemos

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{H(\psi^{-1}(s))}{\alpha}}\,ds}} \quad = \quad \int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\int_{\psi^{-1}(t)}^{\psi^{-1}(0)} \mathrm{e}^{-2\frac{H(\tau)}{\alpha}}\,d\tau}}.$$

Ahora aplicamos el cambio $w = \psi^{-1}(t)$ para deducir que

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\int_0^t e^{-\frac{H(\psi^{-1}(s))}{\alpha}} ds}} \le \int_0^{w_0} \frac{dw}{\sqrt{2\int_w^{w_0} e^{\frac{2}{\alpha}[H(w)-H(\tau)]} d\tau}},$$

con $0 < w_0 = \psi^{-1}(t_0) < 1 = \psi^{-1}(0)$ ya que ψ es decreciente, y escogemos $t_0 >> 1$ tal que h es decreciente en $(0, w_0]$.

Como h satisface (2.0.2), concluimos la prueba si mostramos que existe una constante positiva c_0 tal que

$$h(w)\int_w^{w_0} e^{\frac{2}{\alpha}[H(w)-H(\tau)]}\, d\tau \ge c_0 > 0, \quad \forall w \in (0, w_0). \tag{2.1.5}$$

De hecho, la única dificultad está cerca de cero. Para verlo, usamos que h (por lo tanto h) es decreciente en $(0, w_0]$, para obtener

$$\begin{aligned} h(w)\int_w^{w_0} e^{\frac{2}{\alpha}[H(w)-H(\tau)]}\, d\tau &\ge \int_w^{w_0} h(\tau) e^{\frac{2}{\alpha}[H(w)-H(\tau)]}\, d\tau \\ &= -\frac{\alpha e^{\frac{2}{\alpha}H(w)}}{2}\int_w^{w_0} -\frac{2}{\alpha} h(\tau) e^{-\frac{2}{\alpha}H(\tau)}\, d\tau \\ &= -\frac{\alpha e^{\frac{2}{\alpha}H(w)}}{2}\left[e^{-\frac{2}{\alpha}H(\tau)}\right]_w^{w_0} = -\frac{\alpha}{2}\frac{e^{\frac{2}{\alpha}H(w)}}{e^{\frac{2}{\alpha}H(w_0)}} + \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de arriba y que $\lim_{u\to 0} e^{\frac{2}{\alpha}H(u)} = 0$, podemos elegir $\overline{w} \in (0, w_0)$ tal que

$$h(w)\int_w^{w_0} e^{\frac{2}{\alpha}[H(w)-H(\tau)]}\, d\tau \ge \frac{\alpha}{4},$$

para $0 < w < \overline{w}$. De este modo obtenemos la existencia de c_0 tal que se verifica (2.1.5). $\square$

2.1.2. Problema aproximado y prueba del resultado de existencia

La prueba del Teorema 2.1.1 se basa en la aproximación del dato $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ por una truncadura $f_n = T_n(f)$ y g por una cierta sucesión de funciones de Carathéodory g_n (para $n \in \mathbb{N}$). Concretamente, definimos

$$g_n(x,s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g(x,s) & s \ge \frac{1}{n}, \\ nh\left(\frac{1}{n}\right)\frac{s}{h(s)} g(x,s) & 0 < s \le \frac{1}{n}, \\ 0 & s \le 0. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Gracias a que h es decreciente cerca de cero, observamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} g_n(x,s) = g(x,s), \\ g_n(x,s) \le h(s), \forall n \ge n_0, \end{cases} \tag{2.1.7}$$

a.e. $x \in \Omega$ y para todo $s > 0$.

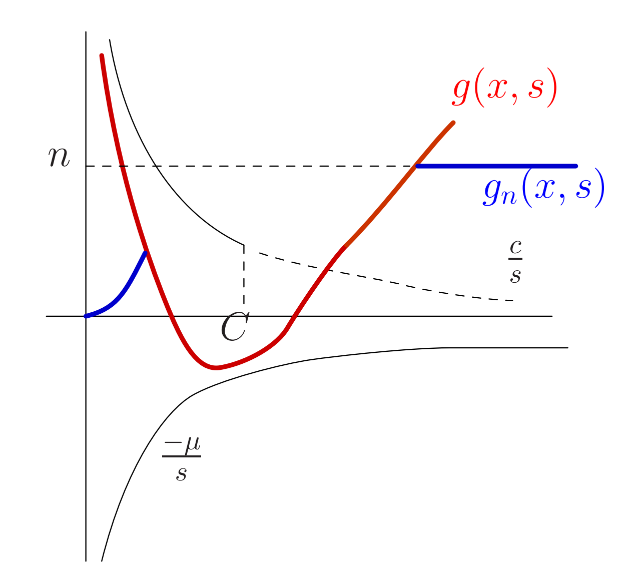

Figura 2.1: Ejemplo de no linealidad singular g, y de su aproximación g_n.

Por (2.0.1), tenemos también que

$$g_n(x,s)s + \mu \geq 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$sg_n(x,s)\frac{|\xi|^2}{1+\frac{1}{n}|\xi|^2} + \mu|\xi|^2 \geq 0, \tag{2.1.8}$$

a.e. $x \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Gracias a que para n fijado las funciones $f_n(x)$ $(x \in \Omega)$ y $\frac{|\xi|^2}{1+\frac{1}{n}|\xi|^2}$ $(\xi \in \mathbb{R}^N)$ están acotadas, podemos deducir (como una aplicación del teorema de Schauder), que el problema

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x,u_n)\nabla u_n) + g_n(x,u_n)\dfrac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} = f_n & \text{en } \Omega, \\ \hfill u_n = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.9}$$

tiene una solución u_n que pertenece a $H_0^1(\Omega)$ (véase [69]) y a $L^\infty(\Omega)$ (véase [91]).

Probamos ahora algunas propiedades de la sucesión u_n que necesitaremos más adelante.

Lema 2.1.4. *Asumimos que* $0 \not\equiv f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ *satisface* $f \geq 0$ *y que* $M(x,s)$ *verifica* (1.3.2). *Si, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *la función* $u_n \in H_0^1(\Omega)$ *es una solución del problema* (2.1.9), *entonces:*

1. *La sucesión* $\{u_n\}$ *está acotada en* $H_0^1(\Omega)$ *y el término*

$$u_n g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \text{ está acotado en } L^1(\Omega).$$

2. *Las funciones* u_n *son continuas en* Ω *y* $u_n(x)>0$ *para cada* $x\in\Omega$ *y cada* $n\in\mathbb{N}$.

Demostración. 1. Tomando u_n como función test en (2.1.9) tenemos que

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla u_n+\int_\Omega g_n(x,u_n)u_n\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}=\int_\Omega f_n u_n.$$

Usando la condición de elipticidad (1.3.2), las desigualdades de Hölder y Sobolev y añadiendo $\mu|\nabla u_n|^2$ obtenemos que

$$\int_\Omega(\alpha-\mu)\nabla u_n\cdot\nabla u_n+\int_\Omega\left[g_n(x,u_n)u_n\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}+\mu|\nabla u_n|^2\right]$$
$$\leq \mathcal{S}\|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Gracias a que se satisface (2.1.8) y a que $\alpha>\mu$, podemos concluir que las sucesiones u_n y $u_n g_n(x,u_n)\dfrac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}$ están acotadas, respectivamente, en $H_0^1(\Omega)$ y en $L^1(\Omega)$.

2. Tomamos $u_n^-\overset{\text{def}}{=}\text{mín}(u_n,0)$ como función test en (2.1.9), así, por (1.3.2),

$$(\alpha-\mu)\int_\Omega|\nabla u_n^-|^2+\int_\Omega\left[g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}u_n^-+\mu|\nabla u|^2\right]\leq\int_\Omega f_n\,u_n^-\,.$$

Usando que $f_n\geq 0$ y (2.1.8), obtenemos

$$(\alpha-\mu)\int_\Omega|\nabla u_n^-|^2\leq\int_\Omega f_n\,u_n^-\leq 0.$$

De este modo, como $\alpha>\mu$, $u_n^-\equiv 0$ y por lo tanto $u_n\geq 0$. Además, como $u_n\in L^\infty(\Omega)$

$$-\text{div}\,(M(x,u_n)\nabla u_n)=f_n-g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\in L^\infty(\Omega).$$

Por lo tanto u_n pertenece al espacio de las funciones Hölder continuas en Ω (véase [60], Teorema 1.1 del Capítulo 4).

Probemos que $u_n>0$ en Ω. Sea $k_n>0$ tal que $g_n(x,s)\leq k_n s$, para $s\in[0,\|u_n\|_\infty]$.

De este modo la función no negativa u_n satisface en el sentido de las distribuciones en Ω

$$\begin{aligned}-\text{div}\,(M(x,u_n)\nabla u_n)+nk_nu_n &\geq -\text{div}\,(M(x,u_n)\nabla u_n)+g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\\ &= f_n\,.\end{aligned}$$

Notando que f_n es no negativa y no idénticamente cero (puesto que $f\not\equiv 0$), por el principio del máximo (véase [54]) deducimos que $u_n>0$ en Ω. $\square$

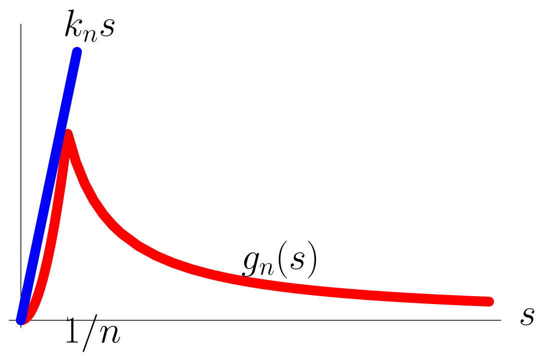

Figura 2.2: Representación de la aproximación g_n por debajo de una conveniente recta, es decir, $g_n(x,s) \leq k_n s$, para $s \in [0, \|u_n\|_\infty]$.

Prueba del Teorema 2.1.1. Probamos que, pasando a una subsucesión, la sucesión $\{u_n\}$ de soluciones de energía finita de (2.1.9) converge a una solución de energía finita de (1.3.1).

Por 1. del Lema 2.1.4, obtenemos

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_1 \text{ y } \int_\Omega u_n g_n(x,u_n) \frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \leq C_2. \tag{2.1.10}$$

De este modo, pasando a una subsucesión, podemos asumir que u_n converge a algún $u \in H_0^1(\Omega)$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y, por el teorema de Rellich, fuertemente en $L^2(\Omega)$ y a.e. en Ω.

Escogiendo, para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\phi \geq 0$, $\frac{1}{\varepsilon}T_\varepsilon(u_n)\phi$ como función test en (2.1.9) y teniendo en cuenta que $f_n \leq f$ en Ω deducimos que

$$\int_\Omega g_n(x,u_n) \frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \frac{T_\varepsilon(u_n)}{\varepsilon}\phi \leq \int_\Omega f_n + \int_\Omega |\nabla u_n||\nabla\phi| \leq \int_\Omega f + \int_\Omega |\nabla u_n||\nabla\phi|.$$

Gracias a la Proposición 2.1.3 podemos tomar límite cuando ε tiende a cero (ya que g_n está acotada inferiormente en el supp ϕ que está contenido compactamente en cualquier compacto de Ω), y usamos que, por el Lema 2.1.4, $u_n > 0$ en Ω obtenemos

$$\int_\Omega g_n(x,u_n) \frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\phi = \int_{\{u_n>0\}} g_n(x,u_n) \frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\phi \leq \int_\Omega f + \int_\Omega |\nabla u_n||\nabla\phi|. \tag{2.1.11}$$

Acabaremos la demostración probando los siguientes pasos:

Paso 1. Para cada $k > 0$, $G_k(u_n) \to G_k(u)$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$.
Paso 2. u_n converge fuertemente en $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$.
Paso 3. Pasamos al límite en (2.1.9).

Paso 1. Tomamos $G_k(u_n)$ como función test en (2.1.9) . Usando (1.3.2), teniendo en cuenta (2.1.8) y las desigualdades de Hölder y Sobolev, tenemos

$$(\alpha-\mu)\int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 \le \frac{\mathcal{S}^2}{\alpha^2}\left(\int_{\{u_n\ge k\}} f^{\frac{2N}{N+2}}\right)^{1+\frac{2}{N}}.$$

El último término de la desigualdad anterior es arbitrariamente pequeño si k es suficientemente grande. Por lo tanto, como $\alpha>\mu$, $|\nabla G_k(u_n)|^2$ es equiintegrable. Además, como

$$-\mathrm{div}(M(x,u_n)\nabla u_n) = f_n - g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2},$$

y el término de la derecha está acotado en $L^1_{loc}(\Omega)$ gracias al Lema 2.1.4-2, podemos aplicar el Lema 1 de [26] (véase también [31]) para deducir que, pasando a subsucesiones (no renombradas), ∇u_n converge a ∇u a.e. en Ω. Así, usando el teorema de Vitali

$$G_k(u_n)\to G_k(u) \qquad \text{en } H_0^1(\Omega).$$

Paso 2. Probamos ahora que la sucesión u_n converge fuertemente en $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Nos queda probar que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))|^2\phi = 0, \quad \forall\phi\in C_c^\infty(\Omega) \text{ con } \phi\ge 0. \tag{2.1.12}$$

Sea u_n una solución de (2.1.9) con $n\ge n_0$ (n_0 dado por (2.1.7)). Por el Lema 2.1.4, $u_n>0$ en Ω y es continua. En particular $h(u_n)|\nabla u_n|^2\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. De este modo, de las desigualdades $g_n(x,s)\le h(s)$ para cada $s>0$ y $f_n\ge f_1$ obtenemos que u_n es supersolución para

$$-\mathrm{div}\,(M(x,z)\nabla z)+h(z)|\nabla z|^2 = f_1 \quad \text{en } \Omega.$$

Por lo tanto, por la Proposición 2.1.3 (con $f=f_1$ y $z=u_n\in H_0^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ (Lema 2.1.4-2)) para cualquier $\omega\subset\subset\Omega$ obtenemos la existencia de una constante positiva c_ω tal que $u_n\ge c_\omega$ en ω. Tomando $k>0$ y $m_0>\text{máx}\{n_0,\frac{1}{c_\omega}\}$, deducimos, por la definición de g_n, que para todo $n\ge m_0$

$$|g_n(x,u_n(x))| = |g(x,u_n(x))| \le c_k(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \text{máx}\left\{\frac{\mu}{c_\omega}, \max_{s\in[c_\omega,k]} h(s)\right\}, \tag{2.1.13}$$

para cada $x\in\omega$ tal que $u_n(x)\le k$. Razonando como en [29], consideramos la función $\varphi_\lambda(s)$ definida en (1.1.5) y tomando $\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))\phi$ como función test en (2.1.9) tenemos que

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\varphi'_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))\phi$$
$$+\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla\phi\,\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))$$
$$+\int_\Omega g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))\phi = \int_\Omega f_n\,\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))\phi.$$

Puesto que $T_k(u_n) \to T_k(u)$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y fuertemente en $L^2(\Omega)$, notamos que

$$\int_\Omega f_n \varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))\phi - \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla\phi\, \varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u)) = \varepsilon(n).$$

Además, escogiendo $\omega_\phi \subset\subset \Omega$ con $\operatorname{supp}\phi \subset \omega_\phi$, deducimos, de la definición (2.1.13) y $\varphi_\lambda(k-T_k(u))$, que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u)) \\
&= \int_{\{u_n \geq k\}} g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))\phi \\
&+ \int_{\{u_n \leq k\}} g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))\phi \\
&\geq -c_k(\omega_\phi)\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi \\
&-\mu\int_{\{u_n \geq k\}} |\nabla u_n|^2\varphi_\lambda(k-T_k(u))\phi.
\end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\varphi_\lambda'(T_k(u_n)-T_k(u))\phi \\
-c_k(\omega_\phi)&\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi \leq \varepsilon(n) + \mu\int_{\{u_n \geq k\}} |\nabla u_n|^2\varphi_\lambda(k-T_k(u))\phi.
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\varphi_\lambda'(T_k(u_n)-T_k(u))\phi\chi_{\{u_n \geq k\}} \\
&= -\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla T_k(u)\varphi_\lambda'(k-T_k(u))\phi\chi_{\{u_n \geq k\}} = \varepsilon(n),
\end{aligned}$$

y añadiendo

$$-\int_\Omega M(x,u_n)\nabla T_k(u)\cdot\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\varphi_\lambda'(T_k(u_n)-T_k(u))\phi = \varepsilon(n)$$

a ambos lados de (2.1.14) y como

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi \\
&\leq 2\int_\Omega |\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi \\
&+2\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi \\
&= 2\int_\Omega |\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi + \varepsilon(n),
\end{aligned}$$

llegamos a, usando también (1.3.2) (omitimos el argumento $T_k(u_n) - T_k(u)$ para φ_λ y φ'_λ),

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(T_k(u_n) - T_k(u))|^2 \Big[\alpha\varphi'_\lambda - 2c_k(\omega_\phi)|\varphi_\lambda|\Big]\phi \\
\leq \varepsilon(n) + \mu \int_{\{u_n \geq k\}} |\nabla u_n|^2 \varphi_\lambda(k - T_k(u))\phi \\
= \varepsilon(n) + \mu \int_{\{u \leq k\}} |\nabla G_k(u_n)|^2 \varphi_\lambda(k - u)\phi.
\end{aligned}$$

Escogiendo λ tal que se verifica (1.1.5) con $a = \alpha$ y $b = 2c_k(\omega_\phi)$, y gracias a que esta última integral tiende a cero ($G_k(u_n) \to G_k(u)$ y además $G_k(u) = 0$ en $\{u \leq k\}$) obtenemos (2.1.12).

Combinando esta convergencia y el Paso 1 deducimos que

$$u_n \to u \qquad \text{en } H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Paso 3. Observemos que, aplicando el lema de Fatou en (2.1.10) y (2.1.11), deducimos que

$$\int_\Omega u g(x,u)|\nabla u|^2 \leq C_2 \quad \text{y} \quad \int_\Omega g(x,u)|\nabla u|^2\phi \leq \int_\Omega f\,,$$

respectivamente. Por lo tanto, para concluir la prueba falta probar que u es una solución distribucional del problema (1.3.1). Comenzamos pasando al límite en n en la ecuación que satisface u_n, es decir, en

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla\phi + \int_\Omega g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\phi = \int_\Omega f_n\phi\,,\ \forall\phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

La convergencia débil de u_n a u y la convergencia débil-$*$ de $M(x,u_n)$ a $M(x,u)$ en $L^\infty(\Omega)$ implica que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla\phi = \int_\Omega M(x,u)\nabla u \nabla\phi\,, \quad \forall\phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.1.15}$$

Por otro lado, si fijamos $\omega \subset\subset \Omega$, entonces, por la definición (2.1.13),

$$|g_n(x,u_n(x))| = \leq c_k(\omega) \overset{\mathrm{def}}{=} \max\left\{\frac{\mu}{c_\omega}, \max_{s\in[c_\omega,k]} h(s)\right\}$$

para cada $x \in \omega$ tal que $u_n(x) \leq k$. Consecuentemente, si $E \subset\subset \omega$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_E |g_n(x,u_n(x))|\frac{|\nabla u_n(x)|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n(x)|^2} \\
&\leq \int_{E\cap\{u_n\leq k\}} |g_n(x,u_n)|\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} + \int_{E\cap\{u_n\geq k\}} |g_n(x,u_n)|\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \\
&\leq c_k(\omega)\int_{E\cap\{u_n\leq k\}} |\nabla T_k(u_n)|^2 + \int_{\{u_n\geq k\}} |g_n(x,u_n)|\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\,.
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Fijamos $\varepsilon > 0$. Observamos que si, para $k > 1$, usamos $T_1(G_{k-1}(u_n))$ como función test en (2.1.9) y usando que algunos términos son positivos, deducimos que

$$\int_{\{u_n \geq k\}} |g_n(x,u_n)| \frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \leq \int_{\{u_n \geq k-1\}} f_n \leq \int_{\{u_n \geq k-1\}} f.$$

De este modo, como el término de la derecha tiende a 0 uniformemente en n cuando k diverge, obtenemos la existencia de $k_0 > 1$ tal que

$$\int_{\{u_n \geq k\}} |g_n(x,u_n)| \frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq k_0,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Además, como $T_k(u_n)$ converge fuertemente en $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, existe n_ε, δ_ε tal que para cada $E \subset\subset \Omega$ con $\text{meas}\,(E) < \delta_\varepsilon$ tenemos

$$\int_{E \cap \{u_n \leq k\}} |\nabla T_k(u_n)|^2 < \frac{\varepsilon}{2c_k(\omega)}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

En conclusión, por (2.1.16), tomando $k \geq k_0$ vemos que $\text{meas}\,(E) < \delta_\varepsilon$ implica que

$$\int_E |g_n(x,u_n(x))| \frac{|\nabla u_n(x)|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n(x)|^2} \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon,$$

es decir, la sucesión $g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}$ es equiintegrable. Esto, junto con su convergencia a.e. a $g(x,u)|\nabla u|^2$, implica, gracias al teorema de Vitali, que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n(x,u_n) \frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\phi = \int_\Omega g(x,u)|\nabla u|^2\phi, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Por lo tanto, usando el límite anterior, (2.1.15) y puesto que f_n tiende a f fuertemente en $L^1(\Omega)$ concluimos que

$$\int_\Omega M(x,u)\nabla u \nabla \phi + \int_\Omega g(x,u)|\nabla u|^2\phi = \int_\Omega f\phi, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

□

2.1.3. Existencia de solución para dato en $L^1(\Omega)$

El objetivo de esta subsección será extender el resultado de existencia Teorema 2.1.1 para datos f en espacios más generales. Concretamente, probamos la existencia de soluciones distribucionales si $f \in L^1(\Omega)$. El resultado que probamos es el siguiente.

Teorema 2.1.5. *Sea $f \in L^1(\Omega)$ satisfaciendo* (5) *y supongamos que se verifican* (1.3.2),

$$0 \leq g(x,s) \leq h(s), \quad \text{for a.e. } x \in \Omega,\ \forall s > 0, \tag{2.1.17}$$

y (2.0.2). *Entonces existe una solución distribucional u de* (1.3.1), *con u en $W_0^{1,q}(\Omega)$, para todo $q < \frac{N}{N-1}$. Si, además, existe $s_0 > 0$ y $\mu > 0$ tal que*

$$g(x,s) \geq \mu \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \geq s_0, \tag{2.1.18}$$

entonces $u \in H_0^1(\Omega)$ (es decir, es una solución de energía finita).

Para probar dicho resultado seguimos un esquema parecido a la subsección anterior. En este caso, aprovechando el Teorema 2.1.1, aproximamos el problema (1.3.1) por

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(M(x,u_n)\nabla u_n) + g(x,u_n)|\nabla u_n|^2 = f_n & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1.19}$$

donde $f_n = T_n(f)$.

Notamos que la existencia de una solución de energía finita $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ no negativa tal que $g(x,u_n)|\nabla u_n|^2 \in L^1(\Omega)$ se sigue del Teorema 2.1.1 y del Teorema 1.3.1.

Lema 2.1.6. *Si $f \in L^1(\Omega)$ verifica* (5)*, $g(x,s)$ satisface* (2.1.17) *(con $h(s)$ verificando* (2.0.2)*), y u_n es una solución de* (2.1.19)*, entonces*

(i) u_n está acotada en $\mathcal{M}^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$ y $|\nabla u_n|$ está acotado en $\mathcal{M}^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$;

(ii) pasando a subsucesiones, u_n es débilmente convergente a u en $W_0^{1,q}(\Omega)$ para cada $q \in [1, \frac{N}{N-1})$;

(iii) para cualquier $k > 0$ y para cualquier $\omega \subset\subset \Omega$,

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \quad \text{en} \quad H^1(\omega).$$

Proof. (i) Tomando $T_k(u_n)$ como función test en (2.1.19) y usando (1.3.2), tenemos

$$\alpha \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 + \int_\Omega g(x,u_n) T_k(u_n) |\nabla u_n|^2 \le k \|f_n\|_{L^1(\Omega)}.$$

Puesto que $0 \le f_n \le f$ y $g(x,u_n) \ge 0$, obtenemos

$$\alpha \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 \le k \|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.1.20}$$

Estimaciones *estándar* (véase [18, Lemas 4.1 and 4.2]) implican que u_n está acotada en $\mathcal{M}^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$ y que $|\nabla u_n|$ está acotado en $\mathcal{M}^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$.
(ii) Sea $1 \le q < \frac{N}{N-1}$. Por el caso anterior y el embebimiento (1.1.2), deducimos que u_n está acotada en $W_0^{1,q}(\Omega)$ y de este modo, pasando a una subsucesión si es necesario, existe u tal que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente en $W_0^{1,q}(\Omega)$.
(iii) Nuestro objetivo es mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla(T_k(u_n) - T_k(u))|^2 \phi = 0\,, \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)\,,\ \phi \ge 0.$$

Adaptamos a nuestro caso una técnica introducida en [64] (véase también [82]) para obtener la convergencia fuerte de las truncaduras. Escogemos $\varphi_\lambda(w_n)\phi$ como función test en (2.1.19) donde $\varphi_\lambda(s)$ ha sido definido en (1.1.5) y

$$w_n = T_{2k}[u_n - T_l(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)], \qquad 0 < k < l.$$

De este modo tenemos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla w_n \varphi_\lambda'(w_n)\phi + \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla\phi\varphi_\lambda(w_n) \\ &\quad + \int_\Omega g(x,u_n)|\nabla u_n|^2 \varphi_\lambda(w_n)\phi = \int_\Omega f_n\, \phi\varphi_\lambda(w_n)\,. \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

Observando que $\nabla T_k(u_n) = 0$ si $u_n > k$ y $\nabla w_n \equiv 0$ si $u_n \geq 2k + l \equiv \mathcal{K}$ (recordemos que $l > k$), tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla w_n \varphi'_\lambda(w_n)\phi \\
&\quad = \int_\Omega M(x,u_n)\nabla T_k(u_n) \cdot \nabla (T_k(u_n) - T_k(u))\varphi'_\lambda(w_n)\phi \\
&\qquad + \int_{\{u_n \geq k\}} M(x,u_n)\nabla T_{\mathcal{K}}(u_n) \cdot \nabla T_{2k}(G_l(u_n) + k - T_k(u))\varphi'_\lambda(w_n)\phi\,.
\end{aligned}$$

Además, usando que

$$\begin{aligned}
\nabla T_{\mathcal{K}}(u_n) \cdot \nabla (G_l(u_n) - T_k(u)) &= \nabla T_{\mathcal{K}}(u_n) \cdot \nabla G_l(u_n) - \nabla T_{\mathcal{K}}(u_n) \nabla T_k(u) \\
&\geq -\nabla T_{\mathcal{K}}(u_n) \cdot \nabla T_k(u),
\end{aligned}$$

llegamos a

$$\begin{aligned}
&\int_{\{u_n > k\} \cap \{G_l(u_n) + k - T_k(u) \leq 2k\}} M(x,u_n)\nabla T_{\mathcal{K}}(u_n) \cdot \nabla (G_l(u_n) - T_k(u))\varphi'_\lambda(w_n)\phi \\
&\quad \geq -\int_{\{G_l(u_n) + k - T_k(u) \leq 2k\}} |M(x,u_n)\nabla T_{\mathcal{K}}(u_n) \cdot \nabla T_k(u)|\varphi'_\lambda(w_n)\phi\chi_{\{u_n > k\}}\,,
\end{aligned}$$

y de este modo, como la anterior integral converge a cero cuando n diverge,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla w_n \varphi'_\lambda(w_n)\phi \\
&\quad \geq \int_\Omega M(x,u_n)\nabla T_k(u_n) \cdot \nabla (T_k(u_n) - T_k(u))\varphi'_\lambda(w_n)\phi + \varepsilon(n).
\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Por otro lado, puesto que $G_l(u_n) + k - T_k(u) \geq 0$,

$$\int_\Omega g(x,u_n)|\nabla u_n|^2 \varphi_\lambda(w_n)\phi \geq \int_{\{u_n \leq k\}} g(x,u_n)|\nabla u_n|^2 \varphi_\lambda(w_n)\phi\,.$$

Si $0 < u_n \in H_0^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ es una solución de energía finita de

$$-\text{div}\,(M(x,u_n)\nabla u_n) + g(x,u_n)|\nabla u_n|^2 = f_n \quad \text{en } \Omega,$$

entonces, usando que $g(x,s) \leq h(s)$, $f_n \geq f_1$ y $h(u_n)|\nabla u_n|^2 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, tenemos que u_n es una supersolución de

$$-\text{div}\,(M(x,z)\nabla z) + h(z)|\nabla z|^2 = f_1 \quad \text{en } \Omega.$$

Consecuentemente, si $\omega \subset\subset \Omega$ y c_ω (definida en (2.1.13), con $f = f_1$), deducimos que $u_n \geq c_\omega$ en ω. Por lo tanto,

$$g(x,u_n(x)) \leq c_k(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{s \in [c_\omega, k]} h(s)\,,$$

para cada $x \in \omega$ tal que $u_n(x) \leq k$.

Con lo que, aplicado a un subconjunto $\omega_\phi \subset\subset \Omega$ con $\operatorname{supp}\phi \subset \omega_\phi$, deducimos que $g(x,u_n(x)) \leq c_k(\omega_\phi)$ para cada $x \in \omega$ con $u_n(x) \leq k$. Entonces, obtenemos

$$\left|\int_{\{u_n\leq k\}} g(x,u_n)|\nabla u_n|^2\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))\phi\right|$$

$$\leq c_k(\omega_\phi)\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi$$

$$\leq 2c_k(\omega_\phi)\int_\Omega |\nabla (T_k(u_n)-T_k(u))|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi$$

$$+2c_k(\omega_\phi)\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2|\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))|\phi\,.$$

Notemos que la última integral tiende a 0 cuando n diverge ya que $\varphi_\lambda(T_k(u_n)-T_k(u))$ converge a cero en la topología débil-$*$ de $L^\infty(\Omega)$ y $T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$. Así, usando además (2.1.21) y (2.1.22) tenemos

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla T_k(u_n)\cdot\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\varphi_\lambda'(w_n)\phi$$

$$-2c_k(\omega_\phi)\int_\Omega |\nabla (T_k(u_n)-T_k(u))|^2|\varphi_\lambda(w_n)|\phi$$

$$\leq \int_\Omega f_n\phi\varphi_\lambda(w_n)\; - \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla\phi\varphi_\lambda(w_n)+\varepsilon(n),$$

y añadiendo a ambos lados de la anterior desigualdad

$$-\int_\Omega M(x,u_n)\nabla T_k(u)\cdot\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))\varphi_\lambda'(w_n)\phi = \varepsilon(n),$$

llegamos gracias a (1.3.2),

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla (T_k(u_n)-T_k(u))|^2\Big[\alpha\varphi_\lambda'(w_n)-2c_k(\omega_\phi)|\varphi_\lambda(w_n)|\Big]\phi\\ &\leq \int_\Omega f_n\phi\varphi_\lambda(w_n)\; - \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla\phi\,\varphi_\lambda(w_n)+\varepsilon(n).\end{aligned}$$

Escogiendo λ tal que φ_λ satisfaga (1.1.5) con $a=\alpha$ y $b=2c_k(\omega_\phi)$, obtenemos

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla (T_k(u_n)-T_k(u))|^2\phi$$

$$\leq \int_\Omega f_n\phi\varphi_\lambda(w_n)\; - \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla\phi\,\varphi_\lambda(w_n)+\varepsilon(n).$$

Además, w_n converge a.e. (y débil-$*$ en $L^\infty(\Omega)$) a $w = T_{2k}(G_l(u))$ y de este modo, recordando que $\nabla u_n \to \nabla u$ débilmente en $(L^q(\Omega))^N$, $q<N/(N-1)$,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\phi\varphi_\lambda(w_n) - \int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla\phi\varphi_\lambda(w_n)$$

$$= \int_\Omega f\phi\varphi_\lambda(w) - \int_\Omega M(x,u)\nabla u\cdot\nabla\phi\varphi_\lambda(w)\,.$$

Consecuentemente, usando (1.3.2)

$$\frac{\alpha}{2}\int_{\Omega}|\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))|^2\phi \le \int_{\Omega} f\phi\varphi_\lambda(w) - \int_{\Omega} M(x,u)\nabla u\cdot\nabla\phi\,\varphi_\lambda(w) + \varepsilon(n)$$

$$\le \varphi_\lambda(2k)\int_{\{u\ge l\}}(f+\beta|\nabla u||\nabla\phi|) + \varepsilon(n).$$

Puesto que la última integral tiende a cero cuando l diverge, (iii) está probado. □

Estamos ya en disposición de probar el resultado de existencia de solución cuando el dato pertenece al espacio de Lebesgue $L^1(\Omega)$.

Prueba del Teorema 2.1.5. Comenzamos probando la primera parte del teorema, es decir que existe una solución $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, para cada $q < \frac{N}{N-1}$, del problema (1.3.1). De los resultados de [31] deducimos que $\nabla u_n \to \nabla u$ a.e., y del Lema 2.1.6 las estimaciones de u_n y $|\nabla u_n|$ en $\mathcal{M}^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$ y $\mathcal{M}^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$ respectivamente. De este modo $u_n \to u$ fuertemente en $W_0^{1,q}(\Omega)$, para cada $q < \frac{N}{N-1}$. Argumentando como en la prueba del Teorema 2.1.1, podemos mostrar que, escogiendo $\frac{1}{\varepsilon}T_\varepsilon(u_n)$ como función test en (2.1.19) y aplicando el lema de Fatou, tenemos que $g(x,u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$.

Para probar que para todo $\omega \subset\subset \Omega$, $\{g(x,u_n)|\nabla u_n|^2\}$ converge fuertemente en $L^1(\omega)$ a $g(x,u)|\nabla u|^2$, es suficiente mostrar la equiintegrabilidad local uniforme de tal sucesión. Para ello, escogemos $T_1(G_{k-1}(u_n))$ $(k>1)$ como función test en la ecuación (2.1.19) y, usando la positividad del primer término (gracias a (1.3.2)), y puesto que $f_n \le f$, deducimos que

$$\int_{\{u_n\ge k\}} g(x,u_n)|\nabla u_n|^2 \le \int_{\{u_n\ge k-1\}} f\,. \tag{2.1.23}$$

Por un argumento similar al usado en el Paso 3 de la prueba del Teorema 2.1.1, probamos la equiintegrabilidad. De hecho, sea $E \subset \omega \subset\subset \Omega$ un conjunto medible. Por (2.1.13) y (2.1.23), tenemos, $\forall k > 1$,

$$\int_E g(x,u_n)|\nabla u_n|^2 = \int_{E\cap\{u_n\le k\}} g(x,u_n)|\nabla u_n|^2$$

$$+\int_{E\cap\{u_n\ge k\}} g(x,u_n)|\nabla u_n|^2 \le c_k(\omega)\int_{E\cap\{u_n\le k\}}|\nabla T_k(u_n)|^2$$

$$+\int_{\{u_n\ge k\}} g(x,u_n)|\nabla u_n|^2 \le c_k(\omega)\int_E|\nabla T_k(u_n)|^2 + \int_{\{u_n\ge k-1\}} f\,.$$

Puesto que meas $(\{x\in\Omega : u_n \ge k-1\})$ tiende a cero (uniformemente con respecto a n) cuando k tiende a $+\infty$ (por la acotación de $\{u_n\}$ en el espacio $\mathcal{M}^{N/(N-2)}(\Omega)$ gracias al Lema 2.1.6-(ii)), obtenemos que la última integral de las desigualdades anteriores tiende a cero cuando k diverge positivamente. Ésto, y la equiintegrabilidad local de $|\nabla T_k(u_n)|^2$ (el Lema 2.1.6-(iii)), muestran la equiintegrabilidad local de $\{g(x,u_n)|\nabla u_n|^2\}$.

Usando además que $\nabla u_n \to \nabla u$ a.e., concluimos por el teorema de Vitali que

$$g(x,u_n)|\nabla u_n|^2 \to g(x,u)|\nabla u|^2 \quad \text{en } L^1(\omega),\ \forall\omega\subset\subset\Omega\,. \tag{2.1.24}$$

Ahora, usando (2.1.24) y la convergencia fuerte de ∇u_n a ∇u en $(L^q(\Omega))^N$, para cada $q < \frac{N}{N-1}$, podemos pasar al límite en (2.1.19) para mostrar que u es una solución del problema (1.3.1).

Para probar la segunda parte del teorema, notamos que podemos fijar $k \geq \max\{s_0, 1\}$ tal que (2.1.18) y (2.1.23) implican

$$\mu \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 = \mu \int_{\{u_n \geq k\}} |\nabla u_n|^2 \leq \int_{\{u_n \geq k-1\}} f \leq \|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{2.1.25}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (2.1.20) y (2.1.25), tenemos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 = \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 + \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 \leq \left(\frac{k}{\alpha} + \frac{1}{\mu}\right) \|f\|_{L^1(\Omega)},$$

es decir, la acotación de la sucesión $\{u_n\}$ en $H_0^1(\Omega)$. Esto implica que la solución u, la cual es el límite de $\{u_n\}$, pertenece a $H_0^1(\Omega)$. $\square$

Observación 2.1.7. Si se verifica (2.1.18) se puede probar que la sucesión aproximada u_n converge fuertemente a u en $H^1(\omega)$, para cada $\omega \subset\subset \Omega$. De hecho, gracias a la convergencia a.e. de ∇u_n a ∇u en Ω, es suficiente probar la equiintegrabilidad de $|\nabla u_n|^2$ en cada $\omega \subset\subset \Omega$. Para probarlo, tomamos un conjunto medible $E \subset \omega \subset\subset \Omega$, y observamos que, gracias a (2.1.25), podemos decir que para cualquier $k \geq \max\{s_0, 1\}$ se verifica

$$\begin{aligned} \int_E |\nabla u_n|^2 &= \int_E |\nabla T_k(u_n)|^2 + \int_E |\nabla G_k(u_n)|^2 \\ &\leq \int_E |\nabla T_k(u_n)|^2 + \frac{1}{\mu} \int_{\{u_n \geq k-1\}} f. \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

Por lo tanto, usando la acotación de u_n en $\mathcal{M}^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$ y la equiintegrabilidad de $|\nabla T_k(u_n)|^2$ en ω dada por el Lema 2.1.6, tenemos, gracias a (2.1.26), lo que queremos probar.

2.2. Existencia de solución para problemas con operadores más generales cuya parte principal no tiene forma de divergencia

Tratamos también los problemas descritos para operadores diferenciales más generales cuya parte principal no tiene forma de divergencia. En [8] probamos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1. *Supongamos que $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfacen (2.0.4), y que $b_i \in L^\infty(\Omega)$. Asumimos que $f(x)$ satisface (5) y pertenece a $L^q(\Omega)$ con $q > \frac{N}{2}$. Supongamos además que $g(x,s)$ satisface (1.3.3), (2.1.17) (con h verificando (2.0.2)). Entonces existe una solución $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ para (2.0.3). Además, $g(x,u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$.*

Realizamos un esquema de la prueba del Teorema 2.2.1 sin dar los detalles puesto que se siguen fácilmente adaptando las ideas de la prueba del Teorema 2.1.1.

Prueba del Teorema 2.2.1. Denotamos por $P(x)$ el campo vectorial cuya componente i^{th} es $P_i(x) = b_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}(x)$ $(i = 1, \ldots, N)$ y por $M(x)$ la traspuesta de la matriz $(a_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,N}$. Sea $g_n(x,s)$ dada por (2.1.6). Consideramos $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ la sucesión de soluciones del problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u_n) + P(x) \cdot \nabla u_n + g_n(x,u_n)|\nabla u_n|^2 = f & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

La prueba la divimos en varios pasos.

Paso 1. Estimación en $L^\infty(\Omega)$. Usando las ideas de [34], elegimos $v = e^{2\lambda G_k(u_n)} - 1$, con $\lambda >> 1$ como función test en la formulación débil de (2.2.1) para probar que la sucesión $\{u_n\}$ está acotada en $L^\infty(\Omega)$.

Paso 2. Estimación en $H_0^1(\Omega)$. Gracias a la anterior estimación en $L^\infty(\Omega)$, es fácil ver que $\{u_n\}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$, y por lo tanto u_n converge débilmente en $H_0^1(\Omega)$ a una función u en $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Además, argumentando como en la Subsección 1.3.1 de resultados previos, es fácil ver que u_n (para cada $n \in \mathbb{N}$) y u son continuas en Ω.

Paso 3. Estimación del *lower order term*. Eligiendo $\frac{T_\varepsilon(u_n)}{\varepsilon}$ como función test en (2.2.1) y tomando límites cuando ε tiende a cero, deducimos, para algún $C_1 > 0$, que

$$\int_\Omega g_n(x,u_n)|\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega |f| + C_1.$$

Paso 4. Cota uniforme inferior en conjuntos compactos para u_n. Observamos que u_n son supersoluciones de la ecuación

$$-\operatorname{div}(M(x)\nabla u) + P(x) \cdot \nabla u + h(u)|\nabla u|^2 = f \quad \text{en } \Omega. \tag{2.2.2}$$

Si, para $H(s)$ definida en (2.1.2) y $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, tomamos $e^{-\frac{H(u)}{\alpha}}\phi$ como función test en (2.2.2), vemos que $v_n = \psi(u_n)$ son subsoluciones de

$$-\operatorname{div}(M(x)\nabla v) + P(x) \cdot \nabla v + b(v)f(x) = 0 \quad \text{en } \Omega,$$

donde $b(s)$ ha sido definida en (2.1.4) y recordamos que satisface la condición de Keller-Osserman (véase (1.1.6)). Por lo tanto, por el Teorema 1.3.7 de los resultados previos, concluimos que para cada $\omega \subset\subset \Omega$, existe C_ω tal que $v_n = \psi(u_n) \leq C_\omega$ en ω. Por lo tanto, $u_n \geq c_\omega > 0$ en ω, con $c_\omega = \psi^{-1}(C_\omega)$.

Paso 5. Compacidad de la sucesión $\{u_n\}$ en $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Para $\varphi_\lambda(s)$ definida en (1.1.5) y $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, escogemos $\varphi_\lambda(u_n - u)\phi$ como función test en la formulación débil de (2.2.1) y notamos que las ideas del Teorema 2.1.1 funcionan puesto que el *nuevo término* que aparace en la ecuación no añade dificultades ya que es lineal respecto a ∇u. De este modo concluimos que, pasando a una subsucesión,

$$u_n \to u \quad \text{en } H^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Paso 6. Paso al límite. Por el Paso 5, pasamos al límite en la formulación débil de (2.2.1) para deducir que u es una solución de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) + P(x) \cdot \nabla u + g(x,u)|\nabla u|^2 = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como los coeficientes a_{ij} son Lipschitz continuos en Ω, vemos que u resuelve (2.0.3). Finalmente, por el Paso 3 concluimos que $g(x,u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$. $\square$

2.3. Existencia de *large solutions* para ecuaciones no lineales con dato localmente integrable

El Teorema 1.3.7 es una extensión a las ecuaciones casilineales de la estimación local a priori de Keller [58] y Osserman [79] (ver también [16, 73, 74, 92, 94] y las referencias contenidas) para operadores semilineales. Esta estimación a priori clásica ha sido la herramienta clave para probar la existencia de *large solution*, es decir, una solución u de la ecuación semilineal que verifica $u = +\infty$ sobre $\partial\Omega$ en el sentido que

$$\lim{}_{\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)\to 0} u(x) = +\infty.$$

De este modo, es natural preguntarse cuando es posible probar la existencia de una *large solution* para (1.3.9). Claramente, en este ámbito no lineal tenemos que especificar el significado con el que le dotamos a "infinito"sobre $\partial\Omega$, puesto que no tiene sentido punto a punto. Asumimos tal condición en un sentido débil, como una condición sobre la traza de la frontera de la truncadura de la solución. Específicamente, consideramos la siguiente ecuación

$$-\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + B(x,u) = F(x), \quad x \in \Omega, \tag{2.3.1}$$

donde $a(x,s,\xi)$ es una función de Carathéodory tal que para casi todo punto $x \in \Omega$, para todo $s \in \mathbb{R}$ y para todo $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, $\eta \not\equiv \xi$ se verifican

$$\exists \alpha > 0 : a(x,s,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{2.3.2}$$

$$\exists \beta > 0 : |a(x,s,\xi)| \leq \beta|\xi| \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{2.3.3}$$

y

$$(a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta))\cdot(\xi - \eta) > 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{2.3.4}$$

Definición 2.3.1. Una función finita $u(x)$ definida en casi todo punto verificando que $T_k(u) \in H^1(\Omega)$ para todo $k > 0$ es una *large solution distribucional* para (2.3.1) con $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, si:
i) $|a(x,u,\nabla u)| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $B(x,u) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$;
ii)

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega B(x,u)\varphi = \int_\Omega F\,\varphi, \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega);$$

iii) $\forall k > 0$, $k - T_k(u) \in H_0^1(\Omega)$.

Observación 2.3.2. En la definición anterior, iii) tiene el significado de "infinito sobre $\partial\Omega$". Mencionamos que esta condición de frontera explosiva ha sido introducida en [67], para una clase diferente de ecuaciones elípticas no lineales con términos "coercivos" que incluyen al gradiente.

Concluimos observando que aunque no esté explícitamente escrito en [65], todas las estimaciones necesarias para probar la existencia de *large solutions* para (2.3.1) han sido probadas y tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.3. *Supongamos que* $a(x,s,\varsigma)$ *y* $B(x,s)$ *verifican* (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4), (1.3.14) *y*

$$\sup_{|s|\le k}|B(x,s)|\in L^1(\Omega),\quad \forall k>0. \tag{2.3.5}$$

Asumimos también que $F\in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ *con* $F^-\in L^1(\Omega)$*. Entonces existe una* large solution *distribucional para* (2.3.1).

Demostración. Consideramos la siguiente sucesión de problemas

$$\begin{cases} -\text{div}\, a(x,u_n,\nabla u_n)+B(x,u_n)=F_n \quad \text{en}\ \ \Omega,\\ \qquad u_n-n\in H^1_0(\Omega), \end{cases}$$

donde $F_n=T_n(F)$. Como $B(x,s+n)s\ge 0$ para $|s|$ grande, la existencia de solución débil $u_n\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ es una consecuencia de [18] (Teorema 6.1), equivalentemente $u_n-n\in H^1_0(\Omega)$ y satisface

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla v+\int_\Omega B(x,u_n)v=\int_\Omega F_n v\,,\forall v\in H^1_0(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \tag{2.3.6}$$

Observamos que para cualquier $n\ge k$, $k-T_k(u_n)\in H^1_0(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, podemos elegir $v=k-T_k(u_n)$ como función test en (2.3.6) y obtenemos,

$$-\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla T_k(u_n)+\int_\Omega B(x,u_n)[k-T_k(u_n)]=\int_\Omega F_n[k-T_k(u_n)]\,.$$

Usando (2.3.2), y (1.3.10) y (2.3.5) tenemos:

$$\alpha\int_\Omega|\nabla T_k(u_n)|^2\le 2k\int_\Omega\sup_{|s|\le k}|B(x,s)|+2k\|F_n^-\|_{L^1(\Omega)}.$$

De este modo, para cada $k\in\mathbb{N}$, podemos extraer una subsucesión (no renombrada) de $\{T_k(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge débilmente en $H^1(\Omega)$ y, por el teorema de Rellich, fuertemente en $L^2(\Omega)$.

Ahora, consideramos cualquier conjunto $\omega\subset\subset\omega'\subset\subset\Omega$, una función *cut-off* $\eta(x)$ escogida como en (1.3.11) y $\xi=\sqrt{\varphi(\eta)}$. Argumentando como en (1.3.12), deducimos que $v=T_k(u_n\xi^2)$ es una función test admisible para (2.3.6). De este modo tenemos

$$\int_{A_k}a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla[u_n\xi^2]+\int_\Omega B(x,u_n)T_k(u_n\xi^2)\le k\|F\|_{L^1(\omega')}\,,$$

donde $A_k=\left\{x\in\Omega:|u_n|\xi^2\le k \text{ y } \xi(x)>0\right\}$, y así, usando (2.3.2) y (1.3.14), obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha\int_{A_k}|\nabla u_n|^2\xi^2+m_{\omega'}\int_{A_k}|b(u_n)|T_k(u_n\xi^2)\\ \le k\|F\|_{L^1(\omega')}+2\beta\int_{A_k}|\nabla u_n||\nabla\xi|\,u_n\xi\,.\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Young, (2.3.3) y el Lema 1.3.8 (con $\gamma=1$ y para cualquier $C>\frac{\alpha^2+4\beta^2}{8\alpha m_{\omega'}}\|\nabla\eta\|_{L^\infty(\omega')}$ fijado y teniendo en cuenta las Observaciones 1.3.11-2) deducimos que existe $c>0$ tal que

$$\int_\Omega|\nabla T_k(u_n\xi^2)|^2\le c(k+1).$$

Entonces, usando que $\xi = 1$ en ω, por los Lemas 4.1 y 4.2 de [18] se sigue que u_n y $|\nabla u_n|$ están acotadas respectivamente en $\mathcal{M}^{\frac{N}{N-2}}(\omega)$ y $\mathcal{M}^{\frac{N}{N-1}}(\omega)$, para cualquier $\omega \subset\subset \Omega$. Combinando esta información con la convergencia fuerte de $T_k(u_n)$ en $L^2(\Omega)$ deducimos que u_n es una sucesión de Cauchy en medida y así, pasando a subsucesiones (no renombradas), convergence a.e. $x \in \Omega$ a una función $u \in W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Esto, en particular, implica que

$$\lim_{n\to+\infty} k - T_k(u_n) = k - T_k(u) \quad \text{débilmente en } H^1_0(\Omega)\,,$$

es decir u verifica la condición de la frontera.

Por otro lado, probamos que el *lower order term* está acotado en $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; de hecho, si, para $\varepsilon > 0$, tomamos $v = \frac{1}{\varepsilon} T_\varepsilon(u_n)\xi$ como función test en (2.3.6) (como antes, tal función es admisible). De este modo, por (2.3.2), (2.3.3), y usando que algunos términos son positivos, tenemos que

$$\int_\Omega B(x,u_n)\frac{T_\varepsilon(u_n)}{\varepsilon}\xi \le \|F\|_{L^1(\omega')} + \beta\|\nabla\xi\|_{L^\infty(\omega')}\int_{\omega'}|\nabla u_n|\,.$$

Como el lado de la derecha está acotado ya que $\{|\nabla u_n|\}$ está acotado en $\mathcal{M}^{\frac{N}{N-1}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ y $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, si hacemos tender $\varepsilon \to 0$, deducimos por el lema de Fatou que existe $c_\omega > 0$ tal que

$$\int_\omega |B(x,u_n)| \le c_\omega.$$

Escogiendo $v = T_1(G_h(u_n\xi^2))$ como función test , donde $\xi^2 = \varphi(\eta)$ tenemos, usando (2.3.2), (2.3.3), (1.3.14) y (2.3.5),

$$\frac{\alpha}{2}\int_{h\le|u_n\xi^2|\le h+1}|\nabla u_n|^2\xi^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega B(x,u_n)T_1(G_h(u_n\xi^2))$$

$$\le \int_{\omega'\cap\{u_n\xi^2\ge h\}}|F_n| + \frac{2\beta^2}{\alpha}\|\nabla\eta\|^2_{L^\infty(\Omega)}\ \mathrm{meas}\{x\in\omega' : \xi^2|u_n|\ge h\}.$$

Por la compacidad fuerte de $\{F_n\}$ en $L^1(\omega')$ y la estimación local uniforme de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}^{\frac{N}{N-2}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, deducimos que

$$\lim_{h\to+\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\{x\in\omega:\,|u_n|\ge h\}}|B(x,u_n)| = 0.$$

Como consecuencia del teorema de Vitali deducimos que $\{|B(x,u_n)|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es fuertemente compacto en $L^1(\omega')$, donde $\omega' \subset\subset \Omega$ es arbitrario. Además, como el *lower order term* está acotado en $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, podemos aplicar el Lema 1 de [27] para probar que ∇u_n converge a ∇u a.e. en Ω. Esto, y la convergencia débil de u_n en $W^{1,q}(\omega')$, $\forall\omega' \subset\subset \Omega$, implican que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{en} \quad W^{1,q}(\omega), \quad \forall 1\le q<\frac{N}{N-1}, \quad \forall\omega\subset\subset\Omega,$$

y, gracias a (2.3.3), tenemos también que

$$a(x,u_n,\nabla u_n) \longrightarrow a(x,u,\nabla u) \quad \text{en} \quad L^1(\omega)^N, \quad \forall\omega\subset\subset\Omega. \tag{2.3.7}$$

Ahora podemos pasar al límite en la formulación distribucional: de hecho escogiendo cualquier $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ en (2.3.6) obtenemos

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\phi + \int_\Omega B(x,u_n)\phi = \int_\Omega F_n\phi\,.$$

Usando (2.3.7) deducimos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{supp}\,\phi} a(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla\phi = \int_{\mathrm{supp}\,\phi} a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\phi\,.$$

Más aún, por la convergencia fuerte de $\{B(x,u_n)\}$ y $\{F_n\}$ en $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, deducimos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{supp}\,\phi} F_n\phi = \int_{\mathrm{supp}\,\phi} F\phi$$

y

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{supp}\,\phi} B(x,u_n)\phi = \int_{\mathrm{supp}\,\phi} B(x,u)\phi$$

y esto concluye la prueba. □

2.4. No existencia de solución

Dedicamos esta sección al estudio de la no existencia de soluciones positivas para el problema (1.3.1) con dato f en $L^q(\Omega)$ para algún $q > \frac{N}{2}$, con $f \geq 0$ y $f \not\equiv 0$. Entre otros resultados, probamos que si $\lambda_1(f)$ denota el primer autovalor positivo del operador laplaciano $-\Delta$ con condiciones de Dirichlet en la frontera y peso f, entonces tenemos el siguiente resultado (probado en [8]).

Teorema 2.4.1. *Sea f en $L^q(\Omega)$, con $q > \frac{N}{2}$, tal que $f \geq 0$ y $f \not\equiv 0$, y asumimos* (1.3.2), (2.0.5), (2.0.6) *y* (2.0.7). *Si $\lambda_1(f) > \frac{\beta}{\alpha}$, entonces el problema* (1.3.1) *no tiene soluciones de energía finita.*

Demostración. Comenzamos observando que si la función $g(x,s)$ satisface la condición (2.0.5) con h verificando (2.0.6) y (2.0.7), entonces podemos cambiar h por una función más pequeña $\overline{h}$ la cual, además de verificar (2.0.6) y (2.0.7), también satisface $\overline{h}(s) = 0$ para cada $s > 1$. De hecho, si s_0 es el punto donde h alcanza su mínimo valor en $[\frac{1}{2},1]$, entonces es suficiente definir

$$\overline{h}(s) = \begin{cases} (h(s)-h(s_0))^+ & \text{si } s \in (0,s_0], \\ 0 & \text{si } s > s_0. \end{cases}$$

Consecuentemente, sin pérdida de generalidad, podemos asumir en lo sucesivo que la hipótesis (2.0.5) se verifica con h satisfaciendo (2.0.6), (2.0.7), y

$$h(s) = 0, \quad \forall s \geq 1. \tag{2.4.1}$$

Consideramos la función $G : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ dada por

$$G(s) = e^{\int_1^s \frac{h(t)}{\beta}dt} \qquad \text{para cada } s > 0,$$

donde β está dada por (1.3.2). Gracias a (2.0.6), la función G puede ser extendida continuamente a $[0,+\infty)$ con $G(0)=0$. Además, definimos la función $\sigma:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ con $\sigma(0)=0$ y

$$\sigma(s)=e^{\int_1^s \sqrt{h(t)}dt} \qquad \text{para cada } s>0.$$

(2.0.6) y (2.0.7), tenemos que $\sigma\in C^1([0,+\infty))$, $\sigma'(0)=h_0$ y $\sigma(s)=0$ si y sólo si $s=0$. Como consecuencia de (2.4.1), $\sigma(s)=1$ para cada $s>1$ y $\sigma(s)\leq 1$ para cada $s\geq 0$.

Necesitamos el siguiente lema técnico:

Lema 2.4.2. *Asumimos* (2.0.6) *y* (2.0.7). *Entonces la función*

$$\varphi(s)=\begin{cases} \dfrac{\displaystyle\int_0^s G(t)[\sigma'(t)]^2dt}{G(s)} & si\ s>0, \\ \\ 0 & si\ s=0, \end{cases} \tag{2.4.2}$$

es una función diferenciable con derivada continua en $[0,+\infty)$ *y que satisface la ecuación diferencial ordinaria*

$$\begin{cases} \varphi'(s)+\dfrac{h(s)}{\beta}\varphi(s)=[\sigma'(s)]^2, \quad en\ [0,+\infty), \\ \varphi(0)=0. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

Además, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\varphi(s)\leq\beta[\sigma(s)]^2, \quad \forall s>0. \tag{2.4.4}$$

Demostración. La primera parte de la prueba es trivial a excepción de comprobar que φ es diferenciable en cero y φ' es continua en cero. Para probarlo, notamos primero que φ es continua en cero. De hecho, como G es no-decreciente y $[\sigma']^2$ es continua en $[0,+\infty)$ tenemos

$$0\leq \lim_{s\to 0^+}\varphi(s) = \lim_{s\to 0^+}\frac{\displaystyle\int_0^s G(t)[\sigma'(t)]^2dt}{G(s)}\leq \lim_{s\to 0^+}\int_0^s[\sigma'(t)]^2dt=0.$$

Ahora observamos que, usando la regla de L'Hôpital, (2.0.6) y (2.0.7),

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= h_0^2-\lim_{s\to 0^+}\frac{h(s)\displaystyle\int_0^s G(t)\left[\sigma'(t)\right]^2dt}{\beta G(s)} \\
&= h_0^2-h_0^2\lim_{s\to 0^+}\frac{G(s)[\sigma'(s)]^2}{2\beta\sigma(s)\sigma'(s)G(s)+h(s)[\sigma(s)]^2G(s)} \\
&= h_0^2-h_0^2\lim_{s\to 0^+}\frac{1}{2\beta\frac{1}{\sqrt{h(s)}}+1}=h_0^2-h_0^2=0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto φ es diferenciable en cero y φ' es continua en cero.

Para probar la desigualdad (2.4.4), observamos que $[\sigma'(s)]^2 = [\sigma(s)]^2 h(s)$ implica que

$$\varphi(s) = \frac{\beta}{G(s)} \int_0^s G(t) \frac{h(t)}{\beta} [\sigma(t)]^2 \, dt.$$

Como

$$G(t) \frac{h(t)}{\beta} = \frac{d}{dt} G(t),$$

podemos integrar por partes para llegar a que (recordemos que $G(0) = \sigma(0) = 0$)

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{\beta}{G(s)} \left[G(t)\,[\sigma(t)]^2\right]_{t=0}^{t=s} - \frac{2\beta}{G(s)} \int_0^s G(t)\,\sigma(t)\,\sigma'(t)\,dt \\ &= \beta\,[\sigma(s)]^2 - \frac{2\beta}{G(s)} \int_0^s G(t)\,[\sigma(t)]^2 \sqrt{h(t)}\,dt \\ &\leq \beta\,[\sigma(s)]^2, \end{aligned}$$

ya que todas las funciones de la última integral son no negativas. □

Un vez probado este lema nos encontramos en disposición de completar la prueba del Teorema 2.4.1.

Completación de la demostración del Teorema 2.4.1. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ una solución positiva para (1.3.1) y sea $\varphi \in C^1([0,+\infty))$ la función dada por (2.4.2). Gracias al Teorema 1.1.2 $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, ya que $\varphi(0) = 0$ y además φ' está acotada, por (2.4.4) y puesto que $\sigma(s) \leq 1$, tenemos $\varphi(s) \leq \beta$. Por lo tanto, podemos tomar $v = \varphi(u)$ como función test en (1.3.4) para obtener, usando (2.0.5), que

$$\int_\Omega M(x,u)\nabla u \cdot \nabla u\, \varphi'(u) \; + \int_\Omega h(u)|\nabla u|^2 \varphi(u) \; \leq \int_\Omega f\,\varphi(u)\;.$$

De este modo, añadiendo $\displaystyle\frac{1}{\beta}\int_\Omega M(x,u)\nabla u \cdot \nabla u\, h(u)\varphi(u)$, deducimos de (1.3.2) y (2.4.3) que

$$\begin{aligned} \int_\Omega M(x,u)\nabla u \cdot \nabla u [\sigma'(u)]^2 \quad &\leq \quad \int_\Omega M(x,u)\nabla u \cdot \nabla u \left[\varphi'(u) + \frac{h(u)}{\beta}\varphi(u)\right] \\ &\qquad + \int_\Omega \left[I - \frac{M(x,u)}{\beta}\right] \nabla u \cdot \nabla u\, h(u)\varphi(u) \\ &\leq \quad \int_\Omega f\,\varphi(u)\;. \end{aligned}$$

Usando ahora (1.3.2), (2.4.4) y que $f \geq 0$, tenemos

$$\alpha \int_\Omega |\nabla\sigma(u)|^2 \; = \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 [\sigma'(u)]^2 \; \leq \int_\Omega f\,\varphi(u) \; \leq \beta \int_\Omega f\,[\sigma(u)]^2\;. \tag{2.4.5}$$

Por lo tanto, (véase [45]), ya que f pertenece a $L^q(\Omega)$ con $q > \frac{N}{2}$, y $f^+ \not\equiv 0$, el primer autovalor positivo $\lambda_1(f)$ del problema de Dirichlet de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\, f\, u & \text{en } \Omega, \\ \quad\;\; u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

verifica
$$\lambda_1(f)\int_\Omega f v^2 \le \int_\Omega |\nabla v|^2, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega),$$
y así deducimos de (2.4.5)
$$\alpha\int_\Omega |\nabla\sigma(u)|^2 \le \frac{\beta}{\lambda_1(f)}\int_\Omega |\nabla\sigma(u)|^2.$$
La hipótesis $\dfrac{\beta}{\alpha}<\lambda_1(f)$, implica entonces que
$$\int_\Omega |\nabla\sigma(u)|^2 = 0,$$
con lo cual, tenemos que
$$\sigma(u)=0 \quad \text{a.e. } x\in\Omega.$$
Por lo tanto, como $\sigma(s)=0$ si y sólo si $s=0$, deducimos que $u\equiv 0$, contradiciendo $u>0$ en Ω. Por consiguiente, no hay soluciones de (1.3.1). □

Observación 2.4.3. El Teorema 2.4.1 puede extenderse a operadores más generales. Concretamente, si $a(x,s,\xi)$ es una función de Carathéodory tal que
$$\exists\alpha>0 : a(x,s,\xi)\cdot\xi \ge \alpha|\xi|^2 \quad \text{a.e. } x\in\Omega,\ \forall s\in\mathbb{R},\ \forall\xi\in\mathbb{R}^N, \tag{2.4.6}$$
$$\exists\beta>0 : |a(x,s,\xi)| \le \beta|\xi| \quad \text{a.e. } x\in\Omega,\ \forall s\in\mathbb{R},\ \forall\xi\in\mathbb{R}^N, \tag{2.4.7}$$
$0\le f\in L^q(\Omega)$ con $q>\frac{N}{2}$ con $f\not\equiv 0$ y se verifican las hipótesis (2.0.5), (2.0.6) y (2.0.7), entonces el problema
$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a(x,u,\nabla u)) + g(x,u)|\nabla u|^2 = f & \text{en } \Omega,\\ u=0 & \text{en } \partial\Omega,\end{cases} \tag{2.4.8}$$
no tiene soluciones de energía finita si $\lambda_1(f)>\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Prueba de la observación. Sea $u\in H_0^1(\Omega)$ una solución positiva de (2.4.8) y consideramos $\varphi\in C^1([0,+\infty))$ dada por (2.4.2). Como $\varphi(0)=0$ podemos tomar $v=\varphi(u)$ como función test y obtenemos, usando (2.0.5), que
$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u\,\varphi'(u) + \int_\Omega h(u)|\nabla u|^2\varphi(u) \le \int_\Omega f(x)\varphi(u).$$
En particular, añadiendo $\dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u\, h(u)\varphi(u)$ tenemos que
$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u \underbrace{\left[\varphi'(u)+\frac{h(u)}{\beta}\varphi(u)\right]}_{\ge 0}$$
$$+\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - \frac{a(x,u,\nabla u)\nabla u}{\beta}\right] h(u)\varphi(u) \le \int_\Omega f(x)\varphi(u).$$

Usando ahora la ecuación (2.4.3) que verifica φ y que $\sigma(u) \in H_0^1(\Omega)$, además de (2.4.4), (2.4.6) y (2.4.7) llegamos a que

$$\alpha \int_\Omega |\nabla \sigma(u)|^2 = \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 [\sigma'(u)]^2 \le \int_\Omega f(x)\varphi(u) \le \beta \int_\Omega f(x)[\sigma(u)]^2.$$

De la caracterización variacional de $\lambda_1(f(x))$ deducimos que

$$\alpha\lambda_1(f(x)) \int_\Omega f(x)[\sigma(u)]^2 \le \beta \int_\Omega f(x)[\sigma(u)]^2,$$

lo cual junto a la desigualdad $\dfrac{\beta}{\alpha} < \lambda_1(f(x))$ implica que

$$\int_\Omega f(x)[\sigma(u)]^2 = 0,$$

o equivalentemente que ($f > 0$ en Ω)

$$\sigma(u) = 0, \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

Por lo tanto, $u \equiv 0$ lo cual contradice $u > 0$ en Ω. Así, concluimos la no existencia de solución de (1.3.1). $\square$

Observación 2.4.4. Sea $0 \le f \in L^q(\Omega)$ con $q > \frac{N}{2}$ y $f \not\equiv 0$. Asumimos (1.3.2) y que g satisface (2.0.5). Observamos que si $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución de (1.3.1) y $R > 0$, entonces $v = Ru$ es una solución de

$$\begin{cases} -\text{div}\left(M\left(x, \dfrac{v}{R}\right)\nabla v\right) + \dfrac{1}{R} g\left(x, \dfrac{v}{R}\right)|\nabla v|^2 = Rf & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

con

$$\frac{g\left(x, \frac{s}{R}\right)}{R} \ge h_R(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{R} h\left(\frac{s}{R}\right).$$

Por lo tanto, por el Teorema 2.4.1, y puesto que $\lambda_1(Rf) = \lambda_1(f)/R$, si $h_R(s)$ satisface las hipótesis (2.0.6) y (2.0.7), entonces una condición necesaria para la existencia de soluciones de energía finita de (1.3.1) es que $\lambda_1(f) \le R\beta/\alpha$.

Como consecuencia del Teorema 2.4.1 y de la Observación 2.4.4, obtenemos la no existencia de solución de (1.3.1) para ningún dato f si imponemos una adecuada condición a h.

Corolario 2.4.5. *Sea $0 \le f \in L^q(\Omega)$ con $q > \frac{N}{2}$ y $f \not\equiv 0$. Asumimos* (1.3.2) *y que g satisface* (2.0.5). *Si existe $R_0 > 0$ tal que la función $h_R(s) = \dfrac{1}{R} h\left(\dfrac{s}{R}\right)$ satisface* (2.0.6) *y* (2.0.7) *para todo $R \in (0, R_0)$, entonces* (1.3.1) *no tiene solución de energía finita.* $\square$

Una consecuencia del Teorema 2.4.1 es que el problema modelo (3) no tiene soluciones de energía finita si $\gamma \ge 2$.

Corolario 2.4.6. *Sea $0 \leq f \in L^q(\Omega)$ con $q > \frac{N}{2}$ y $f \not\equiv 0$. Supongamos que se verifica* (1.3.2) *y que para algunas constantes $s_0, \Lambda > 0$ y $\gamma \geq 2$ tenemos*

$$\frac{\Lambda}{s^\gamma} \leq g(x,s), \qquad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall s \in (0, s_0].$$

Si se verifica

(i) $\gamma > 2$,

o

(ii) $\gamma = 2$ *y* $\lambda_1(f) > \frac{\beta}{\Lambda\alpha}$,

entonces (1.3.1) *no tiene solución de energía finita.*

Prueba. Consideramos una función continua $h(s)$ tal que

$$h(s) = \begin{cases} \dfrac{\Lambda}{s^\gamma} & \text{si } 0 < s \leq \dfrac{s_0}{2}, \\ \leq \dfrac{\Lambda}{s^\gamma} & \text{si } \dfrac{s_0}{2} < s < s_0, \\ 0 & \text{si } s_0 \leq s. \end{cases}$$

Observando que $h_R(s) = \dfrac{\Lambda R^{\gamma-1}}{s^\gamma}$ para cada $s \in (0, \frac{s_0}{2})$, y usando que $\gamma \geq 2$, tenemos que $h_R(s)$ no es integrable en $(0, \frac{s_0}{2})$, es decir, satisface (2.0.6).

Además, si $\gamma > 2$, entonces $h_R(s)$ satisface (2.0.7) para cada $R > 0$, y así el Corolario 2.4.5 nos permite concluir la prueba en este caso.

Por otro lado, si asumimos que $\gamma = 2$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0^+} \sqrt{h_R(s)}\, e^{\int_1^s \sqrt{h_R(t)}dt} &= \lim_{s\to 0^+} \frac{\sqrt{\Lambda R}}{s}\, e^{\int_{s_0/2}^s \frac{\sqrt{\Lambda R}}{s}dt + \int_1^{s_0/2} \sqrt{h_R(t)}dt} \\ &= \lim_{s\to 0^+} C s^{\sqrt{\Lambda R}-1} = h_0 \geq 0 \iff R \geq \frac{1}{\Lambda}. \end{aligned}$$

En otras palabras, $h_R(s)$ satisface (2.0.7) si y sólo si $R \geq \frac{1}{\Lambda}$. Por lo tanto, la Observación 2.4.4 se deduce la no existencia de solución si $\lambda_1(f) > \frac{\beta}{\Lambda\alpha}$. $\square$

Combinando este resultado de no existencia y el Teorema 2.1.1 concluimos que, en el caso del problema modelo (3), tenemos existencia si $\gamma < 2$ y no existencia de solución si $\gamma \geq 2$. Además, si γ no está en este rango, probamos también lo que ocurre si aproximamos el problema (3) por una sucesión de problemas para los cuales tenemos existencia de solución.

Teorema 2.4.7. *El problema* (3) *tiene una solución de energía finita para todo dato $f \in L^q(\Omega)$ $(q > \frac{N}{2})$ satisfaciendo* (5) *si y sólo si $\gamma < 2$. Además, sea λ_1 el primer autovalor del laplaciano en la bola unitaria N-dimensional (es decir el primer cero positivo de la función de Bessel J_m con $m = N/2 - 1$), asumimos que $f \in L^\infty(\Omega)$, y o bien*

$$\gamma > 2 \quad \textit{o bien} \quad \gamma = 2 \text{ y } \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{\lambda_1}{diam(\Omega)^2}. \tag{2.4.9}$$

Entonces la sucesión $\{u_n\}$ de soluciones de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + \dfrac{|\nabla u_n|^2}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} = f & \textit{en } \Omega, \\ \qquad\qquad u_n = 0 & \textit{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

converge a 0 *en* $H_0^1(\Omega)$, *y la sucesión* $\frac{|\nabla u_n|^2}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}$ *converge a* f *en la topología débil-$*$ de las medidas.*

Prueba del Teorema 2.4.7. Notamos que si $\gamma < 2$, entonces el Teorema 2.1.5 garantiza la existencia de solución. Contrariamente, si $\gamma > 2$ o si $\gamma = 2$ y $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ es suficientemente grande, el Teorema 2.4.1 nos asegura la no existencia de solución para el problema (3).

Por otro lado, si se verifican $f \in L^\infty(\Omega)$ y (2.4.9), tenemos existencia y unicidad de solución u_n en $H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para

$$\begin{cases} -\Delta u_n + \dfrac{|\nabla u_n|^2}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} = f & \text{en } \Omega, \\ \qquad\qquad u_n = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4.10}$$

(con $\gamma \geq 2$) se sigue de los resultados [8] (existencia) y [13] (unicidad). Tomando u_n, $G_k(u_n)$, y $T_\varepsilon(u_n)/\varepsilon$ como funciones test y trabajando como en el Lema 2.1.4-1., es fácil ver que u_n está acotada en $H_0^1(\Omega)$ y en $L^\infty(\Omega)$, y que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \leq C.$$

Por lo tanto, pasando a subsucesiones, existe una medida de Radon no negativa y acotada ν tal que

$$\frac{|\nabla u_n|^2}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} \text{ converge a } \nu \text{ en la topología débil-}* \text{ de las medidas.}$$

Como u_n está acotada en $H_0^1(\Omega)$ entonces converge débilmente, pasando a a subsucesiones, a alguna función u en $H_0^1(\Omega)$, fuertemente en $L^2(\Omega)$, y en casi todo punto en Ω. Además, puesto que $f - \frac{|\nabla u_n|^2}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma}$ está acotada en $L^1(\Omega)$, gracias a Lema 1 en [26] (véase también) [31] tenemos que (pasando de nuevo a subsucesiones) ∇u_n converge a ∇u a.e. $x \in \Omega$. Entonces tenemos, usando el lema de Fatou, que $\dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}\chi_{\{u>0\}}$ pertenece a $L^1(\Omega)$, y que

$$\nu = \frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}\chi_{\{u>0\}} + \nu_0,$$

donde ν_0 es una medida de Radon no negativa y acotada en Ω. Por lo tanto, $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución de energía finita de

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}\chi_{\{u>0\}} = f - \nu_0 & \text{en } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notamos también que como u_{n+1} es una subsolución para el problema (2.4.10), podemos aplicar el principio de comparación de [13] y así, para cada $x \in \Omega$, tenemos

$$u_n(x) \geq u_{n+1}(x) \geq \ldots \geq u(x),$$

y de este modo podemos asumir que $u_n(x)$ converge a $u(x)$ para cada $x \in \Omega$. Aseguramos que $u \equiv 0$, y por lo tanto u_n converge a cero en $L^2(\Omega)$. Dividimos la prueba de este hecho en dos pasos:

Paso 1. El caso en el que Ω es una bola de radio $R > 0$, $\Omega = B_R$, y $f = T > 0$ es una constante.

Paso 2. El caso general.

Paso 1. Asumimos que $\Omega = B_R$ y $f = T > 0$ es una constante. En este caso, (2.4.9) quiere decir que, si $\gamma = 2$, entonces el primer autovalor $\lambda_1^{B_R}(T)$ del operador Laplaciano con peso T en B_R es mayor que uno, es decir, $\lambda_1^{B_R}(T) > 1$. Observamos primero que u es radialmente simétrica (y por lo tanto continua para $|x| \neq 0$). De hecho, si definimos

$$\psi_n(s) = \int_0^s e^{-H_n(t)}dt, \quad \text{donde} \quad H_n(t) = \frac{n^{\gamma-1}}{\gamma-1}\left[1-(1+nt)^{1-\gamma}\right]$$

y tomamos $v_n = \psi_n(u_n)$, es fácil ver que v_n es la única solución de

$$\begin{cases} -\Delta v_n = T\mathrm{e}^{-H_n(\psi_n^{-1}(v_n))} & \text{en } B_R \\ \qquad\qquad\quad v_n = 0 & \text{en } \partial B_R\,. \end{cases}$$

Como la no linealidad $\mathrm{e}^{-H_n(\psi_n^{-1}(s))}$ es C^1, podemos aplicar el resultado de Gidas, Ni y Nirenberg (véase [52]) para deducir que la sucesión v_n es radialmente simétrica (es decir, $v_n = v_n(r)$), monótona no-creciente con respecto a r y tal que $v_n'(0) = 0$. Como ψ_n y H_n son diferenciables y crecientes, las funciones u_n tienen las mismas propiedades que v_n. Pasando al límite respecto a n deducimos que u es radialmente simétrica y monótona no-creciente .

Argumentamos por contradicción asumiendo que u no es idénticamente cero. En este caso, usando que $u(r)$ es no-creciente en $(0,R)$,

$$r_1 = \inf\{0 < r \leq R : u(r) = 0\} > 0,$$

y entonces

$$u \geq c_\varepsilon := u(r_1 - \varepsilon) \quad \text{en } B_{r_1-\varepsilon}\,.$$

Por lo tanto, repitiendo la prueba del Teorema 2.1.1, probamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\nabla u_n|^2}{\left(u_n+\frac{1}{n}\right)^\gamma} = \frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} \quad \text{fuertemente en } L^1_{\mathrm{loc}}(B_{r_1}),$$

y así ν_0 es cero en B_{r_1} y, por la continuidad de u para $r \neq 0$, u es solución de

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} = T & \text{en } B_{r_1}, \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{en } \partial B_{r_1}, \end{cases}$$

y esto contradice el resultado del Teorema 2.4.1 (notamos que, si $\gamma = 2$, tenemos $\lambda_1^{B_{r_1}}(T) > \lambda_1^{B_R}(T) > 1$). Por lo tanto $u \equiv 0$.

Paso 2. Ω es un conjunto abierto y f es no-negativa y pertenece a $L^\infty(\Omega)$.

Por (2.4.9), podemos fijar $R > \operatorname{diam}\Omega$ con $\lambda_1 > \|f\|_\infty R^2$ y $\overline{\Omega} \subset B_R$ si $\gamma = 2$. Sea v_n la solución de

$$\begin{cases} -\Delta v_n + \dfrac{|\nabla v_n|^2}{\left(v_n + \frac{1}{n}\right)^\gamma} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{en } B_R \\ \qquad\qquad v_n = 0 & \text{en } \partial B_R. \end{cases}$$

Por la definición de $\operatorname{diam}\Omega$, tenemos $\overline{\Omega} \subset B_R$. Nuestro objetivo es probar que v_n es una supersolución para el problema (2.4.10). De hecho, sea $0 \leq \psi \in C_c^\infty(\Omega)$ y la usamos como función test en la noción de solución de v_n. De este modo

$$\int_{B_R} \nabla v_n \cdot \nabla \psi + \int_{B_R} \frac{|\nabla v_n|^2}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma} \psi = \int_{B_R} \|f\|_{L^\infty(B_R)} \psi,$$

y como el soporte de ψ está contenido en Ω deducimos que

$$\int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla \psi + \int_\Omega \frac{|\nabla v_n|^2}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma} \psi = \int_\Omega \|f\|_{L^\infty(B_R)} \psi \geq \int_\Omega f \psi$$

para cada ψ no-negativa en $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (por un argumento de densidad). Usando de nuevo el principio de comparación de [13], $u_n \leq v_n$ en Ω. La elección de R permite asegurar en el caso $\gamma = 2$ que

$$\lambda_1^{B_R}(\|f\|_\infty) = \frac{\lambda_1}{R^2 \|f\|_\infty} > 1, \tag{2.4.11}$$

podemos aplicar el Paso 1, y así v_n tiende a 0 fuertemente en $L^2(B_R)$, lo cual implica que u_n tiende a cero en $L^2(\Omega)$ y probamos la convergencia a cero de u_n.

Finalmente, concluimos la prueba tomando u_n como función test en (2.4.10) y gracias a que el término cuadrático es no-negativo deducimos que la convergencia a cero es fuerte en $H_0^1(\Omega)$; usando este hecho en la formulación débil de (2.4.10) tenemos que $\nu = f$, como queríamos probar.

□

Observación 2.4.8. Notamos que la condición impuesta en (2.4.9) para f cuando $\gamma = 2$, esto es $\|f\|_\infty \leq \dfrac{\lambda_1}{(\operatorname{diam}\Omega)^2}$, puede mejorarse ligeramente. Concretamente, si consideramos el radio de Chebyshev $R(\Omega)$ de $\overline{\Omega}$, es decir, la más grande de las cotas inferiores de los radios de todas las bolas que contienen a $\overline{\Omega}$, entonces el resultado del Teorema 2.4.7 con $\gamma = 2$ se verifica (véase (2.4.11)) si

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{\lambda_1}{R(\Omega)^2}.$$

2.5. El papel de la elipticidad en algunos resultados de existencia

Los resultados anteriormente presentados requerían que f verificará la condición (5). Recientemente, en [24] se ha obtenido la existencia de solución suponiendo únicamente que $f \geq 0$ y $f \not\equiv 0$. En concreto, se ha probado la existencia de soluciones positivas de un problema de Dirichlet con *lower order term* singular y cuadrático

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x,u)\nabla u) + \dfrac{Q(x,u)\nabla u \nabla u}{u} = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en} \, \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5.1}$$

donde Ω es un subconjunto abierto, acotado de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$, el dato $0 \leq f \in L^m(\Omega)$ con $m \geq \frac{2N}{N+2}$, $f \not\equiv 0$ en Ω. $M(x,s)$ y $Q(x,s)$ son matrices cuyos coeficientes son de Carathéodory. Además, $M(x,s)$ verifica (1.3.2) y $Q(x,s)$ es simétrica verificando para algunas constantes $a, b > 0$ lo siguiente

$$a|\xi|^2 \leq Q(x,s)\xi\xi \leq b|\xi|^2. \tag{2.5.2}$$

y $\alpha > 2b$.

Analizamos el papel del parámetro $\alpha > 0$ siguiendo las ideas de la Sección 5.1 de [24]. Para ello, consideramos el problema modelo (6) y la función

$$j(s) = \begin{cases} \alpha \dfrac{s^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha - 1}, & \alpha \neq 1, \\ \log(s), & \alpha = 1. \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $w(x) = j(u(x))$, se prueba que u satisface la ecuación diferencial (6) si y solamente si w es solución de $-\Delta w = f(x) g_\alpha(w)$ en Ω, donde

$$g_\alpha(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{|\alpha - 1|}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} |w|^{\frac{1}{1-\alpha}}, & \alpha \neq 1, \\ e^{-w}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Observamos que en el caso $\alpha > 1$, la condición en la frontera que aparece en (6) significa que $w = 0$ sobre $\partial\Omega$. Por lo tanto (6) es equivalente al problema semilineal

$$\begin{cases} w > 0 \quad \text{en } \Omega, \\ -\Delta w = f(x) \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{(\alpha - 1)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \dfrac{1}{w^{\frac{1}{\alpha-1}}}, \quad \text{en } \Omega, \\ w = 0, \qquad \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

el cual ha sido estudiado al menos con f acotada (véase [40, 63]). Remarcamos explícitamente que bajo la hipótesis $\alpha \geq 2$ (observamos que $\alpha > 2$ es fundamental para el resultado de existencia en [24]) el problema anterior corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange del funcional coercivo

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{(\alpha - 1)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_\Omega f(x) v^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}, \quad f(x) \geq 0.$$

Sin embargo, si $1 < \alpha < 2$ el funcional $J(v)$ no está bien definido en $H_0^1(\Omega)$.
Queremos señalar también que si $\alpha < 1$, formalmente, la condición en la frontera se reduce a $\frac{\alpha}{\alpha-1} u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(x) = w(x) \to -\infty$ cuando $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \to 0$. Esto explica que la naturaleza del problema (6) cambia dependiendo de si $\alpha > 1$ o $\alpha \leq 1$.

Presentamos un resultado que mejora ligeramente el de [24] al debilitar la hipótesis $\alpha > 2b$. En efecto, extendemos la existencia al caso $\alpha > b$. Específicamente, probamos en [75] (véase también [76]) el siguiente teorema.

Teorema 2.5.1. *Sea $0 \leq f \in L^m(\Omega)$ con $m \geq \frac{2N}{N+2}$ y $f \not\equiv 0$ en Ω y asumimos que se verifican* (1.3.2), (2.5.2) *y que $\alpha > b$. Entonces existe $u \in H_0^1(\Omega)$, con el lower order term $\dfrac{Q(x,u)\nabla u \nabla u}{u} \in L^1(\Omega)$, solución débil del problema de Dirichlet singular-cuadrático* (2.5.1).

Demostración. La idea para probarlo consiste en aproximar el problema (2.5.1) por una sucesión de problemas no singulares (P_n).

Consideramos los problemas

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(M(x,u_n)\nabla u_n) + \dfrac{u_n}{\left(u_n + \frac{1}{n}\right)^2} Q(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n = f_n & \text{en } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5.3}$$

donde $f_n = T_n(f)$. Puesto que $f \in L^m(\Omega)$ con $m \geq \frac{2N}{N+2}$, entonces la sucesión f_n converge a f en $L^m(\Omega)$. Además, notamos que $0 \leq f_n \leq f$. Aplicando [69] tenemos la existencia de solución u_n de (2.5.3) que pertenece a $H_0^1(\Omega)$ y a $L^\infty(\Omega)$ (véase [91]).

La principal dificultad radica en establecer el principio del máximo fuerte uniforme cuando únicamente se requiere que $\alpha > b$. Mientras que en [24] se prueba que el límite de u_n es estrictamente positivo en Ω usando que $\alpha > 2b$, por nuestra parte, probamos la convergencia de las soluciones aproximadas a la solución de (2.5.1).

Probamos a continuación una estimación uniforme inferior en abiertos compactamente contenidos en Ω para las soluciones aproximadas.

Proposición 2.5.2. *Sea $0 \leq f \in L^m(\Omega)$ con $m \geq \frac{2N}{N+2}$, $f \not\equiv 0$ y asumimos que se verifican* (1.3.2) *y* (2.5.2). *Si u_n es una solución de* (2.5.3), *entonces para cada $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ existe una constante $c_{\Omega_0} > 0$ tal que*

$$u_n(x) \geq c_{\Omega_0}, \quad a.e. \quad x \in \Omega_0.$$

Demostración. Sea $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$, tomamos (como en [24]) $\dfrac{\phi}{(u_n + \frac{1}{n})^{\frac{b}{\alpha}}}$ como función test en (2.5.3) para obtener

$$\begin{aligned} &\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla\phi \frac{1}{(u_n + \frac{1}{n})^{\frac{b}{\alpha}}} - \int_\Omega f_n \frac{\phi}{(u_n + \frac{1}{n})^{\frac{b}{\alpha}}} \\ &= \frac{b}{\alpha}\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n \frac{\phi}{(u_n + \frac{1}{n})^{\frac{b}{\alpha}+1}} - \int_\Omega \frac{u_n Q(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\frac{b}{\alpha}+2}}\phi. \end{aligned}$$

Usando (1.3.2) y (2.5.2) llegamos a que

$$\frac{b}{\alpha}\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n \frac{\phi}{(u_n + \frac{1}{n})^{\frac{b}{\alpha}+1}} - \int_\Omega \frac{u_n Q(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n}{(u_n + \frac{1}{n})^{\frac{b}{\alpha}+2}}\phi \geq 0$$

y consecuentemente

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla\phi \frac{1}{(u_n+\frac{1}{n})^{\frac{b}{\alpha}}} \geq \int_\Omega f_n \frac{\phi}{(u_n+\frac{1}{n})^{\frac{b}{\alpha}}}. \tag{2.5.4}$$

Fijamos $L>0$ tal que la medida de Lebesgue del conjunto de nivel $\{x\in\Omega : u(x)=L\}$ es cero. (Observamos que los valores de L para los cuales esta propiedad es falsa es como mucho numerable). De este modo, gracias a la elección L, y como $u_n(x)\to u(x)$ a.e. $x\in\Omega$, se sigue que $\chi_{\{u_n\leq L\}}\to\chi_{\{u\leq L\}}$ a.e. $x\in\Omega$. Por lo tanto, tenemos

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla\phi \frac{1}{(u_n+\frac{1}{n})^{\frac{b}{\alpha}}} \geq \int_\Omega \chi_{\{u_n\leq L\}} f_1 \frac{\phi}{(L+1)^{\frac{b}{\alpha}}}.$$

Consideramos también $P_n(s)=\int_0^s \frac{1}{(t+\frac{1}{n})^{\frac{b}{\alpha}}}dt$ y $w_n(x)=P_n(u_n(x))$. Así, podemos reescribir la desigualdad anterior en la forma

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla w_n \nabla\phi \geq \int_\Omega \chi_{\{u_n\leq L\}} f_1 \frac{\phi}{(L+1)^{\frac{b}{\alpha}}}.$$

El principio de comparación en $H_0^1(\Omega)$ (véase [55]) implica que $w_n(x)\geq z_n(x)$, donde $z_n\in H_0^1(\Omega)$ es la solución débil acotada de

$$-\mathrm{div}\,(M(x,u_n)\nabla z_n)=\frac{\chi_{\{u_n\leq L\}}}{(L+1)^{\frac{b}{\alpha}}}f_1.$$

Es fácil ver que z_n converge fuertemente en $H_0^1(\Omega)$ a la solución z de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(M(x,u)\nabla z)=\dfrac{\chi_{\{u\leq L\}}}{(L+1)^{\frac{b}{\alpha}}}f_1 \\ z\in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

El principio del máximo fuerte para soluciones débiles (véase [54]) implica que $z>0$ en Ω (recordemos que $f\geq 0$ y $f\not\equiv 0$ en Ω y por lo tanto también f_1). Usando el Teorema 1.3.6 tenemos que z_n es equi-continua en Ω.

En consecuencia, puesto que la sucesión $\{z_n\}$ es equi-acotada y equi-continua, por el teorema de Ascoli-Arzelà, $C^\lambda(\overline{\Omega_0})$ está embebido compactamente en $C(\overline{\Omega_0})$ para cada $\Omega_0\subset\subset\Omega$, deducimos que la sucesión $\{z_n\}$ tiene una subsucesión (la notamos por ella misma) que converge uniformemente a alguna z en $C(\overline{\Omega_0})$. Gracias a que z es continua y $z>0$ en Ω, dado $\Omega_0\subset\subset\Omega$ existe $l_{\Omega_0}>0$ tal que $z\geq l_{\Omega_0}>0$ para $x\in\Omega_0$. Esto fuerza claramente a que

$$w_n\geq\frac{1}{2}l_{\Omega_0},\quad \forall x\in\Omega_0,\quad \forall n>>0.$$

Observamos que la hipótesis $\alpha>b$ implica que $P(s)=\int_0^s\frac{1}{t^{\frac{b}{\alpha}}}dt$ está bien definida. Como las funciones reales $P_n(s)$ y $P(s)$ son estrictamente crecientes y $P_n<P$, entonces $P_n^{-1}>P^{-1}$ y obtenemos que

$$u_n\geq P_n^{-1}\left(\frac{1}{2}l_{\Omega_0}\right)>P^{-1}\left(\frac{1}{2}l_{\Omega_0}\right):=c_{\Omega_0}>0,\quad \forall\Omega_0\subset\subset\Omega.$$

$\square$

Completación de la demostración del Teorema 2.5.1. Una vez probado el principio del máximo fuerte uniforme la prueba del Teorema 2.5.1 basta seguir las ideas de la prueba del Teorema 2.1.1 □

2.5.1. *Lower order term* más general sin condición de signo

En este apartado extendemos el Teorema 2.5.1 al caso no linealidades g más generales. Estudiamos el problema de Dirichlet casilineal más general

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(M(x,u)\nabla u) + g(x,u)Q(x,u)\nabla u\nabla u = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en}\,\partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5.5}$$

Es usual imponer a g la condición de signo $g(x,s)s \geq 0$ para todo $s > 0$. Observamos que el Teorema 2.5.1 cubre el caso $g(x,s) = \dfrac{1}{s}$, el cual verifica la condición de signo. Nuestro objetivo es poder abarcar el estudio de no linealidades g que puedan ser negativas o cambiar de signo. En concreto, combinando las ideas de la prueba del Teorema 2.5.1 con las de [6], probamos la existencia de solución suponiendo que, a grosso modo, g está entre una hipérbola positiva y una hipérbola negativa cerca de 0. Así, asumimos que la función $g(x,s)$ verifica (2.0.1) donde $h : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ es una función tal que $sh(s)$ es creciente y

$$\lim_{s\to 0^+} \int_0^s \mathrm{e}^{-\frac{b}{\alpha}\int_1^t h(r)dr} dt < +\infty \tag{2.5.6}$$

y $\mu > 0$. Puesto que $sh(s)$ podría ser cualquier función no-decreciente, remarcamos que no estamos imponiendo ninguna condición sobre el crecimiento de $g(x,s)$ cuando s tiende a infinito. Notamos que (2.5.6) es una condición sobre el comportamiento de h cerca de 0. Consecuentemente, si tomamos $h(s) = \dfrac{1}{s^\gamma}$, entonces (2.5.6) se verifica si y sólo si $\gamma < 1$ o si $\gamma = 1$ y $\alpha > b$. Por lo tanto, si asumimos que $g(x,s)$ está acotada en $\Omega \times [\varepsilon, M]$ para cada $M > \varepsilon > 0$, entonces un ejemplo simple en el cual (2.0.1) y (2.5.6) se satisfacen es, que se verifique la condición

$$-\frac{\mu}{s} \leq g(x,s) \leq \frac{R}{s}, \quad \text{para } s \text{ en un entorno de } 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega,$$

donde $R > 0$ y $\alpha > Rb$. De este modo, probamos en [75] la siguiente extensión del Teorema 2.1.1.

Teorema 2.5.3. *Sea* $0 \leq f \in L^m(\Omega)$ *para algún* $m \geq \frac{2N}{N+2}$ *con* $f \not\equiv 0$ *en* Ω *y asumimos que se satisfacen* (1.3.2)*,* (2.0.1)*,* (2.5.2) *y* (2.5.6)*. Si* $\alpha > a\mu$*, entonces existe una solución* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de* (2.5.5)*, es decir, u satisface* $u > 0$ *en* Ω*,* $g(x,u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$*, y*

$$\int_\Omega M(x,u)\nabla u\nabla\phi + \int_\Omega g(x,u)Q(x,u)\nabla u\nabla u\phi = \int_\Omega f\phi,$$

para todo $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Observación 2.5.4. *Observamos que mejoramos el resultado en [6] por los siguientes motivos:*

1) No asumimos que f verifique (5).

2) Consideramos una clase más general de operadores (no necesariamente lineal como en [6]) en la parte principal de la ecuación y tratamos con lower order terms *más generales (en [6] se asume que Q sea la matriz identidad).*

Prueba del Teorema 2.5.3. Aproximamos la función g por funciones continuas en 0. Concretamente, por las funciones aproximadas $g_n\colon \Omega\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ($n\in\mathbb{N}$) definidas de la siguiente manera

$$g_n(x,s)=\begin{cases} 0 & \text{si } s\le 0,\\[2ex] \dfrac{s^2 g(x,s)}{\left(s+\frac{1}{n}\right)^2} & \text{si } 0<s. \end{cases}$$

Observamos que $g_n(x,s)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x,s)$, y, por (2.0.1), tenemos que

$$g_n(x,s)s+\mu\ge 0 \quad \text{a.e. } x\in\Omega, \quad \forall s\in\mathbb{R}, \tag{2.5.7}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$.

Consideramos

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(M(x,u_n)\nabla u_n)+g_n(x,u_n)Q(x,u_n)\nabla u_n\nabla u_n &= f_n \ \text{ en } \Omega,\\ u_n\in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Si $f_n=T_n(f)$, usando [69], existe una solución $u_n\in H_0^1(\Omega)$ de (2.5.8) que pertenece a $L^\infty(\Omega)$ (véase [91]).

Tomamos u_n como función test en (2.5.8) para concluir que

$$\int_\Omega M(x,u_n)|\nabla u_n|^2+\int_\Omega g_n(x,u_n)Q(x,u_n)\nabla u_n\nabla u_n u_n=\int_\Omega f_n u_n.$$

Por lo tanto, por (1.3.2) y (2.5.2) obtenemos

$$\alpha\int_\Omega|\nabla u_n|^2+\int_\Omega a g_n(x,u_n)|\nabla u_n|^2u_n\le\int_\Omega f_n u_n,$$

o, equivalentemente,

$$(\alpha-a\mu)\int_\Omega|\nabla u_n|^2+\int_\Omega\left[a g_n(x,u_n)|\nabla u_n|^2u_n+a\mu|\nabla u_n|^2\right]\le\int_\Omega f_n u_n.$$

Observando que, por (2.5.7), $sg_n(x,s)|\xi|^2+\mu|\xi|^2\ge 0$, a.e. $x\in\Omega$, para cada $s\in\mathbb{R}$, $\xi\in\mathbb{R}^N$ tenemos que

$$asg_n(x,s)|\xi|^2+a\mu|\xi|^2\ge 0. \tag{2.5.9}$$

Por (2.5.9) y la definición de f_n tenemos que

$$(\alpha-a\mu)\,\|u_n\|^2\le\int_\Omega f_n u_n\le\|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}\|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)}\le S\|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)}\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Puesto que $\alpha > a\mu$ obtenemos que la sucesión u_n está acotada en $H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, pasando a una subsucesión, tenemos que $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$.

Por otro lado, tomando $u_n^- \equiv \text{mín}\{u_n, 0\}$ como función test en (2.5.8) y usando las mismas ideas de antes (gracias a que $\alpha > a\mu$) obtenemos que $u_n \geq 0$.

Teniendo en cuenta (2.0.1) podemos proceder de forma similar a la prueba de la Proposición 2.5.2 para mostrar que u_n están uniformemente lejos de cero en cada subconjunto compacto de Ω. De hecho, sea $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi \geq 0$. Tomamos $\mathrm{e}^{-\frac{b}{\alpha}\int_1^{u_n+\frac{1}{n}} h(r)dr}\phi$ como función test en (2.5.8), para obtener

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla\phi \mathrm{e}^{-\frac{b}{\alpha}\int_1^{u_n+\frac{1}{n}} h(r)dr} - \int_\Omega f_n \mathrm{e}^{-\frac{b}{\alpha}\int_1^{u_n+\frac{1}{n}} h(r)dr}\phi \\
&\quad = \frac{b}{\alpha}\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n h\left(u_n + \frac{1}{n}\right) \mathrm{e}^{-\frac{b}{\alpha}\int_1^{u_n+\frac{1}{n}} h(r)dr}\phi \\
&\qquad - \int_\Omega g_n(x,u_n) Q(x,u_n)\nabla u_n \nabla u_n \mathrm{e}^{-\frac{b}{\alpha}\int_1^{u_n+\frac{1}{n}} h(r)dr}\phi.
\end{aligned}$$

Usando (1.3.2) y (2.0.1), tenemos

$$\int_\Omega M(x,u_n)\nabla u_n \nabla\phi \mathrm{e}^{-\frac{b}{\alpha}\int_1^{u_n+\frac{1}{n}} h(r)dr} \geq \int_\Omega f_n \mathrm{e}^{-\frac{b}{\alpha}\int_1^{u_n+\frac{1}{n}} h(r)dr}\phi,$$

lo cual es (2.5.4) con $h(s) = \dfrac{1}{s}$.

De (2.5.6), deducimos que la función $P(s) = \int_0^s \mathrm{e}^{-\frac{b}{\alpha}\int_1^t h(r)dr}dt$ está bien definida. Consecuentemente, si fijamos $L > 0$ tal que $\chi_{\{u_n\}\leq L} \to \chi_{\{u \leq L\}}$ a.e. $x \in \Omega$, podemos seguir los argumentos de la Proposición 2.5.2 para concluir que u_n están uniformemente lejos de cero en cada subconjunto compacto de Ω. Para concluir la prueba, basta mostrar que existe una subsucesión de $\{u_n\}$ que converge a una solución positiva de (2.5.5), lo cual se realiza de manera similar a los Pasos 1, 2 y 3 de la prueba del Teorema 2.1.1.

$\square$

Capítulo 3

Singularidades en el caso parabólico. Comportamiento asintótico de las soluciones.

En este capítulo estudiamos, entre otras cuestiones, la existencia de solución para diferentes problemas evolutivos (véase [77]). En primer lugar, los problemas

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(M(x,t,u)\nabla u) + g(x,t,u)|\nabla u|^2 = f(x,t) & \text{en } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{3.0.1}$$

donde $M(x,t,s) \stackrel{\text{def}}{=} (m_{ij}(x,t,s))$, $i,j = 1,\ldots,N$ es una matriz simétrica cuyos coeficientes $m_{ij} : Q \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones de Carathéodory tal que existen constantes $0 < \alpha \leq \beta$ verificando

$$\begin{aligned} &\alpha|\xi|^2 \leq M(x,t,s)\xi\cdot\xi, \\ &|M(x,t,s)| \leq \beta, \quad \forall (s,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \text{ a.e. } x \in \Omega, \quad \forall t \in (0,T). \end{aligned} \tag{3.0.2}$$

$f \in L^r(0,T;L^q(\Omega))$ con $\dfrac{1}{r} + \dfrac{2}{Nq} < 1$, $q \geq 1$, $r > 1$ satisface

$$m_\omega(f) = \text{ess inf}\,\{f(x,t) : x \in \omega,\ t \in (0,T)\} > 0, \quad \forall \omega \subset\subset \Omega. \tag{3.0.3}$$

Además, consideramos un dato inicial positivo $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ verificando (3.0.3).

Respecto al *lower order term*, asumimos que la función $g(x,t,s)$ satisface para algún $\mu > 0$ que

$$-\frac{\mu}{s} \leq g(x,t,s) \leq h(s), \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall s > 0, \quad \forall t \in (0,T) \tag{3.0.4}$$

donde $h : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ es una función continua no negativa verificando (2.0.2). Observamos que g puede ser singular en cero y cambiar de signo.

Especificamos, que por simplicidad, nos centramos en el caso que el dato f esté en el espacio $L^r(0,T;L^q(\Omega))$ con $\dfrac{1}{r}+\dfrac{2}{Nq}<1$, $q\geq 1$, $r>1$ y $u_0\in L^\infty(\Omega)$ sea una función no negativa. De hecho, las ideas principales de las pruebas se podrían extender y tomar datos más generales, en concreto $f\in L^1(Q)$ satisfaciendo (3.0.3). Este caso se puede tratar usando argumentos de aproximación y compacidad (ver por ejemplo [8, 25]). Sin embargo, estos argumentos nos llevarían a tratar con soluciones de energía finita. Preferimos evitar introducir demasiadas pruebas técnicas para centrarnos en la verdadera dificultad del problema la cual es la presencia del *término singular* $g(x,t,u)|\nabla u|^2$ en un problema de Cauchy *homogéneo*.

Una solución de (3.0.1) es una función $u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap C([0,T];L^1(\Omega))$ tal que $u>0$ a.e. en Q, $g(x,t,u)|\nabla u|^2$ pertenece a $L^1(Q)$ y $u(x,0)=u_0$ a.e. en Ω el cual satisface

$$-\int_\Omega u_0\varphi(0)-\int_0^T\langle\varphi_t,u\rangle+\int_Q M(x,t,u)\nabla u\nabla\varphi+\int_Q g(x,t,u)|\nabla u|^2\varphi=\int_Q f\varphi,$$

para cualquier $\varphi\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(Q)$ con $\varphi_t\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ y $\varphi(T)=0$.

El otro tipo de problemas que estudiamos es

$$\begin{cases} u_t-\operatorname{div}(M(x,t,u)\nabla u)+g(x,t,u)=f(x,t) & \text{en } Q,\\ u(x,0)=u_0(x) & \text{en } \Omega,\\ u(x,t)=0 & \text{en } \partial\Omega\times(0,T), \end{cases} \tag{3.0.5}$$

donde Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$ ($N\geq 3$), $T>0$, $M(x,t,s)$ es una matriz que verifica (3.0.2). Consideramos una función no negativa $f\in L^1(\Omega\times(0,T))$ y, para $\kappa>0$, $g:Q\times[0,\kappa)\longrightarrow\mathbb{R}^+$ es una función de Carathéodory verificando

$$h(s)\leq g(x,t,s)\leq\rho(x,t)\delta(s),\quad\forall s\in[0,\kappa),\ \text{a.e. } x\in\Omega,\quad\forall t\in(0,T) \tag{3.0.6}$$

donde $0\leq\rho\in L^1(\Omega\times(0,T))$, $\delta(s),h(s):[0,\kappa)\longrightarrow\mathbb{R}^+$ son funciones reales crecientes y continuas tal que $h(0)=0$, $\lim_{s\to\kappa^-}h(s)=+\infty$.

Observamos que el término no lineal g tiene una asíntota en κ. Decimos que una solución de (3.0.5) es una función no negativa $u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap C([0,T];L^1(\Omega))$, tal que $u<\kappa$ a.e. en $\partial\Omega\times(0,T)$, $g(x,t,u)$ pertenece a $L^1(Q)$ y $u(x,0)=u_0<\kappa$ la cual satisface

$$-\int_\Omega u_0\varphi(0)-\int_0^T\langle\varphi_t,u\rangle+\int_Q M(x,t,u)\nabla u\nabla\varphi+\int_Q g(x,t,u)\varphi=\int_Q f(x,t)\varphi,$$

para cualquier $\varphi\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(Q)$ con $\varphi_t\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ y $\varphi(T)=0$.

Observación 3.0.5. *Observamos que en ambas definiciones de solución hemos impuesto la condición técnica $\varphi(T)=0$. Un argumento de densidad nos permite mostrar que, de hecho, si modificamos un poco la definición, podemos tomar funciones test que no se anulan en T. Concretamente, tenemos que sustituir las integrales que involucran la derivada en el tiempo de la función test*

$$-\int_\Omega u_0\varphi(0)-\int_0^T\langle\varphi_t,u\rangle,$$

por

$$\int_\Omega u(T)\varphi(T) - \int_\Omega u_0\varphi(0) - \int_0^T \langle \varphi_t, u\rangle .$$

Notamos, que como $u \in C([0,T],L^1(\Omega))$, todos los términos de la expresión anterior están bien definidos. Usaremos este hecho para la prueba de la existencia según nos convenga.

La prueba de nuestro resultado de existencia y regularidad se basa en un argumento de aproximación y compacidad donde la clave será una estimación inferior local uniforme de la sucesión de soluciones aproximadas. Además, probamos un principio de comparación que será esencial para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones. La idea básica para probar el principio de comparación es tomar una función test (véase [13]) que permite establecer una desigualdad donde no aparece el término del gradiente cuadrático. Para el comportamiento asintótico de las soluciones cuando t tiende a infinito usamos las técnicas de [80].

Organizamos el capítulo de la siguiente manera: en la Sección 3.1. probamos el Teorema 3.1.1 y la prueba del Teorema 3.2.1 la realizamos en la Sección 3.2. Dedicamos la Sección 3.3. a un resultado de comparación para el problema (3.0.1). Además, establecemos un resultado de unicidad para dicho problema y exponemos la idea de como se realiza el principio de comparación para el problema (3.0.5) así como de la unicidad. En la Sección 3.4. probamos la estabilidad de las soluciones del problema (3.0.1) a la solución estacionaria del problema y readaptamos este resultado para obtener el resultado de estabilidad para el problema (3.0.5).

3.1. Existencia de solución para problemas casilineales con gradiente cuadrático singular

El propósito de esta sección es demostrar nuestro resultado respecto a la existencia y regularidad de solución para el problema (3.0.1). Nuestro resultado es el siguiente.

Teorema 3.1.1. *Sea $f \in L^r(0,T;L^q(\Omega))$ con $\frac{1}{r}+\frac{2}{Nq}<1$, $q\geq 1$, $r>1$ satisfaciendo* (3.0.3)*, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ verificando* (3.0.3)*, y asumimos* (3.0.2), (3.0.4) *y* (2.0.2)*. Si $\alpha > \mu$ entonces el problema* (3.0.1) *admite una solución en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(Q)$.*

Demostración. La idea para probarlo consiste en aproximar (3.0.1) por una sucesión de problemas que caen dentro de los resultados de [72] y ver que sus soluciones u_n convergen a una solución positiva de (3.0.1). Definimos la función de Carathéodory g_n en Q por

$$g_n(x,t,s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0, \\ n^2 s^2 T_n(g(x,t,s)) & \text{si } 0 < s < \frac{1}{n}, \\ T_n(g(x,t,s)) & \text{si } \frac{1}{n} \leq s. \end{cases}$$

Por (3.0.4), tenemos que

$$g_n(x,t,s)s + \mu \geq 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall t \in (0,T), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+, \tag{3.1.1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto,

$$sg_n(x,t,s)\frac{|\xi|^2}{1+\frac{1}{n}|\xi|^2} + \mu|\xi|^2 \geq 0, \tag{3.1.2}$$

a.e. $x \in \Omega$, para cada $t \in (0,T)$, $s \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Por el Teorema 3.1 de [72] (véase también el Teorema 2.1 en [71]) existe una solución $u_n \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ del problema aproximado

$$\begin{cases} (u_n)_t - \text{div}\,(M(x,t,u_n)\nabla u_n) + g_n(x,t,u_n)\dfrac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} = f(x,t) & \text{en } Q, \\ u_n(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \\ u_n(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{3.1.3}$$

con $(u_n)_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Además, existe $d > 0$ (independiente de n) tal que $\|u_n\|_{L^\infty(Q)} \leq d$ para cada $n \in \mathbb{N}$ (véase [15]).

Probamos estimaciones a priori de la sucesión de soluciones $\{u_n\}$ en los espacios $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Tomando $\varphi = u_n$ como función test en (3.1.3) y usando (3.0.2) se sigue que

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, u_n\rangle + (\alpha-\mu)\int_Q |\nabla u_n|^2 + \int_Q g_n(x,t,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}u_n + \mu|\nabla u_n|^2 \leq \int_Q fu_n$$

$$\leq \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\|u_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.$$

Puesto que

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, u_n\rangle = \frac{1}{2}\int_Q \frac{d}{dt}u_n^2 = \frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(T) - \frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(0) \tag{3.1.4}$$

y usando la desigualdad de Young obtenemos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(T) + \frac{\alpha-\mu}{2}\int_Q |\nabla u_n|^2 + \int_Q g_n(x,t,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}u_n + \mu|\nabla u_n|^2$$

$$\leq C_{\alpha,\mu}\|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Notamos que, como $\alpha > \mu$ y usando (3.1.2) tenemos que

- $\{u_n\}$ está acotada en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ (en particular, pasando a una subsucesión, $u_n \rightharpoonup u$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$).
- $g_n(x,t,u_n)\dfrac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}u_n$ está acotada en $L^1(Q)$.

Tomando también $u_n^- \equiv \text{mín}\{u_n, 0\}$ como función test en (3.1.3) y usando de nuevo (3.0.2), (3.1.2) y (3.1.4) obtenemos que

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} u_n^2(T) - \frac{1}{2}\int_{\Omega}(u_0^-)^2 + (\alpha-\mu)\int_Q |\nabla u_n^-|^2 \leq 0,$$

y, gracias a que los dos primeros términos son positivos (recordamos que $u_0 > 0$) tenemos que

$$(\alpha-\mu)\int_Q |\nabla u_n^-|^2 \leq 0.$$

Ya que $\alpha > \mu$, deducimos que $u_n \geq 0$ a.e. en Ω.

Aún más, probamos que $u_n > 0$ en Q. De hecho, si la constante $C_n > 0$ es tal que $g_n(x,t,s) \leq C_n s$, para $s \in [0,d]$, u_n satisface

$$\begin{aligned}(u_n)_t - \mathrm{div}\,(M(x,t,u_n)\nabla u_n) + nC_n u_n \quad &\geq \quad (u_n)_t - \mathrm{div}\,(M(x,t,u_n)\nabla u_n) \\ &\quad\; + g_n(x,t,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2} \\ &= \quad f,\end{aligned}$$

en el sentido de las distribuciones y como f es no negativa y no idénticamente cero, por el principio del máximo fuerte (véase [14]) deducimos que $u_n > 0$ en Q.

La prueba la acabaremos probando los siguientes pasos:

Paso 1. Las soluciones del problema aproximado están uniformemente lejos de cero en cada subconjunto compacto $\omega \times (0,T)$ de Q con $\omega \subset\subset \Omega$.

Paso 2. Convergencia fuerte de las soluciones aproximadas en $L^2(0,T;H^1(\omega))$.

Paso 3. Paso al límite en (3.1.3).

Paso 1. Para $s > 0$, definimos la función no-decreciente

$$H(s) = \int_1^s \widetilde{h}(t)dt = \int_1^s h(t)dt + \log s^{\alpha},$$

donde $\widetilde{h}(s) = h(s) + \dfrac{\alpha}{s}$, y consideramos la función no-creciente

$$\psi(s) = \int_s^1 \mathrm{e}^{-\frac{H(t)}{\alpha}}\,dt,$$

definida por $H(s)$. Ahora, realizamos el cambio de variable $v_n := \psi(u_n)$.

Observamos que está bien definido ya que $\lim_{s\to 0^+}\psi(s) = +\infty$ y se verifica que $\lim_{s\to+\infty}\psi(s) = \psi_\infty \in [-\infty, 0)$.

Mostramos ahora que u_n está acotada inferiormente lejos de cero (con la cota dependiendo posiblemente de n) en cada subconjunto abierto $\omega \times (0,T)$ de Q con ω compactamente embebido en Ω. De hecho, u_n es continua (ver [44, 59]) y, como hemos probado antes, estrictamente positiva en Q.

Ahora, por el cambio de variable, tenemos que

$$\nabla v_n = -\mathrm{e}^{-\frac{H(u_n)}{\alpha}}\nabla u_n \in L^2(0,T;L^2(\omega)), \quad \forall \omega \subset\subset \Omega,$$

y de este modo $v_n \in L^2(0,T;H^1(\omega))$ para cada $\omega \subset\subset \Omega$.

Si $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\Omega)$, podemos tomar entonces $e^{-\frac{H(u_n)}{\alpha}}\phi$ como función test en (3.1.3) para deducir de la desigualdad $h(s) \leq \widetilde{h}(s)$ y de (3.0.4), que

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, e^{-\frac{H(u_n)}{\alpha}}\phi\rangle - \int_Q M(x,t,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla u_n \frac{\widetilde{h}(u_n)}{\alpha} e^{-\frac{H(u_n)}{\alpha}}\phi$$

$$+ \int_Q M(x,t,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla\phi\, e^{-\frac{H(u_n)}{\alpha}} + \int_Q \widetilde{h}(u_n)|\nabla u_n|^2 e^{-\frac{H(u_n)}{\alpha}}\phi$$

$$\geq \int_Q f e^{-\frac{H(u_n)}{\alpha}}\phi.$$

Aplicando (3.0.2) junto a la definición de ψ, obtenemos que

$$\begin{aligned} -\int_0^T \langle \psi(u_n)_t, \phi\rangle - \int_Q M(x,t,u_n)\nabla\psi(u_n)\cdot\nabla\phi &\geq \int_Q f e^{-\frac{H(u_n)}{\alpha}}\phi \\ &\geq \int_Q \left(e^{-\frac{H(u_n)}{\alpha}} - 1\right) f\phi. \end{aligned}$$

Llamamos $\widetilde{M}(x,t,s) = M(x,t,\psi^{-1}(s))$ y $b(s) = e^{-\frac{H(s)}{\alpha}} - 1$ para cada $s \in (\psi_\infty, +\infty)$. Así, deducimos que v_n es una subsolución de

$$z_t - \operatorname{div}(\widetilde{M}(x,t,z)\nabla z) + f(x,t)\, b(z) = 0, \quad \text{en } Q.$$

Podemos ver en la prueba de la Proposición 2.1.3 de la Subsección 2.1.1, que $b(s)$ verifica la condición de Keller-Osserman gracias a (3.0.4) y (2.0.2). Como f satisface (3.0.3) y u_0 verifica (3.0.3), podemos aplicar el Lema 3.12 en [66] a la ecuación anterior para obtener que existe $C_{\omega,T} > 0$ tal que

$$v_n \leq C_{\omega,T}, \quad \forall x \in \omega \text{ y } \forall t \in (0,T).$$

Por lo tanto, obtenemos que existe $c_{\omega,T} > 0$ (independiente de n) tal que

$$u_n \geq \psi(C_0) = c_{\omega,T}, \quad \text{en } \omega \times (0,T).$$

Paso 2. Convergencia local fuerte de las soluciones aproximadas. De (3.1.3) obtenemos que la sucesión $\{(u_n)_t\}$ está acotada en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^1(\omega \times (0,T))$. Usando los argumentos de compacidad de Aubin-Simon (véase de nuevo el Corolario 4 en [89]) tenemos que

$$u_n \to u \text{ en } L^2(\omega \times (0,T)).$$

Ahora, probamos que para cada $\omega \subset\subset \Omega$,

$$u_n \to u \quad \text{en } L^2(0,T;H^1(\omega)). \tag{3.1.5}$$

De (3.1.1) y el Paso 1 podemos considerar $R_{\omega,T} = \text{máx}\{h(s) : c_{\omega,T} \leq s \leq d\}$. Tomamos $\varphi_\lambda(s) = se^{\lambda s^2}$ con $\lambda > \frac{R_{\omega,T}^2}{\alpha^2}$. Ahora usamos la regularización en el tiempo de las funciones u que pertenecen a $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tal y como hemos definido en (1.2.2) y que hemos notado por u_ν.

Para $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\Omega)$ probamos que

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi \rangle \geq \varepsilon(\nu, n). \tag{3.1.6}$$

De hecho, si denotamos por $\vartheta(s) = \int_0^s \varphi_\lambda(r)dr$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle (u_n)_t, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi \rangle = \int_0^T \langle (u_n - u_\nu)_t, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi \rangle + \int_0^T \langle (u_\nu)_t, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi \rangle \\
&= \int_Q \frac{d}{dt}\vartheta(u_n - u_\nu)\phi + \int_0^T \langle (u_\nu)_t, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi \rangle \\
&= \int_\Omega \vartheta(u_n - u_\nu)(T)\phi - \int_\Omega \vartheta(u_n - u_\nu)(0)\phi + \int_0^T \langle (u_\nu)_t, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi \rangle \\
&\geq \int_0^T \langle (u_\nu)_t, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi \rangle \ .
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Por otro lado, tenemos, gracias a (1.2.3) (véase [61]), que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle (u_\nu)_t, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi \rangle &= \nu \int_Q (u - u_\nu)\varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi \\
&= \nu \int_Q (u - u_\nu)\varphi_\lambda(u - u_\nu)\phi + \varepsilon(\nu, n)
\end{aligned}$$

ya que para $n \to +\infty$, $\varphi_\lambda(u_n - u_\nu)$ converge a $\varphi_\lambda(u - u_\nu)$ débil-$*$ en $L^\infty(Q)$ y el otro término es positivo ya que la función del integrando es positiva. Por lo tanto, deducimos que

$$\int_0^T \langle (u_\nu)_t, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi \rangle \geq \varepsilon(\nu, n),$$

y usando esta desigualdad junto a (3.1.7), obtenemos (3.1.6).

Ahora, usando (3.1.6) y $\varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi$ como función test en (3.1.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_Q M(x,t,u_n)\nabla u_n \nabla(u_n - u_\nu)\varphi'_\lambda(u_n - u_\nu)\phi + \int_Q M(x,t,u_n)\nabla u_n \nabla\phi\, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu) \\
&+ \int_Q g_n(x,t,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1 + \frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi \leq \int_Q f\, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi - \varepsilon(\nu, n).
\end{aligned}$$

Además, escogiendo $\omega \subset\subset \Omega$ con supp $\phi \subset \omega$ y como $u_n \to u$ débilmente en el espacio $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y a.e. en Ω y para cada $t \in (0,T)$, deducimos que $\varphi_\lambda(u_n - u_\nu)$ converge débil-$*$ en $L^\infty(Q)$ a $\varphi_\lambda(u - u_\nu)$, por lo tanto, por el teorema de Egorov

$$\int_Q f\, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu)\phi - \int_Q M(x,t,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla\phi\, \varphi_\lambda(u_n - u_\nu) = \varepsilon(\nu, n).$$

Gracias a la definición de $R_{\omega,T}$ podemos asegurar que

$$\begin{aligned}
&\int_Q g_n(x,t,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi_\lambda(u_n-u_\nu)\phi \\
\geq &\int_{\omega\times(0,T)} g_n(x,t,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi_\lambda(u_n-u_\nu)\phi \\
&\geq -R_{\omega,T}\int_Q |\nabla u_n|^2|\varphi_\lambda(u_n-u_\nu)|\phi\,.
\end{aligned}$$

De este modo

$$\int_Q M(x,t,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla(u_n-u_\nu)\varphi'_\lambda(u_n-u_\nu)\phi - R_{\omega,T}\int_Q|\nabla u_n|^2|\varphi_\lambda(u_n-u_\nu)|\phi\leq\varepsilon(\nu,n).$$

Añadiendo

$$-\int_Q M(x,t,u_n)\nabla u\cdot\nabla(u_n-u_\nu)\varphi'_\lambda(u_n-u_\nu)\phi=\varepsilon(\nu,n)$$

a ambos lados de la desigualdad anterior y como sabemos que

$$\begin{aligned}
\int_Q|\nabla u_n|^2|\varphi_\lambda(u_n-u_\nu)|\phi &\leq 2\int_Q|\nabla(u_n-u_\nu)|^2|\varphi_\lambda(u_n-u_\nu)|\phi \\
+2\int_Q|\nabla u|^2|\varphi_\lambda(u_n-u_\nu)|\phi &= 2\int_Q|\nabla(u_n-u_\nu)|^2|\varphi_\lambda(u_n-u_\nu)|\phi+\varepsilon(\nu,n),
\end{aligned}$$

encontramos, usando (3.0.2) la siguiente desigualdad

$$\int_Q|\nabla(u_n-u_\nu)|^2\Big[\alpha\varphi'_\lambda(u_n-u_\nu)-2R_{\omega,T}|\varphi_\lambda(u_n-u_\nu)|\Big]\phi\leq\varepsilon(\nu,n).$$

Como $\lambda>\dfrac{R^2_{\omega,T}}{\alpha^2}$, se verifica que $\alpha\varphi'_\lambda(s)-2R_{\omega,T}|\varphi_\lambda(s)|\geq\dfrac{\alpha}{2}$ para cada $s\in\mathbb{R}$ y deducimos (3.1.5).

Paso 3. Procedemos a mostrar que el límite u de las soluciones aproximadas u_n es una solución de (3.0.1). Recordamos que u_n satisface

$$\int_0^T\langle(u_n)_t,\varphi\rangle+\int_Q M(x,t,u_n)\nabla u_n\nabla\varphi+\int_Q g_n(x,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\varphi=\int_Q f\varphi,$$

para cualquier $\varphi\in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\cap L^\infty(Q)$ con $\varphi_t\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ y $\varphi(T)=0$.

Procedemos ahora a pasar al límite en el problema aproximado. Seguimos las ideas de [23]. Usando la integración por partes y la convergencia débil de u_n a u en $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ deducimos que, para cualquier $\varphi\in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\cap L^\infty(Q)$ con $\varphi_t\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ y $\varphi(T)=0$,

$$\int_0^T\langle(u_n)_t,\varphi\rangle=-\int_\Omega u_0\varphi(0)-\int_0^T\langle\varphi_t,u_n\rangle\longrightarrow-\int_\Omega u_0\varphi(0)-\int_0^T\langle\varphi_t,u\rangle.$$

Por otro lado, la convergencia débil de u_n a u en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, la convergencia a.e. en Q y la convergencia débil-$*$ en $L^\infty(Q)$ de $M(x,t,u_n)$ a $M(x,t,u)$ implica que

$$\int_Q M(x,t,u_n)\nabla u_n\cdot\nabla\varphi \to \int_Q M(x,t,u)\nabla u\cdot\nabla\varphi.$$

Para acabar la prueba del Teorema 3.1.1 nos falta probar que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_Q g_n(x,t,u_n)\frac{|\nabla u_n|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^2}\phi = \int_Q g(x,t,u)|\nabla u|^2\phi, \quad \forall\phi\in C_c^\infty(Q).$$

Del Paso 1, deducimos que existe $c_{\omega,T}>0$ tal que las soluciones aproximadas verifican que $u_n(x)\geq c_{\omega,T}>0$, a.e. $x\in\omega\equiv\operatorname{supp}\varphi$. De este modo, concluimos que para alguna $c>0$ tenemos $|g_n(x,t,u_n(x))|\leq c$, a.e. $x\in\omega$ y para todo $t\in(0,T)$. De (3.1.5) deducimos que existe $\overline{h}_\omega\in L^2(\omega)$ tal que $|\nabla u_n|\leq\overline{h}_\omega$ y ∇u_n converge a ∇u a.e. en ω y para todo $t\in(0,T)$. Por lo tanto,

$$|g_n(x,t,u_n(x))|\frac{|\nabla u_n(x)|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n(x)|^2}\leq c\overline{h}^2_{\Omega_0}(x) \quad \text{a.e. } x\in\omega, \quad \forall t\in(0,T).$$

Además, por la definición de la función g_n, para $n>1/c_{\omega,T}$ sabemos que se verifica $g_n(x,t,u_n(x))=T_n\left(g(x,t,u_n(x))\right)$ y de este modo

$$g_n(x,t,u_n(x))\frac{|\nabla u_n(x)|^2}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n(x)|^2}\longrightarrow g(x,t,u(x))|\nabla u(x)|^2 \quad \text{a.e. } x\in\omega, \quad \forall t\in(0,T).$$

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obenemos que u satisface

$$-\int_\Omega u_0\varphi(0)-\int_0^T\langle\varphi_t,u\rangle+\int_Q M(x,t,u)\nabla u\nabla\varphi+\int_Q g(x,t,u)|\nabla u|^2\varphi=\int_Q f\varphi,$$

para cualquier $\varphi\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(Q)$ con $\varphi_t\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ y $\varphi(T)=0$.

Veamos que $g(x,t,u)|\nabla u|^2\in L^1(Q)$. Para $s>0$ y $\varepsilon>0$, tomamos $T_{s+\varepsilon}(G_s(u_n))$ como función test en (3.1.3). Usando que algunos términos son positivos llegamos a que

$$\int_Q g(x,t,u_n(x,t))|\nabla u_n(x,t)|^2T_{s+\varepsilon}(G_s(u_n))\leq\int_Q f+\int_Q u_0.$$

Notamos que, aplicando el lema de Fatou, deducimos que

$$\int_Q g(x,t,u)|\nabla u|^2\leq\int_Q f+\int_Q u_0.$$

Finalmente observamos que, de la ecuación podemos deducir que u_t pertenece al espacio $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))+L^1(Q)$, y así gracias a un resultado de [81], tenemos que $u\in C([0,T];L^1(\Omega))$, y por lo tanto se alcanza el dato inicial (ya que para cada t_n que converge a 0 se tiene que $u(t_n)$ converge a $u(0)$) y queda probado el Teorema 3.1.1.

□

Observación 3.1.2. *Podríamos considerar datos más generales, a saber u_0 una función no negativa tal que*

$$\varsigma(x)=\int_{u_0}^1 e^{-\frac{H(t)}{\alpha}}dt\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

3.2. Existencia de solución para problemas semilineales con asíntota positiva

Dedicamos esta sección a la prueba del siguiente resultado de existencia.

Teorema 3.2.1. *Sea $f \in L^1(Q)$ no negativa, asumimos que M satisface* (3.0.2) *y g verifica* (3.0.6)*, entonces el problema* (3.0.5) *admite una solución en* $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Notamos que, la principal dificultad a la hora de obtener el resultado es la prueba de la compacidad fuerte de los *lower order terms* aproximados en $L^1(Q)$.

Demostración del Teorema 3.2.1. Dividimos la prueba en dos pasos.

Paso 1. Probamos el Teorema 3.2.1 para un dato $f \in L^\infty(Q)$ y $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} < \kappa$. Adaptamos las ideas de [23] para pasar al límite en el problema aproximado.

Paso 2. Por un argumento de aproximación, usamos el Paso 1 para probar el Teorema 3.2.1. A este tipo de prueba la llamaremos de *doble* aproximación.

Paso 1. Definimos $g_n(x,t,s) = T_n(g(x,t,s))$. Consideramos el siguiente problema aproximado

$$\begin{cases} (u_n)_t - \operatorname{div}(M(x,t,u_n)\nabla u_n) + g_n(x,t,u_n) = f(x,t) & \text{en } Q, \\ u_n(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \\ u_n(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases}$$

Por [72] existe una solución $u_n \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ del problema anterior y $(u_n)_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Además, gracias a [15] existe $l > 0$ (independiente de n) tal que $\|u_n\|_{L^\infty(Q)} \le l$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, probamos que u_n están acotadas a priori en ambos espacios $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ y $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Para ello, usamos $\varphi = u_n$ como función test en el problema aproximado, y se sigue que

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, u_n \rangle + \int_Q M(x,t,u_n)|\nabla u_n|^2 + \int_Q g_n(x,t,u_n)u_n = \int_Q f u_n.$$

Usando (3.0.2), (3.1.4), la acotación de u_n y la desigualdad de Young obtenemos que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_n^2(T) + \alpha \int_Q |\nabla u_n|^2 + \int_Q g_n(x,t,u_n)u_n \le l \int_Q f + \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Esto implica que $\{u_n\}$ está acotada en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ (en particular, pasando a una subsucesión, $u_n \rightharpoonup u$ en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$) y en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Además, la sucesión $g_n(x,t,u_n)u_n$ está acotada en $L^1(Q)$.

Notamos que, como $(u_n)_t$ está uniformemente acotada en $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^1(Q)$, entonces podemos usar los argumentos clásicos de compacidad de Aubin-Simon (ver Corolario 4 en [89]) para deducir la convergencia en casi todo punto de u_n a u.

Consideremos $\eta \equiv \max\left\{h^{-1}(\|f\|_{L^\infty(Q)}), \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\right\} < \kappa$ y $\theta(s) = \int_0^s (r-\eta)^+\,dr$. Como $u_0 < \kappa$, obtenemos que

$$\int_0^T \left\langle (u_n)_t, (u_n-\eta)^+ \right\rangle = \int_Q \frac{d}{dt}\theta(u_n) = \int_\Omega \theta(u_n(T)) - \int_\Omega \theta(u(0)) \geq -\int_\Omega \theta(u_0) = 0,$$

y usando $\varphi = (u_n-\eta)^+$ como función test en el problema aproximado, (3.0.2) y (3.0.6) deducimos que

$$\int_Q [T_n(h(u_n)) - f(x,t)]\,(u_n-\eta)^+ \leq \int_Q [g_n(x,t,u_n) - f(x,t)]\,(u_n-\eta)^+ \leq 0,$$

es decir

$$0 \geq \int_{\{n>h(u_n)\geq h(\eta)\}} [h(u_n) - f(x,t)]\,(u_n-\eta)^+ + \int_{\{h(u_n)\geq n\geq h(\eta)\}} [n - f(x,t)]\,(u_n-\eta)^+ .$$

Observando que claramente el lado de la derecha de la desigualdad es no negativo tenemos que

$$0 \leq u_n \leq \eta.$$

Y en particular, gracias a la desigualdad anterior y a la convergencia a.e. en Q tenemos que

$$0 \leq u \leq \eta.$$

Procedemos ahora a pasar al límite en el problema aproximado. La convergencia de los dos primeros términos se deduce como en la sección anterior. Ahora probamos la equiintegrabilidad de la sucesión $\{g_n(x,t,u_n)\}$. Para cualquier subconjunto medible E de Q, tenemos

$$\begin{aligned}\int_E g_n(x,t,u_n(x,t)) = \int_{E\cap\{u_n(x,t)<\eta\}} g_n(x,t,u_n(x,t)) &\leq \int_{E\cap\{u_n(x,t)<\eta\}} g(x,t,u_n(x,t)) \\ &\leq \delta(\eta)\int_E \rho(x,t).\end{aligned}$$

Y así

$$\lim_{\text{meas}(E)\to 0}\int_E g_n(x,t,u_n(x)) = 0.$$

La equiintegrabilidad de $g_n(x,t,u_n(x,t))$ que hemos probado anteriormente y la convergencia a.e. a $g(x,t,u(x,t))$ implican que

$$g_n(x,t,u_n) \to g(x,t,u) \quad \text{en } L^1(Q).$$

De este modo, podemos pasar al límite en la sucesión de los problemas aproximados para obtener que u es una solución de (3.0.5) con $f \in L^\infty(Q)$ y $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} < \kappa$.

Paso 2. Consideramos $f_n = T_n(f)$, y las soluciones del problema aproximado

$$\begin{cases} (u_n)_t - \operatorname{div}(M(x,t,u_n)\nabla u_n) + g(x,t,u_n) = f_n(x,t) & \text{en } Q, \\ u_n(x,0) = T_{\kappa-\frac{1}{n}}(u_0(x)) & \text{en } \Omega, \\ u_n(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega\times(0,T), \end{cases}$$

que existe gracias al paso anterior. También tenemos que

$$0 \leq u_n \leq \eta_n = \text{máx}\left\{h^{-1}(\|f_n\|_{L^\infty(Q)}), \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\right\} < \kappa.$$

Procediendo como en el paso anterior tenemos que

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, u_n\rangle + \alpha \int_Q |\nabla u_n|^2 + \int_Q g(x,t,u_n)u_n \leq \int_Q f_n u_n$$

y por lo tanto obtenemos las estimaciones en $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, en $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ y que $g_n(x,t,u_n)u_n$ está acotado en $L^1(Q)$.

Si, para $s > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que $s+\varepsilon < \kappa$, tomamos $T_{s+\varepsilon}(G_s(u_n))$ como función test en el problema aproximado. Usando que $0 \leq u_n \leq \eta_n$ y que algunos términos son positivos, deducimos que para todo $s < \kappa$ se verifica

$$\int\limits_Q g(x,t,u_n(x,t))T_{s+\varepsilon}(G_s(u_n(x,t))) \leq \int\limits_{\{s\leq u_n(x,t)<\kappa\}} f_n(s+\varepsilon) + \int\limits_{\{s\leq u_0<\kappa\}} u_0(s+\varepsilon).$$

Gracias a la condición de signo de g podemos aplicar el lema de Fatou para obtener, tomando límites cuando ε tiende a cero, que

$$\int\limits_{\{s\leq u_n(x,t)\}} g(x,t,u_n(x,t)) \leq \int\limits_{\{s\leq u_n(x,t)\}} f_n + \int\limits_{\{s\leq u_0\}} u_0, \quad \forall s < \kappa.$$

Como $f_n \leq f$, se sigue que

$$\int\limits_{\{s\leq u_n(x,t)\}} g(x,t,u_n(x,t)) \leq \int\limits_{\{s\leq u_n(x,t)\}} f + \int\limits_{\{s\leq u_0\}} u_0, \quad \forall s < \kappa. \tag{3.2.1}$$

Por lo tanto, para cualquier subconjunto medible E de Q, tenemos

$$\begin{aligned}\int\limits_E g(x,t,u_n(x,t)) &= \int\limits_{E\cap\{0\leq u_n(x,t)<s\}} g(x,t,u_n(x,t)) + \int\limits_{E\cap\{s\leq u_n(x,t)\}} g(x,t,u_n(x,t)) \\ &\leq \int\limits_{\{s\leq u_n(x,t)\}} f + \int\limits_{\{s\leq u_0\}} u_0 + \delta(s)\int\limits_E \rho(x,t), \quad \forall s<\kappa. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Por otro lado, de (3.0.6), puesto que $g(x,t,u_n(x,t))u_n(x,t)$ está acotado en $L^1(Q)$, tenemos

$$h(s)s \int\limits_{\{s\leq u_n(x,t)\}} dx \leq \int\limits_{\{s\leq u_n(x,t)\}} h(u_n(x,t))u_n(x,t) \leq \int\limits_{\{s\leq u_n(x,t)\}} g(x,t,u_n(x,t))u_n(x,t)$$

$$\leq \int\limits_Q g(x,t,u_n(x,t))u_n(x,t) \leq L.$$

Por lo tanto, usando que $\lim\limits_{s\to\kappa^-} h(s)s = +\infty$, deducimos que

$$\lim_{s\to\kappa} \text{meas}\{(x,t) : s \leq u_n(x,t)\} = 0.$$

Como $f \in L^1(Q)$ y $u_0 < \kappa$, se sigue que, para cualquier $\varepsilon > 0$ fijado, existe $0 < s_0 < \kappa$ tal que

$$\int_{\{s_0 \le u_n(x,t) < \kappa\}} f < \varepsilon \quad \text{y} \quad \int_{\{s_0 < u_0 < \kappa\}} u_0 < \varepsilon.$$

Por la continuidad absoluta de la integral, concluimos de (3.2.2) que

$$\lim_{\text{meas}(E)\to 0} \int_E g(x,t,u_n(x,t)) \le \varepsilon.$$

De este modo, hemos probado que $\{g(x,t,u_n)\}$ es equiintegrable. Por lo tanto, por el teorema de Vitali obtenemos que

$$g(x,t,u_n) \to g(x,t,u) \text{ fuertemente en } L^1(Q).$$

En consecuencia, si pasamos al límite cuando $n \to \infty$ en la noción de solución débil del problema aproximado

$$-\int_\Omega u_n(0)\varphi(0) - \int_0^T \langle \varphi_t, u_n\rangle + \int_Q M(x,t,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla\varphi + \int_Q g(x,t,u_n)\varphi = \int_Q f_n\varphi,$$

obtenemos que

$$-\int_\Omega u_0\varphi(0) - \int_0^T \langle \varphi_t, u\rangle + \int_Q M(x,t,u)\nabla u\nabla\varphi + \int_Q g(x,t,u)\varphi = \int_Q f\varphi,$$

para cualquier $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ con $\varphi_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Con lo que el Teorema 3.2.1 queda probado. Observemos que, aplicando el lema de Fatou en (3.2.1), deducimos que

$$\int_{\{s \le u(x,t) < \kappa\}} g(x,t,u(x,t)) \le \int_{\{s < u(x,t) < \kappa\}} f + \int_{\{s < u_0 < \kappa\}} u_0.$$

□

3.3. Comportamiento asintótico de las soluciones

Una vez probada la existencia de solución en la Sección 3.1, principio de comparación y unicidad de solución en la Subsección 1.3.1 estamos en disposición de abordar resultados de estabilidad para los diferentes problemas parabólicos estudiados, y a ello dedicamos esta sección. Probamos primero el comportamiento asintótico de los problemas parabólicos casilineales con crecimiento natural y dependencia singular en el gradiente. Posteriormente (usando las ideas de la prueba anterior) para los problemas semilineales con una asíntota en el *lower order term* sin dependencia en el gradiente.

3.3.1. Problemas con dependencia singular en el gradiente

Como una aplicación de los resultados del principio de comparación, probamos el comportamiento asintótico cuando t tiende a $+\infty$ de soluciones u del problema

(1.3.17) asumiendo ciertas hipótesis. Concretamente, $f(x,t) = f(x)$ satisface (3.0.3), $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ es una función no negativa, $g(s)$ verifica (3.0.4), (1.3.18), (1.3.16) y suponemos que existe $r_0 >> 1$ tal que

$$g(rs) \geq \frac{g(s)}{r}, \tag{3.3.1}$$

para cualquier $s \geq 0$ y $r > r_0$. Denotaremos por Q_∞ el cilindro infinito $\Omega \times (0,\infty)$. Nuestro resultado generaliza el Teorema 1.1 de [68] donde los autores consideran una no linealidad acotada $g(s)$. Las técnicas que usamos fueron introducidas en [80]. Como ha sido probado respectivamente, en el Teorema 3.1.1 y en el Teorema 1.3.17, existe solución del problema (1.3.17) y es única. Observamos que, si $f \in L^q(\Omega)$, con $q > \frac{N}{2}$, entonces, resultados estándar de regularidad (véase [15]) implican que las soluciones del problema (1.3.17) están acotadas en Q.

Probaremos que, cuando t diverge positivamente, $u(x,t)$ converge a la única solución $v(x)$ del problema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta v + g(v)|\nabla v|^2 = f & \text{en } \Omega, \\ v(x) = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.3.2}$$

(véase el Teorema 2.1.1 para el resultado de existencia y [13] para el resultado de unicidad).

Teorema 3.3.1. *Asumimos que $f \in L^q(\Omega)$ con $q > \frac{N}{2}$ verifica* (5) *y $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ es una función no negativa. Si g satisface* (1.3.18), (1.3.16), (3.0.4) *y* (3.3.1) *entonces $u(x,t)$, la solución débil del problema (1.3.17), satisface*

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = v(x) \quad \textit{a.e. en } \Omega \textit{ y débil-}* \textit{ en } \ L^\infty(\Omega),$$

donde v es la única solución de (3.3.2).

Observación 3.3.2. *Notamos que el Teorema 3.3.1 implica que $u(x,t)$ converge a la solución estacionaria en $L^q(\Omega)$, para cualquier $q \geq 1$. Como habíamos afirmado, la hipótesis (1.3.18) implica que el resultado es cierto para el problema modelo $g(s) = \dfrac{1}{s^\gamma}$ sólo si $\gamma < 1$. Sin embargo, la misma prueba se puede rehacer para el problema*

$$\begin{cases} u_t - \alpha\Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} = f(x,t) & \textit{en } Q_\infty, \\ u(x,0) = u_0(x) & \textit{en } \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \textit{en } \partial\Omega \times (0,\infty). \end{cases}$$

con $\gamma \geq 1$ si se verifica (1.3.16).

Prueba del Teorema 3.3.1. Organizamos la prueba en algunos pasos que detallamos a continuación.

- **Paso 1.** Probamos el resultado aprovechando el carácter monótono de la solución respecto a t con un dato inicial particular. Concretamente:
  - **Paso 1.1.** La solución del problema (1.3.17) es no-decreciente si $u_0 = 0$.

- **Paso 1.2.** La solución del problema (1.3.17) es no-creciente si $u_0 = rv$, para cualquier $r > 1$.
- **Paso 1.3.** Paso al límite y deduciremos que dicho límite es la solución estacionaria con $u_0 = 0$ y $u_0 = rv$.

- **Paso 2.** Por un argumento de comparación, probamos el resultado para un dato inicial u_0 tal que $0 \le u_0 \le rv$, para cualquier $r > 1$.

- **Paso 3.** Realizamos un argumento de truncamiento para alcanzar el resultado en el caso general $u \in L^\infty(\Omega)$.

Paso 1. Monotonía de la solución. Prueba completa para un dato inicial particular.

Paso 1.1. $u_0 = 0$. Sea w la solución de (1.3.17) con $u(x,0) = 0$. Probamos que tiene límite.
Probaremos que $w(x,t)$ es no-decreciente respecto a t. Fijamos $T > 0$ e introducimos para cualquier $\eta > 1$ la sucesión de funciones definida en Q por

$$w^\eta(x,t) = w(x, \eta + t)\,.$$

Recordando que f no depende del tiempo, deducimos que $w^\eta(x,t)$ resuelve

$$\begin{cases} w^\eta_t - \Delta w^\eta + g(w^\eta)|\nabla w^\eta|^2 = f & \text{en } Q, \\ w^\eta(x,0) = w(x,\eta) & \text{en } \Omega, \\ w^\eta(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T)\,. \end{cases}$$

Como $w(x,\eta) \ge 0$, observamos que w^η es una supersolución del problema

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + g(w)|\nabla w|^2 = f(x) & \text{en } Q, \\ w(x,0) = 0 & \text{en } \Omega, \\ w(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{3.3.3}$$

Aplicando el Teorema 1.3.16 obtenemos que $w(x,t) \le w^\eta(x,t)$. Esto implica que $w^\eta(x,t)$ es creciente en η.

Además, $v(x)$ es una supersolución del problema (3.3.3) , con lo que aplicando de nuevo el Teorema 1.3.16 deducimos

$$w(x,t) \le v(x), \ \text{ a.e. en } \Omega, \qquad \forall t \in (0,T). \tag{3.3.4}$$

Por lo tanto existe una función $\widetilde{w}(x)$ tal que $w^\eta(x,t)$ converge a.e. en Q a $\widetilde{w}(x)$ cuando η tiende a $+\infty$. El hecho de que $\tilde{w}$ no depende del tiempo se sigue de la desigualdad

$$w^\eta(x,0) = w(x,\eta) \le w(x,\eta + t) = w^\eta(x,t) \le w(x,T) \le v(x).$$

Además, gracias a (3.3.4), como v está acotada, tenemos que

$$w^\eta(x,t) \longrightarrow \widetilde{w}(x) \qquad \text{a.e. y débil-}* \text{ en } L^\infty(Q)\,.$$

Paso 1.2. $u_0 = rv$, $r > 1$. Soluciones no-crecientes.
Supongamos que z es la solución del siguiente problema:

$$\begin{cases} z_t - \Delta z + g(z)|\nabla z|^2 = f & \text{en } Q \\ z(x,0) = rv(x) & \text{en } \Omega \\ z(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T)\,, \end{cases}$$

donde $r > 1$ es un número fijado.
Observamos que, para $r > r_0$, $rv(x)$ es una supersolución del problema anterior. De hecho, la hipótesis (3.3.1) implica que

$$\frac{d}{dt}(rv(x)) - \Delta(rv) + g(rv)|\nabla(rv(x))|^2 \geq r(-\Delta v + g(v)|\nabla v|^2) \geq f.$$

Ahora, como

$$rv(x) \geq 0 \text{ en } \Omega \times (0,\infty)\,,$$

usando de nuevo el Teorema 1.3.16, deducimos

$$v(x) \leq z(x,t) \leq rv(x) \quad \text{a.e. en} \quad Q\,. \tag{3.3.5}$$

Además, podemos comparar $z(x,t)$ con $z(x,t+s)$ para $s \in \mathbb{R}^+$. De hecho, observamos que $z(x,t)$ es la solución del problema (1.3.17), el cual para $t = 0$ alcanza el valor $rv(x)$, mientras $z(x,t+s)|_{t=0} = z(x,s)$. Como $rv(x)$ es una supersolución y $rv(x) \geq z(x,s)$, entonces por el Teorema 1.3.16 deducimos que $z(x,t) \geq z(x,t+s)$ a.e. en Q. Consideramos ahora para cada $\tau \in \mathbb{N}$ la sucesión de problemas

$$\begin{cases} z_t^\tau - \Delta z^\tau + g(z^\tau)|\nabla z^\tau|^2 = f & \text{en } Q \\ z^\tau(x,0) = z(x,\tau) & \text{en } \Omega \\ z^\tau(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases}$$

Como antes, la monotonía en t de $z(x,t)$ implica la monotonía de $z^\tau(x,t)$ respecto a τ. Por lo tanto, $z^\tau(x,t)$ converge a.e. en Q a una función $\bar{z}(x,t)$ y argumentando como en el paso anterior podemos deducir que $\bar{z}$ no depende de t.

Ahora, es fácil adaptar la prueba del Teorema 3.1.1 y probar que w^η (resp. z^τ) converge a $\overline{w}(x)$ (resp. $\bar{z}(x)$) fuertemente en $L^2(0,T;H^1_{loc}(\Omega))$, y $g(w^\eta)|\nabla w^\eta|^2$ (resp. $g(z^\tau)|\nabla z^\tau|^2$) converge a $g(\overline{w})|\nabla\overline{w}|^2$ (resp. $g(\bar{z})|\nabla\bar{z}|^2$) fuertemente en $L^1_{loc}(Q)$.

Así que podemos pasar al límite en la formulación débil de los problemas respectivos que verifican w^η y z^τ para concluir que ambas $\tilde{w}(x)$ y $\bar{z}(x)$ son soluciones estacionarias de (1.3.17). Aplicando el resultado de unicidad para el problema elíptico (3.3.2) en [13], deducimos que $\tilde{w}(x) \equiv \bar{z}(x) \equiv v(x)$.
Para concluir, realizaremos el paso al límite para w^η siendo para z^τ idéntico.

Paso 1.3. Paso al límite y prueba del resultado.

Consideramos la formulación débil de 3.3.1 y escogemos $\Psi(x) \in C_c^\infty(\Omega)$ como función test para obtener

$$\int_0^T \langle w_t^\eta, \Psi(x)\rangle + \int_Q \nabla w^\eta \nabla\Psi(x) + \int_Q g(w^\eta)|\nabla w^\eta|^2\Psi(x) = \int_Q f\Psi(x)\,.$$

Ahora, como Ψ no depende de t, y $w^\eta(x,T)$ y $w^\eta(x,0)$ admiten el mismo límite, tenemos que

$$\begin{aligned}&\lim_{\eta\to\infty}\int_0^T \langle w_t^\eta, \Psi(x)\rangle \\ &= \lim_{\eta\to\infty}\left(-\int_0^T \langle w^\eta, \Psi(x)_t\rangle + \int_\Omega w^\eta(x,T)\Psi(x) - \int_\Omega w^\eta(x,0)\Psi(x)\right) = 0.\end{aligned}$$

Así que, gracias a la compacidad fuerte de w^η en $L^2(0,T;H^1_{loc}(\Omega))$ y de $g(w^\eta)|\nabla w^\eta(x)|^2$ en $L^1(Q)$, obtenemos

$$\int_\Omega \nabla\overline{w}(x)\cdot\nabla\Psi(x) + \int_\Omega g(\overline{w})|\nabla\overline{w}(x)|^2\Psi(x) = \int_\Omega f\Psi(x)$$

y entonces, podemos tomar (por un argumento de densidad) $\Psi(x)\in H^1_0(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$,

$$\overline{w}(x)\equiv v(x)\,,$$

donde $v(x)$ es la única solución del problema (3.3.2).

Observamos que, (3.3.4) y (3.3.5), la convergencia a.e. de $w(x,t)$ y $z(x,t)$ a $v(x)$ y la acotación de $v(x)$ implican que la convergencia a la solución estacionaria es débil-$*$ en $L^\infty(\Omega)$.

Paso 2. Prueba completa si $0\le u_0\le rv$.

Ahora consideramos un dato inicial $u_0(x)$ tal que $0\le u_0(x)\le rv(x)$ para algún $r\ge 1$, y sea $u(x,t)$ la solución del problema (1.3.17).

Gracias al Teorema 1.3.16 tenemos que

$$w(x,t)\le u(x,t)\le z(x,t)\quad \text{a.e. en } Q\,.$$

Así que, pasando al límite con respecto a la variable t, tenemos que

$$v(x)=\lim_{t\to+\infty} w(x,t)\le \liminf_{t\to\infty} u(x,t)\le \limsup_{t\to\infty} u(x,t)\le \lim_{t\to+\infty} z(x,t)=v(x).$$

Con lo que el límite respecto a la variable t de $u(x,t)$ existe, coincide con $v(x)$ y la convergencia es débil-$*$ en $L^\infty(\Omega)$.

Paso 3. $u_0\in L^\infty(\Omega)$.

Definimos la familia de funciones monótonas no-decrecientes (en τ)

$$u_{0,\tau}=\text{mín}(u_0,\tau v).$$

Para cada $\tau>1$ fijado, consideramos la solución $u_\tau(x,t)$ del problema (1.3.17) con $u_{0,\tau}$ como dato inicial. Como hemos probado en el paso anterior, cuando t tiende a infinito, $u_\tau(x,t)$ converge a v a.e. en Ω. Gracias al *teorema de la convergencia dominada de Lebesgue*, y al hecho de que $v>0$ a.e. en Q, podemos ver fácilmente que $u_{0,\tau}$ converge a u_0 en $L^2(\Omega)$ cuando τ tiende a infinito.

Podemos probar (véase la prueba del Teorema 1.3.16 aplicada a u y u_τ), que para cualquier $\tau>1$ fijado, se verifica la siguiente estimación

$$\int_\Omega |u-u_\tau|^2(t)\ \le \int_\Omega |u_0-u_{0,\tau}|^2,$$

para cada $t>0$. Por lo tanto, tenemos

$$\|u(x,t)-v(x)\|_{L^2(\Omega)} \le \|u(x,t)-u_\tau(x,t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_\tau(x,t)-v(x)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Como la estima anterior es uniforme en t, para cada ε fijado, podemos escoger $\bar{\tau}$ suficientemente grande tal que

$$\|u(x,t)-u_{\bar{\tau}}(x,t)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{a.e. en } \Omega$$

para cada $t>0$. Por otro lado, ya que $u_{\bar{\tau}}(x,0)$ está entre 0 y $\bar{\tau}v$, por el Paso 2 existe $\bar{t}$ tal que

$$\|u_{\bar{\tau}}(x,t)-v(x)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2}, \text{ a.e. en } \Omega$$

para cada $t>\bar{t}$, y gracias a la acotación de $u(x,t)$ tenemos probado el teorema. □

3.3.2. Problemas con asíntota positiva

Una vez probado el resultado de estabilidad anterior, podemos probar (siguiendo el esquema de la prueba) de una manera sencilla el comportamiento asintótico cuando t tiende a infinito de la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - \text{div}\,(M(x,u)\nabla u) + g(x,u) = f(x) & \text{en } \Omega\times(0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega\times(0,T). \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Concretamente, nuestro resultado de estabilidad es el siguiente.

Teorema 3.3.3. *Sea $0\le f\in L^1(\Omega)$, $f\not\equiv 0$ y $u_0<\kappa$ una función no negativa. Sean M y g (independientes de t) satisfaciendo, respectivamente, (1.3.2) y (3.0.6). Si g es no decreciente, entonces $u(x,t)$, la solución débil del problema* (3.3.6) *satisface*

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = v(x) \qquad \textit{a.e. y débil-}* \textit{ en } L^\infty(\Omega),$$

donde v es la única solución del problema estacionario

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x,v)\nabla v) + g(x,v) = f(x) & \textit{en } \Omega, \\ v(x) = 0 & \textit{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Esquema de la prueba del Teorema 3.3.3. Realizamos un guión de la prueba puesto que es esencialmente la misma que la del Teorema 3.3.1. Dividimos la prueba en tres pasos.

- **Paso 1.** Probamos el resultado con una dato inicial particular y $f\in L^\infty(\Omega)$. Lo probamos siguiendo el esquema:
  - **Paso 1.1.** La solución es no-decreciente si $u_0=0$. Se hace exactamente igual a la del Teorema 3.3.1.

- **Paso 1.2.** La solución es no-creciente si $u_0 = k < \kappa$, con $k > h^{-1}(\|f\|_{L^\infty(\Omega)})$. Consideramos el mismo método del Teorema 3.3.1 definiendo el problema relacionado resuelto por $z(x,t)$ con dato inicial $u_0 = k$. Gracias a (1.3.2) y a que h es no-decreciente, vemos que k es una supersolución para el problema parabólico y así $0 \le z(x,t) \le k$. Por comparación, podemos probar el resultado para cada $0 \le u_0 \le k$.
- **Paso 1.3.** Paso al límite y prueba del resultado si $0 \le u_0 \le k < \kappa$. Como en la prueba del Teorema 3.3.1, pasamos al límite cuando t tiende a $+\infty$ y obtenemos el resultado que queríamos.

- **Paso 2.** Para un dato inicial $u_0 < \kappa$ con $f \in L^\infty(\Omega)$. Tomamos $k < \kappa$, $u_{0,k} = T_k(u_0)$ y $u_k(x,t)$ la solución con dato inicial $u_{0,k}$. El resultado es cierto para u_k por el paso anterior, y, razonando como en la prueba del Teorema 3.3.1, obtenemos un principio de estabilidad en $L^2(\Omega)$, o equivalentemente, existe $C > 0$ tal que

$$\|u(x,t) - u_k(x,t)\|_{L^2(\Omega)} \le C\|u_0 - u_{0,k}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall t \in (0,T).$$

Por lo tanto, podemos fijar $\overline{k}$ tal que

$$\|u(x,t) - u_{\overline{k}}(x,t)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2},$$

y tomamos t suficientemente grande tal que

$$\|u_{\overline{k}}(x,t) - v(x)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Concluimos usando la desigualdad triangular

$$\|u(x,t) - v(x)\|_{L^2(\Omega)} \le \|u(x,t) - u_k(x,t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k(x,t) - v(x)\|_{L^2(\Omega)}.$$

- **Paso 3.** Seguimos un argumento de truncadura para probar el resultado para $f \in L^1(\Omega)$. Truncamos f y tomamos las soluciones para u_k y para v_k. Escogemos k_0 tal que

$$\|u(x,t) - u_{k_0}(x,t)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|v_{k_0}(x) - v(x)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{3},$$

y t tal que

$$\|u_{k_0}(x,t) - v_{k_0}(x)\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Lo cual concluye el esquema de la prueba.

$\square$

Chapter 4

Continua of solutions for quasilinear problems with quadratic gradient

We study in this Chapter the existence of continua of solutions for quasilinear problems with quadratic gradient. As we have observed in the introduction, at least at the our best knowledge, Leray-Schauder degree and global continua of solutions have not been used to study this kind of singular quasilinear operators. From this point of view, if we asssume (G), we study the problem (7) considering the following operator $K : \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, for every $\lambda \in \mathbb{R}$ and for every $w \in H_0^1(\Omega)$, $K(\lambda, w)$ as the unique solution u in $H_0^1(\Omega)$ of the problem

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = \lambda^+ w^+(x)^p + f_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

with $0 \leq p < \frac{N+2}{N-2}$.

Indeed, in the case that g is singular at zero with $0 \lneqq f_0 \in L^{2N/(N+2)}(\Omega)$ the existence is due to [24] and the uniqueness to [13]. Moreover, if g is continuous at zero, the existence and uniqueness results remain also true in the case $f_0 \equiv 0$. With this notation, (7) can be rewritten as a fixed point problem, namely,

$$u = K_\lambda(u),$$

with $K_\lambda(u) = K(\lambda, u)$.

We organize Chapter 4 as follows. We will prove the compactness of the operator K in Section 4.1. In Section 4.2 we study the existence of continua of solutions. Concretely, we deduce the existence of global continua in the solution set S without bifurcation in some cases and in other cases we prove that bifurcation from the line of trivial solutions occurs. Section 4.3 is dedicated to realize an analysis of the qualitative properties of continua of positive solutions. Specifically, we impose some conditions to assure that the projection of Σ on the λ-axis is unbounded and we describe sufficient conditions on g in order to have the existence of λ^* such that (7) has no positive solution for every $\lambda > \lambda^*$. Is that to say, we prove that the projection of Σ on the λ-axis is bounded. Finally, in Section 4.4 we realize the proofs of the main theorems, concretely the theorems that we have described in the introduction.

4.1. Abstract framework

We prove in this section the compactness of the operator K. First of all, we need a technique lemma that we will use in the following. Observe that our definition of solution of (7) includes the integrability of $g(u)|\nabla u|^2$. We will see in the following result that a consequence is that $g(u)|\nabla u|^2\varphi$ is also integrable for every $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Lemma 4.1.1. *If $0 < u \in H_0^1(\Omega)$ is a solution for (7), then $g(u)|\nabla u|^2\varphi \in L^1(\Omega)$ for every $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ and, in particular, it holds*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega g(u)|\nabla u|^2\varphi = \lambda \int_\Omega u^p\varphi + \int_\Omega f_0\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.1.1}$$

Proof. Observe that, since $p \le 2^* - 1$ then $u^p, u^p\varphi \in L^1(\Omega)$ for every $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Even more, taking $T_k(\varphi^+)$ as test function in (8), and using the Holdër inequality we have

$$\begin{aligned}\int_\Omega g(u)|\nabla u|^2 T_k(\varphi^+) &= -\int_\Omega \nabla u \nabla T_k(\varphi^+) + \int_\Omega (\lambda u^p + f_0)T_k(\varphi^+)\\ &\le \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi^+\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega (\lambda u^p + f_0)\varphi^+.\end{aligned}$$

Taking limit as $k \to \infty$ and using Fatou Lemma, we deduce that $g(u)|\nabla u|^2\varphi^+ \in L^1(\Omega)$ with

$$\int_\Omega g(u)|\nabla u|^2\varphi^+ \le \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi^+\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega (\lambda u^p + f_0)\varphi^+.$$

Similarly, taking $T_k(-\varphi^-)$ as test function in (8) we obtain that $g(u)|\nabla u|^2\varphi^- \in L^1(\Omega)$ and

$$-\int_\Omega g(u)|\nabla u|^2\varphi^- \le \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi^-\|_{H_0^1(\Omega)} - \int_\Omega (\lambda u^p + f_0)\varphi^-.$$

In particular, $g(u)|\nabla u|^2\varphi \in L^1(\Omega)$ and

$$\int_\Omega g(u)|\nabla u|^2|\varphi| \le \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} + \int_\Omega (\lambda u^p + f_0)|\varphi|.$$

Thus, by a density argument we conclude (4.1.1). □

Remark 4.1.2. *The above lemma can be improved by showing that if $0 < u \in H_0^1(\Omega)$ is a solution of (7), then $g(u)|\nabla u|^2\varphi \in L^1(\Omega)$ for every $\varphi \in H^1(\Omega)$. Indeed, arguing as in the proof of the lemma, this is deduced by taking now $\dfrac{T_\varepsilon(u)}{\varepsilon}T_{1/\varepsilon}(\varphi^\pm)$ as test function in (7).*

Remark 4.1.3. *The thesis of Lemma 4.1.1 is true even for more general problems of the type*

$$\begin{cases} -\Delta u + g(x,u)|\nabla u|^2 = f(\lambda,x,u) & \text{in } \Omega,\\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega.\end{cases} \tag{4.1.2}$$

assuming the following hypotheses

$$g(x,s) \ge 0, \quad \forall s > 0,\ a.e.\ x \in \Omega$$

$$0 \le f(\lambda,x,s) \le c\lambda s^p + f_0(x), \quad \forall s > 0,\ a.e.\ x \in \Omega$$

for some $0 \le p < 2^* - 1$, $c > 0$ and $f_0 \in L^{2N/(N+2)}(\Omega)$.

Now we give sufficient conditions to assure that problem (7) satisfies the uniform strong maximum principle (USMP), that is, for every $\omega \subset\subset \Omega$ there exists a positive lower bound in ω (independent from λ) of any solution of (7).

Proposition 4.1.4. *Suppose that $0 \lneqq f_0$ and $g \in L^1(0,1)$. Then for every $\omega \subset\subset \Omega$ there exists $L_\omega > 0$ such that,*

$$u(x) \geq L_\omega, \quad a.e. \quad x \in \omega,$$

for every solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of (7) (with λ any positive constant).

Proof. Taking into account that $\lambda s^p + f_0(x) \geq T_1(f_0(x))$, for all $s \geq 0$, then every solution $u \in H_0^1(\Omega)$ is a supersolution for the problem

$$\begin{cases} -\Delta v + g(v)|\nabla v|^2 = T_1(f_0(x)) & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Since g is integrable in a neighborhood of zero, this problem has a unique continuous solution $v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ (see [24] for existence and Theorem 1.3.12 for uniqueness). Using that $v \in C(\Omega)$ and $v > 0$ in Ω, if $\omega \subset\subset \Omega$ we infer the existence of $L_\omega > 0$ such that $v(x) \geq \text{mín}_\omega v = L_\omega$. By the comparison principle Theorem 1.3.12 we deduce that $u \geq v \geq L_\omega$ and the proof is concluded. $\square$

Remark 4.1.5. *We remark that the problem (4.1.2) satisfies also USMP if we assume that there exists $0 \lneqq f_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ verifying*

$$f(\lambda, x, s) \geq f_0(x), \quad \forall \lambda, s > 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

and

$$0 \leq g(x,s) \leq h(s), \quad \textit{for a.e. } x \in \Omega,\ \forall s > 0, \tag{4.1.3}$$

where $h : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ is a continuous function which is integrable at zero.

The following result will be concerned with the compactness for the operator $K(\lambda, w)$.

Proposition 4.1.6. *Assume that hypothesis (G) holds. If the sequences $t_n \in [0,1]$ and $\lambda_n > 0$ are convergent, respectively, to t^* and λ, and w_n is $H_0^1(\Omega)$-weakly convergent to w, then the sequence of the unique solution $u_n \in H_0^1(\Omega)$ of*

$$\begin{cases} -\Delta u_n + t_n g(u_n)|\nabla u_n|^2 = \lambda_n w_n^+(x)^p + f_0(x) & \textit{in } \Omega, \\ u_n = 0 & \textit{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

is strongly convergent in $H_0^1(\Omega)$ to the solution u of

$$\begin{cases} -\Delta u + t^* g(u)|\nabla u|^2 = \lambda w^+(x)^p + f_0(x) & \textit{in } \Omega, \\ u = 0 & \textit{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1.5}$$

Remark 4.1.7. *We point out that in order to assure the uniqueness of solution for problems (4.1.4) and (4.1.5) by applying Theorem 1.3.12, we have to impose that $t_n g(s)$ and $t^* g(s)$ are integrable in a neighborhood of zero.*

Proof. If $g \geq 0$ is continuous in $[0,+\infty)$ and the datum $0 \leq f_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$, then the proof follows by [20]. Here, we give the proof only in the case of a singular g, that is, $g \geq 0$ is continuous in $(0,+\infty)$, decreasing and integrable in a neighborhood of zero with $\lim_{s\to 0} g(s) = +\infty$ and the datum $0 \lneqq f_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. It suffices to prove that every subsequence of $\{u_n\}$ possesses a subsequence converging to the unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of (4.1.5). First we prove that u_n is bounded in $H_0^1(\Omega)$. Indeed, choosing u_n as test function in (4.1.4), using that g is nonnegative and Hölder and Sobolev inequalities and taking into account that $p\frac{2N}{N+2} \leq (2^*-1)\frac{2N}{N+2} = 2^*$ we have

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \leq \quad \mathcal{S}\left(\lambda_n \mathcal{S}^p \|w_n\|^p_{H_0^1(\Omega)} |\Omega|^{1-\frac{p}{2^*}} + \|f_0\|_{L^{2N/(N+2)}(\Omega)}\right).$$

Thus the boundedness of $\|w_n\|$ and λ_n implies that u_n is bounded in $H_0^1(\Omega)$. Therefore, there exists $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ such that, up to a subsequence, u_n converges to $\overline{u}$ weakly in $H_0^1(\Omega)$, strongly in $L^2(\Omega)$ and almost everywhere in Ω.

Moreover, choosing $\frac{1}{\varepsilon}T_\varepsilon(u_n)$ as test function in (4.1.4) and dropping some positive terms we deduce that

$$\int_\Omega \frac{T_\varepsilon(u_n)}{\varepsilon} t_n g(u_n)|\nabla u_n|^2 \leq \lambda_n \int_\Omega (w_n^+)^p + \int_\Omega f_0.$$

If we take the limit as ε tends to zero, we get

$$\int_\Omega t_n g(u_n)|\nabla u_n|^2 \leq \lambda_n \int_\Omega (w_n^+)^p + \int_\Omega f_0\,.$$

Therefore, using again that $\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}$ and λ_n are bounded sequences we have that $t_n g(u_n)|\nabla u_n|^2$ is bounded in $L^1(\Omega)$.

Since $\lambda_n (w_n(x)^+)^p + f_0(x) - t_n g(u_n)|\nabla u_n|^2$ is bounded in $L^1(\Omega)$, we can apply Lemma 1 of [26] (see also [31]) to deduce that, up to (not relabeled) subsequences, $\nabla u_n \to \nabla \overline{u}$ a.e. in Ω. Even more, using Proposition 4.1.4 we can argue as in Section 2.1 to deduce that $u_n \to \overline{u}$ in $H^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ and $\overline{u}$ is a solution for (4.1.5) and thus, by the uniqueness, Theorem 1.3.12, $\overline{u} = u$.

Fix now $k \in \mathbb{R}$. Since $G_k(u_n)$ is strongly convergent to $G_k(u)$ in $H_0^1(\Omega)$ (see Section 2.1), to prove the strong convergence of $u_n = G_k(u_n) + T_k(u_n)$, we only have to show the strong convergence of $T_k(u_n)$ in $H_0^1(\Omega)$, for some $k > 0$. To make it, we consider the real functions $\sigma, \psi, \psi_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, defined by

$$\sigma(s) = \int_1^s g(r)dr, \quad \psi(s) = \int_0^s e^{-t^*\sigma(r)}dr, \quad \psi_n(s) = \int_0^s e^{-t_n\sigma(r)}dr,$$

for every $s > 0$. If $\varepsilon > 0$, $0 < u, u_n \in H_0^1(\Omega)$ and we denote

$$\eta_{n,k} = (\psi_n(T_k(u_n)+\varepsilon) - \psi_n(\varepsilon) - \psi(T_k(u)+\varepsilon) + \psi(\varepsilon))\,,$$

then the function $\varphi = e^{-t_n\sigma(T_k(u_n)+\varepsilon)}\eta_{n,k}$ belongs to $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Indeed, observe that $|\nabla\varphi| \in L^2(\Omega)$ and $|\varphi| \leq e^{-t_n\sigma(\varepsilon)}\eta_{n,k} \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Therefore, we can take φ

as test function in the problem (4.1.4) to deduce that

$$\int_\Omega \nabla T_k(u_n) e^{-t_n\sigma(T_k(u_n)+\varepsilon)}\nabla\eta_{n,k} - t_n\int_\Omega g(T_k(u_n)+\varepsilon)|\nabla T_k(u_n)|^2 e^{-t_n\sigma(T_k(u_n)+\varepsilon)}\eta_{n,k}$$

$$+t_n\int_\Omega g(T_k(u_n))|\nabla T_k(u_n)|^2 e^{-t_n\sigma(T_k(u_n)+\varepsilon)}\eta_{n,k} = \int_\Omega (\lambda_n(w_n^+)^p+f_0)e^{-t_n\sigma(T_k(u_n)+\varepsilon)}\eta_{n,k}$$

$$-\int_\Omega \nabla G_k(u_n)e^{-t_n\sigma(k+\varepsilon)}\nabla\eta_{n,k} - t_n\int_\Omega g(u_n)|\nabla G_k(u_n)|^2 e^{-t_n\sigma(k+\varepsilon)}\eta_{n,k}.$$

Similarly, taking $\varphi = e^{-t^*\sigma(T_k(u)+\varepsilon)}\eta_{n,k}$ as test function in (4.1.5)

$$\int_\Omega \nabla T_k(u) e^{-t^*\sigma(T_k(u)+\varepsilon)}\nabla\eta_{n,k} - t^*\int_\Omega g(T_k(u_n)+\varepsilon)|\nabla T_k(u)|^2 e^{-t^*\sigma(T_k(u)+\varepsilon)}\eta_{n,k}$$

$$+t^*\int_\Omega g(T_k(u))|\nabla T_k(u)|^2 e^{-t^*\sigma(T_k(u)+\varepsilon)}\eta_{n,k} = \int_\Omega (\lambda(w^+)^p+f_0)e^{-t^*\sigma(T_k(u)+\varepsilon)}\eta_{n,k}$$

$$-\int_\Omega \nabla G_k(u)e^{-t^*\sigma(k+\varepsilon)}\nabla\eta_{n,k} - t^*\int_\Omega |\nabla G_k(u)|^2 g(u) e^{-t^*\sigma(k+\varepsilon)}\eta_{n,k}.$$

Subtracting both identities and using Fatou lemma and that g is decreasing in a neighborhood of 0, we can pass to the limit as $\varepsilon \to 0$ to obtain that

$$\int_\Omega |\nabla[\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))]|^2 \le \liminf \int_\Omega |\nabla\eta_{n,k}|^2$$

$$= \int_\Omega (\lambda_n(w_n^+)^p+f_0)e^{-t_n\sigma(T_k(u_n))}[\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))]$$

$$-\int_\Omega (\lambda(w^+)^p+f_0)e^{-t^*\sigma(T_k(u))}[\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))]$$

$$-\int_\Omega \nabla G_k(u_n)e^{-t_n\sigma(k)}\nabla[\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))]$$

$$+\int_\Omega \nabla G_k(u)e^{-t^*\sigma(k)}\nabla[\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))]$$

$$-t_n\int_\Omega g(u_n)|\nabla G_k(u_n)|^2 e^{-t_n\sigma(k)}[\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))]$$

$$+t^*\int_\Omega g(u)|\nabla G_k(u)|^2 e^{-t^*\sigma(k)}[\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))].$$

Observe that $\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))$ is bounded in $H_0^1(\Omega)$ and it has zero limit a.e. $x \in \Omega$. Thus, $\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))$ is weakly convergent to zero in $H_0^1(\Omega)$ and

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \nabla G_k(u)e^{-t^*\sigma(k)}\nabla[\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))] = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega (\lambda_n(w_n^+)^p+f_0)e^{-t_n\sigma(T_k(u_n))}[\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))] = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega (\lambda(w^+)^p+f_0)e^{-t^*\sigma(T_k(u))}[\psi_n(T_k(u_n)) - \psi(T_k(u))] = 0.$$

Using also the strong convergence of $G_k(u_n)$ to $G_k(u)$ in $H_0^1(\Omega)$ we have

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega \nabla G_k(u_n)e^{-t_n\sigma(k)}\nabla[\psi_n(T_k(u_n))-\psi(T_k(u))]=0.$$

Moreover, taking into account that $g(u)|\nabla u|^2\in L^1(\Omega)$ and $g(u_n)|\nabla u_n|^2$ is bounded in $L^1(\Omega)$ we deduce in addition that

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega g(u)|\nabla G_k(u)|^2e^{-t^*\sigma(k)}[\psi_n(T_k(u_n))-\psi(T_k(u))]=0$$

$$\limsup_{n\to+\infty} t_n\int_\Omega g(u_n)|\nabla G_k(u_n)|^2e^{-t_n\sigma(k)}[\psi_n(T_k(u_n))-\psi(T_k(u))]\geq 0.$$

Therefore we can use Lebesgue Dominated Convergence Theorem to deduce, for $n\to\infty$, that

$$\int_\Omega |\nabla[\psi_n(T_k(u_n))-\psi(T_k(u))]|^2\to 0. \tag{4.1.6}$$

Taking into account that

$$\nabla[\psi_n(T_k(u_n))-\psi(T_k(u))]=e^{-t_n\sigma(T_k(u_n))}\nabla T_k(u_n)-e^{-t^*\sigma(T_k(u))}\nabla T_k(u)$$

$$=e^{-t_n\sigma(T_k(u_n))}\nabla(T_k(u_n)-T_k(u))+\left(e^{-t_n\sigma(T_k(u_n))}-e^{-t^*\sigma(T_k(u))}\right)\nabla T_k(u)$$

we deduce that

$$\begin{aligned}\nabla[T_k(u_n)-T_k(u)] \;=\;& e^{t_n\sigma(T_k(u_n))}\nabla[\psi_n(T_k(u_n))-\psi(T_k(u))]\\ &-\left(e^{-t_n\sigma(T_k(u_n))}-e^{-t^*\sigma(T_k(u))}\right)\nabla T_k(u)e^{t_n\sigma(T_k(u_n))}.\end{aligned}$$

This finally implies, using that $\left(e^{-t_n\sigma(T_k(u_n))}-e^{-t^*\sigma(T_k(u))}\right)\to 0$ in $L^2(\Omega)$, $e^{t_n\sigma(T_k(u_n))}$ is bounded in $L^\infty(\Omega)$ and (4.1.6), that

$$u_n\to u \quad \text{in} \quad H_0^1(\Omega).$$

□

Remark 4.1.8. *Notice that the $H_0^1(\Omega)$ estimate at the beginning of the proof does not depend on the function g.*

Remark 4.1.9. *The proof of the previous proposition remains true even if we replace f_0 in* (4.1.4) *by any sequence strongly convergent to f_0 in $L^{2N/(N+2)}(\Omega)$.*

4.2. Global continua of solutions

As it has been mentioned in the Introduction, we apply the Leray-Schauder degree to obtain existence of "continua of solutions" of (7), i.e. connected and closed subsets in the solution set

$$S=\{(\lambda,u)\in\mathbb{R}\times H_0^1(\Omega)\,:\,u=K_\lambda(u)\}.$$

Now we can study the existence of continua of solutions. As in [85], we will distinguish two cases, if we have trivial solutions ($f_0 \equiv 0$) or not ($f_0 \neq 0$). In the first case we will prove global bifurcation from the line of trivial solutions and in the second case the existence of a continua of solutions without bifurcation.

4.2.1. Continua of solutions without bifurcation

The first result of this subsection is related to the existence of global continua in the solution set S without bifurcation.

Theorem 4.2.1. *Consider $0 \lneqq f_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ and assume that hypothesis (G) holds. Then there exists an unbounded continuum $\Sigma \subset S$ of positive solutions which contains $(0, u_0)$, where u_0 is the unique solution of (7) for $\lambda = 0$.*

Proof. To prove Theorem 4.2.1 we compute the index of the solution $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ for (7) with $\lambda = 0$. Remind that for every isolated solution $u_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ of (7) for some $\lambda \in \mathbb{R}$, we denote by $i(K_\lambda, u_\lambda)$ the index of such a solution, that is, the topological Leray-Schauder degree $\deg(I - K_\lambda, B_\varepsilon(u_\lambda), 0)$ of the operator $I - K_\lambda$ in a ball $B_\varepsilon(u_\lambda)$ centered at u_λ with radius $\varepsilon > 0$ small enough (to assure that u_λ is the unique solution of (7) in this ball).

We claim that $i(K_0, u_0) = 1$. To prove the claim we denote by $U(t)$ the unique solution for

$$\begin{cases} -\Delta u + t g(u)|\nabla u|^2 = f_0(x) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

and we define the function $H : [0,1] \times H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ by $H(t,w) = U(t)$ for every $(t,w) \in [0,1] \times H_0^1(\Omega)$. Observe that $H(1,w) = U(1) = K_0(w) = u_0$, while

$$H(0,w) = U(0) = (-\Delta)^{-1}(f_0(x))$$

and it is well known that $i((-\Delta)^{-1}(f_0(x)), U(0)) = 1$.

By Proposition 4.1.6 we deduce that operator H is compact. In addition, as it has been pointed out in Remark 4.1.8, taking $R = \mathbb{S}\|f_0\|_{L^{2N/(N+2)}(\Omega)} > 0$, we deduce that $\|U(t)\|_{H_0^1(\Omega)} < R$, for every $t \in [0,1]$. Hence, $u \neq H(t,u)$ for every $t \in [0,1]$ and for every $u \in H_0^1(\Omega)$ with $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \geq R$ and we can apply the homotopy invariance of the degree to conclude that

$$\begin{aligned} i(K_0, u_0) &= i(H(1,\cdot), U(1)) = i(H(0,\cdot), U(0)) \\ &= i((-\Delta)^{-1}(f_0(x)), U(0)) = 1, \end{aligned}$$

and the claim has been proved. The theorem follows now from the Rabinowitz Theorem 3.2 in [85] (see also [70]). □

Remark 4.2.1. *The keystone to compute the index $i(K_0, u_0)$ in the above proof has been to show that the problem (7) with $\lambda = 0$ is homotopic to the one-dimensional ($t \geq 0$) family of problems (4.2.1), which for $t = 0$ is nothing but a linear problem. Some remarks can be added about this problem (4.2.1). If for every $t > 0$ we denote by $u(t)$ the unique solution of it, we immediately deduce that the set*

$$\Sigma_0 = \{(t, u(t)) \in [0, +\infty) \times H_0^1(\Omega)\}$$

is an unbounded continuum. In addition, if $f_0 \in L^r(\Omega)$ *for some* $r > \frac{N}{2}$*, then, taking* $G_k(u(t))$ *as test function, by Stampacchia technique [91], we obtain the existence of a positive constant* $C > 0$ *not depending neither on* n *nor* t*, such that* $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C$*. Hence the projection* $Proj_{[0,+\infty)}\Sigma_0$ *of* Σ_0 *on the* t*-axis is all the interval* $[0,+\infty)$ *(see Figure 4.1) in order to guarantee the unboundedness of* Σ_0*.*

Furthermore, if $\inf_{s\in(0,C)} g(s) > 0$*, we claim that* $\lim\limits_{t\to+\infty} \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$*. Indeed, choosing* $\dfrac{T_\varepsilon(u(t))}{\varepsilon}$ *as test function, we obtain*

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{u(t)\le\varepsilon\}} |\nabla u(t)|^2 + t\int_\Omega g(u(t))|\nabla u(t)|^2 \frac{T_\varepsilon(u(t))}{\varepsilon} = \int_\Omega f_0 \frac{T_\varepsilon(u(t))}{\varepsilon}.$$

In particular,

$$t\int_\Omega g(u(t))|\nabla u(t)|^2 \frac{T_\varepsilon(u(t))}{\varepsilon} \le \int_\Omega f_0.$$

Taking now limits as ε *goes to zero and using Fatou Lemma, we get*

$$t \inf_{s\in(0,C)} g(s)\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le t\int_\Omega g(u(t))|\nabla u(t)|^2 \le \int_\Omega f_0,$$

from which the claim is clearly deduced.

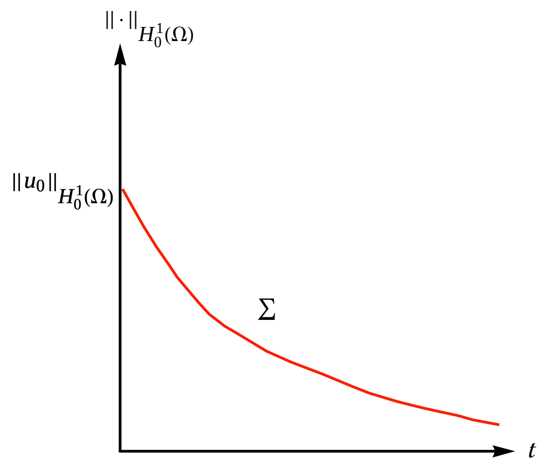

Figure 4.1: Solution for every $t > 0$ having zero limit as t tends to infinity.

4.2.2. Bifurcation from the line of trivial solutions

In the case $f_0 \equiv 0$ (which implies that $u_0 \equiv 0$ in Theorem 4.2.1) and that g is continuous in a neighborhood of zero, there is also a continuum of (trivial) solutions emanating from $(0,0)$. We prove now that bifurcation from the line of trivial solutions occurs provided that, in addition, $0 \le p \le 1$. Moreover, the bifurcation point is

$$\mu^* = \begin{cases} 0, & \text{if } 0 \le p < 1, \\ \mu_1, & \text{if } p = 1, \end{cases}$$

where we remind that μ_1 is denoting the first eigenvalue of the Laplacian operator with zero Dirichlet boundary conditions. In the sequel, ϕ_1 denotes the corresponding first positive eigenfunction associated to μ_1 with norm in $H_0^1(\Omega)$ equal to one.

Theorem 4.2.2. *Assume that the function $g : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ is continuous, $f_0 \equiv 0$ and $0 \le p \le 1$. Then μ^* is the only bifurcation point from zero of positive solution for* (7). *Moreover, there exists an unbounded continuum $\Sigma_0 \subset S$ of positive solutions emanating from $(\mu^*, 0)$.*

In order to prove Theorem 4.2.2 we use the global bifurcation theorem by Rabinowitz (see again [85]) or, more specifically, that the index of the (isolated) trivial solution changes as λ crosses $\lambda = \mu^*$. This will be a direct consequence of the following two lemmas.

Lemma 4.2.2. *Let $\Lambda \subset (-\infty, \mu^*)$ be a bounded closed interval. There exists $\varepsilon > 0$ such that for every $\lambda \in \Lambda$ and every $t \in [0,1]$ problem*

$$\begin{cases} -\Delta u + t g(u^+)|\nabla u|^2 = t\lambda^+(u^+)^p & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

admits no solution $u \in H_0^1(\Omega)$ with $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \in (0,\varepsilon]$.

Proof. First we consider the case $0 \le p < 1$ (thus $\mu^* = 0$) and $\Lambda \subset (-\infty, 0)$. Then the result holds for any $\varepsilon > 0$ since the unique solution of (4.2.2) for $\lambda < 0$ is the trivial one.

We suppose now that $p = 1$, that is $\mu^* = \mu_1$. We prove the assertion of the lemma by contradiction. Assume that there exist the following sequences $0 \le \lambda_n \in \Lambda$, $t_n \in [0,1]$ and $0 \le u_n \in H_0^1(\Omega)$ with $0 < \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$, such that

$$\begin{cases} -\Delta u_n + t_n g(u_n)|\nabla u_n|^2 = t_n \lambda_n u_n & \text{in } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Observe that $\displaystyle\int_0^{u_n} e^{-t_n \int_1^s g(t)dt} ds = w_n \in H_0^1(\Omega)$. We denote by z_n the following sequence $z_n = \dfrac{w_n}{\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}}$. Up to a subsequence, z_n weakly converges to $z \in H_0^1(\Omega)$ and the convergence is strongly in $L^q(\Omega)$ for every $q < 2^*$.

Using Lemma 1.3.5 we can take

$$\varphi = \frac{e^{-t_n \int_1^{u_n} g(t)dt}(z_n - z)}{\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}},$$

as test function in (4.2.2). Thus, we have

$$\int_\Omega \nabla z_n \nabla(z_n - z) \quad = \quad t_n\lambda_n \int_\Omega z_n \frac{u_n e^{-t_n \int_1^{u_n} g(t)dt}}{\int_0^{u_n} e^{-t_n \int_1^s g(t)dt} ds}(z_n - z).$$

By the dominated convergence theorem we obtain that $\int_\Omega \nabla z_n \nabla(z_n - z) \to 0$. Therefore we deduce that $z_n \to z$ in $H_0^1(\Omega)$ and, in particular, $\|z\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$.

On the other hand, using Lemma 1.3.5, we can take $\varphi = \dfrac{e^{-t_n \int_1^{u_n} g(t)dt}\phi_1}{\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}}$ as test function. This leads to

$$\int_\Omega \nabla z_n \nabla \phi_1 = t_n\lambda_n \int_\Omega z_n \frac{u_n e^{-t_n \int_1^{u_n} g(t)dt}}{\int_0^{u_n} e^{-t_n \int_1^s g(t)dt} ds}\phi_1.$$

Using that $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ (by Lemma 1.3.5) and passing to the limit by dominated convergence theorem we obtain, up to a subsequence, that $t_n \to t^*$, $\lambda_n \to \lambda < \mu_1 = \mu^*$ and

$$\mu_1 \int_\Omega z\phi_1 = \int_\Omega \nabla z \nabla \phi_1 = t^*\lambda \int_\Omega z\phi_1.$$

Taking into account that $t^*\lambda < \mu_1$, the only possibility in the previous inequality is $z = 0$. This is a contradiction with $\|z\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ and therefore the lemma has been also proved in the case $p = 1$. □

Lemma 4.2.3. *Let $\Lambda \subset (\mu^*, \infty)$ be a bounded closed interval. There exists $\varepsilon > 0$ such that if $t \in [0,1]$ and $\lambda \in \Lambda$, then problem*

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u)|\nabla u|^2 = \lambda u^p + t & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2.3}$$

admits no positive solution $u \in H_0^1(\Omega)$ with $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \in (0, \varepsilon]$.

Proof. Observe that if $u \in H_0^1(\Omega)$ is a solution of (4.2.3) and we choose (by Lemma 1.3.5) $\varphi = e^{-\int_1^u g(t)dt}\phi_1$ as test function, then we obtain

$$\int_\Omega e^{-\int_1^u g(t)dt} \nabla u \nabla \phi_1 = \int_\Omega (\lambda u^p + t) e^{-\int_1^u g(t)dt}\phi_1.$$

Noting also that $\int_0^u e^{-\int_1^s g(t)dt} ds = w \in H_0^1(\Omega)$, we can rewrite the above identity as

$$\int_\Omega \nabla w \nabla \phi_1 = \lambda \int_\Omega w \frac{u^p e^{-\int_1^u g(t)dt}}{\int_0^u e^{-\int_1^s g(t)dt} ds}\phi_1 + t\int_\Omega w \frac{e^{-\int_1^u g(t)dt}}{\int_0^u e^{-\int_1^s g(t)dt} ds}\phi_1. \tag{4.2.4}$$

We divide now the rest of our proof in cases according to the value p.

Case 1. If $p < 1$ ($\mu^* = 0$), using that $\dfrac{s^p}{\int_0^s e^{-\int_1^t g(u)du} dt} \geq s^{p-1} e^{-\int_0^1 g(u)du}$, for every $s \geq 0$, we have

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{s^p}{\int_0^s e^{-\int_1^t g(u)du} dt} = +\infty$$

and, if $\lambda_0 = \text{mín}\,\Lambda$, there exists $s_0 \in (0,1)$ such that

$$\frac{s^p}{\int_0^s e^{-\int_1^r g(t)dt}dr} > \frac{\mu_1}{\lambda_0} + 1, \quad \forall s \in (0, s_0).$$

We claim that, if $\lambda \in \Lambda$, problem (4.2.3) has no solutions $u \in H_0^1(\Omega)$ with norm $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \left(\frac{s_0}{\alpha}\right)^{1/t}$, where α is given by (1.3.8). Indeed, if by contradiction, we assume the existence of such a solution u for some $\lambda \in \Lambda$, then, by Lemma 1.3.5 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq s_0 < 1$. Consequently, we obtain

$$\frac{u^p}{\int_0^u e^{-\int_1^r g(t)dt}dr} > \frac{\mu_1}{\lambda_0} + 1$$

and

$$e^{-\int_1^u g(t)dt} \geq 1.$$

This, jointly to (4.2.4) and the definition of μ_1 implies that

$$\mu_1 \int_\Omega w\phi_1 \geq \lambda \left(\frac{\mu_1}{\lambda_0} + 1\right) \int_\Omega w\phi_1,$$

which is a contradiction ($\lambda \geq \lambda_0$) proving the claim and thus the lemma in the case $p < 1$.

Case 2. If $p = 1$, in order to prove the lemma, it suffices to show that if, for some $\lambda > 0$, there exist sequences $t_n \in [0,1]$, $\lambda_n \to \lambda$ and $0 \leq u_n \in H_0^1(\Omega)$ with $0 < \|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to 0$, such that

$$\begin{cases} -\Delta u_n + g(u_n)|\nabla u_n|^2 = \lambda_n u_n + t_n & \text{in } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2.5}$$

then $\lambda \leq \mu^* = \mu_1$. To make it, denote $w_n = \displaystyle\int_0^{u_n} e^{-\int_1^s g(t)dt}ds$ and $z_n = w_n/\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}$. We can assume that, up to a subsequence, z_n converges weakly in $H_0^1(\Omega)$ and strongly in $L^q(\Omega)$ for every $q < 2^*$ to some $z \in H_0^1(\Omega)$. Taking $\varphi = e^{-\int_1^{u_n} g(t)dt}(z_n - z)/\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}$ as test function in (4.2.5), we deduce that

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla z_n \nabla(z_n - z) &= \lambda_n \int_\Omega z_n \frac{u_n e^{-\int_1^{u_n} g(t)dt}}{\int_0^{u_n} e^{-\int_1^s g(t)dt}ds}(z_n - z) \\ &\quad + \frac{t_n}{\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \int_\Omega e^{-\int_1^{u_n} g(t)dt}(z_n - z), \end{aligned}$$

and, by dominated convergence theorem, that

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla z_n \nabla(z_n - z) = 0.$$

Therefore, $z_n \to z$ in $H_0^1(\Omega)$ and $\|z\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$.

On the other hand, dividing (4.2.4) (with $u = u_n$ and $t = t_n$) by $\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}$, we have

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla z_n \nabla\phi_1 - \lambda_n \int_\Omega z_n \frac{u_n e^{-\int_1^{u_n} g(t)dt}}{\int_0^{u_n} e^{-\int_1^s g(t)dt}ds}\phi_1 &= \frac{t_n}{\|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}} \int_\Omega e^{-\int_1^{u_n} g(t)dt}\phi_1 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Using that, by Lemma 1.3.5, $\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$ and passing to the limit we deduce that

$$0 \le \int_\Omega \nabla z \nabla \phi_1 - \lambda \int_\Omega z\phi_1 = (\mu_1 - \lambda) \int_\Omega z\phi_1.$$

Since $z \neq 0$, we get $\lambda \le \mu_1$ and the proof of the lemma is completed also in the case $p = 1$. □

Remark 4.2.4. *Observe that a direct consequence of the previous two lemmas is that μ^* is the only possible bifurcation point from zero for positive solutions of* (7).

Proof of Theorem 4.2.2 completed. We claim that $i(K_\lambda, 0) = 1$ for every $\lambda < \mu^*$ and that $i(K_\lambda, 0) = 0$ for every $\lambda > \mu^*$. In order to do that we use the above two lemmas and the homotopy invariance of the degree.

If $\lambda < \mu^*$, we define the operator $H : [0,1] \times H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ by taking $H(t,w)$ as the unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of the problem

$$\begin{gathered} -\Delta u + tg(u)|\nabla u|^2 = t\lambda^+ (w^+)^p, \quad x \in \Omega, \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{gathered}$$

By Lemma 4.2.2 with $\Lambda = \{\lambda\}$, we can consider $\varepsilon > 0$ such that $u \neq H(t,u)$ for every $t \in [0,1]$ and $u \in H_0^1(\Omega)$ with $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \varepsilon$. Since H is compact by Proposition 4.1.6, we can apply the homotopy invariance of the degree to conclude that

$$\begin{aligned} i(K_\lambda, 0) &= \deg\,(I - H(1,\cdot), B_\varepsilon(0), 0) \\ &= \deg\,(I - H(0,\cdot), B_\varepsilon(0), 0) = i((-\Delta)^{-1}, 0) = 1. \end{aligned}$$

On the other hand, if $\lambda > \mu^*$ we can apply in this case the Lemma 4.2.3 to choose $\varepsilon > 0$ such that if $\widetilde{H}(t,w)$ is now the unique solution of

$$\begin{gathered} -\Delta u + tg(u)|\nabla u|^2 = \lambda (w^+)^p + t, \quad x \in \Omega, \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered}$$

where $t \in [0,1]$ and $w \in H_0^1(\Omega)$, then $u \neq \widetilde{H}(t,u)$ for every $t \in [0,1]$ and $u \in H_0^1(\Omega)$ with $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \varepsilon$. Applying again the homotopy invariance of the degree to the compact (by Remark (4.1.9)) operator $\widetilde{H} : [0,1] \times H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, we obtain

$$i(K_\lambda, 0) = \deg\,(I - \widetilde{H}(0,\cdot), B_\varepsilon(0), 0) = \deg\,(I - \widetilde{H}(1,\cdot), B_\varepsilon(0), 0) = 0,$$

where the computation of the last degree is due to Lemma 4.2.3 which implies that $u \neq \widetilde{H}(1,u)$ for every $u \in B_\varepsilon(0)$.

Thus, we have proved the change of index if λ crosses $\lambda = \mu^*$ and the proof follows by using the Rabinowitz Global Bifurcation Theorem. □

4.3. Qualitative properties of continua of positive solutions

In this section we realize an analysis of the qualitative properties of continua of positive solutions, we prove that the proyection of the continua can be bounded or unbounded.

4.3.1. Existence for large λ

The unboundedness of the continuum Σ obtained in Theorem 4.2.1 implies that one of the projections of Σ, either its projection $\mathrm{Proj}_{H_0^1(\Omega)}\Sigma$ on the $H_0^1(\Omega)$-axis or its projection $\mathrm{Proj}_{[0,+\infty)}\Sigma$ on the λ-axis, is an unbounded set. In this section we give sufficient conditions to assure that $\mathrm{Proj}_{[0,+\infty)}\Sigma$ is unbounded. The role of these conditions is to provide for every compact set Λ of λ's the existence of suitable a priori bounds of the $H_0^1(\Omega)$-norm of solutions of (7) with $\lambda \in \Lambda$, i.e., to establish that $\mathrm{Proj}_{H_0^1(\Omega)}\left[\Sigma \cap (\Lambda \times H_0^1(\Omega))\right]$ is bounded. These a priori bounds result is independent from the existence of Σ, more precisely no condition at zero for g is required. The arguments also apply for the continuum Σ_0 given by Theorem 4.2.2.

Theorem 4.3.1. *The projection $\mathrm{Proj}_{[0,+\infty)}\Sigma$ (respectively, Σ_0) of the continuum Σ given by Theorem 4.2.1 (respectively, by Theorem 4.2.2) on the λ-axis is unbounded provided that, in addition to the hypotheses of those theorems, one of the following conditions is satisfied:*

i) *either* $0 \le p < 1$,

ii) *or* $1 \le p < 2$ *and g verifies* (10) *for some constants* $s_1, c > 0$ *and* $\gamma < 2 - p$.

Moreover, if in addition g satisfies that

$$g(s) \le C\left(s^q + \frac{1}{s}\right), \quad \forall s > 0 \tag{4.3.1}$$

for some $q \le p$ and $0 \lneqq f_0$, given a sequence (λ_n, u_n) in Σ (respectively, in Σ_0) with $\lambda_n \to +\infty$ we have that $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$.

Proof. We give the details of the proof for the continuum Σ. The proof for the continuum Σ_0 is equal with the only change of Σ by Σ_0. As it has been mentioned, either $\mathrm{Proj}_{H_0^1(\Omega)}\Sigma$ or $\mathrm{Proj}_{[0,+\infty)}\Sigma$ is an unbounded set. To prove the theorem, it suffices to show that if $\mathrm{Proj}_{H_0^1(\Omega)}\left[\Sigma \cap (\Lambda \times H_0^1(\Omega))\right]$ is bounded for every compact $\Lambda \subset \mathbb{R}$, i.e. the norm $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ of every solution of (7) is bounded provided that λ is in a bounded set. Indeed, this implies that if $\mathrm{Proj}_{H_0^1(\Omega)}\Sigma$ is unbounded, then we also get the unboundedness of $\mathrm{Proj}_{[0,+\infty)}\Sigma$. To make it, we take a positive solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of (7). We divide the proof in two parts according as i) or ii) holds.

i) In the case $0 \le p < 1$, taking $u/\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1}$ as test function and setting $z = \dfrac{u}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}$, we obtain

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{1-p} &\le \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{-p-1} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + g(u)|\nabla u|^2 u\right) \\ &\le \lambda \int_\Omega z^{p+1} + \int \frac{f_0 z}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^p}. \end{aligned}$$

Using Hölder and Sobolev inequalities

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{1-p} &\leq \lambda\left(\int_\Omega z^{2^*}\right)^{\frac{p+1}{2^*}}|\Omega|^{1-\frac{p+1}{2^*}} \\
&\quad +\frac{1}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p}}\|f_0\|_{L^{2N/(N+2)}(\Omega)}\left(\int_\Omega z^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} \\
&\leq \mathcal{S}^{p+1}\lambda|\Omega|^{1-\frac{p+1}{2^*}}+\frac{\mathcal{S}}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p}}\|f_0\|_{L^{2N/(N+2)}(\Omega)},
\end{aligned}$$

which proves in this case that $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ is bounded as λ is bounded.

ii) Let us consider the case $1 \leq p < 2$ and assume that (10) holds with the parameter $\gamma < 2-p$. Thanks to this condition, we may construct a continuous and non negative function $h(s)$ such that $h(s)=0$ for every $s<\frac{s_0}{2}$, $h(s)=\frac{c}{s^\gamma}$ for every $s>s_0$ and $g(s)\geq h(s)$ for every $s>0$. We also define the function $\varphi(s)$ given by

$$\varphi(s)=\int_0^s \exp\left(-\int_v^s h(t)dt\right)dv, \quad \forall s\geq 0.$$

It is elementary to prove that

a) $0\leq\varphi(s)\leq s$ for every $s\in(0,+\infty)$.

b) $\varphi'(s)+h(s)\varphi(s)=1$ for every $s\in(0,+\infty)$.

c) There exits $\sigma>0$ with $h(s)\varphi(s)\leq\sigma$ for every $s>0$.

Observe that, using (c), $h(u)\varphi(u)\in L^\infty(\Omega)$, which, by (b), implies that it verifies $\nabla\varphi(u)\in L^2(\Omega)$. Taking into account that, by (a), we have $\varphi(u)\leq u$ we deduce that $\varphi(u)\in H_0^1(\Omega)$. Hence we can take $\varphi(u)$ as test function and using the inequality $h(s)\leq g(s)$ we obtain

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\overset{(b)}{=} \int_\Omega |\nabla u|^2\left(\varphi'(u)+h(u)\varphi(u)\right) \\
&\leq \int_\Omega\left(\nabla u\nabla\varphi(u)+g(u)|\nabla u|^2\varphi(u)\right) \\
&= \int_\Omega(\lambda u^p+f_0)\varphi(u).
\end{aligned}$$

Observe also that $\frac{\varphi(s)}{s^\gamma}$ is bounded from above near infinity (by (c) and construction of h) and near zero (by definition of φ and $\gamma<2-p<1$). Thus, there exists $C>0$ such that $\varphi(s)\leq Cs^\gamma$ for every $s>0$. Therefore, dividing by $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+\gamma}$ in the previous inequality and using the Hölder and Sobolev inequalities as before we get

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{2-p-\gamma} &\leq C\lambda\int_\Omega z^{p+\gamma}+\int\frac{f_0 z}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+\gamma-1}} \\
&\leq C\lambda\mathcal{S}^{p+\gamma}|\Omega|^{1-\frac{p+\gamma}{2^*}}+\frac{\mathcal{S}}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+\gamma-1}}\|f_0\|_{L^{2N/(N+2)}(\Omega)},
\end{aligned}$$

and consequently, we deduce again that if λ is bounded, then the norm $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ is also bounded.

In conclusion, it has been proved the unboundedness of $\mathrm{Proj}_{[0,+\infty)}\Sigma$ and the first part of theorem is concluded.

Now, we assume that $0 \lneqq f_0$ and we prove the second part of the theorem by contrapositive. Indeed, if $(\lambda_n, u_n) \in \Sigma$, then considering $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ and taking $\frac{\varphi}{u_n^q}$ as test function (it is an admissible test function thanks to Proposition 4.1.4) we have

$$\int_\Omega \nabla u_n \frac{\nabla \varphi}{u_n^q} - q\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{u_n^{q+1}}\varphi + \int_\Omega \frac{g(u_n)}{u_n^q}|\nabla u_n|^2\varphi - \int_\Omega f_0 \frac{\varphi}{u_n^q} = \lambda_n \int_\Omega u_n^{p-q}\varphi.$$

Dropping negative terms we get

$$\int_\Omega \nabla u_n \frac{\nabla \varphi}{u_n^q} + \int_\Omega \frac{g(u_n)}{u_n^q}|\nabla u_n|^2\varphi \geq \lambda_n \int_\Omega u_n^{p-q}\varphi.$$

By Proposition 4.1.4, for every $\omega \subset\subset \Omega$, u_n is uniformly away from zero in supp φ and therefore, using (4.3.1) we deduce that $\frac{g(u_n)}{u_n^q}$ is bounded from above in supp φ and the sequence $\int_\Omega u_n^{p-q}\varphi$ is also away from zero. Therefore, if u_n is bounded in $H_0^1(\Omega)$, the left-hand side of the above equality is bounded from above and then λ_n has to be also bounded. We have proved the contrapositive of the second part of theorem. $\square$

Remark 4.3.1. *Actually, if $\lambda > 0$ is fixed, we have proved in the previous theorem an a priori estimate for the $H_0^1(\Omega)$-norm of solutions of* (7). *This a priori bound is the usual keystone to prove the existence of solutions by means of an approximating approach. We have to point out that this is not enough, at least, in the case of singular functions g where the uniform strong maximum principle is also essential. For instance, if $u \in H_0^1(\Omega)$ is a solution of the problem*

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{|\nabla u|^2}{u^{2+\varepsilon}} = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

and we take u as test function, we obtain a priori estimates of the norm $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. However, it has been proved in [8] that this problem has no solution for $\varepsilon > 0$.

Remark 4.3.2. *We can prove the same result for the problem* (4.1.2) *for the nonlinearity $f(\lambda, x, u) \leq \lambda u^p + f_0(x)$ with $p < 2$, $0 \leq f_0 \in L^r(\Omega)$ for some $r > \frac{N}{2}$ and $g : \Omega \times (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ a Carathéodory function with*

$$g(x,s) \geq h(s), \quad \forall s > 0,$$

for some continuous function $h : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ verifying the hypotheses of the previous theorem.

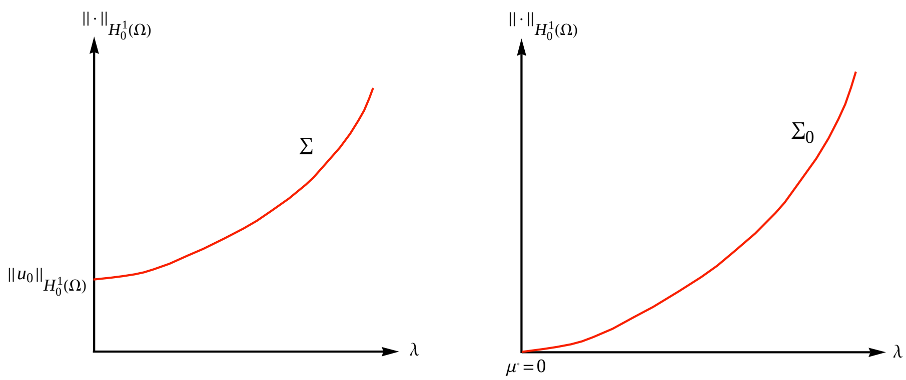

Figure 4.2: Existence of solution for every $0 < \lambda$ in the case $0 \leq p < 1$ with g continuous in 0.

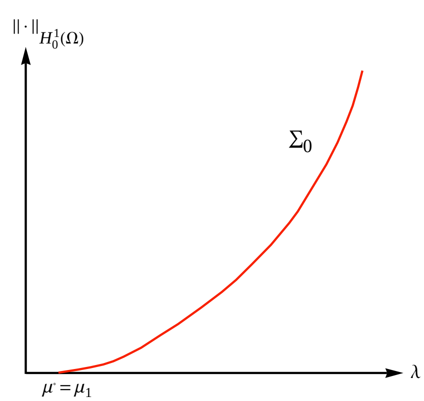

Figure 4.3: Existence of solution for every $\lambda > 0$ such that $\mu_1 < \lambda$ in the case $p = 1$ with g continuous in 0.

4.3.2. Nonexistence for large λ

In the semilinear case ($g \equiv 0$) it is known that, given $f_0 \gneqq 0$ and $p > 1$, there exists $\lambda^* > 0$ such that (7) has no positive solution for every $\lambda > \lambda^*$. Notice also that $\lambda^* = \mu_1$ in the case $p = 1$ even if $f_0 \equiv 0$. As it is shown in the previous section, the quasilinear case is quite different. However, this section is devoted to obtain sufficient conditions on g for the existence of such a λ^*.

Theorem 4.3.2. *Consider $0 \lneqq f_0 \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$ and assume that $g \geq 0$ is a continuous function in $(0, +\infty)$ which either is also continuous at zero or is decreasing in a neighborhood of zero with $\sqrt{g}$ integrable also in a neighborhood of zero and $\lim_{s\to 0} g(s) = +\infty$. If condition (11) holds and there exists $c_1, c_2 \geq 0$ such that*

$$\exp\left(-2\int_1^s g(t)dt\right) \leq c_1 g(s) + c_2, \quad \forall s < 1, \tag{4.3.2}$$

then, there exists $\lambda^* > 0$ such that (7) has no positive solution for $\lambda > \lambda^*$.

Remark 4.3.3. *If g is integrable in a neighborhood of zero, then (4.3.2) is trivially satisfied. Therefore, if, in addition to (11), hypothesis (G) is satisfied, then the unbounded continuum Σ given by Theorem 4.2.1 satisfies $Proj_{[0,+\infty)}\Sigma_1 \subset [0, \lambda^*]$.*

Proof. For $\omega \subset\subset \Omega$ we denote by $\chi_\omega(x)$ the characteristic function of ω and consider the first eigenvalue (respectively eigenfunction) μ_ω (respectively ϕ_ω) associated to the eigenvalue problem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \chi_\omega(x) u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

It is sufficient s to show that a necessary condition for the existence of solution $u \in H_0^1(\Omega)$ of (7) is $\mu_\omega \geq \lambda c$, for a suitable positive constant c. To make it, consider a sequence of functions $0 \leq \phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ converging in $H_0^1(\Omega)$ to ϕ_ω. Observe that the function $\varphi(u) = e^{-\int_1^{T_k(u)} g(t)dt}\phi_n$ belongs to $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ (use Proposition 4.1.4 in the case that g is unbounded near zero). Thus, taking $\varphi(u)$ as test function in the equation satisfied by u and using that $f_0 \geq 0$ we get

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_n e^{-\int_1^{T_k(u)} g(t)dt} + \int_{\{u \geq k\}} g(u)|\nabla u|^2 e^{-\int_1^k g(t)dt}\phi_n \geq \lambda \int_\Omega u^p e^{-\int_1^{T_k(u)} g(t)dt}\phi_n.$$

Taking limits, firstly as $k \to \infty$ (using Fatou Lemma) and secondly as $n \to \infty$ (we know that $\phi_n \overset{H_0^1(\Omega)}{\longrightarrow} \phi_\omega$ and thanks to (4.3.2) we can use Lebesgue Theorem), we deduce

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_\omega e^{-\int_1^u g(t)dt} \geq \lambda \int_\Omega u^p e^{-\int_1^u g(t)dt}\phi_\omega.$$

We claim now that the function $w = \displaystyle\int_0^u e^{-\int_1^s g(t)dt}ds$ satisfies that $w \in H_0^1(\Omega)$. Indeed, using (4.3.2) and that $\sqrt{g}$ is integrable at zero, we have

$$\begin{aligned} 0 \leq w &= \int_0^1 e^{-\int_1^s g(t)dt}ds + \int_1^u e^{-\int_1^s g(t)dt}ds \\ &\leq \int_0^1 \sqrt{c_1 g(s) + c_2}ds + u - 1 \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

On the other hand by the concept of solution, $g(u)|\nabla u|^2 \in L^1(\Omega)$ and this allows to prove that $\nabla u e^{-\int_1^u g(t)dt}\chi_{\{u<1\}} \in L^2(\Omega)$. Indeed, using (4.3.2) we deduce

$$|\nabla u|^2 e^{-2\int_1^u g(t)dt}\chi_{\{u<1\}} \le |\nabla u|^2 (c_1 g(u) + c_2) \in L^1(\Omega).$$

Thus,

$$\nabla w = \nabla u e^{-\int_1^u g(t)dt}\chi_{\{u<1\}} + \nabla u e^{-\int_1^u g(t)dt}\chi_{\{u\ge 1\}} \in L^2(\Omega).$$

Now we observe that, using again (4.3.2) and that $\sqrt{g} \in L^1(0,1)$, we deduce that $\int_0^1 e^{-\int_1^s g(t)dt} ds < \infty$ and we can define the function $\psi(u) = \dfrac{u^p e^{-\int_1^u g(t)dt}}{\int_0^u e^{-\int_1^s g(t)dt} ds}$ for $u > 0$. Therefore,

$$\begin{aligned} \mu_\omega \int_\Omega \chi_\omega(x) w \phi_\omega &= \int_\Omega \nabla w \nabla \phi_\omega \ge \lambda \int_\Omega w \psi(u) \phi_\omega \\ &\ge \lambda \int_\Omega \chi_\omega(x) w \phi_\omega \psi(u). \end{aligned}$$

Using Proposition 4.1.4, there exists $L_\omega > 0$ such that $u(x) > L_\omega$ a.e. $x \in \omega$. Moreover, by condition (11), $c := \inf\limits_{s\in[c_\omega,\infty)} \psi(s) > 0$ and we conclude that

$$\mu_\omega \int_\Omega w\phi_\omega \ge \lambda c \int_\Omega w\phi_\omega,$$

that is, $\mu_\omega \ge \lambda c$ as desired. □

Remark 4.3.4. *If g satisfies* (4.1.3) *and we assume that there exists a continuous function $h : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ which is integrable in a neighborhood of zero and satisfies* (11) *and constants $s_1, s_2, \delta_1, c_1, c_2 > 0$ such that*

$$\frac{s^p}{\int_0^s e^{\int_r^s h(t)dt} dr} \ge \delta_1 > 0, \quad \forall s < s_1.$$

and

$$\exp\left(-2\int_1^s h(t)dt\right) \le c_1 g(x,s) + c_2, \quad \forall s < s_2, \quad \textit{a.e. in } \Omega,$$

then the assertion of the Theorem 4.3.2 remains true for the problem (4.1.2).

4.4. Proofs of the main theorems

We show in this section how to prove Theorems 4, 5, 6 and 7 from the results in the previous sections.

Proof of Theorem 4. We deduce from Theorem 4.2.1 the existence of an unbounded continuum $\Sigma \subset S$ of positive solutions which contains $(0, u_0)$, where u_0 is the unique solution of (7) for $\lambda = 0$.

1. In the case that (9), we use Theorem 4.3.2 to assure that there exists $\lambda^* > 0$ such that (7) has no positive solutions for $\lambda > \lambda^*$.

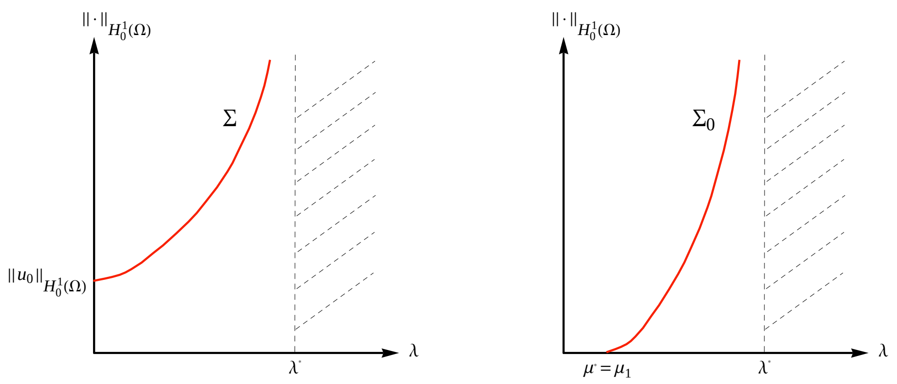

Figure 4.4: Non existence of solution for $\lambda > \lambda^*$.

2. If (11) is satisfied, according to Theorem 4.3.1 the projection $\mathrm{Proj}_{[0,+\infty)}\Sigma$ on the λ-axis is unbounded. □

Proof of Theorem 5. According to Theorem 4.2.1, there exists an unbounded continuum $\Sigma \subset S$ which contains $(0,u_0)$, where u_0 is the unique solution of (7) for $\lambda = 0$. Moreover, thanks to Theorem 4.3.1, the projection $\mathrm{Proj}_{[0,+\infty)}\Sigma_0$ on the λ-axis is unbounded. □

Proof of Theorem 6. By Theorem 4.2.1, there exists an unbounded continuum $\Sigma \subset S$ which contains $(0,u_0)$, where u_0 is the unique solution of (7) for $\lambda = 0$.

The rest of the proof falls naturally into two parts according to the statement of the theorem.

1. If (10) holds, by Theorem 4.3.1, the projection $\mathrm{Proj}_{[0,+\infty)}\Sigma_0$ on the λ-axis is unbounded.

2. If (11) holds, using Theorem 4.3.2, it follows that there exists $\lambda^* > 0$ such that (7) has no positive solutions for $\lambda > \lambda^*$. □

Proof of Theorem 7.

(1)-(2) In order to prove items (1) and (2) we first apply Theorem 4.2.2 for the existence of an unbounded continuum $\Sigma_0 \subset S$ of positive solutions emanating from $(\mu_1, 0)$. If (9) is satisfied (i.e. item (1)) we argue as in the proof of Theorem 4.3.2. Observe that if $f_0 \equiv 0$, USMP is no longer true. However, we have the constant $0 < c = \inf_{s\in(0,\infty)} \psi(s)$, where the function ψ is defined in the proof of Theorem 4.3.2. Hence, we can deal with the same proof with $\omega = \Omega$. Thus we obtain again that there exists $\lambda^* > 0$ such that (7) has no positive solutions for $\lambda > \lambda^*$ and item (1) follows. On the other hand, if (10) is verified then, thanks to Theorem 4.3.1, the projection $\mathrm{Proj}_{[0,+\infty)}\Sigma_0$ on the λ-axis is unbounded and we finish the proof of item (2).

(3) Firstly, we use Theorem 4.2.2 to deduce the existence of an unbounded continuum $\Sigma_0 \subset S$ of positive solutions emanating from $(0,0)$. We conclude from Theorem 4.3.1 that the projection $\mathrm{Proj}_{[0,+\infty)}\Sigma_0$ on the λ-axis is unbounded.

(4) We define the function

$$\varphi(s) = \int_0^{T_1(s)} \exp\left(\int_s^t g(r)dr\right)dt, \quad \forall s > 0.$$

This function satisfies that

a) $\varphi'(s) + g(s)\varphi(s) = [T_1'(s)]^2$ for every $0 < s \neq 1$.

b) There exists a positive constant C such that $s^p\varphi(s) \leq C[T_1(s)]^2$. Indeed, this is trivial for $s \leq 1$, while for $s > 1$, taking into account that $h \leq 0$,

$$\begin{aligned} s^p\varphi(s) &= \int_0^1 s^p \exp\left(\int_s^1 g(r)dr + \int_1^t g(r)dr\right)dt \\ &= \varphi(1)\exp\left(\int_s^1 \left(g(r) - \frac{p}{r}\right)dr\right) \\ &= \varphi(1)\exp\left(-\int_1^{+\infty} h(r)dr\right) \equiv C \leq C[T_1(s)]^2. \qquad (12) \end{aligned}$$

c) If $u \in H_0^1(\Omega)$ is a positive solution of (7) with $p > 1$, $f_0 \equiv 0$ and g continuous at zero, then $\varphi(u) \in H_0^1(\Omega)$. Taking $\varphi(u)$ as test function, in the equation satisfied by u, we obtain

$$\begin{aligned} \mu_1 \int_\Omega [T_1(u)]^2 &\leq \int_\Omega |\nabla T_1(u)|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2(\varphi'(u) + g(u)\varphi(u)) \\ &\leq \lambda \int_\Omega u^p\varphi(u) \leq C\lambda \int_\Omega [T_1(u)]^2. \end{aligned}$$

We finished the proof by taking $\lambda^* = \frac{\mu_1}{C}$. $\square$

Notas finales y problemas abiertos

Esta última parte de la memoria estará dedicada a la exposición de algunos problemas que pueden plantearse tras una detenida lectura del contenido. Los interrogantes que surgen son numerosos; no obstante hemos procurado seleccionar sólo los más significativos desde nuestro puento de vista. Algunos de ellos se plantean simplemente como cuestiones abiertas (a las que hemos dedicado tiempo y esfuerzo sin conseguir tener, hasta el momento, una respuesta satisfactoria); otros son posibles líneas de investigación en las que puede vertebrase el fututo de nuestra investigación.

A.1. Problemas elípticos con crecimiento cuadrático

Dedicamos esta sección del apéndice a describir algunos problemas abiertos que nos planteamos para el problema (1.3.1) que hemos estudiado en el Capítulo 1. En algunos casos hemos sido capaces de evitar la hipótesis (5) del dato f. Esto es debido a que la naturaleza de los casos es diferente y no hemos podido aplicar técnicas similares. Por lo tanto existen diversos casos en los que nos preguntamos su necesidad o no. Esta cuestión la analizamos en la Subsección A.1.1. Como podemos observar en el Teorema 2.4.7 el resultado de existencia es óptimo. En cambio, quedan pendientes algunos casos para los que no hemos sido capaces de demotrar la unicidad de solución. Analizamos dichos casos en la Subsección A.1.2.

A.1.1. Existencia de solución para datos no nulos

Dedicamos este epígrafe a intentar comprender el sentido que tiene la hipótesis (5) de f. Tal y como vimos en la Sección 2.5. (en la cual explicamos el papel de la constante de elipticidad α) si f no verifica dicha condición, pero no es idénticamente nula, los resultados de existencia conocidos dependen explícitamente de la constante de elipticidad. Concretamente, en [24] se prueba la existencia de solución para el problema (6) con $\gamma < 1$ y $\alpha > 0$, en cambio si $\gamma = 1$ la constante de elipticidad debe verificar $\alpha > 2$ y en [75] se llega hasta $\alpha > 1$. Por tanto, queda pendiente probar que ocurre en el caso $1 < \gamma < 2$ y si en el caso de $\gamma = 1$ se podrá llegar hasta $\alpha > 0$.

A.1.2. Unicidad de solución

Respecto a la unicidad de solución, en [13] se ha probado la existencia de solución para el problema (1.3.1) con $g(x,s) = \frac{1}{s^\gamma}$ y $0 \leq \gamma < 1$. De acuerdo con el resultado de existencia Teorema 2.4.7 queda como problema abierto saber si hay o no unicidad en el caso $1 < \gamma < 2$. Dados $\lambda, r > 0$, fijamos $a > 0$, consideremos las funciones $\sigma, \psi :$

$(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, dadas por

$$\sigma(s) = \int_a^s \frac{\lambda}{t^r} dt, \quad \psi(s) = \int_a^s e^{-\sigma(t)} dt, \text{ para cada } s > 0.$$

Hemos sido capaces de probar en este caso la unicidad imponiendo la condición

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} e^{-\sigma(u)} \in L^1(\Omega). \tag{A.1}$$

Desde nuestro punto de vista no es natural imponer dicha hipótesis para probar la unicidad.

Concretamente el resultado que sabemos probar es el siguiente.

Teorema A.1.1. *Sean $f \in L^1(\Omega)$ y $\lambda, r > 0$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ (resp. $v \in H_0^1(\Omega)$) es subsolución (respect. supersol.) del problema* (1.3.17) *tales que $u \leq v$ en $\partial\Omega$ y verifican la hipótesis* (A.1)*, entonces $u \leq v$ a.e. en Ω.*

Para probarlo necesitamos algunos resultados técnicos que demostramos a continuación. Observemos que

$$\sigma'(s) = \frac{\lambda}{s^r} > 0 \text{ con lo que } \sigma \text{ es creciente,}$$

$$\psi'(s) = e^{-\sigma(s)} \text{ y por lo tanto } \psi' \text{ es decreciente.}$$

Para cada $\varepsilon > 0$, definimos $\sigma_\varepsilon(s) \equiv \sigma(s+\varepsilon)$ y $\psi_\varepsilon(s) \equiv \psi(s+\varepsilon)$.

Lema A.1.2. *σ_ε es acotada inferiormente.*

Lema A.1.3. *Para cada $0 < u \in H^1(\Omega)$ se tiene que $e^{-\sigma_\varepsilon(u)} = e^{-\sigma(u+\varepsilon)} \in W^{1,\infty}(\Omega)$.*

Demostración. En primer lugar probaremos que $e^{-\sigma_\varepsilon(s)}$ es

- acotada en $(0,+\infty)$ (porque σ_ε es acotada inferiormente).
- derivable con derivada acotada en $(0,+\infty)$. En efecto, su derivada es

$$\sigma_\varepsilon'(s) e^{-\sigma_\varepsilon(s)} = \frac{-\lambda}{(s+\varepsilon)^r} e^{-\sigma_\varepsilon(s)}.$$

□

Lema A.1.4. *Si $u \in H^1(\Omega)$ entonces*

$$\psi_\varepsilon(u) = \psi(u+\varepsilon) \in H^1(\Omega),$$

con $\nabla\psi_\varepsilon(u) = e^{-\sigma_\varepsilon(u)} \nabla u$.

Demostración. Basta usar la regla de la cadena puesto que ψ_ε es derivable con derivada $\psi_\varepsilon'(s) = e^{-\sigma_\varepsilon(s)}$ acotada. □

Proposición A.1.5. *Si $0 < u, v \in H_0^1(\Omega)$ con $u \leq v$ en $\partial\Omega$, entonces*

$$\varphi = e^{-\sigma(u+\varepsilon)} T_k[\psi(u+\varepsilon) - \psi(v+\varepsilon)]^+ \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega).$$

Demostración. **Paso 1**. $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ porque $e^{-\sigma(u+\varepsilon)} \in L^\infty(\Omega)$ (Lema A.1.3) y $T_k(s)$ es una función acotada.

Paso 2. $\varphi \in H^1(\Omega)$ ya que por el lema A.1.4

$$\psi(u+\varepsilon), \psi(v+\varepsilon) \in H^1(\Omega),$$

y así por la regla de la cadena

$$T_k[\psi(u+\varepsilon) - \psi(v+\varepsilon)]^+ \in H^1(\Omega).$$

Por el lema A.1.3, $e^{-\sigma_\varepsilon(u)} = e^{-\sigma(u+\varepsilon)} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ y, por tanto, $\varphi \in H^1(\Omega)$.

Paso 3. $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. En efecto, observando

$$\psi(s) - \psi(s_0) = \int_0^1 \psi'(s_0 + t(s-s_0))(s-s_0)dt$$

y que ψ es creciente, tenemos:

$$\begin{aligned} 0 \le [\psi(u+\varepsilon) - \psi(v+\varepsilon)]^+ &= \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \psi'(v+\varepsilon+t(u-v))(u-v)dt & \text{si } u(x) \ge v(x) \\ 0, & \text{si } u(x) < v(x) \end{cases} \\ &= (u-v)^+ \int_0^1 \psi'(v+\varepsilon+t(u-v))dt \\ (\psi' \text{ es decreciente}) \quad &\le (u-v)^+ \psi'(\varepsilon). \end{aligned}$$

Como

$$0 \le \varphi = e^{-\sigma(u+\varepsilon)}[\psi(u+\varepsilon) - \psi(v+\varepsilon)]^+ \quad \le \quad C(u-v)^+\psi'(\varepsilon) \in H_0^1(\Omega),$$

deducimos que $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. □

Una vez probados los resultados técnicos necesarios, estudiamos la unicidad de solución para el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \dfrac{\lambda|\nabla u|^2}{u^r} = f(x) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^N$ ($N \ge 3$), $\lambda, r > 0$ y $f \in L^1(\Omega)$.

<u>*Prueba del Teorema A.1.1*</u>. Gracias a la Proposición A.1.5, podemos tomar como función test

$$\varphi = e^{-\sigma(u+\varepsilon)}T_k[\psi(u+\varepsilon) - \psi(v+\varepsilon)]^+$$

en (1.3.17) y obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla u \nabla \left(e^{-\sigma(u+\varepsilon)}T_k[\psi(u+\varepsilon) - \psi(v+\varepsilon)]^+\right) \\ &+ \int_\Omega \frac{\lambda|\nabla u|^2}{u^r} e^{-\sigma(u+\varepsilon)}T_k[\psi(u+\varepsilon) - \psi(v+\varepsilon)]^+ \\ &\le \int_\Omega f e^{-\sigma(u+\varepsilon)}T_k[\psi(u+\varepsilon) - \psi(v+\varepsilon)]^+, \end{aligned}$$

y así

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega \frac{\lambda|\nabla u|^2}{(u+\varepsilon)^r} e^{-\sigma(u+\varepsilon)} T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \\
&+\int_\Omega \nabla u e^{-\sigma(u+\varepsilon)} \nabla T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \\
&+\int_\Omega \frac{\lambda|\nabla u|^2}{u^r} e^{-\sigma(u+\varepsilon)} T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \\
&\leq \int_\Omega f e^{-\sigma(u+\varepsilon)} T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ .
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, tenemos

$$
\int_\Omega \nabla u e^{-\sigma(u+\varepsilon)} \nabla T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \leq \int_\Omega f e^{-\sigma(u+\varepsilon)} T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ . \tag{A.2}
$$

Ahora, tomamos como función test $\varphi = e^{-\sigma(v+\varepsilon)} T_k[\psi(u)-\psi(v)]^+$ en (1.3.17), y siguiendo las mismas ideas de antes tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla v e^{-\sigma(v+\varepsilon)} \nabla T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \\
&+\int_\Omega \left(\frac{1}{v^r}-\frac{1}{(v+\varepsilon)^r}\right) \lambda|\nabla v|^2 e^{-\sigma(v+\varepsilon)} T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \\
&\geq \int_\Omega f e^{-\sigma(v+\varepsilon)} T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ .
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

Restamos (A.3) de (A.2) y obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\nabla u e^{-\sigma(u+\varepsilon)} - \nabla v e^{-\sigma(v+\varepsilon)}\right) \nabla T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \\
&\leq \int_\Omega f(e^{-\sigma(u+\varepsilon)} - e^{-\sigma(v+\varepsilon)}) T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \\
&+\int_\Omega \left(\frac{1}{v^r}-\frac{1}{(v+\varepsilon)^r}\right) \lambda|\nabla v|^2 e^{-\sigma(v+\varepsilon)} T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ .
\end{aligned}
$$

Como ψ_ε es creciente y $e^{-\sigma_\varepsilon}$ es decreciente, obtenemos

$$
(e^{-\sigma(u+\varepsilon)} - e^{-\sigma(v+\varepsilon)}) T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \leq 0
$$

para $x \in \Omega$, y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\nabla u e^{-\sigma(u+\varepsilon)} - \nabla v e^{-\sigma(v+\varepsilon)}\right) \nabla T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \\
&\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{v^r}-\frac{1}{(v+\varepsilon)^r}\right) \lambda|\nabla v|^2 e^{-\sigma(v+\varepsilon)} T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ .
\end{aligned}
$$

Ahora, como $\nabla[\psi(u+\varepsilon)] = \nabla u\psi'(u+\varepsilon) = \nabla u e^{-\sigma(u+\varepsilon)}$ tenemos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left|\nabla T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+\right|^2 \\ &\leq \int_\Omega \left(\frac{1}{v^r}-\frac{1}{(v+\varepsilon)^r}\right)\lambda|\nabla v|^2 e^{-\sigma(v+\varepsilon)} T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+.\end{aligned} \tag{A.4}$$

Como

$$\left(\frac{1}{v^r}-\frac{1}{(v+\varepsilon)^r}\right) e^{-\sigma(v+\varepsilon)} \longrightarrow 0 \text{ puntualmente },$$

$$\lambda|\nabla v|^2 \text{ no depende de } \varepsilon,$$

$$T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \in L^\infty(\Omega),$$

y tenemos que, gracias a la hipótesis (A.1), que

$$\left|\frac{1}{v^r}-\frac{1}{(v+\varepsilon)^r}\right| |e^{-\sigma(v+\varepsilon)}| \leq \left(\frac{|\nabla v|^2}{v^r}+\frac{|\nabla v|^2}{(v+\varepsilon)^r}\right) e^{-\sigma(v)} \leq \frac{2|\nabla v|^2}{v^r} e^{-\sigma(v)} \in L^1(\Omega),$$

aplicamos el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para deducir que, cuando $\varepsilon \to 0$ tenemos que

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{v^r}-\frac{1}{(v+\varepsilon)^r}\right)\lambda|\nabla v|^2 e^{-\sigma(v+\varepsilon)} T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ \to 0.$$

Además, como

$$\left|\nabla T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+\right|^2 \geq 0$$

y

$$\int_\Omega \left|\nabla T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+\right|^2 \in L^1(\Omega)$$

usamos el Lema de Fatou y obtenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \left|\nabla T_k[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+\right|^2 \geq \int_\Omega \left|\nabla T_k[\psi(u)-\psi(v)]^+\right|^2.$$

Así, tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ en (A.4) obtenemos que

$$\int_\Omega \left|\nabla T_k[\psi(u)-\psi(v)]^+\right|^2 \leq 0.$$

Por consiguiente

$$T_k\left[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)\right]^+ = 0, \quad \forall k>0.$$

Se sigue que $[\psi(u+\varepsilon)-\psi(v+\varepsilon)]^+ = 0$ y, usando la monotonía de ψ,

$$u(x)+\varepsilon \leq v(x)+\varepsilon \text{ a.e in } \Omega.$$

Y por lo tanto

$$u(x) \leq v(x) \text{ a.e in } \Omega.$$

$\square$

A.2. El caso evolutivo

Detallamos en esta sección las cuestiones que nos hemos planteado sin éxito relativas al Capítulo 3. En el caso del problema parabólico con crecimiento natural en el gradiente (3.0.1) podemos destacar la posible continuación al estudio de problemas más generales que detallamos en la Subsección A.2.1. Además, para el problema parabólico con gradiente cuadrático modelo (4), no sabemos si hay o no unicidad para ciertos valores de γ y tenemos pendiente estudiar la no existencia de solución para algunos casos que detallamos en la Subsección A.2.2.

A.2.1. Clases de problemas más generales

Respecto al *lower order term* del problema (3.0.1), cabe destacar que se puede considerar una clase más grande de problemas singulares. Destacamos como un problema abierto, el estudio de la clase de problemas cuyo modelo es

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + \dfrac{u|\nabla u|^q}{|\kappa - u|^\gamma(\kappa - u)} = f(x,t) & \text{en } Q, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T), \end{cases} \tag{A.1}$$

donde q, κ, γ son parámetros no negativos. En el Capítulo 3 hemos considerado, en algún sentido, los casos extremos del problema (A.1), a saber el caso $q = 0, \kappa > 0, \gamma > 1$ (caso semilineal) y $\kappa = 0, q = 2, \gamma < 2$ (problemas casilineales con *crecimiento natural*). La mayoría de los problemas restantes están lejos de ser bien entendidos incluso en el caso estacionario. Concretamente, el estudio la existencia de solución y de otras propiedades tales como la unicidad de solución, la no existencia e incluso el comportamiento asintótico de sus soluciones.

Recientemente en [50] han estudiado un problema elíptico casilineal con crecimiento cuadrático y una singularidad en 1. Concretamente, el problema que consideran es

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\big(a(x,u,\nabla u)\big) + \dfrac{\operatorname{sign}(u-1)}{|u-1|^\theta}|\nabla u|^2 = f(x) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde a es un operador de tipo Leray-Lions y $0 < \theta < 1$.

Demuestran que existe solución débil del problema para todo $f \in L^m$ con $m \geq \frac{2N}{N+2}$. También deducen que la singularidad se alcanza; es decir, que si f es lo suficientemente grande, la solución no está acotada por 1.

Las principales dificultades tienen que ver con el signo de $u-1$ (cómo definir los problemas aproximantes o la necesidad de utilizar funciones test adecuadas) y sobre todo con la singularidad: dar sentido a la ecuación en 1, ver que ∇u_n converge débilmente a ∇u, que $a(x,u_n,\nabla u_n)$ converge débilmente a $a(x,u,\nabla u)$ en $L^2(\Omega)$ y que $\dfrac{\operatorname{sign}(u_n-1)}{|u_n-1|^\theta}|\nabla u_n|^2$ converge fuertemente a $\dfrac{\operatorname{sign}(u-1)}{|u-1|^\theta}|\nabla u|^2$ en $L^1(\Omega)$.

A.2.2. Unicidad de solución

En la Subsección 1.3.1. hemos probado un principio de comparación para algunos tipos de operadores y unicidad de solución para el problema (1.3.17) bajo ciertas condiciones. Concretamente, para el problema modelo (4) de la introducción hemos deducido la unicidad de solución si $\gamma < 1$ y $\alpha > 0$ o si $\gamma > 1$ verificando (1.3.16). Nos queda por tanto entender el significado de la condición (1.3.16) y comprobar si es necesaria o no.

A.2.3. No existencia de solución

La condición (2.0.2) debería ser, en algún sentido, suficiente para delimitar la existencia de la no existencia de solución como se puede ver en la Sección 2.4 para el caso estacionario. El método seguido no es válido para el caso evolutivo debido al reescalamiento en el tiempo. Concretamente, la ecuación de valores propios sería $u_t - \Delta u = \lambda u$ pero si tomamos $v = ue^{-\mu t}$, con $\mu > 0$, la ecuación se transforma en

$$v_t - \Delta v + (\mu - \lambda)v = 0,$$

la cual no es de valores propios si $\mu > \lambda$.

A.3. Técnicas de bifurcación

El Capítulo 4 está dedicado al estudio de la existencia de continuos de soluciones del problema casilineal con crecimiento cuadrático (7) y de sus propiedades. A lo largo del dicho estudio surgen diversas cuestiones en las cuales estamos trabajando y pensamos que obtendremos resultados satisfactorios. Concretamente, en la Subsección A.3.1. analizamos algunas situaciones en las cuales nos preguntamos si hay bifurcación desde cero. En la Subsección A.3.2. describimos algunos casos para los cuales tenemos cierta información que no podemos aprovechar debido a que no sabemos probar la existencia de un continuo de soluciones. Además, cabe preguntarse si es posible aprovechar las técnicas del Capítulo 4 para estudiar el denominado cóncavo-convexo tal y como describimos en la Subsección A.3.3.

A.3.1. Bifurcación desde cero

Para cada g continua en cero (con $f_0 \equiv 0$) hemos probado que hay bifurcación desde cero para el problema (7) en el Teorema 4.2.2. Pero, no sabemos que ocurre si g es singular en cero ya que no hay soluciones triviales. Una técnica a seguir podría ser realizar una aproximación g_n (continua en cero) de la función g. Así obtendríamos un continuo acotado Σ_n que emana desde cero para cada n. El problema es probar si existe un límite de dicha sucesión de continuos. Para probar la existencia del límite es fundamental la precompacidad del conjunto de soluciones no triviales. Esto requiere extender el Teorema 4.1.6, y para ello es necesario obtener la cota por abajo de las soluciones aproximadas (el principio del máximo fuerte uniforme), es decir, probar la Proposición 4.1.4 para este caso. Para ello habría hacer un estudio de la condición de Keller-Osserman (1.1.6) tal y como lo hacemos en la Subsección 2.1.1.

A.3.2. Bifurcación desde infinito

Describimos un caso en el que se verifican las hipótesis del Teorema 4-1) de la introducción pero no sabemos la existencia de un continuo de soluciones. Concretamente, para el problema (7), se verifican las hipótesis del Teorema 4-1) para $g(s) = \frac{c}{s}$ con $c < \frac{1}{2}$. Es decir, se cumplen (9), (4.3.2) y $\sqrt{g}$ es integrable en cero.

- (9) se verifica ya que:

$$\frac{ue^{-\int_1^u g(t)dt}}{\int_0^u e^{-\int_1^s g(t)dt}ds} = \frac{u}{\int_0^u e^{-\int_u^s g(t)dt}ds} = \frac{u}{\int_0^u \frac{u^c}{s^c}ds} = \frac{u}{u^c \frac{u^{1-c}}{1-c}} = 1-c > 0.$$

- Finalmente (4.3.2) $\exp\left(-2\int_1^s g(t)dt\right) = \frac{1}{s^{2c}} \leq c_1\frac{c}{s} + c_2, \quad \forall s < 1$ si y solo si $1 \leq c_1 s^{2c-1} + c_2 s^{2c}$, es decir para $c < \frac{1}{2}$.

La cuestión es que no sabemos si hay existencia de un continuo ya que no se sabe la compacidad del operador K usando las técnicas de la Sección 4.1.

Otro problema abierto es saber cual es es el punto de bifurcación desde infinito.

A.3.3. Caso cóncavo-convexo

Otro problema que podríamos considerar es (7) tomando como término a la derecha $\lambda(u^p + u^q)$ con $0 < q < 1 < p$. Los continuos se pueden obtener de manera análoga a como los hemos obtenido en la Sección 4. Para $g(s) = 0$ tenemos estimaciones a priori, por lo tanto nos quedaría profundizar en la regularidad de las soluciones para poder extender el método de Gidas-Spruck (véase [53]) a este caso casilineal y por tanto obtener que el diagrama de bifurcación sea como el del caso semilineal.

Índice de figuras

Bibliografía

[1] B. Abdellaoui, A. Dall'Aglio e I. Peral, *Some remarks on elliptic problems with critical growth in the gradient*. J. Differential Equations **222** (2006), 21–62.

[2] B. Abdellaoui, I. Peral y A. Primo, *Elliptic problems with a Hardy potential and critical growth in the gradient: Non-resonance and blow-up results*, J. Differential Equations, **239** (2007), 386-416.

[3] N. Alaa y I. Mounir, *Weak solutions for some reaction-diffusion systems with balance law and critical growth with respect to the gradient*. Annales Mathematiques Blaise Pascal **8** (2001), 1–19.

[4] F. Andreu, S. Segura de León, L. Boccardo y L. Orsina, *Existence results for L^1 data of some quasi-linear parabolic problems with a quadratic gradient term and source*, Math. Models Methods Appl. Sci. **12** (2002), no. 1, 1–16.

[5] F. Andreu, J. M. Mazon, S. Segura de León y J. Toledo, *Existence and uniqueness for a degenerate parabolic equation with L^1 data*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), no. 1, 285–306.

[6] D. Arcoya, S. Barile y P.J. Martínez-Aparicio, *Singular quasilinear equations with quadratic growth in the gradient without sign condition*. J. Math. Anal. Appl., **350** (2009), 401–408.

[7] D. Arcoya y L. Boccardo, *Critical points for multiple integral of Calculus of Variations*. Arch. Rat. Mech. Anal. **134** (1996), 249-274.

[8] D. Arcoya, J. Carmona, T. Leonori, P.J. Martínez-Aparicio, L. Orsina y F. Petitta, *Existence and nonexistence of solutions for singular quadratic quasilinear equations*. J. Differential Equations **246** (2009), 4006–4042.

[9] D. Arcoya, J. Carmona y P.J. Martínez-Aparicio, *Elliptic obstacle problems with natural growth on the gradient and singular nonlinear terms*, Adv. Nonlinear Stud., **7** (2007), 299–317.

[10] D. Arcoya, J. Carmona y P.J. Martínez-Aparicio, *Desigualdades variacionales casilineales elípticas con crecimiento natural en el gradiente*, Actas XX CEDYA, (2007), 1–6.

[11] D. Arcoya, J. Carmona y P.J. Martínez-Aparicio, *Bifurcation for quasilinear elliptic singular bvp*. Preprint 2009.

[12] D. Arcoya y P.J. Martínez-Aparicio, *Quasilinear equations with natural growth,* Rev. Mat. Iberoam., **24** (2008), 597–616.

[13] D. Arcoya y S. Segura de León, *Uniqueness of solutions for some elliptic equations with a quadratic gradient term*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., (2008) DOI: 10.1051/cocv:2008072

[14] O. Arena, *A strong maximum principle for quasilinear parabolic differential inequalities*, Proceedings of the American Mathematical Society, **Vol. 32**, No. 2 (Apr., 1972), pp. 497-502.

[15] D.G. Aronson y J. Serrin, *Local behaviour of solutions of quasilinear parabolic equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **25**: 81, (1967).

[16] C. Bandle y M. Marcus, *Large solutions of semilinear elliptic equations: existence, uniqueness and asymptotic behavior,* J. Anal. Math., **58** (1992), 9–24.

[17] G. I. Barenblatt, M. Bertsch, A.E. Chertock y V. M. Prostokishin, *Self-similar intermediate asymptotics for a degenerate parabolic filtration-absorption equation,* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **97** (2000), no. 18, 9844–9848.

[18] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre y J. L. Vázquez, *An L^1-theory of existence and uniqueness of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **22** (1995), 241–273.

[19] A. Bensoussan y L. Boccardo, *Nonlinear systems of elliptic equations with natural growth conditions and sign conditions*. Appl. Math. Optim. **46** (2002), 143–166.

[20] A. Bensoussan, L. Boccardo y F. Murat, *On a nonlinear partial differential equation having natural growth terms and unbounded solution*. Ann. Inst. Henri Poincaré, **5** (1988), 347-364.

[21] H. Berestycki, S. Kamin y G. Sivashinsky, *Metastability in a flame front evolution equation*, Interfaces Free Bound. **3** (2001), no. 4, 361–392.

[22] D. Blanchard y A. Porretta, *Nonlinear parabolic equations with natural growth terms and measure initial data,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **30** (2001), 583–622.

[23] L. Boccardo, *On the regularizing effect of strongly increasing lower order terms*, J.Evol.Equ., **3** (2003) no.2, 225–236.

[24] L. Boccardo, *Dirichlet problems with singular and quadratic gradient lower order terms*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., **14** (2008) 411-426.

[25] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, T. Gallouët y L. Orsina, *Nonlinear Parabolic Equations with Measure Data*, J. Functional Analysis **147**, (1997) 237–258.

[26] L. Boccardo y T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data*, J. Funct. Anal., **87** (1989), 149–169.

[27] L. Boccardo y T. Gallouët, *Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures*, Comm. Partial Differential Equations, **17** (1992), 641–655.

[28] L. Boccardo y T. Gallouët, *Strongly nonlinear elliptic equations having natural growth terms and L^1 data*, Nonlinear Anal., **19** (1992), 573–579.

[29] L. Boccardo, T. Gallouët y F. Murat, *A unified presentation of two existence results for problems with natural growth*, Progress in partial differential equations: the Metz surveys, **2** (1992), 127–137, Pitman Res. Notes Math. Ser., **296**, Longman Sci. Tech., Harlow, 1993.

[30] L. Boccardo, T. Gallouët y J.L. Vázquez, *Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ without growth conditions on the data*, J. Differential Equations, **105** (1993), 334–363.

[31] L. Boccardo y F. Murat, *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations*, Nonlinear Anal., **19** (1992), 581–597.

[32] L. Boccardo, F. Murat y J.-P. Puel, *Existence de solutions non bornees pour certaines équations quasi-linéaires*, Portugaliae Mathematica, **41** (1982), 507-534.

[33] L. Boccardo, F. Murat y J.-P. Puel, *Existence results for some quasilinear parabolic equations,* Nonlin. Anal. T.M.A. **13** (1989), 373–392.

[34] L. Boccardo, F. Murat y J.-P. Puel, *L^∞ estimate for some nonlinear elliptic partial differential equations and application to an existence result*, SIAM J. Math. Anal., **23** (1992), 326–333.

[35] L. Boccardo, S. Segura de León y C. Trombetti, *Bounded and unbounded solutions for a class of quasi-linear elliptic problems with a quadratic gradient term*, J. Math. Pures Appl. **80** (2001), 919-940.

[36] H. Brezis, *Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity*, App. Mat. Optim., **12** (1984), 271–282.

[37] H. Brezis, *Análisis funcional*, Alianza Universidad Textos, 1984.

[38] A. Canino, *Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **6** (1995), 357-370.

[39] J. Carrillo y P. Wittbold, *Uniqueness of Renormalized Solutions of Degenerate Elliptic–Parabolic Problems,* J. Differential Equations, **156**, 93–121 (1999).

[40] M. G. Crandall, P.H. Rabinowitz y L. Tartar, *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity.* Comm. Partial Differential Equations **2** (1977), 193–222.

[41] A. Dall'Aglio, D. Giachetti y J.-P. Puel, *Nonlinear elliptic equations with natural growth in general domains*, Annali di Matematica **181** (2002), 407–426.

[42] A. Dall'Aglio y L. Orsina, *Nonlinear parabolic equations with natural growth conditions and L^1 data,* Nonlinear Anal. T.M.A., **27** 1 (1996), 59–73.

[43] R. Dautray y J.L. Lions, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*, **Vol. 5**, Springer- Verlag (1992).

[44] E. DiBenedetto, *Continuity of weak solutions to certain singular parabolic equations*, Ann. Mat. Pura ed Appl., **130** (1982) no. 1, 131–176.

[45] Djairo G. De Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems in: Differential Equations*. Proceedings of the 1st Latin American School of Differential Equations, Held at São Paulo, Brazil, June 29-July 17, 1981, in: Lecture Notes in Math., vol. 957, Springer-Verlag, 1982.

[46] J. Droniou y A. Prignet, *Equivalence between entropy and renormalized solutions for parabolic equations with smooth measure data,* NoDEA : Nonlinear Differential Equations and Applications, **14** (2007), no. 1-2, 181-205.

[47] V. Ferone y F. Murat, *Nonlinear problems having natural growth in the gradient: An existence result when the source terms are small*. Nonlinear Anal. **42** (2000), 1309–1326.

[48] T. Gallouët y J.-M. Morel *The equation* $-\Delta u+|u|^{\alpha-1}u=f$*, for* $0\leq\alpha\leq 1$, Nonlinear Anal., **11** (1987), 893–912.

[49] D. Giachetti y F. Murat, *An elliptic problem with a lower order term having singular behaviour.* Boll. Un. Mat. Ital. B, II (2009) 349–370.

[50] D. Giachetti y S. Segura de León, *Problemas estacionarios con un término dependiente cuadráticamente del gradiente y conteniendo singularidades*, Actas XXI CEDYA, (2009), 1–6.

[51] E. Giarrusso y G. Porru, *Problems for elliptic singular equations with a gradient term*, Nonlinear Anal., **65** (2006), 107–128.

[52] B. Gidas , W-M. Ni y L. Nirenberg , *Symmetry and related propries via the maximum principle*, Comm. math. phys., **68**, (1979), n 3, 209–243.

[53] B. Gidas y J. Spruck , *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **6** (1981), no. 8, 883–901.

[54] D. Gilbarg y N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1983.

[55] N. Grenon y C. Trombetti, *Existence results for a class of nonlinear elliptic problems with p-growth in the gradient*. Nonlinear Anal. **52** (2003), 931-942.

[56] M. Kardar, G. Parisi y Y.C. Zhang, *Dynamic Scaling of Growing Interfaces,* Phys. Rev. Lett. **56**, 889–892 (1986).

[57] J.L. Kazdan, y R.J. Kramer, *Invariant Criteria for existence of solutions to second-order quasilinear elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math. 31 (1978), 619-645.

[58] J.B. Keller, *On solutions of* $\Delta u = f(u)$, Commun. Pure Appl. Math., **10** (1957), 503–510.

[59] O.A. Ladyzenskaya, V.A. Solonnikov y N.N. Uralt'seva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type,* Translated from the Russian by S. Smith. American Mathematical Society, 1968.

[60] O. Ladyzenskaya y N. Uralt'seva, *Linear and quasilinear elliptic equations*; Translated by Scripta Technica. - New York, Academic Press, 1968.

[61] R. Landes, *On the existence of weak solutions for quasilinear parabolic boundary value problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **89** (1981), 217-237.

[62] R. Landes, *On the existence of weak solutions of perturbed systems with critical growth*, J. Reine Angew. Math. **393** (1989), 21–38.

[63] A.C. Lazer y P. J. McKenna, *On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem.* Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), 721-730.

[64] C. Leone y A. Porretta, *Entropy solutions for nonlinear elliptic equations in* L^1*,* Nonlinear Anal., **32** (1998), 325–334.

[65] F. Leoni, *Nonlinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with "absorbing"zero order terms*, Adv. Differential Equations, **5** (2000), 681–722.

[66] F. Leoni y B. Pellacci, *Local estimates and global existence for strongly nonlinear parabolic equations with locally integrable data*, J. Evol. Eq., **6** (2006), 113–144.

[67] T. Leonori, *Large solutions for a class of nonlinear elliptic equations with gradient terms*, Adv. Nonlinear Stud., **7** (2007), 237–269.

[68] T. Leonori y F. Petitta, *Asymptotic behavior of solutions for parabolic equations with natural growth term and irregular data*, Asymptotic Analysis **48 (3)** (2006), 219–233.

[69] J. Leray y J.L. Lions, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), 97–107.

[70] J. Leray y J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles*, Annales scientifiques de l'É.N.S, **51** (1934), 45-78.

[71] J.L. Lions, *Sur certaines équations paraboliques non linéaires*. (French) Bull. Soc. Math. France **93** (1965) 155–175.

[72] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires,* Dunod, Paris, 1969.

[73] M. Marcus y L. Veron, *Uniqueness and asymptotic behaviour of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, **14** (1997), 237–274.

[74] M. Marcus y L. Veron, *Existence and uniqueness results for large solutions of general nonlinear elliptic equations. Dedicated to Philippe Bénilan, J. Evol. Equ.*, **3** (2003), 637–652.

[75] P.J. Martínez-Aparicio, *Singular Dirichlet problems with quadratic gradient*. *Bollettino U.M.I.* (9) II (2009), aparecerá.

[76] P.J. Martínez-Aparicio, *Ecuaciones elípticas singulares con datos no nulos*, *Actas XXI CEDYA*, (2009), 1–7.

[77] P.J. Martínez-Aparicio y F. Petitta, *Parabolic equations with nonlinear singularities*. Sometido a publicación.

[78] L. Orsina y J-P. Puel, *Positive solutions for a class of nonlinear elliptic problems involving quasilinear and semilinear terms*, Commun. Partial Differential Equations, **26**, 1665-1689 (2001).

[79] R. Osserman, *On the inequality* $\Delta u \geq f(u)$, *Pacific J. Math.*, **7** (1957), 1641–1647.

[80] F. Petitta, *Asymptotic behavior of solutions for parabolic operators of Leray–Lions type and measure data,* Adv. Differential Equations **12** (2007), no. 8, 867–891.

[81] A. Porretta, *Existence results for nonlinear parabolic equations via strong convergence of truncations*, Ann. Mat. Pura ed Appl. (IV), **177** (1999), 143–172.

[82] A. Porretta, *Existence for elliptic equations in* L^1 *having lower order terms with natural growth,* Portugal. Math., **57** (2000), 179–190.

[83] A. Porretta y S. Segura de León, *Nonlinear elliptic equations having a gradient term with natural growth*, J. Math. Pures Appl. **85** (2006), 465-492.

[84] G. Porru y A. Vitolo, *Problems for elliptic singular equations with a quadratic gradient term, J. Math. Anal. Appl.*, **334** (2007), 467–486.

[85] P.H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **7** (1971), 487–513.

[86] D. Ruiz y A. Suárez, *Existence and uniqueness of positive solution of a logistic equation with nonlinear gradient term*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **137** (2007), 555-566.

[87] L. Schwartz, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles I,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble **7** (1957), 1–141.

[88] J. Serrin, *The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables*, Phil. Trans. Royal Soc. London **264** (1969), 413-496.

[89] J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$*,* Ann. Mat. Pura ed Appl. **146** (1987), 65–96.

[90] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du seconde ordre à coefficientes discontinus*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **15** (1965), 189–258.

[91] G. Stampacchia, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus.* Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal 1966.

[92] J.L. Vázquez, *An a priori interior estimate for the solutions of a nonlinear problem representing weak diffusion,* Nonlinear Anal. **5** (1981), 95–103.

[93] J.L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations,* Appl. Math. Optim. **12** (1984), 191–202.

[94] L. Veron, *Semilinear elliptic equations with uniform blow-up on the boundary,* J. Analyse Math., **59** (1992), 231–250.