UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

IDONEIDAD DE PROCESOS DE ESTUDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: UNA APROXIMACIÓN DESDE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DEL CÁLCULO Y EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL

Tesis Doctoral

EDSON CRISOSTOMO DOS SANTOS

GRANADA, 2012

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Edson Crisostomo Dos Santos
D.L.: GR 491-2013
ISBN: 978-84-9028-374-5

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

IDONEIDAD DE PROCESOS DE ESTUDIO DEL CÁLCULO INTEGRAL EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: UNA APROXIMACIÓN DESDE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DEL CÁLCULO Y EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL

Tesis Doctoral presentada por **D. EDSON CRISOSTOMO DOS SANTOS** dentro del *Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática* para aspirar al grado de Doctor por la Universidad de Grana, con Mención Europea, dirigida por el Catedrático de Universidad **D. JUAN DÍAZ GODINO.**

Fdo: Edson Crisostomo dos Santos

Vº Bº El Director
Dr. Juan Díaz Godino

Trabajo realizado parcialmente en el marco del Proyecto de Investigación EDU2010-14947 (MICINN-FEDER) y Grupo PAI FQM-126 (Junta de Andalucía)

AGRADECIMIENTOS

A Dios, razón de mi existencia y de mis conquistas personales, profesionales y humanas.

A mis padres *(in memorian)* por lo que siempre han representado para mí.

A mi familia, *hermanos* y amigos por su colaboración y apoyo constantes.

A mi tutor, Dr. Juan Díaz Godino, por su orientación segura e incondicional en la realización de este trabajo y, especialmente, por la comprensión, estímulo y amistad que jamás necesitan ser revisadas.

Al Profesor Dr. José Leonardo Manuel Matos, de la “Universidade Nova de Lisboa”, por su disponibilidad, receptividad, apoyo y co-orientación de las actividades investigadoras realizadas durante mi estancia en Portugal en cumplimiento a uno de los requisitos para la obtención de la mención de *Doctor Europeo*.

Al Dr. Frederico da Silva Reis, por su incentivo y colaboración que no solamente han precedido nuestra meta de realizar el doctorado, sino por la colaboración eficaz en distintos momentos del desarrollo de esta investigación.

A las profesoras Dra. Cecilia Galvão y Dra. Helia Guimarães Segurado, de la “Universidade de Lisboa” por las aportaciones y sugerencias metodológicas.

A todos los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, por su inestimable contribución en mi formación profesional.

Al Rectorado de la Unimontes, especialmente al Profesor Paulo César Gonçalves de Almeida, por su imprescindible apoyo en la concretización de mi Doctorado.

A todos mis compañeros del Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática, por sus valiosas contribuciones personales y colectivas, que han enriquecido mi formación.

A mis compañeros del Departamento de Ciencias Exactas de la Unimontes por la confianza a mí depositada.

A mis ex-profesores de la Licenciatura en Matemáticas de la UNIMONTES, especialmente: Adair, Aristeu, *Cleusa*, Dilma, *Egídio*, Geralda, Gualter, José Soares, Juvenal, Rosa, Rosina y Ruth, por su inestimable contribución con mi formación personal, profesional y humana.

A todas aquellas personas que de una u otra forma han colaborado e incentivado al logro de mis objetivos,

¡Muchas Gracias!

DEDICATORIA

A mis padres (*in memorian)*, Julia María dos Santos y Albino Crisostomo dos Santos, fuentes *vivas* de inspiración y luz que me han iluminado en todos los momentos de mi trayectoria de vida.

RESUMEN

El objetivo general de esta investigación es la caracterización de los conocimientos sobre la idoneidad didáctica de procesos de estudio del cálculo integral para la formación de profesores de matemáticas. Se trata de aportar conocimientos sistemáticos y fundamentados sobre cómo elaborar diseños instruccionales de calidad para la formación de profesores de matemáticas de secundaria sobre un tema específico, la integral, en el marco socio-profesional de la licenciatura de matemáticas en Brasil. Dicha caracterización se hace mediante la articulación de los resultados de la investigación en didáctica del cálculo con los conocimientos de profesionales expertos en la formación de profesores de matemáticas de secundaria. La determinación de los conocimientos aportados por la investigación en didáctica del cálculo se hace mediante estudios documentales y tiene tres focos de atención:

- investigaciones sobre pensamiento matemático avanzado, en particular, sobre procesos de enseñanza y aprendizaje de la integral.
- estudio histórico - epistemológico orientado hacia la reconstrucción de los significados parciales de la integral y su articulación.
- análisis de libros de texto usados en el contexto de la licenciatura en matemáticas en Brasil.

La determinación de los conocimientos profesionales de formadores expertos se ha realizado mediante entrevistas a una muestra de diez formadores de profesores y su posterior análisis sistemático. Dichos conocimientos se categorizan teniendo en cuenta las dimensiones epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva e instruccional (interacciones y recursos) de los procesos de estudio del cálculo.

Se trata de una investigación cualitativa, basada en el estudio de casos de un contenido matemático y un contexto educativo particulares, que aplica y desarrolla las categorías de análisis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, y de manera más específica la noción de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

ABSTRACT

The overall objective of this research is to characterize the knowledge about the didactical suitability of the study processes in Integral calculus to the formation of mathematics teachers.

This is to support systematic and grounded knowledge based on how to elaborate instructional designs of quality for the formation of math teachers in high school on a specific topic, the Integral, in the socio-professional context of mathematics graduation in Brazil.

This characterization will be performed through the articulation of researched results in Didactics of Calculus with educators' professional knowledge, experts in the training of mathematics teachers in secondary education. The determination of the knowledge anchored by research in Didactics of Calculus is done by documentary studies and has three foci of attention:

- Investigations about the Advanced Mathematical Thinking, in particular on the integral's teaching and learning processes.
- Historical- epistemological study oriented to the reconstruction of partial meanings of the Integral and its articulation.
- Analysis of textbooks used in the context of the graduation in mathematics in Brazil.

The determination of the professional knowledge of mathematics teacher educators as conducted through interviews with a sample of ten professionals and their subsequent systematic analysis. The categorization of this knowledge took place from the epistemic dimensions, ecological, cognitive, affective and instructional (interactions and resources) of the study processes of Calculus.

This is about a qualitative investigation based on case studies of mathematical content in a particular educational context, in which it applies and develops the categories of analysis to the Onto-semiotic Approach of the knowledge and the mathematics instruction, specifically, the notion of didactical suitability for mathematics teaching and learning processes.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El foco de interés de nuestra investigación es la formación de profesores de matemáticas de los niveles de educación secundaria en el marco institucional de la Licenciatura en Matemáticas que se imparte en las universidades brasileñas. Nuestra experiencia como formador de profesores durante más de 19 años nos ha llevado a reconocer la variedad y complejidad de elementos que hay que tener en cuenta cuando pretendemos diseñar, implementar y evaluar planes de formación matemática y didáctica de la mayor calidad posible. Es necesario tener en cuenta los diversos planteamientos epistemológicos sobre la propia matemática, las diversas teorías del aprendizaje (dimensión cognitivo – afectiva), los modelos instruccionales y la necesaria adaptación al contexto socio-profesional en el que tienen lugar los procesos formativos.

La gran cantidad de investigaciones realizadas hasta la fecha sobre formación de profesores de matemáticas, como se pone de manifiesto a través de los capítulos de los “Handbooks” dedicados al tema (Jaworski y Gellert, 2003; Zaslavsky, Chapman y Leikin, 2003; Ponte y Chapman, 2006; Swoder, 2007; Wood, 2008; Ponte y Chapman, 2008), revistas especializadas y actas de congresos obligan a centrar el contenido matemático específico sobre el cual se pretende investigar. En nuestro caso, apoyados también en nuestra propia experiencia como formador, hemos optado por centrar la investigación en el campo del “Pensamiento matemático avanzado”, Didáctica del Cálculo, y más concretamente sobre el “objeto matemático” *integral*. También, sobre Didáctica del Cálculo existe una abundante bibliografía (Tall, 1996; Harel, Selden y Selden, 2006; Artigue, Batanero y Kent, 2007; Mamona-Downs y Downs, 2008).

La elección de la integral como objeto matemático de investigación didáctica se justifica, además de por nuestra experiencia profesional, por la relevancia del mismo dentro de las matemáticas y sus aplicaciones en otras áreas de conocimiento. Como afirma Koroupatov y Dreyfus (2009, p. 3-417),

> Ciertamente, no es posible imaginar la cultura científica moderna sin las integrales. Junto con la derivada, la integral forma el núcleo de un dominio matemático que es un lenguaje, un dispositivo, y una herramienta útil para otros campos como la física, la

> ingeniería, la economía, y la estadística. Además, el concepto de integral representa una idea filosófica para la comprensión del mundo: la contemplación de la totalidad de las partes pequeñas de un todo aporta conclusiones sobre el todo en su globalidad, así como sobre su estructura interna y propiedades.

Surge así una primera formulación general de nuestras preguntas de investigación:

- ¿Qué formación matemático – didáctica deberían recibir los profesores de matemáticas de secundaria para que puedan realizar su labor docente de la manera más idónea posible?
- ¿Cómo se deberían diseñar, implementar y evaluar los procesos de formación de los profesores para el logro de dicho objetivo?

Las cuestiones así formuladas corresponden a una problemática propia de un “formador reflexivo”, y sin duda son significativas y relevantes, pero excesivamente generales para ser directamente investigables. La aproximación progresiva al campo de la Educación Matemática nos ha llevado a aplicar sucesivos “recortes” y determinaciones a estas preguntas iniciales de investigación. La primera se refiere al contexto formativo de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil, la segunda, el tema matemático (Didáctica del Cálculo, la integral). Falta aún una tercera determinación que vendrá dada por las herramientas teóricas y metodológicas aplicables.

En nuestro caso, teniendo en cuenta la diversidad de enfoques y paradigmas de investigación, los cuales con frecuencia enfatizan una de las dimensiones implicadas (frecuentemente el componente cognitivo o el pedagógico), hemos optado por aplicar el “Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática” (EOS) (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). La noción de *idoneidad didáctica* de los procesos de estudio matemático nos ha atraído la atención por su potencialidad para articular las diversas facetas y componentes que caracterizan la complejidad de los procesos formativos en educación matemática.

De este modo, el “estudio de caso”, formación de profesores sobre la integral en el contexto institucional de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil, pretende tener un carácter paradigmático desde el punto de vista teórico y metodológico. Las cuestiones generales iniciales de investigación se pueden formular de manera más operativa usando las seis dimensiones que propone el EOS para analizar los procesos de estudio matemático (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica), teniendo en cuenta, además, los indicadores empíricos identificados para cada una de las idoneidades parciales:

> *¿Qué características deberían reunir los procesos formativos de los profesores de matemáticas de secundaria para que alcancen un grado óptimo de idoneidad en las diversas dimensiones y factores implicados?*

La información necesaria para responder a esta cuestión puede provenir de dos fuentes que consideramos complementarias: (1) Las investigaciones publicadas sobre formación de profesores y Didáctica del Cálculo; (2) La experiencia profesional de los propios formadores “expertos” en la enseñanza del Cálculo en el contexto específico investigado.

La separación entre la “teoría” y la “práctica”, entre los resultados de la investigación académica y la práctica de la enseñanza de las matemáticas es un tema de reflexión frecuente, como describe Ruthven (2002). Este autor analiza los vínculos entre la investigación y la enseñanza, proponiendo una cooperación entre los conocimientos derivados de la investigación académica y los conocimientos derivados de la práctica profesional. “Una preocupación particular se refiere a cómo se puede promover una mayor sinergia entre estas dos prácticas específicas, sus formas características de conocimiento, y los procesos asociados de creación de conocimiento” (Ruthven, 2002, p. 581).

Nuestra investigación se orienta, de manera central y usando herramientas teóricas del EOS, hacia la caracterización del conocimiento profesional de formadores de profesores de matemáticas de secundaria sobre la idoneidad didáctica de los procesos formativos relacionados con la enseñanza del Cálculo.

La Memoria de Tesis Doctoral la hemos organizado en diez capítulos, los cuales precisamos a continuación:

El Capítulo 1 está organizado en dos partes. En la primera se contempla la problemática general de la investigación relacionada con el proceso de estudio del Cálculo en la enseñanza universitaria, especialmente en la Licenciatura en

Matemáticas en Brasil. En la segunda parte se realiza una síntesis de los antecedentes de las investigaciones en Didáctica del Cálculo, resaltando aquellas desarrolladas en el marco del "Pensamiento matemático avanzado", y de los estudios sobre la formación de profesores de matemáticas de secundaria.

En el Capítulo 2 se explicitan las nociones teóricas usadas en la investigación. El Enfoque Ontosemiótico (Godino y colaboradores, 1998; 2002; 2007) constituye el marco teórico principal. El Pensamiento Matemático Avanzado (Tall, 1991a; 1991b; 1996; Selden y Selden, 2005; Mamona-Downs y Downs, 2008; Artigue, Batanero y Kent, 2007), y el Conocimiento profesional del profesor de matemáticas (Ruthven, 2002; Ponte, 1998; Zaslavsky, Chapman y Leikin, 2003; Jaworski, 2008) constituyen así mismo referentes para nuestro trabajo.

La metodología de la investigación ha sido descrita en el Capítulo 3, en el cual se fundamenta su enfoque cualitativo. El uso de las narrativas (Chapman, 2008), como metodología de investigación, desempeña un papel fundamental para la "extracción" de los significados personales de los profesores-formadores sobre el proceso de estudio de la integral. Así mismo, se describe el problema de investigación, los objetivos y las hipótesis.

En el Capítulo 4 se realiza un estudio histórico-epistemológico-didáctico de la integral, donde se analiza la génesis y evolución de dicha noción a lo largo de la historia, así como sus implicaciones en el proceso de estudio de la integral en la enseñanza universitaria de Cálculo.

El Capítulo 5 está dedicado a la descripción del currículo de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. Se hace una síntesis del Sistema Educacional Brasileño y se discute el currículo de la Licenciatura en Matemáticas y el currículo del Cálculo Diferencial e Integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas en Brasil.

El Capítulo 6 incluye un análisis de libros de texto de Cálculo actualmente utilizados en los primeros cursos de la Licenciatura en Matemáticas, poniéndose en práctica una metodología para análisis de textos matemáticos desarrollada a partir de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico.

Los Capítulos 7 y 8 se analizan las narrativas de dos profesores-formadores sobre su formación académica, experiencia y sus conocimientos profesionales sobre los procesos de estudio de la integral, en el contexto de formación de profesores de matemáticas de secundaria en Brasil.

La memoria compartida de los diez profesores-formadores entrevistados está contemplada en el Capítulo 9. Se realiza un análisis condensado de sus formaciones y experiencias respectivas, y se sintetizan sus conocimientos profesionales acerca de las características de la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la integral.

En el Capítulo 10 se realiza una síntesis de la investigación, destacando los aportes de la misma y concluyendo con la descripción de algunas cuestiones abiertas relevantes.

Finalmente, esta memoria se cierra con las referencias bibliográficas utilizadas en su elaboración, con un resumen de la Tesis en Portugués como uno de los requisitos para optar a la Mención de Tesis Europea, y con los anexos del guión de entrevistas y de las transcripciones de dos de las entrevistas realizadas con los profesores-formadores, expertos en el proceso de estudio del Cálculo en la enseñanza universitaria.

Capítulo 1

PROBLEMÁTICA GENERAL Y ANTECEDENTES: EL CÁLCULO COMO CAMPO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

"Para Thales... la cuestión primaria no era qué sabemos, sino cómo lo sabemos".

Aristóteles.

Este capítulo está organizado en dos partes. En la primera abordaremos la problemática general de interés de esta investigación relacionada con los procesos de estudio del Cálculo Integral en la enseñanza universitaria, particularmente en la formación de profesores de matemáticas. En la segunda parte sintetizaremos los antecedentes de interés para nuestra investigación, a partir de las seis dimensiones desarrolladas en el Enfoque Ontosemiótico: epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional, y ecológica.

1.1. PROBLEMÁTICA GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación educativa en el ámbito de la enseñanza universitaria de la Matemática viene siendo desarrollada desde hace poco más de veinte años, con especial énfasis en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo. En el referido período se han logrado importantes resultados en lo que concierne al intento de mejora de la comprensión de las dificultades de los estudiantes, las disfunciones de los sistemas educativos y las posibles vías para superar dichos problemas (Artigue, 2003b). La creciente cantidad de investigaciones en didáctica de las matemáticas relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los primeros niveles universitarios ha puesto de manifiesto, no solamente el interés surgido por esta línea de investigación, sino la gran cantidad de problemas educativos que suelen presentarse en dicho proceso (Holton, 2003).

Muchas investigaciones han sido desarrolladas dentro de la línea del "Pensamiento Matemático Avanzado" (Tall, 1991a; 1996; Harel, Selden y Selden, 2006; Mamona-Downs y Downs, 2008); además, podemos señalar las aportaciones encontradas en los PME de los últimos años a través de los trabajos de Bezuidenhout and Olivier (2000); Czarnocha et al. (2001); Rasslan y Tall (2002); Carlson et al. (2003) que están centradas en la problemática relativa a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Para Dreyfus y Eisenberg (1990), esto está ligado no solamente con el hecho de que el Cálculo es la rama de la matemática avanzada, a la que se dedica una mayor cantidad de tiempo en los estudios científicos-técnicos, sino por el número de problemas no triviales que suelen presentarse en su proceso de aprendizaje. Artigue (1998, 2003b) apunta también a la formalización que se requiere en niveles universitarios y que obliga al alumno a romper con el trabajo algebraico ordinario y a reconstruir significados, como el de igualdad. Asimismo, Artigue (1991) señaló las dificultades que surgen para los estudiantes en un curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria, destacando que en su enseñanza tradicional esto se resuelve a través de una excesiva algebrización, resaltando, principalmente: el predominio de la manipulación de fórmulas en lugar de las funciones; el empleo de los algoritmos para hallar derivadas en lugar de la teoría de aproximaciones lineales; la determinación de primitivas en lugar de la búsqueda de significados para la integral; y la utilización de algoritmos (o recetas) para calcular ecuaciones diferenciales en lugar de solucionarlas a través de aproximaciones numéricas y gráficas.

Al sintetizar los resultados de algunas investigaciones realizadas en Cálculo, ésta investigadora ha señalado algunos aspectos negativos, poniendo de manifiesto que dichos resultados proporcionan evidencias estadísticas de las limitaciones tanto de las prácticas educativas tradicionales como de las prácticas educativas que favorecen los enfoques formales y teóricos que reflejan el estilo Bourbaki (Artigue, 1991,p. 119).

En este sentido, la investigadora considera que:

> [...]) También debemos reconocer que la investigación no nos da una forma general de mejorar fácilmente los procesos de enseñanza y aprendizaje. Algunas razones pueden

> ser encontradas en el actual estado de la investigación: hasta ahora, se han concentrado esfuerzos en unos pocos dominios enseñados en el nivel universitario. Además, la preparación de futuros matemáticos, a pesar de la gran diversidad de estudiantes que toman cursos de Matemáticas en la Universidad, ha sido más o menos privilegiado de forma implícita (pp. 129-130).

Además, la significativa presencia del curso de Cálculo en los currículos iniciales de distintas carreras universitarias (en las áreas de ciencias exactas y tecnológicas, sociales, biológicas, y de humanidades), y los elevados niveles de fracaso escolar y, consecuentemente, de reprobación y deserción de los estudiantes revelan no solamente la complejidad existente en su estudio, sino la necesidad de desarrollar nuevas investigaciones relativas a la problemática específica relacionada al proceso de estudio del Cálculo en la enseñanza universitaria.

La problemática didáctica general que abordamos en esta investigación se refiere a la caracterización de los conocimientos sobre la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico, *la integral*, en el contexto socio-profesional de la formación de profesores de matemáticas de secundaria. De manera sintética, el problema general que planteamos se relaciona con la idoneidad de los procesos de estudio del Cálculo Integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de secundaria en Brasil. La complejidad del referido problema ante las diversas facetas y dimensiones a tener en cuenta, nos lleva a abordarlo desde dos aproximaciones complementarias:

(1) estudio sistemático de los resultados de investigaciones académicas realizadas en el campo;

(2) caracterización de los conocimientos didáctico-matemáticos de profesores-expertos en la enseñanza del Cálculo en el nivel universitario.

La enseñanza de cualquier contenido matemático, sea en los niveles de educación básica o secundaria, o bien orientada a la formación de profesionales es el tema central de la investigación didáctica, y también el ámbito de actuación y reflexión de los profesores de matemáticas. En ambas comunidades de prácticas (investigación y docencia) se desarrollan y aplican conocimientos sobre una misma realidad, aunque con frecuencia dichas comunidades están desconectadas. La separación entre la “teoría” y la “práctica”, entre los resultados de la investigación académica y la práctica de la enseñanza de las matemáticas es un tema de reflexión frecuente, como describe Ruthven (2002). Este autor analiza los vínculos entre la investigación y la enseñanza, proponiendo una cooperación entre los conocimientos derivados de la investigación académica y los conocimientos derivados de la práctica profesional. “Una preocupación particular se refiere a cómo se puede promover una mayor sinergia entre estas dos prácticas específicas, sus formas características de conocimiento, y los procesos asociados de creación de conocimiento” (Ruthven, 2002, p. 581).

En general, las investigaciones desarrolladas en el campo del “pensamiento del profesor de matemáticas” y sobre “Didáctica del Cálculo” suelen abordar aspectos parciales del problema, centrándose principalmente en cuestiones de tipo cognitivo. El diseño y desarrollo curricular, tanto a nivel macro como micro-didáctico, requiere tener en cuenta, además de las “concepciones, errores y dificultades” de los estudiantes, las dimensiones epistémicas (significados institucionales), la mediacional (uso de recursos tecnológicos y temporales), los modos de interacción docente-discente en el clase, así como los aspectos que podemos calificar de ecológicos, esto es, el estudio de los condicionantes sociales, económicos, etc.

Por otra parte, conocer lo que piensan, opinan y creen los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza es una tema de investigación necesario para poder abordar con fundamento las cuestiones del desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. “Extraer y codificar este conocimiento artesanal tiene el potencial de mejorar la efectividad con que se puede realizar la formación de profesores, proporcionando marcos más explícitos para analizar los procesos de enseñanza, para articular mecanismos y funciones, y para comprender su adaptación a condiciones diferentes” (Ruthven, 2002, p. 596). Se trata, por lo tanto, de establecer un concurso activo y concertado entre el *conocimiento profesional de los profesores-formadores* y el *conocimiento académico* sobre la idoneidad de los procesos de estudio del Cálculo Integral derivado de las investigaciones didácticas.

En este sentido, el contenido matemático general, en el que fijamos nuestra atención, será el Cálculo Integral, y el énfasis de esta investigación estará centrado en caracterizar los conocimientos profesionales de los profesores-formadores sobre la idoneidad de los procesos de estudio del Cálculo Integral en la enseñanza universitaria, en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. Se trata de elaborar una metodología de estudio sistemático de las diversas facetas o componentes, implicadas en la Didáctica del Cálculo que tenga en cuenta los aportes de la investigación académica y el conocimiento profesional de los profesores-formadores. Utilizaremos para este fin el marco teórico desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), que se describe como "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS), al considerar que aporta una perspectiva global sobre las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional, y ecológica, así como las herramientas de análisis potentes para abordar nuestro problema de investigación.

A continuación, sintetizamos algunos antecedentes de interés para nuestra investigación.

1.2. El CÁLCULO INTEGRAL COMO CAMPO DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En esta sección realizamos una síntesis de los principales resultados de las distintas investigaciones desarrolladas en Didáctica de la Matemática en la Enseñanza Superior relacionadas con el Cálculo Integral. En la sección 1.2.1 presentamos un panorama de las investigaciones realizadas en Didáctica de la Matemática relacionadas con la integral; en la sección 1.2.2 sintetizamos los estudios epistemológicos, los cognitivos están contemplados en la sección 1.2.3, y los instruccionales en la sección 1.2.4; en la sección 1.2.5 sintetizamos las investigaciones relacionadas con el profesor-formador y con el Cálculo..

1.2.1. Panorama de las investigaciones realizadas en Didáctica de la Matemática relacionadas con la integral

Las investigaciones desarrolladas en Didáctica de la Matemática, sobre el Cálculo Diferencial e Integral, están se incrementando en los últimos años y se realizan bajo diferentes enfoques teóricos y metodológicos. La complejidad del proceso de estudio del Cálculo requiere de estudios que puedan aportar nuevos conocimientos sobre el tema y contribuir con el aprendizaje de los contenidos matemáticos por los estudiantes universitarios.

En este sentido, consideramos útil entender las concepciones predominantes sobre las Matemáticas. Según Fischbein (1994), las Matemáticas superior, incluyéndose el Cálculo, pueden ser consideradas bajo los puntos de vista siguientes:

> […] (a) Matemáticas como un cuerpo de conocimiento riguroso, formal y deductivo, tal como se presenta en los tratados y en los libros de texto de elevado nivel; (b) Matemática como una actividad humana. El hecho de considerar la Matemáticas como un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurados no excluye la necesidad de considerarla también como un proceso creativo: en la realidad, lo que se pretende son estudiantes que entiendan que las Matemáticas se constituyen, esencialmente, en una actividad humana. El proceso de creación matemática implica en momentos de iluminación, hesitación, aceptación y refutación; muy frecuentemente, lleva siglos de esfuerzos, correcciones sucesivas y refinamientos. Nosotros queremos estos estudiantes para enseñarles no solamente lo formal, las secuencias deductivas de resultados relacionados a un teorema, sino para que sean capaces de construir las respectivas justificaciones, para evaluaren de manera formal e intuitiva la validez de las proposiciones matemáticas. (Fischbein, 1994, citado por Igliori, 2009, pp. 14-15).

La complejidad del proceso de estudio de las Matemáticas, y del Cálculo en particular, permite considerar que las expectativas del estudiante, del profesor universitario, del profesor de la educación secundaria, y el estudio de los conceptos del Cálculo constituyen una fuente inagotable de cuestiones de investigación (Silva, 2011). Asimismo, el autor ha afirmado que en lo que se refiere a las investigaciones desarrolladas en el Programa de Postgrado en Educación Matemática de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo, relacionadas con las representaciones de los estudiantes, con la formación de profesores y con los libros de texto centradas en la integral se ha realizado seis investigaciones (Tesis de Fin de Máster): tres relacionadas con el libro didáctico, una está basada en analizar los efectos de un ambiente computacional en la introducción de la noción de integral, la otra se relaciona con las concepciones reveladas por un grupo de profesores al evaluar las producciones de los estudiantes, y la última consiste en averiguar que componentes del concepto de integral permanecen para el estudiante tras algunos semestres de la realización del curso de Cálculo.

Lo anterior, nos permite considerar la relevancia de las investigaciones centradas en el conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre el proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. En este ámbito, se sitúa nuestra investigación, en la cual tenemos en cuenta las distintas dimensiones inherentes a dicho proceso. Además, encontramos en la literatura especializada que la significativa cantidad de investigaciones sobre los contenidos de Cálculo “se justifica tanto por el fracaso de los estudiantes en Cálculo como por su condición privilegiada en la formación del pensamiento avanzado en Matemáticas” (Igliori, 2009, p. 13). Consideramos que existen otros factores que justifican el desarrollo de las investigaciones en Didáctica del Análisis, los cuales requieren pueden ser identificados a partir de una revisión de los antecedentes de las investigaciones que han sido desarrolladas relacionadas con el Cálculo Integral. A continuación sintetizamos los principales estudios epistemológicos relacionados con el proceso de estudio del Cálculo Integral.

1.2.2. Estudios epistemológicos

Calvo (1997) desarrolló un estudio para establecer las bases de una propuesta dirigida a la construcción de un esquema conceptual (concepto imagen en el sentido de Vinner, 1991) de la integral definida, contemplando no solamente su definición formal, sino también sus relaciones con los esquemas conceptuales de áreas y derivadas. En las conclusiones, el autor propone que se elija la definición de integral de Darboux (en términos de supremos de sumas inferiores y de ínfimos de sumas superiores) y considera que las facetas algebraica, numérica y gráfica son las que, además de establecer las conexiones, enriquecen el esquema conceptual de la integral definida; las imágenes visuales de los estudiantes pueden ser potenciadas con la exploración de las conexiones entre los esquemas conceptuales de integral definida y del área.

Una de las primeras investigaciones epistemológicas realizadas en Brasil, abordando (sucintamente) el concepto de integral definida, consiste en la tesis doctoral de Sad (1998). La autora desarrolló una investigación cualitativa de los aspectos epistemológicos de la producción de determinados significados en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo diferencial e integral, enmarcada en el *"Modelo Teórico dos Campos Semânticos – MTCS"* (Lins, 1984, citado por Sad, 1998). La relación de los campos semánticos con el Cálculo fue caracterizado, principalmente, por cuatro tipos de estipulaciones locales: visuales–geométricas, del tipo algoritmo, con respeto al límite y con respeto a los infinitésimos. La investigadora busca establecer los significados de límite, derivada, diferencial, e integral definida. En las conclusiones, destaca la necesidad de comprensión de las relaciones entre los distintos elementos que constituyen los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, tales como sujeto del conocimiento, interlocutor, enunciados, enunciación, conocimiento, campo semántico y demanda social.

Al realizar un análisis epistemológico de las aportaciones de algunos matemáticos como Cavalieri, Wallis y Roberval al desarrollo de la integral definida, Czarnocha, Dubinsky, et al. (2001) estudiaron el desarrollo de dicho concepto en un grupo de 32 estudiantes que ya había completado un curso de Cálculo Los datos fueron obtenidos a través de la "Entrevista Cálculo Integral" realizada con cada uno de los estudiantes. Los principales aspectos resaltados en las conclusiones fueron: la visión mostrada por los estudiantes era distinta de la desarrollada en su proceso de instrucción, algunos de los estudiantes imitaban los argumentos lógicos de grandes matemáticos, y la necesidad de tener en cuenta la intuición natural de los estudiantes en la organización de la instrucción de los temas fundamentales al desarrollo de un método riguroso de evaluación de la integral definida.

El informe de Czarnocha, Loch, Prabhu y Vadakovic (2002) presenta los resultados del experimento de enseñanza referente a la comprensión de los conceptos del Cálculo por parte de los estudiantes de Ingeniería, Ciencias y Matemáticas de una universidad del oeste de Estados Unidos. La pregunta de la investigación fue: ¿Cuál es el desarrollo mental del esquema de integral definida entre estudiantes? El análisis, basado en las entrevistas clínicas, sugirió la construcción del concepto de integral definida con la coordinación de dos construcciones distintas: del esquema visual de las aproximaciones geométricas al área y del esquema numérico de las series convergentes infinitas. Para los autores, entre las principales dificultades para comprender dicho concepto están la ausencia de una comprensión clara de la serie y de sus límites, y de estos con el esquema visual de las sumas de Riemann. En las conclusiones fue resaltada la necesidad de coordinación entre diversos registros (en el sentido de Duval) como forma de suplir las dificultades conceptuales de los estudiantes.

Contreras y Ordóñez (2006) han desarrollado un estudio basado en la aplicación del Enfoque Ontosemiótico (EOS) para realizar un análisis de la integral definida, en el sentido de la integral de Cauchy-Riemann. Para ello, se ha elegido el área de una región plana en un fragmento de un libro considerado representativo en el contexto del 2° curso de bachillerato en España. A partir de una revisión de los antecedentes, los autores identificaron los principales obstáculos epistemológicos ligados a la integral definida, y tras aplicación de las herramientas teóricas del EOS concluyeron que ha aflorado diversos conflictos semióticos. Entre los aspectos resaltados en el estudio, se encontra la consideración que si el docente es consciente de "las posibles dificultades a las que se enfrentan los estudiantes, se puede interpretar mejor sus errores y evitar lagunas de significados que suelen conducir al uso de métodos algebraicos de cálculo sin sentido" (p. 81).

Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) han realizado un análisis de una muestra representativa de libros de matemáticas con el objetivo de "mostrar algunas posibilidades para la mejora de la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje potenciales relativos al cálculo integral en el bachillerato" (p. 368). Se ha identificado, inicialmente, cuatro configuraciones epistémicas (CE) de la integral definida: CE geométrica, CE resultado de un proceso de cambio, CE inversa de la derivada, y CE aproximación al límite. Posteriormente se ha identificado además, la presencia de la CE algebraica. Tras analizar los libros de texto y las Pruebas de Acceso a la Universidad, los autores sugieren que se debe tener en cuenta los siguientes aspectos: proponer procesos de estudio que posibiliten el tránsito entre las distintas configuraciones epistémicas, solicitar a las universidades la inclusión de situaciones que requieran un conocimiento de la integral definida relacionado no solamente a las configuraciones epistémicas geométrica y algebraica, utilizar el cálculo numérico y la geometría elemental "como medios de control y predicción, en situaciones complejas de modelización e interpretación" (p. 381), e incluir las calculadoras gráficas y programables en las clases de matemáticas del bachillerato y en las Pruebas de Acceso a la Universidad.

En su tesis doctoral, Ordóñez (2011) ha realizado una investigación relacionada con las Pruebas de Acceso a la Universidad y de su efecto en el significado implementado para la integral definida en el 2° curso de bachillerato en España. A partir de un estudio histórico-epistemológico del tema, la autora utilizó las herramientas teóricas desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico para sistematizar el significado global de la integral definida en dicho contexto, así como para establecer los significados implementados y su concordancia con las referidas pruebas. Además, se aplicó un cuestionario para los estudiantes con la finalidad de caracterizar los significados personales que éstos ponen de manifiesto sobre la noción matemática de la integral definida. Entre las principales conclusiones, la autora ha resaltado la ausencia de significado y las dificultades presentadas por los estudiantes en lo que se refiere al proceso de aprendizaje del tema.

Hemos realizado algunas investigaciones previas relacionadas con el proceso de estudio de la integral en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. En el estudio desarrollado por Crisostomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2006) realizamos un acercamiento a la reconstrucción del significado global de la integral definida, utilizando las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico, a partir de un marco institucional nombrado histórico-epistemológico-didáctico. En los resultados, a partir de los significados emergentes de la evolución histórica de la integral definida, sistematizamos siete configuraciones epistémicas parciales, las cuales fueron interpretadas como el significado global de la integral definida. Sin embargo, al centrar nuestro interés en la identificación de los significados puestos de manifiesto por los profesores-formadores de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil sobre el proceso de estudio de la integral, ampliamos el referido estudio contemplando las configuraciones epistémicas de la integral que se suele utilizar en el curso introductorio de Cálculo en el referido contexto socio-profesional.

En este sentido, en nuestra Tesis de Máster realizamos un estudio de caso intitulado *Caracterización del proceso de estudio de la integral en la formación de profesores de matemáticas* (Crisostomo, 2008). El objetivo de esta investigación consistió en caracterizar el proceso de estudio del Cálculo Integral en el contexto socio-profesional de la formación de profesores de matemática de secundaria en Brasil. Se trata de una investigación cualitativa e interpretativa realizada con los profesores-formadores, expertos en la enseñanza del Cálculo en el nivel universitario, especialmente en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas, teniendo en cuenta los resultados de las investigaciones realizadas tanto en el área de la Didáctica del Cálculo, como de formación de profesores de matemáticas. Utilizamos de manera sistemática las herramientas conceptuales elaboradas por el llamado "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" para analizar, con detalle y profundidad, la entrevista "piloto" que hemos realizado con uno de los profesores-formadores. La sistematización de los relatos del profesor-formador ha sido realizada teniendo en cuenta una pauta de análisis elaborada a partir de las herramientas del modelo teórico utilizado y contempla indicadores que pueden ser útiles para analizar la idoneidad del referido proceso de estudio a partir de las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica. Posteriormente, realizamos otro estudio parcial relacionado con este tema (Crisostomo, 2011), en el cual abordamos el problema de la identificación de criterios para el diseño y desarrollo curricular de contenidos matemáticos específicos teniendo en cuenta los conocimientos profesionales de los profesores-formadores, y su articulación con los resultados de la investigación en el tema correspondiente. Se trata de un estudio de casos centrado en la enseñanza de la integral a futuros profesores de matemática de secundaria. Utilizamos de manera sistemática las herramientas conceptuales elaboradas por el Enfoque Ontosemiótico, las cuales se han revelado potentes para caracterización de dicho conocimiento sobre el proceso de estudio de la integral. Hemos profundizado nuestros estudios y ampliado los resultados parciales de nuestras investigaciones previas que culminaron con la elaboración de nuestra tesis doctoral.

1.2.3. Estudios cognitivos

Los constructos desarrollados en el marco del Pensamiento Matemático Avanzado - PMA propician explicaciones para diversas investigaciones cognitivas desarrolladas sobre el Cálculo Integral. Sin embargo, aunque para nuestro estudio es relevante contemplar, no solamente la dimensión cognitiva, sino las demás dimensiones propuestas por el EOS, consideramos que dichos constructos pueden contribuir, de manera complementaria, con la interpretación necesaria para la sistematización del significado de referencia (o global) de la integral, como para la caracterización de los conocimientos profesionales expresados por los profesores-formadores sobre el proceso de estudio de la integral. Iniciamos esta sección con un abordaje de algunos de los estudios más generales desarrollados en el PMA relacionados con el proceso de estudio de la integral y, a continuación, realizamos una síntesis de los estudios cognitivos realizados sobre dicho proceso.

1.2.3.1. El Pensamiento Matemática Avanzado como línea de investigación

A partir de la formación del "grupo de trabajo" con foco en el "Pensamiento Matemático Avanzado – PMA" (1985) en el seno del *International Group for the Psycology of Mathematics* (PME) la producción científica enmarcada en el PMA ha sido significativa. En este sentido, podemos considerar que a partir de la publicación de la obra *Advanced Mathematical Thinking*, editada por *Tall* (1991a), ha convertido el PMA en una de las línea de investigación más utilizadas en los estudios cognitivos desarrollados en Educación Matemática en la Enseñanza Superior, especialmente en lo que se refiere a los temas de Cálculo y de Análisis Matemático.

Dicha obra está constituida por un capítulo introductorio, en el cual Tall fundamenta la psicología del pensamiento matemático avanzado, y por tres partes distintas. La primera está centrada en la *naturaleza del pensamiento matemático avanzado* y comprende el estudio de los procesos involucrados en la concepción del PMA, la creatividad matemática y la demostración matemática; en la segunda, intitulada *Teoría cognitiva del pensamiento matemático avanzado,* se aborda el rol de las definiciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el rol de las entidades conceptuales y de sus símbolos en la introducción de los conceptos matemáticos, y la abstracción reflexiva en el PMA; la tercera parte contempla algunas *investigaciones en la enseñanza y aprendizaje del pensamiento matemático avanzado,* relacionadas con el desarrollo cognitivo y con las dificultades conceptuales y de aprendizaje asociadas a algunos temas como funciones, límites, infinito, demostraciones y con el uso de los ordenadores.

Para Tall (1991b), la caracterización del ciclo de actividad en el pensamiento matemático avanzado se basa en que "desde la actitud productiva de considerar la contextualización de un problema en una investigación matemática, conduce a la formulación productiva de conjeturas y a la etapa final de refinamiento y demostración" (p. 3). Al postular que muchas de las actividades ocurren simultáneamente tanto en este ciclo como en la solución de problemas de las matemáticas elementales, el referido autor considera que la distinción entre ambos radica en la posibilidad de definición y deducción presentes en el PMA. Además, afirma que:

> El cambio del pensamiento matemático elemental para el pensamiento matemático avanzado involucra una significativa transición: desde la descripción a la definición, desde el convencimiento a la demostración de manera lógica basada en las definiciones. Esta transición requiere una reconstrucción cognitiva, que se manifiesta durante los conflictos iniciales de los estudiantes universitarios con las abstracciones formales enfrentadas por ellos en el primer año de universidad (p. 20).

La reconstrucción cognitiva es analizada a partir del aspecto de la teoría de Piaget relacionado con la transición de un estadio mental para otro. Esto se concreta a través de la complementariedad entre los procesos de *asimilación* y *acomodación*. Para Tall, la *asimilación* consiste en una apropiación individual de un nuevo dato, mientras que la *acomodación* se refiere a un posible cambio en la estructura cognitiva individual. Además, esta idea es corroborada por la distinción hecha por Skemp (1979) entre los casos en que el proceso de aprendizaje provoca una simple expansión de la estructura cognitiva del individuo, y aquellos en los cuales el conflicto cognitivo requiere una reconstrucción mental, cuyas dificultades producidas ocurren durante la fase de transición (Ibíd. p. 9), lo que implica que hay que tenerlas en cuenta en la enseñanza y aprendizaje de nociones matemáticas, como por ejemplo de la integral.

En el capítulo 11 de dicha obra, intitulado *Analysis*, Artigue (1991) empieza presentando brevemente los principales aspectos de la evolución histórica de los conceptos, alrededor de los cuales se estructuraron las nociones del Cálculo; además, aborda los conflictos existentes en las nociones de diferencial y derivada, y discute los impactos de dichos conflictos en la educación, así como también del Análisis no *Standard.*

Al presentar distintas investigaciones teóricas e interpretaciones empíricas sobre las concepciones mentales construidas por los estudiantes sometidos a la enseñanza tradicional, la autora comenta algunos de los distintos conceptos *a priori* que suelen ser atribuidos a las nociones del Cálculo. En el caso de la integral, por ejemplo, Artigue señala diferentes concepciones que le son atribuidas: inversa de la diferenciación; proceso para hallar longitud, área y volumen; forma continua lineal en un espacio de funciones; o, de manera más general, como un proceso de medición.

Finalmente, la autora presenta estudios en Ingeniería Didáctica enfocados en desarrollar y testar nuevos métodos para la enseñanza y aprendizaje de conceptos del Cálculo, como derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales. Concluyendo la autora considera importante enfatizar algunos aspectos convergentes en dichos estudios, tales como:

- ✓ *poner el foco en la construcción y control de significados;*
- ✓ *buscar un mejor equilibrio entre las diferentes representaciones de un concepto, particularmente preocuparse con el mejor uso de un contexto gráfico;*
- ✓ *preocuparse con las posibilidades ofrecidas por el ordenador para repensar el contenido de la educación en términos de adecuación epistemológica de los dominios considerados y de las capacidades cognitivas de los estudiantes* (p. 195).

Posteriormente, en su artículo *L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse,* Artigue (1998) aborda una problemática que ha jugado un papel fundamental en la Didáctica del Análisis, ejemplifica sus potencialidades y límites, y, postula que el desarrollo de este campo depende tanto de su evolución global como de las condiciones culturales y sociales, en las cuales se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje del Análisis. En dicho trabajo la autora discute:

- los obstáculos epistemológicos (destacándose el concepto de límite y la heterogeneidad de las dimensiones);
- la transición entre procesos y objetos;
- los sistemas didácticos y de la ingeniería didáctica (destacándose una situación fundamental para el aprendizaje de la integral);
- aspectos institucionales y ecológicos (destacándose la Didáctica del Análisis y las tecnologías informáticas).

En las conclusiones, la autora resalta la necesidad de desarrollar una estructuración y reconstrucción epistemológicamente coherentes y ecológicamente viables para la evolución del Análisis, tanto en la enseñanza universitaria como en la secundaria, teniendo en cuenta las diferentes culturas y los distintos contextos educativos.

Otro trabajo que consideramos relevantes para nuestra investigación y que posibilita un panorama general sobre la problemática existente en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, consiste en el capítulo sobre *Funciones y Cálculo* (Tall, 1996).

Dicho estudio centra su foco en los cambios ocurridos en la percepción de las funciones y Cálculo en los últimos años, en términos de investigaciones sobre el desarrollo de conceptos, así como también del currículo a través del uso de ordenadores. Al entender que el propósito de las funciones es representar *cómo las cosas cambian,* afirma que dicho significado "lleva a considerar naturalmente los conceptos de *tasa de variación* (diferenciación) y crecimiento acumulado (integración) junto con el teorema fundamental del Cálculo que explica ambos conceptos como procesos inversos" (p. 289).

El referido autor discute las diferentes maneras con que suelen desarrollarse los currículos de Cálculo en distintos países. En algunos, los conceptos son introducidos de manera más intuitiva; en otros, por medio de la definición formal basada en las teorías de Análisis Matemático; existen también los que se quedan en una posición intermedia entre estos dos extremos, como es el caso de Estados Unidos. Sin embargo, Tall comenta que algunos estudios sitúan el nivel de reprobación en Cálculo, de los estudiantes del primer año universitario, entre el 30% y 50%.

Según Tall (1996), el desarrollo de las tecnologías introdujo, a partir de los años 1970, los ordenadores y las calculadoras gráficas en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, contribuyendo así con el surgimiento del movimiento de reforma del Cálculo en Estados Unidos. Dicho movimiento no pretendía que el Cálculo fuera un "filtro" para los estudiantes, sino que su aprendizaje fuera extendido a todos ellos. Entre los factores presentes en las motivaciones de esta reforma, se encontraba la gran aspiración de investigar *la comprensión* de los procesos de aprendizaje *de los conceptos de Cálculo*. Al discutir el desarrollo cognitivo, Tall considera la transformación de algunos procesos en conceptos, lo que genera el constructo *procepto,* abordado en el Capítulo 2. Además, resalta la importancia de las representaciones por posibilitar que un concepto sea enfocado desde distintos puntos de vista.

En este sentido, el autor considera que para construir o reconstruir un concepto, como el de integral, el constructo *concepto imagen* juega un papel esencial. Dicho constructo es entendido como el proceso más amplio, pues "incluye todas las imágenes mentales, propiedades y procesos que se relacionan en la mente del individuo" (Ibíd, p. 298).

El autor destaca que el crecimiento cognitivo propiciado por las Matemáticas a partir de los años 1960 (en el cual el concepto de función juega un papel fundamental) y las dificultades conceptuales cognitivas son, actualmente, mejor comprendidas. Resalta también la ampliación del significado de Cálculo desde las técnicas simbólicas tradicionales hasta una ciencia de cómo las cosas cambian (considerando su razón de cambio y el crecimiento acumulado) y la accesibilidad del Cálculo a los estudiantes. Finalmente, concluye que aunque el "descubrimiento" del Cálculo se constituyó en uno de los hechos más significativos en la historia de la civilización en los últimos tres siglos, el actual desarrollo de las tecnologías de la información caracteriza su ápice, donde el Cálculo sigue jugando un papel central.

1.2.3.2. Estudios cognitivos relacionados con la integral

En este apartado, sintetizamos algunos de los estudios cognitivos relacionados con el proceso de estudio de la integral, resaltando sus principales aportaciones para nuestra investigación.

Orton (1983) al desarrollar un estudio relativo a la comprensión de los estudiantes sobre distintos aspectos relativos al concepto de integral de Riemann, y tras aplicar un cuestionario (cuyas cuestiones estaban relacionadas con límites, áreas de rectángulos y bajo una curva, cálculo de integrales y de volúmenes de cuerpos de revolución), concluyó que el principal obstáculo estaba relacionado con la comprensión de la integral como el límite de una suma. Este autor resaltó, además, que el probable descuido del concepto de límite en los niveles más elementales dificulta la introducción de la integración; el cálculo del área bajo una curva es facilitado por el uso de calculadoras y, es aconsejable la utilización de diagramas y gráficos en la introducción del Cálculo.

En el estudio realizado por Mundy (1984) sobre la comprensión visual de los estudiantes asociada a la integración de funciones positivas, se evidenció que los estudiantes no relacionan la integral de dichas funciones con el área bajo una curva.

En su artículo, Tall (1991c) analizó las dificultades que los estudiantes universitarios del primer año presentan en relación al significado de las notaciones $\frac{dy}{dx}$ y $\int f(x)dx$, considerando que dichas dificultades están asociadas, en muchos casos, a las “deficiencias” de los conceptos de Cálculo transmitidos por los profesores en la enseñanza preuniversitaria. También presentó la relación entre la diferencial y la integral (en el sentido de Leibniz), asociándola al concepto de integral definida a través del triángulo característico.

Baldino (1995), tras cuestionar ¿cuál es la relación del “curso” de Cálculo con el “curso” de Análisis?[1], reflexiona sobre la enseñanza del Cálculo, especialmente a partir de las dificultades generadas por el concepto de integral, tomando como punto de partida el libro de texto de Swokowski (1995). El autor basado en el “análisis no estándar” (en el sentido de Robinson, 1966, citado por Baldino), presenta una propuesta alternativa, que consiste en seguir los caminos de la historia, para enfatizar y fundamentar los contenidos de integral y derivadas. Dicha propuesta sugiere la enseñanza de los contenidos a partir de los infinitésimos.

Thomas & Ye Yoon Hong (1996) hacen la descripción de algunos fallos conceptuales presentes en la comprensión y en el pensamiento instrumental de los estudiantes. Para eso, utilizaron los resultados de un cuestionario, aplicado a los estudiantes de Cálculo del último año de bachillerato, cuyo diseño tenía como objetivo medir la comprensión de los conceptos asociados a la integral de Riemann en dichos estudiantes.

Para Hitt (1998), la utilización errónea de interpretaciones visuales puede conducir a representaciones incorrectas. El estudio fue ejemplificado por medio de una propuesta, realizada por un profesor de matemáticas de enseñanza media superior, sobre la “comprensión” del teorema fundamental del Cálculo y la aplicación de una propiedad de la integral definida. En dicho ejemplo, el autor utilizó la transcripción literal de dicha propuesta para analizar los aspectos erróneos en la interpretación equivocada del profesor. De este análisis, el autor infiere que el profesor parece no darse cuenta de su contradicción entre lo algebraico y su idea geométrica asociada al teorema fundamental del Cálculo; además, aunque era consistente en su idea intuitiva del área bajo una curva, no articulaba coherentemente los aspectos geométricos de dicho concepto.

El estudio histórico, desarrollado por Prabhu y Czarnocha (2000) sobre el concepto del área bajo una curva, reveló que la imagen formada por los estudiantes corresponde al mismo punto de vista anteriormente utilizado por

[1] En los distintos currículos de la Licenciatura en Matemática desarrollada en Brasil, son contempladas dos disciplinas: Cálculo Diferencial e Integral (generalmente con enfoque más intuitivo) y Análisis Matemático (con enfoque formal, riguroso y práctica en demostraciones).

Arqímedes, Cavalieri, y Wallis. Por esto, consideran que entender la integral definida como el límite de una suma se constituye en un considerable obstáculo para muchos estudiantes de Cálculo. Tras aplicar un supuesto método de los indivisibles en el proceso de enseñanza del Cálculo, los autores discuten dicho método y relatan sus experiencias de enseñanza.

Czarnocha, Dubinsky, Loch, Prabhu y Vidakovic (2001) realizaron un trabajo centrado en la comprensión de las sumas de Riemann por los estudiantes. Mientras los autores tenían la expectativa de que los estudiantes tuvieran dificultades para hallar las integrales definidas, se quedaron sorprendidos al observar que algunos de ellos no basaban sus respuestas en un acercamiento explícito a la suma de Riemann. Al contrario del razonamiento continuo que se esperaba de ellos, utilizaron los indivisibles atómicos de Cavalieri. Este redescubrimiento de cómo la intuición de los indivisibles se presentaba en el pensamiento de los estudiantes mientras ellos analizaban la noción del área bajo una figura irregular, es un testigo de la persistencia del punto de vista atómico en la estructura del espacio.

La tensión entre el rigor y la intuición en Cálculo y Análisis fue el foco de la tesis doctoral de Reis (2001). La investigación, desarrollada en el contexto de formación de profesores de matemáticas, fue centrada en la compresión de dicha tensión en la enseñanza universitaria y llevada a cabo a través del análisis de manuales didácticos y de las entrevistas semiestructuradas realizadas con cuatro investigadores y autores de libros de texto de dichas disciplinas. En las conclusiones, el autor señaló la necesidad de ruptura de la visión dicotómica entre rigor e intuición en la enseñanza de Cálculo y de Análisis Matemático.

Rasslan y Tall (2002) investigaron el *concepto imagen* de la integral definida en un grupo de estudiantes del último año del bachillerato, tras el desarrollo de un currículo en el cual se introdujo la integración por medio de estimación de actividades del área comprendida por un gráfico dado y el eje de las abscisas. En las conclusiones, los autores destacaron la gran dificultad de la mayoría de los estudiantes para definir la referida integral y para utilizarla en la interpretación de los problemas asociados al cálculo de áreas en un contexto más amplio.

El artículo de Acosta y Wills (2002) está centrado en las ideas y ejercicios sobre dos asuntos relacionados con el tratamiento estándar del Cálculo integral. El énfasis de los conceptos abordados ha sido en la intuición de los estudiantes, con la finalidad de ayudarlos en lo que se refiere a facilitar la comprensión de la integral definida como un límite de las sumas de Riemann.

El estudio desarrollado por Kleiner (2002) tiene en cuenta el papel esencial que lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande juegan en Cálculo y considera que estos estuvieron presentes en su historia de distintas maneras: infinitesimales, indivisibles, diferenciales, cantidades evanescentes, momentos, magnitudes infinitamente grandes e infinitamente pequeñas, sumas infinitas, serie de potencia, límites, y números hiperreales. Además, resalta la importancia fundamental de dichas nociones en los niveles técnicos y conceptuales del Cálculo, y ejemplifica cómo lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande se revelaron en la historia del Cálculo desde el siglo XVII hasta el XX.

Carlson, Persson y Smith (2003) han elaborado materiales curriculares para promover la comprensión y destrezas de razonamiento en estudiantes relacionados al Teorema Fundamental del Cálculo - TFC. En la revisión bibliográfica desarrollada, los autores apuntan que: (a) la mayoría de los estudiantes del primer semestre del curso de Cálculo no adquieren la comprensión de dicho concepto y tampoco parecen estar desarrollando las destrezas de razonamiento fundamentales para entender y utilizar la FTC en situaciones aplicadas, basándose en los resultados de los estudios desarrollados por Bezuidenhout y Olivier (2000), y por kaput (1994)[2]; (b) las dificultades presentadas por los estudiantes sobre el TFC han sido atribuidas al estudio superficial de función, según Carlson (1998) y Thompson (1994) y de tasa de cambio (Thompson, 1994). La investigación propone realizar una “articulación más cuidadosa de las destrezas de razonamiento y las concepciones relacionadas con la acumulación y el Teorema Fundamental del

[2] Carlson, Persson y Smith (2003) ha citado los trabajos de (Bezuidenhout y Olivier, 2000; kaput, 1994; Carlson, 1998; Thompson, 1994).

Cálculo" (p. 166). Entre las principales conclusiones, los autores consideran que aunque hay deficiencias de los estudiantes relativas a las tareas, su rendimiento relacionado con la noción de acumulación y el FTC ha sido relativamente bueno y que el marco para este estudio sirve como una herramienta útil para el análisis de las destrezas de razonamiento y comprensión de los estudiantes relativos a los conceptos y a las notaciones del FTC.

González-Martín y Camacho (2004) analizan las respuestas de un grupo de estudiantes de matemáticas, del primer año de la universidad, a un cuestionario elaborado con el objetivo de determinar las dificultades que tienen dichos estudiantes al realizar tareas no rutinarias relacionadas con las integrales impropias. Tras categorización de las respuestas, llegaron a la conclusión de que varios estudiantes tienen dificultades en la articulación de los diversos sistemas de la representación, y problemas para conectar y relacionar este conocimiento como una generalización de conceptos anteriores, tales como integrales definidas, series y secuencias.

Las dificultades en los conocimientos previos de conceptos del Cálculo también ha sido destacado en la tesis doctoral de Olímpio Junior (2006) al investigar las comprensiones que emergen en estudiantes del primer año de la Licenciatura en Matemáticas sobre los conceptos de función, límite, continuidad y derivada. Para ello, realizó experimentos basados en la integración *oralidad-escrita-sistema algebraico computacional (CAS)* con una muestra de ocho estudiantes voluntarios de una universidad pública de *São Paulo* (Brasil). En la recogida de dados se contempló las respuestas escritas individuales de los estudiantes participantes, así como también las videograbaciones de las actividades realizadas por las parejas de estudiantes. En su análisis inicial de los cuatro episodios descritos en la investigación, el autor ha identificado cinco categorías de interacciones producidas entre las parejas de estudiantes y el CAS, y tres niveles de compatibilidad entre las comprensiones previas de los estudiantes y las emergentes de sus interacciones con el CAS. En las consideraciones finales, dos aspectos han sido resaltados: la atribución de los "conflictos cognitivos" de los estudiantes a la baja comprensión que ellos presentaron del concepto de función y la sugerencia de potenciación de los aspectos dinámicos en el proceso de estudio del Cálculo en el nivel universitario.

La utilización de recursos tecnológicos en "experimentos de enseñanza" viene constituyéndose en una vía de investigación en Didáctica del Cálculo. En este sentido, Scucuglia (2006) ha realizado una discusión, sobre cómo estudiantes usando la calculadora gráfica investigan el Teorema Fundamental del Cálculo. El autor afirma que la utilización de programas y comandos de la calculadora gráfica TI-83 ha condicionado el desarrollo del pensamiento de las parejas de estudiantes investigados, del primer año de la Licenciatura en Matemáticas, sobre los conceptos de Suma de Riemann e Integral, inherentes al Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). En actividad posterior, los estudiantes en interacción con las calculadoras gráficas propusieron conjeturas relacionadas al TFC. Para demostrar dicho teorema, los estudiantes han utilizado nociones intuitivas y notaciones simplificadas, argumentándolas a partir de los datos experimentales obtenidos. El paso al rigor de la Matemática axiomática, a partir de las discusiones de los procesos deductivos, bien como la utilización formal de la simbología matemática ocurrió posteriormente, teniendo en cuenta los resultados obtenidos con el referido experimento de enseñanza.

Camacho, Depool y Garbín (2008) realizaron una investigación con el objetivo de estudiar como la utilización del "CAS ayuda a identificar aspectos que se consideran importantes al resolver problemas en distintos contextos […], así como analizar si la interpretación de la integral definida como área determina la concepción de los estudiantes" (pp. 34-35) mientras realizan las actividades propuestas. Tras desarrollar las prácticas de laboratorio con la utilización del *software DERIVE* y analizarlas, los autores han observado que: (a) para los problemas situados en un contexto matemático los estudiantes han identificado, por una parte, las informaciones contempladas en los problemas relacionados con funciones continuas y, así como utilizado las distintas representaciones y realizado la conversión entre las mismas (en el sentido de Duval (1993). Por otra parte, presentaron dificultades tanto en la interpretación de las informaciones como en el cálculo de la integral, cuando se trataba de problemas relacionados con funciones continuas a trozos; (b) elevada incidencia de dificultades relacionadas con la interpretación incorrecta de las informaciones y con la resolución inadecuada de los problemas relacionados con el contexto extramatemáticos, cuando la integral no se encontraba asociada al concepto de área sino a un valor que puede medir longitudes (desplazamientos, arcos de curvas, etc.). En la conclusión de la investigación, encontramos la afirmación siguiente:

> En cuanto al uso del CAS, hemos visto que contribuye eficientemente a promover la construcción del concepto de integral definida cuando aparece asociado al cálculo del área. Sin embargo, en otros contextos distintos al matemático, se convierte en un simple artefacto de cálculo y se queda incompleto el proceso de génesis instrumental necesario para una apropiación total de la herramienta tecnológica como un instrumento de aprendizaje de los conceptos matemáticos (p. 55).

Por otro lado, el rol de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas, basado en la interpretación visual del Cálculo Integral, ha sido investigado por Rosken y Rolka (2006). El interés del estudio está centrado en la imagen visual utilizada por los estudiantes para resolver problemas específicos y como ellos lidian con las representaciones dadas. Las autoras consideran que la visualización puede ser una herramienta potente para explorar problemas matemáticos, dar significado a los conceptos y establecer las relaciones entre ellos. Afirman, además, que su estudio está centrado solamente en el aspecto visual de la imagen del concepto.

> En diferentes contextos, la visualización es discutida como parte de la *imagen del concepto* (Tall y Vinner, 1981), que incluye imágenes visuales, propiedades y experiencias relativas a un cierto concepto matemático. Para la comprensión formal de un concepto matemático se requiere que el aprendiz genere una imagen conceptual del mismo (p. 458).

En los resultados se ha resaltado la importancia de la visualización en el proceso de aprendizaje, e identificadas las siguientes dificultades presentadas por los estudiantes al resolvieren las tareas propuestas: el concepto de integral puesto de manifiesto es parcial; no establecen la diferencia entre integral y área; falta de comprensión de que el integrando puede ser dado por una función constante; no visualizan el área de la parte de la gráfica que está bajo el eje x; inclinación a la utilización de un enfoque algorítmico en lugar de la visualización para tares que serían resueltas sencillamente por medio de la visualización.

En el estudio de Thompson y Silverman (2007) se asume que el concepto de acumulación es central para la noción de integración. Aunque la idea de acumulación sea considerada trivial, desde la perspectiva intuitiva, ésta es compleja desde el punto de vista matemático. Además, se analiza la comprensión de la función de acumulación por los estudiantes y su conexión con contenidos de Cálculo, tales como función, derivada, integral, etc. Una idea interesante planteada en este estudio consiste en que "cuando algo cambia, algo se acumula. Cuando algo se acumula, se acumula con alguna tasa. Comprender la tasa de cambio significa, por tanto, que uno ve acumulación y su tasa de cambio como dos caras de una misma moneda" (p.127). Según los autores:

> Para tener una concepción del proceso de definición de una fórmula de una función implica que se debe tener lo que Gray y Tall (1994) nombran de una comprensión *proceptual* del que la fórmula representa. La persona debe tener en mente un conjunto bien estructurado de procedimientos para evaluar la fórmula junto con la capacidad y la tendencia para ver que la fórmula de "auto-evaluación" (P. W. Thompson, 1994), lo que significa que uno lo ve como la evaluación instantánea propiamente dicha para cualquier número (p. 118).

En las conclusiones los autores resaltan las ventajas de utilización de la función acumulación en lugar del abordaje tradicional con las cuales suelen implementarse el proceso de estudio de la integral. Sugieren también que se ponga mayor énfasis en el Teorema Fundamental del Cálculo, en el cual la función acumulación desempeña un papel central, en el sentido de dar explicaciones para la relación entre la acumulación de pequeñas cantidades y las tasas a las cuales éstas se acumulan. Finalmente, apuntan en la dirección de realización de nuevas investigaciones sobre este enfoque, aunque lo mismo sea más complejo que el abordaje tradicional, afirmando que la importancia de los beneficios justifica el esfuerzo.

Tras revisar los antecedentes de las investigaciones relacionadas con la comprensión del concepto de la integral definida, Boigues, Llinares y Estruch (2010) han afirmado que:

> Los resultados de estas investigaciones señalan que la comprensión de la integral definida encierra múltiples objetos qua van más allá de una mera definición formal teniendo en cuenta la necesidad de diferenciar el objeto matemático de integral definida de su representación, de relacionar la noción de sucesión y de límite con la de suma de Riemann para potenciar una comprensión que vaya más allá de la pura manipulación procedimental y considerar la comprensión de la integral definida como concepto dinámico que va incorporando nuevos elementos (p. 257).

1.2.4. Estudios instruccionales

Lemke y Store (1980), realizaron un trabajo cuyo objetivo consistía en explicar (técnica y metodológicamente) cómo la introducción de la integral definida, según los programas de estudio de Cálculo, se basaba en las secuencias de sumas superiores e inferiores obtenidas por las sucesivas biparticiones de los intervalos iniciales.

El trabajo de Vaupel (1981) se centra en la preparación y presentación de dos enfoques para la enseñanza del concepto de integral basada en la idea de aproximación. Empieza con las integrales que pueden ser interpretadas geométricamente; posteriormente utiliza los procesos de integración de Cauchy y de Riemann para mejorar la aproximación y, finaliza con el estudio del Teorema Fundamental del Cálculo a través de aplicaciones y consideraciones numéricas. En la conclusión destaca que la fiabilidad del método fue constatada a través de su aplicación al desarrollo de series de potencia y en la regla de Simpson.

La propuesta realizada por Wenzelburger (1993) está basada en la introducción del Cálculo por medio de un acercamiento intuitivo a las matemáticas de los cambios, según su proceso de desarrollo histórico. Así, propone regresar a la génesis del Cálculo integral (resaltando sus conceptos básicos), a través de un enfoque intuitivo relacionado con sus aplicaciones. Considera que realizó una cierta "reconstrucción didáctica" del Cálculo integral, pues tomó las sumas como punto de partida e interpretó (geométricamente como área) el concepto de integral definida como límite de una suma. La determinación de dichas sumas fue realizada, inicialmente, por medio de métodos gráficos y numéricos y, posteriormente, para intervalos finitos. Las aplicaciones son ejemplificadas a través de problemas relacionados a la Física y a la Economía, con amplia utilización de las representaciones gráficas.

En esta misma dirección, en su tesis doctoral, Turégano (1993) tras realizar un estudio del currículo del bachillerato en España y otros países, desarrolló un estudio centrado en la integral definida, enmarcado en la línea de investigación del Pensamiento Matemático Avanzado. La autora consideró que las causas del bajo rendimiento presentado por los estudiantes en Cálculo (en el bachillerato y en la universidad) se sitúan en los planos psicológico, didáctico y epistemológico. La investigación se desarrolló en dos fases. La primera fue orientada a la elaboración de un modelo matemático que propiciara condiciones de diseñar una propuesta didáctica para la presentación de la integral definida a los estudiantes en un curso inicial de Cálculo y, la segunda, tenía por finalidad el estudio de las imágenes de la integral definida (en dichos estudiantes) tras una etapa de aprendizaje.

Al considerar que dicha propuesta consiste en iniciar a los estudiantes en un curso de Cálculo a partir de una secuenciación del currículo y de un enfoque de la integral, Turégano (1998) propone introducir el curso de Cálculo a través de la integral definida (independientemente de la diferencial y como primera introducción al concepto de límite). En las conclusiones, resaltó que la génesis histórica debe primar sobre su orden lógico en la secuenciación de los contenidos y la formación de los conceptos puede ser lograda cuando éstos son introducidos mediante la resolución de los problemas que se presentaron en su génesis.

El trabajo de Allen (2001) está centrado en una serie de problemas diseñados para dotar a los estudiantes de oportunidades para desarrollar la comprensión de las aplicaciones de la integral definida. Para esto, el autor utilizó ejercicios no rutinarios que deberían ser resueltos por los estudiantes sin el empleo de métodos pre-concebidos. El diseño de dichos problemas puede ser incorporado al tema de integral en un curso tradicional de Cálculo. Aunque estas tareas son generalmente convenientes para los pequeños grupos, algunos de los problemas son apropiados, como cuestiones de evaluación, para ser trabajadas individualmente por los estudiantes; algunas tareas requieren la utilización de una calculadora básica.

Enmarcado en la socioepistemología, Cantoral (2003) considera que las tres representaciones más conocidas para la introducción de la integral definida consisten en la integral de Cauchy-Riemann, la de Newton-Leibniz y la de Wallis. En sentido, afirma que existe una explicación distinta asociada a cada una de estas representaciones: la integral de Cauchy-Riemann se refiere a la aproximación, la integral de Wallis a la noción de promedio y, la integral de Newton-Leibniz se relaciona con la noción de acumulación. Resalta este autor que hay un cierto consenso en el ámbito institucional para centrar el proceso de estudio de la integral en la en la noción de integral de Cauchy-Riemann, justificando que no hay evidencias empíricas sobre qué representación de la integral más favorece el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, en las conclusiones de su investigación, Cordero (2005) sugiere que en las situaciones de enseñanza relacionadas con el proceso de estudio de la integral, se debe enfocar "más la atención en situaciones específicas de variación continua y cambio, como en la noción de acumulación, y no directamente en los conceptos de función derivada o suma de Riemann" [...] (p. 280).

En su tesis doctoral, González-Martín (2004) ha realizado un estudio la de la integral definida desde la perspectiva numérica, gráfica y computacional. Basado en la "Ingeniería Didáctica", el autor realizó el diseño e implementación de una propuesta didáctica sobre la integral, utilizando o *Maple V.*

En relación con la secuencia didáctica propuesta e implementada en la investigación, teniendo en cuenta las posibles dificultades que el aprendizaje de la integral impropia puede suscitar, el autor considera:

> Indispensable poder reorganizar los contenidos, conocer el estado *real* de conocimientos de los estudiantes y enfrentarse a ciertas restricciones institucionales: el estatus habitual dado al registro gráfico, el papel del debate y del trabajo en grupos, el papel del estudiante en la generación de conocimiento, la formación fuertemente algorítmica (pero con graves deficiencias) y poco conceptual... que suponen una primera barrera a superar en la integración de este tipo de secuencias (p. 422).

En el referido estudio han sido constatados los obstáculos y errores siguientes: dominio del trabajo algebraico sobre el gráfico, lo que puede generar dificultades posteriores; ausencia de significados de herramientas fundamentales para la comprensión de la noción de integral impropia; dificultades relacionadas con el uso del límite potencial que lleva los estudiantes a considerar que como siempre se añade área a una figura infinita, ésta no puede ser acotada; dificultades relacionadas con las sumas de Riemann y con serie asociada a una función originadas por la falta de visualización de dichos conceptos que suelen ser desarrollado formalmente; concepción errónea de que la integral definida es siempre un área y que su valor ha que ser positivo; posibles obstáculos para conceptualización de la función integral, producidos por las concepciones meramente operativas de la integral; obstáculos relacionados con la *heterogeneidad de las dimensiones*

(Schneider, 1991) (errores producidos por la descripción del volumen como un agregado de muchas superficies) y con la *ligación a la compacidad* (asociados al infinito potencial). Entre los principales errores de los estudiantes, el autor destaca la tendencia de aplicar resultados en situaciones en que no son válidos, o técnicas en casos innecesarios. Sin embargo, han sido resaltados la existencia de errores no esperados en el cálculo de primitivas, o de carácter aritmético.

En las conclusiones de la investigación, el referido autor ha afirmado que:

1. Es posible mejorar el aprendizaje de los estudiantes si entienden los conceptos en estudio, los objetivos y cómo serán evaluados.
2. La educación y ejercitación de un pensamiento matemático complejo y flexible requiere el desarrollo de la capacidad de utilizar al menos dos representaciones en paralelo.
3. La visualización juega un papel fundamental en la actividad matemática y es un proceso mediante el cual las representaciones mentales se pueden hacer presentes.
4. Las variaciones en el contrato didáctico usual y la explotación del *medio* pueden provocar una mejora en la actitud de los estudiantes e incentivar un aprendizaje más activo.
5. El uso activo de ejemplos y contraejemplos enriquece las experiencias de los estudiantes y los prepara para tareas no rutinarias.
6. Es posible transmitir a los estudiantes de Universidad una visión de las Matemáticas como una ciencia que permite la observación, la experimentación y el descubrimiento.
7. Un uso responsable de los ordenadores puede contribuir a una mejora de la significatividad del aprendizaje (p. 412).

Depool Rivero (2005) elaboró un trabajo de síntesis de su tesis doctoral, en el cual afirma que estudió las actitudes de los estudiantes de Ingeniería que han participado de un curso de Cálculo, centrado en la integral definida, implementado por medio de un Módulo Instruccional que contempla prácticas de laboratorio estructuradas a partir del *Programa de Cálculo Simbólico DERIVE*. En esta perspectiva, ha realizado la inclusión de los recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza de Cálculo en oposición a los procedimientos algorítmicos largamente utilizados. Según este autor:

> Desde la inclusión de las materias de Cálculo en las carreras de Ingeniería ha habido diferentes enfoques de los métodos para enseñarlo, aunque existe una predisposición al uso casi exclusivo de procedimientos algorítmicos para la resolución de los diferentes problemas que se plantean (p. 5).

Se ha estudiado, además, el nivel de competencia que puede ser lograda por los estudiantes universitarios sobre la comprensión de la integral definida. Según este autor, el módulo instruccional diseñado ha facilitado el estudio de la integral definida desde las perspectivas gráfica y numérica al posibilitar la visualización de los procedimientos aproximados. Por otra parte, fue resaltada a importancia de la interacción de los estudiantes con los ordenadores. El autor consideró que dicha interacción ha contribuido con la mejora de la confianza y seguridad, de la motivación y del compromiso de los estudiantes durante la resolución de las actividades.

En otro estudio realizado basado en la socioepistemología, Cabañas y Cantoral (2007) han presentado una propuesta alternativa, basada en el diseño de situaciones didácticas, que conecta la noción de área abordada en la enseñanza básica con la integral definida en la enseñanza superior por medio de actividades relacionadas con repartir, comparar y reproducir, medir y cuantificar, y conservar. En los resultados los autores afirmaron que pretenden hacer aportaciones que contribuyan con el proceso de enseñanza del cálculo integral, y que su interés consiste en estudiar el fenómeno de reproducibilidad. Para ello, las actividades llevan en cuenta el uso sistemático de aspectos de la conservación del área de triángulos o polígonos de pocos lados cuando, cuando estos son sometidos a ciertas transformaciones. Además, han puesto de manifiesto, mediante la utilización de recursos tecnológicos, que el método del cambio de variable para la integración aunque produzca cambios en la gráfica de la función a integrar y en los límites de integración, conserva el valor del área. Asimismo, analizaron la conservación del área de una figura cuando se aplica el teorema del valor medio para integrales.

Se contempla, además, en la literatura, estudios relacionados con la Historia de las Matemáticas. En este sentido, Farmaki y Paschos (2007) han utilizado lo que han nombrado como “ideas genéticas de Oresme”, desarrolladas en el siglo XIV, incluyendo la representación gráfica de velocidad-tiempo, así como las transformaciones geométricas y las reconfiguraciones, para elaborar modelos matemáticos que pueden ser útiles para la solución de los problemas relativos al movimiento lineal. De esta manera, conectan la historia de las matemáticas con las prácticas educacionales propuestas. La noción de movimiento es desarrollada basada en las trasformaciones geométricas, las cuales aplicadas a una gama más amplia de problemas de movimiento permiten introducir los conceptos básicos cálculo integral. Afirman, además, que la extensión de dicho método puede ser de interés para la enseñanza de los conceptos básicos y de resultados del Cálculo desde la enseñanza secundaria.

En su estudio llevado a cabo sobre la integral como acumulación, Kouropatov y Dreyfus (2009) consideran que hay dos ideas centrales relacionadas con la integral: La integral definida, para la cual se resaltan sus diversas aplicaciones en las Matemáticas, Física y Astronomía; y, la integral indefinida, referida como el centro del método de integración de funciones para resolución de ecuaciones diferenciales. Dichas ideas con consideradas por los autores como relevantes para el proceso de enseñanza de la integral, aunque resaltan la falta de conexión entre ambas. Además, afirman que:

> […] considerar la integral como una función de acumulación puede servir de base para la elaboración de una unidad sobre la integración para la enseñanza superior, que tenga el potencial de llevar a una comprensión más profunda de este concepto y, al mismo tiempo, permitir el desarrollo de habilidades del área computacional. En este sentido, la acumulación es entendida en su sentido básico: una suma de acumulación que tiene un número grande de muchos pequeños términos. La idea central consiste en la integral de Riemann que permite desarrollar tanto la integral definida como la indefinida y establecer sus conexiones por medio del Teorema Fundamental del Cálculo (Kouropatov y Dreyfus, 2009, pp. 419-420).

Otro estudio interesante, relacionado con el desarrollo de una propuesta de enseñanza de la integral basada en el uso de las tecnologías, ha sido desarrollado por Lois y Milevicich (2009), con el objetivo de analizar el impacto de la utilización de las tecnologías en un curso de Cálculo Integral. Para ello, implementaron una secuencia didáctica, a través de la plataforma virtual *Moodle*, basada en situaciones-problema relacionadas a las nociones área bajo una curva, volumen de sólidos de revolución, e integrales impropias. El concepto de la integral definida fue abordado, por una parte, por medio de la estimativa de la aproximación al área bajo la curva de $y=x^2$ en el intervalo [0, 1], realizada por medio de las sumas de Riemann inferiores y superiores para una cantidad de particiones del intervalo variando entre cuatro y cien. Además, dicha aproximación fue analizada por medio de una tabla de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, y de una serie que representaba los valores de las sumas superiores e inferiores de las áreas de dichos rectángulos para las sucesivas subdivisiones del intervalo. Por otra parte, se han aplicado la integral definida para hallar tanto el volumen de un sólido de revolución generado por la rotación del área entre dos curvas en torno de los ejes x e y, como el área bajo la curva de una integral impropia utilizando las representaciones gráfica y numérica. Los autores han resaltado que hubo una considerable mejora en el aprendizaje del concepto de integral definida por los estudiantes de Ingeniería participantes del curso. Entre las potencialidades del *software,* han sido resaltadas la visualización, la transición entre las distintas representaciones de la integral definida, y la innecesaria manipulación algebraica. Las ventajas de la utilización de la plataforma *Moodle* también han sido destacadas a partir de las respuestas de un cuestionario aplicado a los estudiantes. En las conclusiones, en el sentido de Ruthven (2007), “consideran la tecnología adecuada para apoyar enfoques de enseñanza basada en guiar a los estudiantes a descubrir propiedades para sí mismos”, argumentando que los profesores pueden guiar a los estudiantes hacia la conclusión matemática, pero los estudiantes podían averiguarlas sin la necesidad de que se les digan lo que pueden considerar que están descubriendo, obteniendo así una mejor comprensión sobre un concepto (pp.1067-1068), como el de la integral definida.

Ribeiro (2010) ha desarrollado una investigación, que culminó con su Tesis de Máster, en la cual ha elaborado un proyecto de estudio del concepto de la integral basado en la Historia de las Matemáticas, Resolución de Problemas y en la metodología Enseñanza-Aprendizaje-Evaluación. El proyecto fue aplicado a los estudiantes de Ingeniería de una universidad privada, siendo éstos considerados corresponsables por la construcción del conocimiento de la integral. En las consideraciones finales el autor expresó que la metodología utilizada resultó eficiente, integradora, motivadora y capaz de aumentar el autoestima de los estudiantes por favorecer un proceso activo de enseñanza. Además, produjo un cambio relacionado con el significado de la investigación para los futuros ingenieros, ayudándoles a enfrentar nuevos desafíos que les requiere una toma de decisiones.

El estudio que desarrollamos, centrado en la utilización de las tecnologías en el proceso de estudio de la integral definida (Crisostmo, Mota, Brito y Ferreira, 2012), analizamos una actividad investigativa de Cálculo, centrada en el concepto intuitivo de integral definida, elaborada a partir de los problemas generadores cuya solución se apoya en un proceso de construcción realizado con el *GeoGebra*. Dicha actividad fue realizada en el laboratorio de informática, con los estudiantes del primer año de Sistemas de Información que no había iniciado el estudio de la integral. La visualización fue bastante utilizada en la resolución de la actividad. Hemos constatado que, tras dibujar las gráficas con el *GeoGebra,* los estudiantes evocaron conocimientos intuitivos sobre la integral al aplicar las sumas de Riemann y la noción de límite de los rectángulos de aproximación en el cálculo del área bajo una curva en un intervalo cerrado especificado.

Entre las conclusiones, hemos resaltado: algunas relaciones del concepto emergente con los conocimientos previos de los estudiantes; las representaciones gráficas de las figuras y la visualización de los aspectos dinámicos propiciados por el *GeoGebra;* el articulación de las configuraciones epistémicas intuitiva, geométrica, y tecnológica de la integral; e la identificación de las dificultades de los estudiantes durante la realización de las actividades propuestas. Estos resultados, aunque parciales, han permitido considerar la potencialidad del *GeoGebra* en el diseño e implementación de actividades destinadas a la comprensión de los significados de las nociones matemáticas, como de la integral, en el ámbito de la enseñanza superior de Cálculo.

1.2.5. Profesores-formadores y el proceso de estudio de Cálculo: Panorama de las investigaciones en el contexto de la formación de profesores de matemáticas en Brasil.

En la literatura especializada, encontramos algunos estudios relacionados con los profesores-formadores de profesores de matemáticas, los cuales consideramos de interés para nuestra investigación y sintetizamos a continuación.

Zaslavsky, Chapman y Leikin (2003) han realizado algunas reflexiones acerca de los modelos utilizados en los programas destinados al desarrollo profesional de los profesores, resaltando: (1) El modelo de la “racionalidad técnica” (en el sentido de Schon, 1983; 1991) que considera que la enseñanza puede ser mejorada y, al mismo tiempo, estar lista para ser transmitida para los participantes. (2) Programas de “reforma orientada” en la perspectiva del aprendizaje, en el cual sus diseñadores tiene una expectativa de que el profesor juega un papel activo en su propio desarrollo profesional. En este sentido, consideran que hay un acuerdo tácito de que "los docentes deben tener sentido de los cambios propuestos en el contexto de su propio conocimiento a priori y creencias acerca de la enseñanza, el aprendizaje, y la naturaleza del contenido que se enseña" (Grant et al., citado por Zaslavsky, Chapman y Leikin, 2003, p. 878). Una suposición dominante referente al conocimiento profesional es que éste “no puede ser trasferido; es activamente construido individual y socialmente por medio de las experiencias personales con el entorno y de las interacciones con los demás, lo que implica en la reflexión y adaptación” (Ibíd., p. 878). (3) Programas basados en la teoría de la práctica social, que se originan de la teoría de Vygotsky sobre el carácter social del proceso de aprendizaje y consideran que el conocimiento de los profesores se encuentra en desarrollo en el seno de las comunidades de prácticas; en este sentido, la principal practica de los profesores-formadores consiste en propiciar oportunidades para el aprendizaje matemática y pedagógica de los profesores.

Consideran, además, que la tendencia de las investigaciones realizadas sobre el tema é de pensar en los programas destinados al desarrollo profesional de profesores de matemáticas en el contexto de la práctica. En este sentido, presentan un marco conceptual teniendo en cuenta las interrelaciones entre las categorías comprendidas por el término “educadores matemáticos”, lo cual reconoce el rol de las tareas y programas en que participan los profesores para facilitar la reflexión sobre la complejidad y los procesos subyacentes involucrados en el desarrollo profesional en el ámbito de la Educación Matemática.

Postulan que la investigación narrativa contribuye con el desarrollo del profesor, y consideran que el enfoque narrativo suele centrarse en los relatos de las experiencias vividas por el profesor en las clases y está orientado a la ampliación de su conocimiento práctico. Al abordar las investigaciones realizadas por Schifter (1996) utilizando las narrativas, las autoras afirman que:

> Los lectores de estas narrativas han aprendido acerca de los objetivos de los profesores para las lecciones, acerca de lo que estaba sucediendo ante un problema particular planteado, y lo que sucedió después. También aprendieron acerca del las preguntas realizadas por los estudiantes, las ideas propuestas, cómo se relacionaban entre sí y con el profesor, acerca del aprendizaje de los estudiantes, y del que el profesor aprendió. Otras narrativas abordan cuestiones que probablemente los profesores enfrenten en la clase al intentar implementar una nueva propuesta pedagógica de matemáticas. ¿Cómo enseñar a los estudiantes a escuchar a los demás, trabajar en colaboración, y participar en investigación matemática? ¿Cómo se puede llegar a todos los estudiantes? ¿Qué papel puede desempeñar la tecnología computacional en la construcción de los conceptos matemáticos por los estudiantes? (p. 889).

Otro estudio interesante, dedicado al *Desarrollo del profesor-formador de profesores de matemáticas y su relación con el desarrollo de la enseñanza* (Jaworski, 2008), está contemplado en el Capítulo 4 del Handbook editado por Jaworski y Wood (2008).

Tras discutir algunos aspectos del desarrollo profesional desde los marcos teóricos tradicional y constructivista, reconociendo problemas en ambos, Jaworski (2008) ha planteado algunas resignificaciones, sugiriendo un cambio:

> En el tono y los matices en las formas de los educadores escribir sobre la formación de profesores. Hay poca garantía en los modelos de prácticas que los educadores promueven con los profesores y mucho más una sensación de incertidumbre en la investigación, con la cual, proviene, casi paradójicamente, una firmeza de propósito, nuevas formas de hablar sobre formación de docentes en matemáticas, y los nuevos paradigmas de la práctica. Estos se basan en la noción de reflexión, tanto para los profesores como para los profesores-formadores, en el modelo de profesor como investigador y, simultáneamente, del profesor-formador como investigador, y sobre el creciente reconocimiento de la epistemología, y de la complejidad y la importancia de no intentar ser demasiadamente simplistas (Jaworski, 2008, p. 338).

La autora utiliza el término “mentoría” para poner el énfasis en el rol del profesor o del profesor-formador como facilitador, y la categoriza como:

> 1) Acciones de los agentes humanos, actuando como amigos críticos […] promoviendo el aprendizaje de los demás.
>
> 2) Acciones de los agentes humanos en la práctica influyen su propio desarrollo mediante alguna forma de "auto mentor".
>
> 3) Acciones de agentes humanos trabajando colaborativamente al mismo tiempo, mentoría mutua - "co-mentoría" (Jaworski y Watson, 1994).

En este sentido, la autora considera estos modelos como una parte de las actividades desarrolladas regularmente por el profesor-formador, tales como asistir a seminarios y mantener conversaciones profesionales. Sin embargo, considera que al actuar (formal o informalmente) como mentores de los colegas, “revisores para una revista, o supervisores de investigación del doctorado, entramos en una práctica didáctica que es una extensión de nuestras normas de la práctica habituales” (Ibíd., p. 355).

Finalmente, la autora afirma que el hecho de los profesores-formadores cuestionarse, “¿quién somos nosotros?” ha proporcionado la oportunidad para que se vean como colaboradores de los profesores de matemáticas, compartiendo recíprocamente los conocimientos y supliendo las necesidades. Todo ello es considerado como “un camino potencialmente fructífero a recorrer” (Ibíd., p. 359).

Por otra parte, hemos buscado los antecedentes de las investigaciones realizadas en Brasil relacionadas con el profesor-formador de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, particularmente con los profesores-formadores que actúan en el área de Cálculo.

Al comentar la revisión del tipo “estado del arte” realizada con 112 investigaciones desarrolladas en Brasil hasta el año 2002, referentes a la formación de profesores, Fiorentini y otros (2002) han constatado que la problemática detectada en dichas investigaciones en las décadas de los 1970 y 1980 aun se presenta en los programas de las Licenciaturas en Matemáticas hasta el inicio de los años 2000. La referida problemática fue sintetizada por los autores a partir de la:

> Desarticulación entre teoría y práctica, entre la formación específica y pedagógica y entre formación y realidad escolar; menor prestigio de la licenciatura con relación al “bacharelado” en Matemáticas; ausencia de estudios histórico-filosóficos y epistemológicos del saber matemático; predominancia de un abordaje técnico-formal de las disciplinas específicas; falta de formación teórico-práctica de los profesores-formadores en el área de la Educación Matemática (Fiorentini y otros, 2002; Fiorentini, 2008, p. 50).

En lo que se refiere a las cuatro investigaciones relacionadas con los profesores-formadores y con el Cálculo, sintetizados en dicho estudio, los autores constataron solamente la existencia de dos tesis doctorales. El estudio de Souza Junior (2000) está relacionado con la trayectoria de un grupo de profesores de Cálculo, y el de Reis (2001), con el papel que juegan el Cálculo y el Análisis Matemático en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas. Este último ya fue comentado anteriormente y se constituye en una de la referencias para nuestra tesis doctoral, especialmente en lo que se refiere a la metodología utilizada para la recogida de los datos y a la muestra de profesores-formadores y autores de libros de texto de Cálculo destinados a la enseñanza universitaria de esta asignatura.

Por otra parte, Souza Junior (2000) realizó un estudio relacionado con la producción de conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en el contexto de una universidad pública. En este sentido, estudió la dinámica de un grupo, y como los individuos se involucraban en el trabajo colectivo, y la producción de los conocimientos sobre el Cálculo. A partir de las reflexiones y discusiones sistemática, se identificó, especialmente, las posibilidades de utilización de los recursos tecnológicos para favorecer la relación entre a enseñanza y la investigación del Cálculo en ámbito de la universidad.

Sin embargo, hay una tesis (Gonçalves, 2000) desarrollada con el objetivo de investigar la formación y el desarrollo profesional de un grupo de ocho profesores-formadores de profesores de Matemática, basado en la historia de vida estudiantil y profesional. En los resultados el autor ha destacado la predominancia de una formación casi que exclusivamente matemática de los formadores, desvinculación entre la formación técnico-científica y la pedagógica de estos formadores, los conocimientos profesionales relacionados con la formación de profesores de matemáticas habían sido adquiridos por medio de la práctica o de la experiencia previa en la docencia en la enseñanza secundaria.

En la síntesis de los antecedentes realizada por Ferreira (2003) en su tesis doctoral, las investigaciones realizadas sobre la formación de profesores de matemáticas. La autora afirmó que los estudios relativos a la formación de los profesores universitarios en Brasil han surgido desde la mitad de la década de 1990. Sin embargo, el foco ha cambiado desde la práctica de los profesores formadores y sus impactos en la formación inicial de profesores, para el estudio de las creencias y concepciones de los profesores formadores. Últimamente el interés reside en investigar la formación y el desarrollo profesional de dichos profesores, especialmente por medio de procesos colectivos o colaborativos (p. 28).

En este sentido, Traldi Júnior (2006) investigó las posibilidades de constituir un grupo colaborativo a partir de un grupo colectivo de profesores de Cálculo. La investigación cualitativa fue desarrollada por medio de un estudio de caso. En las conclusiones el autor afirmó que la colaboración se constituye en uno de los paradigmas promisores para el desarrollo profesional del profesor-formador.

Analizó, además, las dificultades enfrentadas por un grupo colectivo para realizar un trabajo colaborativo.

Mometi (2007) realizó una investigación sobre la propia práctica de un grupo de profesores de Cálculo, basándose en los discursos de éstos sobre sus prácticas, especialmente relacionadas con el proceso de estudio de la integral de Riemann para funciones de una variable real. Los argumentos y las metáforas utilizadas por los profesores han revelado una tensión entre rigor e intuición en el proceso de enseñanza del Cálculo. La participación de los profesores ha sido destacada por el autor, al considerar que éstos han involucrado en las actividades del grupo, así desarrollado un proceso reflexivo que les permitió repensar su propia práctica e mejorarla.

En su tesis doctoral Melo (2010) ha desarrollado una investigación relacionada con la formación de los profesores-formadores que actúan en la Licenciatura en Matemáticas en el contexto de los cambios curriculares. Para ello, se realizó un análisis centrado en las narrativas de éstos por medio de una aproximación de la formación inicial y continuada de los profesores-formadores al concepto de aprendizaje como participación en las comunidades de prácticas y en la relación poder-saber en el sentido de Foucaut. El autor constató que tanto las narrativas como las perspectivas teóricas adoptadas han contribuido con nuevas posibilidades de pensar sobre la formación de los profesores-formadores, así como con las reflexiones, análisis y comprensión de sus prácticas. Como principales resultados fueron destacados algunos caminos de como los profesores-formadores son histórica y socialmente constituidos a partir de las prácticas, y la influencia de los discursos producidos por los referidos profesores en las práctica de formación de los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria.

Al referirse al rol de la investigación en la práctica profesional de los profesores-formadores, Fiorentini (2004b), citado por Melo (2010), considera que:

> Aunque el reconocimiento del profesor universitario, en este inicio de siglo, permanezca centrada más en su actuación técnico-científica del que en su desempeño didáctico-pedagógico, se puede encontrar actualmente, en diferentes departamentos e institutos universitarios, docentes que priorizan la docencia y su función de formadores de profesionales. Estos, además de buscaren una formación didáctico-pedagógica en cursos de máster o de doctorado en el área educacional, desarrollan investigaciones

> relacionadas a la enseñanza o a la formación de profesionales en su área de actuación. De esta manera, han emergido en las distintas áreas los nuevos campos de conocimiento que conectan los saberes de un área específica con la docencia y sus saberes didácticos-pedagógicos (p. 13).

En este contexto, Fiorentini (2004a) postula que en el ámbito de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil existen tres categorías de profesores universitarios:

> El *profesor-investigador, el investigador profesor y el formador-práctico.* El *profesor-investigador* es el profesor universitario que asume la docencia como su función principal de su trabajo en la universidad; la investigación se constituye en el suporte principal para realización y desarrollo de dicha función. Por otra parte, nombramos de *investigador-profesor* a los profesionales de la enseñanza superior que centran la investigación en su área de conocimiento específico en primer lugar y la docencia como actividad complementaria que posibilita una oportunidad para socialización de los conocimientos producidos. Por último, nombramos *formador-práctico* tanto al profesor contratado temporariamente y con jornada parcial para sustituir otro docente, como al profesor eventual – generalmente es un docente de la enseñanza secundaria, considerado también como "formador de campo" – el cual se invita para colaborar, esporádicamente, en las licenciaturas como tutores de los académicos durante el desarrollo de sus prácticas en las escuelas o a través de alguna actividad formativa en la universidad (Citado por Melo, 2010, p. 62).

1.3. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

La revisión de los antecedentes ha permitido identificar una gran cantidad de investigaciones realizadas sobre los temas del Cálculo Diferencial e integral, utilizando distintos marcos teóricos y metodológicos, las cuales han sido sistematizadas por medio de los estudios epistemológicos, cognitivos e instruccionales del Cálculo. Asimismo, hemos contemplado, brevemente, algunos de los estudios realizados el Cálculo y relacionados con los profesores-formadores de profesores de matemáticas en Brasil.

Hemos constado que los principales aspectos que han sido investigados se refieren a las dificultades de comprensión de los estudiantes universitarios y a las disfunciones del sistema educativo, además de la búsqueda de vías para mejorarlos (Artigue, 2003).

En lo que se refiere a la problemática relativa al proceso de enseñanza del Cálculo en el nivel universitario, corroboramos con Moreno (2005) en que:

> La enseñanza de los principios del Cálculo resulta bastante problemática, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver de forma más o menos mecánica algunos problemas estándar, o bien, realizar algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas.
>
> Los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario tienden a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del Cálculo, que acaba siendo rutinaria (Artigue, 1995; Yusof y Tall, 1999), y a menudo intentan inculcar desde

> los inicios, los tradicionales métodos rigurosos de demostración matemática (Yusof y Tall, 1999). Asimismo, el profesor evalúa las competencias adquiridas por el estudiante en este dominio algorítmico y algebraico, generalmente a partir de ejercicios similares o iguales a los presentados en clase, ejercicios que responden exactamente al mismo esquema de pensamiento (p. 82).

Las investigaciones con abordaje cognitivas son predominantes en Cálculo y se enmarcan, especialmente, en el Pensamiento Matemático Avanzado. Se reconoce otros enfoques emergentes en las investigaciones realizadas sobre el pensamiento y el aprendizaje matemático en la educación superior (Artigue, Batanero y Kent, 2007), entre los cuales el Enfoque Ontosemiótico. Según estos autores, entre las principales evoluciones realizadas en dichos estudios, se destaca […] "la creciente atención que se presta a la dimensión semiótica de actividad matemática y sobre el papel esencial desempeñado por las conexiones entre las representaciones, valores, y perspectivas en pensamiento y aprendizaje matemático" (p. 1043).

La utilización de los recursos tecnológico está ocupando gran parte de los estudios instruccionales, donde se constata, además, la utilización de la Historia de la Matemática para elaboración de propuestas didácticas alternativas para la enseñanza del Cálculo, especialmente de la integral. Las dificultades de aprendizaje y los obstáculos cognitivos están contemplados diversos estudios y se tiene en cuenta en el análisis de la comprensión de los estudiantes sobre el tema, en la elaboración de propuestas didácticas, en el análisis de libros y en análisis de los significados personales e institucionales de un objeto matemático o didáctico.

En los estudios epistemológicos, su principal interés consiste en atribuir significados a las nociones de Cálculo y suelen relacionarse con la evolución histórica del tema abordado. También constatamos que hay una tendencia de las investigaciones educacionales, realizadas sobre los temas relacionados con la matemática universitaria, cambiaren su énfasis del estudiante para los profesores o de compartir el interés entre ambos (Moreno, 2005).

Sin embargo, según Fiorentini (2002), todavía hay pocas investigaciones centradas en estudiar, discutir y reflexionar sobre la práctica de los profesores universitarios responsables por la formación de profesores de matemáticas, así como también sobre el rol y relevancia de disciplinas, como Cálculo, para la formación de profesores de matemáticas en Brasil "puede ser apuntado como un campo fértil y abierto para las investigaciones en Educación Matemática” (p. 155). En esta dirección realizamos nuestra investigación que ha culminado en esta tesis doctoral.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo presentaremos una síntesis del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática, abordaremos algunos de los constructos teóricos del Pensamiento Matemático Avanzado y fundamentaremos los aspectos de la formación de profesores que consideramos útiles para nuestra investigación. Destacamos, así mismo, el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas, haciendo hincapié en los profesores-formadores en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas.

2.1. SÍNTESIS DE LAS PRINCIPALES TEORÍAS ENMARCADAS EN EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

Esta sección realizamos una síntesis de las principales teorías (o constructos teóricos) desarrolladas en el marco del *Pensamiento Matemático Avanzado, (PMA)* que se utiliza largamente en las investigaciones realizadas en el ámbito de la Didáctica del Cálculo.

2.1.1. Panorama general del Pensamiento Matemático Avanzado

La sistematización del pensamiento matemático, desde la perspectiva cognitivista ha sido realizada por Tall (1995)[3]. Este autor parte de tres

[3] Citado por Domingos (2003).

componentes de la actividad humana: la *percepción* como entrada, el *pensamiento* como procesamiento interno y la *acción* como salida. Esto nos permite considerar las actividades matemáticas como percibir objetos, pensar sobre ellos y realizar acciones sobre los mismos.

Tall considera relevante la transición del pensamiento matemático elemental hacia el avanzado. En este sentido, afirma que el pensamiento matemático comienza tanto por la percepción de los objetos del mundo externo, como por las acciones sobre los mismos. Además, éste se desarrolla simultáneamente por medio de dos procesos dirigidos a la inspiración de un pensamiento creativo basado en la definición formal y en la demostración sistemática de las nociones matemáticas. El primer proceso consiste en la evolución del objeto desde su desarrollo visual-espacial hacia el verbal deductivo; el segundo se basa en una sucesiva encapsulación de procesos en objetos a través de la manipulación de símbolos.

A partir de la teoría de Bruner sobre las representaciones (motoras, icónicas y simbólicas), Tall (1995) hace la distinción entre la matemática elemental, en la cual los objetos son descritos y la matemática avanzada, en la que se definen los objetos. Aunque en ambas se utiliza el lenguaje para la formulación de las propiedades, en la matemática elemental dichas propiedades son descritas a partir de la experiencia con el objeto mientras que en la matemática avanzada estas emergen de las definiciones. En consecuencia, de las dificultades que se producen en los estudiantes al iniciar el estudio de nociones relacionadas a la matemática avanzada, Tall propone que se incluyan las representaciones motoras (procesos físicos), icónicas (procesos visuales), así como tres formas de representaciones simbólicas: verbal (descripción), formal (definición) y proceptual (dualidad proceso-objeto).

Según Tall (1991b), la caracterización del ciclo de actividad en el pensamiento matemático avanzado conduce “desde la actitud productiva de considerar la contextualización de un problema en una investigación matemática, hasta la formulación productiva de conjeturas y a la etapa final de refinamiento y demostración” (p. 3). Al postular que muchas de las actividades ocurren simultáneamente tanto en este ciclo como en la resolución de problemas específicos del pensamiento matemático elemental, el autor considera que la distinción entre ambos radica en la posibilitad de definición y deducción propias del pensamiento matemático avanzado.

La reconstrucción cognitiva es analizada a partir del aspecto de la teoría de Piaget relacionado con la transición de un estadio mental a otro. Esto se concreta a través de la complementariedad entre los procesos de *asimilación* y *acomodación*. La *asimilación* consiste en una apropiación individual de un nuevo dato, mientras la *acomodación* se refiere a un posible cambio en la estructura cognitiva individual. Además, esta idea es corroborada por la distinción que Skemp (1979) ha realizado entre las situaciones en que el proceso de aprendizaje provoca una simple expansión de la estructura cognitiva del individuo, y aquellos en los cuales el conflicto cognitivo requiere una reconstrucción mental. Las dificultades producidas ocurren durante la fase de transición, lo que implica que hay que tenerlas en cuenta en el desarrollo de investigaciones relacionadas al proceso de estudio de nociones matemáticas en la enseñanza universitaria, especialmente del Cálculo Integral.

Dreyfus (1991) ha considerado que en ambos tipos de pensamiento están presentes los procesos de *representación* y *abstracción.* Además, a través del nivel de detalle desarrollado en dichos procesos se puede gestionar la complejidad existente cuando se transita entre el pensamiento matemático elemental y el avanzado. Según el autor, la representación se compone de los procesos de representación (externa, mental, y visualización), el cambio de representaciones y la traducción entre ellas, y la modelación. Mientras la abstracción requiere además de la representación, de la generalización y de la síntesis. Estas características del pensamiento matemático avanzado pueden presentarse en la caracterización de la idoneidad didáctica del proceso de estudio del Cálculo Integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas en Brasil.

Como una caracterización alternativa para el pensamiento matemático avanzado, Rasmussen, Zandieh, King & Teppo (2005) proponen lo que nombran *actividad matemática avanzada*. Al considerar que las matemáticas no se constituyen en algo pronto y acabado, han elaborado y desarrollado tres actividades matemáticas prácticas, por medio de las cuales plantean que los estudiantes pueden crear, organizar y sistematizar las matemáticas. La idea de actividad matemática avanzada es entendida como la construcción y la progresión de las prácticas, lo que es considerado matematización progresiva. En aprendizaje es asumido como la participación de los estudiantes en dichas prácticas y los cambios que se produce en ellas. Según postulan las autoras, “nuestro trabajo estrechamente integrado de investigación, enseñanza y diseño instruccional ha servido de escenario único desde el cual el constructo de la actividad matemática avanzada ha crecido” (p. 55).

> Por último, en qué medida el énfasis instruccional y curricular en el actividad matemática avanzada puede facilitar lo que suele considerarse como una difícil transición "desde una posición donde los conceptos tienen una base intuitiva fundada en la experiencia para otra en la que estos están especificados por las definiciones formales y sus propiedades reconstruidas mediante deducciones lógicas" (Tall, 1992, p. 495). Esta transición es realmente muy difícil cuando la base intuitiva de los estudiantes fundada en la experiencia es una isla (kaput, 1994) separada de su razonamiento basado en las definiciones formales y deducciones lógicas. En contraste con una separación de razonamiento, el constructo de la actividad matemática avanzada ofrece a los maestros, diseñadores de materiales didácticos, e investigadores una manera práctica orientada a pensar en la transición del razonamiento matemático informal para lo más formal (Rasmussen, Zandieh, King & Teppo, 2005, p. 71).

Aunque haya considerable desarrollo sobre los constructos teóricos y de su utilización en las investigaciones realizadas sobre el proceso de estudio de la matemática universitaria, aun no hay consenso sobre la línea limítrofe entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado. Tampoco existe dicho consenso en lo que concierne a la definición del pensamiento matemático avanzado; parece que una opinión aceptada por el grupo del PME sobre el pensamiento matemático avanzado es la que considera los temas matemáticos del último nivel de la matemática elemental como preliminares para el pensamiento matemático avanzado. Así, los temas matemáticos enseñados en las clases a partir de los 16 años serían situados en el pensamiento matemático avanzado.

Según Artigue, Batanero y Kent (2007), la discusión relativa a la naturaleza y desarrollo del pensamiento matemático avanzado no ha sido resuelta con la publicación del libro “*Advanced Mathematical Thinking”* (Tall, 1991a). En este sentido, los autores han descrito algunas de las discusiones que se han llevado a cabo tanto en el seno del grupo del PME-NA titulado “El rol del Pensamiento Matemático Avanzado en la reforma de la Educación Matemática”, como por la edición especial del *Journal of Mathematical Thinking and Learning* (Selden y Selden, 2005) que ha emergido de dicho trabajo. De esta manera, son presentadas algunas definiciones del PMA, tales como: “PMA es el pensamiento que requiere un razonamiento deductivo y riguroso sobre nociones matemáticas que no son enteramente accesibles a nuestros cinco sentidos” (Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005, pp. 17-18). En la opinión de Mamona-Downs y Downs (2008, p. 155), “A lo largo del tiempo, ha habido diversidad de opiniones expresadas sobre este tema y no hay una definición de PMA que sea unánimemente aceptada”. Para estos autores la opción más simple es que PMA comprende las necesidades cognitivas para abordar los contenidos matemáticos asociado a dominios usualmente tratados en la universidad. Harel y Sowder (2005) definen el PMA a partir de las características de *obstáculos epistemológicos* de Brousseau. Por su parte, Artigue, Batanero y Kent (2007) discrepan de algunas definiciones del PMA que han sido incluidas en la referida edición especial (especialmente la de Rasmussen, Zandieh, King, y Teppo), las cuales no consideran el PMA como específico de un nivel particular de escolaridad (p. 1017).

A partir del desarrollo y características del pensamiento matemático avanzado que consideramos relevantes para nuestra investigación, sintetizaremos los principales constructos teóricos desarrollados y enmarcados en esta línea de investigación, los cuales se han utilizado con frecuencia en las investigaciones relacionadas con la dimensión cognitiva del proceso de estudio del Cálculo Integral.

2.1.2. Síntesis de las teorías y constructos teóricos del PMA

Definición del concepto e imagen del concepto

Estas nociones teóricas han sido introducidas en la literatura específica a partir del trabajo de Tall y Vinner (1981). Su aplicación en los estudios cognitivos se centra en la comprensión de conceptos matemáticos abstractos que suelen ser desarrollados desde el final de la enseñanza secundaria hasta la enseñanza superior.

Al ver u oír una palabra asociada a un concepto matemático, esto nos produce un estímulo y, consecuentemente, suscita algo en nuestra memoria. De esta manera, la imagen del concepto se refiere a todo lo que se asocia a nuestra mente relacionado al nombre del concepto. De esta manera, la *imagen del concepto* no se refiere a una definición usual, aunque ésta exista, sino se utiliza para “describir la estructura cognitiva total asociada al concepto que incluye todas las imágenes mentales, procesos y propiedades ligadas al mismo” (Tall y Vinner, 1981, p. 152). En este sentido, los autores proponen la definición siguiente:

> Vamos a utilizar término imagen del concepto para describir la estructura cognitiva total que está asociado con el concepto, que incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados. Está construido en los años a través de experiencias de todo tipo, cambiando a medida que la persona pasa por nuevos estímulos y madura. ... El desarrollo de la imagen del concepto no necesita ser coherentes en todo momento. El cerebro no funciona de esa manera. Entrada Sensorial estimula ciertas vías neuronales e inhibe otros. De esta manera estímulos distintos pueden activar diferentes partes del concepto imagen, desarrollándolas de una manera que no necesita crear un todo coherente (Citado por Artigue, Batanero y Kent, 2007, p. 1014).

La imagen del concepto[4] puede referirse a una representación visual interna de un concepto (en el caso de que exista), así como a una colección de impresiones y experiencias que pueden ser traducidas a formas verbales. Asimismo, el empleo coherente de dicha noción se relaciona con un sujeto específico, aunque el mismo pueda reaccionar de distintas maneras con relación a la imagen producida para una misma a lo largo del tiempo. En este sentido, Tall y Vinner han utilizado la expresión *imagen del concepto evocado (evoked concept image)* para describir la parte de la memoria recordada en un contexto específico (Domingos, 2003).

Por otro lado, la *definición del concepto* se asocia a la definición verbal que explica el concepto de manera exacta y no circular (Vinner, 1983). De esta manera las demás representaciones asociadas al concepto se incluyen en la imagen del concepto, fundamental para su comprensión, pues según Vinner (1991), ésta no se logra solamente a partir de la definición del concepto. Asimismo, la noción de definición del concepto se utiliza para el desarrollo de las nociones matemáticas contempladas al final de la enseñanza secundaria y en la enseñanza universitaria, debido a su creciente grado de complejidad.

Vinner (1983) ejemplifica algunas acciones relacionadas con su modelo de construcción del conocimiento matemático y considera que los modelos

[4] En los estudios publicados en la lengua española que hemos revisado, encontramos también como traducción de *concept image*, las expresiones “esquema conceptual” y “concepto imagen”.

implícitamente asumidos por los profesores pueden ser descritos por medio de dichas acciones. Aunque Vinner considera que ambos constructos desarrollen un papel central en la explicación del proceso cognitivo de formación de los conceptos, Tall (2003)[5] los utiliza de manera diferente. En este sentido, no considera la separación entre la definición del concepto y la imagen del concepto, sino que la imagen del concepto describe la estructura cognitiva total asociada al concepto. De esta manera, la definición del concepto es concebida como una parte de la imagen del concepto total que existe en nuestra mente.

La noción de procepto en el proceso de estudio del Cálculo

Al discutir el desarrollo cognitivo, Tall (1996) considera la transformación de algunos procesos en concepto, lo que genera el constructo *procepto.* En este sentido, afirma que:

> El crecimiento del conocimiento humano empieza con acciones (primeramente en el entorno), algunas de las cuales llegan a constituir procesos que pueden repetirse y luego ser considerados objetos para que sean manipulados en un nivel más alto en otros procesos mentales. Gray y Tall (1994) han denominado **procepto** a la combinación de procesos y conceptos producidos, por lo cual ambos pueden ser evocados a través de un mismo símbolo. Esto es particularmente útil en el estudio del Cálculo porque función, derivada, integral y la noción fundamental de límite son ejemplos de proceptos. Entonces la teoría de funciones y del Cálculo pueden ser resumidos como el estudio del hacer y deshacer de los procesos involucrados (Tall, 1996, p. 293).

En esta misma dirección, Gray e Tall (1994) consideran que un *procepto* consiste en una amalgama de tres componentes: un *proceso* que produce un *objeto* matemático y un *símbolo* que representa simultáneamente el proceso y el objeto. Además, Tall (1996) atribuye una importancia especial a las representaciones, pues considera que ellas posibilitan enfocar un concepto desde distintas perspectivas. Asimismo, sintetiza en una figura un *abanico de representaciones de funciones y Cálculo.* Por el interés de nuestra investigación, reproduciremos en la figura 2.1 solamente la parte relacionada con el *procepto integral*.

Para desarrollar el proceso de estudio del Cálculo Integral en la enseñanza universitaria, se requiere discutir los significados atribuidos al concepto de integral desde las perspectivas institucional y personal; tanto la noción de *imagen del concepto,* como el procepto asociado a la integral juegan un papel

[5] Citado por Domingos (2003).

importante. Estos constructos se presentan en diversas investigaciones sobre el tema; además, deben ser encontrados en los textos didácticos y en los significados personales que los profesores-formadores ponen de manifiesto sobre el proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas.

Procepto		Representaciones				
		Visual-espacial	Numérica	Simbólica	Gráfica	Formal
		Actuativo Observando Experimentando	*Cuantitativo* Estimación Aproximación	*Manipulativo* Manipulando Limitando	*Cualitativo* Visualización Conceptualización	*Deductivo* Definición Deducción
Crecimiento Acumulado INTEGRAL	Haciendo	Longitud a partir del gráfico Tiempo-velocidad	Área numérica	Integral simbólica como límite de una suma	Área bajo el gráfico	Integral formal de Riemann
	Des-haciendo	Calculando velocidad a partir de la longitud	Conociendo área-hallar La función numérica	Teorema fundamental (simbólicamente)	Conociendo área-hallar el gráfico	Teorema fundamen-tal (formal)
		CÁLCULO EN EL MUNDO REAL	CÁLCULO TEORÉTICO			ANÁLISIS

Figura 2.1: Representaciones de la integral (adaptado de Tall, 1996)

Además, la literatura especializada contempla una diversidad de teorías (o constructos teóricos) desarrollados en el marco del PMA en los últimos años. Según Artigue, Batanero y Kent (2007), entre las principales teorías desarrolladas con el *Pensamiento Matemático Avanzado*, incluyéndose los enfoques para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel “pos secundaria” basados en las prácticas sociocultural e institucional, pueden ser resaltadas: La *Teoría APOS* (Dubinsky, 1991; Dubinsky y McDonald, 2001), *Obstáculos Epistemológicos* (Cornu, 1983, 1991; Sierpinska, 1985, 1987; Schneider, 1991), *Dualidad Proceso-Objeto* (Dubinsky, 1991, Sfard, 1991), *Enfoque Epistemológicos* (Dorier, 2000; Sierpinska, 2000), *Cognición Corporificada* (Lakoff y Nuñez, 2000), *Enfoques Antropológico* (Chevallard, 1992; Bosch y Chevallard, 1999), *Enfoque Ontosemiótico* (Godino y Batanero, 1998), *Sociomatemática* (Cantoral y Farfán, 2003).

Dichas teorías han jugado un papel fundamental en el desarrollo de las investigaciones realizadas en el nivel superior, particularmente, con las relacionadas con la Didáctica del Cálculo. En nuestra investigación, tenemos en cuenta las aportaciones de las investigaciones centradas en el Pensamiento Matemático Avanzado y, utilizamos como principal marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática (Godino y Colaboradores). Asimismo, como nuestro objetivo se relaciona con la caracterización del proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil, nuestra investigación requiere, además, apoyarse en los estudios desarrollados sobre la formación de profesores de matemáticas, y particularmente de los profesores-formadores que actúan en la docencia de Cálculo, lo que sintetizamos en la sección siguiente.

2.2. FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS Y EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL

La investigación sobre el pensamiento, creencias, conocimientos y procesos de formación de profesores de matemáticas ha recibido una atención creciente por parte de los investigadores, como se pone de manifiesto en los capítulos de los “handbooks” dedicados al tema (Grouws, 1992; Bishop, et al., 1996; English, 2002; Bishop, et al., 2003; Lester, 2007; English, 2008), y con la reciente publicación del *The International Handbook of Mathematics Teachers Education* (Wood, 2008).

Las investigaciones sobre el conocimiento del profesor de matemática suelen contemplar aspectos de su formación inicial o continuada. Esta situación también se pone de manifiesto en nuestra investigación, centrada en el proceso de estudio del Cálculo Integral y, específicamente, en lo que se refiere a la sistematización de los conocimientos profesionales declarados por los profesores-formadores en el contexto de la formación de profesores de matemática de la enseñanza secundaria, a partir de los cuales buscaremos identificar indicadores para caracterizar la idoneidad del referido proceso de estudio. Esto conlleva a la necesidad de definir algunas nociones teóricas relacionadas tanto con la formación de profesores de matemática como con los conocimientos profesionales producidos y declarados por una muestra de profesores-formadores. Por ello, trataremos de sintetizar algunas nociones teóricas que serán utilizadas en el análisis e interpretación de los datos recogidos en esta investigación, particularmente a través de las entrevistas.

Ponte (2002) ha sintetizado un diagnostico, demasiado negativo, realizado por Lampert y Ball (1999) sobre la formación inicial de profesores de matemáticas. Asimismo, ha declarado que estas investigadoras consideran que lo más importante para los profesores de matemática es saber cómo se puede adquirir las competencias necesarias para desarrollar la docencia de acuerdo con las actuales perspectivas curriculares y necesidades demandadas por los sistemas educativos. Es decir, lo fundamental para dichos profesores es saber cómo se produce el conocimiento necesario para el ejercicio de su profesión. En este sentido, “la formación de profesores puede ser concebida como un proceso de inducción en una comunidad de práctica y de discurso que tiene sus propias herramientas, recursos, ideas compartidas y debates” (Ponte, 2002. p. 5).

Por otra parte, Traldi (2006) ha utilizado la definición de formación de profesores propuesta por García (1999) como un área de conocimiento, investigación, y propuestas teóricas y prácticas. En esta perspectiva:

> La Formación de Profesores consiste en el área de conocimiento, investigación, y propuestas teóricas y prácticas que, en el ámbito de la Didáctica y Organización Escolar, estudia los procesos a través de los cuales los profesores – en formación o en activo – se implican individualmente o en equipo, en experiencias de aprendizaje, a través de las cuales adquieren o mejoran sus conocimientos, competencias y disposiciones y que les permite intervenir profesionalmente en el desarrollo de su enseñanza, del currículo y de la escuela, con el objetivo de mejorar la calidad de la enseñanza recibida por sus alumnos (p. 26).

Sin embargo, los conocimientos producidos por los profesores de matemáticas sobrepasan las fronteras de su formación en el seno de las universidades y se han constituido en objeto de estudio de diversas investigaciones.

En nuestra investigación hemos interesado por investigar el conocimiento profesional declarado por los profesores-formadores sobre la idoneidad del proceso de estudio del Cálculo Integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas. Para ello, hemos investigado, por una parte, como ellos han concebido y desarrollado su formación y experiencia profesional relacionadas con la enseñanza e investigación sobre el Cálculo Integral en el contexto universitario (a través de las narrativas). Por otra parte, nos interesamos por investigar sus distintos conocimientos sobre el proceso de estudio de la integral, teniendo en cuenta las herramientas teóricas desarrolladas en el Enfoque Ontosemiótico, resaltando las dimensiones epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, instruccional y ecológica de la idoneidad didáctica (Godino, Batanero y Font, 2007).

Para enmarcar el sentido en que utilizamos el constructo *conocimiento profesional* de los profesores-formadores en nuestra investigación, realizamos una breve síntesis de la literatura relacionada con las creencias, concepciones y conocimiento del profesor.

Como se afirma en Font y Ramos (2005), hay básicamente dos maneras de enfocar la investigación sobre creencias, concepciones y conocimiento del profesor que son el trasfondo de la clasificación que habitualmente se utiliza. Una tiene como trasfondo la filosofía de la conciencia mientras que la otra se basa en la filosofía de la acción**.** Dicha clasificación (Marcelo, 2002) distingue entre las investigaciones sobre el *pensamiento del profesor* y las que se interesan por el *conocimiento del profesor*. La investigación sobre el pensamiento del profesor, mayoritaria en los años 80, se realizó fundamentalmente bajo un enfoque cognitivo.

En la última década este tipo de investigación dio paso a una preocupación por el conocimiento del profesor, ya que se tomó conciencia de que los profesores generan conocimiento sobre la enseñanza a partir de su práctica que conviene ser investigado. En este sentido, en esta nueva etapa, las investigaciones están centradas en estudiar el conocimiento y las concepciones del profesor, así como sus procesos de formación y desarrollo profesional.

Según el estudio de Pires (2006), para referirse al *conocimiento profesional* docente (Fenstermacher, 1994; Munby, Russell y Martín, 2001), se suele utilizar dos categorías: el conocimiento formal y el conocimiento práctico del profesor. Mientras el conocimiento práctico, construido por el profesor a partir de su propia práctica u orientado a las actividades prácticas, se caracteriza por ser más personal, situado, tácito, relacional o ligado al saber-hacer, el conocimiento formal se acerca al conocimiento proposicional, declarativo, teórico o científico. En este sentido, Pires ha afirmado que:

> Esta diferenciación, aunque con diferentes matices, ha inspirado el cambio de paradigma en los abordajes de la construcción del conocimiento profesional (Montero, 2001; Ponte, Matos e Abrantes, 1998), pasando de la visión inicial de esa construcción, como algo exterior al profesor, para el reconocimiento actual del valor del conocimiento

> que el profesor construye y posee a partir de su actividad docente. Como consecuencia, además del conocimiento elaborado por los investigadores con una intención más normativa y en una perspectiva de su generalización para orientar y prescribir la actividad del profesor, señalando lo que este precisa saber, se ha pasado a la valorización del conocimiento generado por el propio profesor como resultado de sus experiencias y reflexiones profesionales, enfatizando el que efectivamente conoce (p. 2).

Para el referido autor, tanto la psicología cognitiva (Borko y Putman, 1995) como la identificación y sistematización de los dominios de conocimiento profesional (Bromme, 1994; Elbaz, 1983; Grossman, 1995; Guimarães, 1999; Ponte, 1999; Shulman, 1986) contribuyen para la mejor comprensión del conocimiento formal. Por otra parte, el conocimiento práctico – concebido a partir de la integración de los *saberes experienciales* y de los *saberes teóricos* – presenta una naturaleza contextualizada y se modeliza a través de valores e intenciones del profesor (Clandinin, 1989; Elbaz, 1983); además, puede ser caracterizado como un conocimiento en acción enmarcado en la práctica reflexiva de Schön (1992).

Según Hielbert, Gallimore y Stigler (2002), citados por Pires (2006), el conocimiento práctico se desarrolla como respuestas a los problemas específicos de la práctica de la cual se originan. Se trata, por tanto, de un conocimiento integrado, pormenorizado, concreto y específico que se convierte en conocimiento profesional al tornarse público, acumulable y comunicado en una comunidad de prácticas.

Ponte (1998) considera un conjunto de roles involucrados en el conocimiento profesional y establece su relación con el desarrollo profesional docente. En este sentido, afirma que:

> El conocimiento profesional del profesor involucra el conocimiento relativo a su práctica en la clase y otros roles profesionales, tales como: la tutoría de los estudiantes, la participación en proyectos y actividades de la escuela, la interacción con miembros de la comunidad y la actuación en asociaciones profesionales. Asimismo, el conocimiento profesional incluye aun, en otro plano, la visión del profesor sobre su propio desarrollo profesional (p. 2).

En la literatura específica también se utiliza la expresión “craft knowledge” (conocimiento artesanal) para referirse al conocimiento que los profesores usan en la enseñanza que diariamente realizan en su clase. Se trata de un conocimiento orientado a la acción, que generalmente no se hace explícito por el profesor y que puede ser para ellos difícil de articular, o que incluso pueden ser inconscientes de su uso.

> Desde un punto de vista cognitivo, el conocimiento profesional se desarrolla como un producto de la acción profesional, y se establece en sí mismo mediante el trabajo y el ejercicio de la profesión, no simplemente mediante la acumulación del conocimiento teórico, sino mediante la integración, ajuste y reestructuración del conocimiento teórico a las demandas y restricciones de las situaciones prácticas (Bromme y Tillema, 1995, p. 262; citado por Ruthven, 2002, p. 590).

Nosotros compartimos la idea de Ruthven que la “conversión” del conocimiento no tiene que darse solo en la dirección de la “teoría” hacia la “práctica”, sino que también puede tener lugar en la dirección opuesta, esto es, mediante la “extracción y codificación” del conocimiento profesional. “Articulado mediante la investigación, el conocimiento profesional puede llegar a contribuir al desarrollo del propio conocimiento académico” (p. 590).

En la literatura especializada, encontramos diversos estudios relacionados con los conocimientos profesionales de los profesores-formadores de profesores de matemáticas (Zaslavsky, Chapman y Leikin, 2003; Jaworski, 2008; Chapman, 2008; Tardif, 2011).

Al discutir los *saberes profesionales de los profesores y el conocimiento universitario*, Tardif (2011) apoyándose tanto en la síntesis de las investigaciones realizadas en Estados Unidos cuanto en sus propios estudios, ha caracterizado los saberes profesionales de los profesores. En este sentido, el autor considera que:

- Los saberes profesionales de los profesores son temporales (provienen de su historia de vida; son decisivos en estructuración de la práctica profesional; son utilizados y se desarrollan en el ámbito de su trayectoria profesional).
- Los saberes profesionales de los profesores son plurales y heterogéneos (provienen de diversas fuentes; no se constituyen en un repertorio unificado de conocimientos; la práctica profesional de los profesores es heterogénea en lo que se refiere a los objetivos internos de la acción y a los saberes movilizados; tienen una cierta unidad pragmática).
- Los saberes profesionales son personalizados y situados (se trata de saberes apropiados, incorporados, subjetivados, saberes difíciles de disociarse de las personas, de su experiencia y situación de trabajo; son

situados en el sentido de ser construidos y utilizados en función de una situación particular de trabajo, en la cual adquieren sentido).

- Los saberes profesionales llevan las marcas del ser humano (posibilitan al docente desarrollar habilidad y disposición para conocer y comprender los estudiantes en sus particularidades individuales y situacionales, y su evolución en las clases; el saber profesional siempre comporta un componente ético y emocional; necesidad de motivar los estudiantes hacia su aprendizaje y desarrollo de un ambiente de tolerancia y respeto mutuo en la clase) (pp. 260 -268).

El autor declara que utiliza la noción de *saber* “en un sentido amplio, que incluye los conocimientos, las competencias, las habilidades y las actitudes, o sea, a lo que ha sido nombrado saber, saber hacer, y saber ser” (p. 255). Sin embargo, en esta investigación, estamos usando la expresión *conocimiento profesional* de los profesores para referirnos tanto a los conocimientos producidos en la formación universitaria, como para aquellos que se desarrollan a partir de las experiencias prácticas de los docentes. En este sentido, entendemos que los conocimientos profesionales de los profesores-formadores de profesores de matemáticas abarcan las características de los *saberes profesiones* postuladas por Tardif (2011).

Zaslavsky, Chapman y Leikin (2003) han considerado que el desarrollo profesional de los “educadores matemáticos” (profesores, profesores-formadores, y formadores de profesores-formadores) consiste en un proceso continuo, que se desarrolla a lo largo de la vida del docente de manera tanto informal como formal (incluso por medio de la participación en Programas de Postgrado). Corroborando con la posición asumida por distintas investigaciones (Dewey, 1933; Schon, 1983, 1987, 1991; Calderhead, 1989; Jaworsky, 1994; krainer, 1998), postulan que “una de las preocupaciones principales en casi todos los programas de desarrollo profesional contemporáneo es la necesidad de fomentar la reflexión de los profesores sobre sus prácticas y experiencias de aprendizaje” (Ibíd., p. 879). En este sentido, afirman que las nociones de reflexión sobre la acción y de reflexión en la acción han emergido, a partir de la transición de las perspectivas teóricas relacionadas con la reflexión y la acción para posiciones más practicas, y son consideradas como un componente eficaz para el desarrollo del conocimiento profesional de los profesores sobre sus prácticas. Basándose en el concepto de “práctica reflexiva”, en el sentido de Lerman (2001), las autoras consideran que “los profesores y los profesores-formadores pueden ser vistos como aprendices que continuamente reflexionan sobre su trabajo y dan sentido a las historias, a sus prácticas y a otras experiencias” (Ibíd., p. 879).

Jaworski (2008) al considerar la complejidad del proceso de enseñanza de las matemáticas, ha resaltado que los profesores-formadores necesitan conocer: Matemáticas, Pedagogía (relacionada con las Matemáticas), Didáctica de la Matemática, elementos del sistema educacional (incluyéndose el currículo y evaluación), sistemas sociales y entornos culturales, los estudiantes, las particularidades de la escuela (o universidad), la literatura profesional y la relacionada con las investigaciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, las teorías de aprendizaje y de enseñanza, y la metodología científica relacionada a las investigaciones en el contexto de la escuela y del sistema educacional. En este sentido, afirma que tanto los profesores como los profesores-formadores tienen el objetivo común de posibilitar una oportunidad para mejorar el aprendizaje matemáticas de los estudiantes.

Por otra parte, desde una perspectiva cognitiva, Chapman (2008) ha sintetizado el aprendizaje de los profesores-formadores a partir de la investigación sobre su práctica instruccional en el contexto de la formación de profesores de matemáticas. La autora infiere que “la práctica instruccional por sí misma puede ser la base para el aprendizaje del profesor-formador” (Ibíd., p. 117). Así, sería posible aprender, por medio de las investigaciones llevadas a cabo, qué los profesores-formadores investigadores han aprendido de manera autónoma y cómo lo ha aprendido desde la investigación. Asimismo, considera que la mayoría de los profesores-formadores que han involucrado en la investigación sobre sus propias prácticas “ha mejorado su comprensión y perfeccionado su conocimiento profesional acerca de las prácticas de formación de los profesores de matemáticas” (Ibíd., p. 130). Además, el diseño de la investigación sobre su práctica instruccional es importante para facilitar el desarrollo profesional del profesor-formador y debe contemplar los aspectos siguientes: (1) Basarse en un enfoque que es, o debería de ser, parte de la enseñanza del profesor-formador; (2) Posibilitar a los futuros profesores la exposición de sus ideas durante el proceso y como parte central del enfoque instruccional; (3) posibilitar el auto reflexión del profesor-formador antes, durante y después del proceso de investigación.

En las conclusiones, la autora resalta que si el objetivo de los estudios sobre el profesor-formador como investigador se relaciona con el desarrollo profesional, es necesario investigar cómo éste reflexiona, cuál conocimiento práctico ha adquirido, y cómo dicho conocimiento debería impactar su futura conducta de trabajo con sus estudiantes. Estas investigaciones posibilitarían realizar aportaciones relacionadas tanto con la comprensión teórica sobre la formación de profesores de matemáticas y el aprendizaje del profesor-formador, como con la mejora de la práctica.

Tratándose de los profesores-formadores de profesores de matemáticas, en el sentido planteado por Mometi (2007), consideramos que su conocimiento profesional es producido durante su formación inicial y continuada, a lo largo de su práctica docente, a partir de sus vivencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, la investigación académica, la dinámica de la universidad y de la clases, la didáctica, los estudiantes, los temas y disciplinas específicas, el currículo y todos los demás aspectos que están contemplados en su ambiente de trabajo.

A partir de esta concepción del conocimiento profesional del profesor-formador, nos parece oportuna la siguiente caracterización del profesor universitario, en términos de lo deseable, realizada por Benedito y otros (1995), desde una perspectiva de enseñanza y aprendizaje constructivista:

> [...] El profesor universitario debería provocar procesos de aprendizaje en el aula, conocer la dinámica de la misma, seleccionar, organizar los contenidos, facilitar el surgimiento y formulación de interrogantes, alimentar la discusión y el debate, establecer relaciones positivas, evaluar el trabajo de los alumnos y facilitar la búsqueda y construcción con sus alumnos del conocimiento científico. El profesor ha de comprender cómo se utiliza y elabora o reconstruye el conocimiento científico, se resuelven situaciones inciertas y desconocidas, se elaboran o modifican rutinas, se toman decisiones, se experimentan hipótesis de trabajo, se utilizan técnicas, instrumentos y materiales nuevos o conocidos, se recrean estrategias, se inventan procedimientos, tareas y recursos, se realizan las tareas de evaluación, se modifican sus teorías previas en contraste con la realidad, etc. (citado por Moreno, 2005, p. 87).

Las características deseables para el profesor universitario no se generan en su proceso de formación académica graduada o posgraduada. Tampoco pueden ser obtenidas a partir de los estudios cognitivos desarrollados en las investigaciones relacionadas al conocimiento del profesor.

Según Tardif (2011), “es necesario, por lo tanto, que la investigación universitaria se apoye en los saberes de los profesores con la finalidad de preparar un repertorio de conocimientos para la formación de profesores” (p. 258).

Sin embargo, el conocimiento profesional producido a lo largo de su profesión, desde su formación académica inicial y teniendo en cuenta su experiencia académica (docencia, desarrollo de proyectos e investigación), se convierte en una vía de aproximación a dichas características, siendo por tanto indispensable para el diseño e implementación del proceso de estudio de las distintas nociones matemáticas en la enseñanza universitaria, especialmente de aquellas relacionadas al Cálculo Integral, objeto de estudio de nuestra investigación.

Tanto la planificación de un tema, particularmente de la integral, como de las clases sobre el mismo proviene de una matriz del conocimiento profesional del profesor, obtenido a lo largo de su experiencia de enseñanza y aprendizaje del tema o extraída de los materiales curriculares disponibles. En dicha planificación se incluye las tareas a realizarse, las representaciones que se han de emplear, el formato de las actividades que serán utilizadas, y la previsión de las dificultades previas de los estudiantes (Ruthven, 2007).

Al poner de manifiesto este conocimiento profesional sobre la idoneidad del proceso de estudio de la integral, y teniendo en cuenta la relatividad institucional, personal y contextual, dicho conocimiento puede ser interpretado en términos de la dualidad personal-institucional de los significados de la integral que emergen de los relatos de los profesores-formadores, constituidos por los sistemas de prácticas que éstos usan como referencia para la planificación, implementación, y evaluación del proceso de estudio de la integral en el contexto socio-profesional especificado. La noción de idoneidad didáctica, la dialéctica entre los significados personales e institucionales de los profesores-formadores, así como de las demás herramientas teóricas desarrolladas en el Enfoque Ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemática que se utiliza en esta investigación serán sintetizados a continuación.

2.3. EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO Y LA INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2007), los postulados o supuestos básicos del EOS se relacionan principalmente con la antropología, la ontología y la semiótica, pero también se articulan de manera coherente supuestos socioculturales y psicológicos. La matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de situaciones-problema, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas; dicha actividad está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles. De los sistemas de prácticas realizadas para resolver los problemas emergen dos categorías primarias de entidades: institucionales (sociales, relativamente objetivas) y personales (individuales o mentales); de esta manera se asume que la matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizados. Se atribuye un papel esencial al lenguaje (en sus diversas modalidades), que tiene una función no sólo representacional sino también instrumental o constitutiva de los objetos matemáticos.

Para hacer operativos estos principios el EOS propone como herramientas analíticas el par de nociones, “sistema de prácticas operativas y discursivas” y “configuración ontosemiótica”, ambas en la doble versión personal e institucional.

Las configuraciones articulan los siguientes tipos de objetos matemáticos primarios:

- Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- Situaciones-problema (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...)
- Conceptos-definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)

- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,...).

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macro-didáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias indicadas anteriormente: situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional.

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la siguiente tipología de significados institucionales (Godino, Batanero y Font, 2007):

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado

holístico6 del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto.

Respecto de los significados personales se introducen los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales, que tiene lugar en un proceso de estudio, interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

En la figura 2.3 se presenta un esquema de los tipos de significados y sus relaciones mutuas.

[6] Wilhelmi, Lacasta y Godino (2007)

Figura 2.3: Tipos de significados institucionales y personales

En la parte central de la figura 2.3 se indican las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados.

2.3.1 Configuraciones de objetos y procesos matemáticos

La noción de "sistema de prácticas" se considera útil para ciertos análisis de tipo macro-didáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias comentadas anteriormente: situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando configuraciones, definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional.

La constitución de los objetos y relaciones (configuraciones), tanto en su faceta personal como institucional, tiene lugar a lo largo del tiempo mediante procesos matemáticos, los cuales son interpretados como "secuencias de prácticas". Los objetos matemáticos emergentes constituyen la cristalización o reificación resultante de tales procesos (dialéctica instrumento – objeto de Douady, 1986; dualidad objeto – proceso de Sfard, 1991).

En el EOS se interpretan los procesos matemáticos como secuencias de prácticas, en correspondencia con los tipos de objetos matemáticos primarios; esto proporciona criterios para categorizar los procesos. La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos primarios, de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación.

La resolución de problemas, y de manera más general, la modelización debe ser considerada más bien como "hiper-procesos" matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de conexiones entre los objetos y generalización de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (supervisión) que conllevan procesos meta-cognitivos.

Atributos contextuales

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein, 1953) ocupa un lugar importante en el EOS, al considerarla, junto con la noción de institución, como los elementos contextuales que relativizan los significados de los objetos matemáticos y atribuyen a éstos una naturaleza funcional. Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- Personal – institucional. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como “objetos personales” (Godino y Batanero, 1994, p. 338). La cognición matemática debe contemplar las facetas personal e institucional, entre las cuales se establecen relaciones dialécticas complejas y cuyo estudio es esencial para la educación matemática. La “cognición personal” es el resultado del pensamiento y la acción del sujeto individual ante una cierta clase de problemas, mientras la “cognición institucional” es el resultado del diálogo, el convenio y la regulación en el seno de un grupo de individuos que forman una comunidad de prácticas.
- Ostensivo – no ostensivo. Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, …). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan. El motivo es que un objeto ostensivo puede ser también pensado, imaginado por un sujeto o estar implícito en el discurso matemático (por ejemplo, el signo de multiplicar en la notación algebraica).
- Expresión – contenido: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica.
- La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido,

significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- Extensivo – intensivo (ejemplar - tipo). Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo específico, p.e., la función y = 2x + 1) y una clase más general (p.e., la familia de funciones y = mx + n). La dualidad extensivo-intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras y cols, 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que sin duda es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático. "La generalización" es esencial porque este es el proceso que distingue la creatividad matemática de la conducta mecanizable o algorítmica.
- Unitario – sistémico. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas,…) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Estas facetas se presentan agrupadas en parejas que se complementan de manera dual y dialéctica. Se consideran como atributos aplicables a los distintos objetos primarios y secundarios, dando lugar a distintas "versiones" de dichos objetos a través de los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos:

- institucionalización – personalización;
- generalización – particularización;
- análisis/descomposición – síntesis/reificación;
- materialización /concreción – idealización/ abstracción;
- expresión/representación – significación.

Comprensión y conocimiento en el EOS

Los enfoques cognitivos en la Didáctica de las Matemáticas, en el fondo, entienden la comprensión y el conocimiento como "proceso mental". Los posicionamientos pragmatistas del EOS, en cambio, llevan a entender, de entrada, la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (se considera que un sujeto comprende y conoce un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas).

El hecho de considerar que las funciones semióticas tienen un papel esencial en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza en las prácticas matemáticas (dentro de un determinado juego de lenguaje), permite entender en el EOS el conocimiento también en términos de funciones semióticas. En efecto, podemos interpretar el conocimiento de un objeto *O* por parte de un sujeto *X* (sea individuo o institución) en términos de las funciones semióticas que *X* puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las que se pone en juego *O* como funtivo (expresión o contenido). Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un conocimiento. Hablar de conocimiento equivale a hablar del contenido de una (o muchas) función semiótica, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

2.3.2. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos didácticos

El EOS ha sido desarrollado inicialmente para caracterizar los significados de objetos matemáticos (función, derivada, integral, ...). Pero en Godino, Batanero y Font (2007) se inicia su aplicación y desarrollo para los conocimientos didácticos. En este caso los problemas tendrán una naturaleza distinta:

- ¿Qué contenido enseñar en cada contexto y circunstancia?
- ¿Cómo distribuir en el tiempo los distintos componentes y facetas del contenido a enseñar?

- ¿Qué modelo de proceso de estudio implementar en cada circunstancia?
- ¿Cómo planificar, controlar y evaluar el proceso de estudio y aprendizaje?
- ¿Qué factores condicionan el estudio y el aprendizaje?, etc.

En este caso, las acciones (prácticas didácticas) que se pongan en juego, su secuenciación (procesos didácticos) y los objetos emergentes de tales sistemas de prácticas (objetos didácticos) serán diferentes respecto del caso de la solución de problemas matemáticos.

En la "Teoría de las Configuraciones Didácticas" Godino, Contreras y Font, (2006) modelizan la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales. Como unidad primaria de análisis didáctico se propone la configuración didáctica, constituida por las interacciones profesor-alumno a propósito de un objeto o contenido matemático y usando unos recursos materiales específicos. El proceso de instrucción sobre un contenido o tema matemático se desarrolla en un tiempo dado mediante una secuencia de configuraciones didácticas.

Una configuración didáctica lleva asociada una configuración epistémica, esto es, una tarea, los procedimientos requeridos para su solución, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá una configuración instruccional constituida por la red de objetos docentes, discentes y mediacionales puestos en juego a propósito del problema o tarea matemática abordada. La descripción de los aprendizajes que se van construyendo a lo largo del proceso se realiza mediante las configuraciones cognitivas, red de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas personales que se ponen en juego en la implementación de una configuración epistémica.

Las nociones teóricas precedentes se complementan con la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción que se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, Batanero, y Font, 2007).

- Idoneidad epistémica. Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva. Expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial (Vygotski, 1934) de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- Idoneidad interaccional. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad, desde el punto de vista interaccional, si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- Idoneidad mediacional. Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Idoneidad afectiva. Grado de implicación (interés, motivación, …) del alumnado en el proceso de estudio.
- Idoneidad ecológica. Grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la idoneidad didáctica como criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto del proyecto educativo global. Esta idoneidad se debe interpretar, no obstante, como relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo. En la figura 2.4, extraída de Godino (2011), se presenta una síntesis de la idoneidad didáctica propuesta por el EOS.

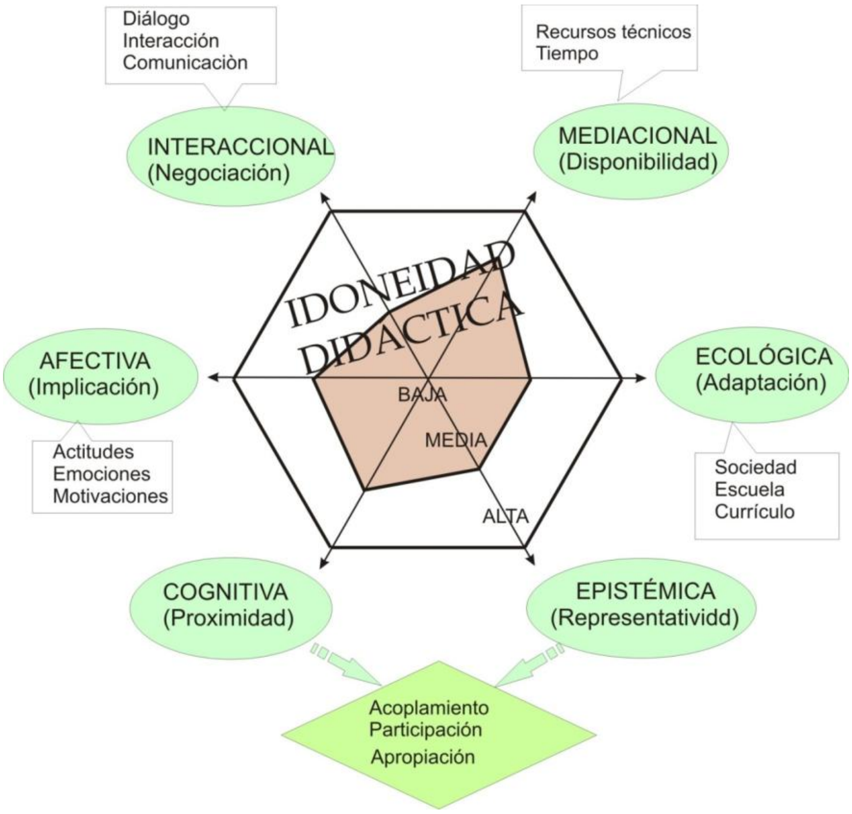


Figura 2.4: Idoneidad didáctica propuesta por el EOS

La síntesis de la noción de *idoneidad didáctica* ha sido realizada por Godino (2011) en los siguientes términos:

> Representamos mediante el hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio pretendido o planificado, donde *a priori* se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. El hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la realización del proceso de estudio implementado. Situamos en la base las idoneidades epistémica y cognitiva al considerar que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos (p. 6).

La Teoría de las Configuraciones Didácticas, junto con los criterios de idoneidad de los procesos de estudio de un contenido u objeto matemático (O), son herramientas teóricas que permiten identificar y estructurar los conocimientos didácticos acerca de la enseñanza y el aprendizaje de O. La teoría de los significados sistémico/pragmáticos podrá ser aplicada para analizar los significados de estos nuevos objetos didácticos.

En el marco del EOS tanto los objetos matemáticos como sus significados son relativos a los marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje, por lo que resulta conveniente hablar del “objeto O relativo al contexto C” ($O/_C$). Por ejemplo, $O/_C$ puede ser “la integral en el contexto socioprofesional de formación de profesores de matemáticas de secundaria en Brasil”. Asociado al objeto matemático $O/_C$ existe otro objeto didáctico, “la didáctica de $O/_C$” que vamos a representar por $D(O/_C)$. El sistema de prácticas operativas y discursivas en las que interviene $D(O/_C)$ será considerado como su significado que representaremos por $S[D(O/_C)]$.

El significado de este objeto didáctico será relativo a marcos institucionales (I) y a las personas P sujetas a dichas instituciones; tales significados serán representados por la notación, S_I $[D(O/_C)]$, y S_P $[D(O/_C)]$, respectivamente. De los sistemas de prácticas se postula que emergen nuevos objetos (matemáticos o didácticos, institucionales o personales). La tipología de significados institucionales y personales mencionada anteriormente será también aplicable a estos nuevos “significados didácticos”, los cuales se describirán así mismo mediante las correspondientes configuraciones epistémicas y cognitivas, pero en este caso referidas a los tipos de objetos didácticos introducidos en el modelo teórico.

La figura 2.5 resume la progresiva ampliación del modelo ontosemiótico, desde el objeto matemático O (un concepto, una idea, un tema, como la integral) hasta las configuraciones epistémicas y cognitivas formadas por los objetos emergentes de los sistemas de prácticas operativas y discursivas en las que el objeto O desempeña un papel relevante. Se destaca la aplicación del mismo modelo a la doble vertiente matemática y didáctica, junto con el reconocimiento de la relatividad institucional, personal y contextual de objetos, significados y configuraciones.

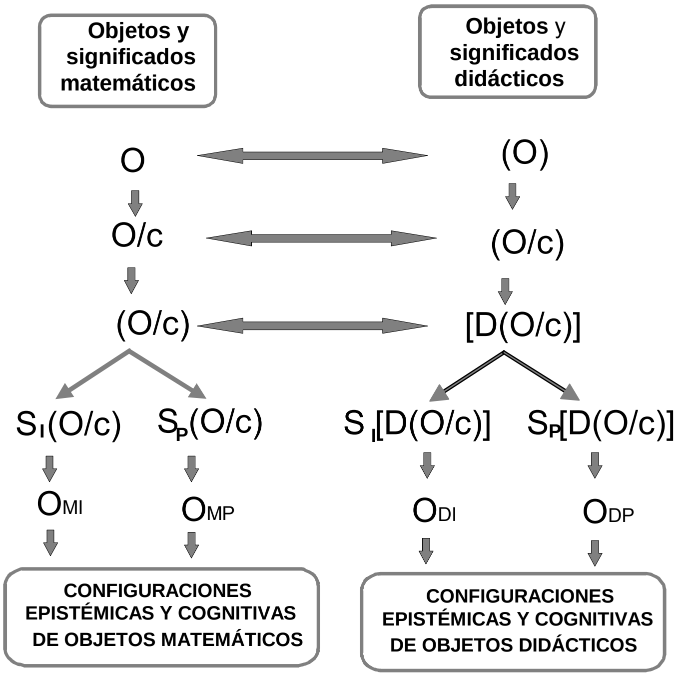


Figura 2.5: Objetos, significados y configuraciones en el EOS

Una de las cuestiones fundamentales que abordamos en este trabajo podemos formularla dentro del marco teórico descrito en los siguientes términos: ¿Cuáles son los significados personales de profesores expertos en Cálculo sobre el proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de secundaria en Brasil? La relación que el EOS establece entre funciones semióticas y conocimiento permite traducir esta cuestión en términos cognitivos: ¿Cuáles son los conocimientos de los profesores – formadores expertos sobre las características que deben reunir los procesos de estudio de la integral en un contexto institucional fijado?

La caracterización de estos significados personales expertos, junto con el significado institucional global u holístico, determinado mediante la indagación de las investigaciones didácticas realizadas en el campo de la Didáctica del Cálculo, proporcionará criterios para elaborar significados de referencia para los procesos de formación de profesores de matemáticas en el contexto institucional objeto de nuestra investigación.

Consideramos que este "enfoque ontosemiótico" de los conocimientos didácticos aporta una nueva aproximación a los problemas sobre conocimientos, concepciones y creencias del profesor sobre las matemáticas y su enseñanza.

2.4. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Consideramos que el marco teórico para esta investigación contempla, de manera complementaria, algunos de los constructos teóricos relacionados con el *Pensamiento Matemático Avanzado*, la *formación de profesores de matemáticas, y el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.*

Los constructos desarrollados por el PMA han sido abundantemente aplicados en las investigaciones cognitivas y resultan útiles para la caracterización del proceso de estudio de la integral, desde la perspectiva de las investigaciones realizadas en Didáctica del Cálculo. Nos interesa, principalmente, los estudios relacionados con el análisis del referido proceso, y con la identificación de los principales obstáculos epistemológicos y didácticos asociados a la integral en el contexto socio-cultural especificado en nuestra investigación. Resaltamos, además, que algunas de las investigaciones recientemente desarrolladas enmarcadas en el PMA han sido orientadas para aspectos sociales o culturales, al considerar las implicaciones del rol del contexto para la comprensión del desarrollo cognitivo (Harel, Selden y Selden, 2006).

En lo que se refiere a la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, centramos nuestra investigación en el conocimiento profesional puesto de manifiesto por los profesores-formadores sobre la idoneidad del proceso de estudio de la integral.

Esta noción de idoneidad didáctica, juntamente con otras herramientas teóricas desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico, son largamente utilizadas en esta investigación, desde su diseño hasta la recogida y análisis de los datos.

Capítulo 3

PROBLEMA, OBJETIVOS Y ORGANIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo plantemos el problema de investigación, describimos los objetivos y su interés, y las hipótesis iniciales. Asimismo, sintetizamos la metodología que hemos utilizado resaltándose las etapas de la investigación.

3.1. PROBLEMA PLANTEADO

En el ámbito de las investigaciones sobre Didáctica del Cálculo y de formación de profesores de matemáticas que hemos descrito en el capítulo 1 en esta investigación nos planteamos las siguientes cuestiones:

- ¿Qué formación matemático – didáctica deberían recibir los profesores de matemáticas de secundaria para que puedan realizar su labor docente de la manera más idónea posible?
- ¿Cómo se deberían diseñar, implementar y evaluar los procesos de formación de los profesores para el logro de dicho objetivo?

Las cuestiones así formuladas corresponden a una problemática propia de un "formador reflexivo", y sin duda son significativas y relevantes, pero excesivamente generales para ser directamente investigables. La aproximación progresiva al campo de la Educación Matemática nos ha llevado a aplicar sucesivos "recortes" y determinaciones a estas preguntas iniciales de investigación. La primera se refiere al contexto formativo de la Licenciatura en

Matemáticas en Brasil, la segunda, el tema matemático (Didáctica del Cálculo, la integral). Falta aún una tercera determinación que vendrá dada por las herramientas teóricas y metodológicas aplicables.

En nuestro caso, teniendo en cuenta la diversidad de enfoques y paradigmas de investigación, los cuales con frecuencia enfatizan una de las dimensiones implicadas (frecuentemente el componente cognitivo o el pedagógico), hemos optado por aplicar el "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) cuyos supuestos y herramientas teóricas han sido sintetizadas en el capítulo 2. La noción de *idoneidad didáctica* de los procesos de estudio matemático nos ha atraído la atención por su potencialidad para articular las diversas facetas y componentes que caracterizan la complejidad de los procesos formativos en educación matemática.

Nuestro objetivo es que el "estudio de caso", formación de profesores sobre la integral definida en el contexto institucional de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil, tenga, en la medida de lo posible, un carácter paradigmático desde el punto de vista teórico y metodológico. Las cuestiones generales iniciales de investigación se pueden formular de manera más operativa usando las seis dimensiones que propone el EOS para analizar los procesos de estudio matemático (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica), teniendo en cuenta, además, los indicadores empíricos identificados para cada una de las idoneidades parciales:

> *¿Qué características deberían reunir los procesos formativos de los profesores de matemáticas de secundaria para que alcancen un grado óptimo de idoneidad en las diversas dimensiones y factores implicados?*

La información necesaria para responder a esta cuestión puede provenir de dos fuentes que consideramos complementarias: (1) Las investigaciones publicadas sobre formación de profesores y Didáctica del Cálculo; (2) La experiencia profesional de los propios formadores "expertos" en la enseñanza del Cálculo en el contexto específico investigado.

La separación entre la "teoría" y la "práctica", entre los resultados de la investigación académica y la práctica de la enseñanza de las matemáticas es un tema de reflexión frecuente, como describe Ruthven (2002). Este autor analiza los vínculos entre la investigación y la enseñanza, proponiendo una cooperación entre los conocimientos derivados de la investigación académica y los conocimientos derivados de la práctica profesional. “Una preocupación particular se refiere a cómo se puede promover una mayor sinergia entre estas dos prácticas específicas, sus formas características de conocimiento, y los procesos asociados de creación de conocimiento” (Ruthven, 2002, p. 581).

Nuestra investigación se orienta también, usando herramientas teóricas del EOS, hacia la caracterización del conocimiento profesional de formadores de profesores de matemáticas de secundaria sobre la idoneidad didáctica de los procesos formativos correspondientes.

En consonancia con las preguntas de investigación formuladas, definimos los objetivos que serán descritos a continuación.

3.2. OBJETIVOS Y SU INTERÉS

El objetivo general de esta investigación consiste en caracterizar los procesos de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria por medio de la noción de idoneidad didáctica.

Teniendo en cuenta las investigaciones realizadas sobre la Didáctica del Cálculo y el conocimiento profesional puesto de manifiesto por los profesores-formadores sobre dicho proceso, trataremos de aportar conocimientos sistemáticos y fundamentados a tener en cuenta en la elaboración de diseños instruccionales de calidad para la formación de profesores de matemáticas de secundaria sobre un tema específico, la integral, en el marco socio-profesional de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil.

Este objetivo general puede ser desdoblado en cuatro *objetivos específicos*, los cuales serán planteados conjuntamente con la exposición de su interés en esta investigación:

Objetivo 1. Reconstruir el significado institucional de referencia de la integral a partir de un estudio histórico-epistemológico-didáctico del Cálculo.

Este objetivo será desarrollado a partir de un estudio que llevaremos a cabo para contextualizar y precisar el origen de la noción de integral y cómo esta emergió a lo largo del desarrollo histórico del Cálculo. Asimismo, identificaremos los conceptos fundamentales con los cuales se relaciona la integral y el papel que ésta desempeña en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas. Para ello realizaremos un estudio histórico-epistemológico-didáctico de la integral, contemplado en el Capítulo 4. En este sentido, su interés consiste, inicialmente, en caracterizar el significado institucional global de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemática. Dicho significado se convertirá en el significado de referencia y deberá proporcionar, por una parte, una pauta de análisis del currículo del Cálculo y de los capítulos relacionados con la noción de integral en los libros de texto que se utilizan en la Licenciatura en Matemáticas. Por otra parte, será usado tanto en la sistematización de los significados que los profesores-formadores atribuirán a la integral y a su proceso de estudio, como en el análisis de la idoneidad del referido proceso en el contexto de la formación de profesores de matemática.

Objetivo 2. Sintetizar el currículo propuesto para la Licenciatura en Matemáticas en Brasil y, particularmente, el currículo de Cálculo Diferencial e Integral.

El interés de este objetivo consiste en discutir y sintetizar las normativas referentes a la formación de profesores en Brasil, particularmente en lo que concierne a la Licenciatura en Matemáticas y al currículo del Cálculo. Para ello analizaremos las directrices curriculares propuestas para la formación de profesores de matemática en Brasil, especialmente las Resoluciones (Resolución CNE/CES 1/2002 y Resolución CNE/CES 2/2002) y el Parecer CNE/CES 1320/2001.

A partir de este análisis podremos identificar y sintetizar los significados pretendidos para la Licenciatura en Matemáticas basándonos tanto en las orientaciones curriculares como en la literatura específica que hemos consultado. Todo esto nos aportará criterios para inferir los significados pretendidos para el proceso de estudio del Cálculo Diferencial. Este análisis será realizado en el Capítulo 5.

Objetivo 3. Analizar los significados de la integral contemplados en los libros de texto de Cálculo utilizados en la Licenciatura en Matemáticas.

Este objetivo permitirá caracterizar los significados institucionales planificados para el proceso de estudio del Cálculo Integral en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas, así como la secuencia didáctica utilizada en una muestra de dos de los libros de texto más indicados por los profesores-formadores para el proceso de estudio del Cálculo Integral (Ávila, 2003; Stewart, 2003).

Aunque en varios estudios desarrollados en didáctica de las matemáticas se han realizado análisis de textos, no hemos encontrado, en la literatura revisada hasta este momento, una metodología específica que permita identificar, interpretar y sistematizar la red de configuraciones epistémicas ligadas al proceso de estudio de una cierta noción matemática, en nuestro caso, la integral. En función de la complejidad del análisis que se requiere, hemos adaptado una metodología basada en las herramientas del Enfoque Ontosemiótico, la cual aplicaremos, en el Capítulo 6, para analizar y sistematizar los procesos de estudio del Cálculo Integral planificados en libros de texto de Cálculo.

Objetivo 4. Sistematizar los conocimientos profesionales que los profesores-formadores ponen de manifiesto sobre el proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil.

Para la concreción de este objetivo elaboramos un instrumento de entrevista semiestructurada. El análisis de las referidas entrevistas serán realizadas a través de dos estudios de casos, teniendo en cuenta la utilización de las narrativas y de las herramientas teóricas desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico, especialmente relacionadas con la noción de idoneidad didáctica. En el Capítulo 7 sistematizaremos el Caso I y, el Caso II en el Capítulo 8. La síntesis de las entrevistas será plasmada en el Capítulo 9 a través de la memoria compartida de los profesores-formadores.

El interés de este objetivo consiste en ampliar y aplicar las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico en la conexión y articulación de la doble vertiente en la cual desarrollaremos esta investigación: (1) la caracterización de los significados institucionales de los procesos de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemática (contemplada en los Capítulos 4, 5 y 6), y (2) la sistematización de los conocimientos profesionales puestos de manifiesto por los profesores-formadores y autores de libros de texto de Cálculo usados en Brasil (Capítulos 7, 8 y 9).

Asimismo, consideramos que este objetivo posibilitará, por una parte, el análisis de la dialéctica entre los significados personales, manifestados por los profesores-formadores y autores de libros de texto de Cálculo sobre el proceso de estudio de la integral, y los significados institucionales pretendidos, plasmados en los materiales didácticos y documentos curriculares. Por otra parte, estos conocimientos profesionales deberán aportar criterios para el análisis de la idoneidad de los procesos de estudio del Cálculo Integral en el contexto de la formación de profesores de matemática.

3.3. HIPÓTESIS DE TRABAJO

Enunciamos a continuación las hipótesis de nuestra investigación, entendidas como expectativas, y justificando la pertinencia de las mismas.

Hipótesis 1. El proceso de estudio del Cálculo Integral en la enseñanza universitaria es complejo y su diseño e implementación en la formación de profesores de matemáticas debe tener en cuenta la reconstrucción cognitiva requerida por la transición de la matemática elemental hacia la matemática superior y los distintos significados de la integral.

El desarrollo de los procesos de estudio del Cálculo Integral centrados en la construcción de significados para la noción de integral en lugar de la excesiva algebrización, con la cual suele implementarse dicho proceso, ha sido resaltado por Artigue (1991), al abordar las principales dificultades que los estudiantes enfrentan en un curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria. Asimismo, el referido proceso requiere del estudiante la formalización de las nociones matemáticas y, consecuentemente, una ruptura del procedimiento algebraico rutinario y la construcción de significados (Artigue, 1998; 2003). Al abordar la transición del pensamiento matemático elemental hacia el avanzado, Tall (1991b) afirma que los conflictos iniciales enfrentados por los estudiantes con las abstracciones formales, al iniciar su carrera universitaria, requieren que éstos desarrollen una reconstrucción cognitiva para superarlos.

En este sentido, esperamos identificar tanto en la literatura específica como en los conocimientos profesionales de los profesores-formadores indicadores que caractericen la complexidad de dicho proceso de estudio, que éste requiere tener en cuenta, además de las "concepciones, errores y dificultades" de los estudiantes, las dimensiones epistémicas (significados institucionales), la mediacional (uso de recursos tecnológicos y temporales), los modos de interacción docente-discente en el clase, así como los aspectos que podemos calificar de ecológicos, esto es, el estudio de los condicionantes sociales, económicas, etc.

Hipótesis 2. Los profesores-formadores consideran que los libros de texto de Cálculo juegan un papel importante en los procesos de estudio del Cálculo Integral, y que éstos son representativos en cuanto a los significados de la integral que deben ser implementados en el contexto de la formación de profesores de matemáticas.

La importancia del libro de texto como recurso didáctico fue resaltada por diversos investigadores, como Rico (1990), y Reis (2001). Para algunos de ellos, el libro didáctico, juntamente con el currículo, constituye un nivel de transposición didáctica cuya ayuda es inestimable para los profesores en sus clases. Asimismo, consideran que los libros de texto reflejan la postura, los saberes particulares y la experiencia de sus autores.

Con base en lo anterior, esperamos que los profesores-formadores confirmen no solamente la importancia atribuida a los libros de texto de Cálculo que se utilizan en la formación de profesores de matemáticas, sino que los referidos libros contemplan los significados de la integral que deben ser implementados en dicho contexto.

Aplicaremos una metodología de análisis de libros de texto, teniendo en cuenta las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico. Dicha metodología será aplicada al análisis de los procesos de estudio de la integral, planificados en algunos de los libros didácticos de Cálculo utilizados en la formación de profesores de matemáticas en Brasil. La descripción de la complejidad de dichos procesos y de la articulación de los significados de las distintas nociones matemáticas puestas en juego en el mismo será de gran interés didáctico.

Hipótesis 3. La extracción, codificación y sistematización del conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre el proceso de estudio de la integral aportarán criterios para caracterizar la idoneidad del referido proceso en el contexto de la formación de profesores de matemáticas.

Esta hipótesis se apoya en el hecho de que estos conocimientos profesionales podrán ser, extraídos y codificados (Ruthven, 2002) desde la práctica profesional docente. Asimismo, la sistematización de la experiencia académica y de la práctica profesional de los profesores-formadores será realizada a partir de las narrativas (Connelly y Clandinin, 1990; Riessmann, 1993; Cortazzi, 1993, Chapman, 2008). No obstante, la sistematización del proceso de estudio de la integral en el contexto de esta investigación será realizada a través de la utilización de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico, entre las cuales se destacan las nociones de significado institucional y personal de una noción matemática, configuraciones epistémicas y de criterios de idoneidad, las cuales serán afinadas y aplicadas en nuestra investigación.

3.4. METODOLOGÍA Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN

El enfoque metodológico general de nuestra investigación es esencialmente cualitativo-interpretativo. Gall, Borg y Gall (1996, p. 767)[7] define la investigación cualitativa como, “indagación que se basa en el supuesto de que los individuos construyen la realidad social en la forma de significados e interpretaciones, y que estas construcciones tienden a ser transitorias y situacionales. La metodología dominante consiste en descubrir estos significados e interpretaciones mediante el estudio de casos en profundidad”.

[7] Citado en Hart et al. (2009), p. 28.

En este sentido, desarrollaremos, por una parte, un estudio documental, a partir del análisis epistémico del Cálculo Integral, tanto en los textos relacionados con su evolución histórica, epistemológica y didáctica, como en los libros de texto de Cálculo y en las propuestas curriculares concernientes a la formación de profesores de matemáticas. Y, por otra parte, un estudio de caso, para analizar los conocimientos profesionales manifestados por una muestra de profesores-formadores y autores de libros de texto de Cálculo en el contexto de la formación de profesores de matemáticas en Brasil.

Las principales fuentes teóricas que utilizaremos en el primer estudio son:

1. Investigaciones recientes relacionadas con el proceso de estudio del Cálculo Integral y con la enseñanza universitaria de matemáticas;
2. Fuentes históricas, libros de texto y propuestas curriculares relacionados con el proceso de estudio del Cálculo en el nivel universitario. El análisis de estos textos será realizado a partir de un análisis de contenido desarrollado con las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico.

Por otra parte, desarrollaremos un estudio de casos que servirá para analizar los conocimientos profesionales de los profesores-formadores y autores de libros de texto de Cálculo utilizados en el contexto de la formación de profesores de matemática. Dicho estudio se llevará a cabo a través del análisis de las entrevistas semiestructuradas, que desarrollaremos con los profesores-formadores. La metodología que usaremos en esta parte central de nuestra investigación es descrita en la bibliografía como *análisis de narrativas* (Riessman, 1993; Cortazzi, 1993). De acuerdo con Chapman (2008, p. 17) las narrativas han sido usadas en el campo de la educación como,

- Un método de investigación en el que el proceso y el producto implica relatos de las experiencias de profesores e investigadores;
- Una herramienta para recoger datos sobre, por ejemplo, los conocimientos, las creencias, actitudes, historias de vida, y prácticas de los profesores;
- Un objeto de análisis en el estudio de la enseñanza;

- Una base, o una herramienta, para el desarrollo profesional del profesor o la formación del profesor;
- Una base para el pensamiento reflexivo.

En la sección 7.1 describimos con detalle el uso que haremos de esta metodología en nuestra investigación. Esta metodología cualitativa permitirá interpretar las respuestas de los entrevistados sobre el proceso de estudio del Cálculo Integral y sistematizar sus conocimientos profesionales sobre el referido proceso. Todo ello deberá aportar indicadores para caracterizar la idoneidad del proceso de estudio del Cálculo Integral en el contexto de la formación de profesores de matemática.

En una primera fase hemos desarrollado una investigación previa centrada en el origen y evolución histórica de la integral, así como en un acercamiento a su proceso de estudio en la enseñanza universitaria de Cálculo. Asimismo hemos revisado los antecedentes, los cuales han sido sintetizados a partir de los estudios desarrollados en el marco del Pensamiento Matemático Avanzado, y de otros estudios que hemos agrupado en cognitivos, históricos e instruccionales.

La segunda etapa ha consistido en la definición del problema de investigación, centrado en analizar el proceso de estudio del Cálculo Integral en el contexto de la formación de profesores de matemática. Las respuestas al referido problema en consonancia con el principal marco teórico utilizado, Enfoque Ontosemiótico, han requerido la adecuación del mismo y, consecuentemente, su ampliación para aplicaciones al estudio de objetos didácticos. Apoyados en el referido marco teórico elaboramos, por una parte, el guión de las entrevistas semiestructuradas realizadas con una muestra de expertos en la enseñanza universitaria de matemática (profesores-formadores y autores de libros de texto de Cálculo). Por otra parte, desarrollamos una metodología y la aplicamos al análisis de dos libros de texto de Cálculo utilizados en la formación de profesores de matemática en Brasil.

La tercera etapa consistió en una estancia en Brasil para planificación y realización de diez entrevistas a profesores de Cálculo con una dilatada experiencia profesional. Para llevar a cabo las entrevistas hemos contactado con los profesores-formadores y, posteriormente, desplazado para entrevistarlos en Belo Horizonte y Ouro Preto (Minas Gerais), Campinas (São Paulo), Vitoria (Espírito Santo), Florianópolis (Santa Catarina), y Brasília (Distrito Federal). Enseguida, nos dedicamos a la transcripción de una entrevista "piloto", y a la adecuación de una pauta de análisis de las informaciones, aplicando herramientas del marco teórico.

La codificación y análisis de las entrevistas han sido realizadas en la cuarta etapa de la investigación. Para la sistematización de las referidas entrevistas hemos optado por subdividirlas en tres momentos: dos estudios de caso, en los cuales desarrollamos un análisis en profundidad de las entrevistas realizadas con los profesores-formadores que designaremos como P1 y P2, y una síntesis general a partir de la memoria compartida de todos los profesores-formadores entrevistados. Asimismo, tras reunirnos e intercambiar experiencias sobre el análisis de las narrativas con investigadores de la "Universidade de Lisboa" (Portugal), optamos por analizar la formación y experiencia profesional de los profesores-formadores y sistematizarlas a partir de las narrativas. El conocimiento profesional manifestado por los profesores-formadores sobre el proceso de estudio del Cálculo Integral en el contexto de la formación de profesores de matemática fue extraído, codificado y sistematizado a partir de las herramientas teóricas desarrolladas en el Enfoque Ontosemiótico para el estudio de los objetos didácticos.

3. 5. SÍNTESIS DE LA RECOGIDA Y DEL ANÁLISIS DE LOS DATOS

En la elección de los libros de textos que vamos a analizar seguimos los siguientes criterios:

- El libro debe ser utilizado en la Licenciatura en Matemáticas en varias universidades brasileñas.
- Uno de los autores es brasileño, siendo además uno de los profesores – formadores entrevistados. Otro de los autores de libros es extranjero pero es uno de los libros más utilizados tanto en Brasil como en otros países.

Para el análisis de los libros de texto hemos aplicado una metodología, a partir del enfoque ontosemiótico, basada en cuatro niveles: estructura general del texto, análisis epistémico global del texto, análisis epistémico intermedio del texto y análisis epistémico puntual. Esto permite inicialmente describir y establecer algunas conexiones relativas a la estructura del texto y, en seguida, reinterpretarlo por medio de la noción de configuración epistémica.

En cuanto a los diez profesores-formadores que participaron de esta investigación, todos son profesores universitarios, doctores, con amplia experiencia profesional en el proceso de estudio de Cálculo; cinco poseen su doctorado y/o pos doctorado en Educación Matemática, y los otros cinco en Matemáticas o Ingeniería. Resaltamos, además, que cinco de los entrevistados son autores de libros de Cálculo.

Los datos han sido recogidos por medio de entrevistas semiestructuradas realizadas con esta muestra de expertos. En el análisis, en detalle y profundidad, de las entrevistas utilizamos, de manera sistemática, las herramientas teóricas del EOS, resaltándose la noción de idoneidad didáctica, así como los demás constructos contemplados en el marco teórico.

3.6 CONCLUSIÓN DEL CAPÍTULO

En este capítulo presentamos el diseño de nuestra investigación cualitativa e interpretativa, basada en estudio de casos. El acercamiento al objeto de estudio se realiza por medio de dos aproximaciones complementarias: las investigaciones realizadas en Didáctica del Cálculo y el conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre el proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas en Brasil. El análisis de los datos se basa tanto en la utilización sistemática de las herramientas teóricas desarrolladas por el EOS como en la metodología de las narrativas, especialmente en lo que se refiere a los relatos sobre la formación y experiencia profesional de los profesores-formadores.

Capítulo 4

ESTUDIO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO-DIDÁCTICO DE LA INTEGRAL

Este capítulo está organizado en dos partes. En la primera realizamos un estudio histórico-epistemológico-didáctico de la integral con la finalidad de conocer el origen de la noción matemática de integral, su desarrollo histórico y sus implicaciones en el proceso de estudio del Cálculo. La segunda parte consiste en la sistematización de los significados de referencia de la integral a partir de las herramientas teóricas desarrolladas en el Enfoque Ontosemiótico.

4.1. INTRODUCCIÓN

El Cálculo Diferencial e Integral, desde su consolidación en el siglo XVII a través de los estudios de Newton y Leibniz, es considerado como el lenguaje por excelencia del paradigma científico, como una potente herramienta para el desarrollo del pensamiento humano y resolución de una diversidad de problemas, lo que ha justificado su inclusión casi obligatoria en los currículos de distintas carreras universitarias en la actualidad.

Sin embargo, algunos de los problemas relativos a su origen, tales como los de medición rectilínea y curvilínea que aparecen en los papiros egipcios y en las tablas cuneiformes babilónicas, se remontan a más de tres milenios (Boyer, 1992, p. 1).

Por lo tanto, creemos que el hecho de situarnos en el proceso de evolución histórica de sus ideas y conceptos fundamentales es imprescindible para la comprensión del Cálculo como un conocimiento cultural y históricamente construido. Los avances en distintos aspectos ocurrieron, en algunos momentos, simultáneamente en diversos países; en otras épocas, se concentraban más en determinadas regiones y grupos de científicos. Sin embargo, en ambas situaciones se tenía como foco, principalmente, la solución de problemas prácticos surgidos en cada contexto, así como también en distintas ramas de la ciencia.

También merece la pena destacar que los conocimientos relativos al Cálculo evolucionaron desde la forma intuitiva hasta su formalización rigurosa, siendo que dicha formalización generalmente no se producía simultáneamente a la construcción de nuevos conceptos por las mentes más brillantes; al contrario, demandaba tiempo y mucho esfuerzo para su madurez, comprensión y superación de los distintos obstáculos. Además, era necesario que se adoptaran acciones conjuntas por los matemáticos de la época en el sentido de intercambiar experiencias, apoyándose en sus conocimientos previos y, principalmente, en aquellos procedentes de los grandes matemáticos que los antecedieron.

Por esto, consideramos imprescindible desarrollar un estudio histórico-epistemológico-didáctico (HED) orientado a la comprensión de la evolución de algunos de los problemas, ideas y conceptos fundamentales del Cálculo. El énfasis, como ya mencionamos, será en la integral, particularmente, en la integral definida, concepto central en nuestra investigación. Dicho estudio, que será desarrollado en este capítulo, se orienta a identificar los principales métodos y conceptos asociados a la integral, que surgieron desde la génesis del Cálculo hasta la actualidad (relacionados con las funciones reales de una variable real), y discutir sus implicaciones en la evolución del concepto de integral definida.

A continuación, en el apartado 4.2 expondremos las ideas del Cálculo en el período anterior al siglo XVII para identificar la problemática que originó sus conceptos “primitivos”; el 4.3 se destina al estudio de la génesis del Cálculo en el siglo XVII a partir de las aportaciones de Newton y de Leibniz; en el 4.4

abordaremos la evolución de los fundamentos del Cálculo, y sus implicaciones en el concepto de la integral definida a lo largo de la historia de la matemática y, por último, la evolución del concepto de integral definida y sus implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo será tratada en el 4.5.

4.2. LAS IDEAS PRIMITIVAS DEL CÁLCULO: SU EVOLUCIÓN ANTERIOR AL SIGLO XVII

Los procesos infinitos en las matemáticas se remontan al período del descubrimiento de los inconmensurables. Este hecho produjo una crisis en la matemática antigua, lo que llevó a los matemáticos griegos a la búsqueda de alternativas que tornaran "innecesarios" dichos procesos.

Según Ávila (2001), el descubrimiento de los inconmensurables tuvo su origen con los pitagóricos. Pitágoras al observar ciertas relaciones numéricas entre diversos fenómenos naturales, intuyó que el número fuera la esencia de dichos fenómenos. Por lo tanto, se esperaba que la razón entre dos segmentos de recta pudiera ser expresada a través de una razón de dos números naturales, o sea, si la razón entre dos segmentos A y B es la fracción m/n, entonces debe existir un σ, tal que A = mσ y B = nσ.

Sin embargo, con el descubrimiento de los inconmensurables se hizo explícito que la referida proposición no siempre es verdadera, lo que lleva a la siguiente cuestión: *¿Cómo puede ser el número el fundamento de todos los fenómenos naturales, si dicho número no es suficiente para mostrar al menos la razón de dos segmentos?* (Ávila, 2001, p. 24)

La solución para tal problema, presentada por Eudoxio (480–355 a.C. aproximadamente), consistía en la creación de una teoría de las proporciones que dependía solamente de los números naturales[1]. Dicha teoría puede ser expresada por la definición (de Eudoxio):

> Dadas cuatro magnitudes A, B, C y D de la misma naturaleza (segmentos, áreas o volúmenes), se dice que A es a B así como C es a D, si para cualesquiera que sean los números [naturales] m y n, se tiene: nA > mB $\Leftrightarrow$ nC >mD; nA = mB $\Leftrightarrow$ nC = mD; nA < mB $\Leftrightarrow$ nC < Md (Ávila, 2001, p. 26).

[1] La referida teoría está expresada en el Libro V de los Elementos de Euclides.

Aunque la solución presentada por Eudoxio para la crisis de los inconmensurables haya sido genial para su época, ésta contribuyó al retraso del desarrollo de la aritmética y del álgebra por más de un milenio, pues subordinaba estas disciplinas al estudio de la geometría. La "matemática numérica" llegó a Europa solamente en el siglo XIII con los árabes y el desarrollo del álgebra ocurrió tres siglos después, preparando así las bases para el desarrollo de la Geometría Analítica y del Cálculo en el siglo XVII.

Eudoxio también sugirió, en forma geométrica, uno de los más antiguos teoremas sobre límites, a través de un abordaje parecido irrefutable por los matemáticos y que satisfacía a los mismos propósitos de un proceso infinito. Comenzó con un axioma:

*"*Se dice que dos magnitudes tienen una razón, una con la otra, si, por producto, una sea capaz de exceder la otra" (Boyer, 1992, p. 4).

Para Boyer (1992), dicha "definición", que de hecho es una proposición, fue utilizada de manera muy semejante a la empleada por Euclides en el Libro X, 1 (y además por Arquímedes) para demostrar el procedimiento básico en el "método de exhausción", el equivalente griego del Cálculo:

> Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no inferior que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano (p. 4).

En lenguaje actual, la referida proposición puede ser enunciada por:

Sean *a* y *A* dos magnitudes positivas, con *a* < *A*; si $U_n = \frac{A}{2^n}$, entonces $\lim_{n \to \infty} U_n = 0 < a$.

La demostración está basada en que dado un número $\varepsilon > 0$, tan pequeño como se quiera (lo equivalente a la magnitud *a* en la proposición de Euclides), debemos hallar un número entero *N* (lo que equivale a decir en la proposición de Euclides: "si continuamos repitiendo el proceso de sustracción") tal que para *n > N vale la relación* $U_n < \varepsilon$.

El referido autor afirma que aunque haya semejanzas entre el método de la exhaución y la formulación moderna del Cálculo, se pueden considerar dos diferencias básicas: el primero consiste en hacer una demostración de un teorema, mientras que el valor del Cálculo moderno está centrado en su eficacia para realizar nuevos descubrimientos cuantitativos. Además, considera dos aspectos relevantes en el origen del Cálculo integral: el riguroso método de exhaución anteriormente mencionado (relativamente similar a los conceptos del siglo XIX) y el otro relacionado con el método de Arquímedes (proveniente de una visión atomística asociada a Demócrito y al Cálculo del siglo XVII) que sintetizaremos a continuación.

El método de Arquímedes seguramente fue una aportación de los griegos muy significativa para la invención de la integración. Dicho método consistía:

> En un esquema para equilibrar entre si los elementos de las figuras geométricas. Un segmento de recta, por ejemplo, debe ser considerado formado por puntos; un área de una figura geométrica plana es imaginada como siendo constituida por una cantidad indefinidamente grande de segmentos de rectas paralelos; y, una figura sólida es considerada como una totalidad de elementos planos paralelos (Boyer, 1992, p. 5).

Un ejemplo de la aplicación del referido método se produjo a través del teorema descubierto, a partir de la condición de equilibrio de las secciones circulares de una esfera y un cono, por una parte, y los elementos circulares de un cilindro, por otra parte. Dicho teorema puede ser enunciado como: *"el volumen de la esfera es el cuádruplo del volumen de un cono cuya base es igual al círculo máximo de la esfera y cuya altura es igual a su radio".* Este resultado es equivalente, en lenguaje actual, a que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi.r^3$ (Boyer, 1992, pp. 6-7).

El método de Arquímedes posibilitó enunciar teoremas relativos al área, volumen y centro de gravedad. Además, el método de la exhaución le permitió realizar la demostración "tradicionalmente rigurosa" de dichos teoremas.

Siguiendo la historia, Papus (320 d.C.) fue el último matemático importante de la antigüedad; después de aproximadamente un milenio de estancamiento, motivado por un cambio de las matemáticas y física, estáticas hacia otras más dinámicas, surgieron problemas esencialmente del campo del Cálculo, lo que produjo el "desarrollo de un Cálculo integral primitivo" por parte de los sacerdotes de las universidades inglesas, francesas e italianas, teniendo como uno de sus líderes a Nicole Oresme (1323-1382), responsable de la primera idea de lo que hoy conocemos como gráfico de una función, que se basaba en "una representación funcional de la velocidad con relación al tiempo". El área bajo una curva era interpretada como distancia, basándose en la idea de área como "suma de todos los incrementos de distancia correspondientes a las velocidades instantáneas". También era capaz de realizar la integración en los casos de tasa de variación *uniforme* (constante) y *uniformemente diforme* (no constante). El resultado expresado por Oresme, en lenguaje geométrico, era equivalente a afirmar que el área (S) puede ser obtenida por $S = \int_0^t Ktdt = \frac{Kt^2}{2}$.

Hasta el período medieval no se encontró ningún método o incluso terminología que se relacionara con el concepto de diferenciación, lo que implica que desde el punto de vista histórico, el concepto de integración precedió al de diferenciación en aproximadamente dos milenios (Boyer, 1992, p. 10), estando por lo tanto la integración, relacionada con su aplicación en problemas prácticos. Esto nos propicia condiciones para ubicar la integral definida en la génesis del Cálculo diferencial e integral.

Por lo tanto, consideramos pertinente profundizar en un estudio del Cálculo centrado en la integral definida como concepto fundamental, lo que nos conduce a las siguientes cuestiones, con las cuales concluiremos este epígrafe:

- ¿Qué es la integral definida?
- ¿Cómo evolucionó el concepto de integral definida a lo largo de la historia de la matemática?
- ¿Cuáles son las implicaciones y potencialidades de la integral definida en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, particularmente en la Licenciatura en Matemáticas?

4.3. EL CÁLCULO EN EL SIGLO XVII: LAS APORTACIONES DE NEWTON Y LEIBNIZ

Las bases para el nacimiento del Cálculo estaban prácticamente construidas. Las ideas necesarias para desarrollar los conceptos centrales en Cálculo (integral y derivada) y establecer su relación ya se tornaban consistentes. Los avances anteriores hacían la "creación" del Cálculo, aunque sencillos y puntuales, imprescindibles para su gigantesco desarrollo, principalmente en la segunda mitad del siglo XVII, con las aportaciones de Newton y Leibniz, a quienes se atribuye los méritos de la “creación” del Cálculo diferencial e integral como nueva rama de la matemática ya existente.

Antes de abordar las referidas aportaciones, seguiremos analizando otras contribuciones que fueron relevantes para la estructuración del Cálculo en el siglo XVII.

El período comprendido entre el final del siglo XVI e inicio del XVII se caracterizó por el reencuentro con las obras de los griegos, y por el deslumbrante desarrollo del álgebra y de la geometría analítica, precursoras del desarrollo del Cálculo. En esta misma dirección, Koyré (1978) afirmó que la reanudación y la asimilación de la obra de Arquímedes sirvieron de base para la revolución científica del siglo XVIII.

En este sentido, Stevin (1548-1620) tuvo un papel relevante tanto en el desarrollo de las Matemáticas como del Cálculo. Su contribución consistió, por una parte, en el uso de las fracciones decimales y, por otra, en los primeros intentos explícitos para desprenderse de las demostraciones rigurosas que eran realizadas al estilo de la geometría de Euclides.

La influencia de dicha ideas se puede apreciar, por ejemplo, en la obra de Galileo (1564-1642) que tras dos siglos y medio, llegó a un resultado de integral basado en el mismo tipo de razonamiento que Oresme, cuya visión era similar a la utilizada por Arquímedes en su Método, es decir, un área era formada por una cantidad infinita de líneas geométricas.

Por otra parte, Kepler (1571-1630) introdujo el uso de infinitesimales en el cálculo de áreas. Se entendía por infinitesimales los pequeños elementos que componen las figuras y que conservan sus dimensiones.

Aunque Galileo y Kepler hayan utilizado los métodos de Arquímedes en la solución de problemas, sus procesos de:

> Integración...fueron eclipsados por un tratado escrito en 1635 por Cavalieri...en este libro los indivisibles o infinitésimos fijos eran aplicados con tanto éxito a problemas de medición de áreas y volúmenes, que su postulado fundamental, que generalmente es nombrado **Teorema de Cavalieri**, ha permanecido intacto en los textos elementales hasta los días de hoy (Boyer, 1992, p. 11).

El referido teorema es enunciado por Boyer (1974) de la siguiente forma:

> Si dos sólidos tienen la misma altura, y si las secciones formadas por los planos paralelos a las bases y que se encuentran a las mismas distancias de dichas bases están siempre en una dada razón, entonces los volúmenes de los referidos sólidos también están en esa razón (p. 242).

En la transición desde las tradiciones medievales al renacimiento de la matemática se producían tensiones entre las ideas antiguas y las nuevas. En este proceso de interacción, lo que se buscaba eran caminos que simplificara el Cálculo integral, evitando las sutilezas lógicas, con las cuales se desarrollaban las demostraciones a través del método de la exhaución.

Así, surge el concepto de los indivisibles en oposición al de infinitesimal desarrollado por Kepler. Para Cavalieri (1598-1647), lo indivisible no era lo infinitamente pequeño, más bien se trata del elemento que difería de la respectiva magnitud de (*n)* dimensiones (área, volumen, etc.) por su dimensión, una unidad menor que la de la referida magnitud, o sea, el indivisible poseía *(n-1)* dimensión(o dimensiones) con respecto a la magnitud estudiada. Dicho indivisible sería encontrado en la intersección de los referidos objetos con planos o rectas que les atraviesan. Según esa idea:

> Un plano era constituido de un número infinito de rectas paralelas equidistantes, y, un sólido, de un número infinito de planos paralelos. Una recta (o plano) – expresado como “regula” – se mueve paralelamente a sí mismo, generando intersecciones (rectas o planos) en cada una de las figuras (plano o sólido), hasta que dichas figuras coincidan con sus bases. Estas intersecciones (segmentos de recta o secciones planas) constituyen los elementos o indivisibles que componen la totalidad de las figuras (Baron, 1985, p. 12).

Dicho de otra manera, lo que se pretendía era comparar, a través de la noción de los indivisibles, las áreas de figuras planas con sus volúmenes. Se debe tener en cuenta, que la relación establecida por medio de la proporcionalidad se restringe a los elementos homólogos de las figuras estudiadas.

Turégano (1993) considera que la idea de Cavalieri se fundamentaba en el pensamiento analítico, es decir, a partir del cuerpo, del plano, de la línea se descubre el plano, la línea y el punto. Además, para la referida autora:

> El empleo de los indivisibles en lugar de lo infinitamente pequeño está destinado, en la intención de Cavalieri, a liberarnos del paso al límite con sus dificultades, o, más exactamente, sus imposibilidades lógicas, reemplazándolo por la intuición geométrica, y a permitirnos, al mismo tiempo, conservar las ventajas de los métodos infinitesimales cuya fecundidad había demostrado Kepler, mucho más económicos que el largo recorrido y el particularismo de las demostraciones arquimedianas”. La concordancia de sus demostraciones con las de Arquímedes y, en general, con la geometría griega era para Cavalieri una prueba de la validez de su método (p. 70).

La principal contribución de Cavaliri para el Cálculo fue el enunciado de un teorema geométrico extremamente útil, que interpretado en lenguaje actual es lo equivalente a la integral:

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3}a^3$$

Y, su generalización a través de la integral:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

No hay dudas de que la unificación y generalización de estos resultados previos se constituyó en considerable avance hacia el desarrollo de los algoritmos del Cálculo. El ejemplo anterior caracteriza la integral definida como un proceso de "cuadratura" independiente de la noción de "tangentes", muy frecuentemente usado en la resolución de problemas antes del siglo XVIII. Otra considerable contribución de Cavalieri fue la relación que él estableció entre la espiral $y = a\theta$ (de Arquímedes) y la parábola $x^2 = ay$ (de Apolonio), a partir de la comparación de los indivisibles segmentos rectilíneos y los indivisibles curvilíneos. Las ideas utilizadas en su trabajo estaban impregnadas de elementos del Cálculo y de la geometría analítica, aunque ninguna de estas dos áreas de conocimiento de las matemáticas hubiera sido de hecho "creadas".

Con la invención de la Geometría Analítica (Descartes y Fermat), el Cálculo (o análisis infinitesimal) empezó a pasar por un proceso de aritmetización, surgiendo trabajos, como el de Wallis que llevó a cabo, por ejemplo, una probable demostración de la integral de Kn^2 a través de una nítida aritmetización del Cálculo (Boyer, 1992, p. 13). Fermat desarrolló un método de integración muy similar a la integral de Riemann; además, su contribución fue decisiva para el desarrollo del Cálculo diferencial. También merecieron destacarse Barrow (con la publicación de una regla de tangentes), René de Sluse y Hudde (con la percepción del rol de los coeficientes y exponentes en la determinación de tangentes y extremos de polinomios), Torricelli y Gregory (con el probable conocimiento de la relación inversa entre los problemas de cuadratura (integral) y los de tangentes (diferencial), y muchos otros.

Todo lo anterior contribuyó al cambio de los conceptos y lenguaje estáticos de los matemáticos griegos para un análisis de la variabilidad y, constituyó en el cimiento para la construcción del actualmente conocido como Cálculo.

Los problemas surgidos en la segunda mitad del siglo XVII requerían una matemática mucho más amplia que la anteriormente desarrollada, donde la mayoría de las reglas se aplicaban a problemas que abarcaban polinomios, o que podían ser fácilmente expresados en forma de polinomios.

> El interés explosivo por la cicloide, por la catenaria y por otras curvas expresadas como funciones trigonométricas y logarítmicas confería respetabilidad a una gama de problemas mucho más amplia. Las reglas de Cavalieri, Fermat, Wallis y Barrow relacionadas con el aumento o disminución de exponentes no parecían aplicables a las funciones trascendentes. Los matemáticos del decenio 1666-1676 necesitaban intensamente un algoritmo general que se aplicara a todas las funciones. [...] La clave del nuevo análisis estaba en el descubrimiento, realizado por Newton y Leibniz, de la gran utilidad de los desarrollos en series infinitas (Boyer, 1992, p. 17).

Así, Newton llegó a cuadraturas originales para su tiempo, como es el caso de la integración de $\left(x - x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ y la integración de algunas funciones trascendentes.

Según Baron (1985), Newton explicó, en su libro "La cuadratura de las curvas" (1693), el método de las fluxiones en término de las primeras y últimas razones de la siguiente manera:

> LA CUADRATURA DE LAS CURVAS.
>
> No he considerado aquí las cantidades matemáticas como siendo compuestas de partes **extremamente pequeñas**, sino como siendo **generadas** por un **movimiento continuo**. Las líneas son descritas y, al describirlas son generadas. No por un lineamiento de partes sino por un movimiento continuo de puntos. Las superficies son generadas por el movimiento de líneas, los sólidos por el movimiento de superficies, los ángulos por la rotación de sus lados, el tiempo por un flujo continuo, etc. Esta génesis está basada en la naturaleza y puede ser vista en lo cotidiano por los movimientos de los cuerpos.
>
> Y, de esta manera, los antiguos nos han enseñado a generar rectángulos por la yuxtaposición de líneas rectas móviles a lo largo de rectas inmóviles en una posición o situación normal a ellas.
>
> Se percibe que las cantidades que aumentan en tiempos iguales y que son generadas por dicho aumento serán más grandes o más pequeñas de acuerdo con su velocidad, en la cual aumentan y son generadas, sea más grande o más pequeña; he realizado un esfuerzo por encontrar un método que determinara las cantidades de las velocidades, de los movimientos o incrementos que las generaron. Llamando **fluxiones** a las velocidades de los movimientos o de los aumentos y de **fluentes** a las cantidades generadas, esclarecí, poco a poco (en los años 1665 y 1666) el método de las fluxiones que aprovecho aquí en la cuadratura de las curvas.
>
> Las fluxiones son semejantes a los aumentos de los fluentes, los cuales son generados en intervalos de tiempos iguales, pero son infinitamente pequeños; y para ser más exacto, diría que están en la primera razón de los aumentos nacientes, aunque puedan ser representados por cualesquiera líneas proporcionales a ellas (pp. 31-32, traducción y negritas nuestras).

Podemos observar que la concepción de Newton se basaba en el movimiento, a partir del cual se generaban las magnitudes. Por lo tanto, no hacía referencia ni tampoco utilizaba el concepto de los indivisibles en su teoría. Además, coincidimos con autores como Boyer y Baron, en el sentido de afirmar que el lenguaje y la simbología que Newton utilizaba se convertían en obstáculos para la comprensión de lo que él de hecho quería expresar en su teoría de la cuadratura de las curvas. Quizás semejante problemática puede estar afectando el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo hasta la actualidad.

En esa idea de movimiento, las fluxiones se referían a las derivadas, mientras los fluentes a las integrales. Esto es equivalente, en lenguaje moderno, a considerar que si *x*, *y*, *z* son los fluentes, sus fluxiones son, respectivamente $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ (Baron, 1985, p. 33).

Inicialmente Newton trataba sistemáticamente todos los problemas referentes a las propiedades de las líneas curvas. Sin embargo, tras el reconocimiento de la naturaleza inversa entre la diferenciación y la integración, y que el proceso de diferenciación era lo más sencillo de los dos, elaboró tablas que le posibilitara los resultados directos de dichos procesos, con la finalidad de minimizar los esfuerzos en la búsqueda de identificar las propiedades de las curvas conocidas en su tiempo.

La idea anterior nos hace reflexionar sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo diferencial e integral, que hoy día sigue siendo desarrollado, en muchas universidades, a través del énfasis en largos procesos para encontrar los resultados para cada problema (o actividad) específico. En estos casos, poca o ninguna importancia se atribuye a las propiedades y a la comprensión de los conceptos que se pretenden desarrollar. Lo que se evalúa en los estudiantes, que son sometidos a este tipo de enseñanza, no es la comprensión que les permita establecer las relaciones entre los conceptos involucrados en los objetos matemáticos que se estudia, ni el desarrollo de la capacidad de extrapolación de dichos conceptos y, su consecuente aplicación en nuevas situaciones o problemas, sino su habilidad en las operaciones meramente algebraicas.

Los problemas que Newton resolvió, en el campo del Cálculo, se relacionaban con la naturaleza inversa entre la integración y la diferenciación; su formulación fue realizada sobre dos problemas fundamentales desarrollados en el tratado de 1671 sobre fluxiones y enunciados de la forma siguiente:

- dada la relación mutua entre las cantidades fluentes, determinar la relación entre las fluxiones;
- cuando se enuncia una ecuación que contenga las fluxiones de las cantidades, determinar la relación de las cantidades entre sí. (Baron, 1985, p. 36).
- Otras características que consideramos relevantes resaltar en el trabajo de Newton son:
- los problemas a resolver eran redactados en términos generales; se deducía primeramente los métodos, fórmulas, reglas y algoritmos, y por último se ejemplificaba detalladamente su posibilidad de aplicación en una "amplia" clase de curvas.
- los estudios desarrollados estaban relacionados a los puntos de máximo, mínimo e inflexión y a los problemas de curvaturas.

A obra de Newton fue relevante en el desarrollo del Cálculo. Consistía en la búsqueda de solución para problemas de naturaleza práctica, sin dejar de considerar el "rigor" matemático.

A partir de las consideraciones que explicitamos sobre la significativa contribución de Newton al desarrollo del Cálculo, vamos a sintetizar los aspectos que consideramos más relevantes con respecto a las aportaciones de Leibniz en esta misma dirección y con similar importancia.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) realizó algunos estudios relevantes para la "creación" de su Cálculo, entre los cuales destacaremos, de acuerdo con Baron (1985):

- las secuencias de diferencias: la idea central consiste en el hecho de que Leibniz se dio cuenta de que "sumar secuencias y tomar sus secuencias de diferencias son operaciones mutuamente inversas en cierto sentido" (p. 46). Dicha idea no fue solamente aplicada a la adición de numerosas series distintas, sino extendida a la geometría considerando la cuadratura como la suma de una secuencia de ordenadas equidistantes. De este modo, por analogía, la suma de secuencias correspondería a la cuadratura de las curvas, mientras su diferencia se relacionaba con la determinación de tangentes. Así, si la distancia entre las ordenadas es igual a una unidad, la suma de estas ordenadas es equivalente al área de la curva; lo que implica decir que si tomáramos la unidad infinitamente pequeña, la aproximación al área sería prácticamente exacta;

- el triángulo característico: al estudiar las obras de Descartes, Sluse, Pascal, y de Gregory entre otros, Leibniz percibió la posibilidad de generalizar el uso que Pascal hacía del triangulo característico (en el caso de círculo y la relación con otros triángulos) a otras curvas arbitrarias;
- la transmutación: se refiere al establecimiento de una regla general de transformación de un área bajo la curva a través del uso del triángulo característico. La referida regla reduce la cuadratura de una cierta curva a la cuadratura de otra curva construida a partir de las tangentes de la primera. Su importancia consiste en la toma de conciencia de Leibniz con relación a la necesidad de introducir un "lenguaje simbólico general para la matemática infinitesimal; además, que el referido lenguaje debería englobar, en general, esas reglas de transformación" (p. 52).
- La serie para π. Con la aplicación de la regla de la transmutación, Leibniz dedujo, por ejemplo, la cuadratura de la parábola y de las hipérbolas superiores. También encontró la siguiente serie a partir de la cuadratura del círculo:
- $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$.

Para Leibniz, los conceptos básicos utilizados en el desarrollo del Cálculo son, según Baron (1985), principalmente:

- Diferenciales:

> La diferencial de una variable **y** es la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores consecutivos de **y**. [...] dy es la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas **y**; dx es la diferencia infinitamente pequeña entre dos abscisas x; por lo tanto, dx es la distancia entre dos ordenadas **y** consecutivas (p. 59).

- Integrales o sumas:

> La suma o integral $\int ydx$ es la suma de rectángulos infinitamente pequeños ydx ; por lo tanto, $\int ydx$ es el área de la curva $y(x)$. Leibniz aunque no indicaba los intervalos de integración, explicita las constantes de integración (p. 60).

- Diferenciales de órdenes superiores:

> Si los dy son diferentes [...] esa diferencia es la diferencial de segundo orden: es infinitamente pequeña comparada con las diferenciales de primer orden y será denotada por: $ddy = dy^1 - dy$ (p. 60).

Con razonamiento semejante fueron introducidas las diferenciales de órdenes superiores a dos.

Los conceptos de Leibniz, así como el lenguaje y simbología utilizados por él, constituirían aspectos de los más relevantes en el desarrollo posterior del Cálculo, aunque eran insatisfactorios en los aspectos que se refieren al rigor matemático (Baron, 1985, p. 61).

Las diferencias básicas entre las teorías de Newton y Leibniz fueron sintetizadas por Zuin (2001, p. 31) a través del cuadro siguiente:

Newton	Leibniz
Consideraba las variables dependientes del tiempo aplicando el concepto de movimiento.	Entendía las variables como desplazándose en secuencias de valores infinitamente próximos. En su Cálculo hay poco uso de conceptos de movimiento.
El concepto cinemático sugiere la velocidad o tasa de cambio de la variable como concepto fundamental: la "fluxión". (La fluxión no era una cantidad pequeña, sino una velocidad finita).	La noción de variable enfatizaba la diferencial como diferencia de dos valores sucesivos en la secuencia. Las variables adquieren nuevos valores continuamente y no por saltos. Las diferencias no podían ser finitas, sino infinitamente pequeñas.
La integral es la "tarea de determinar las cantidades fluentes para fluxiones dadas".	La integral es una sumatoria.
El teorema fundamental está contenido en la definición de la integral.	El teorema fundamental no está contenido en la definición de la integral.

Figura 3: Diferencias entre el Cálculo de Newton y el de Leibniz

Mientras el Cálculo de Newton se había quedado más próximo a la geometría, el de Leibniz se desarrollaba hacia el análisis, con manipulación de fórmulas y poca o ninguna utilización de figuras o interpretación geométrica (Zuin, 2001, p. 34).

Posteriormente, el estudio relativo al Cálculo tuvo continuidad con la familia Bernoulli, Euler y Lagrange; además, L´Hospital, en el año 1696, publicó el primer libro texto de Cálculo: *Analyse des infiniments petits*, basado en las clases que había tenido con Johann Bernoulli, aunque también contenía sus propias conclusiones.

Concluiremos este apartado con la constatación de que el principal problema detectado hasta esta etapa de desarrollo del Cálculo se refería a la carencia de formalización de su teoría y, consecuentemente, de su fundamentación teórica. Estos aspectos fueron los que constituyeron el principal foco de interés de los matemáticos del siglo XVIII, cuyas contribuciones fueron imprescindibles para la evolución de los conceptos del Cálculo, enmarcados en una constante búsqueda de fundamentación y generalización del Cálculo a una clase cada vez más amplia de situaciones. Lo anteriormente expuesto marcó una “nueva etapa” en la historia del Cálculo y, consecuentemente, en el desarrollo del concepto de la integral definida. Estas ideas, así como las implicaciones de la evolución del concepto de la integral definida para el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo I en la enseñanza universitaria serán discutidas a continuación.

4.4. EVOLUCIÓN DE LOS FUNDAMENTOS TEÓRICOS EN CÁLCULO. IMPLICACIONES EN LA INTEGRAL

En su proceso de evolución, el concepto de integral permaneció por mucho tiempo ligado a sus aplicaciones (principalmente en la solución de problemas prácticos de cuadraturas, así como de los relacionados con la Geometría y con la Física).

Posteriormente, a partir del siglo XVIII, dicho concepto pasó por un amplio proceso de fundamentación teórica, como sucedió en el Cálculo de manera general. Esto implicó en el distanciamiento de los factores que motivaron su génesis (ligados a las aplicaciones a través de procesos más intuitivos y primitivos). Así, su evolución fue históricamente caracterizada por el proceso de fundamentación teórica, basado en el rigor, precisión de los conceptos y en la constante búsqueda de su generalización a una clase cada vez más amplia de funciones.

Aunque Jacques Bernoulli (1654-1705) fue quien usó por primera vez la expresión "integral" en su obra sobre la isócrona en la *Acta Eruditorum* de 1690, anteriormente (en 1680) él ya había sugerido dicha expresión a Leibniz, que utilizó la expresión *calculus integralis* (en sustitución a *calculus summatorius*) para referirse al proceso inverso del *calculus differentialis* (Boyer, 1974, pp. 306-307).

En 1742, fue publicado por Jean Bernoulli (1667-1748), en su *Opera omnia,* el primer texto expositivo de Cálculo integral considerado satisfactorio. En dicha obra, la integral está definida como la inversa de la diferencial, por lo tanto distinta de la concepción de Leibniz, que la consideraba como una suma de cantidades infinitamente pequeñas.

Entre los matemáticos que contribuyeron al desarrollo de Cálculo, tales como Taylor, Mac Laurin, y D'Alembert, los que más se destacaron fueron Euler y Lagrange. Para Euler, el papel de las funciones es preponderante en su obra; el reconocimiento de las funciones como objeto de estudio en matemática en lugar de las curvas posibilitó el desarrollo del proceso de *aritmetización del análisis* y su consecuente separación de la geometría. Lagrange desarrolló el Cálculo en la perspectiva de eliminar las referencias a diferenciales, infinitesimales y conceptos de límites.

A continuación centraremos nuestro énfasis en los aspectos que consideramos más relevante sobre a búsqueda de los fundamentos teóricos de la integral a partir del siglo XIX. Esto será concretado a través de la síntesis de las principales ideas de Cauchy (1789-1857), Riemann (1826-1866) y Lebesgue (1875-1941). Además, abordaremos la integral numérica resaltando su actual utilización en el proceso de integración y, finalmente, comentaremos el modelo de la integral basado en el *Análisis no Standard,* lo cual ejemplificaremos con el trabajo de Baldino (1995).

4.4.1. Las contribuciones de Cauchy y Riemann en la fundamentación del Cálculo: el concepto de integral

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) fue el fundador del rigor matemático. En la opinión de Sánchez y Valdés (2004):

> Es interesante notar que Cauchy siguió la tradición euleriana de no presentar ningún gráfico, ni motivación, ni aplicación geométrica o física del Cálculo. Las aplicaciones geométricas, también con ausencia total de ilustraciones gráficas, las relegaría a los complementos publicados posteriormente (p. 142).

En la fundamentación del Cálculo, Cauchy presentó como principales conceptos (o definiciones) los que expondremos a continuación:

Límite: se trata del valor fijo del cual se aproximan indefinidamente todos los sucesivos valores atribuidos a una variable, tal que la diferencia entre ambos valores sean tan pequeña como se quiere.

Infinitesimal (o cantidad infinitamente pequeña): se refiere a una variable cuyo límite es cero.

Función continua: una función será continua con respecto a una determinada variable *x* comprendida entre dos límites dados, si entre estos límites un pequeño incremento atribuido a dicha variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño en la propia función. Esto significa que Cauchy no consideraba la continuidad en un punto, sino en un intervalo. Es decir, para él una función *f* es continua entre dos valores *a* y *b* de un intervalo si el valor absoluto de la diferencia expresada por $f(x+\alpha)-f(x)$ decrece indefinidamente con α.

Convergencia: sea S_n la suma de los primeros *n* términos de una secuencia cualquiera (donde *n* es alguno entero), si la suma S_n tiende a un cierto límite en la medida que se le atribuyen valores cada vez más grandes para *n*, la serie es denominada "convergente" y, el referido límite, es la "suma de la serie". En el caso contrario, se dice que la serie es "divergente" y, por tanto, no tiene suma.

Derivada. Es definida para las funciones continuas en forma muy similar a la definición contemporánea, basado en la existencia del límite de un cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero. Dicha definición consistía en que:

> Cuando una función es continua entre dos límites dados en la variable x y se le asigna un determinado valor entre dichos límites, un incremento infinitesimal Δx de la variable produce un incremento infinitesimal en la propia función. Así, tomando Δx = h, los dos términos del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ también serán infinitesimales. Cuando ambos términos tienden simultáneamente a cero, su razón converge para un cierto límite. Cuando existe éste límite, tiene un valor definido para un x particular, aunque varía con x... dicho límite es la derivada de f y puede ser indicado por y' o $f'(x)$ (Fauvel y Gray, 1988, p. 568).

Diferencial. Fue definida a partir de una función $y = f(x)$, de un infinitesimal *h* y de de una cantidad finita *k* de la siguiente manera:

Si establecemos la relación $h = \alpha.k$, α también será una cantidad infinitesimal y podemos tener la identidad

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+\alpha.h) - f(x)}{\alpha.k},$$

que nos lleva a concluir que

$$\frac{f(x+\alpha.h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.k\,.$$

El límite del cociente cuando α tiende a cero y k permanece constante es denominado diferencial de la función $y = f(x)$ y es representado por los símbolos dy o $df(x)$. La relación entre la derivada (y' o $f'(x)$) y la diferencial (dy o $df(x)$) puede ser generalizada por $df(x) = k.f'(x)$ (Fauvel y Gray, 1988, pp. 568-569).

La motivación para la definición de la integral definida, independiente del cálculo de primitivas difíciles o imposibles de encontrarse, estuvo caracterizada por dos factores principales. De una parte, la concepción de la integración como proceso inverso de la diferenciación, que había sido tan fructífera en el cálculo de primitivas de funciones racionales, y de determinadas funciones irracionales y trascendentes, no era capaz de dar respuestas a la determinación de primitivas de expresiones analíticas, aunque sencillas; por otra parte, el considerable desarrollo de la física requería considerar además de las funciones analíticas, procesos no analíticos e incluso discontinuos para la solución de la problemática que surgía en su estudio.

La esencia del concepto de integral definida de Cauchy, se basó en la forma de aproximación que Euler realizaba para las funciones que él no conseguía encontrar las primitivas. En 1822, Cauchy introdujo dicha definición a través del *Resumé des leçons données à l'Ecole Royale Polytechnique sur les calcul infinitesimal*. Empezó con la suposición de que la función $y = f(x)$ es continua respecto la variable *x* entre dos límites finitos. En seguida, designó por $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ los nuevos valores de *x* situados entre los dos límites considerados; además supuso que los referidos valores siempre crecen o siempre decrecen entre el primero y el segundo límite. Así, la diferencia $X - x_0$ puede ser dividida en los elementos

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, ..., X - x_{n-1},$$

los cuales son asociados a la suma aproximada $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$, que se obtiene a partir de la suma de las áreas de los rectángulos, cuyas bases son los elementos de la partición y, la altura consiste en sus respectivas imágenes. En estas condiciones, definió la $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ como el límite de la suma S, cuando la mayor de las longitudes $x_i - x_{i-1}$ tiende a cero. Por lo tanto, esta integral es determinada por un cierto límite que depende únicamente de la forma de la función *f(x)* y de las extremidades (x_o, X) del intervalo de *x.* La justificación de la referida definición consistía en la demostración de la existencia y unicidad de dicho límite y en la constatación de que si los valores numéricos de los referidos elementos fueren muy pequeños y el número *n* muy grande, el modo de la división tendrá solamente una influencia imperceptible sobre el valor de la suma S.

Según Sánchez y Valdés (2004), posteriormente "Cauchy dio la noción de primitiva de una función como la integral definida con el límite superior variable", subordinando así la noción de integral indefinida a la de integral definida, "convirtiéndose ésta en el concepto principal". Los referidos autores consideran que para Cauchy:

> [...] esta manera de concebir la integral definida debe ser adoptada preferentemente ya que es igualmente válida en todos los casos incluso cuando no podemos pasar de la función colocada bajo el signo de integral a la función primitiva. Además cuando se

> adopta, de esta manera, puede fácilmente demostrarse que una integral tiene un valor finito único, cuando la función permanece continua entre los dos valores en los que se toma la integral (p. 144).

Esta idea corrobora nuestra posición de considerar el concepto de integral definida como central en el estudio del Cálculo y, por lo tanto, de centrar el énfasis de esta investigación en la búsqueda de pistas que contribuyan a la reconstrucción del concepto de la integral definida, desde una perspectiva histórico-epistemológica-didáctica, como ya hemos declarado en el primer capítulo.

La definición de integral formulada por Cauchy, y posteriormente complementada por Riemann, así como su rigurosa formulación del *teorema fundamental del Cálculo* suele ser lo que se reproduce en los libros de texto en la actualidad. En este sentido, él demostró que si *f* es continua entre los valores x_o y X, entonces

$$F(x)=\int_{x_0}^{X} f(t)dt \text{ satisface } F'(x)=f(x).$$

Como cualquier otra primitiva es de la forma $F(x)+c$ (y *c* es una constante), concluyó demostrando que $\int_{x_0}^{X} f(t)dt = F(x)-F(x_0)$.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), en su memoria "Sobre la posibilidad de representar una función por una serie trigonométrica" (*Habilitationschriff,* 1854) aclaró la necesidad de preceder dicho estudio por una *Nota sobre la noción de integral definida, y sobre el dominio en que esta noción es aplicable* (Sánchez y Valdés, 2004, p. 175).

En dicha nota, Riemann planteó la cuestión general:

¿Qué debe entenderse por $\int_a^b f(x)dx$?

A partir de esto, extendió la definición de integral definida de Cauchy a una clase más amplia de funciones, contemplándose también las funciones discontinuas. El procedimiento que Riemann adoptó para contestar la referida pregunta general sigue siendo muy similar a la forma con la cual los libros de textos presentan la definición de integral definida en la actualidad y puede ser descrito de la siguiente forma:

Para establecer esto, tomamos una sucesión de valores $x_1, x_2, ..., x_{n-i}$ entre a y b, ordenados por tamaños; denotamos $x_1 - a = \delta_1,\ x_2 - x_1 = \delta_2, ...,\ b - x_{n-1} = \delta_n$; y las fracciones propias positivas por ε_i. Entonces el valor de la suma $S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + ... + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$ dependerá de la elección de los intervalos de las cantidades ε_i. Si ésta tiene la propiedad de que, de cualquier forma que sean elegidas δ_i y ε_i, tiende a un valor límite A fijo cuando δ_i se hace infinitamente pequeño, entonces este valor se llama $\int_a^b f(x)dx$. Si no tiene esta propiedad, entonces $\int_a^b f(x)dx$ no tiene significado. A partir de aquí, Riemann elige un punto arbitrario $\overline{x_i} = x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$ en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de esta partición $i = 1,...,n$ y define la integral por $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1})$ donde δ denota el máximo de las longitudes δ_i de los subintervalos de la partición $[a,b]$ (Turégano, 1993, pp. 90-91).

En dicha teoría, la existencia de una función arbitraria está condicionada a la existencia del límite de una suma. Por lo tanto, se puede integrar funciones que no son derivadas de alguna otra, o incluso funciones que no poseen primitiva para cualquier intervalo considerado. Este nuevo abordaje de la integral (como suma de límite), surgió en un contexto específico de fundamentación teórica y evidenció una crisis en la concepción de la integral como primitiva.

4.4.2. Algunos fundamentos del Análisis no estándar

Sin embargo, la teoría de los infinitésimos se opone a la referida concepción de integral y contribuye al surgimiento de otras "técnicas" de integración generalmente conocidas como el *análisis no estándar*.

Para Baldino (1995), desde que Newton y Leibniz enunciaron, de manera independiente, el teorema fundamental del Cálculo:

> El Cálculo viene constituyéndose por justificaciones diferentes de esta creencia: una justificación en el campo semántico del continuo-geométrico, centrada en la noción de los infinitésimos, y otra en el campo discreto-numérico, centrada en la noción de límite. En el tiempo de Leibniz, eran los infinitésimos los que predominaban... A los fines del pasado siglo, la concepción discreta –numérica empezó a sobresalir en el debate matemático, impulsado por Cauchy que trajo definitivamente el concepto de límite para el primer plano de las matemáticas, por Weistrass que lo formalizó y, por Dedekind que lo utilizó en la fundamentación del número real. A partir de entonces, las realizaciones de las matemáticas son debidas al concepto de números reales que garantizan la completitud de la recta (p. 13).

Lo anteriormente expuesto sintetiza claramente las dos concepciones presentes en Cálculo. Aunque el concepto de límite sea predominante en la fundamentación del Cálculo, algunas críticas hechas a dicha concepción (considerando que la integral como límite de una suma no responde a la lógica de los infinitésimos y genera obstáculos en su proceso de enseñanza y aprendizaje) estimularon el desarrollo de propuestas alternativas para la enseñanza del Cálculo, basado en los infinitésimos (Robinson, 1966, citado por Baldino).

Esta idea del Cálculo, basado en la teoría de los infinitésimos, presupone como estructura básica los números hiper-reales (*R). Dichos números pueden ser pensados como constituidos por los reales, añadidos de los infinitésimos ($\varepsilon \in {}^*R$), de los infinitos (Ω) y de las mónadas. Los infinitesimales (ε) se refieren a las cantidades cuyo valor absoluto es más pequeño que cualquiera de los números reales positivos; los infinitos (Ω) tienen valor absoluto más grande que cualquier número real positivo; y, la mónada de cualquier número real *x* se constituye por todos los *y* $\in {}^*R$, tal que la diferencia *y-x* es un infinitésimo. Así, *R es un cuerpo ordenado y no completo; la mónada de un cierto elemento de *R es limitada, pero no posee supremo ni ínfimo; el inverso de un infinitésimo, no nulo, es un número infinito y viceversa.

Tras caracterizar *R, vamos a sintetizar la aplicación del análisis no estándar en la determinación de una integral definida por una función. La idea general consiste en ampliar las mónadas por medio de un microscopio de poder infinito en lugar de usar diagramas sobre límites (Kiesler, 1986, p. 57).

Inicialmente debemos considerar una función *f*; un punto P(*x, f(x)*)$\in f$; una recta *t* tangente a *f* en P, y una recta *s* secante a *f*, infinitamente próxima de *t,* que contenga los puntos P y Q(*x*+*dx, f(x*+*dx)*). Ampliándose la mónada de P, los puntos P y Q son vistos como distintos. Suponiendo

$y = f(x)$, tenemos, por definición que:

(1) la diferencial $dy = d(f(x)) = f(x+dx) - f(x)$;

(2) la pendiente de *s* será el cociente $\frac{dy}{dx}$;

(3) la derivada será la parte real del número hiperreal obtenido en (2), o sea, $f'(x) = re\frac{dy}{dx}$.

El área *A* bajo el gráfico de *f*, en el intervalo $[a,b]$ puede ser hallada por el proceso de integración infinitesimal (Baldino, 1995), que consiste en pensar en el segmento *S* partido en una infinidad de trozos infinitesimales de área *dA*. Esto nos permite interpretar dicho área como

(4) $A(S) = re\int_s dA$.

De ahí, podemos utilizar una parametrización x para [a, b] y describir *S* como la parte del plano bajo el gráfico de *f*. Considerándose un número infinito ω y dividiendo [a, b] en ω partes iguales (cada una de longitud $dx = \frac{1}{\omega}$) y situándonos sobre el punto de abscisa *x*, a partir de la ampliación de la mónada de P, *dA* puede ser expresado como la suma de las áreas de un rectángulo y de un triángulo de base infinitesimal *dx*. Así, la integral es una suma de los infinitos resultados obtenidos en ese proceso y, podemos expresar *dA* como:

(5) $dA = f(x)dx + \frac{1}{2}d(f(x))dx$.

Lo que nos conduce (a partir de (4)) a la siguiente expresión, cuya solución nos da el área de *S* por medio de la aplicación de la integral definida:

(6) $A_a^b(S) = re\int_a^b dA$

En este proceso, ningún infinitésimo fue despreciado hasta que se llegara al final, por lo tanto, el error global fue mantenido bajo control. Además, para Baldino (1995), puede ser caracterizado para funciones con derivadas continuas en el primer curso de Cálculo, pues realizándose una partición infinita de [a, b] se obtiene una partición infinita de [c, d] (en el caso de la función monótona). Así, c-d es equivalente a la suma infinita de los infinitésimos *dy* que son iguales al producto de la pendiente de la secante $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ por *dx,* es decir:

$$c - d = \int_c^d dy = \int_a^b \frac{dy}{dx} dx \, .$$

Este resultado, “bastante evidente para las funciones monótonas, no requiere ni el paso al límite, ni el uso del teorema de la media” (p. 21).

La concepción del referido autor se fundamenta en considerar que el objetivo central del Cálculo consiste no en enseñar la teoría de los límites o de los infinitésimos, sino en aplicarlas en las situaciones didácticas. Además, considera que “en Cálculo, el alumno tiene que aprender procesos básicos de resolver problemas con los conceptos de derivadas e integral. La justificación matemática (científica) y las limitaciones de los modelos utilizados deben ser objeto de estudio del análisis matemático” (p. 16). En este sentido, la práctica de demostraciones se constituye en uno de los objetivos principales de la disciplina “Análisis Matemático”[2], ya que una de las ocupaciones centrales de todo profesor o estudioso de matemáticas se refiere a su capacidad para enunciar y demostrar teoremas (Ávila, 2001).

En este estudio, no tenemos la pretensión de discutir el análisis s*tandard* y el análisis *no standard.* Por esto nos restringiremos a la exposición, síntesis y discusión de los distintos métodos y procesos encontrados a lo largo de la historia de las matemáticas, en que suelen presentarse el concepto de integral y, particularmente, de integral definida.

4.4.3. La generalización de los fundamentos del Cálculo: el concepto de integral

La integral de Riemann constituyó el marco para la entrada de las matemáticas en el mundo de las funciones discontinuas, aunque esto se produjo tras las publicaciones de su memoria (*post mortem)* en 1867 en alemán y en 1873 traducida al francés.

Este hecho propició el desarrollo (simultáneamente independiente en 1875) de distintos trabajos relacionados con las *sumas superiores e inferiores* de la partición de un intervalo, (Thomae, Ascoli, Smith, Darboux) para demostrar que la siguiente condición de Riemann era necesaria y suficiente para la unicidad del límite de las sumas integrales:

[2] Análisis Matemático, en el sentido expresado, se trata de una disciplina generalmente ministrada en los últimos semestres de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil.

> Para que una función acotada sea integrable (R) en [a, b], es necesario y suficiente que para cada par de números, $\omega > 0, \varepsilon > 0$, exista una partición tal, que sea $< \varepsilon$ la suma de subintervalos donde la oscilación supera a ω (Rey Pastor et al., 1969, p. 686).

Jean Gaston Darboux (1842-1917), aunque sus principales contribuciones a las matemáticas se realizaron en geometría diferencial, se tornó muy conocido en análisis por su trabajo relacionado con la integral de Riemann. En su *Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues* desarrolló un exhaustivo estudio de las funciones discontinuas, además:

> Demostró las proposiciones básicas de la teoría de funciones e ilustró, con gran claridad de ejemplos, la necesidad de las hipótesis para la validez de los teoremas. Entre otras cuestiones, justificó, para series que convergían uniformemente, la integración término a término y el hecho de que esta propiedad no es válida sin hipótesis adicionales (Sánchez y Valdés, 2004, p. 177).

Según los referidos autores, dicha memoria comienza con la afirmación:

> Hasta la aparición de la Memoria de Riemann sobre las series trigonométricas no se había presentado ninguna duda sobre la existencia de derivada de las funciones continuas... La publicación de la memoria de Riemann ha decidido la cuestión en el sentido contrario... El solo hecho de que existan funciones discontinuas susceptibles de integración, es suficiente para probar, como se verá, que hay funciones continuas que no tienen derivada... (p. 177).

Las ideas básicas de la integral de Darboux, consistían en:

- demostrar que una función f es integrable en el intervalo [a, b], si y solo si sus discontinuidades constituyen un conjunto de medida cero;
- definir las sumas $\overline{\int_a^b} \; f(x)$ (superior) y $\underline{\int_a^b} \; f(x)$ (inferior);
- demostrar el teorema fundamental del Cálculo para funciones integrables en el sentido amplio:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

cuando *f* es integrable en sentido Riemann- Darboux. La demostración de dicha fórmula se basa en el hecho que

$$f(a) - f(b) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1});$$

con relación al teorema del valor medio, la demostración se apoya en que $\sum f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum f'(t_i)(x_i - x_{i-1}), \; con \;\; t_i \in (x_{i-1}, x_i).$

Si el máximo de los $\Delta_i \to 0 \Rightarrow \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ (Contreras, 2003, pp. 23-24).

En los años 1880 surgieron varias definiciones en el sentido de caracterizar la integrabilidad de una función basada en la idea de "medida". Todo esto conllevó a la necesidad de precisar conceptos adecuados al estudio de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad de funciones. Los primeros conceptos desarrollados en esta dirección fueron los de *contenido* (Stolz, 1881; Cantor, 1884; Harnack, 1885). Sin embargo, algunos de los problemas existentes y que motivaron el desarrollo de la teoría de la medida y su utilización en la fundamentación de la integral continuaron sin respuestas tras los referidos conceptos de contenido, destacándose, principalmente: la carencia de relación con la integral definida, falta de aclaración del concepto de área, consideración que siempre existía el área de una región acotada por un gráfico (independientemente de la existencia de la integral de la función que determinaba la región) (Sánchez y Valdés, 2004, pp. 180-181).

En la perspectiva de contribuir con la solución de la problemática anteriormente referida, Peano (1887):

> Observó la estrecha relación entre los conceptos de medida y de integral. Si f(x) era no negativa en un intervalo [a, b], entonces el contenido exterior e interior de la región E acotada por el gráfico de f coincidían respectivamente con las integrales superior e inferior de f sobre [a, b]. Así, resultó que la función f era integrable si y solo si el conjunto E tenía área. Peano tiene el mérito doble de relacionar el problema de la medida del área con la integral y de llamar la atención sobre la importancia que tiene las ideas conjuntistas de Cantor para estas cuestiones (Sánchez y Valdés, 2004, p. 181).

Posteriormente, Jordan (1893) al introducir las ideas de Cantor en el análisis no solamente contribuyó para la aceptación de dichas ideas por la comunidad matemática, sino con la generalización de las teorías de la integración y de la medida de conjuntos; Borel aunque introdujo el concepto de medida para estudiar la representación analítica de funciones, propició las condiciones satisfactorias para que Lebesgue la aplicara en la generalización de la integral de Riemann. En la aplicación de dicha integral surgían como principales insuficiencias la necesidad de hipótesis adicionales para mantener la relación entre primitiva e integral definida, y la convergencia del límite de algunas sucesiones de funciones integrables en un intervalo I (incluso uniformemente acotadas) a una función no integrable en el referido intervalo. Por lo tanto se evidenciaba la dificultad del paso al límite de integrales tomadas en el sentido de Riemann.

En respuesta a estos problemas, Henri Lebesgue (1875-1941) combinando la lectura del curso de Jordan, centrado en la definición de la integral de Riemann y las ideas de medida de Borel, no solamente precisó la definición de medida, sino la utilizó como base de la definición de integral (asociado a los conceptos de supremo e ínfimo de una función).

Inicialmente la definición de integral de Lebesgue consistía en la generalización de la idea de área bajo la curva (definición geométrica): *"si f es acotada en [a, b] y positiva, entonces la integral puede definirse como la medida del conjunto* E_f *de puntos del plano tales que* $0 \leq y \leq f(x),\ con\ x \in [a,b]$*, siempre que este conjunto sea medible"* (Sánchez y Valdés, 2004, p. 188).

Posteriormente, definió la integral analíticamente mediante la división del conjunto imagen de *f* en particiones cada vez más finas (definición analítica):

> Así, si para $x \in [a,b], m \leq f \leq M$ y (a_n) era una partición de $[m, M]$, el conjunto (E_f) estaba comprendido entre los rectángulos generalizados de base $E_i = \{x : a_i \leq f(x) \leq a_{i+1}\}$ y alturas respectivas $a_i\ y\ a_{i+1}$, es decir, su medida estaría entre $\sum a_i m(E_i)\ y \sum a_{i+1} m(E_i)$. Desde luego, para ello debió suponer que los conjuntos E_i eran medibles (o como sería costumbre más tarde, que la función f es medible). La diferencia entre estas dos sumas tendía a cero con la norma de la partición $[m, M]$, así que podía definirse $\int_a^b f = \lim \sum a_i m(E_i) = \lim \sum a_{i+1} m(E_i)$ (Ibid, pp. 188-189).

La referida definición fue extendida a las funciones medibles no necesariamente acotadas sobre $(-\infty, +\infty)$ siempre que las series anteriores sean *absolutamente convergentes.* Además, Lebesgue "*demostró que una función acotada era integrable en el sentido Riemann si y solo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tenía medida cero"* (ibid, p. 189), lo que le permitió ejemplificar funciones que eran integrables en el sentido Lebesgue, pero que no lo era en el sentido de Riemann, como es el caso de la función de Dirichlet.

Para los referidos autores, el descubrimiento del teorema del paso al límite en la integral fue uno de los principales méritos de Lebesgue y el estudio de la relación entre primitivas e integral definida lo que demandó más esfuerzos. Mientras la integral de Riemann se mostrara muy útil en el marco de las funciones continuas, no era suficiente para solucionar la difícil problemática que se presentaba en el ámbito de las funciones discontinuas. Dicha situación es presentada en uno de los ejemplos propuestos por Lebesgue en sus *Leçons* en los siguientes términos:

> Aplicando el teorema de la media se ve que la integral indefinida de f(x) es una función continua, de variación acotada, y que ella admita a f(x) por derivada en todos los puntos donde f(x) sea continua.
>
> ¿Qué pasa si en el punto α no es continua f(x)? entonces puede que tenga una derivada, éste es el caso para α=0, si f(x) es igual a 1cuando x es el recíproco de un entero y nula para todo otro x; puede que tenga una derivada diferente de f(α), éste es el caso para α=0, cuando f(x) es en todas partes cero excepto para x=0; puede que no tenga derivada, éste es el caso para α=0 cuando $f(x)=\cos(\log|x|)$, para x $\neq 0$ y f(x)=0 (Ibid, p. 190).

La complejidad para determinar la integración de las funciones no acotadas trajo como consecuencia la necesidad de expansión de la integral de Lebesgue por otras teorías más generales. Aunque este estudio no tiene el objetivo de discutir dichas teorías, sintetizaremos algunas de las contribuciones más relevantes en lo que se refiere a la generalización de la teoría de la integración, lo que se concretó a partir de 1912, a partir del estudio de Denjoy y Perron que amplió la teoría de la integración de Lebesgue para solucionar el problema de hallar una función *g a partir de* g' no acotada y, por lo tanto, no necesariamente integrable en el sentido de Lebesgue; también merecen destacarse el concepto de integral definida propuesto por Stieltjes, en 1894, basado en el concepto matemático de *distribución de masa positiva;* Riez, en 1909, solucionó el problema de la representación de los funcionales lineales continuos por medio de la integral de Stieltjes; Radon (1913) proporcionó una definición de integral (que incluía las definiciones de Lebesgue y de Stieltjes) apoyada en una función completamente aditiva de conjuntos; Fréchet (1915) señaló en el sentido de la extensión del resultado de Radon para las funciones completamente aditivas definidas en ciertas partes de un conjunto *E* abstracto, iniciando así, la trayectoria hacia la generalización del análisis abstracto; y, Nikodym que resolvió el problema de la falta de representación de funciones de conjunto mediante integral, demostrando que "si F(E) es una función completamente aditiva definida en una clase T de conjuntos, en la que está definida la medida μ, entonces $F(E)=\int_E f d\mu$ donde f es una cierta función medible con respecto a μ" (Sánchez y Valdés, 2004, pp. 191-195).

Concluiremos este apartado resaltando que, en nuestra opinión, los *sistemas de prácticas*, en cada momento histórico, caracterizaron la génesis y evolución del concepto de la integral definida. En el apartado siguiente, trataremos de analizar, brevemente, las implicaciones de la evolución del concepto de la integral definida en su proceso de enseñanza y el aprendizaje.

4.5. LA EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL Y SUS IMPLICACIONES EN LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CÁLCULO

Los *significados parciales* de integral surgidos fueron muy potentes (considerando las características relativas a la génesis de cada uno y su momento de desarrollo histórico), y su evolución motivada por una constante búsqueda de fundamentación y generalización del concepto de integral, particularmente de la integral definida. Sin embargo, podemos constatar que la existencia de algunas limitaciones de cada *significado parcial* se convirtió en las situaciones motivadoras de otros "significados" más consistentes. Estos no se restringían a la solución de los problemas que se generaban y se quedaban sin respuestas (por las limitaciones propias de cada modelo), sino con la fundamentación de una teoría capaz de dar respuestas a una clase cada vez más amplia de situaciones.

Esta idea, fundamental en el proceso de evolución de la integral definida, nos revela que la construcción de una teoría (o de un concepto específico) puede perfectamente ser desarrollada a través de un proceso continuo, que parte de la práctica para la construcción (o reconstrucción) de una teoría y que vuelve de dicha teoría para la práctica, no solamente dando respuestas a los problemas existentes, sino generando e incorporando nuevos problemas, que a su vez demandan una nueva construcción (o reconstrucción) de una teoría más amplia. Todo esto se debe concretar por medio de la investigación. Consideramos que ésta es la forma más apropiada y eficaz para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo cuando lo que se pretende no es centrar el foco en los algoritmos y técnicas, sino en el significado y comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo, que posibilite a los estudiantes establecer distintas relaciones entre estos conceptos, aplicarlos e incluso extrapolarlos a otras situaciones que requieren la solución de "nuevos" problemas.

Una considerable complejidad se puede notar también en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo y, particularmente de la integral definida. Por eso, pretendemos en este epígrafe, discutir sucintamente esta problemática, resaltando algunas de las implicaciones, conflictos y obstáculos que pueden generarse en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

Turégano (1998) afirma, de acuerdo con Filloy (1981), que

> La finalidad ha sido precisar su desarrollo histórico en cuanto a creación y transmisión del conocimiento se refiere para extraer de ahí pistas de reconstrucción del saber como objeto de comunicación en los procesos educativos actuales (p. 235).

Así, Turégano identificó tres concepciones distintas para el concepto de integral definida, a saber:

- el primer concepto de integral definida (cuadratura con independencia de tangentes): en el período que precedió el siglo XVIII se puede apreciar una gran cantidad de ejemplos relativos al cálculo de áreas bajo curvas realizados independientemente del trazado de las tangentes;
- el Cálculo integral como inverso del Cálculo diferencial (siglo XVIII y parte del XIX): con la introducción del concepto de función (Euler) en lugar de las curvas fue gradual el proceso de aritmetización del análisis, y el interés de la integración consistía en hallar la primitiva de una función conociendo su derivada;
- la integral como límite de una suma (siglo XIX): el cambio conceptual de función de una variable real, que pasa a ser definida como correspondencia arbitraria entre números reales conlleva a la necesidad de una nueva definición para la integral como límite de una suma, así como a una formulación rigurosa del teorema fundamental del Cálculo (Cauchy). Hemos de resaltar que esta nueva definición de la integral se ha mantenido solamente en el campo de los fundamentos teóricos, pues una vez que se

encuentra definida se “prescinde de ella para abordar las aplicaciones” (Turégano, 1998, p. 235).

Las tres referidas concepciones todavía se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida. Sin embargo, iniciaremos nuestra discusión relativa a las implicaciones de la evolución del concepto de la integral, conforme abordamos en el epígrafe anterior, con la alerta realizada por Boyer (1992), al considerar que:

> La historia de la matemática parece mostrar aquí, así como anteriormente, que una insistencia prematura en la precisión lógica, a costa del razonamiento imaginativo y plausible, puede ser contraproducente para el desarrollo de la asignatura (p. 23).

Consideramos que uno de los problemas centrales en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo y, particularmente de la integral definida, fue el exceso de rigor con que generalmente se suele presentar dicho contenido a los estudiantes[3].

Corroborando esta idea, Barufi (2002) critica la tendencia de presentar una estructura sistematizada de una teoría lógico – formal deductiva en el primer curso de Cálculo relegando así sus conceptos básicos y significados. Reflexiones en ese sentido fueron foco de distintos estudios (Turégano, 1994; Baldino, 1995; Reis, 2001; etc.) que buscan identificar los principales obstáculos que se presentan en el proceso de enseñanza de algunos de los objetos del Cálculo y, en algunos de los casos, proponen alternativas didáctica o apuntan elementos que hay que tener en cuenta en la planificación y estructuración de dichos procesos, en los cuales hay un nítido predominio del considerado “*aprendizaje*” de las técnicas (a través de los algoritmos) en detrimento de la formación de los conceptos.

Por lo tanto, nos parece que la concepción de la mayoría de los profesores de Cálculo está centrada en el adiestramiento de los estudiantes a través de la memorización de las técnicas. Los significados de los conceptos y sus aplicaciones, así como de dichas técnicas serían desarrollados por sí mismos,

---

[3] Nos referiremos específicamente a los estudiantes de un primer curso de cálculo, principalmente en Brasil, por constituir nuestro contexto de actuación docente.

en la medida que los estudiantes los necesiten en la solución de los problemas prácticos en general.

En esta misma dirección, Barufi (2002) afirma, en palabras de Brousseau (1994), que:

> Para el profesor es grande la tentación de presentar el conocimiento establecido y estructurado,..., siendo que al alumno le cabe la responsabilidad de apropiarse del conocimiento como pueda. En ese sentido, un abordaje revelador del Cálculo sin construcción de significado es suficiente (p. 71).

Las consecuencias de lo anteriormente expuesto se reflejan, continuamente, a través del ciclo en que los formadores de docentes de matemáticas obtuvieron una formación (inicial y postgraduada) puramente matemática. El hecho de que muchos de ellos no poseen una adecuada preparación en educación matemática, área de conocimiento que consideramos indispensable en la formación del profesor de matemáticas, dificultó la aceptación institucional de la necesidad de realizar los cambios necesarios para potenciar la calidad de la enseñanza universitaria y, particularmente de la Licenciatura en Matemáticas.

Para esto, es imprescindible que los formadores sean conscientes de los problemas que se presentan en la Licenciatura en Matemáticas y, a partir de estos, actúen de manera activa e innovadora para transformar la realidad predominante en el seno de las universidades.

Particularmente en lo que se refiere a la enseñanza del Cálculo y, por supuesto, de la integral definida, lo anteriormente expuesto comprometió el aprendizaje eficaz de los estudiantes, pues afecta directamente la esfera afectiva-motivacional, lo que se manifiesta por la desilusión de los estudiantes que no tienen sus expectativas alcanzadas, es decir, no perciben las relaciones con los contenidos matemáticos ya estudiados y, tampoco comprenden su importancia y conexión con la resolución de distintos problemas internos y externos a las matemáticas.

Para que se pueda comprender y aplicar determinados conceptos matemáticos (como es el caso de la integral definida) en la resolución de problemas de distinta naturaleza, los estudiantes necesitan, como punto de partida, ser conscientes de las herramientas que disponen para identificar y elegir las más adecuadas para cada caso, es decir, han de evaluar (de manera crítica, creativa y comprensiva) el problema a ser resuelto.

La importancia del proceso de enseñanza del Cálculo fue resaltada por Bressoud (1991), al considerar que: el Cálculo es usado en distintos contextos y disciplinas, la existencia de vastos recursos materiales y de aplicaciones reales y, principalmente, se inserta en una visión de los fundamentos del mundo científico moderno y muy significativamente en la propia concepción de las matemáticas en cuanto ciencia.

La búsqueda de nuevas directrices y enfoques didácticos, capaces de potenciar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida, debe ser un reto a ser logrado tanto por proyectos institucionales que se desarrollen en el seno de las universidades como por docentes e investigadores, cuyo interés se centre en dicho proceso.

Baldino y Cabral (1997), consideran prácticamente directa la relación entre las dificultades para enseñar y la construcción de estrategias didáctica:

> Las estrategias formuladas en la literatura reposan en ideas de aprendizaje activo y aprendizaje significativo y, para lograrlas, hay que actuar en el sentido de reforzar el uso de inducciones y metáforas, construir nuevos softwares, trabajar con manipulaciones simbólicas, elaborar ingeniería didáctica, usar mapas cognitivos, resolución de problemas, modelación, entre otros (p. 2).

Este hecho puede estar directamente relacionado con la paradoja que se produjo entre la búsqueda de mejorar la calidad de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo (preparación del formador, tiempo destinado al curso, producción de materiales didácticos y demás medios de enseñanza, etc.) que se hace, principalmente en el primer curso de las carreras universitarias, y el elevado fracaso y reprobación de los estudiantes tras pasar dichos cursos.

Creemos, por tanto, que todo esto debe ser tenido en cuenta en la organización del proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida en las distintas carreras universitarias y, particularmente en la Licenciatura en Matemáticas, contexto específico donde pretendemos llevar a cabo nuestra investigación futura para la realización de la tesis doctoral (solamente iniciada en este estudio).

4.6. SIGNIFICADO DE REFERENCIA DE LA INTEGRAL

La noción de "sistema de prácticas" es útil para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguaje. Un análisis más fino de la actividad matemática ha llevado a introducir en diversos trabajos los “elementos del significado”, concretados en un conjunto de objetos clasificados según los seis tipos de entidades primarias: situaciones, procedimientos, lenguajes, conceptos, propiedades y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando “configuraciones epistémicas” (asociadas a los significados institucionales) o “configuraciones cognitivas” (asociadas a los significados personales), definidas como las redes de objetos emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos (Godino, Contreras y Font, 2006).

Los sistemas de prácticas, y en consecuencia las configuraciones de objetos emergentes, se pueden estructurar en subsistemas (y subconfiguraciones) cada uno de los cuales constituyen significados parciales del objeto en cuestión.

Estos significados parciales se van generando progresivamente a medida que se amplían los tipos de problemas abordados, su posible reformulación, desarrollándose nuevas prácticas operativas y discursivas. En la reconstrucción del significado global del objeto interesa, por tanto, identificar los cambios que se van añadiendo en cada categoría de objetos emergentes y que permitirán caracterizar los obstáculos, rupturas y progresos en la evolución de las configuraciones epistémicas.

Los cambios se caracterizan por la solución que se presenta para la problemática existente en una configuración epistémica en un determinado momento. Pueden implicar tanto la ruptura de la estructura de la configuración, como su evolución para otra configuración epistémica inclusiva y (o) complementaria. La inclusiva contiene la configuración anterior y se genera para dar respuestas (por lo menos parciales) a las situaciones preexistentes, aunque se puedan producir (en muchos casos) también en sus ideas fundamentales. La complementariedad está asociada al incremento epistémico que se produce en la transición entre las distintas configuraciones y generalmente es motivada por la necesidad de ampliación teórica de una noción matemática.

Sin embargo, aunque se produzca dicha transición y, consecuentemente, un nuevo significado parcial es generado para una determinada noción matemática, las distintas configuraciones epistémicas suelen coexistir en la actualidad con diversas adaptaciones, manifestándose no solamente en las significados personales de algunos estudiantes y profesores, sino también en los libros de texto y reflejarse en los currículos de Cálculo. Esta idea es corroborada en distintas investigaciones asociadas a la integral definida (desarrolladas con enfoques cognitivos, epistemológicos e instruccionales) que han sido revisadas y sintetizadas en los trabajos de Crisóstomo (2004) y Ordóñez y Contreras (2003), entre otros.

A través del estudio histórico-epistemológico-didáctico de la integral que hemos realizado, y teniendo en cuenta las aportaciones de Ordóñez y Contreras, (2003), Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2006); Ordóñez (2011), hemos elaborado la tabla 4.6.1 en la que sintetizamos las características de las configuraciones epistémicas de la integral que vamos a utilizar como significado de referencia en nuestra investigación. Hemos considerado útil distinguir ocho tipos diferentes de configuraciones que designamos con los nombres: configuración epistémica intuitiva, primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada, extramatemática, acumulada y tecnológica, las cuales serán sistematizadas a continuación.

El estudio histórico-epistemológico-didáctico de la integral nos ha permitido comprender y sistematizar los distintos significados atribuidos a la noción matemática de integral. Esta sistematización se concreta teniéndose en cuenta la evolución histórica de dicha noción y sus conexiones con los estudios desarrollados en la Didáctica del Cálculo, particularmente en la didáctica de la integral. En este sentido, resaltamos el estudio desarrollado por Ordoñez (2011) relacionado con los significados de la integral definida en el contexto del bachillerato en España. En dicho contexto, ha sido sistematizado el significado de referencia de la integral definida a partir de las seis configuraciones epistémicas: geométrica, de resultado de un proceso de cambio, inversa de la derivada, aproximada al límite, generalizada y algebraica.

Aunque sean similares en algunos aspectos el referido estudio con este que estamos desarrollando, también hay discrepancias justificadas por el cambio del contexto. En nuestro caso, nos interesamos por sistematizar el significado de referencia de la integral, teniendo en cuenta el contexto específico y el uso que se hace de la integral en la actualidad en dicho contexto, que consiste en el curso introductorio de Cálculo para los estudiantes del primer año de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. Para ello, hemos profundizado y reinterpretado un estudio previo que realizamos (Crisostomo, Ordóñez, Contreras y Godino, 2006), sistematizando el significado de referencia de la integral, en el referido contexto, a partir de ocho configuraciones epistémicas que describimos a continuación.

4.6.1. Configuración Epistémica Intuitiva (CEI)

A partir del estudio histórico-epistemológico-didáctico de la integral, encontramos que mientras desarrollaban la geometría, los griegos pusieron de manifiesto su gran intuición respeto a las nociones del continuo, del infinito matemático y del límite. Sin embargo, dichas nociones se quedaron solamente en un plano implícito y el énfasis se centró en la búsqueda de alternativas que tornaran "innecesarios" los procesos infinitos (que se remontan al período del descubrimiento de los inconmensurables) en la matemática. Como consecuencia se separó definitivamente la Geometría de la Aritmética y se acentuó el "horror al infinito", una característica de la Matemática de aquella época.

Una aportación de los griegos muy significativa para la invención del Cálculo Integral consiste en el "método" utilizado por Arquímedes para calcular algunas áreas y volúmenes. Esto nos permite considerar que la génesis de la integral se remonta al período de desarrollo y aplicación de dicho método a la solución de problemas. Las ideas vinculadas al referido método se asemejan a las del Cálculo del siglo XVII, relacionadas con una visión atomística del Cálculo.

Según Boyer (1992), el trabajo que Arquímedes había enviado a Eratóstenes (tratado redescubierto en 1906), no solamente explicitaba cómo llegó a algunos de los resultados, sino que buscaba las respectivas pruebas, "*casi efectuando la integración en muchos casos importantes*" (p. 29).

Algunas de las ideas intuitivas todavía están presentes tanto en la literatura específica cuanto en los libros de Cálculo y aún son utilizadas por los estudiantes de Cálculo en la enseñanza universitaria. En la revisión bibliográfica que realizamos, encontramos investigaciones (Prabhu y Czarnocha, 2000; Czarnocha, Dubinsky, Loch, Prabhu y Vidakovic, 2001; Wenzelburger, 1993) cuyos resultados han constatado la utilización de la intuición en la realización de las actividades por los estudiantes. La ruptura en la visión dicotómica entre rigor e intuición ha sido resaltada en las conclusiones de la investigación de Reis (2000). El autor considera importante que las dos coexistan armónicamente en la enseñanza universitaria tanto de Cálculo como de Análisis Matemático en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil.

En esta dirección, en libros de Cálculo utilizados actualmente en la Licenciatura en Matemáticas encontramos situaciones-problema relacionadas con: determinar el área de un segmento parabólico, hallar el área de un círculo por medio de las sucesivas aproximaciones de polígonos regulares (de *n* lados inscritos en dicho círculo) cuya cantidad de lados aumenta infinitamente. Además, hay otros problemas relacionados con procedimientos basados en la utilización implícita de las ideas intuitivas de la integral o situaciones-problema similares a las resueltas por Arquímedes.

A continuación, describiremos la *configuración epistémica intuitiva* de la integral.

4.6.1.1. Elementos de significado del EOS

Situaciones-problema

La problemática que se presenta en la CEI consiste, principalmente, en hallar el área de regiones planas a través de procedimientos que requieren la utilización implícita de la idea de integral. También pueden ser abordadas situaciones-problema relacionadas con el cálculo de volúmenes sin utilizar explícitamente la integral.

Procedimientos

El principal procedimiento consiste en la utilización de métodos intuitivos para la resolución de problemas que contemplan el concepto de integral.

Lenguaje

En esta configuración se utiliza con más frecuencia el lenguaje geométrico, algebraico y aritmético.

Conceptos

Entre los conceptos contemplados, resaltamos principalmente el concepto de área de figuras planas comprendidas entre curvas. Son utilizados además los conceptos previos de áreas de polígonos, partición, límite, sumas de cuadrados y de cubos, sumas inferiores y sumas superiores.

Aunque en esta configuración el concepto de integral no ha sido formalizado (o aún no ha sido estudiado), implícitamente se maneja las nociones del infinito y del límite en la resolución de los problemas planteados.

Proposiciones

Entre las propiedades presentes en esta configuración, resaltamos las propiedades de límites.

Argumentos

Se puede utilizar argumentos inductivos y deductivos. Los inductivos son útiles para la comprobación de fórmulas como la suma de cuadrados y la suma de cubos, mientras los deductivos sirven para demostrar los resultados de los problemas por medio del cálculo del límite.

4.6.1.2. Síntesis de la configuración epistémica intuitiva de la integral

El estudio histórico-epistemológico-didáctico del Cálculo ha puesto de manifiesto que aunque la solución presentada por Eudoxio para la crisis de los inconmensurables haya sido genial para su época, ésta contribuyó al retraso del desarrollo de la aritmética y del álgebra por más de un milenio, pues subordinaba estas disciplinas al estudio de la geometría. La “matemática numérica” llegó a Europa solamente en el siglo XIII con los árabes y el desarrollo del álgebra ocurrió tres siglos después, preparando así las bases para el desarrollo de la Geometría Analítica y del Cálculo en el siglo XVII.

Además, desde el punto de vista histórico, los conceptos del Cálculo fueran desarrollados en el sentido contrario de las secuencias estructuradas en los libros, es decir, primero surgieron los problemas relacionados con la integral, posteriormente aquellos que demandaban el concepto de la derivada. Finalmente, en la fundamentación del Cálculo fueron desarrollados los conceptos de límite y de número real.

4.6.2. Configuración Epistémica Primitiva (CEP)

La universalización del Cálculo tuvo como punto de partida los trabajos independientes de Newton y de Leibniz, que no solamente generalizaron la aplicación de los algoritmos a las funciones (racionales, irracionales, algebraicas y transcendentes) y vislumbraron la integración y la diferenciación como procesos inversos, sino porque tomaron conciencia de que sus descubrimientos constituían una nueva y universal rama de las matemáticas.

El cambio de los conceptos y lenguaje estáticos de los matemáticos griegos para un análisis de la variabilidad, y la constante búsqueda de la generalización y universalización de las aplicaciones del Cálculo proporcionó su *surgimiento*, independientemente, a través de las obras de Newton y de Leibniz. Esta configuración se caracteriza por la *relación inversa entre la integración y la diferenciación* que se estableció claramente desde el siglo XVII, a través del Teorema Fundamental del Cálculo, y está contemplada tanto en las investigaciones específicas (Artigue, 1991; Cordero, 2005) cuanto en los libros Cálculo que se usan actualmente en las clases de Cálculo I en la Licenciatura de Matemáticas en Brasil.

4.6.2.1. Elementos de significado del EOS

Situaciones-problema

La principal problemática que se presenta en la CEP se refiere a hallar la primitiva de una función cuando se conoce la primitiva o se puede calcular a partir de las técnicas de integración. Se trata, por lo tanto, de establecer la relación inversa entre la integración y la diferenciación.

Procedimientos

Entre los principales procedimientos de la CEP, destacamos: el cálculo de las integrales como operación inversa de las derivadas (primitivas inmediatas); uso de las técnicas de integración (integración por partes, integración por sustitución o cambio de variables, integración de funciones racionales e integración por racionalización).

Lenguaje

En la CEP se utiliza principalmente un lenguaje algebraico y simbólico para calcular las primitivas de las funciones cuando éstas existen o pueden ser calculadas a partir de las técnicas de primitivación.

Conceptos

Entre los conceptos utilizados en la CEP resaltamos: primitiva, derivada, función. Sin embargo, son utilizados conceptos previos relacionados con polinomios, operaciones con expresiones algebraicas, trigonometría, etc.

Proposiciones

El Teorema Fundamental del Cálculo es lo más importante en esta configuración. Las propiedades de la integral indefinida constituyen las demás proposiciones de la CEP.

Argumentos

Consiste en la utilización del proceso deductivo. En el contexto de la formación de profesores de matemáticas estudiado, se suele demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo y las propiedades de la integral indefinida y utilizar estos resultados para justificar las cuestiones resueltas.

4.6.2.2. Síntesis de la configuración epistémica primitiva de la integral

En la configuración epistémica primitiva se establece concretamente la relación inversa entre derivadas e integrales indefinidas a partir del Teorema Fundamental del Cálculo. El estudio histórico-epistemológico-didáctico de la integral ha revelado que inicialmente Newton trataba sistemáticamente todos los problemas referentes a las propiedades de las líneas curvas. Sin embargo, tras el reconocimiento de la naturaleza inversa entre la diferenciación y la integración, y que el proceso de diferenciación era el más sencillo de los dos, elaboró tablas que le posibilitara los resultados directos de dichos procesos, con la finalidad de minimizar los esfuerzos en la búsqueda de identificar las propiedades de las curvas conocidas en su tiempo.

Es indiscutible la importancia de Newton en el desarrollo del Cálculo a partir del siglo XVII. Los procesos de integración, inicialmente motivados por la búsqueda de solución a los problemas prácticos, evolucionarían hacia su fundamentación rigurosa. La búsqueda del rigor también ya podía ser notada en la obra de Newton, aunque la simbología que él utilizaba y su propio lenguaje consistían en elementos que dificultaron la comprensión de sus ideas por parte de sus seguidores.

En esta perspectiva, consideramos que es fundamentalmente importante tener en cuenta el papel que deben jugar la simbología y el lenguaje en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo y, concretamente, de la integral. Este ha sido uno de los méritos de Leibniz. Se le atribuye la creación de una auténtica álgebra de los infinitamente pequeños al obtener reglas de Cálculo. Todo ello le permitió trabajar con dichos conceptos y utilizarlos en múltiples problemas. El Cálculo desarrollado por Leibniz adquiere un gran auge debido a su simplicidad, su notación elegante y su formalismo. . En este sentido, corroboramos con la afirmación de Baron (1985) de que los conceptos y el lenguaje (destacándose la simbología) utilizados por Leibniz constituirían aspectos de los más relevantes en el desarrollo posterior del Cálculo, aunque eran insatisfactorios en los aspectos que se refieren al “rigor” matemático.

4.6.3. Configuración Epistémica Geométrica (CEG)

Las situaciones-problema relacionadas con la Geometría están presentes desde la génesis del Cálculo. Los griegos desarrollaban cálculos de áreas y volúmenes desde la época de Archimedes. A lo largo de la historia de la Matemática, los problemas geométricos asumirán mayor grado de complejidad, lo que requería métodos más precisos para resolverlos. Entre los conceptos de la integral declarados por Artigue (1991) se encuentra el proceso para hallar longitud, área y volumen. Estos conceptos geométricos están contemplados tanto en los libros de Cálculo como en los currículos del Cálculo I propuestos para la Licenciatura en Matemáticas. En este sentido hemos considerado a la configuración epistémica geométrica de la integral.

4.6.3.1. Elementos de significado del EOS

Situaciones-problema

Las situaciones-problema que se presenta en la CEG son de naturaleza geométrica que se resuelve por medio de la integración, tales como: hallar el área de regiones planas; hallar el volumen de sólidos (con énfasis en los sólidos de revolución); calcular la longitud de un arco de curva; calcular el área de una superficie de revolución.

Procedimientos

El procedimiento general que suele ser utilizado es esta configuración consiste en analizar los datos del problema interpretándole como una suma de Riemann, luego se deduce la integral definida cuya solución aportará el valor numérico de la magnitud que se desea medir. Sin embargo, dicha integral se calcula por medio de la primitiva y de la utilización de la Regla de Barrow. De manera particular se utiliza el cálculo de primitivas inmediatas y las técnicas de integración para hallar las primitivas; la Regla de Barrow para encontrar el valor numérico de la integral definida correspondiente a la magnitud que se desea medir; las coordenadas polares para calcular el área encerrada por una curva; los métodos de las secciones planas, de los discos y de las láminas para calcular los volúmenes de los sólidos.

Lenguaje

En esta configuración se utiliza predominantemente el lenguaje geométrico, algebraico y simbólico.

Conceptos

Los conceptos contemplados son: áreas de regiones planas; volumen de sólidos; longitud de un arco de curva y áreas de superficies de revolución. Son utilizados además los conceptos previos de áreas de rectángulo, volumen del cilindro, teorema de Pitágoras, límite, suma de Riemann, derivada y primitiva.

Proposiciones

Entre las propiedades presentes en esta configuración, resaltamos el Teorema Fundamental del Cálculo, la Regla de Barrow y el Principio de Cavalieri.

Argumentos

Se utilizan argumentos deductivos para justificar los resultados de los problemas de naturaleza geométrica.

4.6.3.2. Síntesis de la configuración epistémica geométrica de la integral

Aunque se utiliza la idea del límite – de las sumas de las áreas de los infinitos rectángulos, en un intervalo cerrado, para hallar el área de una región plana o el límite de las sumas de los volúmenes de los infinitos cilindros, en un intervalo cerrado, para calcular el volumen de un sólido de revolución, etc. –, en la práctica se abandona el concepto de límite, utilizándose la primitiva y la Regla de Barrow para encontrar los valores de las magnitudes que se pretende medir. En este sentido, las dificultades de los estudiantes suelen situarse más en las manipulaciones algebraicas en detrimento de los conceptos geométricos involucrados.

4.6.4. Configuración Epistémica Sumatoria (CES)

A partir del siglo XVIII, los conceptos de integral indefinida y de integral definida pasaron por un amplio proceso de fundamentación teórica, como sucedió en el Cálculo de manera general. Esto implicó su distanciamiento de los factores que motivaron su génesis (ligados a sus aplicaciones a través de procesos más intuitivos y primitivos). En este sentido, la integración como suma de elementos infinitesimales desarrollada a partir de la obra de Leibniz, evolucionó hacía su fundamentación teórica, basado en el rigor, precisión de los conceptos y en la constante búsqueda de su generalización a una clase cada vez más amplia de funciones.

En esta dirección, Cauchy, retomando el significado de Leibniz sobre la integral definida, el cual tomó las áreas y los volúmenes como suma de rectángulos y cilindros, dio una definición precisa de integral definida, centrándose en sus condiciones de existencia antes de definir las propiedades de la misma. A continuación describiremos los aspectos que consideramos más relevante en el estudio de la integral, particularmente de la integral definida, en dicho período. Esto será concretado a través de la *configuración epistémica sumatoria*, cuyas ideas y características principales se encuentran en las obras de Cauchy y Riemann. Siguiendo la tradición "euleriana", Cauchy no presentaba gráficos, ni motivaciones y relegaba a un segundo plano las aplicaciones geométrica del Cálculo.

4.6.4.1. Elementos de significado del EOS

Situaciones-problema

La principal problemática surgida en esta configuración puede ser expresada por la necesidad de formalización y generalización de la integral a una clase más amplia de problemas y la búsqueda del perfeccionamiento del lenguaje y simbología del Cálculo.

Procedimientos

En esta configuración se destaca la formalización del concepto de integral a partir de la noción de límite, el cálculo de la integral se realiza como el límite de las sumas de Riemann o utilizándose la idea de las sumas de Riemann para deducir la integral definida que se pretende calcular a partir de cada situación-problema.

Lenguaje

En la CES se aplicaba fundamentalmente un lenguaje analítico, algebraico y simbólico para solucionar a una gran variedad de problemas.

Conceptos

Además del concepto de integral definida que emerge en esta configuración y es fundamental en el estudio del Cálculo, también pueden ser contemplados los siguientes conceptos: función, límite, infinitesimal, continuidad, funciones discontinuas, convergencia de series, diferencial y derivada.

Proposiciones

Las principales proposiciones presentes en esta configuración se relacionan con: el Teorema Fundamental del Cálculo, el Teorema del Valor Medio, la continuidad de una función, las propiedades de la integral y la Regla de Barrow.

Argumentos

Los argumentos utilizados son predominantemente deductivos, basados en el rigor matemático.

4.6.4.2. Síntesis de la configuración epistémica sumatoria de la integral

El problema de la fundamentación del Cálculo todavía se quedaba sin solución hasta el siglo XVIII. Con las críticas de Berkeley, en 1734, se inició un largo debate y una nueva etapa en la búsqueda de sus fundamentos, lo que se concretó a partir del siglo XIX.

Como se señala en Dahan-Dalmedico y Peiffer (1986), fue Cauchy el principal artífice de la introducción del rigor en el Cálculo infinitesimal, al lograr superar y eludir los aspectos de tipo metafísico. En todo este proceso, el concepto de límite aparece como fundamental para la construcción de los conceptos del análisis matemático. La definición que ha dado de este concepto rompió definitivamente con el significado geométrico que subyacía en el mismo e hizo del límite una noción aritmética. Valiéndose de este concepto y de la variabilidad de la función, clarificó la noción de infinitésimo (que no es más que una sucesión convergente que tiene por límite cero) y también la de derivada de una función continua (al definirla en términos de los límites), aunque las relaciones entre ambas nociones no se tornaron explícitas hasta el trabajo de Dirichlet con el desarrollo de las funciones en series trigonométricas.

Cabe resaltar además que a Weierstrass se le atribuye la responsabilidad por la "aritmetización" del análisis. A través de una construcción precisa del número real y de una definición estática del concepto de límite, él depuró la definición de Cauchy eliminando la subjetividad del término "se acerca" que sugiere una idea de movimiento y de tiempo. Sin embargo, Riemann ha desarrollado una teoría de la integral más general que la de Cauchy, a través de la cual se expande la aplicación de la integral a una clase más amplia de funciones.

La noción de integral actualmente desarrollada en la enseñanza universitaria, específicamente en el contexto de la formación de profesores de matemáticas en Brasil está basada en la integral de Cauchy-Riemann. Como es la primera vez que se imparte la enseñanza de la integral para dichos estudiantes, se considera importante adaptar tanto el contenido como la metodología utilizada en las clases a las necesidades de los estudiantes, teniendo en cuenta su posterior actuación profesional (profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria). En este sentido, hay una discusión acerca del nivel de rigor matemático que debe estar presente en las clases de Cálculo I (en el primer año de la universidad) y lo que debe quedarse a cargo de la disciplina "Análisis Matemático", generalmente desarrollada en el último año de la Licenciatura en Matemáticas.

4.6.5. Configuración Epistémica Aproximada (CEAp)

Siempre y cuando nos encontramos con la dificultad (o incluso con la imposibilidad) de representar de manera algebraica una función y nos interesa resolver una situación-problema que requiere la utilización de una integral definida, es necesario recurrir al cálculo aproximado de dicha integral. Esto requiere el uso de reglas específicas que pueden producir aproximaciones para la integral definida que se desea calcular. En este contexto contemplamos la *configuración epistémica aproximada* de la integral.

4.6.5.1. Elementos de significado del EOS

Situaciones-problema

La problemática en la CEAp de la integral se refiere básicamente a dos situaciones. La primera consiste en cómo encontrar el valor exacto de la integral definida para determinados problemas cuando no se puede determinar la primitiva (o ésta es difícil de calcular). La segunda situación está relacionada con el cálculo de la integral definida cuando no hay una fórmula para la función específica, una vez que los dados pueden haber sido recogidos a través de un experimento científico o por medio de la lectura de instrumentos.

Procedimientos

El procedimiento de referencia se relaciona con la idea de integración numérica, concretándose a través de los métodos aproximados para calcular la integral definida, tales como la Regla del punto medio, la Regla de Simpson y la Regla del Trapecio.

Lenguaje

En la CEA se utiliza principalmente el lenguaje aritmético, tabular y gráfico para solucionar los problemas.

Conceptos

Entre los conceptos utilizados en la CEAp, resaltamos: integral definida, aproximaciones (por la extremidad izquierda y por la extremidad derecha) y error. Otros conceptos contemplados en dicha configuración se relacionan con las áreas de Geometría, Física, Computación, etc.

Proposiciones

Las principales proposiciones presentes en esta configuración consisten en Regla del punto medio, la Regla de Simpson y la Regla del Trapecio.

Argumentos

Consiste en la utilización del proceso deductivo y en el análisis de los resultados obtenidos para justificar las cuestiones resueltas.

4.6.5.2. Síntesis de la configuración epistémica aproximada de la integral

En esta configuración son contemplados los mismos conceptos relacionados con las aplicaciones matemáticas y extramatemáticas de la integral definida. Las situaciones-problema asumen otra estructura una vez que no es posible identificar una función específica para cada caso o no se puede calcular la primitiva. Dichas situaciones ocurren con frecuencia en problemas prácticos relacionados con conceptos geométricos o con datos obtenidos a través de experimentos científicos. Además, estas situaciones son contempladas en algunos de los libros de Cálculo actualmente utilizados en la Licenciatura en Matemáticas y se conectan con el Cálculo Numérico estudiado en los años de final de la carrera.

4.6.6. Configuración Epistémica Extramatemática (CEE)

Además de las situaciones-problema relacionadas con la Geometría, encontramos en los libros de Cálculo que se utilizan en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil gran cuantidad de situaciones-problema relativa a otras áreas del conocimiento, como Física, ingeniería, Biología, Economía, etc. Situaciones-problema extramatemáticas se abordaron desde antes de la "creación" del Cálculo, especialmente en el área de la Física, las cuales han existido durante toda la evolución histórica de la noción de integral. Sin embargo, el reconocimiento de estas situaciones como una integral definida no ocurre de manera sencilla por parte de los estudiantes de Cálculo del primer año de la enseñanza universitaria. Como la noción de integral definida está principalmente asociada a la resolución de problemas de la práctica, por la especificidad de dichos problemas en el ámbito del Cálculo I, en nuestra investigación consideramos la configuración epistémica extramatemática de la integral, sistematizada a continuación.

4.6.6.1. Elementos de significado del EOS

Situaciones-problema

Las situaciones-problema que se presenta en la CEE se refieren a cómo aplicar la integral en la resolución de problemas extramatemáticos que se resuelven por medio de la integración. En la *configuración epistémica extramatemática* de la integral contemplamos una gama de conceptos relacionados con áreas del conocimiento distintas de las Matemáticas, tales como: Física, Biología, Química, Economía, Ingeniería, Estadística y Probabilidad, etc.

Procedimientos

El procedimiento general que suele ser utilizado en esta configuración consiste en analizar los datos del problema, identificar las fórmulas relacionadas con los conceptos abordados en cada problema e interpretarlos como el límite de las Sumas de Riemann. Luego se deduce la integral definida cuya solución aportará el valor numérico del concepto involucrado en el problema. El cálculo de la integral definida suele desarrollarse por medio de la primitiva (siempre y cuando sea posible) y de la utilización de la Regla de Barrow. La noción de Sumas de Riemann suele ser utilizada para deducir la integral definida que se desea calcular.

Lenguaje

En esta configuración se utiliza predominantemente el lenguaje algebraico, simbólico y gráfico.

Conceptos

En el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil, entre los conceptos extramatemáticos más utilizados en la CEE, resaltamos: presión, fuerza hidrostática, momento, centro de masa, excedente del consumidor, función densidad de probabilidad, distribución normal, etc.

Proposiciones

Entre las propiedades presentes en esta configuración, resaltamos el Teorema Fundamental del Cálculo, las Sumas de Riemann y la Regla de Barrow.

Argumentos

Se utilizan argumentos heurísticos y deductivos para justificar los resultados de los problemas.

4.6.6.1. Síntesis de la configuración epistémica extramatemática de la integral

En el contexto de un curso introductorio de Cálculo, constatamos que uno de los aspectos fundamentales que ha puesto en relieve el concepto de integral, desde las distintas etapas de su desarrollo histórico, radica en la amplitud de posibilidades de su aplicación a situaciones-problema de distintas áreas del conocimiento (Kouropatov y Dreyfus, 2009). Esto requiere desarrollar conocimientos básicos relativos a cada campo, lo que puede convertirse en un desafío que debe ser enfrentado por los docentes y estudiantes de Cálculo.

4.6.7. Configuración Epistémica Acumulada (CEAc)

Tras un milenio de estancamiento de las ideas del Cálculo, en el período de la Edad Media, han surgido problemas esencialmente del campo del Cálculo a partir del estudio del cambio y del movimiento. Oresme realizó, en el siglo XIV, el mayor progreso teórico de la Edad Media a partir de sus estudios asociadas a fenómenos de movimiento, desarrollados a través de una representación gráfica que le ayuda a explicar la variación y que llama “figura”. Oresme era capaz de realizar la “integración” en los casos de tasa de variación *uniforme* (constante) y *uniformemente disforme* (no constante). Sin embargo, en el desarrollo del Cálculo de Newton, encontramos que él consideró la integral indefinida y calculó las áreas y los volúmenes a partir de su tasa de variación. Esta idea ha perdurado en el estudio de la integral y todavía sigue siendo trabajada en la enseñanza universitaria del Cálculo I. En este sentido entendemos la configuración epistémica acumulada de la integral.

4.6.7.1. Elementos de significado del EOS

Situaciones-problema

La principal problemática presente en esta configuración epistémica está basada en el estudio del cambio y del movimiento, y consiste en calcular el cambio acumulado de una función que representa una tasa de variación en un determinado intervalo de tempo.

Procedimientos

El procedimiento general de la *configuración epistémica acumulada* de la integral puede ser sintetizado como deducir la integral definida relacionada con el problema, interpretándola como un cambio acumulado. A través de este procedimiento, el énfasis no está puesto en la memorización de las “reglas” que relacionan las nociones matemáticas y extramatemáticas que se puede desarrollar por medio de las aplicaciones de la integral, sino en el propio concepto de la integral definida.

Lenguaje

Predominantemente se utiliza en esta configuración el lenguaje gráfico, algebraico y computacional.

Conceptos

En lo que se refiere a los conceptos relacionados con la integral definida en esta configuración epistémica, emerge el concepto de cambio acumulado. Además son contemplados los conceptos de función, partición, tasa de cambio, límite, derivada, área, volumen, trabajo, velocidad, etc.

Propiedades

Las proposiciones consideradas más importantes en la CEAc de la integral se relacionan con las propiedades de la integral y con el Teorema del Valor Medio.

Argumentos

Los argumentos están orientados a justificar las proposiciones utilizadas en el desarrollo de la integración apoyándose en la visualización.

4.6.7.2. Síntesis configuración epistémica acumulada de la integral

Los procesos intuitivos de "integración" producidos en el período medieval (a partir de la reanudación de las obras de los griegos) se caracterizaran por el estudio del cambio y del movimiento. Estas ideas han sido perfeccionadas a lo largo de la evolución histórica del Cálculo, estando presentes también en el período de "creación" del Cálculo en los trabajos desarrollados por Newton, llegando hasta la actualidad. Distintos investigadores han puesto de manifiesto la importancia de desarrollar el proceso de enseñanza de la integral utilizando la noción de acumulación (Tall, 1996; Kouropatov y Dreyfus, 2009), resaltando tres ventajas para su utilización en el proceso de enseñanza de Cálculo: (1) la idea de acumulación establece los conceptos de integral definida e integral indefinida de manera natural y conecta los conceptos de integral y derivada; (2) la idea de acumulación acerca de las aplicaciones de integral; y (3) la idea de acumulación posibilita realizar posteriormente la generalización del concepto de integral de manera más natural (Kouropatov y Dreyfus, 2009, pp. 3-420).

4.6.8. Configuración Epistémica Tecnológica (CET)

El desarrollo y la popularización de las tecnologías han posibilitado un cambio en el rol de profesores y en la producción de recursos didácticos y tecnológicos. Esto se refleja en la manera de introducir y desarrollar el proceso de enseñanza de los contenidos matemáticos, particularmente de la integral. Aunque las situaciones-problema puedan ser relativamente similares, cambian considerablemente los procedimientos utilizados para resolverlas. Las tecnologías se encuentran accesibles para profesores y estudiantes y son contempladas en diversas situaciones-problema propuestas en los libros de

Cálculo. En este sentido, consideramos la configuración epistémica tecnológica de la integral sistematizada a continuación.

4.6.8.1. Elementos de significado del EOS

Situaciones-problema

Las situaciones-problema que se presentan en la CET consisten en la utilización de las tecnologías en la resolución de problemas matemáticos y extramatemáticos a través de la integración. En esta configuración contemplamos una gama de conceptos relacionados con las Matemáticas, Física, Biología, Química, Economía, Ingeniería, Estadística y Probabilidad, etc.

Procedimientos

Consideramos que hay dos procedimientos generales en esta configuración y consisten en la utilización de las tecnologías en la resolución de problemas que requieren la aplicación de la integral. El primero está basado en deducir la integral definida relacionada con la resolución de cada situación-problema y luego utilizar un *software* específico (u otro recurso tecnológico) que posea las herramientas necesarias para resolver la integral. Finalmente se interpreta el resultado obtenido para dar respuesta al problema. El segundo procedimiento consiste en realizar un estudio exploratorio a partir de una situación-problema. En este caso, son realizadas secuencias lógicas de construcciones y de cálculos auxiliares con el objetivo de lograr la comprensión del concepto de integral. De esta manera, se realiza un acercamiento gradual al referido concepto. A partir de la visualización y de las distintas representaciones que pueden ser apreciadas y manejadas simultáneamente en la pantalla se logra resolver el problema propuesto.

Lenguaje

En esta configuración se utiliza predominantemente el lenguaje tecnológico, algebraico, simbólico y gráfico.

Conceptos

En esta configuración pueden ser contemplados distintos conceptos relacionados con la integral definida (o indefinida). Sin embargo, nos parece que el énfasis está puesto en los problemas geométricos (área, volumen, longitud, etc.), aunque pueden ser contemplados otros conceptos matemáticos y extramatemáticos.

Proposiciones

Entre las propiedades presentes en esta configuración, resaltamos el Teorema Fundamental del Cálculo, las Sumas de Riemann y la Regla de Barrow.

Argumentos

Se utilizan predominantemente argumentos basados en la visualización gráfica y de los resultados numéricos obtenidos en las etapas de resolución del problema. También pueden ser contemplados argumentos deductivos, que pueden apoyarse en la visualización de las representaciones en la pantalla.

4.6.8.2. Síntesis de la configuración epistémica tecnológica de la integral

Las manipulaciones algebraicas pierden su importancia una vez que los cálculos generalmente son realizados utilizándose un *software* específico. En este caso, el énfasis se da en la interpretación de los resultados obtenidos con la utilización del *software*, en la visualización gráfica, numérica y algebraica que se puede contemplar simultáneamente en la pantalla y en la habilidad de utilización de las herramientas adecuadas del *software.*

El desarrollo de las tecnologías aunque es muy reciente comparado con la evolución del concepto de integral, viene creciendo rápidamente. Las restricciones para la utilización de *software* en la enseñanza del Cálculo se reducen por la disponibilidad de *softwares* libres (por ejemplo, GeoGebra y Winplot). La potencialidad de los aspectos dinámicos de los *softwares* para el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo en el nivel universitario ha sido resaltada en el estudio de Olímpio Júnior (2006). Por otra parte, Scucuglia (2006) afirmó que la interacción intuitiva de los estudiantes universitarios con las tecnologías favorece la transición hacia las Matemáticas axiomáticas.

En la Tabla 4.6.1, sintetizamos el significado de referencia de la integral en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil.

TECNOLÓGICA	Cómo utilizar las tecnologías en la resolución de problemas matemáticos y extramatemáticos a través de la integración.	Utilización de las tecnologías en la resolución de problemas que requieren la aplicación de la integral.	Tecnológico, algebraico, simbólico y gráfico.	Conceptos geométricos (área, volumen, longitud, etc.) y extramatemáticos.	Teorema Fundamental del Cálculo, las Sumas de Riemann y la Regla de Barrow.	Intuitivo (basados en la visualización gráfica y en los resultados numéricos y algebraicos obtenidos).
ACUMULADA	Basadas en el estudio del cambio y del movimiento, y consiste en calcular el cambio acumulado de una función que representa una tasa de variación en un determinado intervalo de tempo.	Deducir la integral definida relacionada con el problema, interpretándola como un cambio acumulado.	Gráfico, algebraico y computacional.	Cambio acumulado, función, partición, tasa de cambio, límite, derivada, área, volumen, trabajo, velocidad, etc.	Propiedades de integral y con el Teorema del Valor Medio.	Argumentaciones intuitivas basadas en la visualización.
EXTRAMATEMÁTICA	Cómo aplicar la integral en la resolución de problemas extramatemáticos.	Aplicación de la integral en la resolución de problemas de otras áreas del conocimiento distintas de las matemáticas.	Algebraico, simbólico y gráfico.	Conceptos extramatemáticos; Presión, fuerza hidrostática, momento, centro de masa, excedente del consumidor, distribución normal, etc.	Teorema Fundamental del Cálculo, las Sumas de Riemann y la Regla de Barrow.	Intuitivo y deductivo
APROXIMADA	Cómo encontrar el valor exacto de la integral definida para determinados problemas cuando no se puede determinar la primitiva (o ésta es difícil de calcular) y cómo calcular de la integral definida cuando no hay una fórmula para la función específica.	Integración numérica a través de métodos aproximados para calcular la integral definida: Regla del punto medio, la Regla de Simpson y la Regla del Trapecio.	Aritmético, tabular y gráfico.	Integral definida, aproximaciones (por la extremidad izquierda y por la extremidad derecha) y error.	Regla del punto medio, la Regla de Simpson y la Regla del Trapecio.	Deductivo

SUMATORIA	Necesidad de formalización y generalización de la integral a una clase más amplia de problemas y la búsqueda del perfeccionamiento del lenguaje y simbología del Cálculo.	El cálculo de la integral se realiza como el límite de las sumas de Riemann o utilizándose la idea de las sumas de Riemann para deducir la integral definida que se pretende calcular.	Analítico, algebraico y simbólico.	Integral definida, función, límite, infinitesimal, continuidad, funciones discontinuas, convergencia de series, diferencial y derivada.	Teorema Fundamental del Cálculo, el Teorema del Valor Medio, la continuidad de una función, las propiedades de la integral y la Regla de Barrow.	Deductivo
GEOMÉTRICA	Resolución de problemas de naturaleza geométrica: área, volumen, longitud de arco, área de superficie de revolución.	Análisis de los datos del problema interpretándole como una suma de Riemann. Deducción y cálculo de la integral definida.	Geométrico, algebraico y simbólico.	Áreas de regiones planas; volumen de sólidos; longitud de un arco de curva y áreas de superficies de revolución.	Teorema Fundamental del Cálculo, la Regla de Barrow y el Principio de Cavalieri.	Deductivo
PRIMITIVA	Hallar la primitiva de una función cuando se conoce la primitiva o se puede calcularla a partir de las técnicas de integración.	Relación inversa entre integración y derivación.	Algebraico y simbólico.	Primitiva, derivada y función.	Teorema fundamental del Cálculo, propiedades de la integral.	Deductivo
INTUITIVA	Hallar el área de regiones planas utilizando implícitamente la idea de integral. Calcular volúmenes utilizando implícitamente la idea de integral.	Utilización de métodos intuitivos para la resolución de problemas que contemplan el concepto de integral.	Geométrico Ordinario	Áreas, áreas de polígonos, partición, límite, sumas de cuadrados y de cubos, sumas inferiores y sumas superiores.	Propiedades de límites.	Inductivo y deductivo.
	SITUACIONES	PROCEDIMIENTOS	LENGUAJE	CONCEPTOS	PROPOSICIONES	ARGUMENTOS

Figura 4.6.1. Síntesis de las configuraciones epistémicas de la integral.

4.7. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

El estudio histórico-epistemológico-didáctico de la integral ha posibilitado sistematizar las configuraciones epistémicas que conforman el significado de referencia de la integral, en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de Brasil en la actualidad. Dicho significado será utilizado para el análisis y sistematización de los libros de Cálculo I y de las entrevistas realizadas con los profesores-formadores.

Para determinar cada configuración epistémica hemos tomado como punto de partida las situaciones-problema que se pueden resolver en cada caso. Cambiando dichas situaciones-problema, consecuentemente cambiarán los elementos de significados del EOS y, por tanto, el significado parcial contemplado a través de cada configuración. Aunque las situaciones-problema parezcan similares, consideramos que los procedimientos distintos caracterizan la nueva configuración.

Consideramos que la revisión de la literatura especializada y el estudio histórico-epistemológico-didáctico que realizamos sobre el desarrollo del Cálculo y, particularmente de la integral, nos posibilitó caracterizar las configuraciones epistémicas asociadas al significado de referencia de la integral. Además, nos han permitido constatar la complejidad existente en la evolución de la noción de integral y, consecuentemente, reflexionar sobre posibles dificultades que pueden presentarse en su proceso de enseñanza y aprendizaje en un primer curso universitario.

Hemos constatado que, a lo largo de la historia de las matemáticas desde el "Método" de Archimedes hasta la actualidad, la evolución de la noción de integral fue caracterizada por tres períodos bien específicos: el primero se refiere a la "integral" antes de la creación del Cálculo; el segundo contempla la "creación" del Cálculo por Newton y Leibniz y fue caracterizado por la integral como inversa de la derivada; y, en el tercero se produjo la fundamentación teórica de la integral. Aunque en cada período había ideas divergentes y que los problemas se tornaron obsoletos o han sido replanteados para adecuarse al contexto, consideramos relevante las aportaciones de la historia del Cálculo para la sistematización del significado de referencia de la integral en la actualidad.

En este sentido, encontramos que la génesis de la integral está ligada a las aplicaciones intuitivas de esta noción a la resolución de problemas en los cuales se utiliza implícitamente la noción de integral (*configuración epistémica intuitiva)*. Posteriormente, con el establecimiento de la relación inversa entre derivada e integral surgen los problemas relacionados con hallar la función primitiva de una función continua *(configuración epistémica primitiva)*. Las aplicaciones geométricas de la integral surgen desde los tiempos más remotos y se mantienen en la actualidad *(configuración epistémica geométrica)*. En la fundamentación de la integral, ésta es entendida como el límite de las Sumas de Riemann *(configuración epistémica sumatoria)*. Para algunas situaciones en las cuales la función no era conocida se utiliza las aproximaciones para encontrar la integral numérica *(configuración epistémica aproximada)*. Basada en el Cálculo de Newton, la idea de crecimiento acumulado surge en la actualidad como una alternativa didáctica para la enseñanza de la integral *(configuración epistémica acumulada)*. Sin embargo, hay problemas extramatemáticos que exigen unos procedimientos específicos basados en conceptos de diversas áreas del conocimiento *(configuración epistémica extramatemática)*. Y, finalmente para nuestro estudio, consideramos que el desarrollo de las tecnologías y su utilización en el proceso de enseñanza universitaria de Cálculo nos llevan a sistematizar la *configuración epistémica tecnológica de la integral.*

Para concluir este apartado, aunque estos aspectos no se relacionan con nuestro contexto de estudio, resaltamos que el concepto de integral llegó a su generalización apoyada en la teoría de la medida. A partir de ahí, caminó, a pasos amplios, hacia un elevado grado de generalización y abstracción existentes en la actualidad, que son fundamentales para el desarrollo de varias ramas de las ciencias (como la teoría de la probabilidad, la teoría ergódica, teoría espectral, análisis armónico, etc.). Estas configuraciones serán utilizadas para analizar los libros de textos (Capítulo 6) e interpretar los significados de los profesores – formadores caracterizados en los capítulos 7, 8 y 9.

Capítulo 5

EL CURRÍCULO DE CÁLCULO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

En este capítulo describimos el currículo de Cálculo en la formación de profesores de matemáticas en Brasil. Realizamos una síntesis de la organización del sistema educativo brasileño explicitando los ámbitos de formación y actuación de los docentes de matemáticas. Además, discutimos las directrices curriculares para la formación de profesores de la enseñanza primaria y secundaria, así como las directrices curriculares nacionales para la carrera de matemáticas. Finalmente, resaltamos el currículo del Cálculo en el proceso de formación de profesores de matemáticas.

5.1. El sistema educativo brasileño

En las últimas décadas, Brasil ha avanzado considerablemente en el campo educacional, con significativos cambios en la enseñanza primaria y secundaria y con la expansión de la enseñanza universitaria. Según los datos estadísticos disponibilizados por el Ministerio de Educación, en 2010 había 57.929.188 estudiantes matriculados en todos los niveles de enseñanza, de los cuales, 51.549.889 eran estudiantes de la educación básica (primaria y secundaria) y, 6.379.299 estudiantes de la enseñanza universitaria. Estos datos revelan un crecimiento en la escolarización de los brasileños, así como en el descenso del analfabetismo en el país en la década de los años 1990.

En lo que se refiere a la enseñanza universitaria, la expansión de la cantidad de *Instituciones de Enseñanza Superior* (IES) se constituye en un importante indicador para caracterizar su rápido crecimiento, especialmente en la última década. En 1808 la "Escola de Cirurgia e Medicina da Bahia" era la única IES brasileña. En el año 2000, la cantidad de IES en Brasil llegó a 1.180[4]. En la década siguiente el país contaba con 2.378 IES. Para atender a la demanda de dichas IES, el sistema educacional brasileño contaba, con 366.882 docentes, de los cuales 140.742 trabajaban en las IES públicas y 226.140 en las instituciones privadas. En lo que se refiere a la Licenciatura en Matemáticas, en 2010 había 59.464 estudiantes matriculados en la carrera, desarrollada en 609 Instituciones de Enseñanza Superior distintas[5]. Estos datos revelan la complejidad del Sistema Educacional Brasileño, en el cual se desarrolla la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria[6].

La Ley de Directrices y Bases de la Educación Nacional – LDB (Ley 9394, de 1996) supuso un gran avance en el sistema educativo brasileño. En dicha ley se plantea la transformación de la escuela en un espacio de participación social, valorando la democracia, el respeto, la pluralidad cultural y la formación del ciudadano. Al ser una ley de la Unión de Estados[7] (confederación entre los 26 Estados y el Distrito Federal de la República Brasileña, con sus respectivas autonomías) se aplicó a todo el país.

El sistema educativo brasileño se organiza en régimen de colaboración entre la Unión, los Estados (analógicamente se corresponde con una comunidad autónoma), el Distrito Federal y los Municipios. El Ministerio de Educación y Deportes del Gobierno Federal organiza la enseñanza y presta asistencia

[4] Datos disponibles en la página web del Ministerio de la Educación de Brasil: http://download.inep.gov.br/download/censo/2000/Superior/sinopse_superior-2000.pdf
[5] Datos disponibles en la página web del Ministerio de la Educación de Brasil: http://portal.inep.gov.br/superior-censosuperior-sinopse. Acceso en 09 abril 2012.
[6] Nos referimos a los docentes responsables por las clases de Matemáticas en los años finales de la enseñanza fundamental: 6to al 9no año, y de la enseñanza media: 1er al 3er año.
[7] Corresponde a la Unión coordinar la política nacional de educación, articular los diferentes niveles y sistemas, ejercer una función normativa, redistribuidora y supletiva en relación a las demás instancias educacionales (Art, 8º-1ºLDB/1996).

técnica y financiera a todo el país para el desarrollo de su sistema de enseñanza.

Hemos de señalar que la nomenclatura que se emplea en Brasil para denominar las instituciones de Educación Superior no coincide con la de uso en España. Consideramos necesario esta aclaración, para entender cómo y dónde se implementan la formación de profesores de matemáticas. Así, en el sistema educativo brasileño hay dos tipos de Instituciones de Enseñanza Superior: las universitarias y las no universitarias. Las universidades se caracterizan por:

- Poseer autonomía didáctica, científica, administrativa y financiera.
- Expedir y registrar sus títulos académicos.
- Integrar la enseñanza, la investigación y la extensión.
- Tener al menos un tercio de los docentes con titulación de Máster o Doctor y dedicarse integralmente a la universidad (Artículos 52 y 53 de la LDB/96).

Sin embargo, las IES no universitarias se distinguen de las universidades especialmente en lo que se refiere a:

- Falta de autonomía (están subordinadas directamente al MEC).
- No poder registrar los títulos expedidos (el registro se realiza en una universidad).
- Centrar su actuación solamente en la enseñanza.

Las instituciones universitarias pueden constituirse por las universidades, universidades especializadas o centros universitarios, mientras las no universitarias se organizan como facultades, institutos superiores de educación, o centros de educación tecnológica.

Lo anterior refleja la complejidad del sistema educativo brasileño. La enseñanza no universitaria ha sido contemplada en la síntesis anterior por constituirse en el ámbito de actuación profesional de los docentes de matemáticas graduados a través de la Licenciatura en Matemáticas. No obstante, nuestro principal interés consiste en analizar la organización y desarrollo de dicha licenciatura en las IES.

En el sistema educacional brasileño hay una diversidad de IES y, consecuentemente, muchas maneras de organizarlas. Entre las 2378 IES públicas o privadas, universitarias o no universitarias actualmente existentes en Brasil, 609 ofrecen la Licenciatura en Matemáticas. Esto requiere unas directrices comunes como referencia para el diseño y desarrollo de dicha carrera, pues cada IES se encarga por un diseño específico del Proyecto Político Pedagógico (PPP) de la Licenciatura en Matemáticas que se implementa.

En el caso de las universidades, estos proyectos suelen ser propuestos por un departamento, instituto o centro y son aprobados internamente. Tratándose de las IES no universitarias, la aprobación de dichos proyectos se realiza tras evaluación de los mismos y de la estructura de la IES para desarrollarlo. En todos los casos, el MEC evalúa periódicamente la estructura de las licenciaturas y el nivel de conocimiento de los académicos, aunque en las universidades estatales (constituidas y mantenidas por los Estados de la República Federativa Brasileña), los sistemas de enseñanza de cada Estado se hacen responsables por el reconocimiento de las licenciaturas, bien como por su evaluación específica.

A partir de la creación de la Universidad de “São Paulo” (USP), en 1934 – primera universidad pública brasileña y donde se desarrolló por primera vez la carrera de Matemática en Brasil – la extraordinaria expansión de las IES y, consecuentemente, de las que ofrecen la Licenciatura en Matemáticas. La complejidad para organizar y estructurar una adecuada formación de profesores, contemplando las diferencias culturales y sociales de las distintas regiones del país, que sea coherente con las nuevas exigencias educacionales requeridas por una sociedad cambiante en un mundo globalizado requiere de principios que orienten el currículo de la formación de profesores.

Aunque se presente unas líneas generales para la organización del currículo de las licenciaturas, estos deben ser flexibles para contemplar los intereses y necesidades tanto institucionales como personales y profesionales de los profesores. En este sentido, en cumplimiento de los objetivos de la LDB/96 que no solamente organiza el sistema educacional brasileño, sino delega a la “Unión” la competencia para elaborar el *Plan Nacional de Educación (PNE)* que articule los distintos niveles de enseñanza (en conjunto con los Estados, Distrito Federal y Municipios) y establezca las normas generales tanto para la graduación como para el postgrado. En este sentido, el Consejo Nacional de Educación (CNE) se quedó a cargo de la organización y aprobación de las Directrices Curriculares para la formación de profesores que analizamos a continuación.

5.2. El currículo de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil

En esta sección sistematizamos algunos aspectos curriculares propuestos tanto para la formación de profesores de las enseñanzas primaria y secundaria de distintas áreas, cuanto específicamente para la formación de profesores de matemáticas. Ambos aspectos han sido contemplados en las *Directrices Curriculares para la Formación de Profesores de la Educación Básica, en nivel superio*r; y en las *Directrices Curriculares Nacionales para los Cursos de Matemática, Licenciatura y Bacharelado*, (Parecer CNE/CES 1302/2001) que analizamos en las secciones 5.2.1 y 5.2.2.

5.2.1. Directrices Curriculares para la formación de profesores de matemáticas

La propuesta del documento precursor de las Directrices Curriculares Nacionales para la Educación Básica fue remetida por el MEC para apreciación del CNE en el año 2000. Dicho documento fue elaborado por un equipo de trabajo compuesto por representantes de la Secretaria de Enseñanza Fundamental, Secretaria de Enseñanza Secundaria y Tecnológica, y de la Secretaria de Enseñanza Superior del MEC. El CNE designó una comisión bicameral (compuesta por Consejeros y la Cámara de Educación Básica y de la Cámara de Educación Superior). Tras intensas discusiones de dicha propuesta junto a la comunidad académica y sociedades científicas, el CNE aprobó el Parecer sobre las *Directrices Curriculares Nacionales para la Formación de Profesores de la educación Básica, en nivel superior* (Parecer CNE/CP 009/2001) que sintetizamos a continuación.

Según se explicita en el documento, la propuesta de las referidas *Directrices Curriculares*

> Busca describir tanto el contexto global como el nacional de la reforma educacional en Brasil, el marco legal que le da soporte, y las líneas orientadoras de los cambios de los

> cursos de formación de profesores. Basado en el diagnóstico de los problemas detectados en la formación de los profesores, dicha propuesta presenta amplios principios orientadores y directrices para una política de formación de profesores, para su organización en el tiempo y espacio y para la estructuración de las carreras. Además, incluye la discusión de las competencias y áreas de desarrollo profesional que se espera promover la referida formación, y las sugerencias para evaluación de los cambios. Es suficientemente flexible para abrigar diferentes diseños institucionales, es decir, las Directrices constantes de este documento se aplicarán a todas las carreras de formación de profesores en nivel superior, cualquiera que sea el *locus* institucional - Universidad o Instituto Superior de Educación (ISE) - áreas del conocimiento y/o etapas da escolaridad básica. Por lo tanto, son orientadoras para la definición de las Propuestas de Directrices específicas para cada etapa de educación básica y para cada área del conocimiento (Parecer CNE/CP 009/2001, pp. 6-7).

En este sentido, las referidas directrices apuntan a los principales problemas que suelen ser enfrentados por la formación de profesores (a través de las diversas licenciaturas) tanto en el campo institucional, como curricular.

En el campo institucional, la principal problemática se refiere a:

- Segmentación de la formación de profesores y discontinuidad en la formación de los alumnos de la educación básica.
- Sumisión de la propuesta pedagógica a la organización institucional.
- Aislamiento de las escuelas de formación.
- Distanciamiento entre las instituciones de formación de profesores y los sistemas de enseñanza de la educación básica.
- Por otra parte, la problemática apuntada en el campo curricular se relaciona a:
- Desconsideración del repertorio de conocimiento de los profesores en formación.
- Tratamiento inadecuado de los contenidos.
- Falta de oportunidades para el desarrollo cultural de los profesores en formación.
- Tratamiento restrictivo de la actuación profesional.
- Concepción restrictiva de la práctica.
- Inadecuación del tratamiento de la investigación.
- Ausencia de contenidos relativos a las tecnologías de la información y comunicación.
- Desconsideración de las especificidades propias de los niveles o modalidades de enseñanza en los cuales son atendidos los alumnos de la educación básica.

- Desconsideración de las especificidades propias de las etapas de la educación básica y de las áreas de conocimiento que compone la estructura curricular de la educación básica.

Dicha problemática debe ser afrontada por las instituciones formadoras de profesores en Brasil. Esto presupone un nuevo rol de las instituciones, de los currículos específicos de cada licenciatura y de los profesores. Por ello, según dicho Parecer:

> Las nuevas tareas atribuidas a la escuela y las dinámicas generadas por ellas imponen la revisión de la formación docente vigente en la perspectiva de fortalecer o instaurar procesos de cambio en el seno de las instituciones formadoras, respondiendo a las nuevas tareas y a los desafíos apuntados, que incluyen el desarrollo de la disposición para constante actualización, de modo a enterarse e incorporar los avances del conocimiento en las diversas áreas, así como profundizar en la comprensión de la complejidad del acto educativo en su relación con la sociedad. Para ello, se requiere más que cambios superficiales. Tornase necesaria una profunda revisión de aspectos esenciales de la formación de profesores, tales como: la organización institucional, la definición y estructuración de los contenidos para que respondan a las necesidades de actuación del profesor, los procesos formativos que involucren aprendizaje y desarrollo de las competencias del profesor, la vinculación entre las instituciones de formación y los sistemas de enseñanza, de modo a asegurarles la indispensable preparación profesional (pp. 10-11).

Teniendo en cuenta lo anterior, el documento plantea los siguientes principios orientadores para una reforma en la formación de profesores:

- La concepción de competencia es nuclear en la orientación de la formación de profesores.
- La imprescindible coherencia entre la formación de profesores y la práctica esperada de los futuros profesores.
- La investigación es un elemento esencial en la formación profesional del profesor.
- Apoyándose en estos principios, en el referido documento están contempladas las siguientes Directrices para la Formación de Profesores:
- Concepción, desarrollo y ámbito de actuación: la formación debe garantizar los conocimientos de la educación básica; el desarrollo de las competencias exige que la formación de profesores comprenda diferentes ámbitos del conocimiento profesional del profesor; la selección de los contenidos debe ser más amplia que aquellos que el profesor va a enseñar; articulación de los contenidos que serán enseñados en la educación básica con sus didácticas específicas; la evaluación debe tener como finalidad orientar la actuación profesional del formador, la autonomía de los futuros profesores

relativa a su aprendizaje, y la calificación de profesionales para iniciar su práctica docente.

- Las competencias que se pretende desarrollar en la formación de profesores de la educación básica deben ser referentes: al compromiso con los valores inspiradores de una sociedad democrática; a la comprensión del papel social de la escuela; al dominio de los contenidos (temas), de sus significados en diferentes contextos y de su articulación interdisciplinaria; al dominio del conocimiento pedagógico; al conocimiento de los procesos de investigación que contribuyan con el perfeccionamiento de la práctica pedagógica docente; a la gestión de su propio desarrollo profesional.
- Conocimiento para el desarrollo profesional: cultura general y profesional; conocimientos relativos a niños, jóvenes y adultos; conocimiento referente a la dimensión cultural, social, política y económica de la educación; conocimientos de los contenidos del área específica; conocimiento pedagógico; conocimiento procedente de la experiencia (conocimiento experiencial).
- Organización institucional de la formación de profesores, contempla: autonomía e identidad propia de la formación de profesores; mantener estrecha relación con institutos, departamentos y centros específicos; constituir dirección y colegiados propios; prever la formación de los formadores; las instituciones formadoras deben garantizar los recursos pedagógicos y tecnológicos necesarios; garantir el desarrollo de actividades culturales; las instituciones formadoras que no poseen la autonomía universitaria deben crear sus Institutos Superiores de Educación (ISE) a través de los cuales desarrollarán sus proyectos de formación de profesores.
- Evaluación de la formación de profesores para la educación básica: evaluación periódica y sistemática de la carrera; evaluación interna y externa de la licenciatura; procesos de autorización de funcionamiento, “credenciamiento” de las IES, reconocimiento y evaluación externa deben ser en locus.

Tras identificar las competencias y ámbitos de conocimientos y desarrollo profesional, el documento referente al Parecer CNE/CP 009/ 2001 indica los criterios a tener en cuenta en la organización y diseño de una matriz curricular de las licenciaturas. “Estos criterios se expresan a través de ejes, en torno de los cuales se articulan las dimensiones que deben ser contempladas en la formación profesional docente y apuntan al tipo de actividades de enseñanza y aprendizaje que materializan la planificación y la acción de los formadores de formadores” (p. 52). Dichos criterios de organización de la matriz curricular de las licenciaturas han sido contemplados en el Artículo 11 de la Resolución CNE/CP 1/2002 de la siguiente manera:

> Art. 11. Los criterios de organización de la matriz curricular, así como la especificación de tiempos y espacios curriculares se expresan en ejes en torno de los cuales las dimensiones a ser contempladas se articulan en la siguiente forma:
> I - eje articulador de los diferentes ámbitos de conocimiento profesional;
> II - eje articulador de la interacción y de la comunicación, así como del desarrollo de la autonomía intelectual y profesional;
> III - eje articulador entre disciplinaridad e interdisciplinaridad;
> IV - eje articulador de la formación común con la formación específica;
> V - eje articulador de los conocimientos a ser enseñados y de los conocimientos filosóficos, educacionales y pedagógicos que fundamentan la acción educativa;
> VI - eje articulador de las dimensiones teóricas y prácticas (p. 5).

Otro aspecto que podemos resaltar se refiere a las actividades prácticas, las cuales deben estar contempladas en todas las disciplinas de la licenciatura. Asimismo, las prácticas de formación deben ser introducidas desde el inicio de la licenciatura y desarrollarse durante todo el tiempo destinado a su conclusión. En lo que se refiere a la “práctica curricular” (practicum), ésta deberá desarrollarse en una escuela de educación básica, a partir del período subsiguiente a la mitad de la carrera.

Tomándose como referencia el Parecer CNE/CP 009/2001 y la Resolución CNE/CP 1/2002 (con sus posteriores adecuaciones: Resolución CNE/CP nº2/2004 y Resolución CNE/CP nº1/2005) que instituyeron las Directrices Curriculares Nacionales para la Formación de Profesores de la Educación Básica, en nivel superior; el Consejo Nacional de Educación emprendió sus esfuerzos para organizar las directrices específicas para las licenciaturas ofrecidas en las diversas áreas del conocimiento. En este sentido, han sido instituidas las *Directrices Curriculares Nacionales de los Cursos de Matemática, Licenciatura y “Bacharelado”*, que analizamos a continuación.

5.2.2. Las Directrices Curriculares Nacionales de los Cursos de Matemática: Licenciatura y "Bacharelado"

En el voto del relator de las Directrices Curriculares Nacional para los Cursos de Matemática, Licenciatura y "Bacharelado", aprobadas por el Parecer CNE/CSE 1302/2001, de 06/11/2001, están explicitados los siguientes objetivos:

- Servir como orientación para mejoras y trasformaciones en la formación del "Bacharel" y del Licenciado en Matemática;
- Asegurar que los egresados de cursos credenciados de "Bacharelado" y Licenciatura en Matemáticas hayan sido adecuadamente preparados para una carrera en la cual la Matemática sea utilizada de manera esencial, así como para un proceso continuo de aprendizaje (Parecer CNE/CES 1302/2001, 2002, p. 2).

Las características presentadas en dichas directrices para los egresados del "Bacharelado" en Matemática son:

- Una sólida formación en los contenidos matemáticos;
- Una formación capaz de prepararles para enfrentar los desafíos de las rápidas trasformaciones de la sociedad, del mercado de trabajo, y de las condiciones del ejercicio profesional.

Y para el Licenciado en Matemática, se desea las siguientes características:

- Visión de su papel social de educador y capacidad de insertarse en diversas realidades con sensibilidad para interpretar las acciones de los educandos;
- Visión de la contribución que el aprendizaje de Matemática puede ofrecer a la formación de los individuos para el ejercicio de la ciudadanía;
- Visión de que el conocimiento matemático puede y debe ser accesible a todos, y conciencia de su papel en la superación de perjuicios, traducidos por angustia, inercia o rechazo, que todavía suelen presentarse en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática (p. 3).

A partir de las características planteadas, respectivamente, para los egresados del "Bacharelado" y de la Licenciatura en Matemáticas, las referidas directrices mencionan las siguientes "capacidades y habilidades" comunes a ambas carreras:

a) Capacidad de expresarse escrita y oralmente con claridad y precisión;

b) Capacidad de trabajar en equipos multidisciplinarias;

c) Capacidad de comprender, criticar y utilizar nuevas ideas y tecnologías para la resolución de problemas;

d) Capacidad de aprendizaje continuado, convirtiendo su práctica profesional también en fuente de producción de conocimiento;

e) Habilidad de identificar, formular y resolver problemas en su área de aplicación, utilizando rigor lógico-científico en el análisis de la situación-problema;

f) Establecer relaciones entre la Matemática y otras áreas del conocimiento;

g) Conocimiento de cuestiones contemporáneas;

h) Educación amplia necesaria al entendimiento del impacto de las soluciones encontradas en un contexto global y social;

i) Participar en programas de formación continuada;

j) Realizar estudios de postgrado;

k) Trabajar en la interacción de la Matemática con otros campos del saber (Parecer CNE/CES 1302/ 2001, 2001, pp. 3-4).

Asimismo, en dichas directrices han sido contempladas las siguientes "competencias y habilidades" específicas del Licenciado en Matemática:

a) Elaborar propuestas de enseñanza y aprendizaje de Matemática para la educación básica;

b) Analizar, seleccionar y producir materiales didácticos;

c) Analizar críticamente propuestas curriculares de Matemática para la educación básica;

d) Desarrollar estrategias de enseñanza que favorezcan la creatividad, la autonomía y la flexibilidad del pensamiento matemático de los educandos, buscando trabajar con más énfasis en los conceptos que en las técnicas, fórmulas y algoritmos;

e) Percibir la práctica docente de Matemática como un proceso dinámico, cargado de incertidumbres y conflictos, un espacio de creación y reflexión, donde nuevos conocimientos son generados y modificados continuamente;

f) Contribuir para la realización de proyectos colectivos en la escuela básica (Parecer CNE/CES 1302/2001, 2001, p. 4).

La estructura del Curso de Matemática, propuesta a través de las directrices curriculares, debe ser organizada tomando como punto de partida las representaciones previas tanto de los conceptos matemáticos como de los procesos escolares en el desarrollo de los abordajes que se implementarán a lo largo de la carrera. Asimismo, prevé la construcción de una visión global de los contenidos de manera tal que estos sean significativos para los estudiantes. Por otra parte, está prevista una estructura flexible en cuanto a la organización de las asignaturas/ disciplinas en módulos y a la forma de organización de los Cursos de Matemática (permitiéndose Cursos Secuenciales y aprovechamiento de estudios, según el Artículo 44 de la LDB/96).

En consonancia con las "competencias" anteriormente mencionada, según las referidas directrices, los contenidos curriculares de los Cursos de Matemática ("Bacharelado" y Licenciatura) deben contemplar una parte común, y otra específica a criterios de la IES. Tratándose del "Bacharelado" en Matemática, son comunes las siguientes disciplinas:

- Cálculo Diferencial e Integral;

- Álgebra Linear;
- Topología;
- Análisis Matemático;
- Álgebra;
- Análisis Complejo;
- Geometría Diferencial.

Además, se sugiere la inclusión de Física General y Nociones de Física Moderna en el referido "Bacharelado" y la utilización de recursos computacionales. En su parte diversificada de los contenidos, la complementación de la formación del "Bacharel" en Matemática puede ser realizada a través de la profundización de los estudios de contenidos matemáticos o de las áreas de aplicación de la Matemática. Todo ello debe ser organizado de manera coherente con las disciplinas propuestas en la parte común de los contenidos curriculares.

En el caso de la Licenciatura en Matemáticas, la parte común de los contenidos curriculares contempla:

- Cálculo Diferencial e Integral;
- Álgebra Linear;
- Fundamentos de Análisis;
- Fundamentos de Álgebra;
- Fundamentos de Geometría;
- Geometría Analítica.

Asimismo, en la parte común debe incluirse:

- Contenidos matemáticos presentes en la educación básica en las áreas de Álgebra, Geometría, y Análisis;
- Contenidos de áreas afines a la Matemática, los cuales son fuentes generadoras de problemas y campos de aplicación de sus teorías;

- Contenidos de Ciencias de la Educación, Historia y Filosofía de las Ciencias y de la Matemática.

Además, se sugiere la utilización de recursos computacionales y los contenidos de la educación básica referentes a la formación profesional de los profesores de matemática, en consonancia con las orientaciones contenidas en las directrices específicas (Parecer CNE/CES 1302/2001, 2001, pp. 5-6).

Las actividades complementarias referentes a las prácticas realizadas para la conclusión de ambas carreras, según dichas directrices curriculares deben contemplar la producción de monografía y la participación en actividades de investigación (o de docencia) para los “Bacharéis” en Matemática. No obstante, para los Licenciados en Matemática no se contemplan las mismas actividades, sino resalta la importancia de las actividades prácticas (referentes al “Estágio Curricular”), proponiendo el desarrollo de una secuencia de acciones que conduzcan al aprendiz a la responsabilidad por tareas en orden creciente de complejidad y a la toma de conciencia de los procesos formativos, y al aprendizaje guiado por profesionales de reconocida competencia (pp. 6-7).

Estas directrices curriculares han sido muy criticadas por los educadores matemáticos. En este sentido, resaltamos las críticas realizadas por la Sociedad Brasileña de Educación Matemática (SBEM). Tras realización de diversas discusiones regionales sobre la Licenciatura en Matemáticas, la SBEM promovió un “Fórum Nacional de la Licenciatura en Matemáticas”[8] en el cual las discusiones se han centrado en la Directrices Curriculares para los Cursos de Matemática, Licenciatura y “Bacharelado”.

En dicho evento se elaboró un documento, en el cual las referidas directrices han sido duramente criticadas, especialmente en los siguientes aspectos relacionados a la formación de profesores de matemática: la no contemplación de algunos aspectos considerados fundamentales en la formación de profesores de matemáticas por la comunidad científica de educadores matemáticos y la negativa de otros aspectos, y las contradicciones entre el Parecer CNE/CES 1302/2001 y la Resolución CNE/CES 1/2002. En este

[8] Dicho evento se realizó en la Universidad Católica de “São Paulo”, en los días 25 y 26 de agosto de 2002, y contó con la participación de más de cien profesionales involucrados en la docencia e investigación sobre la formación de profesores de matemática en Brasil.

sentido, los educadores matemáticos han considerado que en las Directrices Curriculares para los Cursos de Matemática no ha sido contemplada la formación profesional necesaria al docente para la enseñanza de la Matemática, lo que requiere una sólida formación tanto del área de la Matemática como de la Educación Matemática. Otra crítica se refiere a la "superficialidad" relativa a la formación de los profesores de matemática presente a lo largo del referido Parecer, lo que se ha explicitado a través de la afirmación que solamente al "Bacharel" en matemática le será contemplada una formación orientada tanto a la investigación como a la enseñanza universitaria. Así, en las conclusiones del documento de la SBEM se reivindica la reapertura de un espacio para la participación de las IES, sociedades científicas y representativas de profesores en la elaboración de una nueva propuesta de las Directrices Curriculares Nacionales de los Cursos de Licenciatura en Matemáticas (SBEM, 2002, p. 12).

A pesar de lo anteriormente descrito, la formación de profesores de matemática para la enseñanza básica en Brasil sigue normalizada por las referidas Resoluciones y Parecer (Resolución CNE/CES 1/2002, Resolución CNE/CES 2/2002 y Parecer CNE/CES 1320/2001). La Resolución CNE/CES 3/2003 corrobora esta afirmación. En dicha resolución, encontramos la siguiente redacción en su Artículo 1°: "Las Directrices Curriculares para los Cursos de „Bacharelado' y Licenciatura en Matemáticas, integrantes del Parecer CNE/CES 1320/2001, deberán orientar la formulación del proyecto pedagógico del referido curso", y en el Artículo 3º, dispone que "la carga horaria de los Cursos de Matemática deberá obedecer a lo dispuesto en la Resolución que normaliza la oferta de esa modalidad y la carga horaria de la Licenciatura deberá cumplir el establecido en la Resolución CNE/CP 2/2002, resultante del Parecer CNE/CP 28/2001".

No obstante, la construcción de la identidad propia de la Licenciatura en Matemáticas:

> Pasa a ser construida con base en elementos constitutivos del conocimiento profesional, tales como: énfasis en el conocimiento didáctico-pedagógico de la matemática, vinculación de la formación académica con la práctica profesional, y prácticas investigativas que posibiliten la articulación entre la teoría y la práctica (Traldi Júnior, 2006, p. 22).

Para el referido autor, la identidad de la Licenciatura en Matemáticas debe ser reflejada a través de su abordaje metodológico, de los diferentes espacios de convivencia de los estudiantes, de las relaciones entre los formadores de profesores y los licenciandos (profesores en formación), de las dinámicas de las clases, y de los procesos de evaluación (p. 23).

Todo ello se debe llevar a cabo por medio del proyecto pedagógico contemplado en la Resolución CNE/CES 3/2003). Según lo que se establece en dicha resolución, el proyecto pedagógico de la Licenciatura en Matemáticas debe contemplar: el perfil de los graduandos; las competencias y habilidades de carácter general, común y específico; los contenidos curriculares de la formación general y los contenidos de formación específica; las actividades de "estagio"; las características de las actividades complementarias; la estructura del Curso; y las formas de evaluación. El proyecto pedagógico debe ser organizado colectivamente por los profesores formadores y los profesores en formación. En este sentido, uno de sus indicadores de calidad está conformado por la coherente articulación y responsabilidad mutua entre los profesores formadores (responsables del diseño e implementación del referido proyecto) y los profesores en formación (responsables de participar en la elaboración del referido proyecto, además de tener la oportunidad de vivenciar una experiencia formativa que posteriormente podrá adaptarla a su práctica profesional docente).

A partir de la promulgación de la LDB/96 y de las Directrices Curriculares Nacionales (para la Formación de Profesores de la Enseñanza Básica, y para los Cursos de Matemática) y de sus respectivas reglamentaciones, se propone un cambio de rol para los futuros profesores de matemática. Esto significa que dicho profesor debe convertirse en un profesional dotado de un conocimiento profesional que le capacite para el eficaz ejercicio de la docencia de matemática en la enseñanza básica. Esto presupone dominar no solamente los conocimientos de los contenidos matemáticos específicos, sino conocer sus aspectos históricos, epistemológicos y didácticos. Asimismo, es necesario articular coherentemente los contenidos curriculares de formación general y específica, y desarrollar la investigación educacional especialmente dirigida a la experiencia profesional del docente de matemática y su articulación con las teorías educativas pertinentes.

Lo que se pretende desarrollar a partir de las orientaciones curriculares previstas en la legislación específica para la formación de profesores de la enseñanza básica, particularmente de matemática, es la formación de profesionales competentes y reflexivos. La idea de competencia ha sido ampliamente utilizada por los investigadores educacionales en Brasil a partir de los estudios de Perrenaud (2000) y han sido propuestas en las reglamentaciones de las directrices como la base para la organización curricular de la licenciatura. La reflexión en y sobre la acción también ha sido bastante estudiada a partir de los trabajos de Schön (1992) y se conecta con la idea de conocimiento profesional por medio del aspecto eminentemente práctico de la docencia.

Por otra parte, el cambio en el rol del profesor de matemática en formación implica no solamente en la proposición de una nueva estructura curricular para la Licenciatura en Matemáticas, sino que se torna imprescindible conocer las opiniones de los profesores formadores sobre los diversos aspectos relacionados con la formación de los profesores de matemáticas. Además, consideramos importante cuestionar cuál es el nuevo papel que se espera para los formadores de profesores de matemáticas, contrastándole con las opiniones expresadas por una muestra de profesores-formadores e investigadores expertos en la enseñanza universitaria de Cálculo.

Para acotar la idea anterior, desarrollada en nuestro estudio, hemos investigado el proceso de estudio del Cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas. Por ello consideramos importante discutir, en la siguiente sección, algunas ideas relativas al currículo de Cálculo en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas.

5.2.3. El currículo del Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas

Actualmente el Cálculo Diferencial e Integral consiste en una disciplina presente en el currículo de una diversidad de carreras universitarias, especialmente en las que se relacionan con las ciencias y tecnologías. En este estudio nos interesamos particularmente por los aspectos referentes a la organización articulada y coherente del currículo de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas. Esto implica en que dicho currículo debe contemplar, entre otras cuestiones, los objetivos propuestos para la enseñanza de la matemática en los sistemas escolares y las orientaciones curriculares presentes en las directrices curriculares para la formación de profesores.

Según D'Ambrósio (2002), los dos grandes objetivos que justifican la enseñanza de las Matemáticas en los sistemas escolares son: Preparar al individuo para la ciudadanía y servir de base para una carrera de ciencia y tecnología. A los referidos objetivos el autor añade otro: Estimular la creatividad. Entretanto, las acciones desarrolladas para lograr dichos objetivos muchas veces son afectadas por la enseñanza tradicional y por su problemática donde se resalta los bajos niveles de rendimiento de los estudiantes. En este sentido, D'Ambrósio (2002) considera que:

> Parece haber un rechazo a un análisis de la naturaleza de lo que se está enseñando. Probablemente, y así creo, que el desacierto esté no con el profesor o con el alumno, pero sí con el contenido que se espera enseñar. La matemática que viene dominando los programas es, en gran medida, no interesante, obsoleta e inútil para las generaciones actuales (p. 29).

Lo que defiende el referido autor es la desmitificación de la enseñanza de las Matemáticas y que ésta se lleve a cabo a partir de un enfoque innovador. Esta idea ha sido ejemplificada a partir de las referencias hechas al Cálculo. El autor resalta, por una parte, los dos extremos que se ha producido en el proceso de enseñanza del Cálculo: La preocupación con los cursos rigurosos de Cálculo – predominantes en la enseñanza universitaria en el final del siglo XIX – y, el abandono de lo conceptual tanto en la asignatura como en los libros de Cálculo, restringiéndose solamente a un elenco de ejercicios (fase en que el autor considera que todavía se encuentra el curso de Cálculo). Sin embargo, refiriéndose al libro *Cálculo tornado fácil*, de Silvanus P. Thompson, el autor explicita la base de la desmitificación de la matemática consiste en familiarizar el aprendiz con las ideas matemáticas a través de ilustraciones sencillas y presentar las principales nociones matemáticas de manera sucinta[9]. Por otra

[9] El autor asocia dicha estrategia con las propuestas de Carl Roger y de Daniel Goleman (Inteligencia Emocional). En este sentido, considera que familiarizar al aprendiz, reforzar su autoestima, y crear confianza en sus habilidades pueden convertirse en excelentes instrumentos pedagógicos.

parte, el autor sugiere que los profesores universitarios desarrollen e implementen propuestas alternativas que innoven el proceso de enseñanza del Cálculo, incorporándole las tecnologías (calculadoras gráficas), la resolución de problemas (modelación), etc.

Nos resulta interesante la posición de D'Ambrosio que atribuye la problemática relativa al bajo nivel de aprovechamiento de los estudiantes universitarios de matemáticas al contenido que se espera enseñar. Esto corrobora nuestro interés de estudiar un contenido matemático específico, *la integral*. No obstante, consideramos que además de centrar el interés de la investigación en un contenido matemático específico, es fundamental analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho contenido en un contexto socio-profesional específico, como es el caso de la *formación de profesores de matemática*.

En su artículo "El Cálculo en el Curso de Licenciatura en Matemáticas", Barufi (2002) cuestiona la razón por la cual, a pesar de la importancia atribuida al Cálculo tanto por profesores como por estudiantes universitarios, esta asignatura genera tantos problemas y provoca tanta frustración en ambos. Partiendo del presupuesto que los estudiantes universitarios, particularmente de la Licenciatura en Matemáticas, al empezar su carrera universitaria han que pasar por un curso básico de Cálculo, el cual no consiste solamente en prerrequisito para otras disciplinas, sino en una expectativa de articulación (por parte de los estudiantes) con los contenidos de Matemáticas que ellos van a trabajar en la enseñanza secundaria. Las principales razones presentadas por la autora como respuesta a su cuestionamiento pueden ser sintetizadas por:

- La no contemplación de las nociones de Cálculo en los niveles preuniversitarios.
- El insatisfactorio dominio de las técnicas operatorias y del lenguaje lógico-formal de matemática por los estudiantes que empiezan la carrera universitaria.
- Precario equilibrio entre el abordaje conceptual del Cálculo y el aprendizaje de las técnicas.
- Reducción de conceptos de Cálculo a algoritmos.

- Necesidad de definición y elección de mecanismos de negociación que posibiliten la apropiación de los significados de referencia deseados para las nociones matemáticas desarrolladas en el curso de Cálculo.

Afirmando que en la resolución de problemas es imprescindible, *a priori,* “conocer el significado de las herramientas disponibles. Solamente después es posible tomar decisiones sobre qué herramientas utilizar” (p. 70), la autora, citando a Bressoud, aborda, por una parte, la cuestión de la adecuación del curso de Cálculo y, por otra parte, la importancia de la enseñanza del Cálculo. Al referirse al curso de Cálculo, Bressoud (1991) considera que:

> [...] Este curso no es adecuado de la manera como se presenta. Nuestros estudiantes se aproximan del Cálculo como una mezcla de trepidación y antelación. Ellos saben que será difícil, pero también esperan que sea un curso que unificará las matemáticas que han estudiado, transformándolas en un instrumento para explicar el mundo que nos rodea. Sabemos que dicha herramienta existe, pero no es percibida por nuestros estudiantes. Ellos salen desilusionados y desencantados (Citado por Barufi, 2002, p. 70).

En cuanto a la importancia de la enseñanza del Cálculo, el referido autor ha presentado las siguientes razones:

> El primer motivo por el cual estudiamos Cálculo es que éste es usado en una variedad de contextos y en varias disciplinas. Si nosotros, matemáticos, no lo enseñamos otros lo harán. [...] Físicos, ingenieros, biólogos han sido admitidos en la discusión sobre la reforma del Cálculo. Los textos utilizan aplicaciones reales y actualmente existe una fuente muy rica de materiales. Nuestra utilización de los referidos materiales, muchas veces, es incorrecta – frecuentemente es postergada en lugar de ser incorporada en la motivación para el concepto que se desea introducir. [...] Sin embargo, la utilidad del Cálculo no consiste en un motivo suficiente para mi cuestión. Existen tópicos de matemática discreta – análisis estadístico, programación lineal – que son mucho más útiles para nuestros estudiantes. Mi segunda respuesta, que tiene consecuencias radicales sobre el por qué enseñamos Cálculo, es que el Cálculo se encuentra en los fundamentos de nuestra visión del mundo científico. El pensamiento científico moderno fue formado a partir de conceptos del Cálculo y no tiene sentido fuera de este contexto. Cuando hablo de ciencias no me restrinjo a otras disciplinas. En una manera muy significativa, la propia matemática pasó a ser vista de esta forma con el desarrollo del Cálculo (Ibíd., p. 70).

La aceptación de esta doble importancia para la enseñanza del Cálculo – utilidad en distintas disciplinas y áreas de la ciencia, y fundamentación de la visión del mundo científico – implica la estructuración de un currículo coherentemente articulado, que contemple la adquisición de competencias relacionadas a su desarrollo conceptual y aplicado a la multiplicidad de problemas que requieren las nociones teóricas del Cálculo en su solución. De esta manera, en la implementación de los significados de las nociones teóricas del Cálculo, particularmente de la integral, se produciría un cambio relativo al “pasar del contexto lógico-formal riguroso, en el cual predominan las Matemáticas y sus técnicas operatorias, para un contexto en que la realidad, con sus problemas fundamentales es lo más importante” (Barufi, 2002, p. 70).

Consideramos que esta posición es coherente con las orientaciones generales emanadas de las normas que regulan el diseño, planificación e implementación de las disciplinas y, consecuentemente, de cada noción matemática cuyos significados deben ser logrados por los estudiantes en un contexto previamente fijado, como el de la Licenciatura en Matemáticas. La formación de profesores de matemática de la enseñanza básica en Brasil está reglamentada especialmente por las directrices curriculares anteriormente sintetizadas.

Según las Directrices Curriculares Nacionales para los Cursos de Matemática, el Cálculo Diferencial e integral se constituye en una de las disciplinas comunes tanto al “Bacharelado” como a la Licenciatura en Matemáticas. Esto corrobora la importancia de esta disciplina en el currículo de ambas carreras de Matemáticas. Además, en el Parecer que da soporte a las *Directrices Curriculares Nacionales para la Formación de Profesores de la Educación Básica*, se le atribuye un papel central no solamente a los contenidos definidos para el currículo de formación profesional, sino al tratamiento metodológico que se va a utilizar en su implementación.

Al considerar que la construcción y desarrollo de las competencias se da básicamente en el proceso de aprendizaje de los contenidos, en el referido Parecer se propone que el conjunto de contenidos curriculares contemple las dimensiones conceptual, procedimental y actitudinal. Nos parece que las referidas dimensiones son insuficientes para analizar un contenido específico con un nivel satisfactorio de detalles y profundidad. Por ello, coherentemente con el Enfoque Ontosemiótico (EOS), hemos propuesto a desarrollar el análisis de la integral a partir de las dimensiones epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica de la integral.

5.3. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Según el EOS, los conceptos y los procedimientos son contemplados en la dimensión epistémica del EOS; su articulación con las situaciones-problemas, lenguaje, proposiciones y argumentos se describen por medio de las configuraciones epistémicas que caracterizan los significados de referencia de la integral. Las actitudes tanto de discentes como de docentes, juntamente con sus intereses y necesidades, y con sus emociones son analizadas en la dimensión afectiva relacionada al proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral. De manera complementaria, a través del EOS podemos analizar los conocimientos sobre la integral a partir de las demás dimensiones: la dimensión cognitiva, relacionada con el aprendizaje de los estudiantes; la dimensión mediacional relacionada a los recursos materiales, tecnológicos y temporales utilizados en la enseñanza de la integral; las interacciones que se producen entre discentes, docentes o entre ambos, así como la autonomía de los estudiantes y su evaluación formativa son analizados en la dimensión interaccional; y la apertura hacia la innovación didáctica y la adaptación socio-profesional y cultural de los profesores en formación son contemplados en la dimensión ecológica .

Según el Parecer CNE/CP 9/2001, “para que el aprendizaje sea significativo es necesario que los contenidos sean analizados y abordados de tal modo que se constituyan en una red de significados” (p. 33). No obstante, nos parece que tanto el análisis de un cierto curso (el Cálculo, por ejemplo) como de un contenido específico (la integral), con el propósito de contemplarlos en el currículo de la formación de profesores de matemáticas, requieren la utilización de herramientas analíticas potentes, que permitan realizar un análisis detallado y en profundidad. Dichas herramientas, desarrolladas en el EOS serán aplicadas tanto en el análisis de la integral como en la construcción de una red de significados de referencia de la referida noción matemática, teniendo en cuenta las especificidades de la carrera para la cual estará dirigido el proceso de enseñanza y aprendizaje de dicho curso o noción matemática. Esto deberá posibilitar el diseño de un currículo de Cálculo Integral articulado y coherente con las investigaciones en el campo de enseñanza universitaria de matemática y con las orientaciones curriculares pertinentes.

Otro aspecto relevante en el currículo de la integral consiste en el análisis de esta noción matemática en los libros de texto de Cálculo utilizados en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas. Este aspecto será abordado en el capítulo 6.

Capítulo 6

ANÁLISIS DE LA INTEGRAL EN LIBROS DE TEXTO DE CÁLCULO

En este capítulo aplicamos una metodología, desarrollada a partir de las herramientas teóricas del enfoque Ontosemiótico, para analizar la integral en dos libros de texto utilizados en el curso introductorio de Cálculo de la enseñanza universitaria, especialmente en la Licenciatura en Matemáticas. A partir del referido análisis, identificamos la estructura general de los capítulos relacionados con la integral y sistematizamos las configuraciones epistémicas global, intermedia y puntual de la integral.

6.1. ANÁLISIS DE TEXTOS MEDIANTE EL USO DE HERRAMIENTAS TEÓRICAS DEL EOS

El libro de texto generalmente ocupa una posición central en la enseñanza universitaria convirtiéndose en un documento de trabajo que define los significados planificados y de referencia de los procesos de estudio. En dicho nivel de enseñanza, la adquisición de los significados pretendidos se asocia al importante trabajo desarrollado de manera personal y autónoma por los estudiantes.

Desde la perspectiva ontosemiótica, el análisis de un libro de texto contempla la sistematización de las distintas configuraciones epistémicas de las nociones matemáticas desarrolladas en el texto y su posible articulación a lo largo de la trayectoria instruccional implementada (Godino, Font y Wilhelmi, 2006). Este tipo de análisis puede ser útil al profesor de matemáticas en la selección de materiales y planificación de sus clases con la utilización del libro de texto como documento de apoyo en las sesiones presenciales o de tutoría.

El inicio del análisis del texto se da a partir de la elaboración de un *esquema general del texto*. Esto nos permite describir la estructura utilizada por el autor, la forma con la cual propone el desarrollo del tema, los recursos tecnológicos que se sugiere, las actividades propuestas, los posibles criterios de evaluación, etc. Por ello, desarrollamos el análisis relacionado con la dimensión epistémica por el hecho del libro didáctico de Cálculo constituirse en una importante fuente de los significados institucionales de las distintas nociones que se estudian.

La dimensión epistémica de la noción matemática que se pretende desarrollar será sistematizada por medio de las *configuraciones epistémicas global, intermedia y puntual* del texto. Dichas configuraciones pueden ser descritas en este estudio de la siguiente manera:

1. Configuración epistémica global del texto: red de objetos institucionales que se pone en juego en una actividad matemática; descrita e interpretada a partir de los elementos de significados del enfoque ontosemiótico, teniendo en cuenta las relaciones que pueden ser establecida por dichos elementos. En nuestro caso, tomamos como punto de partida las situaciones/ problema que implícita o explícitamente pueden ser identificadas en un texto matemático.
2. Configuración epistémica intermedia del texto: Cada una de las subconfiguraciones que componen la configuración epistémica global del texto. Los problemas globalmente identificados puede ser descompuestos en problemas intermedios lo que implica en nuevos procedimientos, propiedades, argumentos, conceptos y lenguajes puestas en juego, constituyéndose en una nueva configuración.
3. Configuración epistémica puntual del texto: son las subconfiguraciones de la configuración epistémica intermedia del texto. Un problema intermedio puede ser descompuesto en problemas puntuales que a su vez da lugar a una nueva configuración. Para operacionalizar el análisis

del texto, se deben elegir solamente los problemas puntuales que sean relevantes para el tema en cuestión.

El punto de partida de una configuración consiste en la identificación de los problemas. Es probable que haya una estrecha relación entre la extensión del texto a analizar y la cantidad de problemas matemáticos que se presentan en el texto. En este caso el análisis de las configuraciones puntuales puede ser excesivamente prolijo y desarticulado. Por lo tanto, simultáneamente a estas configuraciones “puntuales” nos interesa identificar también otras “intermedias” y más “globales”. Esto deberá concretarse a partir del agrupamiento de los problemas (o tareas puntuales) en cuestiones más generales.

Dichas configuraciones pueden ser reagrupadas o descompuestas según el interés y finalidades de cada investigación y pueden quedarse expresadas de manera implícita, o bien describiendo las redes de objetos y su progresiva reconstrucción alrededor de entidades de naturaleza conceptual o proposicional. Además creemos que es necesario progresar en la tipificación de las configuraciones y su articulación a lo largo de un proceso de estudio, tratando de identificar las relaciones entre los distintos elementos de significado que las componen.

Para la representación de los *significados globales del texto* analizado, utilizaremos una técnica basada en una adaptación de los llamados diagramas de Ishikawa (o de causa y efecto). El significado implementado en un libro de texto matemático, o el correspondiente al desarrollo de una secuencia instruccional, se puede considerar como el resultado de distintos factores o “causas” (los distintos componentes o elementos del significado y su manera particular de estar articulados)

En nuestro estudio el punto de llegada del diagrama va a ser el descriptor léxico del significado institucional del objeto – S(O). Lo que pretendemos representar es el proceso de construcción del S(O), es decir, el sistema de prácticas que se va implementando en cada trayectoria epistémica presente en un libro de texto, unidad didáctica o clase de matemáticas. Este puede ser un medio eficaz para analizar tanto los componentes en su conjunto, como su secuenciación temporal.

Consideramos que dicho diagrama funciona como una forma compacta de sintetizar una gran cantidad de información por medio de la noción de configuración. En nuestro estudio, realizamos un análisis de un capítulo (o capítulos) de un libro de texto de Cálculo del nivel universitario – relacionado con la integral – para caracterizar, describir e interpretar sus distintas configuraciones.

Para representar las *configuraciones epistémicas intermedias del texto*, hemos optado por utilizar una representación tabular en la cual se describen sintéticamente los elementos de significado del enfoque ontosemiótico. A partir de esta síntesis se puede analizar e interpretar con más detalles las informaciones, así como sus posibles relaciones.

Las *configuraciones epistémicas puntuales del texto* serán representadas sintéticamente a partir de un esquema elaborado con la utilización del software *Inspiration 7,* tomándose como punto de partida cada uno de los problemas específicos y relevantes del tema, evidenciándose la articulación de la referida situación-problema con los procedimientos, proposiciones, conceptos, argumentos y lenguaje.

A continuación desarrollamos el análisis de los libros de Cálculo a partir de la metodología que comprende el esquema general del texto y las configuraciones epistémicas global, intermedia y puntual.

6.2. ANÁLISIS DE LA INTEGRAL EN EL LIBRO DE CÁLCULO L1

El primer libro de texto que vamos a analizar se compone de 11 capítulos (311 páginas) y aborda los siguientes temas: Números Reales y Coordenadas en la recta; Ecuaciones y Gráficos; Funciones; Derivadas y Límites; Cálculo de Derivadas; Derivadas de Funciones Trigonométricas; Funciones Logarítmica y Exponencial; Máximos y Mínimos; Comportamiento de las Funciones; Cálculo Integral; Métodos de Integración.

El análisis se centrará en el capítulo que se relaciona con la noción de integral. Particularmente en el libro L1 se trata del capítulo 10. A continuación presentamos la síntesis de dicho capítulo a través de un *esquema general del* *texto*. Los apartados del capítulo han sido mantenidos en el referido esquema en la misma secuencia propuesta en L1.

6.2.1. Esquema general del libro L1

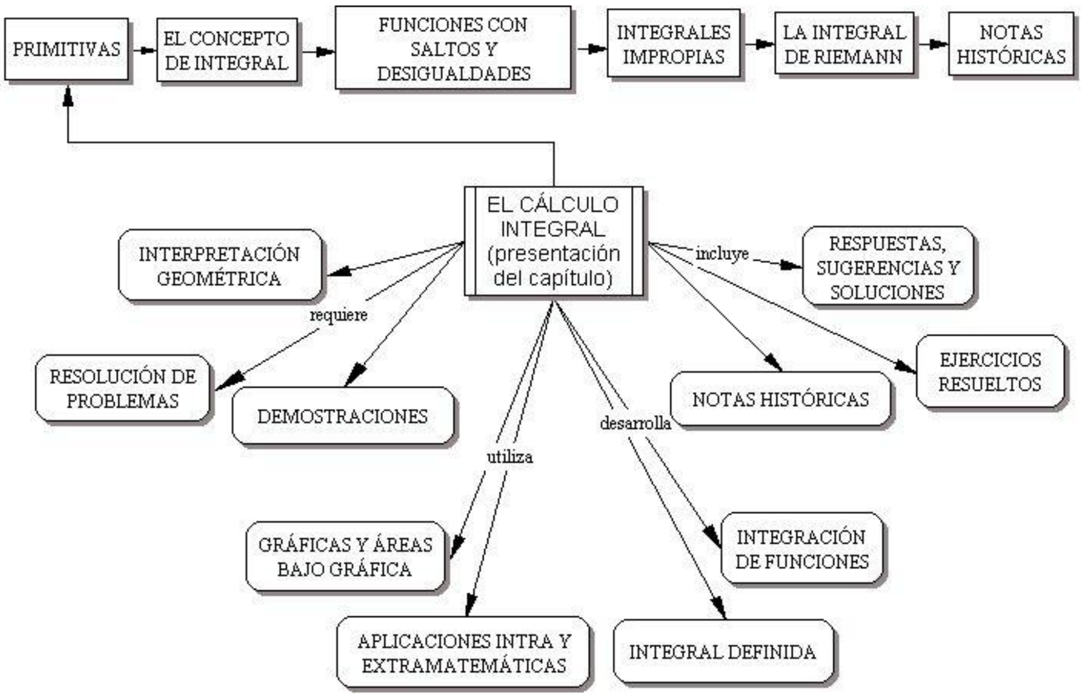


Figura 6.2: Esquema global de la integral en el libro de texto L1

Como podemos apreciar en la figura 6.2, el capítulo titulado *El Cálculo Integral* está elaborado a partir de seis apartados. Inicialmente el autor presenta el concepto de primitivas. En seguida, introduce la integral por medio del área bajo la gráfica de una función. Según el autor, esta manera de introducirla proporciona la ventaja de la "intuición geométrica" considerada bastante útil para el abordaje del Teorema Fundamental del Cálculo y, posteriormente, para calcular la integral de varias funciones.

La noción de integral como área bajo una curva es desarrollada en el apartado *El Concepto de Integral*. Dicho concepto está presentado intuitivamente. Según se explicita en el propio texto:

> La definición de integral que estamos presentando carece de una sólida fundamentación lógica; dicha fundamentación se desarrolló después del 1850. Como esto corresponde a un tema específico de un curso de Análisis Matemático, no será tratado en este curso de Cálculo. Para nuestros propósitos, basta la noción intuitiva de integral que, como veremos, nos llevará bastante lejos en la obtención de las propiedades y aplicaciones (Ávila, 2003, p. 240).

Además, se resaltan en el referido apartado las funciones integrables, la integración cuando el integrando es negativo, algunas propiedades de la integral, el Teorema Fundamental del Cálculo, la integral definida y la integral indefinida, y el uso de primitivas para calcular integrales.

Se introduce la integral impropia, después de abordar las *Funciones con Saltos*[10]. Asimismo, se discute la integrabilidad de la función $f(x) = x^{\alpha}$ para los distintos valores que α puede asumir, buscando generalizar los casos en que dicha función es integrable. Este tema es considerado indispensable para los estudiantes en este primer curso de Cálculo.

La definición de integral se desarrolla en el apartado *La Integral de Riemann*, en el cual el autor argumenta que las limitaciones de la noción de integral como área requieren su introducción como límite de una suma, para aplicarla a situaciones donde la idea de área no aparezca, como por ejemplo en las situaciones-problema relacionadas con las nociones de trabajo y energía. Basándose en la noción intuitiva del área de una región comprendida por la gráfica de $f(x)$, el eje de las abscisas y el intervalo [a, b], el autor desarrolla un razonamiento para justificar las definiciones de la integral de Riemann que presenta en las páginas 240 y 241, considerándose, respectivamente, la partición del intervalo [a, b] en *n* subintervalos iguales y suponiendo que los subintervalos sean distintos. Según la observación del autor, “la integral de Riemann consiste en un concepto más amplio y tiene una extensión mucho mayor que el simple concepto de área. La noción de área se convierte apenas en un caso particular de la integral” (L1, 2003, p. 259). Las situaciones-problema resaltadas en este apartado se refieren a trabajo y energía, movimiento de caída libre, y velocidad de escape.

En el último apartado del capítulo, *Notas Históricas*, el autor realiza una breve síntesis de la evolución de la integral en la historia de la matemática. Empieza

---

[10] Según el autor de L1, “un valor x_0 es considerado como una *discontinuidad del tipo salto* de una función si dicha función tiene los límites laterales finitos y distintos en el punto x_0” (L1, 2003, p. 247).

comentando los procesos de Arquímedes para determinar el área del círculo y de un segmento de parábola. Además, resalta la fundamentación del Cálculo en el siglo XIX por Cauchy y Riemann, lo que culminó con el desarrollo tanto del Análisis Matemático como de la Teoría de las Funciones. Finalmente comenta los trabajos de Einstein – sobre la Relatividad General – y de Maxwell con el descubrimiento de las Ecuaciones del Electromagnetismo, a partir de los cuales se desarrollaron los trabajos de Riemann y aplicaciones a la descripción de fenómenos físicos.

Por otra parte, consideramos pertinente destacar la estructura utilizada por el autor en la elaboración del texto, cuyos elementos más relevantes hemos sintetizado en la parte de abajo del esquema general. Dichos elementos fueron agrupados según la "acción" que desempeña en el texto y, en este estudio han sido descritos por los verbos: *incluye, requiere, utiliza* o *desarrolla*.

En este sentido entendemos que el texto analizado *incluye* un resumen introductorio en cada apartado, ejercicios propuestos, y respuestas, sugerencias o solución de ejercicios (lo que podemos observar también a través de los ejemplos). Tanto en la introducción del capítulo analizado como cada apartado, el autor sintetiza los temas que serán abordados e intenta conectarlos con los contenidos anteriormente abordados. Además, explicita algunas razones por las cuales incluye dichos temas en el texto y, en algunos casos, incluye una sencilla síntesis histórica. Todos los apartados finalizan con las secuencias de ejercicios propuestos (procedimentales, aplicativos o conceptuales) seguidas de sus respuestas generales, así como de sugerencias y soluciones de algunas cuestiones consideradas más complejas por el autor.

Consideramos que en la estructura del referido capítulo se *requiere* la interpretación geométrica, demostraciones y resolución de problemas. Con excepción del primer apartado (Primitivas), todos los demás se apoyan en figuras y gráficas para explicitar o motivar las nociones que se pretende desarrollar a partir de la "intuición geométrica". Debido a la complejidad de la mayoría de las demostraciones de los teoremas y propiedades, el autor aclara que dichas demostraciones no son pertinentes para un curso introductorio de Cálculo, sino que serán desarrolladas posteriormente en el curso de Análisis Matemático; sin embargo, otras demostraciones, cuyo desarrollo el autor considera importante y viable para el curso de Cálculo I, están propuestas a través de ejercicios o problemas que se quedan bajo la responsabilidad de los estudiantes. Generalmente, tras proponer diversos ejercicios relacionados al tema, se propone en el capítulo algunas situaciones-problemas cuya solución requiere estrategias relacionadas a la resolución de problemas.

El autor *utiliza* bastante las gráficas y la idea de área bajo una curva en la organización de prácticamente todos los temas abordados a lo largo del capítulo. Las aplicaciones intramatemáticas están contempladas por medio de ejemplos, ejercicios y situaciones-problema, mientras las extramatemáticas se encuentran en el apartado cinco, "La Integral de Riemann", y están especialmente relacionadas con la Física. Cuando se trata de las aplicaciones extramatemáticas, la integración se realiza con independencia de la noción de área.

Finalmente consideramos que el capítulo *desarrolla* las nociones de integral y de integral definida. En este sentido el autor trata de realizar la articulación entre los distintos apartados con la finalidad de desarrollar, con un determinado orden de complejidad, las referidas nociones. Además, nos parece relevante resaltar que el autor no realiza una nítida separación entre ambas nociones matemáticas. No obstante, ellas se articulan de manera bastante armónica a lo largo de todo el capítulo. En los distintos apartados, la noción de integral se desarrolla a partir de su aplicación en: (i) los procesos de cuadratura de Arquímedes, como la forma más primitiva de dicha noción; (ii) el cálculo de área, la más utilizada en el texto; (iii) el cálculo del límite de las sumas de Riemann, que se propone para hacer una distinción entre el significado atribuido a la integral y el significado de la integral como el área de una región; (iv) la integración de *funciones continuas por partes*[11], que permite escribir la integral en un intervalo como la suma de las integrales en los subintervalos; (v) el cálculo de la integral impropia, en un intervalo semiabierto I.

El esquema general del texto nos posibilita sintetizar su estructura. Sin embargo, nuestro interés radica en analizarlo con detalle y profundidad, por

[11] Según la definición planteada en L1, *f* es una *función continua por partes* en el intervalo [a, b] cuando está definida y es continua en un intervalo [a, b], excepto en una cantidad finita de puntos x_1, x_2, ..., x_r (Ávila, 2003, pp. 248-249).

tratarse de un capítulo de un libro de Cálculo usado en la Licenciatura en Matemáticas. Para ello realizamos un análisis usando algunas herramientas teóricas aportadas por el Enfoque Ontosemiótico. En este sentido utilizaremos las dimensiones desarrolladas en el referido enfoque: epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica.

A continuación realizamos el análisis del capítulo centrando la atención en la dimensión epistémica. Esto se llevará a cabo por medio de la descripción de las configuraciones epistémicas global, intermedias y puntuales del texto.

6.2.2. Configuración epistémica global de la integral en L1

La *configuración epistémica global* de la integral en el libro L1 puede ser descrita a partir de seis configuraciones epistémicas intermedias: *intuitiva, primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada y extramatemática.* Las configuraciones epistémicas se estructuran a partir de las situaciones-problema y pueden ser interpretadas en términos de los significados institucionales pretendidos para la integral en el libro L1. La noción de integral definida es presentada desde el inicio del capítulo de manera intuitiva y está mezclada con la noción de integral indefinida; ambas nociones van desarrollándose hasta la definición formal de la integral (integral de Riemann), contemplando las aplicaciones intra y extramátemáticas.

Para cada una de la situaciones-problema hemos identificado y sintetizado los procedimientos utilizados en su resolución, los conceptos/ definiciones emergentes, las proposiciones (teoremas y propiedades) relacionadas con la noción matemática de integral, el lenguaje utilizado en el texto, y los argumentos utilizados.

Aunque la estructura de L1 se basa en las definiciones, ejemplos y ejercicios, consideramos que las situaciones-problema relacionadas con el proceso de estudio de la integral, generalmente presentadas de manera implícita a lo largo del capítulo 10, pueden ser resumidas de la siguiente manera:

SP1: Hallar el área de un segmento parabólico a partir de procesos intuitivos.

SP2: Hallar la primitiva de una función, cuando se conoce dicha primitiva o se puede encontrarla por medio de las técnicas de integración.

SP3: Calcular el área de figura planas por medio de la integración.

SP4: Aplicar la definición de integral en la solución de situaciones- problema con independencia de la noción de área.

SP5: Cómo encontrar el valor de la integral definida para determinados problemas cuando no se puede determinar la primitiva (o ésta es difícil de calcular).

SP6: Cómo aplicar la integral en la resolución de problemas extramatemáticos.

En consonancia con las referidas situaciones-problema hemos sistematizado los conceptos contemplados en el capítulo 10 del libro L1. Se presupone que los estudiantes ya tengan el dominio de los conceptos previos necesarios para lograr entender los significados de los objetos matemáticos caracterizados por los conceptos emergentes, como el de integral. En este sentido podemos considerar que la emergencia del concepto de integral presupone la asimilación previa de los conceptos de función, límite, derivada, y área por los estudiantes. No obstante, la no adquisición de estos prerrequisitos por parte de los estudiantes puede convertirse en un obstáculo cognitivo en el proceso de aprendizaje de la integral.

Las principales proposiciones que han sido explicitadas en el capítulo 10 de dicho libro se relacionan con:

- La primitiva: si f es la primitiva de F, F + C, siendo C una constante, también lo es (p. 237).
- Las propiedades de la integral: aditividad, producto por un escalar, y aditividad en intervalos.
- Aditividad: siendo f y g funciones integrables en el intervalo [a, b], entonces f + g también es integrable en dicho intervalo y
- $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

- Producto por un escalar: siendo f una función integrable en el intervalo [a, b] y C una constante, entonces el producto Cf también es integrable en dicho intervalo y
- $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$;
- Aditividad en intervalos: siendo una función integrable en los intervalos [a, c] y [c, b], entonces la referida función es integrable en el intervalo [a, b] y
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (p. 241).
- El Teorema Fundamental del Cálculo: si f es una función continua en un intervalo [a, b], entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ es derivable en todos los puntos x internos a ese intervalo y $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ (p. 242).
- La integral definida (Regla de Barrow): la integral de f, de a hasta b, es igual a la resta G(b)-G(a) entre los valores de una primitiva cualquiera de f en los puntos b y a, respectivamente (p. 244).
- La integral de una función con discontinuidad tipo "salto": si una función f tuviere discontinuidad del tipo salto en un punto x0, ella será continua a la derecha de x_0 si tomásemos

$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$;

y será continua a la izquierda en ese punto si tomásemos

$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (p. 248).

Desigualdades: *considerando que a<b, y que f y g son funciones "continuas por partes" en [a, b], entonces:*

a) $\int_a^b f(x)dx \geq 0 \;\; si \;\; f(x) \geq 0$;

b) $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \;\; si \;\; f(x) \geq g(x)$;

c) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (p. 249).

En los procedimientos que se utilizan en la solución de las distintas actividades propuestas en el libro L1, se aplican las distintas propiedades relacionadas a la integral. Además, nos parece interesante resaltar las tres secuencias seguidas por el autor a lo largo del capítulo 10, en las cuales identificamos los principales procedimientos utilizados para la resolución de las situaciones propuestas.

La primera empieza con el desarrollo de la primitivación de funciones, presenta enseguida el concepto de integral, algunas de sus propiedades, el teorema fundamental del Cálculo, la integral definida y la integral indefinida, y el uso de primitivas para calcular integrales. Todo ello se utiliza básicamente en la resolución de las actividades relacionadas con hallar la integral definida de distintas funciones, así como de encontrar el área de ciertas regiones del plano. Para ello se ha utilizado como procedimientos el cálculo de integrales a partir de la noción de primitivas, la aplicación de las propiedades, la interpretación geométrica de la integral definida y el cálculo de área de regiones planas.

En la segunda parte el autor desarrolla la temática relativa a las funciones con salto e integrales impropias. En este caso, identificamos dos procedimientos. O primero consiste en remover la discontinuidad de la función. Para ello se le atribuye a la imagen de la función en el punto de discontinuidad x_0 el valor correspondiente al límite lateral (a la derecha o a la izquierda) de la referida función cuando x tiende a x_0; posteriormente se utiliza el mismo procedimiento para los demás puntos (cantidad finita) de discontinuidad de la función que se pretende integrar. Por tanto, "la extensión de f a los puntos [de discontinuidad] x_1, ... , x_r se produce solamente para que f se torne continua, por tanto integrable en cada subintervalo" I_n de [a, b], donde I_1= [a, x_1], I_2= [x_1, x_2],..., I_{r+1}= [x_r, b] (p. 249). De esta manera, se considera la integral de f en el intervalo [a, b] como la suma de las integrales en los respectivos subintervalos. Es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_r}^{b} f(x)dx .$$

El segundo procedimiento se refiere a la integral impropia y está basado en hallar, caso de que exista, el límite de la integral que se obtiene una vez que se ajusta la(s) extremidad(es) del intervalo en su(s) punto(s) de singularidad(es) añadiéndole o restándole un $\varepsilon \to 0$; caso que el punto de singularidad sea un cierto c, interior al intervalo de integración [a, b], se halla, caso de que exista, la suma de los límites de la función que se pretende integrar en los subintervalos $[a, c-\varepsilon]$ y $[c+\varepsilon, b]$, con $\varepsilon \to 0$; caso de que una de los extremos del intervalo de integración (o ambos extremos) sea(n) $+\infty$ ó $-\infty$ el procedimiento para hallar la integral impropia consiste en calcular, caso de que exista, el límite de la función que se pretende integrar en un cierto intervalo que se obtiene sustituyéndose ∞ por una constante R, con $R \to \infty$. Con el abordaje de la integral impropia el autor concluye los apartados relacionados con el desarrollo de la integral con la utilización de primitivas. En este sentido, en el libro L1 el autor contempla, por una parte, la integrabilidad de funciones continuas (definidas en un intervalo cerrado) y de funciones continuas por partes, con finitos puntos de discontinuidad en un intervalo [a, b]. Por otra parte, el autor realiza la conexión entre la integral de funciones continuas o continuas por partes en cierto intervalo cerrado y la integral impropia. De esta manera el autor plantea la definición de la integral impropia y, enseguida, desarrolla su cálculo para algunas funciones. Según lo que está explicitado en el libro didáctico L1:

> En general, sea una función integrable en el sentido ordinario en cualquier subintervalo [a+ε, b], con $\varepsilon > 0$. Supongamos que la integral de *f* tenga límite finito con $\varepsilon \to 0$. Naturalmente, caso de que *f* sea continua o continua a trozos en [a, b], dicho límite será la propia integral de *f* en este intervalo. Caso contrario, definimos la integral impropia de *f* en el intervalo [a, b] como el referido límite [...] (p. 251).

Según parece, el autor aborda la integración de las funciones continuas por partes para mostrar que la integral puede ser extendida a dichas funciones. No obstante, no profundiza en dicho tema, presentándolo apenas a través de un pequeño apartado titulado “Funciones con saltos y desigualdades”. En lo que se refiere a la integral impropia, el autor aclara en la introducción del capítulo que aunque abordará solamente las funciones que poseen primitivas inmediatas (dejando los demás casos para el curso de Cálculo II) justifica la introducción del referido concepto para atender la necesidad de que los estudiantes desarrollen satisfactoriamente las integrales de x^{α}, con diferentes valores de α.

La tercera parte comprende la definición de la integral de Riemann y sus aplicaciones a la Física: trabajo y energía, movimiento de caída libre, y velocidad de escape. El procedimiento utilizado en esta parte consiste en hallar la integral de una función, definida en un intervalo [a, b], con independencia de la noción de área. Para ello se determina el límite de la suma de Riemann o lo utiliza en la deducción de fórmulas relacionadas con las referidas aplicaciones de la integral a la Física.

Asimismo, cabe resaltar que el capítulo 11 del referido libro se dedica exclusivamente a los métodos (o técnicas) de integración, consideradas por el autor “importantes no solamente para calcular efectivamente primitivas de ciertas funciones, sino como instrumentos poderosos para el desarrollo de varios métodos y técnicas tanto en el propio Cálculo como en otras disciplinas” (p. 267). Entre dichos métodos destaca la importancia del estudio de la *integración por sustitución* e *integración por partes*. No obstante, el autor aunque reconozca la potencialidad de los *softwares* existentes para calcular integrales (citando *Maple* y *Matemática*), él resalta la importancia del estudio de las técnicas matemáticas que soportan la elaboración de dichos *softwares*. En este sentido, en el libro L1 se abordan los “métodos numéricos” de integración, donde se describe el procedimiento de la *aproximación trapezoidal*, considerado como un método general de integración numérica que da una mejor aproximación con la misma cantidad de puntos. Según se explicita en el referido libro, dicho método consiste en:

Dividir el intervalo [a, b] en n subintervalos iguales, por los puntos

$$x_i = a + \frac{(b-a).i}{n}, \quad i = 0,1,2,\ldots,n, \quad con \ x_0 = a \quad y \quad x_n = b.$$

Calculando los valores *f(x_i)*, podemos determinar el área del trapecio $A_{i-1}B_{i-}B_iA_i$, dada por

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \frac{b-a}{n}.$$

Entonces la integral es obtenida, aproximadamente, como la suma de las áreas de estos trapecios, es decir,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right].$$

Aunque la expresión anterior sea un valor aproximado de la integral, su aproximación será tanto mejor cuanto más grande se toma el valor de n (p. 277).

La utilización eficaz de los procedimientos exige un considerable conocimiento del tema por parte de los estudiantes. Su elección adecuada debe basarse en el tipo particular de función que se desea integrar. Además, particularmente tratándose de los métodos numéricos, la elección del método depende también del grado de aproximación que se pretende obtener, entre otros. Por tanto, la elección del procedimiento puede consistir en una de las principales dificultades para los estudiantes cuando ellos afrontan las situaciones-problemas y los ejercicios sobre la integral, incluyéndose aquellos propuestos en el libro L1.

Respecto de las situaciones-problema y ejercicios propuestos en el libro L1, hemos constatado que el autor presenta, inicialmente, algunos ejemplos generales seguido de sus resoluciones; a continuación plantea ejercicios procedimentales – relacionados con el cálculo de la integral y de la integral definida, incluyéndose los que necesitan aplicación de las "técnicas de integración" abordadas en el capítulo 11 – (75,9% de los ejercicios propuestos); un 6,2% de los ejercicios son conceptuales – relacionados con algunas demostraciones de teoremas y propiedades – y los aplicativos constituyen un 17,9%, de los cuales un 3,3% se refieren al cálculo de áreas y el mismo porcentaje es atribuido a los problemas físicos de mecánica.

También observamos la diversidad del lenguaje utilizado por el autor en la organización y exposición del texto, resaltándose el lenguaje verbal, algebraico, gráfico y analítico. A partir del lenguaje verbal y de las ilustraciones gráficas el autor desarrolla el tema sobre la integral de manera bastante clara, lo que debe proporcionar la comprensión del texto por los estudiantes. No obstante, la considerable cantidad de símbolos y expresiones matemáticas específicas del Cálculo pueden convertirse en obstáculos cognitivos para los estudiantes que desarrollan su proceso de estudio de la integral.

En lo que se refiere a las demostraciones, el autor argumenta que algunos teoremas y propiedades, dada su complejidad, no son demostrables en el nivel inicial de la enseñanza universitaria, sino posteriormente en el curso específico de Análisis Matemático, pues ambos cursos integran el currículo de la Licenciatura en Matemáticas. Sin embargo, resalta también que el estudiante debe desarrollar la capacidad de demostrar algunas propiedades y teoremas relacionados a las distintas nociones matemáticas. En el libro L1, el autor desarrolla algunas demostraciones, planteando las demás a través de ejercicios, con el propósito de que sean desarrolladas, de manera autónoma, por los estudiantes. Nos parece que la eficacia de esta estrategia adoptada en el referido libro es discutible, pues habría que investigar, por una parte, si los estudiantes de hecho son capaces de realizar demostraciones matemáticas al ingresar en la carrera de Licenciatura en Matemáticas; por otra parte, hasta qué punto las capacidades argumentativas pueden ser desarrolladas (o logradas) por los estudiantes cuando ellos asumen la responsabilidad por la realización de las demostraciones de algunos teoremas y propiedades matemáticas propuestas en el libro L1.

A lo largo del capítulo 10, el autor desarrolla su argumentación apoyándose en ejemplos, en gráficas y en el razonamiento deductivo. Lo que se evidencia en el texto es que en el nivel inicial de enseñanza universitaria no siempre es posible o conveniente realizar una argumentación matemáticamente rigurosa. No obstante, es importante justificar, de manera lógica y convincente, los resultados de los teoremas relacionados al tema y las propiedades utilizadas en la solución de los ejercicios y situaciones-problema planteadas.

Lo anterior nos permite tener una visión general de la forma, estructura y secuencia utilizadas por el autor para abordar la integral en el libro L1. A partir de las situaciones-problema, conceptos/ definiciones, proposiciones, procedimientos, lenguajes, y argumentos podemos describir las configuraciones epistémicas utilizadas en el referido libro. Según el marco teórico que estamos utilizando, la red de configuraciones epistémicas que emerge del texto sobre la integral es interpretada como el significado global de la integral en el libro de texto L1. A continuación, hemos sintetizado el significado global de la integral que hemos extraído del referido libro de Cálculo en la figura 6.3.

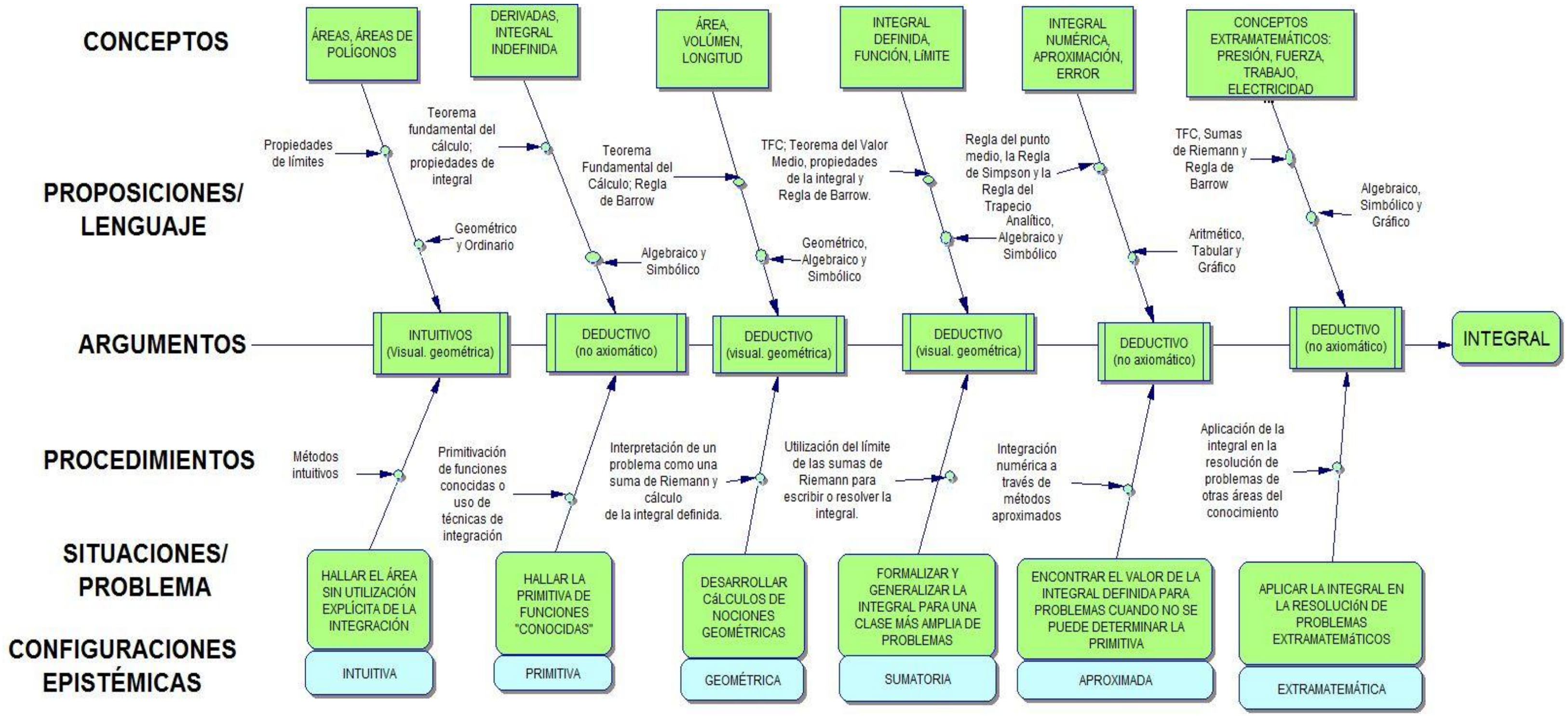


Figura 6.3: Significado global de la integral en el libro de texto L1.

En la sección 6.2.3, analizaremos, sintéticamente, las configuraciones epistémicas intermedias contempladas en el libro de texto L1.

6.2.3. Configuraciones epistémicas intermedias de la integral en L1

El significado global de la integral sistematizado en el referido libro corresponde a las seis configuraciones epistémicas intermedias de la integral: intuitiva, primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada y, extramatemática. Dichas configuraciones serán analizadas a continuación.

Configuración epistémica intuitiva de la integral en el libro didáctico L1

La configuración epistémica intuitiva de la integral está contemplada en las notas históricas del libro L1 y puede ser sintetizada a través de la figura 6. 4.

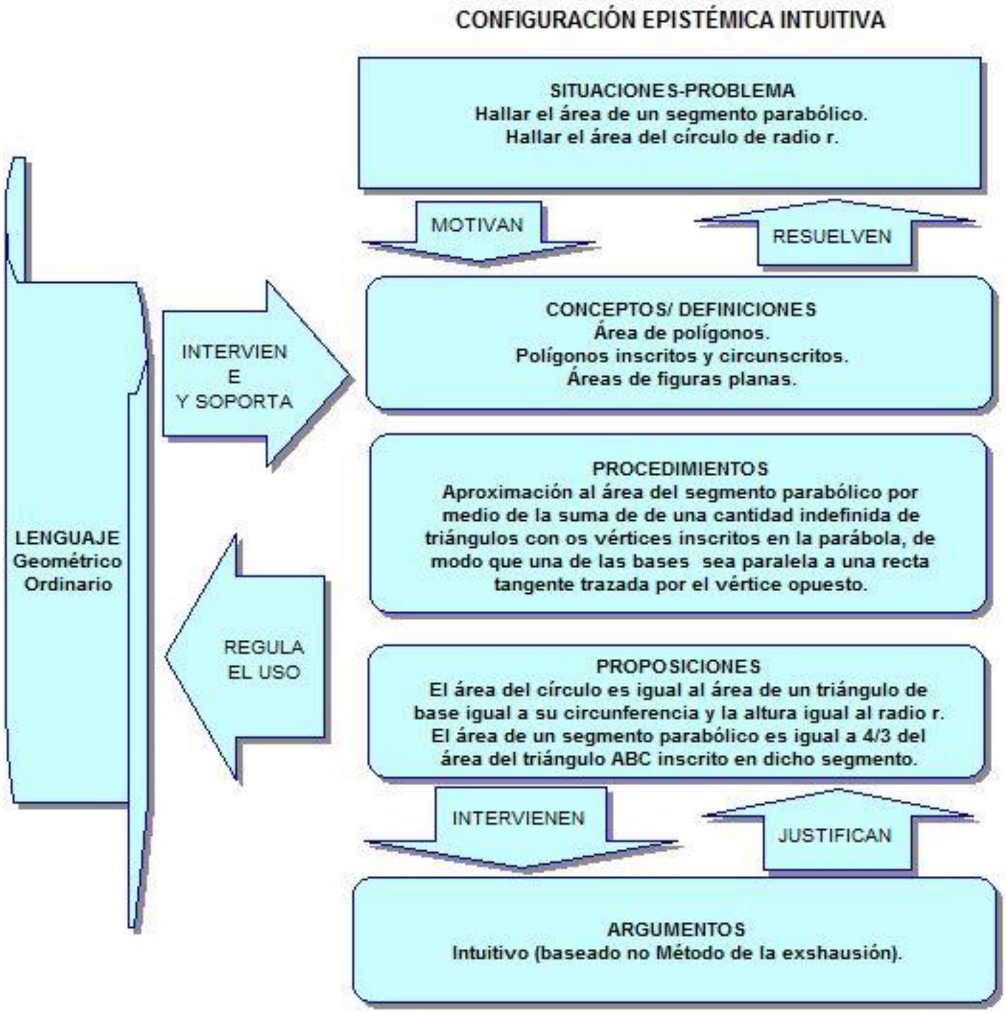


Figura 6.4: Configuración epistémica intuitiva de la integral en el libro L1

El autor considera que las situaciones-problemas que consistían en hallar el área de una figura geométrica plana o el volumen de un sólido eran cuestiones centrales en la antigua Grecia. En este sentido, afirma que Arquímedes (287-212 a. C.) perfeccionó el *método de la exhaución* atribuido a Eudoxio (406-365 a. C.), aplicándolo en las demostraciones de algunos de los resultados que inicialmente obtenía de manera intuitiva y poco rigurosa (p. 264). Sin embargo, en dicho libro han sido tratadas solamente dos situaciones-problema relacionadas con el cálculo del área del círculo y del segmento de parábola.

Estas situaciones-problema motivan la utilización de los conceptos previos de áreas de polígonos, polígonos inscritos e circunscritos a un círculo, rectas tangentes y rectas paralelas. A partir de los referidos conceptos previos emergen los conceptos del número π y del área de figuras planas: área del círculo y del segmento parabólico.

Las proposiciones relacionadas con las situaciones-problema anteriormente descritas son enunciadas en el libro didáctico L1 de la siguiente manera:

- El área del círculo es igual al área de un triángulo de base igual a la circunferencia del círculo y altura igual al radio r.
- El área del segmento de parábola es igual a 4/3 del área del triángulo ABC inscrito en dicho segmento.

Los procedimientos utilizados consisten, por una parte en la inscripción de polígonos regulares en el círculo empezando con el hexágono y duplicando sucesivamente el número de lados de dichos polígonos; análogamente se procedía con los polígonos circunscritos. Así, el área del círculo quedaba comprendida entre las áreas de un polígono regular inscrito y de otro circunscrito con n lados y ésta se aproximaba más para valores cada vez mayores de n. Por otra parte, el área del segmento parabólico era obtenida a partir de la suma de las áreas de una cantidad indeterminada de triángulos inscritos en el referido segmento, de tal manera que el vértice opuesto a una de las bases de cada uno de los n triángulos consistía, respectivamente, en el punto de tangencia de una recta paralela a cada una de las referidas bases.

A partir de la obtención de los resultados que solucionaban las situaciones-problema, Arquímedes desarrollaba su demostración por medio del método de la exhaución.

La principal dificultad encontrada en los procedimientos utilizados por Arquímedes para hallar el área de figuras geométricas planas (o el volumen de los sólidos) consistía en la falta de generalización de sus procedimientos, lo que implicaba en buscar una solución particular para cada situación-problema.

Configuración epistémica primitiva de la integral en el libro L1

El autor empieza el capítulo “El Cálculo Integral” del libro por medio de la configuración epistémica primitiva de la integral. La situación-problema general consiste en hallar la primitiva de ciertas funciones cuando ésta es conocida o puede ser encontrada por medio de un procedimiento que no requiere demasiada complejidad. Además, en los ejercicios propuestos se plantea determinar la primitiva de una función que satisfaga a ciertas condiciones (ejercicios 34-37, p. 238), así como verificar algunas ecuaciones trigonométricas usando la primitivación (ejercicios 38-40, p. 238). Estas situaciones-problema motivan el empleo de los conceptos previos de función y derivadas, y la emergencia del concepto de primitiva. Estos conceptos son útiles en el desarrollo de los procedimientos para solucionar las referidas situaciones-problema y consisten en encontrar la primitiva general de una función a través del proceso inverso del cálculo de derivadas, o por medio de los métodos de integración (ampliamente desarrollados en el capítulo 11). Para llevar a cabo dichos procedimientos se aplican algunas propiedades relacionadas con la existencia de una infinidad de primitivas de una función, la igualdad entre las derivadas de las primitivas particulares de una misma función (lo que implica en que la resta entre dos primitivas particulares de una misma función es una constante). Los argumentos para justificar las propiedades son intuitivos y basados en la verificación de algunos ejemplos o ejercicios en los cuales se busca establecer la relación inversa entre el cálculo de primitivas y el de derivadas. Todo ello se lleva a cabo por medio del lenguaje algebraico y simbólico. Resaltamos que en esta configuración no se contemplan ilustraciones gráficas, excepto la figura 11.2 que ilustra un método numérico (p. 278). La síntesis de la configuración epistémica primitiva contemplada en el libro L1 puede ser apreciada en la figura 6.5.

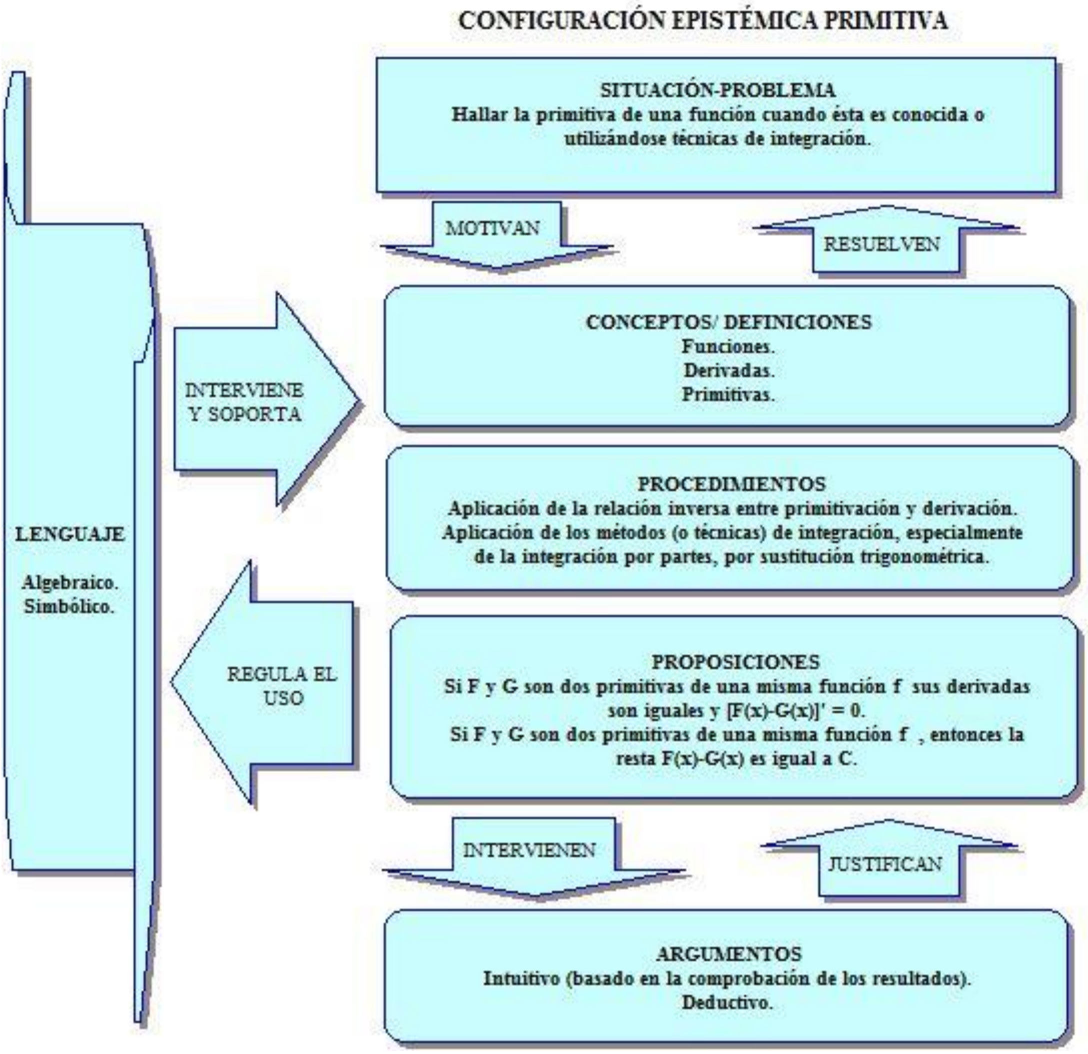


Figura 6. 5: Configuración epistémica primitiva de la integral en el libro L1.

Configuración epistémica geométrica de la integral en el libro L1

En la introducción del concepto de integral, desarrollado en el apartado 10.2 del capítulo 10 del libro L1, el autor afirma que el origen geométrico de la integral “está ligado al problema de determinar el área de una figura plana delimitada por una curva cualquiera” (p. 239). Sistematizamos la configuración epistémica geométrica de la integral, según el libro L1, a partir de las situaciones-problema asociadas a la determinación de áreas de regiones comprendidas entre curvas. La síntesis de dicha configuración está contemplada en la figura 6.6.

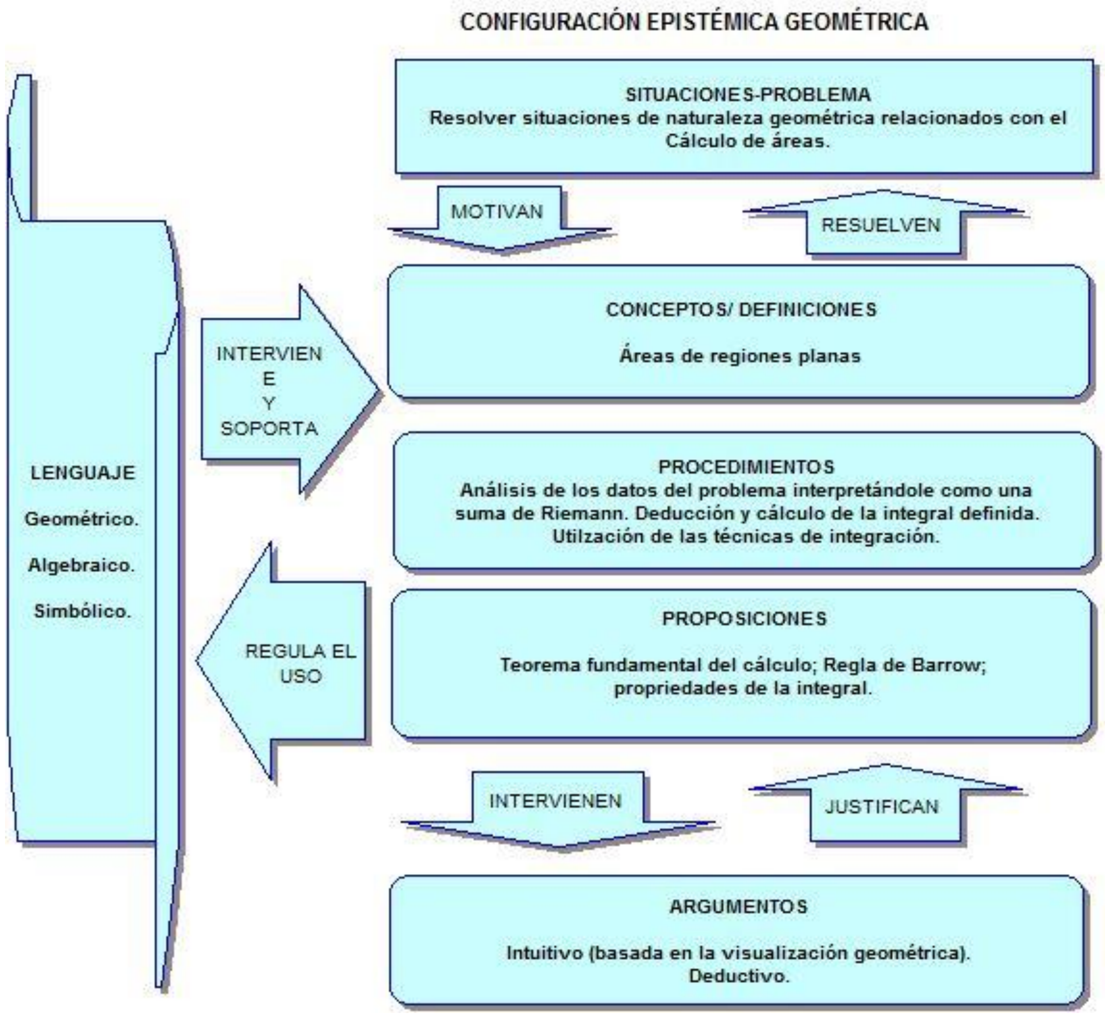


Figura 6.6: Configuración epistémica geométrica de la integral en el libro L1

En la configuración epistémica geométrica de la integral los conceptos previos de función, derivada, y primitiva son ampliamente utilizados para encontrar el área comprendida por una región a partir del aplicación de la integral definida. Esto requiere la utilización de procedimientos asociados a la determinación del área de una región comprendida por: una curva y los ejes coordenados; una curva y el eje de las abscisas (o de las ordenadas); una curva, el eje de las abscisas y dos rectas verticales; una curva, el eje de las ordenadas y dos rectas horizontales; una, dos o más curvas. Todo ello se lleva a cabo a través del cálculo de la integral definida por medio de primitivas. Para esto el procedimiento generalmente utilizado en el libro L1 consiste en esbozar una gráfica para visualizar la región para lo cual se pretende hallar el área; interpretar lo que se requiere en la situación-problema con el auxilio de la gráfica; encontrar una integral definida que represente dicha situación-problema; y, finalmente, a partir de la resolución de la integral obtener el área. Las principales proposiciones están contempladas en el apartado “Propiedades de la integral”: aditividad, producto por escalar, y aditividad por intervalos (descritas en la sección 5.2.2.1, i-iv) y a través del Teorema Fundamental del Cálculo (sección 5.2.2.1, v). La justificación de las referidas proposiciones está basada tanto en argumentos deductivos, como intuitivos (a partir de la visualización geométrica). En dicha configuración son utilizadas diversas formas de lenguaje, resaltándose el geométrico, algébrico y simbólico.

En el libro L1 las situaciones-problemas que están en la génesis de la configuración geométrica son todas referentes a la determinación de áreas de figuras geométricas planas, especialmente de las figuras no poligonales. Las demás situaciones-problema de naturaleza geométrica, como por ejemplo las relacionadas con volúmenes de sólidos y áreas de superficies de revolución son dejadas para el curso siguiente (Cálculo II). De esta manera, la conceptualización de la integral (indefinida y definida), las proposiciones dadas por sus propiedades básicas y por el Teorema Fundamental del Cálculo conducen únicamente a las situaciones-problema relacionadas con el área. En la solución de dichas situaciones, el autor suele utilizar la primitivación de funciones continuas en un intervalo cerrado.

Además, el autor aborda en líneas generales, a través de la integral y funciones continuas por salto, la integración de funciones discontinuas en una cantidad finita de puntos del intervalo [a, b]. Aunque el autor cumple con el propósito de generalizar un proceso de cálculo de áreas de figuras planas, consideramos que la presentación de los temas que tomamos para sistematizar esta configuración se queda débil en lo que se refiere a la potencialidad de aplicación de la noción de integral en la resolución de una gama de problemas intra-matemáticos. Una consecuencia de ello puede ser asociada con el obstáculo cognitivo que suelen presentar los estudiantes de un curso introductorio de Cálculo al interpretar la integral solamente como un área.

Configuración epistémica sumatoria de la integral

En el libro L1, el autor se apoya en la noción de área, a partir de su visualización geométrica, para plantear la fundamentación de la integral definida como el límite de las sumas de Riemann cuando n tiende a infinito. En este sentido, presenta la siguiente definición de la integral de Riemann:

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$ (Definición 10.4, p. 258), así como también las observaciones:

i) La función *f* de la definición anterior puede asumir valores positivos, negativos o nulos al contrario de la definición de integral dada a partir de la noción de área; además, no es necesario que los subintervalos de partición del intervalo [a, b] sean todos iguales, bastando, en este caso, que el subintervalo de mayor longitud tienda a cero. A partir de esta motivación (la partición de [a, b] en subintervalos de diferentes longitudes) y considerando la existencia del límite, la integral de Riemann también es definida por la expresión:

$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ (Definición 10.5, p. 259).

ii) La definición de la integral (10.4 y 10.5) es puramente numérica y no depende de la noción de área. A partir de la definición de la integral de Riemann “invertimos las cosas y definimos el área de la figura delimitada por la gráfica de *f,* por el eje de las abscisas y por las rectas *x=a* y *x=b* como la integral de dicha función en el intervalo [a, b]” (p. 259).

iii) La definición (10.5) nos lleva a cuestionar la existencia del límite de la función *f,* lo que implica discutir la integrabilidad de la referida función en [a, b]. No obstante, esto será demostrado en el Curso de Análisis. (L1, 2003, pp. 258-259).

A partir de las observaciones anteriores, el procedimiento adoptado para resolver las situaciones-problema con la utilizar de la integral de Riemann consiste en interpretar dicha situación como el límite de una suma, y luego encontrar la integral definida para solucionarla. El libro propone desvincular la integral definida de la noción de área y utilizarla de manera meramente numérica. Sin embargo, el área es definida por medio de la integral de Riemann. Las proposiciones están relacionadas con el Teorema Fundamental del Cálculo, el Teorema del Valor Medio, las propiedades de la integral y la Regla de Barrow. El principal concepto que emerge de esta configuración se refiere a la integral de Riemann, la cual se justifica basado en argumentos del tipo intuitivo (basado en la visualización geométrica) o deductivo. Las principales situaciones-problema abordadas en el texto que requieren la utilización de la integral de Riemann son de naturaleza extramatemática, por ello, serán tratadas con más detalles en la *configuración epistémica extramatemática* de la integral.

Configuración epistémica aproximada de la integral en el libro L1

Hemos sistematizado la configuración epistémica aproximada de la integral a partir de las situaciones-problema relacionadas con la determinación de la integral de una función que no posee una primitiva elemental o cuya diferencia F(b) -F(a) sea muy difícil o inviable para cierta primitiva F. Los conceptos que se ponen en juego en esta configuración son: funciones, derivadas, sumatoria, integral definida, y aproximación. El procedimiento general consiste en la aplicación de los métodos basados en la idea de aproximación del área representada por la integral por áreas más simple. Se utiliza el método de aproximación trapezoidal, regla de Simpson o utilización de softwares (Maple o Mathematica). Las propiedades contempladas se relacionan con la aditividad, producto por un escalar, aditividad por intervalos y Teorema Fundamental del Cálculo. Se utiliza, principalmente, el lenguaje aritmético, tabular y gráfico. Y los argumentos son del tipo deductivo, basados en la visualización geométrica.

La síntesis de la configuración epistémica aproximada de la integral, según el libro L1, pode ser contemplada a través de la figura 6.7.

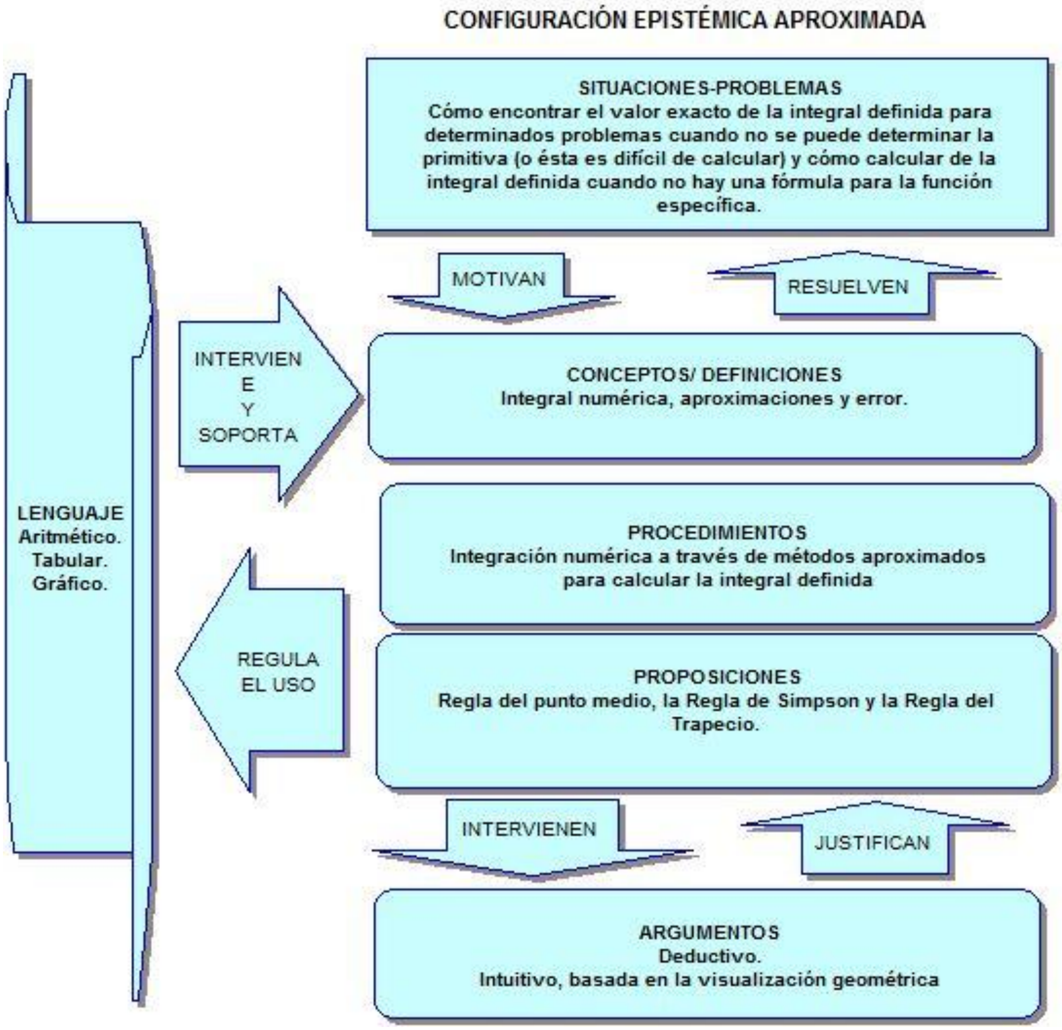


Figura 6. 7: Configuración epistémica aproximada de la integral en el libro L1

Configuración epistémica extramatemática de la integral

La sección 10.5 del capítulo 10 del libro L1 empieza con la aclaración de que “venimos trabajando con el concepto de integral como área bajo la gráfica de una función. Así entendida, la integral tiene limitaciones, entre las cuales está su dependencia de la noción de área. No obstante, precisamos de la integral para aplicarla a situaciones donde la idea de área no está presente [...] (p. 256). A partir de esta idea, sintetizamos la configuración epistémica aplicada de la integral en el libro por medio de la figura 6. 8.

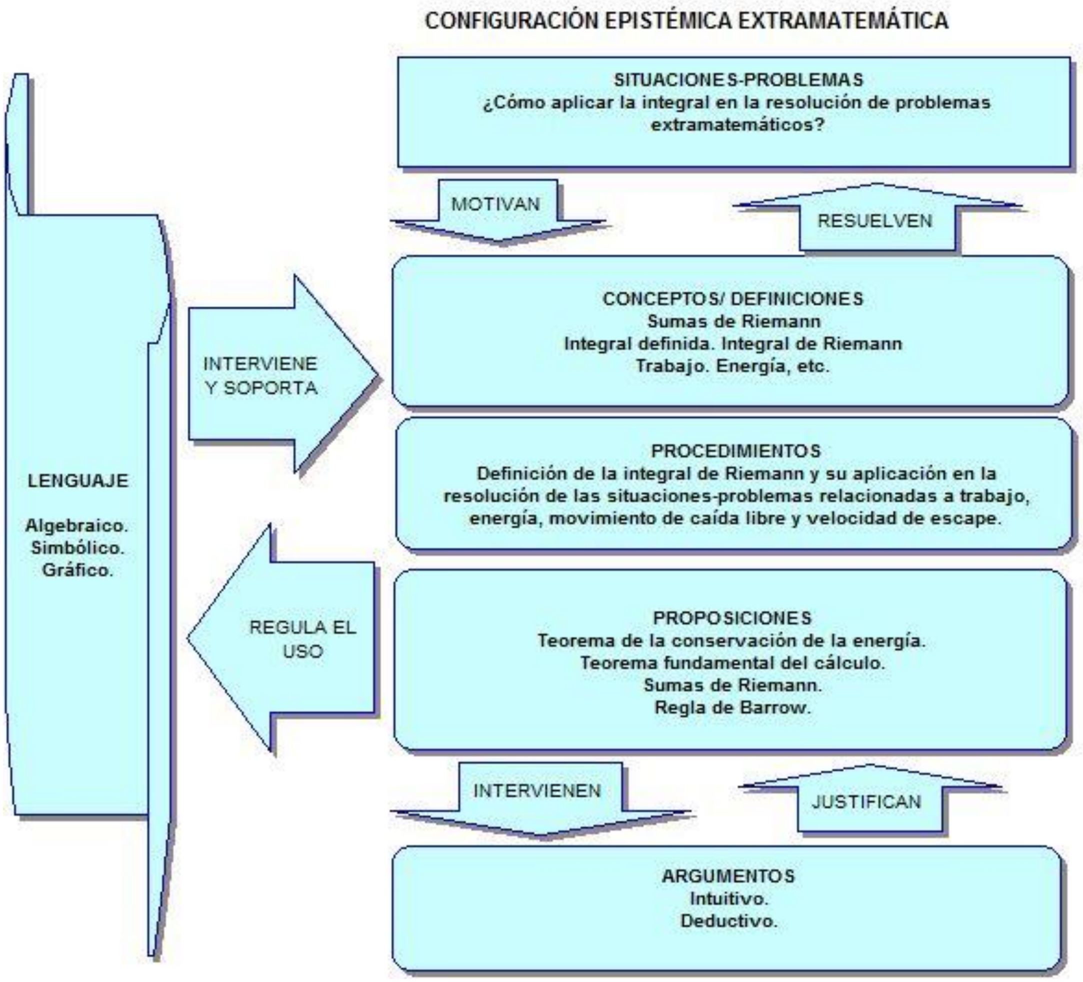


Figura 6.8: Configuración epistémica extramatemática de la integral en el libro L1

El autor justifica la necesidad de presentar el concepto de integral como el límite de una suma, para aplicarla en la resolución de situaciones-problema de naturaleza extramatemáticas, que sean independientes de la noción de área (trabajo y energía, por ejemplo), por medio de la integral de Riemann. En este sentido, dichas situaciones-problema se relacionan con los conceptos de funciones, límites, derivadas, sumatoria, sumas de Riemann, integral definida, integral de Riemann, trabajo y energía. Los procedimientos consisten en la utilización de la integral con independencia de la noción de área. En el libro L1 la integral de Riemann es aplicada en las situaciones-problema relacionadas con trabajo, energía, velocidad de escape, y caída libre. En las proposiciones, el libro contempla, implícitamente, la aplicación del Teorema Fundamental del

Cálculo y del Teorema de la conservación de la energía en la resolución de los ejemplos. En la organización y sistematización de esta configuración epistémica son utilizados diversos lenguajes como el verbal, algebraico, gráfico, simbólico, y analítico. Los argumentos son del tipo deductivo, utilizados en la deducción de fórmulas relacionadas con la Física a partir de la noción de integral de Riemann.

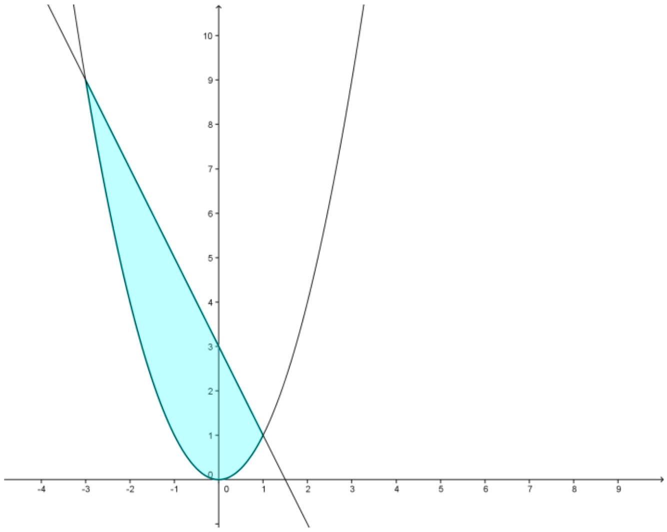
Consideramos que la aplicación de la integral de Riemann solamente a algunas de las situaciones-problema relacionadas con la Física no contempla la potencialidad de la noción de integral. Entretanto, las diversas situaciones, posiblemente de interés de los futuros profesores de matemáticas, en las cuales es posible aplicar la referida noción en su resolución deberían ser abordadas en los libros de texto de Cálculo dirigidos a la enseñanza universitaria de la integral. Asimismo, el hecho del referido libro contemplar solamente algunas aplicaciones físicas de la integral puede convertirse en un factor que dificulta la comprensión de los distintos significados y del éxito de su utilización en un abanico de situaciones-problema que seguramente enriquecerían la enseñanza de la integral en el nivel universitario.

6.2.4. Configuraciones epistémicas puntuales de la integral en L1

El último nivel de análisis que proponemos consiste en la elección y análisis de un problema específico de una configuración epistémica intermedia. La finalidad de ello es aclarar algunos aspectos de interés en algunos de los problemas particulares. Por lo tanto, no se trata de desarrollar un análisis exhaustivo de la totalidad de los problemas que se derivan de las éstas configuraciones, sino de identificar y detallar aquellos que pueden ser de interés en el estudio del tema.

En este sentido, hemos elegido un problema clásico de Cálculo del área entre curvas, descrito a continuación, para ejemplificar una configuración epistémica puntual de la integral en el libro de texto L1.

Vamos calcular el área de la figura comprendida entre la parábola *y* = x^2 y la recta *y* = *3-2x*, ilustrada en la figura siguiente. Este es el problema clásico de calcular el área de un segmento de parábola, tratado por Arquímedes en la antigüedad.



Primero, observamos que las dos curvas se interceptan cuando $x^2 = 3-2x$, es decir, cuando $x = -3$ y $x = 1$. Por lo tanto, el área correspondiente es dada por

$$\int_{-3}^{1}\left(3-2x-x^2\right)dx = \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} = 1\frac{2}{3} - (-9) = 10\frac{2}{3}$$

Como el lector puede notar, este es un cálculo muy sencillo, principalmente cuando es comparado con las dificultades encontradas por Arquímedes, justamente porque él no contaba con los recursos analíticos que poseemos actualmente (L1, 2003, p. 245).

Este problema resuelto se trata del ejemplo 2, de la sección 10.2 “El concepto de integral”. A partir del referido problema sintetizamos una configuración epistémica puntual de la integral en el libro L1, a través de la figura 6. 9.

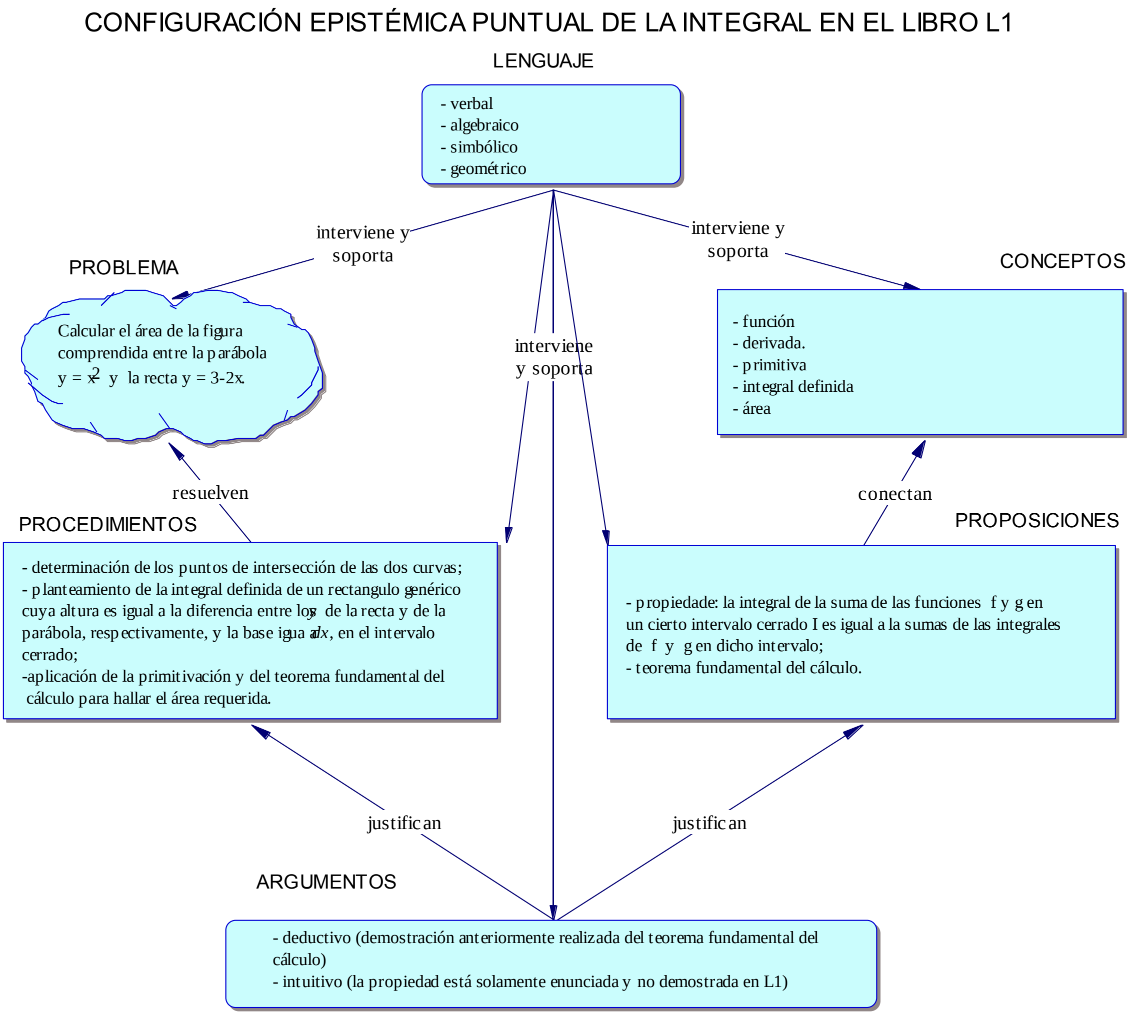


Figura 6.9: Una configuración epistémica puntual de la integral en el libro L1

La situación-problema clásica se relaciona con la determinación del área de un segmento parabólico. En este estudio el problema que utilizamos para ejemplificar una configuración epistémica puntual de la integral en el libro L1 consiste en "calcular el área de la figura comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 3\text{-}2x$". Para solucionarla es necesario articular algunos conceptos, tales como: función, derivada, primitiva, integral definida, y área de figuras geométricas planas. Estos conceptos son utilizados en los procedimientos que para encontrar el área requerida en el problema, que consiste en determinar los puntos de intersección entre las dos curvas, a partir de los cuales se especifica el intervalo cerrado I para una cierta integral definida que represente el área de la figura comprendida por las referidas curvas; el integrando consiste en la altura de un rectángulo genérico y es obtenida a través de la respectiva diferencia entre las imágenes de la recta y de la parábola para cada valor constante de x a lo largo del intervalo I; la base del rectángulo está representada por la diferencial dx. La integral es obtenida a partir del cálculo de la primitiva y el área por medio de la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo para la determinación del valor atribuido a la integral definida. Para llevar a cabo dicho procedimiento el autor utilizó, implícitamente, la propiedad relacionada con la integral de una suma de funciones en un intervalo cerrado I, y el Teorema Fundamental del Cálculo (demostrado en la misma sección). Todo ello regula el uso del lenguaje y éste, a su vez, interviene y soporta los conceptos, procedimientos y proposiciones puestos en juego en la solución del referido problema. En este ejemplo, apreciamos el lenguaje verbal, algebraico, simbólico, y gráfico. En cuanto a los argumentos, aunque aparecen de manera implícita, consideramos que el autor utilizó, tanto argumentos deductivos (en la demostración del Teorema Fundamental del Cálculo), como intuitivos (apoyado en la visualización geométrica y en el resultado de la propiedad relacionada con la integral de la suma de funciones continuas definidas en un intervalo cerrado I).

El problema que hemos analizado consiste en uno de los problemas más elementales y sencillos relacionados con el cálculo de áreas de figuras geométricas planas. El autor resalta el hecho de que su solución es factible porque se relaciona con la aplicación de las herramientas analíticas del Cálculo por medio de la integración. No obstante, comenta en las notas históricas, al final del capítulo 10, la dificultad del método de Arquímedes para solucionar la situación-problema clásica representada para determinar el área de un segmento de parábola.

La conexión que el libro L1 establece entre el Cálculo y su evolución histórica es bastante pertinente, permitiendo al lector no solamente conocer distintos aspectos relacionados a la génesis histórica de los temas, como la integral, sino reflexionar sobre la problemática que estuvo presente en su desarrollo. En este sentido, consideramos que las notas históricas incluidas en el libro L1 contribuyen con la reflexión de los futuros profesores de matemáticas relativa a la dificultad de generalización de los procedimientos del Cálculo integral, y de la justificación (de manera axiomática) de diversas proposiciones relacionadas con la integral en el curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria. Asimismo, revelan la creatividad de los antiguos matemáticos en la solución de los problemas clásicos intra y extramatemáticos y la potencialidad de la integral en contraste con los demás métodos primitivos de cálculo. Todo ello puede favorecer el aprendizaje de la integral por parte de los estudiantes universitarios.

La percepción de la potencialidad de aplicación de la integral, como una herramienta útil en la solución de muchas de las situaciones-problema relativas al currículo de la Licenciatura en Matemáticas, o del uso de sus nociones intuitivas en la planificación e implementación de las clases de matemáticas de la enseñanza secundaria puede convertirse en elemento motivacional para el aprendizaje de la integral por los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria.

A continuación analizamos, sintéticamente, el libro de Cálculo L2. Este libro está entre los libros de Cálculo más utilizados en la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. Aunque este análisis se basa en la misma metodología aplicada anteriormente, enfatizaremos apenas los aspectos generales de L2 y las particularidades que le distinguen de L1.

6.3. ANÁLISIS DE LA INTEGRAL EN EL LIBRO L2

El libro de Cálculo L2 se compone de 8 capítulos (579 páginas) titulados, respectivamente: Funciones y Modelos; Límites y Derivadas; Reglas de Diferenciación; Aplicaciones de la Diferenciación; Integrales; Aplicaciones de Integrales; Técnicas de Integración, y Más Aplicaciones de Integración.

En función del tema de interés de este estudio, el análisis que desarrollamos está centrado en los capítulos que se relacionan con la noción de integral: Capítulo 5 “Integrales”, Capítulo 6 “Aplicación de la integración, Capítulo 7 “Técnicas de Integración”, y Capítulo 8 “Más Aplicaciones de Integración”. A continuación sintetizamos el esquema general referente a la integral a partir del análisis de los referidos capítulos.

6.3.1. Esquema general referente a la integral, sus aplicaciones y técnicas de integración

El autor empieza el estudio de la integral, en la sección 5.1, a partir de los problemas relacionados con el área de figuras geométricas planas con lados curvilíneos y a la determinación de distancias. En la sección 5.2, formaliza la definición de la integral definida como el límite de las sumas de Riemann, aplicándola al cálculo de las integrales; luego, presenta la "regla del punto medio" sugiriendo su aplicación a las situaciones-problemas cuyo propósito es encontrar una aproximación para la integral; enuncia, aplica y/o demuestra diversas propiedades de la integral y propone una sección de ejercicios. El enunciado, demostración y aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo están contemplados en la sección 5.3. A partir del teorema fundamental del Cálculo, en la sección 5.4, el autor conecta la integral definida con la integral indefinida, enuncia y ejemplifica el teorema de la variación total, y propone diversos ejercicios. En la sección 5.5, el texto desarrolla la "regla de la sustitución de variables" para encontrar las antiderivadas de algunas funciones compuestas, aplicándola al cálculo de algunas integrales específicas; en esta sección se resalta la integración de funciones simétricas. El capítulo 5 termina con la proposición de ejercicios de revisión y problemas.

El capítulo 6 aborda las aplicaciones de la integral. Comienza con "áreas entre curvas" (sección 6.1) contemplando una diversidad de situaciones-problemas relacionadas con áreas comprendidas por curvas. La sección 6.2 está dedicada al estudio de los "volúmenes" de distintos sólidos; además, en la sección 6.3 los volúmenes de los sólidos son determinados por medio del método de las capas cilíndricas. La sección 6.4 aborda las situaciones-problemas para las cuales se aplica la integral al estudio de la noción de trabajo. Y, en la última sección (6.5) se define el "valor medio de una función en un intervalo [a, b]" seguido de la proposición y aplicaciones del "teorema del valor medio para integrales". En la conclusión del capítulo el autor propone los ejercicios de revisión y los problemas de aplicación del tema.

Las técnicas de integración son contempladas en el Capítulo 7, en el cual el autor aborda: integración por partes, integrales trigonométricas, Sustitución trigonométrica, integración de funciones racionales por fracciones parciales, estrategias de integración, integración usando tablas y sistemas algebraicos computaciones (CAS), integración aproximada, e integrales impropias. Para cada caso, el autor presenta el método específico seguido por varios ejemplos resueltos y propone diversos ejercicios. La conclusión del capítulo sigue la estructura de los demás capítulos de L2, es decir, contempla los ejercicios de revisión y las situaciones-problemas referentes a todas las secciones.

El capítulo 8, “más aplicaciones de integración”, aborda la “longitud de un arco” (sección 8.1), donde se resalta la “función longitud de arco”; el “área de una superficie de revolución” está contemplada en la sección 8.2; en las “aplicaciones de la integral en la Física y en la Ingeniería” (sección 8.3), el autor aborda situaciones-problemas relacionados con las nociones de *Presión hidrostática y fuerza, momentos y centros de masa.* La sección 8.4 se refiere a las “aplicaciones de la integral en la Economía y en la Biología”, presentando las nociones de *excedente del consumidor, circulación sanguínea, y capacidad cardiaca*. La “probabilidad” está presente en la sección 8.5, a partir de la cual se desarrolla las nociones de *valores medios, y distribuciones normales*.

Cada apartado se estructura con una breve síntesis del tema, seguida de ejemplos, definiciones y ejercicios. Al final de cada capítulo (o de los temas centrales) se propone un proyecto para ser desarrollado, así como unos ejercicios de revisión (o tests), así como problemas de aplicación. En la resolución de varios ejercicios propuestos el autor sugiere la utilización de un CAS. A continuación sintetizaremos la estructura general de los dos capítulos que hemos analizado por medio de la figura 6.10.

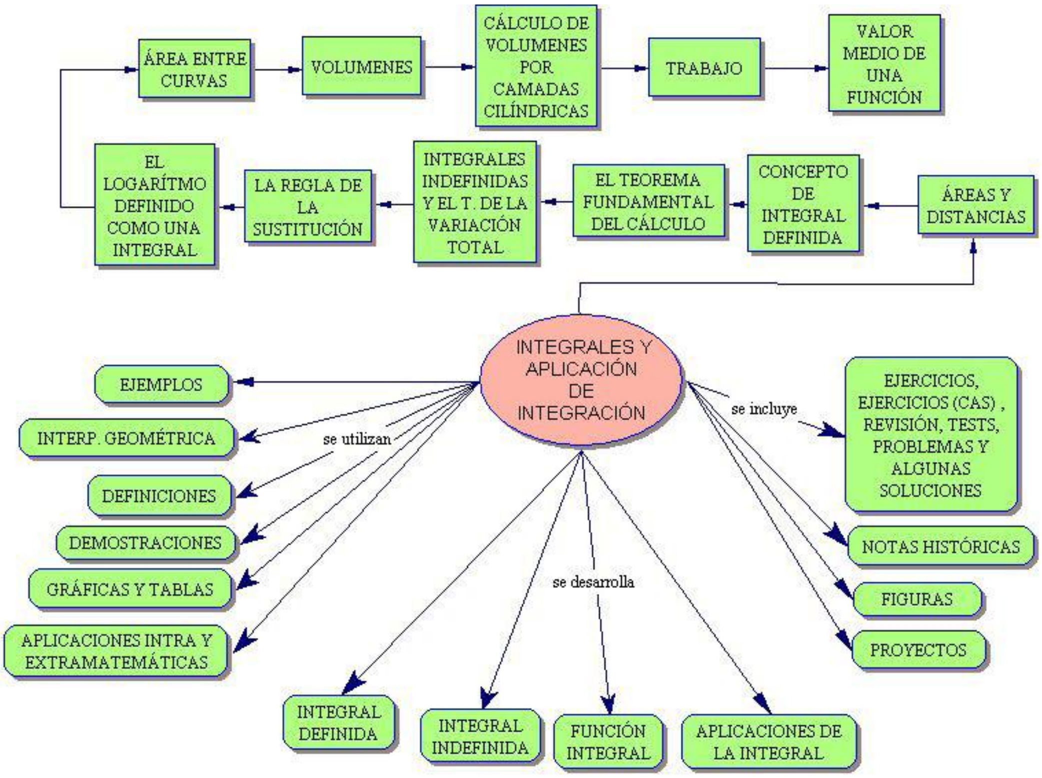


Figura 6.10: Estructura general de la integral en el libro de Cálculo L2

En la figura 6.10, destacamos los aspectos más relevantes utilizados por el autor en la estructuración de la secuencia didáctica relativa a la integral en el libro didáctico L2. La estructura de los capítulos consiste en la subdivisión del tema en secciones. Cada sección empieza con un breve resumen seguida de la introducción del tema a partir de situaciones-problemas, definiciones, o proposiciones. En el desarrollo de las secciones el autor presenta algunos ejemplos resueltos, donde se resaltan los procedimientos que se utilizan en cada caso; al final de cada sección, propone diversos ejercicios y situaciones-problemas en que dichos procedimientos pueden resultar eficaces para su resolución. Las proposiciones (propiedades, teoremas, ...) se tornan operativas por medio de los procedimientos que se utilizan para solucionar los ejercicios y las situaciones-problemas propuestas. Los ejemplos suelen ser desarrollados apoyándose en tablas y en figuras geométricas. También encontramos que las demostraciones son del tipo intuitivas (basadas en la visualización geométrica) o deductivas. Asimismo, cada capítulo contempla al menos un proyecto asociado al tema tratado en una de las secciones y, al final, un bloque de ejercicios de revisión y otro de problemas generales. Todo ello se desarrolla a través de distintos lenguajes: verbal, algebraico, simbólico, gráfico, tabular, analítico y computacional.

De manera general, para efecto de la sistematización de este análisis, consideramos que en el desarrollo de los capítulos el autor *utiliza* ejemplos, interpretación geométrica, definiciones, demostraciones, gráficas y tablas, y aplicaciones intra y extramatemáticas. En lo que se refiere a los ejercicios (procedimentales, aplicativos o conceptuales), algunos requieren la utilización de un CAS y otros son de revisión o tests y se ubican en el final del capítulo juntamente con los problemas propuestos. Podemos constatar la inclusión de algunas notas históricas a lo largo del texto y, de manera bastante expresiva, la de figuras para explicitar o justificar las proposiciones relacionadas a las distintas nociones matemáticas que se pretende desarrollar. No obstante, la principal novedad del libro L2 consiste en la inclusión de los *proyectos* en todos los capítulos. Asociados al estudio de la integral encontramos los siguientes proyectos: *funciones áreas* ("Proyecto Descubrimiento" con la finalidad de anticipar resultados o encontrar patrones); *Newton, Leibniz y la invención del Cálculo* ("Proyecto Escrito", para comparar métodos actuales con otros utilizados al inicio de la historia de ciertas nociones matemáticas); *Dónde sentarse en los cines* ("Proyecto Aplicado", involucra aplicaciones que requieren de la imaginación de los estudiantes); *Patrones en integrales* ("Proyecto descubrimiento", consiste en la sugerencia y demostración de fórmulas para algunas integrales definidas a partir de la utilización de un CAS); y *Rotación alrededor de una recta inclinada* ("Proyecto descubrimiento" con la finalidad de descubrir fórmulas para determinar el volumen de sólidos de revolución y el área de superficies de revolución cuando el eje de rotación consiste en una recta inclinada).

Las principales nociones matemáticas que *se desarrollan* en el texto son: integral definida, integral indefinida, función integral y aplicaciones de la integración en situaciones-problemas intra y extramatemáticos. En las aplicaciones de la integración, el autor contempla un abanico de situaciones relacionadas con las nociones de área (bajo curva y entre curvas), distancias, volúmenes, trabajo, predicciones poblacionales, excedente de consumo, flujo tasa de variación, etc. Entretanto, el autor resalta que ha empezado el capítulo “con los problemas de área y distancia y vamos a usarlos para formular la idea de integral definida, que es el concepto básico del Cálculo Integral” (L2, 2003, p. 367).

Tras analizar el esquema general de la integral en el libro L2, sistematizamos, a continuación, las configuraciones epistémicas global, intermedias y puntual de la integral enfatizando los aspectos en los cuales el libro L2 más se diferencia de L1.

6.3.2. Configuración epistémica global de la integral en L2

En esta sección presentamos una síntesis de la configuración epistémica global de la integral, según el libro didáctico L2, resaltando especialmente los aspectos que diferencian o complementan los significados atribuidos a la integral en L1 y L2. Dicha configuración consiste en el segundo nivel del análisis del texto matemático que estamos realizando y su síntesis puede ser apreciada en la figura 6.11.

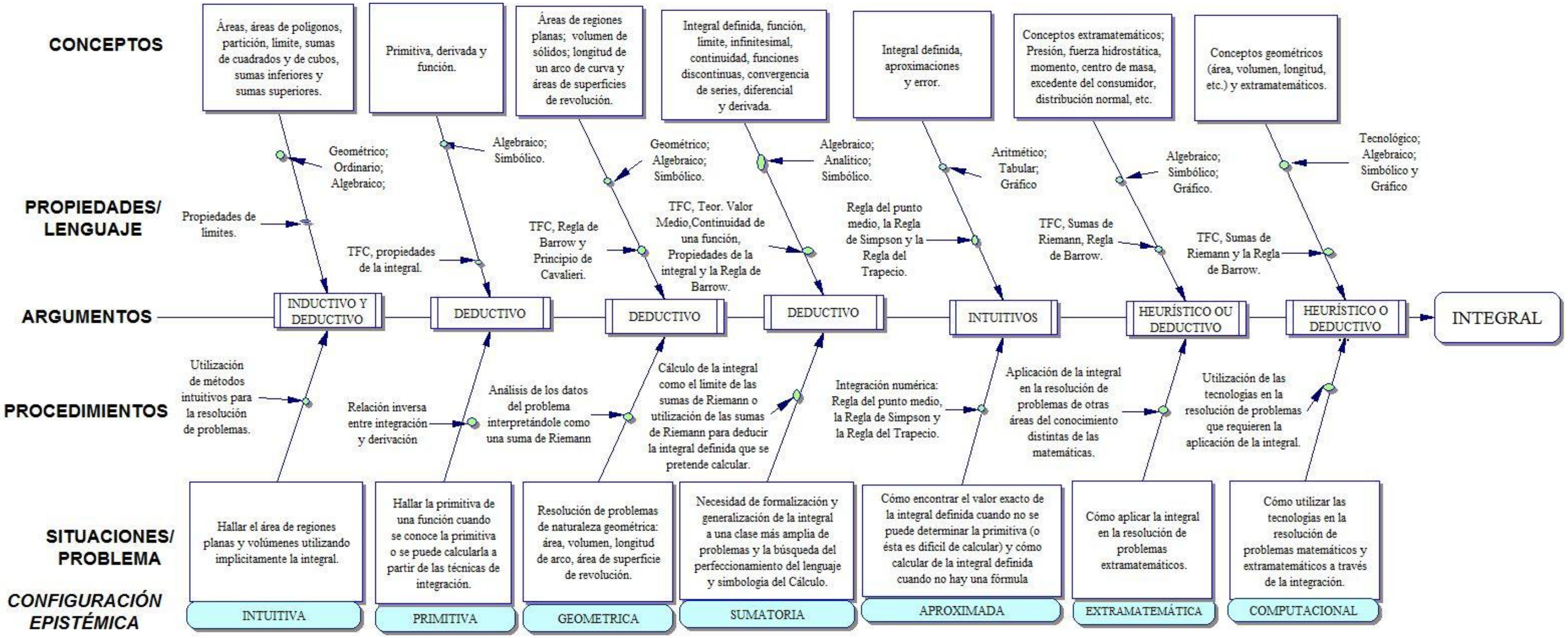


Figura 6.11: Configuraciones epistémicas de la integral en el libro L2

Las configuraciones epistémicas de la integral en el libro L2 pueden ser sistematizadas a partir de siete configuraciones epistémicas intermedias: intuitiva, primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada, extramatemática y tecnológica.

La configuración epistémica aproximada ha sido sistematizada a partir de las situaciones-problema relacionadas, por una parte, al cálculo de áreas y distancias, con las cuales el autor introduce el capítulo 4 (Integrales). Las referidas situaciones son resueltas a partir de la realización de estimativa del área y de la distancia. Por otra parte, en el capítulo 7 (Técnicas de integración) el autor contempla la integral aproximada (sección 7.7) explicitando que las referidas técnicas deben ser utilizadas en los casos para los cuales la antiderivada (o primitiva) es difícil de ser hallada o no existe. Esta configuración también ha sido contemplada en el libro L1. No obstante, aunque el autor de L1 haya reconocido la importancia de esta configuración, no desarrolló su aplicación a lo largo del libro, limitándose a presentarla como una de las técnicas de integración.

Basado en la suma de Riemann, el autor formaliza la noción de integral definida. Esta integral es considerada un tipo especial de límite que sucede en una gran variedad de situaciones-problemas aunque la función que se pretende integrar no sea necesariamente positiva. En este contexto sistematizamos la configuración epistémica sumatoria de la integral en el libro L2. La situación problema general que encontramos en la referida configuración está relacionada con hallar la integral definida de una función continua (o con una cantidad finita de puntos de discontinuidad) a través de la suma de Riemann. El procedimiento adoptado en L2 consiste en interpretar las situaciones-problemas en términos de un límite de la suma de Riemann, resolver dicho límite interpretando la solución encontrada. Todo ello se realiza utilizando las definiciones de límite, sumatoria, suma de Riemann, e integral definida. Estas definiciones juntamente con las propiedades de la integral (integral de una constante, integral de una suma o resta de funciones, e integral de un producto de una constante por una función), así como de las propiedades comparativas de la integral y la "regla del punto medio" constituyen en las nociones y proposiciones claves que se pone de manifiesto en el cálculo de la integral definida desarrollado en el libro didáctico L2. El lenguaje presente en esta configuración es del tipo simbólico, algebraico, gráfico, verbal, tabular, y computacional. En cuanto a los argumentos, son del tipo deductivo y las demostraciones de la integral definida se basan en el proceso de encontrar el límite de la suma de Riemann para una cantidad infinita de términos.

La configuración epistémica primitiva de la integral está sistematizada en la sección 5.3 del libro titulada "El Teorema Fundamental del Cálculo". La situación-problema general consiste en hallar la antiderivada (o primitiva) de una función continua. El procedimiento consiste en establecer la relación inversa entre la integral y la derivada y aplicarla en la resolución de integrales sin la necesidad de recurrir al límite de la suma de Riemann. En esta configuración están presentes los conceptos de derivada, antiderivada (o primitiva), integral definida, e integral indefinida; además en el L2 se define el logaritmo natural a partir de una integral y luego se utiliza la "función logaritmo natural" para expresar el número *e* como un límite. El Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema de la Variación Total constituyen las principales proposiciones desarrolladas en la referida configuración. El lenguaje utilizado es del tipo verbal, algebraico, geométrico, simbólico, y tabular. Los argumentos son deductivos; las demostraciones de los teoremas se apoyan en las nociones matemáticas de área y distancia.

La diversidad de situaciones-problema contempladas en el libro L2, relacionadas con la aplicación de la integración en la solución problemas geométricos (especialmente en los capítulos 6 y 8), sirven de apoyo para la sistematización de la configuración epistémica geométrica de la integral. Dichas situaciones-problema contemplan, además del cálculo del área de figuras planas y de volúmenes, la determinación de la longitud de un arco y el área de superficies de revolución. El procedimiento adoptado consiste en encontrar una integral definida representativa de la situación-problema, resolverla a través de la primitivación e interpretar el resultado según el problema que se pretende resolver. Las definiciones básicas se refieren a las nociones geométricas de área (bajo curva, entre curvas, y de superficies de revolución), volumen y longitud de un arco. Las proposiciones contemplan las propiedades geométricas específicas relacionadas con las definiciones de áreas, volúmenes y longitud de arco. El lenguaje utilizado es del tipo geométrico, simbólico, y algebraico. Los argumentos son deductivos y se apoyan fuertemente en la visualización geométrica.

Por otra parte, las situaciones-problema relacionadas con la aplicación de la integral, pero distintas de las geométricas, son contempladas de manera abundante en el libro L2. A partir de las referidas situaciones-problema realizamos la sistematización de la configuración epistémica extramatemática de la integral. Dicha configuración contempla una diversidad de conceptos relacionados con las aplicaciones de la integral en distintas áreas del conocimiento. En Física e Ingeniería el autor resalta los conceptos de presión, fuerza, momentos y centros de masa. En Economía y en Biología, los conceptos destacados son de excedente del consumidor, circulación sanguínea, y capacidad cardiaca. En Probabilidad están contemplados los valores medios y las distribuciones normales. Entre las principales proposiciones relacionadas con esta configuración, destacamos el Teorema de la variación total, el Teorema de Pappus y la ley de Hooke, además de las propiedades específicas relacionadas con cada situación-problema que se desarrolla con la aplicación de la integral. En el lenguaje, predominan el simbólico, algebraico, y gráfico. Los argumentos utilizados son deductivos.

La configuración epistémica tecnológica contempla las situaciones-problema cuya solución requiere el uso de recursos tecnológicos (al menos una calculadora gráfica) o un sistema algebraico computacional – CAS (Maple, Derive, Matemática, TI-92). El procedimiento consiste en la utilización de una herramienta tecnológica para “evaluar” las integrales, representar gráficas, etc. Los principales conceptos usados en esta configuración se relacionan con derivada, antiderivada, e integral definida. Las proposiciones no son contempladas explícitamente en el libro L2, sino las que soportan los referidos softwares. El lenguaje es del tipo Tecnológico, algebraico, simbólico, y gráfico (visualización en la pantalla). Los argumentos son predominantemente intuitivos (basados en la visualización gráfica y en los resultados numéricos y algebraicos obtenidos).

6.3.3. Configuraciones epistémicas intermedias de la integral en L2

Aunque las secuencias a través de las cuales los autores abordan los temas en cada libro y que las propuestas metodológicas contempladas sean bastante distintas, los significados asociados a la integral mantienen una cierta regularidad como podemos apreciar a través de las dos síntesis del significado global de la integral anteriormente sistematizadas. No obstante, consideramos que dos de las configuraciones epistémicas de la integral contempladas en L2 merecen ser resaltadas por medio de un análisis más detallado. Se trata de las configuraciones epistémicas intermedias sumatoria y tecnológica de la integral que analizamos a continuación.

Configuración epistémica sumatoria de la integral en el libro L2

En la configuración epistémica sumatoria de la integral, la resolución de los ejemplos es realizada usando el límite de la suma de Riemann. Las situaciones-problema propuestas también deben ser resueltas de la misma manera. Esto difiere de otros libros de textos de Cálculo que solamente utilizan las sumas de Riemann para definir la integral y luego desarrolla las aplicaciones de la integral por medio de la primitivación. En la figura 6.12 sintetizamos la referida configuración.

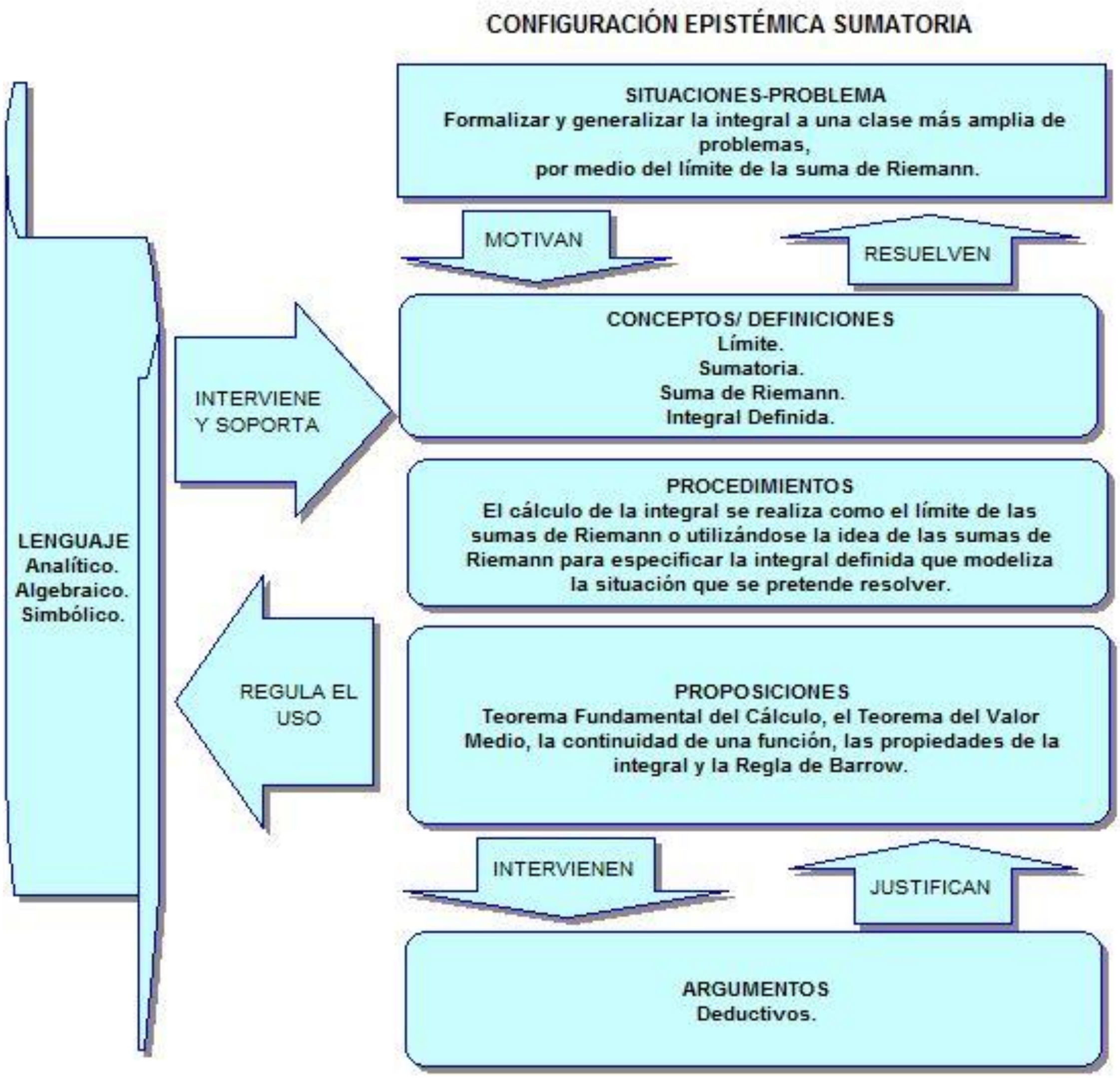


Figura 6. 12: Configuración epistémica sumatoria de la integral en el libro L2

Las situaciones-problema contempladas en la configuración epistémica sumatoria de la integral en L2 se relacionan con:

- Expresar el límite de una suma de Riemann como una integral en un cierto intervalo cerrado;
- Determinar la suma de Riemann para una función f, continua en un intervalo [a, b], para un cierto valor n;
- Calcular la integral definida de una función f, continua en un intervalo cerrado [a, b], a través del límite de la suma de Riemann;

- Establecer una expresión para una cierta integral definida como un límite de la suma de Riemann y usar un CAS para calcular el valor de la referida expresión;
- Calcular la integral definida de cierta función e interpretar su resultado en términos de área;
- Aplicar las propiedades de la integral para calcular la integral definida de ciertas funciones;
- Estimar el valor de la integral definida para los valores de cierta función presentados en una tabla;

Como conceptos/ definiciones asociados a la referida configuración resaltamos límite, sumatoria, suma de Riemann, e integral definida. No obstante, la principal definición contemplada consiste en la siguiente definición de la integral definida:

> Si *f* es una función continua definida por $a \leq x \leq b$, partimos el intervalo [a, b] en *n* subintervalos de longitudes iguales $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sea $x_0(=a), x_1, x_2, \ldots, x_n(=b)$ los extremos de dichos subintervalos y vamos a elegir los puntos $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ en estos subintervalos de manera que x_i^* está en el i-esimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de *f* es
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$ (L2, 2003, p. 378).

Tras presentar la definición de la integral definida, el autor comenta que si asumimos que la función *f* es continua, puede ser demostrado que el límite de la definición anterior existe y proporciona el mismo valor independientemente del punto escogido (puede ser una de las extremidades del intervalo o cualquiera de sus puntos interiores). Además, aclara que dicho límite también existe cuando *f* posee una cantidad finita de discontinuidad removible (o del tipo "salto"). En cuanto a los intervalos, el autor explica que aunque en la definición de la integral definida el intervalo [a, b] fue dividido en partes iguales, hay situaciones en las que es conveniente trabajar con intervalos de longitudes diferentes; en estos casos es suficiente garantizar que el subintervalo tomado con máxima longitud tienda a cero para asegurar que las longitudes de todos los subintervalos también tiendan a cero en el proceso del límite (L2, 2003, pp. 379-380).

El procedimiento general consiste en calcular la integral definida como el límite de las sumas de Riemann o en utilizar la idea de las sumas de Riemann para especificar la integral definida que modeliza la situación que se pretende resolver. Con relación a las proposiciones, además del Teorema Fundamental del Cálculo, del Teorema del Valor medio, y de la Regla de Barrow, en esta configuración están contempladas las propiedades de la integral que explicitamos a continuación:

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a),\ \text{c es una constante cualquiera}$;

2. $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$;

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,\ \text{c es una constante cualquiera}$;

4. $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$;

5. $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$;

6. $\text{Si } f(x) > 0 \text{ para } a \le x \le b, \text{ entonces } \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$;

7. $\text{Si } f(x) \ge g(x) \text{ para } a \le x \le b, \text{ entonces } \int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$;

8. $\text{Si } m \le f(x) \le M \text{ para } a \le x \le b, \text{ entonces}$
$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$.

El lenguaje utilizado por el autor es del tipo analítico, algebraico y simbólico. Mientras los argumentos son deductivos, siendo las demostraciones de diversas propiedades contempladas en los apéndices del libro.

Otra configuración epistémica intermedia de la integral que vamos a sistematizar a partir de L2, consiste en la configuración epistémica tecnológica de la integral. Dicha configuración se caracteriza por los recursos tecnológicos contemplados en los capítulos del libro relacionados con la integral.

Configuración epistémica tecnológica de la integral en el libro L2

Al describir el enfoque general del libro L2, su autor argumenta que el uso adecuado de calculadoras y ordenadores contribuye con el descubrimiento y con la comprensión de conceptos matemáticos. Por ello en el referido libro no solamente se ha utilizado la calculadora o un sistema algebraico computacional para la resolución de diversos ejemplos, sino se sugiere el empleo de dichos recursos tecnológicos para solucionar diversos ejercicios y situaciones-problema planteadas en el texto. Sin embargo, el autor aclara que “todavía la tecnología no torna obsoletos el lápiz y el papel. Cálculos y esbozos manuales son frecuentemente preferibles a la tecnología para ilustrar y reforzar algunos conceptos” (L2, 2003, p. viii). Asimismo, el autor considera que la habilidad para decidir en qué circunstancias o para qué actividades son más apropiadas la utilización de las tecnologías deben ser desarrolladas tanto por los profesores como por los estudiantes universitarios de Cálculo. El énfasis puesto en el uso de las tecnologías por el autor de L2 nos ha llevado a considerar relevante sistematizar la configuración epistémica tecnológica de la integral, la cual sintetizamos en la figura 6. 13.

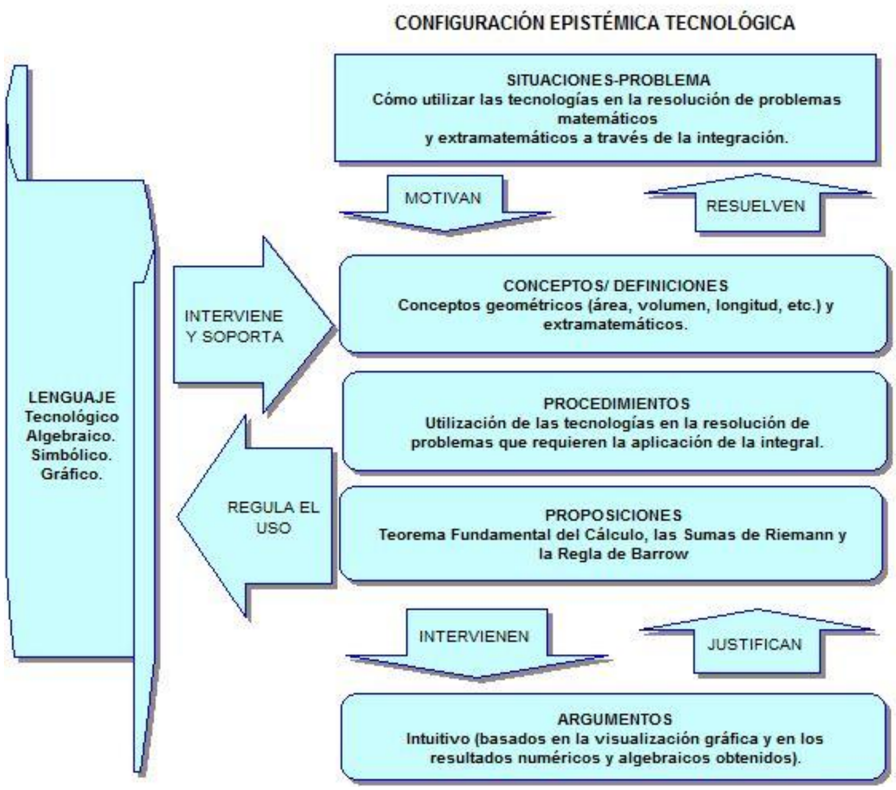


Figura 6. 13: Configuración epistémica tecnológica de la integral en el libro L2

Las situaciones-problema relativas a la integral que han sido contempladas en la configuración epistémica tecnológica requieren la utilización de una calculadora gráfica o de un sistema algebraico computacional para solucionarlas. La utilización de calculadoras gráficas está sugerida para diversas situaciones-problema relacionadas con el análisis basado en la visualización de gráficas de una o más funciones en la pantalla. Entretanto, para resolver las situaciones que requieren procedimientos más complejos para hallar expresiones algebraicas, solucionar ecuaciones, encontrar límites, derivadas, integrales, etc., el autor propone la utilización de un sistema algebraico computacional para auxiliar al estudiante en la comprensión de los conceptos matemáticos y en la resolución de dichas situaciones.

Aunque en los cuatro capítulos de L2 que abordan la integral son utilizadas o propuestas actividades que requieren el uso de las tecnologías, consideramos que los conceptos que se ponen de manifiesto en esta configuración se relacionan tanto con nociones matemáticas como con nociones extramatemáticas.

El procedimiento general consiste en la utilización de tecnologías en la resolución de situaciones-problema que requieren la noción de integral. Para ello, se puede determinar la integral definida o indefinida, representarlas gráficamente, analizar los resultados obtenidos y adecuar los resultados mostrados en la pantalla (de la calculadora u ordenador) a la solución de las situaciones-problema. En este sentido, es importante que el usuario de los sistemas algebraicos computacionales interprete los resultados dados en la pantalla, ajustándoles a los aspectos teóricos de la integral (o de los demás temas estudiados). Es decir, si se utiliza un sistema algebraico computacional para encontrar una integral indefinida hay que observar que en la respuesta dada en la pantalla se omite la constante. No obstante, si lo que se busca no se trata de esta integral en particular es necesario añadir dicha constante para responder adecuadamente a esta cuestión. De manera similar, hay que analizar la necesidad de insertar el módulo en algunas expresiones algebraicas referentes a la determinación de algunas integrales indefinidas realizadas por un sistema algebraico computacional y realizar las adecuaciones necesarias. Un aspecto muy interesante a resaltar es que cuando se utiliza los recursos tecnológicos en el proceso de estudio de la integral, no es necesario que los estudiantes realicen los cálculos algebraicos, lo que puede potencializar el tiempo destinado a dicho proceso y contribuir con la comprensión de los conceptos.

En lo que se refiere a las proposiciones, en el libro L2 no se explicitan teoremas o propiedades relacionadas con la configuración epistémica tecnológica, excepto por una mención que se hace a la expansión de una potencia a través del *Teorema binomial*. No obstante, en el proyecto descubrimiento titulado "Patrones integrales" se propone la utilización de un sistema algebraico computacional para investigar integrales indefinidas de una familia de funciones. La actividad se basa en que a partir de la observación de las integrales de varios miembros de la familia el estudiante debe sugerir y luego demostrar una fórmula general para cualquiera de los miembros de dicha familia (L2, 2003, p. 511). Esta actividad ejemplifica una manera de contribuir al planteamiento de algunas proposiciones relacionadas con la integral.

El lenguaje que se requiere en esta configuración epistémica es del tipo tecnológico, algebraico, simbólico y gráfico. Es imprescindible conocer los comandos básicos de los sistemas algebraicos computacionales con los cuales se va a trabajar.

Los argumentos son predominantemente del tipo intuitivo (basados en la visualización geométrica). Pueden ser también del tipo inductivo (basados en demostración de conjeturas por medio de la inducción matemática).

A continuación sistematizamos el análisis de la primera situación-problema contemplada en la introducción de la integral (Capítulo 5) del libro didáctico L2. Se trata de un problema clásico del área de un arco de parábola que será analizado como ejemplo de una configuración epistémica puntual de la integral en L2.

6.3.4. Configuraciones epistémicas puntuales de la integral en L2

Entre las situaciones-problemas contempladas en la configuración epistémica intermedia aproximada de la integral, encontramos los ejemplos 1 y 2 (Sección

5.1 “Integrales”) referentes al cálculo del área bajo una curva. Dichos ejemplos están descritos y resueltos en el libro didáctico L2 de la manera siguiente:

Ejemplo 1.
Use rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$ de 0 hasta 1.

SOLUCIÓN: Primeramente el autor observa que el área de S está contenida en un cuadrado de lado igual a 1 unidad, luego el área está comprendida entre 0 y 1 unidades cuadradas. Posteriormente, empieza a dividir S en cuatro franjas trazando las rectas verticales $x = ¼$, $x = ½$, *y* $x = ¾$ representando gráficamente esta situación. A partir de esto, propone aproximar el área de cada franja por el área de los rectángulos de base ¼ y altura igual al valor de la función $f(x) = x^2$ en las extremidades derechas de los subintervalos [0, ½], [¼, ½] , [½, ¾], [¾, 1].

Como la base de cada rectángulo mide ¼, y las alturas son, respectivamente, $(¼)^2$, $(½)^2$, $(¾)^2$ y $(1)^2$; indicando la suma de estos rectángulos por R_4, obtendremos

$$R_4 = ¼(¼)^2 + ¼(½)^2 + ¼(¾)^2 + ¼(1)^2 = 15/32 = 0{,}46875$$

Observando la figura (c) constatamos que el área A de S es menor que R_4, luego

$$A < 0{,}46875$$

Análogamente, se determina el área L_4 considerando que las alturas de los rectángulos son las extremidades izquierdas de los subintervalos. Así, tenemos que la suma de las áreas de dichos rectángulos “aproximantes” es

$$L_4 = ¼(0)^2 + ¼(¼)^2 + ¼(½)^2 + ¼(¾)^2 = 7/32 = 0{,}21875$$

De esta manera tenemos estimaciones inferior y superior para A:

$$0{,}21875 < A < 0{,}46875$$

Repitiéndose el proceso anterior para una cantidad mayor de franjas, el autor estima el área a partir de las sumas de las áreas de ocho rectángulos aproximantes, obteniendo que

$$0{,}2734375 < A < 0{,}3984375$$

Luego se concluye que se puede mejorar la estimación aumentando la cantidad de franjas y se presenta la tabla siguiente con cálculos similares (realizados por un ordenador), usando *n* rectángulos cuyas alturas son encontradas tanto en los extremos izquierdos (L_n) como derechos (R_n) de los subintervalos.

N	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,3168519	0,3501852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,3383500
1000	0,3328335	0,3338335

A partir del análisis de los datos contenidos en la tabla anterior, el autor concluye que cuando usamos $n = 1000$ conseguimos estrechar la desigualdad:

$$0{,}3328335 < A < 0{,}3338335$$

Finalmente, se propone aproximar el área por medio de la media aritmética entre R_4 y L_4, atribuyéndose al área el valor aproximado 0,3333335.

Además, el texto plantea que parece que los valores de R_4 se aproximan de 1/3 a medida que aumentamos el valor de *n* y propone confirmar este hecho en el ejemplo 2.

Ejemplo 2: Para la región S del Ejemplo 1, muestre que la suma de las áreas de los rectángulos aproximantes a la derecha tiende a 1/3, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} R_4 = \frac{1}{3}.$$

SOLUCIÓN: R_n es la suma de las áreas de los *n* rectángulos cuyas bases miden 1/n y, las alturas, son los valores de la función *f(x)* = x^2 en los puntos 1/n, 2/n, 3/n, ..., n/n. Así,

$$\begin{aligned} R_4 &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right) = \frac{1}{n^3}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right) \end{aligned}$$

Necesitamos la fórmula de la suma de los cuadrados de los *n* primeros números enteros positivos:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Sustituyendo la fórmula anterior en la expresión encontrada para R_4, tendremos:

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Utilizándose un proceso análogo se puede demostrar que las sumas aproximantes e inferiores también tienden a 1/3, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3}$$

Para ejemplificar el análisis de una configuración epistémica puntual de la integral en el libro didáctico L2 descrita anteriormente, empezamos realizando una síntesis de dicha configuración en el diagrama de la figura 6.14.

CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA PUNTUAL DE LA INTEGRAL EN EL LIBRO L2

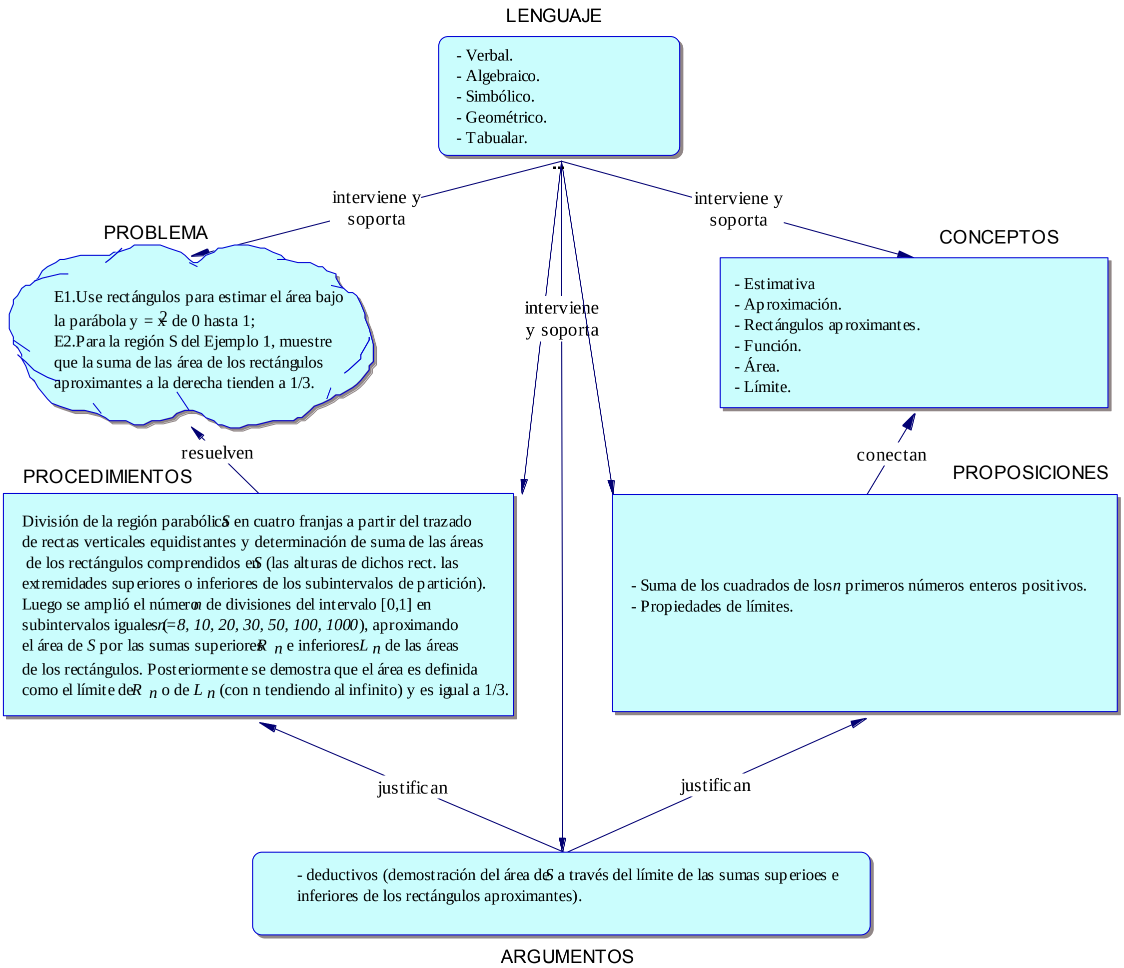


Figura 6. 14: Una configuración epistémica puntual de la integral en el libro L2

La situación-problema que hemos elegido para ejemplificar una configuración epistémica puntual de la integral en L2 se basa en dos ejemplos contemplados al inicio del capítulo 5. Concretamente, consiste en la utilización de rectángulos para aproximar el área comprendida por la parábola $y = x^2$, el eje de las abscisas y la recta vertical $x=1$. Es decir, se trata de hallar el área de la superficie S, bajo la parábola $y = x^2$, en el intervalo [0,1]. El procedimiento utilizado en la solución presentada en el referido libro consiste en la estimación de las áreas de rectángulos, considerando la media aritmética entre las estimaciones inferiores (las alturas fueron obtenidas a través de los extremos inferiores de los subintervalos considerados) y superiores (las alturas fueron obtenidas por medio de los extremos superiores de los subintervalos considerados). El procedimiento se inicia con la aproximación del área de *S* por las sumas de las áreas de los rectángulos aproximantes (superiores e inferiores) para $n = 4$; análogamente se realizaron los mismos cálculos para $n = 8$, verificándose que la aproximación del área había mejorado. A partir de esto el autor presentó los datos relativos a la sumas superiores de los rectángulos (designada por R_n) y a las sumas inferiores de dichos rectángulos (designadas por L_n), para $n = 10, 20, 30, 50, 100, y 1000$. La aproximación propuesta para el área fue la media aritmética entre L_{1000} y R_{1000}. En cuanto al procedimiento utilizado en el ejemplo 2, consiste en determinar al límite de R_n, con n tendiendo al infinito; para ello fue necesario recurrir a la fórmula de la *suma de los cuadrados de los primeros enteros positivos*. Al afirmar que análogamente se puede determinar el límite de L_n, con n tendiendo al infinito y mostrar la igualdad de ambos límites, el autor concluye definiendo el área *A* de la superficie *S* como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos aproximantes, es decir,

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{3} \cdot$$

En dicho procedimiento están contempladas algunas propiedades relacionadas con la suma de los cuadrados de los "*n"* primeros números enteros positivos y al límite de secuencias numéricas. Además, constatamos en el texto los conceptos de media aritmética, área, estimación, aproximación, secuencias, y límites. Tras resolver la situación-problema utilizando estimaciones, el texto contempla la demostración, a través del límite, que las sumas de las áreas de los "rectángulos aproximantes" superiores tienden a 1/3 y sugiere que lo mismo pasa con el límite de las sumas de los "rectángulos aproximantes" inferiores. Además, en el prefacio del libro L2, el autor declara *focalizar en la comprensión conceptual* por medio de la relación entre los diferentes tipos de lenguajes: geométrico, numérico, algebraico, y verbal (o descriptivo) (L2, 2003, p. vii). No obstante, consideramos que en esta configuración epistémica puntual de la integral también está contemplado el lenguaje del tipo simbólico y tabular.

A partir de la resolución de dicha situación-problema y de la demostración, a través del cálculo de los límites, de que el área en cuestión es igual a 1/3, el autor generaliza la definición del área de la región que está bajo la gráfica de una función continua como el límite de la suma de las áreas de los “rectángulos aproximantes”, cuando la cantidad n de los referidos rectángulos tiende al infinito.

Aunque la situación-problema propuesta en los ejemplos 1 y 2 de la sección (5.1) podrían ser resueltos de manera mucho más sencilla por medio de la aplicación de la integral definida, nos parece muy interesante la estrategia utilizada en L2 en el sentido de articular algunas nociones matemáticas básicas, supuestamente conocidas por los estudiantes de un curso introductorio de Cálculo, que serán utilizadas posteriormente en la definición de la integral definida. Esta manera de introducir la integral a partir de las “ideas” subyacentes del Cálculo, sin mencionar o utilizar explícitamente las nociones de derivada e integral, según hemos observado en nuestra práctica docente, contribuye a la comprensión de la noción de integral en los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

6.4. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

Con relación al análisis de libros de texto de Cálculo, Baruffi (1999) tras realizar un análisis sintético de 24 libros usados en el curso de Cálculo introductorio, constató: el acercamiento de algunas propuestas de los referidos libros a un curso de Análisis Real, divergiéndose de las propuestas para el curso inicial de Cálculo es inadecuado para un curso destinado a todos los estudiantes de un curso de Cálculo; varios libros no ponen énfasis en las ideas del Cálculo a través de problemas importantes e innovadores, sin embargo aunque haya una variedad de libros que no introducen los temas por medio de situaciones-problemas resaltan que el Cálculo tiene diversas aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento; muchos de los libros analizados son significativos, importantes y compatible con el modelo teórico utilizado, concluyendo así que “libros buenos siempre han existido” (p. 127).

Diferentemente del estudio anteriormente mencionado, la finalidad del análisis de los libros que hemos realizado no consiste en abarcar una gran cantidad de libros de texto disponibles para la enseñanza universitaria, sino en aplicar una metodología específica que permita realizar un análisis con detalle y profundidad de dos libros de Cálculo que suelen ser utilizados en el curso de Cálculo introductorio en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas.

A partir de la metodología que hemos desarrollado con la utilización de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico hemos realizado el análisis de los libros L1 y L2. Dicho análisis ha permitido sistematizar las distintas configuraciones epistémicas de la integral que han sido contempladas en los referidos libros. A la red construida por complementariedad de dichas configuraciones, le asociamos el significado de referencia de la integral presente en los libros didácticos de Cálculo en el contexto de la formación de profesores de matemática en Brasil.

El referido significado de referencia de la integral puede ser constituido por todas las configuraciones epistémicas intermedias sistematizadas a través del análisis de L1 y L2 (o por una síntesis de las mismas), según el interés del investigador. A cada configuración epistémica intermedia (segundo nivel de análisis) está asociado uno de los significados parciales de la integral en dicho contexto. Asimismo, a través de la configuración epistémica puntual de la integral (tercer nivel de análisis) podemos realizar un análisis más fino de algunas situaciones-problemas específicas.

Consideramos que el significado de referencia de la integral, sistematizado en este análisis, es representativo del significado planificado para la integral en los libros de texto de Cálculo que suelen ser utilizados en el curso de Cálculo introductorio en la Licenciatura en Matemáticas. No obstante, dichos significados serán contrastados con el análisis de los antecedentes de este estudio y con los significados personales de los profesores-formadores expertos en la enseñanza universitaria de Cálculo.

En los capítulos 7, 8 y 9 analizamos las opiniones de los referidos profesores-formadores (investigadores y/o autores de libros de texto de Cálculo para la enseñanza universitaria) a la luz de las seis dimensiones del Enfoque Ontosemiótico.

Capítulo 7

SIGNIFICADOS PERSONALES DE P1 SOBRE EL PROCESO DE ESTUDIO DE LA INTEGRAL

En este capítulo analizamos una de las entrevistas que hemos realizado con los profesores-formadores, expertos en la enseñanza universitaria del Cálculo. Dicho análisis ha posibilitado la caracterización de los significados personales de un profesor-formador sobre la enseñanza de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. La estructura del capítulo consiste en una descripción de las categorías de análisis, seguida de dos partes en las cuales realizamos el análisis del primer estudio de caso, a partir de la entrevista realizada con el profesor-formador y autor de libro de texto de Cálculo (P1). En la primera parte, aplicamos el método de la narrativa para analizar la formación, experiencia académica, y motivos para la elaboración del libro de texto de P1. En la segunda parte, utilizamos algunas de las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico para sistematizar y caracterizar los significados personales sobre la didáctica de la integral que emergen de los relatos de P1.

Dichos significados los interpretamos también como la manifestación de sus conocimientos profesionales e incluyen los criterios personales sobre la idoneidad didáctica de los procesos de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de secundaria.

7.1. ANÁLISIS DE LAS ENTREVISTAS

El análisis de las entrevistas realizadas con los profesores-formadores, expertos en la enseñanza universitaria de Cálculo, se basa, por una parte, en el análisis de las narrativas de los referidos profesores sobre su formación académica, experiencia profesional y, la motivación para la elaboración del libro de texto de Cálculo para la enseñanza universitaria. Por otra parte, consideramos que las herramientas teóricas desarrolladas en el Enfoque Ontosemiótico nos permitirán analizar, detalladamente, dichas entrevistas en lo que se refiere al proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. Esa opción metodológica para la realización del análisis de las narrativas de los profesores-formadores se explicada a continuación.

7.1.1. Análisis de las narrativas relacionadas con las experiencias personales y profesionales de los profesores-formadores

Las narrativas son consideradas como potentes caminos a través de los cuales los docentes no solamente recuerdan y detallan sus experiencias personales pasadas, sino que ellos reconstruyen tanto sus propias historias como sus significados y redefinen sus identidades personal y profesional, lo que permite vincular la naturaleza del conocimiento de los profesores con sus narrativas (Cortazzi, 1993). Corroborando con lo que la posición de Connelly y Clandinin (1988), el autor caracteriza el conocimiento práctico personal del profesor, como un conocimiento no académico que es construido a partir de sus experiencias personales y profesionales, lo que permite “indicar cómo el conocimiento de los profesores parece ser una forma particular de reconstruir el pasado, combinada con una intención para el futuro para enfrentarse a las necesidades de las situaciones presentes” (Ibíd., p. 9). Además, para comprender algo tan personal como la enseñanza, es necesario que sepamos acerca de la persona que es el profesor (Goodson, 1992, citado por Cortazzi, 1993, p. 15). En esta investigación, al interesarnos por caracterizar el proceso de estudio de la integral en un contexto específico, teniendo en cuenta los conocimientos profesionales puestos de manifiesto por los profesores-formadores sobre el referido proceso por medio de sus narrativas, consideramos necesario conocer, inicialmente, sus historias de vida personales y profesionales, y posteriormente, sistematizar dicho proceso de estudio. Esto requiere aplicar una metodología específica que permita analizar las narrativas con detalle y profundidad.

Según Cortazzi (1993), las narrativas de los profesores pueden ser construidas a través de:

- *Anécdotas de profesores*, episodios que contemplan relatos de los profesores sobre acontecimientos de sus clases, o bien sus historias como aprendices;
- *Historia del currículo*, descripciones realizadas por los profesores relativas a sus clases y encorajamiento de los estudiantes para también hablar sobre las mismas;
- *Autobiografía,* auto-reconstrucción consciente y reflexiva de distintos aspectos de la vida personal y profesional del docente;
- *Bibliografía colaborativa,* descripción e interpretación de las experiencias de vida del profesor realizadas colectivamente por el profesor y el investigador;
- *Indagación narrativa*, consiste en la obtención de significados de una experiencia específica durante la descripción de una historia con la colaboración de los participantes, y es una vía de construcción de la historia de los profesores.

Otras perspectivas consideradas para la investigación narrativa son consideradas, además, en el estudio de Galvão (2005), tales como: historias de vida, narrativas personales, entrevistas narrativas, etnobiografías, etnografías y memorias populares y, acontecimientos singulares integrados en un cierto contexto. Sin embargo, a las narrativas siempre se les asocia un "carácter social explicativo de algo personal o característico de una época" (p. 329). Esa autora considera que:

> El método de la narrativa, en la perspectiva de Cortazzi (1993), es ideal para analizar historias de profesores, pues nos ofrece un medio para oír sus voces y entender su cultura desde su punto de vista. […] Las explicaciones contienen creencias y valores, así como también acciones de referencia, y en el método narrativo, los asuntos son contextualizados en términos de acontecimientos que son posteriormente analizados de manera personal, atribuyéndoles un significado situacional (p. 331).

Las narrativas de los profesores son presentadas primordialmente en su forma oral. El texto escrito suele comprender una etapa posterior en su construcción. Para Riessman (1993), dicha construcción en la investigación educativa contempla las etapas siguientes, que constituyen los distintos niveles de la experiencia:

- Presentación, la experiencia vivida;
- Relato de la experiencia, información oral de la experiencia por parte de la persona que la ha vivenciado;
- Trascripción de la experiencia, elaboración del texto sobre la historia relatada;
- Análisis de la experiencia, basada en seleccionar, enfatizar, relatar y comparar las informaciones para la producción de un nuevo texto (generalmente escrito);
- Interpretación, involucra una nueva comprensión de la narrativa por la comunidad educativa.

Las dos primeras etapas anteriormente descritas están a cargo del profesor que ha vivenciado la experiencia; la trascripción y el análisis suelen ser realizados por el investigador y la interpretación generalmente se produce por la comunidad educativa pertinente.

La investigación basada en el uso de narrativas suele empezar con una dificultad previa, cuyo interés en el fenómeno puede ser comprendido en el camino de la narración. Generalmente utiliza el método de investigación basado en la comprensión y reconstrucción de las unidades narrativas de los relatos a través de una amplia reflexión de los participantes (Connelly y Clandinin, 1986, citado por Riessman, 1993).

Entre las diversas vías utilizadas para analizar la investigación narrativa, Riessman (1993) y Cortazzi (1993) destacan, en un enfoque sociolingüístico, un modelo de análisis narrativa (Labov y Waletsky, 1967; Labov, 1972; citados por Cortazzi, 1993, p. 44) que ha sido aplicado a las narrativas. En este modelo se considera que la narrativa de la experiencia personal puede ser organizada por medio de una estructura que contempla seis componentes:

- Resumen, sumario de la sustancia de la narrativa;
- Orientación, consiste en tener en cuenta el tiempo, lugar, situaciones, y participantes;
- Complicación de la acción, identificación de la secuencia de acontecimientos;
- Evaluación, significado y sentido de la acción, actitud del narrador;
- Resolución/decisión, qué ha sucedido y cómo ha sido resuelta la complicación presentada;
- Coda, termina la narrativa retornando a la perspectiva presente; la narrativa sigue abierta a nuevas lecturas, interpretaciones y construcciones.

Además, entre las principales razones para utilizar dicho modelo en el análisis de las narrativas de los profesores, Cortazzi (1993, p. 54) ha resaltado que: (1) la metodología utiliza cuestiones que involucran social y emocionalmente al narrador; (2) las narrativas orales de experiencias personales tiene una clara estructura interna, la cual también está contemplada en las narrativas de profesores y se puede aislarla sencillamente; (3) el modelo pone de manifiesto la función social de las narrativas, lo que es importante para considerar las perspectivas culturales de las narrativas de los profesores por medio de entrevistas o de charlas informales. Asimismo, el autor destaca que un aspecto metodológico relevante en el modelo de Labov consiste en que el narrador provee tanto el contexto como la interpretación.

Por otra parte, el la literatura consultada, encontramos la proposición para la utilización del análisis narrativa en conjunto con otros métodos de investigación educacional (Cortazzi, 1993; Riessman, 1993). En nuestra investigación, entendemos que la combinación del análisis narrativa con las herramientas desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) posibilita realizar un análisis en detalle y profundidad de las entrevistas, capturando e interpretando otras informaciones que podrían perderse con la utilización de un método único. Por ello, ambos métodos serán utilizados de manera complementaria. Los métodos específicos del análisis narrativa resultan bastante interesantes para dar sentido a las narrativas de los profesores-formadores sobre su propia formación y experiencia profesional en el contexto universitario. Y, la noción de idoneidad didáctica, desarrollada en el EOS, permite realizar un análisis en profundidad de las entrevistas, bien como la sistematización de los resultados relacionados con la caracterización del proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil.

Tras sintetizar la metodología basada el análisis narrativa aplicaremos una pauta de análisis desarrollada a partir de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico, a partir de la cual analizaremos, sistemáticamente, los relatos de los referidos profesores-formadores, en los cuales éstos ponen de manifiesto sus conocimientos profesionales sobre un objeto didáctico, el proceso de estudio de la integral, en el referido contexto socio-profesional.

7.1.2. Síntesis de las dimensiones de análisis: una aplicación del EOS

Las dimensiones de análisis que utilizamos, para la caracterización de los significados personales que los profesores-formadores manifiestan sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo en la formación de profesores de matemáticas, se basan en la *Pauta de análisis* y *valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje matemático* (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007). Las adecuaciones que hemos introducido en dicha pauta deben posibilitar la realización de un análisis coherente, amplio y más específico, relacionado con nuestro objeto de estudio. Los componentes y descriptores han emergido tanto de la revisión bibliográfica como de los relatos de los profesores entrevistados, en consonancia con los constructos teóricos de EOS. La síntesis de las dimensiones que utilizaremos en dicho análisis la presentamos en la tabla 7.1.

Tabla 7.1: Dimensiones de análisis de los significados personales de los profesores-formadores

DIMENSIONES	COMPONENTES		DESCRIPTORES
	RELACIONES	**Configuraciones**	Organización de las distintas configuraciones epistémicas
		Intuitiva	Situaciones-problema Lenguaje Conceptos/Definiciones
		Primitiva	
		Geométrica	
		Sumatoria	

EPISTÉMICA		Aproximada	Procedimientos Proposiciones Argumentos
		Extramatemática	
		Acumulada	
		Tecnológica	
		Articulaciones y conexiones	Articulación de los objetos matemáticos y didácticos
			Conexiones intra e interdisciplinares
	ABORDAJES Y ADAPTACIONES CURRICULARES		Abordaje del currículo de la Licenciatura en Matemáticas
			Abordaje del currículo de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas
			Adaptación del Cálculo al currículo de Matemáticas de la enseñanza secundaria
			Los significados pretendidos y su evaluación se corresponden con las directrices curriculares
COGNITIVA	CONOCIMIENTOS		Conocimientos previos de los estudiantes
			Aprendizaje de los estudiantes
			Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales de los estudiantes
MEDIACIONAL	RECURSOS MATERIALES		Uso de materiales didácticos y tecnológicos en las clases
			Uso, características y rol del libro de texto de Cálculo
	TIEMPO		Adecuación de los significados pretendidos/ implementados al tiempo disponible (presencial o no presencial)
			Inversión del tiempo en los contenidos más relevantes
			Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad de comprensión
AFECTIVA	INTERESES Y NECESIDADES		Selección de tareas de interés para los estudiantes
			Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de la matemática y del Cálculo
			Motivación del estudiante hacia la enseñanza y el aprendizaje
	ACTITUDES		Implicación de los discentes en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, respeto mutuo, ...
			Valoración equitativa de los estudiantes y de sus argumentaciones
	EMOCIONES		Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas
			Contemplación de las cualidades estéticas y precisión de las matemáticas
			Contemplación de las cualidades del buen profesor de matemáticas

INTERACCIONAL	INTERACCIÓN DOCENTE-DISCENTE	Se presenta adecuadamente los temas en las clases
		Reconocimiento y resolución de los conflictos de significados de los estudiantes
		Uso de diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los estudiantes
		Se facilita la interacción de los estudiantes en la dinámica de la clase
	INTERACCIÓN ENTRE DOCENTES	Se promueve la reflexión sobre la mejora de la calidad de la enseñanza universitaria de matemáticas y de la formación de prof. de matemáticas
	INTERACCIÓN ENTRE DISCENTES	Se favorece el diálogo y la comunicación entre los discentes
		Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión
	AUTONOMÍA	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación)
	EVALUACIÓN FORMATIVA	Observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes
ECOLÓGICA	APERTURA HACIA LA INNOVACIÓN DIDÁCTICA	Innovación basada en la investigación y práctica reflexiva
		Integración de nuevas tecnologías en el proyecto educativo
	ADAPTACIÓN SOCIO-PROFESIONAL Y CULTURAL	Los significados contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes

A continuación, aplicamos la metodología de las narrativas (sintetizada en al apartado 7.1.1) y la noción de *idoneidad didáctica* del EOS para el análisis de los conocimientos profesionales de los profesores-formadores sobre el proceso de estudio de la integral, a partir de las dimensiones, componentes e indicadores sintetizados en la Tabla 7.1.

7.2. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA PROFESIONAL DE P1

La metodología de investigación basada en el uso de narrativas será utilizada para analizar algunos de los relatos de las entrevistas que hemos realizado con una muestra de profesores universitarios expertos en la enseñanza del Cálculo. Los fragmentos de la “historia” de P1 que hemos elegido, pueden ser enmarcados, según los “géneros narrativos” *(*Martin, 1996, citado por Galvão, 2005), como *Narrativa de una experiencia personal*, que “consiste en el relato de una acción del narrador sobre una adversidad, una situación, para restablecer el equilibrio o para cautivar una audiencia, incluyéndose, en algunas de las veces una componente moral” (Galvão, 2005). Según la referida autora, la *Narrativa de una experiencia personal* no es solamente la más completa, sino la que cumple las exigencias de la estructura de análisis de Labov (1972; 1982).

En este apartado analizamos tres narrativas. Las dos primeras se refieren a la formación académica y experiencia docente de P1. La tercera, a los factores que le han motivado a elaborar su libro de texto de Cálculo.

Según las etapas propuestas por Riessman (1993), las experiencias relatadas han sido vivenciadas por el narrador P1; la trascripción y el análisis han sido producidas por nosotros en la condición de investigadores; en la última etapa se concluye la narrativa y regresa a la perspectiva presente. Así, la interpretación de la narrativa queda abierta a nuevas lecturas, pues el análisis siempre se produce bajo la perspectiva de unos especialistas en particular.

Las cuestiones previas que han desencadenado los relatos de P1 y orientado el análisis que realizamos a continuación, pueden ser enunciados, respectivamente, de la siguiente manera:

(i) ¿Cómo P1 concibe su formación y experiencia académica?, ¿Cómo ha sido su experiencia docente en el proceso de enseñanza del Cálculo en el nivel universitario?

(ii) ¿Qué factores han guiado/ motivado P1 en la elaboración de su primer libro de texto de Cálculo para la enseñanza universitaria?

A lo largo del relato de las experiencias vivenciadas por P1, buscamos comprender cómo se produjo su formación y experiencia académica, especialmente relativas al proceso de enseñanza del Cálculo.

A continuación presentamos un análisis de dos fragmentos de la historia (o *narrativa de la experiencia personal*) de P1, realizada a partir del modelo propuesto por Labov.

7.2.1. La formación y experiencia profesional de P1

La narrativa analizada a continuación se refiere a un pequeño fragmento de una entrevista semiestructurada que hemos realizado con P1, en su casa, con duración total de 1:35:04 h, cuyo objetivo era caracterizar los procesos de estudio de la integral, en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil, a partir de la noción de idoneidad didáctica y teniendo en cuenta los significados personales puestos de manifiesto a través de las narrativas de los profesores-formadores. La referida entrevista fue videograbada y trascripta en el “Anexo 2”, por medio de un texto fidedigno al relato oral. En la primera parte de la narrativa, P1 relata su formación académica (Licenciatura, Maestría y Doctorado), así como su experiencia académica en la enseñanza universitaria.

7.2.1.1. Aplicación de las etapas de Labov a la narrativa de P1

En los relatos de P1 podemos apreciar su formación académica y actuación en la docencia. Para efectos del análisis, hemos optado por sintetizar las etapas de la narrativa sobre la formación y experiencia académica de P1 utilizando el modelo de Labov. Asimismo, hemos tratado de relacionar dichos relatos con algunos de los resultados encontrados en la literatura específica consultada sobre el tema.

Hemos elegido los relatos de P1 que contemplan la formación y experiencia académica de un profesor-formador de los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. Todo ello nos parece fundamental para la caracterización de los significados personales que han sido manifestados por P1 sobre la integral en el contexto de la licenciatura en Matemáticas. En dicha historia podemos identificar las seis etapas de análisis de las narrativas propuesta por Labov. Sin embargo, como P1 relata tanto su formación académica como su experiencia profesional, las etapas referentes a la orientación, complicación de la acción, resolución y evaluación pueden ser identificadas en momentos distintos de su relato y son sintetizadas en la figura 7.1 a continuación.

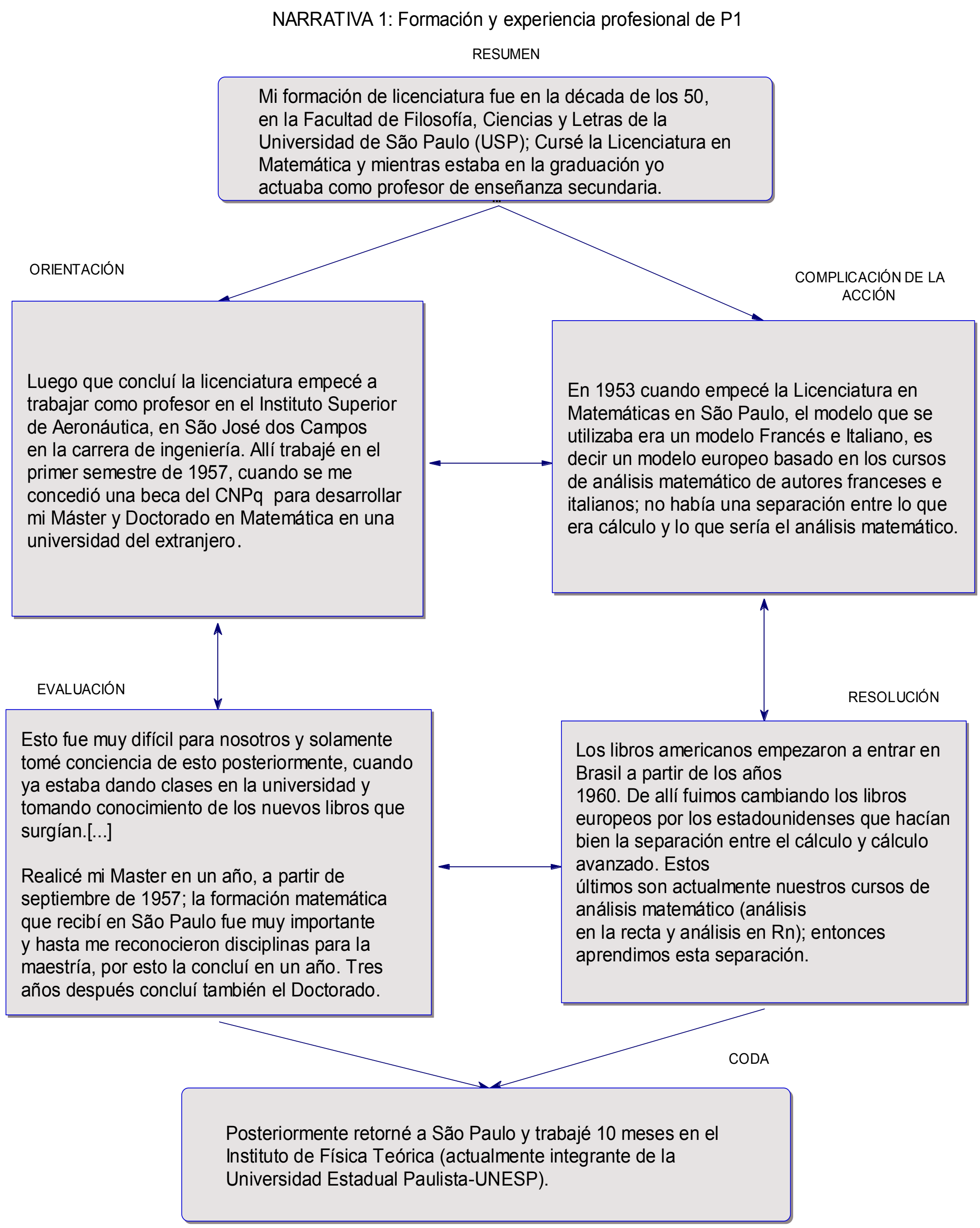


Figura 7.1: Narrativa 1. Formación y experiencia profesional de P1

P1 ha introducido su narrativa resumiendo los principales aspectos de su formación académica (Licenciatura, Maestría y Doctorado), así como el inicio de su experiencia docente. Paralelamente, P1 situó, sintéticamente, los acontecimientos relatados en el tiempo (períodos en que sucedieron) y en el espacio (lugares donde se realizaran).

En este sentido, P1 ha orientado los relatos referentes a su formación académica en la Universidad de São Paulo (Licenciatura en Matemática, en la década de los 1950) y en una Universidad extranjera (Maestría y Doctorado, a partir del año 1957). Además, P1 comentó su corta experiencia docente en la enseñanza secundaria (mientras cursaba la Licenciatura) y el inicio de su larga carrera docente en la enseñanza universitaria (a partir de la conclusión de su Licenciatura).

La primera complicación de la acción abordada por P1 se refiere al hecho de que no había una separación entre el curso de Cálculo y el de análisis matemático. Dicha problemática, presente en la formación inicial de P1, se ha convertido en una de las grandes dificultades del currículo de la Licenciatura en Matemáticas que se implementaba en las Universidades brasileñas en la década de los 1950. No obstante, P1 afirmó que no era consciente de esto hasta que empezó a dar clases de Cálculo en la enseñanza universitaria.

La resolución de la referida complicación ocurrió por medio de la sustitución de los libros europeos (principalmente italianos y franceses) por los libros americanos de los años 1960 que ya contemplaban la separación entre los cursos de Cálculo y de Cálculo Avanzado (actuales cursos de Análisis Matemático).

Aunque P1 evaluó su carrera de Licenciatura en Matemáticas como muy difícil, también ha reconocido que su formación inicial fue muy importante para la realización de su postgrado en Matemática. Esto permitió que le reconocieran algunos cursos (tomados en la Licenciatura) en su Maestría en Matemática, posibilitando concluirla en apenas un año, y el Doctorado, tres años después.

Termina esta narrativa con el retorno de P1 para “São Paulo” y empieza a trabajar en el Instituto de Física Teórica. En la figura 7.2 contemplamos una narrativa relativa a la experiencia profesional de P1.

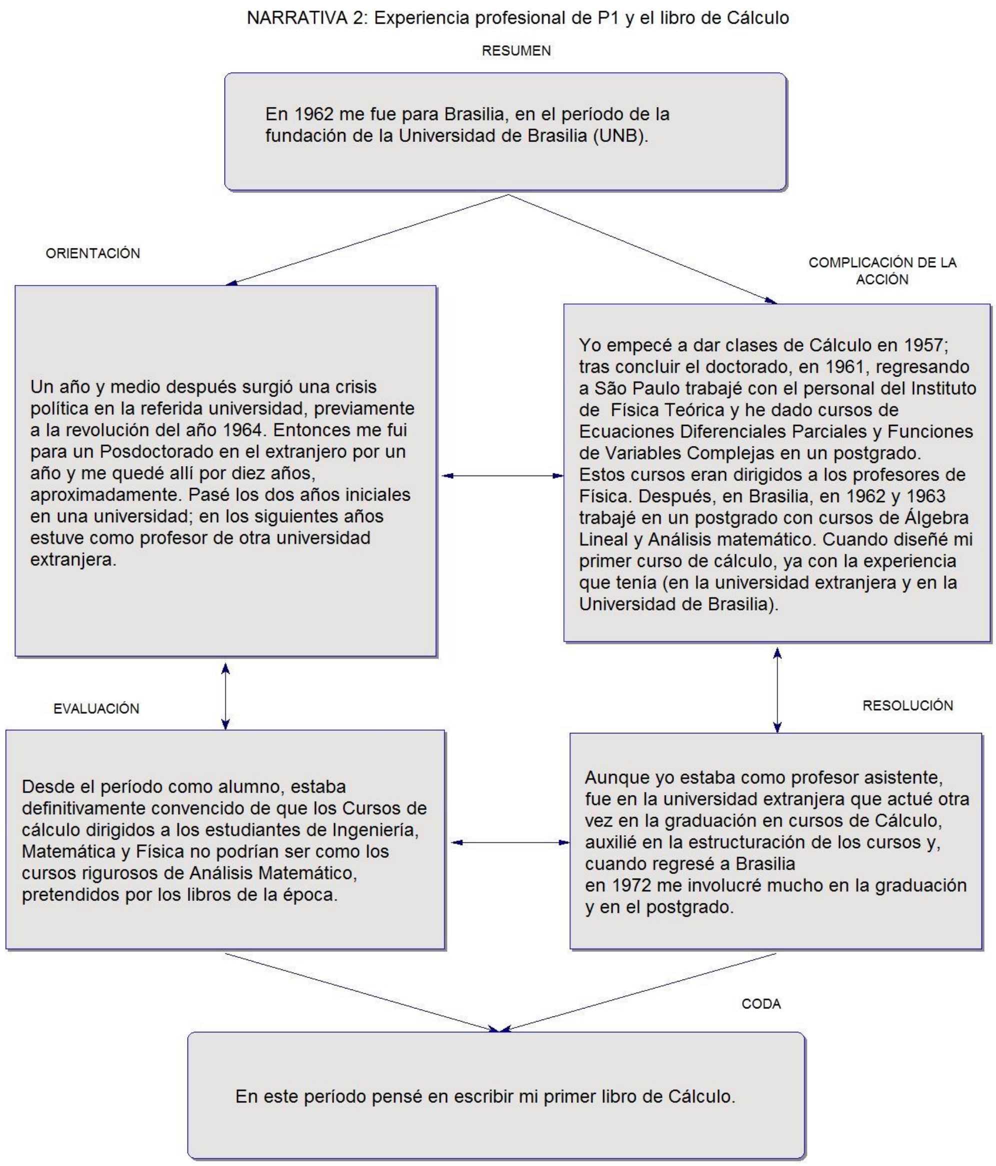


Figura 7.2: Experiencia académica de P1

Tras concluir su formación académica (Licenciatura, Maestría y Doctorado) P1 volvió su docencia en la enseñanza superior, trasladándose para la Universidad de Brasilia, en el período de su fundación (1962).

Sin embargo, P1 ejerció la docencia en dichas universidades por aproximadamente dos años, regresando al extranjero donde ha pasado cerca de diez años como profesor e investigador en dos Universidades.

La complicación de la acción que llevó P1 a decidir regresar al extranjero fue una crisis política que ocurrió en la Universidad de Brasilia previamente a la revolución del año 1964, que culminó con la implantación de la dictadura militar en Brasil.

La resolución de dicha complicación se produjo con el desligamiento de P1 de la Universidad de Brasilia y su permanencia en las Universidades extranjeras por aproximadamente una década. En este período, P1 afirmó haber adquirido experiencia no solamente en la investigación en matemática, sino en la docencia universitaria, inclusive del Cálculo. Posteriormente P1 retorna a Brasil para pasar un año sabático y decide retomar sus actividades académicas en la Universidad de Brasilia, involucrándose en la graduación y en el postgrado.

En la evaluación de P1, la experiencia académica tanto en el extranjero como en Brasil fue evocada en el momento de diseñar su primero curso de Cálculo, pues estaba convencido de la necesidad de planificar e implementar un curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria que se alejase del rigor que caracterizaba dicho curso en aquel período.

En la conclusión de la historia (*coda*), P1 afirma que en este período pensó en redactar el primer libro universitario de Cálculo en Brasil, en contraposición a las traducciones y utilización de los libros extranjeros en la enseñanza universitaria brasileña.

La síntesis de las etapas de Labov para el análisis realizada nos ha permitido identificar algunas fases bien definidas tanto en la formación como en la experiencia académica de P1, a partir de las cuales discutiremos algunas categorías que emergen de la narrativa de P1 conectándolas con la literatura específica. En la formación académica de P1, resaltamos: Licenciatura, Maestría y Doctorado, y formación en Cálculo. En lo que se refiere a su experiencia académica, contemplamos: el inicio de la docencia, docencia en Estados unidos y Brasil, y docencia en Cálculo. Asimismo, destacamos el conocimiento profesional que P1 manifiesta sobre la integral en la enseñanza universitaria.

7.2.1.2. Formación académica de P1

Para abordar la formación académica de P1, optamos por analizarla a partir de tres categoría distintas: la Licenciatura en Matemática, la Maestría y el

Doctorado, y la formación de P1 en Cálculo Diferencial e Integral. Este análisis ha sido realizado por medio de la reconstrucción del texto, teniendo en cuenta las ideas centrales de los fragmentos de los relatos de P1 sobre cada categoría y los resultados de trabajos publicados sobre el tema.

7.2.1.3. La Licenciatura en Matemáticas

P1 ha desarrollado su Licenciatura en Matemáticas en la Facultad de Filosofía, Ciencia y Letras, de la Universidad de São Paulo (USP) en el período de 1953-1956. En su opinión, su formación matemática inicial fue de elevado nivel, lo que le ha posibilitado el reconocimiento de algunos cursos en la Maestría cursada en una universidad extranjera. En otro momento de su entrevista, P1 resaltó que el proceso de enseñanza impartido en la Universidad de São Paulo era basado en la Licenciatura en Matemáticas que se desarrollaba en Europa en aquella época, más específicamente con influencia de las escuelas Italiana y Francesa. La enseñanza era desarrollada, desde el inicio, de forma bastante “rigurosa” (teórica), lo que la hacía bastante difícil para los estudiantes.

Al estudiar la formación de los profesores-formadores, Gonçalves (2000) concluyó que la formación de los formadores de profesores de matemáticas suele desarrollarse, predominantemente, de manera técnico-formal con un énfasis casi exclusivamente matemático. Este proceso de formación contempla, básicamente, el conocimiento del contenido específico en detrimento del conocimiento didáctico (Shulman, 1986).

La subestimación del conocimiento didáctico ha sido estudiada por Scheibe (1987), que afirma que esta posición no es exclusiva del profesor universitario de matemática, sino que es apoyada por las instituciones universitarias, que priorizan, en muchos casos, la investigación estrictamente matemática, relegando a un segundo plano las investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática. Resaltamos que P1 se ha posicionado de manera contraria a dichas ideas, aunque confirma su existencia en el seno de las universidades.

> [...] las universidades exigen de los profesores una producción en investigación. Hay que aclarar qué sería esta investigación. El profesor universitario no está tan motivado a dedicarse a la enseñanza, sino a la investigación. Estamos hablando de investigación en matemáticas; esto es duro y requiere mucha energía del profesor. Algunos másteres y doctores en matemáticas van a desarrollar sus investigaciones en geometría, álgebra,

> análisis, fundamentos de las matemáticas, etc. Estos profesores, que están dedicándose a este tipo de investigación, no son los más adecuados para contribuir a la mejora de la enseñanza en las licenciaturas. Esto es lo que tengo visto a lo largo de los años (P1).

7.2.1.4. La Maestría y el Doctorado de P1

En 1957 P1 partió para el desarrollo de su formación posgraduada. Con el apoyo del Consejo Nacional de Investigación (CNPQ) por medio de una beca recibida, él fue para el extranjero para desarrollar tanto su Maestría como el Doctorado.

En 1958 concluyó su Maestría (Máster of Science) y, tres años después (1961) recibió el título de "Doctor of Philosophy". Sin duda esta formación posgraduada posibilitó que P1 obtuviera una sólida formación matemática.

Aunque P1 no haya extendido sus comentarios relativos a su formación posgraduada, excepto para resaltar que concluyó su Maestría tan pronto por la importante formación matemática que recibió en su formación inicial, este hecho fue de extrema importancia para su larga y sólida carrera académica como docente universitario, investigador, autor de libros de texto de la enseñanza universitaria, y como formador de profesores de matemáticas (de las enseñanzas secundaria y universitaria).

En Brasil la formación del formador (profesor universitario) se legitima con la conclusión de la enseñanza posgraduada (Maestría o Doctorado). Aunque dada la carencia de dicha formación para atender la demanda de las Instituciones de Enseñanza Superior (IES), se acepta la formación posgraduada de "Especialização"[1] como requisito mínimo para el acceso a la función de profesor universitario.

Dicha formación posgraduada suele desarrollarse en el área del conocimiento específico, no habiendo, por lo tanto, un proceso educativo dirigido a la formación del profesor universitario. En este sentido, consideramos oportuno cuestionarnos, ¿Cómo adquiere/ construye el profesor universitario los conocimientos didácticos necesarios para desempeñar con eficacia sus funciones docentes?

[1] Formación posgraduada que se realiza, con una duración mínima de 360 horas, con la finalidad de profundizar en un área específica del conocimiento.

Benedito y otros (1995), consideran que las investigaciones realizadas sobre la formación del profesor universitario han revelado, por una parte, la inexistencia de una formación específica con tal finalidad y, por otra parte, que uno se “convierte” en profesor universitario a través de un proceso de socialización que se realiza de manera empírica, autodidacta o siguiendo la rutina de otros. Además, los autores subrayan que la experiencia discente, aunque juega un papel relativamente importante en este proceso, no logra ser suficiente.

Como el tema de esta investigación se relaciona con el proceso de enseñanza de la integral en la formación de profesores de matemática, nos interesa comprender como ha sido la formación de P1 en Cálculo Diferencial e Integral. Esto será tratado a continuación.

7.2.1.5. La formación de P1 en Cálculo

Al iniciar su formación universitaria, en el año 1953, P1 ha pasado por un curso de Cálculo basado en el proceso de enseñanza francesa e italiana que se desarrollaba en aquella época. Esta influencia europea en el proceso de enseñanza del Cálculo en la Universidad de São Paulo tuvo su origen con la contratación de profesores italianos en la década de los 1930 (cuando fue creada la referida universidad), y se materializaba a través de los libros de texto que se utilizaban en dicho curso. En las palabras de P1, “no había una separación entre lo que era el Cálculo y lo que sería el Análisis Matemático. Esto fue muy difícil para nosotros”. Es decir, los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas pasaban por un curso de Análisis Matemático, con todo su rigor y formalismo, en el primer año de la carrera universitaria.

Aunque P1 considera que fue muy difícil para él, como estudiante universitario, pasar por un curso de Análisis Matemático en el primer año, no era consciente de la necesidad de separación entre ambos cursos. Sin embargo, cuando comenzó a dar clases en la universidad él tuvo contacto con libros americanos, los cuales abordaban de manera diferenciada los cursos de Cálculo y los de Cálculo Avanzado.

> De allí fuimos cambiando los libros europeos por los estadounidenses que hacían bien la separación entre el Cálculo y Cálculo avanzado. Estos últimos son actualmente

> nuestros cursos de análisis matemático (análisis en la recta y análisis en R^n); entonces aprendimos esta separación (P1).

La problemática anteriormente descrita por P1, la cual él vivenció en la década de los 1960, cuando se convenció de la necesidad de abordar el curso de Cálculo diferentemente del de análisis matemático, todavía se presenta en la Licenciatura en Matemáticas en Brasil y se ha constituido en objeto de algunas investigaciones en el área de la educación matemática.

Barufi (2002) ha discutido el papel del Cálculo en la formación de profesores de matemáticas. La autora resalta que:

> En muchos casos, observamos la estructura sistematizada de esta disciplina [Cálculo], con la intención de presentar una teoría lógico-formal deductiva en el primer curso. De esta manera, dejan de tener las ideas fundamentales la importancia que merecen" (p.70).

En este sentido, en su Tesis Doctoral, Reis (2001) discute el rigor y la intuición en el proceso de enseñanza de Cálculo y análisis matemático. El investigador resaltó que hubo un acuerdo unánime por parte de todos los formadores que participaron de su investigación al afirmar que el curso de Cálculo debe ser "menos formal, fuertemente basado en las aplicaciones y situaciones-problema, haciendo el péndulo entre rigor e intuición inclinarse más hacia la intuición, sin que con esto deje de existir algún rigor, de preferencia no formal" (p. 200).

Asimismo, Reis considera, por una parte, que el Cálculo tiene un papel de "puente" y de síntesis entre un pensamiento matemático más elemental y un pensamiento matemático más avanzado (en el sentido de Tall, 1991b). No obstante, esto no significa que en el proceso de enseñanza del Cálculo se produzca la transición de un pensamiento más intuitivo hacia un pensamiento más riguroso. Por otra parte, en lo que se refiere al papel que debe desempeñar el curso de Análisis Matemático en la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, se asume el análisis matemático como "desencadenador de la autonomía intelectual del futuro profesor, por ampliar, flexibilizar y diversificar su conocimiento de los contenidos de Cálculo (Fiorentini, Souza Junior y Melo, 1998)" (pp. 201-202).

7.2.1.6. La experiencia profesional de P1

Entre las distintas maneras existentes para estudiar el conocimiento profesional del profesor, el uso de las narrativas sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje se convierte en una de las más interesantes (Galvão, 2005; Chapman, 2008).

En este apartado abordamos la experiencia profesional de P1 desde el inicio de docencia, pasando por su experiencia académica en Brasil y en Estados Unidos. Además, resaltamos su experiencia académica en el proceso de enseñanza del Cálculo.

7.2.1.7. Las primeras experiencias docentes de P1

P1 ha tenido una corta actuación docente en la enseñanza de la matemática de la educación secundaria. Esto ocurrió simultáneamente al desarrollo de su carrera universitaria. Tras concluir la Licenciatura en Matemática, P1 empezó a desarrollar su labor en la enseñanza universitaria en el año 1957, como docente del Instituto Superior de Aeronáutica. En dicho año P1 empezó a actuar como profesor de Cálculo en la enseñanza universitaria. Sin embargo, su larga experiencia profesional en la docencia, investigación y preparación de libros de texto se produjo en la enseñanza universitaria, tras concluir su doctorado en el año 1961.

Al regresar a Brasil, P1 retomó su carrera académica. Actuó, inicialmente, como docente del Instituto de Física Teórica (São Paulo) – donde trabajó con algunos cursos de un postgrado dirigido a profesores de física –, trasladándose enseguida para la "Universidad de Brasília", en el período de su fundación (1962), donde ha dado clases en los cursos de Álgebra Lineal y Análisis Matemático en una Maestría en Matemáticas recién implementada.

Sin embargo, los efectos de una crisis política previa a la *"revolución del año 1964"* [2] llevó P1 a interrumpir sus actividades en la Universidad de Brasília y regresar al extranjero para cursar un Pos doctorado, previsto para realizarse en un año. Como consecuencia de esta problemática, P1 optó por desarrollar su

[2] Con la revolución del año 1964 se instaló la dictadura militar en Brasil.

carrera académica en dos universidades extranjeras por aproximadamente nueve años.

7.2.1.8. La experiencia académica de P1 en Brasil

Al regresar al Brasil para pasar un año sabático, P1 decidió retomar, definitivamente, su carrera académica en Brasil. En este sentido, él reasumió la docencia en la Universidad de Brasília, involucrándose tanto en la graduación, como en el postgrado. En este período, a partir del año 1972, P1 actuó como docente de cursos de Cálculo y resolvió redactar su primer libro de texto de Cálculo universitario.

Un aspecto relevante que encontramos en la narrativa de P1 consiste en la toma de conciencia con relación a la dificultad producida por el abordaje “riguroso” de los temas del curso de Cálculo. Esto se produjo, según su afirmación, cuando cambió su rol (de discente para docente universitario).

P1 declara haber utilizado su experiencia – discente y docente en las universidades extranjeras y brasileñas – para diseñar un curso de Cálculo que se adecuara a los estudiantes de las carreras de Ingeniería, Física y Matemáticas. Él ha sido categórico en declarar que estaba definitivamente convencido de la inviabilidad del desarrollo de un curso “riguroso” de Cálculo, como lo que se pretendía en los libros de texto que se utilizaban en la enseñanza universitaria en aquella época. Consideramos que el conocimiento práctico de P1 ha sido manifestado en el momento de diseñar su primer curso de Cálculo, tras reasumir su carrera académica en la Universidad de Brasília. Este conocimiento práctico se desarrolla como respuestas a los problemas específicos de la práctica de la cual se originan convirtiéndose en conocimiento profesional al tornarse público, acumulable y comunicado en una comunidad de prácticas (Hiebert, Gallimore y Stigler, 2002).

De manera complementaria, Ponte (1998), considera que el conocimiento profesional consiste en una mezcla del saber con el saber hacer que se apoya en la experiencia acumulada de la profesión y se elabora constantemente por el docente en el contexto de trabajo, a partir de sus necesidades profesionales y como respuesta a las distintas situaciones enfrentadas en su quehacer.

La experiencia en la enseñanza del Cálculo que P1 había acumulado hasta aquel período, manifestada a través de su conocimiento profesional, hizo que llevara a cabo la elaboración de una propuesta alternativa para desarrollar el proceso de enseñanza del Cálculo en las carreras universitarias en que actuaba como docente.

A continuación, analizamos una narrativa de P1 relacionada con la elaboración de su primer libro de texto libro de texto de Cálculo dirigido a la enseñanza universitaria en Brasil.

7.2.2. El libro de texto de Cálculo

En la narrativa de P1 podemos apreciar la referencia a su trayectoria académica (docente y como coordinador del curso de Cálculo I) y la motivación declarada para elaborar su primer libro de texto de Cálculo para la enseñanza universitaria. El *conocimiento profesional* [3] de P1 emerge en los distintos momentos de su entrevista. A partir de sus narrativas, observamos que su formación académica y experiencia profesional (docencia, coordinación de curso, investigación, ...) han sido evocadas al reconstruir y revivir su historia profesional en la enseñanza universitaria y, en este momento específico, al explicitar las razones que le guiaran/motivaran a la elaboración de su libro de texto libro de texto de Cálculo.

La aplicación de las etapas propuestas por Labov nos ayuda a sintetizar los distintos momentos de la historia de P1 sobre su primer libro de Cálculo.

[3] Nos refiriendo al “conocimiento profesional” de P1 en su sentido amplio, entendido como un conocimiento plural, emergente no solamente de las prácticas (formales e informales) de formación docente en sus distintos niveles educativos, sino de su experiencia personal y académica adquirida tanto a través de la docencia como de la investigación educativa.

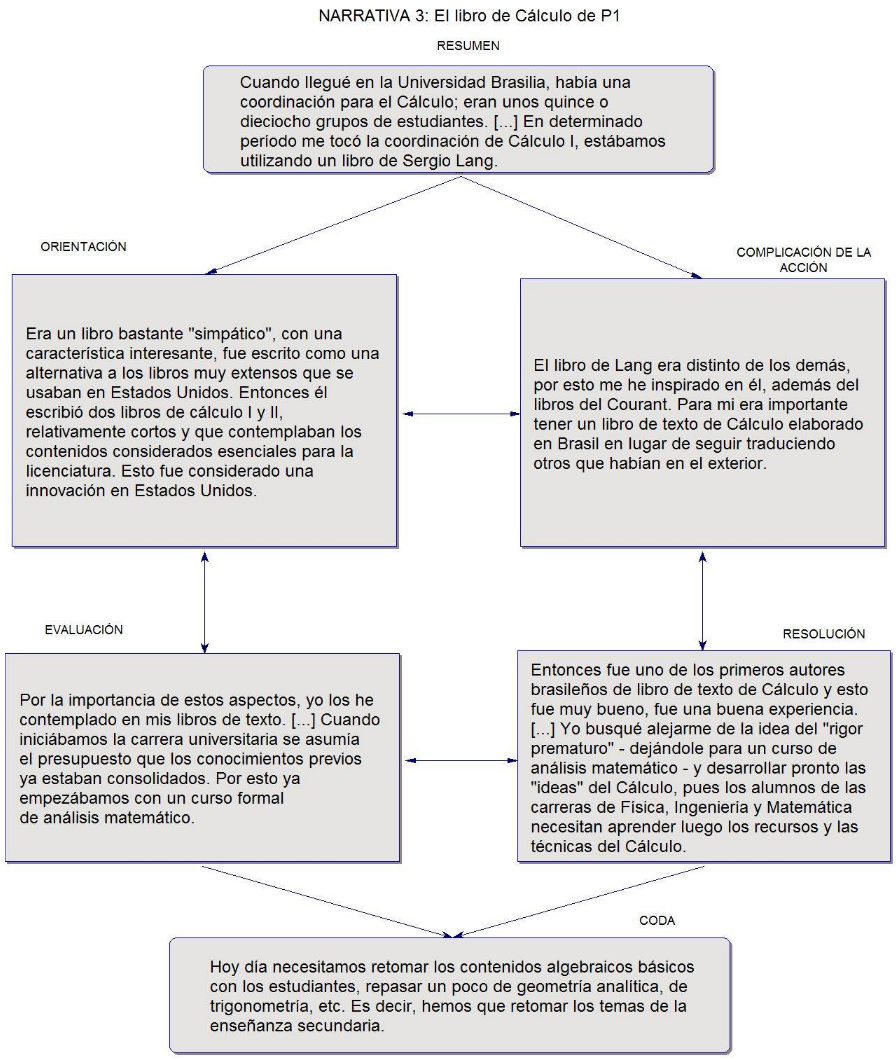


Figura 7.3: Narrativa sobre el libro de Cálculo de P1

Inicialmente P1 ha hecho un resumen seguido de la orientación de la historia. En este sentido, sitúa los relatos sobre el libro de texto de Cálculo que se utilizaba cuando reasumió sus actividades académicas en la Universidad de Brasilia y le tocó la coordinación de Cálculo I. Resaltó que dicho curso era dirigido a muchos grupos de estudiantes (quince o dieciocho grupos). Por lo tanto, no se trataba solamente de los estudiantes de la carrera de matemáticas, sino de las distintas carreras que de desarrollaba en la Universidad de Brasilia que contemplaban el curso de Cálculo en su estructura curricular. En función de esta diversidad, era natural que el coordinador juntamente con el colectivo de profesores responsables por un cierto curso, como el de Cálculo I, se propusieran a seguir una misma planificación en el ámbito de la Universidad. Como consecuencia, ellos indicaban un libro de texto de Cálculo como referencia para la organización del proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo para las distintas carreras universitarias.

Aunque consideraba que el libro de Sergio Lang era un libro "simpático", relativamente corto, y que contemplaba los temas esenciales para las carreras desarrolladas en dicha Universidad, surge una *complicación de la acción,* caracterizada, según P1, por la importancia de "tener un libro de texto de Cálculo elaborado en Brasil en lugar de seguir traduciendo otros que habían en el exterior". En este sentido, el libro de texto de Lang, considerado como una innovación entre los libros de texto de Cálculo que se producía en Estados Unidos en la época, juntamente con el libro de texto de Courant han inspirado al formador a encontrar una solución para la referida complicación de la acción, basada en la necesidad de elaboración de un libro de texto de Cálculo, por autores brasileños, que se adecuara a las características de los estudiantes de las distintas carreras universitarias en Brasil. Así, resaltó un aspecto crucial para el diseño de los materiales didácticos de Cálculo para la enseñanza universitaria

La idea anterior se encuentra manifestada en la evaluación que P1 realiza de su libro de Cálculo. La primera edición del referido libro se realizó en el año 1978. Entretanto, dicho libro sigue actualmente en el mercado brasileño en su séptima edición, del año 2003. Otro aspecto evaluado en la narrativa de P1 es referente a los conocimientos previos, que se consideraba estar consolidados en los estudiantes al iniciaren su carrera universitaria, razón por la cual los estudiantes pasaban directamente por un curso de Análisis Matemático en el primero año de la Licenciatura en Matemáticas.

Sin embargo, en la conclusión de su relato (*coda*), P1 propone la necesidad de los profesores universitarios retomaren los conocimientos previos de los estudiantes antes de introducir los temas matemáticos del nivel universitario. En el caso del Cálculo, enfatiza la necesidad actual de los profesores universitarios repasaren los temas básicos de la secundaria mientras implementan los contenidos del curso introductorio de Cálculo. Consideramos que esta posición, aunque es compartida por gran parte del colectivo de docentes de Cálculo I, no es unánime en las distintas universidades, carreras o mismo en el seno de los departamentos responsables por asignatura de

Cálculo. Por esto nos parece interesante que los profesores universitarios de Cálculo reflexionen sobre cuál es el nivel del conocimiento matemático previo de los actuales estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas (o de las demás carreras universitarias), y qué estrategias se puede desarrollar para lograr éxito en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

En consonancia con la utilización de la narrativa en la investigación en el área de educación matemática, identificamos dos dificultades centrales en el relato de P1, a partir de las cuales abordaremos otros aspectos y profundizaremos en el análisis de la narrativa sobre el libro de texto. La primera se refiere a ¿qué factores han motivado a P1 para elaborar un libro de texto de Cálculo para la enseñanza universitaria? y, la segunda, está relacionada con ¿qué debilidades existían en los libros de texto de Cálculo que eran utilizaban en la Licenciatura en Matemáticas?

P1 afirmó que a partir de los años 60 fueron introducidos los libros de texto americanos en la enseñanza universitaria brasileña, con un abordaje de Cálculo que le ha posibilitado percatarse de la diferencia existente entre los cursos de Cálculo y los de Análisis Matemático.

En este sentido, P1 ha comentado la influencia que tuvo tanto del libro de texto de Lang, como del de Courant. Asimismo, ha resaltado sus principales características: (i) eran relativamente cortos en comparación a los extensos libros de la época; (ii) presentaban los contenidos de Cálculo considerados fundamentales para la enseñanza universitaria; (iii) presentación intuitiva de los contenidos; (iv) énfasis en la visualización geométrica y en las aplicaciones del Cálculo.

Teniendo en cuenta las referidas características, P1 ha llevado a cabo la elaboración de su primer libro de texto de Cálculo. El desarrollo profesional de P1 y su conocimiento didáctico (Shulman, 1986) sobre Cálculo han sido reflejados en su trayectoria docente y, por supuesto, en sus libros de texto para la enseñanza universitaria. El enfoque central de dicho libro consistía, en su opinión, en abordar de inmediato las “ideas” fundamentales del Cálculo, dejando el “rigor prematuro” para los posteriores cursos de Análisis Matemático.

La motivación de P1 para elaborar su primer libro de texto de Cálculo surgió al involucrarse en la docencia y en la coordinación de Cálculo en las distintas carreras universitarias que se desarrollaban en la Universidad de Brasília. P1 se dedicó a la elaboración de libros de texto universitarios (entre los cuales ha producido una colección de tres libros de texto de Cálculo para la enseñanza universitaria) y, recientemente, ha publicado un libro de texto especialmente dirigido al curso de Análisis Matemático que integra el currículo de la formación de profesores de matemática de la enseñanza secundaria en Brasil.

En relación a la segunda cuestión, P1 resaltó la dificultad inherente al curso de Cálculo cuando era discente de la Licenciatura en Matemáticas. En su opinión, el excesivo rigor con que se desarrollaba el curso introductorio de Cálculo en la Universidad de São Paulo, era debido a la suposición institucionalmente aceptada de que los estudiantes universitarios ya tenían consolidados sus conocimientos previos al ingresarse en la universidad. No obstante, la experiencia académica de P1 le demostró que esta no era la estrategia más adecuada para lograr el éxito del proceso de enseñanza del Cálculo en la universidad. Al contrario, apunta la necesidad de los docentes universitarios de Cálculo retomar algunos temas básicos de la enseñanza secundaria, tales como los contenidos algebraicos, y tópicos de Geometría Analítica, de Trigonometría, etc.

Posteriormente, cuando P1 reasumió la docencia en la Universidad de Brasilia (1972) y, consecuentemente, la coordinación del curso introductorio de Cálculo (Cálculo I), su experiencia profesional imbuida de sus conocimientos teóricos y prácticos adquiridos tanto en Brasil como en el extranjero le permitió replantear el desarrollo del curso de Cálculo que se encontraba bajo su responsabilidad.

La resolución presentada por P1 para las dificultades que generalmente se producen en el proceso de enseñanza del Cálculo en la enseñanza universitaria estaba centrada en alejarse de la idea de “rigor prematuro”, dejándolo este aspecto formal para un curso de Análisis Matemático (que integra el currículo de la Licenciatura en Matemáticas en los últimos años), y desarrollar pronto las “ideas” del Cálculo que son fundamentales para los estudiantes de distintas carreras universitarias. Estos aspectos, considerados importantes por P1, han sido contemplados en sus libros de texto de Cálculo para la enseñanza universitaria.

El análisis de los relatos de P1 nos ha permitido entender mejor las trayectorias de su formación y experiencia académica, bien como de los factores que le ha motivado a la elaboración de su libro de texto de matemática. Esto nos aporta unas informaciones relevantes que nos ayudarán a identificar y caracterizar el conocimiento didáctico que emerge del análisis de los significados personales de P1 sobre la didáctica de la integral en el proceso e enseñanza y aprendizaje del Cálculo en la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. Para ello, utilizaremos las dimensiones y descriptores extraídos a partir de los estudios teóricos, antecedentes y de las entrevistas. Dichas dimensiones y descriptores se encuentran sintetizados en la Tabla 7.1 y han sido aplicados en el análisis de los significados personales de P1 sobre la didáctica de la integral que desarrollamos a continuación.

7.3. SIGNIFICADOS PERSONALES DE P1 SOBRE LA DIDÁCTICA DE LA INTEGRAL

En el capítulo 3 describimos los constructos y herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico. Una de las nociones centrales en el EOS consiste en los *significados personales* de un objeto (matemático o didáctico), entendidos en términos de "sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización". Por otra parte, la noción de *comprensión*, desde los posicionamientos pragmatistas asumidos en el EOS, es considerada "básicamente como competencia". Así, "un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas" (Godino, Batanero y Font, 2007).

Aunque ambas nociones suelen ser utilizadas en el EOS para analizar los *significados personales* de los estudiantes y su relación con la comprensión de determinado objeto (matemático o didáctico), abordamos en nuestra investigación los *significados personales* que ponen de manifiesto los profesores-formadores (expertos en la enseñanza universitaria de Cálculo) sobre la didáctica de la integral en la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria.

Consideramos que los *significados personales* de los profesores-formadores sobre ciertos objetos didáctico se articulan coherentemente con el constructo *conocimiento didáctico*[4] de los profesores (Schulman, 1986). Según Schulman, para que el profesor pueda enseñar es necesario que él comprenda previamente la disciplina que irá enseñar. Además, considera que se requiere una trasformación de las ideas comprendidas por el profesor con la finalidad de enseñarlas.

El *conocimiento didáctico* de los profesores-formadores sobre la didáctica de la integral, en consonancia con las seis dimensiones propuestas y desarrolladas en el EOS, debe contemplar un conjunto de conocimientos de los referidos docentes que involucren, entre otros aspectos: (i) conocimiento de los distintos significados de la integral en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas, así como de las posibles relaciones y conexiones que deben establecerse entre los referidos significados, así como con el currículo del Cálculo y de la Licenciatura en Matemáticas; (ii) conocimientos de los significados que los formadores esperan que sean logrados por los estudiantes y su adecuación a los significados pretendidos/ implementados por los profesores; (iii) conocimientos de los diversos recursos didácticos, materiales, tecnológicos y temporales (mediacionales) disponibles para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral en la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria; (iv) conocimientos de las vías que puedan estimular los intereses y necesidades, actitudes positivas, y las emociones de los estudiantes hacia el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral y de las matemáticas en general; (v) conocimientos de las distintas interacciones que se producen entre docentes, discentes o ambos, así como de la autonomía de los estudiantes (cuando estos se responsabilizan por el desarrollo de actividades en la clase) en su proceso de estudio; (vi) conocimientos de las posibilidades de implementación de propuestas de innovación curricular (basadas en los resultados de investigaciones o en la propia práctica en el proceso de

[4] Estamos usando la expresión "conocimiento didáctico" como traducción del "*Pedagogical Content Knowledge*" (*PCK*) de Schulman (1986).

enseñanza y aprendizaje del Cálculo) y de las adaptaciones de la enseñanza de la integral y del Cálculo al entorno socio-profesional de los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria.

A continuación presentamos el análisis del conocimiento didáctico de P1 sobre el proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. Estos conocimientos son identificados y organizados a partir de la caracterización de la idoneidad didáctica de dicho proceso de estudio, lo que requiere desarrollar una articulación coherente y sistémica entre las seis dimensiones propuestas en el EOS (epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica).

7.4. DIMENSIÓN EPISTÉMICA

7.4.1. Significado de las configuraciones epistémicas de la integral para P1

En este apartado tratamos de poner de manifiesto los significados manifestado por P1 sobre las seis configuraciones epistémicas de la integral (*intuitiva, primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada* y *extramatemática*), así como sus conexiones y relaciones. Cada una de las referidas configuraciones toma como punto de partida las situaciones-problema o los procedimientos que se utiliza para resolverlas, articulándolos con las demás entidades primarias de análisis del EOS (conceptos-definición, lenguaje, proposiciones, y argumentos).

7.4.1.1. Las situaciones-problema

Según P1, existe una tipología de problemas específicos para introducir y desarrollar el estudio de la integral en la enseñanza universitaria. Él resaltó la importancia de tener en cuenta la evolución histórica de la integral, ubicando su génesis en los procesos de "integración de Arquímedes", cuya problemática inicial todavía se presenta en algunos libros de texto. En este sentido, considera que:

> La sistematización de la integral se remonta a los siglos XVII-XVIII, aunque la integral es más antigua que la derivada, empezó con los métodos de Arquímedes. Dichos

métodos son muy trabajosos, pero todavía pueden ser encontrados en algunos libros procesos de integración a partir del referido método, por ejemplo, para **calcular el área de un segmento de parábola**.

Podemos identificar en este fragmento de la entrevista una de las más antiguas situaciones-problema intramatemáticas que ha sido resuelta por medio del Método de Arquímedes. Aunque la solución dada a dicha situación-problema se produjo basaba en un proceso intuitivo, en el procedimiento realizado eran contempladas ideas matemáticas muy similares a las actualmente presentes en el proceso de integración (Boyer, 1992). La referida situación-problema puede ser, particularmente, formulada por *hallar intuitivamente el área de un segmento parabólico*. En términos más genéricos, las situaciones-problema que requieren la utilización de procedimientos que abordan implícitamente la noción de integral caracterizan, en este estudio, la "configuración epistémica intuitiva" de la integral. Aunque Arquímedes haya aplicado su método no solamente para encontrar intuitivamente las áreas de diversas figuras planas, sino también para calcular intuitivamente los volúmenes de algunos sólidos, P1 se refiere solamente al problema de Cálculo de área de figuras planas, razón por la cual no hemos incluido el Cálculo intuitivo de volumen en el problema genérico que planteamos anteriormente.

Además, resalta que el Cálculo de áreas de regiones planas con la utilización de procesos intuitivos resulta muy trabajoso y complejo. Esto justifica la imposibilidad de generalizar la aplicación de procesos intuitivos en el Cálculo del área. En consecuencia, cada situación-problema necesita ser analizada específicamente para que se busque su solución. No obstante, podemos desarrollar la integración de manera más sencilla. En este sentido, P1 sugiere que encontrar la "primitiva" de una función consiste en *la principal técnica para realizar cálculos formales tanto de la integral indefinida como también de la integral definida, cuando se trata de funciones conocidas*. Por lo tanto, podemos identificar la "configuración epistémica primitiva" de la integral. La problemática general que caracteriza la referida configuración puede ser enunciada por: *¿Cómo encontrar la primitiva de una función conocida?*

Al abordar la introducción de la integral en el curso introductorio de Cálculo en la Licenciatura en Matemática, P1 ha afirmado que "los problemas interesantes, más convenientes [...] son problemas de cálculo de áreas". Los problemas de naturaleza geométrica vienen ocupando un importante papel en el desarrollo de la matemática (por ejemplo, el cálculo de áreas y volúmenes de ciertas figuras geométricas era un foco de atención de matemáticas desarrollada en Grecia en la época de Arquímedes) y se constituyen en temas de interés en el estudio del Cálculo. En el curso de introductorio de Cálculo, dirigido a los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, las nociones geométricas también ocupan un papel relevante y constituyen la "configuración epistémica geométrica" de la integral.

Otras aplicaciones de la integral, distintas de las geométricas, también integran el actual currículo del curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria. En la opinión de P1, "la integral es el límite de una suma de Riemann y esto traerá la noción de trabajo en Física (mecánica), luego se puede dar el Teorema de Conservación de Energía, electricidad, magnetismo y las aplicaciones en otras áreas del conocimiento (Economía, Biología, etc.)" (P1). En esta investigación, identificamos la "configuración epistémica sumatoria" a partir del procedimiento utilizado para solucionar situaciones-problema tanto en el área de conocimiento de Matemática como en áreas distintas.

No obstante, entre las aplicaciones de la integral, aquellas relacionadas con las situaciones-problema de Física son las más resaltadas por P1 (esto se constata en distintos momentos de la entrevista). La "configuración epistémica extramatemática" de la integral engloba las distintas aplicaciones que requieren la utilización de la integral, exceptuándose las geométricas (contempladas en una configuración específica).

Además, para las funciones más complejas, "muchas veces es bastante complicado encontrar la primitiva; en estos casos es mucho más sencillo usar métodos numéricos: suma de Riemann, la regla de Simpson u otro método" para hallar la integral. Los métodos numéricos, aproximados, suelen ser aplicados a las situaciones-problema que requieren el Cálculo de una integral definida de una función cuya primitiva no existe o es "difícil" de ser encontrada. En este caso, la problemática general que se contempla sobre la "configuración epistémica aproximada" consiste en *determinar la integral definida de una función cuya primitiva no existe o es difícil de ser encontrada.*

Lo anterior expresa los distintos significados personales manifestados por P1 sobre la integral. Consideramos que al argumentar que la integral, originariamente, se refiere a la integral definida, P1 explicita su posición respeto a la introducción y al desarrollo del tema “integral” en la enseñanza universitaria de matemática: “siempre que se puede se introduce las aplicaciones” (P1). Así, nos parece importante resaltar la relevancia que se atribuye a las situaciones-problema en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, particularmente de la integral en la enseñanza universitaria.

7.4.1.2. Los procedimientos en el estudio de la integral

A continuación describimos los principales procedimientos utilizados en el proceso de enseñanza de la integral, en la opinión de P1.

Inicialmente, P1 ha resaltado la importancia de introducir la integral de la “manera moderna”. Esto presupone que se desarrolle el proceso de enseñanza de la integral a partir de la integral de Cauchy-Riemann. Sin embargo, también manifiesta que la “concepción intuitiva” de la integral debe incluirse en este proceso. Según ha declarado:

> Es más conveniente introducir la integral directamente de la manera actual como ésta es modernamente concebida, aunque en su concepción intuitiva como la del siglo XVII, usando aquella manera geométrica de unir los infinitésimos y "generar" un número finito que es la integral de todos los elementos infinitesimales(P1).

En lo que se refiere al proceso de integración de una función, con la finalidad de obtener tanto la integral definida como la integral indefinida, P1 considera que el principal procedimiento consiste en la primitivación (o antiderivación). En este sentido, P1 asume que:

> La primitiva de funciones es la noción más importante; consiste en la principal técnica para hacer cálculos formales de integral indefinida e incluso de la definida (a partir de la primitivación). Es la manera más "fácil" porque generalmente lo que se utilizan son funciones conocidas: logaritmos, exponenciales. Se integra y se utiliza la diferencia de valores para calcular la integral definida.

En cuanto a la noción de área, P1 resalta que la importancia de su inclusión en el curso introductorio de Cálculo consiste, por una parte en la “motivación” para la introducción de la integral y, por otra parte, en permitir la visualización geométrica. Parece que la referida “motivación” puede ser entendida como una vía de convencimiento de los estudiantes de la utilidad de la integración en la resolución de situaciones-problema prácticas de Matemáticas, como es el caso del cálculo del área de regiones curvilíneas. Según la consideración de P1, se utiliza:

> El concepto de área como motivación para introducir la integral y luego, en un curso de Análisis Matemático, se define la integral numéricamente por las sumas de Riemann, que fueron inspirados por la noción de área. [...]. El área es solamente para tener una visualización geométrica de una integral.

Aunque P1 considere dicha noción relevante para la introducción y visualización de varios temas relacionados con la integral, observa el hecho curioso de que cuando se formaliza la integral de Riemann – desde la perspectiva rigurosa del análisis matemático – se produce la ruptura entre la integral y la noción de área. En este caso, la definición de área es la que se apoya en las herramientas del Análisis Matemático para su formalización como el límite de una Suma de Riemann.

Por otra parte, P1 defiende la utilización de los métodos numéricos para la resolución de algunos de los problemas que requieren la noción de la integral definida. La complejidad encontrada en la determinación de la primitiva de una función en estos casos puede convertirse en un cambio de estrategia que debe estar dirigida a los procedimientos numéricos. Según ha afirmado P1:

> Calcular una integral definida no es necesariamente más simple solo porque tenemos su primitiva. La primitiva puede ser compleja. En muchos casos la integral definida debe ser calculada a través de un método numérico, si lo que se desea es encontrar un número. [...] En estos casos es mucho más sencillo usar métodos numéricos: la Suma de Riemann, la Regla de Simpsom u otro método.

Además, P1 destaca la importancia de la utilización de las aproximaciones numéricas en la práctica profesional de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria para solucionar distintos problemas. En este sentido, considera que a través del curso de Cálculo se puede contribuir con el desarrollo de esta competencia en los futuros profesores de matemáticas.

Asimismo, los procedimientos utilizados en la resolución de situaciones-problema de naturaleza extramatemática, consisten en las aplicaciones de la noción de integral a otras áreas del conocimiento distintas de las Matemáticas.

7.4.1.3. Las proposiciones en el proceso de estudio de la integral

Al ser cuestionado sobre las principales proposiciones (propiedades y teoremas) relativas a la integral que deben ser abordadas en un curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria, P1 contestó que en el proceso de enseñanza de la integral se necesita desarrollar las siguientes proposiciones: "integral de una suma, desigualdades, módulo de una integral, y el Teorema Fundamental del Cálculo". En su opinión, estas proposiciones básicas deben ser contempladas en el desarrollo de la integral en el referido nivel educativo.

7.4.1.4. Las definiciones relacionadas con la integral

Podemos identificar en la entrevista realizada con P1 algunas definiciones que se relacionan con la noción de integral en un curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria. Se trata de las nociones matemáticas explícitas en la más usual definición de la integral, la integral de Riemann.

Podemos observar, a través del siguiente fragmento de la entrevista, que se refiere a las nociones de límite, sumas de Riemann y a diversas nociones físicas. P1 afirmó que la "integral es el límite de una suma de Riemann y esto traerá la noción de trabajo en física – mecánica –, luego se puede dar el teorema de conservación de energía, electricidad, magnetismo y las aplicaciones en otras áreas".

Por otra parte, P1 ha resaltado la importancia de las funciones exponenciales y logarítmicas para el estudio de una fenomenología ligada a la Matemática y considera que "el logaritmo puede ser representado por una integral; la mejor definición de logaritmo natural es la integral definida en el intervalo de 1 a x de dt/t; esto nos permite deducir las propiedades de logaritmo y definir la función exponencial". Además, P1 se refiere también a otras nociones matemáticas componentes del currículo de Cálculo en la enseñanza superior, como es el caso de las derivadas, series de potencias, etc.

7.4.1.5. Lenguajes utilizadas en la enseñanza universitaria de la integral

En la concepción de P1, “todas las representaciones deben ser usadas, en la medida que una sea más adecuada que otra”. Dicho de otra manera, el estudiante debe comprender y articular coherentemente los distintos significados relativos a la noción matemática que se estudia. Esto implica en el desarrollo de competencias necesarias a la comprensión, articulación y utilización del lenguaje más adecuado para interpretar, expresar, desarrollar, solucionar y justificar cada una de las situaciones-problema propuestas en el proceso de estudio de la integral.

Aunque no encontramos, de manera explícita, la referencia de P1 a los tipos de lenguaje que se debe utilizar en la introducción y desarrollo de la integral, podemos constatar la importancia atribuida a la visualización geométrica, al dominio de los temas y procedimientos algebraicos, a la aplicación de las aproximaciones numéricas a ciertos problemas de integración, y a la adecuada justificación de las proposiciones referentes a la integral.

Por lo tanto podemos inferir, a partir de los relatos de P1, que es importante que los docentes y estudiantes utilicen articulada, coherente y adecuadamente diversos lenguajes en el proceso de estudio de la integral en la enseñanza universitaria de Cálculo, entre los cuales destacamos el lenguaje natural, simbólico, gráfico, algebraico, numérico, tabular y computacional.

7.4.1.6. La argumentación en la enseñanza de la integral

Al reflexionar sobre las proposiciones que deben ser demostradas en el estudio de la integral en la enseñanza universitaria, especialmente en la formación de profesores de matemáticas, P1 aclara qué se entiende por demostrar. En su opinión, hay dos sentidos de la demostración en Matemáticas. Uno es más intuitivo y se basa en convencer al alumno, a través de la utilización de una argumentación coherente, que el resultado presentado es verdadero. El otro se refiere a la presentación de una demostración matemática lógicamente organizada, es decir, en su sentido más axiomático.

En lo que se refiere al curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria, P1 resalta la necesidad de justificar las proposiciones. Sin embargo, no deja dudas de que lo que se debe utilizar es el primer sentido atribuido a la demostración, al considerar que:

> Debemos presentar los contenidos de manera que se satisfaga la curiosidad de los alumnos, responderles por qué los resultados son verdaderos, aunque sea por medio de una visualización geométrica. ¡Es necesario contestar a los alumnos y no solamente decirle que se trata de un resultado verdadero! Tengo que presentar un teorema, explicarlo y justificarlo.

Para P1 la visualización geométrica consiste en uno de los medios aceptables para llevar a cabo una argumentación coherente para algunas de las proposiciones contempladas en un curso introductorio de Cálculo. Este recurso posibilita la justificación de propiedades y teoremas para los estudiantes. Además, permite la posterior aplicación de estas proposiciones al desarrollo de las nociones matemáticas que se estudia en Cálculo. Las demostraciones axiomáticas también resultan imprescindibles en su opinión. No obstante, ellas son objeto del curso de Análisis Matemático que generalmente se imparte en los últimos años de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. En esta asignatura, la comprensión de las nociones matemáticas anteriormente estudiadas en Cálculo es fundamental para su desarrollo exitoso.

En la figura 7.4 a continuación, sintetizamos las seis configuraciones epistémicas de la integral (*intuitiva, primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada* y *extramatemática*) identificadas y extraídas de los relatos de P1:

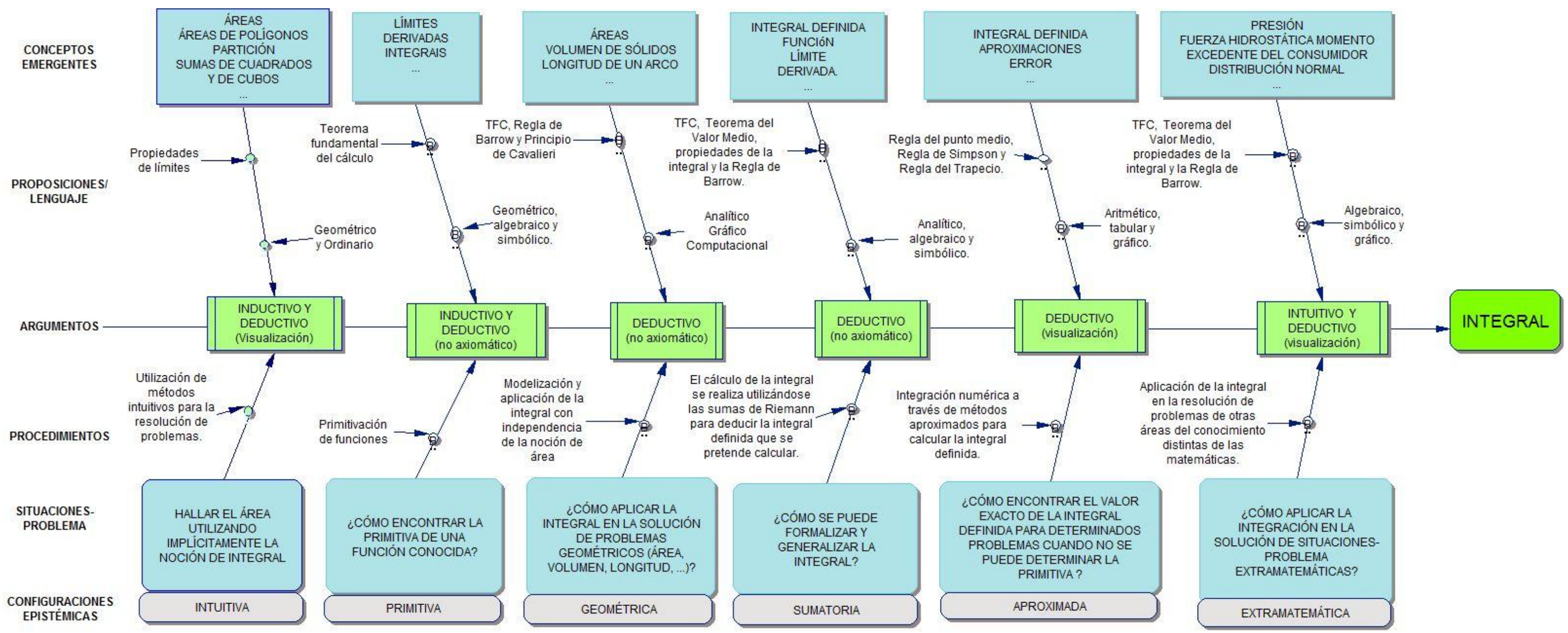


Figura 7.4: Configuraciones epistémicas de la integral según P1

7.4.2. Articulaciones y conexiones

7.4.2.1. Articulación de los objetos matemáticos y didácticos

Las seis configuraciones epistémicas de la integral que hemos sistematizado anteriormente, pueden ser interpretadas en el Enfoque Ontosemiótico como el significado personal global de la integral manifestado por P1. Cada configuración epistémica contempla las relaciones entre los elementos de análisis primario (situaciones-problema, lenguaje, procedimientos, definiciones, proposiciones, y argumentos) y, se articulan en una red de configuraciones.

Podemos describir las relaciones internas que se producen en cada configuración epistémica a partir de la siguiente estructura genérica: tomando como punto de partida una situación-problema específica, que requiere la utilización de la integración para su solución, identificamos el procedimiento más adecuado para solucionarla; para desarrollar dicho procedimiento, generalmente recurrimos tanto a las definiciones como a las proposiciones (previamente enunciadas a través de propiedades y teoremas); los argumentos aceptados como válidos son utilizados para justificar, aunque implícita o intuitivamente, el resultado encontrado para la referida situación-problema. Todo ello se lleva a cabo por medio del lenguaje, que debe estar articulado y adecuado para enunciar y expresar coherentemente las distintas etapas que se producen en la proposición y resolución de las distintas situaciones-problema relacionadas con la integración.

En lo que se refiere a las relaciones que se establecen entre las distintas configuraciones epistémicas (o significados intermedios) de la integral, consideramos que el uso de los procesos intuitivos colabora con la comprensión necesaria a la transición del pensamiento elemental para el pensamiento más avanzado en matemáticas (Tall, 1996; Pinto, 1999). En este sentido, la comprensión de la idea matemática que soporta el proceso de integración debe ser movilizada por los estudiantes en el momento de elegir o decidir el procedimiento más apropiado para solucionar cada situación-problema. El principal procedimiento declarado por P1para la integración consiste en la primitivación. La determinación de la primitiva de cierta función suele ser utilizada en la solución de las situaciones-problema relacionadas con la integral indefinida. No obstante, se utiliza dicho procedimiento muy frecuentemente como una etapa previa en las soluciones de situaciones-problema que requieren la aplicación de la integral definida. Cuando dichas situaciones se relacionan con las nociones geométricas, evocamos la configuración epistémica geométrica; en el caso contrario, la configuración epistémica extramatemática contempla las situaciones-problema que consisten en las aplicaciones extradisciplinares de la integral definida. En ambas, la configuración epistémica sumatoria puede estar contemplada siempre y cuando los procedimientos utilizados se relacionan con la el significado de la integral como el límite de las Sumas de Riemann. También hay casos en los cuales la integral definida puede ser determinada a partir de métodos numéricos, lo que se realiza a partir de la configuración epistémica aproximada de la integral.

La comprensión del profesor-formador referente a los distintos significados de la integral contemplados en el currículo de Cálculo es fundamental para transformar el conocimiento del contenido matemático, la integral, en un conocimiento didáctico (Schulman, 1986) de la integral. En esta dirección, ha evolucionado el Enfoque Ontosemiótico hacia los significados de los objetos didácticos. Esto ha permitido la adaptación y aplicación de las herramientas teóricas del EOS en la doble vertientes, matemática y didáctica. Consideramos que la comprensión de las configuraciones epistémicas de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas consiste en una etapa fundamental para la transformación del conocimiento que el profesor-formador posee sobre la integral en un conocimiento "enseñable" a los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria.

7.4.2.2. Conexiones intradisciplinares e interdisciplinares de la integral

Las situaciones-problema, tomadas como punto de entrada en cada una de las seis configuraciones epistémicas anteriormente mencionadas, pueden contener implícita o explícitamente conceptos matemáticos (conexiones intradisciplinares) o la asociación de conceptos matemáticos con conceptos de otras áreas del conocimiento (conexiones extradisciplinares). Por lo tanto dichas conexiones se producen a partir de los conceptos/ definiciones previas o emergentes que se ponen en juego en cada una de las configuraciones epistémicas de la integral.

Según P1, las *conexiones intradisciplinares* de la integral contemplan algunos conceptos matemáticos de la enseñanza secundaria (especialmente con los geométricos), y conceptos específicos de la enseñanza superior. Las conexiones extradisciplinares son abordadas relacionadas con una diversidad de fenómenos que pueden ser estudiados en un curso universitario inicial de Cálculo. Además, P1 resalta la importancia de conectar el Cálculo con la Física, y con el curso de Análisis Matemático en la Licenciatura en Matemáticas.

En lo que se refiere a las conexiones interdisciplinares, P1 resalta la importancia de de las funciones exponenciales y logarítmicas para el estudio de una fenomenología ligada a la Matemática. Además, considera la integral como una herramienta útil para la definición de algunos de los conceptos matemáticos, como por ejemplo, del concepto de logaritmo. Según ha relatado, "la mejor definición de logaritmo natural es la integral definida en el intervalo de 1 a x de dt/t; esto nos permite deducir las propiedades de logaritmo, definir la función exponencial". Asimismo, resaltó las conexiones de la integral con otras nociones matemáticas contempladas en el currículo de Cálculo en la enseñanza superior, tales como derivadas, series de potencias, etc.

Las conexiones extradisciplinares de la integral, han sido destacadas en la configuración epistémica sumatoria, por medio de la cual se puede abordar las nociones relacionadas con la Física, entre las cuales P1 ha destacado: trabajo, mecánica, electricidad, magnetismo y las aplicaciones en otras áreas del conocimiento.

7.4.3. Abordaje curricular de la integral

En este apartado sistematizamos los relatos de P1 referentes a los aspectos curriculares de la integral. Para esto, utilizaremos las siguientes categorías de análisis: abordaje de currículo de la Licenciatura en Matemáticas, abordaje del currículo de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas, abordaje del currículo de matemáticas de la enseñanza secundaria, y la correspondencia de los significados implementados con las directrices curriculares.

7.4.3.1. Abordaje del currículo de la Licenciatura en Matemática

Uno de los aspectos resaltados por P1 consiste en la distinción que necesita ser realizada entre las formaciones del matemático y del profesor de matemáticas de la enseñanza secundaria. Este aspecto es considerado fundamental tanto para el diseño del currículo de cada carrera universitaria, como de cada curso a ser implementado. En este sentido, P1 ha realizado una distinción entre el currículo del curso de Análisis Matemático para la formación del matemático y del profesor de matemática, expresando que:

> En lo que se refiere al Análisis Matemático, estoy muy convencido que lo que se trabaja en la formación de profesores de matemáticas tiene que ser distinto de lo que se enseña en la carrera de matemática. Por esto he escrito un libro de Análisis Matemático para la licenciatura en matemáticas. [...] Mi libro de introducción al Análisis Matemático era un libro para ser usado en la formación del matemático; cuando lo he utilizado en la formación de profesores de matemáticas he percibido que había problemas para implementar dicho curso. Entonces concluí que no era esto lo que se debería hacer, sino un curso diferenciado.

Además, P1 considera que en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas deben ser articuladas, armónicamente, las distintas disciplinas. En este sentido, ha afirmado que dicho currículo:

> Debe permitir la integración armónicas de las distintas disciplinas, tales como: Algebra Moderna y Álgebra Linear, Teorías de los Números, Cálculo, Análisis Matemático, Geometría, etc. Esto debe permitir una buena formación a los futuros profesores de matemáticas; en la licenciatura se requiere un grupo de disciplinas bien integradas para posibilitarles una amplia formación.

En esta concepción, teniendo en cuenta la necesidad de contemplar un currículo articulado en la Licenciatura en Matemáticas, P1 considera que además de las disciplinas que tradicionalmente componen dicho currículo, las disciplinas del área de educación son imprescindibles para la formación de un buen profesor de matemáticas de la enseñanza secundaria. En este sentido, afirmó que "naturalmente, toda preparación que obtenga para ayudarle a ser un buen profesor es importante" resaltando "la preparación pedagógica, la Psicología educacional, etc."

Además, P1 ha destacado la importancia de contemplar la Historia de la Matemática en los distintos cursos del currículo de la Licenciatura en

Matemáticas, aunque esto diverge de la actual organización del referido currículo. En este sentido, ha afirmado el siguiente:

> Me parece que debe ser trabajada de manera integrada en cada una de las disciplinas de la licenciatura. Por ejemplo, un profesor que da un curso de Estructuras Algebraicas va a enseñar grupos, cuerpos, anillos, etc., tiene la obligación de contestar a los alumnos de dónde viene cada uno de estos objetos matemáticos, por qué estudiar anillos, [...]. El profesor de cada contenido es quién debe mostrar los aspectos históricos. [...] Tengo la impresión de que el futuro de la Historia de la Matemática está en incluirla en cada disciplina. Lo que hacemos actualmente es que damos las distintas disciplinas y, posteriormente, en el tercer año, un profesor da un curso de Historia de las Matemáticas. Él se queda con una tarea muy grande. […] No es sencillo para un profesor prepararse en los distintos aspectos de la historia de las matemáticas.

Según P1, el currículo de la Licenciatura en Matemáticas debe ser “integrado”. Esto presupone no solamente la articulación entre las disciplinas específicas del área de Matemáticas, sino entre las disciplinas extramatemáticas que generalmente forman parte del referido currículo (por ejemplo las disciplinas relacionadas con la Física, Computación y Educación).

7.4.3.2. Abordaje del currículo de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas

P1 ha resaltado que el currículo de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas debe ser abordado contemplando los siguientes aspectos: aplicación del Cálculo para destacar su importancia, los distintos significados de sus nociones básicas, la adecuación a la formación de profesores de matemáticas, su distinción del curso de Análisis Matemático, el Cálculo como prerrequisito para el curso de Análisis Matemático y la aplicación de las nociones de Cálculo en la Física.

Para mostrar la importancia del Cálculo para los estudiantes, P1 sugiere diversas situaciones que pueden ser abordadas por los profesores universitarios de Cálculo. En su opinión:

> En el primer año de un curso de Cálculo podemos mostrar a los alumnos cómo estas cosas funcionan: el logaritmo natural, la función exponencial, su importancia en estudios de datación geológica, los métodos de carbono 14 para datación históricas y arqueológicas, decaimiento radioactivo, crecimiento poblacional, estadística y otros fenómenos”.

En el relato anterior, P1 pone de manifiesto la importancia del Cálculo no solamente para la definición de algunas nociones matemáticas (como logaritmo natural y función exponencial), sino para su aplicación a múltiples situaciones-problema enmarcadas en distintas área del conocimiento. Estas aplicaciones del Cálculo en contextos tan diversos demandan sistematizar sus conceptos a través de distintos significados.

Aunque de manera implícita, P1 admite la existencia de múltiples significados de los conceptos del Cálculo. Esto puede ser constatado en el relato que presentaremos a continuación, referente a sus afirmaciones sobre la motivación para definir las nociones de derivada e integral. En su opinión, abordar los significados de la integral:

> Es como en el caso de la derivada, que puede ser definida como el límite de la razón incremental o como la recta tangente. Esta segunda idea motiva el desarrollo del concepto de derivada; posteriormente tú vas a estudiar la derivada que va mucho más allá de este significado. Con la integral pasa algo similar; definiéndose la integral, defines muchas magnitudes físicas, como trabajo de una fuerza. Esto no tiene relación con área; es el límite de una suma de Riemann. El área entra inicialmente como motivación y luego introduce el concepto de una suma de Riemann, que es muy importante.

Por lo tanto, P1 establece una conexión de la derivada con la recta tangente (que en su opinión motiva el desarrollo de su definición), pero reconoce que sus significados sobrepasan esta idea. De manera similar, intenta relacionar las nociones de integral y de área, argumentando que el área motiva la definición de la integral como límite de la suma de Riemann, a partir de la cual se estudia los significados de la integral con independencia de la noción de área.

Por otra parte, P1 considera necesario que se establezca la diferencia entre la formación del matemático y la formación del profesor de matemáticas de la enseñanza secundaria, así como también entre el curso de Cálculo y el de Análisis Matemático en ambas carreras universitarias. Coincidimos con estas afirmaciones y consideramos que es imprescindible adecuar el currículo de Cálculo a las distintas carreras universitarias. Para esto, se requiere una flexibilización y ajuste de los significados institucionales pretendidos para el curso de Cálculo en correspondencia con las finalidades de la carrera a que se dirige dicho curso.

En la opinión de P1, estos aspectos han sido contemplados en el diseño de su primer curso de Cálculo, así como en la elaboración de su libro de texto de Cálculo. La experiencia de P1, empezando con su formación universitaria y desarrollada a lo largo de su actuación como docente universitario, le ha llevado a constatar la necesidad de aplicación de una metodología que diferenciara el proceso de enseñanza del Cálculo en algunas carreras (por ejemplo, en la Licenciatura en Matemáticas) del de Análisis Matemático pretendidos por los libros de texto de la época[5]. Además, considera la diferencia que debe existir entre la formación universitaria del matemático y la del profesor de matemáticas.

Para ejemplificar dicha diferencia, P1 comenta que en el curso universitario de Cálculo mientras demostraría una propiedad de la integral de manera axiomática en la formación del matemático, argumentaría dicha propiedad de manera intuitiva en la formación de profesores, dejando el rigor para el curso de Análisis Matemático. En este sentido, P1 considera que:

> Demostrar que la integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales. En un curso para matemáticos – y no lo haría así en cursos de formación de profesores de matemáticas – yo presentaría una demostración en el aspecto axiomático. En un curso de Cálculo no hay necesidad alguna de hacer dicha demostración como hago en un curso de Análisis Matemático; he de utilizar la intuición. Necesito tener claro que en la formación de profesores de matemáticas, lo que formamos no es un matemático.

Por lo tanto, es necesario que la adaptación que debe realizarse en el currículo de Cálculo tenga en cuenta la carrera para la cual se dirige éste curso. En este sentido, el perfil profesional del egresado de la Licenciatura en Matemáticas, por ejemplo, se convierte en uno de los elementos a considerar en el diseño del currículo del Cálculo en la referida carrera.

Además, los conceptos del Cálculo, como el de derivada e integral, deben ser comprendidos por los estudiantes pues se convertirán en conocimientos previos para el posterior curso de análisis matemático. P1 considera que la comprensión de los conceptos fundamentales de un curso introductorio de Cálculo es imprescindible para dar continuidad a otros cursos del currículo de la Licenciatura en Matemáticas. En su opinión, "en la formación de profesores de matemáticas el alumno tiene que saber derivadas e integrales bien, para pasar satisfactoriamente a un curso de Análisis Matemático. Así, además de afirmar que el desarrollo del currículo de Cálculo aporta una base necesaria al curso de Análisis Matemático, P1 considera también que la fundamentación rigurosa de otras nociones matemáticas, como de Geometría se apoya en el Análisis Matemático.

Por otra parte, P1 resalta que:

---

[5] Se refiere al período en que P1 empezó a desarrollar sus actividades académicas.

> El desarrollo del Cálculo está estrictamente relacionado con las aplicaciones físicas [...]. Para hacer un curso universitario de mecánica, óptica, electricidad, electromagnetismo, termodinámica, etc. – disciplinas básicas de Física – ellos estudiaron mucho más aplicaciones, pues en los cursos de Cálculo no hay como profundizar en toda esta tarea".

Aunque P1 considera que en los cursos introductorios de Cálculo se abordan parcialmente las aplicaciones físicas, ha resaltado que a través de los temas o cursos de Física, que integran el currículo de la Licenciatura en Matemáticas, se debe profundizar en las aplicaciones de los conceptos del.

La articulación coherente y armónica entre las diversas disciplinas de la Licenciatura en Matemáticas es un factor fundamental para asegurar la amplia formación del profesor de matemáticas de la enseñanza secundaria. En este sentido, es importante realizar la interacción entre el currículo de Cálculo con los de otras asignaturas contemplados en la organización curricular de la Licenciatura en Matemáticas. Asimismo, debe haber una articulación del currículo del Cálculo con las matemáticas de la enseñanza secundaria.

7.4.3.3. El currículo de Cálculo y la matemática de la enseñanza secundaria

En su relato relativo a la conexión del Cálculo con la matemática de la enseñanza secundaria, P1 resaltó que se debe planificar la Matemática de la enseñanza secundaria de manera modesta y adecuada, para contemplar las nociones de Cálculo en la secundaria. En este sentido, abordó los siguientes aspectos: estudio de algunas nociones de Cálculo (como la derivada) en la enseñanza secundaria, conexión de la integral con las nociones geométricas de área y volumen en la enseñanza secundaria, y desarrollo del estudio de la "matemática aproximada".

Según ha relatado P1:

> Las derivadas son importantes en la educación secundaria, pero no necesitan ser precedidas de una teoría de límites. Las derivadas han que ser enseñadas directamente y aplicadas a la Física, por ejemplo. Es posible estudiar, en pocas clases del primer año, cómo se puede desarrollar el estudio del movimiento – estoy escribiendo unos artículos sobre este tema – y, con esto, posibilitar que el alumno aprenda un concepto rico de derivadas.

En la enseñanza secundaria, el abordaje de algunas nociones del Cálculo debe realizarse de manera intuitiva y con un propósito específico. Entendemos que dicho propósito se refiere al desarrollo intuitivo, operatorio y aplicado de dichas nociones a la resolución de situaciones-problema que pueden ser adecuadamente implementadas en la enseñanza secundaria de matemáticas.

En cuanto a la noción de integral en la enseñanza secundaria, P1 opina que los profesores deben estar preparados para presentar dicha noción a través del abordaje de "temas de Geometría – nociones de áreas y volúmenes – en los cuales se desarrollan nociones de integral. [...] Sin embargo, no puede ser de manera sofisticada, sin propósito".

El tercer aspecto que P1 considera importante incluir en el currículo de matemáticas de la enseñanza secundaria se refiere a las "matemáticas aproximadas". En este sentido, ha declarado el siguiente:

> Otra cosa que echo de menos en la educación secundaria se trata de las matemáticas aproximadas, de los métodos numéricos y aproximaciones numéricas. Los alumnos de la educación secundaria piensan que solamente se solucionan las ecuaciones cuadráticas; que tiene una fórmula complicada para encontrar las raíces de las ecuaciones del tercer y cuarto grado y que las demás ecuaciones algebraicas serían imposibles de solucionarlas. Esto no es cierto; los alumnos han que saber, por ejemplo, que la fórmula de Baskara no siempre es la mejor vía para determinar las raíces de una ecuación del segundo grado, muchas veces un método numérico es más adecuado y esto no se suele hacer en dicho nivel educativo.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, P1 defiende el desarrollo de las nociones de derivada, integral y de aproximaciones en el currículo de matemáticas de la enseñanza secundaria. Todo ello, de manera intuitiva y centrada en las aplicaciones de estos conceptos de Cálculo en la solución de problemas específicos. En su opinión, la no contemplación de las referidas nociones en la enseñanza secundaria de matemáticas en Brasil es todavía consecuencia de la influencia legada por la matemática moderna, que ponía el énfasis "en el rigor y formalismo [...] en detrimento de los recursos de la intuición y de la visualización geométrica. Esto ha creado barreras en el proceso de la enseñanza de las matemáticas de la educación secundaria".

En esta investigación somos conscientes de la dialéctica que se establece entre los significados institucionales y personales de la integral. Al extraer los significados a partir de las narrativas de los profesores-formadores, expertos en la enseñanza universitaria de Cálculo, claro está que se trata de los significados personales que ellos manifiestan sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral en el nivel universitario. Sin embargo, los relatos de los referidos profesores-formadores reflejan, en cierta manera, los significados institucionales de la integral por tratarse de la expresión de las opiniones de los expertos universitarios que desarrollan la docencia, investigación y producción de libros de texto de Cálculo en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. En este sentido, consideramos que sus experiencias personales, analizadas y sistematizadas a la luz de los resultados de las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del Cálculo y la formación de profesores de matemáticas, convierten los distintos significados que ellos han expresado sobre la enseñanza y aprendizaje de la integral y sus aspectos curriculares, en los significados institucionales de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil.

7.5. DIMENSIÓN COGNITIVA

En la dimensión cognitiva, analizamos los relatos de P1 relativos al conocimiento y aprendizaje del Cálculo que se pone de manifiesto en los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. Para ello, hemos utilizado las siguientes categorías: conocimientos previos de los estudiantes, aprendizaje de los estudiantes, y adaptaciones curriculares a las diferencias individuales de los estudiantes.

7.5.1. Los conocimientos previos de los estudiantes

Al abordar los conocimientos previos de los estudiantes, P1 afirmó que la problemática relativa a las debilidades de los conocimientos matemáticos previos (algebraicos, geométricos, trigonométricos, etc.) consiste en una de las principales dificultades para el aprendizaje de la integral en la enseñanza universitaria.

Aunque hay controversias sobre las causas del bajo desempeño de los estudiantes universitarios en los cursos de Cálculo, los profesores suelen establecer una relación entre los conocimientos previos de los estudiantes y su desempeño en los cursos universitarios. Sin embargo, nos parece que es prácticamente unánime la posición de que un aprovechamiento satisfactorio en un curso introductorio de Cálculo requiere que los estudiantes tengan desarrolladas algunas competencias y consolidados unos ciertos conocimientos matemáticos previos.

En la opinión de P1, dadas las actuales condiciones que los estudiantes suelen ingresar en las carreras universitarias, es necesario que el profesor del curso introductorio de Cálculo realice un repaso de los temas fundamentales de la enseñanza secundaria, como medio de dotarles de los conocimientos previos necesarios para el desarrollo de los temas específicos del Cálculo. En esta dirección, ha afirmado que:

> A lo largo de mi experiencia profesional, me he dado cuenta de los problemas que los estudiantes presentan de falta de conocimientos previos en el álgebra de la enseñanza secundaria: productos notables, fracciones algebraicas, etc. Las principales dificultades para trabajar con la integral o incluso con las derivadas vienen generalmente de esto.

La problemática relativa a las debilidades de los conocimientos matemáticos previos (algebraicos, geométricos, trigonométricos, etc.) en parte de los estudiantes que inician la Licenciatura en Matemáticas es apuntada por P1 como una de las principales dificultades para el aprendizaje de la integral. En este sentido, P1 afirma que existen conocimientos previos indispensables para el éxito de un curso introductorio de Cálculo.

Barufi (2002) corrobora dicha idea. En su opinión, los estudiantes noveles de la Licenciatura en Matemáticas "presentan grandes dificultades generalmente en consecuencia de su formación en la enseñanza secundaria de matemáticas y buscan, inicialmente, quizás de manera inconsciente, nuevas formas de construir el conocimiento porque lo que desean es tornarse profesores" (p. 72). En esta dirección, la referida investigadora comenta que en el primer año de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de "São Paulo", son ofrecidos dos cursos semestrales de Cálculo Diferencial e Integral, en los cuales se hace hincapié con la enseñanza secundaria de matemáticas a partir del nuevo énfasis puesta en el estudio de las funciones elementales.

Además de retomar los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes como una posible vía para contribuir con su éxito en el curso introductorio de Cálculo, P1 plantea la necesidad de "aplicar luego los contenidos trabajados; en el caso contrario, los alumnos no van a aceptar el proceso de enseñanza y tomarán las matemáticas como algo desagradable, sin sentido para ellos". Asimismo, P1 defiende la propuesta de aplicación de algunos contenidos del

Cálculo, como derivadas e integrales, en la enseñanza secundaria de matemática. En su opinión, las referidas nociones pueden ser abordadas intuitivamente en los currículos de matemáticas de la enseñanza secundaria y posteriormente aplicadas, por ejemplo, en la resolución de problemas de naturaleza geométrica o física.

En la entrevista con P1 identificamos otra cuestión cuya reflexión sobre la misma nos parece crucial para el currículo de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. Se refiere al estudio de algunas nociones del Cálculo en dicho nivel educativo, bien como a la forma de abordarlas.

En este sentido, P1 ha revelado su posición favorable a la enseñanza de tópicos de Cálculo en la enseñanza de secundaria. Su argumentación está dirigida a que se debe dotar a los estudiantes de la enseñanza secundaria de las nociones matemáticas fundamentales para resolver los problemas extradisciplinares propios de este nivel educativo, con el uso de herramientas matemáticas más efectivas, como las nociones intuitivas de derivadas e integrales.

Según esta consideración, las derivadas van a auxiliar a los estudiantes en la simplificación de estrategia utilizada para solucionar algunos problemas, como por ejemplo los relacionados al estudio del movimiento. Aunque esta problemática ha estado estrechamente relacionada con la evolución histórica del Cálculo, en muchos casos no se establece su relación con la enseñanza secundaria de la Física. Generalmente esta asignatura se desarrolla sin aplicar los conceptos y las herramientas del Cálculo en la resolución de las situaciones-problema específicas. En esta misma dirección, la noción de integral también puede ser introducida en la enseñanza secundaria cuando se trabaja con la Geometría Plana y Espacial (áreas, volúmenes, etc.). Entretanto, esto requiere una coherente adaptación metodológica para que su énfasis se centre en los significados intuitivos y geométricos de la integral. Lo que se defiende en este caso, es la introducción de la integral para resolver determinadas situaciones-problema de naturaleza geométrica inherente a la enseñanza secundaria de matemática.

7.5.2. El aprendizaje en la enseñanza universitaria

El aprendizaje en la enseñanza universitaria requiere que los estudiantes sean conscientes de sus necesidades y se involucren de manera activa en sus procesos de estudio presencial (en las clases, actividades de tutoría, ...) o no presencial (en la biblioteca, en la casa, ...). P1 ha comentado que se puede lograr la mejora en el proceso de aprendizaje de los estudiantes al proponer situaciones en la clase que les posibiliten actuar activamente en la resolución de situaciones-problema, así como en cuestionamientos y respuestas.

En este sentido P1 afirma que, cabe al profesor universitario realizar menos exposiciones y promover más la participación de los alumnos. Al comentar algunos de los logros en el aprendizaje del estudiante cuando se le atribuyó un papel activo a lo largo de las clases, concluyó que “los resultados en este proceso son considerablemente mejores que en las situaciones que el profesor llega en la clase, expone su contenido, demuestra los teoremas, indica una lista de ejercicios y se marcha”.

Si lo que se pretende es mejorar el aprendizaje del estudiante universitario de la Licenciatura en Matemáticas referente a la integral, la práctica docente debe ser distinta de la sintetizada anteriormente, la cual todavía es muy frecuentes en la formación de los profesores de matemáticas.

En el proceso formativo, debe ser contemplada una formación amplia y general del educador. Esto presupone un aprendizaje mucho más allá del conocimiento de las matemáticas que ellos van a enseñar en este nivel. En las palabras de P1, “los alumnos de la licenciatura en matemáticas necesitan aprender no solamente lo que van a enseñar, sino aprender lo necesario para ampliar sus horizontes; para tener seguridad al realizar su trabajo”.

7.5.3. Las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales de los estudiantes

La adaptación de los temas matemáticos, especialmente del Cálculo, a las necesidades individuales (y profesionales) de los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria fue bastante enfatizada por P1. En este sentido, él comentó la importancia de una buena formación en Cálculo para que el profesor de matemáticas pueda abordar, de manera adecuada, algunos de los temas propuestos en el currículo de matemáticas de la enseñanza secundaria. En este sentido, ha declarado que:

> El estudio del Cálculo es fundamental para la buena formación del profesor para abordar estos temas, no de la manera que se propone en los libros de secundaria, que se parecen más con un curso universitario y no se adecuan al nivel secundario. Hay que desarrollar un curso más modesto y adecuado para la secundaria.

Según ha relatado P1, una sólida formación en Cálculo y en Análisis Matemático contribuiría para que los profesores estructurasen, adecuadamente, los currículos de matemáticas de la enseñanza secundaria. Para esto, se torna necesario conocer la evolución histórica de los conceptos matemáticos, así como la importancia de las definiciones aceptadas actualmente en matemáticas. Sin estas informaciones no es posible entender por qué se debe enseñar dichos conceptos.

En este aspecto, P1 propone una adaptación relativa al estudio de la Historia de la Matemática, considerando la complejidad existente en la preparación de un profesor en los distintos aspectos de la historia de las matemáticas, pues el conocimiento matemático específico es imprescindible para la comprensión de su historia. Reconocemos la complejidad de preparar los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de acuerdo con las demandas legales que reglamentan dicha carrera y, especialmente, de atender a las necesidades de un sistema educativo dirigido a una satisfactoria preparación de los ciudadanos, adaptados a su contexto social y necesidades laborales. Sin embargo, consideramos imprescindible que dicha licenciatura se desarrolle de manera flexible, autónoma y adaptada a las necesidades e intereses individuales de los estudiantes en su proceso formativo.

7.6. DIMENSIÓN MEDIACIONAL

Los descriptores *recursos materiales* y *tiempo* han sido utilizados en la sistematización de la dimensión mediacional de la integral. En los recursos materiales contemplamos los descriptores: *uso de materiales didácticos y tecnológicos en las clases; y uso, características y rol del libro de texto de Cálculo.* El tiempo ha sido descrito a través de: *adecuación de los significados pretendidos/ implementados al tiempo disponible (presencial o no presencial);*

inversión del tiempo en los contenidos más relevantes; e inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultades de comprensión.

7.6.1. Uso de materiales didácticos y tecnológicos

P1 ha hecho referencia a algunos de los recursos materiales que pueden ser utilizados en las clases de Cálculo, entre los cuales se encuentran la pizarra y los recursos tecnológicos.

Según ha relatado, el profesor universitario de Cálculo debe generar condiciones para que los estudiantes puedan realizar la resolución de ejercicios en la pizarra. Las ventajas apuntadas para ello consisten en generar un amplio cuestionamiento de los estudiantes sobre los temas matemáticos que se está desarrollando en la clase y, consecuente aclaración, por parte del profesor, de los puntos que todavía no hayan sido comprendidos. En este sentido, P1 considera que “para aumentar el interés de los alumnos hay que involucrarles en las actividades en la clase; exigirles la solución de problemas en clase, en la pizarra”.

En lo que se refiere a los recursos tecnológicos, P1 reconoce su relevancia en el proceso de enseñanza de las matemáticas universitarias, especialmente de Cálculo. Sin embargo, alerta sobre el “peligro” de una mala utilización de dichos recursos tanto por los docentes como por los discentes. Al comentar sobre la existencia de “softwares” bastante sofisticados, con muchas herramientas disponibles para la enseñanza de las matemáticas, P1 resaltó la necesidad de una planificación creativa de las actividades docentes que requieran la utilización de “softwares”, en lugar de usarlos como una simple herramienta para encontrar los resultados directos de algunos ejercicios de matemáticas. En este sentido, P1 ha afirmado que actualmente hay muchos *softwares* que son muy valiosos para la enseñanza. Sin embargo, alertó para el peligro de no usarlos adecuadamente, con énfasis en las Matemáticas que se utilizan como soporte en el desarrollo del *software* matemático.

7.6.2. Uso, características y rol del libro de texto

Entre los recursos didácticos mencionados para el desarrollo del proceso de enseñanza de la integral, P1 ha resaltado la importancia del libro de texto de Cálculo. Tras presentar un panorama histórico de los libros de texto de Cálculo en Brasil, aclaró las razones que le motivaron a elaborar su primer libro de Cálculo. Asimismo, mencionó las principales características que deben contemplar los referidos libros y el papel que juegan en la enseñanza universitaria.

7.6.2.1. Panorama histórico de los libros de texto de Cálculo en Brasil

En la década de los 50, la enseñanza universitaria del Cálculo en Brasil estaba basada en el modelo europeo, siendo fuertemente influenciado por los modelos franceses e italianos. Esto significa que desde su introducción en el inicio de las carreras universitarias, el curso de Cálculo era desarrollado de manera rigurosa y axiomática no diferenciándose de lo que actualmente se considera como cursos de Análisis Matemático en las universidades brasileñas.

Hay una consideración bastante interesante mencionada por P1. Su experiencia docente le convenció de que los significados a implementar en los cursos de Cálculo para los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas (entre otras carreras) no se adecuaban a los significados pretendidos por los libros de Cálculo de la época. Anteriormente se utilizaban – en Estados Unidos y en Brasil – algunos libros que, en cierta medida, influenciaron a P1 a escribir su propio libro de texto de Cálculo. P1 ha afirmado que:

> Se usaba en Estados Unidos como un gran libro de Cálculo, el de Courant [...]. Sin embargo, dicho libro era considerado "pesado" en los años 1960. Distintos libros empezaron a surgir, entre los cuales están el de Lang y el de Thomas. Había uno en esta época que lo utilizamos aquí en Brasilia; un libro teórico, bien escrito, de autoría de Johnson y Kiokemeister.

A partir de la década de los 1970 han surgido distintos libros de Cálculo de autores brasileños. Algunos de los cuales son tradicionalmente utilizados en distintas universidades (Ávila, Guidorizzi, Gonçalves y Flemming, Boulos). Observamos aun el énfasis puesto por algunos autores actuales de libros de texto de Cálculo en la matemática aplicada y en las tecnologías, y la reciente edición de un libro de Cálculo basado en proyectos (Figueiredo, Xavier y Santos, 2011).

Sin embargo, los libros extranjeros de Cálculo, especialmente los estadounidenses, siguen siendo traducidos y utilizados en distintas carreras universitarias en Brasil como bibliografía principal o complementaria.

7.6.2.2. Características y papel del libro de texto de Cálculo

Consideramos que es consensual entre los docentes de matemáticas atribuir importancia a los libros de texto en el proceso de enseñanza de los distintos niveles educativos. En la enseñanza universitaria de Cálculo, se parte del presupuesto que el libro de texto contempla los significados pretendidos e implementados por los profesores. Además, parece existir una relación entre las concepciones pedagógicas de los profesores y los libros de texto que estos seleccionan para el desarrollo de sus cursos.

La selección y utilización de un mismo libro de texto de Cálculo es considerado por P1 como una necesidad para las universidades que tiene varios profesores de Cálculo. En este sentido, el libro de texto de Cálculo contribuye con el desarrollo de una misma secuencia. Según P1, se debe:

> Seguir una misma secuencia para no crear problemas para los alumnos, principalmente en los cursos siguientes. Por esto adoptábamos un libro y lo seguíamos. Es relevante resaltar que seguir un libro no significa repetirlo en el aula. El profesor tiene la libertad para conducir sus clases con exposiciones enriquecidas con otras fuentes no restringiéndose solamente al libro.

En este sentido, aunque se utilice un mismo libro de texto de Cálculo, compete a los profesores complementarlo y enriquecerlo con otros materiales didácticos adecuados. La elección del libro de texto (realizada por el colectivo de profesores o por el coordinador del área) generalmente se realiza a partir de su “estructura”, la cual posiblemente contempla los significados personales manifestados implícita o explícitamente por los profesores responsables por su elección.

En general, el libro de texto se convierte en una guía de estudio en el proceso de enseñanza de Cálculo. P1 considera también que “el libro debe ser utilizado por los alumnos como material de estudio y, eventualmente ellos deben consultar otras fuentes de informaciones”. Se supone que el libro de texto adoptado como referencia para la enseñanza de la integral contempla, de manera satisfactoria, los significados a implementar en el proceso de estudio. No obstante, cabe a los estudiantes, aunque eventualmente, consultar otros textos para complementar y profundizar el estudio de las nociones matemáticas que se implementan en las clases. Esto es fundamental para ampliar y consolidar su aprendizaje de las nociones matemáticas fundamentales.

Para P1, el libro "debe ser una guía que mantenga los alumnos informados sobre lo que está sucediendo". En este sentido, el libro asume el papel de guía, que orienta al estudiante en la secuencia didáctica que será desarrollada en su curso y ofrece algunas "pistas" sobre los posibles enfoques (teórico, metodológico y práctico) que deben ser dados por los profesores en las clases.

El mercado se constituye en uno de los factores relevantes que influye en la estructuración de los libros de texto. Sin embargo, a pesar de dicha influencia, parece que lo que mantiene un libro de texto universitario en el mercado es esencialmente su calidad y el grado de adaptación a los significados pretendidos por los profesores universitarios para las carreras específicas en que actúan. En esta dirección P1 ha declarado que ha realizado algunas modernizaciones, mejoras y correcciones puntuales en los libros y ellos siguen en el mercado.

Finalmente, nos parece relevante la contestación de P1 sobre cuáles son los significados que deben ser atribuidos a la integral en la Licenciatura en Matemáticas. En su opinión, "ya existe, en los libros de texto, un acuerdo sobre lo que se debe hacer en los cursos de Cálculo", o sea, el significado institucional de referencia para la integral se encuentra en los libros de texto de Cálculo de manera relativamente consensuada. Según esta posición, el libro de texto representa, en cierto nivel, los significados de referencia de las nociones matemáticas que se van a implementar. Así, el análisis de los libros de texto de Cálculo que se utiliza en la formación de los profesores de matemáticas suele permitir la identificación y sistematización de los significados de referencia (o pretendidos) para la enseñanza universitaria, especialmente de la integral. Sin embargo, cabe al docente universitario precisar, según el currículo de cada carrera y necesidades formativas de los graduandos, los significados de las nociones matemáticas que pretende implementar en cada carrera.

P1 considera que el libro de texto de Cálculo debe:

- Ser una guía para orientar el proceso de estudio.
- Contemplar un lenguaje adecuado para que los estudiantes lo lean.
- Abordar los temas alejándose del rigor prematuro.
- Contemplar las notas históricas en sus diversos capítulos.
- Agregar los recursos tecnológicos disponibles.

Además, podemos sintetizar el papel que juegan los referidos libros en el proceso de enseñanza universitaria de Cálculo, según el relato de P1, de la manera siguiente:

- Asegurar el desarrollo de la misma secuencia.
- representar, en cierto nivel, los significados de referencia de las nociones matemáticas que se pretende implementar.

A continuación, utilizamos los tres descriptores anteriormente mencionados para analizar *el tiempo* en la dimensión mediacional.

7.6.3. Adecuación de los significados pretendidos al tiempo disponible

Los docentes deben tener en cuenta la adecuación de los significados pretendidos al tiempo disponible en la planificación e implementación de un eficaz proceso de enseñanza y aprendizaje de Cálculo en la enseñanza universitaria. El tiempo que efectivamente tiene el docente para implementar, de manera presencial, su curso debe ser utilizado con el foco en el aprendizaje de los estudiantes.

P1 ha observado las consecuencias de una inadecuada utilización del referido tiempo por los profesores universitarios de Cálculo. Al reflexionar sobre esto, comentó: “en los últimos años he empezado a administrar mi tiempo de manera más equilibrada”. En su opinión, si la práctica pedagógica del docente de Cálculo está centrada en las clases expositivas esto constituye un problema en el proceso de enseñanza y genera una actitud pasiva en los estudiantes. En esta dirección, resalta la necesidad de equilibrar el tiempo entre las exposiciones del profesor y las diversificadas actividades que él implementa en la clase para el desarrollo de un proceso activo de enseñanza con los estudiantes universitarios de Cálculo. En este sentido, P1 afirmó que:

> En los últimos años he empezado a administrar mi tiempo de manera más equilibrada. Por ejemplo, hago una exposición de 20 ó 30 minutos sobre determinado tema y, en seguida, propongo que los estudiantes se involucren en un trabajo en el aula (solución de problemas en grupos o participación en actividades de cuestionamientos y respuestas); los estudiantes tienen que trabajar. Si el profesor sigue con las clases expositivas y repitiendo lo que está en los libros no da resultado positivo.

Es fundamental que los docentes administren eficazmente el tiempo destinado al desarrollo de cada uno de los temas que se implementa, aunque la delimitación del tiempo no se produce de una manera tan sencilla. Hay diversas variables interviniendo directamente en el proceso de enseñanza de la integral, tales como el nivel de conocimientos previos de los estudiantes, su disposición hacia los estudios, la adaptación del curso a la carrera, y la experiencia profesional del docente.

Por otra parte, el docente necesita adecuar la utilización del tiempo no presencial para la implementación de los distintos temas del curso. Hay que tener en cuenta que los estudiantes generalmente llevan varios cursos a la vez y necesitan optimizar su tiempo de estudio, distribuyéndole adecuadamente entre los cursos. P1 es consciente de esta situación y la ha abordado refiriéndose a la utilización de los libros de texto. En su opinión, “los estudiantes toman varios cursos; ellos no tienen tiempo de leer un libro completo” de cada asignatura, pero son capaces de estudiar la parte teórica, elegir y/o resolver las actividades propuestas, etc.

7.6.4. Inversión del tiempo en los contenidos más relevantes y que presentan más dificultades

En los relatos de P1, encontramos algunas referencias a los contenidos más relevantes del curso de Cálculo: derivadas e integrales. Además, observamos su preocupación con la consolidación de los conocimientos básicos de los estudiantes para que sea posible avanzar en los cursos y en los temas que considera más relevantes. La mención principal que encontramos en sus relatos es referente a la importancia de que se desarrolle adecuadamente los temas centrales de cada curso de la Licenciatura en Matemática. En este sentido, P1 considera que:

> Lo que es necesario es enseñar pronto los conceptos de Cálculo y las técnicas básicas relacionadas con máximos y mínimos, derivadas, integrales, etc. Estas cosas no puedo enseñarlas en un curso de Análisis Matemático, así como en un curso de Cálculo no podemos estar preocupándonos en enseñar a los alumnos a trabajar con fracciones algebraicas; esto el alumno tiene que aprenderlo en Álgebra. En caso contrario, no puedo avanzar con los contenidos del curso. [...] En la formación de profesores de matemáticas el alumno tiene que saber derivadas e integrales bien, para pasar satisfactoriamente por un curso de Análisis Matemático.

En consonancia con la afirmación anterior, el abordaje de los conceptos de Cálculo y de las técnicas básicas consiste en los aspectos que permiten al docente universitario realizar las aplicaciones de las nociones de Cálculo. Además, le permite invertir el tiempo en los contenidos más relevantes o que presentan más dificultad de comprensión.

Al ejemplificar cómo se puede optimizar el empleo del tiempo en el desarrollo de la integral, P1 sugiere la viabilidad de la estrategia siguiente: "relacionamos la derivada con la integral a través del Teorema Fundamental del Cálculo, que puede ser realizado de manera bastante intuitiva y sin tomar mucho tiempo; ya tienes los recursos para mostrar las aplicaciones".

Siguiendo las ideas de P1, la inversión del tiempo debe ser centrada en las aplicaciones de las nociones del Cálculo y no en las demostraciones axiomáticas. En este caso, la intuición ocupa un papel relevante en la optimización del tiempo invertido por el docente en los contenidos más relevantes y más difíciles del curso introductorio de Cálculo.

7.7. DIMENSIÓN AFECTIVA

En la dimensión afectiva contemplamos los intereses y necesidades, las actitudes, y las emociones de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de Cálculo.

7.7.1. Los intereses y necesidades en el proceso de estudio del Cálculo Integral

En lo que se refiere a los intereses de los estudiantes, P1 considera que los docentes universitarios deben involucrarles en las actividades en la clase, exigirles la solución de problemas, etcétera. Esto contribuye con el aumento del interés de los estudiantes mientras se desarrolla su proceso de enseñanza y aprendizaje. Implementar un proceso de enseñanza activa, con la participación de los estudiantes, suele motivarles para un cambio positivo de actitudes. En esta dirección, P1 afirma que ellos:

> Empiezan a hacer preguntas sobre los contenidos, entonces me voy a ayudarles, porque si no cuestionan son genios o están “desligados” de la clase. ¡Los genios no son tan frecuentes! Entonces esta pasividad es deplorable. Este proceso de motivación puede ser difícil inicialmente, pero requiere poner los alumnos a trabajar activamente en la clase.

Además, P1 sugiere que los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria deben actuar con la finalidad de desarrollar estrategias que promuevan el interés y motivación de sus estudiantes.

> Yo tengo la costumbre de comentar con los profesores de la educación secundaria, que dicen que sus alumnos no tienen interés en las clases, que deben cambiar su discurso. Ellos necesitan buscar las estrategias que estimulen la participación activa de los alumnos, cambiar el estilo de la clase, proponer cuestiones, estimularlos a preguntar; no tener miedo de las preguntas; caso no sepan la respuesta inmediata, deben buscarla para la próxima clase. Los alumnos necesitan también saber las flaquezas de los profesores. ¡Nadie es bueno lo suficiente que sepa contestar a todo!

La dinámica de la clase es considerada por P1 como un factor que estimula el interés de los estudiantes. Basado en esta concepción, P1 instiga a los profesores de secundaria a que se atrevan a crear un ambiente en sus clases propicio a los cuestionamientos de los estudiantes. Esto implicaría en que el docente saliera de su “zona de dominio seguro” y se colocara en un ambiente susceptible a los imprevistos, a las situaciones ajenas y no planificadas, sin miedo a los cuestionamientos que quizás no supieran contestar prontamente, dejando expuestas sus debilidades. Esto es un reto para los futuros profesores de matemáticas.

En lo que se refiere a la proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las Matemáticas y del Cálculo, P1 declaró, por una parte, que “los contenidos básicos del Cálculo han que ser trabajado por estudiantes de distintas carreras (Matemática, Física, Química, Ingeniería, Psicología, etc.). Gran parte del Cálculo es importante para todos ellos”. Por otra parte, al comentar la manera que muchos profesores universitarios utilizan los “softwares”, P1 resaltó “la necesidad de buenos cursos, como los de Cálculo y Análisis Numérico, para que los profesores puedan estar al día con las Matemáticas que están en la base de estos softwares [...]. Hay que utilizar los softwares con inteligencia sin olvidar de las Matemáticas que soportan su construcción”.

Además, P1 ha resaltado la necesidad de estructurar el currículo de la Licenciatura en Matemáticas a partir de un conjunto de disciplinas bien integradas como vía para obtención de una amplia formación de los futuros profesores de matemáticas, así como la necesidad del estímulo institucional para los docentes que se dedican a la Educación Matemática.

7.7.2. Las actitudes en el proceso de estudio del Cálculo Integral

P1 considera que las actitudes que deben ser desarrolladas en los discentes están relacionadas con su motivación ante el desarrollo de un proceso de enseñanza activa y su disponibilidad para el aprendizaje continuo. Dar voz a los estudiantes universitarios implica no solamente en desarrollar su responsabilidad y compromiso con su aprendizaje, sino en la posibilidad del docente de conocer los significados que ellos han logrado y las dificultades que todavía perduran sobre los contenidos estudiados. Esto puede llevar a los docentes a aclarar los aspectos erróneos de los contenidos, profundizar en los temas cuyos significados no se han logrado, resolver los conflictos epistémicos o cognitivos, etc.

Otra actitud enfatizada se refiere a la disponibilidad de los jóvenes hacia su proceso de aprendizaje. En este sentido, P1 resaltó que le gustaría pasar el siguiente mensaje no solamente para nosotros, como investigadores, sino a los jóvenes (refiriéndose a los nuevos profesores de matemáticas).

> Tenemos que pasar para los jóvenes este mensaje de valentía para estar siempre disponibles para aprender más, porque ellos tienen energía y nosotros, los mayores, ya no la tenemos más. Energía para trabajar y trazar nuestra trayectoria de vida. Sin embargo, dicha trayectoria, a lo largo de la vida, no es solo en la enseñanza y todo es un aprendizaje continuado, un crecer permanente. Si me es posible me gustaría pasar este mensaje, además de para ti, de valentía, de idealismo, de ganas de trabajar, de creer; tenemos muchas cosas que nos desestimula, principalmente mirando el contexto del país y del mundo, pero el ser humano posee una extraordinaria capacidad de renovarse y tornar a creer. Cada año y cada aula de clase es un nuevo inicio y necesitamos estar siempre creyendo y trabajando para cambiar y hacer las cosas cada vez mejor.

Quizás los docentes universitarios que actúan en la licenciatura en Matemáticas pudieran compartir con esta actitud de optimismo y de esperanza de P1 hacia la educación. La expectativa de mejora del quehacer diario de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria es, sin duda, una importante actitud a tener en cuenta en el contexto de la formación de profesores.

7.7.3. Las emociones en el proceso de estudio del Cálculo Integral

En lo que se refiere a las emociones en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, P1 ha caracterizado un buen profesor de matemáticas como siendo el profesor que le gusta su profesión, las matemáticas y sus estudiantes.

“La primera condición es que el profesor debe tener amor a su profesión; tiene que gustarle ser profesor. No puede ir a la clase pensando que estará con alumnos desinteresados; estos jamás serán buenos profesores”. El amor a la profesión docente es la principal característica resaltada por P1 para un buen profesor de matemáticas. Esto genera una actitud positiva hacia la docencia, contraponiéndose al pesimismo y desaliento de aquellos profesores que desarrollan su quehacer diario enfocándose en los problemas inherentes a la docencia.

Sin embargo, esto no es suficiente para un buen profesor de matemática, pues “cuando va a la clase, sabe que encontrará los grupos de alumnos, que le guste los alumnos, que sea su amigo, que sepa arreglar el problema de disciplina”. En la docencia, las relaciones humanas entre profesor y alumno son responsables en gran medida del éxito del proceso de enseñanza y aprendizaje. Las condiciones en las cuales se desarrolla la clase deben ser armónicas, pacíficas, basada en un respeto mutuo, y propicia al desarrollo de la autoestima de los estudiantes. La amistad para con los alumnos implica en conocerles como personas, valorarles y contribuir con su bien estar. Consideramos que este rol del profesor, aunque parezca que sobrepasa su campo de actuación profesional, es fundamental para el ejercicio eficaz de la docencia de matemáticas.

¿De qué valdría tener gusto por su profesión y por sus estudiantes si no lo tuviera por las Matemáticas? En la opinión de P1, ser un buen profesor de matemáticas requiere del docente desarrollar el gusto por las Matemáticas. En este sentido, él considera necesario para un buen profesor de matemáticas “que le guste las Matemáticas, que esté buscando solucionar problemas, aclarar cuestiones, aprender continuamente”. Esto implica tener un amplio conocimiento matemático, especialmente en el área de actuación profesional y motiva al docente a estar inmerso en el mundo de las Matemáticas, valorando su belleza, estética, y su proceso de aprendizaje continuo.

7.8. DIMENSIÓN INTERACCIONAL

Esta dimensión abarca las *interacciones docente-discente, interacciones entre docentes*, *interacciones entre discentes, autonomía*, y *evaluación formativa* relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral en la formación de profesores de matemáticas de la educación secundaria.

En la concepción de P1, mientras la interacción docente-discente está centrada en estimular la participación de los estudiantes en las clases de Cálculo, la interacción entre docentes se enfoca en el proceso de mejora de la calidad de la Licenciatura en Matemáticas. Por otra parte, la interacción entre discentes está asociada a la comunicación e inclusión de los estudiantes en los grupos de trabajo; la autonomía en los momentos de la clase que se quedan bajo la responsabilidad de los estudiantes, y la evaluación formativa, relacionada con la observación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes.

A continuación, analizamos los relatos de P1 relativos a la dimensión interaccional en el proceso de enseñanza de la integral, a partir de las categorías anteriormente mencionadas.

7.8.1. Las interacciones docente-discente

Al referirse a la estrategia que debe ser utilizada por los docentes universitarios en sus clases, con la vista puesta en el buen uso del tiempo disponible, P1 critica una de las prácticas que todavía se realiza en las clases universitarias de Cálculo. La referida práctica consiste en la exposición de los temas por los profesores, seguida de la demostración de los teoremas que ellos consideran necesarios, e indicación de la lista de los ejercicios que deben ser resueltos por los estudiantes. Según ha afirmado P1:

> Si el profesor seguir con las clases expositivas y repitiendo lo que está en los libros, esto no da resultado positivo. Por lo tanto, se debe aprovechar muy bien el tiempo [...] hay que hacer menos exposiciones y promover más la participación de los alumnos. Los resultados en este proceso son considerablemente mejores que en aquellos en los cuales el profesor llega en la clase, expone su contenido, demuestra los teoremas, indica una lista de ejercicios y se marcha.

Esto pone de manifiesto la posición de P1 favorable al desarrollo de la interacción docente-discente en las clases de Cálculo, considerando necesario que los profesores universitarios promuevan la interacción con sus estudiantes y estimulen su participación activa en las clases.

Nos parece que muchas veces los profesores universitarios de Cálculo tienen dificultades para extrapolar su “campo de dominio seguro” de los contenidos, lo que consistiría no solamente en el cambio de la metodología utilizada, sino en promover la participación activa de los discentes en las clases de Cálculo. En la enseñanza de la integral esto se torna evidente en muchos docentes que optan por destinar gran parte de su tiempo presencial al estudio de las técnicas (o métodos) de integración, por considerar que este es un “campo de dominio seguro” de sus conocimientos matemáticos. La consecuencia es inevitable y se manifiesta principalmente por la pasividad de los alumnos y baja interacción docente-discente.

Otro aspecto que ha sido resaltado en la interacción docente-discente es relativo a algunos conflictos de significados que se producen en los estudiantes mientras se desarrolla el proceso de enseñanza de la integral. Esto puede ser apreciado en el siguiente ejemplo dado por P1:

> Los alumnos a veces poseen una concepción que no es cierta. Para ellos para integrar hay que saber calcular la primitiva. Pero si les pregunto cuál es la integral de *1/x* me contestan qué es el *logx*; cuando les cuestiono sobre qué es el *logx*, me dicen que es el exponente al cual se debe elevar la base; ¿qué base? Dicen que es la base *e*; y les pregunto qué es el número *e*. Cada una de estas preguntas nos remite a otras que son más complicadas.[...] Por lo tanto, calcular una integral definida no es necesariamente más simple solo porque tenemos su primitiva – la primitiva puede ser compleja; en muchos casos la integral definida debe ser calculada a través de un método numérico, si lo que se desea es encontrar un número.

En el referido ejemplo, P1 pone de manifiesto un conflicto de significados que suele ocurrir cuando se estudia la integración en un curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria. Conforme podemos percibir, los estudiantes suelen atribuir a la integración solamente el significado de integral como una *primitiva*. Sin embargo, la complejidad que se produce muchas veces cuando se trata de determinar la primitiva de una función (caso de que exista), requiere que los estudiantes conozcan otros significados de la integral.

Además, la interacción docente-discente contribuye con el fortalecimiento de las relaciones interpersonales en el ámbito de la universidad. Esto se refleja en la libertad de los estudiantes como partícipes de la dinámica de la clase, convirtiéndoles en sujetos activos de su proceso de enseñanza y aprendizaje.

7.8.2. La interacción entre docentes

La interacción entre los docentes universitarios es enfocada por P1 con el propósito de promover la reflexión sobre la calidad de la formación de los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria.

En su opinión, el foco de las reflexiones realizadas por los profesores universitarios que actúan en la formación de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria es la mejora de la calidad de dicha carrera. En este sentido ha afirmado que:

> Lo que se requiere ahora es la calidad. ¿Qué escuela es la que necesitamos? Me parece que hay mucho a ser realizado en el sentido de mejorar la formación de los licenciados. ¿Están dichos licenciados capacitados para desarrollar adecuadamente sus actividades profesionales en la enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria? Considero que la respuesta todavía es insatisfactoria. No estamos realizando un buen trabajo; hay mucho que hacer y no sabría decírselo. Necesitamos reflexionar sobre esto con los demás colegas, profesores universitarios.

Al considerar insatisfactoria la formación de los docentes de matemáticas que estamos desarrollando en nuestras universidades, P1 pone de manifiesto la necesidad de interacción entre docentes en el sentido de realizar una reflexión amplia y profunda a cerca de dicha formación, y de proponer estrategias dirigidas a su mejora. En su opinión, “necesitamos estimular a los colegas del departamento que se interesan por buscar estrategias para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la enseñanza universitaria; hay profesores interesados en actuar en esta cuestión. Ellos van a descubrir qué se puede hacer”.

Lo anterior sugiere la existencia, en el ámbito de la universidad, de un grupo de profesores interesados en promover discusión y reflexión de los problemas inherentes al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la enseñanza universitaria. Por lo tanto, P1 se manifiesta favorablemente a que esta tarea se quede bajo la responsabilidad de dichos docentes. De ahí, apunta en la dirección de estimular y valorar equitativamente tanto los docentes universitarios que se dedican a la investigación educativa como aquellos que se dedican a la investigación matemática.

7.8.3. La interacción entre discentes y la autonomía

En la opinión de P1, la interacción entre los discentes debe ser propiciada en el desarrollo de las clases en el ámbito universitario. Al mismo tiempo que los profesores universitarios proporcionan condiciones para que los estudiantes puedan interactuar, por medio de cuestionamientos en las clases, de actividades en grupo, etc., también les posibilita el desarrollo de la autonomía en su proceso de enseñanza y aprendizaje. P1 ejemplifica cómo se puede lograr tanto la interacción como la autonomía entre los discentes en sus clases de Cálculo.

La coherente distribución del tiempo presencial de las clases entre las actividades desarrolladas por los profesores universitarios y por los discentes en torno del estudio de una noción matemática específica, como la integral, implica en compartir las responsabilidades del proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo entre docentes y discentes. Sin embargo, P1 resalta que esta estrategia contribuye para aumentar la participación e interacción de los estudiantes en las clases de Cálculo.

La referida estrategia posibilita compartir el tiempo presencial de las clases con los estudiantes y requiere que estos asuman la responsabilidad de participar activamente de su proceso de enseñanza, llevando a cabo algunas de las actividades que se implementan en las clases. Como consecuencia de esto, los estudiantes realizan cuestionamientos sobre el tema de estudio, posibilitando al docente esclarecerles sus dudas, además de constatar el nivel de los significados efectivamente logrados. Esto es muy útil para que el docente pueda replantear sus futuras clases procurando el máximo acercamiento a los significados pretendidos para cada tema.

La participación de los estudiantes en las actividades desarrolladas en las clases de Cálculo posibilita al docente identificar y evaluar su nivel de comprensión relacionado con la resolución de las situaciones-problema, la satisfactoria utilización de los procedimientos, las nociones matemáticas que se estudia, el dominio del lenguaje pertinente al objeto de estudio, la validez de los argumentos que utilizan para justificar las proposiciones. Todo ello debe posibilitar a los estudiantes articular coherentemente los conceptos matemáticos contemplados por medio de las distintas configuraciones de la noción matemática que se estudia. Y, a los profesores, tomar las decisiones que contribuyan con la mejora del proceso de estudio del Cálculo.

7.9. DIMENSIÓN ECOLÓGICA

En esta dimensión analizamos los aspectos mencionados en la entrevista con P1 referentes a la *adaptación socio-profesional y cultural, y apertura hacia la innovación didáctica*.

7.9.1. La adaptación socio-profesional y cultural de los futuros profesores de matemáticas

En lo que se refiere a la *adaptación socio-profesional y cultural*, P1 ha comentado que las políticas públicas educacionales deben estar dirigidas a fomentar, incentivar y desarrollar la calidad de la carrera docente en matemática. En este sentido él comentó la importancia de creación de una agencia de fomento para apoyar la formación de profesores de la enseñanza secundaria. Según ha relatado P1:

> En el gobierno ya se discute la posibilidad de crear una agencia parecida con la CAPES (creada para formar a los profesores de enseñanza superior). Para mí, una agencia para formar, dar becas, desarrollar la educación continuada y estimular la mejora de formación en las licenciaturas" es imprescindible para lograr y consolidar la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la enseñanza secundaria. [...] La mayoría de las licenciaturas, incluso en las grandes universidades, todavía no son consideradas satisfactorias; las universidades exigen de los profesores una producción en investigación.

Asimismo, P1 afirma que la Licenciaturas en Matemáticas que se desarrollan en Brasil todavía no contemplan, satisfactoriamente, las necesidades formativas y profesionales de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. La justificativa presentada para dicha situación se basa en la valoración, en el ámbito de las universidades (o de los departamentos de matemáticas), de las investigaciones estrictamente matemáticas en detrimento del desarrollo del proceso de enseñanza y de las investigaciones educativas. En su opinión, los profesores universitarios que actúan en la Licenciatura en Matemáticas no se interesan por la enseñanza de las matemáticas, sino por las investigaciones matemáticas.

> La cuestión entonces es qué es lo que se debe hacer. En este particular, me parece que estamos entrando en una fase importante de mejora de la enseñanza; la sociedad está cobrando esto. El país está empeñándose para ofrecer la escolaridad básica a prácticamente la totalidad de los niños y jóvenes. Por lo tanto, lo que se requiere ahora es la calidad. ¿Qué escuela es la que necesitamos? Me parece que hay mucho a ser realizado en el sentido de mejorar la formación de los licenciados. ¿Están dichos licenciados aptos para desarrollar adecuadamente sus actividades profesionales en las matemáticas de la educación básica? Considero que la respuesta todavía es insatisfactoria. No estamos realizando un buen trabajo; hay mucho a ser realizado y no sabría decírselo. Necesitamos reflexionar sobre esto con los demás colegas, profesores universitarios.

Además, P1 reconoce que el país está empeñado en la mejora de la educación en los distintos niveles, atendiendo a las demandas sociales que se producen en esta dirección. Sin embargo, considera que *no estamos realizando un buen trabajo* en lo que se refiere a la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. En este sentido, propone que se debe desarrollar una amplia reflexión en el seno de la comunidad universitaria para buscar alternativas que contribuyan con el cambio de esta realidad y contribuyan con la innovación didáctica.

7.9.2. Apertura hacia la innovación didáctica

P1 considera que hay una cierta resistencia de los profesores universitarios, que actúan en la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, tanto en lo que se refiere al desarrollo y valoración de las investigaciones educativas como a las discusiones referentes a las propuestas de innovación didáctica.

En este sentido, ha afirmado que “debíamos hablar de manera general de la implicación del profesor universitario en dichos procesos, de qué hacer para involucrarlos”. Además, P1 ha resaltado la importancia del estrechamiento de relaciones y de la colaboración entre los docentes universitarios de la Licenciatura en Matemáticas y los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. En este sentido, él considera que:

> Es necesario también estrechar las relaciones de los profesores universitarios con los de enseñanza secundaria, involucrando más a los profesores universitarios. A través de estas relaciones ellos se darán cuenta de qué deben hacer. Se debe colaborar con la producción de textos, contribuir con la planificación de las clases, con la elección de los contenidos, y en la complementación de los textos.

A través de dichas relaciones los profesores universitarios pueden obtener un *feedback* de la Licenciatura en Matemáticas, constatando las necesidades que posiblemente deberán ser contempladas por medio de las propuestas de innovación didáctica.

Otro aspecto que nos parece importante resaltar, se refiere a la inserción de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en las actividades prácticas que se desarrollan en los colegios e institutos. Esto es fundamental para el establecimiento de relaciones entre las universidades (formadoras de docentes) y las demás instituciones (ámbito de actuación profesional de los licenciados en matemáticas). Las referidas prácticas pueden ser utilizadas como fuente de información útil y ámbito de investigación educativa entre ambas instituciones. Esto debe aportar elementos para el diseño e implementación de propuestas de formación continuada dirigidas al perfeccionamiento profesional de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, contribuyendo, por una parte, con la mejora de la práctica profesional de los profesores de la enseñanza secundaria y, por otra parte, con la implementación de propuestas de innovación didáctica en el ámbito de la propia Licenciatura en Matemáticas.

Sin embargo, para que todo ello obtenga éxito, "la universidad debe prestigiar y reconocer a los profesores que están actuando en las investigaciones educacionales". La investigación y la innovación, basada en la reflexión, deben jugar un papel fundamental en el diseño, implementación, evaluación y retroalimentación de los procesos de innovación didáctica.

Al ejemplificar las "innovaciones" realizadas en algunos de los temas de sus libros de texto de Cálculo, P1 abordó un conflicto entre los "Cálculos formales" y el uso de las tecnologías, expresándose de la manera siguiente:

> Al estudiar las series de Taylor, en funciones de varias variables, abordamos problemas de máximos y mínimos; entonces una cosa interesante es que se puede hacer una crítica en el sentido de que esto no es más necesario porque se puede hacer un gráfico en el ordenador y con esto obtener la ilustración que muestra el máximo y el mínimo. Sin embargo, esto no es cierto, pues debemos cuestionar acerca de cómo se desarrollan dichos programas. Ellos son desarrollados con base en aquellas

> Matemáticas que enseña cómo encontrar máximos y mínimos; pero para esto se hacen necesarios los recursos de las series de Taylor. A partir de dichos recursos hacemos aproximaciones numéricas con los programas para que sean capaces de construir los gráficos. No obstante, muchas veces no posibilitan visualizar los máximos y mínimos en la pantalla, pues en muchos casos, para esto, se necesita restringir los intervalos de los parámetros para que la figura "crezca" en determinado punto. [...] Con los cálculos matemáticos desarrollados a la moda antigua, yo encuentro los puntos con cierta aproximación y, por lo tanto, establezco un intervalo conveniente para los parámetros x e y, que posibilite visualizarlos en la gráfica construida por el software. Así, logro encontrar una figura bonita que permite "ver" los puntos de máximo y mínimo. Esto solamente es posible, en este caso, si ya conozco dichos puntos. Lo que pretendo argumentar, es que haya una iteración entre los métodos matemáticos y los recursos gráficos. Con esto si puede conseguir resultados bastante satisfactorios.

Aunque P1 reconoce la necesidad de utilización de los *softwares* en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, también resalta la importancia de la interacción entre los métodos matemáticos y los recursos gráficos.

Con la cita siguiente, utilizada por P1 en su entrevista para concluir este tema, también concluiremos este apartado:

> Tenemos mucho que aprender mientras se desarrollan estos softwares; la vida universitaria consiste en un proceso de aprendizaje continuo porque todo está en una continua evolución. Por lo tanto es necesario aprender, por ensayo y error, a utilizar bien los nuevos recursos tecnológicos que van surgiendo en nuestra práctica educativa.

7.10. SÍNTESIS DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES DE P1

En el caso I tratamos de caracterizar los *significados personales* de P1 (profesor-formador y autor de libro de texto de Cálculo) sobre la didáctica de la integral en el contexto socio-profesional de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. Para esto, hemos utilizado algunas herramientas teóricas del *Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática* (EOS). Asimismo, la *metodología de las narrativas* posibilitó analizar la formación, experiencia profesional, y la motivación de P1 para elaborar su primer libro de texto de Cálculo de la enseñanza universitaria. Las seis dimensiones del EOS: epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica se han revelado potentes para la sistematización y caracterización de los significados personales de P1, a partir del análisis de su entrevista. Los relatos de P1 han sido interpretados como los significados personales sobre los procesos de estudio de la integral, los cuales se convierten en aportaciones para caracterizar la idoneidad didáctica de dichos procesos.

Capítulo 8

SIGNIFICADOS PERSONALES DE P2 SOBRE EL PROCESO DE ESTUDIO DE LA INTEGRAL

En este capítulo analizamos detalladamente otra entrevista que hemos realizado con un profesor-formador que actúa en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. La estructura del capítulo consiste en la presentación de un estudio de caso sistematizado a partir de la entrevista realizada con el profesor-formador (P2). En la primera parte, aplicamos el método de la narrativa para analizar la formación y experiencia profesional de P2. En la segunda parte, utilizamos algunas de las herramientas teóricas del Enfoque ontosemiótico para sistematizar y caracterizar los significados personales sobre la didáctica de la integral que emergen de los relatos de P2. Dichos significados los interpretamos también como la manifestación de sus conocimientos profesionales los procesos de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de secundaria, sistematizados a partir de la noción de idoneidad didáctica.

8.1. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA PROFESIONAL DE P2

En esta sección analizamos la parte de la entrevista semiestructurada realizada con P2 (Anexo 3), referente a su experiencia profesional. Dicha entrevista fue videograbada y trascrita posteriormente.

8.1.1. Análisis de la formación académica de P2

En el análisis de la narrativa de P2 sobre su formación académica utilizaremos, inicialmente, las etapas de Labov para orientar, sintéticamente, dicho análisis.

8.1.1.1. Aplicación de las etapas de Labov a la narrativa de P2

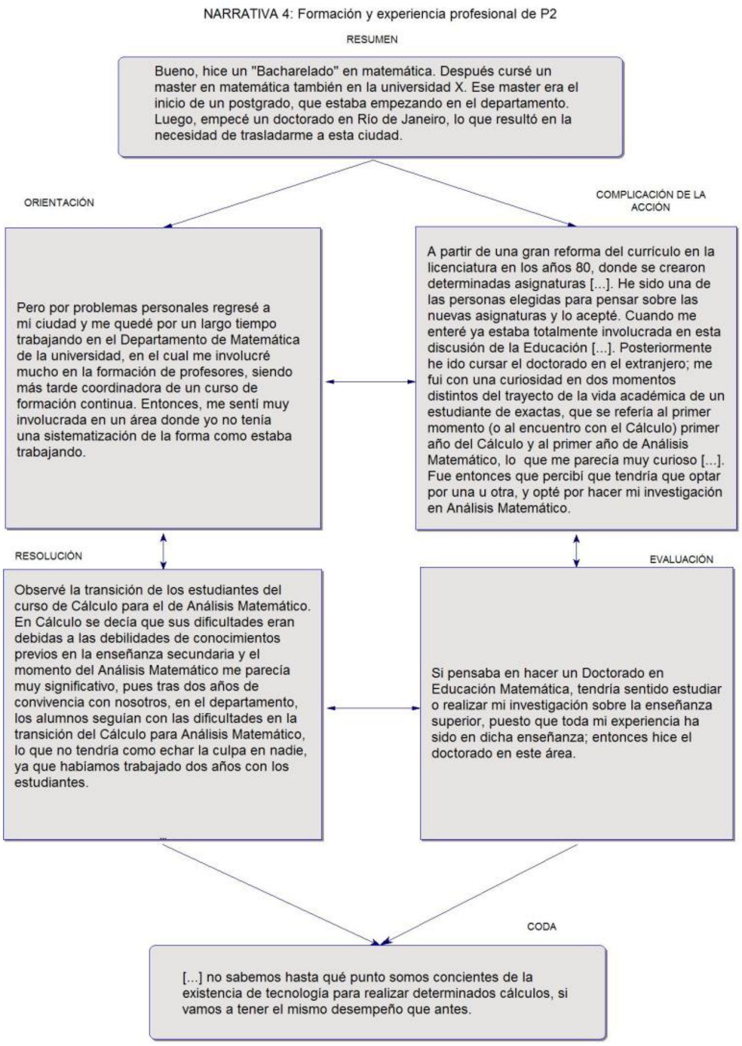


Figura 8.1: Formación y experiencia profesional de P2

P2 inicia su relato a partir de un *resumen* de su formación académica en Brasil: Graduación (*Bacharelado*) y Máster en Matemática, por la Universidad X; inicio de un Doctorado en “Rio de Janeiro”, para donde tuvo que trasladarse.

Por cuestiones personales, P2 afirmó haber regresado a su ciudad, dando continuidad a sus actividades docentes en la Universidad X. En su largo de actuación profesional en la referida universidad, P2 ha tenido la oportunidad de trabajar en la formación de profesores de matemáticas, llegando a ser la coordinadora de un programa de formación continua. En la parte de la narrativa que aborda este aspecto podemos identificar la etapa de la *orientación*. La *complicación de la acción* se produjo a partir de la propuesta de reforma curricular de los años 1980. P2 integraba un equipo que tenía la meta de establecer una interrelación entre las disciplinas del Departamento de Matemáticas con las del Departamento de Educación de la universidad. A pesar de su formación estrictamente matemática, las demandas surgidas desde la práctica profesional han involucrado a P2 en las discusiones educacionales realizadas en el ámbito de la Licenciatura en matemáticas de la universidad, como consecuencia de dicha reforma.

Todo ello ha contribuido para que P2 percibiera que tenía sentido realizar su Doctorado en el área de la Educación Matemática. En este sentido, encaminó la *resolución* de la complicación anteriormente descrita. Asimismo, trató de centrar su investigación en los estudiantes del curso de Análisis Matemático, por considerar que el contexto social y cultural de dichos estudiantes le permitiría investigar, con más lógica, una problemática que había sido identificada en su práctica docente.

Así, P2 observó la transición de los estudiantes del curso de Cálculo para el de Análisis Matemático. En su *evaluación*, constató que las dificultades en dicha transición persistían aunque los estudiantes investigados ya hubiesen sido sus alumnos (así como también de los demás profesores de la Universidad del extranjero) por dos años, lo que no les permitía echar la culpa de las dificultades presentadas por ellos en nadie. Además, ha resaltado que no había desarrollado, en su tesis, estudios relacionados con la aplicación de las nuevas tecnologías en la enseñanza universitaria de matemáticas, y que su "orientador"[6] le advirtió que observase la demanda por este tema cuando retornase a su trabajo en Brasil. P2 constató que efectivamente "había una gran demanda por el uso de ordenadores, lo que me llevó a hacer mi pos doctorado sobre este tema, ya que tuve la oportunidad de volver a la Universidad del extranjero y discutir con mí "orientador" sus ideas".

En la conclusión de la narrativa anterior, *coda*, P2 recuerda la metodología que se utilizaba en el curso de Cálculo, en su época de estudiante de graduación, enfocada en una excesiva cantidad de técnicas de derivadas e integrales y

[6] La expresión "orientador" está siendo utilizada para referirse al Director de la Tesis Doctoral.

cuestiona: ¿es esto lo que debemos enseñar actualmente?, ¿somos conscientes de la utilización de las tecnologías para la realización de algunos cálculos y de nuestro desempeño docente al utilizarlas en el proceso de enseñanza universitaria de Cálculo?

A continuación, analizamos detalladamente la narrativa de P2 sobre su formación académica. Para esto, utilizamos las siguientes categorías: Graduación y Maestría, Doctorado y pos doctorado. En la Graduación y Maestría en Matemáticas, abordaremos algunos aspectos relativos a la formación básica de un formador de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. En el Doctorado y Pos doctorado, resaltaremos, por una parte, la importancia atribuida por P2 a su formación posgraduada en el área de la Educación Matemática, relacionada con su carrera académica; por otra parte, la relación de dicha formación con su labor en la Licenciatura en Matemáticas.

8.1.1.2. La Graduación y la Maestría en Matemáticas

P2 concluyó su Graduación en Matemáticas (Bacharelado) en la Universidad X, en el año 1972. Enseguida, desarrolló su Maestría en Matemáticas en la referida universidad, concluyéndola en el año 1976. Esta formación, estrictamente matemática, está dirigida al matemático profesional. Sin embargo, consiste en la formación más común de los profesores universitarios del área de Matemáticas en Brasil.

En nuestra opinión, la formación del docente suele reflejarse en su actuación profesional. Sin embargo, en el ejercicio de la profesión docente surgen las más diversas situaciones que les señala la dirección para donde debe estar dirigida su formación continua, tanto formal como no formal. Esto nos lleva a analizar, paralelamente, la formación docente de P2 y su actuación profesional. De esta doble vertiente, generalmente surgen las necesidades e intereses formativos de los profesores universitarios.

Conforme nos ha relatado P2, en los años iniciales de su carrera académica, a partir del 1974, se dedicó, especialmente, a algunos cursos de matemáticas destinados a la Ingeniería. Sin embargo, al involucrarse con una reforma de las licenciaturas que ocurrió en la década de 1980, P2 fue el representante del Departamento de Matemáticas que participó de las discusiones que se produjo en el contexto de dicha reforma, relativas a los nuevos cursos propuestos para el currículo de la Licenciatura en Matemáticas.

Con la referida propuesta de “cambio e innovación curricular”, P2 se involucró en las discusiones relativas a los temas predominantemente del área de Educación Matemática. La pretendida interrelación entre el Departamento de Matemáticas y la Facultad de Educación, aunque sea fundamental tanto para el diseño como para la puesta en práctica del currículo de la Licenciatura en Matemáticas, todavía consiste en una meta de difícil acceso en la estructura universitaria.

Sin embargo, el hecho de sumergirse en las discusiones educacionales le despertó el interés por desarrollar su doctorado relacionado con la Educación Matemática. Los problemas que emergían del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática del nivel universitario se constituirían en el foco de su investigación en el Programa de Doctorado. Según P2, en la propuesta de innovación curricular que se pretendía implementar en la Licenciatura en Matemáticas en el año 1986:

> Había ideas excelentes de establecer una interrelación entre las asignaturas del Departamento de Matemáticas y las de la Facultad de Educación. [...] Cuando me enteré de la propuesta de reforma, ya estaba totalmente involucrada en esta discusión de la Educación, más pedagógica que cualquier otra cosa, así que en un cierto momento, tuvo un sentido completo el hecho de hacer un doctorado en educación.

Al involucrarse en las discusiones pedagógicas que se producían en el contexto de la propuesta de innovación curricular, ha surgido el interés de P2 en desarrollar su doctorado en el área de la Educación Matemática.

8.1.1.3. El Doctorado y el Pos doctorado de P2

Según el relato de P2, la conciliación entre su interés personal y necesidad profesional con la oportunidad ha sido decisiva para que se animara a desarrollar su Doctorado. Tras ser estimulada por una colega que pretendía irse para una universidad extranjera para participar del Doctorado, y superadas sus dificultades/ temores personales iniciales, P2 resolvió complementar su formación posgraduada a través del Programa de Doctorado realizado en el extranjero, en el período de 1993 a 1998.

El interés por su tema de investigación, relacionado con la comprensión de nociones de Análisis Matemático por los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas surgió de su experiencia académica. Conforme ha afirmado P2, “si yo pensaba en participar de un Programa de Doctorado en Educación Matemática, tendría sentido estudiar o hacer mi investigación sobre la enseñanza superior, puesto que toda mi experiencia ha sido en la enseñanza superior”.

En esta perspectiva, P2 ha encontrado la problemática de interés de su investigación a partir de su experiencia práctica en la enseñanza universitaria. Más precisamente, se interesó por el proceso de transición de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas del curso de Cálculo para el de Análisis Matemático.

Por algunas razones de orden práctico para el desarrollo de su investigación, P2 ha optado en centrar su atención en los estudiantes del curso de Análisis Matemático desarrollado en la universidad extranjera, por considerar que las diferencias sociales y culturales entre ellos y los estudiantes brasileños, aunque existente, no eran tan significativas como pensaba ser en el caso de los estudiantes de Cálculo. Sin embargo, P2 ha comentado que tras dos años de clases con los profesores de la universidad extranjera, los estudiantes de Análisis Matemático seguían con las mismas dificultades en la transición del Cálculo para el análisis. Esto le ha llevado a reflexionar sobre la veracidad de la premisa, aceptada por gran parte de los profesores universitarios de Cálculo, que atribuyen a la problemática generalmente presentada por los estudiantes de Cálculo, incluyéndose el bajo aprovechamiento y el elevado nivel de reprobación, las deficiencias de sus conocimientos matemáticos previos. Basado en la referida concepción, la problemática referente a las dificultades de aprendizaje de los estudiantes del curso introductorio de Cálculo radicaría en su inadecuada preparación en los temas de las matemáticas de la enseñanza secundaria.

En el caso vivenciado por P2, los estudiantes tras tomar los cursos de matemáticas por dos años, mientras desarrollaban su licenciatura con el colectivo de docentes tanto del Departamento de Matemáticas como del Instituto de Educación de la universidad extranjera, seguían con dificultades en la transición del curso de Cálculo para el de Análisis Matemático, encontrándose pocos estudiantes capaces de comprender y utilizar los contenidos abordados en el curso de Análisis Matemático. No se podría justificar dicha dificultad por medio de las deficiencias de los estudiantes en sus conocimientos matemáticos previos. Los estudiantes habían sido sus alumnos en la universidad y, supuestamente, lograran satisfactoriamente los significados personales coherentes con los significados institucionales efectivamente implementados y evaluados por los profesores universitarios.

La observación de este hecho fue relevante en la investigación de P2, conduciendo sus estudios hacia la discusión del papel del Análisis Matemático en el proceso de formación de los "no matemáticos especialistas", como es el caso de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. En las conclusiones de su Tesis Doctoral, P2 resalta que la principal dificultad en el proceso de enseñanza del Análisis Matemático se ha demostrado que radica en los conceptos, que se requieren de los estudiantes, relacionados con las definiciones y con las demostraciones formales. Esto se debe, en su opinión, a que la enseñanza del Análisis Matemático se encuentra en el centro de la transición del pensamiento elemental hacia el pensamiento matemático avanzado de los estudiantes.

P2 relató también que su orientador (Director de la tesis) le había advertido que, al regresar a Brasil, observara la demanda por los estudios relacionados con las tecnologías. Tras constatar la necesidad relacionada con las aplicaciones de los recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza de la matemática universitaria, P2 volvió a la misma universidad del extranjero para desarrollar su Pos doctorado sobre este tema.

En su concepción, además de interesante, es importante desarrollar el trabajo con las nuevas tecnologías en la Licenciatura en Matemáticas. Por una parte, aunque esto consiste en la utilización de unos recursos tecnológicos disponibles en el entorno docente, se está produciendo una formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria deficiente en lo que se refiere a la destreza en el uso de las tecnologías por los futuros profesores de matemáticas. Por otra parte, P2 ha resaltado la dificultad existente en los profesores universitarios de romper con su formación académica y desarrollar un trabajo, en la universidad, que contemple una experiencia de utilización de las tecnologías disponibles en la práctica profesional de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria.

La dificultad expresada por P2, relativa al cambio de postura del profesor universitario hacia la utilización de las tecnologías en sus clases, parece estar relacionada con la falta de preparación de dichos docentes para aplicar la potencialidad de los recursos tecnológicos disponibles para lograr un proceso de enseñanza activa con los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. Sin embargo, el hecho de no facilitar el acceso de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas a los recursos tecnológicos puede ser uno de los factores que les cohíbe para llevar a cabo experiencias educativas con la utilización de las nuevas tecnologías en su futura práctica profesional.

8.1.1.4. La formación de P2 en Cálculo

Mientras P2 relatando la metodología utilizada en la enseñanza del Cálculo, ha reflexionado sobre el abordaje excesivo de las reglas de derivadas e integrales y cuestionado la enseñanza del Cálculo a partir de su formación universitaria. Según su recuerdo, “la metodología utilizada con nosotros era bastante distinta; lo que hemos aprendido de reglas de derivación e integración fue mucho, ¿Es esto lo que tenemos que enseñar actualmente?”

Consideramos que la respuesta a la cuestión anterior es, definitivamente, “no”. Aunque no se trata de ofrecer una “receta” de qué y del cómo enseñar los temas fundamentales del curso universitario de Cálculo, el formador necesita tener claras, entre otras cuestiones, las características de la carrera y el rol del futuro profesional para planificar e implementar adecuadamente la enseñanza del Cálculo. Según Barufi (2002):

> Percibimos que el precario equilibrio entre el desarrollo de los conceptos y el aprendizaje de las técnicas [del Cálculo] está inclinándose fuertemente para un único lado. Por las dificultades de los estudiantes, en muchos casos, los profesores desarrollan sus programas limitándose al *adiestramiento* de los estudiantes, pensando que es suficiente la memorización de las técnicas, y que en el futuro dichos estudiantes

> serán capaces de descubrir tanto los significados de los conceptos como la utilización de las técnicas al enfrentarse a los problemas cuya resolución los exijan. Sin embargo, para resolver problemas es necesario tener ideas y, para esto, se requiere conocer los significados de las herramientas disponibles. Solamente a partir de esto se puede tomar decisiones sobre qué herramientas utilizar (p. 70).

En nuestra práctica académica hemos observado/ constatado la concepción, por parte de algunos de los profesores de Cálculo, que lo importante en el proceso de enseñanza del Cálculo es abordar formalmente sus conceptos y técnicas, dejando sus significados y aplicaciones a cargo de los estudiantes, que los pondrían de manifiesto tan pronto como su práctica así lo exigiera. Sin embargo, estamos convencidos de la necesidad de una enseñanza que privilegie los distintos significados de las nociones del Cálculo. En este sentido, coincidimos con Barufi (2002) al afirmar que:

> El hecho de que otras disciplinas y otros profesionales necesiten herramientas del Cálculo, así como de la existencia de varios problemas en los cuales el conocimiento del Cálculo es indispensable, podría ser un gran motor para propiciar una integración real e interdisciplinaria, poniendo de manifiesto toda la potencia y grandeza de esa disciplina. Esto permitiría salir del contexto lógico-formal riguroso, en el cual domina las Matemáticas y sus técnicas operatorias, y entrar en un contexto en que lo más importante es la realidad con sus problemas fundamentales (Ibíd.).

Para lograr esa integración real e interdisciplinaria del Cálculo en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, es fundamental que el formador tenga un conocimiento integrado del currículo de la Licenciatura en Matemáticas, así como de las necesidades formativas de futuros profesores de matemáticas aptos para enfrentar las demandas actuales del sistema educativo.

En este sentido, las investigadoras brasileñas Diniz y Smole, al abordar el conjunto de competencias que se propone en las *Directrices Curriculares Nacionales para la Enseñanza Secundaria – PCNEM* (Brasil, 1999), discuten algunos cambios que se deben producir en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas. En esta perspectiva, la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria debe contemplar tres grandes grupos de competencias, que han sido definidos para dicha enseñanza en Brasil. En la opinión de las autoras, en primer lugar se debería revisar los contenidos, métodos de enseñanza y los criterios de evaluación tanto de los programas como de las disciplinas para contestar a las cuestiones: ¿Qué profesor pretendemos formar? Y, ¿Cuál debe ser la contribución de ésta disciplina en dicha formación? En segundo lugar, se debería analizar las relaciones entre las disciplinas del currículo de la Licenciatura en Matemáticas, así como las contribuciones prácticas de las distintas disciplinas en la formación de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. En tercer lugar las autoras han contemplado la coherente articulación entre los contenidos específicos de cada curso y su proceso de enseñanza y aprendizaje. Dichas competencias exigen del profesor universitario no solamente el conocimiento referente a su área específica, sino también de cómo enseñarla y de cómo se han generado histórica y epistemológicamente los conocimientos específicos de sus cursos. Además, las autoras consideran necesario cuestionar el modelo académico enciclopédico de formación[7], a través del cual el profesor dialoga solamente con sus contenidos específicos no cuestionándose para quién y qué se enseña (p. 42).

8.2. LA EXPERIENCIA PROFESIONAL DE P2

8.2.1. Aplicación de las etapas de Labov al relato sobre la experiencia profesional

Analizamos a continuación un fragmento de la narrativa de P2 sobre su experiencia profesional.

[7] Las autoras se refieren al modelo académico enciclopédico de formación según Pérez Gómez (1998).

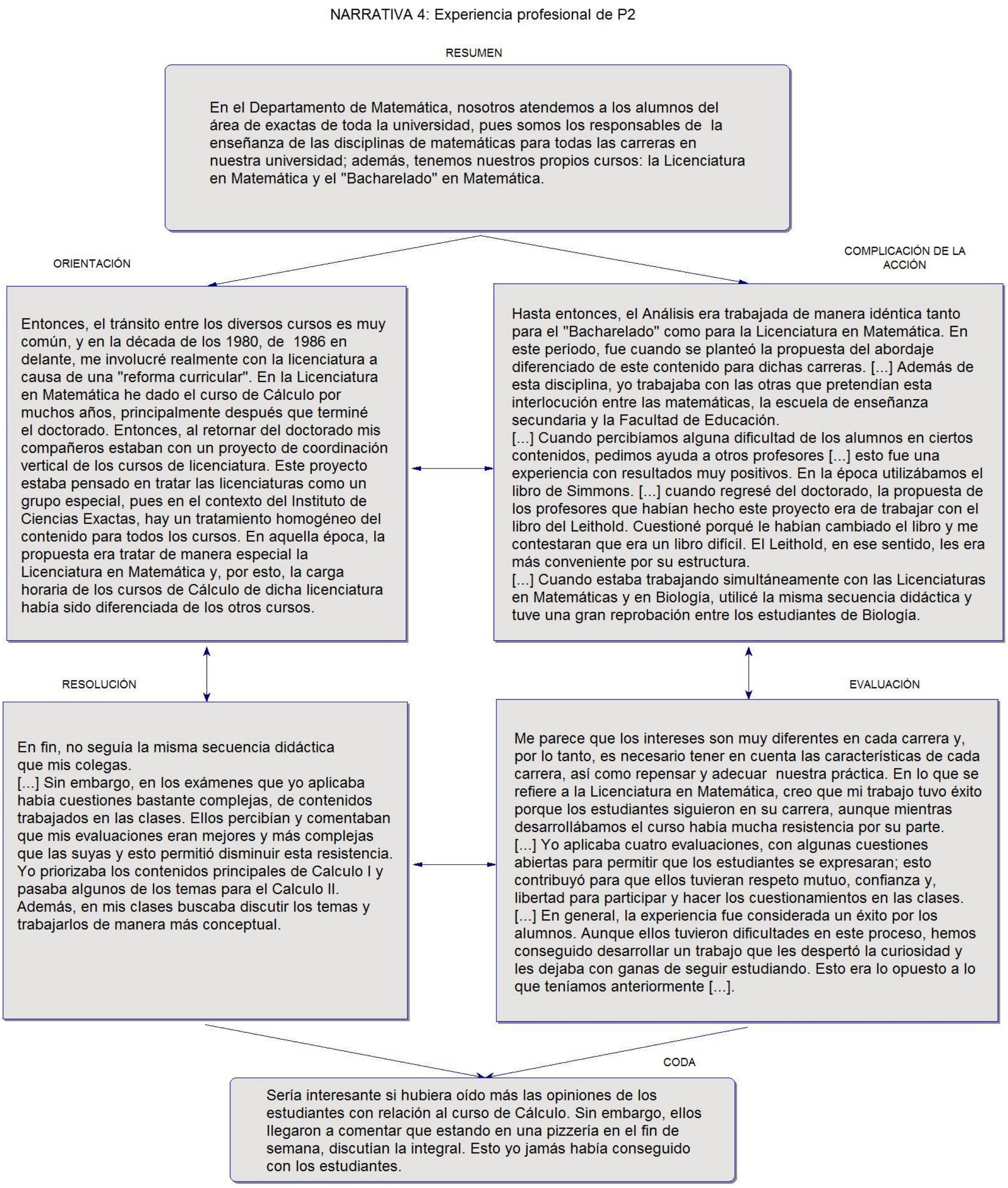


Figura 8.2: Experiencia profesional de P2

P2 ha comentando la estructura y el rol del Departamento de Matemáticas de su universidad, responsable por todos las asignaturas del área de matemáticas que se dan en la universidad. Además, se encarga de las carreras de la Licenciatura y del “Bacharelado” en Matemáticas. La referida estructura posibilita una considerable movilidad entre los estudiantes de distintas carreras para tomar los cursos comunes. En este contexto, P2 hace un *resumen* y *orientación* de la manera que se ha involucrado en la Licenciatura en

Matemáticas a partir de una reforma curricular que se produjo en su universidad en la década de los 1980.

La *complicación de la acción* se produce cuando P2 asume la responsabilidad de dar las clases de "Fundamentos del Análisis", que consistía en un curso dirigido a la Licenciatura en Matemáticas y, por lo tanto, debería implementarse de manera específica en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. No obstante, P2 ha declarado que "hasta entonces, el Análisis Matemático era un curso idéntico tanto para el "Bacharelado" como para la Licenciatura en Matemáticas. En este período (reforma curricular de 1986), fue cuando se planteó la propuesta del abordaje diferenciado de este contenido para dichas carreras". Además, a P2 le competía dar otros cursos relacionados con la interlocución de la referida licenciatura con las escuelas de enseñanza secundaria. En este sentido, P2 ha planteado la siguiente problemática:

¿Qué sería importante discutir para la enseñanza secundaria de matemáticas?, ¿De qué manera estos contenidos deberían ser abordados en las clases de la Licenciatura en Matemática?

La *resolución de la acción* fue realizada a través de un proceso de ensayo y error, en el cual P2 buscaba estructurar unas actividades que pudieran contemplar las especificidades de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y del Cálculo. En este sentido, afirmó que su trabajo se orientaba más a los aspectos concepuales del Cálculo y que no seguía la misma secuencia de contenidos que sus colegas del departamento al implementar el proceso de estudio de Cálculo. Asimismo, en el Departamento de Matemáticas fue desarrollado un proyecto que diferenciaba la Licenciatura en Matemáticas de las demás carreras. A través de dicho proyecto se implementó una "coordinación vertical" que auxiliaba los estudiantes de Cálculo, por ejemplo, en la superación de sus dificultades de aprendizaje. En el caso específico del Cálculo, se mantuvo su carga horaria expandida en comparación con las demás carreras en las cuales se han reducido su carga horaria.

A partir de los relatos de P2, podemos constatar dos fases bien definidas en su experiencia académica: antes de la realización del doctorado y, posteriormente, cuando ha obtenido gran experiencia en Cálculo especialmente en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas.

En la *evaluación* de P2, tras concluir su curso introductorio de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas, su “trabajo tuvo éxito porque los estudiantes siguieron en su carrera, aunque mientras desarrollábamos el curso había mucha resistencia por su parte”. En la época era común que los estudiantes abandonaran la Licenciatura en Matemáticas luego después de tomar el curso inicial de Cálculo. Sin embargo, a pesar de la resistencia que se produjo por parte de los estudiantes a la estrategia de enseñanza desarrollada por P2 ellos siguieron los estudios en la licenciatura.

En la *coda* P2 considera que sería interesante que hubiera oído más las opiniones de los estudiantes sobre el proceso de enseñanza del Cálculo que se desarrollaba. Pero, al relatar que ellos llegaron a comentarle que discutían la integración cuando se encontraban en una pizzería, P2 concluye afirmando que “esto yo jamás había conseguido con los estudiantes”.

Tras aplicar las etapas de Labov en el análisis sintético de parte del relato de P2, realizamos un análisis detallado sobre su experiencia académica en la enseñanza universitaria, resaltándose el proceso de enseñanza del Cálculo. Para organizar el apartado siguiente, hemos optado por analizar la experiencia profesional de P2 en dos momentos distintos: antes y después de la conclusión de su Doctorado.

8.2.2. La experiencia académica: la docencia universitaria anterior al doctorado

P2 asumió la docencia en la Universidad X a partir del año 1974. Sus clases se concentraban, básicamente, en los cursos de matemáticas para las carreras de Ingenierías. Sin embargo, a partir de una propuesta de innovación curricular, que se produjo en el año 1986, P2 se involucró en la Licenciatura en Matemáticas. Según ha afirmado, “en aquella época no me involucraba mucho con las disciplinas como Cálculo, o mejor, he dado algunas veces el curso de *Fundamentos del análisis*, antes de irme al extranjero”. Además, después de la reforma curricular del año 1986, le correspondía también dar las clases de los cursos dirigidos a la articulación de las matemáticas con la escuela de enseñanza secundaria y con la Facultad de Educación.

La experiencia de P2 con las clases de Fundamentos del análisis parece haber sido relevante para su desarrollo profesional. En dicho curso, lo que se pretendía era abordar, de manera diferenciada, el curso de Análisis Matemático en la Licenciatura en Matemáticas. Una de las dificultades para esto consistía en la inexistencia de libros de texto de Análisis Matemático dirigidos a la formación del profesor de matemáticas de la enseñanza secundaria. Por lo tanto, P2 tuvo que asumir el reto de interpretar las concepciones de dicho curso, preparar los materiales que se adecuara a los significados pretendidos por la referida propuesta y llevar a cabo su enseñanza a través del *ensayo y error*.

Por otra parte, el curso dirigido a la interlocución entre las matemáticas universitarias, las escuelas de enseñanza secundaria y la Facultad de Educación era otro desafío a ser enfrentado por P2. En su opinión, la finalidad general de dicho curso consistía en pensar en los aspectos relevantes de la Matemática en la enseñanza secundaria y en el cómo implementarlos en las clases. En la actualidad, todavía no hemos logrado una integración armónica en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas, que articule los diversos cursos universitarios de las áreas de Matemáticas y de Educación con la práctica docente que se requiere de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria.

Tras su experiencia académica en la enseñanza de matemáticas y los nuevos retos profesionales asumidos, los cuales le conducía a involucrarse mucho más en la docencia de algunos de los cursos que requerían una interlocución con el área de Educación, P2 ha tomado conciencia del sentido de realizar su doctorado en el área de Educación Matemática.

8.2.3. La experiencia académica de P2 tras la realización de su doctorado

Al regresar al Brasil, tras concluir su doctorado en el extranjero, P2 se ha dedicado, con más frecuencia, a la docencia de algunas asignaturas, entre las cuales, el Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas. Al comentar su experiencia, resaltó que "daba clases de Cálculo en otras carreras, pero específicamente en la Licenciatura en Matemáticas he trabajado con el Cálculo por muchos años, principalmente después que terminé el doctorado".

Una importante experiencia relatada por P2, ocurrida en su universidad, era relativa a un proyecto específico que se llevó a cabo con la finalidad de dar un tratamiento especial a la Licenciatura en Matemáticas. En dicho proyecto los docentes han logrado mantener la carga horaria semanal de Cálculo (superior a la de las demás carreras), bien como el establecimiento de una coordinación para cada área específica. En el caso del Cálculo, los profesores al constatar dificultades en los académicos en sus contenidos, solicitaban ayuda a los demás profesores de esta asignatura.

El empeño de los docentes universitarios y su interés por un nivel satisfactorio de aprendizaje de sus estudiantes pueden producir un cambio positivo de las actitudes de los referidos estudiantes hacia el curso y la carrera de matemáticas. En este sentido, P2 ha relatado que "hemos conseguido desarrollar un trabajo que les despertó la curiosidad y les dejaba con ganas de seguir estudiando. Esto era lo opuesto de lo que teníamos anteriormente". Esto permite considerar el factor motivacional como un componente imprescindible en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Los docentes universitarios deben no solamente tenerlo en cuenta, sino contribuir para despertar el interés de los estudiantes por el estudio de los temas de esta disciplina.

Otro aspecto que merece destacarse se relaciona con la utilización de una misma secuencia de Cálculo para distintas carreras o incluso por distintos profesores de la misma carrera.

En la primera situación, P2 ha descrito una experiencia de fracaso al implementar una misma secuencia de Cálculo para los estudiantes de dos Licenciaturas: Matemáticas y Biología. En su constatación, mientras los estudiantes de matemáticas han tenido éxito en el referido curso, hubo una gran reprobación por parte de los estudiantes de Biología. Este hecho ha llevado P2 a considerar que los intereses son muy diferentes en cada carrera. Por ello, se hace necesario no solamente tener en cuenta las características específicas de las distintas carreras, sino repensar y adecuar la práctica docente a cada contexto particular de formación.

En la segunda, P2 ha demostrado autonomía al relatar que implementó una secuencia distinta de sus colegas en el curso de Cálculo que ellos desarrollaban simultáneamente en la misma carrera. Es probable que su conocimiento profesional le haya posibilitado un cambio de concepción del proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Como consecuencia, P2 ha optado por realizar una adecuación que consideraba relevante el curso de Cálculo bajo su responsabilidad. Dicha secuencia se basaba en priorizar los contenidos que consideraba esenciales para el curso introductorio de Cálculo (Cálculo I), pasando los demás temas para el curso de Cálculo II.

En su opinión, la metodología empleada en el desarrollo del referido curso ha propiciado condiciones para que los estudiantes pudieran discutir los temas y para que se enfatizara los contenidos del Cálculo a través de una enseñanza más conceptual. Además, la estrategia utilizada era propicia para desarrollar en los estudiantes el respeto mutuo, la confianza, y la libertad para participar y cuestionar en las clases. Por otra parte, P2 considera el hecho de que sus colegas reconociesen que sus evaluaciones eran más complejas y mejores que las de ellos contribuyó para minimizar la resistencia que tenían a su trabajo diferenciado.

El conocimiento que P2 ha adquirido, a partir de su propia experiencia en la enseñanza del Cálculo, le propició una autonomía docente capaz de llevar a cabo “la integración, ajuste y reestructuración de su conocimiento teórico a las demandas y restricciones de las situaciones prácticas” (Bromme y Tillema, 1995, p. 262; citado por Ruthven, 2002, p. 590).

Sobre la base del conocimiento profesional, constantemente elaborado y reelaborado por el profesor en función de sus contextos de trabajo y de las necesidades oriundas de las situaciones que él va enfrentando, debe ser construido el conocimiento didáctico (Schulman, 1986) del profesor de Cálculo.

Siendo una de las categorías del conocimiento propuestas por Schulman (1986), el conocimiento didáctico del profesor de Cálculo comprende un conjunto de conocimientos que ponen de manifiesto la distinción entre los profesores que saben Cálculo y aquellos que saben enseñarlo. El autor considera, por una parte, que el profesor debe comprender ampliamente la disciplina que va a enseñar y, por otra parte, que las ideas comprendidas deben ser transformadas para ser enseñadas. Dicha transformación requiere tanto el uso de múltiples representaciones en el abordaje de los contenidos (elección de modelos, uso de metáforas, analogías, simulaciones, ejemplos, etc.) como el establecimiento de conexiones entre los significados institucionales de referencia y los significados pretendidos para los estudiantes.

Las distintas dimensiones de análisis de los procesos de estudio matemático emergen de la entrevista de P2, a través de algunas experiencias académicas descritas a lo largo de su práctica docente.

A continuación, sintetizaremos los conocimientos didácticos de P2 según las seis dimensiones de la idoneidad didáctica propuestas en el EOS (epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica) y adaptadas para la realización de este estudio sobre el conocimiento didáctico de los referidos profesores-formadores sobre la didáctica de la integral.

8.3. DIMENSIÓN EPISTÉMICA

En este apartado analizamos las aportaciones de P2 relativas a la dimensión epistémica en los procesos de estudio de la integral. Para sistematizar este análisis, utilizamos las *configuraciones epistémicas* de la integral, resaltando sus componentes, relaciones y articulaciones, así como los abordajes y adaptaciones curriculares.

8.3.1. Las situaciones-problemas en la visión de P2

P2 considera que se puede introducir y desarrollar las nociones de Cálculo, en la enseñanza universitaria, a partir de algunos problemas prototípicos. En esta dirección, P2 ha comentado el abordaje de las nociones de derivada e integral que considera más apropiadas para esta finalidad en un curso introductorio de Cálculo. Según ha declarado P2:

> Pienso que es posible trabajar las nociones del Cálculo a partir de los problemas. En el libro “Cálculo y Aplicaciones”, lo interesante es la idea de derivada como tasa de variación; de ahí puedes hablar de muchas otras cosas, como velocidad y muchos

> otros problemas. Tradicionalmente lo que se hablaba era del cálculo de la velocidad y del cálculo de áreas. Sin embargo, en este libro se puede abrir el abanico de las aplicaciones de las derivadas relacionadas con problemas de crecimiento. [...] La cuestión entonces es cómo pasar de esta situación introductoria para la generalización de la integral en el ámbito de las Matemáticas. Esto tiene que realizarse con cautela. Pienso que la idea de tasa de acumulación es interesante, porque hay momentos que se gana (acumula positivamente) y otros que estará perdiendo (restando). Así que la noción del área orientada es más sencilla que cuando introducimos la integral como área y después intentamos generalizarla.

Las nociones de tasa de variación y tasa de acumulación (o crecimiento acumulado) son sugeridas por P2 como una alternativa al proceso tradicional de enseñanza de las nociones de derivada e integral, que suelen desarrollarse en los cursos de Cálculo a partir de los problemas de velocidad y de áreas, respectivamente. Tall (1996) corrobora esta idea, afirmando que "la teoría de funciones y Cálculos puede ser resumida como el estudio del hacer y deshacer de los procesos involucrados" (p. 293). En este sentido, este autor propone que la integral sea desarrollada a partir del crecimiento acumulado.

Las nociones de derivada e integral, centrales en el curso introductorio de Cálculo, posibilitan un abanico de aplicaciones del Cálculo. Particularmente en lo que se refiere a la integral, P2 aclara que tratándose de la tasa de acumulación:

> Si tienes una tasa constante de acumulación durante un período de tiempo, el valor acumulado será el producto de dicha tasa por el tiempo. Entretanto, si la tasa (de crecimiento o decrecimiento) varia, entonces es necesario pensar qué acontecería si la tasa fuera constante en determinados intervalos, que cantidad se acumularía en el referido intervalo. Esto puede ser aplicado para analizar un problema de desintegración radioactiva, para analizar la cantidad de la sustancia que ha disminuido en un intervalo de tiempo.

En este fragmento, P2 distingue las situaciones-problema en las cuales la tasa de acumulación es constante con el tiempo de aquellas donde dicha tasa varía con el tiempo, ejemplificando el segundo caso con un problema de desintegración radioactiva. P2 argumenta que la ventaja de desarrollar la integración a partir de la *tasa de acumulación (o crecimiento acumulado)* se basa en la posibilidad de utilización de dicha noción para abordar tanto las situaciones-problema que se relacionan con una ganancia, como aquellas en las cuales se produce una perdida. Además, considera que el crecimiento acumulado emerge, naturalmente, de la noción de integral definida (sumándose o restándose en el caso de que la función sea positiva o negativa, respectivamente). En otras palabras, P2 considera que los problemas prototípicos para introducir y desarrollar la integral en los cursos universitarios de Cálculo son aquellos relacionados con *tasa de acumulación (o crecimiento acumulado).* En su opinión:

> Si empezamos con la tasa de variación, podemos plantear un problema del tipo: si cierta función representa una tasa de variación de una variable, después de un intervalo de tiempo, ¿cuál fue el crecimiento acumulado? Estamos hablando de la integral definida; esta es una manera que me gustaría empezar actualmente.

Esta concepción de la integral, emergente de los relatos de P2, nos lleva a considerar la *configuración epistémica acumulada* como otro significado de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. En esta concepción, la problemática general de la integración: integral definida (*crecimiento acumulado*) e integral indefinida (*curvas que tienen derivadas conocidas*) han sido sintetizadas por P2 de la siguiente manera:

> Tenemos las curvas cuyas tangentes son dadas por determinadas expresiones que podemos obtenerlas por medio de las integrales indefinidas; en el caso de la integral definida tenemos áreas, volúmenes,..., o sea, se refiere a las tasas de acumulación de manera general. Al pensar en la integral indefinida, la cuestión sería cuáles son las curvas cuya derivada es conocida.

Por otra parte, hemos identificado en la entrevista de P2 algunas situaciones-problema específicas relacionadas con algunas de las demás configuraciones epistémicas de la integral sintetizadas en la tabla 7.1, las cuales serán sintetizadas a continuación.

P2 considera que la construcción de la noción de integral indefinida está basada en la problemática relacionada con cuáles son las curvas cuya derivada es conocida. No obstante, resalta que "generalmente los estudiantes suelen resumir todo el significado de la integral al de antiderivada". Todo ello revela la fuerte presencia de la *configuración epistémica primitiva* en el proceso de estudio de la integral en la enseñanza universitaria.

Por otra parte, P2 ha afirmado que el desarrollo de la integral en los libros de texto de Cálculo, tradicionalmente se realiza por medio de las nociones de áreas y volúmenes. Sin embargo, asume que es fundamental que los estudiantes universitarios comprendan la noción de integral definida y sepan utilizarla en la resolución de las situaciones-problema de naturaleza geométrica. En este sentido, presentó el siguiente ejemplo:

> Si tienes un buen concepto de la integral definida, para hallar la integral de la función *f(x)= senx*, en el intervalo cerrado de *0* a *2π*, si la representas geométricamente, si

> sabes qué representa la integral definida sabes que el resultado es igual a cero sin necesidad de hacer ningún Cálculo.

Por lo tanto, P2 ha resaltado no solamente la utilización de la integración en los típicos problemas geométricos de áreas y volúmenes, sino en la interpretación de la integral definida a partir de su representación gráfica y del significado de la referida noción matemática. Así, la *configuración epistémica geométrica* también emerge del relato de P2.

No obstante, P2 ha discutido la problemática presente en los estudiantes relativa a los diversos significados que asume la integral definida (a partir de las distintas situaciones-problema) y su actitud de simple memorización de los conceptos que requieren el empleo de la referida integral en su solución. En la opinión de P2:

> Los estudiantes deben percibir que la lectura de la integral definida depende de su contexto de uso, lo que cambia son los problemas. Es decir, los problemas pueden producir distintos significados de la integral y, en muchos casos, los estudiantes solamente memorizan los conceptos. Por ejemplo, memorizan el concepto de trabajo, pero no saben por qué es una integral.

En este sentido, P2 resalta la necesidad de la visualización geométrica como recurso para atribuir una integral adecuada para la solución de cada situación-problema que requiere su aplicación. Asimismo, en lo que se refiere a las aplicaciones de la integración a las *situaciones-problema extramatemáticas*, P2 ha relatado la siguiente situación, la cual había sido planteada en sus clases de Cálculo:

> Yo proponía un problema relacionado con la integral definida de la siguiente manera: si consideras que la fuerza es constante en determinado intervalo y el trabajo es X, ¿Cuál puede ser una idea para resolver esta situación cuando la fuerza no sea constante? Les dejaba discutir y presentar las ideas y, luego les preguntaba cuál sería la integral que representaría esta situación.

Esta situación-problema se relaciona con la *configuración epistémica extramatemática*. Entretanto, cábenos resaltar que el énfasis ha sido puesto por P2 en su interpretación de la referida situación-problema por los estudiantes y, consecuentemente, en el hecho de asociarla con una integral definida aplicada a un problema físico. Lo que P2 ilustra, con este ejemplo, es la importancia del profesor de propiciar las condiciones para que los estudiantes reflexionen y desarrollen un coherente razonamiento sobre determinados tipos de problemas, que pueden ser resueltos por medio de la integración. Además, se les propone que expliciten una integral que a través de la cual se podría solucionar dicha situación-problema.

Consideramos que lo que sugiere la situación anteriormente ejemplificada por P2 es un cambio del énfasis en la presentación de la integral en un curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria. Es decir, el énfasis no debe ser colocado en la presentación de ciertas nociones (como la de trabajo) a través de una integral, sino en la proposición de situaciones-problema que posibiliten a los estudiantes interpretarlas y modelarlas por medio de una integral.

En la opinión de P2, es importante que los profesores universitarios de Cálculo promuevan la resolución de algunos problemas “sencillos”, relacionados con las nociones de partición y de suma de Riemann, para que los estudiantes puedan entender las ideas intuitivas que soportan la noción de integral (en el sentido de la integral de Riemann). En este sentido, consideramos en esta investigación la *configuración sumatoria de la integral.*

P2 ha sugerido, además de la solución tradicional de dichos problemas, la utilización de los “applets” específicos que posibiliten visualizarlos y, consecuentemente, contribuyan con su comprensión por parte de los estudiantes universitarios. En este sentido, afirma:

> Me parece interesante resolver algunos ejercicios – que suelen venir en los libros en la introducción a la integral – del tipo "encontrar el área bajo la curva $f(x) = x^2$, en un intervalo cerrado dado, utilizando el procedimiento de la suma de las áreas de rectángulos. Uno de los proyectos que desarrollamos con el "Grafic Calculus" consiste en encontrar estas sumas a partir de un "applet" que permite, dada una función, visualizar la partición para un intervalo dado y el valor de las sumas superiores e inferiores. El ordenador nos posibilita discutir estas ideas de manera mucho más sencilla que con la utilización de los métodos tradicionales.

La utilización del ordenador o de otros recursos tecnológicos en la resolución de situaciones-problema que requieren a noción de integral es contemplada en este estudio en la *configuración epistémica tecnológica de la integral.* En este caso, las configuraciones epistémicas sumatoria y tecnológica de la integral se relacionan con los procedimientos que se utilizan en la resolución de las situaciones-problema.

8.3.2. Los procedimientos en el estudio de la integral

Según las consideraciones de P2, el énfasis del proceso de enseñanza de la integral en el nivel universitario no debe estar centrado en los métodos y técnicas de integración, sino en la percepción, comprensión y modelización por parte de los estudiantes, de las distintas situaciones-problema que pueden ser resueltas por medio de la integración. En este sentido, en lo que se refiere al procedimiento básico para la integración, P2 ha declarado que:

> Desarrollar los cálculos a partir de las sumas de las áreas de los rectángulos posibilita la visualización; es como si estuviéramos "deduciendo" cada una de las supuestas aplicaciones. Esto requiere que los estudiantes perciban que hay una manera de proceder para resolver determinados problemas: pensar en una función continua en un cierto intervalo y, a partir de esto, obtener la noción que se busca. [...] Lo que más importa no es tener una lista, un elenco de representaciones y aplicaciones, sino comprender el procedimiento necesario para resolver cada problema. Esto está íntimamente ligado a la noción de suma de rectángulos y no estoy hablando de la formalización de la definición de integral a través del límite de las sumas de Riemann. Usamos esta noción para entender el significado de cada problema. En lo que se refiere a la integral indefinida yo comento como siendo "algo" que está deshaciendo la derivada.

En el relato anterior, P2 evidencia su posición relativa a la utilización de la idea de suma de rectángulos para atribuir el significado de la integral para cada situación propuesta. Esto prescinde de la memorización de las distintas nociones que pueden ser abordadas por medio de la integración. El énfasis está en la comprensión del procedimiento que puede ser aplicado en las distintas configuraciones de la integral. Sin embargo, P2 explicita que esto no implica en la formalización de la integral como límite de las sumas de Riemann, sino en la utilización intuitiva de sumas de rectángulos para visualizar el procedimiento a ser utilizado en la resolución de la diversidad de situaciones que involucran la noción de integral.

Otro procedimiento resaltado por P2 es referente a la utilización de las tecnologías en el proceso de enseñanza de la integración. En este sentido, P2 ha planteado el siguiente:

> El problema de la práctica sería cómo usar estas tecnologías. El uso del "applet" posibilita trabajar la visión dinámica (el movimiento, cambiar los intervalos, realizar los cálculos y visualizar todo en la pantalla); esto puede ser interesante. Es necesario reflexionar sobre qué tiene sentido de lo que estamos enseñando, cuando se usan las nuevas tecnologías. La consulta a la tabla de integrales ya no tendrá sentido; además, al admitir que el "Maple" o el "Mathematica" resuelve las integrales, ¿Enseñaríamos a los estudiantes a usar los "softwares" para resolver las integrales? No sé cómo debemos actuar en este caso. Para mí hay ventajas en desarrollar algunos temas

> (como las sumas de Riemann) sin la utilización de los "softwares", pero tengo la preocupación de que esto pueda ser un conservadurismo de mi parte.

La utilización de los *softwares* en las clases prácticas de Cálculo se convierte en un procedimiento deseable, especialmente cuando se pretende establecer las interacciones entre los distintos procedimientos utilizados en la solución de diversas situaciones-problema que se ponen en juego en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral. P2 ejemplifica la utilización de la idea de suma de áreas de rectángulos en la solución de ejercicios corrientes propuestos en libros de Cálculo, a través de un proyecto que viene desarrollando con el "Grafic Calculus".

8.3.3. Las proposiciones en el proceso de estudio de la integral

Cuando preguntamos sobre qué proposiciones relacionadas con la integral deben ser demostradas en el proceso de enseñanza universitaria, P2 contestó que:

> Considero que podemos hacer todo geométricamente; justificar las propiedades relacionadas con la suma de integrales, el producto por constante, el Teorema del Valor Medio. Es importante justificar por qué valen las proposiciones; necesitamos trabajar la manera de argumentar en matemáticas y pienso que puede ser a través de la visualización. Sin embargo, esto no será formal porque no voy a presentar la definición formal. Esto no implica que no se deba utilizar la argumentación de manera clara, lógica y coherente.

Según ha expresado P2, en la enseñanza universitaria de la integral son especialmente relevantes las propiedades relacionadas con la suma de integrales, el producto de la integral por una constante, y el Teorema del Valor Medio. Además, afirma que es importante justificar las proposiciones, pero basada en la visualización, correspondiendo a la manera con la cual se desarrolla el contenido.

8.3.4. Las definiciones relacionadas con la integral

Entre las definiciones relacionadas con la integral, P2 resalta la noción de *función*, las ideas que subyacen a la integral definida (*crecimiento acumulado*) e indefinida (curvas cuyas *derivadas* son conocidas), y la noción de *partición*.

En lo que se refiere a la noción de *crecimiento acumulado* y su relación con la noción de *función*, P2 ha comentado la necesidad de desarrollar la noción de *área orientada*. En este sentido, P2 resaltó que es fundamental que "los estudiantes entiendan que están calculando un *área orientada*. Esto requiere las nociones de *simetría, periodicidad, etc*., o sea, es necesario tener una cierta "intimidad" con la noción de función que me parece importante". Además, P2 considera que:

> La idea de la partición, de necesidad de utilizar una gran cantidad de partes ha de estar presentes. Esto no implica utilizar un lenguaje formal. [...] Lo esencial no es que ellos conozcan diversas nociones, sino que sepan de donde viene cada concepto.

8.3.5. Lenguajes utilizados en la enseñanza de la integral

Según P2, es fundamental posibilitar a los estudiantes la interlocución entre los distintos lenguajes relacionados con la integral. En este sentido, P2 comentó que su investigación del pos doctorado:

> Ha sido relacionada con estas representaciones, especialmente las gráficas. He trabajado con el *Grafic Calculus*, de David Tall, que posibilita esta interlocución múltiple entre movimiento, las representaciones gráficas y las ecuaciones algebraicas. Tratamos de relacionar estas ideas, lo que en general no es sencillo, aunque importante.

Por la importancia que atribuye a la visualización geométrica y a la transición entre los distintos lenguajes (gráfico, algebraico, computacional, etc.) en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral, P2 destaca que para los estudiantes de Cálculo:

> No es suficiente solamente conocer las distintas representaciones, sino relacionarlas. Es necesario que los estudiantes sepan justificar los resultados. La interlocución entre las distintas representaciones es igualmente importante y también es compleja.

Por otra parte, P2 comenta que algunas nociones relacionadas con la integral, como la de "suma de áreas de rectángulos" deben ser utilizadas intuitivamente, pues "es muy pesado desarrollar formalmente esta noción por medio del lenguaje analítico".

8.3.6. La argumentación en la enseñanza de la integral

P2 ha resaltado la importancia de la argumentación en el curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria. Además, ha clarificado que a través de la visualización geométrica se puede desarrollar una argumentación coherente sobre las proposiciones relacionadas con la integral. En este sentido, P2 ha resaltado la coherencia que debe haber entre la forma con la cual se presenta la definición de la integral y la argumentación requerida de los estudiantes. En este sentido P2 ha declarado que en un curso introductorio de Cálculo no se necesita definir formalmente la integral. Por lo tanto, no se requerirá una argumentación rigurosa (axiomática) de los estudiantes, aunque ellos deben argumentar de manera clara, lógica y coherente.

La idea básica defendida por P2 es que los estudiantes sean capaces de utilizar intuitivamente la noción de *Suma de Riemann* para encontrar una integral, a partir de la cual se pueda resolver cada uno de los distintos problemas asociados a la integración.

Tratándose de la integral indefinida, P2 considera que deben usar la idea del *hacer y deshacer* para establecer la relación entre la integral indefinida y la derivada, desarrollándose así la *primitivación*.

No obstante, P2 afirma que para algunos de los temas que serán enseñados por los profesores de secundaria, el profesor universitario debe definirlos formalmente. Según su comentario:

> Habrá otros momentos en los cuales vamos a realizar deducciones a partir de definiciones más próximas de lo formal. Me refiero, por ejemplo, al estudio de la exponencial y logaritmo para los cuales las deducciones se hacen a partir de las definiciones con una estructura más formal; además son temas que el profesor va a trabajar en la enseñanza secundaria.

8.3.7. Síntesis de las configuraciones epistémicas de la integral según P2

A partir de las situaciones-problema (descritas en el apartado 8.3.1) podemos sistematizar los significados personales que emergen de la entrevista de P2 sobre la integral relacionados con seis configuraciones epistémicas: *primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada, acumulada, y tecnológica*.

Las cuatro primeras configuraciones ya han sido descritas en el capítulo 7. Por esta razón vamos sistematizar solamente las configuraciones epistémicas acumulada y tecnológica de la integral, las cuales serán sintetizadas a continuación.

Las situaciones-problema contempladas en la *configuración epistémica acumulada*, según ha expresado P2, son del tipo: “si cierta función representa una tasa de variación de una variable, después de un intervalo de tiempo, ¿cuál fue el crecimiento acumulado?

Los procedimientos utilizados para resolver este tipo de problemas pueden estar basados en las sumas de rectángulos; la forma de la integral propuesta para la solución de los problemas es relativa al razonamiento desarrollado en cada caso. A través de este procedimiento, el énfasis no está puesto en la memorización de las “reglas” que relacionan las nociones matemáticas y extramatemáticas que se puede desarrollar por medio de las aplicaciones de la integral, sino en el propio concepto de la integral definida.

Las proposiciones que P2 considera importantes para las aplicaciones de la integral a partir de la idea de *crecimiento acumulado* son las relacionadas con las sumas de integrales, producto de constante por la integral y el Teorema del Valor Medio.

En lo que se refiere a los conceptos/ definiciones relacionados con la integral en esta configuración epistémica, P2 ha resaltado los aspectos que comprenden la noción de función y la noción de partición. Sin embargo, otras nociones han sido mencionadas como límite, derivadas, áreas, volúmenes, trabajo, velocidad, etc.

Aunque en la entrevista de P2 emergen distintos lenguajes relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral, las formas de lenguaje más destacadas en esta configuración han sido: gráfico, algebraico y computacional. Además, P2 considera la necesidad de transición de los estudiantes entre los distintos lenguajes y significados de la integral. No obstante, reconoce la complejidad inherente a la realización de dicha transición.

Los argumentos deben ser claros, lógicos y coherentes. Sin embargo, esto no significa la realización de las demostraciones rigurosas (axiomáticas) basadas en el lenguaje analítico. Más bien se trata de justificar las proposiciones utilizadas en el desarrollo de la integración por medio de la visualización.

Con relación a la *configuración epistémica tecnológica*, ésta se relaciona a los procedimientos utilizados para solucionar las distintas situaciones-problema relacionadas con la noción de integral y ha sido bastante enfatizada en las narrativas de P2.

Las situaciones-problema contempladas en la *configuración epistémica acumulada*, según ha expresado P2, pueden ser intra o extramatemáticas.

Los procedimientos utilizados para resolver las situaciones están basados en la utilización de *softwares* o de *applets* específicos, los cuales posibilitan visualizar los aspectos dinámicos do Cálculo en la pantalla del ordenador, así como distintas representaciones relacionadas con la integral.

Las principales proposiciones relacionadas con la *configuración epistémica tecnológica* de la integral se relacionan con las sumas de integrales, producto de constante por la integral y con el Teorema del Valor Medio.

P2 ha resaltado los siguientes conceptos relacionados con esta configuración: función, partición, suma de Riemann, límite, derivadas, áreas, volúmenes, trabajo, velocidad, etc.

Los principales lenguajes resaltados en esta configuración han sido: gráfico, algebraico y computacional. Además, P2 considera relevante a posibilidad de visualización simultánea de las distintas representaciones de la integral en la pantalla.

Los argumentos están basados en la justificativa de las proposiciones utilizadas en el desarrollo de las situaciones-problema por medio de la visualización contemplada por los recursos de los *softwares* utilizados.

La síntesis de conocimientos sobre las configuraciones epistémica de la integral que emergen de los relatos de P2 puede ser apreciada en la figura 8.3 a continuación.

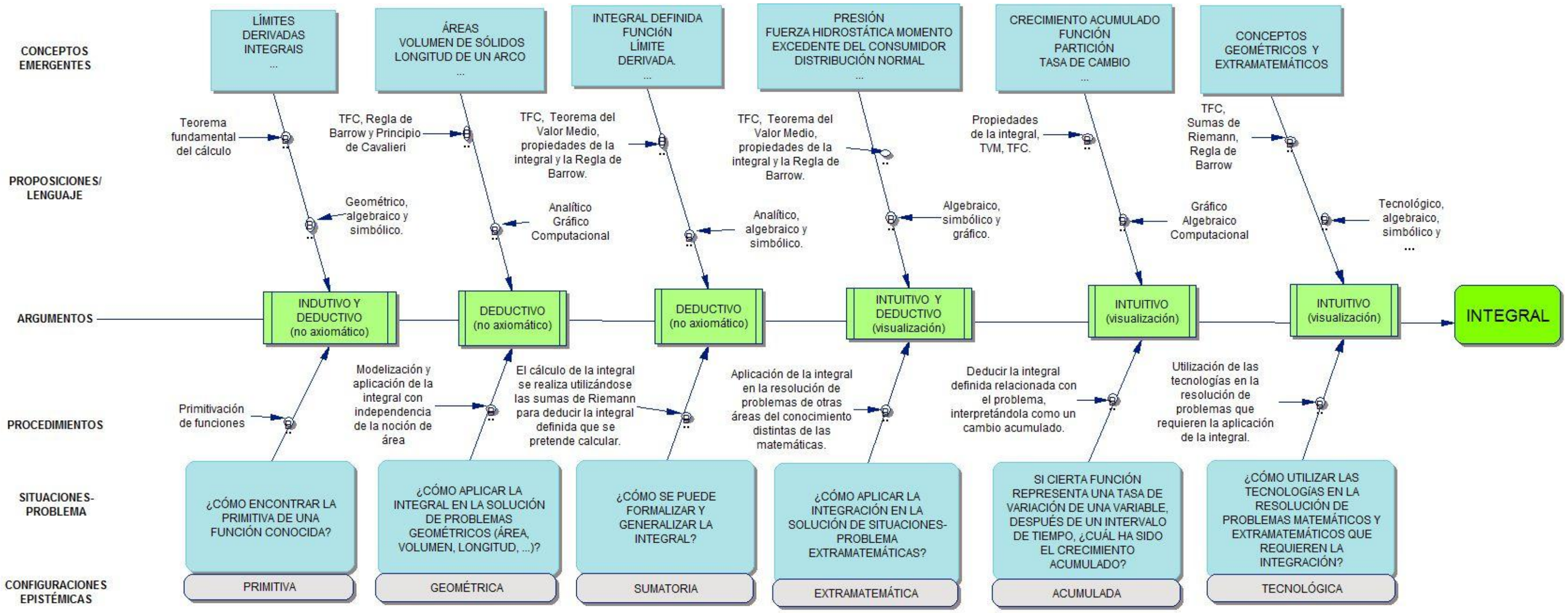


Figura 8.3: Configuraciones epistémicas de la integral según P2

8.3.8. Articulaciones y conexiones

A partir de los relatos de P2, analizamos las articulaciones y conexiones entre las seis configuraciones epistémicas de la integral: primitiva, geométrica, sumatoria, acumulada y extramatemática. Para esto, utilizamos los siguientes descriptores: Articulación de los objetos matemáticos y didácticos, y conexiones intra y extradisciplinares de la integral en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo en la enseñanza universitaria.

8.3.8.1. Articulación de los objetos matemáticos y didácticos

En el Enfoque Ontosemiótico, las configuraciones epistémicas de la integral anteriormente sistematizadas pueden ser interpretadas como el significado personal global de la integral manifestado por P2. Asimismo, en dichas configuraciones epistémicas se establecen relaciones tanto entre los elementos de análisis primario (situaciones-problema, lenguaje, procedimientos, definiciones, proposiciones, y argumentos), como entre las referidas configuraciones epistémicas.

Las articulaciones entre los elementos primarios, tal y como comentamos en el capítulo 7 (Apartado 7.4.8.1), se producen tomando como punto de partida las situaciones-problema, cuya solución requiere el desarrollo de los procedimientos más apropiados. En este proceso recurrimos a las definiciones matemáticas (o intradisciplinares) que son evocadas y utilizadas en la resolución de dicha situación-problema, así como las proposiciones relacionadas con el procedimiento adoptado. Los argumentos justifican la utilización de las proposiciones específicas en cada caso, y el lenguaje consiste en el medio para la descripción y comunicación de los demás elementos primarios tornándoles operativos en la estructura de cada configuración epistémica.

Por otra parte, podemos identificar una cierta articulación entre las seis configuraciones epistémicas que hemos sistematizado a partir de los relatos de P2. Aunque las referencias explícitas de P2 hayan sido al *crecimiento acumulado* (al referirse a la integral definida) y *deshacer la derivada* (al referirse a la integral indefinida), hemos optado por sistematizar sus relatos a partir del conjunto de las informaciones aportadas.

En esta dirección, la idea de *deshacer la derivada* asociada a la integral indefinida, consiste en lo que hemos denominado en este estudio de *primitivación.* Por esto, hemos utilizado la configuración epistémica primitiva en la sistematización de los significados personales manifestados por P2 sobre la integral. En dicha configuración contemplamos todas las situaciones-problema asociadas a la integral indefinida. P2 resaltó que los estudiantes del curso introductorio de Cálculo suelen resumir el estudio la integración a la determinación de la integral indefinida y señala que esto puede estar asociado a la práctica de los profesores de Cálculo, pues “tradicionalmente lo que desarrollamos en las clases es el uso del TFC con las técnicas de integración”.

Sin embargo, P2 considera el conflicto que generalmente se produce al desarrollar la integral definida a partir de la noción de área y luego tener que abordar las “sumas negativas” (refiriéndose a las regiones comprendidas por las curvas bajo el eje de las abscisas). En este sentido, P2 afirma que le “gustaría empezar por la idea de tasa de acumulación. Mí expectativa es poder, sin mucha dificultad, abordar la suma negativa desprendiéndome de la noción inicial de área”. A partir de esta idea, P2 pretende cambiar su estrategia didáctica, desarrollando la integral definida a partir de la noción de *crecimiento acumulado*. Por el énfasis puesto en este aspecto, sistematizamos la *configuración epistémica acumulada* para contemplar el significado personal que más ha sido evidenciado para la integral definida cuando se tiene la tasa de variación y se pretende determinar la variación total.

Aunque dicha configuración pueda abarcar una diversidad de situaciones-problema relacionadas con la integral definida, por la relevancia de las situaciones-problema asociadas a las nociones geométricas en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, y las referencias hechas por P2 a la geometría revelan la presencia de un significado personal relacionado con las situaciones-problema de naturaleza geométrica. Las referidas situaciones han sido sistematizadas en este estudio a través de la *configuración epistémica geométrica*. Asimismo, las demás situaciones-problema extradisciplinarias han sido contempladas en la *configuración epistémica extramatemática*. No obstante, hay otras configuraciones que se estructuran a partir de los procedimientos utilizados para resolver las situaciones-problema. En este sentido, sistematizamos las *configuraciones epistémicas sumatoria* (cuyos procedimientos se basa en las sumas de Riemann) y la *configuración epistémica tecnológica* (basada en la utilización de *softwares* matemáticos u otros recursos tecnológicos).

8.3.8.2. Conexiones intra e interdisciplinares de la integral

En las conexiones intradisciplinares de la integral, analizamos algunos de los aspectos que han sido resaltados por P2 referentes la enseñanza universitaria del Cálculo. En lo que se refiere a las conexiones extradisciplinares establecemos algunas conexiones entre la enseñanza de la integral con otras disciplinas del currículo de la Licenciatura en Matemáticas.

Uno de las conexiones que P2 ha establecido con la integral fue la necesidad de una sólida comprensión de las ideas y propiedades matemáticas que soportan la noción de función, como la simetría, periodicidad, etcétera. La visualización gráfica de dichas propiedades suele simplificar la modelación y resolución de situaciones-problema que requieren la utilización de la integral.

Por otra parte, P2 comenta la dificultad de comprensión de la noción de diferencial por los estudiantes universitarios. En este sentido P2 considera que dicha noción requiere una mejor explicación de dicho tema en el proceso de enseñanza del Cálculo, pues este puede convertirse en un obstáculo epistémico en el proceso de enseñanza de la integral. En su opinión, “tenemos que explicar mejor la noción de diferencial, pues utilizamos su simbología como si fuera familiar para los estudiantes. Esta es una noción todavía mal trabajada, que puede comprometer el aprendizaje de la integral”.

Además, P2 resalta la conexión de la integración por partes con la derivada, afirmando que “si pensamos en la integración por partes, es interesante que mostremos su relación con la derivada del producto de funciones; la idea que se utiliza viene de esto”.

En cuanto a las conexiones extradisciplinares, P2 considera que “el Cálculo puede proporcionar una buena base para que el profesor dialogue con otras áreas del conocimiento, como Física, Biología, Economía, etc., a través de proyectos multidisciplinarios”. Asimismo, explicita la importancia de los problemas físicos en el proceso de enseñanza de la integral como vía de sistematización de las ideas del Cálculo.

8.3.9. Adaptaciones curriculares

En este apartado analizamos los relatos de P2 a partir de los siguientes descriptores: Abordaje del currículo de la Licenciatura en Matemáticas, abordaje del currículo de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas, el currículo de Cálculo y la Matemática de la enseñanza secundaria, y los significados de la integral y las directrices curriculares de matemáticas.

8.3.9.1. Abordaje del currículo de la Licenciatura en Matemáticas

Al abordar el currículo de la Licenciatura en Matemáticas, P2 ha comentado que:

> Estamos siempre insatisfechos con el actual currículo de la licenciatura. Aunque podríamos planificarlo bien, esto no significa que sería llevado a cabo por los profesores de acuerdo con lo que está planificado. En este sentido, los profesores son muy importantes en este proceso.

Entendemos que la problemática planteada por P2 se refiere, por una parte, a la importancia de involucrar a los profesores universitarios en la implementación del currículo planificado (o propuesto) para la Licenciatura en Matemáticas. Nos parece que esto solamente será logrado si los referidos profesores participaren de las discusiones y toma de posición sobre los aspectos curriculares que consideran necesarios para implementar, así como si asumen el compromiso de llevarlos a cabo.

Por otra parte, P2 plantea la importancia de articular la elaboración e implementación del currículo de la Licenciatura en Matemáticas con las necesidades oriundas de la práctica docente de los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, egresos de la Licenciatura en Matemáticas. En esta dirección, P2 considera que:

> Hemos avanzado en este sentido, estamos moviéndonos en un nuevo proceso de reforma curricular de la licenciatura que ya está casi listo. Entretanto, actualmente seguimos con el currículo de la década de los 1980. Dicha reforma cambiará la práctica de formación de los futuros docentes de matemáticas y esto lo veo de manera muy positiva. Las horas para las referidas prácticas han sido considerablemente incrementadas. En el caso de que seamos capaces de supervisar las referidas actividades prácticas, así como de ayudar a los estudiantes a desarrollar buenas

> reflexiones acerca de las clases y de los contenidos trabajados, tendríamos una dirección más clara de cómo organizar mejor el currículo de la Licenciatura en Matemáticas, de modo que contribuya a la formación de los profesores de matemáticas de secundaria.

P2 aclara que aunque estamos en un nuevo período de reforma curricular, en el cual los cambios más considerables se producen en la componente práctica del currículo de la Licenciatura en Matemáticas, todavía el actual currículo se basa en una reforma curricular de los años 1980. No obstante, entendemos que la contribución con la formación de profesores de matemáticas capacitados para ejercieren, de manera eficaz, sus actividades docentes, y la integración del currículo de la Licenciatura en Matemáticas con la práctica profesional de los futuros profesores de matemáticas debe ser un reto de todas las disciplinas integrantes del referido currículo, entre las cuales se encuentra el Cálculo.

8.3.9.2. Abordaje del currículo de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas

En este apartado contemplaremos las opiniones de P2 relativas al currículo del Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas y el papel de los docentes universitarios en la organización de dicho currículo.

En la opinión de P2, se requiere el desarrollo de una actitud reflexiva en los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas para que ellos puedan actuar satisfactoriamente en las múltiples situaciones que deben afrontar en sus futuras clases. Según P2 ha declarado:

> Me gustaría que el estudiante de la licenciatura desarrollara una actitud reflexiva y una cierta flexibilidad, para que ellos puedan afrontar satisfactoriamente la complejidad de las situaciones que van a encontrar en su práctica profesional. En las escuelas, las clases suelen ser heterogéneas y esto demanda una actitud reflexiva de los profesores para trasformar esta realidad.

Además, al Cálculo se le atribuye un papel de interlocución con las demás áreas del conocimiento a través del desarrollo de proyectos multidisciplinarios. El Cálculo debe contribuir con el desarrollo de la habilidad de manipulación algebraica necesaria para la práctica profesional de los futuros profesores de matemáticas. En este sentido, P2 ha afirmado que:

> Si pensamos específicamente en el contenido, el Cálculo puede proporcionar una buena base para que el profesor dialogue con otras áreas del conocimiento […]. Espero que el estudio del Cálculo propicie esta base e incluso, en Matemática, es muy importante para el desarrollo de la habilidad de manipulación algebraica de los conceptos que se trabajan en la enseñanza secundaria.

No obstante, P2 critica el tradicional proceso de enseñanza de Cálculo, considerando que:

> Seguir trabajando el Cálculo como se viene trabajando las Matemáticas en la secundaria: con muchas reglas sin conocer su origen y con las aplicaciones sin motivación. Con esto no estaríamos contribuyendo para la formación de los futuros profesores de matemáticas [...] nuestra contribución será efectiva si fuéramos capaces de desarrollar el Cálculo con argumentos matemáticos.

Además, P2 considera que en el ámbito de la universidad se concibe la formación de profesores de matemáticas de maneras distintas. Este hecho está relacionado con la divergencia de opiniones de los docentes universitarios debido a su propia formación y al rol desempeñado por la universidad en la planificación e implementación del currículo de la Licenciatura en Matemáticas. Tratándose de las opiniones de los docentes del departamento de matemáticas de su universidad sobre formación de los profesores de matemáticas, P2 ha expresado que:

> No hay un acuerdo relativo a cómo desarrollar la formación del profesor de matemática. Sin embargo, esta tensión es interesante desde que no se pierda el espacio de discusión de dicha formación. Nuestro departamento de matemáticas ha producido cinco doctores en Educación Matemática y hemos buscado discutir y reflexionar, con otros colegas del departamento, sobre la formación de profesores de matemáticas. Otros profesores ven esta formación de manera distinta y expone su punto de vista basado en su formación profesional.

En esta perspectiva, P2 considera interesante que se fomente la discusión y reflexión sobre la formación de profesores de matemáticas en el ámbito departamental. La riqueza de las reflexiones se produce a partir de las distintas perspectivas aportadas por el profesorado universitario. Además, en el proceso formativo de dichos profesores, aunque se toma como base las *Directrices Curriculares para la Licenciatura y Bacharelado en Matemática*, la organización curricular se produce de manera distinta en cada universidad como consecuencia de su autonomía didáctico-pedagógica.

8.3.9.3. El currículo de Cálculo y la Matemática de la enseñanza secundaria

Al opinar sobre la introducción de las nociones del Cálculo en la enseñanza secundaria, P2 ha expresado que las ideas de tasa de variación necesitan ser introducidas en la enseñanza secundaria con una metodología distinta de la que se utiliza en la enseñanza universitaria. No obstante, P2 no es favorable a la introducción de nociones de derivadas e integrales en dicho nivel educativo. La justificación presentada para este hecho se basa en la no contemplación clara de las áreas de conocimiento en el currículo de la enseñanza secundaria. Según ha expresado P2:

> En Brasil, mientras tengamos una misma enseñanza secundaria para todos, pienso que no es viable trabajar con derivadas e integrales, porque eso no tiene sentido para la formación general del ciudadano. Quizás sería diferente si tuviéramos una reforma educacional que contemplara una enseñanza secundaria por áreas específicas de conocimiento.

Por otra parte, P2 ha considerado que se debe evaluar la preparación de los profesores en el desarrollo de sus actividades desde su actuación profesional. Al reflexionar sobre los proyectos que han sido realizados en las escuelas, apunta la dificultad que suelen presentar los profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en su labor docente. En este sentido, P2 resaltó que:

> Tenemos conocimiento de que en los proyectos que han sido desarrollados en las escuelas de enseñanza secundaria, los profesores presentan muchas dificultades. Nuestra expectativa es llevar esta discusión a través de los proyectos de práctica. Esto nos posibilita tener un “feedback” de qué sucede en las escuelas.

Sin embargo, para llevar a cabo los proyectos dirigidos a la articulación entre las Matemáticas, las disciplinas de la Facultad de educación y la enseñanza secundaria, P2 al recordar la reforma de los años 1980, afirmó la importancia de involucrar a la Universidad para que se pueda llevar a cabo dichos proyectos. En este sentido, P2 relató una de las dificultades presentadas cuando era profesora de un curso que debería realizar dicha articulación. Sin embargo, este curso “no pudo desarrollarse según su concepción porque estaba previsto un contacto con el campo de la práctica que nuestro departamento no podría resolver, sería necesario el apoyo institucional”.

A continuación desarrollamos el análisis de la dimensión cognitiva en los procesos de estudio de la integral desde la perspectiva del profesor-formador P2.

8.4. DIMENSIÓN COGNITIVA

En el análisis de la dimensión cognitiva de la integral hemos utilizados los siguientes descriptores: los conocimientos previos de los estudiantes, el aprendizaje de los estudiantes, y las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales de los estudiantes. Basado en dichos descriptores sistematizamos los relatos de P2 referentes al conocimiento y aprendizaje de los estudiantes universitarios de Cálculo.

8.4.1. Los conocimientos previos de los estudiantes

Al comentar los conocimientos previos necesarios para el éxito de los estudiantes en el curso introductorio de Cálculo, P2 considera que "hay dificultades relacionadas con la falta de los conocimientos algebraicos, y con las dificultades de comprensión de las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas".

Además, al analizar el desempeño de los estudiantes del curso de Análisis Matemático, tras dos años de estudio con los profesores de la universidad extranjera en la cual se desarrollaba su investigación, P2 ha constatado que las dificultades presentadas por los estudiantes en la transición del curso de Cálculo para el curso de Análisis Matemático no habían sido superadas. Por lo tanto, aunque los estudiantes hubieran logrado éxito en Cálculo, esta no era una condición suficiente para que ellos superaran las dificultades en el curso de Análisis Matemático.

No obstante, P2 considera que además de tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes de Cálculo, los docentes deben reflexionar sobre qué herramientas se utiliza y cómo las utiliza. Así, al expresarse sobre los recursos tecnológicos en la construcción de los conocimientos de los estudiantes, P2 advierte que:

> Estamos con mucha exigencia en la construcción del conocimiento con una herramienta, mientras en la práctica estamos utilizando otra; quizás necesitamos repensar qué es lo que enseñamos. [...] No sabemos hasta qué punto somos conscientes de la existencia de tecnología para realizar determinados cálculos, si vamos a tener el mismo desempeño que antes. Es difícil quitar esto. Por otra parte, es de gran importancia que la escuela "alfabetice" a los estudiantes que todavía no han tenido acceso a las tecnologías y para esto deben estar preparados los futuros profesores de matemáticas (P2, 2006, p.).

A través del relato anterior P2 pone de manifiesto la relación entre la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes universitarios y la preparación del docente universitario para la adecuada utilización de las herramientas tecnológicas para lograr esta finalidad. También resalta la importancia del conocimiento de las herramientas tecnológicas para los estudiantes que todavía no han sido preparados para su utilización en su práctica profesional.

8.4.2. El aprendizaje de los estudiantes en Cálculo

Según ha relatado P2, la problemática relativa al aprendizaje del Cálculo en la enseñanza universitaria no está relacionada con el hecho que sus nociones no han sido estudiadas en la enseñanza secundaria, sino con la propia complejidad de comprensión de algunas nociones del Cálculo y del lenguaje que generalmente se utiliza en su proceso de enseñanza y aprendizaje.

En este sentido, P2 considera, por ejemplo, la necesidad de trabajar mejor la noción de diferencial, la cual puede convertirse en un obstáculo en el proceso de aprendizaje de la integral. Es decir, el profesor universitario debe tener en cuenta que el desconocimiento o la falta de utilización usual, por parte de los estudiantes, de la simbología utilizada en Cálculo puede constituirse en un obstáculo para el aprendizaje de las nociones de Cálculo.

Otra problemática presentada por P2 se refiere a las propuestas didácticas contempladas en algunos de los libros de texto de Cálculo, las cuales añaden al desarrollo habitual de las actividades propuestas en el libro, otros proyectos. Según su afirmación:

> Podemos pensar en la extensión del libro de “Stewart”, que propone que se desarrolle todo el contenido de la manera usual y además que realicemos las actividades con la utilización de las tecnologías. Esto es muy difícil de llevar a cabo, pues no es posible hacerlo así. Es necesario tener conciencia de que tenemos herramientas diferentes y que esto requiere nuevas prácticas. .

8.4.3. Las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales de los estudiantes

P2 ha comentado una experiencia negativa en la cual utilizó una misma secuencia de Cálculo para las licenciaturas en Biología y en Matemáticas. Según su relato:

> Cuando estaba trabajando simultáneamente con las Licenciaturas en Matemáticas y en Biología, utilicé la misma secuencia y tuve una gran reprobación entre los estudiantes de Biología. Me parece que los intereses son muy diferentes en cada carrera y, por lo tanto, es necesario tener en cuenta las características de cada carrera, así como repensar y adecuar nuestra práctica.

Tras dicha experiencia, P2 ha constatado la necesidad de adecuar su práctica profesional a las características de cada carrera y, por supuesto, a los intereses específicos de los estudiantes. En dicha experiencia, P2 consideró que los resultados han sido satisfactorios con los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. Además, al incluir algunas cuestiones en sus evaluaciones que exigían que los estudiantes se expresaran, P2 considera que se producía en sus clases un ambiente propicio a la participación activa de los estudiantes. En este sentido, P2 ha afirmado que:

> En lo que se refiere a la Licenciatura en Matemáticas, creo que mi trabajo tuvo éxito porque los estudiantes siguieron en su carrera, aunque mientras desarrollábamos el curso había mucha resistencia por su parte. Yo aplicaba cuatro evaluaciones, con algunas cuestiones abiertas para permitir que los estudiantes se expresaran; esto contribuyó para que ellos tuvieran respeto mutuo, confianza y, libertad para participar y hacer los cuestionamientos en las clases. En fin, no seguía la misma secuencia que mis colegas.

El hecho de P2 no seguir la misma secuencia implementada por sus colegas en el desarrollo del proceso de enseñanza de Cálculo, le posibilitaba tener en cuenta las necesidades individuales de los estudiantes y, consecuentemente, ajustar los significados implementados a las necesidades de los estudiantes y a las particularidades de la Licenciatura en Matemáticas.

Aunque P2 ha tratado de involucrar a los estudiantes en su proceso de enseñanza y aprendizaje, dejándoles responsables por la resolución de algunas situaciones-problema en la clase con la expectativa de que esto les ayudara a comprender las nociones matemáticas estudiadas, P2 afirmó que ellos todavía presentaran dificultades en la resolución de las actividades. “Por lo tanto, si ellos no se responsabilizan por estas situaciones, no van a entenderlas; no es suficiente que resolvamos las actividades en la pizarra”.

8.5. DIMENSIÓN MEDIACIONAL

En la dimensión mediacional de la integral analizamos los relatos de P2 relacionados al uso de materiales didácticos y recursos tecnológicos; uso, características y rol del libro de Cálculo; adecuación de los significados pretendidos/ implementados al tiempo disponible; y la inversión del tiempo en los contenidos más relevantes y que presentan más dificultades.

8.5.1. Uso de materiales didácticos y recursos tecnológicos

P2 ha puesto el énfasis general en los recursos tecnológicos que deben ser utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral en la enseñanza universitaria de Cálculo. En su opinión:

> Además de interesante es importante desarrollar este trabajo con las nuevas tecnologías en la licenciatura. Se trata de unos recursos tecnológicos que están presentes en nuestro entorno cotidiano y estamos formando profesores que no tienen la misma destreza que sus futuros estudiantes. Por otra parte, nosotros tenemos la dificultad de romper con nuestra formación y desarrollar un trabajo en la universidad que posibilite a los profesores de la enseñanza secundaria tener la experiencia con las tecnologías para utilizar su futura práctica profesional. Es muy raro el hecho que los estudiantes tengan contacto con ordenadores desde niños y no pasa lo mismo con los profesores.

En el relato anterior P2 pone de manifiesto el hecho de que los estudiantes de la enseñanza secundaria, desde niños, ya utilizan los ordenadores y que todavía no se desarrollan, en la Licenciatura en Matemáticas, actividades que preparen los futuros profesores de matemáticas para una adecuada utilización de las tecnologías en su futura práctica profesional. Señalando la necesidad de ruptura de la práctica que suele ser implementada por los profesores universitarios, que parece reproducir su propio “modelo” de formación, P2 ha planteado la problemática deparada por los profesores universitarios relativa a su adhesión a las nuevas tecnologías en las clases de Cálculo en los siguientes términos:

> No sabemos hasta qué punto somos conscientes de la existencia de tecnología para realizar determinados cálculos, si vamos a tener el mismo desempeño que antes. Es difícil quitar esto. Por otra parte, es de gran importancia que la escuela "alfabetice" a los estudiantes que todavía no han tenido acceso a las tecnologías y para esto deben estar preparados los futuros profesores de matemáticas en su carrera de licenciatura.

Aunque P2 defienda la importancia de cambiar los recursos tradicionales de enseñanza por los recursos tecnológicos disponibles, considera que este cambio no es tan sencillo por parte de los profesores de Cálculo. La cuestión que P2 ha resaltado se refiere a ¿cómo utilizar adecuadamente las tecnologías en la enseñanza universitaria de la integral? Buscar respuesta para dicha cuestión implica en el desarrollo de investigaciones que contemplen el diseño e implementación de actividades dirigidas a la enseñanza de la integral en el ámbito universitario. La implementación de este tipo de actividades presupone no solamente una adecuación de los significados planificados, sino de los significados que efectivamente se van a implementar en dicho proceso de estudio. Esto todavía causa una cierta inquietud en los docentes de Cálculo, pues requiere una reflexión y reorientación de sus prácticas docentes.

A continuación, analizamos sus relatos relacionados con el libro de texto de Cálculo en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria.

8.5.2. Uso, características y rol del libro de texto de Cálculo

P2 explicita las razones del cambio del libro de texto de Cálculo por parte del profesorado. Aunque consideraba más apropiado el libro que utilizaban antes, por ser contextualizado, los demás profesores decidieron cambiarlo por otro libro que consideraban ser más sencillo y cuya estructura era más conveniente para su trabajo en las clases de Cálculo en el final de la década de los 1990.

Aunque dicho libro fue considerado más conveniente por los profesores del Departamento de Matemáticas de su universidad, P2 no solamente ha expresado su opinión sobre la necesidad de que los profesores universitarios lo complementasen, sino ha apuntado las debilidades que considera haber en dicho libro. Según P2:

> El libro de Leithold presenta deficiencias en estos aspectos. No se trata de que sea difícil, no considero sus ejercicios difíciles, pero es extremadamente formal, tiene pocas figuras, pocas aplicaciones, etc. Esto no es lo que se llama Cálculo de manera alguna, pues no trae sus aplicaciones fundamentales; ya es como un “semi-Análisis Matemático”, pues tampoco llega a ser un curso de análisis.

Una de las críticas que P2 ha hecho al referido libro de texto es referente a la carencia de las aplicaciones del Cálculo. P2 tiene una clara concepción de la diferencia que debe existir entre los cursos de Cálculo y de Análisis Matemático en el ámbito de la Licenciatura en Matemáticas. Al opinar sobre los libros de texto de Cálculo que pretende adoptar actualmente para sus clases en la Licenciatura de Matemáticas, P2 ha declarado lo siguiente:

> Pienso en adoptar el libro *Cálculo y Aplicaciones* (Hughes-Hallett, Gleason, Lock, Flath y otros, 1999). En este caso lo que pasa es que el libro tiene muchas ideas interesantes, pero está poco sistematizado. Habría que formalizar algunos puntos. Además me parece que será necesario complementar algunos ejercicios. No sé si lo voy a hacer así.

Asimismo, P2 aborda algunas características que considera relevantes en un libro de texto de Cálculo para ser usado en la Licenciatura en Matemáticas, explicitando también algunas de sus debilidades. P2 contestando a nuestro cuestionamiento sobre qué otro libro de Cálculo usaría en la formación de profesores de matemáticas además del anteriormente mencionado, ha hecho la siguiente declaración:

> He pensado en utilizar el libro de Stewart. No lo he utilizado antes, pero le he echado un vistazo y me parece interesante analizar su viabilidad para la licenciatura. [...] El libro de Stewart contempla una diversidad de ejemplos, ejercicios de tipo canónico del Cálculo, los proyectos con sugerencias del uso de las tecnologías. Uno de los problemas sería el tiempo para desarrollar dichos proyectos.

A partir de los relatos de P2, podemos identificar las características atribuidas al libro de texto de Cálculo a ser usado en la Licenciatura en Matemáticas, las cuales poden ser sintetizadas de la siguiente manera:

- Diversidad de ejemplos;
- Ejercicios del tipo canónicos;
- Desarrollo de proyectos;
- Actividades que contemplan la utilización de las tecnologías;
- Posibilidad de visualización;
- Diversidad de aplicaciones intra y extradisciplinares.

8.5.3. Adecuación de los significados pretendidos/ implementados al tiempo disponible

La adecuación de los significados pretendidos/ implementados al tiempo disponible ha sido mencionada por P2, especialmente en tres situaciones: el tratamiento especial dado a la Licenciatura en Matemáticas en su universidad, el hecho de no seguir la misma secuencia de sus colegas, y la dificultad para desarrollar los proyectos propuestos en el libro de texto de Cálculo.

En la primera situación, P2 al mencionar un proceso de reforma curricular en su universidad, comentó que los cursos de Cálculo se quedaron con una carga horaria superior a la de las demás carreras. El argumento aceptado era que las necesidades formativas de los futuros profesores de matemáticas de la educación secundaria requerían más tiempo para el desarrollo del curso de Cálculo.

En lo que se refiere a la resistencia de sus colegas por el hecho de no seguir la misma secuencia que ellos, P2 ha declarado que seguía una estrategia que priorizaba los contenidos principales de Cálculo I y enfatizaba los aspectos conceptuales de los temas abordados. En este caso, podemos constatar que P2 trataba de adecuar los significados pretendidos/ implementados en el curso de Cálculo al tiempo disponible, manteniendo los contenidos que consideraba fundamentales al curso introductorio de Cálculo y pasando los demás contenidos para el curso siguiente (Cálculo II).

En la tercera situación, P2 explicita la problemática relativa al tiempo necesario para desarrollar todas las actividades contempladas en algunos de los libros de texto de Cálculo. En este sentido, ha afirmado que aunque considera importante el desarrollo de algunos proyectos en la enseñanza del Cálculo, “uno de los problemas sería el tiempo para desarrollar dichos proyectos”, teniendo en cuenta que al añadir los referidos proyectos los autores de los libros de texto no proponen cambios didácticos/ metodológicos que optimicen el tiempo para su realización conjunta con las demás actividades propuestas.

8.5.4. Inversión del tiempo en los contenidos más relevantes y que presentan más dificultades

P2 comenta la importancia de la ejercitación de estudiantes en las actividades relacionadas con la integración. En su opinión, esto se constituye en una importante vía para que los estudiantes puedan desarrollar sus habilidades de identificación de las principales estrategias necesarias al proceso de integración. En este sentido, P2 ha afirmado que esta situación:

> Produce una enorme inseguridad en los estudiantes; ellos esperan que el profesor les indique el procedimiento. Sin embargo, es necesario que ellos desarrollen la habilidad de identificar el procedimiento más adecuado a partir de las soluciones de distintos ejercicios.

Esto consiste en uno de los problemas inherente al proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral, que requiere una inversión de tiempo en la realización de actividades con los estudiantes que contribuyan con el desarrollo de las habilidades necesarias a la superación de la referida problemática.

8.6. DIMENSIÓN AFECTIVA

En la dimensión afectiva, relacionada con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral, resaltamos los intereses y necesidades, las actitudes en el proceso de estudio del Cálculo, y las emociones en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

8.6.1. Los intereses y necesidades en el proceso de estudio del Cálculo Integral

P2 considera que para aumentar el interés y la motivación de los estudiantes de Cálculo es necesario que se desarrollen los contenidos de manera fundamentada y justificada. Sin embargo, aclara que esto no implica una formalización rigurosa de los contenidos. Además, P2 resalta la importancia de abordar los aspectos relacionados con el origen y con las aplicaciones de las nociones del Cálculo en la enseñanza universitaria. En su opinión, en lo que se refiere a la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, "nuestra contribución será efectiva si fuéramos capaces de desarrollar el Cálculo con argumentos matemáticos". Además, en lo que se refiere al interés atribuido a la utilización de las tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, P2 ha resaltado la posibilidad de desarrollar actividades de manera dinámica. Finalmente, destacamos la afirmación de P2 relativa a sus intereses y necesidades formativas, considerando importante el desarrollo de sus investigaciones sobre Educación Matemática en la enseñanza superior, contexto en el cual está centrada su experiencia profesional.

8.6.2. Las actitudes en el proceso de estudio de la integral

En las actitudes hacia el proceso de estudio del Cálculo, encontramos en los relatos de P2: la expectativa de actitudes de los estudiantes, y su propia actitud hacia la superación de las dificultades de los estudiantes y al rechazo al tratamiento discriminatorio a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

En las expectativas que P2 ha manifestado en relación a las actitudes de los estudiantes, resaltamos la perspectiva del desarrollo de una actitud reflexiva y de flexibilidad indispensables a la práctica profesional de los futuros profesores de matemáticas.

Por otra parte, P2 ha señalado la necesidad de estrechar las relaciones entre la universidad y los colegios de enseñanza secundaria. Este vínculo deberá aportar elementos que contribuya a las continuas adecuaciones en el proyecto pedagógico de la Licenciatura en Matemáticas. Según ha declarado P2: “Nuestra expectativa es llevar esta discusión a través de los proyectos de prácticas. Esto nos posibilita tener un “feedback” de lo que sucede en las escuelas”.

En las actitudes declaradas por P2 relativas al proceso de enseñanza del Cálculo y a los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, resaltamos la colaboración mutua de los docentes a través de un proyecto desarrollado con la finalidad de superar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes en Cálculo. En este sentido P2 ha declarado que “cuando percibíamos alguna dificultad de los alumnos en ciertos contenidos, pedimos ayuda a otros profesores que estaban dando clases sobre dichos contenidos y esto fue una experiencia con resultados muy positivos”.

Otra actitud que nos gustaría resaltar en P2, se refiere a su rechazo a la discriminación que se producía hacia los estudiantes de la Licenciatura en Matemática. Conforme P2 ha explicitado:

> Había una concepción de que los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas no poseían las mismas condiciones para hacer las disciplinas de la formación del matemático, lo que es un absurdo. Esto era algo que se necesitaba arreglar entre la formación del profesor de matemáticas y la del matemático.

Aunque en el sistema educativo brasileño la formación del Matemático (*Bacharelado)* o del Profesor *(Licenciatura)* consisten en carreras distintas, a pesar de su currículo parcialmente común, se trata solamente de una opción de los estudiantes por una de las carreras específicas o por ambas. Esta opción también está relacionada con la oferta de dichas carreras en las distintas universidades (u otras Instituciones de Enseñanza Superior), con el interés profesional de los académicos y con las posibles salidas laborales.

8.6.3. Las emociones en el proceso de estudio del Cálculo

En los relatos de P2 relativos a las emociones en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo resaltamos la autoestima de los estudiantes y la reflexión relativa al buen profesor de matemática.

En relación con la autoestima de los estudiantes, P2 ha relatado una situación de éxito que obtuvo con sus estudiantes de Cálculo. En la referida situación, la motivación de los estudiantes ha sido fundamental no solamente para la mejora de su aprendizaje, sino para el cambio de su actitud hacia la continuidad de sus estudios.

La estrategia utilizada por el docente en la planificación e implementación del proceso de estudio juega un papel primordial en la satisfacción y éxito de los estudiantes universitarios. Esto puede generarles el gusto por las matemáticas y, consecuentemente, por llevar a cabo sus estudios en la Licenciatura en Matemática.

Asimismo, P2 ha señalado un aspecto crucial a ser contemplado en la implementación del proceso de estudio de matemáticas, y de Cálculo en particular. Se refiere a que:

> La aceptación de los errores, de las dudas del otro, de sus propias dudas es importante para trabajar con los profesores de matemáticas. Estamos acostumbrados a movernos en un contexto donde las cosas están correctas o erradas, generalmente no admitimos estas cuestiones; uno de los caminos de cambio en la enseñanza consiste en que las personas puedan plantear sus propias cuestiones, discutirlas y relativizarlas".

La libertad de expresión de los estudiantes universitarios, la apertura para la discusión de las ideas y la capacidad de relativizarlas deben ser estimuladas por los docentes. Esto debe producir un ambiente académico propicio a la generación de nuevas ideas y al respeto mutuo tanto entre los estudiantes, como entre ellos y sus docentes.

Otro aspecto contemplado en este apartado es referente a las reflexiones de P2 sobre el significado del *buen profesor de matemáticas* y de *saber matemáticas*. En este sentido, P2 ha observado que hay una divergencia entre las opiniones de los profesores del Departamento de Matemáticas de su universidad sobre el significado de un buen profesor de matemáticas. "Para algunos, más tradicionales, para ser un buen profesor de matemáticas hay que saber muchas Matemáticas". Sin embargo, los profesores que están “reflexionando sobre las cuestiones educativas consideran que hay muchas otras cuestiones.

Las divergencias de opiniones son naturales en el seno de las universidades y deben contribuir al desarrollo de la ciencia y a la cualidad del trabajo docente e investigativo. Las distintas opiniones emergen de las interacciones que se producen entre docentes, discentes o ambos.

8.7. DIMENSIÓN INTERACCIONAL

Analizamos, a continuación, las afirmaciones de P2 sobre las interacciones que se producen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral. Para ello, utilizamos los siguientes descriptores: las interacciones docente-discentes, la interacción entre docentes, la interacción entre discentes y la autonomía.

8.7.1. La interacción docente-discente

Hemos elegido algunos de los relatos de P2 sobre la interacción docente-discente. Al abordar la problemática referente a la introducción de la integral a partir de un problema prototípico y la dificultad para su posterior generalización, P2 ha manifestado que:

> Esto es complicado, pues al introducir un contenido a partir de un determinado tipo de problemas, éstos pueden convertirse en el prototipo de lo que es la integral, quedándose los estudiantes con esta idea. He tenido un alumno que se quedaba preguntándome si integral es un área. Yo le decía que se trata de un “área orientada”. La cuestión entonces es cómo pasar de esta situación introductoria a la generalización de la integral en la Matemáticas.

En el relato anterior, P2 ha descrito un conflicto semiótico surgido en su clase. El estudiante se quedaba preguntándole a P2 si el significado de la integral era lo mismo que el del área. La explicación dada por P2 fue que la noción de integral está relacionada con la idea de “área orientada”. Esta interacción ocurrida con el discente fue utilizada para ilustrar la problemática existente en la enseñanza de la integral relativa a su generalización en matemáticas.

Por otra parte, P2 justifica su opción metodológica de planificar e implementar unos significados de las nociones de Cálculo de manera distinta de sus demás colegas del departamento. En este sentido, P2 considera que:

> Las aplicaciones demandan tiempo y deben ser desarrolladas por los estudiantes y no por el profesor; este era el motivo por el cual he comentado anteriormente que yo dejaba parte de los contenidos de Cálculo I para el curso siguiente.

Aunque esta estrategia pueda ser divergente de las actividades que suelen ser planificadas y desarrolladas en Cálculo, P2 la considera apropiada para el proceso de enseñanza de Cálculo I. En su opinión, esto posibilita una optimización del tiempo de estudio, y permiten el desarrollarlo de las aplicaciones del Cálculo pelos propios estudiantes y, consecuentemente, la comprensión de los significados de esta noción matemática.

8.7.2. La interacción entre docentes universitarios

La interacción entre los docentes universitarios puede ser observada en algunos de los relatos de P2. Por ejemplo, en la discusión que se producía en el departamento de matemática sobre la formación de profesores de matemáticas. Otra situación en la cual se evidencia la interacción docente consiste en la importancia del desarrollo de un trabajo colectivo que contribuya a la mejora del aprendizaje de los estudiantes universitarios. En esta dirección, P2 relata una experiencia positiva de la creación de una coordinación de área en la cual la interacción entre los docentes ayudaba a los estudiantes universitarios a superar sus dificultades de aprendizaje. Según la evaluación de P2, “esto fue una experiencia con resultados muy positivos”.

8.7.3. Interacción entre discentes y autonomía

En la opinión de P2, la interacción entre los discentes universitarios de Cálculo se produce, preponderantemente, cuando se les asigna tiempo para la realización de actividades en las clases. En este sentido, ha mencionado que “existen momentos en las clases que las actividades deben ser realizadas por los estudiantes”.

Además, P2 ha aclarado que en su práctica profesional ha llegado a la conclusión de la importancia de destinar tiempo en sus clases para la producción interactiva de los estudiantes. Entretanto, ha constatado que aunque explicaba los temas y desarrollaba algunas situaciones-problema en sus clases, “los estudiantes tenían dificultades cuando les tocaba desarrollar las actividades propuestas”.

Con relación a la autonomía de los estudiantes, P2 ha declarado que en su experiencia profesional ha observado que “los estudiantes que han cursado la secundaria en los colegios públicos son más autónomos que los que proceden de los colegios privados”.

8.8. DIMENSIÓN ECOLÓGICA

En la dimensión ecológica del estudio de la integral analizamos *la adaptación socio-profesional y cultural de los futuros profesores de matemáticas, y la apertura hacia la innovación didáctica.*

La adaptación socio-profesional y cultural de los profesores de matemáticas será abordada a partir de la práctica profesional de P2, contemplando las adaptaciones que se produjeron en su práctica docente en la enseñanza universitaria, así como las adaptaciones necesarias en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria.

Según los relatos de P2, desde el inicio de su labor docente en la enseñanza universitaria hubo la necesidad de adaptarse profesionalmente al currículo de Cálculo que desarrollaba en la carrera de Ingeniería. Conforme ha declarado, desde el inicio de su vida profesional ha planteado algunos cuestionamientos relativos al proceso de enseñanza que desarrolla, a causa de la presión que sentía por parte de los estudiantes de Ingeniería. Dichos cuestionamientos han sido ejemplificados por: ¿Cómo enseñar?, ¿cómo elegir este o aquel contenido?

Otra adaptación realizada por P2 fue referente a su interés por los temas educativos y a cómo se involucró en la Licenciatura en Matemáticas. Todo ello ha contribuido para que P2 cambiara el énfasis de su actuación docente e investigadora para el área de la Educación Matemática. Al aceptar integrar un equipo, responsable por las discusiones relativas a la implementación de una reforma en la Licenciatura en Matemáticas en el ámbito de su universidad, P2 ha percibido la necesidad y el sentido de adaptar su práctica profesional de forma que atendiera a la demanda generada en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas. Tras concluir su Doctorado en el área de la Educación Matemática, al reincorporarse a sus actividades profesionales en la universidad, P2 se enteró que estaba siendo implementado un proyecto de coordinación vertical en la Licenciatura en Matemáticas:

> Este proyecto estaba pensado en tratar las licenciaturas como un grupo especial, pues en el contexto del Instituto de Ciencias Exactas, hay un tratamiento homogéneo del contenido para todos los cursos. En aquella época, la propuesta era tratar de manera especial la Licenciatura en Matemáticas y, por esto, la carga horaria de los cursos de Cálculo de dicha licenciatura había sido diferenciada.

La formación de los profesores de matemáticas empezaba a ser tratada de manera diferenciada de las demás carreras que se desarrollaban en el Instituto de Ciencias Exactas, donde P2 desarrollaba sus actividades académicas. En el referido proyecto, la carga horaria destinada a los cursos de Cálculo para la Licenciatura en Matemáticas había quedado superior respecto a las demás carreras, para que se adaptara a las necesidades formativas de la referida licenciatura.

En lo que se refiere a la adaptación del currículo de la Licenciatura en Matemáticas al entorno social y cultural, P2 considera que les compite, a las universidades, un papel esencial en la estructuración e implementación del referido currículo, especialmente en lo que concierne al cumplimiento de las directrices curriculares y al establecimiento de protocolos con los institutos de secundaria. En este sentido, P2 ha resaltado el de rol las universidades de la siguiente manera:

> Su importancia como institución contempla, por una parte, la exigencia para que los departamentos respondan de manera eficiente la reforma del currículo cumpliendo los lineamientos del Ministerio de Educación y, por otra parte, el apoyo a nuestros proyectos que requieren la interacción con los colegios de secundaria, donde se realizan las prácticas de los futuros profesores de matemáticas.

Sin embargo, P2 señala en la dirección de una problemática que requiere atención por parte de los responsables por la implementación de las propuestas de cambio e innovación curricular en la Licenciatura en Matemáticas. Tratase de la resistencia que suele existir en lo que se refiere a la efectiva participación de los profesores universitarios en los procesos de cambio y reforma curricular. Según ha comentado P2:

> Considero que ni todos son igualmente conscientes de la importancia de los cambios. No hay un acuerdo relativo a cómo desarrollar la formación del profesor de matemática. Sin embargo, esta tensión es interesante siempre que no se pierda el espacio de discusión de dicha formación.

8.9. SÍNTESIS DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES DE P2

En este capítulo, nos interesamos por la caracterización de los *significados personales* de P2 sobre la didáctica de la integral en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. Para ello, hemos realizado un análisis de la entrevista semiestructurada realizada con P2. En el referido análisis utilizamos, por una parte, algunas herramientas teóricas del *Enfoque Ontosemiótico.* Por otra parte, la *metodología de las narrativas* ha sido útil para analizar la formación y experiencia profesional de P2.

Los significados personales de P2 sobre la didáctica de la integral son frutos de su práctica profesional tanto en la docencia como en la investigación realizada en los cursos de Cálculo y de Análisis Matemático en el ámbito universitario. Resaltamos que P2 ha evidenciado su adaptabilidad a las demandas profesionales. Este ha sido un aspecto relevante tanto en su actuación profesional como en su formación posgraduada (Doctorado y Pos doctorado) realizada en el ámbito de la Educación Matemática.

En la dimensión epistémica hemos sistematizado los significados personales de P2 sobre la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. Los referidos significados personales contemplan las *configuraciones epistémicas primitiva, geométrica, sumatoria, acumulada y extramatemática.* No obstante, siguiendo la línea del *Pensamiento Matemático Avanzado*, la configuración epistémica acumulada consiste en el significado personal predominantemente declarado por P2 para la implementación del proceso de enseñanza de la integral definida; en lo que se refiere a la integral indefinida, la sugerencia de P2 consiste en desarrollarla a través de la primitivación enfatizándose la idea del hacer y deshacer de una función (Tall, 1996).

Consideramos que la metodología de las narrativas y las dimensiones epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica aportadas por el EOS nos ha permitido sistematizar los significados personales de P2 sobre la didáctica de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. Esto ha posibilitad extraer los criterios utilizados en la caracterización de la idoneidad del proceso de estudio de la integral en dicho contexto.

Capítulo 9

MEMORIA COMPARTIDA DE LOS PROFESORES-FORMADORES SOBRE EL PROCESO DE ESTUDIO DE LA INTEGRAL

En este capítulo analizamos, sintéticamente, las narrativas de los profesores-formadores que actúan en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. A partir de sus relatos, ha sido posible construir la memoria compartida de éstos sobre la Didáctica del Cálculo. La estructura del capítulo consiste, por una parte, en la presentación de la síntesis de la formación y experiencia académica de los entrevistados. Y, por otra parte, en la sistematización y caracterización de de la idoneidad didáctica del proceso de estudio de la integral utilizando las dimensiones epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional, y ecológica desarrolladas en el Enfoque Ontosemiótico.

9.1. SÍNTESIS DE LA FORMACIÓN ACADÉMICA DE LOS PROFESORES-FORMADORES

El análisis con detalle y profundidad de las entrevistas realizadas a los profesores-formadores P1 y P2, que hemos contemplado en los capítulos 7 y 8 de esta memoria, nos ha permitido precisar y aplicar los descriptores incluidos en la tabla 7.1. Estos indicadores serán utilizados en este capítulo con la finalidad de construir la memoria compartida del conjunto de profesores-formadores sobre la didáctica de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas.

Para evitar redundancias innecesarias[8], nuestro análisis será orientado a la identificación de los principales aspectos convergentes o discrepantes en los relatos de los diez profesores-formadores que hemos entrevistado, que han sido identificados por: P1, P2, ... , P10 en este estudio.

En las narrativas de los profesores-formadores, ellos han relatado su formación (graduación y pos graduación) y experiencia académica en la enseñanza universitaria, especialmente de Cálculo. Estos aspectos serán sintetizados a continuación.

A partir del análisis de las narrativas de los profesores-formadores sobre su formación académica, desarrollamos un análisis sintético de ésta basado en las siguientes categorías: Graduación y Máster, Doctorado y Pos doctorado. En la Graduación y Maestría, abordamos algunos aspectos relativos a la formación básica de un formador de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. En el Doctorado y Pos doctorado, resaltamos tanto la importancia atribuida por los entrevistados a su formación posgraduada como la relación de dicha formación con sus actividades profesionales en la Licenciatura en Matemáticas.

9.1.1. La Graduación y el Máster de los profesores-formadores

Todos los profesores-formadores que hemos entrevistado poseen Graduación en Matemáticas (Licenciatura en Matemática: P5, P6, P7 y P10; "Bacharelado" en Matemáticas: P3, P8, P9; Ambas: P1, P2, P4). La predominancia de la formación académica ha sido en la Licenciatura en Matemáticas (70%). No obstante un 60% de los entrevistados se han graduado en el "Bacharelado" en

[8] Hemos optado por no incluir como anexos las transcripciones de las entrevistas realizadas a los profesores-formadores P3 a P10. Sin embargo, incluimos en este capítulo las afirmaciones más relevantes relacionadas con su experiencia y conocimientos profesionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de la integral.

Matemática, de los cuales un 30% poseen ambas graduaciones. Dicha formación fue realizada en distintas Instituciones de Enseñanza Superior brasileñas públicas (Federal y Estatal) o privadas: "Pontificia Universidade Católica de Campinas – PUC/CAMP, Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Universidade Federal do Espírito Santo – UFES, Universidade de Brasília – UnB, Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Universidade Estadual de São Paulo – USP, Faculdade de Filosofia, Ciencias e Letras de Belo Horizonte – FAFI-BH y Faculdade de Filosofia Ciencias e Letras de Varginha - FFCLV".

En lo que se refiere al Máster, un 90% de los entrevistados posee título de Máster, de los cuales solamente uno (10%) fue emitido por una Universidad Extranjera. Además, hay una predominancia del Máster en Matemáticas, un 70%, siendo apenas un 20% de los entrevistados los que han cursado un Máster en Matemática Aplicada, y solamente uno (10%) no ha cursado el Máster.

Esta formación posgraduada consiste en la titulación más general de los profesores universitarios (profesores-formadores) del área de matemáticas en Brasil. En este sentido, P3 afirmó que tras concluir su graduación en Matemática, fue invitado para cursar un Máster en Matemáticas en la "Universidade de Brasília", resaltando que fue cursar el Máster en Brasilia ya contratado como profesor de la universidad. Una situación muy similar sucedió con P5, que comentó haber realizado un "perfeccionamiento" en Matemáticas así que se graduó y, en seguida, cursó el Máster en Matemáticas y ha empezado a impartir clase en la universidad luego que concluyó dicho postgrado. P10 afirmó que el Máster le daría la oportunidad de tornarse profesora universitaria. Según su afirmación:

> Terminé [el Máster] en 1976 y antes de hacer un doctorado quería ser profesora de matemáticas en alguna universidad y este máster abría las puertas para ello. En 1977 empecé a trabajar aquí en la PUC en las carreras de Ingeniería, gané toda la experiencia docente, me casé, los hijos crecieron y pude hacer el doctorado en el área de la educación [...], relacionado con la enseñanza del Cálculo.

Según P6, en la década de los 1970 cuando empezó a trabajar como docente universitaria, gran parte de los docentes que actuaban en la enseñanza superior solamente poseían la graduación:

> En aquella época, aún no existía el Máster, eran rarísimos los profesores que tenían ese tipo de formación, además de la licenciatura. [...] A través del profesor Walter ¡un pionero! que quería mucho que los profesores continuasen su formación e invirtió en la creación de un Máster en el departamento de matemáticas de la universidad en la cual yo trabajaba. En el año de 1980 inicié el Máster en Matemáticas Pura, en el departamento de matemática, trabajando las 40 horas semanales y cursando dicho Máster a la vez, en 1983 lo terminé.

Parece que los profesores-formadores que participan de nuestra investigación han vivenciado una situación muy similar relacionada a su formación a través del Máster. Un 70% de los entrevistados han empezado la docencia universitaria antes de concluir el Máster. No obstante, ellos han resaltado más su formación posgraduada de Doctorado, fundamental para que se pueda llegar al nivel más alto de la docencia e investigación académica.

9.1.2. El Doctorado y el Pos doctorado de los profesores-formadores

Por tratarse de una muestra de profesores-formadores de elevado nivel (investigadores y expertos en la enseñanza universitaria de Cálculo, autores de libros de Cálculo, orientadores de tesis de Máster y/o de Doctorado relacionados con las Matemáticas o con la Educación Matemática) el 100% de ellos son Doctores, de los cuales solamente un 60% ha realizado su Doctorado en Brasil. El 40% de los entrevistados participaron de Programas de Doctorados desarrollados en Estados Unidos, Reino Unido, Francia y Cuba. Aunque solamente un 40% de los entrevistados han desarrollado sus tesis relacionadas con la Educación Matemática, el 100% de éstos poseen producción científica relacionada con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Con relación a los profesores-formadores que realizaron su Pos doctorado (50%) todos lo han desarrollado en Universidades Extranjeras en Estados Unidos, Reino Unido y Francia.

P6 reconocía la importancia de desarrollarse como investigadora, sin embargo sus posibilidades de irse para otra universidad para participar de un Programa de Doctorado era algo complicado, especialmente por las cuestiones familiares. En este sentido, ha comentado lo siguiente:

> Empecé a sentir que me realizaba mucho como profesora, pero como investigadora dejaba sus lagunas [...]. Por problemas familiares era difícil salir de aquí para participar de un doctorado en otra universidad. Intenté invertir en un doctorado aquí y en el inicio de 1989 empecé el Doctorado en Ingeniería de Producción. [...] Ahí fue el ambiente que encontramos para hacer ese doctorado, especialmente porque teníamos un

> profesor, que había sido profesor de matemáticas, con formación en Matemáticas y que estaba trabajando aquí; eso fue en 1989. En octubre de 1992 defendí mi tesis doctoral en Ingeniería de Producción. Fue la primera tesis doctoral del programa, ¡llegué a hacer historia!

Esta limitación de movilidad para participar del doctorado y las cuestiones familiares también ha afectado a P7. Esto trajo como consecuencia su participación en el programa de doctorado disponible en su universidad, no posibilitándole elección por su área de interés de investigación: la Educación Matemática. No obstante, P7 ha sacado provecho de su formación y experiencia adquiridas en dicho Programa para desarrollar su investigación educacional relacionada con la tecnología para la educación a distancia. Según su afirmación:

> En el doctorado, aunque siempre me hubiera gustado hacerlo en el área de Educación, por problemas de movilidad y familiares tuve que hacerlo en la Ingeniería de Producción. Sin embargo he tenido una continuidad en aquello que trabajé en el Máster en el aspecto de la teoría de la información. En la Ingeniería he logrado trabajar con alguna aplicación práctica, pero que hoy de alguna manera, no va más unido con lo que investigo, ya que en la actualidad mi investigación está toda contextualizada en la Educación Matemática, en la formación del profesor, en la enseñanza de diferentes áreas, principalmente del Cálculo [...]. Pero evalúo mi doctorado, como un empuje para el área de la tecnología, hoy tengo todo un trabajo amplio en el área de la tecnología a distancia y gracias a ésta formación tecnológica de alguna manera la viví en mi doctorado.

La mayoría de los profesores-formadores que hemos entrevistado han tardado en realizar su doctorado. La baja oferta de programas de doctorado, así como el limitado número de plazas disponibles torna poco accesible la participación de los profesores universitarios que actúan en la formación de profesores de matemáticas en Programas de Doctorado en Matemáticas o en Educación Matemática. Junto a esta problemática está la dificultad que los referidos profesores enfrentan para trasladarse con sus familias para las ciudades cuyas universidades promueven los referidos doctorados. Por esta razón, para la mayoría de los entrevistados, su experiencia fue similar a la de P5 que afirmó: “el doctorado fue tardío, lo terminé en 2002 en una universidad extranjera” (P5).

En lo que se refiere al pos doctorado, un 30% de los profesores-formadores que realizaron su doctorado en el extranjero han vuelto al exterior para desarrollar su estancia postdoctoral en la misma área de conocimiento. Esta misma situación también ha sido constatada en los demás profesores (20%) cuyo doctorado había sido realizado en Brasil. No obstante, hubo uno de los profesores que resolvió cambiar su área de investigación de Matemáticas

(Geometría) para Educación Matemática; en este caso, éste decidió participar de un Pos doctorado en Educación Matemática en Estados Unidos. Según ha afirmado P3:

> Empecé a trabajar con Educación Matemática [...] en la época en que Ubiratan D'Ambrósio también estaba en la UNICAMP y empezamos a trabajar juntos en Educación Matemática. Yo seguí con las dos áreas, pero percibí que tenía que optar por una y entonces elegí la Educación Matemática. Seguí trabajando en dicha universidad, pero en 1988 me fui a Estados Unidos, quedándome un largo tiempo, haciendo un pos doctorado en Educación Matemática, área en la cual seguí desarrollando mis investigaciones.

Otra razón que ha motivado a los profesores-formadores a realizar su pos doctorado en Educación Matemática ha sido la propia necesidad surgida en su práctica profesional. Esta razón ha sido considerada también por un 40% de los entrevistados al justificar su opción por cursar un Programa de Doctorado en el área de Educación Matemática. Esto nos lleva a corroborar con la siguiente afirmación de Fiorentini (2004), citado por Melo (2010):

> Aunque el reconocimiento del profesor universitario, en este inicio de siglo, permanezca centrada más en su actuación técnico-científica del que en su desempeño didáctico-pedagógico, se puede encontrar actualmente, en diferentes departamentos e institutos universitarios, docentes que priorizan la docencia y su función de formadores de profesionales. Estos, además de buscaren una formación didáctico-pedagógica en cursos de máster o de doctorado en el área educacional, desarrollan investigaciones relacionadas a la enseñanza o a la formación de profesionales en su área de actuación. De esta manera, han emergido en las distintas áreas los nuevos campos de conocimiento que conectan los saberes de un área específica con la docencia y sus saberes didácticos-pedagógicos (p. 13).

Asimismo, en su tesis doctoral, Costa (2009) ha afirmado que el hecho de Haber cursado el postgrado en el área de Educación o Educación Matemática ha propiciado un diferencial con relación a las preocupaciones con el rol de enseñar a enseñar. La continuidad de los estudios por medio del postgrado ayuda a fortalecer el papel diferenciado como formador, así como desarrollar una consciencia más crítica sobre lo mismo. Además, contribuye para legitimar su competencia como formador y está directamente relacionada con un movimiento de constitución de una identidad como formador (p. 169).

Además, hemos encontrado relatos sobre la realización de intercambio entre los investigadores de distintas universidades. Esto conlleva al desarrollo de actividades de interés mutuo, así como a la colaboración en la implantación, implementación y consolidación de grupos de investigación. En esta dirección, P6 ha explicitado que:

> En 1997 hice un pos doctorado, por un año, en el departamento de Matemática Aplicada, relacionado con las investigaciones que ya realizaba en modelación matemática aplicada al transporte y logística […] en una universidad extranjera en Europa. A partir de este pos doctorado, ha habido una cooperación muy importante con el profesor Eduardo, ya que actualmente hemos elaborado algunos artículos. Además, varios alumnos míos hicieron su doctorado con él.

Tras abordar la formación académica de los profesores-formadores, sintetizamos su formación en Cálculo.

9.1.3. Algunas consideraciones de los profesores-formadores sobre su formación en Cálculo

En los capítulos 7 y 8, hemos enfatizado, por una parte, los aspectos de la enseñanza “rigurosa” del Cálculo por los cuales ha pasado P1 en su graduación. Y por otra parte, el relato de P2 sobre la metodología que se utilizaba para la enseñanza del Cálculo en la época en que cursaba su Licenciatura en Matemáticas. Consistía en una metodología basada en un excesivo abordaje algorítmico, donde el énfasis estaba en las reglas de derivadas e integrales. Ambos han cuestionado sus procesos de enseñanza, y “mencionado” que todavía la enseñanza del Cálculo puede contener estos antiguos vestigios tanto en el abordaje de algunos libros de texto como en el desarrollo de los cursos de Cálculo.

En la opinión de P5, cuando empezó a dar clases de Cálculo, siguió la misma “estructura” del curso que había tomado en su graduación. Dicha secuencia ha sido descrita de la siguiente manera:

> Inicialmente he empezado de la manera que casi todos hemos estudiado Cálculo y otras disciplinas. El profesor iba a la pizarra y el alumno copiaba en su cuaderno, había el libro de texto y los alumnos tendrían que resolver los problemas, luego había los momentos para aclarar sus dudas en la clase o con el auxilio de los monitores de Cálculo.

No obstante, es necesario que los docentes se pongan al día con los avances didácticos y metodológicos que se producen en el ámbito educacional y, por supuesto, en la enseñanza universitaria. En este sentido, P7 recordando una experiencia que realizó recientemente, ha afirmado que:

> Escribí un capítulo de un libro, dónde intenté plasmar una retrospectiva de mi trabajo en el área de Cálculo. Fue interesante, pues tuve que buscar aquello que hace años pensaba respecto del Cálculo y lo que hacemos hoy; fue muy interesante observar que mi trabajo ha acompañado los cambios tecnológicos [...]. Cuando comparamos aquel tiempo con la actualidad, yo veo que todo mi trabajo ha tenido en cuenta las cuestiones

> tecnológicas. Las investigaciones que hacíamos en aquella época tenían enfoques diferentes de las de hoy. Actualmente las investigaciones suelen relacionarse con los libros, recursos tecnológicos, el papel de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, etc., y de ahí claro que en las clases el trabajo que realizamos hace años es completamente diferente de lo que hacemos actualmente.

El hecho del profesor-formador revivir sus experiencias puede aportarle elementos para que pueda autoevaluar su trayectoria académica, ajustándose a las nuevas orientaciones educacionales que se requieren en cada momento.

A continuación, presentamos una síntesis de las experiencias profesionales de los profesores-formadores en la enseñanza universitaria.

9.2. LA EXPERIENCIA PROFESIONAL LOS PROFESORES-FORMADORES

Para sintetizar la experiencia profesional de los profesores-formadores que han participado de nuestra investigación, abordaremos su experiencia en la docencia universitaria. Para ello, abordamos su experiencia profesional previa al doctorado y, su experiencia académica en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

9.2.1. La experiencia académica de los profesores-formadores: La docencia universitaria previa al doctorado

Todos los entrevistados poseen una amplia experiencia profesional tanto en la docencia universitaria como en la investigación. Con excepción de P1 que empezó la docencia universitaria en el año 1957, los demás profesores han iniciado sus actividades docentes a partir de la década de los 1970. No obstante, en esta etapa previa a la realización del postgrado para la mayoría de ellos, la investigación siquiera ha sido mencionada.

Según ha afirmado P1, “yo empecé a dar clases de Cálculo en 1957 en *São José dos Campos*”, pero luego se fue al extranjero por realizar su Máster y Doctorado. Una situación relativamente similar sucedió a P3, que ha relatado lo siguiente:

> En el último año de mí licenciatura, yo era monitor de Cálculo para los estudiantes del primer año. Tras graduarme, me fui para la Universidad de Brasilia, quedándome allí por dos años en los cuales daba clases y cursaba el Máster. Mí orientador del Máster era de la Universidad de “São Paulo”- USP y él me invitó a continuar el trabajo de investigación en la USP. Entonces, vine a la USP. Trabajé allí por unos dos o tres años, yo era contratado como “profesor asistente”, en la “Escuela Politécnica”, donde daba clases prácticas de Cálculo; la parte teórica era dada por el profesor Abramo.

La monitoria también ha sido resaltada por P4 como una actividad que le ayudó a obtener una plaza como docente universitaria, una vez que lo que le gustaba era la docencia. En este sentido, P4 ha afirmado el siguiente:

> Así que concluí la Licenciatura en Matemáticas me di cuenta de que lo que me gustaba era impartir clases. Ya había iniciado mis actividades docentes como profesora colaboradora. En aquella época se realizaba una prueba didáctica para ingresar en la universidad y, como era monitora, fue más sencillo trabajar en la universidad. Desde 1977 hasta 2003 trabajé como profesora del Departamento de Matemáticas

P6 resaltó su larga experiencia en la enseñanza del Cálculo tanto para la Licenciatura en Matemáticas como para algunas Ingenierías. No obstante, ha considerado que los estudiantes de Ingeniería de Producción y de Ingeniería Eléctrica tienen mayor “potencial” para estudiar Cálculo. Dicho “potencial”, según la afirmación de P6, se asocia con los buenos resultados de los estudiantes y con el hecho de considerarlos muy estudiosos. En este sentido, P6 ha aclarado que:

> Mi formación académica es de Licenciada en Matemáticas [...], cuando la terminé, en el mismo año, me aprobé en unas oposiciones y fui contratada como profesora del departamento de matemáticas en 1976 [...]. Fueron largos años trabajando en la enseñanza de Cálculo, empecé en 1976 y en 2004 me jubilé [...], fueron 33 años de servicio, de los cuáles he dedicado 28 años a enseñar Cálculo [...] en la carrera de Matemáticas. Además, me gustaba impartir clases en el Centro Tecnológico, en las carreras de Ingeniería. Allí daba clases para los estudiantes de Ingeniería Mecánica. En dicha carrera, juntamente con las Ingenierías de Producción y Eléctrica se encuentran los alumnos con mejor potencial para estudiar Cálculo, ellos llevaban la enseñanza muy bien, eran muy estudiosos.

P8 aunque ha destacado su vasta experiencia como profesora universitaria, afirmó que ésta ha sido principalmente en las ingenierías. Según su afirmación, “desde el año 1972 imparto clases en la universidad. En los cursos de ciencias exactas; aunque ya haya impartido clases en la licenciatura, mi experiencia ha sido más extensa en las Ingenierías”

La preocupación con la complementación de su formación en el área de las Matemáticas fue resaltada por P5, que trató de realizar un perfeccionamiento en algunas disciplinas matemáticas antes de cursar su Máster en Matemáticas. Tras concluir el máster, empezó a dar clases en la enseñanza universitaria. Esto ha sido expresado por P5 de la siguiente manera:

> Hice un Máster en Matemáticas en la Universidad de Brasilia - UNB y lo terminé en 1978. Y antes había terminado la Licenciatura en Matemáticas en la cual no se contempló un estudio profundo de algunas disciplinas como Análisis Matemático, Ecuaciones Diferenciales, Variables Complejas, Álgebra y Geometría Diferencial, es decir no las sabía. Con mi orientadora en la UNB le pedí que antes que iniciara el Máster, yo realizara un perfeccionamiento, ya que, en aquella época lo existía con beca del CNPQ; en seguida cursé el Máster en Matemáticas, lo cual terminé en 1978. E inmediatamente empecé a impartir clase en la UNB.

Aunque tanto P7 como P10 han tenido experiencias profesionales en la enseñanza superior antes de concluir sus respectivos doctorados, han comentado solamente aspectos referentes a su experiencia académica más actual. Por otra parte, toda la experiencia académica de P9 ha sido posterior al término de su doctorado.

.

9.2.2. La experiencia académica de los profesores-formadores en la enseñanza del Cálculo Integral

Al revivir sus historias de vida, los profesores-formadores han relatado sus experiencias de éxito y de fracaso en el proceso de enseñanza del Cálculo. Además, han abordado algunas de las características de un buen profesor de matemáticas. En esta sección tratamos de sintetizar dichos aspectos.

9.2.2.1. Experiencias de éxito y de fracaso

Las experiencias de éxito y fracaso en el proceso de enseñanza del Cálculo, relatadas por P1 y P2, han sido abordadas en los capítulos 7 y 8, respectivamente. A continuación analizamos dichas experiencias de los demás entrevistados.

Las experiencias de éxito en el proceso de enseñanza del Cálculo han sido comentadas por todos los profesores-formadores. Según parece, estas experiencias se basan en un grado de satisfacción mutua entre los profesores-formadores y los profesores en formación, producido a través de algunas prácticas compartidas en momentos específicos del proceso formativo. Además, poseen características distintas debido a la heterogeneidad de las experiencias vividas por los entrevistados, aunque convergen en algunos aspectos. A través de los relatos de los informantes, sistematizamos sus experiencias de éxito que más les han impactado en su vida académica relacionadas al curso de Cálculo.

La adecuación del curso de Cálculo a la carrera a la cual está dirigido, anteriormente contemplada por P2 en el capítulo 8, fue resaltada por P3 de la siguiente manera:

> Hubo una buena experiencia, cuando impartí el curso de Cálculo para los alumnos de Economía, pues ha sido una enseñanza toda centrada en aplicaciones a la Economía, curso que me gustó muchísimo impartirlo. Otra experiencia, se refiere al curso de Cálculo en la carrera de Física, pues habían constatado previamente, en la selectividad, que casi 80% de los alumnos elegían la carrera de Física porque les gusta la Astronomía. Por ello diseñé un curso de Cálculo con énfasis en Astronomía, en problemas astronómicos, etc. Todo basado en la astronomía, lo que nos gustó tanto a los alumnos como a mí.

Esto implica que al docente le compite conocer no solamente las características de las carreras, sino las especificidades de los grupos de estudiantes para los cuales tiene que planificar e implementar unos significados propios para las nociones matemáticas que serán abordadas a través del curso de Cálculo. Por otra parte, P3 ha relatado la experiencia desarrollada en Cálculo a través de proyectos. Según ha afirmado, esta fue la mejor experiencia de su vida profesional.

> Enseguida, […] empezamos a pensar este curso a través de proyectos, lo que ha sido la mejor experiencia de mi vida. Nosotros usábamos, e incluso se usa hasta hoy, el ordenador como herramienta. Sin embargo, a los alumnos les exigíamos que elaboraran proyectos, empezando por Cálculo I, Cálculo II y Cálculo III. Los alumnos realizaban proyectos, a los cuales destinábamos gran parte de los créditos del curso.

A través de los proyectos elaborados y desarrollados por los estudiantes, éstos se involucraban en un proceso activo de enseñanza, identificando situaciones-problema que emergían de su entorno, a partir de las cuales era posible estudiar y aplicar los conceptos del Cálculo. Todo ello se producía con la utilización de herramientas tecnológicas adecuadas.

Esta misma estrategia de utilización de proyectos en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, desarrollado por un grupo de docentes, ha sido compartida por P8 y P9 como sus experiencias de éxito. En este sentido P9 ha comentado que a través de los proyectos fue posible mejorar la eficacia del proceso de enseñanza del Cálculo por medio de la articulación teoría-práctica producida por medio de la integración de las actividades computacionales a los proyectos. En su opinión:

> El primer capítulo de nuestro libro contamos una experiencia. En 1996 la rectoría nos ha propuesto un programa de tutoría y hemos aprovechado esta estructura para desarrollar las prácticas de laboratorio de las asignaturas; de las 6 horas semanales, dos eran dedicadas a las prácticas. Con eso hemos conseguido integrar actividades computacionales y proyectos de una manera más efectiva en la propia asignatura. El fruto de un trabajo en equipo y de varias promociones trabajando de manera integrada culminó en la producción de nuestro libro.

El éxito de la referida experiencia ha posibilitado la publicación de un libro que contempla las experiencias desarrolladas por los profesores-formadores por medio de proyectos desarrollados en la UNICAMP, en los cuales se utilizaba los recursos tecnológicos. En este sentido P8 considera que:

> Trabajamos con proyectos desde 1992. Lo que hicimos a partir de 1996 fue introducir el ordenador como otra herramienta en nuestras experiencias anteriores, pero sin prescindir de la construcción del conocimiento por el estudiante. La filosofía del trabajo está basada en contemplar un espacio para el alumno como agente activo del proceso de enseñanza y aprendizaje.

La práctica de Cálculo desarrollada en el laboratorio de informática fue citada por P6 como una experiencia de éxito. En este sentido, P6 ha relatado, a continuación, una experiencia realizada con los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas que asociaba las dos nociones básicas del Cálculo: derivada e integral:

> Por ejemplo, en aplicaciones de la derivada, realicé una clase de laboratorio, usando el software *derive,* sobre el análisis del comportamiento de las funciones, pues generalmente los alumnos tienen una enorme dificultad para aplicar los teoremas correspondientes. Les he planteado una situación-problema que consistía en dibujar la gráfica de cierta función conociendo solamente su derivada. Luego les sugería que estudiaran el comportamiento de la función (concavidad, máximo y mínimo, punto de inflexión, intervalos de crecimiento y decrecimiento, etc.). Como ellos no tenían conocimiento sobre integración, no poseían una herramienta matemática adecuada para encontrar la función. No obstante, tras analizar su comportamiento y esbozar su gráfica les informaba la representación algebraica de la referida función y les solicitaba que confirmaran los resultados encontrados. Esta actividad fue muy interesante ya que en los exámenes, cuando la replanteábamos, ellos tenían éxito. Esta fue una de las experiencias docentes más gratificantes para mí.

P7 ha descrito la siguiente experiencia que ha realizado por medio de la utilización de la *inteligencia artificial* en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo:

> Era un grupo en que yo trabajé con la integral y con la parte de funciones. Del estudio de las funciones tenía el papel de revisión de contenidos, donde el alumno interactuaba, ya que él hacía un "feedback" de lo que sabía relacionado con funciones y con sus propiedades características generales. El alumno repensaba y buscaba el "feedback", pero éste no era simplemente una respuesta cerrada: correcto o incorrecto, era sencillamente decirle no está totalmente correcto. Sin embargo, no le decía que estaba correcto, sino qué tal si buscas los teoremas que definen eso. Hacía que el alumno buscase, es decir, se daba una nueva respuesta para que el "feedback" funcionase como en un proceso de enseñanza y aprendizaje. Este fue el trabajo con funciones. El otro era con integrales. Él no era tan interactivo como el anterior, pero desempeñaba el papel visualizador de las sumas de Riemann, definía las divisiones,

los intervalos que quería analizar, cuántas particiones quería realizar, el *software* iba realizando esa caracterización hasta llegar a la formalización de la definición de la integral. Además, buscaba aspectos históricos, no con la finalidad de formación, sino de información. Este fue un trabajo que realizamos en esta época, uno de los primeros en esa área de tecnologías que fue bastante interesante.

Propiciar un ambiente de colaboración entre los estudiantes, para posibilitarles interactuar en la construcción del conocimiento han sido las experiencias contempladas por P5 y P10. Otro aspecto común consiste en que ambos formadores han considerado la importancia de sus estudios de doctorado para su actual práctica profesional. En este sentido, P5 ha destacado la relevancia del cambio de su estrategia de enseñanza en las clases de Cálculo. Según su afirmación:

> Empecé a trabajar con los estudiantes en equipos. Ya que cuando crees que algo vale la pena, lo llevas hasta la última consecuencia. Aunque, los alumnos rechazaban la innovación, les obligaba a juntarse en parejas o en equipos de cuatro personas. Eran ellos quienes resolvían los problemas, quienes iban a la pizarra. […] Y el proceso de evaluación también ha sido cambiado, consistía en distintas actividades, entre las cuales resaltamos la participación de los estudiantes en las clases, las actividades prácticas con utilización de softwares, entre otras.

Asimismo, P10 ha creado un *espacio de trabajo* para ofrecer tutoría individualizada a los estudiantes, estimulando su asistencia a este espacio, donde se trabajaba en pequeños grupos. Esta experiencia ha sido relatada de la siguiente manera:

> Actualmente he creado un espacio de trabajo con los alumnos, un taller de atención a mis alumnos de Cálculo donde discutimos cómo estudiar la asignatura. Ese es un fruto concreto de mi tesis que considero un éxito. Aunque es desarrollado en una universidad privada, el taller de Cálculo III que ofrezco es opcional y gratuito, y se centra en los métodos de estudio utilizados por los alumnos.

Finalmente, P4 ha resaltado que ha tenido un grupo único de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, cuyo grado de interés y motivación era muy elevado. Esto le permitió avanzar con los contenidos del curso introductorio de Cálculo, además de realizar un trabajo interdisciplinario con la Historia de las Matemáticas. Todo ello ha sido contemplado en el siguiente relato de P4:

> De éxito me recuerdo que tuve un grupo de alumnos de la Licenciatura en Matemáticas, que fui invitado a su "paraninfo"[9]. Los alumnos eran excelentes, colaboraban mucho, solicitaban más de lo que se imaginaba que pudieran asimilar. Mientras trabajé con Cálculo I, conseguimos llegar hasta casi la mitad del programa de Cálculo II. Era un grupo que le gustaba la interdisciplinaridad, especialmente con la Historia de las Matemáticas. Era un grupo "súper" que jamás he encontrado otro igual.

---

[9] Esta expresión se utiliza en Brasil para referirse a un profesor homenajeado por un grupo de estudiantes en el fin de la carrera.

Nos parece interesante resaltar que un 70% de los relatos de las experiencias de éxito de los profesores-formadores se relaciona con la realización de actividades prácticas con la utilización de las herramientas tecnológicas. Es más, en su totalidad se refieren a experiencias dirigidas a potenciar el aprendizaje de los estudiantes en Cálculo. Todo ello nos lleva a considerar que el éxito del proceso de estudio del Cálculo está íntimamente relacionado al conocimiento experiencial de los profesores-formadores, y se pone de manifiesto a través de la eficacia de las estrategias utilizadas por éstos para lograr el aprendizaje significativo de los estudiantes. Las actividades prácticas y las tecnologías aplicadas al proceso de estudio de Cálculo posibilitan la visualización y pueden contribuir con la comprensión conceptual de los temas abordados.

> Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del Cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de Cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como carente en la mayoría de los cursos de Cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y. . . en el proceso el espíritu del Cálculo se ha perdido. (Zimmermann, 1990, citado por Hitt, 2003, p. 6).

Lograr el éxito en el proceso de estudio de la integral requiere un cambio metodológico posibilite al estudiante involucrarse activamente en las actividades propuestas. Para ello, el docente debe propiciar las condiciones adecuadas para motivar a los estudiantes para que tengan interés en involucrarse en el proceso de estudio del Cálculo, interactuando con los colegas y con el profesor a través de un proceso colaborativo respaldado por los valores de libertad de expresión, respeto mutuo y confianza.

No obstante, los entrevistados también han relatado algunas experiencias de fracaso que han ocurrido a lo largo de su vida académica. Estas experiencias han sido relacionadas con el desarrollo de un curso de Cálculo para estudiantes de carreras que no se interesan por esta área, la planificación inadecuada del tiempo para desarrollar una clase práctica, la introducción de una dinámica "importada" de otra universidad en la clase sin ajustarla a la realidad específica de los estudiantes y, con el desarrollarlo del proceso de enseñanza centrado en el profesor. Enseguida, describimos las referidas experiencias a partir de los relatos de los profesores-formadores.

Según P3, en el inicio de su carrera como profesor universitario, tuvo que dar clases de Cálculo para los estudiantes de Medicina. La experiencia fue considerada “horrible”, pues nadie se enteraba del porqué habían introducido el curso de Cálculo en el currículo de Medicina. Según su relato:

> Hubo algunas experiencias que para mí fueron muy importantes, por ejemplo cuando yo vine para la UNICAMP en 1967, esta universidad había acabado de estructurarse y había una Facultad de Medicina; entonces resolvieron ofrecer clases de Cálculo a los médicos. Por ello, yo impartí dichas clases desde abril hasta septiembre, siendo una mala experiencia, ya que los estudiantes de medicina no tenían interés en el estudio de Cálculo y yo tampoco sabía el porqué tenían que estudiarlo. [...] Fue una locura contemplar el Cálculo en el currículo de Medicina, pues pronto querrían quitárselo.

En esta misma dirección, P4 ha resaltado una experiencia negativa que tuvo en un curso de Cálculo dirigido a la carrera de Arquitectura. La falta de interés y de motivación manifestados por los estudiantes que, al que parecer, no percibían la relación de dicho curso con su carrera. Sin embargo, según ha expresado P4 en el relato siguiente, ellos solamente estudiaron porque no tenían otra manera para aprobarse en el curso de Cálculo, que formaba parte del currículo de Arquitectura:

> Me recuerdo que tuve más fracaso en Cálculo con un grupo de estudiantes de Arquitectura. Para mí, fue difícil entender cómo los estudiantes organizaban su proceso de estudio; la mayoría de ellos no tenían ganas de estudiar, no solamente el Cálculo, sino las demás disciplinas de Matemáticas. Les gustaba estudiar Dibujo y Geometría Descriptiva, pero el Cálculo, la Geometría, etc., no. Era muy difícil motivarlos; intenté incentivarlos a estudiar Cálculo, porque no sería posible aprobarlos si no estudiaban, si no cogían el libro y desarrollaban las actividades. A partir, del segundo año ellos ya me conocían, sabían que necesitaban estudiar; yo percibía que ¡algunos estudiaban a la fuerza, pero estudiaban!

La planificación inadecuada del tiempo para realizar una clase práctica de Cálculo en el laboratorio de informática ha sido descrito por P6 como una experiencia negativa que ha vivenciado en su práctica docente. Conforme nos ha relatado, los estudiantes aunque habían concluido las actividades referentes a dicha práctica llegaban a resultados absurdos, expresados a través de sus informes. Esta situación fue descrita por P6 de la siguiente manera:

> Una experiencia negativa consistió en una clase práctica desarrollada en el laboratorio de informática sobre trigonometría. Eran muchas actividades, relacionadas con períodos de funciones trigonométricas, que deberían desarrollarse en poco tiempo. Lo que produjo conclusiones muy equivocadas en los informes realizados por los estudiantes.

P5 ha relatado el traslado de una “experiencia de enseñanza”, que se desarrollaba en una universidad distinta a la suya, para sus clases. Posiblemente por tratarse de contextos distintos, ésta fue considerada un fracaso. Dicha experiencia ha sido relatada por P5 de la manera siguiente:

> El profesor Roberto Baldino coordinaba un proyecto que se llamaba “Asimilación Solidaria” y experimenté aplicar su experiencia aquí en la universidad, pero fue un fracaso; no logré que los alumnos colaboraran unos con los otros. Ellos querían que yo diera las clases utilizando la pizarra, reclamaban y al fin y al cabo no conseguí superar estos obstáculos. A partir de ello, seguí con mis clases expositivas, pero intentando a la vez, un diálogo; empecé a pedirles que me ayudaran a resolver las actividades propuestas en las clases. Aunque lidiaba con la impaciencia de algunos, intentaba que hubiera una interacción. He aprendido que resolver los problemas para el alumnado no soluciona nada, ya que siguen con la deficiencia. De ahí, empecé a no desarrollar la resolución de problemas en clase, sino a recibir a los estudiantes que habían intentado resolver los ejercicios en mi despacho. Les incentivaba a venir a mi despacho, pues allí construíamos el conocimiento a partir de sus conocimientos previos.

Las principales experiencias de fracaso de los profesores-formadores suelen ocurrir al inicio de su docencia en la enseñanza universitaria. En este sentido, P10 ha resaltado una experiencia de fracaso que resulta del hecho del profesor no poner el énfasis del proceso de aprendizaje en los estudiantes, sino en él mismo. Esta visión ha sido apuntada por P10 al afirmar que:

> Creo que mis mayores fracasos los podría ubicar más en la época en que mis clases, en el principio de la carrera, eran más expositivas, que seguía toda una tradición del profesor de Ingeniería. Además, creo que mis fracasos se han centrado cuando he impartido las clases enfocadas en mí y no en mis alumnos que estaban allí para dialogar conmigo.

Es interesante resaltar que los profesores-formadores, por mejor preparados que estén, no están exentos de, en ciertos momentos, pasar por alguna experiencia negativa en su proceso de enseñanza y aprendizaje. Como suelen suceder en otros aspectos de la vida humana, también en lo profesional estamos sujetos a situaciones, a veces ajenas a nuestro control, que nos llevan a resultados distintos de aquellos esperados. Al revivir estas experiencias, los profesores-formadores más que exponer sus posibles debilidades, evocan su conocimiento experiencial y reflexionan sobre las posibles soluciones para superar la problemática que emerge de la práctica profesional docente.

Por otra parte, resaltamos algunos relatos de los profesores-formadores que evidencian su pasión por la enseñanza del Cálculo. Por ejemplo, P4 ha afirmado que su principal experiencia docente ha sido desarrollada en el proceso de enseñanza del Cálculo. Por esta razón ha desarrollado su tesis doctoral relacionada con la enseñanza universitaria del Cálculo. Según su consideración:

> El Cálculo siempre fue una de mis disciplinas favoritas; Cálculo, Álgebra Linear y Geometría Analítica eran los cursos en los cuales yo más actuaba. Cuando fui desarrollar mi tesis, elegí un tema de enseñanza de Cálculo por mi vasta experiencia en esta área. Cuando miré mi currículo, mi principal actuación en la universidad había sido en los cursos de Cálculo (Cálculo I, II, III y IV); había dado, hasta 1993, más de 60 cursos de Cálculo para estudiantes de distintas carreras: Matemáticas, Arquitectura, Ingenierías, Administración y Ciencias Económicas.

P7 reconoce la importancia de adecuar su estrategia de enseñanza a lo largo del tiempo en que se dedica a la docencia. En este sentido ha afirmado que hasta la manera de utilizar su propio libro de texto de Cálculo es distinta de la época que lo produjo:

> En la época que escribimos un libro que fue a la vez, la misma época que comenzamos a impartir clase en la Universidad Federal, nos invitaron a participar de un grupo para escribir un texto de Cálculo y, a partir de ello, fue creciendo y culminó en el libro Cálculo. [...] La manera que yo usaba mi propio libro hace años no es la misma que en la actualidad.

Con esta idea de conciliar la experiencia académica en la enseñanza de Cálculo con la búsqueda de nuevas estrategias que tornen dicha enseñanza más eficaz, concluimos esta sección.

9.2.2.2. Características del buen profesor de matemática

Preguntamos a los profesores-formadores qué es un buen profesor de matemáticas. El abanico de respuestas que obtuvimos nos da condiciones de describir las características básicas que ellos han atribuido al buen profesor de matemáticas.

El placer en dar clases, anteriormente resaltado por P1, también ha sido la primera característica del buen profesor de matemáticas en la opinión de P3, además de la necesidad de innovar constantemente y de desempeñar el rol de educador. Según P3:

> En primer lugar, un profesor que tenga placer en dar clases. En segundo lugar, que esté siempre innovando; la estancación es la peor cosa para un profesor. Hay que estar leyendo, aprendiendo cosas nuevas, motivando a los estudiantes. No puede ser "paternalista", por el contrario, hay que ser un educador. He conocido muchos profesores universitarios que dicen que no van a educar a nadie, pero esto también es su papel, pues es un ejemplo para los estudiantes. El universitario siente la necesidad de apoyarse en alguien cuando empieza la enseñanza superior. Si el profesor no le hace caso, esto será pésimo para él.

P10 corrobora las características mencionadas por P3 y añade otras relacionadas con el estudio de los procesos de aprendizaje de las Matemáticas, la actualización docente por medio de las investigaciones educacionales y la interacción con los demás profesores y con los estudiantes. En este sentido, P10 ha considerado difícil caracterizar un buen profesor de matemáticas, pero opinó que debe tratarse de:

> Un profesor que estudia las Matemáticas, que le guste, además, estudiar sobre procesos de aprendizaje. A él le gusta impartir clases, leer, discutir, buscar investigaciones y aprender sobre eso. Debe establecer grupos de trabajo en clase con los alumnos y con los colegas, saber y aprender a cambiar experiencias. Debe ser este individuo que se sorprenda en descubrir y redescubrir temas sobre Matemáticas. Y que sepa lidiar con su propio error para saberlo cuando le toque a su alumno.

Vislumbrar la belleza de las matemáticas ha sido una característica destacada, además del conocimiento matemático y de la creatividad. En la opinión de P6, un buen profesor de matemáticas:

> En primer lugar, tiene que ser un "enamorado" por las Matemáticas. Las Matemáticas son de "color de rosa", bonitas, desafiadoras, nos mueve por dentro. En segundo lugar, debe saber bastante el contenido matemático. En Tercero lugar, debe ser muy creativo, tener claridad en las ideas cuando las exponga y ser un líder, un amigo de los estudiantes, a la vez desestabilizador, creándoles siempre las cuestiones de desafío. Además, debe ser bastante humilde.

La creatividad también fue citada por P7, que no ha dudado en sintetizar tres características que deben estar presentes en el buen profesor de matemáticas: sensibilidad, creatividad e interactividad. A partir de la metáfora siguiente, P7 explica dichas características:

> Voy a hacerte una metáfora. Siempre bromeo con mis alumnos así: Voy a dibujar la figura del buen profesor: sería un tío común, tendría los ojos expresivos, sería un poco extraterrestre porque metafóricamente debe tener dos antenas. Por qué de la metáfora. Para mí el buen profesor es aquel que tiene tres palabras con él a todo momento: Sensibilidad, Creatividad e Interactividad. Estoy en el aula, he programado y he planeado, pero tengo que ser sensible para percibir que lo que he planeado a veces no está funcionando. Cuando mis antenas de sensibilidad captan eso, debo ser creativo, pues sólo con ella voy a conseguir cambiar sin afectar el patrón y la calidad de mi clase. Cualquier acción de éxito fluye a partir de la interacción entre el profesor y el alumno.

Para finalizar este apartado, coincidimos con la opinión de P4 en el sentido de que lo que enseña el profesor formador no debe servir solamente para el desarrollo profesional de los profesores en formación, sino que debe estar orientado a sus intereses y satisfacciones personales.

No obstante, en sus consideraciones finales, P7 ha retomado este tema, enfatizando la importancia de la dimensión afectiva en la caracterización del buen profesor de matemáticas. En este sentido, ha manifestado el siguiente:

> Me ha inquietado mucho la cuestión del buen profesor, no es simplemente una lista de diez capacidades para ser un buen profesor. Es más subjetivo. Actualmente la evolución del mundo es tan compleja que nuestra adaptación acaba siendo un poco por el rumbo de este mundo. Me descoloca ver que los alumnos no están felices en clase. La alegría pasó a ser un factor menos importante. La gente se preocupa en servir, en producir o ser lo mejor posible y ahí se cierra en ello y, a veces, no sabe ni por qué y para qué. Ello, lleva a una búsqueda desenfrenada que no conduce a nada, solo con el intento de mostrar producción. La parte afectiva se quedó al costado, pues esta parte es la que trae esta felicidad, esa alegría, esas ganas y satisfacción de vivir.

En esta concepción, el estudiante universitario debe ser entendido por los profesores-formadores en su totalidad como ser humano. En esta perspectiva, no es suficiente contemplar las dimensiones epistémica, cognitiva y mediacional en el análisis de su proceso de estudio. Esto requiere también tener en cuenta las dimensiones interaccional, afectiva y ecológica, desarrolladas en el Enfoque Ontosemiótico como herramientas analíticas que utilizamos para la sintetizar este estudio

Teniendo en cuenta las seis dimensiones de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos propuestas en el Enfoque realizamos, a continuación, el análisis de los relatos de los entrevistados, basado en los descriptores que hemos sintetizados en la Tabla 7.1.

9.3. DIMENSIÓN EPISTÉMICA

En esta sección analizamos el conjunto de relatos de los profesores-formadores relativos a la dimensión epistémica de la integral. Para la sistematización del análisis de dichos relatos, hemos utilizado los componentes y los descriptores asociados a las *configuraciones epistémicas* de la integral (Tabla 7.1).

9.3.1. Las situaciones-problema asociadas a las distintas nociones de la integral

Como hemos sistematizado en los capítulos anteriores, P1 y P2 consideran pertinente introducir y desarrollar las nociones de Cálculo en la enseñanza universitaria a partir de situaciones-problema. No obstante, mientras P1 defiende la presentación clásica de los temas de Cálculo (por ejemplo la introducción de la integral por medio de problemas relacionados al Cálculo de áreas), P2 propone que se introduzcan los conceptos del Cálculo (como *derivadas* e *integrales*) a partir de las nociones de *tasa de variación* y de *crecimiento acumulado*.

A continuación, sintetizamos las distintas nociones relacionadas con la integral a partir de los relatos de los profesores-formadores relativos a las situaciones-problema en el proceso de estudio de la integral, y de las investigaciones realizadas en Didáctica del Cálculo.

La noción intuitiva de integral

Algunos de los profesores-formadores han hecho referencias a situaciones-problema en las cuales no se utiliza, explícitamente, la noción de integral, de manera similar a algunos de los problemas resueltos por Arquímedes, para introducir la integral en la enseñanza universitaria de Cálculo. La estrategia de recurrir a la noción intuitiva de la integral ha sido mencionada por P5, al considerar que "el profesor debe empezar con aquellas áreas que el alumno no conseguirá calcular por medio de la geometría euclidiana, sino utilizando el método de la exhausción".

En esta misma dirección, P3 defiende la utilización de situaciones-problema asociadas a la noción de área para introducir la integral. Según su afirmación:

> Hay que empezar por las aplicaciones, por problemas. Por ejemplo, cómo se calcula un área bajo una curva. Si se tiene un rectángulo es fácil. Sin embargo, se debe analizar también el problema resuelto por Arquímedes referente al cálculo del área de un segmento parabólico, que es un problema de integración, y lo solucionó con una aproximación mediante áreas de triángulos. Él no hace como si fuera un límite. Usa la noción de límite. Lo mismo se puede hacer para hallar el área de un terreno cualquiera, es decir, se puede aproximar a partir de las áreas de los distintos triángulos y esto el estudiante lo entiende.

Las opiniones manifestadas por P3 y P5 son ejemplos de la relevancia que ha sido dada por los profesores-formadores a la noción intuitiva para introducir la integral. Asimismo, hemos encontrado estudios referentes a la utilización de la idea intuitiva en el proceso de integración (Wenzelburger, 1993; Prabhu & Czarnocha, 2000; Scucuglia, 2006) para desarrollar la integración. En nuestro estudio, hemos ubicado las situaciones-problema que se resuelve por medio de los métodos intuitivos de integración en la *configuración epistémica intuitiva* de la integral.

La noción geométrica de la integral

Las situaciones-problema consideradas, por la mayoría de los profesores-formadores, como más apropiadas para la introducción de la integral en la enseñanza universitaria de Cálculo están relacionadas con la noción de área de figuras planas, resaltándose aquellas que no pueden ser determinadas por medio de la utilización de los procedimientos de la Geometría Euclidiana. Hemos elegido algunas de las opiniones de los profesores-formadores para ilustrar este aspecto.

P6 ha afirmado que siempre ha introducido la integral en la enseñanza universitaria a partir de problemas de área. Así, la generalización de la integral ocurre en una etapa posterior al desarrollo de la noción de área, utilizándose funciones positivas. En su opinión:

> Creo que el problema básico para introducir la integral es el de área, yo siempre he empezado a partir de ello. [...] Para abordar el área, considero la función positiva. A partir de ello puedo generalizar la integral para una función cualquiera. Sin embargo, la integral se aplica a muchas otras situaciones.

Por otra parte, P4 resalta la importancia de recurrir a la Historia de las Matemáticas para identificar las situaciones-problema más adecuadas para introducir y desarrollar los distintos temas de Cálculo. En este caso, explicita que los problemas de tangentes y áreas han motivado la construcción del Cálculo y por lo tanto considera que la noción de área es la más utilizada por los estudiantes como significado de la integral.

> Basada en mi experiencia, siempre que empiezo la enseñanza del Cálculo, me gusta recordar un poco la Historia. Y los problemas que más han motivado la construcción del Cálculo son los de tangentes y de área. Entonces, cuando quieres enseñar la integral, empiezas con aquellas sumatorias, esto no es ni agradable para el alumnado ni significativo desde el punto de vista de sus conocimientos previos. Aquellos conocimientos, o elementos, u objetos matemáticos que él produjo también tienen

> maneras de asociarlos [...]. Entonces, cuando el alumno habla, o tú traes esta parte de la integración a través del límite de una suma, aunque ya haya calculado las pequeñas áreas bajo una curva, simplemente hablarle de esto de manera abstracta le cuesta aplicar lo que deseas. [...] Es decir, mirar la integral como área, ayuda más a iniciar la parte de la integral y ligar al significado que él posee, que simplemente empezar por la abstracción, por la parte numérica. El significado de la integral como área es una de las principales nociones que ellos usan.

Por lo que hemos observado en los relatos de los profesores-formadores, la noción de área está íntimamente ligada al concepto de integral. Esto puede estar relacionado al propio desarrollo histórico del referido concepto y a su utilización tanto por los profesores como para los estudiantes. En la literatura específica hay diversos trabajos referentes al desarrollo de la integración como el área (Calvo, 1997; Prabhu y Czarnocha, 2000; Rasslan y Tall, 2002; Contreras y Ordóñez, 2006; Rosken y Rolka, 2006; Cabañas y Cantoral, 2007; Camacho, Depool y Garbín, 2008). En este sentido, P3 resalta que seguramente se puede desarrollar la integral a partir del área, pues “la idea de la integración surgió de este tipo de problema”. Las situaciones-problema relacionadas con la determinación de áreas y con otros conceptos geométricos como volúmenes, longitud de curvas, etc., las hemos situado en la *configuración epistémica geométrica*.

Aunque dichas situaciones-problema han sido consideradas por gran parte de los profesores-formadores como problemas prototípicos para introducir la integral, es necesario que los docentes de Cálculo sean conscientes de los posibles obstáculos que pueden producirse en los estudiantes cuando se introduce la integral a partir de la noción de área y, posteriormente, se obtiene resultados negativos cuando se calcula algunas integrales definidas. Este obstáculo ha sido confirmado por los profesores-formadores. En este sentido, P2 ha considerado que:

> [...] Al introducir un contenido a partir de un determinado tipo de problemas, éste puede convertirse en un prototipo de lo que es la integral, quedándose el estudiante con esta idea. He tenido un alumno que se quedaba preguntándome si integral es un área. Yo le decía que se trata de un “área orientada”. La cuestión entonces es cómo pasar de esta situación introductoria a la generalización de la integral en las Matemáticas.

P2 ha señalado uno de los principales obstáculos cognitivos que se produce en el proceso de estudio de la integral: generalmente se empieza por las situaciones-problema relacionadas con el área, quedándose los estudiantes con el significado de la integral como área. Posteriormente, se produce un obstáculo cognitivo cuando se necesita pasar de esta situación introductoria a la generalización de la integral.

En esta misma dirección, P6 ha manifestado que en su experiencia en el proceso de estudio del Cálculo:

> Hay profesores que defienden que es mejor enseñar el área en el primer curso de Cálculo y que sólo se plantee las funciones negativas en ciertos intervalos y las demás aplicaciones de la integral en los posteriores cursos de Cálculo, pero creo que es bueno generalizar la integral desde el inicio del Cálculo.

El relato de P4 también ha corroborado con esta posición, al considerar que según el punto de vista de los estudiantes, el significado de integral como área es lo que ellos más utilizarán en su proceso de estudio de Cálculo. En este sentido, ha declarado que:

> La integral definida como área es el significado que más queda para el alumno, tal vez porque es lo que él aplica más, lo visualiza más[...] Es decir, mirar la integral como área, ayuda más a iniciar la parte de integral y ligar al significado que él posee, que simplemente empezar por la abstracción, por la parte numérica. El significado de la integral como área es una de las principales nociones que ellos usan. Tanto que escuchamos – a mí me gusta más de esta integral que hay la "a" y la "b", que es la integral definida. Según su punto de vista, es ésta la integral que van a usar, lo que no es verdad; después pasan a otros significados. Creo que cabe al profesor llamar la atención sobre ello.

En la opinión de P3, aunque no sea sencillo trabajar con proyectos, con la finalidad de proponer situaciones-problema relacionadas con la *configuración epistémica geométrica* de la integral que emergen de situaciones prácticas de la vida cotidiana, defiende que ésta es una vía que estimula el interés de los estudiantes en el desarrollo del proceso de estudio de la integral. En este sentido, P3 ha relatado algunas situaciones-problema de áreas y volúmenes, a partir de las cuales se puede desarrollar la integral a través de proyectos.

No obstante, P10 no considera que la introducción de la integral deba producirse a partir de la noción de área, sino por medio de los distintos problemas relacionados con la integral definida atribuyéndose un significado específico al "número" que se obtiene como resultado de la integral definida encontrada para cada situación-problema. De esta manera, según P10:

> Siempre es interesante que hagas la introducción de la integral de tal manera que atribuyan significado a aquel número, este significado puede ser estar relacionado con el área, puede representar un momento, puede estar asociado a la longitud de arco. Hay varias aplicaciones en la Física, en la Biología, etc.

En la cita anterior, P10 ha mencionado tanto algunas situaciones-problema de naturaleza geométrica (relacionados con las nociones de área, volumen, longitud, etc.) como otras, en las cuales se puede aplicar la integral en problemas relacionados con la Física, la Biología, etc. Mientras los primeros los hemos ubicado en la *configuración epistémica geométrica,* los demás serán contempladas a continuación, en la *configuración epistémica extramatemática* de la integral.

La noción de integral aplicada a situaciones-problema extramatemáticas

Las situaciones-problema no geométricas, en las cuales se aplica la noción de integral para resolverlas, en nuestro estudio (Capítulo 4) están contempladas en la *configuración epistémica extramatemática* de la integral. Entre las investigaciones relacionadas con la integral de problemas extramatemáticos, destacamos: Wenzelburger (1993); y, Camacho, Depool & Garbín (2008). Así, en la referida configuración se incluye una gama de situaciones-problema tanto del campo específico de las Matemáticas como de otras ramas de las ciencias. Trataremos de sintetizar las principales situaciones-problema de esta configuración mencionadas en los relatos de los profesores-formadores.

Al reflexionar sobre el rol de la noción de área en el desarrollo de la integral, P1 ha considerado que la referida noción contribuye solamente con la visualización geométrica de las distintas situaciones-problema relacionadas con la integral.

En este sentido, considera que lo que se utiliza posteriormente es la integral como el límite de las sumas de Riemann para aplicarla en las situaciones-problema de la Física, Biología, Economía, etc. Según ha relatado P1:

> El problema del área es solamente para tener una visualización geométrica de una integral, pero la integral es el límite de una suma de Riemann y esto traerá la noción de trabajo en física – mecánica –, luego puede dar el teorema de conservación de energía, electricidad, magnetismo y las aplicaciones en otras áreas (economía, biología, etc.).

P7 resalta la importancia de la interdisciplinaridad en el proceso de estudio del Cálculo. De esta manera se deben trabajar las situaciones-problema en las cuales se aplicará la integral situándolas a partir del fenómeno involucrado. No obstante, P7 opina que lo más importante no es que el profesor de Cálculo domine bien las disciplinas extramatemáticas con las cuales está relacionado el problema, sino que pueda entenderlo matemáticamente. En este sentido, considera la resolución de problemas como una vía adecuada para introducir la integral.

> La parte de la integral, se puede empezar directamente con la resolución de problemas, sin dificultad alguna, y a partir del análisis de los datos podría empezar a generar preguntas, y ahí entra aquella idea que ya te he planteado: Trabajar con cuestiones de

> las representaciones semióticas que enfrente a un problema con todos los datos, que es el "terror" para el alumno. Hay que leer el problema y comenzar a traducirlo, cuestionando cuáles son variables, qué tipo de letra me gustaría colocar para representarlas algébricamente, cuáles son las unidades involucradas y después voy a identificar qué tipo fenómeno aparece.

La importancia de abordar diversas situaciones-problema en la introducción de la integral ha sido relatada por P6 de la manera siguiente:

> [...] después voy a identificar qué fenómeno aparece allí, geométrico, físico, si es un problema de Ingeniería o un problema del día a día, etc. [...]. Yo nunca sé si mis estudiantes están comprendiendo realmente todos los aspectos del problema. Por ejemplo, si les propongo un problema de Física, lo importante para mí es que dominen la parte matemática de la situación, o sea, necesito asegurarme que en el estudio relacionado con la velocidad y la aceleración, aunque los estudiantes no dominen bien los aspectos físicos. Sin embargo, debo asegurarme que están entendiendo el fenómeno como una tasa de variación, y lo qué esto significa desde la perspectiva Matemática.

La integral como acumulación

Además de la utilización de proyectos específicos en el proceso de estudio de la integral, la noción de crecimiento acumulado se presenta como una alternativa plausible para superar obstáculos relacionados con la asociación de la noción de integral con la de área por parte de algunos estudiantes universitarios y llegar a su generalización. Dicho planteamiento ha sido llevado a cabo por P2, que ha relatado haber obtenido resultados muy satisfactorios en la enseñanza de la integral en el nivel universitario.

En este sentido, Kouropatov y Dreyfus (2009) postulan que "la idea de integral emergió y se desarrolló a partir de la Física, a través de la búsqueda de una herramienta matemática que posibilitase describir, analizar y explicar fenómenos físicos como movimiento, masa y trabajo" (p. 427). Asimismo, los autores consideran que la comprensión mutua de la relación entre la acumulación y su razón de cambio puede ayudar los estudiantes a interpretar satisfactoriamente la relación entre los conceptos de derivada e integral. De esta manera, considerar la integral como acumulación posibilita entender el área como un caso particular de la integral definida y, consecuentemente, admitir tanto la acumulación de cuantidades positivas como negativas. Hay diversos estudios que corroboran esta posición de desarrollar la integración a partir de la idea de acumulación (Wenzelburger, 1994; Tall, 1996; Cantoral, 2003; Cordero, 2005; Thompson y Silverman, 2007; Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010; Ordóñez, 2011). Consideramos, en el contexto de esta investigación, la *configuración epistémica acumulada* como uno de los significados parciales de la integral.

La integral como primitiva

Podemos encontrar en los relatos de la mayoría de los entrevistados, referencias a la integral como la primitiva (o antiderivada) de una función (P1, P2, P4, P6, P8, P9, P10). Asimismo, P5 y P7 han hecho referencias implícitas a la primitivación. La excepción ha sido P3, que no ha mencionado esta configuración y considera que la resolución específica de las integrales debe realizarse a través de "Sistemas de Computación Algebraica" (CAS). Esta es la noción central del Cálculo, pues permite entender la integración como proceso inverso de la derivación. Consiste en el significado más utilizado para la determinación de primitiva de una función (integral indefinida), así como también en la utilización de dicha primitiva para resolver una diversidad de situaciones-problema matemáticas y extramatemáticas relacionadas con las aplicaciones de la integral definida. Sin embargo, entendemos que esta noción suele desarrollarse en las clases del curso introductorio de Cálculo en la Licenciatura en Matemática en Brasil de manera algorítmica y algebraica (Artigue, 1991; Moreno, 2005) utilizándose tablas y métodos de integración desvinculados de la noción de límite. En este contexto planteamos la *configuración epistémica acumulada* de la integral.

La integral como aproximación

La integral definida de las funciones cuyas primitivas son difíciles de obtener, o cuando éstas no existen han sido abordadas por P1 y P3. En este sentido:

> El profesor de matemáticas tiene que trabajar con las aproximaciones. Las figuras existentes en la naturaleza no son perfectas. Es imprescindible hacer las aproximaciones. Una de las maneras de hacerlo es por medio del "trabajo de campo". Por ejemplo, ¿Cómo el trabajador rural encuentra el área del terreno que él está trabajando para saber cuánto cobrar al propietario?, ¿Cómo él calcula el volumen de la madera? Ellos lo hacen encontrando una media a partir de los trozos de madera. Hay muchas Matemáticas en este proceso. Matemáticas transmitidas de padre a hijo. Es antropológica. Todo esto está ligado a la noción de área y a su vez, puede ser progresivamente elaborada hasta llegar a la noción de integral a partir de aproximaciones. Generalmente hay mucho interés de los estudiantes cuando trabajan con proyectos. Otros ejemplos de problemas pueden ser: ¿Por qué se utiliza la forma cilíndrica para el envase del aceite? Es un problema de volumen. Hay que hacer una

> optimización. Hay que pensarse en la vía del transporte, etc. También hay muchas Matemáticas (y mucha integral) en el trabajo de repuestos de los mercados (P3).

Hemos encontrado la noción de la integral como aproximación en los estudios siguientes: Vaupel (1981); Tall (1996); Depool Rivero (2005). Sin embargo, estamos utilizando la noción de integral aproximada para dos clases de situaciones-problema en las cuales es imposible hallar el valor exacto de una integral definida: la primera se refiere a aquellas situaciones en las que se requiere "conocer" la antiderivada de la función, pero ésta es difícil, o incluso imposible de hallar; la segunda situación está asociada a una función para la cual no se puede encontrar una fórmula para las funciones determinadas a partir de algunos experimentos científicos a través de lectura de instrumentos o recogida de datos (Stewart, 2003). En el libro de Cálculo del referido autor, se contempla la integración aproximada por medio de la *regla del punto medio*, de la *regla del trapecio*, y de la *regla de Simpson.* En este sentido, consideramos la *configuración epistémica aproximada* de la integral en el contexto de nuestra investigación.

La integral como el límite de las sumas de Riemann

Por tratarse de la definición más usual de la integral (Integral de Cauchy-Riemann) para los cursos introductorios de Cálculo en la enseñanza universitaria, esta noción ha sido referida por todos los profesores-formadores entrevistados, con excepción de P5. Las situaciones-problema que se presentan en esta configuración son bastante diversificadas y están relacionadas con situaciones matemáticas o extramatemáticas. Sin embargo:

> Cauchy (1789-1857) presenta una definición de *integral* "como límite de una suma", y una formulación rigurosa del Teorema Fundamental del Cálculo. La definición de *integral* como límite de una suma nace en un contexto de fundamentación teórica, pero, una vez definida, se prescinde de ella para abordar las aplicaciones. La necesidad del tratamiento de Cauchy-Riemann no está en el cálculo de áreas y volúmenes, ni tampoco en dar una definición de área (Turégano, 1998, p. 235).

Se suele introducir la integral por medio de las sumas de Riemann, pero luego se prescinde de esta definición en las aplicaciones de la integral en la resolución de situaciones-problema (Ordóñez, 2011). En la opinión de P1, se utiliza la noción de área como motivación para introducir la integral en los cursos introductorios de Cálculo, pero el abordaje de la integral a partir de su definición como el límite de las sumas de Riemann debe ser contemplada en el posterior curso de Análisis Matemático.

La construcción del concepto de la integral definida por medio de la suma de Riemann ha sido estudiada por Czarnocha, Loch, Prabhu y Vadakovic (2002). Los autores han apuntado la ausencia de comprensión de la serie y de sus límites, y de estos con el concepto imagen de la suma de Riemann entre los principales obstáculos para la construcción de dicho concepto. Además, hemos encontrado diversos estudios relacionados con la integral definida en el sentido de la integral de Cauchy-Riemann (Orton, 1983; Czarnocha, Dubinsky, Loch, Prabhu y Vidakovic, 2001; Acosta y Wills, 2002; Cantoral, 2003; Scucuglia, 2006; Contreras y Ordóñez, 2006; Mometi, 2007; Boigues, Llinares y Estruch, 2010). Esta noción de la integral como el límite de una suma de Riemann consiste, en nuestra investigación, en la *configuración epistémica sumatoria* de la integral.

La noción de integral aplicada a situaciones-problema que requieren la utilización de tecnologías

La utilización de los recursos tecnológicos, especialmente de los *softwares* específicos en las situaciones-problema relacionadas con la integración ha sido defendida por los profesores-formadores P2, P3, P4, P7, P8 y P9. Según la afirmación de P3:

> El estudiante no necesita memorizar las técnicas de integración; esto sería un absurdo. Él, deberá saber cuál será el resultado aproximado, si su resultado es coherente. No se debe perder mucho tiempo con las técnicas; es suficiente abordarlas más superficialmente; los cálculos de la integral deben ser realizados por el ordenador.

De manera similar, turégano resalta algunas de las potencialidades de utilización del ordenador en el proceso de estudio de la integral.

> Al utilizar simultáneamente diferentes representaciones, se favorece el establecimiento de conexiones entre ellas, siendo estas conexiones las que marcan las diferentes etapas del aprendizaje en los estudiantes. Aquí es donde el ordenador juega un papel importante debido a su potencia visual, que ayuda a la formación y transformación de intuiciones y a la creación de imágenes del concepto, y debido también a la facilidad para realizar cálculos, eximiendo al estudiante de esta tediosa labor. De esta forma el estudiante puede centrarse en la exploración y discusión de los conceptos. Los errores cometidos por los estudiantes sirven para acrecentar su aprendizaje y completar así sus imágenes del concepto (Turégano, 1998, p. 245).

Una reflexión interesante sobre el rol del ordenador en el desarrollo del proceso de estudio de la integral ha sido realizada por P2 (en el Capítulo 8). Encontramos, además, en los relatos de las experiencias de éxito de los profesores-formadores la convergencia de prácticas realizadas con la utilización de las tecnologías. La literatura específica también revela una gran cantidad de estudios relacionados con la utilización de las tecnologías en el proceso de estudio de la integral (Tall, 1996; Depool Rivero, 2005; Scucugli, 2006; Camacho, Depool y Garbín, 2008; Lois y Milevicich, 2009; Tall, 2009), centradas especialmente en la utilización de los *sistemas algebraicos computacionales (CAS)*. Cabe resaltar las potencialidades de los *softwares* de Geometría Dinámica en el desarrollo del proceso de estudio de la integral: amplia posibilidad de visualización de las distintas configuraciones epistémicas de la integral y de la transición entre las mismas, ahorro del tiempo para implementación de los significados pretendidos, facilidad con los cálculos que no requieren manipulaciones algebraicas, posibilidad de interacciones en las clases, oportunidad de verificar conjeturas, visualización de los aspectos dinámicos relacionados a la noción matemática estudiada. “Cuando una figura dinámica es arrastrada, los estudiantes pueden verla cambiando y ver lo que sucede, por lo que las propiedades se tornarán evidente y luego pueden ser vistas inmediatamente por los estudiantes” (Ruthven, 2007, p. 56).

Lo anterior nos ha llevado a plantear la *configuración epistémica tecnológica* de la integral como uno de los significados actualmente atribuidos para esta noción matemática en el contexto de la enseñanza universitaria del Cálculo. Aunque las situaciones-problema que se presentan en esta configuración contemplan tanto problemas intramatemáticos como extramatemáticos, ya es muy frecuente la proposición de cuestiones en los libros de Cálculo con la indicación de que se debe utilizar los recursos tecnológicos para solucionarlas o el abordaje de los contenidos por medio de proyectos que requieren recursos tecnológicos (Stewart, 2003; Figueiredo, Mello y Santos, 2011). En este sentido, las situaciones-problemas suelen cambiar como consecuencia de la utilización de las herramientas disponibles en los recursos tecnológicos utilizados.

> […] La introducción de las tecnologías de la información y comunicación – TIC en la enseñanza de las Matemáticas da un nuevo sentido a la noción de actividad

> matemática para los estudiantes y, consecuentemente, a la noción de problema. Se espera que la gran potencialidad de las herramientas computacionales (calculadoras, planillas electrónicas, sistemas de geometría dinámica o sistemas algebraicos computacionales), las cuales están disponibles para utilización en las clases, puede posibilitar abordar con los estudiantes problemas más complejos, menos usuales, más interesantes y ricos desde la perspectiva del aprendizaje […] (Allevato y Onuchic, 2009, p. 206).

El abordaje de situaciones-problema más complejas y que atiendan a las características anteriormente planteadas requiere de los profesores universitarios una preparación específica para inserir, de manera eficaz, estos recursos tecnológicos en la planificación y en el desarrollo de las clases de Cálculo.

Consideramos que los ocho significados de la integral anteriormente descritos corresponden al significado global de la integral. Dicho significado, sistematizado en el Capítulo 4 de esta investigación a partir de las ocho configuraciones epistémicas de la integral, ha sido puesto de manifiesto por los profesores-formadores al caracterizaren la idoneidad didáctica del proceso de estudio de la integral en el contexto de la Licenciatura en Matemática en Brasil. Resaltamos, además, que en los estudio realizados sobre la integral en Didáctica del Cálculo que hemos consultado, encontramos referencia a las referidas configuraciones. Esto nos permite considerarlas, actualmente, como el significado institucional de la integral puesto en juego en el contexto socio-profesional de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. Asimismo, coincidimos con la posición de Font y Godino (2006) de que:

> Las configuraciones epistémicas también pueden ser herramientas útiles para profundizar en lo que se tiene que entender por "situación rica" o por globalización. Dada una situación-problema es posible que se pueda resolver por diferentes métodos. […] Este hecho convierte a la situación problema en una situación potencialmente rica ya que puede permitir la integración y la conexión entre contenidos matemáticos correspondientes a dos bloques diferentes del currículum.
>
> Una diferencia importante entre las unidades didácticas que presenten configuraciones epistémicas empíricas […] y las propuestas de globalización es que, en el primer caso, el problema, aunque potencialmente puede ser muy rico, se utiliza para generar la configuración epistémica que se corresponde con los contenidos de la unidad didáctica. En cambio, en una perspectiva globalizadora el objetivo será generar varias configuraciones epistémicas diferentes del mismo problema, de cara a su integración y conexión (pp. 94-95).

Por lo tanto, las configuraciones epistémicas sistematizadas para la integral en nuestra investigación pueden ser entendidas tanto en una perspectiva empírica como problematizadora. La competencia para establecer las conexiones entre las distintas configuraciones epistémicas de la integral y utilizarlas en diferentes prácticas contribuye con la comprensión del concepto de integral por los estudiantes universitarios.

Sintetizamos, a continuación, los principales aspectos relatados por los profesores-formadores sobre los procedimientos, proposiciones, definiciones, lenguajes, y argumentos relacionados al proceso de estudio de la integral.

9.3.2. Los procedimientos en el proceso de estudio de la integral

Entre los procedimientos más utilizados en la enseñanza de la integral está la primitivación, en los casos en que se conoce la primitiva de la función o en los que se trata de una función cuya primitiva puede ser obtenida de manera relativamente sencilla (P1, P2, P3, P4, P6, P7).
Los métodos numéricos (Sumas de Riemann, Regla de Simpsom, etc.) e intuitivos también han sido mencionados por P1 y P3 como relevante para la determinación de la integral definida de las funciones cuyas primitivas son difíciles de obtener, o éstas no existen. En procedimiento general consiste en la utilización de aproximaciones.
La utilización de la estrategia general de resolución de problemas intramatemáticos y extramatemáticos para las situaciones relacionadas con la integral ha sido resaltada por (P3 y P7), mientras P2 ha declarado su opción por la idea de crecimiento acumulado para dicha finalidad. Además, P3 ha resaltado que la necesidad de adecuación de ciertos problemas a los distintos niveles de enseñanza se produce por medio del cambio del procedimiento que se utiliza en su resolución. Según su afirmación: “se puede proponer un mismo problema para los distintos niveles de enseñanza, cambiando los procedimientos para su solución”. En este sentido, hay diversos procedimientos que pueden ser utilizados para la resolución de las situaciones-problemas que requieren la utilización de la integración, tales como aproximaciones, primitivación y regla de Barrow, el límite de las sumas de Riemann, y otros que serán sintetizados a continuación.

El trabajo con proyectos fue destacado por P3, P8 y P9, los cuales consideran fundamental que los profesores pongan el énfasis en la modelización de los problemas generales que pueden ser resueltos por medio de la integración. Sin embargo, consideramos que dicha modelización se convierte en una de las principales dificultades que presentan los estudiantes cuando se les requiere la aplicación de la integral en la resolución de problemas. Es decir, pensar en una situación-problema y proponer un modelo para solucionarla a partir de una integral puede ser más complejo para los estudiantes que aplicar los procedimientos (o técnicas) necesarias para calcular la integral específica.

Otros procedimientos han sido mencionados por los profesores-formadores, entre los cuales se resaltan aquellos relacionados con: (a) la utilización de las técnicas de integración (P4, P5 y P6), (b) la utilización de la tabla de integral (P8 y P9), (c) la visualización a partir del conocimiento de propiedades de las funciones que se desea integrar (P2 y P10), y (d) la utilización de recursos computacionales (P2, P4, P7, P8 y P9). No obstante, P3 considera que el estudiante no necesita "no se debe perder mucho tiempo con las técnicas; es suficiente abordarlas más superficialmente; los cálculos de la integral deben ser realizados por el ordenador".

9.3.3. Las proposiciones en el proceso de estudio de la integral

La proposición que ha sido citada por prácticamente todos los profesores-formadores ha sido *el Teorema Fundamental del Cálculo* (P1, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9 y P10). En lo que se refiere al *Teorema del Valor Medio,* éste ha sido resaltado solamente por P2 y P5. Entre las propiedades mencionadas por los entrevistados se encuentran: integral de una suma (P1, P2 y P4); producto de una constante por una integral (P2); desigualdades (P1); módulo de una integral (P1); propiedad distributiva (P3); propiedad relacionada con la simetría (P4 y P10) y la propiedad relacionada con la integral definida de cierta función en el intervalo cerrado [a, a] que es igual a cero (P4).

9.3.4. Las definiciones relacionados con la integral

Al abordar los conceptos o definiciones que se relacionan con la noción de integral, hemos obtenido contestaciones muy diversas por parte de los profesores-formadores. Inicialmente, los conocimientos algebraicos básicos (productos notables, fracciones algebraicas, etc.) han sido mencionados por

P1, P4 y P5 y otras nociones matemáticas elementales, tales como la geometría analítica y la trigonometría, han sido consideradas necesarias para el proceso de estudio de la integral por P1 y P5.

En la opinión de P2, las nociones de derivada y de tasa de acumulación son las principales en el proceso de estudio del Cálculo. Según ha expresado:

> Curvas cuyas tangentes son dadas por determinadas expresiones que podemos obtenerlas por medio de las integrales indefinidas; en el caso de la integral definida tenemos áreas, volúmenes, etc., o sea, se refiere a las tasas de acumulación de manera general.

El concepto de derivada también fue considerado importante en el proceso de estudio de la integral por los profesores-formadores P3, P4, P5, P6 y P10; mientras el concepto de límite fue resaltado por P6, P8, P9 y P10; y, el de función por P3, P8, P9 y P10. Además, P3 ha hecho referencia a las nociones geométricas relacionadas con la medida. Y P4 consideró importante, entre otros conceptos, la noción de infinito.

Asimismo, una de las secuencias bastante utilizada en el proceso de enseñanza de la integral, la cual involucra los conceptos de derivadas, límites y de infinitesimal ha sido explicitada por P4 de la siguiente manera:

> El primero y más inmediato es el concepto de la derivada, pues; si el estudiante va a aprender la integral, lo que generalmente se empieza con la antiderivada, seguramente tendrá dificultad si no sabe derivada, si no entiende el proceso de derivación difícilmente va a entender el de integración. Otro sería la propia "cuestión de infinitesimal", que ya empieza un poco en el estudio de la derivada y que se convierte en algo más complejo cuando se plantea el paso al límite en el proceso de estudio de la integral, el alumno se "traga" todo pero no entiende bien esta cuestión. Él cree que es una cierta magia.

Sin embargo, P7 considera innecesario que los estudiantes sean dotados de otros conceptos matemáticos previos para que pueda desarrollar satisfactoriamente el estudio de la integral. En este sentido, ha opinado lo siguiente:

> Tu pregunta me recuerda prerrequisitos, a mí no me gusta mucho. Podría decirte que el alumno necesita del concepto de función, de límite, etc. Yo creo que puedo introducir el concepto de integral al alumno que nunca ha escuchado hablar de función.

9.3.5. Los lenguajes utilizados en la enseñanza de la integral

Al analizar los distintos lenguajes que se utilizan en la enseñanza universitaria del Cálculo Integral, encontramos que la mayoría de los profesores-formadores han hecho referencia al lenguaje algebraico (P1, P2, P4, P5, P6 y P7), geométrico (P1, P2, P3, P4, P5, P6 y P10) y gráfico (P1, P2, P4, P6, P7, P8 y P9). También han sido bastante resaltados los lenguajes tecnológico (P2, P3, P6, P8 y P9) y simbólico (P4, P6, P8, P9 y P10). Entretanto, las menciones a los lenguajes numérico (P3 y P10), natural (P6), analítico (P2) y tabular (P7) han sido menos frecuentes en los relatos de los entrevistados.

Los profesores-formadores han destacado la importancia de que los estudiantes realicen la transición entre los diferentes lenguajes durante el proceso de estudio de la integral. No obstante, ellos reconocen que dicha transición se convierte en uno de los obstáculos cognitivos que se presentan en el referido proceso.

Las distintas formas de lenguaje son utilizadas de manera explícita o implícita a lo largo del proceso de estudio de la integral, tanto por los docentes como por los estudiantes. Sin embargo, los profesores-formadores han resaltado la tendencia observada en sus estudiantes, relacionada a la subjetividad con la cual ellos eligen los lenguajes que usan con más frecuencia en su proceso de estudio de la integral. De esta manera, los entrevistados consideran apropiado que los estudiantes utilicen los lenguajes con los cuales poseen mejor desenvoltura.

9.3.6. Las argumentación en el proceso de estudio del Cálculo Integral

El papel y los tipos de argumentación en el proceso de estudio de la integral, no ha sido consensual en la opinión de los profesores-formadores, los cuales han aclarado primeramente qué entienden por demostración para posteriormente manifestar su posición relativa a la demostración de las proposiciones relativas a la integral en el curso introductorio de Cálculo (Cálculo I) en la enseñanza universitaria (Licenciatura en Matemáticas). En este sentido, P10 ha resaltado la importancia de determinar:

> Qué demostrar y para qué y también qué no demostrar y qué tipo de demostración. Para un alumno de la Licenciatura en Matemáticas, las ideas de una demostración en un primer momento, serían de aquella demostración menos rigorosa, más intuitiva, más informal. Esto es lo que a mí me parece importante [...]. Entonces, defiendo que se realice demostraciones con el ordenador.

La mayoría de los profesores-formadores han coincidido en que la demostración de los teoremas y propiedades relativas a la integral, en el curso introductorio de Cálculo para futuros profesores de matemáticas de la secundaria, debe realizarse de manera intuitiva, basada en la visualización (P1, P2, P5, P6, P8 y P10).

No obstante, también encontramos opiniones contrarias por parte de P3, P4 y P7. Para ellos, las referidas demostraciones deben ser axiomáticas, al menos en lo que se refiere al Teorema Fundamental del Cálculo. Por otra parte, P9 considera que debe haber una mezcla entre las dos posiciones. Así, las demostraciones deben ser axiomáticas en algunas de las etapas del proceso de estudio de la integral e intuitivas en otros.

Al contestar si las demostraciones de las proposiciones sobre la integral deben quedarse a cargo de los estudiantes de Cálculo I, P3 ha afirmado que:

> Si fuesen capaces sería lo ideal (risa), pero ellos, generalmente no lo saben hacer. Sin embargo, pienso que sería bueno que los estudiantes demostrasen en la práctica, algunas propiedades más sencillas. Se debe tomar algunos casos particulares, utilizando una función elemental y comprobar algunos resultados (propiedades). Posteriormente, deben intentar generalizar tales resultados y pensar en las maneras de demostrarlas.

Por lo tanto, aunque algunos de los profesores-formadores hayan considerado que las demostraciones de las proposiciones relacionadas con la integral deben realizarse de manera axiomática, ellos deben tener en cuenta que posiblemente sus estudiantes no hayan desarrollado las competencias necesarias para esto. Quizás sea más apropiado formalizar las demostraciones en el curso de Análisis Matemático, como han sugerido algunos de los profesores-formadores.

Las configuraciones epistémicas de la integral a partir de los relatos de los profesores-formadores

A partir del análisis y sistematización de los relatos de los profesores-formadores sobre el proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria, hemos sintetizado, en las secciones 7.4.1 y 8.3.7 las ocho configuraciones-epistémicas de la integral caracterizadas en la sección 4.6. En el análisis de las entrevistas realizadas con los diez profesores-formadores, constatamos que han sido puestas de manifiesto, de manera complementaria, las ocho configuraciones-epistémicas: *intuitiva, geométrica, primitiva, sumatoria, aproximada, acumulada, extramatemática y tecnológica.*

9.3.7. Articulaciones y conexiones

En este apartado sintetizamos las articulaciones y conexiones entre las configuraciones epistémicas de la integral. Para ello nos basamos en los relatos de los profesores-investigadores sobre la articulación de los objetos matemáticos y didácticos, y las conexiones intra y extradisciplinares de la integral en el proceso de estudio del Cálculo en la enseñanza universitaria.

9.3.7.1. Articulaciones de los objetos matemáticos y didácticos

Según el Enfoque Ontosemiótico las configuraciones epistémicas de la integral que hemos sistematizado pueden ser interpretadas como el significado personal global de la integral manifestado por los profesores-formadores en el contexto del curso introductorio de Cálculo orientado a la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. Las relaciones establecidas entre los elementos de análisis primario (situaciones-problema, lenguaje, procedimientos, definiciones, proposiciones, y argumentos) en las referidas configuraciones epistémicas han sido descritas en los capítulos 7 y 8. Por ello, en esta sección nos limitamos a resaltar que en las narrativas de los profesores-formadores sobre dichas configuraciones, encontramos informaciones que permiten considerar las ocho configuraciones epistémicas en el proceso de estudio de la integral. A excepción de las configuraciones epistémicas geométrica y extramatemática, que se relacionan, respectivamente, con las situaciones-problema de naturaleza geométrica y con aquellas procedentes de otras áreas del conocimiento distintas de las Matemáticas, las demás configuraciones se centran en los procedimientos utilizados para solucionar las distintas situaciones-problema que requieren la utilización de la integral. Asimismo, las configuraciones deben articularse coherentemente mientras se desarrolla el proceso de estudio de la integral en la Licenciatura en Matemática en Brasil. Para dar respuestas a las diversas situaciones-problema o actividades propuestas y desarrolladas durante la implementación del curso introductorio de Cálculo Diferencial e Integral, los estudiantes deben poner de manifiesto ciertas competencias relacionadas con la coherente articulación entre las configuraciones epistémicas de la integral, lo que es entendido en el EOS como la comprensión y conocimiento de éstos sobre la integral en el contexto especificado.

Sin embargo, como se trata de unos significados relativos al contexto de uso en la actualidad. Cambiando el contexto, otros significados pueden ser atribuidos a la noción de integral de manera a ampliar o sintetizar las configuraciones epistémicas que hemos sistematizado. Asimismo, entendemos que algunas de las situaciones-problema prototípicas de cierta configuración epistémica pueden ser resueltas de distintas maneras, por lo tanto, posibilitan poner en juego los elementos primarios de otras configuraciones. Esto nos lleva a considerar que cuando se soluciona una situación-problema relacionada con la noción de integral se pone en juego los seis elementos primarios del EOS (situación-problema, procedimientos, proposiciones, conceptos/definiciones, argumentos, y lenguaje), cuya articulación posibilita transitar tanto entre las distintas representaciones (gráfica, numérica, algebraica, etc.), como entre las distintas configuraciones, lo que puede contribuir con el desarrollo de las competencias movilizadas por los estudiantes para esta finalidad y, consecuentemente con la construcción del concepto.

9.3.7.2. Conexiones intra e interdisciplinares de la integral

En este apartado trataremos de mostrar, sintéticamente, algunas conexiones intra y interdisciplinares de la integral resaltados por los profesores-formadores referentes al proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas.

En las conexiones intradisciplinares de la integral, P3 destaca que “el concepto de función es fundamental no solamente para la integración, sino en todos los temas de Cálculo. El concepto de función debe estar muy bien establecido (consolidado)”. Además, resaltó que algunas nociones introducidas en Cálculo, como las de continuo y de aproximación han causado una ruptura en la manera de concebir las Matemáticas. En este sentido, P3 relató que:

> En varios momentos, las Matemáticas han sufrido una fuerte ruptura, generalmente en la “forma” de escribir las cosas (los griegos: en la forma geométrica; los árabes con la algebrización, etc.). Sin embargo, la gran revolución en las Matemáticas ocurrió con el Cálculo, pues éste revolucionó toda la manera de “ver” las Matemáticas. Se introdujo nociones de continuo, de aproximación, etc.

P7 ha reflexionado sobre las nociones de límite y derivadas que se trabajaba en Brasil en la enseñanza secundaria, pero que hoy día ya no más. Así, ha opinado sobre las nociones generales del Cálculo en la formación de profesores de matemáticas de la secundaria, afirmando que:

> Las asignaturas de Cálculo son una fuente de formación para el alumno, para que él desarrolle una mirada crítica hacia las Matemáticas pura y aplicada. Particularmente, me identifico más con las Matemáticas aplicadas (P7).

En lo que se refiere a las conexiones interdisciplinares, los profesores-formadores han resaltado la importancia de articular las nociones del Cálculo con otras asignaturas, tales como Física, Geometría Analítica, Probabilidad, y Análisis Matemático. Además de las conexiones que los profesores-formadores han declarado que existen entre el Cálculo y las demás disciplinas matemáticas o extramatemáticas, P3 ha mencionado que posiblemente habrá necesidad de avanzar en el desarrollo de las actuales nociones fundamentales del Cálculo, con el propósito de responder a nuevas cuestiones que vienen surgiendo en las ciencias y que requieren la noción de estimación, por ejemplo. En este sentido, ha afirmado que:

> Hoy día, estamos pasando por otro proceso revolucionario, pues ya no trabajamos tanto con el continuo, sino con estimaciones. La estimación es más importante porque utiliza la noción de probabilidad [...]. Me parece que esto va a tener una gran repercusión en el futuro. Quizás sería relacionada al desarrollarlo de un Cálculo más ligado a la Física (Mecánica Cuántica), por ejemplo. El Cálculo de Newton permite contestar muchas cosas hoy día, pero las cosas están cambiando mucho. Si el estudiante quiere ver donde está un electrón, esto no es posible. Lo que él necesita saber es que probablemente está en determinada región y, este “probablemente” no se trabaja en Cálculo. Creo, que en el futuro habrá que contestar a estas cuestiones también (P3).

9.3.8. Adaptaciones curriculares

Las adaptaciones curriculares en la concepción de los profesores-formadores serán sintetizadas a partir de los siguientes descriptores: Abordaje del currículo de la Licenciatura en Matemáticas, abordaje del currículo de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas, el currículo de Cálculo y la Matemática de la enseñanza secundaria, y los significados de la integral y las directrices curriculares de matemáticas.

9.3.8.1. Abordaje del currículo de la Licenciatura en Matemática

Al abordar el currículo de la Licenciatura en Matemáticas, P5 describió un currículo general diseñado e implementado en su universidad para dicha licenciatura, lo cual puede ser sintetizado de la siguiente manera:

> A través de varios seminarios y convenios que hicimos, poco a poco la universidad fue concienciándose de la necesidad de aprobación de la Licenciatura en Matemáticas, lo que ocurrió en 1995, aunque ésta fue implementada en el año 1998. [...] Se ha incluido en el currículo asignaturas como Psicología, Sociología de la educación y Filosofía, las cuales son desarrolladas, desde el inicio de la carrera, simultáneamente con las Prácticas de Enseñanza y con las asignaturas Matemáticas en la escuela I, II y III. Son prácticas que el alumno va a observar la escuela en su totalidad, desde la administración escolar y la praxis del aula. [...]En clase, ellos van a discutir los problemas, exponerlos, ya que saben que nuestra intención es buscar soluciones o reflexionar sobre los diversos temas [...]. Otra asignatura es la de Matemáticas en la enseñanza básica, en la cual el alumno imparte clases para sus compañeros. También hay asignaturas de Matemáticas en la enseñanza secundaria, de Geometría y de Prácticas de laboratorio de enseñanza en las cuales se trabaja con juegos matemáticos, incluso con los producidos por el alumnado. Además, los estudiantes presentan talleres a escuelas, participan de seminarios y presentan sus trabajos en los encuentros de Educación Matemática. Hay disciplinas relacionadas con la investigación, tales como Investigación bibliográfica en Educación Matemática, cuyo Redacción de investigación matemática y la Metodología de la investigación de la Educación Matemática, que fomenta el diseño del objeto de estudio, su problema, etc. Todas las asignaturas están dispuestas para que el estudiante aprenda a hacer una clase dinámica, que haya participación de sus alumnos y promueva el aprendizaje. Todavía hay actividades enriquecedoras como: participación en eventos, seminarios (no sólo presentando trabajos, sino también organizándolos). Todo ello se convierte en créditos. Hay trabajos de incentivo científico, los de extensión, etc. Todo esto se realiza paralelamente a las asignaturas específicas de la enseñanza superior, ya que es necesario que los estudiantes tengan una sólida formación matemática.

En el relato anterior podemos observar algunas características del referido currículo, entre las cuales destacamos:

- El diseño fue realizado de manera participativa, involucrando a los docentes;
- Las disciplinas relacionadas con la formación general del profesor, así como las de carácter práctico son desarrolladas desde el inicio de la carrera, simultáneamente con las específicas del área de Matemáticas;
- Hay asignaturas cuyas clases se quedan bajo la responsabilidad de los estudiantes, futuros profesores de matemáticas;
- Las prácticas de laboratorio son contempladas, donde se desarrollan algunas metodologías para la enseñanza de las matemáticas, entre las cuales se destacan los juegos producidos por los estudiantes;
- Se enfatiza la investigación en el área de la Educación Matemática;

- Se estimula la participación de los estudiantes en eventos científicos a través de la presentación de trabajos, o incluso de su organización.

Consideramos que características como las anteriores son fundamentales para la elaboración y desarrollo de un currículo para la Licenciatura en Matemáticas que sea diferenciado, participativo, y centrado en la preparación activa, teórica, práctica e investigadora de los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria.

9.3.8.2. Abordaje del currículo de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas

P3 ha resaltado la importancia del Cálculo para la formación del futuro profesor de Matemáticas, pues considera que éste propicia al estudiante una visión general de las Matemáticas y la concepción del Cálculo como una rama de las Matemáticas construida por el hombre y por tanto en desarrollo. Según P3 ha explicitado:

> Yo estoy cada vez más convencido que el Cálculo es importante al futuro profesor, aunque él vaya a trabajar en la enseñanza secundaria. Primero, para que él tenga una visión general de las Matemáticas; además, pienso que él tiene que percibir y saber que las Matemáticas se constituyen en una ciencia construida por el hombre que está en pleno crecimiento y construcción. En varios momentos, las Matemáticas han sufrido una fuerte ruptura, generalmente en la "forma" de escribir las cosas (los griegos: en la forma geométrica; los árabes con la algebrización, etc.). Sin embargo, la gran revolución en las Matemáticas ocurrió con el Cálculo.

La relevancia del Cálculo también ha sido resaltada por P6. En su opinión:

> El Cálculo debe ser la espina dorsal de la carrera de matemáticas; siempre he dicho a mis alumnos: si os gusta el Cálculo os irá bien con las demás asignaturas de la Licenciatura en Matemáticas y si obtuvieren éxito en Cálculo podrán cursar su postgrado en Matemáticas.

Al destacar las características del Cálculo, Mometi (2007) considera que las investigaciones desarrolladas sobre el Cálculo Diferencial e Integral ponen de manifiesto que se trata de una asignatura:

> a) rica en nociones que pueden estar en conformidad o en contradicción con las ideas intuitivas de los estudiantes, lo que se debe tener en cuenta en su proceso de enseñanza para evitar obstáculos; b) que presenta una diversidad de registros de representaciones para sus conceptos; c) que tiene un carácter unificador, que se manifiesta desde que su abordaje en la enseñanza tenga en cuenta la diversas dimensiones matemáticas de un concepto (en el ámbito del Álgebra, de la Geometría Euclidiana, de la Geometría Analítica); d) que aborda nociones estudiadas en la educación preuniversitaria, tales como número real, infinito, continuidad, límite, función; e) que tiene aplicaciones en otras áreas del conocimiento (p. 27).

El papel de interlocución del Cálculo con otras áreas del conocimiento ha sido resaltado por la mayoría de los profesores-formadores. Corroborando esta afirmación, P5 ha declarado lo siguiente: “Pienso que las disciplinas de la Licenciatura en Matemáticas están entrelazadas con el Cálculo, por eso considero que es importante hacer siempre el puente de una asignatura a otra”. En este sentido, Reis (2001) al abordar el papel desempeñado tanto por el Cálculo como por el Análisis Matemático en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas, afirma que:

> El Cálculo desempeña, simultáneamente, el rol de puente y de síntesis entre un pensamiento más elemental, relacionado con contenidos como números y funciones, y un pensamiento matemático más avanzado, relacionado con contenidos de derivadas e integrales (Tall, 1991). Sin embargo, esto no quiere decir que en la enseñanza del Cálculo se bebe simplemente cambiar de un pensamiento más intuitivo para otro más riguroso. El rigor, en otro nivel, también pone de manifiesto en la construcción de conceptos elementales, así como la intuición, permea el desarrollo de ideas avanzadas.
>
> El Análisis Matemático, a su vez, desempeña un papel de desencadenadora de la autonomía intelectual del futuro profesor de matemáticas de la enseñanza secundaria, por ampliar, flexibilizar y diversificar su conocimiento específico de los contenidos de Cálculo (Fiorentini, Souza Júnior y Melo, 1998). Asimismo, consideramos que es en este proceso es fundamental tener en cuenta las concepciones e imágenes conceptuales de los estudiantes relacionadas con los contenidos […] (p. 94), como la integral.

A partir del análisis realizado hemos constatado que hay una cierta tensión entre el abordaje del Cálculo y del Análisis Matemático en el currículo de la Licenciatura en Matemática en Brasil. Sin embargo, los profesores-formadores han buscado delimitar las fronteras entre estas dos asignaturas y situar el curso introductorio de Cálculo en este contexto.

9.3.8.3. El currículo de Cálculo y la Matemática de la enseñanza secundaria

Las opiniones de los profesores-formadores relativas a la introducción de las nociones del Cálculo en la enseñanza secundaria han sido convergentes en el sentido de que se debe abordar solamente sus ideas básicas, pero no se debe formalizar las nociones del Cálculo. No obstante, P1 ha considerado importante contemplar procedimientos de resolución de derivadas elementales, y luego utilizarlas en la resolución de situaciones-problema relacionados con conceptos físicos. P5 ha considerado que las nociones introductorias del Cálculo pueden ser útiles cuando se trata de la enseñanza secundaria dirigida a la formación profesional de los estudiantes. Esta posición, puesta de manifiesto por los profesores-formadores, diverge de la estructura curricular de distintos países, en los cuales se introducen los conceptos de Cálculo en los últimos años de la enseñanza secundaria.

Sin embargo, los profesores-formadores abordaron las dificultades de prerrequisitos de los estudiantes de Cálculo en el primer curso universitario de diversas carreras y la necesidad de una adecuada formación de los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil.

9.4. DIMENSIÓN COGNITIVA

Sintetizamos la visión que tienen los profesores - formadores entrevistados sobre la dimensión cognitiva de la integral teniendo en cuenta los siguientes descriptores: los conocimientos previos de los estudiantes, el aprendizaje de los estudiantes, y las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales de los estudiantes.

9.4.1. Los conocimientos previos de los estudiantes

En la opinión del 50% de los profesores-formadores (P1, P2, P3, P5 y P6), los estudiantes al inicio de su carrera universitaria carecen de los conocimientos previos necesarios al desarrollo del curso introductorio del Cálculo. Las principales carencias identificadas se relacionan con los conocimientos algebraicos**,** geométricos, y particularmente, con la dificultad de comprensión de las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Según la declaración de P5:

> Sobre esta cuestión de que a los alumnos les faltan prerrequisitos cuando acuden a la universidad, creo que no se puede discutir más sobre eso, es una realidad. Algunas universidades incluso han inventado un curso de "Calculo 0", lo que no me parece que haya resuelto el problema.

Las dificultades de los estudiantes en lo que se refiere a los prerrequisitos considerados fundamentales para el desarrollo de un eficaz proceso de estudio de la integral ha sido resaltado en distintas investigaciones (Cury, 2009; Igliori, 2009). En este sentido:

> La diversidad de experiencias previas en Matemáticas tornase evidente por medio de las dificultades presentadas por algunos estudiantes desde el primer período de la enseñanza universitaria, principalmente en los Cálculos algebraicos y en las

> operaciones con fracciones, números racionales y radicales. Las deficiencias en Geometría y en la visualización espacial también son constatadas. Sin embargo, lo que más impresiona son las dificultades de razonamiento y la falta de justificativas para las respuestas. Parece que los estudiantes llegan en la universidad con pereza para razonar y que han sido acostumbrados solamente a aplicar algoritmos y formulas aprendidas por la memorización, sin saber bien qué es lo que hacen y el por qué utilizan ciertos procedimientos (Nasser, 2009, pp. 46-47).

Por otra parte, P4 ha dicho que no le gusta la expresión "conocimiento previo" y explica que esta opinión se trata de una cuestión de naturaleza teórica, pues la misma considera que el conocimiento se construye en el acto. Además, defiende que los profesores de Cálculo deben realizar un repaso de los contenidos matemáticos básicos antes de introducir los temas específicos.

Sin embargo, los profesores-formadores P7 Y P10 no consideran importante que los estudiantes posean los prerrequisitos para desarrollar el proceso de estudio del Cálculo. En este sentido, P10 ha afirmado que "si tuviéramos que esperar a que tengan los prerrequisitos no daríamos clase [...]. Entonces, no puedo partir del presupuesto que siempre lo que importa es el prerrequisito. […] Es decir, no es relevante".

Resaltamos que algunos de los profesores-formadores consideran la importancia del conocimiento previo de las nociones matemáticas abordadas en la enseñanza secundaria para el proceso de estudio del Cálculo. También encontramos posicionamientos de que las propias nociones del Cálculo, a su vez, se convierten en prerrequisitos para el estudio de otras disciplinas de la Licenciatura en Matemáticas, como por ejemplo, de Análisis Matemático.

9.4.2. El aprendizaje de los estudiantes en Cálculo

A partir de los relatos de los profesores-formadores hemos identificado algunas cuestiones relativas al proceso de aprendizaje del Cálculo en la enseñanza universitaria. Hay los que han argumentado que la problemática radica en la complejidad de comprensión de algunas nociones del Cálculo y del lenguaje que generalmente utilizamos en el proceso de enseñanza y aprendizaje (P2 y P4). No obstante, hemos destacado algunas ideas que consideramos relevantes sobre dicho proceso.

P3, por ejemplo, ha resaltado la importancia de que el profesor reconozca que el proceso de estudio del Cálculo debe realizarse a partir de situaciones-problema que se presentan en la vida cotidiana. En este sentido, sugiere que la utilización de proyectos facilita el proceso de aprendizaje de las nociones del Cálculo, donde debemos poner el énfasis. Sin embargo, reconoce que esto:

> No es tarea fácil. Esto requiere una actitud reflexiva constante. A través de los proyectos, aprendemos dónde están las Matemáticas, por medios etnográficos. Aprendemos a percibir dónde están la Matemáticas y qué Matemáticas pueden estar implícitas en distintas situaciones cotidianas [...]. Esto es lo que el profesor universitario necesita: La formación de personas competentes. Es importante que las universidades se interesen por la formación de profesionales. La sociedad y, por supuesto el Gobierno, han que "mostrar" que no es el diploma lo que interesa y sí el aprendizaje y la formación de ciudadanos competentes.

P6, a su vez, ha declarado que un proceso de estudio del Cálculo centrado solamente en los conceptos y técnicas produce un nivel superficial de aprendizaje. La centralización de dicho proceso en la utilización de procedimientos algebraicos y algorítmicos corresponde con resultados encontrados en distintos estudios (Depool Rivero, 2005; Moreno, 2005; Rosken y Rolka, 2006). En esta dirección, P6 defiende la necesidad de disponer de un tiempo adecuado para que se profundice en el aprendizaje de los conceptos y demostración de proposiciones. Según su afirmación:

> El Cálculo en las Ingenierías, tiene mucho contenido y pocas horas, la filosofía está en que el alumno debe estar el tiempo justo en clase, pero tiene que aprender las mismas cosas; lo que desarrollamos son los conceptos y las técnicas, es decir no hay profundidad en el aprendizaje. Ya en la Licenciatura en Matemáticas se han aumentado el número de horas de las clases de Cálculo para que el alumnado entienda mejor los conceptos y que el profesorado pueda realizar las demostraciones de los teoremas.

La transición entre los distintos significados de las nociones del Cálculo fue considerado por P7 como la "llave" para el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

El proceso activo de aprendizaje ha sido mencionado por P8, al afirmar lo siguiente: "Creo que es importante que el alumno camine más al lado del profesor, que sea más activo en el proceso de aprendizaje".

La importancia de que el profesor de Cálculo analice el proceso de aprendizaje de sus estudiantes, como una vía de adecuar los significados planificados para las nociones matemáticas que se pretende implementar en la enseñanza universitaria del Cálculo ha sido explicitada por P10, que ha aportado uno de los resultados obtenidos a través de su investigación de la siguiente manera:

> He acompañado a 19 alumnos durante un semestre estudiando Cálculo y he podido comprender su proceso de aprendizaje, además de la muestra de 529 alumnos a través de un cuestionario que respondían sobre su aprendizaje. Considero que mi éxito

> lo he encontrado en la propia investigación, ya que pude conocer cómo piensan sobre las Matemáticas. [...] Los alumnos de Ingeniería tienen una visión más "utilitarista" del Cálculo y de las Matemáticas; con mi investigación detecté tres estilos de aprendizaje: Uno que nombré práctico-teórico, otro de teórico-práctico y el tercero de incipiente. He llegado a la conclusión de que los alumnos aprenden Cálculo a partir de la realización actividades prácticas. Es decir, a partir de problemas sobre la integral, derivada, etc. es como estudian el Cálculo. Pensaba que en la Ingeniería iba a encontrar alumnos cuyo interés principal sería siempre en las actividades prácticas, pero he encontrado alumnos que primero profundizan en la teoría. Otro aspecto nuevo que he encontrado fue que existen alumnos que no optaron por ninguno de estos estilos de aprendizaje.

Nos parece imprescindible que los profesores universitarios de Cálculo conozcamos los procesos de aprendizaje utilizados por los estudiantes para las distintas nociones del Cálculo. Esto debe convertirse en uno de los componentes a contemplar por los docentes en el diseño e implementación del currículo del curso introductorio de Cálculo dirigido a la Licenciatura en Matemáticas.

Frota (2009) ha resaltado que la influencia de actitudes metacognitivas en la determinación del estilo de aprendizaje de los estudiantes universitarios de Cálculo, suscita una reflexión sobre la práctica docente. En este sentido, la autora ha identificado tres estilos de aprendizaje de los estudiantes de Cálculo, los cuales ha nombrado: estilo con orientación teórica; estilo con orientación práctica; estilo con orientación investigadora. Al considerar la predominancia del estilo de aprendizaje "practico-teórico" en dichos estudiantes, indica las estrategias siguientes para los profesores: (1) Solicitar al estudiante no solamente la resolución de ejercicios, sino la explicación y justificativa de los procedimientos adoptados; (2) Proponer al estudiante la clasificación y organización de los ejercicios por las estrategias similares de solución; (3) Solicitar al estudiante la elección justificada y la resolución de ejercicios que posibiliten una revisión de un tema; (4) Solicitar al estudiante la revisión de las cuestiones erradas, así como el análisis del error; (5) Realizar la lectura de un ejercicio con los estudiantes, reflexionando sobre las posibles estrategias de resolución y verificando su viabilidad en función de los presupuestos teóricos que se requiere; (6) Proponer cuestiones desafiadoras, tareas que estimulen la reflexión e investigación (p. 76).

9.4.3. Las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales de los estudiantes

Algunos de los profesores-formadores han comentado sobre la necesidad de adecuar su práctica profesional a las características de cada carrera y a los intereses específicos de los estudiantes (P2, P3 y P4). Además, han citado algunas experiencias de éxito relacionadas con el desarrollo de un ambiente propicio a la participación activa de los estudiantes en las clases (P2, P4 y P5).

En la opinión de P3, además de las clases meramente teóricas de Cálculo orientadas básicamente a un grupo muy reducido de estudiantes universitarios, encontramos a docentes que planifican sus clases de manera que tratan de responder al *por qué* se estudian determinados contenidos, así como el *para qué sirven* y *dónde se aplican* en la práctica profesional. En este sentido, P3 ha afirmado que:

> El estudiante tiene que entender el por qué de la teoría que aprenden, de manera independiente del profesor, ¡pero estos estudiantes no son los que encontramos normalmente en nuestras clases! Lo que pasa es que los profesores universitarios imparten sus clases solamente para este tipo de estudiantes. Solo trabajan teoría, teoría... Esto sólo funciona para tales estudiantes, que no llegan a ser tres en cada clase. Los estudiantes necesitan saber el por qué están estudiando estos contenidos, el para qué les sirve la integración, dónde la utilizarán. Depende de para qué carrera estará dirigida la enseñanza (profesores de ESO, ingenieros, agrónomos, etc.). El profesor universitario tiene que saber responder a estas cuestiones.

Asimismo, P4 ha afirmado que: "me parece que el alumno debe profundizar más en las disciplinas relacionadas con su área. En este sentido, debemos aprender a adecuar la enseñanza de acuerdo con el área de conocimiento". Es decir, cada disciplina, como el Cálculo, debe contemplar las herramientas matemáticas que se requerirán en las demás disciplinas de la carrera universitaria. Para realizar esta adaptación del Cálculo a las necesidades de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, por ejemplo, los profesores de la carrera deben actuar de manera colaborativa, dialogando sobre sus disciplinas con la finalidad de identificar los puntos de contacto, las maneras de interacción y cómo ciertas disciplinas pueden dar soporte a otras de la misma carrera.

La atención individualizada a los estudiantes consiste otra forma de adaptación del currículo de Cálculo a las necesidades de los estudiantes. En la cita a continuación, P10 relata su experiencia a través de un taller desarrollado para orientar y estimular el proceso de estudio de sus alumnos. Según ha declarado:

> Actualmente he creado un espacio de trabajo con los alumnos, un taller de atención a mis alumnos de Cálculo y no es un lugar donde imparto clases, discutimos cómo estudiar. Ese es un fruto concreto de mi tesis que considero un éxito, el taller que ofrezco de Cálculo III, extra clase, gratuito, en un régimen de método de estudio. Son los alumnos quienes definen qué van a estudiar. Además, incentivo el estudio en pequeños grupos. [...] Creo que mis mayores fracasos los podría ubicar más en la época que mis clases, en el principio de la carrera, eran más expositivas y seguían toda una tradición del profesor de ingeniería. Además, creo que mis fracasos ocurren cuando he impartido las clases enfocadas en mí y no en mis alumnos quienes estaban allí para dialogar conmigo.

El hecho de estimular el proceso de estudio de las nociones de Cálculo a partir de “pequeños grupos de estudiantes” ha sido evidenciado por los profesores-formadores (P2, P5 Y P10). Esto les posibilitaba atender a las necesidades individuales de los estudiantes de la Licenciatura en Matemática. Otro aspecto relevante, resaltado por P10, se refiere a la importancia de que el profesor de Cálculo centre sus clases en el proceso de aprendizaje de los estudiantes y no en sí mismos.

9.5. DIMENSIÓN MEDIACIONAL

En la dimensión mediacional de la integral sintetizamos los relatos de los profesores-formadores sobre el proceso de estudio del Cálculo basado en los descriptores siguientes: uso de materiales didácticos y recursos tecnológicos; uso, características y rol del libro de Cálculo; adecuación de los significados pretendidos/ implementados al tiempo disponible; y la inversión del tiempo en los contenidos más relevantes y que presentan más dificultades.

9.5.1. Uso de materiales didácticos y recursos tecnológicos

Los profesores-formadores han enfatizado la importancia de utilizar recursos tecnológicos como un medio para mejorar el proceso de estudio del Cálculo en la enseñanza universitaria. En este sentido, P1 ha resaltado la necesidad de estudiar las Matemáticas que soportan los softwares actualmente utilizados en la enseñanza del Cálculo. Por otra parte, P2 ha declarado que se requiere del profesor universitario una cierta ruptura con su propio modelo de formación académica, para que pueda utilizar adecuadamente los recursos tecnológicos en las clases de Cálculo.

La literatura consultada contempla un abundante número de investigaciones relacionadas con la utilización de las tecnologías en el proceso de estudio de la integral (Tall, 1996; 2009; González-Martín, 2004; Depool Rivero, 2005; Scucugli, 2006; Camacho, Depool y Garbín, 2008; Lois y Milevicich, 2009; Crisostomo, Mota, Brito y Dias, 2012) y resalta las potencialidades de las tecnologías para el aprendizaje de la integral.

En esta dirección, sintetizamos, a continuación, los relatos de P3, P7 y P10.

P3 defiende el uso de las tecnologías en el proceso de estudio del Cálculo. No obstante, advierte que no es suficiente utilizar un recurso tecnológico para resolver una situación-problema. Según su declaración:

> Hay que cuestionar la solución de la pantalla. Se hace la modelización de una situación-problema y se la resuelve a través del ordenador. Sin embargo, hay que hacer un análisis en profundidad de la solución dada por el ordenador y, posteriormente, interpretarla en el caso particular de la situación-problema para la cual se busca la solución.

Al plantearnos que cuando estamos estudiando las técnicas de integración los procedimientos que desarrollamos suelen ser muy extensos y, relativamente complejos. Sin embargo, cuando vamos a aplicarlas en la resolución de las situaciones-problema, las integrales que aparecen en los libros de texto, por ejemplo, son bastante sencillas**.** P7 ha evidenciado que esto depende de la carrera que trabajamos y que los recursos tecnológicos nos permiten aplicar la integral a situaciones-problema más sofisticadas. En esta dirección, ha opinado que:

> En la licenciatura trabajas más con la noción de área y con las funciones que consigues representar; pero, si ya has estado implicado con el uso del recurso tecnológico, comenzarás a trabajar con situaciones más sofisticadas y más elaboradas que pueden representar una realidad de nuestro medio. De ahí, que utilizas situaciones que requieren estas técnicas.

Aunque reconozcan la importancia de utilizar los recursos tecnológicos en el diseño e implementación del curso de Cálculo en la formación de profesores de matemáticas, ésta no es la realidad vivenciada en muchas universidades. Esta situación ha sido expresada por P10 de la siguiente manera:

> Creo que la tecnología no llega a la enseñanza del Cálculo, y el nuevo Cálculo, a veces, no llega en las clases porque no interactúa con la tecnología. Si pienso en las Ingenierías, los problemas que llevo a clase pueden ser diferentes, o sea, pueden ser

más realistas, más complejos, utilizando datos de la realidad. Pero, sin un instrumento tecnológico no hago este tipo de Cálculo, este cambio ha sucedido en el libro de Cálculo, pero aún no sucede en las clases.

9.5.2. Uso, características y rol del libro de texto de Cálculo

En cuanto a la utilización del libro de Cálculo por parte de los docentes universitarios, los profesores-formadores han considerado que éste es distinto y relativo al tiempo de experiencia del docente en la enseñanza del Cálculo. En este sentido, al referirse a los docentes que están empezando a desarrollar la enseñanza del Cálculo en la enseñanza superior, P3 ha considerado que para ellos:

> Es más sencillo usar un libro tradicional, porque así se sienten más seguros. Hay profesores universitarios que utilizan ordenadores solamente para confirmar la veracidad de las respuestas de las actividades. Esto me deja horrorizado. No exploran la potencialidad del ordenador.

Por otra parte, al referirse al uso del libro de Cálculo por los estudiantes universitarios, P3 ha declarado que éstos necesitan tener los libros de Cálculo como referencia para su proceso de estudio, opinando que:

> Los estudiantes no tienen la obligación de estar todos los días en clase, por lo tanto, necesitan uno o varios libros de texto como referencia para sus estudios. La elección de un buen libro es importante para que profesores y estudiantes no se “pierdan” en el proceso de enseñanza.

P4 corrobora la posición anterior, añadiendo la importancia atribuida al libro de Cálculo por parte de los estudiantes. En este sentido ha considerado que:

> Hay excelentes libros. A veces el profesor no sigue el libro, personalmente yo también he hecho esto, trabajando la integral antes de la derivada. Sin embargo, los alumnos ya están acostumbrados a estudiar con el libro de texto desde la enseñanza básica. Aunque, algunos profesores trabajan con “apuntes”, los estudiantes les preguntan dónde pueden ubicar el tema en el libro. Cuando ellos faltan a algunas clases, si no hay un texto de referencia es muy difícil seguir las clases siguientes, es decir, el libro sirve de guía para el alumnado y para el profesorado. En este sentido, utilizar un libro facilita mucho el proceso de estudio del Cálculo.

En cuanto a las características del libro de Cálculo, hemos elegido algunos de los relatos de los profesores-formadores que consideramos las consideran como satisfactorias.

En la opinión de P3, el libro de Cálculo:

> Tiene que contemplar los aspectos históricos y tecnológicos. Tenemos que saber cómo usar la tecnología. La historia es muy importante. Además, los proyectos, que no pueden ser seguidos tal y cual están en los libros. Por ejemplo, los proyectos del libro “Cálculo y Aplicaciones” (del grupo de profesores de Harvard) son diseñados para la

> realidad estadounidense. No podemos aplicarlos en Brasil como están propuestos en dicho libro. Así que el libro no puede ser seguido integralmente. Los ejemplos de los libros estadounidenses no son compatibles con nuestra realidad; hay que adaptarlos. Sin embargo, lo que me gusta en dicho libro es su secuencia, que me parece perfecta.

Mencionando al libro de Cálculo, traducido al castellano como Cálculo Aplicado[10], también resaltado por P2 en el Capítulo 8, P3 destaca tanto la importancia de los aspectos históricos y tecnológicos, como los proyectos y ejemplos, que en su opinión, deben ser adaptados a la realidad brasileña.

Corroborando la idea anterior, P4 ha comentado que es necesario que los profesores de Cálculo no solamente critiquen los libros elegidos, sino que complementen los aspectos que no han sido contemplados. De esta manera ha opinado que:

> La elección del libro depende mucho del grupo de estudiantes y de su carrera. La elección de los profesores depende de estas variaciones. Cualquiera que sea el elegido, lo más importante es criticarlo, y creo que todos los profesores lo hemos hecho, añadirle los aspectos que no son contemplados; ¡no hay libros perfectos, que contemplan todo! Por lo tanto, como un guía me parece que un libro ayuda.

El lenguaje utilizado por los autores de los libros de Cálculo, así como los ejemplos utilizados deben estar dirigidos a la mejor comprensión del texto. Esto ha sido resaltado por P6, aunque reconozca la necesidad de complementar algunos aspectos de su libro de Cálculo. En su opinión:

> En relación a nuestro libro Cálculo, he seguido su secuencia por muchos años en la Licenciatura en Matemáticas. Pero si fuera a utilizarlo actualmente, necesitaría rellenar algunos huecos teóricos para adecuarlo a la licenciatura. Creo que dicho libro atendería más a la carrera de Ingeniería, aunque a los alumnos de matemáticas les gusta usarlo a causa de su lenguaje coloquial, su fácil entendimiento y del gran número de ejemplos. Incluso, estos son los puntos que siempre han sido más elogiados en el referido libro.

Por otra parte, al opinar sobre la tendencia de que algunos de los docentes de Cálculo siguen la misma secuencia contemplada en los libros de Cálculo en la implementación del proceso de estudio del Cálculo, las opiniones de los profesores-formadores han sido divergentes. En este sentido, P4 ha comentado que:

---

[10] Hughes-Hallett, Gleason, Lock, Flath y otros (2002). *Cálculo Aplicado*. Trad. Virgilio González Pozo. 2da. Reimpresión. Editorial grupo Pátria Cultural, S. A. Distrito Federal: México.

Los autores de los libros de texto ya han pensado en la estructuración del Cálculo antes de escribir sus libros; generalmente presentan los problemas, las dificultades en un orden creciente o, al menos, de manera más diversificada. No me parece mal que los profesores sigan la secuencia del libro, siempre que sea un buen libro.

Según Onuchic y Allevato (2009), el libro sigue siendo el recurso más utilizado por los profesores y su finalidad consiste en conducirlos "a un camino que le propicie, principalmente, la posibilidad de cumplir aunque parcialmente el programa de los contenidos planificados para el curso" (p. 171).

No obstante, P7 ha reconocido que ha cambiado el uso de su propio libro de Cálculo a lo largo de los años de docencia de esta asignatura. Según su afirmación:

La manera que usaba mi libro hace unos años y hoy es diferente. Esto significa que la manera que un profesor utiliza un libro de texto es fundamental para su éxito profesional. No hay una fórmula mágica para ello. Creo que hay concepciones pedagógicas que orientan la educación y éstas, a su vez, sostienen las acciones desarrolladas por el profesor en sus clases. Dichas concepciones pueden estar contempladas en ciertos libros de texto.

Reconocer sus propias concepciones pedagógicas parece ser una característica importante para la labor del docente, particularmente de los profesores de Cálculo. Dichas concepciones pueden ser identificadas en algunos libros de texto o, caso contrario, la utilización del libro suele adecuarse a las concepciones del profesor.

Podemos suponer que exista una influencia de los libros didácticos en las clases y en los cursos ministrados por los profesores en los distintos niveles de enseñanza. Las definiciones, ejemplos y ejercicios contemplados en el libro se convierten en una referencia para muchos cursos, influenciando los estudiantes en las clases y en las demás actividades propuestas. Al dar su clase, el profesor confía en la estructura del libro y en la manera con la cual el autor describe un objeto matemático […] (Grande y Bianchini, 2009, p. 112). En este sentido, las experiencias docentes llevadas a cabo por un grupo de profesores de Cálculo también han servido de base para la redacción de un libro de Cálculo. La referida experiencia ha sido relatada por P9 de la siguiente manera:

En el primer capítulo de nuestro libro contamos una experiencia. En 1996 la rectoría nos ha propuesto un programa de tutoría y hemos aprovechado esta estructura para desarrollar las prácticas de laboratorio de Cálculo. Así, hemos conseguido integrar

> actividades computacionales y proyectos de una manera más efectiva dentro de la propia asignatura, fruto de un trabajo en equipo y varias promociones trabajando integradas que culminó en el libro.

De esta manera, afirmó P8:

> Lo que hicimos a partir de 1996 fue coger nuestras experiencias anteriores, introducir el ordenador como otra herramienta didáctica, pero todo ello sin desviar el énfasis de la construcción del conocimiento del alumno. La filosofía del trabajo ha sido siempre contemplar un espacio para el alumno como agente activo de su proceso de estudio.

Los relatos de los profesores-formadores nos permiten identificar el uso, las principales características y el rol del libro de texto de Cálculo en el contexto de la formación de profesores de matemáticas.

Con relación al uso del libro de Cálculo, ha sido enfatizada la necesidad de su adecuación no solamente a la carrera, sino al grupo de estudiantes a que está dirigido; además, los entrevistados han puesto de manifiesto que los libros deben ser complementados en los aspectos no contemplados en su estructura.

En lo que se refiere al rol del libro de Cálculo, éste ha sido considerado como una guía de estudio para los alumnos y como un recurso didáctico que orienta el trabajo de los docentes.

Las características principales que han sido relatadas para el libro de Cálculo consisten en la contemplación de los recursos tecnológicos, proyectos, y de la historia de la matemática; en la utilización de un lenguaje asequible al alumnado, y en la presentación de ejemplos y aplicaciones diversificadas.

9.5.3. Adecuación de los significados pretendidos/ implementados al tiempo disponible e inversión del tiempo en los contenidos más relevantes

En lo que se refiere a la adecuación de los significados pretendidos/ implementados de la integral al tiempo disponible y a la inversión del tiempo en los contenidos más relevantes, los profesores-formadores han resaltado la dedicación de más horas para el curso de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas, la conciliación entre las clases teóricas y las prácticas, y la adecuación de la secuencia didáctica a las necesidades de los estudiantes. Estos aspectos serán sintetizados en los relatos a continuación.

El hecho de que el tiempo destinado al Cálculo en la Licenciatura en matemáticas sea más amplio que el disponible para otras carreras ha sido comentado por algunos de los entrevistados como P2 y P6. Esto debe posibilitar profundizar en los temas importantes para la formación del profesor de matemáticas de la enseñanza secundaria.

P3 considera que más importante que el tiempo disponible para el curso de Cálculo es la motivación de los estudiantes. Además, ha afirmado que en su experiencia docente observó que se obtiene un mejor rendimiento de los estudiantes cuando se articulan las clases teóricas con las prácticas de laboratorio. En este sentido, P3 ha opinado que el tiempo necesario para desarrollar los temas de Cálculo:

> Es muy relativo al grupo de estudiantes que tiene uno y a su motivación. Cuando están motivados, se puede avanzar mucho más. He trabajado con 6 horas semanales (4 horas teóricas y 2 horas prácticas de laboratorio). Esto mejoró mucho el rendimiento de los estudiantes.

P4 pone de manifiesto una práctica muy común en el proceso de enseñanza de Cálculo que consiste en centrar el curso en los procedimientos (algoritmos), lo que produce una considerable reducción del tiempo para la parte conceptual de los temas, así como para sus aplicaciones. En este sentido, este profesor-formador ha afirmado que:

> Hay profesores que pierden mucho tiempo enseñando todas las técnicas, las más profundas, ejercicios complejos y trabajosos. Para algunos profesores estas cosas son lindas, pero para el alumno creo que no añade mucho, porque ya existen programas computacionales que resuelven la integral. Aplicar los algoritmos no es lo más problemático.

La utilización de softwares específicos para hallar la integral ha sido defendida por P2, P3, P4, P5, P8 y P9. Así, la inversión del tiempo en las clases de Cálculo debe estar centrada, por una parte en la aplicación de sus herramientas en la resolución de problemas y, por otra parte, en la profundización conceptual de los conceptos desarrollados. Asimismo, algunas nociones del Cálculo han sido consideradas de difícil comprensión por parte de los estudiantes, como por ejemplo, diferencial e infinito. Por lo tanto requieren inversión de más tiempo en su estudio en el proceso de formación de los futuros profesores de matemáticas.

En lo que se refiere a la secuencia didáctica desarrollada en el proceso de estudio del Cálculo, y particularmente de la integral, la mayoría de los profesores-formadores consideran que hay una tendencia de los profesores de Cálculo con poca experiencia docente que siguiesen la misma secuencia propuesta en los libros de texto de Cálculo. Entretanto, en la medida que aumenta su experiencia en la docencia de Cálculo, hay mayor autonomía por parte de los docentes para adecuar la secuencia didáctica a ser implementada a los intereses de las distintas promociones de estudiantes y de las carreras a que están dirigidas su enseñanza. Esto conlleva a la optimización del tiempo invertido en el proceso de estudio del Cálculo, especialmente de la integral, en la enseñanza universitaria.

No obstante, al comentar sobre el desarrollo del curso introductorio del Cálculo en la enseñanza universitaria, P9 ha declarado el siguiente: “Nuestro curso es bastante concentrado y creo que a veces no tenemos tiempo suficiente para madurar los contenidos, tampoco tengo claro que el tiempo sea un factor relevante para esto”.

9.6. DIMENSIÓN AFECTIVA

En la dimensión afectiva, sintetizamos los relatos de los profesores-formadores relacionados con los intereses y necesidades, las actitudes, y las emociones en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

9.6.1. Los intereses y necesidades en el proceso de estudio del Cálculo Integral

Entre los intereses y necesidades relatados por los profesores-formadores se destacan: el interés y la motivación de los estudiantes en un curso universitario de Cálculo, y la necesidad de utilización de los recursos tecnológicos en el proceso de estudio de Cálculo para favorecer dicho interés y motivación.

Con relación a cómo se puede aumentar el interés y a la motivación de los estudiantes, P8 considera que esto puede ser logrado cuando el docente está:

> Promoviendo más situaciones en las cuales el alumno sea el protagonista del aprendizaje. Asimismo se le debe apoyar y amparar cuando sea necesario, así como ayudarle a identificar sus dificultades, sin que se sienta amenazado o expuesto.

P2 considera que la ampliación del interés y de la motivación de los estudiantes de Cálculo está condicionada al desarrollo fundamentado y justificado de los diversos temas de esta asignatura. Esta idea es corroborada por P3, P4 y P6. Además, P10 ha relatado la importancia de oír las opiniones del alumnado sobre las clases y, a partir de esto, identificar sus motivaciones. En este sentido, P10 ha afirmado lo siguiente:

> Yo pregunto a mis alumnos qué les está gustando de las clases y qué no. Creo que es fundamental escuchar al alumnado para descubrir sus diversas motivaciones. El profesor es este “facilitador” que debe estar abierto para identificarlas.

Otra motivación de los estudiantes que ha sido destacada se refiere a la utilización de las tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Esto ha sido considerado interesante por parte de la mayoría de los profesores-formadores. No obstante, el uso de los recursos tecnológicos en dicho proceso implica un cambio tanto en el diseño del curso de Cálculo como en su desarrollo. En este sentido es imprescindible que los docentes de Cálculo reflexionen sobre qué se debe enseñar y cómo hacerlo.

P4 ha puesto de manifiesto que “hay un dilema del profesor en cuanto a la articulación de los intereses de los alumnos y la implementación del currículo de Cálculo de manera que contemple las exigencias institucionales”.

9.6.2. Las actitudes en el proceso de estudio del Cálculo Integral

En los relatos de los profesores-formadores hemos identificado algunas referencias a las actitudes de los estudiantes universitarios y de los docentes, relativas al proceso de estudio del Cálculo. En esta síntesis destacamos: actitud activa de los estudiantes, actitud del docente relacionada con la superación de las dificultades de los estudiantes, y la actitud del futuro profesor de matemáticas de reproducir el modelo de las clases de sus docentes universitarios.

La necesidad de desarrollar una actitud activa en los futuros profesores de matemáticas ha sido resaltada por P1, P2, P6, P8 y P9. Esto implica que se requiere de ellos una actitud reflexiva y flexible para afrontar su futura profesión.

La actitud docente relativa a contribuir con la superación de las dificultades de los estudiantes ha sido mencionada especialmente por P2, P4 y P10. Las alternativas encontradas (proyectos, talleres, etc.), aunque distintas, expresan la actitud de los docentes en el sentido de colaborar para que los estudiantes superen sus dificultades. En la opinión de P4:

> Creo que es fundamental saber dónde se sitúa el alumno de la Licenciatura en Matemáticas para que se consiga que superen sus dificultades de aprendizaje. Hasta los que tienen menos dificultades posiblemente podrían desarrollarse más si el profesor les diera más atención tan luego se presenten las dificultades.

Otra actitud que hemos identificado a través de varios relatos, se refiere a la tendencia de los futuros profesores de matemáticas a reproducir las acciones de sus profesores universitarios en su actuación profesional. En este sentido, P4 ha mencionado que sus alumnos han confirmado que esto pasa y que “aquellos que han tenido profesores más tradicionales y ásperos tienen la misma actitud con el alumnado ¡de tal palo tal astilla!”.

Corroborando la idea anterior, P5 ha mencionado que “el alumno suele imitar a sus profesores”. De esa manera, tratándose de los futuros profesores de matemáticas, ellos “probablemente van a reproducir lo bueno y lo malo de sus clases”.

Además, hemos encontrado en la literatura una actitud de una muestra de estudiantes investigados relacionada a la memorización de los contenidos con la finalidad única de aprobarse en los exámenes.

> Al prever una situación de fracaso, todos los estudiantes que han participados de nuestra investigación han recurrido a la memorización de las definiciones, imágenes y argumentos, construyendo teorías muchas veces idiosincráticas o compartimentalizadas (Pinto y Gray, 1995; Pinto y Tall, 1996; Pinto, 1998), con el único objetivo de aprobar en los exámenes (Pinto, 2009, p. 37).

9.6.3. Las emociones en el proceso de estudio del Cálculo Integral

Las emociones también han sido contempladas en los relatos de los profesores-formadores. En esta sección vamos a sintetizarlas a partir de las emociones relacionadas con la satisfacción tanto de los estudiantes como de los docentes. Asimismo, resaltaremos las características que han sido relatadas para un buen profesor de matemáticas.

En lo que se refiere a las emociones que se puede observar en los estudiantes, al desarrollar su proceso de estudio de Cálculo, P2 ha destacado la relación existente entre la estrategia didáctica desarrollada por el docente en el proceso de estudio que se implemente y el grado de satisfacción y éxito de los estudiantes universitarios, reflejados en su autoestima y gusto por las Matemáticas.

Por otra parte, P3 mencionó la recompensa que es para el docente dar una buena clase. Además, atribuye al profesor la función de motivar a los estudiantes para que éstos logren un aprendizaje satisfactorio. En este sentido, P3 ha relatado que:

> Cuando tu das una buena clase (y tienes experiencia de esto), el placer que sientes es otro. ¡Esta es una gran recompensa para el docente! Es como el caso del actor de teatro, cuando él siente que hay “retorno” por parte del público, él se siente realizado. Sin embargo, hay públicos completamente apáticos. Con los profesores pasa lo mismo. Hay clases en las que los estudiantes son muy apáticos (y desinteresados) pero el profesor tiene que motivarlos. Necesita saber cómo trabajar con este grupo de alumnos.

Por tanto, al nivel de satisfacción de los estudiantes se atribuye el éxito en su proceso de estudio, así como el desarrollo de la autoestima y del gusto por las Matemáticas. Al motivar a los estudiantes y usar las estrategias didácticas adecuadas a la implementación del proceso de estudio, el docente se siente recompensado y satisfecho con sus clases y logran el aprendizaje satisfactorio del alumnado. Todo ello nos lleva a la búsqueda de las características del buen profesor de matemáticas. Dichas características, según las concepciones de los profesores-formadores, serán resumidas a continuación.

Aunque para los entrevistados no fue sencillo trazar el perfil del buen profesor de matemáticas, hemos elegido algunos relatos que corroboran o complementan las opiniones de P1 y P2 anteriormente sistematizadas en los capítulos 7 y 8.

En este sentido, P4 ha destacado que el buen profesor de matemáticas debe ser un educador, que contribuya a la felicidad y satisfacción de los estudiantes en su proceso formativo. En su opinión:

> Es una pregunta difícil, pero creo que un buen profesor es aquel que pudiera contribuir para que el alumno fuera más feliz con su formación, que le trajera una satisfacción de calidad de vida. El educador peca cuando cree que lo que enseña sirve sólo para la profesionalización del alumno.

La identificación del buen profesor de matemáticas con un educador también fue realizada por P3, que además ha destacado que éste siente placer en dar clases y en estar continuamente innovando. Según su afirmación, se trata:

> En primer lugar, de un profesor que tenga placer de impartir clases; en segundo lugar, que esté siempre innovando. La estancación es la peor cosa para un profesor. Hay que estar leyendo aprendiendo cosas nuevas, motivando a los estudiantes. No puede ser "paternalista", sino que tiene que ser un educador. He conocido a muchos profesores universitarios que dicen que no van a educar a nadie; pero este también es su papel, pues es un ejemplo para los estudiantes.

El gusto por las Matemáticas, asociado al estudio tanto de las Matemáticas como de su proceso de aprendizaje fue evidenciado por P10. En su opinión, la caracterización de un buen profesor de matemáticas se trata de una cuestión:

> Difícil, pero te diré que es un profesor que estudia Matemáticas, que le gusta, además, estudiar sobre procesos de aprendizaje. A él le gusta impartir clases, leer, discutir, buscar investigaciones, estudios y aprender sobre eso; que sepa establecer grupos de trabajo en clase con los alumnos y con los colegas; que pueda saber y aprender a cambiar experiencias. Debe ser este individuo que se sorprenda en descubrir y redescubrir temas sobre las Matemáticas. Y que sepa lidiar tanto con su propio como con el error de sus alumnos.

Con la inquietud relatada por P4 a continuación, concluiremos esa sección y, consecuentemente, la dimensión afectiva del proceso de estudio de la integral.

> Me ha inquietado mucho la cuestión del buen profesor, no ese trata de enunciar simplemente una lista de diez capacidades para que el docente pueda convertirse en un buen profesor. Es más subjetivo. Actualmente la evolución del mundo es tan compleja que nuestra adaptación acaba siendo un poco por el rumbo de este mundo. Me descoloca ver que los alumnos no están felices en clase. La alegría pasó a ser un factor menos importante. La gente se preocupa en servir, en producir o en ser lo mejor posible y ahí se cierra en ello y, a veces, no sabe ni el por qué y para qué hacen las cosas de cierta manera. Ello, lleva a una búsqueda desenfrenada que no conduce a nada, solo con el intento de mostrar producción. La parte afectiva se quedó al costado, pues esta parte es la que trae esta felicidad, esa alegría, esas ganas y satisfacción de vivir.

9.7. DIMENSIÓN INTERACCIONAL

El papel y los tipos de interacciones relatadas por los profesores-formadores en el proceso de estudio de la integral serán sintetizadas distinguiendo entre las interacciones docente-discente, la interacción entre docentes, y la interacción entre discentes; también mencionamos el papel de la autonomía de los estudiantes en el propio aprendizaje.

9.7.1. La interacción docente-discente

En la opinión de P7, “cualquier acción de éxito fluye a partir de la interacción del profesor y el alumno”. Además, al comentar sobre el cambio que introdujo en sus clases, tornándolas más interactivas, P5 concluyó que “después que he empezado a trabajar con los estudiantes de aquella manera interactiva, no hubo más problemas para que el alumno aprendiera la integral”. Este aspecto se relaciona con la influencia de las experiencias docentes y de las interacciones producidas con los académicos para el desarrollo de sus conocimientos. En este sentido:

> El proceso de construcción de los conocimientos y saberes del profesor-formador en la universidad se realiza fundamentalmente en el interior del espacio de formación y en el ámbito del ejercicio profesional y, además, se constituye, por una parte, por medio de las concepciones que el profesor acumula sobre la enseñanza, a partir del conocimiento disciplinar, en el posgrado y en la investigación, como parte de una comunidad de conocimiento, de lecturas y de discusiones realizadas. Por otra parte, es constituido por la experiencia en la situación de enseñanza, especialmente por las relaciones que eses formadores mantienen con sus alumnos (Melo, 2010, p. 45).

P4 también ejemplifica la interacción con sus alumnos a partir de un relato sobre la importancia de la visualización en el proceso de estudio del Cálculo. Según su afirmación:

> Me parece importantísima la visualización, siempre comento con mis alumnos, especialmente de la licenciatura, que todo lo que puedas usar para que el alumnado utilice los cinco sentidos será mejor. Creo, incluso, que hay un “sexto” sentido relacionado con esta conexión del profesor con el alumno en clase. Además, debemos estimular al alumno a expresar su opinión sobre los temas desarrollados en las clases y a exponer su manera de pensar.

En este sentido, Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2012) consideran que:

> El papel de la visualización en el trabajo matemático, profesional o escolar, es complejo ya que está frecuentemente imbricado con el uso de inscripciones simbólicas, que aunque “se vean”, su significación es puramente convencional. El problema tiene relevancia incluso cuando la visualización se refiere al uso de objetos visuales, los cuales interaccionan no solo con las inscripciones simbólicas, sino también y principalmente con el entramado de objetos conceptuales, procedimentales, proposicionales y argumentativos que se ponen en juego en las correspondientes configuraciones.
>
> El profesor, y previamente los diseñadores curriculares y formadores de profesores, debe tomar conciencia del papel de la visualización, y en general la ostensión, en la construcción y comunicación matemática. Por una parte, no se debe confundir el objeto matemático con sus representaciones ostensivas, sean visuales o de otro tipo. Es necesario tener en cuenta la naturaleza no ostensiva, inmaterial, de los objetos matemáticos y las relaciones dialécticas complejas que se establecen entre estos objetos y sus representaciones materiales. Al mismo tiempo se tiene que saber que no hay objeto matemático sin sus diversas representaciones, porque tal objeto no es otra cosa que las reglas de uso de dichas representaciones (p. 128).

El estudiante suele expresar sus opiniones en la clase, cuando se siente seguro para ello. En esta dirección, P6 ha enfatizado el respeto y la confianza que deben ser estimuladas en las clases de Cálculo. Según su declaración:

> En la clase se debe respetar mucho al alumno, estar pendiente de sus dificultades, observar las diferencias individuales, contribuir con la predominancia del respeto mutuo en la promoción, establecer un ambiente de confianza para que todos puedan preguntar lo que sea y tener paciencia para contestarlos. Todo ello colabora para que el alumno se motive.

Otro aspecto considerado relevante es la interacción entre los docentes universitarios que será sintetizado en la siguiente sección.

9.7.2. La interacción entre docentes universitarios

Las principales interacciones entre los docentes universitarios, en la concepción de los profesores-formadores, generalmente se relacionan con el diseño e implementación del currículo de la carrera, o con el desarrollo colectivo de un proyecto de estudio. La primera situación ha sido comentada por P10 de la siguiente manera:

> Las experiencias que mis alumnos de todo Brasil traen son de proyectos, es decir, creo que la manera de desarrollar o no una buena carrera de Licenciatura en Matemáticas, sea a través de un proyecto en que todos colaboren: profesores, alumnos e institución. Defiendo, además, que solo lograremos un buen currículo para dicha licenciatura a partir de un trabajo integrado de los profesores. No creo que sea el currículo el que debe cambiar, sino nuestra manera individualista de trabajar.

Ese relato pone de manifiesto la necesidad del trabajo colectivo para implementar el currículo de la Licenciatura en Matemáticas de manera participativa. Asimismo, evidencia el trabajo individualista que suele realizarse en el ámbito universitario.

Por otra parte, P9 ha resaltado con mucho entusiasmo el desarrollo colectivo de un proyecto por un equipo de profesores universitarios. Según ha declarado:

> Me parece interesante reflexionar sobre el por qué el alumno compra algo. Sólo compramos un objeto cuando vemos que el otro está entusiasmado con el producto que está intentando vender. Cuando realiza un trabajo un poco más osado es fundamental tener un equipo de trabajo, pues aventurarse en hacer algo solo puede hacer con que uno se sienta inseguro. Nuestro equipo añadió una realización tanto personal como profesional increíble. Íbamos a clase entusiasmadísimos porque estábamos descubriendo cosas y creo que eso es un punto fundamental, ya que el alumno ve que tú estás con una disposición diferente, que tienes ganas de pasarle lo que estás descubriendo para que él también tenga y halle esta oportunidad.

En este caso, la interacción docente ha contribuido al desarrollo de un trabajo colectivo dirigido a la mejora del aprendizaje de los estudiantes universitarios de Cálculo. Por otra parte, al referirse a cómo tornar la enseñanza del Cálculo importante para la formación del profesor de matemáticas de la enseñanza secundaria, P4 ha considerado:

> Que sólo se podrá conseguir eso a través de reuniones pedagógicas, en las cuales el profesorado de las disciplinas básicas pueda interactuar con los profesores responsables por las disciplinas de carácter profesional.

De esta manera, P4 considera que a través de reuniones pedagógicas y del intercambio de experiencias, los profesores de las asignaturas de carácter general, como el Cálculo, podrán interactuar con los colegas responsables por otras disciplinas integrantes del currículo de la carrera, resaltando los temas de Cálculo que serán usados como herramientas en el desarrollo de de las mismas.

9.7.3. La interacción entre discentes y autonomía

La interacción entre los discentes universitarios de Cálculo se produce, por medio de la realización de actividades asignadas por sus profesores. Dichas actividades suelen ser realizadas en clase. No obstante, cuando se trata del desarrollo de un proyecto por los estudiantes, éstos necesitan dedicarles, además, un considerable tiempo extra-clase. En todos los relatos sobre el proceso de aprendizaje discente, los profesores-formadores han resaltado la importancia del desarrollo de actividades en grupo por los estudiantes. En este sentido, P3 ha considerado que:

> Las relaciones humanas son potenciadas por las actividades en grupo, las cuales puedes realizarse a través de proyectos. Una de las cosas más importantes de la investigación de campo es que éstas se constituye en una excelente estrategia para esto. Tras la recogida de los datos, los estudiantes suelen juntarse, incluso, en un bar para discutir lo que había pasado en el proceso de la investigación de campo; ellos hacen planteamientos de las cosas y de allí pueden surgir los grandes modelos matemáticos, a partir de la interrelación humana.

Sin embargo, P3 reconoce tanto la importancia de la interacción entre los estudiantes, como la dificultad que presupone para el docente de Cálculo desarrollar dicho curso a través de proyectos que demandan una investigación de campo. Esto requiere además de una adecuada preparación del docente, una concienciación y tutoría para los estudiantes mientras ellos desarrollan sus actividades.

Otra experiencia que refleja la interacción entre los estudiantes en las clases de Cálculo fue descrita por P5 de la siguiente manera:

> A causa de ello, conseguimos que interactuaran unos con los otros, que se prestasen ayuda mutuamente y al fin y al cabo les parecía bien la metodología. Así que trabajaban siempre en parejas o grupos y les atendía en sus pupitres, no iba más a la pizarra y se terminaron las clases expositivas.

A partir de los relatos de los profesores-formadores, podemos inferir que la autonomía de los estudiantes se potencia por medio de la utilización de estrategias didácticas, en las cuales una parte de las actividades desarrolladas en el proceso de estudio del Cálculo se quedan a cargo de los estudiantes. En este sentido:

> […] El estudiante deberá asumir la responsabilidad por su producción, lo que resultará en aprendizaje. Es decir, pensamos que ese es un paso importante para el estudiante en su aprendizado, cuando éste inicia el desarrollo de su autonomía, visto que el profesor suele convertirse en el único responsable por validar el trabajo del estudiante […] (Allevato y Onuchic, 2009, p. 214).

9.8. DIMENSIÓN ECOLÓGICA

En esta dimensión sintetizamos las opiniones de los entrevistados relativas a la adaptación socio-profesional y cultural de los futuros profesores de matemáticas y la apertura hacia la innovación didáctica.

9.8.1. La adaptación socio-profesional y cultural de los profesores y la apertura hacia la innovación didáctica

Todos los profesores-formadores declararon que tras su formación académica (graduación o postgrado) empezaron a dar clases en la enseñanza universitaria. Este hecho ha implicado en la necesidad de adaptación socio-profesional a las condiciones institucionales y a la realidad de las carreras en que desarrollaban su labor profesional. A lo largo de su vida profesional, diversos docentes han comentado su interés en ampliar su conocimiento, desde la perspectiva educativa, como vía para lograr la mejora de la calidad del proceso de estudio implementado. Esto se produjo, especialmente a través de la realización del postgrado.

En este sentido, P3 ha relacionado el tema de su tesis doctoral, desarrollada en el área de Educación Matemática, con su experiencia académica en la enseñanza universitaria del Cálculo. Según su afirmación:

> Cuando fui a desarrollar mi tesis, elegí un tema de enseñanza de Cálculo por mi vasta experiencia en esta área. Cuando miré mi currículo, mi principal actuación en la universidad había sido en los cursos de Cálculo (Cálculo I, II, III y IV); había dado clase, hasta 1993, en más de sesenta cursos de Cálculo para estudiantes de distintas carreras: Matemáticas, Arquitectura, Ingenierías, Administración y Ciencias Económicas.

No obstante, P7 al referirse a su doctorado, ha explicitado que quería realizarlo en el área de Educación Matemática, pero tuvo que adaptarse a otro programa por cuestiones familiares y de movilidad.

Por otra parte, P5 relató que al observar el bajo nivel de aprendizaje de sus estudiantes, comenzó a reflexionar sobre las posibles alternativas para revertir dicho proceso. En esta dirección, ha afirmado que:

> He empezado a preocuparme y pasé a reflexionar sobre la Educación Matemática y a participar de proyectos de integración de la universidad con la comunidad, con la enseñanza básica, con el programa de educación y ciencias. Asimismo, participaba de encuentros, seminarios y tuve mejores oportunidades para reflexionar y estudiar.

Con relación a la adaptación del currículo de la licenciatura en matemáticas al entorno social y cultural, P7 ha considerado satisfactorio el proyecto pedagógico de la Licenciatura en Matemáticas diseñado e implementado en su universidad. No obstante apunta hacia su perfeccionamiento y mejora de la calidad. Según su consideración:

> Nuestro proyecto pedagógico no es algo que está en el papel, es un proyecto que está en la mesa de cada profesor. El profesor tiene que estar trabajando en consonancia con aquellas directrices. Y eso es muy difícil; pero ahora que cerramos la primera promoción, legalmente se nos requiere hacer cambios. Nos reunimos e hicimos una evaluación pero nadie quería cambiar nada y eso es sorprendente. Eso es muy bueno, pero ahora vamos a intentar ampliar la calidad, es decir, perfeccionar sobre lo que ya tenemos.

Resaltamos, además, el relato de P3 relativo a la formación ciudadana y crítica de los futuros profesores de matemáticas de la secundaria. :

> La formación del profesor no es solamente en Matemáticas. Él es un ciudadano y tiene que contribuir con la sociedad en la cual está insertado a través de las Matemáticas. Debe ser capaz de solucionar los problemas de otras áreas del conocimiento demandados por sus alumnos. Tiene que saber relacionar las Matemáticas con distintos fenómenos. Además, es necesario ser un ciudadano crítico, especialmente en lo que se refiere a las informaciones matemáticas que suelen presentarse en los medios de comunicación.

Todo lo anterior corrobora con la idea de la complejidad existente en la formación del profesor, pues:

> La acción docente requiere del profesor un conjunto de conocimientos metacognitivos articulados a partir de los conocimientos sobre personas, tareas y contenidos. El profesor pone de manifiesto su conocimiento sobre las personas, en lo cual se incluye los conocimientos sobre si propio, sobre los alumnos con los cuales trabaja, sobre la institución donde trabaja, sobre el qué significa aprender y cómo se aprende. […] A lo

> largo de su experiencia, el profesor articula conocimientos sobre los temas Matemáticas, agregándoles, por ejemplo, los conocimientos sobre los prerrequisitos que el alumno debe presentar para comprender un cierto contenido y sobre el mejor momento para introducirlo. Dicho conocimiento contempla el conocimiento experiencial, que reúne informaciones diversificadas sobre el perfil de los alumnos, las dificultades del tema, los posibles obstáculos para entenderlo, etc. (Frota, 2009, p. 75).

En esta concepción, la referida formación debe ser coherente con las demandas sociales, cuyos fenómenos deben no solamente estar relacionados con las Matemáticas, sino solucionados a través de las herramientas matemáticas. Esto requiere una adaptación de los docentes universitarios para la discusión colectiva y en el desarrollo participativo del currículo de la Licenciatura en Matemática, y del Cálculo en particular.

Al abordar las principales necesidades que se requiere de los profesores de matemáticas para el éxito de propuestas de cambio curricular, Onuchic y Allevato (2009) resaltan la capacidad para aplicar diversos abordajes a situaciones-problema que suelen involucrar varias ramas de las Matemáticas. En este sentido, las investigadoras han destacado que estos docentes deben poseer una sólida formación en Estadística y Probabilidades, Geometría y Cálculo; una buena base en Algebra; cierta familiaridad con las matemáticas discretas; vivencias con diversas perspectivas pedagógicas y familiaridad con las tecnologías.

Finalmente, corroboramos con la afirmación de Bisognin, Bisognin y Buriol (2009) que haciendo referencia al trabajo de Fiorentini y Lorenzato (2006), consideran que los trabajos desarrollados sobre la formación de profesores de matemáticas, especialmente de los profesores-formadores:

> Ponen de manifiesto la necesidad de realización de cambios significativos en la formación de futuros profesores de matemáticas. Dicha formación debe priorizar el desarrollo de actitudes y capacidades intelectuales para que los egresos de las licenciaturas en general, y particularmente de la Licenciatura en Matemáticas, sean personas autónomas e capaces de atender a las demandas de la sociedad actual. Sin embargo, el ejercicio de la docencia en muchas de las carreras de formación de profesores aun permanece circunscripto a la idea de que no se necesita de una preparación específica para la docencia en el nivel universitario y de que el conocimiento del contenido específico puede desarrollar la competencia para enseñar, sin tener en cuenta a quién, el cómo y el para qué se enseña (p. 189).

9.9. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

La noción de idoneidad didáctica se ha revelado potente en el análisis y sistematización de los conocimientos profesionales que los profesores-formadores han puesto de manifiesto sobre los procesos de estudio de la integral en el contexto especificado en nuestra investigación. Corroboramos con Chapman (2008) en lo que se refiere a considerar la propia práctica “puede constituirse en la base para el aprendizaje del profesor-formador” (p. 117). Los conocimientos profesionales de los profesores-formadores que participaron de nuestra investigación corresponden, en alto grado, con los resultados de los estudios realizados en Didáctica del Cálculo relacionados con la integral. Todo ello ha posibilitado caracterizar dichos conocimientos profesionales en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. Se trata de un proceso continuo, desarrollado a lo largo de la vida del docente de manera tanto informal como formal, posibilitándoles ser “vistos como aprendices que continuamente reflexionan sobre su trabajo y dan sentido a las historias, a sus prácticas y a otras experiencias” (Ibíd., p. 879) personales y profesionales sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la integral en el ámbito universitario. Finalmente, consideramos que los conocimientos profesionales de los profesores-formadores son extremamente relevantes para la identificación de criterios que posibiliten un coherente y adecuado análisis de la idoneidad didáctica del proceso de estudio de la integral en el contexto socio-profesional de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil.

Capítulo 10

SÍNTESIS, APORTACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

10.1. INTRODUCCIÓN

Cuando pretendemos diseñar, implementar y evaluar planes de formación matemática y didáctica de la mayor calidad posible, es necesario tener en cuenta los diversos planteamientos epistemológicos sobre la propia Matemática, las diversas teorías del aprendizaje (dimensión cognitivo – afectiva), los modelos instruccionales y la necesaria adaptación al contexto socio-profesional en el que tienen lugar los procesos formativos. Además, la gran cantidad de investigaciones realizadas sobre formación de profesores de matemáticas, como se pone de manifiesto en los capítulos dedicados al tema en los "Handbooks" de Educación Matemática (Gutierrez y Boero, 2006; Lester, 2007; Wood, 2008) exigen centrar el contenido matemático específico sobre el cual se pretende investigar. En nuestro caso, apoyados también en nuestra propia experiencia como formador, hemos optado por centrar la investigación en el campo del "Pensamiento matemático avanzado", Didáctica del Cálculo, y más concretamente en el "objeto matemático" *integral*.

Teniendo en cuenta la diversidad de enfoques y paradigmas de investigación, los cuales con frecuencia enfatizan una de las dimensiones implicadas (frecuentemente el componente cognitivo o el pedagógico), hemos optado por aplicar el "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS) (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). La noción de *idoneidad didáctica* de los procesos de estudio matemático nos ha atraído la atención por su potencialidad para articular las diversas facetas y componentes que caracterizan la complejidad de los procesos formativos en Educación Matemática. Las herramientas teóricas desarrolladas en el EOS se han revelado potentes para caracterizar y sistematizar la idoneidad del proceso de estudio de la integral en el contexto socio-profesional de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil.

A continuación, presentaremos las conclusiones respecto a los objetivos e hipótesis, las cuales se constituyen en las principales aportaciones de nuestra investigación.

10.2. CONCLUSIONES CON RELACIÓN A LOS OBJETIVOS Y LAS HIPÓTESIS

El objetivo general de nuestra investigación, planteado en el Capítulo 3, consiste en *caracterizar los procesos de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria por medio de la noción de idoneidad didáctica.*

Dicho objetivo general lo hemos dividido en cuatro objetivos específicos, cuyos resultados y grado de cumplimiento se presentan a continuación.

Objetivo 1

Reconstruir el significado institucional de referencia de la integral a partir de un estudio histórico-epistemológico-didáctico del Cálculo.

Este objetivo se ha concretado a partir de un estudio realizado para precisar los diversos significados de la integral, conocer el origen de esta noción, y cómo emergió y evolucionó a lo largo del desarrollo histórico del Cálculo. Asimismo, identificamos los conceptos fundamentales con los cuales se relaciona la integral y el papel que ésta desempeña en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas. Para ello realizamos un estudio histórico-epistemológico-didáctico de la integral, contemplado en el Capítulo 4. El interés principal de dicho estudio consistió en identificar el significado institucional global de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de secundaria, lo que sintetizamos en la sección 4.6. Este estudio ha sido ampliado a partir de nuestro *Trabajo de Investigación Tutelada* (Crisostomo, 2004) y sus resultados parciales, relacionados con los significados de la integral definida desde la perspectiva histórica, ha sido publicado en Crisostomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2006).

El estudio histórico-epistemológico-didáctico de la integral ha servido de referencia para la reconstrucción del significado de la integral teniendo en cuenta la noción de *configuración epistémica del EOS.* Dicho estudio ha revelado que la génesis de la integral puede ser ubicada en las aplicaciones de esta noción en la resolución de problemas que requerían la utilización de métodos intuitivos, en el sentido similar a aquellos utilizados por Arquímedes (*configuración epistémica intuitiva)*. La utilización de la integración en la resolución de problemas relacionados con otras áreas de conocimiento, especialmente con la Física, también ha sido evidenciada en la evolución histórica de la integral, y fue sistematizada, en esta investigación, por medio de la *configuración epistémica extramatemática.* Por otra parte, la noción de la integral era aplicada a los problemas típicos de la Geometría, y el significado puesto en juego en este contexto ha sido ubicado en la *configuración epistémica geométrica*. Los problemas abordados en el siglo XVII, en el período de "creación" del Cálculo, se centraban en el cálculo de primitivas y constituyen la base de la *configuración epistémica primitiva*. Otra configuración, cuya principal problemática consiste en encontrar un valor aproximado para la integral definida de funciones cuya primitiva no se podía determinar debido a su grado de complejidad, o imposibilidad de hallarla cuando ésta no existía ha sido sistematizada como *configuración epistémica aproximada*. La transición de los problemas estáticos del Cálculo para otros más dinámicos, relacionados a las nociones del cambio y del movimiento, ha originado un significado para la integral basado en la noción de acumulación, donde situamos la *configuración epistémica acumulada.* La fundamentación de la integral se produjo con la elaboración de definiciones más precisas, basadas en el paso al límite e independientes de la geometría, caracterizadas por el "aritmetización del Análisis", contexto en el cual sistematizamos la *configuración epistémica* *sumatoria*. Finalmente, consideramos que el desarrollo de las tecnologías, especialmente en las últimas décadas, ha permitido tornar disponibles nuevas herramientas útiles para la implementación del proceso de estudio de las Matemáticas y, particularmente del Cálculo Integral, basado en la elaboración de propuestas didácticas diferenciadas, destinadas a la mejora del aprendizaje de los estudiantes. Esto ha implicado en nuevas posibilidades para la proposición de situaciones-problema relacionadas con la integral, cuyas soluciones no solamente puede ser potencializada por medio de la visualización (incluso de los aspectos dinámicos), sino que tornan innecesarios los procedimientos algorítmicos/algebraicos que han causado tantos obstáculos en el proceso de aprendizaje del Cálculo Integral. Consideramos que esto ha posibilitado atribuir un significado tecnológico a la noción de integral, lo que hemos sistematizado, en nuestra investigación, por medio de la *configuración epistémica tecnológica* de la integral.

Resaltamos que las configuraciones epistémicas han sido sistematizadas teniendo en cuenta el contexto de la investigación. En nuestro estudio, nos interesamos por los significados actualmente atribuidos para la integral en un curso introductorio de Cálculo destinado a la formación inicial de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil. En este sentido, encontramos que las ocho configuraciones epistémicas emergen del estudio histórico-epistemológico-didáctico da integral. Asimismo, la noción de la integral sistematizada en estas configuraciones parciales se ponen de manifiesto, de manera complementaria, en los libros de texto de Cálculo, por medio del conocimiento profesional de los profesores-formadores referentes al proceso de estudio de la integral, y a través de diversas investigaciones realizadas en Didáctica del Cálculo (las cuales hemos hecho referencia en el Capítulo 9 para cada configuración). Las ocho configuraciones epistémicas parciales consisten, en el contexto de esta investigación, en el significado de referencia de la integral.

El significado institucional de referencia de la integral, ha sido ajustado, según el interés de esta investigación, de manera a contemplar el significado de la integral en el contexto de un curso introductorio de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. Dicho significado ha sido útil para: (1) proporcionar parte de los indicadores que hemos utilizado para la elaboración de una pauta de análisis de la idoneidad del proceso de estudio de la integral (Tabla 7.1); (2) realizar el análisis de los capítulos de dos libros de texto de Cálculo, relacionados con la noción de integral, que se utilizan en la Licenciatura en Matemáticas (Capítulo 6); (3) sistematizar los significados personales atribuidos por los profesores-formadores a la integral (Capítulos 7, 8 y 9); y, (4) caracterizar el proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemática desde la perspectiva de profesores–formadores, teniendo en cuenta la noción de idoneidad didáctica (Capítulos 7, 8 y 9).

A partir de la génesis y desarrollo histórico de la integral, hemos constatado la complejidad existente en la evolución de dicha noción, lo que ha permitido identificar posibles dificultades que pueden presentarse en la implementación de su proceso de estudio en un primer curso universitario de Cálculo en el contexto de formación del profesor de matemáticas, tales como: el cambio producido entre la evolución de los contenidos de Cálculo (integrales, derivadas, límites) para la secuencia actualmente utilizada en los currículos de Cálculo (límites, derivadas e integrales) (Turégano, 1994; 1998) lo que ha contribuido con una enseñanza centrada en aspectos más algorítmicos y formales del Cálculo (Artigue, 1991, 1998; Calvo, 1997) y dificulta la visualización de los conceptos (Calvo, 1997; González-Martín, 2004); la consideración de la integral definida siempre como un área y , por lo tanto, que el resultado debe ser siempre positivo (Calvo, 1997; Turégano, 1998; Bezuidenhout y Olivier, 2002; González-Martín, 2004; Ordóñez, 2011); la falta de comprensión del límite potencial (Tall, 1996; González-Martín, 2004; Ordóñez, 2011); la dificultad de comprensión del paso al límite en la fundamentación de la integral definida (Artigue, 1998, 2003; Ordóñez, 2011); y la tensión entre la intuición y el rigor en la enseñanza del Cálculo y del Análisis Matemático (Reis, 2001), sin delimitación de las “fronteras” entre dichas asignaturas en lo que se refiere a cómo debe ser tratado el concepto de integral en un curso introductorio de Cálculo.

Objetivo 2

Sintetizar el currículo propuesto para la Licenciatura en Matemáticas en Brasil y, particularmente, el currículo de Cálculo Diferencial e Integral.

El interés de este objetivo consiste en reflexionar sobre el currículo referente a la formación de profesores en Brasil, particularmente en lo que concierne al currículo propuesto para la Licenciatura en Matemáticas y para el Cálculo en dicha licenciatura. Para ello hemos analizado las directrices curriculares propuestas para la formación de profesores de matemáticas en Brasil, especialmente las Resoluciones del Consejo Nacional de Educación - CNE (Resolución CNE/CES 1/2002 y Resolución CNE/CES 2/2002) y el Parecer CNE/CES 1320/2001. Este objetivo ha sido contemplado en el Capítulo 5 y revela la complejidad del Sistema Educacional Brasileño, y la posibilidad de organización de una diversidad de currículos para la Licenciatura en Matemáticas que se realiza en el territorio nacional tanto en las universidades (públicas o privadas) o en otras Instituciones de Enseñanza Superior (Facultades, Centros Universitarios, Institutos de Educación) en distintas modalidades (presencial, a distancia) y con diferentes niveles. Otro aspecto que destacamos se refiere a la contradicción entre la unidad que debería haber entre teoría y práctica en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas y la ruptura entre ambas a partir de las referidas Resoluciones, constatada en el estudio de Silva (2004).

A partir del análisis de las orientaciones curriculares para la formación de profesores de secundaria y de la literatura específica que hemos consultado, hemos sintetizado los significados pretendidos para la Licenciatura en Matemáticas en Brasil, así como también hemos encontrado algunos de los criterios que han posibilitado sintetizar el significado pretendido para el proceso de estudio del Cálculo Diferencial e Integral. Identificamos, además, algunas razones que han llevado tanto a los profesores como a los estudiantes a sentirse frustrados con el actual desarrollo del currículo del Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas, entre los cuales resaltamos: (1) La no contemplación de las nociones de Cálculo en los niveles preuniversitarios; (2) El insatisfactorio dominio de las técnicas operatorias y del lenguaje lógico-formal de matemática por los estudiantes que empiezan la carrera universitaria;

(3) El precario equilibrio entre el abordaje conceptual del Cálculo y el aprendizaje de las técnicas; (4) la reducción de los conceptos de Cálculo a algoritmos; (5) La necesidad de definición y elección de mecanismos de negociación que posibiliten la apropiación de los significados de referencia deseados para las nociones matemáticas desarrolladas en el curso de Cálculo (Barufi, 2002).

Objetivo 3

Analizar los significados de la integral contemplados en los libros de texto de Cálculo utilizados en la Licenciatura en Matemáticas.

Este objetivo permitió completar la caracterización de los significados institucionales planificados para el proceso de estudio del Cálculo Integral en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas. En el Capítulo 6 de esta memoria, hemos realizado un análisis de la trayectoria didáctica seguida por dos libros de texto que se encuentran entre los más indicados por los profesores-formadores para la implementación de proceso de estudio de la. Mediante el análisis global de los capítulos relacionados con la integral, de las configuraciones epistémicas intermedias y puntuales se aplica y desarrolla la metodología de análisis de libros de texto propuesta en el marco del EOS, adaptada a partir del estudio de Godino, Font y Wilhelmi (2006).

Barufi (1999) tras realizar un análisis sintético de 24 libros de texto de Cálculo, constató que la estructura existente en algunos de los libros se acercaba más al currículo de Análisis Real que al de Cálculo. La discrepancia entre la estructura de dichos libros y los significados pretendidos para un curso introductorio de Cálculo ha llevado a esta autora a considerarlos inadecuados para un curso destinado a todos los estudiantes de un curso de Cálculo. Además, se ha constatado que varios libros de texto no ponen el énfasis en las ideas importantes del Cálculo, que pueden ser desarrolladas a través del planteamiento de problemas importantes e innovadores. Aunque haya una variedad de libros de texto que no introducen los temas por medio de situaciones-problema, sus autores resaltan que el Cálculo tiene diversas aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento. No obstante, la referida autora ha concluido que muchos de los libros de texto analizados son significativos, importantes y compatibles con el modelo teórico utilizado, afirmando que “libros buenos siempre han existido” (p. 127).

La diferencia básica entre el análisis de los libros de texto que hemos realizado y el estudio anteriormente mencionado consiste en que nos interesamos por desarrollar y aplicar una metodología específica, que ha permitido analizar, con detalle y profundidad, dos libros de texto de Cálculo que suelen ser utilizados en los cursos introductorios de Cálculo en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil.

Nuestro análisis ha permitido sistematizar las distintas configuraciones epistémicas de la integral que han sido contempladas en los referidos libros. A las configuraciones epistémicas obtenidas por la complementariedad de de los significados planificados para la integral en los dos libros de texto analizados, les asociamos el significado de referencia de la integral presente en los libros de texto de Cálculo en el contexto de la formación de profesores de matemática en Brasil.

Consideramos que el significado de referencia de la integral, sistematizado en este análisis, es representativo del significado planificado para la integral en los libros de texto de Cálculo que suelen ser utilizados en el curso introductorio de Cálculo en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. Asimismo, resaltamos que la sistematización final del significado de referencia de la integral ha sido plasmado tras realización de contraste entre el análisis de libros de texto de Cálculo, el análisis de los antecedentes de esta investigación y los significados personales que han puesto de manifiesto los profesores-formadores sobre la integral.

Objetivo 4

Sistematizar los conocimientos profesionales que los profesores-formadores ponen de manifiesto sobre el proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil.

Para la concreción de este objetivo elaboramos un instrumento de entrevista semiestructurada basado en las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico. Posteriormente, realizamos entrevistas a diez profesores-formadores, expertos en la enseñanza del Cálculo en el nivel universitario. El análisis de dichas entrevistas ha sido realizado a través de dos estudios de casos, en los cuales desarrollamos un análisis en profundidad de las narrativas de dos profesores-formadores (Capítulos 7 y 8), y de la memoria compartida de los profesores-formadores (Capítulo 9). En ambos se tiene en cuenta la utilización de las narrativas y de las herramientas teóricas desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico, especialmente relacionadas con la noción de idoneidad didáctica.

Consideramos que este objetivo ha posibilitado realizar un análisis de la dialéctica entre los significados personales, identificados en nuestra investigación con el conocimiento profesional puesto de manifiesto por los profesores-formadores sobre el proceso de estudio de la integral, y los significados institucionales pretendidos, plasmados en los antecedentes, libros de texto y documentos curriculares. Dicho conocimiento profesional lo sistematizamos, en el marco del EOS, por medio de la caracterización de los procesos de estudio de la integral en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. En este sentido, estos conocimientos profesionales de los profesores-formadores sobre el proceso de estudio de la integral en el contexto socio-profesional de nuestra investigación corresponden a los significados institucionales de esta noción matemática y aportan criterios de la idoneidad didáctica a tener en cuenta en el diseño, planificación e implementación de la integral definida en el curso introductorio de Cálculo.

En el Capítulo 7 hemos sistematizado el Caso I, y en el Capítulo 8, el Caso II. La síntesis general de las diez entrevistas está plasmada en el Capítulo 9, por medio de lo que nombramos memoria compartida de los profesores-formadores, donde tenemos en cuenta, además, los estudios de los antecedentes.

En el caso I, hemos caracterizado los *significados personales* del profesor-formador P1 sobre la Didáctica de la integral. Para esto, hemos utilizado, inicialmente, la *metodología de las narrativas* para analizar la formación, experiencia profesional, y la motivación de P1 para elaborar su primer libro de texto. En la segunda parte del análisis, utilizamos algunas herramientas teóricas del EOS. Las seis dimensiones de la *idoneidad didáctica* desarrolladas en el EOS: epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica se han revelado potentes y útiles para la sistematización y caracterización de los significados personales de P1.

Consideramos que los significados personales puestos de manifiesto por P1, han emergido no solamente a partir de su práctica docente, como profesor-formador, sino también como resultado del proceso formativo (formal y no formal) y de las experiencias vivenciadas a lo largo de la vida profesional. En este sentido, observamos la estrecha relación entre los constructos significados personales de P1 (Godino y Batanero, 1998) y el conocimiento profesional de los profesores-formadores (Ruthven, 2002; Zaslavsky, Chapman y Leikin, 2003), que comprende los conocimientos que deben tener los profesores-formadores (Jaworski, 2008). Constatamos que las experiencias personales de P1 han sido resaltadas en distintos momentos de su entrevista, como vía de explicación o justificación de su quehacer profesional.

En lo que se refiere al análisis de la entrevista realizada con el profesor-formador P2, encontramos que los significados personales puestos de manifiesto sobre la Didáctica de la integral son fruto, así mismo, de su práctica profesional en la docencia e investigación relacionada con el Cálculo y el Análisis Matemático. P2 ha evidenciado su adaptabilidad a las demandas profesionales al mencionar su actuación profesional en su labor universitaria, así como también su formación posgraduada (a través del Doctorado y Pos doctorado) realizada en el ámbito de la Educación Matemática. En este sentido, su conocimiento profesional viene siendo construido a partir de sus experiencias individuales y sociales con el entorno de su actuación profesional, así como por medio de las interacciones producidas con estudiantes, profesores y demás personas involucradas en su contexto profesional, lo que requiere de reflexión y adaptación (Zaslavsky, Chapman y Leikin, 2003).

En la dimensión epistémica, hemos sistematizado los significados personales de P2 sobre la Didáctica de la integral. Los referidos significados personales contemplan las *configuraciones epistémicas primitiva, geométrica,* *extramatemática, acumulada y tecnológica.* No obstante, corroborando con algunos estudios desarrollados en Didáctica del Cálculo, entre los cuales se resaltan aquellos realizados en la línea del *Pensamiento Matemático Avanzado* (Tall, 1996; Kouropatov y Dreyfus, 2009), P2 considera que el significado de la integral definida, sistematizado en nuestra investigación por medio de la *configuración epistémica acumulada,* debe priorizarse en la enseñanza de la integral definida. En lo que se refiere a la integral indefinida, la sugerencia de P2 consiste en desarrollarla a través de la primitivación, enfatizándose la idea del *hacer y deshacer* propuesta por Tall (1996).

A continuación, presentamos las principales conclusiones relacionadas con las hipótesis.

Hipótesis 1

El proceso de estudio del Cálculo Integral en la enseñanza universitaria es complejo y su diseño e implementación en la formación de profesores de matemáticas debe tener en cuenta la reconstrucción cognitiva requerida por la transición de la matemática elemental hacia la matemática superior y los distintos significados de la integral.

Al abordar la transición del pensamiento matemático elemental hacia el pensamiento matemático avanzado, Tall (1991b) afirma que los conflictos iniciales enfrentados por los estudiantes con las abstracciones formales, al iniciar su carrera universitaria, requieren que éstos desarrollen una reconstrucción cognitiva para superarlos. Asimismo, constatamos en las investigaciones realizadas por Artigue (1991; 2003), al abordar las principales dificultades que los estudiantes enfrentan en un curso introductorio de Cálculo en la enseñanza universitaria, la necesidad de desarrollar procesos de estudio del Cálculo Integral centrados en la construcción de significados para la noción de integral, en lugar de la excesiva algebrización con la cual suele implementarse. Dicho proceso requiere del estudiante la formalización de las nociones matemáticas y, consecuentemente, una ruptura del procedimiento algebraico ordinario y la construcción de significados (Artigue, 1998; 2003). La complejidad que involucra el proceso de estudios del Cálculo ha sido considerada en distintas investigaciones, entre las cuales resaltamos:

Domingos (2006) ha abordado la problemática relacionada a la comprensión de conceptos matemáticos por los estudiantes de la enseñanza universitaria; Thompson y Silverman (2007) han destacado la complejidad de la noción de acumulación, desde la perspectiva de un abordaje matemática formal, aunque considera ésta como central en el proceso de estudio del Cálculo; Jaworski (2008) ha reconocido la complejidad del proceso de enseñanza de las matemáticas, asociándola con lo que debe conocer los profesores, y postuló que el objetivo común tanto de los profesores de matemáticas como de los profesores-formadores consiste en posibilitar oportunidades para el desarrollo del aprendizaje matemática de los estudiantes.

Por otra parte, en las entrevistas que hemos realizado con los profesores-formadores, encontramos afirmaciones relativas a la referida hipótesis, entre las cuales resaltamos en esta síntesis, las siguientes:

> Yo busqué alejarme de la idea del "rigor prematuro" – dejándolo para un curso de Análisis Matemático – y desarrollar pronto las "ideas" del Cálculo, pues los alumnos de las carreras de Física, Ingeniería y Matemáticas necesitan aprender luego los recursos y las técnicas del Cálculo. Por la importancia de estos aspectos, yo los he contemplado en mis libros de texto. [...] Cuando iniciábamos la carrera universitaria se asumía el presupuesto que los conocimientos previos ya estaban consolidados. Por esto, ya empezábamos con un curso formal de análisis matemático; hoy día necesitamos retomar los contenidos algebraicos básicos con los estudiantes, repasar un poco de geometría analítica, de trigonometría, etc. Es decir, hemos que retomar los temas de la enseñanza secundaria (P1).

Consideramos que esta hipótesis ha sido confirmada, pues hemos constatado que la complejidad del proceso de estudio de la integral está plasmada en las distintas investigaciones realizadas en Didáctica del Cálculo (Capítulo 1), en la diversidad de secuencias contempladas en los libros de texto de Cálculo para organizar el tema de la integral (Capítulo 6), y en las informaciones aportadas por los profesores-formadores (Capítulos 7, 8 y 9).

Hipótesis 2

Los profesores-formadores consideran que los libros de texto de Cálculo juegan un papel importante en los procesos de estudio de la integral, y que éstos son representativos en cuanto a los significados de la integral que deben ser implementados en el contexto de la formación de profesores de matemáticas.

La importancia del libro de texto como recurso didáctico fue resaltada por diversos investigadores, como Rico (1990) y Reis (2001). En estudios sobre este tema encontramos que el libro, juntamente con el currículo, constituye un nivel de transposición didáctica cuya ayuda es inestimable para los profesores en sus clases. Asimismo, consideran que los libros de texto reflejan la postura, los saberes particulares y la experiencia de sus autores.

En este sentido, consideramos que algunos de los estudiantes suelen utilizar el libro de texto como referencia básica de los significados institucionales planificados, convirtiéndole en el recurso mediacional a través del cual desarrollan su proceso de estudio. En estos casos, al autor del libro se le atribuye el rol de "director" del proceso instruccional, pues éste contribuye con la construcción progresiva del significado institucional de las distintas nociones matemáticas de las cuales deberán apropiarse los estudiantes. Además, en la organización del libro de texto, cada autor no solamente contempla, de manera personalizada, los significados institucionales relacionados con las nociones matemáticas que se desarrollan, sino presenta su propuesta metodológica y sugiere los recursos mediacionales que consideran apropiados al proceso de estudio a que se destina.

En lo que se refiere a las consideraciones de los profesores-formadores, resaltamos, por ejemplo, que P1 afirmó que "ya existe, en los libros de texto, un acuerdo sobre lo que se debe hacer en los cursos de Cálculo". Según dicha consideración, el significado institucional de referencia para la integral se encuentra en los libros de texto de Cálculo de manera relativamente consensuada entre sus autores. Según dicha concepción, el libro representaría, en cierta medida, los significados de referencia de las nociones matemáticas que se van a implementar. Sin embargo, esta posición no es convergente entre los profesores-formadores, pues varios han argumentado que cabe al docente universitario precisar, según el currículo de cada carrera y necesidades formativas de los estudiantes, los significados de las nociones matemáticas que pretende implementar en cada carrera.

Lo anterior nos permite considerar que esta hipótesis ha sido confirmada parcialmente. Aunque todos los profesores-formadores y autores de libros de Cálculo consultados han resaltado la importancia de los libros de texto de

Cálculo, y que éstos contemplan los significados de la integral que deben ser implementados en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas, hay varias opiniones de que dichos libros necesitan ser complementados para que atiendan a los propósitos del currículo de la referida licenciatura.

Hipótesis 3

La extracción, codificación y sistematización del conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre el proceso de estudio de la integral aportarán criterios para caracterizar la idoneidad del referido proceso en el contexto de la formación de profesores de matemática.

Esta hipótesis se apoya en el hecho de que el conocimiento profesional puede ser extraído y codificado (Ruthven, 2002) desde la práctica profesional docente. La sistematización de la experiencia académica y de la práctica profesional de los profesores-formadores ha sido realizada a partir de las narrativas (Connelly y Clandinin, 1990; Riessmann, 1993; Cortazzi, 1993; Chapman, 2008). Y la sistematización del proceso de estudio de la integral fue realizada a través de la utilización de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), entre las cuales se destacan las nociones de significado institucional y personal de una noción matemática, configuraciones epistémicas e idoneidad didáctica, las cuales han sido afinadas y aplicadas en nuestra investigación.

En la descripción de las características del proceso de estudio de la integral, por medio de la noción de idoneidad didáctica, hemos tenido en cuenta los estudios documental (revisión de las investigaciones, análisis de currículo y de los libros de texto de Cálculo) y experimental (entrevistas a los profesores-formadores).

En la revisión bibliográfica hemos constatado que las investigaciones desarrolladas en el campo "pensamiento del profesor de matemáticas" y sobre "Didáctica del Cálculo" suelen abordar aspectos parciales del problema. Las investigaciones con abordaje cognitivas son predominantes en Didáctica del Cálculo y se enmarcan, especialmente, en el Pensamiento Matemático Avanzado. En la literatura especializada, se reconocen otros enfoques emergentes en las investigaciones realizadas sobre el pensamiento y el aprendizaje matemático en la educación superior (Artigue, Batanero y Kent, 2007), entre los cuales el Enfoque Ontosemiótico. Según estos autores, entre las principales evoluciones realizadas en dichos estudios, se destaca “la creciente atención que se presta a la dimensión semiótica de actividad matemática y sobre el papel esencial desempeñado por las conexiones entre las representaciones, valores, y perspectivas en pensamiento y aprendizaje matemático” (p. 1043).

Del análisis de las entrevistas realizadas con los profesores-formadores, hemos constatado que todas estas dimensiones de la idoneidad didáctica entran en juego cuando ellos ponen de manifiesto su conocimiento profesional sobre el proceso de estudio de la integral, lo que ha confirmado la referida hipótesis. Tanto la planificación de un tema, particularmente de la integral, como de las clases sobre el mismo, proviene de una matriz del conocimiento profesional del profesor, obtenido a lo largo de su experiencia de enseñanza y aprendizaje del tema o extraída de los materiales curriculares disponibles. En dicha planificación se incluye las tareas a realizarse, las representaciones que se han de emplear, el formato de las actividades que serán utilizadas, y la previsión de las dificultades previas de los estudiantes (Ruthven, 2007). Estos aspectos han sido resaltados en el análisis de las entrevistas realizadas con los profesores-formadores, de las cuales han emergido los descriptores que utilizamos para la caracterización de los procesos de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas de secundaria en Brasil por medio de la idoneidad didáctica. Mientras realizamos el análisis de las entrevistas, hemos completado la tabla 7.1 con otros descriptores provenientes de las aportaciones específicas de los profesores-formadores entrevistados. La caracterización de los procesos de estudio de la integral, realizada a partir de los conocimientos profesionales de los profesores-formadores sobre el tema, consiste en aportaciones de nuestra investigación, y son sintetizadas a continuación.

10.3. CARACTERIZACIÓN DE LOS PROCESOS DE ESTUDIO DE LA INTEGRAL: LA IDONEIDAD DIDÁCTICA Y LOS CONOCIMIENTOS PROFESIONALES DE LOS PROFESORES-FORMADORES

La noción de idoneidad didáctica desarrollada en el EOS está conformada por seis dimensiones: epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica. En consonancia con la metodología cualitativa-interpretativa utilizada en esta investigación hemos desarrollado un estudio de casos en profundidad (Gall, Borg y Gall, 1996, p. 767) con los profesores-formadores. El análisis de los casos, basada en dichas dimensiones, ha puesto de manifiesto los conocimientos que han emergido de los relatos de los entrevistados sobre los procesos de estudio de la integral. Consideramos que la descripción sistemática de dichos conocimientos es una manera de responder a la cuestión central de nuestra investigación, enunciada en los siguientes términos:

> *¿Qué características deberían reunir los procesos formativos de los profesores de matemáticas de secundaria para que alcancen un grado óptimo de idoneidad en las diversas dimensiones y factores implicados?*

A continuación inserimos la síntesis de la caracterización de los procesos de estudio de la integral en la formación de profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria en Brasil, realizada por medio de la noción de idoneidad didáctica, teniendo en cuenta los conocimientos profesionales de los profesores-formadores y los resultados de las investigaciones realizadas en Didáctica del Cálculo.

10.3.1. Dimensión epistémica del proceso de estudio de la integral

A partir de la literatura consultada, del análisis de libros de Cálculo y de las entrevistas realizadas, hemos identificado ocho *configuraciones epistémicas* de la integral que se ponen de manifiesto en el curso introductorio de Cálculo, las cuales fueron sintetizadas en esta investigación de la siguiente manera:

i. *Intuitiva* (situaciones-problema que requieren procedimientos intuitivos asociados a la noción de integral para solucionarlas; no obstante, no se utiliza dicha noción de manera explícita).

ii. *Primitiva* (situaciones-problema que se resuelven a partir de la primitivación de funciones).

iii. *Geométrica* (situaciones-problema que involucran nociones geométricas de áreas, volúmenes, longitud, …).

iv. *Sumatoria* (situaciones-problema cuyas soluciones se obtienen a partir de las sumas de Riemann).

v. *Aproximada* (situaciones-problema cuya solución requiere métodos numéricos aproximados).

vi. *Extramatemática* (situaciones-problema extramatemáticos que se resuelven a partir de la integración).

vii. *Acumulada* (situaciones-problema en las cuales se utiliza el concepto *crecimiento acumulado,* desarrollado en distintos estudios, entre los cuales resaltamos los relacionados con el "pensamiento matemático avanzado").

viii. *Tecnológica* (situaciones-problema cuya solución involucran recursos tecnológicos).

Los elementos que constituyen cada una de dichas configuraciones epistémicas de la integral han sido descritos en el Capítulo 4 y consisten, en consonancia con el Enfoque Ontosemiótico, en el significado de referencia de la integral que debemos tener en cuenta en la planificación e implementación del curso introductorio de Cálculo en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. Las ocho configuraciones epistémicas de la integral han emergido de las informaciones de los entrevistados y constituyen en uno de los aportes de esta investigación (Capítulos 7, 8 y 9).

En la dimensión epistémica de la integral hemos analizado también las *articulaciones y conexiones*, así como las *adaptaciones curriculares*. Encontramos que las ocho configuraciones epistémicas de la integral pueden ser coherentemente articuladas en el diseño, planificación y desarrollo del proceso de estudio de la integral. Los profesores-formadores han puesto de manifiesto las situaciones-problema involucradas en cada caso, a partir de las cuales ha sido posible sistematizar dichas configuraciones e interpretarlas como el significado de referencia de la integral para un curso introductorio de Cálculo.

Entre las relaciones que pueden ser establecidas con la integral, constatamos las *intramatemáticas* (intradisciplinares y interdisciplinares) y las *extramatemáticas.* Por intradisciplinares nos referimos a las relaciones internas al Cálculo, que relacionan la noción de integral con otras nociones tales como derivada, límite, etc. A las relaciones que se establecen entre la integral y otras disciplinas del área de Matemáticas (tales como Álgebra, Geometría Euclidiana Plana y Espacial, Análisis Real, etc.), llamamos relaciones interdisciplinares. Además, quedó evidenciado en las entrevistas las relaciones extramatemáticas que se establecen entre la integral y otras disciplinas del currículo de la Licenciatura en Matemáticas (o áreas de conocimiento) tales como Física, Biología, Economía, Ingenierías, etc. Las relaciones de la integral se asocian a la utilización de dicha noción (de manera intuitiva o formal) en la resolución de situaciones-problema específicas de cada disciplina o área de conocimiento.

Para los descriptores *abordaje y adaptaciones curriculares,* destacamos que hay currículos de la Licenciatura en Matemáticas diseñados e implementados contemplando la formación matemática, didáctica y práctica desde el inicio de la carrera. Esto diverge de los currículos del tipo “3+1” (tres años de disciplinas específicas de la formación matemática y un año de formación didáctica), a través de los cuales se desarrollaba la Licenciatura en Matemáticas y que aun han influenciado dichas licenciaturas en algunas universidades brasileñas (u otras Instituciones de Enseñanza Superior – IES autorizadas a impartirlas).

Los profesores-formadores han puesto énfasis en la importancia del Cálculo en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas. En este sentido, P3 ha resaltado que el Cálculo proporciona al futuro profesor de Matemáticas una visión general de las Matemáticas. Además, ha manifestado una “concepción constructivista” del Cálculo, al afirmar que “se trata de una rama de las matemáticas construida por el hombre y, por lo tanto, se encuentra en desarrollo”. Según dicha concepción, las Matemáticas son frutos de la creación humana y se encuentran en constante desarrollo.

El Cálculo también fue concebido por P3 como “un conocimiento que revolucionó la manera de ver las matemáticas”, por P6 como la “espina dorsal” del currículo de la Licenciatura en Matemáticas, y por P5 como una “disciplina entrelazada a las demás del currículo de la licenciatura”, por lo cual considera relevante hacer hincapié en las relaciones entre el Cálculo y las otras disciplinas. Por otra parte, el papel del Cálculo ha sido resaltado en las investigaciones realizadas en Didáctica del Cálculo. Al discutir los motivos por los cuales se estudia Cálculo, Bressoud (1991, citado por Barufi, 2002) ha considerado dos motivos: el primero se refiere a la variedad de contextos y disciplinas en las cuales se utiliza el Cálculo. El segundo consiste en que el Cálculo se sitúa en los fundamentos de nuestra visión del mundo científico, que ha contribuido con la formación del pensamiento científico moderno. “Cuando hablo de ciencias no me restrinjo a otras disciplinas. En una manera muy significativa, la propia Matemática pasó a ser vista de esta forma con el desarrollo del Cálculo” (p. 70). De manera similar Kouropatov y Dreyfus (2009) han resaltado la relevancia de las nociones de integral y derivada en la formación del “núcleo de un dominio matemático que es un lenguaje, un dispositivo, y una herramienta útil para otros campos como la Física, la Ingeniería, la Economía, y la Estadística” (p. 3-417).

En lo que se refiere a la inclusión de las nociones de Cálculo en el currículo de la enseñanza secundaria en Brasil, la posición de la mayoría de los profesores-formadores ha sido convergente en el sentido de que se debe abordar solamente sus “ideas básicas”, no formalizando las nociones del Cálculo. No obstante, P1 ha considerado importante contemplar procedimientos de resolución de derivadas elementales, y luego utilizarlas en la resolución de situaciones-problema relacionados con conceptos físicos. Para P5, las nociones introductorias del Cálculo pueden ser útiles tratándose de la enseñanza secundaria dirigida a la formación profesional de los estudiantes.

10.3.2. Dimensión cognitiva del proceso de estudio de la integral

Los descriptores utilizados en la sistematización de la dimensión cognitiva consisten en: conocimientos previos de los estudiantes, aprendizaje de los estudiantes, y las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales de los estudiantes.

Sintéticamente, constatamos que hay divergencia entre los profesores-formadores con relación a la necesidad de tener en cuenta determinados prerrequisitos matemáticos de los estudiantes al iniciar la carrera universitaria. Aunque un 50% de los entrevistados lo considera relevante, también hemos obtenido afirmaciones de que estos no son importantes, o que los conocimientos se construyen en el acto del proceso de enseñanza, cabiendo a los profesores de Cálculo realizar un repaso de las nociones previas necesarias para que los estudiantes desarrollen un curso de Cálculo con éxito. Otra consideración interesante que encontramos se refiere al hecho de que las propias nociones desarrolladas en un curso introductorio de Cálculo, como la integral, se convierten en los conocimientos previos para otras disciplinas de la Licenciatura en Matemáticas, tornándose imprescindible que los estudiantes construyan su conocimiento de manera significativa para que puedan pasar, con éxito, a los demás cursos de la carrera. La falta de conocimientos previos es identificada como una de las dificultades de aprendizaje de la integral presentada por los estudiantes (Olímpio Junior, 2006; Cury, 2009; Igliori, 2009).

Con relación al aprendizaje de los estudiantes de las nociones del Cálculo, especialmente de la integral, encontramos diversas consideraciones en las entrevistas con los profesores-formadores y corroboradas en la literatura científica especializada, respectivamente, entre las cuales destacamos: las dificultades de aprendizaje radican en la complejidad de las nociones de Cálculo y en el lenguaje que se utiliza (Tall, 1991c; Artigue, 1991, 2003; Thompson y Silverman, 2007); el proceso de estudio debe iniciarse a partir de los problemas del entorno cotidiano, lo que puede ser llevado a cabo a partir del desarrollo de proyectos de enseñanza (Ribeiro, 2010; Figueiredo, Mello y Santos, 2011); necesidad de más tiempo para profundizar en el aprendizaje de los conceptos y propiedades del Cálculo con los estudiantes (Ruthven, 2007, Lois y Milevicich, 2009); la transición entre las distintas representaciones como clave para el aprendizaje de las nociones del Cálculo (Tall, 1991b; 1996; González-Martín, 2004; Rosken y Rolka, 2006; Camacho, Depool y Garbín, 2008); implicar a los estudiantes en un proceso activo de estudio del Cálculo, y la importancia de conocer los estilos de aprendizaje de los estudiantes como vía de adecuar el proceso de estudio del Cálculo a sus características (Frota, 2009).

Constatamos también la importancia atribuida por los profesores-formadores a la adecuación de su práctica profesional a las necesidades del grupo de estudiantes, teniendo en cuenta la carrera para la cual se planifica e implementa el proceso de estudio del Cálculo y las diferencias individuales de los estudiantes. Resaltamos además la afirmación de P3, referente a la necesidad de cambio de actitud por parte de algunos de los profesores universitarios que planifican sus clases para atender a una reducida cantidad de estudiantes que se destacan en Cálculo. En su opinión, en las instituciones superiores de educación se requieren "docentes que planifiquen sus clases de manera que traten de responder al *por qué* se estudian determinados contenidos, así como el *para qué sirven* y *dónde se aplican* en la práctica profesional". Otro posicionamiento que consideramos relevante mencionar se refiere al éxito de la atención individualizada que algunos de los profesores-formadores han realizado con los estudiantes de Cálculo, de manera individualizada o a través del trabajo en pequeños grupos.

10.3.3. Dimensión mediacional del proceso de estudio de la integral

En esta dimensión hemos analizado las informaciones de los profesores-formadores utilizando los descriptores siguientes: *uso de materiales didácticos y recursos tecnológicos; uso, características y rol del libro de Cálculo; adecuación de los significados pretendidos/implementados al tiempo disponible; e, inversión del tiempo en los contenidos más relevantes y que presentan más dificultades.*

Con relación a los recursos tecnológicos, hemos confirmado que éstos son considerados por los entrevistados como fundamentales para el desarrollo del proceso de estudio de la integral. No obstante, debemos reflexionar sobre algunos de los aspectos señalados en las entrevistas. P2 ha considerado la necesidad de que los profesores universitarios rompan con sus propios modelos formativos, para incorporar los recursos tecnológicos en el proceso de estudio de la integral. P1 resaltó la importancia de estudiar las Matemáticas que han sido utilizadas en el desarrollo de los *softwares* matemáticos que suelen ser utilizados en los cursos de Cálculo. P3 advierte que no basta realizar la modelización de una situación-problema y resolverla por medio de alguno de los *softwares* específicos, sino que hay que verificar la adecuación de la solución presentada en la pantalla al problema específico de Cálculo. La falta de interacción del proceso de estudio del Cálculo con los recursos tecnológicos ha sido apuntada por P10 como uno de los obstáculos para la inserción de situaciones-problema, relacionadas con la realidad de algunas carreras, que requieren la utilización de tecnologías específicas para solucionarlas. Los estudios desarrollados en Didáctica del Cálculo relacionados con la utilización de las tecnologías son abundantes (Tall, 1996; Artigue, 1998; González-Martín, 2004; Depool Rivero, 2005; Ruthven, 2007; Camacho, Depool y Garbín, 2008; Lois y Milevicich, 2009; Tall, 2009) y se refieren, en su mayoría, a la comprensión de conceptos matemáticos, particularmente de la integral. Dichos estudios son predominantemente cognitivos y suelen abordar los constructos desarrollados en el marco del "Pensamiento matemático avanzado".

En lo que se refiere a la utilización del libro de texto de Cálculo, hemos constatado dos afirmaciones relevantes por parte de los profesores-formadores. La primera, considera que el libro es una referencia (o una guía) para que los estudiantes se pongan al día con los temas desarrollados en las clases, especialmente cuando éstos no han podido asistirlas presencialmente y un recurso que orienta el proceso de estudio de Cálculo implementado por el profesor. La segunda, trata de la experiencia del profesor universitario para dar clases de Cálculo, o sea, considera que los profesores universitarios en el inicio de la docencia suelen utilizar los libros tradicionales y seguir su secuencia para tener más seguridad en su quehacer docente; mientras tanto, los profesores con más experiencia académica, aunque utilizan los libros, lo hacen de manera más autónoma. Además, ha sido enfatizada la necesidad de su adecuación no solamente a la carrera, sino al grupo de estudiantes a que está dirigido. Los entrevistados han puesto de manifiesto que al docente de Cálculo le compete complementar los libros y adecuar las situaciones-problema y proyectos a la realidad brasileña, teniendo en cuenta las particularidades de cada carrera en que se va a desarrollar el curso de Cálculo. Las características principales que han sido resaltadas para el libro de Cálculo consisten en la contemplación de los recursos tecnológicos, proyectos, e Historia de las Matemáticas. Asimismo, deben utilizar un lenguaje asequible al estudiante y contemplar ejemplos y aplicaciones diversificadas. Entre las investigaciones relacionadas con libros de texto de Cálculo, resaltamos: Baruffi (1999), Reis (2001), y Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010).

Otro descriptor considerado en la dimensión mediacional ha sido la *adecuación de los significados pretendidos/implementados de la integral al tiempo disponible y a la inversión del tiempo en los contenidos más relevantes*. A partir de dicho descriptor constatamos que: un 60% de los profesores-formadores consideran que la utilización de recursos tecnológicos en el proceso de estudio de la integral potencia la optimización del tiempo. De manera complementaria, P3 afirmó que lo más importante es motivar los estudiantes, añadiendo que ha sido satisfactorio desarrollar un curso introductorio de Cálculo en seis horas semanales, de las cuales dos horas eran dedicadas a las prácticas. La articulación entre la teoría y la práctica fue considerada relevante para el éxito de los estudiantes en Cálculo. En las investigaciones revisadas, además de las propuestas de desarrollo de actividades prácticas relacionadas con la utilización de tecnologías en el proceso de enseñanza del Cálculo, destacamos los estudios relacionados con la Historia de las Matemáticas (Farmaki y Paschos, 2007), y con la “actividad matemática avanzada” propuesta en el estudio de Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005).

Algunas problemáticas han emergido de los relatos de los profesores-formadores, entre las cuales consideramos relevante destacar: hay profesores que centran el curso de Cálculo en los procedimientos algorítmicos, lo que reduce el tiempo destinado a la profundización en los aspectos teóricos y a las aplicaciones de las nociones del Cálculo. La problemática relativa a centralizar el proceso de estudio del Cálculo en procedimientos algorítmicos también ha sido resaltada en diversos estudios (Artigue, 1998, 2003; González-Martín, 2004; Moreno, 2005; Depool Rivero, 2005; Rosken y Rolka, 2006). Por otra parte, la poca experiencia de algunos de los profesores universitarios conlleva a que ellos sigan la secuencia didáctica tal y cual está contemplada en los libros de texto, lo que requiere más tiempo para desarrollar el programa del curso de Cálculo. Aunque el profesor-formador ha afirmado que el tiempo destinado para el curso de Cálculo es poco para profundizar en los contenidos, pone en duda si el tiempo es un factor relevante para superar esta dificultad.

10.3.4. Dimensión afectiva del proceso de estudio del Cálculo

La dimensión afectiva ha sido sistematizada a partir de *los intereses y motivaciones, las actitudes, y las emociones en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo.* Según los entrevistados, los intereses y las motivaciones de los estudiantes se potencian cuando: éstos asumen el protagonismo del proceso de estudio centrado en su aprendizaje (P8); se desarrolla un proceso de estudio bien fundamentado, justificando el por qué de los temas contemplados en el currículo de Cálculo (P2, P3, P4 y P6); se dialoga con los estudiantes e identifican sus intereses (P10); se utilizan los recursos tecnológicos en el proceso de estudio de Cálculo (P2, P3, P4, P5, P8 y P9).

En lo que se refiere a las actitudes que deben desarrollarse, o han sido observadas, en los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas por parte de los profesores-formadores, hemos identificado las siguientes: desarrollo una actitud activa, reflexiva y flexible que posibilite a los futuros profesores de matemáticas afrontar su profesión (P1, P2, P6, P8 y P9); contribución con la superación de las dificultades de los estudiantes (P2, P4 y P10); tendencia a reproducir las actitudes de sus profesores-formadores en su actuación profesional (P4 y P5), en el sentido destacado por Reis (2001).

En lo que se refiere a las emociones observadas en los estudiantes, por los entrevistados, tras desarrollar el proceso de estudio de Cálculo podemos destacar: la relación entre la estrategia didáctica desarrollada por el docente y el grado de satisfacción y éxito de los estudiantes universitarios, reflejados en su autoestima y gusto por las Matemáticas (P2) y el placer que siente el docente al dar una buena clase (P3).

Mientras realizábamos las entrevistas semiestructuradas con los profesores-formadores, nos ha llamado la atención la expresión “buen profesor de matemáticas" utilizada inicialmente por P2. Buscamos identificar qué características debe reunir el docente para que sea considerado un buen profesor de matemáticas. Las principales características relatadas por los entrevistados consisten en que el buen profesor de matemáticas debe: sentir placer en dar clases (P1, P3, P6 y P10); innovarse constantemente y desempeñar el rol de educador (P3, P10); estudiar los procesos de aprendizaje de las Matemáticas de sus alumnos (P10); actualizarse a través de las investigaciones educacionales (P10); interaccionar con docentes y discentes (P10); establecer grupos de trabajo en clase con los alumnos y con los colegas; aprender a intercambiar experiencias; ser un individuo que se sorprenda en descubrir y redescubrir temas sobre Matemáticas; saber lidiar con su propio error y con el error del estudiante (P10); vislumbrar la belleza de las Matemáticas (P6); tener conocimiento matemático y creatividad (P6, P7); ser muy creativo y tener claridad en las ideas cuando las exponga (P6); ser un líder y un amigo de los estudiantes; ser humilde (P6); contribuir para que el alumno sea más feliz en su formación (P4); desarrollar la afectividad con los estudiantes, pues esta parte es la que trae esta felicidad, esa alegría, esas ganas y satisfacción de vivir (P4).

Para concluir esta sección, consideramos que un buen profesor de matemáticas debe poseer un conocimiento profesional que siempre comporte un componente ético y emocional, que implica en la necesidad de motivar los estudiantes hacia su aprendizaje y desarrollo de un ambiente de tolerancia y respeto mutuo en la clase. "Motivar los alumnos es una actividad emocional y social que exige mediaciones complejas de la interacción humana: la seducción, la persuasión, la autoridad, la retórica, la punición, etc." (Tardifi, 2011).

10.3.5. Dimensión interaccional del proceso de estudio de la integral

Los descriptores de la dimensión interaccional que hemos utilizado en esta investigación consisten en las *interacciones docente-discente, la interacción entre docentes, la interacción entre discentes y la autonomía de los estudiantes.*

Con respecto a las interacciones docente-discente hemos extraído informaciones tales como: cualquier acción de éxito fluye a partir de la interacción del profesor y el alumno (P7); tras desarrollar clases de manera más interactiva hubo mejora en el aprendizaje de la integral (P5); los estudiantes deben ser estimulados a expresar sus ideas y formas de pensamiento relativos a los temas estudiados en las clases (P4); los docentes deben propiciar un ambiente de confianza y respeto mutuo para que los estudiantes puedan expresarse en las clases (P6). En lo que se refiere a las interacciones entre los docentes universitarios, P10 ha afirmado la necesidad de que éstos trabajen de manera colaborativa para desarrollar un buen currículo de la Licenciatura en Matemáticas, rompiendo con la manera individualista con que suelen trabajar; para la realización de un trabajo más creativo, es fundamental que los docentes estén entusiasmados y añadan experiencias tanto personales como profesionales (P9). La interacción entre los discentes también ha sido mencionada por los entrevistados, especialmente relacionada con las actividades en clase (o extra clase) desarrolladas por los estudiantes en equipo (P3 y P5). A partir de los relatos de los profesores-formadores, hemos inferido que la autonomía de los estudiantes puede ser potenciada a través de la utilización de estrategias didácticas que les atribuyen la responsabilidad de desarrollar actividades de manera activa e interactiva en el proceso de estudio del Cálculo. Además, distintos aspectos abordados en la dimensión interaccional del proceso de estudio de la integral, tales como la tutoría de los estudiantes, la participación en proyectos y actividades de la escuela, la interacción con miembros de la comunidad y la actuación en asociaciones profesionales se relacionan con el conocimiento profesional del docente.

10.3.6. Dimensión ecológica del proceso de estudio de la integral

Esta dimensión fue sistematizada a partir de dos descriptores: adaptación socio-profesional y cultural de los profesores-formadores, y la apertura hacia la innovación didáctica. Todos los profesores-formadores han declarado que, tras su formación académica inicial o continuada (incluyéndose el posgrado), empezaron a dar clases en la enseñanza universitaria. Este hecho ha implicado en la necesidad de adaptación socio-profesional a las condiciones institucionales, y a la realidad de las carreras en que desarrollaban su labor profesional. La realización del postgrado ha sido la vía utilizada por los docentes no solamente para legitimar su *status* de docente universitario, sino para atender a los intereses personales e institucionales de los profesores-formadores. El tema de las tesis doctorales de un 30% de los entrevistados se relaciona con el proceso de estudio del Cálculo y un 70% de los mismos han desarrollado investigaciones específicas sobre la Didáctica del Cálculo. Esto pone de manifiesto que el hecho de desarrollar cursos de Cálculo en la docencia universitaria ha contribuido y motivado a los profesores-formadores a tener en cuenta la problemática existente en el proceso de estudio del Cálculo, así como también a buscar soluciones a través de la investigación en Didáctica del Cálculo. Todo ello ha evidenciado su adaptación socio-profesional al contexto que articula la práctica profesional de los profesores-formadores con la investigación educativa (Ruthven, 2002), lo que contribuye a la construcción de su conocimiento profesional sobre el proceso de estudio del Cálculo en el contexto de la formación de profesores de Matemáticas. Entre los conocimientos profesionales que Jaworski (2008) ha considerado relevantes para el profesor-formador, se encuentran aquellos relacionados a los sistemas sociales y entornos culturales; las particularidades de la escuela (o universidad); y, las teorías de aprendizaje y de enseñanza, y la metodología científica relacionada a las investigaciones en el contexto de la escuela y del sistema educacional.

Con relación a la adaptación del currículo de la Licenciatura en Matemáticas al entorno social y cultural, P7 ha considerado satisfactoria la estructura curricular del proyecto pedagógico de dicha licenciatura. Ha resaltado la importancia de la participación de los docentes en el diseño e implementación del currículo, teniendo en cuentas las directrices establecidas en el referido proyecto. No obstante apunta hacia la necesidad de evaluación periódica y perfeccionamiento del currículo para mejorar la calidad de la formación de los futuros profesores de Matemáticas de la enseñanza secundaria. P3 ha mencionado, además, la importancia de contemplar una formación ciudadana y crítica en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas. En este sentido, además de la formación matemática se requiere una formación crítica y ciudadana del futuro profesor de matemáticas, que les permita presentar soluciones para los problemas demandados por los estudiantes en las distintas áreas del conocimiento y contribuir, como educadores, por medio de las Matemáticas, tanto con la formación critica de sus estudiantes como con la mejora de la sociedad en la cual desarrollará su quehacer docente.

Corroboramos con la posición de Chapman (2008) en que a práctica instruccional por sí misma "puede constituirse en la base para el aprendizaje del profesor-formador" (p. 117). Además, el conocimiento profesional desarrollado por estos docentes "no puede ser trasferido; es activamente construido individual y socialmente por medio de las experiencias personales con el entorno y de las interacciones con los demás, lo que implica en la reflexión y adaptación" (Zaslavsky, Chapman y Leikin, 2003, p. 878).

En este sentido, el conocimiento profesional que los profesores-formadores han puesto de manifiesto sobre el proceso de estudio de la integral en el contexto de la formación de profesores de matemáticas en Brasil, ha posibilitado caracterizar dicho proceso por medio de la noción de idoneidad didáctica. Asimismo, consiste en un proceso continuo, desarrollado a lo largo de la vida del docente de manera tanto informal como formal, posibilitándoles ser "vistos como aprendices que continuamente reflexionan sobre su trabajo y dan sentido a las historias, a sus prácticas y a otras experiencias" (Ibíd., p. 879). De este proceso han emergido las características que posibilitan identificar criterios para un coherente análisis la idoneidad didáctica del proceso de estudio de la integral en el contexto socio-profesional de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil.

10.4. LIMITACIONES DEL ESTUDIO Y CUESTIONES ABIERTAS

Como suele ocurrir en las investigaciones, no hemos tenido la pretensión de abarcar todos los aspectos referentes a los conocimientos profesionales de los profesores-formadores de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Por ello, centramos nuestra atención en la caracterización de los procesos de estudio de la integral en el contexto socio-profesional de formación de profesores de matemáticas de secundaria en Brasil, por medio de la noción de idoneidad didáctica.

Específicamente en el contexto brasileño, la formación del profesor universitario da área de Matemáticas se realiza a través del Postgrado (Maestría y Doctorado). Los entrevistados que han participado de nuestra investigación, además de dar clases en la Licenciatura en Matemáticas, y de realizar investigaciones en las áreas de la Matemáticas o de Educación Matemática, tienen amplia experiencia en el desarrollo de actividades docentes e investigativas en Programas de Postgrado en ambas áreas, lo que les convierte en los actuales formadores de los formadores de profesores de matemáticas de secundaria. Estamos utilizando la terminología profesores-formadores, en el doble sentido descrito por Biellerot (1996, p. 2)[1], que se refiere al profesional responsable de la formación de nuevos docentes, de *formador de base* y define el formador de formad*ores como "un pr*ofesional de la formación que interviene para formar nuevos profesores o para perfeccionar, actualizar, etc., al formador en ejercicio" (Ibíd.). No obstante, nos parece pertinente afirmar que esta investigación abre nuevas perspectivas relacionadas con la formación de profesores de matemáticas, entre las cuales resaltamos:

- Desarrollar nuevas investigaciones centradas en el conocimiento profesional puesto de manifiesto por los profesores-formadores sobre otros objetos didácticos del Cálculo y verificar el grado de coincidencia con los resultados obtenidos en esta investigación;
- Realizar investigaciones con énfasis en el análisis del conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre objetos didácticos de otras disciplinas contempladas en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas y en su aplicabilidad en el diseño y desarrollo del currículo de la Licenciatura en Matemáticas;
- Investigar la viabilidad del diseño, planificación e implementación de procesos de estudio de la integral (u otros objetos del Cálculo), teniendo en cuenta la utilización de criterios de idoneidad que pueden ser organizados a

[1] Citado por Costa (2009, p. 20).

partir de la caracterización de los procesos de estudio de la integral realizada en esta investigación;

- Investigar el conocimiento profesional puesto de manifiesto por los profesores-formadores sobre la integral (u otros objetos didácticos del Cálculo) en el contexto de otras carreras (por ejemplo en la Ingeniería), asociándole al diseño, planificación e implementación de procesos de estudio de distintos objetos didácticos del Cálculo;
- investigar la idoneidad de los procesos de estudio sobre objetos didácticos del Cálculo desarrollados a partir de una coherente articulación entre las clases teóricas y prácticas realizadas por medio de la utilización de recursos tecnológicos.

Finalmente, consideramos que nuestra investigación aporta nuevos conocimientos relacionados con la Didáctica del Cálculo, conocimiento profesional, y profesores-formadores. La utilización conjunta de la noción de idoneidad didáctica desarrollada por el Enfoque Ontosemiótico, y de la metodología de las narrativas se han revelado potentes para analizar los conocimientos profesionales manifestados por los profesores-formadores, y para caracterizar los procesos de estudio de la integral en el contexto socio-profesional de la formación de los futuros profesores de matemáticas de la enseñanza secundaria. En este sentido, los conocimientos profesionales de los profesores-formadores (desarrollados a partir de sus prácticas profesionales e investigaciones académicas, teniendo en cuenta sus intereses y necesidades personales e institucionales, la satisfacción, el éxito profesional, y la mejora del aprendizaje de los contenidos matemáticos) se convierten en conocimientos producidos desde la práctica.

REFERENCIAS

Acosta, D. y Wills, R. (2002). Classroom integral calculus: some useful digressions when teaching integral calculus. *PRIMUS,* 12 (1), 75-86.

Allen, D. (2001). Learning integral calculus through non-template problem solving. *PRIMUS*, 11(2), 147-160.

Allevato, N. S. G., Onuchic, L. R. y Janh, A. P. (2010). O computador no ensino-aprendizagem-avaliação de matemática: reflexões sob a perspectiva de resolução de problemas. En A. P. Jhan & N. S. G. Allevato (Org.), *Tecnologia e educação matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores* (pp. 192-193). Recife: SBEM.

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Netherlands: Kluwer, A.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Artigue, M. (1998). L' évolution des problématiques en didactique de l' analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18 (2), 231-262.

Artigue, M. (2003a). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? *Boletín de la Asociación Venezolana*, X (2), 117-134.

Artigue, M. (2003b). The teaching and learning of mathematics at university level. En D. Holton et al. (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 207-220). Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. y Rogalski, M. (1989). Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG première année. *Enseigner autrement en DEUG scientifique*. Publication Inter-IREM.

Artigue, M., Batanero, C. y Kent, P. (2007). Mathematical thinking and learning at post-secondary level. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1011-1049). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., and NCTM.

Ávila, G. (2001). *Análise matemática para licenciatura.* Sao Paulo: Edgard Blücher Ltda.

Ávila, G. (2003). *Cálculo das funções de uma variável.* 7ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.

Baldino, R. (1995). Cálculo infinitesimal: passado ou futuro? *Temas & Debates,* 6, 5-21.

Baldino, R. y Cabral, T. (1997). *Erro do significado ou significado do erro? I Simpósio de Educaçao e Ensino.* Sao José do Rio Preto: UNESP.

Baron, M. (1985). *Curso de história da matemática: origem e desenvolvimento do cálculo.* Trad. Jose R.B. Coelho. Brasília: Editora Universidade de Brasília, v. 1-5.

Barufi, M. C. B. (1999). *A construçao/negociação de significados no curso univeritário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis de Doctorado. FEA-USP.

Barufi, M. C. B. (2002). O cálculo no curso de licenciatura em matemática. *Educaçao Matemática em Revista*, 11ª, 69-72.

Benedito, V., Ferrer, V. y Ferreres, V. (1995). *La formación universitaria a debate*. Barcelona: Universidad de Barcelona.

Bezuidenhout, J.; Olivier, A. (2000). Students' conceptions of the integral. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2, (pp. 273- 280). Kagamiyama, Higashi-Hiroshima: Hiroshima University.

Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. and Leung, F. K. S. (Eds.). (2003). *Second International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer A. P.

Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., y Laborde, C. (Eds.). (1996). *International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer A. P.

Bisognin, E., Bisognin, V. y Buriol, C. (2009). Atividades de investigação como alternativa metodológica para o ensino de matemática. En M. C. R. Frota y

L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior* (pp. 189-202). Recife: SBEM.

Boigues, F. J., Llinares, S. y Estruch, V. D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica fuzzy. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(3), 255-282. Disponible en: <http://www.redalyc.org/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33519249002>, acceso en 07 mar. 2012.

Borko, H., y Putman, R. (1995). Expanding a teacher's knowledge base: A cognitive psychological perspective on professional development. En T. Guskey y M. Huberman. (Eds.), *Professional development in education: New paradigms and practices* (pp. 35-65). Nova Lorque: Teachers College Press.

Bosch, M., y Chevallard, Y (1999). La sensibilité de l'ativité mathématique aux ostensifs. Objet d'etude et problematique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (1), 77-124.

Boyer, C. (1974). *História da matemática.* Sao Paulo: Edgard Blücher.

Boyer, C. (1992). *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: cálculo*. Sao Paulo: Atual.

Brasil. *Parecer Nº. 09/2001.* Brasília. Disponible en: <http://meclegis.mec.gov.br/index/busca?pesquisa=resolu%C3%A7%C3%A3o+1+de+2001 > Acceso: 08 junio 2008.

Brasil. *Parecer Nº. 1.302/2001.* Brasília. Disponible en: <http://meclegis.mec.gov.br/index/busca?pesquisa=resolu%C3%A7%C3%A3o+1+de+2001 > Acceso: 08 junio 2008.

Brasil. *Resolução Nº. 01/2002.* Brasília. Disponible en: <http://meclegis.mec.gov.br/index/busca?pesquisa=resolu%C3%A7%C3%A3o+1+de+2001 > Acceso: 08 junio 2008.

Brasil. *Resolução Nº. 02/2002*. Brasília. Disponible en: <http://meclegis.mec.gov.br/index/busca?pesquisa=resolu%C3%A7%C3%A3o+1+de+2001 > Acceso: 08 junio 2008.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. Scholz, R. Sträßer y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bromme, R. y Tillema, H. (1995). Fusing experience and theory: The structure of profesional knowledge. *Learning and Instruction*, 5, 261-267.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2007). La integral definida: Un enfoque socioepistemológico. En C. Dolores, Martínez, G., Farfán, R. M., Carrillo, C., López, I. y Navarro, C. (Eds.). *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula* (pp. 9-32). España: Ediciones Díaz de Santos. Disponible en: <http://cimate.uagro.mx/cantoral/ >, acceso en 07 mar. 2012.

Calvo, C. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales*. Tesis de maestría. UAB.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Camacho, M., Depool, R. y Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática* Disponible en: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=40512064003>acceso en 07 mar. 2012.

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente [CD–ROM]. *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática* (tema Educación Matemática y Desafíos y Perspectivas). Blumenau, Brazil: Universidad Regional de Blumenau.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Mathematics education: A visión of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53(3),* 255-270.

Carlson, M. P., Persson, J. y Smith, N. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate-of-change and accumulation: the fundamental theorem of calculus. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty, J. Zilliox (Eds). *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 165-172). Joint Meeting of PME and PMENA, Hawaii, USA.

Chapman, O. (2008). Narratives in mathematics teacher education. En D. Tirosch y T. Wood (eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 15-38). Rotterdam: Sense Publishers.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12 (1),* 73-112.

Clandinin, J. (1989). Developing rhythm in teaching: The narrative study of a beginning teacher's personal practical knowledge of classrooms. *Curriculum Inquiry*, 19(2), 121-141.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 9* (1)*,* 65-84.

Contreras, A., et al. (2003). *Análisis de manuales de matemáticas de 1º y 2º de Bachillerato-Logse en Institutos de Educación Secundaria de la Provincia de Jaén, en cuanto a los conceptos básicos del cálculo infinitesimal derivada e integral, bajo la perspectiva de los obstáculos epistemológicos.* Grupo GIEAMJA: Universidad de Jaén.

Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 151–186.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias, 28*(3), 367-384.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Relime, 8* (3), 265-286.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Tesis Doctoral, Universidad de Grenoble I.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Cortazzi, M. (1993). *Narrative analysis*. London: The Falmer Press.

Costa, V. G. (2009). *Professores formadores dos cursos de licenciatura em matemática do Estado de Minas Gerais.* Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Costa, V. G. y Passos, L. F. (2009). O professor formador e os desafios iniciais de professores de matemática. *Educação Matemática Pesquisa, 11* (3), 597-623.

Crisostomo, E. (2004). *Estudio del cálculo en didáctica de la matemática: reconstrucción del significado de referencia de la integral definida.* Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

Crisóstomo, E. (2008). *Caracterización del proceso de estudio de la integral en la formación de profesores de matemática*s. Tesis de Fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Crisostomo, E. (2011). Conocimiento profesional de los profesores-formadores sobre la didáctica del cálculo. *XIII Conferencia Interamericana de Educacão Matemática.* Recife, Brasil: UFPE.

Crisostomo, E., Mota, J. F., Brito, A. B. y Ferreira, R. D. (2012). A utilização do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da integral: uma articulação entre a pesquisa e a docência. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 1* (1), 129-143.

Crisostomo, E., Ordóñez, L., Contreras, A. y Godino, J. (2006). Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. En: A. Contreras, C. Batanero y L. Ordóñez

(Eds.). *Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 125-166). Universidad de Jaén.

Cuesta, N. (1985). *Historia de la invención del análisis infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Cury, H. N. (2009). Pesquisa sobre a própria prática no ensino superior de matemática. En M. C. R. Frota y L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior* (pp. 223-238). Recife: SBEM.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, V. y Vadakovic, D. (2001). Conceptions of area: In students and in history. *College Mathematics Journal*, 32 (2), 99-109.

Czarnocha, B., Loch, S., Prabhu, V. y Vadakovic, D. (2002). The definite integral: A coordination of two schemas. *Conference: ICTM-2: 2. international conference on the teaching of mathematics at the undergraduate level*. Grecia.

D'Ambrósio, U. (2002). A matemática nas escolas. *Educação Matemática em Revista, 9*(11), 29-33.

Depool, R. (2004). *La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS).* Universidad de La Laguna. Tesis Doctoral.

Depool, R. (2004). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un programa de cálculo simbólico (PCS). *Números, 62,* 3-31.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior.* Tesis Doctoral, Universidade Nova de Lisboa.

Dorier, J.L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: theoretical issues. *Proceedings of the four Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 2, 27-33.

Dubinsky, E. (1991b). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A constructive theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI study* pp. 275-282). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Dubinsky, E. y Schwingendorf, K. (1991). *Calculus, concepts and computers.* West: St. Paul.

Edwards, B. S., Dubinsky, E., y McDonald, M. A. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 15–25.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. Londres: Croom Helm.

English, L. D. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. En, L. D. English et al. (Eds), *Handbook of International Research in Mathematics Education (second edition)*. New York and London: Routledge.

English, L. D., Bartolini-Busi, M., Jones, G. A., Lesh, R. y Tirosh, D. (2002). *Handbook of international research in mathematics education*. London: Lawrence Erlbaum Ass.

Farmaki, V. y Paschos, P. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 66* (1), 83–106.

Fauvel, J. y Gray, J. (eds.) (1988). *The history of mathematics: a reader.* Hong Kong: Macmillan Press LTD & The Open University.

Fenstermacher, G. (1994). The Knower and the Knowen: The nature of knowledge in research on teaching. *Review of Research in Education,* 20, 3-56.

Ferreira, A. C. (2003). *Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática.* Tese de doutorado em Educação: Educação Matemática. Campinas, SP: UNICAMP.

Figueiredo, V. L. X., Mello, M. P. y Santos, S. A. (2011). *Cálculo com aplicações: atividades computacionais e projetos.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.

Fiorentini, D. (2008). A Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de Matemática em face das Políticas Públicas no Brasil. *Bolema,* 29: 43-70. Rio Claro (SP).

Fiorentini, D. y Lorenzato, V. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.* Campinas, SP: Autores Associados.

Fiorentini, D., Nacarato, A. M., Ferreira, A. C., Lopes, C. S., Freitas, M. T. M. y Miskulin, R. G. S. (2002). Formação de Professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. En *Educação em Revista, 36*, 137-160.

Fiorentini, D., Souza Júnior, A. J. y Melo, G. (1998). Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In C. M. G. Geraldi, D. Fiorentini y E. M. A. Pereira (Org.), *Cartografia do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a)* (pp. 307-335). Campinas, SP: Mercado das Letras.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Font, V., y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338, 309-346.

Frota, M. C. R. (2009). Estilos de aprendizagem matemática e autocontrole do processo de aprendizagem. En M. C. R. Frota y L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior* (pp. 59-79). Recife: SBEM.

Galvão, C. Narrativas em educação. *Ciência & Educação, 11*(2), 327-345.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferencia Interamericana de Educacão Matemática.* Recife, Brasil: UFPE.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Paradigma, XXVII (2), 221-252.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A. y Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30* (2), 109-130.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9 (Especial), 133-156.

Gonçalves, T. O. (2000). *Formação e desenvolvimento profissional de formadores de professores: o caso dos professores de matemática da UFPa*. Tese de doutorado. Campinas, SP: UNICAMP.

Gonzales-Martin, A. y Camacho, M. (2004). What is first-year Mathematics students' actual knowledge about improper integrals? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35 (1), 73-89.

González-Martín, A. S. (2005). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y aprendizaje.* Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna.

Grande, A. L. y Bianchini, B. L. (2009). Análise de livros didáticos de algebra linear quanto às noções de independência e dependência linear usando como referencial teórico o registro de representações semióticas. En M. C. R. Frota y L. Nasser (Org.). Educação Matemática no Ensino Superior (pp. 111-126). Recife: SBEM.

Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic´s. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 115-141.

Grossman, P. (1995). Teachers' knowledge. En L. Anderson (Ed.), *International encyclopedia of teaching and teacher education* (pp. 20-24). Kidlington, Oxford: Elsevier Science.

Grouws, D. (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Guimarães, M. F. (1999). O conteúdo do conhecimento profissional de duas profesoras de matemática. *Quadrante*, *8*, 5-32.

Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.) (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education.* Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G. y Sowder, L. (2005). Advanced mathematical thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7 (1), 27-50.

Harel, G. y Trgalová, J. (1996). Higher mathematics education. En Bishop, A.J. et al. (Eds.). *International handbook of mathematics education, Part Two,* (pp. 675-700). Netherlands: Kluwer Academic Press.

Harel, G., Selden, A. y Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 147-172)). Rotterdam: Sense Publishing.

Hart, L. C., Smith, S. Z, Swars, S. L. y Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, 3 (1), 26-41.

Hiebert, J., Gallimore, R., y Stigler, J. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one?. *Educational Researcher*, 31(5), 3-15.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Educación Matemática.* 10 (2), 23-45.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Caracas, v. X, n. 2, p. 6. Disponible en: <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>. Acceso en: 16 Jun. 2012.

Holton, D. et al (2003). *The Teaching and learning of Maths of University level: an ICMI study.* Kluwer Dordrecht.

Hughes-Hallett, Gleason, Lock, Flath y otros (2002). *Cálculo Aplicado*. Trad. Virgilio González Pozo. 2^{da}. Reimpresión. Editorial grupo Pátria Cultural, S. A. Distrito Federal: México.

Igliori, S. B. C (2009). Considerações sobre o ensino de cálculo e um estudo sobre os números reais. En M. C. R. Frota y L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior* (pp. 11-26). Recife: SBEM.

Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In B. Jaworski & Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education, vol. 4, The Mathematics Teacher Educator as a Development Professional* (pp. 335-361). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Jaworski, B. y Gellert, U. (2003). Educating new mathematics teachers: Integrating theory and practice, and the role of practicing teachers. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-917). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Kleiner, I. (2002). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (2-3), 137-174.

Kouropatov, A. Y Dreyfus, T. (2009). Integrals as accumulation: a didactical perspective for school mathematics. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, pp. 417-424. Thessaloniki, Greece: PME.

Lakoff, G., y Nuñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Laudares, J. y Lanchini, J. (eds.) (2001). *A prática educativa sob o olhar de profesores de cálculo.* Belo Horizonte: FUMARC.

Legrand, M. (1992). Débat Scientifique en Cours de Mathématiques. En Artigue, M. y Ervynck, G. (Eds.). *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus* (pp. 59-60). ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá.

Lester, F. (2007). (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., y NCTM.

Lois, A. y Milevicich, L. (2009). The impact of technological tools in the teaching and learning of integral calculus. *Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6) Working Group 7*, Lyon, France.

Mamona-Downs, J. y Downs, M. (2002). Advanced mathematical thinking with a special reference to reflection on mathematical structure. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 165 - 195). London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mamona-Downs, J. y Downs, M. L. N. (2008). Advanced mathematical thinking and the role of mathematical structure. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 154-174). New York: Routledge.

Marcelo, C. (2002). La investigación sobre el conocimiento de los profesores y el proceso de aprender a enseñar. En G. Preafán y A. Adúriz-Bravo (comp.), *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas internacionales* (pp. 45-60). Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional/Colciencias.

Melo, J. R. (2010). *A formação do formador de professores de Matemática no contexto das mudanças curriculares.* Tese de Doutorado, Universidade de Campinas.

Mometi, A. L. (2007). *Reflexão sobre a prática: argumentos e metáforas no discurso de um grupo de professores de cálculo*. Tese de doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Montero, L. (2001). *La construcción del conocimiento profesional docente.* Rosario, Santa Fe: Homo Sapiens Ediciones.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del Cálculo: evolución, estado actual y rectos futuros. En A. Maz, B. Gómes y M. Torralba (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: Noveno Simposio de Investigación de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 81-96). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Munby, H., Russell, T., y Martin, A. (2001). Teachers' Knowledge and how it develops. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching.* (pp. 877-904). Washington, DC: American Educational Research Association.

Mundy, J. (1984). Analysis of errors of first year calculus students. En A. Bell, B. Low y J. Kilpatrick (eds.), *Theory Research and Practice in Mathematics*

Education (pp. 170-172). Proceedings, ICME 5. Adelaide, Working group reports and collected papers, Shell Center. Nottingham.

Nasser, L. (2009). Uma proposta sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. En M. C. R. Frota y L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior* (pp. 43-58). Recife: SBEM.

O'Shea, D. y Senechal, L. (1992). Student learning difficulties and calculus in context. En M. Artigue y G. Ervynck (Eds.), *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus* (pp. 53-55). ICME 7, Université de Sherbrooke, Canadá.

Olímpio Junior, A. (2006). *Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática.* Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista.

Onuchic, L. R. y Allevatto, N. S. G. (2009). Formação de professores – mudanças urgentes na licenciatura em matemática. En En M. C. R. Frota y L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior* (pp. 169-187). Recife: SBEM.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las matemáticas de 2° de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. Tesis Doctoral, Universidad de Jaén.

Orton, A. (1983). Student´s understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18.

Palis, G. R. (2009). Pesquisa sobre a própria prática no ensino superior de matemática. En M. C. R. Frota y L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior* (pp. 203-221). Recife: SBEM.

Perrenoud, Ph. (2000). *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Piaget, J. (1972). *The principles of genetic epistemology*. London: Routledge y Kegan Paul.

Pinto, M. F. (1998). *Students' understanding of real analysis*. Doctoral dissertation. Research Centre, University of Warwick.

Pinto, M. M. F. (2009). Re-visitando uma teoria: o desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de análise real. En M. C. R. Frota y L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior* (pp. 27-42). Recife: SBEM.

Pires, M. V. (2006). A construçao do conhecimento profissional: um estudo com três professores. *X SEIEM*. Lisboa: APM. Disponible en http://www.apm.pt.

Ponte, J. P. (1998). Da formação ao desenvolvimento profissional. *Actas do ProfMat 98* (pp. 27-44). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. En J. Tavares, A. Pereira, A. Pedro y H. Sá (Eds.), *Investigar e formar em educação: Actas do IV congresso da SPCE* (pp. 59-72) Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ponte, J. P. (2002). A vertente profissional da formação inicial de professores de matemática. *Educação Matemática em Revista, 9* (11), 3-8.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishing.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 223-261). New York: Routledge.

Prabhu, V. y Czarnocha, B. (2000). Method of indivisibles in calculus instruction. En Wann-Sheng Horng y Fou-Lai Lin (Eds.), *Proceedings of the HPM 2000 conference - History in mathematics education: challenges for a new millennium* (pp. 196-203). Taipei (Taiwan).

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: a practice-oriented view of advanced mathematical thinking, *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51 – 73.

Rasslan, S. y Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. *Proceedings of the 26th PME, vol.* 4, 89-96.

Reis, F. S. (2009). Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise. En M. C. R. Frota y L. Nasser (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior* (pp. 81-97). Recife: SBEM.

Reis, F.(2001). *A tensao entre rigor e intuiçao no ensino de cálculo e análise: a visao de profesores-pesquisadores e autores de livros didácticos*. Tesis doctoral. Universidad de Campinas, Brasil.

Rey Pastor, J. et al. (1969). *Análisis matemático.* Buenos Aires: Kapelusz, 8ed.

Ribeiro, M. V. (2010). *O ensino do conceito de integral, em sala de aula, com recursos da História da Matemática e da Resolução de Problemas.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista.

Rico, L. (1990). Diseño curricular en educación matemática. Una perspectiva cultural. En Llinares, S. y Sánchez, M.V. (Eds.) *Teoría y práctica en educación matemática* (53 - 55). Alfar: Sevilla.

Riessman, C. K. (1993). *Narrative analysis*. London: Sage Publications.

Rosken, B. y Rolka, K. (2006). A picture worth a 1000 words – the role of visualización in mathematics learning. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 457-464). Prague: PME.

Ruthven, K. (2002). Linking researching with teaching: Towards synergy of scholarly and craft knowlege. En, L.D. English, M. Bartolini-Busi, G. A. Jones, R. Lesh, R. and D. Tiroshm, *Handbook of International research in mathematics education* (pp. 581-598). London: Lawrence Erlbaum Ass.

Ruthven, K. (2007). Teachers, technologies and the structures of schooling. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, CERME 5, Larnaca, Cyprus. Disponible en <http://ermeweb.free.fr/CERME5b/>, acceso en 10 mar 2012.

Sad, L. (1998). *Cálculo diferencial e integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos*. Tesis doctoral, Universidade Estadual Paulista.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki: una historia del arte y la ciencia del cálculo.* Tres Cantos: Nivola libros y ediciones S.L.

Scheibe, L. Pedagogia universitária e transformação social. Tese de Doutorado em Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des découpages infinis de surfaces et de solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11 (2/3), 241- 294.

Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y aprendizaje en las profesiones*. Madrid: Ediciones Paidós y Ministerio de Educación y Ciencia.

Scucuglia, R. (2006). *A investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com calculadora gráfica.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista.

Selden, A. y Selden. J. (2005). Perspectives on advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7 (1), 1-13.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Sicardi, B. C. M. (2008). *Biografias educativas e o processo de constituição profissional de formadores de professores de matemática.* Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas.

Sierpínska, A. (1985). Obstacles Epistemologiques Relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *6* (1), 164-198.

Sierpinska, A. (1987): Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18* (4), 371-397.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra,* 209-246. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Silva, A. B. (2011). Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. *Educ. Matem. Pesq., São Paulo, 13* (3), 393-413.

Silva, M. A. (2004). *A atual Legislação Educacional Brasileira para a formação de professores: origens, influências e implicações nos cursos de licenciatura em matemática.* Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Skemp, R. (1979). *Intelligence, learning and action*. London: Wiley.

Souza Junior, A. J. (2000). *Trabalho Coletivo na universidade: trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender cálculo diferencial e integral*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas.

Stewart, J. (2003). *Cálculo diferencial e integral.* São Paulo: Thompson Learning.

Swoder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In: LESTER, F. K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.157-223). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D. (Ed.). (1991a). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, The Netherlands Kluwer.

Tall, D. (1991b). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Netherlands: Kluwer.

Tall, D. (Ed.). (1991c). Visualizing Differentials in Integration to Picture the Fundamental Theorem of Calculus. *Mathematics Teaching*, *137*, 29–32.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. En A. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Netherland: Kluwer.

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *41* (4), 481–492.

Tall, D. O. y Mejía-Ramos, J. P. (2004). Reflecting on post-calculus reform. *Proceedings of the International Congress of Mathematics Education, Plenary for Topic Group 12: Calculus*. Copenhagen, DK.

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Tardif, M. (2011). Sabers docentes e formação profissional. 12 ed. Petrópolis, R. J.: Vozes.

Thomas, M. y Ye Yoon Hong (1996). The Riemann integral in calculus: students' processes and concepts. En, P. C. Clarkson (Edt.), *Proceedings 19 Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA)* (pp. 572-579). Melbourne: VIC.

Thompson, P. W. y Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. En M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Traldi, A. J. (2006). *Formação de formadores de professores de matemática: identificação e limites da estratégia de organização de grupos colaborativos.* Tese de Doutorado. Universidade de Campinas.

Turégano, P. (1993). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en un contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias,* 16 (2): 233-249.

Vaupel, J. (1981). Integral calculus in upper secondary. *Didaktik Mathematik,* 9(1), 57-79.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology*, 14, 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-80). Netherlands: Kluwer, A. P.

Vygotski L.S. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. Madrid: Visor, 1993.

Wenzelburger, E. (1993). Introducción de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial e integral - una propuesta didáctica. *Educación Matemática,* 5 (3), 93-123.

Wenzelburger, E. (1994). *Cálculo integral*. México, D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Wood, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education.* Rotterdam: Sense Publishers.

Zaslavsky, O., Chapman, O. y Leikin, R. (2003). Professional development of mathematics educators: trends and tasks. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-917). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Zuin, E. (2001). Cálculo, uma abordagem histórica. En J. Lachini y J. Laudares (Org.), *Educaçao Matemática: a prática educativa sob o olhar de profesores de cálculo.* Belo Horizonte: FUMARC.

RESUMO DA TESE DOUTORAL EM PORTUGUÊS

IDONEIDADE DE PROCESSOS DE ESTUDO DO CÁLCULO INTEGRAL NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: UMA APROXIMAÇÃO DESDE A INVESTIGAÇÃO EM DIDÁTICA DO CÁLCULO E DO CONHECIMENTO PROFISSIONAL

Autor: Edson Crisostomo dos Santos

Orientador: Dr. Juan Díaz Godino

Departamento: Didática da Matemática

Universidade de Granada, Espanha

RESUMO

O objetivo geral desta investigação consiste em caracterizar os conhecimentos sobre a idoneidade didática de processos de estudo do Cálculo Integral para a formação de professores de Matemática. Trata-se de aportar conhecimentos sistemáticos e fundamentados sobre como elaborar desenhos instrucionais de qualidade para a formação de professores de Matemática do ensino médio sobre um tema específico, a integral, no contexto sócio-profissional da Licenciatura em Matemática no Brasil. Essa caracterização será realizada por meio da articulação dos resultados da investigação em Didática do Cálculo com os conhecimentos de profissionais *experts* na formação de professores de Matemática do ensino secundário. A determinação dos conhecimentos aportados pela investigação em Didática do Cálculo se realiza mediante estudos documentais e tem três focos de atenção:

- investigações sobre o Pensamento Matemático Avançado, em particular, sobre processos de ensino e aprendizagem da integral;
- estudo histórico - epistemológico orientado à reconstrução dos significados parciais da integral e sua articulação;
- análise de livros de textos usados no contexto da Licenciatura em Matemática no Brasil.

A determinação dos conhecimentos profissionais dos professores-formadores *experts* foi realizada por meio de entrevistas com uma amostra de dez profissionais e da sua posterior análise sistemática. A categorização desses conhecimentos realizou-se a partir das dimensões epistêmica, ecológica, cognitiva, afetiva e instrucional (interações e recursos) dos processos de estudo do Cálculo.

Trata-se de uma investigação qualitativa, baseada em estudos de casos de um conteúdo matemático num contexto educativo particular, no qual se aplica e se desenvolve as categorias de análise do Enfoque Onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática, especificamente, a noção de idoneidade didática de processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

1. INTRODUÇÃO

O foco de interesse de nossa investigação é a formação de professores de Matemática da educação básica - anos finais do ensino fundamental (6º ao 9º ano) e do ensino médio (1º ao 3º ano) – no contexto institucional da Licenciatura em Matemática desenvolvida nas universidades brasileiras. Nossa experiência, como formador de professores durante mais de 19 anos, nos possibilitou reconhecer a variedade e complexidade de elementos que devemos considerar quando pretendemos desenhar, implementar e avaliar planos/projetos de ensino e programas de formação matemática e didática de maior qualidade. É preciso considerar os diversos planteamentos epistemológicos sobre a própria Matemática, as diversas teorias de aprendizagem (dimensão cognitiva e afetiva), os modelos instrucionais e a necessária adaptação ao contexto sócio-profissional no qual se desenvolvem os processos formativos.

A grande quantidade de investigações realizadas até o momento sobre formação de professores de Matemática, evidenciadas por meio dos capítulos dos "Handbooks" destinados a esse tema (Jaworski e Gellert, 2003; Zaslavsky, Chapman e Leikin, 2003; Ponte e Chapman, 2006; Swoder, 2007; Wood, 2008; Ponte e Chapman, 2008), das revistas especializadas e dos anais de congressos requerem centrar o conteúdo matemático específico sobre o qual se pretende investigar. Em nosso caso, apoiando-nos também em nossa própria experiência, como formador de professores, optamos em centrar a investigação no campo do "Pensamento Matemático Avançado", Didática do Cálculo e, mais concretamente, sobre o "objeto matemático" *integral*. Na literatura específica da área de Educação Matemática também existe uma abundante bibliografia sobre a Didática do Cálculo (Tall, 1996; Harel, Selden e Selden, 2006; Artigue, Batanero e Kent, 2007; Mamona-Downs e Downs, 2008) a qual deu suporte para o desenvolvimento desta pesquisa.

A escolha da integral como objeto matemático de investigação didática justifica-se, além da nossa experiência profissional, pela relevância do mesmo na área de Matemática e pelas possibilidades de aplicações da integral em outras áreas de conhecimento. Segundo Kouropatov e Dreyfus (2009, p.3-417),

> Certamente não é possível imaginar a cultura científica moderna sem as integrais. Juntamente com a derivada, a integral forma o núcleo de um domínio matemático que consiste em uma linguagem, um dispositivo e uma ferramenta útil para outros campos como a Física, a Engenharia, a Economia e a Estadística. Além disso, o conceito de integral representa uma idéia filosófica para a compreensão do mundo: a contemplação da totalidade das partes pequenas de um todo aporta conclusões sobre o todo em sua globalidade, assim como sobre sua estrutura interna e propriedades.

A partir do anteriormente descrito, surge uma primeira formulação geral de nossas perguntas de investigação:

- Que formação matemática – didática devem receber os professores de matemática da educação básica para que possam realizar suas atividades docentes da maneira mais idônea /adequada possível?
- Como se deve desenhar, implementar e avaliar os processos de formação dos professores para atingir esse objetivo?

As questões assim formuladas correspondem a uma problemática própria de um “formador reflexivo” e apesar de serem significativas e relevantes são excessivamente gerais para serem investigadas. A aproximação progressiva ao campo da Educação Matemática nos levou a aplicar sucessivos “recortes” e determinações a estas perguntas iniciais de investigação. A primeira se refere ao contexto formativo da Licenciatura em Matemática no Brasil; já a segunda ao tema matemático (Didática do Cálculo Integral). Ainda falta uma terceira determinação, a qual será realizada mediante as ferramentas teóricas e metodológicas aplicáveis.

Em nosso caso, levando em conta a diversidade de enfoques e paradigmas de investigação, os quais geralmente enfatizam uma das dimensões implicadas (frequentemente o componente cognitivo ou o pedagógico), optamos por aplicar o “Enfoque Onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática” (EOS) (Godino e Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero e Font, 2007). A noção de *idoneidade didática* dos processos de estudo matemático nos atraiu a atenção por sua potencialidade para articular as diversas facetas e componentes que caracterizam a complexidade dos processos formativos em Educação Matemática.

Nesse sentido, o “estudo de caso”, formação de professores sobre a integral no contexto institucional da Licenciatura em Matemática no Brasil, pretende ter um caráter paradigmático desde o ponto de vista teórico e metodológico. As questões gerais iniciais de investigação podem ser formuladas de maneira mais operativa usando as seis dimensões propostas pelo EOS para analisar os processos de estudo matemáticos (epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica), levando em conta também os indicadores empíricos identificados para cada uma das idoneidades parciais:

> *Que características deveriam contemplar os processos formativos dos professores de matemática da educação básica no Brasil para que alcancem um grau ótimo de idoneidade nas diversas dimensões e fatores implicados?*

A informação necessária para responder a essa questão pode ser proveniente de duas fontes que consideramos complementares: (1) As investigações publicadas sobre formação de professores e Didática do Cálculo; (2) A experiência profissional dos próprios formadores *experts* no processo de ensino do Cálculo no contexto específico investigado.

A separação entre a "teoria" e a "prática", entre os resultados da investigação acadêmica e a prática no processo de ensino da Matemática é um tema de reflexão frequente, como descreve Ruthven (2002). Esse autor analisa os vínculos entre a investigação e o ensino, propondo uma cooperação entre os conhecimentos derivados da investigação acadêmica e os conhecimentos derivados da prática profissional. "Uma preocupação particular se refere a como é possível promover uma maior sinergia entre essas duas práticas específicas, suas formas características de conhecimento e os processos associados de criação de conhecimento" (Ruthven, 2002, p. 581).

Nossa investigação está centrada na caracterização do conhecimento profissional de formadores de professores de Matemática da educação básica, sobre a idoneidade didática dos processos formativos relacionados com o processo de ensino do Cálculo, baseado nas ferramentas teóricas desenvolvidas pelo Enfoque Onto-semiótico.

2. BREVE SÍNTESE DOS CAPÍTULOS

A Tese está organizada em dez capítulos, os quais serão sintetizados brevemente a seguir. Daremos ênfase ao capítulo 10, no qual realizamos uma síntese geral da tese e ressaltamos as principais conclusões e aportações.

CAPÍTULO 1:
PROBLEMÁTICA GERAL E ANTECEDENTES: O CÁLCULO COMO CAMPO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O capítulo está organizado em duas partes. A primeira contempla a problemática geral da investigação relacionada com o processo de estudo do Cálculo no Ensino Superior, especialmente no contexto da Licenciatura em Matemática no Brasil. A segunda parte contempla uma síntese dos antecedentes das investigações em Didática do Cálculo, ressaltando aquelas desenvolvidas na linha do "Pensamento Matemático Avançado", e dos estudos sobre a formação de professores de Matemática da educação básica. Esses estudos foram categorizados segundo as dimensões da *Idoneidade didática* propostas pelo Enfoque Onto-semiótico.

CAPÍTULO 2:
MARCO TEÓRICO

Neste capítulo explicitam-se as noções teóricas usadas na investigação. O Enfoque Onto-semiótico (Godino e colaboradores, 1998; 2002; 2007) constitui o marco teórico principal. Além disso, estudos na linha do Pensamento Matemático Avançado (Tall e colaboradores, 1991; 1995; 1996; Selden e Selden, 2005; Mamona-Downs e Downs, 2008; Harel e Sowder, 2009) e sobre o conhecimento profissional do professor de Matemática (Ruthven, 2002; Zaslavsky, Chapman e Leikin, 2003) constituem-se em referências para nosso trabalho.

CAPÍTULO 3:
PROBLEMA, OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO

Aborda a descrição da metodologia da investigação, fundamenta seu enfoque qualitativo. O uso das narrativas (Chapman, 2008), como metodologia de investigação desempenha um papel fundamental para a sistematização dos significados pessoais dos professores-formadores sobre o processo de ensino do Cálculo. Além disso, o capítulo contempla o problema de investigação, os objetivos e as hipóteses da pesquisa, aspectos que serão apresentados, mais detalhadamente, no capítulo 10.

CAPÍTULO 4:
ESTUDO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO-DIDÁCTICO DA INTEGRAL

Contempla um estudo histórico-epistemológico-didático realizado sobre a integral, por meio do qual se analisa a gênese e evolução dessa noção matemática ao longo da história, assim como suas implicações no processo de estudo da integral no Ensino Superior de Cálculo. A partir desse estudo, organizamos as configurações epistêmicas da integral em oito categorias.

CAPÍTULO 5:

O CURRÍCULO DE CÁLCULO NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

O Capítulo está dedicado à descrição do currículo da Licenciatura em Matemática no Brasil. Realiza-se, inicialmente, uma síntese do Sistema Educacional Brasileiro e, posteriormente, uma análise do currículo da Licenciatura em Matemática, bem como o currículo do Cálculo Diferencial e Integral no contexto da formação de professores de Matemática no Brasil.

CAPÍTULO 6:

ANÁLISE DA INTEGRAL EM LIVROS DE TEXTO DE CÁLCULO

Consiste numa análise de livros de texto de Cálculo atualmente utilizados nos primeiros anos dos cursos da Licenciatura em Matemática no Brasil. A ênfase está centrada numa metodologia para análise de textos matemáticos, desenvolvida a partir das ferramentas teóricas do Enfoque Onto-semiótico na qual utilizamos as categorias das configurações epistêmicas da integral.

CAPÍTULO 7:

SIGNIFICADOS PESSOAIS DE P1 SOBRE O PROCESSO DE ESTUDO DA INTEGRAL

O capítulo contempla a metodologia das narrativas e a pauta de análise das entrevistas e a aplicação das mesmas na análise das narrativas de um dos professores-formadores, ao qual nos referimos neste estudo como P1, sobre sua formação acadêmica, experiência e seus conhecimentos profissionais sobre os processos de estudo do Cálculo no contexto da formação de professores de matemática da educação básica no Brasil.

Essa análise possibilitou caracterizar os significados pessoais de referido formador sobre o processo de ensino da integral no contexto da formação de professores de Matemática da educação básica. A estrutura do capítulo consiste numa descrição das categorias de análise seguida de duas partes, nas quais realizamos, inicialmente, a análise da parte da entrevista realizada com o professor-formador e autor de livro de texto de Cálculo. Para isso, aplicamos a metodologia das narrativas para analisar a formação, experiência acadêmica e motivos para a elaboração do seu livro. Na segunda parte, utilizamos algumas das ferramentas teóricas do Enfoque Onto-semiótico para sistematizar e caracterizar os significados pessoais sobre a didática da integral que emergem dos relatos de P1, os quais serviram de referência para a caracterização da idoneidade didática dos processos de estudo da integral no contexto da formação de professores de Matemática da educação básica no Brasil.

CAPÍTULO 8:

SIGNIFICADOS PESSOAIS DE P2 SOBRE O PROCESSO DE ESTUDO DA INTEGRAL

A estrutura do capítulo consiste na apresentação de um estudo de caso sistematizado a partir da entrevista realizada com o professor-formador, ao qual nos referimos nesta investigação como P2. Na primeira parte, aplicamos a metodologia das narrativas para analisar a formação e experiência profissional de P2. Na segunda parte, utilizamos algumas das ferramentas teóricas desenvolvidas pelo Enfoque Onto-semiótico para sistematizar e caracterizar os significados pessoais sobre a didática da integral que emergem dos relatos de P2. Esses significados são representativos dos conhecimentos profissionais de P2 sobre o processo de ensino e aprendizagem da integral no Ensino Superior no Brasil e, portanto, serviram de referência para a caracterização da idoneidade didática dos processos de estudo da integral no contexto da formação de professores de Matemática da educação básica no Brasil.

CAPÍTULO 9:

MEMÓRIA COMPARTILHADA DOS PROFESSORES-FORMADORES SOBRE O PROCESSO DE ESTUDO DA INTEGRAL

A memória compartilhada dos dez professores-formadores entrevistados está contemplada nesse capítulo no qual se realiza uma análise condensada de suas formações e experiências, respectivas, e se sintetizam seus conhecimentos profissionais sobre as características da idoneidade didática dos processos de ensino e aprendizagem da integral no contexto da formação de professores de matemática da educação básica no Brasil.

CAPÍTULO 10:

SÍNTESE, APORTAÇÕES E QUESTÕES EM ABERTO

Este capítulo contempla uma síntese desta investigação, ressaltando-se as principais conclusões com relação aos objetivos e às hipóteses (as quais se constituem nas principais aportações), as limitações do estudo e algumas questões em aberto. Pela relevância da abordagem deste capítulo nesta investigação, apresentaremos sua estrutura com mais detalhes. Nesse sentido, este capítulo está organizado em quatro seções. Na seção 2.10.1, contemplamos as principais conclusões relacionadas com os objetivos e com as hipóteses. As principais aportações estão sistematizadas na seção 2.10.2 e se relacionam com a idoneidade didática do processo de ensino e aprendizagem da integral no contexto da formação de professores de Matemática da educação básica no Brasil. Na seção 2.10.3 destacamos algumas limitações deste estudo e as questões em aberto.

2.1. Conclusões relacionadas com os objetivos e com as hipóteses

O objetivo geral de nossa investigação, enunciado no Capítulo 3, consiste em *caracterizar os processos de estudo da integral no contexto da formação de professores de Matemática da educação básica por meio da noção de idoneidade didática.*

Esse objetivo geral foi desdobrado nos seguintes objetivos específicos:

Objetivo 1

Reconstruir o significado institucional de referência da integral a partir de um estudo histórico-epistemológico-didático do Cálculo.

Esse objetivo foi alcançado a partir de um estudo realizado para identificar os diversos significados da integral, conhecer a origem dessa noção matemática, bem como sua emergência e evolução ao longo do desenvolvimento histórico do Cálculo. Assim, identificamos os conceitos fundamentais do Cálculo com os quais se relaciona a integral e seu papel no currículo da Licenciatura em Matemática. Para isso realizamos um estudo histórico-epistemológico-didático da integral, contemplado no Capítulo 4. O principal interesse desse estudo consiste em identificar o significado institucional de referência da integral no contexto da formação de professores de Matemática, o que apresentamos na seção 4.6, na qual sistematizamos o referido significado a partir de oito configurações epistêmicas da integral. Essas configurações consistem em uma ampliação de um trabalho que realizamos para caracterizar os significados da integral definida no contexto do curso introdutório de Cálculo no ensino superior, desde a perspectiva histórica (Crisostomo, Ordóñez, Contreras & Godino, 2006).

O estudo histórico-epistemológico-didático da integral serviu de referência para a reconstrução do significado da integral, a partir das *configurações epistêmicas do EOS.* Encontramos que a gênese da integral se relaciona com a aplicação desse conceito na resolução de problemas que requerem a utilização de métodos intuitivos, no sentido ao utilizado por Arquimedes *(configuração epistêmica intuitiva).* A utilização da integral na resolução de problemas relacionados com outras áreas do conhecimento, com a Física, por exemplo, foi evidenciada na evolução histórica da integral e sistematizada nesta investigação por meio da *configuração epistêmica extra-matemática.* Por outro lado, a noção de integral era aplicada aos problemas típicos de Geometria e seu significado, nesse contexto, foi sistematizado pela *configuração epistêmica geométrica.* Os problemas abordados no século XVII, no período de “criação” do Cálculo estavam centrados no cálculo de primitivas y constituem a base da *configuração epistêmica primitiva*. Outra problemática encontrada consiste em encontrar um valor aproximado para a integral definida de funções cuja primitiva não poderia ser determinada (pela complexidade dos cálculos ou porque não existiam). Nesse contexto, identificamos a *configuração epistêmica aproximada*. A transição de um cálculo estático para uma abordagem mais dinâmica, relacionada com as noções de câmbio e movimento, originou um significado para a integral baseado na noção de “acumulação”, o qual foi sistematizado por meio da *configuração epistêmica acumulada*. A fundamentação da integral ocorreu a partir da elaboração de definições mais precisas, que se baseavam na utilização da noção de limites com independência das idéias geométricas, caracterizadas como “aritimetização da análise”, contexto no qual situamos a *configuração epistêmica somatória.* O desenvolvimento das tecnologias, ocorrido especialmente nas últimas décadas, possibilitou a disponibilização de novas ferramentas tecnológicas úteis para a implementação do processo de ensino e aprendizagem da integral baseado na elaboração de propostas didáticas destinadas à melhoria da aprendizagem dos estudantes. Esse fato implicou em novas possibilidades para a proposição de situações-problema relacionadas com a integral, cuja solução pode ser potencializada pela visualização, inclusive por meio dos aspectos dinâmicos, e dispensam a utilização dos procedimentos algorítmicos que têm produzido obstáculos no processo de ensino e aprendizagem da integral.

Ressaltamos que as configurações epistêmicas foram sistematizadas considerando o contexto de nossa pesquisa, na qual nos interessamos pelos significados atualmente atribuídos para a integral em um curso introdutório de Cálculo destinado à formação de professores de matemática da educação básica no Brasil. Nesse sentido, encontramos que as oito configurações epistêmicas emergem do estudo histórico-epistemológico-didático da integral. Além disso, a noção de integral sistematizadas nessas configurações também é evidenciada, de maneira complementar, nos livros de texto de Cálculo, por meio dos conhecimentos profissionais dos professores-formadores sobre os processos de estudo da integral e através de distintas pesquisas realizadas no âmbito da Didática do Cálculo.

O significado institucional de referência da integral foi sistematizado segundo o interesse desta investigação, de maneira a contemplar o significado da integral no contexto de um curso introdutório de Cálculo na Licenciatura em Matemática no Brasil. O referido significado foi útil para:

- proporcionar parte dos indicadores utilizados na elaboração de uma pauta de análise da idoneidade do processo de estudo da integral (Tabela 7.1);
- realizar a análise dos capítulos relacionados com a noção de integral em dois livros de texto de Cálculo que são utilizados na Licenciatura em Matemática (Capítulo 6);
- sistematizar os significados pessoais atribuídos pelos professores-formadores à integral (Capítulos 7, 8 e 9);
- caracterizar a idoneidade do processo de estudo da integral no contexto da formação de professores de Matemática, desde o ponto de vista dos mencionados professores-formadores, por meio da noção de *idoneidade didática* (Capítulos 7, 8 e 9).

A partir da gênese e desenvolvimento histórico da integral, constatamos a complexidade existente nessa noção matemática, o que permitiu identificar possíveis dificuldades que podem apresentar-se na implementação do processo de ensino e aprendizagem da integral em um curso introdutório de Cálculo no contexto da formação de professores de matemática. Dentre as principais dificuldades, ressaltamos: (1) as mudanças produzidas entre a evolução dos conteúdos de Cálculo (integrais, derivadas e limites) para a sequencia utilizada atualmente no desenvolvimento do currículo de Cálculo (limites, derivadas e integrais) (Turégano, 1994; 1998), o que contribuiu com um processo de ensino centrado nos aspectos mais algorítmicos e formais do Cálculo (Artigue, 1991, 1998; Calvo, 1997) e dificulta a visualização dos conceitos (Calvo, 1997; González-Martín, 2004). (2) A consideração da integral definida sempre como uma área e, portanto, que o seu resultado deve ser sempre positivo (Calvo, 1997; Turégano, 1998; Bezuidenhout y Olivier, 2002; González-Martín, 2004; Ordóñez, 2011). (3) A falta de compreensão do limite potencial (Tall, 1997; González-Martín, 2004; Ordóñez, 2011). (4) A dificuldade de compreensão do processo de limite na fundamentação da integral definida (Artigue, 1998, 2003; Ordóñez, 2011). (5) A tensão entre a intuição e o rigor no ensino de Cálculo e de Análise Matemática (Reis, 2001), sem delimitação das fronteiras entre essas disciplinas no que se refere ao tratamento que deve ser dado ao conceito de integral em um curso introdutório de Cálculo.

Objetivo 2

Sintetizar o currículo proposto para a Licenciatura em Matemática no Brasil e, particularmente, o currículo de Cálculo Diferencial e Integral.

O interesse desse objetivo consiste em desenvolver uma reflexão sobre o currículo referente à formação de professores no Brasil, particularmente no que concerne ao currículo proposto para a Licenciatura em Matemática e para o Cálculo. Para isso, analisamos as diretrizes curriculares propostas para a formação de professores de Matemática no Brasil.

Esse objetivo foi contemplado no Capítulo 5 e revela a complexidade do Sistema Educacional Brasileiro, e a possibilidade de organização de diversos currículos para a Licenciatura em Matemática realizada tanto nas universidades (públicas ou privadas) quanto em outras Instituições de Ensino Superior em distintas modalidades (presencial e a distancia) e com diferentes níveis. Outro aspecto que destacamos se refere à contradição entre a unidade que deveria ser contemplada entre teoria e prática no currículo da Licenciatura em Matemática e a ruptura entre ambas a partir das Resoluções do Conselho Nacional de Educação que regulamente esse curso (Silva, 2004).

A partir da análise das orientações curriculares para a formação de professores e da literatura específica que consultamos, sintetizamos os significados pretendidos para a Licenciatura em Matemática desenvolvida no Brasil; encontramos também alguns critérios que possibilitaram sintetizar o significado pretendido para o processo de estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Identificamos algumas razões que levaram tanto os professores quanto os estudantes a se sentirem frustrados com o atual desenvolvimento do currículo de Cálculo na Licenciatura em Matemática, entre os quais ressaltamos: (1) A falta das noções de Cálculo na educação básica; (2) O insatisfatório domínio das técnicas operatórias e da linguagem lógico-formal de matemática pelos estudantes que iniciaram o curso superior; (3) O equilíbrio precário entre a abordagem conceitual do Cálculo e a aprendizagem das técnicas; (4) a redução dos conceitos de Cálculo a algoritmos; (5) A necessidade de definição e eleição de mecanismos de negociação que possibilitem a apropriação dos significados de referência desejados para as noções matemáticas desenvolvidas em Cálculo (Barufi, 2002).

Objetivo 3

Analisar os significados da integral contemplados nos livros de texto de Cálculo utilizados na Licenciatura em Matemática.

Esse objetivo permitiu completar a caracterização dos significados institucionais planejados para o processo de estudo do Cálculo Integral no currículo da Licenciatura em Matemática. Para isso, realizamos uma análise da trajetória didática seguida por dois livros de texto que se encontram entre os indicados pelos professores-formadores para a implementação do processo de estudo da integral. Mediante a análise global dos capítulos relacionados com a integral, das configurações epistêmicas intermediárias e pontuais, aplicamos uma metodologia para análise de textos de Matemática adaptada de (Godino, Font e Wilhelmi, 2006).

Barufi (1999) após realizar uma análise sintética de 24 livros de texto de Cálculo, constatou que a estrutura existente em alguns desses livros se aproximavam mais ao currículo de Análise Real que ao de Cálculo. A discrepância entre a estrutura dos referidos livros e os significados pretendidos para um curso introdutório de Cálculo levou a autora a considerá-los inadequados para um curso destinado a atender a todos os estudantes de um curso de Cálculo. Foi constatado também que vários livros de texto não enfatizam as idéias importantes do Cálculo, que podem ser desenvolvidas através da proposição de problemas importantes e inovadores. Ainda que exista uma diversidade de livros de texto que não introduzem os temas de

Cálculo por meio de situações-problema, seus autores ressaltam que o Cálculo tem aplicações em diferentes áreas do conhecimento. Entretanto, a referida autora concluiu que muitos livros de texto analisados são significativos, importantes e compatíveis com o modelo teórico utilizado, afirmando que “sempre existiram bons livros” (p. 127).

A diferença básica entre a análise dos livros de texto que realizamos e o estudo anteriormente mencionado, consiste em que nos interessamos em desenvolver e aplicar uma metodologia específica, que permita realizar uma análise com detalhe e profundidade, de dois livros de texto de Cálculo geralmente utilizados nos cursos introdutórios de Cálculo no contexto da Licenciatura em Matemáticas no Brasil.

Nossa análise permitiu sistematizar as distintas configurações epistêmicas da integral contempladas nos referidos livros. Associamos o significado de referência da integral às configurações epistêmicas obtidas pela complementaridade dos significados planejados para a integral no contexto da formação de professores de matemática no Brasil.

Consideramos que o significado de referência da integral, sistematizado nessa análise, é representativo do significado planejado para a integral nos livros de texto de Cálculo geralmente utilizados na Licenciatura em Matemática no Brasil. Entretanto, a sistematização final do significado de referência da integral foi realizada a partir do contraste entre a análise de livros de texto de Cálculo, a análise dos antecedentes dessa investigação e dos significados pessoais manifestados pelos professores-formadores sobre a integral.

Objetivo 4

Sistematizar os conhecimentos profissionais manifestados pelos professores-formadores sobre o processo de estudo da integral no contexto da formação de professores de matemática da educação básica no Brasil.

Para atingir esse objetivo, elaboramos um instrumento de entrevista semi-estruturada baseado nas ferramentas teóricas do Enfoque Onto-semiótico. Posteriormente, realizamos entrevistas com dez professores-formadores, *experts* no processo de ensino de Cálculo no Ensino Superior. A análise dessas entrevistas foi realizada através de dois estudos de casos nos quais desenvolvemos uma análise em profundidade das narrativas de dois professores-formadores (Capítulos 7 e 8) e, da memória compartilhada dos professores-formadores (Capítulo 9).

Consideramos que este objetivo possibilitou realizar uma análise da dialética entre os significados pessoais - identificados em nossa pesquisa com o conhecimento profissional manifestado pelos professores-formadores sobre o processo de estudo da integral -, e os significados institucionais pretendidos - plasmados nos antecedentes, livros de texto e documentos curriculares. Esse conhecimento profissional foi sistematizado, no marco do EOS, por meio da caracterização dos processos de estudo da integral no contexto da Licenciatura em Matemática implementada no Brasil. Nesse sentido, os conhecimentos profissionais dos professores-formadores sobre o processo de estudo da integral, no contexto sócio-profissional de nosso estudo, correspondem aos significados institucionais dessa noção matemática e aportam critérios da idoneidade didática que devem ser considerados no desenho, planejamento e implementação da integral definida em um curso introdutório de Cálculo.

No Capítulo 7 sistematizamos o Caso I e, no Capítulo 8, o Caso II. A síntese geral das dez entrevistas está contemplada no Capítulo 9, por meio da “memória compartilhada dos professores-formadores”, no qual consideramos também a revisão bibliográfica dos antecedentes.

No caso I, caracterizamos os *significados pessoais* do professor-formador P1 sobre a Didática da integral. Nesse sentido, utilizamos, inicialmente, a *metodologia das narrativas* para analisar a formação, experiência profissional e a motivação de P1 para elaborar seu primeiro livro de texto. Na segunda parte da análise, utilizamos algumas ferramentas teóricas do EOS. As seis dimensões da *idoneidade didática* desenvolvidas no EOS: epistêmica, cognitiva, mediacional, emocional, interacional e ecológica se revelaram potentes e úteis para a sistematização e caracterização dos significados pessoais de P1.

Consideramos que os significados pessoais manifestados por P1 emergiram tanto de sua prática docente, quanto do processo formativo (formal e informal) e das experiências vivenciadas ao longo de sua vida profissional. Desse modo, observamos a estreita relação entre os construtos “significados pessoais” (Godino e Batanero, 1998) e o conhecimento profissional dos professores-formadores (Ruthven, 2002; Zaslavsky, Chapman y Leikin, 2003), que compreende os conhecimentos requeridos dos professores-formadores no sentido proposto por Jaworski (2008). Constatamos que as experiências pessoais de P1 foram ressaltadas em distintos momentos de sua entrevista, como via de explicação ou de justificação de sua prática profissional.

No que se refere à análise da entrevista realizada com o professor-formador P2, encontramos que os significados pessoais manifestados por P2 sobre a Didática da integral são fruto de sua prática profissional na docência e na investigação relacionada com o Cálculo e com a Análise Matemática. P2 evidenciou sua adaptabilidade às demandas profissionais ao mencionar sua atuação profissional no âmbito do Ensino Superior, assim como ao expressar sua motivação para realizar sua formação na pós-graduação (Doutorado e Pós-doutorado) realizada na área de Educação Matemática. Nesse sentido, seu conhecimento profissional vem sendo construído a partir de suas experiências individuais e sociais com o entorno de sua atuação profissional, assim como por meio das interações produzidas com os estudantes, professores e demais pessoas envolvidas em seu contexto profissional, o que demanda reflexão e adaptação (Zaslavsky, Chapman y Leikin, 2003).

No que se refere à dimensão epistêmica, sistematizamos os significados pessoais de P2 sobre a Didática da integral. Esses significados contemplam as *configurações epistêmicas primitiva, geométrica, extra-matemática, acumulada e tecnológica.* Entretanto, corroborando com as pesquisas realizadas na linha do *Pensamento Matemático Avançado* (Tall, 1997; Kouropatov y Dreyfus, 2009), P2 considera que o significado da integral definida, sistematizado em nossa pesquisa por meio da *configuração epistêmica acumulada*, deve ser priorizado no ensino da integral definida. Quanto à integral indefinida, a sugestão de P2 consiste em desenvolvê-la a partir da primitivação, enfatizando-se a idéia do fazer e desfazer de uma função (Tall, 1997).

A seguir, apresentamos as principais conclusões relacionadas com as hipóteses.

Hipótese 1

O processo de estudo do Cálculo Integral no Ensino Superior é complexo e seu desenho e implementação na formação de professores de Matemática deve levar em conta a reconstrução cognitiva requerida pela transição da Matemática elementar para a Matemática superior e os distintos significados da integral.

Ao abordar a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado, Tall (1991) afirma que os conflitos iniciais enfrentados pelos estudantes com as abstrações formais, ao iniciar sua carreira universitária, requerem que os mesmos desenvolvam uma reconstrução cognitiva para superá-los. Nesse sentido, constatamos nas investigações realizadas por Artigue (1991; 2003), as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes em um curso introdutório de Cálculo no Ensino Superior: a necessidade de desenvolver processos de estudo do Cálculo Integral centrados na construção de significados para a noção de integral, em lugar da excessiva algebrização com a qual esses processos geralmente são implementados. Esse processo requer do estudante a formalização das noções matemáticas e, consequentemente, uma ruptura do procedimento algébrico ordinário e a construção de significados (Artigue, 1998; 2003). A complexidade do processo de estudo de Cálculo foi ressaltada em distintas pesquisas, entre as quais destacamos: Domingos (2006) abordou a problemática relacionada com a compreensão dos conceitos matemáticos pelos estudantes do ensino superior; Thompson & Silverman (2007) consideraram a complexidade da noção de acumulação, desde a perspectiva de uma abordagem matemática formal, ainda que considerem que ela consiste em uma noção central para o processo de estudo de Cálculo; Jaworski (2008) reconheceu a complexidade do processo de ensino da matemática, associando-a com os conhecimentos considerados necessários para os professores, e declarou que o objetivo comum tanto dos professores de matemática quanto dos professores-formadores consiste em possibilitar oportunidades para o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos estudantes.

Nesse sentido, encontramos nas entrevistas que realizamos com os professores-formadores, afirmações relativas à referida hipótese, entre as quais ressaltamos nesta síntese as seguintes:

> Eu busquei distanciar da idéia do “rigor prematuro” – deixando-o para um curso de Análise Matemática – e desenvolver de imediato as “idéias” do Cálculo, pois os alunos dos cursos de Física, Engenharia e Matemática precisam aprender logo os recursos e as técnicas do Cálculo. Pela importância destes aspectos, eu os contemplei em meus livros de texto. [...] Quando iniciávamos o curso universitário, já se assumia o pressuposto que os conhecimentos prévios já estavam consolidados. Por isso, já começávamos com um curso formal de Análise Matemática; hoje em dia necessitamos retomar os conteúdos algébricos básicos com os estudantes, repassar um pouco de Geometria Analítica, de Trigonometria, etc. Ou seja, temos que retomar os temas do ensino médio (P1).

Consideramos que essa hipótese foi confirmada, pois constatamos que a complexidade do processo de estudo da integral está plasmada nas distintas investigações realizadas na Didática do Cálculo (Capítulo 1), na diversidade de sequencias contempladas nos livros de texto (Capítulo 6) e nas informações aportadas pelos professores-formadores (Capítulos 7, 8 e 9).

Hipótese 2

Os professores-formadores consideram que os livros de texto de Cálculo têm um papel importante nos processos de estudo da integral e que são representativos quanto aos significados da integral que devem ser implementados no contexto da formação de professores de matemática.

A importância do livro de texto como recurso didático foi ressaltada por diversos investigadores, como Rico (1990) e Reis (2001). Nesses estudos encontramos que os autores consideram que o livro, juntamente com o currículo, constitui um nível de transposição didática cuja ajuda é inestimável para os professores em suas aulas e que os livros de texto refletem a postura, os saberes particulares e a experiência de seus autores.

Neste sentido, consideramos que alguns estudantes geralmente utilizam o livro de texto como referência básica dos significados institucionais planejados, convertendo-o num recurso mediacional através do qual desenvolvem seu processo de estudo. Nesses casos, é atribuído o rol de “diretor” do processo instrucional ao autor do livro, pois este contribui com a construção progressiva do significado institucional das distintas noções matemáticas das quais os estudantes deverão apropriar-se. Na organização do livro de texto cada autor contempla, de maneira personalizada, os significados institucionais relacionados com as noções matemáticas desenvolvidas e apresenta sua proposta metodológica e sugere os recursos materiais e tecnológicos considerados apropriados ao processo de estudo ao qual se destina.

Além disso, destacamos a afirmação do professor-formador P1 de que “já existe, nos livros de texto, um acordo sobre o que deve ser contemplado nos cursos de Cálculo”. Nesse sentido, o significado institucional de referência para a integral se encontra nos livros de texto de Cálculo de maneira relativamente consensual entre seus autores. Assim, o livro representaria, em certa medida, os significados de referência das noções matemáticas que serão implementadas. Entretanto, essa posição não é convergente entre os professores-formadores, pois vários argumentaram que cabe ao docente universitário adequar, em conformidade com o currículo de cada curso universitário e necessidades formativas dos estudantes, os significados das noções matemáticas que deverão ser implementadas em cada curso.

Consideramos que essa hipótese foi confirmada parcialmente. Ainda que todos os professores-formadores e autores de livros de Cálculo consultados ressaltaram a importância dos livros de texto de Cálculo e consideram que eles contemplam os significados da integral que devem ser implementados no contexto da Licenciatura em Matemática, existem diversas opiniões relativas à necessidade de complementação dos referidos livros para que atendam aos propósitos do currículo da Licenciatura em Matemática.

Hipótese 3

A extração, codificação e sistematização do conhecimento profissional dos professores-formadores sobre o processo de estudo da integral aportarão critérios para caracterizar a idoneidade do referido processo na formação de professores de matemática.

Essa hipótese se apóia no fato de que o conhecimento profissional pode ser extraído e codificado (Ruthven, 2002) desde a prática profissional docente. A sistematização da experiência acadêmica e da prática profissional dos professores-formadores foi realizada a partir das narrativas (Connelly e Clandinin, 1990; Riessmann, 1993; Cortazzi, 1993; Chapman, 2008). No que se refere ao processo de estudo da integral, sua sistematização foi realizada através da utilização das ferramentas teóricas do Enfoque Onto-semiótico (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), entre as quais se destacam as noções de significado institucional e pessoal de uma noção matemática, configurações epistêmicas e idoneidade didática, as quais foram afinadas e aplicadas nesta investigação.

Na descrição das características da idoneidade do processo de estudo da integral, por meio da noção de idoneidade didática, consideramos o estudo documental (baseado na revisão das investigações, do currículo e de livros de texto) e experimental, realizado a través das entrevistas com os professores-formadores.

Na revisão bibliográfica constatamos que as investigações desenvolvidas na linha de pesquisa do “Pensamento do professor de Matemática” e sobre a “Didática do Cálculo”, geralmente, abordam aspectos parciais do problema. As pesquisas com abordagem cognitiva são predominantes em Didática do Cálculo e foram desenvolvidas, principalmente, na linha de pesquisa do “Pensamento Matemático Avançado”. A literatura especializada contempla outros enfoques emergentes no âmbito das pesquisas realizadas sobre o pensamento e a aprendizagem matemática na educação superior (Artigue, Batanero y Kent, 2007), entre os quais destacamos o Enfoque Onto-semiótico. De acordo com os referidos autores, entre as principais evoluções realizadas nesses estudos, se destaca “a crescente atenção colocada na dimensão semiótica da atividade matemática e o papel essencial desempenhado pelas conexões entre as representações, valores e perspectivas no pensamento e na aprendizagem matemática" (p. 1043).

Entretanto, consideramos que o desenho e o desenvolvimento curricular de programas de estudo de Cálculo, tanto a nível macro como micro-didático, devem levar em conta tanto as "concepções, erros e dificuldades" dos estudantes (dimensão cognitiva), quanto às demais dimensões que compõem a idoneidade didática, ou seja, a dimensão epistêmica (significados institucionais), a mediacional (uso de recursos materiais, tecnológicos e temporais), os modos de interação docente-discente na sala de aula, assim como os aspectos ecológicos (estudo das condicionantes sociais, econômicas, etc.).

A análise das entrevistas realizadas com os professores-formadores revelou que todas essas dimensões são consideradas quando eles manifestaram o seu conhecimento profissional sobre o processo de estudo da integral, o que confirma essa hipótese. Tanto o planejamento de um tema, particularmente da integral, quanto das aulas sobre o mesmo provem de uma matriz do conhecimento profissional do professor, obtido ao longo de sua experiência no processo de ensino e aprendizagem do tema ou extraída dos materiais curriculares disponíveis. Esse planejamento deve incluir as tarefas a serem realizadas, as representações que serão utilizadas, o formato das atividades e a previsão das dificuldades prévias dos estudantes (Ruthven, 2007). Esses aspectos foram ressaltados na análise das entrevistas realizadas com os professores-formadores, das quais emergiram os descritores que utilizamos para a caracterização dos processos de estudo da integral no contexto da formação de professores de matemática da educação básica desenvolvidos no Brasil, por meio da idoneidade didática. Enquanto realizamos a análise das entrevistas, completamos a tabela 7.1 com outros descritores provenientes das aportações específicas dos professores-formadores entrevistados. A caracterização dos processos de estudo da integral, realizada a partir dos conhecimentos profissionais dos professores-formadores sobre o tema, consiste em aportações relevantes de nossa investigação e são sintetizadas a seguir.

2.2. Caracterização dos processos de estudo da integral: a idoneidade didática e os conhecimentos profissionais dos professores-formadores

A noção de idoneidade didática desenvolvida pelo EOS contempla seis dimensões: epistêmica, cognitiva, mediacional, afetiva, interacional e ecológica. Em consonância com a metodologia qualitativo-interpretativa utilizada nesta investigação desenvolvemos um estudo de casos em profundidade (Gall, Borg y Gall, 1996, p. 767) com os professores-formadores. A análise dos casos, baseada nas referidas dimensões, evidenciou os conhecimentos que emergiram dos relatos dos entrevistados sobre a idoneidade do processo de estudo da integral. Consideramos que a descrição sistemática desses conhecimentos é uma maneira de responder à questão central desta investigação, enunciada nos seguintes termos:

> *Que características deveriam reunir os processos formativos dos professores de Matemática da educação básica para alcançarem um nível elevado de idoneidade nas diversas dimensões e fatores implicados?*

Na seção 2.2.1, inserimos a síntese da caracterização dos processos de estudo da integral na formação de professores de Matemática da educação básica no Brasil, realizada por meio da noção de idoneidade didática, considerando os conhecimentos profissionais dos professores-formadores e os resultados das pesquisas realizadas em Didática do Cálculo.

2.2.1. Dimensão epistêmica do processo de estudo da integral

A partir da literatura consultada, da análise de livros de Cálculo e das entrevistas realizadas, identificamos as oito *configurações epistêmicas* da integral manifestadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, as quais foram sintetizadas nesta investigação da seguinte maneira:

i. *Intuitiva* (problemas que requerem procedimentos intuitivos associados à noção de integral para solucioná-los; no obstante, esse conceito não é utilizado explicitamente).

ii. *Primitiva* (problemas que se resolvem a partir da primitivação de funções).

iii. *Geométrica* (problemas que envolvem noções geométricas de áreas, volumes, comprimento de um arco, etc.).

iv. *Somatória* (problemas cujas soluções são obtidas a partir das somas de Riemann).

v. *Aproximada* (problemas cuja solução requer a utilização de métodos numéricos aproximados).

vi. *Extra-matemática* (problemas extra-matemáticos que são resolvidos a partir da integração).

vii. *Acumulada* (problemas nos quais se utiliza o conceito de *crescimento acumulado,* desenvolvido nos trabalhos relacionados com o "Pensamento Matemático Avançado").

viii. *Tecnológica* (problemas cuja solução contempla recursos tecnológicos).

Os elementos que constituem cada uma das configurações epistêmicas da integral estão descritos no Capítulo 4 e constituem, em consonância com o Enfoque Onto-semiótico, o significado de referência da integral que devemos considerar para o planejamento e a implementação do curso introdutório de Cálculo no contexto da Licenciatura em Matemática no Brasil. As oito configurações epistêmicas da integral emergiram de das informações dos entrevistados e se constituem em uma das aportações desta investigação (Capítulos 7, 8 e 9).

Na dimensão epistêmica da integral, analisamos também as *articulações e conexões*, assim como as *adaptações curriculares*. Encontramos que as oito configurações epistêmicas da integral podem ser coerentemente articuladas no desenho, planejamento e desenvolvimento do processo de estudo da integral. Os professores-formadores colocaram as situações-problema envolvidas em cada caso, a partir das quais tem sido possível sistematizar essas configurações e interpretá-las como o significado de referência da integral para um curso introdutório de Cálculo.

Entre as relações que podem ser estabelecidas com a integral, constatamos as *intra-matemática* (intradisciplinares e interdisciplinares) e as *extra-matemática.* Por intradisciplinares nos referimos às relações internas ao Cálculo que relacionam a noção de integral com outras noções, como derivada, limite, etc. As relações que se estabelecem entre a integral e outras disciplinas da área de Matemática (como Álgebra, Geometria Euclidiana Plana e Espacial, Análise Real, etc.), são entendidas como relações interdisciplinares. Além disso, ficou evidenciado nas entrevistas as relações extra-matemática, que se estabelecem entre a integral e outras disciplinas (ou áreas de conhecimento), tais como Física, Biologia, Economia, Engenharias, etc. Em todos os casos as relações da integral estão associadas à sua utilização (de maneira intuitiva ou formal) na resolução de situações-problema específicas de cada disciplina ou área de conhecimento.

Para os descritores *abordagem e adaptações curriculares* destacamos que há currículos da Licenciatura em Matemática desenhados e implementados contemplando a formação matemática, didática e prática desde o início do curso. Isto diverge dos currículos do tipo “3+1” (três anos de disciplinas específicas da formação matemática e um ano de formação didática), a partir do qual eram organizados os currículos da Licenciatura em Matemática no Brasil y que possivelmente ainda exercem influência sobre esses currículos.

Os professores-formadores colocaram ênfase na importância do Cálculo no currículo da Licenciatura em Matemática. Nesse sentido, P3 ressaltou que o Cálculo proporciona ao futuro professor de Matemática uma visão geral da Matemática. Além disso, há manifestado uma “concepção construtivista” do Cálculo ao afirmar que “se trata de um ramo da Matemática construída pelo homem e por tanto em desenvolvimento”. Segundo essa concepção, a Matemática é fruto da criação humana e se encontra em constante desenvolvimento.

O Cálculo também foi concebido por P3 como “um conhecimento que revolucionou a maneira de ver a Matemática”, por P6 como a “espinha dorsal” do currículo da Licenciatura em Matemática e por P5 como uma "disciplina entrelaçada com as demais disciplinas do currículo da licenciatura". Por tanto considera relevante estabelecer as relações entre o Cálculo e as outras disciplinas. Por outro lado, o papel do Cálculo foi ressaltado nas pesquisas realizadas em Didática do Cálculo. Ao discutir sobre os motivos pelos quais o Cálculo é estudado, Bressoud (1991, citado por Barufi, 2002) considerou dois motivos: o primeiro consiste na variedade de contextos e disciplinas nas quais o Cálculo é utilizado. O segundo está baseado no fato do Cálculo estar situado nos fundamentos de nossa visão de mundo científico, a qual tem contribuído com a formação do pensamento científico moderno. "Quando falo de ciências não me restrinjo a outras disciplinas. De uma maneira muito significativa, a própria Matemática passou a ser vista dessa maneira com o desenvolvimento do Cálculo" (p. 70). Kouropatov & Dreyfus (2009) também ressaltaram a relevância das noções de integral e derivada na formação do "núcleo de um domínio matemático que é uma linguagem, um dispositivo e uma ferramenta útil para outros campos, como a Física, a Engenharia, a Economia e a Estatística" (p. 3-417).

No que se refere à inclusão das noções de Cálculo no currículo da educação básica no Brasil, a posição da maioria dos professores-formadores foi convergente no sentido de que devem ser abordadas apenas suas "idéias básicas", não formalizando as noções do Cálculo. Entretanto, P1 considerou importante contemplar procedimentos de resolução de derivadas elementares e utilizá-las na resolução de situações-problema relacionadas com conceitos físicos. Para P5 as noções introdutórias do Cálculo podem ser úteis para a educação básica dirigida à formação profissional dos estudantes.

2.2.2. Dimensão cognitiva do processo de estudo da integral

Os descritores utilizados na sistematização da dimensão cognitiva consistem em: conhecimentos prévios dos estudantes, aprendizagem e as adaptações curriculares às diferencias individuais dos estudantes. Sintetizaremos as informações dos entrevistados sobre esses descritores.

Sinteticamente, constatamos que há divergência entre os professores-formadores com relação à necessidade de levar em conta determinados pré-requisitos matemáticos dos estudantes ao iniciarem o curso universitário. Ainda que 50% dos entrevistados os consideram relevantes, também obtemos afirmações de que eles são irrelevantes e que os conhecimentos se constroem no ato do processo de ensino, cabendo aos professores de Cálculo realizar uma revisão das noções prévias necessárias para que os estudantes desenvolvam o curso de Cálculo com êxito. Outra consideração interessante que encontramos se refere ao fato de que as próprias noções desenvolvidas num curso introdutório de Cálculo, como a de integral, se convertem nos conhecimentos prévios para outras disciplinas da Licenciatura em Matemática, tornando-se imprescindível que os estudantes construam seu conhecimento de maneira significativa para que possam obter êxito nas demais disciplinas da Licenciatura em Matemáticas, tornando imprescindível que os estudantes construam seu conhecimento de maneira significativa para que possam passar, com êxito para as demais disciplinas do curso. A falta de conhecimentos prévios é identificada como uma das dificuldades de aprendizagem da integral pelos estudantes (Olímpio Junior, 2006; Cury, 2009; Igliori, 2009).

Com relação à aprendizagem das noções de Cálculo pelos estudantes universitários, especialmente da integral, encontramos diversas considerações nas entrevistas com os professores-formadores e corroboradas pela literatura científica especializada, respectivamente, entre as quais destacamos: as dificuldades de aprendizagem consistem na complexidade das noções de Cálculo e na linguagem utilizada (Tall, 1991; Artigue, 1991, 2003; Thompson & Silverman, 2007); o processo de estudo deve iniciar a partir dos problemas do cotidiano, o que pode ser realizado por meio do desenvolvimento de projetos de ensino (Ribeiro, 2010; Figueiredo, Mello & Santos, 2011); necessidade de mais tempo para aprofundar na aprendizagem dos conceitos e propriedades do Cálculo com os estudantes (Ruthven, 2007, Lois & Milevicich, 2009); a transição entre as distintas representações como chave para a aprendizagem das noções do Cálculo (Tall, 1991; 1997; González-Martín, 2004; Rosken & Rolka, 2006; Camacho, Depool & Garbín, 2008); envolver os estudantes num processo ativo de estudo do Cálculo e, a importância de conhecer os estilos de aprendizagem dos estudantes como uma via para adequar o processo de estudo do Cálculo às características dos mesmos (Frota, 2009).

Constatamos também a importância atribuída pelos professores-formadores à adequação de sua prática profissional às necessidades do grupo de estudantes, considerando o curso para o qual se planeja e se implementa o processo de estudo do Cálculo e as diferenças individuais dos estudantes. Ressaltamos também a afirmação de P3 referente à necessidade de mudança de atitude por parte de alguns dos professores universitários que planejam suas aulas para atender a uma reduzida quantidade de estudantes que se destacam em Cálculo. Em sua opinião, as instituições superiores de educação requerem "docentes que planejem suas aulas de maneira que tratem de responder ao *por que* se estudam determinados conteúdos, assim como o *para que eles servem* e *onde são aplicam* na prática profissional". Outro posicionamento que consideramos relevante mencionar se refere ao êxito da atenção individualizada que alguns dos professores-formadores afirmaram realizarem com os estudantes de Cálculo, de maneira individualizada ou através do trabalho com pequenos grupos.

2.2.3. Dimensão mediacional do processo de estudo da integral

Nessa dimensão analisamos as informações dos professores-formadores utilizando os seguintes descritores: uso de materiais didáticos e recursos tecnológicos; uso, características e rol do livro de Cálculo; adequação dos significados pretendidos/implementados ao tempo disponível; e investimento do tempo nos conteúdos mais relevantes e que apresentam mais dificuldades.

Os recursos tecnológicos são considerados pelos entrevistados como fundamentais para o desenvolvimento do processo de estudo da integral. No entanto, devemos refletir sobre alguns dos aspectos destacados nas entrevistas. P2 considerou a necessidade dos professores universitários romperem com seus próprios modelos formativos para incorporarem os recursos tecnológicos no processo de estudo da integral. P1 ressaltou a importância de estudar a Matemática utilizada no desenvolvimento dos *softwares* matemáticos que geralmente são utilizados nos cursos de Cálculo. P3 adverte que não basta realizar a modelagem de uma situação-problema e resolvê-la por meio de algum *software* específico, mas é preciso verificar a adequação da solução apresentada no monitor ao problema específico de Cálculo. A falta de interação do processo de estudo do Cálculo com os recursos tecnológicos foi apontada por P10 como um dos obstáculos para a inserção de situações-problema, relacionadas com a realidade de alguns cursos que requerem a utilização de tecnologias específicas para solucioná-las. Os estudos desenvolvidos em Didática do Cálculo, relacionados com a utilização das tecnologias são abundantes (Tall, 1997; Artigue, 1998; González-Martín, 2004; Depool Rivero, 2005; Ruthven, 2007; Camacho, Depool & Garbín, 2008; Lois & Milevicich, 2009; Tall, 2012) e se referem à compreensão dos conceitos matemáticos, particularmente da integral. Esses estudos são predominantemente cognitivos e geralmente abordam os construtos desenvolvidos no marco do "Pensamento matemático avançado".

No que se refere à utilização do livro de texto de Cálculo, constatamos duas afirmações relevantes. A primeira é que o livro é uma referência (ou um guia) para que os estudantes se coloquem em dia com os temas desenvolvidos nas aulas, especialmente quando eles faltam às aulas presenciais, e também se constitui num recurso que orienta o processo de estudo de Cálculo que o professor desenvolve. A segunda trata da experiência do professor universitário para dar aulas de Cálculo, ou seja, considera que os professores universitários, no inicio da docência, geralmente, utilizam livros tradicionais e seguem sua sequencia para terem mais segurança em sua prática docente, enquanto os professores com mais experiência acadêmica, ainda que utilizem os livros, o fazem de maneira mais autônoma. Entretanto, foi enfatizada a necessidade de adequação dos livros de Cálculo para atender tanto às características do curso, quanto aos estudantes a que são dirigidos. Assim, os entrevistados consideram que competem aos docentes de Cálculo complementar os livros, fazendo as adequações das situações-problema e dos projetos contemplados à realidade brasileira. As características principais ressaltadas para o livro de Cálculo consistem na contemplação dos recursos tecnológicos, projetos, e História da Matemática. Também devem utilizar uma linguagem acessível ao estudante e contemplar exemplos e aplicações diversificadas. Dentre as pesquisas relacionadas com os livros de texto de Cálculo, ressaltamos as realizadas por Barufi (1999), Reis (2001) e Contreras, Ordóñez & Wilhelmi (2010).

Outro descritor considerado na dimensão mediacional se refere à *adequação dos significados pretendidos/implementados da integral ao tempo disponível e ao investimento do tempo nos conteúdos mais relevantes*. Após análise desse descritor, constatamos que: 60% dos professores-formadores consideram que a utilização de recursos tecnológicos no processo de estudo da integral possibilita a otimização do tempo. De maneira complementar, P3 afirmou que o mais importante é motivar os estudantes, acrescentando haver sido satisfatório o desenvolvimento de um curso introdutório de Cálculo em seis horas semanais, das quais duas horas eram dedicadas às práticas. A articulação entre a teoria e a prática foi considerada relevante para o êxito dos estudantes em Cálculo. Nas pesquisas revisadas, são ressaltadas propostas de desenvolvimento de atividades práticas relacionadas com a utilização das tecnologias no processo de ensino do Cálculo, estudos relacionados com a História da Matemática (Farmaki & Paschos, 2007) e com a "atividade matemática avançada" proposta por Rasmussen, Zandieh, King & Teppo (2005).

Algumas problemáticas surgiram dos relatos dos professores-formadores, entre as quais consideramos relevante destacar: há professores que centram o curso de Cálculo nos procedimentos algorítmicos, o que reduz o tempo destinado ao aprofundamento do mesmo no que se refere aos aspectos teóricos e às aplicações das noções do Cálculo. A problemática relativa aos procedimentos algorítmicos predominantes nos cursos de Cálculo foi ressaltada em diversos estudos (Artigue, 1998, 2003; González-Martín, 2004; Moreno, 2005; Depool Rivero, 2005; Rosken & Rolka, 2006). Por outro lado, os professores-formadores consideraram que a pouca experiência de alguns professores universitários está relacionada com o fato dos mesmos seguirem a mesma sequencia de conteúdos contemplada nos livros de texto, o que demanda mais tempo para desenvolver o programa de Cálculo. Também há divergência de opinião relacionada com a relação do pouco tempo destinado ao aprofundamento dos conteúdos de Cálculo e se isso seria um fator relevante para superar essa dificuldade.

2.2.4. Dimensão afetiva do processo de estudo do Cálculo

A dimensão afetiva foi sistematizada a partir d*os interesses e das motivações, das atitudes e das emoções no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo.* Segundo os entrevistados, os interesses e as motivações dos estudantes se potencializam quando: eles assumem o protagonismo do processo de estudo centrado em sua aprendizagem (P8); desenvolve-se um processo de estudo bem fundamentado, justificando o "por que" dos temas contemplados no currículo de Cálculo (P2, P3, P4 e P6); dialoga-se com os estudantes e identificam seus interesses (P10); utilizam-se os recursos tecnológicos no processo de estudo de Cálculo (P2, P3, P4, P5, P8 e P9).

No que se refere às atitudes que se pretende desenvolver ou são observadas nos estudantes da Licenciatura em Matemática por parte dos professores-formadores, destacamos as seguintes considerações: necessidade de desenvolver uma atitude ativa, reflexiva e flexível que possibilite aos futuros professores de Matemática afrontar sua profissão (P1, P2, P6, P8 e P9); o docente deve contribuir com a superação das dificuldades dos estudantes (P2, P4 e P10); há uma tendência dos professores de reproduzir as atitudes de seus professores-formadores em sua futura atuação profissional (P4 e P5), no sentido destacado por Reis (2001).

No que se refere às emoções observadas nos estudantes ou manifestadas pelos formadores, após desenvolverem o processo de estudo de Cálculo, ressaltamos as seguintes considerações: existe uma relação entre a estratégia didática desenvolvida pelo docente e o grau de satisfação e êxito dos estudantes universitários, a qual geralmente é refletida na auto-estima dos estudantes e em seu gosto pela Matemática (P2); e o prazer que sente o professor ao dar uma boa aula (P3).

Enquanto realizávamos as entrevistas com os professores-formadores, nos chamou a atenção a expressão "bom professor de Matemática", utilizada inicialmente por P2. Buscamos identificar que características devem reunir o docente para que seja considerado um bom professor de matemática, sendo destacadas, principalmente: sentir prazer em dar aulas (P1, P3, P6 e P10); inovar-se constantemente e desempenhar o papel de educador (P3, P10); estudar os processos de aprendizagem da Matemática de seus alunos (P10); atualizar-se através das investigações educacionais (P10); interagir com docentes e discentes (P10); estabelecer grupos de trabalho na sala de aula com os alunos e com os colegas; aprender a compartilhar experiências; ser um indivíduo que se surpreenda em descobrir e redescobrir temas sobre Matemática; saber lidar com seu próprio erro e com o erro do estudante (P10); vislumbrar a beleza da Matemática (P6); ter conhecimento matemático e criatividade (P6, P7); ser muito criativo e ter claras as idéias que serão expostas (P6); ser um líder e um amigo dos estudantes; ser humilde (P6); contribuir para que o aluno seja mais feliz em sua formação (P4); desenvolver a afetividade com os estudantes, pois esta parte é a que traz essa felicidade, essa alegria, essa vontade e satisfação de viver (P4).

Consideramos que um bom professor de matemática deve possuir um conhecimento profissional que contemple um componente ético e emocional, que possa contribuir com a motivação dos estudantes o desenvolvimento de seu processo de aprendizagem, de um ambiente de tolerância e respeito mútuo na sala de aula. “Motivar os estudantes consiste em uma atividade emocional e social que exige mediações complexas da interação humana: a sedução, a persuasão, a autoridade, a retórica, a punição, etc.” (Tardifi, 2011).

2.2.5. Dimensão interacional do processo de estudo da integral

Os descritores da dimensão interacional utilizados nesta investigação consistem nas *interações: docente-discente, entre docentes e entre discentes, assim como na autonomia dos estudantes.*

Com relação à interação docente-discente, extraímos informações como: qualquer ação de êxito flui a partir da interação do professor com o aluno (P7); depois de desenvolver aulas de maneira mais interativa houve melhoria na aprendizagem da integral (P5); os estudantes devem ser estimulados a expressarem suas idéias e formas de pensamento relativo aos temas estudados nas aulas (P4); os docentes devem propiciar um ambiente de confiança e respeito para que os estudantes possam expressar-se nas aulas (P6). No que se refere às interações entre os docentes universitários, P10 afirmou que se faz necessário que os professores trabalhem de maneira colaborativa para desenvolverem um bom currículo da Licenciatura em Matemática, rompendo com a maneira individualista com que geralmente se trabalha; para a realização de um trabalho mais criativo é fundamental que os docentes estejam entusiasmados e acrescentem experiências tanto pessoais, quanto profissionais (P9). A interação entre os discentes também foi mencionada pelos entrevistados, especialmente relacionada com as atividades desenvolvidas pelos estudantes, em grupos, nas aulas ou extraclasse (P3 e P5). A partir dos relatos dos professores-formadores, inferimos que a autonomia dos estudantes pode ser potencializada através da utilização de estratégias didáticas que lhes atribuam a responsabilidade para desenvolverem atividades de maneira ativa e interativa no processo de estudo do Cálculo.

Ressaltamos que distintos aspectos abordados na dimensão interacional do processo de estudo da integral, tais como "a tutoria dos estudantes, a participação em projetos e atividades da escola, a interação com os membros da comunidade e a atuação em associações profissionais" (Ponte, 1998, p. 2) também estão relacionados com o conhecimento profissional do docente.

2.2.6. Dimensão ecológica do processo de estudo da integral

Essa dimensão foi sistematizada a partir dos descritores: adaptação sócio-profissional e cultural dos professores-formadores e a abertura para a inovação didática. Todos os professores-formadores declararam que após sua formação inicial e continuada (incluindo a Pós-Graduação) começaram a dar aulas no Ensino Superior. Esse fato demandou a necessidade de adaptação sócio-profissional às condições institucionais e à realidade dos cursos nos quais desenvolviam suas atividades profissionais. A realização da Pós-Graduação consistiu na via utilizada pelos docentes tanto para legitimar seu *status* de docente universitário, quanto para atender aos interesses pessoais e institucionais dos professores-formadores. O tema das teses doutorais de 30% dos entrevistados se relaciona com o processo de estudo do Cálculo e 70% dos mesmos desenvolveram investigações específicas sobre a Didática do Cálculo. Isso evidenciou que o fato de ministrarem aulas de Cálculo na docência universitária contribuiu e motivou os professores-formadores a desenvolverem suas pesquisas relacionadas com a problemática existente no processo de estudo do Cálculo e, a buscarem soluções para os mesmos a partir dos estudos realizados em Didática do Cálculo. O anterior evidencia a adaptação sócio-profissional ao contexto que articula a prática profissional dos professores-formadores com a pesquisa educativa (Ruthven, 2002). Isso contribui com a construção de seu conhecimento profissional sobre o processo de estudo de Cálculo no contexto da formação de professores de Matemática. Dentre os conhecimentos profissionais que Jaworski (2008) considerou relevantes para o professor-formador, se encontram aqueles relacionados com os sistemas sociais e contextos culturais; as particularidades da escola (ou universidade); as teorias de aprendizagem e de ensino e a metodologia científica relacionada com as pesquisas no contexto da escola e do sistema educacional.

Com relação à adaptação do currículo da Licenciatura em Matemática ao entorno social e cultural, P7 considerou satisfatória a estrutura curricular do projeto pedagógico da licenciatura oferecida em sua universidade. Também ressaltou a importância da participação dos docentes no desenho e implementação do currículo. Entretanto, ressalta a necessidade de avaliação periódica e de aperfeiçoamento do currículo para melhorar a qualidade da formação dos futuros professores de Matemática da educação básica. A importância de contemplar uma formação cidadã e crítica na Licenciatura em Matemática foi mencionada por P3, que considerou que além da formação matemática, é necessário que o futuro professor de Matemática passe por uma formação crítica e cidadã que lhe permita apresentar soluções para os problemas demandados pelos estudantes nas distintas áreas do conhecimento e contribuir, por meio da Matemática, tanto com a formação crítica de seus estudantes como com a melhoria da sociedade na qual desenvolverá sua prática docente.

Corroboramos com a posição de Chapman (2008), ao considerar que a prática instrucional por si mesma “pode constituir-se na base para a aprendizagem do professor-formador” (p. 117). Nesse sentido, o conhecimento profissional que os professores-formadores manifestaram sobre o processo de estudo da integral no contexto da formação de professores de matemática no Brasil, possibilitou caracterizar esse processo por meio da noção de idoneidade didática. Consiste num processo contínuo, desenvolvido ao longo da vida do docente de maneira formal e informal, possibilitando-lhes serem “vistos como aprendizes que refletem continuamente sobre seu trabalho e dão sentido às suas histórias, práticas e outras experiências” (Idem, p. 879). As características que emergem desse processo possibilitam identificar os critérios para uma análise coerente da idoneidade didática do processo de estudo da integral, no contexto sócio-profissional da Licenciatura em Matemática implementada no Brasil.

2.3. Limitações do estudo e questões em aberto

Como geralmente ocorre nas investigações, não temos a pretensão de abarcar todos os aspectos referentes aos conhecimentos profissionais dos professores-formadores de futuros professores de Matemática da educação básica. Por isso, centramos nossa atenção na caracterização dos processos de estudo da integral no contexto sócio-profissional de formação de professores de Matemática de educação básica no Brasil, por meio da noção de idoneidade didática.

Especificamente no contexto brasileiro, a formação do professor universitário se realiza através da Pós-Graduação (Mestrado e/ou Doutorado). Os entrevistados que participaram de nossa investigação, além de dar aulas na Licenciatura em Matemática e da realização de investigações relacionadas com as áreas de Matemática ou de Educação Matemática, tem ampla experiência no desenvolvimento de atividades docentes e investigativas em Programas de Pós-Graduação em ambas as áreas, o que lhes converte em formadores de formadores de professores de Matemática de educação básica. Estamos utilizando a terminologia professores-formadores no duplo sentido descrito por Biellerot (1996, p. 2) [1] que se refere ao profissional responsável pela formação de novos docentes, de *formador de base* e define o formador de formad*ores como "um profissional* da formação que intervém para formar novos professores ou para aperfeiçoar, atualizar, etc., ao formador em exercício" (idem). Entretanto, nos parece pertinente afirmar que esta investigação abre novas perspectivas relacionadas com a formação de professores de Matemática, entre as quais ressaltamos:

- desenvolver novas investigações centradas no conhecimento profissional que emerge dos professores-formadores sobre outros objetos didáticos do Cálculo e verificar o grau de coincidência com os resultados obtidos nesta investigação;
- realizar investigações com ênfase na análise do conhecimento profissional dos professores-formadores sobre objetos didáticos de outras disciplinas contempladas no currículo da Licenciatura em Matemática e sua aplicabilidade no desenho e desenvolvimento do currículo da Licenciatura em Matemática;
- investigar a viabilidade do desenho, planejamento e implementação de processos de estudo da integral (ou de outros objetos didáticos do Cálculo), levando em conta a utilização de critérios de idoneidade que possam ser organizados a partir da caracterização dos processos de estudo da integral realizada nesta investigação;
- investigar o conhecimento profissional manifestado pelos professores-formadores sobre a integral (ou objetos didáticos do Cálculo) no contexto de outros cursos (da Engenharia, por exemplo), associando-lhe ao desenho,

[1] Citado por Costa (2009, p. 20).

planejamento e implementação dos processos de estudo dos distintos objetos didáticos do Cálculo;

- investigar a idoneidade dos processos de estudo sobre objetos didáticos do Cálculo desenvolvimento a partir de uma articulação coerente entre as aulas teóricas e práticas realizadas por meio da utilização de recursos tecnológicos.

Finalmente, consideramos que nossa investigação aporta novos conhecimentos relacionados com a Didática do Cálculo, conhecimento profissional e professores-formadores. A utilização conjunta da noção de idoneidade didática desenvolvida pelo Enfoque Onto-semiótico, juntamente com a metodologia das narrativas se revelaram potentes para analisar os conhecimentos profissionais manifestados pelos professores-formadores, y para caracterizar os processos de estudo da integral no contexto da formação de futuros professores de matemática da educação básica. Nesse sentido, os conhecimentos profissionais dos professores-formadores (desenvolvidos a partir de suas práticas profissionais e investigações acadêmicas, levando em conta seus interesses e necessidades pessoais e institucionais, a satisfação, o êxito profissional, e a melhoria da aprendizagem dos conteúdos matemáticos) se convertem em conhecimentos produzidos desde a prática.

ANEXOS

ANEXO 1

GUIÓN DE ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS

Estimado Profesor,

Inicialmente queremos darle las gracias por su inestimable colaboración con el desarrollo de nuestra investigación. Nuestro interés consiste en caracterizar los criterios de idoneidad y significados institucionales de objetos matemáticos sobre el estudio de la integral en el contexto de la Licenciatura en Matemáticas en Brasil. Para esto será muy importante que exprese, con el máximo detalle posible, lo que piensa con relación a los siguientes aspectos:

Formación profesional y experiencia académica:

1. Nos gustaría que comentase cuál es su formación y experiencia profesional en la enseñanza universitaria.
2. Con relación al proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, ¿Cuál ha sido su experiencia académica? ¿Hubo alguna experiencia especial de éxito o de fracaso que puedes compartir con nosotros?

Currículo de la Licenciatura en Matemáticas:

3. En su opinión, ¿Cuál es el papel del Cálculo en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas? ¿Cómo se articula con las demás asignaturas de dicho currículo? ¿Y con las matemáticas preuniversitarias?
4. ¿Considera usted que la actual organización curricular de la licenciatura en matemáticas posibilita desarrollar las competencias específicas que se requiere de un profesor de matemáticas de la enseñanza preuniversitaria? Sobre el currículo del Cálculo, ¿Cómo puede contribuir para lograr estas competencias?
5. En cuanto al Cálculo integral, ¿Qué papel juega en la Licenciatura en Matemáticas? ¿En qué sentido puede contribuir en la adquisición de las competencias del futuro profesor de matemáticas? ¿Cuál es la importancia del estudio de la integral en dicho currículo?

Libro de Texto

6. Parece que hay una tendencia de los profesores de Cálculo en impartir los contenidos de la asignatura tal y como se presentan en alguno de los libros de texto que utilizan ¿Está de acuerdo con esto? ¿Hasta qué punto el libro de texto interviene en el proceso de enseñanza del Cálculo? ¿Qué libros de Cálculo considera más apropiados para la Licenciatura en Matemáticas? ¿Puede usted sintetizar los principales aspectos positivos y las debilidades de cada uno de estos libros?
7. ¿Qué criterios utiliza usted para elegir los libros de texto de Cálculo? ¿En que medida dichos criterios se adecúan al currículo de la Licenciatura en Matemáticas?
8. ¿Qué particularidad deberían tener los libros de texto para optimizar la enseñanza del Cálculo para los futuros profesores de matemáticas? ¿Es importante relacionar los contenidos con su desarrollo histórico? ¿Se deben contemplar actividades que requieran recursos tecnológicos? ¿Qué se debe contemplar y qué resaltar en la organización de la unidad sobre la integral?

Significados personales de la Integral

9. ¿Qué tipo de situaciones-problema se pueden plantear en el estudio de la integral en la Licenciatura en Matemáticas? ¿Qué conocimientos previos se requieren de los estudiantes para afrontarlas? ¿Qué nivel de generalización se puede obtener a partir de las referidas situaciones/ problemas?
10. ¿Considera usted importante la utilización de distintas representaciones para la enseñanza de la integral? ¿Cuáles serían las representaciones más apropiadas para esto? ¿Qué dificultades pueden presentarse en la traducción entre dichas representaciones? ¿Qué lenguajes previos deben “conocer” los estudiantes para esta finalidad? ¿A qué grado de generalidad se puede llegar a partir de dichas representaciones?
11. ¿Cuáles serían las principales técnicas utilizadas en la enseñanza de la integral? ¿Esto requiere algunas técnicas previas? ¿Se pueden generalizar?

12. ¿Qué conceptos emergen del proceso de enseñanza de la integral? ¿Qué conceptos previos se usan de manera explícita o implícita en el referido proceso?
13. ¿Qué propiedades emergen de la enseñanza de la integral? ¿Qué propiedades previas se utiliza explícita o implícitamente? ¿Se pueden generalizar estas propiedades?
14. ¿Cómo se debe argumentar o justificar las propiedades y teoremas relacionados con la integral en la Licenciatura en Matemáticas? ¿Qué se debe demostrar y qué no se necesita hacerlo? ¿Considera que los estudiantes están capacitados para desarrollar las demostraciones de los referidos teoremas y propiedades?

Idoneidad Didáctica

15. En el contexto de la formación de profesores de matemáticas, ¿Cómo conseguir que dichos profesores sean competentes para planificar sus clases de forma que sea posible aplicar las matemáticas a contextos no necesariamente matemáticos?
16. ¿Qué competencias pueden ser desarrolladas a partir de un curso introductorio de Cálculo? En cuanto a la integral, ¿Se puede decir que su enseñanza contribuye al desarrollo de dichas competencias? Con relación al actual currículo de la Licenciatura en Matemáticas, ¿Piensa que éste contribuye al desarrollo de qué competencias?
17. Entendemos que los distintos “significados parciales” (o intermedios) de la integral se articulan, a través de una red, componiéndose su “significado global” en un contexto dado. Siguiendo esta idea, ¿Cuáles son los “significados parciales” de la integral que usted considera que están presentes – explícita o implícitamente – en la Licenciatura en Matemáticas? ¿Piensa que dichos significados son contemplados en las propuestas curriculares y en los libros de texto de Cálculo?
18. ¿Los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas poseen los conceptos previos necesarios para asimilar los referidos significados? ¿Qué se puede hacer para dotarlos de estos conceptos?

19. ¿Qué conflictos semióticos suelen ocurrir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral? ¿Cuáles son las principales dificultades presentadas por los estudiantes y qué alternativas serían viables para superarlas?
20. En su opinión, ¿Cuál sería la mejor secuencia didáctica para organizar el tema de la integral para la Licenciatura en Matemáticas? ¿Qué criterios se deben tener en cuenta para esto? ¿Qué piensa sobre el tiempo destinado para esta finalidad? ¿Qué recursos materiales serían necesario para optimizar el aprendizaje de los estudiantes?
21. ¿Cómo le parece el nivel de interés y de motivación de los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas con relación al curso de Cálculo? ¿Sucede lo mismo en las demás disciplinas de dicha licenciatura?

Disposición de los profesores para el cambio

22. ¿Qué cambios considera usted relevante para el currículo del Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas? ¿Y en el currículo de dicha licenciatura? ¿Por qué?
23. ¿Estarían los profesores de la Licenciatura en Matemáticas dispuestos para realizarlos? ¿Qué factores pueden motivarlos para estos cambios? ¿Qué papel debería jugar la universidad en un proceso de cambio e innovación curricular de la Licenciatura en Matemáticas?
24. ¿Como se puede lograr que los profesores universitarios que actúan en la licenciatura de matemática se involucren en la mejora de la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de sus disciplinas? ¿Qué sería necesario para que estos profesores centrasen sus esfuerzos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes?

Para los autores de libros de Cálculo

Relacionar las cuestiones anteriores con el contenido en sus libros, particularmente en las unidades relacionadas con la integral.

ANEXO 2

ENTREVISTA A P1: PROFESOR(A) – FORMADOR(A) Y AUTOR(A) DE LIBRO DE CÁLCULO

Duración: 1 h 35 min. 04 s

(I: Investigador / P1: Entrevistado)

1. Introducción

I: Profesor "P1", me gustaría darle las gracias por la colaboración para con nuestra investigación. Será un placer entrevistarlo pues sabemos que usted es autor de un libro de texto de Cálculo bastante utilizado en la enseñanza universitaria en Brasil y, especialmente, en la licenciatura en matemática.

P1: Para mí es un placer recibirlo y vamos hacer lo posible para corresponder a tu expectativa.

2. Formación Profesional y Experiencia Académica

I: Nos gustaría que comentase cuál su formación y experiencia profesional en la enseñanza universitaria.

P1: Mi formación de licenciatura fue en la década de los 50, en la Facultad de Filosofía, Ciencias y Letras de la Universidad de Sao Paulo (USP); Cursé la Licenciatura en Matemática y mientras estaba en la graduación yo actuaba como profesor de enseñanza secundaria; luego que concluí la licenciatura empecé a trabajar como profesor en el Instituto Superior de Aeronáutica, en Sao José dos Campos (SP) en la carrera de ingeniería. Allí trabajé en el primer semestre de 1957, cuando fui contemplado con una beca del CNPq para desarrollar mi master y doctorado en Matemática en El Extranjero. Realicé mi master en un año, a partir de septiembre de 1957; la formación matemática que yo tenía en Sao Paulo fue muy importante y hasta me reconocieron disciplinas para la maestría, por esto la concluí en un año. Tres años después concluí también el doctorado. Posteriormente retorné a Sao Paulo y trabajé por 10 meses en el Instituto de Física Teórica (actualmente integrante de la Universidad Estadual Paulista-UNESP). En 1962 vino para Brasilia en la fundación de la Universidad de Brasilia (UNB), donde también empezaron a trabajar los profesores Djairo y Eduardo Sebastián. En la UNB implantamos un master en matemática. Un año y medio después surgió una crisis política en la universidad, previamente a la revolución del año 1964. Entonces me fui para un Pos doctorado en El Extranjero por un año y me quedé allí por diez años. En los dos años iniciales estuve en una ciudad del extranjero, en la Universidad del Extranjero y, en los siguientes ocho años estuve como profesor de una Universidad del Extranjero, en otra ciudad. Retorné al Brasil para pasar un año sabático en la Universidad de Brasilia y acabé quedándome en el país.

I: Me gustaría que comentara su experiencia académica en la enseñanza superior y en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo.

P1: Yo empecé a dar clases de Cálculo en 1957 en Sao José dos Campos; tras concluir el doctorado, en 1961, regresando a Sao Paulo trabajé con el personal del Instituto de Física Teórica y he dado curso de Ecuaciones Diferenciales Parciales y Funciones de Variables Complejas en un postgrado. Estos cursos eran dados para los profesores de Física. Después, en Brasilia, en 1962 y 1963 trabajé en un postgrado con cursos de Álgebra Linear y Análisis para algunos jóvenes que habíamos seleccionado, como Eduardo Sebastiani. En El Extranjero pasé dos años solo me dedicando a la investigación. Aunque yo estaba como profesor asistente, en la universidad fue que actué otra vez en la graduación con cursos de Cálculo, auxilié en la estructuración de los cursos y, cuando regresé a Brasilia en 1972 me involucré mucho en la graduación y postgrado. En este período pensé en escribir mi primer libro de Cálculo.

3. Libro de Texto y Currículo de Cálculo en la licenciatura en matemática

I: ¿Qué le motivó a escribir su primer libro de texto de Cálculo?

P1: Cuando llegué en Brasilia, había una coordinación para las disciplinas de Cálculo; eran unos quince o dieciocho cursos. Cada semestre uno de los profesores asumía la coordinación. En determinado período me tocó la coordinación de Cálculo I, estábamos utilizando un libro de Sergio Lang, un libro bastante “simpático”, con una característica interesante, él lo escribió como una alternativa a los libros muy extensos que se usaban en Estados Unidos y consideraba un absurdo los libros de hasta 1000 páginas que existían. Entonces él escribió dos libros de Cálculo I y II, relativamente cortos y que contemplaban los contenidos considerados esenciales para la licenciatura. Esto fue considerado una innovación en Estados Unidos. Además, hizo una presentación más intuitiva del Cálculo, con énfasis no en las prestaciones rigurosas, sino en la visualización geométrica y en las aplicaciones. Anteriormente se usaba en Estados Unidos como un gran libro de Cálculo, el de Courant, publicado en EUA en 1937 (creo). Sin embargo, dicho libros era considerado “pesado” en los años 1960. Distintos libros empezaron a surgir, entre los cuales el de Lang y el de Thomas. Había uno en esta época que lo utilizamos aquí en Brasilia; un libro teórico, hasta bien escrito de autoría de Jonhson y Kiokemeister. El libro de Lang era distinto de los anteriores, por esto me he inspirado en él, además del libros del Courant. Para mi era importante tener un libro de texto de Cálculo elaborado en Brasil en lugar de seguir traduciendo otros que habían en el exterior. Entonces fue uno de los primeros autores de libros brasileños y esto fue muy bueno, fue una buena experiencia. Posteriormente otros colegas publicaron sus libros casi simultáneamente, como el Guidorizzi, en Sao Paulo. Hoy día hay distintos libros de Cálculo de autores Brasileños.

I: Parece que hay una tendencia de los profesores a adoptar la misma secuencia de los contenidos de los libros de texto, ¿Qué opina usted sobre esto?

P1: Esto es relativo a cada libro; me parece que adoptar un libro es interesante como ayuda para que el alumno pueda utilizarlo como una referencia. Los profesores más expertos como Djairo y yo que liderábamos el grupo de profesores considerábamos que ellos deberían seguir una misma secuencia para no crear problemas para los alumnos, principalmente el los cursos siguientes. Por esto adoptábamos un libro y lo seguíamos. Es relevante resaltar que seguir un libro no significa repetirlo en el aula. El profesor tiene la libertad para conducir sus clases con “preelecciones” enriquecidas con otras fuentes no se restringiendo solamente al libro. Este debe ser una guía que mantenga los alumnos informados sobre lo que está sucediendo. El libro está hecho para que los alumnos lo lean. Los profesores necesitan estimularlos a la lectura del libro. Con que el profesor no puede adoptar un libro o decir para el alumno que le da tales referencias porqué ellos se pierden en este proceso y el profesor da las clases independientemente de un libro cualquier. No es apenas decir que los alumnos tienen deficiencias de formación, pues mismo los buenos alumnos necesitan tener una referencia. Lo que pasa es que los libros en lo general son muy extensos y, como los estudiantes toman varios cursos ellos no tienen tiempo de leer un libro completo, sin embargo tiene condiciones de trabajar con los libros, solucionar ejercicios seleccionados; por lo tanto, el libro debe ser utilizado pelos alumnos como material de estudio y, eventualmente debe consultar otras fuentes de informaciones.

I: En su opinión ¿Cómo tornar la enseñanza de Cálculo realmente importante para la formación de profesores de matemáticas? Me gustaría que comentara sobre la importancia de la historia de la matemática, de las tecnologías, de los proyectos, etc.

P1: Creo que realmente hoy día se torna más prestigiada la actitud de utilizar la historia en el proceso de la enseñanza de las matemáticas; me parece que esto es muy bueno y que todavía estamos aprendiendo a utilizar la historia en esta disciplina, pues esto no es una tarea muy sencilla. La formación en historia de la matemática requiere bueno conocimiento de la disciplina. Por ejemplo, en el caso del Cálculo del siglo XIX, si el profesor no posee una buena formación matemática (en análisis, por ejemplo) y en historia de la matemática no podrá comprender el desarrollo histórico de las ideas matemáticas que se desarrollaron en este período (o en otro cualquiera). Solamente así, los profesores serán competentes para una buena utilización de historia de la matemática y esto es muy importante. Con relación a los recursos tecnológicos, de hecho actualmente con los programas de computación tenemos muchos softwares, como el Maple que tú has mencionado, que son muy valiosos para la enseñanza. Pero es importante que los profesores universitarios tengan conciencia del peligro de no se usar adecuadamente estos softwares. Por ejemplo los niños estaban utilizando inicialmente las calculadoras solamente para realizar las operaciones de suma, resta, división y multiplicación sin saber lo que estaban haciendo.

I: ¿Ellos estaban solamente encontrado resultados?

P1: Exatamente, encontrando resultados. Este peligro es todavía más grande con los programas sofisticados que hay para la enseñanza universitaria. De allí la necesidad de buenos cursos, como los de Cálculo y análisis numérica para que los profesores puedan estar al día con las matemáticas que están en la base de estos softwares, lo que para mi es muy importante. Hay que utilizar los softwares con inteligencia sin olvidar de la matemática que soportan su construcción.

I: Entonces la metodología ¿tiene que ser bastante diferenciada para trabajar con los softwares en la enseñanza universitaria?

P1: Sí. Tenemos mucho que aprender mientras se desarrollan estos softwares; la vida universitaria consiste en un proceso de aprendizaje continuo por que toda está en una continua evolución. Por lo tanto es necesario aprender, por ensayo y error, a utilizar bien los nuevos recursos tecnológicos que van surgiendo en nuestra práctica educativa.

I: Quisiera que usted profundizara en el tema de los principios que le guiaron en la elaboración de su primer libro de Cálculo.

P1: Mi experiencia como estudiante universitario fue muy importante. En 1953 cuando empecé la licenciatura en matemáticas en Sao Paulo, el modelo que se utilizaba era un modelo Francés e Italiano, es decir un modelo europeo basado en los cursos de Análisis Matemático de autores franceses e italianos; no había una separación entre lo que era Cálculo y lo que sería el análisis. Esto fue muy difícil para nosotros y solamente tomé conciencia de esto posteriormente, cuando ya estaba dando cursos en la universidad y tomando conocimiento de los nuevos libros que surgían. Los libros americanos empezaron a entrar en Brasil a partir de los años 1960. De allí fuimos cambiando los libros europeos por los estadounidenses que hacían bien la separación entre el Cálculo y Cálculo avanzado. Estos últimos son actualmente nuestros cursos de análisis – análisis en la recta y análisis en el R^n ; entonces aprendimos esta separación. Cuando fue diseñar mi primer curso de Cálculo, ya con la experiencia que yo tenía (en la Universidad del Extranjero - y en Brasil – Universidad de Brasilia), desde mi período como alumno, estaba definitivamente convencido que los cursos de Cálculo dirigidos a los estudiantes de ingeniería, matemática y física no podrían ser como los cursos rigurosos de Análisis Matemático, pretendidos por los libros de la época. En este sentido también está la diferencia entre mi libros de Cálculo y el de mi colega, Guidorizzi. En su libro él revela más esta faceta de la enseñanza “paulista”. Creo que pasé por esto aun más que él. Sin embargo, he tenido una evolución diferente, marcada por mi experiencia en El Extranjero y en la Universidad de Brasilia. Yo busqué alejarme de la idea del “rigor prematuro” – dejándolo para un curso de Análisis Matemático – y desarrollar pronto las “ideas” del Cálculo, pues los alumnos de las carreras de física, ingeniería y matemática necesitan aprender luego los recursos y las técnicas del Cálculo. Por la importancia de estos aspectos, yo los he contemplado en mis libros de texto.

I: Profesor, ¿Qué cambios o reestructuraciones usted ha contemplado en sus libros de Cálculo desde la primera edición?

P1: Los principales cambios fueron los realizados en las últimas ediciones de los libros de Cálculo volúmenes I y II, en los años 2003-2004 y, en el volumen III, cuya versión final estoy enviando a lo editorial. Los principales cambios que he realizado han sido en el sentido de actualizar y modernizar su presentación, agregando – como tú has mencionado – los recursos tecnológicos de los softwares matemáticos que están disponibles. Voy a dar un ejemplo concreto en Cálculo III: al estudiar las series de Taylor, en funciones de varias variables, abordamos problemas de máximos y mínimos; entonces una cosa interesante es que se puede hacer un crítica en el sentido de que esto no es más necesario por que se puede hacer un gráfico en el ordenador y con esto obtener la ilustración que muestra el máximo y el mínimo. Sin embargo, esto no es cierto pues, ¿cómo se desarrolla dichos programas? Ellos son desarrollados con base en aquella matemática que enseña cómo encontrar máximos y mínimos; pero para esto se hacen necesarios los recursos de las series de Taylor. A partir de dichos recursos que hacemos aproximaciones numéricas con los programas para que sean capaces de construir los gráficos. Aunque sean capaces de construir los gráficos, muchas veces no posibilitan visualizar los máximos y mínimos en la pantalla, pues en muchos casos, para esto se necesita restringir los intervalos de los parámetros para que la figura “crezca” en determinado punto.

I: ¿Es como si dichos puntos ya fueron conocido anteriormente?

P1: Exactamente. Si yo tengo un ejemplo concreto, en el cual pretendo hallar los puntos de máximo y mínimo de una superficie y señalo para los alumnos un esbozo de una gráfica construida con un software, como el Maple. Sin embargo, ¿cómo supe exhibir dichos puntos? Con los cálculos matemáticos desarrollados a la moda antigua, yo encuentro los puntos con cierta aproximación y, por lo tanto, establezco un intervalo conveniente para los parámetros x e y, que posibilite la visualizarlos en la gráfica construida por el software. Así, logro encontrar una figura bonita que permite “ver” los puntos de máximo y mínimo. Esto solamente es posible, en este caso, si ya conozco dichos puntos. Lo que pretendo argumentar, es que haya una iteración entre los métodos matemáticos y los recursos gráficos. Con esto si puede conseguir resultados bastante satisfactorios. En mis libros, esto está contemplado en los recursos gráficos, pues todas las figuras han sido construidas con dichos programas, lo que ha mejorado mucho su presentación. [...] Tengo un capítulo sobre ecuaciones diferenciales en el libro de Cálculo, volumen II, y he recibido críticas satisfactorias de los profesores de la Universidad de Brasilia. Lo que podemos, con los recursos computacionales, es estudiar los aspectos cualitativos de las soluciones, cuando lo que más interesa es saber lo que pasa con la solución de cierta ecuación, cuando el tiempo t tiende a infinito, y no la solución de la ecuación en sí misma, es decir, propiedades de la solución. En el referido capítulo damos una idea de qué son las ecuaciones diferenciales y buscamos mostrar los problemas de soluciones asintóticas – todas hechas por gráficos. He realizado alunas modernizaciones en los libros y algunas mejoras y correcciones puntuales y los libros siguen en el mercado.

I: Profesor, usted ha publicado un libro de Análisis Matemático dirigido a la licenciatura en matemática. ¿Ya ha pensado en producir también un libro de Cálculo específicamente dirigido a la licenciatura en matemática?

P1: Yo hasta podría pensar en esto, pero creo que sería una tarea para otros colegas; difícilmente yo entraría en un proyecto de esta naturaleza en estos momentos. Además, tenía que reflexionar sobre esto para saber se sería una buena idea, para que no parezca algo discriminatorio. Los contenidos básicos del Cálculo han que ser trabajado por estudiantes de distintas carreras (matemática, física, química, ingeniería, sicología, etc.). Gran parte del Cálculo es importante para todos ellos. Es cierto que yo podría escribir un texto de Cálculo dirigido a los estudiantes de ciencias económicas, biológicas, educación. Sin embargo, los estudiantes de matemática y de física, por ejemplo, necesitan estudiar los mismos contenidos. El profesor de matemático de la educación primaria y secundaria ha que pasar por algunas cosas básicas del Cálculo. Como te he dicho, es algo que requiere un análisis más detallado. Es idea a ser discutida, reflexionando sobre los puntos positivos y negativo. En lo que se refiere al Análisis Matemático, estoy muy convencido que lo que se trabaja en la formación de profesores de matemática hay que ser distinto de lo que se enseña en la carrera de matemática. Por esto he escrito un libro de Análisis Matemático para la licenciatura en matemáticas. Así, me parece que los libros más utilizados en los cursos de Análisis Matemático en Brasil son los publicados por los profesores Elon, Djairo, y mismo lo mío. Mi libro de introducción al Análisis Matemático era un libro para ser usado en la formación del matemático; cuando lo he utilizado en la formación de profesores de matemáticas he percibido que habían problemas para implementar dicho curso. Entonces concluí que no era esto lo que se debería hacer, sino un curso diferenciado. ¿Por qué debe ser diferenciado? Yo estaba vendo algunos libros de la educación secundaria, por ejemplo como se presentan algunos tópicos. Voy ejemplificar con el abordaje que suelen hacer de las funciones. Para mí los profesores y además, los autores no están bien informados de cómo se debe presentar los tópicos; proponen un capítulo muy extenso, con mucha terminología, quieren desarrollar todo de una vez; en seguida entran en otros temas como trigonometría. Considero que no se debe abordar todo un tema de una sola vez y de manera aislada de los demás contenidos matemáticos en la enseñanza secundaria. Las cosas deberían ser mejor articuladas; la geometría analítica con las funciones se articulan muy bien; no es necesario hacer toda la geometría de una sola vez, o las funciones, etc; las derivadas no necesitarían ser estudiadas solamente al final de la enseñanza secundaria.

I: ¡cuando se estudia dicha noción!, ¿no?

P1: Exactamente, cuando la trabaja. Yo pienso que una sólida formación en Cálculo y análisis contribuiría mucho para que los profesores estructuraran mejor los cursos y los currículos de la secundaria. Por ejemplo los conceptos de continuidad o de límite. Es necesario conocer su evolución en análisis; conocer la importancia de las definiciones aceptadas actualmente en matemáticas; cuando se necesitó de estos conceptos en análisis. Sin estas informaciones no es posible entender por qué se debe enseñar dichos conceptos. ¿Por qué enseñar los conceptos cuando no se puede desarrollar la idea, demostrar los resultados en Análisis Matemático siempre que sea necesario en matemáticas? Muchas de estas cosas están siendo estudiadas en la enseñanza secundaria los de manera insatisfactoria para los alumnos. Se introduce un concepto nuevo por que se va a necesitar de ello para alguna cosa. Necesitamos aplicar luego los contenidos trabajados; en el caso contrario, los alumnos no van a aceptar el proceso de enseñanza y tomaran las matemáticas como algo desagradable, sin sentido para ellos. Creo que los cursos de análisis para la licenciatura deben servir para mostrar esto; debe tener la parte histórica para que complemente las matemáticas y ayude el alumno de la licenciatura en matemática a comprender bien la secuencia de los contenidos y su aplicación para la “educación básica”.

I: Profesor, en su opinión ¿Cuál es el papel del Cálculo en el currículo de la licenciatura en matemática? ¿Cómo se articula con las demás asignaturas de dicho currículo? ¿Y con las matemáticas de la educación primaria y secundaria?

P1: Para mí el Cálculo precede el análisis, por lo tanto ya tienes la preparación para hacer un curso de Análisis Matemático. Además, la parte práctica del Cálculo contribuye para formar el alumno de licenciatura en los conocimientos de temas importantes, tales como las funciones exponenciales, logarítmicas, las series de potencias, etc. Él necesita estas cosas; hoy día no hace falta enseñar logaritmos para realizar los cálculos numéricos, como antiguamente. Sin embargo, la función logarítmica es muy importantes en el estudio de fenómenos. Una de las cosas que se estudia poco es la función exponencial y el logaritmo natural. En el primer año de un curso de Cálculo podemos mostrar a los alumnos como estas cosas funcionan: el logaritmo natural, la función exponencial, su importancia en estudios de datación geológica, los métodos de carbono 14 para datación históricas y arqueológicas, decaimiento radioactivo, crecimientos poblacional, estadística y otros fenómenos. El estudio de Cálculo por lo tanto es fundamental para la buena formación del profesor para abordar estos temas, no de la manera que se propone en los libros de secundaria que se parecen más a un curso universitario y no se adecuan al nivel secundario. Hay que hacer un curso más modesto y adecuado para la secundaria. Las derivadas son importantes en la educación primaria y secundaria, pero no necesitan ser precedidas de una teoría de límites. Las derivadas han que ser enseñadas directamente y aplicadas en la física, por ejemplo. Es posible estudiar, en pocas clases del primer año, como se puede desarrollar el estudio del movimiento – estoy escribiendo unos artículos sobre este tema – y, con esto, posibilitar que el alumno aprender un concepto rico de derivadas. Sin embargo, hasta hoy no se desarrolla esto en la educación secundaria, creo que por la influencia de la matemática moderna donde el énfasis estaba en el rigor y en formalismo – en el final de la década de los 60 – en detrimento de los recursos de la intuición y de la visualización geométrica. Esto ha criado barreras en el proceso de la enseñanza de las matemáticas de la educación primaria y secundaria. Las derivadas deben ser enseñadas en este nivel, pues lo que se necesita es hacer derivaciones de funciones polinómicas sencillas. Por otra parte, otra cosa que echo de menos en la educación primaria y secundaria se trata de las matemáticas aproximadas, de los métodos numéricos y aproximaciones numéricas. Los alumnos de la educación primaria y secundaria piensan que solamente se solucionan las ecuaciones cuadráticas; que tiene una fórmula complicada para encontrar las raíces de las ecuaciones del tercer y cuarto grado y que las demás ecuaciones algebraicas serían imposibles de solucionarlas. Esto nos es cierto; los alumnos han que saber, por ejemplo, que la fórmula de Baskara ni siempre es la mejor vía para se determinar las raíces de una ecuación del segundo grado, muchas veces un método numérico es más adecuado y esto no se suele hacer en dicho nivel educativo. Todavía hay mucho que hacer. Es como si se realizara una “boda” entre las matemáticas numérica con la algebraica. Es necesario realizar bastante interacción entre el Cálculo, la geometría, trigonometría y geometría analítica, etc. Es una gran tarea, pero ya está se desarrollando; ya lo podemos apreciar en algunos de los libros actuales.

4. *Configuraciones Epistémicas* de la integral en la formación de profesores de matemáticas

I: Profesor, en nuestra investigación el estudio de los significados es bastante relevante. En este sentido nos gustaría de entrar en el tema de los significados de la integral y, particularmente, de la integral definida. Si fuéramos introducir el tema de la integración en la enseñanza universitaria a partir de problemas ¿usted considera que hay un tipo (o tipos) de problemas apropiados para la introducción y posterior desarrollo del tema, especialmente en la licenciatura en matemática?

P1: Claro que sí. Pero es importante resaltar que la sistematización de la integral se remonta al siglo XVII-XVIII; la integral es más antigua que la derivada, empezó con los métodos de Arquímedes. Dichos métodos son muy trabajosos y todavía pueden ser encontrados en algunos libros procesos de integración a partir del referido método, por ejemplo, para calcular el área de un segmento de parábola. Por esto es que es más conveniente introducir la integración directamente de la manera actual como la integral es modernamente concebida, aunque en su concepción intuitiva como la del siglo XVII, usando aquella manera geométrica de unir los infinitésimos y “generar” un número finito que es la integración de todos los elementos infinitesimales. Es más fácil desarrollar esta idea por que tenemos los recursos de la geometría analítica (representación gráfica y ejes coordinados) que Arquímedes no lo tenía. Los problemas interesantes, más conveniente, surgen luego de esto. Son problemas de Cálculo de área. Posteriormente es que relacionamos la derivada con la integral a través del TFC, que puede ser realizado de manera bastante intuitiva y sin tomar mucho tiempo, ya tienes los recursos para mostrar las aplicaciones (algunas interesantes en la física). Por lo tanto, considero que se debe introducir la integral como está definida modernamente, sin el aparato teórico y riguroso del Análisis Matemático; ¡nos se trata de esto! Estamos hablando de un tratamiento a partir de la visualización geométrica, de los recursos de Cavallieri, de las ideas de Leibniz. ¡Me parece que debe ser así!

I: Hay alumnos que al estudiar la integral como área, creen que integral es lo mismo que área, ¿qué opina usted sobre esto?

P1: Esto es curioso; tu usas el concepto de área como motivación para introducir la integral y luego en un curso de análisis se define integral numéricamente por las sumas de Riemann, que fueron inspirados por la noción de área y no utiliza la idea de área para nada más. Se desarrolla la integración como un instrumento estrictamente analítico, a partir del cual se define área. Para efecto de una fundamentación rigurosa, la geometría va apoyarse en el Análisis Matemático.

I: ¿La idea de área es entonces importante por posibilitar la visualización en la introducción de la integral?

P1: Exactamente, la integral es un área (...). Es como en el caso de la derivada, que puede ser definida como el límite de la razón incremental o como la recta tangente. Esta segunda idea motiva el desarrollo del concepto de derivada; posteriormente tú vas a estudiar la derivada que va mucho más allá de este significado. Con la integral pasa algo similar; definiéndose la integral, defines muchas magnitudes físicas, como trabajo de una fuerza. Esto no tiene relación con área; es el límite de una suma de Riemann. El área entra inicialmente como motivación y luego introduce el concepto de una suma de Riemann, que muy importante. Estas nociones deben ser trabajadas simultáneamente. El problema del área es solamente para tener una visualización geométrica de una integral, pero la integral es el límite de una suma de Riemann y esto traerá la noción de trabajo en física – mecánica –, luego puede dar el teorema de conservación de energía, electricidad, magnetismo y las aplicaciones en otras áreas (economía, biología, etc.).

I: ¿Cuáles son las principales representaciones utilizadas en el proceso de enseñanza de la integral en la licenciatura en matemática? ¿Qué dificultades pueden encontrar los estudiantes para utilizarlas y relacionarlas?

P1: todas las representaciones deben ser usadas, a medida que una sea más adecuada que otra. Por ejemplo la noción de área es útil en la introducción de la noción de integral, luego debiese trabajar las nociones de suma de Riemann (suma finita) y del límite de las sumas de Riemann; esto puede ser estudiado independientemente de la visualización geométrica, pero esto no es la mejor manera desde la perspectiva didáctica porque puede dificultar la comprensión de los estudiantes.

I: ¿Cuáles serían los principales procedimientos o técnicas utilizadas en la enseñanza de la integral?

P1: Primeramente la primitiva de funciones es la noción más importante; consiste en la principal técnica para se hacer cálculos formales de integral indefinida y mismo la definida – a partir de la primitivación – es la manera más “fácil” porque generalmente lo que se utiliza son funciones conocidas: polinómicas, logaritmos, exponenciales. Integra y utiliza la diferencia de valores para calcular la integral definida. Sin embargo, cuando se trata de funciones más complejas, muchas veces es bastante complicado encontrar la primitiva; en estos casos es mucho más sencillo usar métodos numéricos: suma de Riemann, la regla de Simpsom u otro método. Los alumnos a veces posee una concepción que no es cierta. Para ellos para integrar hay que saber calcular la primitiva. Pero no si les pregunto cuál es la integral de 1/x me contestan qué es el logx; cuando le cuestiono sobre qué es el logx, me dicen que es el exponente al cual se debe elevar la base; ¿qué base? Dicen que es la base e; y les pregunto qué es el número e. Cada una de estas preguntas nos remite a otras que son más complicadas.(...) Por lo tanto, calcular una integral definida no es necesariamente más simple solo porque tenemos su primitiva – la primitiva puede ser compleja; en muchos casos la integral definida debe ser calculada a través de un método numérico, si lo que se desea es encontrar un número. Así, el TFC no soluciona el problema de la integración, sino en algunos aspectos (teóricos). Por ejemplo, hay muchas funciones definidas por procesos complejos y a veces no nos damos cuenta tan bien de esto. He dado el ejemplo de logaritmo; el logaritmo puede ser representado por una integral; la mejor definición de logaritmo natural es la integral definida en el intervalo de 1 a x de dt/t; esto nos permite deducir las propiedades de logaritmo, definir la función exponencial, etc.

I: ¿Qué conceptos matemáticos se relacionan implícita o explícitamente con en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral definida? ¿Los conceptos implícitos en dicho proceso dificultarían el aprendizaje de la referida noción matemática?

P1: A lo largo de mi experiencia profesional, me he dado cuenta de los problemas que los estudiantes presentan de falta de conocimientos previos en el álgebra de la enseñanza primaria y secundaria: productos notables, fracciones algebraicas, etc. Las principales dificultades para se trabajar con integración o mismo con derivadas vienen generalmente de esto. Cuando iniciábamos la carrera universitaria se asumía el presupuesto que los conocimientos previos ya estaban consolidados. Por esto ya empezábamos con un curso formal de análisis; hoy día necesitamos retomar los contenidos algebraicos básicos con los estudiantes, repasar un poco de geometría analítica, de trigonometría, (...) es decir, hemos que retomar los temas. Lo que frecuentemente hemos percibido son estas deficiencias de los estudiantes con relación a los temas de la educación primaria y secundaria. Para mí, estas técnicas algebraicas son los principales obstáculos en el proceso de enseñanza del Cálculo: derivadas, integrales, series de potencias, ...

I: ¿Cuáles serían las propiedades más relevantes relacionadas con la integral definida y cuáles de ellas deben ser demostradas? ¿Usted considera que los estudiantes de la licenciatura en matemática están aptos para desarrollar dichas demostraciones?

P1: Las propiedades de la integral que necesitamos desarrollar son, básicamente: integral de una suma, desigualdades, módulo de una integral, el Teorema Fundamental del Cálculo. ¿Qué se debe o no demostrar? Hay dos sentidos para el término demostrar: por una parte se trata de convencer el alumno que el resultado es verdadero, es decir, se trata de proponer una argumentación coherente. Por otra parte, sería presentar una demostración formal, axiomática. Por ejemplo, si consideráramos el ***Teorema del valor Intermediario****: Si una función continua en un intervalo I pasa de un valor positivo para un valor negativo, entonces hay que anularse en alguno de los puntos del I*. Este fue el primer teorema para lo cual hubo el interés por desarrollar una demostración analítica, por Bolzano. Él se inspiró en la demostración del teorema fundamental del álgebra realizada por Gauss. En su trabajo, publicado en 1817, Bolzano presentó dicha demostración. La relevancia de este trabajo es que se constituyó en uno de los primeros trabajos de Análisis Matemático. Este resultado jamás había sido una preocupación para los matemáticos del siglo XVIII. Los matemáticos de la época asumían este resultado como verdad. Euler y, mismo Lagrange – que era un poco más riguroso –, no tuvieron esta preocupación. Ya en el siglo XIX hubo un cambio en este aspecto. Cauchy se interesó por desarrollar demostraciones en el sentido más axiomático, de la construcción de una matemática lógicamente organizada. Este no es el sentido de la demostración en un curso de Cálculo. En Cálculo lo que debemos presentar los contenidos de manera que se satisfaga la curiosidad de los alumnos, responderles por qué los resultados son verdaderos, aunque sea por medio de una visualización geométrica. ¡Es necesario contestar a los alumnos y no solamente decirle que se trata de un resultado verdadero! Tengo que presentar un teorema, explicarlo y justificarlo. Si, por ejemplo, voy demostrar que la integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales. En un curso para matemáticos – y no lo haría así en cursos de formación de profesores de matemáticas – yo presentaría una demostración en el aspecto axiomático. En un curso de Cálculo no hay necesidad alguna de hacer dicha demostración como hago en un curso de Análisis Matemático; he de utilizar la intuición. Necesito tener claro que en la formación de profesores de matemáticas, lo que formamos no es un matemático. Mismo en un curso de Cálculo para matemático, lo que es necesario es enseñar pronto los métodos de Cálculo, las técnicas básicas: máximos y mínimos, derivadas, integrales, etc. Estas cosas no puedo enseñar en un curso de análisis, así como en un curso de Cálculo no podemos estar nos preocupando en enseñar los alumnos a factorarizar, a trabajar con fracciones algebraicas; esto el alumno hay que aprender en álgebra. En caso contrario, no puedo avanzar con los contenidos del curso. Lo mismo se aplica al curso de Análisis Matemático; es fundamental que los alumnos hayan pasado por un buen curso de Cálculo – que estén bien preparados – para, posteriormente, pasar por el curso de Análisis Matemático. Son dos curso "ligados": Cálculo y análisis. En la formación de profesores de matemática el alumno hay que saber derivadas e integrales bien, para pasar satisfactoriamente por un curso de Análisis Matemático. En análisis lo que vamos desarrollar no es la parte práctica del Cálculo, sino de demostrar teoremas, como lo anteriormente ejemplificado; utilizaremos la noción de continuidad para que sea posible desarrollar dicha demostración.

I: Entonces, en este sentido ¿El Cálculo tiene un papel operatorio en la licenciatura en matemática?

P1: Exactamente. Sirve también de base para el curso de Análisis Matemático. Presenta otras virtudes en la formación de los futuros profesores, para aplicar las matemáticas a ciertos fenómenos, entre los cuales los ligados a las funciones exponenciales y logarítmicas – como he comentado anteriormente.

I: En su opinión ¿Cuáles serían las competencias fundamentales a ser desarrolladas en la licenciatura de matemática, y particularmente a partir del estudio de Cálculo?

P1: El alumno de la licenciatura, futuro profesor de matemáticas, lo que se requiere es que sea un bueno profesor de matemáticas de la enseñanza básica. Las universidades ni siempre están contemplando esto. La licenciatura en matemáticas poseen un perfil propio, es decir, no es lo que se llama comúnmente "3+1", tres años de cursos de matemáticas y un año de disciplinas pedagógicas. Mi licenciatura fue así. Entonces me parece que la estructuración y las diversas disciplinas de la licenciatura debe permitir la integración harmónicas de las distintas disciplinas, tales como: álgebra moderna y linear, teorías de números, Cálculo, Análisis Matemático, geometría, etc. Esto debe permitir una buena formación a los futuros profesores de matemáticas; en la licenciatura se requiere un grupo de disciplinas bien integradas para posibilitarles una amplia formación. La historia de las matemáticas, me parece que debe ser trabajada de manera integrada a cada una de las disciplinas de la licenciatura. Por ejemplo, un profesor que da un curso de estructuras algébricas va a enseñar grupos, cuerpos, anillos, etc., tiene la obligación de contestar a los alumnos de dónde viene cada uno de estos objetos matemáticos, por qué estudiar anillo, (...). El profesor de cada contenido es quién debe mostrar los aspectos históricos; comentarles que Galois cuando estaba estudiando las ecuaciones algebraicas tuvo la idea de los grupos de transformaciones; el profesor de geometría necesita enseñar los aspectos históricos de la geometría. Tengo la impresión de que el futuro de la historia de la matemática está en inserirla en cada disciplina. Lo que hacemos actualmente es que damos las distintas disciplinas y, posteriormente, en el tercer año, un profesor da un curso de historia de las matemáticas. Él se queda con una tarea muy grande. Para que un profesor sepa bien la historia de las matemáticas se requiere que él pase años leyendo y estudiando las distintas obras relacionadas con la historia en las varias épocas históricas. No es sencillo para un profesor prepararse en los distintos aspectos de la historia de las matemáticas. Por ejemplo no es simple estudiar la geometría de Descartes.

I: En este sentido ¿Usted considera que la historia del Cálculo habría que enseñada en los cursos de Cálculo?

P1: Sí, considero que esto ayuda mucho al profesor a mostrar la evolución de la disciplina. Así estoy contemplando las "notas históricas" en los capítulos de mis libros de Cálculo. Enseñar la historia separadamente es muy difícil y, por esto, en muchos casos los profesores se ponen a hacer cuentos sobre la vida de algunos matemáticos, sobre algunos aspectos "puntuales" (aislados); difícilmente él profundiza en los detalles de estudiar selecciones de temas históricos que sean importantes para se estudiar con los alumnos. Por lo tanto, considero que siempre y cuando posible las disciplinas de Cálculo, análisis, geometría, álgebra, etc. deben hacer un esfuerzo por presentar sus aspectos históricos.

5. *Idoneidad didáctica* de la integral para la Licenciatura en Matemáticas

I: En su opinión, ¿la licenciatura de matemática contribuye con la formación de profesores competentes para planificar sus clases, de forma que posibilite la aplicación de las matemáticas a contextos no necesariamente matemáticos?

P1: Mira Edson, tenemos que ser realistas. El gran desafío de la enseñanza es la buena formación de los profesores. Hay mucha carencia de mejor formación por los profesores en activo. Para arreglar esto, en el gobierno ya se discute la posibilidad de crear una agencia parecida con la CAPES – creada para formar los profesores de enseñanza superior; tuvo un éxito excelente –. Para mí, una agencia para formar, dar becas, desarrollar la educación continuada y estimular la mejora de formación en las licenciaturas. Necesitamos tener valentía para “ver” la realidad tal y cual ella es. La mayoría de las licenciaturas, mismo en las grandes universidades todavía no son satisfactorias; las universidades exigen de los profesores una producción en investigación. Hay que aclarar que sería esta investigación. El profesor universitario no está tan motivado a dedicarse a la enseñanza, sino a la investigación. Estamos hablando de investigación en matemáticas; esto es duro y requiere mucha energía del profesor. Algunos masteres y doctores en matemática van a desarrollar sus investigaciones en geometría, álgebra, análisis, fundamentos de las matemáticas, etc. Estos profesores, que están dedicando a este tipo de investigación, no son los más adecuados para contribuir con la mejora de la enseñanza en las licenciaturas. Esto es lo que tengo visto a lo largo de los años. La cuestión entonces es qué es lo que se debe hacer. En este particular, me parece que estamos entrando en una fase importante de mejora de la enseñanza; la sociedad está cobrando esto. El país está se empeñando para ofrecer la escolaridad básica a prácticamente totalidad de los niños y jóvenes. Por lo tanto lo que se requiere ahora es la calidad; ¿qué escuela es esta que necesitamos? Me parece que hay mucho a ser realizado en el sentido de mejorar la formación de los licenciados. ¿Están dichos licenciados aptos a desarrollar adecuadamente sus actividades profesionales en las matemáticas de la educación básica? Considero que la respuesta todavía es insatisfactoria. No estamos realizando un bueno trabajo; hay mucho quehacer y no sabría decírselo. Necesitamos reflexionar sobre esto con los demás colegas, profesores universitarios.

I: ¿Hay que hacer esta discusión?

P1: Sí. Se debe abordar la cuestión de recompensar los profesores universitarios que se dedican al proceso de enseñanza, que buscan nuevas estrategias de enseñanza, nuevas estructuras de disciplinas, que preparan de textos, orientan a los alumnos. Es necesario valorarlos así como los demás investigadores que son agraciados con becas del CNPq. Es importante valorar también los profesionales que están dispuestos a actuar en la búsqueda de alternativas que contribuyan a la mejora de la enseñanza universitaria, especialmente en las licenciaturas. La sociedad está exigiendo esto en todos los niveles y especialmente para los licenciados. Es necesario prestigiar los profesores, remuneraros bien, transformar la carrera de profesor en una carrera atractiva para aquellos que tienen vocación para la educación.

I: Es cierto e interesante esta reflexión que usted ha hecho. Bueno, pensando en significados, entendiendo que estos son relativos a su contexto de uso, ¿qué significados de la integral son relevantes para se implementar en el currículo de la licenciatura en matemáticas?

P1: Los matemáticos de los siglos XVII y XVIII también eran físicos y astrónomos. Euler, por ejemplo, se preocupaba en hacer unas matemáticas muy ligadas a sus aplicaciones. Estos significados, que tu llevas toda razón de cuestionar, deben ser entendidos por los profesores y alumnos. De allí la importancia de se pasar también por cursos de física en la licenciatura para “saber” de dónde viene estas matemáticas. El desarrollo del Cálculo está estrictamente relacionado con las aplicaciones físicas. Para se hacer un curso universitario de mecánica, óptica, electricidad, electromagnetismo, termodinámica, etc. – disciplinas básicas de física – ellos estudiaron mucho más aplicaciones, pues en los cursos de Cálculo no hay como profundizar en toda esta tarea.

I: ¿Qué significados entonces necesitan ser abordados por los profesores universitarios de Cálculo?

P1: Ya existe, en los libros de texto, un acuerdo sobre lo que debe hacer en los cursos de Cálculo. Deben ser presentados las nociones básicas de derivadas e integral y las aplicaciones que se puede desarrollar en los cursos de Cálculo. Por ejemplo, he citado los problemas de máximos y mínimos. Muchos de estos problemas, los problemas aplicados, exigen que se trabaje de manera simplificada para que no se queden enormes (...). Así se debe hacer las aproximaciones y demás aplicaciones que en general son necesarias para el trabajo de los futuros profesores de matemáticas en la educación secundaria y para aplicar a las demás disciplinas de la enseñanza superior. Los alumnos de la licenciatura en matemática necesitan aprender no solamente lo que van a enseñar, sino aprender lo necesario para alargar sus horizontes; para tener seguridad al realizar su trabajo en la educación primaria y secundaria. A lo mejor no irán mostrar una integral en la educación primaria y secundaria como se hace en la enseñanza superior. Aunque no hablarán de integral en dicho nivel educativo; hasta podían hablar al abordar temas de geometría – nociones de áreas y volúmenes – en los cuales se desarrollan nociones de integral. Pueden mostrar las nociones de Cálculo en la educación primaria y secundaria. Sin embargo, no puede ser de manera sofisticada, sin propósito. Una idea importante en Cálculo, la derivada, debe ser introducida en el primer año de la educación secundaria para interactuar con la física. A este respecto estoy preparando dos artículos que serían publicados en la Revista del Profesor de Matemática para mostrar esta integración tan necesaria y viable de las matemáticas con la física. Las disciplinas de física deben ser bien integradas al currículo de la licenciatura en matemática y son fundamentales para se desarrollar los cursos de Cálculo.

I: En su opinión ¿Cuál sería la mejor secuencia didáctica para desarrollar el estudio de la integral en la licenciatura de matemática? ¿Por qué?

P1: Yo pienso que es mejor empezar con la integral definida. La integral, originariamente, es integral definida. Posteriormente se introdujo la integral indefinida. Se puede también introducir, preliminarmente, la noción de primitiva y, a partir de esto, caracterizarla como integral indefinida. Sin embargo, es bueno presentar la noción de primitiva tras el abordaje de la integral indefinida. Después de presentar el TFC es que se puede mostrar que la integral indefinida es una primitiva. Entonces la noción de primitiva no es bien una noción de integral, por esto se puede empezar por dicha noción para tenerla preparada para desarrollar los demás contenidos de integración. Pero, me parece que dónde se debe empezar la integración es a partir de la integral definida, luego se trabaja con la integral indefinida, se presenta el TFC y queda demostrado que la integral indefinida es una primitiva de la función que se está integrando.

I: Según su opinión, ¿Se introduce la integración a partir de sus aplicaciones?

P1: Sí, siempre que se puede ya se introduce las aplicaciones.

I: ¿Las horas destinadas al desarrollo de la integración es relevante para el éxito de su proceso de enseñanza y aprendizaje?

P1: Para mí las clases expositivas son excesivas. Solamente en los últimos años de mi carrera me he dado cuenta de este hecho. Esto conlleva a una actitud pasiva exagerado por los alumnos; es un problema en el proceso de enseñanza. Necesitamos incentivar los alumnos a participar activamente en su proceso de enseñanza y aprendizaje. Ellos no pueden quedarse oyendo pasivamente los profesores en las clases. Entonces en los últimos años he empezado a administrar mi tiempo docente de manera más equilibrada. Por ejemplo, hago una exposición de 20 ó 30 minutos sobre determinado tópico y, en seguida, propongo que los estudiantes se involucren en un trabajo en el aula (solución de problemas en grupos o involucrarlos en actividades de cuestionamientos y respuestas); los estudiantes tienen que trabajar. Si el profesor seguir con las clases expositivas y repitiendo lo que está en los libros no da resultado positivo. Por lo tanto, se debe aprovechar muy bien el tiempo docente. Una carga horaria de 6 horas semanales no es mala desde que sea bien utilizada; se hace menos exposiciones y se promueve más la participación de los alumnos. Los resultados en este proceso son considerablemente mejores que en las situaciones que el profesor llega en la clase, expone su contenido, demuestra los teoremas, indica una lista de ejercicios y se marcha.

I: Además del anteriormente comentado ¿Cómo sería posible aumentar el nivel de interés y de motivación de los estudiantes de la licenciatura de matemática en la enseñanza del Cálculo?

P1: Para aumentar el interés de los alumnos hay que involucrarlos en las actividades en la clase; exigirles la solución de problemas en clase, en la pizarra. Ellos entonces empiezan a hacer preguntas sobre los contenidos, entonces me voy ayudarles, porque si no cuestionan son genios o están “desligados” de la clase. ¡Los genios no son tan frecuentes! Entonces esta pasividad es deplorable. Este proceso de motivación puede ser difícil inicialmente, pero pasa por poner los alumnos para trabajar activamente en la clase. (...) Yo tengo la costumbre de decir a los profesores de la educación primaria y secundaria, que dicen que sus alumnos no tienen interés en las clases, para cambiar su discurso. Ellos necesitan buscar las estrategias que estimulen la participación activa de los alumnos, cambiar el estilo de la clase, proponer cuestiones, estimularlos a preguntar; no tener miedo de las preguntas; caso no sepan la respuesta inmediata, buscarla para la próxima clase. Los alumnos necesitan también saber las flaquezas de los profesores. ¡Nadie es bueno lo suficiente que sepa contestar todo!

6. Factores que intervienen en el cambio e innovación curricular en la enseñanza universitaria de matemáticas

I: El profesor universitario también interviene en este proceso. Cuando se presentan propuestas de innovación curricular, ¿Qué factores usted considera relevantes para implementar algunos procesos de cambio en el currículo de la licenciatura de matemática, y particularmente en el currículo de Cálculo?

P1: Debíamos hablar de manera general del comprometimiento del profesor universitario en dichos procesos, de qué hacer para involucrarlos.

I: Parece que hay una resistencia de los profesores universitario para involucrarse en los procesos de innovación y cambio curricular.

P1: Sí, como he comentado anteriormente, los profesores universitarios están involucrados en otras actividades. De cierto modo, no están muy motivados a involucrarse en esto. Necesitamos estimular los colegas del departamento que se interesan por buscar estrategias para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la enseñanza universitaria; hay profesores interesados en actuar en esta cuestión. Ellos van a descubrir qué es lo se puede hacer. Yo no sé qué cosas se debe hacer. Es solamente estimularlos a trabajar. Es necesario también estrechar las relaciones de los profesores universitarios con los de ESO, involucrando más los profesores universitarios. A través de estas relaciones ellos se darán cuenta de qué deben hacer. Si deben colaborar con la producción de textos, contribuir con la planificación de las clases, con la elección de los contenidos, en la complementación de los textos, etc.

I: En se tratando de la universidad, ¿Cuál es su rol en estos procesos de innovación y cambio curricular?

P1: La universidad debe prestigiar y reconocer los profesores que están actuando en las investigaciones educacionales. Deben ser prestigiados de la misma manera que los profesores-investigadores que están investigando estrictamente en matemática, siendo contemplados también con becas de investigador del CNPq.

7. El significado del buen profesor de matemáticas

I: Profesor, en su opinión ¿qué significa ser un buen profesor de matemática?

P1: Esta es una buena pregunta. La primera condición es que el profesor debe tener amor a su profesión; tiene que gustarle ser profesor. No puede ir a la clase pensando que estará con alumnos desinteresados; estos jamás serán buenos profesores. Cuando se va a la clase, sabe que encontrará los grupos de alumnos, que les guste los alumnos, que sea amigo, que sepa arreglar el problema de disciplina. He tenido un profesor que al llegar a la clase decía a los alumnos: ahora basta, tranquilos que vamos empezar a trabajar. Sin embargo era un buen profesor; a los estudiantes les gustaba sus clases.

I: ¿Él tenía un carisma?

P1: Sí, has utilizado la palabra cierta. Claro que también es necesario que le guste las matemáticas, debe estar buscando solucionar problemas, aclarar cuestiones, aprender continuamente; esto es lo que hace un buen profesor. Naturalmente, toda preparación que obtenga para ayudarle a ser un buen profesor es importante – la preparación pedagógica, la sicología educacional, ... – las disciplinas de educación son importantes para la formación del profesor. Sin embargo, sin que él sepa los contenidos básicos de matemáticas, el amor por las matemáticas, un amplio conocimiento y el deseo de siempre estar aprendiendo más no puede ser un buen profesor de matemáticas.

8. Consideraciones Finales

I: Profesor P1 ¿Le gustaría hacer alguna consideración final?

P1: Me gustaría agradecerte por tu visita y por la oportunidad de hacer esta entrevista; como has visto está basado en mi experiencia de 50 años de magisterio, he tropezado mucho por el camino, un aprendizaje continuado porque la vida es siempre un aprendizaje. Si algo voy a decir en conclusión, es que necesitamos caminar con humildad, tú has usado esta palabra antes. Tenemos que caminar siempre con la conciencia de que cuanto más hemos aprendido hay mucho más que aprender. Parece que, quizás sea una ironía de la vida, pero es un hecho de la vida: mientras vamos nos tornando mayores vamos sintiendo que ahora es que estamos preparados para empezar ¿sería esto? No. Tenemos que pasar para los jóvenes este mensaje de valentía para estar siempre disponibles para aprender más, porque ellos tienen energía y nosotros, los mayores, ya no la tenemos más. Energía para trabajar y trazar nuestra trayectoria de vida. Sin embargo, dicha trayectoria, a lo largo de la vida, no es solo en la enseñanza y todo es un aprendizaje continuado, un crecer permanente. Si me es posible me gustaría pasar este mensaje, además de para ti, de valentía, de idealismo, de ganas de trabajar, de creer; tenemos muchas cosas que nos desestimuela, principalmente mirando el contexto del país y del mundo, pero el ser humano posee una extraordinaria capacidad de renovarse y tornar a creer. Cada año y cada clase de aula es un nuevo inicio y necesitamos estar siempre creyendo y trabajando para cambiar y hacer las cosas cada vez mejores. ¡Muchas Gracias, Edson!

I: Gracias a usted profesor. Ha sido fantástica esta entrevista. Me ha encantado esta motivación que usted tiene y el hecho de estar disponible para compartir su experiencia con nosotros que, a lo mejor, estamos empezando esta larga trayectoria que usted ya ha pasado en la educación. Realmente es algo excepcional. ¡Muchas Gracias!

P1: De nada, ¡Que sean estimulado!

ANEXO 3

ENTREVISTA A P2: PROFESOR(A) - FORMADOR(A) Y EXPERTO(A) EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Duración: 2 h 10 min.

I: Investigador P2: Entrevistado(a)

Introducción

I: Inicialmente, me gustaría agradecerle por su colaboración en mi trabajo; sabemos que usted tiene mucha experiencia profesional en el área de educación matemáticas de la enseñanza superior. Por ello, me gustaría que empezara a hablar un poco sobre su formación académica (graduación, postgrado), y su experiencia académica en la enseñanza de nivel superior.

Formación Profesional y Experiencia Académica

P2: Bueno, yo hice un “Bacharelado” en matemática en la UFMG, después cursé un máster en matemática también en la UFMG. Ese máster era el inicio de un postgrado, que estaba empezando en el departamento. Después, empecé un doctorado en Río de Janeiro, lo que resultó en la necesidad de trasladarme a esta ciudad. Pero por problemas personales regresé a Belo Horizonte y me quedé por un largo tiempo trabajando en el Departamento de Matemática de la UFMG, en el cual me involucré mucho en la formación de profesores, siendo más tarde coordinadora de un curso de formación continua. Entonces, me sentí muy involucrada en un área donde yo no tenía una sistematización de la forma como estaba actuando. He impartido muchas clases a los alumnos de Ingeniería, siendo éstos muy críticos acerca del contenido que estaba enseñando. Por ello, desde el inicio de mi vida profesional fui muy curiosa con cuestionamientos como por ejemplo: ¿cómo enseñar?, ¿cómo elegir este o aquel contenido?, a causa de la presión que sentía por parte de los alumnos. Sin embargo, a partir de un cierto momento empecé a involucrarme más con la licenciatura, como dije anteriormente. A partir de una gran reforma del currículo en la licenciatura en los años 80, donde se crearon determinadas asignaturas, no se sabía quién iría quedarse a cargo de ellas. Había ideas excelentes de establecer una interrelación entre las asignaturas del Departamento de Matemática y las de la Facultad de Educación. Inclusive, una de las personas que eligieron para pensar sobre estos cursos que serían implementados, fui yo, y lo acepté (no sé el porqué, pero lo acepté), y cuando me enteré ya estaba totalmente involucrada en esta discusión de la Educación, más pedagógica, que cualquier otra cosa, así que en un cierto momento, tuvo un sentido completo el hecho de hacer un doctorado en educación. En realidad, fui invitada por una compañera para hacer este curso, entonces pensé que sería algo imposible, ya que tenía 4 hijos. Sin embargo ella me animó, diciéndome que nos ayudaríamos mutuamente, pues también llevaría a sus hijos. Resultó que me animé. Fui aceptada en un doctorado en el extranjero, en la Universidad extranjera. Habíamos escuchado hablar sobre mí orientador, una persona muy interesante, y si yo pensaba en participar de un Programa de Doctorado en Educación Matemática, tendría sentido estudiar o hacer mi investigación sobre la enseñanza superior, puesto que toda mi experiencia ha sido en dicha la enseñanza superior, entonces hice el doctorado en esta área.

En realidad, yo me fui con una curiosidad en dos momentos distintos del trayecto de la vida académica de un estudiante de exactas, que se refería al primer momento (o al encuentro con el Cálculo) primer año del Cálculo y al primer año de Análisis Matemático, el que me parecía muy curioso, porque eran dos momentos en que los alumnos relataban que sentían un choque, un susto, un cambio.

I: ¿En las dos asignaturas?

P2: Sí, en las dos. Yo pensaba que iba a conseguir todo, pues tenía poca noción de lo que sería una investigación en Educación. Fue entonces que percibí que tendría que optar por una u otra, y opté por hacer mi investigación en Análisis Matemático. Así había una serie de cuestiones a este respecto, como por ejemplo: yo pensaba que si tuviera que hacer mi investigación en Cálculo, tendría que regresar a mi país para la recogida de datos, lo que era algo muy complicado. Además, para que hiciera mi recogida de datos en el exterior, yo creía que hacerla en Análisis Matemático, tendría más lógica, ya que los alumnos estaban más definidos, pues había un entorno claro sobre las cuestiones sociales y culturales, por supuesto que seguirían siendo interferencias, pero no sería tan relevantes como en los alumnos en Cálculo. Entonces, opté por el Análisis Matemático.

I: ¿Usted también cursó un postdoctorado?

P2: Sí, yo observé la transición de los estudiantes del curso de Cálculo para el de Análisis Matemático. En Cálculo se decía que sus dificultades estaban relacionadas con las debilidades de conocimientos previos en la enseñanza secundaria y el curso de Análisis Matemático me parecía muy significativo, pues tras dos años de convivencia con nosotros, en el departamento, los alumnos seguían con las dificultades en la transición del Cálculo para el Análisis Matemático, lo que no tendría como echar la culpa en nadie, ya que habíamos trabajado con ellos por dos años. No hice ningún trabajo utilizando nuevas tecnologías en este período, y mi orientador tenía una gran experiencia, trabajos e interés en el uso de las nuevas tecnologías. Él quería que sus alumnos se interesaran por este aspecto y esto no era propiamente en el estilo de investigación que realicé. Él siempre me decía que observara lo que yo hacía, que leyera la literatura sobre el uso de las nuevas tecnologías, pues cuándo llegara a Brasil, vería lo que iba a suceder. Eso fue lo que ocurrió, así que llegué a Brasil, me enteré de que había una gran demanda por el uso de ordenadores, lo que me llevó a hacer mi postdoctorado sobre este tema, ya que tuve la oportunidad de volver a la Universidad extranjera y discutir con David sus ideas.

I: ¿Eso sucedió a cuánto tiempo tras la conclusión de su doctorado?

P2: Sucedió tras 4 años. Mi doctorado lo hice recientemente, pues empecé en 1993 y lo terminé en 1998. En realidad retorné en 1997, pero lo terminé en 98, ya mi pos doctorado fue quizás en 2003, más o menos los 4 años después.

Libro de texto y currículo de Cálculo en la licenciatura de matemáticas

I: ¿Cuándo empezó usted a trabajar en la Licenciatura en Matemáticas?

P2: En la década de 80. En realidad, en el Departamento de Matemática, nosotros atendemos a los alumnos del área de exactas de toda la universidad, pues somos los responsables por la enseñanza de las disciplinas de matemáticas para todas las carreras en nuestra universidad y además, tenemos nuestros propios cursos, la Licenciatura en Matemáticas y el “Bacharelado” en Matemáticas. Entonces, el tránsito entre los diversos cursos es muy común, y en la década de los 80, en 1986 por delante, me involucré realmente con la licenciatura a causa de una reforma curricular, que en aquella época no involucraba mucho con las disciplinas como Cálculo, o mejor, impartí algunas veces la asignatura “Fundamentos del análisis”, antes de irme al extranjero.

I: ¿Qué era Fundamentos de Análisis?

P2: Fundamentos del análisis ha sido una idea en esta reforma curricular para que abarcara el análisis de una forma diferenciada para el profesional que sería el futuro profesor de matemática. Hasta entonces, el análisis era un curso idéntico tanto para el “ Bacharelado” como para la Licenciatura en Matemáticas. En este período (reforma curricular de 1986), fue cuando se planteó la propuesta del abordaje diferenciado de este contenido para estas dos carreras. Bueno, nosotros que teníamos esta responsabilidad de hacer esta lectura y dar una interpretación, ha sido algo de ensayo y error, pues no teníamos libros didácticos específicos para la licenciatura sino, el material escrito para la formación del matemático, es decir los libros del “Bacharelado”. Qué hice entonces, pues básicamente seguí algunas sesiones de los libro del “Bacharelado”. Me recuerdo que en aquella época intenté seguí el libro de Análisis Matemático de D’Jairo, pero yo intentaba complementarlo con libros de “Caraça”, con algunos artículos discutiendo la cuestión de números que había en la RPM, intentando redactar algunos textos, elaborar listas de ejercicios que nos parecían más convenientes. Fue un intento de abordar este contenido de una manera interesante, o que fuera interesante a un profesional no sólo del área de matemática.

I: ¿Usted en este curso llegaba hasta qué parte?, ¿derivadas e integrales?

P2: Sí, he llegado hasta derivadas; no conseguía cumplir todo el programa. Esto fue anterior a mi doctorado, y aun cuando regresé del doctorado, no lo retomé. Además de esta disciplina que impartí, trabajaba con las disciplinas que pretendían esta interlocución entre las matemáticas, la escuela de enseñanza secundaria y la facultad de Educación. Se trataba de una manera de pensar lo que era importante ser discutido para la enseñanza secundaria de matemáticas, de qué manera los abordaríamos en las clases.

I: ¿Y sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo?

P2: Impartía Cálculo en otras carreras, pero específicamente para la licenciatura lo impartí por muchos años, principalmente después que terminé el Doctorado. Entonces, al retornar del doctorado mis compañeros estaban con un proyecto de coordinación vertical de los curso de licenciatura. Este proyecto estaba pensado en tratar las licenciaturas como un grupo especial, pues en el contexto del Instituto de Ciencias Exactas, hay un tratamiento homogéneo del contenido para todos los cursos. En aquella época, la propuesta era tratar de manera especial la Licenciatura en Matemáticas y, por esto, la carga horaria de los cursos de Cálculo de dicha licenciatura había sido diferenciada de los otros cursos.

I: ¿La carga horaria de los otros cursos aumentó?

P2: No, la carga horaria de estos cursos se ha reducido. Lo que se comentó fue que estaban reduciendo el número de horas del curso de Cálculo, pero la argumentación de los profesores más ligados a la Licenciatura en Matemáticas era que la demanda de reducción de las horas del referido curso era de las otras carreras. Por esto conseguimos mantener la misma carga horaria de Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas y, además, constituimos una coordinación por área. Cuando percibíamos alguna dificultad de los alumnos en ciertos contenidos, pedimos ayuda a otros profesores que estaban dando clases sobre dichos contenidos y esto fue una experiencia con resultados muy positivos. En este período utilizábamos el libro de Simmons. En Inglaterra se comentaba que la enseñanza del Cálculo debería ser contextualizada y yo les decía que el libro que utilizábamos atendía exactamente a esto. No obstante, cuando regresé del doctorado, la propuesta de los profesores que habían hecho este proyecto era de trabajar con el libro del Leithold. Cuestioné porqué le habían cambiado el libro y me contestaron que era un libro difícil. El Leithold, en ese sentido, les era más conveniente por su estructura. Para mí, independientemente del libro de texto que se adopta es fundamental complementarlo; el papel del profesor entonces es de sistematizar lo que hace falta en los libros. En general, la referida experiencia fue considerada un éxito por los alumnos. Aunque ellos tuvieron dificultades en este proceso, hemos conseguido hacer un trabajo que les despertó la curiosidad y les dejaba con ganas de seguir estudiando. Esto era lo opuesto a lo que teníamos anteriormente, pues muchos estudiantes al terminar un curso de Cálculo ya no querían seguir estudiando matemáticas. Además, había una concepción de que los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas no poseían las mismas condiciones para hacer las disciplinas de la formación del matemático, lo que es un absurdo. Esto era algo que se necesitaba arreglar entre la formación del profesor de matemática y la del matemático.

I: ¿Puede comentarnos usted alguna experiencia de fracaso en su actuación profesional?

P2: Cuando estaba trabajando simultáneamente con las Licenciaturas en Matemáticas y en Biología, utilicé la misma secuencia didáctica y tuve una gran reprobación entre los estudiantes de Biología. Me parece que los intereses son muy diferentes en cada carrera y, por lo tanto, es necesario tener en cuenta las características de cada carrera, así como repensar y adecuar nuestra práctica. En lo que se refiere a la Licenciatura en Matemáticas, creo que mi trabajo tuvo éxito porque los estudiantes siguieron en su carrera, aunque mientras desarrollábamos el curso había mucha resistencia por su parte. Yo aplicaba cuatro evaluaciones, con algunas cuestiones abiertas para permitir que los estudiantes se expresaran; esto contribuyó para que ellos tuvieran respeto mutuo, confianza y, libertad para participar y hacer los cuestionamientos en las clases. En fin, no seguía la misma secuencia didáctica que mis colegas.

I: ¿Esto producía alguna resistencia por parte de los profesores?

P2: Si, porque no conseguí cumplir con el programa simultáneamente con mis colegas. Sin embargo, en los exámenes que yo aplicaba había cuestiones bastante complejas, de contenidos trabajados en clase. Ellos percibían y comentaban que mis evaluaciones eran mejores y más complejas que las suyas y esto permitió disminuir esta resistencia. Yo priorizaba los contenidos principales de Cálculo I y pasaba algunos de los temas para el Cálculo II. Además, en mis clases buscaba discutir los temas y trabajarlos de manera más conceptual. Sería interesante si hubiera oído más las opiniones de los estudiantes con relación al curso de Cálculo. Sin embargo, ellos llegaron a comentar que estando en una pizzería en el fin de semana, discutían la integral. Esto jamás yo había lo conseguido con los estudiantes.

I: ¿Cuál sería el papel del Cálculo en el currículo de la Licenciatura en Matemáticas?

P2: Hay muchas relaciones con problemas físicos. Dichos problemas han contribuido en la sistematización de las ideas del Cálculo. Por otra parte, las ideas de variación aunque no deben ser transportadas para la enseñanza secundaria de la misma manera que las trabajamos en Cálculo, necesitan ser introducidas en la secundaria.

I: ¿Usted considera que los contenidos de Cálculo deben ser trabajados en la enseñanza secundaria?

P2: Considero que esto no debe ser trabajado en la secundaria, sino las ideas generales como la tasa de variación; hay un capítulo interesante sobre este tema en el libro de Cálculo con aplicaciones. En Brasil, mientras tengamos una misma enseñanza secundaria para todos pienso que no es viable trabajar con derivadas e integrales, porque eso no tiene sentido para la formación general del ciudadano. Quizás sería diferente si tuviéramos una reforma educacional que contemplara una enseñanza secundaria por áreas específicas de conocimiento. El problema del aprendizaje del Cálculo en la enseñanza universitaria no se relaciona con el hecho de que los estudiantes no lo hayan estudiado en la secundaria.

I: ¿Usted considera que la estructura de la licenciatura de matemáticas permite lograr las competencias necesarias al futuro profesor de matemáticas?

E: No, estamos siempre insatisfechos con el actual currículo de la licenciatura. Aunque podríamos planificarlo bien, esto no significa que sería llevado a cabo por los profesores de acuerdo con lo que está planificado. En este sentido, los profesores son muy importantes en este proceso. Hemos avanzado en este sentido, estamos moviéndonos en un nuevo proceso de reforma curricular de la licenciatura que ya está casi listo. Entretanto, actualmente seguimos con el currículo de la década de los 1980. Dicha reforma cambiará la práctica de formación de los futuros docentes de matemáticas y esto lo veo de manera muy positiva. Las horas para las referidas prácticas han sido considerablemente incrementadas. En el caso de que seamos capaces de supervisar las referidas actividades prácticas, así como de ayudar a los estudiantes a desarrollar buenas reflexiones acerca de las clases y de los contenidos trabajados, tendríamos una dirección más clara de cómo organizar mejor el currículo de la Licenciatura en Matemáticas, de modo que contribuya a la formación de los profesores de matemáticas de secundaria.

I: En lo que se refiere a los libros de texto, ¿Usted considera que los profesores universitarios tienen la tendencia de seguir la misma secuencia didáctica de los libros de texto de Cálculo?

P2: Me parece que sí. En general lo siguen.

I: ¿Qué libros indicaría para trabajar con Cálculo en la Licenciatura en Matemáticas?

P2: Yo no sé si voy a dar un curso de Cálculo en este año. Sin embargo, pienso en adoptar el libro *Cálculo y Aplicaciones* (Hughes-Hallett, Gleason, Lock, Flath y otros, 1999). En este caso lo que pasa es que el libro tiene muchas ideas interesantes, pero está poco sistematizado. Habría que formalizar algunos puntos. Además me parece que será necesario complementar algunos ejercicios. No sé si lo voy a hacer así. Quizás sea más sencillo usar los libros intermedios como el Shokowsky y Stewart, etc. parece que lo que se desataca como extremo sería el "Cálculo y Aplicaciones".

I: ¿Qué otro libro usaría usted?

P2: Ya he pensado en utilizar el libro de Stewart. No lo he utilizado antes, pero le he echado un vistazo y me parece interesante probar su viabilidad para la licenciatura.

I: ¿Qué aspectos positivos busca usted en los libros de Cálculo, qué indicaría y cuáles serían las principales deficiencias que observa en los libros que ha comentado?

P2: En el libro de Stewart contempla una diversidad de ejemplos, ejercicios de tipo canónico del Cálculo, los proyectos con sugerencias del uso de las tecnologías. Uno de los problemas sería el tiempo para desarrollar dichos proyectos. Por otra parte, el libro de Leithold presenta deficiencias en estos aspectos. No se trata de que sea difícil, no considero sus ejercicios difíciles, pero es extremadamente formal, tiene pocas figuras, pocas aplicaciones, etc. Esto no es lo que se llama Cálculo de manera alguna, pues no trae sus aplicaciones fundamentales; ya es como un *semi-Análisis Matemático*, pues tampoco llega a ser un curso de análisis. En cuanto al libro "Cálculo y Aplicaciones", no sé si seré capaz de complementarlo con las sistematizaciones necesarias. No obstante, las ideas que se presentan son fantásticas. Además, aunque presenta muchos ejemplos, son diferentes y puede propiciar un debate interesante, pues hay problemas que pueden ser resueltos de diferentes maneras. Este libro está bastante adoptado en la Licenciatura en Biología y farmacia, pero en matemáticas todavía no lo hemos utilizado en nuestra universidad. No sé cual sería la opinión de nuestros colegas respecto de adoptarlo en la Licenciatura en Matemáticas.

I: Este libro también es muy rico en el trabajo con proyectos de trabajo, ¿no?

P2: Sí, es un libro difícil de ser sistematizado. Para mí es similar a lo que pasa con el libro de Imenes (del 5º al 8º año). Los profesores de secundaria protestan porque el libro es trabajoso. Parece que sería interesante solicitar a los profesores que complementen el libro de Cálculo. Los alumnos necesitan ser más activos cuando se pretende trabajar con dicho libro y muchas veces esto no les agrada. Se hace un cambio de la estructura que el profesor está acostumbrado a trabajar y funciona.

I: Su pos-doctorado fue relacionado con las tecnologías. Hay varios libros de Cálculo que son bastante tradicionales (no abordan tecnologías) y otros que abordan la utilización de las tecnologías, proyectos de trabajo, historia de la matemática, etc. ¿Qué opina a este respeto?

P2: Para mí, además de interesante es importante desarrollar este trabajo con las nuevas tecnologías en la licenciatura. Se trata de unos recursos tecnológicos que están presentes en nuestro entorno cotidiano y estamos formando profesores que no tienen la misma destreza que sus futuros estudiantes. Por otra parte, nosotros tenemos la dificultad de romper con nuestra formación y desarrollar un trabajo en la universidad que posibilite a los profesores de la enseñanza secundaria tener la experiencia con las tecnologías para utilizarlas en su futura práctica profesional. Es muy raro el hecho que los estudiantes tengan contacto con ordenadores desde niños y no pasa lo mismo con los profesores.

I: ¿Sería necesario cambiar la concepción de los profesores universitarios y capacitarlos para la utilización de las tecnologías?

P2: Esto es una larga discusión. Estoy orientando una doctoranda, que tiene como una de las cuestiones de investigación relacionada con la identificación de los puntos de resistencia de los profesores universitarios para trabajar con las nuevas tecnologías. Hemos conjeturado que lo que pasa es que estamos trabajando con los recursos tecnológicos y nos gustaría que se agotara todo el conocimiento producido con los recursos del lápiz y papel. O sea, tienes herramientas diferentes y, trabajando con ellas, quieres que además se agote todo lo que se hacía anteriormente utilizando otras herramientas. Muchas veces hablamos de que no vamos a realizar ciertas actividades para no perder tiempo y podemos equivocarnos al asumir esta posición. Para ilustrar esto, podemos pensar en la extensión del libro de “Stewart”, que propone que se desarrolle todo el contenido de la manera usual y además que realicemos las actividades con la utilización de las tecnologías. Esto es muy difícil de llevar a cabo, pues no es posible hacerlo así. Es necesario tener conciencia de que tenemos herramientas diferentes y que esto requiere nuevas prácticas. Me parece que estamos con mucha exigencia en la construcción del conocimiento con una herramienta, mientras en la práctica estamos utilizando otra; quizás necesitamos repensar qué es lo que enseñamos. Cuando era alumna, la metodología utilizada con nosotros era bastante distinta; lo que he aprendido de reglas de derivación e integración fue mucho, ¿Es esto lo que tenemos que enseñar actualmente? Sé que esto ya se ha reducido, pero no sabemos hasta qué punto somos conscientes de la existencia de tecnología para realizar determinados cálculos, si vamos a tener el mismo desempeño que antes. Es difícil quitar esto. Por otra parte, es de gran importancia que la escuela “alfabetice” a los estudiantes que todavía no han tenido acceso a las tecnologías y para esto deben estar preparados los futuros profesores de matemática en su carrera de licenciatura. Por esto es importante contemplar este aspecto en la licenciatura.

Configuraciones Epistémicas de la integral en la formación de profesores de matemáticas

I: Los significados de las nociones de Cálculo son relevantes para nuestro estudio. En este sentido, ¿Qué problemas serían esenciales para introducir y desarrollar los contenidos de Cálculo y hasta qué punto es posible generalizar los contenidos de Cálculo, especialmente en el caso de la integral definida?

P2: Pienso que es posible trabajar las nociones del Cálculo a partir de los problemas. En el libro “Cálculo y Aplicaciones”, lo interesante es la idea de derivada como tasa de variación; de ahí puedes hablar de muchas otras cosas, como velocidad y muchos otros problemas. Tradicionalmente lo que se hablaba era del cálculo de velocidad y del cálculo de áreas. Sin embargo, en este libro se puede abrir el abanico de las aplicaciones de las derivadas relacionadas con problemas de crecimiento. En lo que se refiere a la integral, tradicionalmente se hace con las nociones de áreas y volúmenes.

I: ¿Usted considera que existe una confusión en muchos estudiantes en el sentido de considerar que la integral solamente se relaciona con el área?

P2: Esto es complicado, pues al introducir un contenido a partir de un determinado tipo de problemas, puede convertirse en el prototipo de lo que es la integral, quedándose con esta idea. He tenido un alumno que se quedaba preguntándome si integral es un área. Yo le decía que se trata de un “área orientada”. La cuestión entonces es cómo pasar de esta situación introductoria a la generalización de la integral en matemáticas. Esto tiene que realizarse con cautela. Pienso que la idea de tasa de acumulación es interesante, porque hay momentos que se gana (acumula positivamente) y otros que estará perdiendo (restando). Así que la noción del área orientada es más sencilla que cuando introducimos la integral como área y después intentamos generalizar. Tradicionalmente hemos dado los dos ejemplos geométricos – derivada como recta tangente y de integral como área – como hilo conductor de estos contenidos.

I: Esto sigue al propio origen histórico del Cálculo, ¿no?

P2: Sí, pero hallar la recta tangente ya se trata de una traducción de un esfuerzo de solucionar un problema que es de tasa de variación. Por esto considero que es más natural y genera menos problemas utilizar la idea de tasa de variación en lugar de las referidas ideas geométricas. Esto permite usar, con un cierto sentido, la suma negativa cuando estamos buscando la integral definida; no la introduzco como área. Por esto, la discusión de derivadas en mí práctica está siendo abordada a partir de tasa de variación y no de recta tangente.

I: En lo que se refiere a las representaciones, ¿Cuáles serían las más importantes para la Licenciatura en Matemáticas y qué dificultades presentan los estudiantes para sus traducciones?

P2: Es natural que los alumnos tengan dificultades por la complejidad de las múltiples representaciones y de los distintos significados relativos al contexto de uso de la noción matemática que estamos problematizando. La representación algebraica es también complicada. Me estoy acordando más de las derivadas y voy a ejemplificarlo con esta noción. Cuando tomamos las distintas expresiones de las derivadas, las utilizamos con mucha naturalidad como si los estudiantes las conocieran bien. Esto es muy complicado para ellos, pues no poseen los mismos conocimientos que nosotros sobre este contenido. No obstante, es muy importante que les demos oportunidad de experimentar las distintas representaciones, pues nosotros elegimos las representaciones adecuadas que vamos a utilizar en la resolución de los problemas. Por ejemplo, si tienes un buen concepto de la integral definida, para hallar la integral de la función $f(x)= \operatorname{sen} x$, en el intervalo cerrado de 0 a 2π, si la representas geométricamente, si sabes qué representa la integral definida sabes que el resultado es igual a cero sin necesidad de hacer ningún cálculo. No es suficiente solamente conocer las distintas representaciones, sino relacionarlas. Es necesario que los estudiantes sepan justificar los resultados. La interlocución entre las distintas representaciones es igualmente importante y también es compleja.

I: Cuando se presenta a los estudiantes las representaciones geométricas de dos curvas representadas en un plano, una de la derivada y otra de la integral de la misma función, ¿Ellos también tienen dificultades para visualizarlas?

P2: Claro, mi investigación del pos doctorado ha sido relacionada con estas representaciones, especialmente las gráficas. He trabajado con el *grafic calculus*, que posibilita esta interlocución múltiple entre movimiento, las representaciones gráficas y las ecuaciones algebraicas. Tratamos de relacionar estas ideas, lo que en general no es sencillo, aunque importante. Para visualizar, por ejemplo, ver la función área y cuál sería la curva (estaríamos integrando).

I: Esto no se trabaja en la Licenciatura en Matemáticas, ¿Usted considera que debería ser trabajado?

P2: No se trabaja con nadie, pero considero que se debe trabajar. Esto es útil porque vamos a echarle de menos al presentar el TFC o incluso para definir el logaritmo a través de la integración (aunque no estoy defendiendo que se defina logaritmo de esta manera). El problema que se presenta es la dificultad de que los estudiantes comprendieren la función área.

I: ¿Qué procedimientos serían importantes desarrollar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la integral en la Licenciatura en Matemáticas y qué conocimientos previos se necesitaría para esto?

P2: Es importante que los estudiantes entiendan que están calculando un área orientada. Esto requiere las nociones de simetría, periodicidad, etc., o sea, es necesario tener una cierta "intimidad" con la noción de función que me parece importante. Estoy imaginando además la siguiente situación: encontrar el área de varios triángulos. Para esto, no se necesitaría encontrar las ecuaciones algebraicas de cada recta. Se puede hacer uso del concepto (definición) de integral definida sin recurrir a los recursos para encontrar la integral indefinida y aplicar el TFC para hallar el área. Es decir, generalmente los estudiantes suelen resumir todo el significado de la integral al de antiderivada. Además, tradicionalmente lo que desarrollamos en las clases es el uso del TFC con las técnicas de integración.

I: Pensando en algunas nociones matemáticas, ¿Cuáles se relacionan implícita o explícitamente con la integral (y con la integral definida)?

P2: Tenemos las curvas cuyas tangentes son dadas por determinadas expresiones que podemos obtenerlas por medio de las integrales indefinidas; en el caso de la integral definida tenemos áreas, volúmenes,..., o sea, se refiere a las tasa de acumulación de manera general. Al pensar en la integral indefinida, la cuestión sería cuáles son las curvas cuya derivada es conocida. Con esto construimos la idea de la integral indefinida. En el caso de la integral definida, no estoy con el ejemplo elaborado, porque he pasado mi vida trabajando con las ideas de áreas y volúmenes, nociones más geométricas. Sin embargo, considero que tendremos mucho más posibilidades cuando discutimos esta noción vía tasa de acumulación; esto permite entender más naturalmente el significado del sumar lo que está sobre el eje x o restar lo que está debajo del x.

I: ¿Esto además contemplaría los problemas de aplicaciones extramatemáticas que no utilizan necesariamente las nociones geométricas de área y volumen?

P2: Exactamente.

I: ¿Usted considera importante desarrollar la integral como límite de una suma de Riemann en la Licenciatura en Matemáticas?, ¿Es posible desarrollar esta noción de manera distinta?

P2: Pienso que la idea va a originarse a partir de esto, pero pasar a la idea es diferente de desarrollarla por medio del lenguaje formal. Las sumas de los rectángulos serán desarrolladas; vamos a hablar un poco del método de la exhausción. Esto es necesario para justificar el concepto. No obstante, es muy pesado desarrollar formalmente esta noción por medio del lenguaje analítico. Me parece interesante resolver algunos ejercicios – que suelen venir en los libros en la introducción a la integral – del tipo "encontrar el área bajo la curva $f(x) = x^2$, en un intervalo cerrado dado". Solucionar dicho ejercicio utilizando el procedimiento de la suma de las áreas de rectángulos. Uno de los proyectos que desarrollamos con el "grafic calculus" consiste en encontrar estas sumas; uno de los "applets" que estamos desarrollando permite dada una función, visualizar la partición para un intervalo dado, ver el valor de las sumas superiores e inferiores. El ordenador nos posibilita discutir estas ideas de manera mucho más sencilla que con la utilización de los métodos tradicionales.

I: ¿Usted ha utilizado estos "applets" con los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas?

P2: No, he trabajado con estudiantes de otras carreras. Actualmente estoy desarrollando un trabajo sobre logaritmos con un grupo de estudiantes de un postgrado en educación matemática (PREPES), a partir del libro de Elon sobre logaritmos. La idea del taller era construir una tabla de logaritmos. Para esto, era necesario tomar la función $f(x)=1/x$ y calcular las áreas de los rectángulos; lo que estamos realizando de hecho es una integración, aunque no hablamos de integral en el desarrollo de esta actividad. Esta idea es interesante y permite usar la visualización geométrica. Tratándose de tasa de acumulación, si tienes una tasa constante de acumulación durante un período de tiempo, el valor acumulado será el producto de dicha tasa por el tiempo. Entretanto, si la tasa (de crecimiento o decrecimiento) varia, entonces es necesario pensar qué acontecería si la tasa fuera constante en determinados intervalos, que cantidad se acumularía en el referido intervalo. Esto puede ser aplicado para analizar un problema de desintegración radioactiva para analizar la cantidad de la sustancia que ha disminuido en un intervalo de tiempo. Considero que la idea de la partición, de necesidad de utilizar una gran cantidad de partes ha de estar presente. Esto no implica utilizar un lenguaje formal.

I: Muchos autores de libros de texto y también los profesores suelen proponer y demostrar diversos teoremas y propiedades. ¿Cuáles serían las propiedades y teoremas que requieren ser presentados en el estudio de la integral y qué debe ser demostrado?

P2: Una cuestión sería qué se entiende por demostrar.

I: Vamos entender la demostración como la argumentación para justificar las proposiciones matemáticas.

P2: Considero que podemos hacer todo geométricamente; justificar las propiedades relacionadas con la suma de integrales, del producto por constante, el teorema del valor medio. Es importante justificar por qué valen las proposiciones; necesitamos trabajar la manera de argumentar en matemática y pienso que puede ser a través de la visualización. Sin embargo, esto no será formal porque no voy a presentar la definición formal. Esto no implica que no debamos utilizar la argumentación de manera clara, lógica y coherente.

I: Entonces, ¿no se debe utilizar la formalización rigurosa en la Licenciatura en Matemáticas?

P2: Esto es relativo al tema de estudio; en el caso específico de la integral, considero que no. Una vez que no presentamos la definición formal, tampoco vamos a realizar la demostración formal. En este caso la justificación no será formal, sino de una manera que el estudiante pueda comprenderla. Por otra parte, habrá otros momentos en los cuales vamos realizar deducciones a partir de definiciones más próximas a lo formal. Me refiero, por ejemplo, al estudio de la exponencial y logaritmo para los cuales las deducciones se hacen a partir de las definiciones con una estructura más próxima a lo formal; además son temas que el profesor va a trabajar en la enseñanza secundaria. No obstante, cabe la discusión relativa al cómo los egresados de la licenciatura van a abordar estas nociones en sus clases.

El currículo de Cálculo en la licenciatura de matemáticas

I: El currículo suele ser organizado a partir de las competencias. ¿Usted considera que la Licenciatura en Matemáticas contribuye con la formación de profesores capaces de aplicar la matemáticas a contextos no necesariamente matemáticos?

P2: No te lo puede garantizar, me parece que este es un aspecto todavía deficiente en nuestra discusión, que es muy clásica y dirigida a la propia matemática. Tenemos conocimiento de que en los proyectos que han sido desarrollados en las escuelas de enseñanza secundaria que los profesores presentan muchas dificultades. Nuestra expectativa es llevar esta discusión a través de los proyectos de práctica. Esto nos posibilita tener un “feedback” de lo que sucede en las escuelas.

I: Siguiendo en esta dirección, ¿Qué competencias le parece posible desarrollar en la Licenciatura en Matemáticas y, especialmente, a partir del curso de Cálculo?

P2: Me gustaría que el estudiante de licenciatura desarrollara una actitud reflexiva y una cierta flexibilidad, para que ellos puedan afrontar satisfactoriamente la complejidad de las situaciones que van a encontrar en su práctica profesional. En las escuelas, las clases suelen ser heterogéneas y esto demanda una actitud reflexiva de los profesores para trasformar esta realidad. Esto es general de la matemática. En el caso del Cálculo, si pensamos específicamente en el contenido, el Cálculo puede proporcionar una buena base para que el profesor dialogue con otras áreas del conocimiento, a través de proyectos multidisciplinarios, como en la física, biología, economía, etc. Espero que el estudio del Cálculo propicie esta base e incluso, en matemática, es muy importante para el desarrollo de la habilidad de manipulación algebraica de los conceptos que se trabajan en la enseñanza secundaria.

I: ¿Usted se refiere a la habilidad de modelación?

P2: Creo que sí, pues los problemas y aplicaciones que suelen venir en los libros de Cálculo son en gran parte del área de física, entre otras.

I: ¿Qué significados de la integral definida deberían ser implementados en la Licenciatura en Matemáticas?

P2: Pienso que la idea interesante es de desarrollar la idea del crecimiento acumulado; esto contempla una situación sin sentido cuando se usa la noción de área, que sería como un área negativa. Esto representaría una perdida. Por lo tanto, la integral definida ya nace de esto, sumando o restando en el caso de que la función sea positiva o negativa, respectivamente; esto es lo que se gana en este proceso. Si tienes el área bajo una curva hay que abordar su significado geométrico. Los estudiantes deben percibir que la lectura de la integral definida depende de su contexto de uso, lo que cambia son los problemas. Es decir, los problemas pueden producir distintos significados de la integral y, en muchos casos, los estudiantes solamente memorizan los conceptos. Por ejemplo, memorizan el concepto de trabajo, pero no saben el porqué es una integral. Entonces, desarrollar los cálculos a partir de las sumas de las áreas de los rectángulos posibilita la visualización; es como si estuviéramos "deduciendo" cada una de las supuestas aplicaciones. Esto requiere que los estudiantes perciban que hay una manera de proceder para resolver determinados problemas: pensar en una función continua en un cierto intervalo y, a partir de esto, obtener la noción que se busca. Para mí, lo esencial no es que ellos conozcan diversas nociones, sino que sepan de donde viene cada concepto. O sea, lo que más importa no es tener una lista, un elenco de representaciones y aplicaciones, sino comprender el procedimiento necesario para resolver cada problema. Esto está íntimamente ligado a la noción de suma de rectángulos y no estoy hablando de la formalización de la definición de integral a través del límite de las sumas de Riemann. Usamos esta noción para entender el significado de cada problema. En lo que se refiere a la integral indefinida yo comento como siendo "algo" que está deshaciendo la derivada.

I: ¿Se refiere al hacer y deshacer?

P2: Sí, esta es una idea interesante para abordar.

I: ¿Usted considera que los libros contemplan adecuadamente esta idea?

P2: No lo sé. Pienso que nuestra tradición es abordar las derivadas a partir de la recta tangente, integral a partir del área y, posteriormente, las aplicaciones de la integral, donde se resuelven algunos problemas y los estudiantes memorizan todas las fórmulas; esto para mí no tiene sentido. Parece que los libros siguen esta secuencia, excepto el de "Cálculo y Aplicaciones". Sin embargo, no podemos permitir que el libro sea nuestro maestro; debemos complementarlo con lo que haga falta.

I: Parece que no hay libro alguno que se pueda considerar completo, ¿no?

P2: Claro, es necesario realizar las adecuaciones.

I: La práctica pedagógica de los profesores de Cálculo revela que muchos de ellos abordan las técnicas de integración en detrimento de sus aplicaciones, por considerar que esto está en su "campo seguro" de conocimiento. ¿Qué opina usted sobre esto?

P2: Si, las aplicaciones demandan tiempo y deben ser desarrolladas por los estudiantes y no por el profesor; este era el motivo por el cual he comentado anteriormente que yo dejaba parte de los contenidos de Cálculo I para el curso siguiente. Yo proponía un problema relacionado con la integral definida de la siguiente manera: si consideras que la fuerza es constante en determinado intervalo y el trabajo es X, ¿Cuál puede ser una idea para resolver esta situación cuando la fuerza no sea constante? Les dejaba discutir y presentar las ideas y, luego les preguntaba cuál sería la integral que representaría esta situación. Este procedimiento requiere tiempo y las actividades de los estudiantes se desarrollaban después que yo les explicaba el tema y solucionaba algunos ejemplos. Sin embargo, los estudiantes tenían dificultades cuando les tocaba desarrollar las actividades propuestas. Por lo tanto, si ellos no se responsabilizan por estas situaciones, no van a entenderlas; no es suficiente que resolvamos las actividades en la pizarra. Aun más porque saben que normalmente en los exámenes no se contempla este tipo de cuestiones; en este sentido tienen razón.

I: ¿Este procedimiento permite al profesor observar el desarrollo cognitivo de los estudiantes mientras se trabajan los temas?

P2: Sí, se puede notar esto. También quería comentar que parece que en Brasil controlamos más la atribución de las actividades de nuestros alumnos que en Europa. Allá los estudiantes parecen ser más autónomos; los profesores dan las clases y lo demás les toca a los estudiantes. En nuestro caso, los estudiantes que han cursado la secundaria en los colegios públicos son más autónomos que los que proceden de los colegios privados. [...] Existen momentos en las clases que las actividades deben ser realizadas por los estudiantes. [...]

I: ¿Qué obstáculos suelen ocurrir en el proceso de enseñanza de la integral?

P2: Podemos comentar la elección de los procedimientos. Sin embargo, no se sabe como el profesor debe indicar el procedimiento adecuado para solucionar la integral en cada caso. Para aclarar esto, si pensamos en la ecuación cuadrática, hay una fórmula específica para solucionarlas de manera general. No obstante, esto no pasa con la integral; es necesario que los estudiantes estén "familiarizados" con las diversas integrales para que pueda elegir los métodos adecuados para solucionar las integrales que requieren la utilización de técnicas específicas para encontrar su primitiva. Esto produce una enorme inseguridad en los estudiantes; ellos esperan que el profesor les indique el procedimiento. Sin embargo, es necesario que ellos desarrollen la habilidad de identificar el procedimiento más adecuado a partir de las soluciones de distintos ejercicios. Si pensamos en la integración por partes, es interesante que mostremos su relación con la derivada del producto de funciones; la idea que se utiliza viene de esto. Otra cuestión que tenemos que explicar mejor la noción de diferencial, pues utilizamos su simbología como si fuera familiar para los estudiantes. Esta es una noción todavía mal trabajada, que puede comprometer el aprendizaje de la integral. Además, hay dificultades relacionadas con la falta de los conocimientos algebraicos, y con la comprensión de las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

I: ¿Qué papel juega la tabla de integración en un curso de Cálculo?

P2: Tenemos que enseñarlos a consultar la tabla, pero esto no es suficiente para encontrar las integrales. Ellos necesitan entender cómo utilizarla. En Cálculo no tengo la experiencia de trabajar con la tabla.

I: ¿Cuál sería la mejor secuencia didáctica para desarrollar la integral en la Licenciatura en Matemáticas y porqué?

P2: Si empezamos con la tasa de variación, podemos plantear un problema del tipo: si cierta función representa una tasa de variación de una variable, después de un intervalo de tiempo, ¿cuál fue el crecimiento acumulado? Estamos hablando de la integral definida; esta es una manera que me gustaría empezar actualmente. También podemos proponer un problema, relacionado con la integral indefinida, para determinar una función a partir de una función derivada. Esto puede ser más interesante para la Licenciatura en Matemáticas. O sea, se puede desarrollar la integración de manera interesante independientemente de introducirla como integral definida o indefinida. Tradicionalmente hemos empezado por la integral definida a partir de área. Sin embargo, me gustaría empezar por la idea de tasa de acumulación. Mi expectativa es poder, sin mucha dificultad, abordar la suma negativa desprendiéndome de la noción inicial de área.

I: ¿Cuál sería el tiempo utilizado para desarrollar la integral en un curso introductorio de Cálculo?

P2: Alrededor de 30 h, sin profundizar en los métodos de integración.

I: ¿Usted se refiere solamente a las clases teóricas o también a las clases prácticas de laboratorio?

P2: He referido a la parte teórica. El problema de la práctica sería cómo usar estas tecnologías. El uso de *applets* posibilita trabajar la visión dinámica (el movimiento, cambiar los intervalos, realizar los cálculos y visualizar todo en la pantalla); esto puede ser interesante. Es necesario reflexionar sobre qué tiene sentido de lo que estamos enseñando, cuando se usan las nuevas tecnologías. La consulta a la tabla de integrales ya no tendrá sentido; además, al admitir que el "Maple" o el "Mathematica" resuelve las integrales, ¿Enseñaríamos a los estudiantes a usar los "softwares" para resolver las integrales? No sé cómo debemos actuar en este caso. Para mí hay ventajas en desarrollar algunos temas (como las sumas de Riemann) sin la utilización de los "softwares", pero tengo la preocupación de que esto pueda ser un conservadurismo de mi parte.

I: Si usted va a utilizar las tecnologías informáticas, ¿sería viable volver a trabajar todas las técnicas de integración como se suele hacer tradicionalmente?

P2: No. Es necesario pensar qué prácticas serían viables. Lo que está pasando es que estamos queriendo tornar a desarrollar todo lo que ya hemos hecho con lápiz además de los proyectos y prácticas con los recursos computacionales.

I: ¿Qué puede aumentar el interés y la motivación de los estudiantes en un curso introductorio de Cálculo?

P2: Para los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas me parece interesante desarrollar los contenidos de manera fundamentada y justificada, lo que no implica su formalización rigurosa. Considero que seguir trabajando el Cálculo como se viene trabajando las matemáticas en la secundaria: con muchas reglas sin conocer su origen y con las aplicaciones sin motivación. Con esto no estaríamos contribuyendo para la formación de los futuros profesores de matemática. Cuando se comenta que ellos no necesitan del Cálculo para actuar en la enseñanza secundaria de matemática, contesto que seguramente ellos no van a desarrollar los mismos problemas como se hace en la universidad; tampoco se trata de desarrollar las habilidades algebraicas y geométricas. No me parece que este sea el camino más adecuado, al contrario, nuestra contribución será efectiva si fuéramos capaces de desarrollar el Cálculo con argumentos matemáticos.

I: ¿También con las clases dialogadas y con una enseñanza activa?

P2: Esto hace falta. [...] La aceptación de los errores, de las dudas del otro, de sus propias dudas es importante de trabajar en los profesores de matemáticas. Estamos acostumbrados a movernos en un contexto donde las cosas están correctas o erradas, generalmente no admitimos estas cuestiones; uno de los caminos de cambio de la enseñanza consiste en que las personas puedan plantear sus propias cuestiones, discutirlas y relativizarlas.

Factores que intervienen en el cambio e innovación curricular en la enseñanza universitaria de matemáticas

I: ¿Usted considera que los profesores universitarios estarían dispuestos a implementar procesos de cambio e innovación curricular, qué factores podrían motivarlos para esto y cuál sería el papel de la universidad en este proceso?

P2: Considero que ni todos son igualmente conscientes de la importancia de los cambios. No hay un acuerdo relativo a cómo desarrollar la formación del profesor de matemática. Sin embargo, esta tensión es interesante siempre que no se pierda el espacio de discusión de dicha formación. Nuestro departamento de matemática ha producido cinco doctores en educación matemática y hemos buscado discutir y reflexionar, con otros colegas del departamento, sobre la formación de profesores de matemáticas. Otros profesores ven esta formación de manera distinta y expone su punto de vista basado en su formación profesional. En lo que se refiere a la universidad, su importancia como institución contempla, por una parte, la exigencia para que los departamentos respondan de manera eficiente la reforma del currículo cumpliendo los lineamientos del Ministerio de Educación y, por otra parte, el apoyo a nuestros proyectos que requieren la interacción con los colegios de secundaria, donde se realizan las prácticas de los futuros profesores de matemáticas. Además, debe criar mecanismos de control del proceso de evaluación docente e interna (de la carrera, por los alumnos), así como presentar las sugerencias y contribuciones necesarias.

I: Al abordar dichos cambios curriculares, ¿Qué factores condicionarían estos cambios en la universidad?

P2: Un factor que fue evidente se refiere a los cambios en la década 1980. El curso que articularía la Licenciatura en Matemáticas con la Facultad de Educación y con las escuelas de enseñanza secundaria no pudo desarrollarse según su concepción porque estaba previsto un contacto con el campo de la práctica que nuestro departamento no podría resolver, sería necesario el apoyo institucional.

I: Y en cuanto a los profesores universitarios, ¿Qué factores condicionarían la implementación de un proceso de cambio curricular?

P2: Pienso que hay una divergencia entre nosotros de qué es un buen profesor de matemáticas. Para algunos, más tradicionales, para ser un buen profesor de matemáticas hay que saber muchas matemáticas.

I: ¿Existe esta posición entre los profesores?

P2: En el departamento de matemática pienso que sí, pero lo que los colegas que están reflexionando sobre las cuestiones educativas consideran que hay muchas otras cuestiones además de esta y el saber muchas matemáticas nos lleva a cuestionar sobre qué significa saber muchas matemáticas.

I: ¡Muchas gracias por su colaboración!

P2: Espero que sea de gran valía.

I: Seguramente.

P2: Espero que te vaya bien en tu investigación.