UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

COMPRENSIÓN DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN ESTUDIANTES MEXICANOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

TESIS DOCTORAL

Silvia Azucena Mayén Galicia

Granada, 2009

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Silvia Azucena Mayén Galicia
D.L.: GR. 3146-2009
ISBN: 978-84-692-5185-0

COMPRENSIÓN DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN ESTUDIANTES MEXICANOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

TESIS DOCTORAL

MEMORIA realizada bajo la dirección de las
Dras. Carmen Batanero Bernabeu y Carmen Díaz Batanero,
que presenta Dña. Silvia Azucena Mayén Galicia
para optar al grado de Doctor

Fdo: Silvia Azucena Mayén Galicia

Vo. Bo. Vo. Bo.

Dra. Carmen Batanero Bernabeu Dra. Carmen Díaz Batanero

COMPRENSIÓN DE LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL EN ESTUDIANTES MEXICANOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO

TESIS DOCTORAL que presenta Dña. Silvia Azucena Mayén Galicia, dentro del *Programa de Doctorado Didáctica de la Matemática,* aspirante a la obtención del Título de “Doctorado Internacional”, de la Universidad de Granada, dirigida por las Doctoras Carmen Batanero Bernabeu y M. Carmen Díaz Batanero.

Fdo. Silvia Azucena Mayén Galicia

Granada, 2009

La investigación presentada en esta tesis doctoral ha sido apoyada por el Instituto Politécnico Nacional, la Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado y el Proyecto SEJ-2007-60110, MEC-Feder.

La simple formulación de un problema es a veces mucho más esencial que su solución. Encontrar nuevas preguntas, nuevas posibilidades, mirar los problema antiguos desde otro punto de vista requiere imaginación creativa y caracteriza los verdaderos avances de la ciencia.

Albert Einstein

No lea para contradecir o refutar, ni para creer y dar por sentado, ni para facilitar su discurso o su conversación, sino para ponderar y considerar.

Hay libros que deben ser simplemente probados, otros que es preciso tragar, y sólo algunos que han de ser masticados o digeridos. Esto es, hay libros que se leen sólo en partes, otros que se leen sin curiosidad, y sólo algunos que hay que leer por completo, con diligencia y atención.

Francis Bacon

Agradecimientos

Dra. Carmen Batanero, mi cariño muy especial. Tutora, mujer y guía, que con sus sabios consejos me ha instruido en cada etapa, y con su acostumbrada tenacidad y amor al arte ha enriquecido el trabajo presentado en esta memoria. Gracias por brindarme sus enseñanzas no sólo como profesional e investigadora, sino también por su apoyo y calidad humana que la distingue.

Dra. Ma. Carmen Díaz, mi aprecio por tu destacada colaboración en la tutoría de este trabajo y compartir conmigo talento, conocimientos y transmitirme tu ímpetu.

Dr. Mario Mayorga, mi singular gratitud por darme la mano y acompañarme en el tiempo y la distancia. Espero corresponder de la misma manera.

Gracias familia, por su comprensión y permanecer vigilantes de mi bienestar, en su particular forma.

Con los amigos en España, siempre divertidos y dispuestos a compartir tantos momentos de alegría, como esas reuniones que me hicieron sentir como en casa, que son esenciales para reanimarnos cuando estamos lejos de los nuestros. Y con mis amigos en México, por mantenerse en contacto y contagiarme de ánimo y confianza.

Profesores y compañeros del Departamento Didáctica de la Matemática, agradezco su ayuda para llevar con gusto día a día mi estancia intercambiando ideas, explorando y compartiendo conocimientos.

A la Universidad de Granada, institución que aprecio profundamente por darme las facilidades necesarias en el desarrollo de la investigación.

Mi reconocimiento a los estudiantes del Instituto Politécnico Nacional y de las Escuelas Secundarias 36 y 99, por ser parte esencial de la investigación, a los profesores y a la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas del Instituto Politécnico Nacional por colaborar en la recopilación de datos.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La investigación que presentamos en esta Memoria está orientada a evaluar *el significado personal que los estudiantes Mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato, al finalizar estas etapas educativas asignan a las medidas de tendencia central.* Continúa un trabajo previo realizado por Cobo (2003) con estudiantes españoles en el comienzo y final de la Educación Secundaria Obligatoria, en el que analiza los resultados obtenidos en un cuestionario construido por ella misma. Ambas investigaciones se apoyan en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) propuesto por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, 2003, Godino, Contreras y Font, 2006, Godino, Batanero y Font, 2007).

La elección del tema se basa, por un lado, en mi propio interés debido a mi experiencia previa como profesora de matemáticas en Bachillerato en México, experiencia que sirvió para constatar algunas de las dificultades que, en relación a las medidas de posición central, mostraban mis estudiantes. Por otro lado, los cambios recientes curriculares en México (así como en otros países) dan un mayor peso al estudio de la estadística en la Enseñanza Secundaria y Bachillerato y proponen un cambio de enfoque en esta enseñanza para dirigirla hacia una vertiente más práctica y crítica. Aunque la investigación didáctica centrada en el tema es ya importante, en especial, debido al trabajo previo de Cobo (2003), no hemos encontrado investigaciones sobre las medidas de tendencia central en el contexto mexicano, y muy pocas realizadas en otros contextos con estudiantes del nivel de Bachillerato.

La Memoria se organiza en siete capítulos iniciándose en el Capítulo 1 con el planteamiento del problema de investigación, resaltando su importancia y resumiendo el marco teórico sobre el que fundamentamos nuestro estudio. También describimos en este capítulo con detalle los objetivos y la metodología empleada en las diferentes fases que componen nuestro estudio.

En el Capítulo 2 recogemos el estudio curricular que comienza con un análisis del contenido estadístico, con especial énfasis en las medidas de posición central en los documentos oficiales que definen el currículo español y mexicano en los niveles educativos considerados. Este estudio lo complementamos con un análisis del contenido referido a las medidas de posición central en los libros de texto utilizados por los alumnos de nuestra muestra. Ello nos permite llevar a cabo una definición rigurosa del significado institucional de las medidas de tendencia central en nuestro contexto. También permite destacar los objetos matemáticos que componen la variable objeto de medición (significado institucional evaluado), que, comparada posteriormente con el contenido del instrumento nos permite asegurar su validez de contenido (Martínez Arias, 1995).

El Capítulo 3 presenta los antecedentes del trabajo, comenzando en primer lugar por las investigaciones sobre comprensión de cada uno de los tipos de objetos matemáticos considerados en el marco teórico. Seguidamente analizamos las investigaciones relacionadas con la enseñanza y el desarrollo evolutivo del concepto, así como las que han utilizado nuestro mismo marco teórico. Este estado de la cuestión servirá para posteriormente discutir nuestros hallazgos.

El Capítulo 4 presenta un estudio piloto de la primera parte del cuestionario con una muestra de 125 estudiantes de Bachillerato y orientado a comprobar la adecuación del instrumento en el contexto mexicano. Se recogen las características psicométricas de los ítems así como los primeros indicios de la fiabilidad y validez de nuestro instrumento de medición, comprobando su utilidad para los objetivos pretendidos.

En el Capítulo 5 se realiza la parte cuantitativa del estudio de evaluación con una muestra de 518 nuevos estudiantes (356 de Bachillerato y 162 de Secundaria). Primeramente se completa la validación del cuestionario de Cobo (2003), recogiendo tres tipos de evidencia de validez: validez de contenido (justificada mediante análisis teórico de los ítems); validez discriminante (mediante análisis de diferencia de ejecución en los ítems en los grupos); y validez de constructo (analizando la estructura de las respuestas mediante análisis cluster e implicativo). La aproximación a la fiabilidad se lleva a cabo mediante el coeficiente Alfa (Martínez Arias, 1995), coeficiente Theta (Barbero, 2003) y Teoría de la Generalizabilidad (Feldt y Brennan, 1991). Asimismo se realiza un estudio global de la dificultad de los ítems del cuestionario en nuestra muestra y una comparación ítem a ítem de los resultados en los dos grupos de estudiantes. Discutimos nuestras conclusiones en relación a las investigaciones previas y justificamos la necesidad de completar el estudio con un análisis cualitativo de algunos de los ítems que tienen un comportamiento singular en el estudio cuantitativo.

En el Capítulo 6 se realiza un estudio semiótico detallado de los ítems citados, todos ellos relacionados con la mediana. Los ítems son elegidos, bien por su excesiva dificultad, por no ser discriminantes entre los dos grupos de alumnos o por proporcionar resultados peores en los alumnos de secundaria. Un análisis semiótico detallado permite clasificar los tipos de respuestas y sirve, por un lado, la complejidad de las respuestas correctas y los distintos objetos matemáticos que el estudiante ha de asociar entre sí por medio de funciones semióticas. Adicionalmente permite identificar conflictos semióticos, algunos de ellos no descritos en las investigaciones previas.

El Capítulo 7 muestra las conclusiones obtenidas respecto a los objetivos e hipótesis planteadas, las limitaciones y aportaciones del estudio y sugerencias para futuras investigaciones.

En resumen, nuestro trabajo contribuye a validar el cuestionario de Cobo (2003) y proporciona información detallada en los dos grupos de estudiantes sobre la comprensión de las medidas de posición central, con especial énfasis en la mediana, cuya comprensión fue más difícil en nuestros alumnos. Aportamos sobre este objeto matemático una descripción precisa del significado personal que adquieren nuestos alumnos, comparándolo con el significado institucional de referencia y describiendo algunos nuevos conflictos semióticos. Toda esta información recogida puede ser de utilidad a otros investigadores que se interesen por el tema y permite definir futuras líneas de investigación para continuar el camino emprendido.

CAPÍTULO 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y FUNDAMENTOS

1.1. INTRODUCCIÓN

Dentro del Sistema Educativo Mexicano, estamos viviendo cambios curriculares (SEP, 2005; 2006) que conceden mayor peso a la estadística y que incorporan también nuevas estrategias de aprendizaje y el uso de las nuevas tecnologías. La estadística en México se enseña tradicionalmente como parte de la asignatura de matemáticas por el profesor de esta materia. Esta situación requiere un análisis cuidadoso tanto del currículo, como de las dificultades de los estudiantes a los que va dirigida esta enseñanza.

Batanero (2000) indica que nos encontramos con la paradoja de pedir a los profesores que impartan un nuevo contenido, para el que no todos han tenido una formación didáctica específica. Por otro lado, el número de investigaciones sobre la enseñanza de la estadística es aún escaso, y sólo estamos comenzando a conocer las principales dificultades de los alumnos en los conceptos más importantes.

Motivada por esta problemática, nos planteamos la presente investigación, que intenta realizar un estudio sobre la comprensión de las medidas de tendencia central por parte de estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato. El interés por este tema proviene de mi experiencia como profesora de Bachillerato en el Instituto Politécnico Nacional, a lo largo de la cual he percibido diversas dificultades en los estudiantes y carencias en su aprendizaje acerca de este tema. Así también, de que en mi propia experiencia y la de otros compañeros, la estadística recibe poca atención dentro de las clases de matemáticas, a pesar de la importancia que tiene para la formación de los estudiantes, desde la primaria hasta la universidad.

Con este trabajo también damos continuidad a otra investigación sobre el mismo tema (Cobo, 2003), que se llevó a cabo con estudiantes españoles, y con el que pretendemos comparar nuestros resultados, aportando información complementaria en los aspectos no estudiados. Nuestra investigación se realiza dentro del Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada, donde se han llevado a cabo otras tesis doctorales sobre la enseñanza de la estadística, aunque en el nivel universitario (Estepa, 1993; Vallecillos, 1994; Sánchez-Cobo, 1999; Tauber, 2001; Alvarado, 2007; y Olivo, 2008).

En este primer capítulo tratamos de describir el problema de investigación, su importancia y el marco teórico sobre el que fundamentamos nuestro estudio. También describimos con detalle los objetivos y la metodología empleada en los diferentes apartados que lo componen.

Antes de desarrollar los fundamentos de nuestra investigación, realizamos una síntesis de las principales recomendaciones internacionales sobre la enseñanza de la estadística.

1.2. RECOMENDACIONES INTERNACIONALES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA

El interés por mejorar la enseñanza de la estadística en la educación no universitaria no sólo existe en México, sino que es común a muchos otros países. Aunque la enseñanza de la estadística ha estado presente en los currículos escolares desde la década de los 70, encontramos recomendaciones frecuentes para renovar su enseñanza en los últimos años. Hay también un consenso en la necesidad de centrar la enseñanza de la estadística en los datos más que en los conceptos o algoritmos y de que los estudiantes realicen experimentos y simulaciones, de tal forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia con la estadística y probabilidad desde la infancia (Franklin y cols., 2007). Entre otras sugerencias metodológicas respecto a la enseñanza de la estadística, se recomienda el trabajo con proyectos, mediante los cuales los estudiantes puedan contextualizar los conceptos aprendidos y entender la utilidad de la estadística para la resolución de problemas (Batanero y Díaz, 2004). También se adelanta la enseñanza de la estadística en muchos casos, como ocurre en España (MEC, 2006a), a la Educación Primaria.

A pesar de ello, no se han resuelto completamente las dificultades intrínsecas de los conceptos estadísticos, ni se corrigen las intuiciones erróneas sobre la materia, que subyace en la toma de decisiones incorrectas en muchas situaciones aleatorias. Por ello, muchas investigaciones insisten sobre la necesidad que la cultura estadística tiene para todos los ciudadanos (Watson, 1997; Gal, 2002, Batanero, 2005). La educación estadística es una demanda cada vez más urgente de nuestras sociedades modernas (Gal, 2002), puesto que esta materia es necesaria tanto para los especialistas en el área que producen las estadísticas oficiales, como para profesionales y ciudadanos que han de interpretarlas y tomar decisiones basándose en ellas.

El interés actual de la enseñanza de la estadística se debe, en parte, a la influencia de las Conferencias Internacionales en Enseñanza de la Estadística (ICOTS). Estas conferencias fueron iniciadas en 1982 por el ISI (Instituto Internacional de Estadística), para reunir a profesores de estadística de todos los niveles, disciplinas y países, y compartir las experiencias educativas en este campo. La Asociación Internacional para la Educación Estadística (IASE) ha organizado también algunas conferencias temáticas denominadas Mesas Redondas que han tenido mucha influencia en la enseñanza. Entre ellas citamos las siguientes: "*Introducción del Análisis de Datos en las Escuelas*" (Pereira-Mendoza, 1993), "*El Papel de la Tecnología en Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística*" (Garfield y Burril, 1977), "*Formación de Profesores en el Uso de la Estadística*" (Batanero, 2001), y "*Desarrollo Curricular en Estadística*" (Burril y Camden, 2006).

Sin embargo, la realidad docente indica que estos contenidos no se enseñan con la profundidad que merecen. En el mejor de los casos, la enseñanza de la estadística es un pretexto para aplicar otros temas matemáticos y ejercitar la capacidad de cálculo o representación gráfica, olvidando el trabajo con datos reales y los aspectos de razonamiento estadístico. Esta situación ha dado lugar a que ICMI (International Comission for Mathematical Instruction) e IASE (International Association for Statistical Education) inicien un estudio conjunto sobre el tema (http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/): "*Enseñanza de la Estadística en la Matemática Escolar. Desafíos para la enseñanza y formación de profesores*". Esta conferencia contó con 109 participantes de 23 países distintos y fue celebrada en Monterrey, México en Julio de 2008, incidiendo también en el interés por la educación estadística en este país. Finalizada la conferencia del estudio y publicadas sus actas (Batanero, Burrill, Reading y Rossman, 2008) el trabajo del estudio continúa actualmente con la preparación de un libro sobre este tema.

En todas estas conferencias se ha insistido en la necesidad de desarrollar el razonamiento estadístico de los alumnos por su utilidad para la vida diaria. Se insiste en ayudar a los alumnos en la formulación de cuestiones, recogida de datos, interpretación y síntesis de los resultados, así como elaboración de informes para desarrollar su razonamiento estadístico (Scheaffer, 2006). En síntesis, las recomendaciones internacionales sobre la enseñanza de la estadística las resumen Batanero y Godino (2005) en los siguientes puntos:

- El aprendizaje de la estadística se logra mejor a partir del trabajo con proyectos o actividades de análisis exploratorio de datos que los alumnos recojan en la clase de estadística. Esto apoya las recientes teorías de aprendizaje que resaltan el valor de la interacción social y del discurso en la construcción del conocimiento.
- Se requiere la cooperación de los organismos oficiales o sociedades de estadística y educadores, para facilitar el uso de datos estadísticos como recurso didáctico, siguiendo el ejemplo de las sociedades de Australia, Canadá, Nueva Zelanda, Reino Unido y Sudáfrica, que han puesto en funcionamiento el *Censo de los Niños,* una base de datos preparada por los propios alumnos, junto con los correspondientes recursos didácticos para los profesores (http://www.censusatschool.ntu.ac.uk/).
- Es necesario tener en cuenta simultáneamente los puntos de vista global y local en la enseñanza de la estadística, puesto que, aunque conviene tener en cuenta las tendencias internacionales en la enseñanza, también hay que adaptarlas a cada país.

Todas estas consideraciones resaltan el interés de iniciar una investigación relacionada con la evaluación de la comprensión de conceptos estadísticos tan esenciales como la media, mediana y moda.

1.3. LAS MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y SU IMPORTANCIA EN LA FORMACIÓN DEL ESTUDIANTE

En el trabajo estadístico, que comienza a partir de la formulación de un problema de investigación, el primer paso consiste en la toma de los datos requeridos para responder la pregunta planteada, utilizando las técnicas necesarias y asegurando la representatividad de estos datos, así como su fiabilidad y validez. Seguidamente, será necesario el tratamiento informático de los datos para llegar a su tabulación y a producir las representaciones gráficas necesarias para mostrar las características relevantes de la distribución de las variables analizadas. El siguiente paso del análisis de datos es el cálculo de una serie de valores llamados estadísticos, que nos proporcionan un resumen acerca de cómo se distribuyen esos datos y en muchos casos, permite construir modelos teóricos de dichas distribuciones.

Entre ellos se encuentran los estadísticos de posición o tendencia central, que proporcionan una información esencial del conjunto de datos que estamos analizando. Al describir uno o varios conjuntos de datos, con frecuencia se desea representarlos mediante un solo número. Para tal fin, lo más adecuado es buscar un valor central. Las medidas que describen un valor típico en un grupo de observaciones suelen llamarse medidas de tendencia central. Es importante tener en cuenta que estas medidas se aplican a todo el conjunto de datos (distribución) más bien que a individuos. Entre ellas, los más importantes son la media, mediana y la moda, por los cuales nos interesamos en este estudio.

A continuación, justificamos el interés del mismo basándonos en cuatro argumentos: a) la complejidad de estos conceptos; b) el énfasis que se da a los mismos en los nuevos diseños curriculares; c) su importancia para la construcción posterior de otros conceptos estadísticos y d) su uso frecuente en la vida diaria.

Complejidad del significado de las medidas de tendencia central

La medida de tendencia central más intuitiva es el valor obtenido sumando las observaciones y dividiendo esta suma por el número de datos que hay en el grupo. La *media* resume en un valor las características de una variable teniendo en cuenta a todos los casos, pero solamente puede utilizarse con variables cuantitativas. La mediana y la moda son otras medidas de tendencia central aplicables también a otro tipo de variables, la primera a datos ordinales y la segunda a datos cualitativos. La *mediana* se define intuitivamente como el valor que ocupa el centro de la distribución cuando los datos se ordenan en forma creciente, y la *moda*, como el valor de mayor frecuencia.

Estas definiciones aparentemente intuitivas, enmascaran la complejidad de estos estadísticos, que es analizada con detalle en el estudio de Cobo (2003), basándose en algunas publicaciones previas (Batanero, 2000). A pesar de ser conceptos estadísticos básicos, las medidas de tendencia central no son siempre bien comprendidas por los estudiantes de educación secundaria o incluso los estudiantes universitarios, como veremos en la amplia literatura de investigación reseñada en el Capítulo 3.

La complejidad de estos conceptos hace necesario un periodo dilatado de enseñanza a lo largo de la educación primaria y secundaria para lograr el progresivo acoplamiento de los significados personales que construyen los alumnos a los significados institucionales que pretendemos que adquieran (Batanero, 2000). Ayudar a los estudiantes a comprender progresivamente estos estadísticos no es una tarea sencilla, puesto que es necesario adaptar estas ideas a sus capacidades cognitivas y diseñar situaciones didácticas que propicien el aprendizaje significativo.

Las siguientes razones avalan la complejidad de las medidas de tendencia central (Batanero, 2000):

- Los estudiantes asignan intuitivamente a la media, mediana y moda propiedades de las operaciones aritméticas elementales que no se conservan para las medidas de posición central.
- Las medidas de posición central se pueden referir a diferentes objetos matemáticos que los estudiantes confunden entre si: media de una variable estadística, media de una variable aleatoria, media de una distribución muestral.
- Las propiedades de la media, mediana y moda no son siempre comunes. Por ejemplo, mientras que en el cálculo de la media intervienen todos los datos, esto no ocurre con la mediana o moda.
- Los algoritmos de cálculo para cada una de las medidas de posición central son varios, dependiendo de la forma en que se den los datos (agrupados, sin agrupar, gráficamente). Esto causa problemas en los estudiantes, que están acostumbrados a un solo algoritmo para cada situación.

En este trabajo no entramos en detalle en el análisis matemático-didáctico de estos conceptos, aunque sí estudiaremos en profundidad el contenido de los libros de texto empleados por los estudiantes de la muestra (Capítulo 2), así como el contenido de los ítems del cuestionario y las respuestas de los estudiantes a los mismos (Capítulos 4 a 6).

Las medidas de tendencia central en la Educación Secundaria y Bachillerato

Los nuevos diseños curriculares recomiendan el análisis exploratorio de datos en la enseñanza secundaria. En este enfoque se da más peso a la utilización de la mediana y en países como Estados Unidos se introducen ideas nuevas como la de "valor atípico" y representaciones gráficas basadas en la mediana, como el gráfico de la caja y la identificación de la mitad de un conjunto de datos, o una determinada proporción de ellos: cuartiles, deciles, centiles (Batanero, Estepa y Godino, 1992; Franklin y cols., 2007). También se proponen plantear situaciones en que convenga utilizar alguno de los promedios (media, mediana o moda), donde la elección que se haga del valor representativo y de la variación respecto al mismo, será consecuencia de lo que se espera concluir o contradecir.

Hemos de considerar que algunos estudiantes tienen sus últimos cursos de estadística en el Bachillerato, y por tanto, se les debe proporcionar un panorama completo de las ideas fundamentales de la probabilidad y estadística durante este periodo, por lo que estos temas ya se abordan con un enfoque distinto. La estadística descriptiva se trata dentro de un contexto más amplio y rico de presentación y tratamiento de datos, planteando problemas de exploración y búsqueda de información. Esta metodología es necesaria para la formación de conceptos, el desarrollo de la capacidad de trabajo personal del alumno y de sus aptitudes para la investigación, la comunicación y la justificación de sus afirmaciones.

Persiste el interés de que sean los alumnos quienes planteen y resuelvan problemas utilizando información recogida de su entorno, y a construir problemas similares a uno dado previamente resuelto; a plantearse preguntas a partir de la observación de casos particulares y tratar de responderlas. En conclusión, pensamos que proporcionar las herramientas necesarias a los estudiantes les permitirá dejar de ser sólo lectores y pasar a ser críticos y reflexivos en la toma de decisiones (Gal, 2002; Batanero, 2005). Entre ellos las medidas de posición central son sin duda herramientas esenciales.

Interés de las medidas de tendencia central en estadística

Las medidas de tendencia central son la base para la comprensión de muchos otros conceptos estadísticos, comenzando por el de variable estadística (y variable aleatoria) y sus distribuciones, puesto que estas distribuciones se caracterizan por las medidas de posición central y dispersión (Batanero, 2000).

Al avanzar en el estudio de la probabilidad e introducirse en las familias de distribuciones de probabilidad, encontraremos que la media es con frecuencia uno de los parámetros de muchas distribuciones, como la Poisson, Exponencial, Normal, entre otras. Comprender la media y sus propiedades, es por tanto, un requisito para seleccionar la distribución específica a utilizar, dentro de una de estas familias de distribuciones.

Toda la teoría de muestreo usa extensamente la idea de media, por las propiedades de la media muestral, de ser un estimador insesgado, eficiente, consistente y suficiente de la media poblacional, además de tener mínima varianza. Los teoremas de límite indican, adicionalmente, que se puede considerar que la distribución muestral es aproximadamente normal para muchos estadísticos (media, proporción, mediana, correlación, etc.) con tal de que la muestra sea suficientemente grande (Alvarado, 2007). Ya que la distribución normal queda determinada por la media y desviación típica, estos teoremas darán un gran peso a la estimación de la media en muchas situaciones de inferencia. El análisis de la varianza y el diseño experimental (basado en él) se fundamentan en la comparación de la media global de una muestra con las medias parciales de grupos definidos en ellas por ciertas combinaciones de factores (Batanero y Díaz, 2007).

La teoría de regresión y correlación, y los múltiples métodos estadísticos basados en ella (correlación y regresión múltiple, modelos estadísticos de varios tipos), se basan en la definición de ecuaciones que estiman la media de una variable en función de los valores de otra variable o de una combinación de variables.

Gran parte de la estadística no paramétrica, por otro lado, se basa en el estudio de los estadísticos de orden y la comparación de la mediana en uno o varios grupos.

En resumen, una comprensión insuficiente de la media y mediana dificultará el estudio posterior de muchos temas estadísticos.

Aplicaciones en la vida diaria

Estos estadísticos tienen, así mismo, frecuentes aplicaciones en la vida diaria. La esperanza de vida, tasa de natalidad, los costos o el índice de precios, son ejemplos de aplicación de la media simple o ponderada que se utilizan con frecuencia en la prensa o incluso en el trabajo profesional.

Otros ejemplos, como las evaluaciones de los estudiantes se realizan en base a las notas medias que determinan la posibilidad de acceso a los estudios universitarios en algunas especialidades. La media también se emplea en el cálculo del centro de gravedad en geometría, el reparto equitativo en situaciones tales como definición de la renta per cápita, el valor más probable en inferencia o predicción, entre otras situaciones de uso frecuente.

Todas las anteriores consideraciones justifican el interés de nuestro trabajo, pues la evaluación de los conocimientos y dificultades de los estudiantes es el primer paso para diseñar acciones didácticas encaminadas a superarlos.

1.4. MARCO TEÓRICO

En lo que sigue presentamos el marco teórico en que basamos nuestro trabajo, conocido como “enfoque ontosemiótico” (EOS) de la cognición matemática, que ha sido desarrollado por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 1996, 1999, 2002, 2003; Godino, Batanero y Roa, 2005).

Comenzamos describiendo sus características generales y posteriormente los elementos que utilizaremos en nuestra investigación.

1.4.1. INTRODUCCIÓN

El EOS propone tres dimensiones en el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que son: la epistemológica, la cognitiva e instruccional. Cada una de ellas se aborda con herramientas teóricas agrupadas en tres modelos teóricos: teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998a y b); teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005) y teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006). En este estudio nos centramos solamente en las dimensiones epistemológica y cognitiva, la primera de ella para analizar las medidas de posición central en la enseñanza en México y en los ítems del cuestionario que proponemos a los estudiantes y la segunda para estudiar la comprensión y dificultades mostradas por dichos estudiantes en su respuestas.

El punto de partida del marco teórico EOS es una ontología de objetos matemáticos que considera la matemática desde un triple punto de vista: como actividad de resolución de problemas (que pueden ser propios de las matemáticas o surgir de otras materias) socialmente compartida; como un lenguaje simbólico propio en que se expresan las ideas matemáticas y las operaciones que realizamos con objetos matemáticos; y como un sistema conceptual lógicamente organizado. Para el caso de las medidas de tendencia central consideraremos los problemas de donde surgen estos objetos, el lenguaje específico en que se expresan y el sistema conceptual “medidas de posición central”.

Con el fin destacar y hacer operativo este triple carácter de la matemática a efectos de su uso en la investigación educativa y para el diseño de situaciones de enseñanza, así como mostrar el desarrollo personal e institucional del conocimiento matemático a lo largo del tiempo, toman como noción primitiva la de situación-problemática. Esta puede ser cualquier situación (problema, proyecto, ejercicio, tarea), cuya solución requiere una actividad de matematización. A partir de esta idea los autores definen los conceptos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, que describimos a continuación.

1.4.2. SISTEMAS DE PRÁCTICAS OPERATIVAS Y DISCURSIVAS LIGADAS A CAMPOS O TIPOS DE PROBLEMAS

Una *práctica matemática* es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida y validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Por ejemplo, para resolver el problema de estimar un valor desconocido a partir de varias medidas del mismo, una práctica matemática puede ser sumar todos los valores y dividir por el número de ellos.

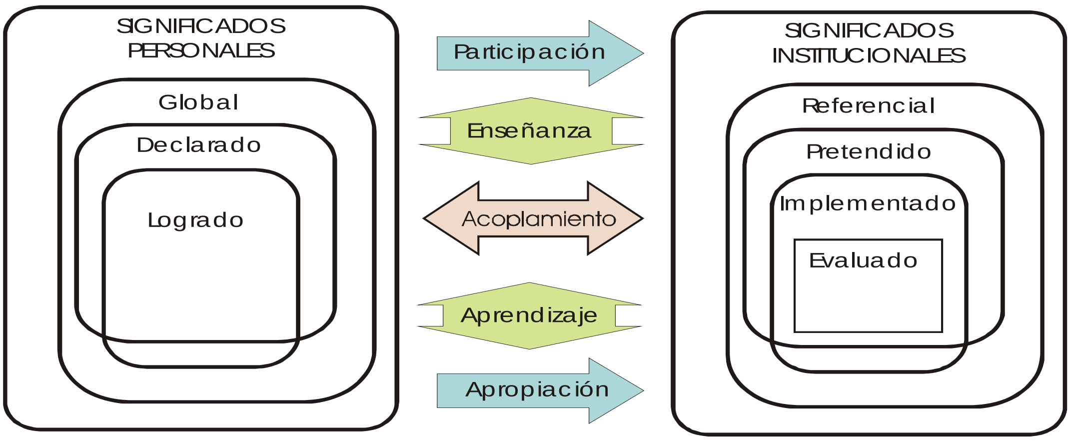
Las prácticas pueden ser específicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. En el ejemplo anterior, hemos descrito una práctica habitual en la institución matemática, que ha dado origen a la definición del objeto “media” (Batanero, 2000). Una institución está constituida por las personas interesadas en resolver una misma clase de situaciones problemáticas; en el ejemplo, además de la institución “matemática” podemos encontrar instituciones como “científicos”, “economistas” y otros que también usan la práctica descrita para estimar una cantidad desconocida.

La pertenencia a una institución conlleva a la realización de unas prácticas sociales que son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. Cada institución determina cuáles son las prácticas aceptadas en la misma; así, mientras que el cálculo de la media se haría con ordenadores en una institución científica, en la escuela (que es otra institución) forzamos a veces a los alumnos a calcular la media a mano para asegurarnos que han comprendido el algoritmo de cálculo.

En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas de las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. A la pregunta, sobre qué es el objeto matemático *media*, por ejemplo, y qué significa esta expresión, se propone como respuesta, "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales se requiere estimar una cantidad desconocida a partir de varias mediciones de la misma, o bien efectuar un reparto equitativo o hallar el centro de gravedad de una distribución".

Puesto que los significados dependen de los contextos sociales y de los sujetos, su carácter es relativo. Su uso en el análisis didáctico lleva, en consecuencia, a introducir la tipología básica de significados que se resume en la Figura 1.4.2.1 (Godino, 2003, p. 141). Respecto al significado institucional, se diferencia entre el global (qué significa la media, en su sentido más amplio en una institución), referencial (qué significado de la media se considera en una enseñanza o investigación), pretendido (qué se pretende enseñar de la media en una experiencia de enseñanza), implementado (qué se logra enseñar) y evaluado (qué parte se evalúa).

Figura 1.4.2.1. Tipos de significados institucionales y personales



Respecto al significado personal, se diferencia entre el global (todo lo que un sujeto conoce sobre la media), evaluado (lo que podemos evaluar a priori de su conocimiento), declarado (lo que, pasada la evaluación, hemos conseguido evaluar) y logrado (la parte del conocimiento que está de acuerdo con el significado institucional).

En la parte central de la Figura 1.4.2.1, se representan las relaciones entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. Así mismo, la enseñanza implica la participación progresiva del estudiante en la comunidad de prácticas que soporta los significados institucionales, y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados (Godino, 2003).

1.4.3. OBJETOS EMERGENTES E INTERVINIENTES EN LOS SISTEMAS DE PRÁCTICAS

En este modelo se asume que en las prácticas matemáticas intervienen objetos matemáticos que evocamos al hacer matemáticas y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. Por ejemplo, al resolver el problema de estimar una cierta cantidad a partir de varias mediciones de la misma, intervienen los objetos “suma” y “división”, así como “cantidad de magnitud”, “error de medida” y “variación”. También de los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que dan cuenta de su organización y estructura (en el ejemplo, la media, que sería la suma de todas las medidas, dividida por el número de sumandos). Los objetos emergentes son “objetos institucionales”, si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, y “personales” si corresponden a una persona.

Godino y Batanero (1998 a y b), proponen la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios, que denominan “elementos del significado” (entendiendo aquí el significado en el sentido sistémico-pragmático) y que a su vez se organizan en entidades más complejas como sistemas conceptuales y teorías:

- *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...). Para el caso de la media, se describen las siguientes (Batanero, 2000): estimar una cantidad desconocida en presencia de errores de medida; efectuar un reparto equitativo; hallar el centro de gravedad; hallar el valor esperado.
- *Lenguajes* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...); serían por ejemplo, las palabras: “media”, “mediana”, “moda”, así como los símbolos y gráficos asociados.
- *Conceptos-definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones); por ejemplo, la definición de mediana como valor central o como valor que divide una distribución ordenada de datos en dos partes iguales.
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, ...); por ejemplo, que la media no es

una operación interna, no tiene elemento neutro ni cumple la propiedad asociativa.

- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...); los diferentes algoritmos de cálculo de media, mediana y moda para datos aislados, agrupados en tablas o a partir de gráficos.
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...).

Estos seis tipos de elementos amplían, según Godino, Batanero y Font (2007), la distinción usual entre conceptos y procedimientos, pues se podría hablar de comprensión procedimental y conceptual, pero también argumentativa o lingüística, etc. Las situaciones-problemas son el origen de la actividad matemática; el lenguaje sirve para representar los problemas, procedimientos, conceptos y proposiciones; los argumentos justifican los procedimientos y las soluciones de los problemas, y las proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Figura 1.4.3.1. Tipos de objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas

Como vemos en la Figura 1.4.3.1, cada uno de estos objetos tiene asociado un proceso matemático: problematización, comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización (Godino, Batanero y Font, 2007). Además estos autores contemplan los objetos anteriores desde diferentes facetas duales:

- *Personal – institucional*. Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran “objetos institucionales”, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como “objetos personales” (Godino y Batanero, 1994, p. 338).
- *Ostensivo – no ostensivo.* Se entiende por ostensivo cualquier objeto que se puede mostrar a otro, es decir, materializado de alguna forma.
- *Expresión – contenido*: antecedente y consecuente de cualquier función semiótica (que definimos en la siguiente sección).
- *Extensivo – intensivo*. Un objeto que interviene como un caso particular (un ejemplo específico de la media) y una clase más general, como “las medias de todas las muestras de una población”.
- *Unitario – sistémico*. En algunas circunstancias los objetos matemáticos se consideran unitarios (un dato) y en otros como compuestos de varios objetos (la distribución de datos).

También en la Figura 1.4.3.1, vemos que se consideran una serie de procesos asociados a estas dualidades: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización/ concreción – idealización/abstracción; expresión/representación – significación.

De todos estos objetos y procesos, en nuestro estudio nos interesamos sobre todo por los objetos elementales: problemas, lenguaje, definiciones, proposiciones, argumentos y procedimientos, aunque eventualmente haremos referencia a las dualidades o a los procesos descritos en esta sección.

1.4.4. RELACIONES ENTRE OBJETOS: FUNCIÓN SEMIÓTICA

Godino y colaboradores toman de Hjelmslev (1943) la noción de función de signo, es decir, de dependencia entre un texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí, y de Eco (1979) la idea de función semiótica. Utilizan estas ideas para referirse a las correspondencias entre un antecedente (expresión, representante) y su consecuente (contenido, representado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Generalmente la regla se fija en la institución. Por ejemplo, usamos la expresión "media" para referirnos a la operación de sumar todos los datos y dividir entre el número de datos. Hay una correspondencia entre la palabra "media" y la operación junto a su resultado y la regla se ha fijado en la institución matemática.

Las relaciones de dependencia entre una expresión (media en el ejemplo) y un contenido (operación y su resultado), pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito); en el ejemplo, la palabra "media" representa toda la operación. También puede ser instrumental (un objeto usa a otro u otros como instrumento), como en el caso en que utilizamos los numerales para representar cantidades de una cierta magnitud y operamos con los numerales, en lugar de sumar físicamente las cantidades. Finalmente, la correspondencia puede ser estructural (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos); así, la expresión "medidas de tendencia central" tiene una relación estructural con el conjunto de palabras "media, mediana, moda".

Como vemos, en este marco teórico, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada generalizan la noción de representación, que no queda asumida en exclusividad por el lenguaje. Se asume que cualquier tipo de objeto (situaciones-problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), puede ser expresión o contenido de las funciones semióticas. Por ejemplo, el enunciado verbal de un problema representa una situación de la vida real; un gráfico, representa una distribución de datos, etc.

Configuraciones de objetos

Los seis tipos de elementos de significado descritos anteriormente están relacionados entre sí formando *configuraciones*, definidas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Por ejemplo, podemos considerar la configuración "mediana" que incluye todos los elementos de significado asociados a la misma; otra configuración diferente sería la "media" o "moda". Todas ellas forman parte de una configuración global: "medidas de tendencia central". Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales).

La formación de estos objetos y configuraciones, tanto en su faceta personal como institucional, se produce a lo largo del tiempo mediante procesos matemáticos, que contienen "secuencias de prácticas". La formación de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos, tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos primarios, de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación (Godino, 2003).

1.4.5. EVALUACIÓN DE LA COMPRENSIÓN

El objetivo principal de nuestro trabajo es evaluar el significado personal que los estudiantes de Secundaria y Bachillerato mexicanos asignan a las medidas de posición central. También queremos analizar qué parte de este significado está de acuerdo con el significado institucional (en la institución de enseñanza correspondiente) y cuál denota dificultades de aprendizaje.

Cuando queremos analizar la comprensión sobre un cierto objeto matemático por parte de un grupo de estudiantes, es preciso responder a dos preguntas: *qué* entendemos por comprender, y *cómo* hacemos para lograr la comprensión (Godino, 1996). En el modelo de comprensión de Godino (1996), se plantean dos ejes: uno *descriptivo*, que indica los aspectos o componentes de los objetos que queremos evaluar, y otro *procesual* que indica las fases o niveles necesarios en el logro de la "buena" comprensión. Este estudio se centrará principalmente en el eje descriptivo.

Godino (1996) recuerda que no podemos observar directamente la comprensión personal, mientras que sí podemos observar las prácticas personales (significado). Consecuentemente, en el EOS la evaluación de la comprensión sería el estudio de la correspondencia entre los significados personales e institucionales. Esta evaluación, por tanto, es dependiente de la institución desde donde se lleva a cabo, que es la que determina si un sujeto "comprende" el significado de un objeto. Cuando queremos evaluar la comprensión de un objeto por una persona, las prácticas observables son los indicadores empíricos que nos permiten realizar esta evaluación. En esta investigación se seguirá este sistema para realizar la evaluación.

Es necesario comprender la diferencia entre los significados que son objetos del estudio y lo que realmente es posible determinar en la investigación. Batanero y Díaz (2005) recuerdan los diferentes procesos de inferencia llevado a cabo en un proceso de evaluación y que condiciona la generalizabilidad de los resultados.

En este trabajo estamos interesados en determinar el significado personal de las medidas de tendencia central en los estudiantes mexicanos, pero no es posible acceder a todas las clases que se dan en esta institución (que además podrían potencialmente variar de un curso a otro, incluso para un mismo profesor).

Una forma de acercarse al significado de interés es mediante el análisis de libros de texto utilizados por los alumnos de la muestra (Capítulo 2), así como de las recomendaciones curriculares. Con ello construimos el significado de referencia, que se usará para comparar con los resultados del proceso de evaluación.

Una vez fijado el significado de referencia hay infinitos posibles instrumentos de evaluación. Nosotros estamos utilizando el cuestionario construido por Cobo (2003), que consta de diferentes ítems, tomados de investigaciones previas en las que han sido evaluados y han dado resultados probados. El cuestionario resultante define un significado nuevo, que sería el significado evaluado, diferente del anterior.

Finalmente el instrumento se prueba con una muestra de estudiantes. La respuesta que cada uno de ellos proporciona a cada ítem no es la única que puede dar. Dependiendo del interés, cansancio, concentración y otros factores, sus respuestas reflejan una parte de lo que el estudiante realmente conoce. Sería el *significado declarado* que es el finalmente accesible al investigador.

1.4.6. IDONEIDAD DE UN CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN

Además de estudiar con detalle la comprensión adquirida por los estudiantes sobre los diferentes elementos de significado incluidos en el cuestionario, este trabajo se interesa por analizar hasta qué punto el cuestionario ha sido eficaz. Para ello se analizarán los criterios de idoneidad de un cuestionario de evaluación indicados por Batanero y Díaz (2005), quienes adaptan al caso de un cuestionario, algunos de los criterios propuestos por Godino, Contreras y Font (2006) para los procesos de estudio.

El interés de nuestro estudio no se limita al significado declarado, también tenemos interés en el *significado personal global* de los alumnos respecto a las tareas propuestas (las respuestas dadas suponen una muestra representativa de las que darían los mismos estudiantes en la misma prueba en otras ocasiones). Si las tareas del cuestionario son suficientemente representativas (para evaluar las unidades de contenido definidas), podemos hacer una inferencia sobre lo que cada alumno de la muestra sería capaz de hacer y decir en otras tareas relacionadas con el objeto (Batanero y Díaz, 2005). Es decir, si los ítems del cuestionario representan el objeto *medidas de tendencia central*, podríamos acercarnos al significado personal de los alumnos de la muestra sobre dicho objeto. Así mismo, podemos obtener conocimiento generalizable sobre las dificultades y capacidades de otros estudiantes similares a los de la muestra. Las autoras indican que la posibilidad de generalizar en cada uno de los pasos descritos depende de la representatividad y la variabilidad de la muestra elegida en cada uno de los procesos de muestreo.

En este sentido, se aplica el concepto *idoneidad* y sus tipos (Godino, 2003; Godino, Contreras y Font, 2006) al caso de la evaluación (Batanero y Díaz, 2005):

- La *dificultad* de un ítem o tarea daría una medida de su *idoneidad cognitiva*; es decir del grado de representatividad de los significados evaluados respecto a los significados personales.
- La *discriminación* de un ítem valoraría su *idoneidad evaluadora,* un ítem puede ser adecuado cognitivamente, pero no diferenciar (por ser demasiado fácil) los alumnos que tienen un mayor o menor conocimiento del concepto. Esta idoneidad podría ser un componente de la idoneidad *instruccional*, en cuanto uno de los objetivos de la instrucción es la función evaluadora.
- La *validez de contenido* de un cuestionario indicaría una *idoneidad epistémica*, o grado de representatividad del instrumento en cuanto al significado, objeto de evaluación.
- La *fiabilidad* o *generalizabilidad a otros ítems* daría una medida de la estabilidad de la respuesta, es decir sería otro componente de la *idoneidad evaluadora.*
- La *validez externa* y *generalizabilidad a otros estudiantes,* sugeriría una *idoneidad generalizadora o externa* en cuanto a que los resultados se generalizarían a otros estudiantes.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Una vez presentado el marco teórico, estamos en condiciones de especificar los objetivos de nuestra investigación, la importancia de los mismos y la forma en que tratamos de abordarlos.

El objetivo fundamental de nuestra investigación está orientado *a analizar el significado personal que estudiantes mexicanos de Secundaria y Bachillerato asignan a las medidas de tendencia central: media, mediana y moda.* El término "*significado personal"* que aquí citamos se describe en el marco teórico que hemos presentado anteriormente y hace, por tanto, referencia al conocimiento de las definiciones de los conceptos, al reconocimiento de los problemas que se pueden resolver mediante los mismos; al conocimiento del lenguaje y algoritmos asociados, sus propiedades y la capacidad de argumentación. Todo ello relativo a la institución de enseñanza y edades de los alumnos considerados en este trabajo.

Con este objetivo tratamos de dar continuidad a la investigación realizada por Cobo (2003), *"Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria"*, y observar si sus resultados se mantienen en estudiantes de mayor edad y en un contexto educativo diferente. La importancia del mismo se debe, en primer lugar a la escasez de investigaciones relacionadas con la comprensión de las medidas de tendencia central en el contexto mexicano, y por otro, a la necesidad de evaluar las dificultades de estos estudiantes para tenerlas en cuenta en la puesta en marcha de las nuevas propuestas curriculares (SEP, 2006).

De este objetivo se derivan otros específicos, que describimos a continuación:

Objetivo específico 1: Analizar la enseñanza que sobre las medidas de tendencia central reciben los estudiantes mexicanos en el último curso de Secundaria y Bachillerato.

Considerando que la investigación se realiza con estudiantes mexicanos, nos hemos planteado llevar a cabo un estudio del tema en el currículo de matemáticas y los libros de texto que utilizan los estudiantes de la muestra. Para llevar a cabo este objetivo, presentamos en el Capítulo 2 un estudio de las directrices curriculares en estos niveles educativos en México. Así mismo, efectuamos un análisis de contenido de los libros de texto, siguiendo el mismo método empleado por Cobo (2003).

Como consecuencia de este estudio, fijamos un significado de referencia sobre las medidas de tendencia central en esta investigación. La importancia de este objetivo es que su consecución nos ayudará a contrastar las respuestas de los estudiantes y a deducir algunas razones que puedan explicar las dificultades que se originan en el aprendizaje de este tema.

Objetivo específico 2: Completar el estudio de validez y fiabilidad del cuestionario de medidas de tendencia central elaborado por Cobo (2003) en el contexto del estudio y añadiendo algunas pruebas de validación no realizadas por su autora.

Como instrumento de la investigación, hacemos uso del cuestionario construido por Cobo (2003) quien lo utilizó con sus estudiantes. Hemos realizado pequeñas adaptaciones, por lo que es necesario comprobar su utilidad para los fines de nuestra investigación. Ello requerirá comprobar la validez y fiabilidad del cuestionario en nuestro contexto. Por otro lado, dado el interés del cuestionario, hemos considerado conveniente completar la validación del mismo. Abordamos este objetivo en el Capítulo 5, donde además se completa el estudio de validación con algunos métodos estadísticos no empleados por la autora, como la validación de constructo y discriminante, así como la estimación bayesiana de algunos de sus parámetros.

Objetivo específico 3: Ampliar el rango de edad de los estudiantes al nivel de Bachillerato para comparar dificultades encontradas en el tema de medidas de tendencia central entre estudiantes de Secundaria y Bachillerato.

La importancia de este objetivo se deduce del hecho de no disponer de información sobre las respuestas específicas de alumnos de este nivel al cuestionario de Cobo (2003). Por tanto, no se conoce si las dificultades descritas por esta autora, de estudiantes de entre 12 y 16 años continuarán en los de 17 a 19 años. En el Capítulo 5 realizamos el análisis cuantitativo de las respuestas obtenidas. Se comparan los resultados ítem a ítem y la puntuación global. Así mismo, en el Capítulo 6 se lleva a cabo un análisis más cualitativo y detallado, comparando las respuestas de los estudiantes en un subconjunto de ítems relacionados con la mediana.

Objetivo específico 4: Profundizar sobre el significado personal que los estudiantes mexicanos de Secundaria y Bachillerato asignan específicamente a la mediana e identificar los conflictos semióticos que presentan al resolver problemas relacionados con este promedio.

En el Capítulo 6 se contempla este objetivo, donde llevamos a cabo un análisis semiótico de las respuestas que los estudiantes dan a los ítems del cuestionario relacionados con la mediana. El motivo de elegir este promedio para su estudio, es el peso que se da en el currículo mexicano al análisis exploratorio de datos, que incluye la mediana y otros estadísticos de orden, además de las pocas investigaciones que existen al respecto. Con ello completamos los resultados de Cobo (2003), quien no centró particularmente en la mediana su trabajo.

1.6. HIPÓTESIS INICIALES

Una vez planteados los objetivos de nuestra investigación, trataremos en ese apartado de formular nuestras hipótesis sobre los resultados que esperamos obtener en el mismo.

Dichas hipótesis surgieron primeramente en forma imprecisa y se fueron refinando a lo largo del trabajo; particularmente al finalizar nuestra Memoria de Tercer Ciclo (Mayén, 2006a), al completar el estudio piloto descrito en el Capítulo 4 y el estado de la cuestión (Capítulo 3), y deducidas especialmente del trabajo de Cobo (2003) que nos precede. A continuación describimos estas hipótesis, que deben entenderse en el sentido de expectativas iniciales sobre los resultados del trabajo.

H_1: El significado institucional de referencia en nuestro trabajo, definido por el contenido sobre las medidas de posición central, presentado en los libros de texto que utilizan los alumnos de la muestra es complejo. Además no es uniforme en los libros analizados, a pesar de estar dirigidos al mismo nivel educativo.

Estas hipótesis se justifican por los resultados obtenidos en la investigación de Cobo (2003) y los obtenidos por Alvarado (2007) y Olivo (2008) en sus estudios sobre los libros de texto. Para tratar de analizarlas se llevó a cabo el estudio curricular (Capítulo 2).

H_2. Encontraremos una amplia gama de dificultad en los ítems que configuran el cuestionario. Además, la dificultad relativa de los ítems se conserva en los dos grupos de estudiantes participantes y reproduce la dificultad relativa encontrada en la investigación de Cobo (2003).

H_3. Observaremos una mejora en los resultados en relación a los obtenidos por Cobo (2003) y asimismo, comparativamente los resultados serán mejores en los estudiantes de Bachillerato. Sin embargo la mejora no será homogénea en todos los ítems.

Estas dos hipótesis se justifican, por un lado, porque esperamos que la complejidad del significado institucional de las medidas de posición central se refleje en los significados personales de los estudiantes sobre el tema. Por otro lado, en la investigación de Cobo (2003) los resultados fueron mejores en los alumnos de mayor edad, aunque algunos ítems continuaron siendo difíciles para los mayores, y conservándose la dificultad relativa de los ítems en los dos grupos. Puesto que nuestros estudiantes son de mayor edad que los de la citada autora, esperamos se conserve la tendencia encontrada en dicha investigación.

H_4. Analizada la multidimensionalidad de las respuestas de los alumnos al cuestionario, observaremos la existencia de diferentes factores que sugieren capacidades diferenciadas o tipos diferenciados de conocimiento (en contraposición a una teoría unidimensional del desarrollo según estadíos).

Esta hipótesis también la plantea Cobo (2003) y la confirma mediante el análisis factorial de las respuestas. En nuestro caso, pensamos que se mantendrá esta multidimensionalidad, a pesar del diferente contexto, puesto que el significado institucional de referencia es muy similar en las dos investigaciones. Es presumible por ello que la enseñanza recibida no difiera mucho, salvo en el mayor tiempo de enseñanza recibido por los alumnos de Bachillerato. En nuestro caso, completaremos el estudio de la estructura de las respuestas mediante el análisis cluster e implicativo.

H_5. La dificultad de las tareas es más acusada en el caso de las relacionadas con la mediana. En estas tareas se producen una serie de conflictos semióticos en los estudiantes, que explican esta dificultad.

Esta hipótesis se apoya de nuevo en los resultados de Cobo (2003) quien encontró que los ítems relacionados con la mediana no discriminaban bien a los dos grupos de alumnos en su investigación. También resultaron especialmente difíciles, por lo que pensamos que estos resultados se repetirán en nuestro trabajo. Para tratar de analizar estas hipótesis, además de los estudios de dificultad y discriminación mostrados en el Capítulo 5, que se realizan sobre todos los ítems, hemos realizado un análisis semiótico de los ítems relacionados con la mediana que se describe en el Capítulo 6.

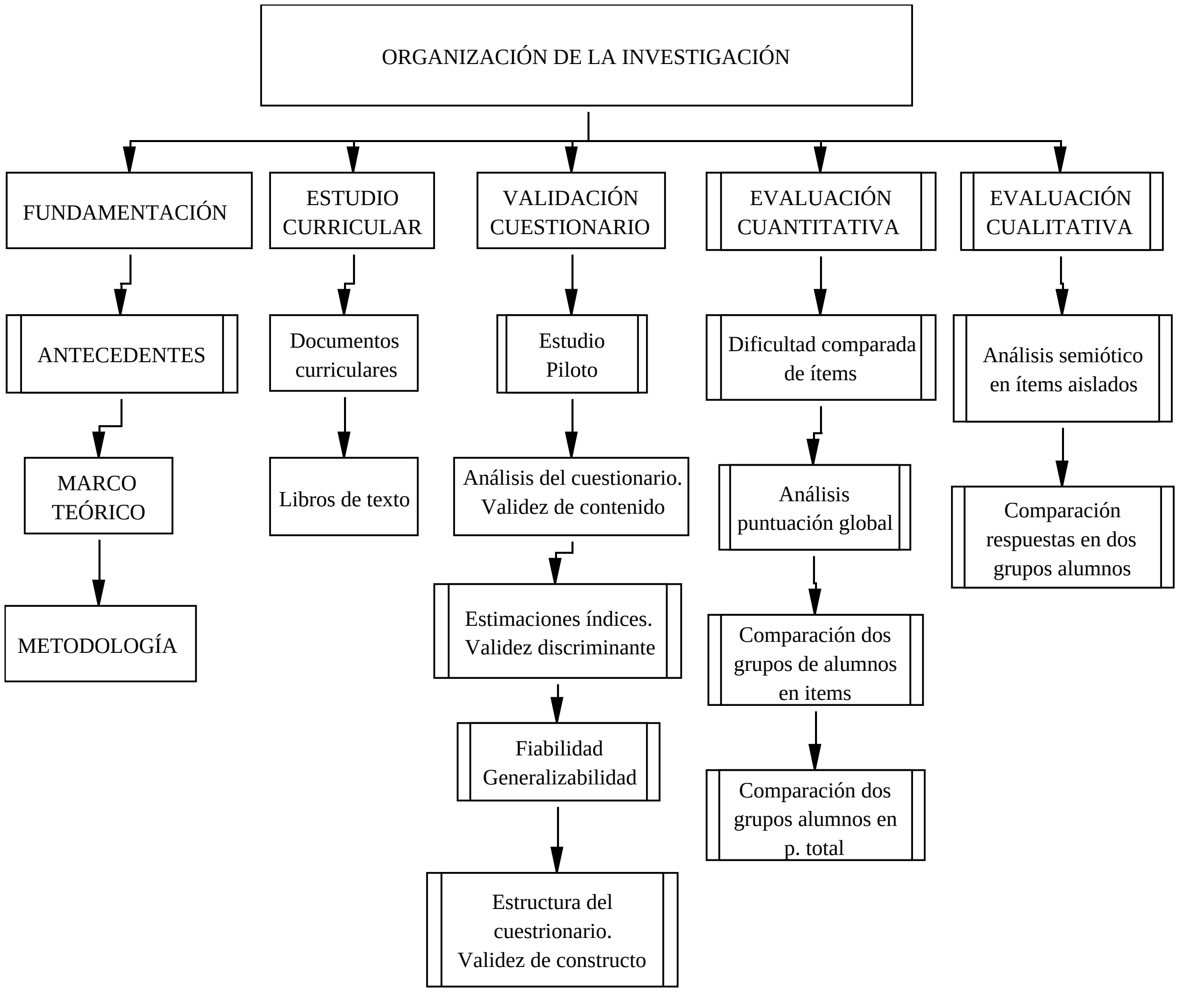
1.7. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA METODOLOGÍA

La investigación consta de varias fases (ver Figura 1.7.1), y cada una de ellas con su método propio.

En primer lugar la investigación se fundamenta mediante su marco teórico descrito en este capítulo y por el estudio detallado de los antecedentes que hacemos en el Capítulo 3. Seguidamente realizamos un estudio curricular, que se describe en el

Capítulo 2, con objeto de poder posteriormente, buscar posibles razones de algunas de las dificultades que se encuentren en el estudio de evaluación. Este estudio curricular consta del análisis de los documentos oficiales y de los libros de texto empleados por los alumnos de la muestra.

Figura 1.7.1. Organización de la investigación



Antes de llevar a cabo el estudio de evaluación se realiza una validación del cuestionario de Cobo (2003) para estudiar su adecuación en el contexto mexicano, para lo cual se realiza una prueba piloto del mismo con una muestra de 125 estudiantes de Educación Secundaria. La validación se completa (ahora con la muestra definitiva constituida por 518 estudiantes diferentes de los que tomaron parte en el estudio piloto) llevando a cabo, con el cuestionario definitivo el estudio de la validez de contenido, constructo y discriminante, así como la fiabilidad y generalizabilidad. También llevamos a cabo estimaciones bayesianas de los índices de dificultad y un análisis cluster e implicativo del conjunto de respuestas. Con todo ello complementamos el estudio de validación llevado a cabo por Cobo (2003) con su cuestionario.

El estudio de evaluación propiamente dicho consta de una parte cuantitativa y otra cualitativa. En la parte cuantitativa, primeramente se analiza la dificultad de los ítems en el global de la muestra y se compara la dificultad en los dos grupos de estudiantes, siempre contrastando con los resultados de los trabajos anteriores a los nuestros. Igualmente se analiza la puntuación global y en los dos grupos que participan en la investigación.

El estudio cualitativo se realiza tan sólo para algunos ítems relacionados con el concepto de mediana, puesto que sobre este concepto la investigación es menos amplia. El análisis cualitativo es de tipo semiótico y se basa en el marco teórico que hemos descrito. Se eligen los ítems de excesiva dificultad o que no discriminan a los dos grupos de estudiantes.

A continuación se describe brevemente cada una de las fases, así como su metodología, que será analizada con todo detalle en el cada capítulo.

1.7.1. ESTUDIO CURRICULAR

El trabajo comienza con el estudio del contenido curricular relacionado con las medidas de tendencia central para Educación Secundaria y Bachillerato. Este análisis se detalla en el Capitulo 2.

En primer lugar, revisamos el marco curricular español que se establece en el Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Secundaria Obligatoria (2006) y el Decreto de Enseñanzas Mínimas para el Bachillerato (2007), en particular, el Bloque 6 denominado "Estadística y probabilidad", que abarca desde el primer curso hasta el cuarto curso, opciones A y B. Incluyen entre otros elementos, un cambio en el enfoque de la enseñanza de la matemáticas y amplía su enseñanza.

También hacemos un breve análisis del modelo de Estados Unidos, el cual comprende el estudio de la estadística desde la Educación Primaria hasta el Bachillerato. Lo hemos considerado porque de alguna manera ha servido de modelo a los currículos español y mexicano.

Para finalizar la primera parte de este capítulo, hacemos una reseña del contenido curricular mexicano, en concreto en lo que corresponde al tema de "Presentación y tratamiento de la información" del Programa de Estudios de Matemáticas de Secundaria 1993, puesto que los estudiantes de nuestra muestra están inmersos en este programa de estudios. También incluimos una breve reseña del nuevo Programa de Estudios de Matemáticas (SEP, 2006), que es una reforma del citado anteriormente, en el cual el estudio de la estadística se aborda en el eje denominado “Manejo de la información”, y que ha entrado en vigor a partir del año 2007.

La segunda parte del capítulo se dedica al análisis de los libros de texto empleados por los estudiantes de la muestra, específicamente, los utilizados en los grupos de Secundaria, y que están incluidos en la lista de libros propuesta por la Secretaría de Educación Pública de México. No podemos hacer un análisis de textos de Bachillerato, ya que los estudiantes se apoyan en apuntes de clase y recurren a la bibliografía que se proporciona en los programas de estudios de la asignatura de Probabilidad y Estadística, pero en todo caso, estos alumnos usaron los mismos textos analizados en su nivel de Secundaria.

Este estudio se basa en el análisis de contenido, que es un tipo de análisis aplicado a un texto, fundamentado en la idea de que las unidades del texto pueden clasificarse en un número reducido de categorías (Weber, 1985). Sirve para efectuar inferencias mediante la identificación sistemática y objetiva de las características específicas de un texto (Ghiglione y Matalón, 1989). Su objetivo final es la búsqueda del significado implícito en el texto, a partir de un estudio sistemático del mismo.

Entre las posibles formas del análisis de contenido, en nuestro trabajo hemos considerado el *análisis de contenido temático*, donde se recurre al conocimiento previo sobre el tema adquirido por el investigador, para resumir el contenido del texto y definir las categorías de análisis (Ghiglione y Matalón, 1989). En nuestro caso, para realizar el análisis, hemos recurrido a nuestro conocimiento previo sobre el tema adquirido a través de la enseñanza y de la revisión bibliográfica que presentamos en el Capítulo 3, y especialmente del trabajo de Cobo (2003).

A partir de ello, hemos resumido el contenido del texto y definido categorías, estudiando su presencia o ausencia en los libros de texto sin llegar a cuantificar el número de apariciones. Es un análisis directo (en la terminología de Visauta, 1989), puesto que seguimos estrictamente el contenido de la unidad de análisis sin ir más allá de lo que ésta contiene.

La primera operación fue la separación de segmentos o unidades de análisis en varios niveles. Una primera lectura de los libros de texto permitió seleccionar los capítulos que contuviesen nociones de estadística, que han sido las *unidades primarias* de análisis. Para cada uno de los objetos matemáticos elementales definidos en la investigación de Cobo (2003) en relación a las medidas de tendencia central se identificaron en cada uno de los libros *unidades secundarias* de análisis que fueron los párrafos que cumplían algunos de los siguientes criterios: a) contienen las definiciones explícitas de algunos de los conceptos descritos; b) contienen la descripción de algunas de sus propiedades; c) unidades que proponen problemas o ejercicios que requieren el uso implícito o explícito de procedimientos d) contienen lenguaje o argumentos. En estas unidades secundarias se analizó el texto, mediante los siguientes pasos:

1. Lectura a fondo de los textos, recogiendo todos los párrafos relacionados con las medidas de tendencia central. Se examinaron para encontrar en ellos los objetos matemáticos que nos interesan. Se clasificaron dichos párrafos en función de los conceptos, procedimientos, problemas, lenguaje, propiedades y argumentos resaltados explícitamente o usados implícitamente.
2. Comparación de los diversos párrafos clasificados en un mismo apartado para cada categoría, depurándose la clasificación.
3. Elaboración de tablas que recogen los contenidos incluidos en los diferentes textos. Las tablas utilizadas, permiten comprobar si en cada uno de los textos se presenta o no una cierta categoría.
4. Elaboración del informe de análisis incluyendo ejemplos de las diferentes categorías elaboradas.

1.7.2. ESTUDIO DE FIABILIDAD Y VALIDACIÓN DEL CUESTIONARIO

El Capítulo 5 describe el proceso de validación y estudio de fiabilidad del cuestionario construido por Cobo (2003), para poder aplicarlo a estudiantes mexicanos. En primer lugar, una vez elegido el cuestionario que se usaría, se procedió a la realización de una prueba piloto con la primera parte de los ítems (Capítulo 4). La finalidad fue obtener información empírica sobre las características de este instrumento en el contexto mexicano y comprobar que era útil para los objetivos pretendidos.

Se interpreta la fiabilidad como tendencia a la consistencia o precisión del instrumento (Martínez Arias, 1995). Entre los diversos procedimientos para el cálculo del estimador del coeficiente de fiabilidad se tomó el coeficiente Alfa de Cronbach y el coeficiente Theta de Carmines, basado en el análisis factorial (Barbero, 2003). Se complementa con el cálculo de los coeficientes de generalizabilidad que parten de una extensión de la teoría clásica de la medición, y permite, por medio del análisis de varianza, analizar diferentes fuentes de error en un proceso de medida (Feldt y Brennan, 1991).

El estudio de validez consta de varios componentes: Para comprobar la validez factorial, se usó el análisis factorial exploratorio del conjunto de respuestas a los ítems del cuestionario en el total de la muestra para examinar la estructura factorial de las puntuaciones. Se trata de determinar las dimensiones del cuestionario y analizar la explicación teórica de estas dimensiones. En este estudio trabajamos también con análisis cluster y análisis implicativo (Capítulo 5).

El proceso de validación se complementa con la aplicación de métodos bayesianos en la estimación de diversas características psicométricas de dicho cuestionario. La finalidad es proporcionar información que pueda servir en el futuro, tanto para la evaluación en procesos de instrucción, como para usos en investigación didáctica. Los métodos usados para el estudio psicométrico del cuestionario se presentan en la Tabla 1.7.2.1.

Tabla 1.7.2.1. Métodos empleados en el estudio psicométrico del cuestionario

Descripción	Muestras	Material	Análisis	Resultados
Prueba piloto del cuestionario	125 estudiantes de Bachillerato	Primera parte del cuestionario	Estimación clásica y bayesiana de índices de dificultad ; Análisis, estadísticos y gráficos de la puntuación total; Contraste de efecto de sexo, edad y grupo sobre las puntuaciones; Validez contenido (análisis contenido) Estructura de las respuestas (análisis cluster)	Índices de dificultad Primera aproximación validez (contenido) Primera aproximación a la estructura de las respuestas Efecto de variables sobre puntuación total
Fiabilidad del cuestionario	643 alumnos	Cuestionario completo	Fiabilidad consistencia interna (Alfa), Theta de Carmines; Generalizabilidad	Evidencias de fiabilidad del cuestionario
Validación del cuestionario RPC	518 alumnos después de la enseñanza	Cuestionario	Comparación medias Análisis discriminante Análisis factorial, cluster e implicativo	Evidencias de validez del cuestionario RPC: Validez discriminante Validez de constructo

1.7.3. ESTUDIO CUANTITATIVO DE EVALUACIÓN

En el Capítulo 5, además de la validación del cuestionario, se incluye un amplio estudio cuantitativo de evaluación con una muestra de 518 estudiantes mexicanos de dos niveles educativos: Secundaria y Bachillerato (ver Tabla 1.7.3.1).

Los índices de dificultad, obtenidos anteriormente para el global de la muestra, se comparan ahora en los dos grupos de estudiantes, interpretando, tanto los resultados globales como los resultados por grupo desde varios puntos de vista: a) determinación de dificultad relativa de ítems; b) comparación con los resultados de Cobo (2003) en estudiantes españoles y con resultados de otras investigaciones previas; y c) comparación de los resultados en los dos grupos de alumnos mexicanos. Los métodos empleados son clásicos (intervalos de confianza) y bayesianos (intervalos de credibilidad), y en este caso utilizando información a priori no informativa e informativa.

Se estudia a continuación con algo más de detalle la dificultad comparada ítem a ítem (dificultad que fue contrastada estadísticamente anteriormente mediante pruebas F deducidas del análisis discriminante), presentando para cada ítem los ejemplos más típicos de respuestas correctas e incorrectas y comparando igualmente con los estudios previos.

Tabla 1.7.3.1. Métodos empleados en el estudio cuantitativo de evaluación

Descripción	Muestra	Material	Análisis	Resultados
Evaluación de la comprensión	518 alumnos	Cuestionario	Índices de dificultad en la muestra global; comparación con resultados de Cobo (2003); Dificultad comparada de ítems por grupo; Ejemplos de errores frecuentes por ítems	Determinación de similitud y diferencia con el estudio de Cobo (2003); Determinación de dificultad relativa de ítems en la muestra completa; Comparación de resultados en Secundaria y Bachillerato; Errores más frecuentes en cada ítem; Comparación con estudiantes españoles

1.7.4. ANÁLISIS CUALITATIVO DE CONFLICTOS SEMIÓTICOS

Finalmente, en el Capítulo 6 se lleva a cabo un análisis cualitativo de ítems del cuestionario relacionados con la mediana (ver Tabla 1.7.4.1). Nos basamos en los objetos matemáticos definidos en nuestro marco teórico. En primer lugar, se revisan repetidamente todas las respuestas de cada uno de los ítems objeto de análisis, hasta conseguir una categorización lo suficientemente amplia para detectar la variabilidad de los significados personales de los estudiantes respecto a la mediana.

Para cada una de las categorías obtenidas seleccionamos una respuesta representativa de la misma que muestre con claridad el argumento seguido por el estudiante y se realizó un análisis semiótico de la misma, siguiendo el modelo de otros trabajos previos en nuestro grupo de investigación (Alvarado, 2007, Olivo, 2008), y utilizando elementos de nuestro marco teórico.

Tabla 1.7.4.1. Métodos empleados en los diferentes estudios que componen la elaboración de la propuesta didáctica

Descripción	Muestras	Material	Análisis	Resultados
Estudio cualitativo	518 estudiantes	Ítems seleccionados	Análisis cualitativo de respuestas y determinación de categorías; Análisis semiótico de un ejemplo típico en cada categoría; Frecuencias de categorías en el total de la muestra; Frecuencia de uso de media mediana y moda por grupos; Test de Chi cuadrado	Categorías de respuestas correctas e incorrectas en cada ítem; Análisis de la actividad semiótica dependiendo del tipo de respuestas; Determinación de errores y conflictos semióticos; Comparación de resultados por grupo

Para finalizar el análisis de todas las categorías, presentamos y analizamos en tablas de frecuencias las respuestas del total de la muestra. Por medio de las tablas de contingencia y el estadístico Chi Cuadrado tratamos de estudiar si existen diferencias en las frecuencias de uso de los diferentes promedios en cada problema, dependiendo del tipo de estudiantes. Por último, se discuten los resultados, comparándolos con otras investigaciones.

CAPITULO 2

MARCO CURRICULAR

2.1. INTRODUCCIÓN

Para fundamentar nuestro trabajo dedicamos este capítulo al estudio curricular. En primer lugar, describimos las recomendaciones de los organismos internacionales sobre la enseñanza de la estadística y seguidamente analizamos los decretos curriculares en España y Estados Unidos referidos también a la enseñanza de la estadística en los niveles educativos considerados en nuestro trabajo. Este trabajo nos servirá para la comparación con la situación de la enseñanza en México.

Posteriormente describimos un panorama general del currículo mexicano de enseñanza básica (Secundaria) y media superior (Bachillerato), en este caso, del Instituto Politécnico Nacional, donde hemos tomado los datos para nuestra investigación. Para acercarnos mejor a la enseñanza recibida por los alumnos de la muestra, la última parte del capítulo se dedica al análisis de la presentación de las medidas de tendencia central en los libros de texto de secundaria utilizados por los estudiantes mexicanos.

2.2. LA ESTADÍSTICA EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL

Cobo (2003) y Estrada (2002) describen con detalle el currículo español vigente hasta el año 2003, donde en las últimas reformas realizadas hasta esa fecha, se destaca la importancia de la estadística, aunque existen variaciones en las diversas comunidades autónomas. Describen con profundidad los diferentes documentos oficiales desde 1991, por lo que remitimos a dichos trabajos para su consulta. Nosotros analizaremos las últimas directrices, publicadas con posterioridad al trabajo de estas autoras.

2.2.1. ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

Respecto a la Enseñanza Secundaria Obligatoria, el Decreto de Enseñanzas Mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 2006) incluye, entre otros, los siguientes contenidos de matemáticas dentro del Bloque 6, denominado *"Estadística y probabilidad":*

- *Primer Curso:*
  - Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación.
  - Diferentes formas de recogida de información. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Frecuencias absolutas y relativas. Diagramas de barras, de líneas y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.
- *Segundo curso:*
  - Frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumuladas. Diagramas estadísticos. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos.
  - Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo. Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas. Utilización de la media, mediana y moda para realizar comparaciones y valoraciones. Utilización de una hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.
- *Tercer Curso:*
  - Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales.
  - Atributos y variables discretas y continuas. Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias. Construcción de la gráfica adecuada a

la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.

- Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística.
- Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas. Experiencias aleatorias.
- Sucesos y espacio muestral. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos.

• *Cuarto curso. Opción A.*
  - Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumnado. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas. Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Uso de la hoja de cálculo. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.
  - Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades.

• *Cuarto curso Opción B.*
  - Identificación de las fases y tareas de un estudio estadístico. Análisis elemental de la representatividad de las muestras estadísticas. Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.
  - Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones.
  - Experiencias compuestas. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades. Probabilidad

condicionada.

Entre otros criterios de evaluación encontramos los siguientes:

- *Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población, así como recoger, organizar y presentar los datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas.* Se trata de verificar, en casos sencillos y relacionados con su entorno, la capacidad de desarrollar las distintas fases de un estudio estadístico: formular la pregunta o preguntas que darán lugar al estudio, recoger la información, organizarla en tablas y gráficas, hallar valores relevantes (media, moda, valores máximo y mínimo, rango) y obtener conclusiones razonables a partir de los datos obtenidos.
- *Valorar la capacidad para utilizar la hoja de cálculo, para organizar y generar las gráficas más adecuadas a la situación estudiada, teniendo en cuenta la adecuación de las tablas y gráficas empleadas, y analizar si los parámetros son más o menos significativos.* Se trata de valorar la capacidad de organizar, en tablas de frecuencias y gráficas, información de naturaleza estadística, atendiendo a sus aspectos técnicos, funcionales y estéticos (elección de la tabla o gráfica que mejor presenta la información), y calcular, utilizando si es necesario la calculadora o la hoja de cálculo, los parámetros centrales (media, mediana y moda) y de dispersión (recorrido y desviación típica) de una distribución.
- *Valorar la capacidad de interpretar información estadística dada en forma de tablas y gráficas y de obtener conclusiones pertinentes de una población a partir del conocimiento de sus parámetros más representativos.*

Observamos en las anteriores directrices sobre enseñanza de la estadística en la ESO, que además de ampliar la enseñanza de los temas estadísticos, hay también un cambio en el enfoque, recomendándose el desarrollo del razonamiento estadístico y la presentación de la estadística como un instrumento para resolver problemas, y no sólo como un conjunto de técnicas.

También observamos que las medidas de posición central se enseñan desde el segundo curso (chicos de entre 12 y 13 años), donde se estudia el significado, cálculo, aplicación e interpretación de la media, moda y mediana, continuando su estudio en tercer curso. Se requiere su uso en la resolución de problemas y una actitud crítica frente a la información estadística.

2.2.2. BACHILLERATO

En el Real Decreto de Enseñanzas Mínimas para Bachillerato (MEC, 2007), se indica que este nivel educativo forma parte de la educación secundaria postobligatoria y comprende dos cursos académicos. Se desarrolla en modalidades diferentes, se organiza de modo flexible y, en su caso, en distintas vías dentro de cada modalidad, a fin de que pueda ofrecer una preparación especializada al alumnado acorde con sus perspectivas e intereses de formación o permita la incorporación a la vida activa una vez finalizado el mismo (Art. 1). Durante el Bachillerato, los estudiantes podrán permanecer en régimen ordinario de educación durante cuatro años, consecutivos o no y se les capacitará para acceder a la educación superior.

En concreto, la enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato comprenden los cursos 1º y 2º, y entre sus objetivos destaca: *"Utilizar las estrategias características de la investigación científica y las destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación y ensayo, experimentación, aplicación de la inducción y deducción, formulación y aceptación o rechazo de las conjeturas, comprobación de los resultados obtenidos) para realizar investigaciones y en general explorar situaciones y fenómenos nuevos"*.

En el curso Matemáticas I, los temas que se estudian dentro de la Estadística y Probabilidad son:

- Distribuciones bidimensionales. Relaciones entre dos variables estadísticas. Regresión lineal.
- Estudio de la probabilidad compuesta, condicionada, total y a posteriori.
- Distribuciones binomial y normal como herramienta para asignar probabilidades a sucesos.

Los cursos de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II está dividida en dos cursos. Tiene entre sus objetivos, los siguientes: *"Elaborar juicios y formar criterios propios sobre fenómenos sociales y económicos, utilizando tratamientos matemáticos. Expresar e interpretar datos y mensajes, argumentando con precisión y rigor y aceptando discrepancias y puntos de vista diferentes"*.

El curso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I, en el apartado de *Probabilidad y estadística,* incluye los siguientes temas:

- Estadística descriptiva unidimensional. Tipos de variables. Métodos estadísticos. Tablas y gráficos. Parámetros estadísticos de localización, de dispersión y de posición.
- Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación gráfica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados. Asignación de probabilidades a sucesos.
- Distribuciones de probabilidad binomial y normal.

Otro aspecto a resaltar de los Decretos, son los criterios de evaluación que se contemplan, entre los que se pretende para este curso: *comprobar la capacidad de apreciar el grado y tipo de relación existente entre dos variables, a partir de la información gráfica aportada por una nube de puntos; así como la competencia para extraer conclusiones apropiadas, asociando los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden*. Finalmente se pretende evaluar si, *mediante el uso de las tablas de las distribuciones normal y binomial, los alumnos son capaces de determinar la probabilidad de un suceso, analizar una situación y decidir la opción más adecuada*.

El curso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, contiene los siguientes temas en el apartado de Probabilidad y Estadística:

- Profundización en los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total. Teorema de Bayes.
- Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números. Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad.
- Parámetros de una población. Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales.
- Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la

media de una distribución normal de desviación típica conocida.

- Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida.

Para este curso, entre otros criterios de evaluación se establece: *Valorar tanto la competencia para estimar y calcular probabilidades asociadas a diferentes tipos de sucesos como la riqueza de procedimientos a la hora de asignar probabilidades a priori y a posteriori, compuestas o condicionadas.* Con este criterio se evalúa también la capacidad, en el ámbito de las Ciencias Sociales, para tomar decisiones de tipo probabilístico que no requieran la utilización de cálculos complicados.

Se pretende también *comprobar la capacidad para identificar si la población de estudio es normal y medir la competencia para determinar el tipo y tamaño muestral, establecer un intervalo de confianza para μ y p, según que la población sea Normal o Binomial, y determinar si la diferencia de medias o proporciones entre dos poblaciones o respecto de un valor determinado, es significativa.* Este criterio lleva implícita la valoración de la destreza para utilizar distribuciones de probabilidad y la capacidad para inferir conclusiones a partir de los datos obtenidos.

Por otra parte, se valora el nivel de autonomía, rigor y sentido crítico alcanzado al analizar la fiabilidad del tratamiento de la información estadística que hacen los medios de comunicación y los mensajes publicitarios, especialmente a través de informes relacionados con fenómenos de especial relevancia social.

2.3. LA ESTADÍSTICA EN EL CURRÍCULO AMERICANO

Hay dos documentos que han sido decisivos para mejorar la educación estadística en los Estados Unidos: Los principios y estándares para la matemática escolar (NCTM 2000), y el proyecto GAISE (Franklin y cols., 2007). Pero estos documentos no sólo han tenido un impacto en ese país, sino que han influido en el cambio de otros currículos, que han seguido las directrices contenidas en ellos.

Estándares del NCTM

En los estándares curriculares (NCTM, 2000) la estadística se inicia desde el nivel K-2 (5 años) y continúa a lo largo de toda la escolaridad. En la educación secundaria, grados 9 a 12 (14-18 años), los alumnos deben ser capaces de:

- Respecto a la formulación de las preguntas que se pueden contestar con los datos, y respecto a la recogida, organización y presentación de los datos:

  - *Comprender las diferencias entre varios tipos de estudios y las inferencias que pueden legítimamente deducirse de ellos.*
  - *Conocer las características de los estudios bien diseñados, incluyendo el papel de la aleatorización en encuestas y experimentos.*
  - *Comprender el significado de los datos cuantitativos y categóricos, de los datos univariantes y bivariantes y del término variable.*
  - *Comprender los histogramas, gráficos de cajas paralelos y gráficos de dispersión y usarlos para representar datos.*
  - *Calcular estadísticos básicos y comprender la diferencia entre estadístico y parámetro.*

- Respecto a la selección y uso de un método estadístico apropiado:

  - *Ser capaz de representar la distribución de datos continuos univariantes, describir su forma, seleccionar y calcular los estadísticos resumen.*
  - *Ser capaz de representar datos continuos bivariantes, describir su forma y determinar los coeficientes de regresión, las ecuaciones de regresión y los coeficientes de correlación, con ayuda de la tecnología.*
  - *Representar y discutir datos bivariantes cuando uno al menos es categórico.*
  - *Reconocer cómo afectan las transformaciones lineales de los datos univariantes a su forma, posición central y dispersión.*
  - *Identificar la tendencia en los datos bivariantes y hallar la función que modeliza los datos y transformar los para que puedan ser modelizados.*

- Respecto al desarrollo de predicciones e inferencias a partir de los datos:

  - *Usar las simulaciones para explorar la variabilidad de los estadísticos muestrales de una población conocida y para construir las distribuciones en el muestreo.*
  - *Comprender cómo los estadísticos muestrales reflejan el valor de los*

parámetros poblacionales y usar las distribuciones en el muestreo como base para inferencias informales.

- *Evaluar informes publicados que se basan en datos para examinar el diseño del estudio, la adecuación del análisis de datos y la validez de las conclusiones.*
- *Comprender cómo las técnicas básicas de estadística se usan para monitorizar procesos característicos en lugares de trabajo.*

Se indica que los alumnos analizarán si sus datos proporcionan la información necesaria para responder sus preguntas. Podrían recoger sus datos o usar otros disponibles en la escuela o en la ciudad, por ejemplo, datos del censo o datos disponibles en Internet. La experiencia con una variedad de gráficos les permitirá comprender los valores en los ejes horizontal y vertical, la utilidad de las escalas y cómo representar el cero en una gráfica. Deberán también usar software y ordenadores que les ayuden a representar un gráfico, por ejemplo, la hoja electrónica.

Proyecto GAISE

Estas recomendaciones se recogen y amplían en el proyecto GAISE (Franklin y cols., 2007), (Proyecto de los Lineamientos para la Evaluación e Instrucción en Educación Estadística), que está dirigido a dos grupos de estudiantes: para la educación K-12 y para grupos de estudiantes en cursos preuniversitarios. La Asociación Americana de Matemáticas (MAA) publicó las siguientes recomendaciones dirigidas a profesores de estadística en los niveles previos a la universidad:

En relación a la educación K-12, se indica que cualquier curso de estadística debe tener como principal objetivo ayudar a los estudiantes a aprender los elementos básicos del pensamiento estadístico. Muchos cursos de estadística podrían ser mejorados poniendo más énfasis en esos elementos, es decir:

- *La necesidad de datos.* Reconocer la necesidad de basar las decisiones personales en la evidencia (datos) y los peligros inherentes del que actúa sobre supuestos que no están respaldados por datos.
- *La importancia de generar datos*. Reconocer que es difícil conseguir datos de buena calidad y que el tiempo ocupado para formular problemas y obtener datos de buena calidad no es tiempo perdido.

- *La omnipresencia de la variabilidad.* Reconocer que la variabilidad es ubicua en muchos fenómenos cotidianos. La variabilidad es la esencia de la estadística como disciplina y no puede ser entendida sólo mediante estudio y lectura, sino que debe ser experimentada.
- *La cuantificación y explicación de la variabilidad.* Reconocer que la variabilidad puede ser medida y explicada, tomando en consideración lo siguiente: a) aleatoriedad y distribuciones de las variables aleatorias; b) parámetros de tendencia central y de dispersión (tendencia y residuo); c) modelos matemáticos paramétricos; d) modelos de análisis exploratorio de datos.
- *Más datos y conceptos y menos recetas.* Cualquier curso en estadística puede ser mejorado poniendo más énfasis en los datos y conceptos, y menos en los algoritmos. En la mayor medida de lo posible, los cálculos y gráficos deben ser automatizados, dedicando el tiempo a actividades de interpretación.
- *Fomento del aprendizaje activo.* Como regla, los profesores de estadística deberían basarse mucho menos en las lecciones magistrales y mucho más en las alternativas tales como proyectos, ejercicios de laboratorio y resolución de problemas en equipo y discusión de actividades/resultados. Incluso dentro de una clase típica, es posible hacer que los estudiantes participen más activamente.

En cuanto al curso Preuniversitario, en Estados Unidos la estadística se imparte a través de diversas disciplinas (matemáticas, sociales, ciencias, etc). Los estudiantes que toman estos cursos provienen de diferentes especialidades de Bachillerato y tienen diferentes objetivos (por ejemplo, algunos esperan hacer sus propios análisis estadísticos en proyectos de investigación y otros sólo hacen el curso porque es obligatorio).

Algunos de esos cursos se imparten en clases extensas, cortas o seminarios; en laboratorios de computación y otros a distancia, sin tener contacto en persona con el profesor. La duración es variable y algunos profesores imparten cursos fuertemente enfocados a la enseñanza en la que los estudiantes deben tener una cultura estadística (saber interpretar, escribir y ser *consumidores* de datos). Otros cursos están sin embargo, mas encaminados a la enseñanza de los estudiantes para convertirse en *productores* de análisis estadísticos.

Actualmente los objetivos tienden a enfocarse más en la comprensión de conceptos y a lograr la cultura estadística y pensamiento estadístico de los estudiantes, y menos en el aprendizaje de una serie de herramientas y procedimientos. El proyecto GAISE propone reexaminar y revisar el curso de estadística con el fin de contribuir al logro de dichos objetivos en el aprendizaje para los estudiantes, haciendo las siguientes recomendaciones:

- Los estudiantes deben entender por qué:

  - Los datos son preferibles al conocimiento subjetivo.
  - La variabilidad es natural y también predictible y cuantificable.
  - La muestra aleatoria en encuestas y experimentos da resultados que pueden ser extendidos a la población de la cual fueron tomados.
  - La asignación aleatoria en experimentos comparativos permite extraer conclusiones de causa y efecto.
  - Asociación no es sinónimo de casualidad.
  - La significación estadística no necesariamente implica importancia práctica, especialmente para estudios con muestras grandes.
  - La búsqueda de diferencia no significativa estadísticamente o la relación, no necesariamente significa que haya diferencia o no en relación a la población, especialmente para estudios con muestras pequeñas.

- Los estudiantes deben reconocer:

  - Las fuentes usuales de sesgos en encuestas y experimentos.
  - Cómo determinar la población a la que los resultados de inferencia estadística pueden ser extendidos, dependiendo de cómo se recogieron los datos.
  - Cómo determinar cuando una inferencia de causa y efecto puede ser deducida de una asociación, dependiendo de cómo se recogieron los datos (por ejemplo, el diseño de un estudio).
  - Que palabras, tales como “normal”, “aleatorio” y “correlación” tienen significados específicos en estadística que pueden ser diferentes al uso común.

- Los estudiantes deben entender las partes del proceso a través del cual se trabaja en estadística para contestar preguntas como:

  - Cómo obtener o generar datos.

- Cómo representar gráficamente los datos como primer paso en el análisis de datos, y cómo saber cuándo es suficiente para contestar la pregunta de interés.
- Cómo hacer un uso adecuado de la inferencia estadística.
- Cómo comunicar los resultados del análisis de datos.

• Los estudiantes deben entender las ideas básicas de la inferencia estadística:

- El concepto de distribución muestral y cómo aplicarlo en la inferencia estadística basada en muestra de datos (incluyendo la idea de error típico).
- El concepto de significación estadística incluyendo nivel de significación y valor *p*.
- El concepto de intervalo de confianza, incluyendo la interpretación de nivel de confianza y margen de error.

• Finalmente, los estudiantes deben saber:

- Cómo interpretar resultados estadísticos en el contexto.
- Cómo criticar/interpretar noticias y artículos periodísticos que incluyan información estadística identificando los errores en la presentación y defectos en los estudios o en los métodos utilizados para generar la información.

Vemos, en consecuencia, que el currículo norteamericano es muy avanzado en lo que se refiere a estadística y se supone que al ingresar en la universidad los estudiantes comprenden los rudimentos de la estadística descriptiva y análisis de datos. Este currículo ha tenido mucha influencia tanto en España como en México, cuyos diseños curriculares se guían en parte por los norteamericanos, aunque con menor profundidad de contenidos.

2.4. LA ESTADÍSTICA EN EL CURRÍCULO MEXICANO

México es un país que se reconoce como multicultural y diverso (artículo 3º. de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos), por lo que asume la existencia de diferentes culturas, etnias y lenguas, y requiere, por tanto, impulsar una educación intercultural para todos, que identifique y valore esta diversidad y, al mismo tiempo, afirme su identidad nacional.

La Ley General de Educación (LGE), en el artículo 37 distingue que los tipos de educación son: el básico, el medio superior y el superior, los cuales se dividen a su vez en niveles: el básico, en preescolar, primaria y secundaria; el medio superior, comprende el bachillerato en sus diferentes modalidades; el superior, en licenciatura y especialidad; y el posgrado, en maestría y doctorado.

Como último tramo de la escolaridad básica obligatoria, la Educación Secundaria debe articularse con los niveles preescolar y primaria para configurar un solo ciclo formativo con propósitos comunes y prácticas pedagógicas congruentes. Aunque los jóvenes que asisten a la escuela secundaria comparten la pertenencia a un mismo grupo de edad –la mayoría de estudiantes matriculados se ubican entre los 12 y 15 años de edad–, constituyen un segmento poblacional profundamente heterogéneo en tanto enfrentan distintas condiciones y oportunidades de desarrollo personal y comunitario.

El carácter obligatorio de la Secundaria implica, que el Estado proporcione las condiciones para que todos los egresados de primaria accedan oportunamente a la escuela secundaria y permanezcan en ella hasta concluirla, antes de los 15 años.

2.4.1. PROGRAMA DE MATEMÁTICAS 1993 PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

En la Secretaría de Educación Pública se diseñan los programas de estudios de cada asignatura que se estudian en la Secundaria, que comprende tres cursos (1º, 2º y 3º).

En el Enfoque del Programa de Estudios de Matemáticas 1993, se señala que “las matemáticas en la actualidad tienen uso en todas las áreas del quehacer humano, desde las actividades cotidianas hasta la investigación científica, la producción y la presentación de servicios”. En consecuencia, en la escuela secundaria la enseñanza de las matemáticas tiene entre sus propósitos transmitir a los alumnos una parte importante del acervo cultural de la humanidad. Debe propiciar el desarrollo de nociones y conceptos que le sean útiles para comprender su entorno y resolver problemas de la vida real, al mismo tiempo que les proporciona los conocimientos y habilidades de pensamiento y razonamiento necesarios para avanzar en el estudio de las matemáticas, así como acceder al conocimiento de otras disciplinas (SEBN, 1994).

Para la enseñanza de las matemáticas, se considera el desarrollo de las habilidades operatorias, de comunicación y de descubrimiento en los alumnos, por lo que en clase se pretende: adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos básicos a través de la solución de problemas; reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema; elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas; reconocer situaciones análogas (que desde un punto de vista matemático, tienen una estructura equivalente); escoger o adaptar la estrategia que resulte adecuada para la resolución de un problema; comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa; predecir y generalizar resultados; y desarrollar gradualmente el razonamiento deductivo.

También en el enfoque de este programa de estudios ya se señala que “las matemáticas no pueden reducirse a la memorización de hechos, definiciones y teoremas, ni a la aplicación mecánica de técnicas y procedimientos, sino que es necesario que los alumnos aprendan a plantearse y resolver problemas en situaciones que tengan sentido para ellos y les permita generar y comunicar conjeturas”. En términos generales, que “los alumnos deberán involucrarse activamente en todas las fases por las que pasa la solución de un problema, desde el planteamiento mismo, la producción de las primeras conjeturas y su discusión, hasta la redacción de la solución”.

Otro aspecto que se resalta es que los alumnos no deberán ser sólo receptores pasivos de las explicaciones del profesor, o solamente ejercitarse en la aplicación de las técnicas y procedimientos vistos en el pizarrón, sino que también podrán realizar investigaciones y exponer los resultados en clase, así como organizarse para resolver problemas y discutir sus conjeturas y soluciones entre ellos y con su maestro. Lo anterior, les permitirá apropiarse gradualmente del vocabulario, así como el uso de símbolos, de representación gráfica o en tablas.

En general, se pretende el uso de situaciones y problemas que puedan dar lugar a actividades interesantes para los alumnos, al mismo tiempo que favorecen la comprensión de las nociones básicas y la práctica de los procedimientos.

A partir de este programa, se consideró estudiar a lo largo del cada curso, aritmética, álgebra y geometría, y en cuanto a los temas de “Tratamiento de la información y probabilidad”, se recomienda que no se dejen para el final del curso y sobretodo que los temas tradicionales de estadística descriptiva se traten dentro del contexto más amplio y rico de la presentación y el tratamiento de la información. También se hace énfasis en el uso de la calculadora en la solución de problemas. Para el estudio de la estadística se establecen los siguientes objetivos:

- Primer Grado. “Que los alumnos conozcan y se acostumbren a la utilización de porcentajes, tablas, gráficas y otras formas usuales de presentar y tratar la información”. Con este objetivo se pretende que el estudiante aprenda a leer y elaborar tablas y gráficos construidos a partir de enunciados, de ejemplos de geometría, de física, biología, y datos recolectados por los alumnos. Así también de uso común en la estadística o la economía.

- Segundo Grado. "Que los alumnos conozcan y se acostumbren al uso de cantidades absolutas y relativas, tablas, gráficas y otras formas comunes de presentar y tratar la información". Este objetivo se centra en la organización y presentación de los datos, en tablas y gráficas de frecuencias absolutas y relativas en datos agrupados; de datos que varían con el tiempo con ejemplos de interpolación gráfica; pictogramas, diagramas de barras y bastones, diagramas de sectores. Así también el cálculo y determinación de tantos por ciento, por mil y partes en millón. Su utilización en la construcción de tablas y gráficas comparativas; en la elaboración de ciertos índices o indicadores. Cálculo de promedios y densidades, sus usos y limitaciones.
- Tercer Grado. "Que los alumnos conozcan y se acostumbren a las diversas formas de recopilar, presentar y tratar la información". A través del estudio de fenómenos que varían a tasa constante; crecimiento lineal o aritmético contra crecimiento exponencial o geométrico. Descripción de una lista de datos: moda, media y mediana, sus usos y limitaciones y formas de indicar la dispersión de los datos de una lista. Nociones de población y muestra; de censo y encuesta.

2.4.2. REFORMAS AL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA (2006)

En el Programa Nacional de Educación 2001-2006, el Gobierno Federal planteó la necesidad de realizar una Reforma Integral de la Educación Secundaria, a fin de contribuir a la articulación pedagógica y organizativa de la educación secundaria con los niveles de preescolar y de primaria. Durante el ciclo escolar 2005-2006, se desarrolló en escuelas secundarias de 30 entidades federativas la Primera Etapa de Implementación (pei) del nuevo currículo con el propósito de contar con evidencias sobre la pertinencia de los contenidos y de los enfoques para su enseñanza, así como de las implicaciones que tiene aplicar una nueva propuesta curricular en la organización de las escuelas y en la práctica de los profesores.

Cabe destacar que atendiendo a la interculturalidad, cada asignatura de la nueva propuesta curricular para secundaria incorpora temas, contenidos o aspectos particulares relativos a la diversidad cultural y lingüística mexicanos. En este sentido, se pretende que los alumnos reconozcan la pluralidad como una característica del país y del mundo, y que la escuela se convierta en un espacio donde la diversidad pueda apreciarse y valorarse como un aspecto cotidiano de la vida. La interculturalidad es una propuesta para mejorar la comunicación y la convivencia entre comunidades con distintas culturas, siempre partiendo del respeto mutuo. Esta concepción, desde las asignaturas, se traduce en propuestas prácticas de trabajo en el aula, sugerencias de temas y enfoques metodológicos. Con ello se busca reforzar el sentido de pertenencia e identidad social y cultural de los alumnos, así como tomar en cuenta la gran diversidad social y cultural que caracteriza a México y a otras regiones del mundo.

Como hemos visto, en la anterior propuesta curricular, se señalaba la importancia del manejo de la información y se incluían contenidos específicos para los temas de *Presentación y tratamiento de la información* y *Probabilidad.* Sin embargo, se han encontrado algunos factores por los que a estos temas no se les ha puesto la atención debida dentro del currículo; tal vez el más importante sea la tentación de identificar el tratamiento de la información con la obtención de datos estadísticos. Si bien el eje *Manejo de la información* incorpora la estadística como un aspecto relevante, se pretende ahora ampliar su espectro a otras cuestiones matemáticas, como las relaciones funcionales, entre las cuales destacan las de proporcionalidad, que requieren de representaciones para analizar, interpretar y comunicar distintos tipos de situaciones cotidianas.

Se incluye también la probabilidad y consecuentemente, la posibilidad de estimar, calcular e interpretar la probabilidad de diversos fenómenos aleatorios, con base en las leyes básicas de esta teoría. Un tema más de este eje es la representación, a través de la cual se busca que los alumnos comuniquen distintos tipos de información, con eficacia y claridad, mediante tablas, diagramas y gráficas. Se pretende que paulatinamente éstas lleguen a formar parte de su lenguaje natural para comunicar información, ya sea sobre una relación funcional, o sobre una relación estadística o probabilística relativa a fenómenos específicos. En este mismo sentido, los alumnos desarrollan conocimientos y habilidades para deducir información a partir de la que muestran explícitamente las representaciones. Reproducimos en la Tabla 2.4.2.1 la distribución de contenidos del tema en los tres cursos de secundaria. Observamos que el tema de medidas de tendencia central se incluye en los tres cursos.

Tabla 2.4.2.1. Distribución de contenidos sobre manejo de la información en el nuevo plan de estudios (SEP, 2006) de secundaria mexicano.

	Contenidos	1º	2º	3º
Análisis de la información	Relación de proporcionalidad	x	x	
	Porcentajes	x		x
	Noción de probabilidad	x	x	x
Representación de la información	Diagramas-Tablas	x	x	
	Gráficas	x	x	x
	Medidas de tendencia central y dispersión	x	x	x

Más específicamente sobre la Media, Mediana y Moda, se introducen los siguientes contenidos:

- Primer curso: Interpretación y análisis a partir de gráficas.
- Segundo curso: Propiedades de la media, Media ponderada. Comparación de dos distribuciones usando el rango y las medidas de tendencia central.
- Tercer Curso. Comparación de dos distribuciones y formulación de inferencias utilizando la forma de las distribuciones, el rango y las medidas de tendencia central de los conjuntos de datos. Medidas de tendencia central y dispersión Representación de la información.

2.4.3. PROGRAMA DE ESTUDIOS DE MATEMÁTICAS 2006 PARA LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Como ya hemos mencionado, recientemente en México se ha puesto en marcha el nuevo Plan de Estudios para la Educación Secundaria 2006 y los programas correspondientes a las asignaturas que lo conforman, que edita la Secretaría de Educación Pública.

El nuevo currículo considera una educación básica que contribuya al desarrollo de competencias amplias para mejorar la manera de vivir y convivir en una sociedad cada vez más compleja.

Para el estudio de las matemáticas, se busca que los niños y jóvenes desarrollen una forma de pensamiento que les permita expresar matemáticamente situaciones que se presentan en diversos entornos socioculturales, así como utilizar técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas; al mismo tiempo, se busca que asuman una actitud positiva hacia el estudio de esta disciplina y de colaboración y crítica, tanto en el ámbito social y cultural en que se desempeñen como en otros diferentes (SEP, 2006).

Los contenidos que se estudian en la educación secundaria se han organizado en tres ejes: "Sentido numérico y pensamiento algebraico", "Forma, espacio y medida", y "Manejo de la información" y están organizados en cinco bloques, en cada uno hay temas y subtemas de los tres ejes descritos.

El tema de "*Manejo de la información*" tiene un significado muy amplio. En estos programas se ha considerado que la información puede provenir de situaciones deterministas, definidas —por ejemplo, por una función lineal—, o aleatorias, en las que se puede identificar una tendencia a partir de su representación gráfica o tabular. Se resuelven problemas que requieren el análisis, la organización, la representación y la interpretación de datos provenientes de diversas fuentes. Este trabajo se apoya fuertemente en nociones matemáticas, tales como porcentaje, probabilidad, función y en general en el significado de los números enteros, fraccionarios y decimales.

La comprensión de los diversos conceptos matemáticos deberá sustentarse en actividades que pongan en juego la intuición, pero a la vez favorezcan el uso de herramientas matemáticas para ampliar, reformular o rechazar las ideas previas. Así, por ejemplo, en el caso de la probabilidad los alumnos anticipan resultados, realizan actividades de simulación y exploración de fenómenos aleatorios y expresan propiedades, como la independencia, la equiprobabilidad, la complementariedad, etc., de este modo se intenta propiciar el desarrollo del pensamiento probabilístico.

El estudio de la estadística en la Secundaria, en el Eje del "*Manejo de la información*", incluye el tema de Medidas de Tendencia Central (Media, Mediana y Moda), donde para cada curso establece los siguientes objetivos:

- Primer grado: "comparar el comportamiento de dos o más conjuntos de datos referidos a una misma situación o fenómeno a partir de sus medidas de tendencia central".
- Segundo grado: "interpretar y calcular las medidas de tendencia central de un conjunto de datos agrupados, considerando de manera especial las propiedades de la media aritmética".
- Tercer grado: "interpretar, elaborar y utilizar gráficas de caja brazos de un conjunto de datos para analizar su distribución a partir de la mediana o de la media de dos o más poblaciones".

Las competencias que se establecen en cuanto al *“Manejo de la información”,* se relacionan con: la búsqueda, evaluación y sistematización de información; el pensar, reflexionar, argumentar y expresar juicios críticos; analizar, sintetizar y utilizar información; el conocimiento y manejo de distintas lógicas de construcción del conocimiento en diversas disciplinas y en los distintos ámbitos culturales.

2.4.4. PROGRAMA DE ESTUDIOS VIGENTE DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA PARA BACHILLERATO, DEL INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

El Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional (IPN) es un servicio educativo posterior a los estudios de Secundaria. La duración de estos estudios es de seis semestres. Al concluirlos y cubrir los requisitos de servicio social y titulación se obtiene "Título de Técnico" en una carrera específica y "Cédula Profesional" con reconocimiento por la Dirección General de Profesiones de la Secretaría de Educación Pública, que posibilita la incorporación al mercado laboral. El Bachillerato Tecnológico Bivalente permite continuar los estudios en el nivel superior además de la formación técnica. En el IPN, se estudia en los Cecyts, Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos (http//:www.ipn.mx).

El currículo de Bachillerato del IPN está diseñado por la Academia Institucional de Matemáticas, que certifica la Dirección de Educación Media Superior. La asignatura de Probabilidad y Estadística se imparte en el sexto semestre del mapa curricular del Nivel Medio Superior y corresponde al área de formación matemática incluida en el grupo de asignaturas de formación general (álgebra, geometría, trigonometría, cálculo).

El desarrollo del programa de Probabilidad y Estadística se centra fundamentalmente en el planteamiento y solución de problemas, para promover las habilidades del pensamiento, tales como: análisis, interpretación y síntesis, las perceptuales (observación y relaciones espaciales), las de comunicación (oral, escrita y gráfica) y las de la elaboración de conjeturas, argumentación, abstracción y generalización.

El enfoque epistemológico del curso, permite asociar aprendizajes de aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, geometría analítica y cálculo estudiados en cursos anteriores, para ligar las ideas fundamentales de muestreo, medidas de centralización y dispersión, interpretación y análisis de presentación gráfica de datos, simulación, probabilidad, distribución de probabilidad e inferencia, que permitan el planteamiento y resolución de problemas a situaciones concretas y reales del ámbito cotidiano, laboral y académico.

El objetivo general del curso establece: *"introducirse al estudio de fenómenos aleatorios, su interpretación, importancia, tratamiento y aplicación; en el uso de técnicas de muestreo; al conocimiento y aplicación en diversos problemas de diferentes técnicas de recopilación y presentación, análisis e interpretación de datos numéricos; en el uso y apropiación de las reglas para el cálculo de probabilidades y de distribuciones de probabilidad; en la importancia y uso del método estadístico en la toma de decisiones; en el desarrollo de habilidades para el análisis, razonamiento y comunicación de su pensamiento en la resolución de problemas a partir del uso de la simulación y modelo de urnas, propiciando la asimilación de aprendizajes más complejos, la resolución de problemas en su cotidianidad, área tecnológica y vida profesional"* (DEMS, 1997).

Para el tema de *Estadística Descriptiva*, se pretende que el estudiante amplíe y enriquezca sus conocimientos sobre la noción de muestra y la distinga de una población, así como de la importancia de la forma en que se realiza una recolección de datos, la presentación de éstos y su interpretación. Por otra parte, que sea capaz de hacer afirmaciones y conclusiones sustentadas en los datos de que se disponen, a partir de una muestra representativa y que aprecie la diferencia entre ésta y una muestra aleatoria". Los temas que se incluyen son:

1. Revisión de las nociones de muestreo y recolección de datos.
2. Reflexión de la importancia de la presentación e interpretación de datos.
3. Reconocimiento de la necesidad y pertinencia de hacer un análisis de los datos.

Es oportuno señalar que llevar a la práctica los temas anteriores es un proceso cuando investigamos algo, ya que se requiere de datos, por ejemplo, el número de personas que constituyen las familias, el gasto en el consumo de electricidad, de teléfono, transporte, estatura, peso, calificaciones, etcétera. Y de acuerdo al tipo de investigación, se puede obtener todos los datos posibles o sólo algunos de ellos, por lo que es necesario hablar de población y muestra, por lo que dentro de la enseñanza, hay que plantear situaciones donde la muestra es representativa y donde no lo es, así como las dificultades para saberlo; si la información de que disponemos es de muestras o no de la población. Se tiene que destacar también, la importancia de la forma en que se recaban o recolectan esos datos, ya que, por ejemplo, en una encuesta la pregunta formulada puede conducir a cierta forma de repuesta o las repuestas de las personas pueden ser deliberadamente falsas.

Una vez reunidos lo datos, se tienen que organizar para presentarlos y posteriormente dar una interpretación. Por ello se necesita un valor que los represente a todos, es decir, un promedio, y otro que nos indique la variación respecto a dicho promedio. Para lo cual existen varios "valores promedio": media, mediana, moda, media armónica, media geométrica, etc. Tampoco existe una única manera de señalar la variación, rango, varianza, desviación estándar, etc. Hay que plantear situaciones donde convenga utilizar alguno de ellos. La comprensión de los estudiantes acerca de estos temas conlleva al desarrollo de un criterio propio y razonable a la hora de tomar decisiones.

2.5. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO UTILIZADOS POR LOS ALUMNOS DE LA MUESTRA

En esta sección nos centramos en el análisis de los libros de texto que utilizaron los estudiantes de secundaria en sus cursos, con objeto de valorar la enseñanza que recibieron los estudiantes, partiendo de las tareas concretas que se les proponen. De este modo queremos determinar el significado institucional implementado en el tema de las medidas de tendencia central, lo que nos permitirá observar con mayor relevancia aquellas dificultades o, por el contrario, los aciertos sobre el aprendizaje que respecto a este tema tienen los estudiantes.

2.5.1. METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS DE CONTENIDO

La muestra seleccionada para llevar a cabo el análisis corresponde a dos libros de texto y un cuaderno de prácticas de Matemáticas de Tercer Grado de Educación Secundaria, que son los que utilizaron los estudiantes de nuestra muestra durante el curso en que resolvieron el cuestionario, y los de Bachillerato cuando cursaron Tercer Grado de Secundaria. Por su parte, los estudiantes de Bachillerato no utilizaron libros de texto, sino apuntes de clase, material didáctico y bibliografía de consulta el año que se les aplicó el cuestionario.

Todos los libros de texto analizados incluyen en sus contenidos el tema de Medidas de Tendencia Central, como lo establece el currículo mexicano (1993). Los libros se muestran en la Tabla 2.5.1.1.

Tabla 2.5.1.1. Libros usados por los estudiantes de la muestra

No.	Título	Autores	Editorial	Edición
1	Matemáticas 3	G. Almaguer, J. M. Bazaldúa, F. Cantú y L. Rodríguez	Limusa Noriega	2000
2	Matemáticas 3. Cuaderno de prácticas y tareas	G. Almaguer, J. M. Bazaldúa, F. Cantú y L. Rodríguez	Limusa Noriega	2000
3	Matemáticas 3	L.A. Briseño y J. C. Verdugo	Santillana	2000

Iniciamos el análisis de los libros de texto seleccionando cada uno de los apartados donde se incluye el tema de medidas de tendencia central, que a su vez pertenece al Bloque 4 “Presentación y tratamiento de la información”. Para el análisis de contenido seguimos el mismo método utilizado en la investigación de Cobo (2003), el cual consiste en los siguientes pasos:

1. Lectura rigurosa del Bloque 4 de cada libro de la muestra para comparar el contenido de los párrafos con la lista de elementos de significado descrita en dicho estudio y determinar su presencia en los libros de texto.
2. Selección de imágenes para ejemplificar cada elemento de significado hallado. En caso de encontrar alguno nuevo se describe.
3. Realizar un resumen escrito en el que se analizan los campos de problemas, definiciones, propiedades, representaciones, procedimientos y argumentos identificados en los libros, comentando el ejemplo más característico.
4. Elaboración de tablas que resumen los contenidos en cada libro, y a su vez, permiten obtener conclusiones sobre el significado de referencia en los libros utilizados por los alumnos de la muestra en su etapa de Educación Secundaria.

Finalmente, se añaden comentarios acerca de los elementos que contienen los libros mexicanos para contrastarlos con los que ha descrito Cobo (2003) en su investigación. Reunidos estos elementos podemos determinar el significado institucional de nuestro trabajo y posteriormente, valorar las respuestas de los estudiantes, obtenidas en cada uno de los ítems planteados en el cuestionario.

2.5.2. CAMPOS DE PROBLEMAS

Describimos a continuación los campos de problemas y el contexto en que se presentan los ejercicios que se proponen en los libros de texto mexicanos para familiarizar a los estudiantes con las medidas de tendencia central, tomando como referencia aquellos que se contemplan en el estudio de Cobo (2003).

Campos de problemas de la media

PM1. Estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas en presencia de errores (Cobo, 2003). En este campo de problemas, la media aparece como la mejor estimación de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida, debido a sus propiedades de buen estimador (es insesgado, tiene mínima varianza, etc.). No aparece en los libros que utilizaron nuestros estudiantes, pero lo hemos incluido, ya que el ítem 8 del cuestionario tiene relación con este campo y también porque creemos conveniente sugerir dentro del tema de medidas de tendencia central ejercicios que permitan construir la idea de media como mejor estimador de una cantidad desconocida, que será de utilidad para los estudiantes en sus cursos posteriores.

PM2. Obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme. A continuación mostramos el único ejemplo que encontramos en uno de los libros, donde la idea de distribución uniforme aparece de manera detallada. En dicho ejemplo se pide encontrar el salario medio de los empleados de una empresa. Este salario medio sería la cantidad equitativa si todos los trabajadores tuvieran igual salario (Briseño y Verdugo, p. 194).

La **media**, la **moda** y la **mediana** se llaman valores de **tendencia central**; son útiles porque permiten obtener rápidamente información acerca de una colección de datos. Sin embargo, esta información a veces resulta engañosa. Por ejemplo, en el siguiente cuadro se registran las personas que trabajan en una empresa y los sueldos respectivos.

Núm. de personas	Puesto	Sueldo (pesos)
2	Secretarias	1 300
2	Técnicos	1 450
1	Encargado de mantenimiento	1 100
1	Conserje	700
6	Obreros	1 200
1	Director	12 000

El promedio de salarios de la empresa es éste:

$$\frac{2(1\,300) + 2(1\,450) + 1(1\,100) + 1(700) + 6(1\,200) + 1(12\,000)}{13} = 2\,038.461$$

Entonces, la media de los salarios es $2 038.46.

PM3. Obtener un elemento representativo de un conjunto de valores dados, cuya distribución es aproximadamente simétrica. Este tipo de ejercicios se utiliza cuando se quiere obtener un valor que represente una distribución. Son de los que más comúnmente se tratan en los cursos iniciales de estadística, y en nuestro caso concreto, también se incluyen en todos los libros que analizamos. En el siguiente ejemplo, la temperatura media sería típica o representativa de las registradas durante la semana (Almaguer y cols., p. 358).

- **La media aritmética o promedio se utiliza más en situaciones como la siguiente: La temperatura promedio al mediodía en una semana de invierno. Si las lecturas correspondientes a esa semana fueron:**

$4^{\circ}\ 5^{\circ}\ 6^{\circ}\ 4^{\circ}\ 2^{\circ}\ 2^{\circ}\ 2^{\circ} = 2^{\circ}\ 2^{\circ}\ 2^{\circ}\ 4^{\circ}\ 4^{\circ}\ 5^{\circ}\ 6^{\circ}$

$Mo = 2^{\circ}$ $\quad Me = 4^{\circ}$ $\quad \bar{x} = \frac{3(2) + 2(4) + 5 + 6}{7} = \frac{25}{7} = 3.57$

El promedio de temperatura es 3.57°

PM4. Estimar el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica. Este campo de problemas no se expone en los libros de texto revisados, pero también hacemos referencia, ya que se formulan ejercicios semejantes en dos de los ítems del cuestionario (ítem 1, ítem 7).

PM5. Comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas. Añadimos esta categoría al campo de problemas, que no aparece en el estudio de Cobo (2003), pero que en el cuestionario sí se plantea un problema similar, con variables ordinales. El ejemplo muestra dos conjuntos de datos, donde el estudiante debe elegir la medida de tendencia central adecuada, que en este caso, corresponde a la media aritmética, para poder compararlos (Almaguer y cols., p. 353).

En una escuela secundaria se celebró un concurso sobre resolución de problemas entre los grupos 15 y 16. El examen contenía 10 problemas. Si los resultados son los que se dan abajo:

Grupo 15

2	3	3	4	4	4	4	5	5	5
5	5	6	6	6	6	7	7	7	7
7	8	8	8	8	8	8	8	9	9
9	9	9	9	9	10	10	10	10	10

Grupo 16

0	3	4	4	4	5	6	6	6	6
6	6	6	7	7	7	7	7	7	8
8	8	8	8	8	8	9	9	9	9
10	10	10	10	10					

¿Qué grupo ganó?

Campos de problemas de la mediana

Hemos notado que el estudio de la mediana es el concepto más limitado en la enseñanza de las medidas de tendencia central, pues sólo se proponen ejercicios de cálculo en su forma más típica y sus ejemplos son escasos.

PME1. Encontrar un resumen estadístico de tendencia central, en situaciones en las que la media no es suficientemente representativa. Este campo de problemas sí aparece en los libros de texto que analizamos. El siguiente ejemplo muestra una situación que se refiere a la obtención de puntos de los estudiantes en un examen de admisión, en la que aparece una distribución de datos con valores extremos. Lo apropiado es utilizar la mediana, ya que el uso de la media aritmética no sería representativa, pues se vería afectada por la dispersión de los datos. Por otra parte, también se observa que dicha distribución de datos es par, por lo que se tiene que añadir otro cálculo para llegar al resultado final (Almaguer y cols., p. 357).

- **La mediana resulta útil en situaciones como ésta:**

La selección de estudiantes mediante un examen de admisión, es una escuela en la que se recibieron 50 solicitudes, pero el cupo es sólo para 25. Si los puntos obtenidos en el examen de admisión fueron:

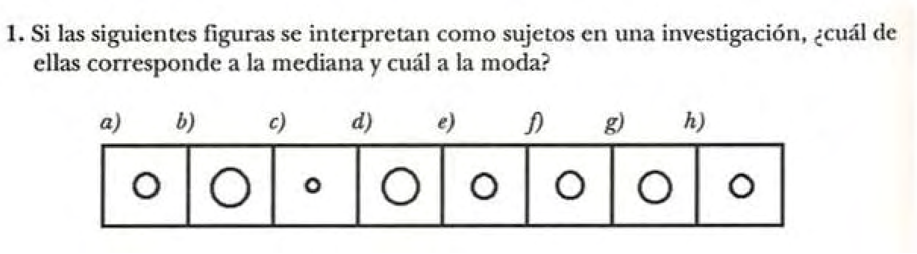
46	46	47	49	49	50	52	55	55	58
58	58	58	59	60	60	62	63	65	66
66	66	67	68	70	72	73	75	75	75
78	78	78	80	83	84	95	96	96	96
98	99	100	103	105	110	112	114	115	120

$$\bar{x} = \frac{3763}{50} = 75.26$$

$$Me = \frac{70 + 72}{2} = \frac{142}{2} = 71$$

Los alumnos aceptados son los que obtuvieron más de 71 puntos.

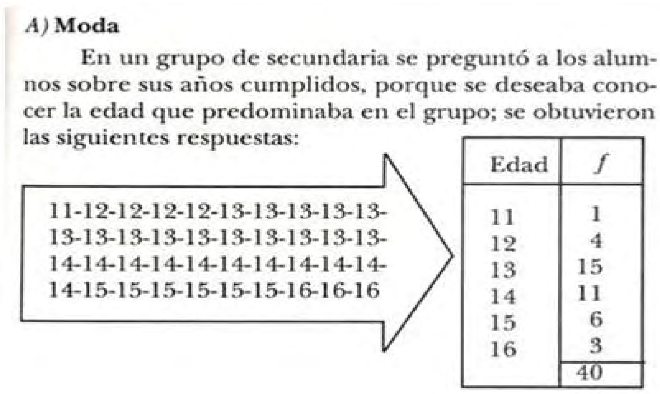
PME2. Encontrar un resumen estadístico de posición central para variables ordinales. Respecto a las variables ordinales, corresponde a una escala de medida de intervalo o razón. Por tanto, es siempre más adecuado usar la mediana como medida de centralización para este tipo de casos. El siguiente ejemplo se incluye en Almaguer y cols. (p. 358) y define los datos ordinales mediante su representación gráfica.


1. Si las siguientes figuras se interpretan como sujetos en una investigación, ¿cuál de ellas corresponde a la mediana y cuál a la moda?

PME3. Efectuar comparaciones de datos usando gráficos como el de la caja. Otro de los problemas frecuentes a la hora de trabajar con datos es el de comparar dos conjuntos con respecto a la misma característica. El gráfico de la caja es una herramienta muy útil en estos casos y la mediana es uno de los parámetros más precisos para identificarla. No se incluyen ejemplos en los libros de texto revisados.

Campos de problemas de la moda

PMO1. Obtener un valor representativo de una colección de datos en situaciones en las que lo que interesa fundamentalmente es el valor dominante del conjunto. Este campo de problemas se incluye en todos los libros de texto y con distintas representaciones. En el siguiente ejemplo, se pide conocer la edad predominante de un grupo de estudiantes, que se representa en una tabla de frecuencias (Almaguer y cols., p. 353).


A) **Moda**

En un grupo de secundaria se preguntó a los alumnos sobre sus años cumplidos, porque se deseaba conocer la edad que predominaba en el grupo; se obtuvieron las siguientes respuestas:

11-12-12-12-12-13-13-13-13-13-
13-13-13-13-13-13-13-13-13-13-
14-14-14-14-14-14-14-14-14-14-
14-15-15-15-15-15-15-16-16-16

Edad	f
11	1
12	4
13	15
14	11
15	6
16	3
	40

PMO2. Encontrar el valor representativo en datos cualitativos. Hemos encontrado ejercicios de este campo en dos de los libros de texto de la muestra. En el siguiente ejemplo, los datos son cualitativos. Sin embargo, para obtener el resultado se pide a los estudiantes asignar valores numéricos a dichos datos, y a partir de allí, hacer el cálculo para obtener la moda (Briseño y Verdugo,, p.195). Hacemos notar que el cálculo de la media y mediana no tendría sentido, pues aunque los datos se codifiquen como

números, la transformación no conserva la escala de medida, ya que se pasa de datos cualitativos a numéricos, y la media y mediana no están definidas para datos cualitativos. Pensamos que este tipo de ejemplos puede inducir a errores en los estudiantes.

Observa los siguientes resultados de lanzar una moneda 30 veces:

(A = águila) (S = sol)
A, A, S, S, S, S, A, A, A, S, A, A, A, S, S, S, S, S, S, S, A, A, S, A, S, S, S, S, S, A

a) Asigna el número 1 al águila y el 0 al sol; construye la lista de los resultados con los valores numéricos.
b) Calcula la media, mediana y moda.
c) Indica qué valores puede tomar la moda.

Finalmente presentamos en la Tabla 2.5.2.1, un resumen de los campos de problemas que se enuncian en los libros de texto de secundaria mexicanos, considerando como referencia aquellos que se citan en el estudio de Cobo (2003), y también añadimos aquellos que no se contemplan en su investigación.

Tabla 2.5.2.1. Campos de problemas que presentan los libros analizados

Campos de problemas		Almaguer y cols., libro	Almaguer y cols., cuaderno	Briseño y Verdugo,
PM1	Media mejor estimación			
PM2	Media, reparto equitativo			x
PM3	Media en distribuciones simétricas	x	x	x
PM4	Media, valor probable			
PM5	Media para comparar conjuntos de datos	x		
PME1	Mediana, si media no representativa	x		x
PME2	Representante datos ordinales			
PME3	Mediana para comparar conjuntos de datos			
PMO1	Moda como valor más frecuente	x		x
PMO2	Moda para datos cualitativos	x		x

Los campos de problemas para el estudio de la media aritmética que se presentan en los libros de secundaria que utilizan los estudiantes mexicanos de la muestra no coinciden en su totalidad con los que se encontraron en el estudio de Cobo (2003). Entre los que no aparecen está el que plantea *estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas en presencia de errores,* sin embargo, según dicho estudio, tampoco es un campo de problemas muy usual en los libros de texto españoles.

Otro campo de problemas del que tampoco se han encontrado ejemplos, y en ambos contextos, es el de *estimar el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable con distribución aproximadamente simétrica*, a pesar de que tiene aplicaciones importantes y pueden ser dirigidos a estudiantes de este nivel. Por otra parte, en uno de los textos mexicanos aparece otro campo de problemas, que se refiere a la *comparación de dos distribuciones de datos con variables numéricas,* que no aparece en los españoles.

Respecto a los campos de problemas de la mediana, en los libros de texto mexicanos los ejemplos se limitan a *encontrar un resumen estadístico de tendencia central, en situaciones en las que la media no es suficientemente representativa.* En la mayor parte sólo aparecen para variables numéricas, aunque hemos encontrado un caso de cálculo con variables ordinales e incluso un ejemplo, que puede inducir a error, en que se trata de calcular media y mediana con datos cualitativos. No se incluyen, el campo de *efectuar comparaciones de datos usando gráficos de caja,* que es una herramienta útil para comparar dos distribuciones de datos con respecto a una misma característica. En lo que respecta a la moda, coinciden los campos de problemas que se proponen en ambas muestras de libros analizados, es decir, *obtener un valor representativo de una colección de datos en las que interesa el valor dominante,* y *encontrar el valor representativo en datos cualitativos.*

Tabla 2.5.2.2. Contextos que presentan los libros analizados

Textos/ Contenidos	Almaguer y cols., libro	Almaguer y cols. cuaderno	Briseño y Verdugo,
Situaciones escolares	Calificaciones	Exámenes	Calificaciones
Características corporales	Edad	Edades, estaturas	Estaturas
Deportes	Beisbol		
Economía/salarios			Sueldos
Consumo, precios		Propinas, precios	
Meteorología	Temperaturas	Temperaturas	
Composición familiar		Número de hijos	

*C*onsiderando la relevancia que tiene el uso de las medidas de tendencia central en la vida cotidiana, también revisamos en los textos, los contextos en que se presentan los ejercicios propuestos. Observamos por una parte, que el tema en los libros de la muestra es limitado y breve, y consecuentemente, los contextos de los problemas no son muy diversos, aunque se puede decir que sí son familiares para los estudiantes en cuanto al uso que puedan hacer para el aprendizaje de estos conceptos. Por ejemplo, sus aplicaciones en situaciones de juegos de azar o deportivos, en situaciones escolares, en aspectos físicos-corporales, en meteorología o en cuestiones de tipo económica. Como se observa en la Tabla 2.5.2.2, algunos libros coinciden en la propuesta de problemas en estos contextos y otros se presentan sólo en alguno de ellos.

2.5.3. LENGUAJE

Términos y expresiones verbales

Otro elemento de significado que estudiaremos es el lenguaje que encontramos en los libros de texto relacionado con las medidas de tendencia central. El lenguaje de un objeto matemático con el que los estudiantes se deben familiarizar sirve para enunciar las definiciones y propiedades de dicho objeto, así como para representar los problemas y datos. Para el tema de medidas de tendencia central, encontramos en mayor medida en los libros de la muestra, las siguientes expresiones:

- *Medidas: de tendencia central, valores de tendencia central o medidas de centralización*, que se definen como aquellos índices que tienden a situarse al centro de un conjunto de datos ordenados, y son útiles para obtener rápidamente información acerca de una colección de datos. En concreto, se refieren a la media, mediana y moda, en términos de lenguaje matemático.
- *Media aritmética.* En los libros se hace énfasis en la utilización de este término como sinónimo de *promedio*, o de manera más simple, como *media*, que también se utiliza de la misma forma en sentido ordinario o coloquial. Por ejemplo, en situaciones como las siguientes: “la temperatura promedio al mediodía de una semana de invierno”; “los promedios mensuales en biología de los alumnos del grupo 12”.
- *Mediana.* El uso del término mediana, se acompaña generalmente de “ordenar datos” o “datos ordenados”, y en el caso de distribuciones de variables discretas, con lo cual, el concepto tendería a identificar fácilmente su cálculo. Su uso es exclusivo del lenguaje matemático.
- *Moda.* Para el caso de la moda, es más sencillo entender a qué se refiere, dado que es de uso semejante al término cotidiano, por lo que es equivalente a hablar “del más…”, “de la mayoría” o “del valor con mayor frecuencia”. Se utiliza en

situaciones específicas para dar una mejor idea de la realidad cuando la media aritmética no es un buen representante de los datos, por ejemplo, al hablar de "las estaturas de un grupo de personas".

- *Frecuencia.* Añadimos este término, ya que en los libros aparece repetidamente al hablar del número de veces que se repite un valor en una distribución de datos y que también es de uso ordinario.

Notaciones y símbolos

Las notaciones simbólicas se utilizan para referirse concretamente a determinados conceptos, en este caso, a cada una de las medidas de centralización. Deducimos que en los libros de texto de la muestra, por ser de nivel de secundaria, las notaciones y símbolos que presentan son escasos, fundamentalmente aparecen las que sirven para reconocer o identificar cada uno de estos parámetros; tampoco se contemplan fórmulas complejas. A continuación presentamos las que encontramos:

- La media aritmética se representa con: $\bar{x}$
- La mediana: *Me*
- La moda: *Mo*

Entre los símbolos que se atienden para el estudio de este tema aparecen los siguientes:

- $\sum_{i=1}^{n} x_i$ para representar el total de la suma del conjunto de los datos a que se hace referencia.
- f_i que representa la frecuencia con que aparece algún valor.

Otras representaciones

En estos libros, es frecuente encontrar ejemplos y ejercicios para las tres medidas de centralización representados como conjuntos de datos aislados. Algunos se presentan sin formato, otros en tablas de datos, en tablas de frecuencia y frecuencias acumuladas, y en tablas de datos agrupados en intervalos. Como parte de este tema aún no se incluyen representaciones gráficas de ningún tipo, sino hasta el siguiente tema del mismo Bloque 4, "medidas de dispersión", donde ya se proponen ejemplos que enseñan al alumno a localizar y calcular media, mediana y moda a partir de gráficos, pero también de manera limitada.

La Tabla 2.5.3.1 resume el lenguaje y las representaciones que contienen cada libro de la muestra. Como se puede observar, los tres libros de nuestra muestra coinciden en el contenido y uso del lenguaje que se hace dentro de este tema de medidas de tendencia central. Es evidente que dicho lenguaje es reducido respecto al que se requiere para un aprendizaje más óptimo y preciso acerca de este tema. Sin embargo, suponemos que en este nivel de estudio sólo se abarca la terminología básica para introducir al estudiante en el aprendizaje de la estadística.

Tabla 2.5.3.1. Lenguaje que se utiliza en los libros analizados

Lenguaje	Almaguer y cols., libro	Almaguer y cols., cuaderno	Briseño y Verdugo,
Verbal	x	x	x
Símbolos	x	x	
Tablas	x	x	x
Gráficos		x	x

Entre los términos más citados tenemos por ejemplo: “medidas de centralización” o “de tendencia central”; “media”, que en el uso mexicano es equivalente a “promedio”, “mediana” y “moda”; y “frecuencia”, los cuales se complementan con los respectivos símbolos que los representan. Por otra parte, también abunda el uso de tablas de frecuencias o de intervalos de clase. En cuanto a la aplicación de fórmulas, sólo encontramos aquellas para estimar la media aritmética, la media aritmética ponderada y para determinar la mediana en una distribución de datos par. Por otra parte, no es sino hasta el siguiente tema, medidas de dispersión, que se incluyen gráficos y diagramas, aunque corresponde al mismo Bloque 4 del contenido curricular.

En lo que concierne al análisis de libros españoles analizados por Cobo (2003), primero hemos de señalar que ésta ha sido una muestra mucho mayor y, en consecuencia, algunos libros contienen lenguaje más especializado. Nosotros sólo la hemos tomado como referencia para nuestro trabajo, que se centra en la revisión de un reducido número de libros.

Sin embargo, cuando comparamos los resultados españoles y mexicanos, no se observa mayor variedad en lenguaje utilizado dentro del tema de medidas de tendencia central. Es decir, el lenguaje utilizado en los libros españoles es muy similar al de los libros mexicanos, sin embargo, sí es más completo en el sentido de que algunos de ellos presentan fórmulas más complejas como en el caso de estimar la mediana o la moda, y otros también contienen distintas representaciones gráficas.

2.5.4. DEFINICIONES

Hemos encontrado las siguientes definiciones en los libros analizados:

Definiciones de la media

DM1. Definición de media como la suma ponderada de cada uno de los valores "medios" de la variable, multiplicada por su frecuencia. Encontramos sólo en uno de los libros la siguiente definición de la media ponderada de un conjunto de datos presentados en intervalos de clase: *"Media de un conjunto de datos agrupados utilizando el punto medio como representante del intervalo"* (Almaguer y cols., p. 357).

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\ (PMxf)}{n}$$

"Σ" indica la suma
"n" representa al total de datos

$$x = \frac{66.20}{45} = 1.47$$

DM2. Definición de media como promedio aritmético de un conjunto de datos. Esta definición hace referencia a la media como valor central y es la más típica entre los libros mexicanos. Por ello la hemos localizado en todos los libros de nuestra muestra:

> "*La media aritmética, promedio o media, de un conjunto de datos es el valor que se obtiene al sumar todos los datos y dividir entre el total de ellos. Se puede expresar con el símbolo* $\bar{x}$" (Almaguer y cols., p. 355).
>
> "*La media de una colección de datos numéricos se calcula dividiendo la suma de todos ellos entre el número de datos*" (Briseño y Verdugo,, p. 192).

Definiciones de la mediana

Se han encontrado las dos mismas definiciones que aparecen en el estudio de Cobo (2003):

DME1. Mediana como centro de la distribución de datos. Aparece en los libros mexicanos y destaca la idea de orden en los datos y posición central en dicha ordenación, es decir "valor central en un conjunto de datos ordenados":

"*Mediana, como el valor que se encuentra en el centro de una distribución de datos"* (Almaguer y cols., p. 355).
"La mediana de un conjunto de datos es el valor que se ubica en el centro de ese conjunto. Si un conjunto está constituido por un número impar de datos, la mediana es el valor que se ubica en el centro cuando los datos se ordenan de menor a mayor" (Briseño y Verdugo,, p. 192).

DME2. Mediana como valor de la variable estadística que divide en dos efectivos iguales. Esta idea de mediana que indica la división del conjunto de datos en dos partes iguales la contiene sólo uno de los libros de la muestra, mediante la siguiente definición:

"La mediana es el valor que divide a un conjunto ordenado de datos, de tal manera que resulten igual número de datos arriba y debajo de él. Se representa con: Me" (Almaguer y cols,.cuaderno, p. 259).

Definiciones de la moda

DM1. La moda es el valor más frecuente de la variable estadística. Es una definición sencilla de comprender y puede usarse para determinar visualmente la moda a partir de las representaciones gráficas. Todos los libros de secundaria mexicanos la contienen y como vemos a continuación, coinciden con la misma definición:

"La moda de un conjunto de datos es el dato que más se repite, el que aparece con mayor frecuencia. Se indica con: Mo" (Almaguer y cols., p. 354).
"*La moda de una colección de datos numéricos es el valor con mayor frecuencia. La frecuencia se define como el número de veces que se repite un valor*" (Briseño y Verdugo, p. 192).

DM2. La moda es el valor que corresponde al máximo del diagrama de barras o histograma. Se relaciona con su representación gráfica. No se encuentran ejemplos de esta definición en libros mexicanos analizados.

Presentamos en la Tabla 2.5.4.1 las definiciones de las medidas de tendencia central que ya hemos mencionado y la presencia de estas en cada uno de los libros analizados. Las definiciones encontradas en los libros mexicanos respecto a media, mediana y moda son semejantes entre sí, además de coincidir con las definiciones encontradas en el estudio de Cobo (2003) con respecto a los libros españoles. No hay diferencias relevantes, ya que sólo se omite aquella que indica obtener la moda a partir de la lectura de un diagrama o gráfico.

Tabla 2.5.4.1. Definiciones que presentan los libros analizados

Definiciones		Almaguer y cols., libro	Almaguer y cols., cuaderno	Briseño y Verdugo
DM1	Media como algoritmo	x		
DM2	Media como promedio	x	x	x
DME1	Mediana, valor central	x		x
DME2	Mediana, dos partes	x	x	
DMO1	Moda, valor más frecuente	x	x	x
DMO2	Moda, diagrama diferencial			

2.5.5. PROPIEDADES

Las propiedades que se describen a continuación se han clasificado en numéricas, algebraicas y estadísticas. En este apartado, primero presentamos las propiedades que localizamos en nuestros libros, seguidas de las que también se señalan en el estudio de Cobo (2003), e incluimos la tabla de resumen.

Propiedades Numéricas

N3. En el cálculo de la media se tienen en cuenta todos los valores de los datos, pero no en la mediana y la moda. En uno de los textos localizamos esta propiedad, donde explícitamente se señala que sólo con la media aritmética se puede obtener el resultado esperado del problema de dos conjuntos de datos homogéneos, previamente planteado, ya que en su cálculo intervienen todos los datos de las distribuciones dadas (Almaguer y cols., p. 355).

C) Media aritmética

Para contestar la pregunta del cuadro inicial, no podemos utilizar la moda ni la mediana. La moda nos indica el valor que tuvo mayor frecuencia, pero no nos dice cómo fueron los otros valores, la mediana nos indica el valor central, pero no sabemos si los datos colocados antes y después de él, son mayores que los correspondientes del otro grupo.

En casos como éste, utilizamos otra medida de tendencia central; comúnmente se le conoce como promedio, es la media aritmética o, de manera más simple, es la media.

N4. El valor numérico de la media cambia cuando se cambia cualquier dato. Presentamos el siguiente ejemplo que localizamos en uno de los libros, en un apartado que hace referencia al "uso y limitaciones de las medidas de centralización". Al final del ejercicio se enfatiza en la importancia de suprimir el dato de la distribución que altera significativamente el resultado del problema (Briseño y Verdugo, p. 194).

El promedio de salarios de la empresa es éste:

$$\frac{2(1\,300) + 2(1\,450) + 1(1\,100) + 1(700) + 6(1\,200) + 1(12\,000)}{13} = 2\,038.461$$

Entonces, la media de los salarios es $2 038.46.

La media es mucho mayor que la moda y la mediana porque la eleva el salario del director. Si se quita el salario del director, la media es la siguiente:

$$\frac{2(1\,300) + 2(1\,450) + 1(1\,100) + 1(700) + 6(1\,200)}{12} = 1\,208.33333$$

Al eliminar el salario mayor, la media resultó un dato más significativo de los salarios de los trabajadores.

N1. La media, mediana y moda de un conjunto de datos son siempre valores pertenecientes al rango de la variable. En una distribución de datos, donde hay que hallar las medidas de centralización, no se puede obtener un valor mayor que el máximo de estos ni menor que el mínimo. Esta propiedad no se enuncia explícitamente en ninguno de los libros, pero se deduce de los ejemplos que se utilizan para la enseñanza de éstos parámetros estadísticos.

N2. Mientras la moda siempre coincide con uno de los valores dados, la media y mediana no tienen por qué coincidir con los valores de los datos e incluso podría ser un número perteneciente a un conjunto numérico más amplio que el dado. Como la anterior, esta propiedad también está implícita en los ejemplos propuestos en los libros.

Propiedades algebraicas

A7. La moda puede no existir o, si existe, no ser única. La media y mediana siempre existen en datos numéricos. Esta propiedad la hemos identificado en dos de los libros de texto mediante los siguientes ejercicios resueltos, donde además se hace referencia al cálculo de la moda tanto para distribuciones de datos con dos modas, como para aquellas que no la tienen (Almaguer y cols., p. 354).

b) 0, 6, 6, 6, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 13, 13, 15 $Mo = 9$ $Mo = 11$
Aquí, 9 y 11 son los que tienen mayor frecuencia; entonces ambos se toman como modas.

c) 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 15 no tiene moda.
La serie no tiene moda alguna, porque no hay un valor que tenga mayor frecuencia que los otros.

Las siguientes son otras propiedades de las medidas de centralización que no hemos localizado en los libros de texto que analizamos, pero que se citan en el estudio de Cobo (2003) y que también utilizamos para el nuestro.

A1. Operación interna. Esta propiedad sólo es válida para la moda, ya que conserva su valor en el conjunto de datos, sin embargo, para la media y la mediana no, por verse alterados sus cálculos con algún cambio en los valores del mismo conjunto de datos.

A2. La media, mediana y moda, consideradas como operaciones algebraicas no tienen elemento neutro ni simétrico. Para la media cualquier cambio en los valores de una distribución de datos dada implica una modificación en el resultado del cálculo, incluso si el valor es un cero.

A3. No tienen la propiedad asociativa para el caso general. Es decir, no se puede dividir en partes el conjunto de datos para obtener la media, pues en este caso se obtendrá un valor diferente.

A4. Son operaciones conmutativas. En una distribución de datos dada, el orden de los valores no afecta el valor de la media y moda, pero sí el valor de la mediana.

A5. Las medidas de tendencia central conservan los cambios de origen y escala. Es decir, que si multiplicamos o sumamos una constante a cada uno de los valores del conjunto, las medidas de tendencia central, son también sumados o multiplicados por esa misma constante.

A6. La media de la suma de dos o más variables, es igual a la suma de las medias de dichas variables. Esta propiedad sólo es válida para la media.

Propiedades estadísticas

E1. La media, mediana y moda son representantes de un colectivo. Esta propiedad aparece en dos de los libros de la muestra, en los que brevemente se menciona el uso de las medidas de tendencia central como valores representativos de un conjunto de datos: *"Las medidas de tendencia central, o de centralización, son aquéllas que tienden a situarse al centro de un conjunto de datos ordenados"* (Almaguer y cols., p. 353).

E4. La media es un estadístico poco resistente, muy sensible a la variación de los datos, especialmente en los valores atípicos. En el siguiente ejemplo se aprecia claramente esta propiedad, pues se hace énfasis en la elección de alguno de los tres estadísticos de centralización como mejor representante del conjunto de datos, el cual tiene un valor atípico. Por otro lado, se indica la repercusión que tendría en el resultado del problema usar la media considerando todos los datos, y si se omite el valor atípico. Sólo lo encontramos en uno de los libros analizados (Briseño y Verdugo, p. 194).

1 100	1 200	1 200	1 200	1 200	**1 200**	1 200	1 300	1 300	1 450	1 450	12 000
2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11	12	13

La mayor frecuencia corresponde al salario de los obreros; la **moda** es **$1 200.00**.

La media es mucho mayor que la moda y la mediana porque la eleva el salario del director. Si se quita el salario del director, la media es la siguiente:

$$\frac{2(1\,300) + 2(1\,450) + 1(1\,100) + 1(700) + 6(1\,200)}{12} = 1\,208.33333$$

E5. La suma de las desviaciones de un conjunto de datos de su media es cero. La suma de los valores absolutos de las desviaciones es mínima respecto a la mediana. En uno de los libros mexicanos encontramos el siguiente ejemplo (Briseño y Verdugo, p. 196).

La **desviación** de un dato es la resta del dato menos la media. Si x es un dato y $\overline{X}$ es la media, entonces la desviación de x es $(x - \overline{X})$. Dicha desviación puede ser cero, positiva o negativa.

- Es **cero** si la **media** y el dato **coinciden**.
- Es **positiva** si el dato es **mayor** que la **media**.
- Es **negativa** si el dato es **menor** que la **media**.

Las desviaciones de los datos del ejemplo se obtienen calculando la media y, luego, las diferencias en relación con cada dato:

La media de los aciertos de la escuela **A** es 29.5. La media de los aciertos de la escuela **B**, 29.5. Es decir, las medias de ambas listas son iguales. Las desviaciones de los datos se calculan en la columna izquierda.

La suma de las desviaciones negativas de la escuela **A** es −21:

$$-10.5 + (-7.5) + (-1.5) + (1.5) = -21$$

Y la de las desviaciones positivas, 21:

$$0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 3.5 + 3.5 + 10.5 = 21$$

De la misma forma, la suma de las desviaciones negativas de la escuela **B** es −33 y la de las desviaciones positivas, 33.

E6. Respecto a la media, la suma de los cuadrados de las desviaciones es mínima. Hemos localizado esta propiedad en uno de los libros (Briseño y Verdugo, p. 197), representada de la siguiente forma:

El promedio de las desviaciones absolutas de todos los datos es una medida que permite observar qué tan dispersos se hallan éstos en relación con la media.

La desviación media de **A**: $\dfrac{(10.5 + 7.5 + 2(1.5) + 7(.5) + 2(3.5) + 10.5)}{14} = \dfrac{42}{14} = 3.$

La desviación media de **B**:

$$\frac{10.5 + 8.5 + 6.5 + 3.5 + 2.5 + 1.5 + 2(0.5) + 2(1.5) + 2.5 + 6.5 + 9.5 + 10.5}{14} = \frac{66}{14} = 4.78.$$

La **desviación media** es el **promedio** de las **desviaciones absolutas**.

La desviación media de **A** es menor que la desviación media de **B**; entonces los datos de **A** están más agrupados alrededor de la media que los de **B**.

E8. Existen modas tanto para variables cuantitativas como cualitativas. Encontramos en dos libros ejemplos donde esta propiedad no se señala expresamente, pero se deduce. Un ejemplo es el siguiente ejercicio, en que se pide al alumno reconocer la moda y también la mediana en un conjunto de variables cualitativas. (Almaguer y cols., p. 358).

Observa los siguientes resultados de lanzar una moneda 30 veces:

(A = águila) (S = sol)
A, A, S, S, S, S, A, A, A, S, A, A, A, S, S, S, S, S, S, A, A, S, A, S, S, S, S, S, A

a) Asigna el número 1 al águila y el 0 al sol; construye la lista de los resultados con los valores numéricos.
b) Calcula la media, mediana y moda.
c) Indica qué valores puede tomar la moda.
d) Indica qué valores puede tomar la mediana.

Las propiedades citadas por Cobo (2003) que no aparecen en nuestros libros son las siguientes:

E2. La media coincide con el centro del conjunto de datos, semejante al centro de la gravedad. La media es el centro de los datos, en el sentido de equilibrar los valores por exceso y por defecto. En este sentido es el centro geométrico o centro de gravedad del conjunto de datos de la variable (Peña, 2001).

E3. En distribuciones simétricas, la media coincide con la mediana y la moda (en distribuciones unimodales). En estos conjuntos de datos, éstos se presentan uniformemente y las medidas de centralización tienden a situarse en el centro.

E7. Para datos agrupados en intervalos con alguno de ellos abierto también es preferible la mediana a la media. Existe la moda, pero no la media.

E9. En distribuciones no unimodales, la mediana es mejor representante del conjunto de datos que la media.

En la Tabla 2.5.5.1, presentamos las propiedades de las medidas de tendencia central, y señalamos aquellas que identificamos en nuestra muestra de libros. Las propiedades de la media, mediana y moda son igual de relevantes que las definiciones para el estudio de estos conceptos, sin embargo, tienen un tratamiento muy inferior. A este respecto, son pocas las propiedades que hemos identificado en los libros de texto mexicanos seleccionados. De manera general, no se explican detalladamente, más bien se manifiestan de manera implícita en los ejemplos que se proponen para explicar alguno de estos conceptos.

Tabla 2.5.5.1. Propiedades de la media, mediana y moda

	Propiedades	Almaguer y cols, . libro	Almaguer y cols.,cuaderno	Briseño y Verdugo
Numéricas				
N1	Media, mediana y moda pertenecen al rango de la variable			
N2	La moda coincide con algún dato de la distribución, pero media y mediana no			
N3	Para la Media se tienen en cuenta todos los valores del conjunto, pero no en Me ni Mo	x		
N4	El valor de la media cambia cuando se cambia cualquier dato del conjunto			x
Algebraicas				
A1	Operación interna			
A2	La media, mediana y moda no tienen elemento neutro ni simétrico			
A3	No tienen propiedad asociativa			
A4	Son operaciones conmutativas			
A5	Conservan cambios de origen y escala			
A6	La media de la suma de dos o más variables es la suma de la media de dichas variables			
A7	La moda puede o no existir	x	x	
Estadísticas				
E1	La media, mediana y moda son representantes de un colectivo	x	x	
E2	La media coincide con el centro del conjunto de datos			
E3	Media, mediana y moda coinciden en distribuciones simétricas			
E4	La media es sensible a la variación de los datos del conjunto			x
E5	La suma de las desviaciones del conjunto de datos de su media es cero			x
E6	Respecto a la media, la suma de cuadrados de las desviaciones es mínima			x
E7	Es preferible la mediana a la media en datos agrupados en intervalos			
E8	Existe moda para variables cualitativas y cuantitativas	x		x
E9	La mediana es mejor representante que la media en distribuciones no unimodales			

En el caso de las propiedades numéricas, escasamente localizamos en uno de los libros aquella que hace referencia al cálculo de la media, donde se consideran todos los valores de una distribución, pero no para la mediana ni la moda; y en otro libro encontramos la que consiste en subrayar que el valor numérico de la media cambia al cambiar algún dato de la distribución, aunque tampoco de manera explícita.

De las propiedades algebraicas sólo se deduce del único ejemplo que encontramos en uno de los libros analizados, la que indica que en una distribución de datos puede haber dos modas o que también puede no haberla. Estas propiedades son numerosas, pero no se tratan con profundidad. Cobo (2003) en su muestra de 22 libros, también identificó pocas de las propiedades, aunque dos de éstas en concreto se reconocen en la mayoría de sus libros: "las medidas de centralización conservan cambios de origen y escala", y la misma respecto a la moda, que nosotros también localizamos.

Las propiedades estadísticas de las medidas de tendencia central son útiles para dar a conocer con mayor precisión las características que presenta una distribución de datos. En el caso de los de los libros mexicanos de estos cursos, no se mencionan ni se tratan con detalle, sino que sólo algunas se manifiestan implícitamente mediante algunos ejemplos. Se deducen las siguientes: "la media, mediana y moda son representantes de un colectivo" (localizada en uno de los libro); "la media es un estadístico poco resistente y sensible a la variación en los datos"; "la suma de las desviaciones de un conjunto de datos de su media es cero", y "la suma de cuadrados de las desviaciones es mínima respecto a la media" (éstas dos últimas aparecen en ejemplos de medidas de dispersión). Finalmente identificamos en todos los libros, la propiedad de que "existen modas para variables cualitativas y cuantitativas".

Como señala Cobo (2003) en su análisis, la propiedad de que "las medidas de centralización son representantes de un conjunto de datos" se explica en la mayoría de los libros españoles, y el resto de las propiedades que señalamos anteriormente se tratan con limitación en algunos de ellos.

2.5.6. PROCEDIMIENTOS

Son muchos los tipos de algoritmos de cálculo que aparecen en relación a las medidas de tendencia central en los libros y que resumimos a continuación.

Cálculo de la media

AM1. Cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados. En el siguiente ejemplo se puede observar el algoritmo de la media aritmética en distribuciones de datos aislados, que con distintos ejemplos se destaca en todos los libros de la muestra que revisamos (Almaguer y cols., p. 356).

Obtengamos la media en otros ejemplos:

a) 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8

$$\bar{x} = \frac{5+6+6+6+7+7+8}{7} = \frac{45}{7} = 6.43$$

b) 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 15

$$\bar{x} = \frac{2(11)+2(12)+2(13)+2(14)+2(15)}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{22+24+26+28+30}{10} = \frac{130}{10} = 13$$

AM2. Cálculo de la media de una variable discreta con datos presentados en tablas de frecuencias. En el ejemplo se observa el procedimiento para obtener la media a partir de una tabla donde se concentran los datos, que en este caso, los estudiantes del ejercicio representan la frecuencia de la variable. Igualmente, también se propone en todos los libros el cálculo de la media a partir de esta representación (Briseño y Verdugo, p. 192).

El profesor escribió en el pizarrón la siguiente tabla:

Calificación	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Núm. de estudiantes	1	4	6	8	5	3	2	3	3

El maestro calculó el promedio del grupo como sigue:

$$\frac{1(10)+4(9)+6(8)+8(7)+5(6)+3(5)+2(4)+3(3)+3(2)}{35} = \frac{218}{35} = 6.23$$

AM3. Cálculo de la media de una variable continua o discreta con datos agrupados en intervalos de clase. Esta explicación que plantea hallar un valor promedio de cada intervalo sólo se recomienda en uno de los libros de la muestra. En el ejemplo se observa el cálculo de la media ponderada de un conjunto de datos agrupados, utilizando el punto medio como representante del intervalo además de que los datos se presentan en una tabla de frecuencias (Almaguer y cols., p. 357).

Intervalos	*f*	*PM*	*PMxf*
1.25 - 1.29	1	1.27	1.27
1.30 - 1.34	3	1.32	3.96
1.35 - 1.39	6	1.37	8.22
1.40 - 1.44	8	1.42	11.36
1.45 - 1.49	10	1.47	14.70
1.50 - 1.54	7	1.52	10.64
1.55 - 1.59	5	1.57	7.85
1.60 - 1.64	3	1.62	4.86
1.65 - 1.69	2	1.67	3.34
	45		66.20

Los intervalos corresponden a las estaturas alcanzadas por un grupo de estudiantes.

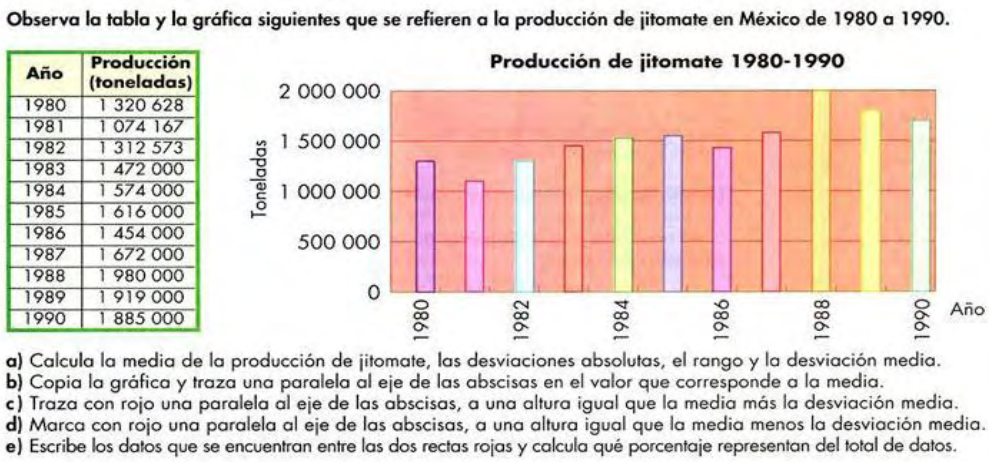
$$\bar{x} = \frac{\Sigma\ (PMxf)}{n}$$

"Σ" indica la suma
"*n*" representa al total de datos

$$x = \frac{66.20}{45} = 1.47$$

La media aritmética de las estaturas es 1.47.

AM4. Cálculo gráfico. En en uno de los libros mexicanos se plantean ejercicios para el cálculo de la media a partir de la lectura de gráficos, pero que éste ya se incluye en el siguiente tema, Medidas de Dispersión, del mismo Bloque 4 del contenido curricular. En el ejemplo, los datos además de presentarse en tabla, también están representados en un gráfico, donde se pide al alumno calcular la media y desviación media de la producción de jitomate (Briseño y Verdugo, p. 127).


Observa la tabla y la gráfica siguientes que se refieren a la producción de jitomate en México de 1980 a 1990.

Año	Producción (toneladas)
1980	1 320 628
1981	1 074 167
1982	1 312 573
1983	1 472 000
1984	1 574 000
1985	1 616 000
1986	1 454 000
1987	1 672 000
1988	1 980 000
1989	1 919 000
1990	1 885 000

a) Calcula la media de la producción de jitomate, las desviaciones absolutas, el rango y la desviación media.
b) Copia la gráfica y traza una paralela al eje de las abscisas en el valor que corresponde a la media.
c) Traza con rojo una paralela al eje de las abscisas, a una altura igual que la media más la desviación media.
d) Marca con rojo una paralela al eje de las abscisas, a una altura igual que la media menos la desviación media.
e) Escribe los datos que se encuentran entre las dos rectas rojas y calcula qué porcentaje representan del total de datos.

AM5. Obtención de la media con calculadora u ordenador. En ninguno de los libros que analizamos no aparecen ejercicios que indiquen el uso de calculadoras ni ordenadores.

AM6. Inversión del algoritmo del cálculo de la media. En los libros de secundaria de nuestra muestra aún no se plantean problemas para encontrar la media a partir de este algoritmo, y pensamos que podría ser por considerarse un algoritmo un poco más complejo para los estudiantes de este nivel de estudios, que no forma parte de sus cursos introductorios a la estadística.

AM7. Construir una distribución de media dada. Como en el caso anterior, tampoco localizamos este planteamiento en los libros de la muestra bajo la suposición de ser, para los estudiantes, un procedimiento difícil para obtener el resultado.

Cálculo de la mediana

AME1. Cálculo de la mediana con datos no agrupados en clases, número de datos impar. Con este cálculo, que es el más sencillo, se introduce a los alumnos al aprendizaje de la mediana, y por lo tanto, aparece en todos los libros de nuestra muestra. Como se puede observar, en el siguiente ejemplo se explica el procedimiento para obtener la mediana en distribuciones de datos impares (Almaguer y cols., p. 355).

El procedimiento para encontrar la mediana es sencillo:

1) Se ordenan los datos (en forma creciente o decreciente).
2) Se busca el valor central (eliminando al mismo tiempo los extremos de la serie, hasta llegar al valor central).

Veamos su aplicación en algunos ejemplos:

		Ordenando y eliminando	
a)	6 7 7 5 6 8 6	~~5~~ ~~6~~ ~~6~~ 6 ~~7~~ ~~7~~ ~~8~~	*Me* = 6
b)	49 49 49 60 57 50 50 54 53 54 51 56 56	~~60~~ ~~57~~ ~~56~~ ~~56~~ ~~54~~ ~~54~~ 53 ~~51~~ ~~50~~ ~~50~~ ~~49~~ ~~49~~ ~~49~~	*Me* = 53

AME2. Cálculo de la mediana con datos no agrupados en clases, número par de datos. De igual manera que el anterior, también es común que en todos los libros aparezca esta otra forma de cálculo. En el siguiente ejemplo se muestra el procedimiento a seguir cuando en una distribución de datos par se debe encontrar la mediana (Almaguer y cols., p. 355).

c) En la serie ordenada:

~~151~~ ~~152~~ ~~154~~ ~~154~~ ~~155~~ ~~155~~ ~~157~~ ~~158~~ ~~158~~ ~~160~~
~~160~~ ~~160~~ ~~161~~ ~~162~~ 162 163 ~~163~~ ~~164~~ ~~164~~ ~~165~~
~~165~~ ~~166~~ ~~168~~ ~~168~~ ~~168~~ ~~169~~ ~~170~~ ~~170~~ ~~170~~ ~~172~~

Como hay dos valores centrales, localizamos el punto medio entre ambos, así:

$$\frac{162 + 163}{2} = \frac{325}{2} = 162.5$$

$Me = 162.5$ Observa que quedaron 15 datos antes y después del 162.5.

AME3, AME4. Cálculo de la mediana a partir de datos presentados en tablas de frecuencias; casos de un número par e impar de valores. En el siguiente ejemplo, aunque no se explica cómo realizar el cálculo de la mediana, lo hemos considerado para este apartado porque nos indica que en los libros mexicanos sí se propone su cálculo para ambos casos mediante la interpretación de un conjunto de datos presentados tablas, que realizarlo de esta forma es complejo (Almaguer y cols., p. 359).

b) Los promedios mensuales en biología de los alumnos del grupo 12 de una secundaria fueron:

Prom.	*f*
5	5
6	7
7	8
8	9
9	6
10	5

$\bar{x}$ = ______

Me = ______

AME5. Datos agrupados en clases. Para el caso de la mediana sólo hemos encontrado ejemplos de este tipo en uno de los libros analizados y en particular en el cuaderno de ejercicios. En el ejemplo, el cálculo para encontrar la mediana de la estatura en centímetros de un grupo de personas está implícito, ya que sólo se presenta el resultado. Sin embargo, la representación de los datos aparece en una tabla de frecuencia y agrupados en intervalos de clases (Almaguer y cols., cuaderno, p. 259).

Estatura en cm	**f**	**PM × f**
140-144	1	142
145-149	2	294
150-154	3	456
155-159	4	628
160-164	5	810
165-169	2	334
170-174	2	344
175-179	1	177
	20	3 185

ME = 159.5 (Hay 10 casos antes y 10 después)

MO = 162 (punto medio del grupo 160-164)

AME6. Cálculo de la mediana a partir de datos presentados en un gráfico, diagrama de tronco. No encontramos este tipo de cálculo en los libros analizados. Como ya hemos mencionado antes, no suelen aparecer para este tema planteamientos con problemas que incluyan la interpretación de gráficos, que entre los más comunes serían las representaciones con histogramas o polígono de frecuencias. Sin embargo, en el caso de medidas de dispersión, además de los anteriores, también aparecen diagramas de dispersión; y en cuanto al diagrama de tallo y hojas, es aún menos usual su enseñanza.

Cálculo de la moda

AMO1. Cálculo de la moda en una variable discreta con datos aislados. Esta es la forma más tradicional en que se plantea la resolución de problemas de la moda y que se propone en todos los libros que analizamos. En el ejemplo que presentamos a continuación es claro cómo se localiza la moda del conjunto de datos (Almaguer y cols., p. 357).

- La moda nos da una mejor idea de la realidad en casos como:

La cantidad de *"hits"* conectados en cada juego de beisbol por un determinado jugador, si los resultados durante el mes son:

4 1 1 1 1 3 1 1 1 1 4 1 1 1 4 1

$\boxed{Mo = 1}$ $\bar{x} = \frac{12(1) + 3 + 3(4)}{16} = \frac{27}{16} = 1.7$

AMO2. Cálculo de la moda en una variable con datos aislados presentados en tablas de frecuencias. Al igual que el caso anterior, también es muy común ejemplificar el cálculo de la moda representada en este formato, el cual sí se incluye en todos los libros de la muestra. En el siguiente ejemplo, el cálculo de la moda se pide en concreto, en la última pregunta del ejercicio (Briseño y Verdugo, p.192).

¿Cuál es el promedio del grupo?
¿Cuáles son la calificación más alta y la más baja?
¿Cuál es la calificación que obtuvieron más estudiantes?

El profesor escribió en el pizarrón la siguiente tabla:

Calificación	10	9	8	7	6	5	4	3	2
Núm. de estudiantes	1	4	6	8	5	3	2	3	3

AMO3. Cálculo de la moda de una variable discreta con datos agrupados en intervalos de clase. Este procedimiento, que consiste en obtener la moda para variables continuas o agrupadas en clases, sólo aparece en uno de los libros que analizamos. En el ejemplo que hemos seleccionado se debe identificar la marca de clase con mayor

frecuencia y determinar el punto medio para obtener el valor de la moda (Ver ejemplo presentado en AME5, tomado de Almaguer y cols., cuaderno, p.259).

AMO4. Cálculo a partir de un diagrama de barras o histograma. En los libros de texto mexicanos analizados, los gráficos no se incluyen dentro de este tema.

Todos los libros de nuestra muestra coinciden en explicar los diversos métodos de cálculo que se citan para la media, mediana y moda, aunque con algunas excepciones de algoritmos que no se tratan, como obtener la media con el uso de calculadora u ordenador. Por otro lado, la técnica de invertir el algoritmo de la media o buscar una distribución dada la media, no suelen enseñarse en este nivel de estudios por ser más complejos, pero que consideramos necesarios para reforzar tanto la comprensión de este concepto, como la idea de distribución por parte de los estudiantes.

A continuación se presenta en la Tabla 2.5.6.1 un resumen que contiene los algoritmos de cálculo de las medidas de tendencia central que se incluyen en los libros de texto de nuestra muestra.

Tabla 2.5.6.1. Algoritmos y procedimientos que se presentan en los libros de texto analizados.

	Almaguer y cols., libro	Almaguer y cols. cuaderno	Briseño y Verdugo,
AM1. Media datos aislados	x	x	x
AM2. Media ponderada	x		x
AM3. Media datos agrupados	x	x	
AM4. Cálculo gráfico media			x
AM5. Cálculo con calculadora u ordenador media			
AM6. Invertir algoritmo			
AM7. Buscar distribución dada la media			
AME1. Mediana datos aislados (nº impar)	x	x	x
AME2. Mediana datos aislados (nº par)	x	x	x
AME3. Mediana, tabla de frecuencias (nº par)	x	x	
AME4. Mediana, tabla de frecuencias (nº impar)	x	x	
AME5. Mediana datos agrupados			
AME6. Cálculo gráfico mediana			
AMO1. Moda, datos aislados	x	x	x
AMO2. Moda, datos en tabla	x	x	x
AMO3. Moda, datos agrupados		x	
AMO4. Cálculo gráfico moda			

En cuanto a los procedimientos de cálculo para la mediana encontramos entre los más típicos: obtener la mediana en datos aislados en distribuciones pares e impares, y también hallarla mediante su representación en tablas de frecuencias, que son los más sencillos para introducir a los estudiantes en este tema. Por el contrario, no se propone aún obtener la mediana a partir de datos agrupados en clases, ni a partir de gráficos.

Para la moda, que es un concepto de menor dificultad, aparecen la mayoría de los algoritmos propuestos en la tabla, incluso, a partir de distribuciones de datos agrupados en clases, excepto encontrar la moda a partir de gráficos, como en los casos anteriores.

Todo lo anterior concuerda con la información proporcionada por Cobo (2003), en cuanto a los algoritmos más frecuentes en los libros españoles para las tres medidas de centralización. Por otro lado, también es semejante en el sentido de que son pocos los libros españoles en que se tratan los algoritmos de cálculo más complejos tanto para la media, como para la mediana. También es baja la proporción de los libros que explican procedimientos a partir de gráficos o diagramas, ya que sólo se muestran para el caso de la de la moda y aún en menor frecuencia para la mediana, y respecto a la media, no se encontraron.

2.5.7. ARGUMENTOS

Los argumentos son útiles para validar y hacer comprensibles a los estudiantes los procedimientos, propiedades, definiciones, así como las representaciones que se enlazan en la resolución de problemas sobre las medidas de tendencia central. A continuación citaremos aquellos que hemos localizado en los libros de texto mexicanos, como parte de los elementos de significado que nos interesa analizar.

Estos argumentos aparecen en casos muy concretos, más bien se refieren a las conclusiones que resultan después de la explicación general del procedimiento que se indica para cada uno de los parámetros, como en los siguientes casos:

A1. Justificación de ejemplos o contraejemplos. Es frecuente encontrar en los libros ejemplos de media, mediana y moda que explican su resolución y acompañados de algún argumento que justifique su resultado y su aplicación. Al final del siguiente ejemplo, aparece su respectivo argumento como consecuencia de la resolución de un problema planteado sobre la moda (Almaguer y cols., p. 353-354).

A) Moda

En un grupo de secundaria se preguntó a los alumnos sobre sus años cumplidos, porque se deseaba conocer la edad que predominaba en el grupo; se obtuvieron las siguientes respuestas:

11-12-12-12-12-13-13-13-13-13-
13-13-13-13-13-13-13-13-13-13-
14-14-14-14-14-14-14-14-14-14-
14-15-15-15-15-15-15-16-16-16

Edad	f
11	1
12	4
13	15
14	11
15	6
16	3
	40

El dato de mayor frecuencia fue 13; esto significa que la edad que predominaba en el grupo era 13 años. La moda del conjunto de datos dado es 13.

A2. Uso de gráficos cuando la argumentación verbal o simbólica se apoya en las propiedades visuales de un gráfico auxiliar. En los libros que hemos revisado no se incluyen para este tema ejemplos que muestren los resultados de los cálculos obtenidos de media mediana o moda, a partir de la interpretación de gráficos.

A3. Razonamientos algebraicos deductivos. No hemos encontrado ejemplos en los libros analizados.

A4. Razonamientos verbales deductivos. Este tipo de argumentos generalmente se utilizan para interpretar los resultados obtenidos de algún cálculo realizado. Incluimos a continuación el siguiente ejemplo de uno de los libros analizados (Briseño y Verdugo, p. 195).

Sin embargo, no siempre es posible suprimir datos para que los valores de tendencia central resulten significativos. Por ejemplo:

La media, mediana y moda de estos datos 3, 5, 7, 3, 15, 16, 3, 15 son:

Media: $\frac{3(3) + 5 + 7 + 2(15) + 16}{8} = 8.375$

Mediana: 3, 3, 3, **5**, **7**, 15, 15, 16, $\frac{5 + 7}{2} = 6$ Moda: **3**

Como los valores son muy diferentes unos de otros, aunque se suprima algún dato, es difícil obtener conclusiones.

Presentamos en la Tabla 2.5.7.1, el tipo de argumentos que se incluyen en los libros seleccionados.

Tabla 2.5.7.1. Argumentos que presentan los libros analizados

	Argumentos	Almaguer y cols., libro	Almaguer y cols. cuaderno	Briseño y Verdugo
ARG 1	Justificación de ejemplos	x		x
ARG 2	Uso de gráficos			
ARG 3	Razonamiento algebraico deductivo			
ARG 4	Razonamiento verbal deductivo	x	x	

Los argumentos tienen como finalidad concluir con la resolución de algún problema planteado una vez unificados todos los elementos de significado que se ponen en juego (procedimientos, algoritmos, propiedades, definiciones y representaciones). En el caso de las medidas de tendencia central, tienen su aplicación en el sentido de asentar la respuesta mediante una interpretación "verbal" o traducir los resultados obtenidos.

Como podemos observar, en nuestros libros se suele complementar con al menos algún tipo de argumento los problemas que se utilizan para exponer estos conceptos, aunque no en todos los casos. Por ejemplo: para justificar la resolución de problemas o para proporcionar algún razonamiento verbal, así como para validar propiedades.

No incluimos el uso de argumentos para interpretar gráficos o diagramas, ya que ese tema es posterior al de medidas de tendencia central.

2.6. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO CURRICULAR

Este capítulo lo hemos dedicado a la descripción curricular, en el ámbito internacional, español y mexicano, de los programas de estudio de matemáticas para Secundaria y Bachillerato, comparando también con el americano. Posteriormente nos hemos centrado en el estudio de los libros de texto usados por los alumnos de la muestra en la parte correspondiente a la Estadística donde se abarca el tema de las medidas de tendencia central. La finalidad de establecer la relación con los ítems que se incluyen en el cuestionario que resolvieron todos los estudiantes de la muestra. De esta manera podremos interpretar y evaluar las respuestas dadas por ellos, que presentaremos en los siguientes capítulos.

El estudio permite observar las tendencias actuales en el entorno mundial acerca de las reformas curriculares en cuanto al estudio de la Estadística. Destacan iniciativas que señalan la necesidad de ampliar y reforzar conocimientos encaminados a desarrollar el pensamiento estadístico de los estudiantes y a más temprana edad, a hacer un uso continuo de la Estadística mediante su aplicación a situaciones de la vida diaria y para que a través de la práctica y uso de datos los estudiantes desarrollen destrezas que les permita reconocer e interpretar el comportamiento de fenómenos cotidianos.

Sobre las diferencias con los contenidos españoles

Como resultado del estudio podemos ver la semejanza entre México y España en lo que concierne al estudio de la Estadística en la Secundaria. En su nueva propuesta, ambos currículos recomiendan que desde los primeros cursos de Estadística sean los mismos estudiantes quienes realicen las tareas de la búsqueda de información, es decir, que aprendan a recopilar datos, organizarlos, analizarlos y saber representarlos, con lo que podrán desarrollar un pensamiento crítico sobre sus resultados y aplicarlos a fenómenos reales.

Para el tema de medidas de tendencia central, ambos contextos establecen conocer las propiedades de la media aritmética para resolver problemas; utilizar la media, la mediana y la moda para hacer comparaciones de dos o más conjuntos de datos referidos a una misma situación; agrupación de datos en intervalos; tablas de frecuencia; histogramas y polígonos de frecuencia. Para el estudio de la mediana se señala el uso de gráficas de cajas para el análisis de distribución de dos poblaciones o más. Finalmente, la incorporación de la hoja de cálculo y el uso de la calculadora.

Cabe señalar que los estudiantes de nuestra muestra, estaban cursando el anterior plan de estudios (1993) y, por lo tanto, los libros que revisamos también eran diseñados dentro de ese mismo plan. A diferencia del currículo vigente, observamos que el anterior programa de estudios propone de manera incipiente algunos los elementos que consideramos influyentes en el desarrollo del pensamiento crítico estadístico en los estudiantes. Uno de estos elementos es que para la enseñanza de las medidas de centralización, los estudiantes deben ser los encargados de buscar la información, y no que las aprenden a partir de conjuntos de datos dados, principalmente numéricos y con pocas aplicaciones a situaciones reales. Encontramos también que la interpretación de gráficos no corresponde a este tema, sino que forma parte del siguiente, relativo a medidas de dispersión. Un aspecto añadido es que tampoco se pone énfasis en la interpretación de los datos, es decir, en el desarrollo de una valoración crítica por parte de los estudiantes respecto al comportamiento del fenómeno estudiado o en cuanto a los resultados obtenidos sobre algún problema.

Sobre las diferencias entre los contenidos de las medidas de tendencia central en Secundaria y Bachillerato

Otro punto de interés se orienta a detectar las diferencias que caracterizan, por un lado, al currículo de Secundaria, y por otro, al de Bachillerato (bajo los que fueron guiados los estudiantes de nuestra muestra). En primer lugar, tenemos que señalar que el currículo de Secundaria es nacional, es decir, existe uno que rige el Sistema Educativo Básico en todo el país, en sus distintas modalidades, aunque respeta la diversidad cultural.

En cuanto al currículo de Bachillerato, y en específico del IPN, pretende entre sus objetivos articular los conocimientos adquiridos en cursos anteriores con las ideas fundamentales de la Estadística descriptiva, de tal manera que los estudiantes amplíen sus conocimientos y aprendan a investigar. Plantea la importancia de recolectar datos y que el alumno sea capaz de detectar, por ejemplo, la fidelidad de los datos obtenidos de una encuesta.

Igualmente que el alumno pueda organizar, presentar y posteriormente analizar datos, con lo que utilizará valores que los representen, como las medidas de centralización, que en este nivel, además de estudiar la media, mediana y moda, ya incorpora la media armónica y media geométrica.

En general, el currículo de Bachillerato pone especial énfasis en que los estudiantes, además de ser lectores, estén preparados para establecer sus propias conclusiones y mediante un pensamiento crítico, tomar decisiones en situaciones de incertidumbre.

Sobre las diferencias entre los libros analizados en esta investigación y la de Cobo (2003)

En los contenidos de los libros mexicanos que analizamos, se propone un tratamiento breve al tema de medidas de tendencia central. De los objetos matemáticos relacionados con ellos, se pone mayor énfasis en los algoritmos de cálculo. Observamos que los textos se centran más en explicar la definición y cálculo de la media aritmética que el de la moda y mucho en menos en el de la mediana, aunque sí presentan distintas formas de resolución. Por otra parte, la mayor parte de campos de problemas que contienen son más típicos para ejemplificar la media y con los ejemplos fundamentales para moda y mediana.

Se utiliza lenguaje y simbología básicos para conocer estos conceptos. También contienen ejemplos para datos agrupados en intervalos y representados en tablas de frecuencias. No se consideran para este tema las representaciones gráficas ni diagramas. Por otra parte, las propiedades de las medidas de tendencia central no se consideran en la enseñanza para este nivel de estudios, aunque sólo algunas se encuentran en los ejemplos de manera implícita. Lo mismo sucede con los argumentos que son escasos para justificar alguna respuesta.

El estudio que nos antecede (Cobo, 2003), coincide con el nuestro, ya que también se ha detectado en la amplia variedad de libros analizados, que se da mayor importancia a las definiciones y algoritmos de las medidas de centralización, que a las propiedades y argumentos. Lo anterior conlleva sólo a tener nociones del tema. En consecuencia, los conceptos “media, mediana y moda” no son comprendidos en su totalidad por parte de los estudiantes, y por lo tanto, no alcanzan a diferenciarlos entre sí ni tampoco sus aplicaciones.

CAPÍTULO 3

INVESTIGACIONES PREVIAS

3.1. INTRODUCCIÓN

En este Capítulo describimos brevemente las investigaciones que se han realizado sobre comprensión de las medidas de posición central, con objeto de fundamentar adecuadamente nuestro trabajo. Gran parte de nuestra investigación se interesa por explicar las dificultades y errores de los alumnos cuando se les pide realizar ciertas tareas donde tienen que calcular o interpretar la media, mediana o moda. Los resultados muestran que estas dificultades no aparecen de forma aleatoria, sino que se repiten en alumnos de todos los niveles y de diferentes contextos educativos, y que también dependen de las variables de las tareas propuestas.

Las investigaciones de cada autor analizan algunos puntos aislados en relación con la media, a veces con la mediana, pero no abordan de forma sistemática los tres promedios, como hacemos en nuestra investigación. Estas investigaciones se han llevado a cabo, en su mayoría con alumnos universitarios y en algunos casos con alumnos de entre 10 y 15 años; en pocos casos en estudiantes de los cursos de Bachillerato y final de la Secundaria, donde se centra nuestro trabajo.

Para poder obtener una panorámica de los puntos que han sido más o menos investigados en este capítulo se clasifican las investigaciones revisadas según los elementos de significado considerados en nuestro marco teórico, es decir, abordaremos la investigación sobre comprensión de campos de problemas, algoritmos y capacidad de cálculo, lenguaje, conceptos y definiciones, propiedades, y capacidad de argumentación.

El desarrollo de los antecedentes se inicia a partir de las síntesis que realizaron Batanero (2000) y Cobo (2003), ampliándolo con las nuevas investigaciones que sobre el tema se han llevado a cabo en los últimos años, y que han sido publicados en las actas de los Congresos Internacionales de Educación Estadística (ICOTS), las revistas Journal of Statistics Education, Statistics Education Research Journal, revistas y congresos de educación matemática, así como con los trabajos reseñados en Shaughnessy (2007).

Dedicamos también un apartado al estudio del desarrollo cognitivo relacionado con las medidas de posición central, el efecto que tiene la enseñanza e investigaciones centradas en los profesores de matemáticas. Todo ello con la finalidad de enmarcar nuestro estudio y poder comparar nuestros resultados con los de las investigaciones que nos anteceden.

3.2. INVESTIGACIONES SOBRE RECONOCIMIENTO DE PROBLEMAS / SITUACIONES

En nuestro marco teórico la actividad matemática se liga siempre a las prácticas significativas realizadas en la resolución de campos de problemas, de donde surgen los objetos matemáticos. En consecuencia, un primer punto en la comprensión de las medidas de tendencia central es ser capaz de reconocer los problemas y situaciones, cuya solución requiere de estos estadísticos. En esta sección describimos las investigaciones relacionadas.

Pollatsek, Lima y Well (1981) propusieron a alumnos universitarios problemas que involucran la idea de media como valor esperado de una variable aleatoria. En el problema planteado se les indicaba que se había tomado una muestra de cinco elementos de una población de promedio dado y se les daba cuatro de los valores preguntándoles cuál sería el valor más probable para el quinto elemento de la muestra. La solución correcta es dar un valor cercano a la media en la población, pues la media es el valor esperado o más probable de una variable aleatoria.

En lugar de dar esta solución, los alumnos tratan de encontrar el valor faltante para que la media en la muestra sea exactamente igual a la media de la población, incluso aunque el valor que se necesita sea poco probable. Es decir, invierten el algoritmo de la media para encontrar la incógnita que falta o bien encuentran el valor omitido mediante ensayo y error. Los autores, Pollatsek, Lima y Well (1981), indican que los estudiantes esperan que la media de una muestra sea idéntica a la de la población de donde se ha extraído esa muestra, y por tanto no aprecian la variabilidad aleatoria de la media en diferentes muestras.

Los resultados se repitieron en la investigación de Tormo (1993) con alumnos de entre 11 y 16 años, donde más del 30% de los participantes identificaron incorrectamente un valor diferente de la media como valor más probable. Este hecho puede ser debido a que las distribuciones y ejemplos que se presentan en los libros insisten en la representatividad de las muestras, pero no enfatizan la idea de variabilidad. Por ello los alumnos realizan una generalización indebida de la idea de representatividad.

Uno de los problemas fundamentales es resumir un conjunto de de datos desorganizados usando una medida que capture la esencia de los datos y los represente adecuadamente. Incluso desde las primeras experiencias en el estudio de la estadística, se debe tratar que los alumnos identifiquen qué es lo que hay típico en los datos.

Russell y Mokros (1991), se centran en la capacidad que los estudiantes tienen para buscar un valor típico o representativo para un conjunto de datos. Para ellos, la comprensión de la idea de "valor típico" implica tres tipos de diferentes capacidades:

- Dado un conjunto de datos, comprender la necesidad de emplear un valor central, la información que cada medida de centralización da respecto al conjunto de datos y elegir la más adecuada, dependiendo del tipo de dato y la naturaleza del problema.
- Construir un conjunto de datos que tenga un promedio dado.
- Comprender el efecto que, sobre cada uno de los promedios (media, mediana o moda), tiene un cambio en todos los datos o parte de ellos.

Russell y Mokros (1995), estudiaron también las concepciones que un grupo de 21 alumnos de 10 a 14 años tiene sobre los valores de tendencia central, empleando para ello la técnica de entrevista. Les propusieron a los estudiantes tareas de construcción e interpretación que trataban las capacidades anteriores, preguntándoles después sobre las soluciones aportadas y las estrategias seguidas. Las tareas de interpretación incluyeron la descripción, resumen y comparación de dos conjuntos de datos. Las de construcción consistían en elaborar un conjunto de datos teniendo un promedio dado (media, mediana, moda). Los autores indican que los alumnos de su investigación fallaron en las tareas, siendo las más difíciles las tareas de construcción. También sugieren que los alumnos muestran poca comprensión de la idea de valor típico y que tienen muchas dificultades en construir un conjunto de datos que tenga un promedio dado, limitándose a dar distribuciones que repiten el mismo valor o unos pocos valores diferentes.

La idea de representante de un conjunto de datos es fundamental cuando se quieren comparar dos conjuntos de datos, pues tanto los valores centrales como las medidas de dispersión son las características estadísticas que hacen posible esta comparación.

Estepa y Batanero (1994), en una investigación realizada con estudiantes del curso preuniversitario, donde estudian sus concepciones sobre la asociación estadística, plantean el problema de decidir el efecto de un tratamiento sobre la presión sanguínea de un grupo de pacientes antes y después del tratamiento (comparación de muestras relacionadas), y también la comparación del nivel de azúcar en sangre de niños y niñas (comparación de dos muestras independientes). En ambos problemas observaron casos de alumnos que basan la comparación de dos conjuntos de datos en valores aislados, en lugar de usar las medidas de centralización. Por ejemplo, comparan los valores máximos o mínimos del conjunto de datos, o bien, inspeccionan visualmente la distribución global. Incluso, algunos alumnos suponen que para que haya diferencias en muestras relacionadas, éstas deben ser constantes en toda la muestra, es decir, manifiestan una concepción determinista y no aleatoria del problema de comparación de datos.

Cai (1995), en otra investigación realizada con 250 estudiantes de 6º curso (11-12 años) en Estados Unidos, plantea una variedad de problemas y estudia la comprensión del algoritmo de cálculo y el efecto de las instrucciones que se da para resolver los problemas. Observó que el 88% de los alumnos conocen el algoritmo de cálculo de la media, pero sólo el 50% de ellos son capaces de aplicar este concepto para resolver un problema abierto. Este resultado muestra que la enseñanza consigue una comprensión superficial de la media. Su investigación también mostró la utilidad de usar problemas abiertos para acceder a las concepciones y estrategias de los estudiantes respecto a la media. Este es uno de los motivos, por lo que hemos decidido utilizar este tipo de ítems en nuestra investigación.

En resumen, la investigación sobre la comprensión de los campos de problemas de las medidas de tendencia central es más escasa que la investigación sobre capacidad de cálculo o comprensión del concepto. Además, se ha centrado preferentemente en la media, y no en las otras medidas de tendencia central (mediana y moda). Tampoco se ha estudiado la dificultad relativa de los diferentes campos de problemas en la misma muestra de estudiantes.

3.3. INVESTIGACIONES SOBRE CAPACIDAD DE CÁLCULO Y COMPRENSIÓN DE ALGORITMOS

Otro punto en el marco teórico son las acciones que realizan los sujetos para resolver los problemas una vez identificados y que se convierten en objetos de enseñanza. Cobo (2003) en su investigación describió diferentes algoritmos de cálculo para cada medida de centralización, incluyendo el cálculo con datos aislados, el cálculo a partir de tablas o gráficos, así como la inversión de los algoritmos. Su investigación mostró que el algoritmo de la media no es bien comprendido, ya que aunque la mayoría de los alumnos de su estudio fueron capaces de dar una definición correcta de media, sólo alrededor del 20% de los alumnos fue capaz de invertir el algoritmo para resolver un problema. Respecto a este punto, hemos encontrado las investigaciones que describimos en esta sección, que no contemplan por igual ni todas estas medidas de centralización, ni todos los algoritmos.

Pollatsek, Lima y Well (1981), realizaron investigaciones sobre el cálculo de medias ponderadas y encontraron que una proporción importante de alumnos, incluyendo a los universitarios, no ponderan adecuadamente los valores cuando se les plantea un problema de media ponderada, utilizando en su lugar el cálculo de la media simple. Dadas las medias de dos conjuntos diferentes de datos, los estudiantes simplemente las suman y dividen por dos para calcular la media total, incluso si los conjuntos de datos tienen tamaños muy diferentes. Esto lleva a una pobre estimación de la solución, y además, se observan que los estudiantes no son conscientes del error cometido. Este mismo resultado, que se muestra también en muchas investigaciones posteriores y en alumnos de todas las edades, sugiere una aplicación mecánica del algoritmo de cálculo de la media.

Para tratar de explicar estos resultados, Pollatsek, Lima y Well dividen el conocimiento de la media en conocimiento funcional, que trata sobre el aprendizaje del concepto; conocimiento computacional, que se centra en los algoritmos de cálculo; y conocimiento analógico, que incluye imágenes visuales del concepto de media. Pollatsek, Lima y Well sugieren que si la comprensión de la media es sólo computacional, cualquier resultado se puede admitir como válido. No se percibe si el resultado es o no razonable y los alumnos no detectan el efecto de un valor cero en la distribución y no ponderan los valores al calcular la media. En nuestra investigación ampliaremos estos tipos de conocimientos, de acuerdo a nuestro marco teórico, donde se tienen en cuenta, además de los conceptos y procedimientos, las propiedades, argumentos y lenguaje matemático. La comprensión de los promedios implica la adquisición de todos estos tipos de elementos y su puesta en relación; es progresiva y requiere un tiempo adecuado de aprendizaje y el trabajo con una variedad de situaciones y contextos.

Sobre el cálculo de medidas de tendencia central a partir de tablas de frecuencia, los alumnos tienen mucha dificultad, sobre todo cuando los datos se presentan agrupados en intervalos de clase. La tabla de frecuencias es una estructura matemática compleja y muchos alumnos confunden conceptos como: clases, marcas de clase, frecuencias relativas y absolutas, acumuladas y ordinarias, provocando errores en la interpretación y en el cálculo de los estadísticos. Estas dificultades a veces no son percibidas por los profesores y no se dedica un tiempo suficiente a la lectura de las tablas de frecuencias.

En relación con el cálculo de medidas de centralización a partir de estas tablas, Li y Shen (1992), al analizar proyectos de estadística realizados por los estudiantes, indican que cuando los datos se agrupan en intervalos, los estudiantes olvidan que cada uno de estos grupos debería ponderarse de modo distinto y sólo calculan la media de todas las marcas de clase. Este error podría estar relacionado con el que anteriormente hemos citado sobre cálculo de medias ponderadas y que también fue descrito en Carvalho (2001).

Respecto al algoritmo de cálculo, en ocasiones éste se aplica sin entender su significado. Cai (1995), encontró en su investigación que mientras la mayoría de alumnos de 12-13 años eran capaces de aplicar adecuadamente el algoritmo para calcular la media a partir de un conjunto de datos dado, sólo algunos pudieron determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos conocida su media, es decir, fueron capaces de invertir el algoritmo. Entre aquellos que resolvieron el problema, sólo algunos lo hicieron a partir de un uso comprensivo del algoritmo, multiplicando el valor medio por el número de valores para hallar la suma total y de ahí calcular el valor faltante. La mayoría de los estudiantes de su investigación usó el ensayo y error para encontrar la distribución a partir del promedio. En la investigación de Cobo (2003), sin embargo, y en nuestro propio trabajo previo (Mayén, 2006a y b), la mayor parte de los estudiantes de Educación Secundaria españoles y de Bachillerato mexicanos podían invertir el algoritmo de la media, aunque los estudiantes de nuestra investigación eran mayores que los de la investigación citada (12 y 16 años los alumnos de Cobo, y 16-18 en nuestro trabajo).

En general, la falta de comprensión del algoritmo es interpretada por Russell y Mokros (1995) como resultado de una enseñanza basada específicamente en la introducción del algoritmo de cálculo, sin dotar del significado intuitivo a las medidas de centralización y sin proporcionar ejemplos adecuados de aplicación. El no tener en cuenta los conocimientos informales previos de los estudiantes ocasiona la pérdida de las intuiciones sobre estas medidas de centralización, quedando sólo el algoritmo, carente de significado. Por ello, en nuestro trabajo los ítems han sido escogidos de modo que representen situaciones familiares y significativas para los estudiantes.

Problemas en la diferenciación de algoritmos de cálculo de la mediana según tipos de datos, han sido investigados por Schuyten (1991), que afirma que incluso los alumnos universitarios encuentran difícil aceptar que se pueden emplear dos algoritmos diferentes de cálculo para una misma medida de centralización, por ejemplo, cuando se tiene un número par o impar de datos. Tampoco les resulta fácil de comprender que puedan obtenerse valores distintos para el mismo parámetro, al variar la amplitud de los intervalos de clase. No comprenden como se pasa de la definición de la mediana como "valor de la variable estadística que divide en dos efectivos iguales a los individuos de la población supuestos ordenados por el valor creciente del carácter", hasta su cálculo, pues en éste usamos fórmulas de interpolación (para datos agrupados) que no se relacionan directamente con la definición de mediana.

Por su parte, Estepa (1993), sugiere que los alumnos se encuentran con obstáculos para calcular la mediana cuando se parte de una representación gráfica de las frecuencias acumuladas. En el caso de que la variable no esté agrupada en intervalos, la gráfica de frecuencias acumulada toma forma de escalera, pero los estudiantes no están acostumbrados a las funciones discontinuas a saltos, por lo que dudan si el valor de la mediana corresponde a un valor de la variable o al siguiente. En caso de variables agrupadas en intervalos, una vez construida la gráfica de frecuencias acumuladas, el estudiante tiene que interpolar para hallar el valor de la mediana. En este caso se producen errores por fallo de razonamiento proporcional. Los alumnos no tienen tampoco suficiente dominio del manejo de desigualdades que aparecen asociadas a la definición de mediana y a su cálculo.

Otros errores de cálculo en media, mediana y moda, que fueron encontrados por

Carvalho (1998; 2001) y Carvalho y César (2000, 2001, 2002) al analizar las producciones escritas por un grupo de 182 alumnos de 13-14 años resolviendo tareas estadísticas de las que habitualmente realizan en sus clases, son:

- Moda: Tomar la mayor frecuencia absoluta, en lugar de tomar el valor de la variable que aparece con mayor frecuencia. Subyace en este error una confusión entre frecuencia y valor de la variable, que ha sido también descrita en la investigación de Ruiz (2006) sobre comprensión de la variable aleatoria.
- Mediana: No ordenar los datos para calcular la mediana, por entender la mediana como el centro "no ordenado" de la distribución; calcular el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente, es decir, confundir frecuencia con valor de la variable; calcular la moda en vez de la mediana; tomar como mediana el valor central de las frecuencias de la tabla.
- Media: Hallar la media de los valores de las frecuencias (de nuevo se confunde frecuencia y valor); no considerar la frecuencia absoluta de cada valor en el cálculo de la media, es decir, no ponderar los datos.

Por su parte, Garret y García Cruz (2005), en un estudio con alumnos españoles y angoleños de secundaria, obtiene las siguientes estrategias incorrectas en el cálculo de la media:

- Dividir el resultado obtenido por la suma de los valores de la variable, confundiendo de nuevo frecuencia y valor de variable.
- Usar el algoritmo de la media ponderada pero determinando de forma errónea la suma total.
- Usar correctamente el algoritmo pero redondeado el resultado encontrado.
- Elegir un dato cualquiera como media, para la solución pretendida.

Los autores indican que es notorio el número de alumnos que dan un determinado valor como resultado (correcto o incorrecto) sin mostrar las operaciones (46.8%), algo que les ha limitado en profundizar más sobre las estrategias utilizadas.

En cuanto a las estrategias de cálculo, Gattuso y Mary (1996; 2002), observaron que la comprensión conceptual no va paralela al número de años de instrucción en la materia. Así también, además de estudiar el efecto del contexto y presentación de los datos, analizaron la evolución de la comprensión del algoritmo de cálculo de la media ponderada, y las estrategias empleadas en una muestra de 598 alumnos de 14 a 17 años, aplicando problemas escritos con diferentes contextos y forma de representación.

Identificaron las siguientes variables didácticas que afectan a la dificultad de las tareas: formato (tabla, serie de números, gráfico), valores de los datos, valores de las variables y de las frecuencias. Observaron el efecto de estas variables y también la mejora con la instrucción. Encontraron diferencias en las estrategias usadas por los distintos grupos, aunque éstas no fueron muy persistentes en el tiempo. La principal estrategia fue usar directamente la fórmula de la media ponderada; en otros casos los chicos repetían simplemente el valor tantas veces como apareciese en el cálculo de la media; otros traducen las frecuencias a porcentajes o las presentan en forma de fracción.

Detectaron algunos errores, como por ejemplo, utilizar fórmulas incorrectas para calcular la media, no dividir por el total de la muestra o no tener en cuenta el peso de los distintos valores de la variable. Las estrategias intuitivas pasan a estrategias algebraicas con la instrucción, aunque la dificultad en el uso del cero para el cálculo de la media permanece en todos los niveles educativos estudiados.

3.4. INVESTIGACIONES SOBRE COMPRENSIÓN DEL LENGUAJE

En el trabajo matemático los estudiantes deben ser capaces de asociar los términos matemáticos, símbolos y representaciones gráficas a los diferentes conceptos y procedimientos representados. Todo ello se engloba en la categoría de “lenguaje” en nuestro marco teórico. En esta sección describimos las investigaciones relacionadas con la comprensión del lenguaje.

Russell y Mokros (1991) indican que en la vida cotidiana aparecen situaciones en las que se encuentra de forma intuitiva la noción de representatividad, lo que permite a los estudiantes relacionar los significados de media o promedio. Esta comprensión no se adquiere hasta que se concibe el conjunto de datos como un todo, y no como un agregado de valores. Los autores clasificaron en cuatro categorías los significados incorrectos atribuidos por los estudiantes a la palabra media: “valor más frecuente” (sería una confusión entre media y moda), "valor razonable" (que es el significado coloquial del término), "punto medio" (confusión con la mediana) y "algoritmo" (este es un significado restringido). Cada uno de estos aspectos puede ser cierto en un caso concreto; por ejemplo, en una distribución simétrica la media coincide con la mediana y la moda; por lo tanto, la media sería el valor más frecuente y a la vez el punto medio. Pero el significado puede ser inapropiado en otros casos e inducir a errores. Por ello, Russell y Mokros señalan la necesidad de usar diferentes contextos y representaciones en la enseñanza de este concepto matemático.

Eisenbach (1994), pide a estudiantes universitarios de un curso introductorio de estadística que interpreten la frase: "¿Qué quiere decir que el salario medio de un empleado es 3.600 dólares?". Sus respuestas, tales como: "es el salario central; la mitad de los trabajadores ganan más de 3600 dólares y la otra mitad menos de esa cantidad", o "que la mayoría de los empleados gana alrededor de 3.600 dólares", muestran la confusión terminológica entre las palabras "media", "mediana" y "moda". También en nuestro trabajo previo (Mayén, 2006), algunos estudiantes al pedirles calcular la mediana, calcularon la media, lo que atribuimos a la posible existencia de un conflicto semiótico entre los dos conceptos.

Interpretación de gráficos

Las representaciones gráficas son especialmente difíciles para los alumnos, tal vez debido a que en la enseñanza tradicional no se les presta tanta atención como merecen. Se supone que la lectura de los gráficos estadísticos es obvia, pero cada gráfico estadístico tiene sus propios convenios que algunos alumnos no conocen. A este respecto, Curcio (1989), describe tres niveles distintos de comprensión de los gráficos:

a. "Leer los datos": este nivel de comprensión requiere una lectura literal del gráfico; no se realiza interpretación de la información contenida en el mismo.
b. "Leer dentro de los datos": incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico; requiere la habilidad para comparar cantidades y el uso de otros conceptos y destrezas matemáticas.
c. "Leer más allá de los datos": requiere que el lector realice predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones que no se reflejan directamente en el gráfico.

Curcio encontró que las principales dificultades aparecen en los dos niveles superiores ("leer dentro de los datos" y "leer más allá de los datos"). También mostró el efecto de la edad y el curso escolar en la comprensión de los gráficos. Friel, Curcio y Bright (2001) amplían la clasificación anterior definiendo un nuevo nivel "*leer detrás* *de los datos"*, consistente en valorar críticamente el método de recogida de datos, su validez y fiabilidad, así como las posibilidades de extensión de las conclusiones.

Cuando los niveles se aplican, no sólo a la interpretación de los gráficos sino a su valoración crítica, se modifican ligeramente (Aoyama, 2007). Una vez que los estudiantes llegan a la fase superior en la clasificación anterior, todavía podríamos diferenciar tres grupos, en función de su capacidad crítica, respecto a la información reflejada en el gráfico:

- *Nivel Racional/Literal.* Los estudiantes leen correctamente el gráfico, incluyendo la interpolación, detección de tendencias y predicción. Para responder la pregunta planteada, usan las características del gráfico, pero no cuestionan la información, ni dan explicaciones alternativas.
- *Nivel Crítico.* Los estudiantes leen los gráficos, comprenden el contexto y evalúan la fiabilidad de la información, cuestionándola a veces, pero no son capaces de buscar otras hipótesis.
- *Nivel Hipotético:* Los estudiantes leen los gráficos los interpretan y evalúan la información. Forman sus propias hipótesis y modelos.

Todas estas dificultades influencian la determinación de promedios a partir de gráficos. Reading y Pegg (1996), estudiaron la forma en que los niños de 7º a 12º grado (12-18 años) reducen los conjuntos de datos, dándoles tareas semejantes presentadas en diferentes formatos (tablas, gráficos, numérica o verbalmente). Los autores encuentran que hay dos pautas de razonamiento distintas y que la forma en que se presentan los datos tiene influencia sobre la elección del método que se va a emplear. Observaron que algunos alumnos que eran capaces de dar un resumen de datos presentado en forma numérica, fracasaron en la tarea cuando los datos se presentaban por medio de un gráfico estadístico.

Por otro lado, los niños de su investigación mostraban dificultad a la hora de dar un argumento o justificar su respuesta de por qué se elegía una cierta medida de centralización. Encontraron, además, que los alumnos tienden a reducir los datos usando con mayor frecuencia las medidas de valor central que las de dispersión y que presentan más dificultades en este segundo concepto. Una conclusión similar es obtenida por Carvalho (1996; 1998; 2001), quien realizó investigaciones acerca de los errores frecuentes en el cálculo de promedios, y afirma que los alumnos presentan dificultades en la interpretación de los gráficos.

3.5. INVESTIGACIONES SOBRE COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS / DEFINICIONES

Son pocas las investigaciones que se centran en la comprensión de la definición de los promedios. Watson y Moritz (2000), analizaron el significado intuitivo dado por los estudiantes al término "promedio” realizando 137 entrevistas, 97 de ellas a una muestra inicial de estudiantes entre 3º curso de Primaria y 3º Curso de Secundaria (8 a 15 años). Para un gran número de los participantes en el estudio, un promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución (una idea próxima al concepto de mediana). Pocos de estos estudiantes relacionaron la palabra "promedio" con la moda y menos aún con la media aritmética. Al preguntar a los estudiantes qué quiere decir que el número medio de niños por familia es 2.3, obtienen respuestas correctas pero también casos en que se interpreta el 0.3 como un niño de 3 meses o una mujer embarazada de 3 meses, es decir, estos niños piensan que la media conserva el conjunto numérico.

Barr (1980), realizó un estudio con alumnos de entre 17 y 21 años. Concluyó que los estudiantes interpretan la mediana como el centro de “algo” sin comprender específicamente a qué se refiere, ya que no saben que una tabla de frecuencias sólo es un resumen de los datos, una representación alternativa de los datos y no son capaces de pasar de la tabla a la lista de valores.

Russell y Mokros (1991), identificaron varias interpretaciones de la definición de media por parte de alumnos de 11 a 14 años:

- Valor modal, que ocurre más frecuentemente: Estos niños tienen dificultades en invertir el algoritmo de la media o construir una distribución con media dada. Los autores piensan que esta concepción no permite a los niños ver la distribución como una unidad en sí misma;
- Media como una aproximación razonable (aunque no necesariamente precisa) al conjunto de datos (sería una idea próxima a la de valor esperado o como valor representativo): Tienden a identificar la media con situaciones de su vida diaria; la media representaría el conjunto de datos, pero no siempre sería calculable;
- Media como punto medio, es decir, como un valor en el centro del rango, idea que se aproxima más a la definición de mediana;

- Media como algoritmo: Son los niños que comprenden el cálculo de la media pero no dotan de un sentido a su definición ni tienen una comprensión profunda de la misma.

Los autores argumentan que sería necesario reforzar en los estudiantes significados más ricos de la media, por ejemplo, la idea de media como punto de equilibrio, que no se muestra intuitivamente en los niños de su investigación. Sugieren que otro contexto rico de significado sobre la media es el de reparto equitativo que traducen bien, y que se relaciona con el algoritmo de cálculo.

Otra interpretación diferente es sugerida por Konold y Pollatsek (2002), quienes añaden a las anteriores la concepción de la media como "señal en un proceso aleatorio o proceso con ruido en su terminología". Indican que esta es la concepción más útil de la media cuando se comparan dos conjuntos de datos. Los autores sugieren que la idea de media debería introducirse a partir de la comparación de dos conjuntos de datos, pues es en este problema donde toma su verdadero sentido. La concepción de reparto equitativo o valor típico está más ligada al análisis de datos, mientras que la concepción de media como señal en un proceso está más ligada a una toma de decisiones porque para ello es necesario detectar las tendencias (señales en la terminología del autor). Nosotros pensamos que esta concepción es muy sofisticada para los estudiantes de Secundaria y Bachillerato y sería preferible comenzar con las más simples descritas anteriormente. En consecuencia, esta última concepción no la hemos considerado en los problemas planteados en nuestro cuestionario.

3.6. INVESTIGACIONES SOBRE COMPRENSIÓN DE PROPIEDADES Y PROPOSICIONES

Las medidas de tendencia central pueden considerarse desde tres puntos de vista diferentes: como un valor numérico (el resultado que se obtiene al calcular un promedio), como una transformación de los datos (la operación de cálculo de un promedio) y como un resumen estadístico de los datos en una muestra, o bien, un parámetro estadístico en la población (Batanero, 2000). Algunos autores analizan la comprensión, de algunas de las propiedades numéricas, algebraicas o estadísticas de las medidas de centralización.

3.6.1. PROPIEDADES NUMÉRICAS

Mary y Gattuso (2005), investigaron las estrategias para la solución de problemas de la media, de un estudio realizado con 638 alumnos de 2°, 3° y 4° de secundaria, de 14 a 16 años de edad.

Los tres problemas analizados se formularon con la intención específica de verificar la capacidad que los alumnos tienen para calcular una media y de asentar los lazos que hay cuando se modifica un dato sobre el valor de la media. también, para probar la influencia que sobre la media tiene un dato igual a cero. Los resultados de dicho estudio hacen ver cómo el contexto de los problemas dados y el tipo de promedio influyen en el comportamiento de los alumnos y cómo las concepciones inadecuadas aparecen en ciertas situaciones y en otras no.

El impacto que tiene sobre la media incluir un dato igual a cero parece más fácil de comprender que el efecto de retirar un dato igual a cero. Igualmente, la adición de un dato igual a cero, se muestra más fácilmente que la de remplazar un dato diferente de cero por otro igual a cero. La primera concepción identificada, el cero neutro, es decir, considerar el cero como un elemento neutro, es una aplicación errónea de una propiedad de la estructura de grupo, que se traduce aquí en pensar que por «quitar un dato nulo, eso no hace cambiar nada a la media». La segunda concepción, proviene de una abusiva generalización de una representación de la media como resultado de un reparto igual.

3.6.2. PROPIEDADES ALGEBRAICAS

Pollatsek, Lima y Well (1981), realizaron una investigación acerca de las propiedades algebraicas de la media aritmética. Manifiestan que un concepto aparentemente sencillo como la media, presenta dificultades para estudiantes de entre 18 y 22 años que no pueden explicarse por la falta de atención o motivación. Así también, informan que los errores de cálculo resultan de la falta de comprensión de las propiedades algebraicas de los promedios.

Mevarech (1983), en línea a lo anterior, observó que los alumnos incluso de nivel universitario, suelen creer que un conjunto de números junto con la operación media aritmética constituye un grupo algebraico. La autora denomina “concepción de clausura” a la creencia incorrecta de que la media es una operación interna en el conjunto de datos. Cuando comienzan a estudiar la media, mediana y moda por primera vez, ya conocen operaciones aritméticas como la suma y la multiplicación e inconscientemente aplican la operación de “promediar” algunas de las propiedades de dichas operaciones, que no se cumplen en el caso de las medidas de centralización. Por ejemplo, la media no tiene la propiedad asociativa ni tampoco tiene elemento neutro, pero esto no es percibido por los estudiantes, quienes les asocian estas propiedades inadecuadamente.

Otra propiedad importante es hallar la media de la suma de variables estadísticas, propiedad que tiene dificultad para algunos alumnos de Secundaria en la investigación de Tormo (1993). Las operaciones con promedios son, en realidad, operaciones compuestas, lo que requiere un razonamiento numérico de segundo nivel. En consecuencia, el profesorado debe atender al razonamiento numérico de sus estudiantes y a su diversidad para asegurar el éxito de los objetivos educativos.

3.6.3. PROPIEDADES ESTADÍSTICAS

La media no es sólo un número o una operación que se realiza con los datos. Como estadístico tiene una serie de propiedades que han sido analizadas por diferentes autores. Una de las propiedades es que la media es un representante de los datos y en cierto modo, conociéndola, sabemos algo sobre la distribución de los valores de la variable. Goodchild (1988) observó que los estudiantes no relacionan correctamente un promedio con una distribución y al construir distribuciones hipotéticas, éstas no tenían forma acampanada como la distribución normal, lo cual se debe a la falta de comprensión de la media como medida de posición central de la distribución. Concluye que los estudiantes comprenden mejor aquellas propiedades de la media asociadas a la localización, que las asociadas a la idea de distribución.

Russell y Mokros (1991), realizaron otra investigación para explorar las ideas previas de los estudiantes sobre el valor típico, representativo o medio, y encontraron que los alumnos más jóvenes desarrollan una idea de media como un indicador razonable del centro de la distribución, lo que supone un paso importante para la comprensión de otra idea más compleja, de la representatividad. Indica que esta idea aparece sobretodo cuando se pide a los estudiantes comparar dos conjuntos de datos y ello les obliga a pensar en un representante de cada conjunto.

Siguiendo con la idea de la media como un valor "típico" o "representativo" de los datos, Campbell (1974), observa que debido a ello, se tiende a situarla en el centro del recorrido de la distribución, propiedad que es cierta para distribuciones simétricas. Pero cuando la distribución es muy asimétrica, la media se desplaza hacia uno de los extremos y la moda o la mediana serían un valor más representativo del conjunto de datos. Navas, Batanero y Godino (1997), también encuentran una confusión generalizada respecto a las posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas en los futuros profesores.

Pollatsek, Lima y Well (1981), trataron de determinar las concepciones que alumnos universitarios tienen sobre el valor esperado de la observación de una variable aleatoria, de la que se conoce su esperanza matemática. Observaron que los estudiantes esperan que la media de la muestra sea idéntica a la de la población, es decir, no aprecian la variabilidad aleatoria de la misma. Por ello, no consideran los valores atípicos cuando tienen que dar una predicción sobre el valor de la media en una muestra; tratan siempre de ajustar dicha predicción al valor esperado en la población.

Watson y Moritz (1999), sugieren que algunas propiedades de la media, como la de representatividad, que no aparecen en los contextos cotidianos, sólo la ponen de manifiesto los estudiantes con conocimientos más avanzados. Estos autores defienden que la representatividad es un concepto básico para la comprensión de las medidas de tendencia central, al permitir entender el significado de cada una de ellas y, a la vez, determinar las características del conjunto de datos.

También señalan que la mediana es la medida de tendencia central que necesita más investigación, puesto que, aunque su comprensión intuitiva aparece pronto en los niños, el uso correcto de la mediana en la resolución de problemas presenta muchas dificultades para los alumnos. Además, en la vida cotidiana el concepto de mediana aparece menos frecuentemente que el de media o moda. En cuanto a la moda, aunque sí es un concepto de uso frecuente en el entorno de los estudiantes, ellos no la aplican si tienen que elegir una de las medidas de tendencia central para describir una distribución.

3.6.4. DIFICULTAD COMPARADA DE PROPIEDADES

Strauss y Bichler (1988), investigaron el desarrollo evolutivo de la comprensión de la media en alumnos de 8 a 12 años, distinguiendo las siguientes propiedades, que tratan de evaluar con una serie de preguntas estructuradas a los estudiantes:

a. La media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución.
b. La suma de las desviaciones de los datos respecto de la media es cero, lo que hace que sea un estimador insesgado.
c. El valor medio está influenciado por los valores de cada uno de los datos. Por ello, la media no tiene elemento neutro.

d. La media no tiene por qué ser igual a uno de los valores de los datos.
e. El valor obtenido de la media puede ser un número no entero, ello puede no tener sentido para la variable considerada, como cuando decimos que el número medio de hijos es 2.1.
f. Hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media.
g. La media es un “representante” de los datos a partir de los que ha sido calculada.

Para cada una de estas propiedades, los autores realizaron diferentes actividades con niños de diferentes edades para evaluar su comprensión intuitiva, variando el tipo de datos: continuos, discretos, y el medio de presentación: verbal, numérico y concreto.

Sus resultados indican que se mejora la comprensión de acuerdo a la edad, así como las diferencias de dificultad en la comprensión de las propiedades, encontrando dos grupos de propiedades, según su dificultad conceptual. El grupo de propiedades más fáciles está formado por las propiedades a), c) y d), y el más difícil por las b), f) y g). Las propiedades a), c) y d) son numéricas, la propiedad f) es algebraica, y las propiedades b) y g) son estadísticas, por lo que podríamos concluir que las propiedades numéricas se comprenden mejor que las algebraicas o estadísticas.

León y Zawojewski (1991) realizaron una investigación acerca del efecto de la edad en la comprensión de las propiedades descritas por Strauss y Bichler (1988) y el de los diferentes formatos presentados a los sujetos. Los autores encontraron una gran influencia de la edad sobre la comprensión de la media y también observaron que la contextualización de las tareas facilita mucho su resolución al permitir utilizar otros conocimientos y capacidades menos abstractas que las únicamente numéricas. Las propiedades relacionadas con el valor cero o la representatividad de la media resultan más difíciles para los alumnos que las de localización. Por otro lado, propiedades tales como que la suma de desviaciones respecto a la media es cero, que la media es un valor representativo de los valores promediados o que hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media, fueron demasiado abstractas para una proporción importante de alumnos de 14 años.

3.7. INVESTIGACIONES SOBRE CAPACIDAD DE ARGUMENTACIÓN

Reading y Pegg (1996), observaron que los niños de su investigación mostraban dificultad al dar un argumento o justificar su respuesta de por qué se elegía una cierta medida de tendencia central al planteárseles determinado problema. Esto indica que aunque muchos estudiantes resuelven bien los problemas, no saben dar las razones de la solución aportada o justificarla adecuadamente. Clasificaron a los alumnos en ocho niveles diferentes de respuesta, según la completitud de su razonamiento y solo una pequeña parte de los estudiantes de su investigación fueron capaces de justificar la elección de las medidas de valor central y dispersión relacionándolas con características del conjunto de datos (nivel 8).

Vermette, Gattuso y Bourdeau (2005), analizaron cómo los estudiantes interpretan los datos estadísticos en la prensa, identificando niveles diferentes de argumentación: desde ausencia de la misma, hasta un razonamiento estadístico completo. Una parte de su investigación se refiere a la interpretación de promedios. Sus datos muestran que solo el 41% de los estudiantes toma en cuenta todos los valores de los datos en su argumentación y solo un 30% produce una argumentación estadísticamente correcta. La mayor parte de las argumentaciones están muy ligadas al contexto del problema y no toman en cuenta los datos aportados.

García y Garrett (2006), realizaron un estudio con 94 estudiantes de 17 años, del último curso de educación secundaria. Elaboraron un cuestionario sobre medidas de tendencia central para observar cómo actúan los estudiantes ante preguntas abiertas en comparación con su comportamiento con preguntas de opción múltiple. Tomaron como ejemplo un ítem que tiene como propósito observar cómo interpretan los estudiantes distribuciones mostradas en forma de gráfico, y ver si ellos saben cómo manipular los datos gráficamente en orden para calcular y examinar qué criterio utilizan cuando ven dos ejemplos basados en su apariencia visual.

Por una parte, se encontraron que muchos de los estudiantes que eligen la respuesta correcta ante una pregunta de opción múltiple no pueden demostrar métodos razonables para resolver preguntas abiertas, Por otra parte, los resultados también muestran que los estudiantes no son consistentes con sus afirmaciones, ya que para una misma situación utilizan criterios completamente diferentes. Destacan que el hecho de utilizar ítems que combinen preguntas abiertas y de opción múltiple permite detectar algunas dificultades e incoherencias en las estrategias que los estudiantes siguen en su resolución.

En definitiva, la capacidad de argumentación estadística parece deficiente en estos estudios, en comparación con la capacidad de cálculo o la comprensión de propiedades. Posiblemente sea necesario realizar más actividades interpretativas, incluyendo proyectos abiertos donde los estudiantes sean forzados a dar sus argumentaciones utilizando los resultados del trabajo matemático en sus conclusiones.

3.8. DESARROLLO EVOLUTIVO DE LA COMPRENSIÓN DE LAS MEDIDAS DE POSICIÓN CENTRAL

Mientras que el estudio del desarrollo evolutivo de la comprensión de los conceptos probabilísticos tiene una gran tradición, el de los conceptos estadísticos es escaso, aunque está aumentando en los últimos años. Dichos estudios evolutivos se basan en los siguientes supuestos:

a. La comprensión de un determinado concepto por una persona pasa por diversos estadíos que se manifiestan en sus respuestas.
b. La complejidad de los razonamientos de un sujeto está relacionada con el estadio en el que se encuentra y es parecida para todos los sujetos que están en el mismo nivel.
c. La edad en que se alcanza cada nivel puede variar de alumno a alumno; no obstante, el orden de los estadíos es fijo, pasando el sujeto por todos ellos desde el más elemental al más avanzado, hasta que llega al nivel de razonamiento del sujeto adulto.

Algunos trabajos existentes en el tema de las medidas de tendencia central toman como modelo del desarrollo evolutivo el neopiagetiano. Biggs y Collis (1982), clasifican las respuestas de los alumnos en una jerarquía que refleja la estructura de los resultados de aprendizaje observados en el dominio de contenidos de las tareas. Las siguientes categorías de respuestas son las esperadas dentro de este modelo, que forma una jerarquía donde el sujeto progresa desde las respuestas de menor nivel a las más complejas como resultado de la edad y el aprendizaje:

- *Respuestas pre-estructurales:* Son las respuestas que no están relacionadas con el problema planteado. Los alumnos responden a las tareas con respuestas no relacionadas con este concepto.
- *Respuestas uni-estructurales*: La respuesta se relaciona con el problema, pero sólo se maneja una de las variables olvidando las restantes, lo que hace que el alumno fracase en la solución. Sin embargo, da una respuesta simple que es relevante en el dominio de contenido.
- *Respuestas multi-estructurales*: Cuando el alumno es capaz de manejar dos o más variables de la situación y la respuesta incluye dos o más aspectos del dominio de contenido, pero no se conectan unas con otras.

- *Respuestas relacionales*: Cuando el estudiante tiene una comprensión integrada de las relaciones involucradas en la tarea. No sólo maneja diversas variables sino que las pone en relación.

Basándose en estos supuestos, y centrados en la evolución de los conceptos de media, mediana y moda, Watson y Moritz (1999), realizaron un estudio con 2250 sujetos de entre 8 y 18 años. Utilizan la teoría de respuesta al ítem para analizar las respuestas de los alumnos. Dicha técnica permite escalonar tanto a los sujetos como a los ítems del cuestionario, identificando los de mayor complejidad, y los niveles de comprensión de los estudiantes. Los resultados revelan que los niños empiezan mostrando un uso coloquial y progresan en su comprensión de los promedios siguiendo las etapas anteriormente descritas. La investigación sólo analiza la comprensión global, no diferenciando los diversos elementos de significado, como tratamos de hacer en nuestro caso. También hacen referencia a que algunas propiedades de la media, como la de representatividad, sólo la ponen de manifiesto los estudiantes más avanzados.

En otra investigación, Watson y Moritz (2000), tratan de confirmar los resultados obtenidos en su trabajo anterior, realizando 137 entrevistas, 97 de ellas a una muestra inicial de estudiantes de entre 3º curso de primaria y 3º curso de secundaria (8 a 15 años). Llevan a cabo un estudio longitudinal, para lo cual vuelven a entrevistar a 22 de estos estudiantes tres años después y a 21 de los estudiantes, 4 años más tarde. A partir del análisis de los protocolos, mejoraron su jerarquía de comprensión de los promedios, definiendo los siguientes 6 niveles de desarrollo evolutivo:

- *Pre-promedio.* No se llega a usar la idea de promedio, ni siquiera en lenguaje coloquial o en contextos cotidianos. Los estudiantes no llegan a ver los datos como algo que pueda ser resumido. Responden a las preguntas sobre tareas simples inventando historias imaginativas.
- *Uso coloquial de la media.* Se usa el término promedio o media en el lenguaje ordinario, interpretándolo como normal o bueno, se emplean ideas imaginarias en el contexto de la tarea para apoyar respuestas uni-estructurales. Se relaciona con la idea de suma, pero no se conoce el algoritmo correcto, no se comprende el significado, pocos progresos en tareas complejas.
- *Respuesta multi-estructural.* Se usan varias ideas como máximo, mínimo y suma

más división para describir la media en situaciones sencillas, aunque no se es capaz de aplicarlo en situaciones complejas. Se producen errores en los algoritmos de cálculo o se confunden los conceptos de media, mediana y moda. Existen conflictos cognitivos entre el cálculo de la media y el concepto.

- *Media como representante*. Se asocia la media con su algoritmo en situaciones sencillas. Recurren al algoritmo de cálculo para describir los conceptos. Se relaciona el algoritmo con la posibilidad de un resultado no entero. Se expresa alguna idea de representatividad para la estimación o predicción en un conjunto de datos. No se sabe aplicar en contextos complejos sin ayuda y con frecuencia se prefiere utilizar las características visuales de los gráficos en lugar de sus promedios.
- *Aplicación en un contexto complejo.* Además de las capacidades del nivel anterior, se es capaz de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media o cálculo de medias ponderadas (pero no las dos cosas a la vez). No tiene clara la idea de distribución, escasamente utilizan la media para comparar más de un conjunto de datos.
- *Aplicación en dos o más contextos complejos*. Además del anterior, es capaz a la vez de invertir el algoritmo para hallar el total a partir de la media y calcular medias ponderadas. Comprende la idea de distribución. Usa la media frecuentemente para comparar dos o más conjuntos de datos.

Sus datos sugieren que los estudiantes progresan en estos niveles sucesivos conforme aumentan en edad. Así también, un mismo estudiante progresa de una entrevista a otra en el estudio longitudinal. También observaron que los alumnos de cursos más altos muestran una evolución menor que los de cursos más bajos y que un nivel de escolaridad más elevado no debe ser sinónimo de mejores rendimientos de los alumnos. Los resultados obtenidos en la investigación pueden revelar una cierta ineficacia en la forma de abordar la enseñanza de la estadística, en el sentido de que no se estimula suficientemente a los estudiantes para que sigan evolucionando a partir del estadío en el que se encuentran al inicio del proceso.

Aunque reconocemos la importancia de esta investigación y el interés que tienen al proporcionar al profesor criterios para organizar la instrucción en los diversos niveles curriculares, hacemos notar que los ítems usados por Watson y Moritz (2000) no se basaron en un estudio epistemológico previo y no evaluaron el significado completo de las medidas de tendencia central. En nuestro marco teórico, por el contrario, entendemos que comprender un concepto es un proceso constructivo continuo en que el estudiante adquiere progresivamente los diferentes elementos de significado del concepto y los pone en relación. Esta comprensión emerge de las prácticas significativas del estudiante en la resolución reiterada de problemas específicos del concepto. De ello se deduce el interés del trabajo que presentamos en esta tesis.

3.9. EFECTO DE LA ENSEÑANZA SOBRE LA COMPRENSIÓN DE LAS MEDIDAS DE POSICIÓN CENTRAL

Carvalho (2001) y Carvalho y César (2000, 2001, 2002) analizan el efecto que el trabajo cooperativo en parejas (grupo experimental) tiene sobre el desarrollo de la capacidad lógica y sobre el aprendizaje de conceptos estadísticos elementales. Para ello propuso "tareas estadísticas no habituales", es decir, resolución de problemas abiertos sobre estadística. Trató también de comparar el aprendizaje de estos alumnos con otros que trabajaban con metodología y tareas tradicionales (grupo de control). Otra finalidad era comparar el éxito relativo de diferentes formas de agrupar a los alumnos, según coincidan o no en su desarrollo lógico y sus conocimientos estadísticos.

A lo largo de dos cursos escolares repitió la experiencia con 533 alumnos, manteniéndose y mejorándose los resultados en el segundo año del experimento. Analizó la trascripción de los protocolos desde el punto de vista de errores y del progreso del aprendizaje.

Los niños que trabajaron en forma cooperativa mostraron un avance más claro, tanto en el desarrollo lógico, como en sus competencias estadísticas que sus compañeros. Encontró que es preferible formar parejas de alumnos heterogéneas en cuanto a sus capacidades y conocimientos, ya que esto beneficia no sólo al alumno que se encuentra en nivel inferior, sino también a su compañero con más alto nivel. La investigación muestra finalmente que el contenido estadístico causa dificultades a los alumnos, incluso cuando trabajan en parejas y en tareas no habituales. Algunas de estas dificultades ya fueron descritas en los apartados anteriores.

3.10. INVESTIGACIONES CON PROFESORES

Aunque la estadística, como ciencia, es una disciplina relativamente autónoma de la matemática, es enseñada en la escuela como parte de la asignatura de matemáticas por el profesor de esta materia. Nos encontramos con la paradoja de pedir a estos profesores que impartan un nuevo contenido, para el que no todos los profesores de primaria por ejemplo, han tenido una formación estadística y casi ningún profesor una preparación didáctica específica, ya que la didáctica de la estadística no está aún lo suficientemente desarrollada.

Esta problemática ha ocasionado el interés reciente en la investigación centrada en las concepciones y conocimientos de los profesores en formación (futuros profesores) o servicio sobre conceptos estadísticos y su enseñanza. Aunque esta investigación es incipiente, ésta se está relanzando debido al Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education, organizado por la International Association for Statistical Education y la International Commision on Mathematical Instruction.

Las investigaciones en esta línea muestran la carencia de conocimientos de algunos profesores sobre los temas que deberán enseñar a sus estudiantes, como se muestra en la investigación de Navas, Batanero y Godino (1997) con 132 futuros profesores de educación primaria y 141 estudiantes de Pedagogía de la Universidad de Granada. Los autores indican que estos estudiantes comparten con sus futuros alumnos muchas de las dificultades de comprensión de los promedios, mostrando los dos grupos participantes una alta similaridad en sus respuestas.

El tratamiento de los valores atípicos fue una de las dificultades principales: 34.1% de los participantes calculan la media sin desechar el valor atípico al estimar el valor desconocido en un contexto de medición, sin constatar que el valor atípico, muy alejado del resto, ha de ser un error de medida y perturba notablemente la estimación del valor. Un 22.6% de los participantes no tienen en cuenta los valores atípicos en la comparación de dos distribuciones desvirtuando por completo las diferencias existentes entre los dos conjuntos de datos sin percatarse que es necesario suprimirlos del análisis para obtener una solución correcta.

Otro punto en el que los alumnos tuvieron dificultad fue el conocimiento de las posiciones relativas entre media, mediana y moda en distribuciones no simétricas, que se manifiesta en un 57.4% de respuestas. Esta relación no es fácil de comprender, porque no se deduce claramente del algoritmo de cálculo y las respuestas reflejan la creencia de los alumnos de que todas las distribuciones deben ser simétricas, debido posiblemente a la falta de ejemplos de distribuciones asimétricas en la enseñanza que han recibido.

La comparación de dos distribuciones es una de las tareas básicas en el enfoque exploratorio del análisis de datos, recomendado en los diseños curriculares de primaria y secundaria. Sin embargo, los participantes en el estudio mostraron estrategias incorrectas al realizar esta comparación, lo que sugiere la necesidad de completar su formación en técnicas elementales de análisis exploratorio de datos. Estas estrategias fueron las siguientes: no valorar adecuadamente las diferencias de promedios, con respecto a la dispersión (8.6%); o juzgar la diferencia entre los grupos usando sólo parte de la distribución (12.9%). Los futuros profesores tuvieron también dificultades en el tratamiento de los ceros al calcular los promedios y en la elección de la mejor medida de posición central para representar un conjunto de datos. Estas dificultades se confirman en el estudio de Ortiz, Font y Mayén (en prensa a y b).

En un estudio que trata de relacionar las actitudes de los futuros profesores hacia la estadística con sus conocimientos estadísticos elementales, Estrada (2002), propone a 367 futuros profesores de educación primaria de la universidad de Lleida un cuestionario que incluye algunos problemas utilizados por Navas, Batanero y Godino (1997). Sus resultados indicaron dificultades generalizadas de los futuros profesores en conceptos estadísticos elementales, como la media, interpretación de gráficos, lectura de tablas dobles y asociación. También muestran una correlación positiva, aunque moderada entre las actitudes de los futuros profesores y sus conocimientos estadísticos, por lo que una mejora en su formación incidirá también en una actitud más positiva hacia la estadística y su enseñanza.

Respecto al tema de las medidas de tendencia central, aunque la mayoría de los futuros profesores reconoce la media como mejor estimación de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida, sólo un 7% de la muestra comprende el efecto de los valores atípicos sobre el cálculo de la media, obteniendo una estimación incorrecta. Un 73% de la muestra pudo calcular la media a partir de la representación gráfica de una distribución de datos; pero aún hubo un 27% que no usó las frecuencias en el cálculo de la media o interpretó el gráfico en forma incorrecta. Un 6% de los estudiantes no usa las medidas de centralización para comparar dos conjuntos de datos, sino que se limita a la comparación de máximos y mínimos; por tanto, muestran falta de comprensión de la idea de distribución. Sólo un 33% de los futuros profesores fue capaz de interpretar correctamente la frase “número promedio de hijos es igual a 1.2”, detectándose errores como suponer que la media es una operación interna o situar las posiciones de media, moda y mediana próximas entre sí, incluso en distribuciones asimétricas. Por último, un 33% no aprecia el efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la media muestral.

En un estudio cualitativo, Jacobbe (2008), analiza la comprensión de unos pocos profesores estadounidenses en ejercicio sobre la media y la mediana, comparándola con las expectativas de comprensión de dichos promedios fijadas en los estándares americanos (NCTM, 2000) para los alumnos de primaria. Al ser la estadística en este nivel un tema relativamente nuevo en Estados Unidos, el autor indica que muchos profesores no están familiarizados con los conceptos y procedimientos que deberán de enseñar a sus alumnos. El estudio se hizo sólo con tres profesores, pero ellos fueron elegidos por su gran experiencia en la enseñanza y su interés, de modo que las dificultades encontradas probablemente se repetirán en otros menos expertos o motivados. Los profesores participaron en entrevistas a lo largo de 18 meses y se observaron 12 clases de cada uno de ellos.

De las preguntas que se les hizo en relación a la mediana y media, el porcentaje de respuestas correctas varió entre 63% y 75%, dependiendo del profesor. Dos de estos profesores tuvieron dificultad en explicar cuál es el significado concreto de la media y mediana, aunque conocían su algoritmo de cálculo. El otro no supo explicar cuál es la diferencia entre media y mediana. Como consecuencia del estudio, el autor piensa que los profesores estadounidenses no tienen suficiente conocimiento para lograr que sus alumnos alcancen los niveles de comprensión de las medidas de centralización sugeridos en los estándares americanos.

La conclusión de estos trabajos es que la enseñanza algorítmica de la estadística y el estudio descontextualizado de definiciones y propiedades no consiguen dotar de competencias a los profesores para aplicar los conocimientos estadísticos en el análisis de conjuntos de datos incluso elementales.

3.11. INVESTIGACIONES QUE UTILIZAN NUESTRO MISMO MARCO TEÓRICO

La primera investigación que utiliza nuestro marco teórico y en la cual nos hemos basado es la de Cobo (2003), quien realizó un estudio comparado de evaluación del aprendizaje de las medidas de posición central en los alumnos de los cursos primero y cuarto de Educación Secundaria Obligatoria. Está basado en el marco teórico de Godino (1996), y Godino y Batanero (1994, 1998a y b). Las cuestiones que se plantean para abordar el tema son las siguientes:

1. ¿Cuál es el significado de las medidas de posición central?
2. ¿Cómo podemos usar nuestro marco teórico para sintetizar la investigación realizada

hasta la fecha con relación a los promedios? ¿Cuáles son los elementos cuya comprensión aún no ha sido objetos de estudio?

3. ¿Qué parte del significado institucional de referencia es objeto de enseñanza en la Educación Secundaria? ¿Cuáles son los elementos de significado (campos de problemas, algoritmos y procedimientos, representaciones, conceptos y propiedades y argumentos que son incluidos en este nivel educativo?
4. ¿Cuál es el significado personal sobre los promedios de los estudiante de Escuela Secundaria Obligatoria, al iniciar y finalizar esta etapa educativa? ¿Cuáles son los elementos de significado en que encontramos mayor dificultad inicial y cuáles resultan más intuitivos? ¿Qué progresión se observa en el aprendizaje entre estos dos niveles educativos?
5. ¿Qué elementos continúan siendo difíciles al finalizar la etapa?

El trabajo de Cobo comienza con un estudio teórico que incluye: 1) Un análisis de contenido matemático para determinar los campos de problemas, representaciones, procedimientos, definiciones y propiedades y argumentaciones que constituyen el significado de referencia de las medidas de posición central en la introducción al análisis exploratorio de datos; 2) Un análisis del significado de las medidas de posición central en el currículo de secundaria; y 3) Una revisión de las investigaciones sobre el tema o sobre otros relacionados, para fundamentar nuestro estudio y comparar con nuestros resultados.

El análisis curricular de Cobo abarca un estudio del currículo tanto en España como en el medio internacional, así como un análisis de libros de texto. En el análisis de libros de texto define el significado que, de la medidas de posición central se presenta en los libros de texto destinados a la enseñanza secundaria. La muestra de los libros analizados incluye 22 libros de texto del segundo ciclo de la ESO, publicados entre 1994 y 1999, y de 17 editoriales distintas. Se presentan las conclusiones del análisis curricular realizado son:

- No se presta a la estadística tanto interés como el que se ha encontrado en otros países como Estados Unidos.
- Se han identificado los elementos de significado más comunes presentados en los libros de texto, sobre las medidas de posición central, determinando de esta manera el significado institucional local.

- Se ha encontrado que en los libros de texto se da mas importancia a las definiciones y al cálculo de las medidas de posición central que al estudio de sus propiedades, lo que no permite a los alumnos alcanzar una comprensión completa de estas medidas, sus posibilidades de uso, las ventajas de unas sobre las otras, y la conveniencia de utilizar unas u otras, según la situación.
- La importancia que tiene el lenguaje.

El estudio experimental incluye: 1) El diseño de un cuestionario para evaluar la comprensión de los estudiantes de secundaria en este tema; 2) El estudio del significado personal de los alumnos de E.S.O. sobre las medidas de tendencia central, a partir de las respuestas de una muestra de estudiantes al cuestionario de evaluación; 3) El análisis de la variabilidad en el significado personal sobre promedios de estos estudiantes, mediante el estudio semiótico de las respuestas de un grupo reducido de estudiantes; y 4) Comparar el significado personal de los estudiantes que comienzan y finalizan la E.S.O. mediante el análisis de dos muestras de alumnos de primero y cuarto cursos respectivamente.

Las muestras seleccionadas, se conformaron por 312 alumnos, de grupos de primero y cuarto de E.S.O., de 13 y 16 años respectivamente. Cabe señalar que de esta muestra, se seleccionaron cuatro alumnos para llevar a cabo un estudio de casos. De cada grupo se tomó un alumno con un buen porcentaje de respuestas correctas y otro que, habiendo proporcionado respuestas a la mayoría de los ítems, hubiese logrado sólo un número pequeño de respuestas correctas, lo que tiene como objetivo, comparar los razonamientos y comprensión de estos dos extremos, así como la diferencia de razonamientos en los ítems comunes en los dos grupos de estudiantes.

Para llevar a cabo el estudio, se diseñó un cuestionario orientado a la evaluación del significado personal que los estudiantes asignan a las medidas de posición central y que trata de evaluar los siguientes elementos:

- Comprensión conceptual de las propiedades básicas y definición de media, mediana y moda;
- Comprensión de representaciones verbales, numéricas, simbólicas y gráficas;
- Comprensión procedimental;
- Comprensión argumentativa.

Pinho (2006 a y b), es otro autor que actualmente está desarrollando una investigación sobre el significado de los promedios con alumnos brasileños. El autor analiza primero el contenido referido a las medidas de tendencia central en seis libros de texto brasileños. Siguiendo el método descrito en la investigación de Cobo (2003), describiendo con detalle las definiciones, procedimientos, problemas, propiedades y argumentos y llegando así a la determinación del significado institucional de referencia en la enseñanza secundaria en el estado de Bahía. Aplicó un cuestionario que incluye algunos ítems de Cobo (2003) y otros de elaboración propia a alumnos de 14-15 años en la Ciudad de Bahía, Brasil. Su trabajo se centra en la comprensión de la definición de media y señala que la mayoría de los participantes en su estudio no dominan a fondo el concepto, mostrando tan sólo capacidad procedimental, pero no comprensión de la definición o propiedades.

3.12. CONCLUSIONES DE LAS INVESTIGACIONES PREVIAS

La principal conclusión de todas estas investigaciones, exceptuando las de Cobo (2003), Pinho (2006 a y b) y la nuestra propia, es que se centran en aspectos aislados de la comprensión de las medidas de tendencia central y no llegan a realizar un estudio previo matemático del concepto con el cual puedan contrastar sus resultados. En algunos casos las tareas propuestas son repetitivas y se observa falta de análisis profundo de los procesos de resolución. Sin embargo, todos estos antecedentes sirven para fundamentar nuestro estudio, proporcionando patrones de comparación de nuestros resultados con las anteriores investigaciones y algunas posibles explicaciones para las dificultades de los estudiantes. También nos muestran modelos de metodología de análisis de las respuestas, que podemos adaptar a nuestro propio trabajo.

En nuestro caso, siguiendo la línea de Cobo (2003), queremos utilizar el enfoque ontosemiótico de la investigación en didáctica de la matemática para acercarnos con mayor profundidad a las dificultades de los estudiantes. Por este motivo, en nuestro trabajo de investigación tutelada (Mayen, 2006a) iniciamos el estudio de los conflictos semióticos de los estudiantes al resolver algunas de las tareas propuestas por la autora, quien no llegó a completar el estudio de dichos conflictos. Pretendemos en el presente trabajo completar el estudio descrito en dos puntos:

- Llevando a cabo un estudio cuantitativo de resultados con el cuestionario de Cobo

(2003) en una muestra de estudiantes mexicanos de mayor amplitud que la del citado estudio para completar el estudio de algunos aspectos psicométricos del cuestionario que no fueron abordados por la autora. En concreto, pretendemos determinar algunos índices de discriminación, estudio de las evidencias de validez del cuestionario y estimaciones precisas de la dificultad de los ítems en el contexto mexicano, tanto por métodos clásicos como bayesianos. Toda esta información será útil a las personas que quieran utilizar el cuestionario con fines de evaluación, en especial en México.

- Aumentar el rango de edad de los estudiantes participantes en el estudio de Cobo (2003), para incluir alumnos de Bachillerato, que se preparan para entrar en la Universidad y llevar a cabo una comparación de resultados entre estudiantes que finalizan la Secundaria y los que finalizan el Bachillerato.

Debido a la amplitud de la muestra utilizada en nuestra investigación (518 estudiantes), el estudio será preferentemente cuantitativo, limitándose la parte cualitativa al análisis de los conflictos semióticos en algunos ítems relacionados con la idea de mediana que ha sido menos investigada que el resto de los promedios.

CAPÍTULO 4
ESTUDIO PILOTO

4.1. INTRODUCCIÓN

Una vez descrito el problema de investigación, su marco teórico, metodología y los antecedentes de nuestro trabajo, en este capítulo presentamos los resultados del estudio piloto de una parte del cuestionario de Cobo (2003) en una muestra de 125 estudiantes mexicanos de Bachillerato. Los resultados se presentan en Mayén y Balderas (2006) y Mayén, Cobo, Batanero y Balderas (2007).

La finalidad perseguida al realizar una prueba piloto, con una parte de dicho cuestionario, fue comprobar que era adecuado (en cuanto a su dificultad y los contextos presentados en los diferentes ítems) para ser utilizado en México en nuestro estudio de evaluación y con alumnos de mayor edad que los estudiantes que participaron en el estudio de Cobo (2003). Así también, comprobar si los estudiantes proporcionan respuestas suficientemente claras y completas para poder realizar nuestro estudio posteriormente.

En lugar de utilizar todo el cuestionario, optamos por aplicar la primera parte, que fue la misma que utilizó Cobo (2003) con sus dos grupos de estudiantes (la segunda parte sólo la utilizó en uno de sus grupos). Además, quisimos evitar la fatiga innecesaria de los estudiantes, y las respuestas a 9 ítems completos con sus subítems era suficiente para el objetivo pretendido.

Comenzamos este capítulo con la descripción de las características de la muestra de alumnos participantes. A continuación realizamos un análisis de los ítems que se administraron en la versión piloto del cuestionario, para determinar el significado institucional sobre las medidas de tendencia central evaluado mediante este conjunto de ítems.

Seguidamente, presentamos el estudio de los resultados de la prueba piloto. Se analizan los índices de dificultad, comparando los resultados con los de los estudiantes españoles de edades similares en la investigación de Cobo (2003), así como los resultados sobre puntuación global y el efecto de las variables que configuran la muestra sobre dicha puntuación global. Así mismo, se realiza una primera aproximación al estudio de la relación de las respuestas a los diversos ítems, que será completada posteriormente con el cuestionario completo y muestras definitivas en el Capítulo 5.

Con todos estos resultados describimos las tendencias más generales en el significado personal respecto a las medidas de posición central del grupo de alumnos mexicanos participantes en el estudio piloto, y comparamos con los resultados obtenidos por Cobo (2003), con el fin de comprobar la adecuación del cuestionario para nuestra investigación.

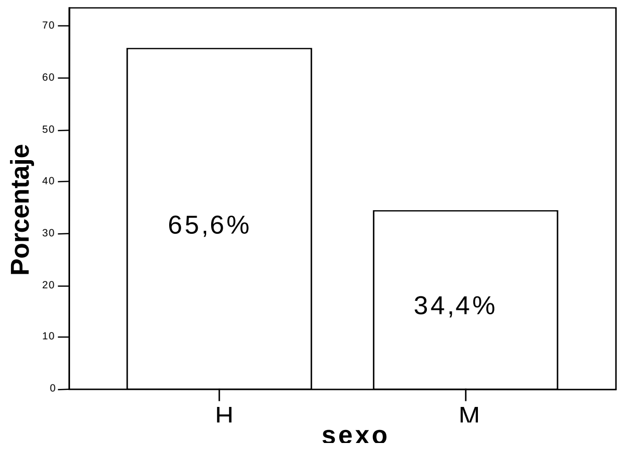
4.2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA PILOTO

La muestra piloto estuvo compuesta por 125 estudiantes de 6º semestre de Bachillerato, de entre 17 y 19 años de edad. Cursaban sus estudios en cinco diferentes Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional, del Nivel Medio Superior (Bachillerato) en el Sistema Educativo Mexicano. Los centros utilizados para este estudio son de características semejantes y llevan a cabo el mismo programa de estudios. Están ubicados a lo largo y ancho de la Ciudad de México, y consecuentemente, los estudiantes pertenecen a contextos socioculturales distintos.

Aplicamos la primera parte del cuestionario de Cobo (2003), en sesiones de 90 minutos, para lo que dimos instrucciones claras sobre cómo resolverlo y pedimos una explicación a cada ítem lo más detallada posible. Explicamos también a los estudiantes el objetivo de la recogida de datos, solicitando su colaboración, así como las de sus profesores, quienes revisaron previamente el cuestionario, considerándolo adecuado para pasarlo a estos estudiantes. Una vez recogidos los datos, se procesaron en un fichero para obtener estadísticos y gráficos con el programa SPSS.

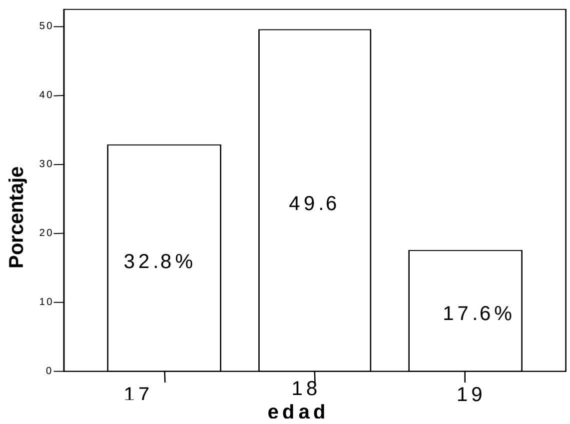
Las variables independientes en el estudio piloto son: género, edad y centro de estudios. Como se puede observar en la Figura 4.2.1, existe una diferencia acusada en la distribución de la muestra en cuanto al género, ya que la cantidad de hombres, 65.6%, es aproximadamente el doble que de las mujeres, 34.4%. Esto se explica porque los centros de estudios del IPN son de carácter tecnológico (estudios de ingeniería) y sus especialidades son más solicitadas por los chicos. Se tratará de corregir este desequilibrio de género en la muestra definitiva.

Figura 4.2.1. Distribución de la muestra por género



Del total de la muestra, 41 alumnos tienen 17 años, es decir, el 32.8% de la muestra; 62 alumnos tienen 18 años, 49.6%, es decir, la mitad de la muestra; y 22 alumnos que representan la proporción más pequeña de 17.6% tienen 19 años (Figura 4.2.2).

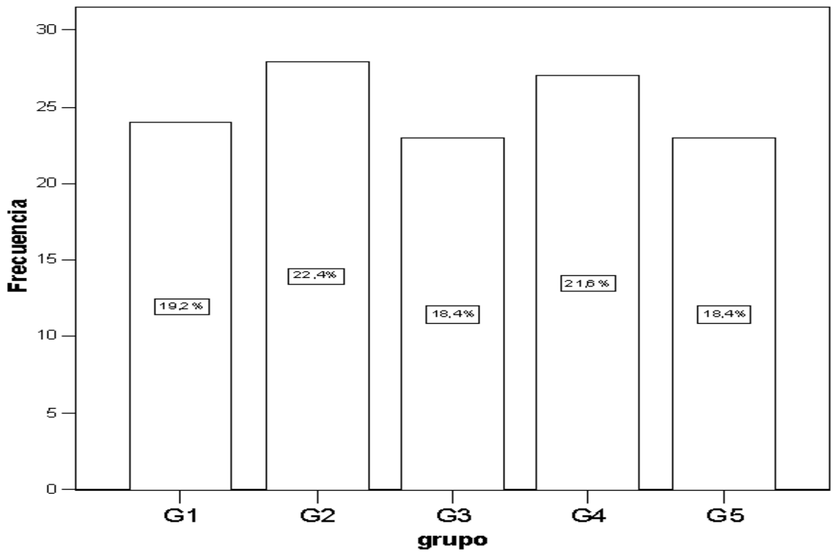
Figura 4.2.2. Distribución de la muestra por edad



Hacemos notar que nuestros alumnos tienen, en promedio, dos años más que los estudiantes de mayor edad en el estudio de Cobo (2003). Por un lado, estamos interesados en estos alumnos porque son los que terminan el Bachillerato y queremos evaluar sus conocimientos antes de acceder a la Universidad. La edad de los alumnos de la muestra es la habitual en México en este nivel de estudios. Por otro lado, deseamos saber si los resultados del estudio de Cobo (2003) se mantienen en alumnos de mayor edad.

Observamos que la distribución de alumnos por grupo (Figura 4.2.3), es muy similar entre los cinco grupos que componen la muestra, es decir se trata de grupos de clase de tamaño muy parecido.

Figura 4.2.3. Distribución de la muestra por grupo



4.3. DESCRIPCIÓN DEL CUESTIONARIO PILOTO

El cuestionario es un instrumento de medición que a partir de las preguntas planteadas obtiene una estimación de los conocimientos y capacidades de los sujetos a quienes se les aplica, que no son accesibles por simple observación o encuesta (Dane, 1990; Barbero, 2003). Este cuestionario está orientado a la evaluación del significado personal que los estudiantes mexicanos asignan a las medidas de posición central.

El cuestionario es una parte del que utilizó Cobo (2003); más concretamente, se trata del subcuestionario aplicado a los alumnos de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Hemos elegido esta parte del cuestionario, ya que el resto de los ítems de Cobo (2003), que sólo se pasó a los alumnos de cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria, se basan en la interpretación de una serie de gráficos que no han sido estudiados del todo por los alumnos que formaron parte de la muestra piloto. La parte tomada para nuestra investigación (que desde ahora denominamos cuestionario) incluye un total de 9 ítems, algunos de ellos divididos en subítems (en total 17 subítems). Por lo tanto, se puede obtener una puntuación total en el cuestionario que varía de 0 a 17 puntos.

Al tratar de evaluar la comprensión de las medidas de tendencia central, hay que tener en cuenta que éste es un constructo inobservable (León y Montero, 2002), por lo que sus características deben ser inferidas a partir de las respuestas de los alumnos.

La comprensión de los estudiantes sobre un cierto objeto matemático (en este caso las medidas de tendencia central) es inobservable. Pero las prácticas que realizan al resolver problemas, y en particular los problemas presentados como ítems en un cuestionario, sí que son observables, siempre que la recogida de datos sea completa y fiable (Godino, 1996).

El cuestionario tiene, por tanto, como principal objetivo, recoger datos sobre las prácticas matemáticas que realizan los estudiantes al resolver problemas relacionados con las medidas de posición central para aproximarnos a dicha comprensión. De las respuestas escritas trataremos de inferir el uso (correcto o incorrecto) que los estudiantes de la muestra hacen de los diversos objetos matemáticos descritos en nuestro marco teórico (definiciones, propiedades, argumentos, etc.) y que se incluyen en la enseñanza del Nivel Medio Superior Mexicano.

Entre la clasificación de objetivos en la construcción de cuestionarios de Millman y Greene (1989), nos situamos en un *dominio curricular*, por tanto, partimos de un análisis sistemático del concepto, contemplando sus diferentes matices. Aunque el instrumento de medida podría ser aplicado a otras poblaciones de alumnos, lo enfocamos principalmente a alumnos de Educación Secundaria y Bachillerato. El instrumento permitirá tomar decisiones sobre la ejecución de los estudiantes con referencia a un *dominio curricular concreto*, las medidas de posición central.

Las interpretaciones realizadas a partir de las respuestas harán referencia a lo que los sujetos son capaces de hacer, y a sus conocimientos y errores sobre el mismo (*test referido a criterio*). Se trata además de un cuestionario de *potencia*, ya que el tiempo, aunque controlado, no determina el resultado, sino que las diferencias en la puntuación serán debidas a la calidad de su ejecución y conocimiento (Sax, 1989; Martínez Arias, 1995).

Un segundo objetivo es diferenciar, a partir de las puntuaciones en el cuestionario, a los alumnos cuyo significado personal respecto a las medidas de posición central se acerque al significado institucional en el Bachillerato mexicano de los que no y proporcionar clases de apoyo o una instrucción específica a estos últimos.

Desde el punto de vista del marco teórico utilizado, el cuestionario es un instrumento de evaluación que tiene como finalidad proporcionar información sobre los *significados personales* de un grupo de estudiantes sobre un objeto o un grupo de objetos matemáticos dados. El cuestionario fue construido después de un análisis de contenido sobre las medidas de posición central de una muestra de libros de texto españoles de secundaria, así como en el análisis de las directrices curriculares respecto a este contenido en los currículos españoles. En nuestro caso, hemos completado el estudio anterior con el análisis del currículo mexicano de educación secundaria y medio superior, así también hemos tomado los ítems cuyos contenidos quedan recogidos en las citadas directrices.

Así mismo, queremos informar sobre la comprensión de los siguientes tipos de elementos, que quedan establecidos en el cuestionario:

1. Reconocimiento de los campos de problemas que se resuelven mediante promedios. Los problemas se plantean en diferentes campos, tales como estimar una cantidad desconocida o efectuar un reparto equitativo, en lugar de pedir directamente el cálculo del promedio.
2. Uso por parte de los alumnos de las diferentes definiciones de media, mediana y moda en la solución de los problemas propuestos o en la justificación de la solución.
3. Comprensión de propiedades básicas, tanto numéricas, como algebraicas y estadísticas; uso adecuado de dichas propiedades al responder a las preguntas planteadas.
4. Reconocimiento del lenguaje matemático verbal, numérico y gráfico; uso apropiado de términos y lenguaje.
5. Cálculo y procedimientos de resolución de problemas. Comprensión de los algoritmos de cálculo frente a su aplicación automática.
6. Argumentaciones de los alumnos para apoyar sus respuestas y observar hasta qué punto son completas y consistentes.

Para la elaboración del cuestionario, Cobo (2003) siguió las recomendaciones de Osterlind (1989), Thorndike (1989) y Linn (1988), en cuanto a redacción de los ítems, formato, claridad y orden de presentación. También tuvo en cuenta los puntos siguientes:

- *Tipo de administración*: por razones de eficiencia, el cuestionario sería administrado de forma grupal. Para que dicha administración fuese eficaz, el cuestionario incluiría instrucciones claras y fáciles de seguir.
- *Limitaciones temporales en la administració*n: Se hizo un balance entre el número suficiente de ítems (y su dificultad) para cubrir el contenido y el tiempo disponible para contestarlo (contando además con el posible cansancio de los estudiantes que respondan al cuestionario). En este caso, aún siendo posible utilizar más tiempo, no se consideró oportuno excederse demasiado de una hora de administración del cuestionario. Se procuró que el cuestionario fuese corto y proporcionar un tiempo de hora y media para evitar que algunos ítems quedasen sin contestar por falta de tiempo.

Resaltamos el hecho de que las respuestas de los estudiantes se evaluarán en relación con el *significado de referencia* en nuestro estudio, delimitado en el estudio curricular realizado, que indica el enfoque y profundidad con que se ha abordado el tema en nuestros estudiantes. Cabe señalar que este es un significado parcial, puesto que las medidas de centralización tienen un significado más completo, si se tienen en cuenta los elementos aportados a dicho significado desde la matemática (por ejemplo, el estudio de medidas de tendencia central en las variables aleatorias), la historia (sucesivas concepciones históricas de medidas de tendencia central y los campos de problemas que las originaron), psicología y didáctica. Todo ello constituiría el *significado holístico o global* del concepto.

Así mismo, pretendemos estimar la proporción de alumnos que resuelve correctamente cada uno de los problemas propuestos en el cuestionario; comparar la dificultad que presenta cada ítem, identificando los índices de dificultad observados; estimar la proporción de alumnos que utilizan correcta o incorrectamente los elementos de significado considerados en el estudio; y mostrar tanto las características en la comprensión en el grupo, como su variabilidad.

Todos los ítems son de respuesta abierta para poder recoger con detalle los razonamientos de los estudiantes. Los ítems propuestos se analizan a continuación:

Ítem 1

Un periódico dice que el número medio de hijos en México es 2.2 hijos por familia. *a. Explica qué significa para ti esta frase.* *b. Se han elegido 10 familias mexicanas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo. ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta.*

Este ítem ha sido tomado de Watson (2000), adaptándolo a nuestro contexto y eliminando el formato original, de respuesta múltiple. Se ha añadido la segunda pregunta, que nos permitirá evaluar más elementos de significado que los que contenían el ítem original.

La primera parte del ítem pide al alumno una definición de media con sus propias palabras. Consideraríamos correcto en esta parte del ítem si la respuesta recoge la idea de media como reparto equitativo en una distribución de datos; por ejemplo, si el alumno da una respuesta del tipo: *"Que el número de hijos a los que tocaría cada familia al repartir el total sería 2.2, pero esto es resultado de una operación, pues el número de hijos siempre es un valor entero",* o bien, si considera el valor más probable al tomar un elemento de una población, por ejemplo: *"Las familias tienen alrededor de 2 hijos, pero algunas familias tienen más o menos"*. Estos son los dos campos de problemas considerados en el ítem.

Consideraremos correctas las respuestas a la segunda parte, cuando los alumnos den una distribución de datos que, incluyendo los valores dados, resulte una media igual a 2.2. Por ejemplo: *"Las otras familias tienen 2 hijos cada una, excepto una que tiene 3, porque así la media da 2.2"*. Es decir, el alumno debe calcular el total de hijos de las 10 familias, multiplicando la media 2.2 por 10. Restando los 5 hijos que conjuntamente tienen las dos familias dadas quedan 17 hijos entre 8 familias. Se trataría de dar un total de 17, para lo cual hay varias posibilidades, por ejemplo, cada familia podría tener 1, y una de ellas 10 hijos.

Para resolver este problema, el alumno podría usar las diferentes definiciones de media y moda, así como de las siguientes propiedades numéricas: "*La media es un valor perteneciente al rango de la variable*", "*la media no tiene por qué ser uno de los valores de los datos*" (ya que en este caso, la media no da un valor entero); algebraicas: "*el cálculo de la media no es operación interna*" (pues no se conserva el conjunto numérico dado inicialmente en el problema); y estadísticas "*la media es un* *representante del conjunto de datos*".

Como elemento de cálculo, se requiere, para una media dada, buscar una distribución, lo que implica conocer el algoritmo de cálculo de este parámetro con un conjunto pequeño de datos aislados y saber aplicarlo a la inversa. También se podría resolver por ensayo y error, calculando la media con datos aislados. Respecto al lenguaje, el problema contiene elementos numéricos y verbales. Se pide también proporcionar un argumento.

Ítem 2

María y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte.

a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?

b. María y Pedro dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

El segundo ítem también es original del estudio de Watson (2000) y fue adaptado a formato abierto por Cobo (2003). La primera parte del ítem nos permite evaluar si los estudiantes son capaces de calcular correctamente una media ponderada, un tema en que numerosos autores (Li y Shen, 1992; Carvalho, 2001; Cobo, 2003), han señalado dificultades, incluso en alumnos universitarios. Para resolverlo correctamente, los estudiantes habrían de multiplicar la frecuencia de alumnos que dedica 8 horas a hacer deporte (2 alumnos) por 8; multiplicar la frecuencia de alumnos que dedica 4 horas a hacer deporte (2) por 4; sumar los valores resultantes y obtener la media global dividiendo entre el total de datos (10).

La ponderación correcta en el cálculo de la media, supone capacidad para aplicar la ley distributiva al sumar un conjunto de valores numéricos repetidos y también percibir que la media aritmética considerada como una operación no tiene la propiedad asociativa (Pollatsek, Lima y Well, 1981). Se requiere también el conocimiento de las definiciones de la media, como algoritmo y como promedio.

En la segunda parte del ítem, además de aplicarse de nuevo el cálculo de la media ponderada, tratamos de averiguar si los alumnos reconocen la siguiente propiedad: "*la media de la suma de dos o más variables, es la suma de las medias de éstas*" (Tormo, 1993). Las representaciones que el alumno debe usar para resolver el problema son verbales y numéricas.

Ítem 3

Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?

El tercer ítem, tomado de Tormo (1993), usado en su forma original en formato abierto, pide que los alumnos respondan que la cantidad total de harina recibida por los niños que tenían menos que los demás, debe ser igual a la dada por los que tenían un exceso de harina, porque una cantidad se compensa con la otra. En este ítem se trata de interpretar la media como centro de gravedad en una distribución de datos y como la cantidad que se obtiene al hacer un reparto equitativo para obtener una distribución uniforme es justamente el valor de la media.

En este problema se puede observar si los estudiantes tienen conocimiento sobre la propiedad: "*suma de las desviaciones de los datos con respecto a la media es nula*", es decir, cada dato que está por encima de la media debe compensarse con otros por debajo de ella. Este ítem contiene sólo elementos verbales y puede ser susceptible de dificultades para los alumnos, ya que están más habituados a resolver cuestiones numéricas. Se espera también un argumento por parte del alumno.

Ítem 4

Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

Esperamos que los alumnos respondan que la cantidad total de harina recibida por los niños que tenían menos que los demás, debe ser igual a la dada por los que tenían un exceso de harina, porque una cantidad total se compensa con la otra. En este ítem se trata de interpretar la media como centro de gravedad en una distribución de datos y como la cantidad que se obtiene al hacer un reparto equitativo para obtener una distribución uniforme es justamente el valor de la media.

Con este ítem, también tomado de la investigación de Tormo (1993), se pretende averiguar si los alumnos son capaces de dar una distribución de valores, conocida la media y el máximo. Como indican Mokros y Russell (1995), hasta que los niños no conciben el conjunto de datos como un todo, no podrán comprender la idea de promedio. Para resolver el ítem y teniendo en cuenta que el producto de la media (4) por el número de valores (6) es igual a 24, restando el máximo 5, se obtiene 19. Por tanto, la suma de los otros 5 números ha de ser igual a 19. Una posible solución es que el resto de los valores sea igual a 4, excepto uno de ellos que tome el valor 3. Hay otras soluciones posibles al ítem.

En este ítem se trata de ver si los alumnos comprenden el algoritmo de cálculo de la media. También aparece el algoritmo de cálculo de la media con datos aislados. Esperamos que los alumnos muestren con un ejemplo que el enunciado es posible y den un argumento matemáticamente correcto. Este ítem se presenta en un contexto abstracto e implícitamente aparece la definición de media como algoritmo. Existe una serie de números no conocidos, lo que obliga a construir una distribución para una media dada. Los elementos de representación son verbales y numéricos. Incluye, como elementos de significado más relevantes, las propiedades de la media de "*ser un valor perteneciente al rango de la variable*" y "*ser el centro de gravedad de la distribución*".

Ítem 5

El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24.
a. ¿Cuál es el peso del niño mediano?
b. ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg?
c. En este caso, ¿Sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

Con este ítem tomado de Godino (1999), quien lo utilizó en una investigación con futuros profesores y posteriormente tomado por Cobo (2003) para su trabajo, se pretende medir las competencias en el cálculo de la mediana, tanto con un número par de valores como impar. También se quiere comprobar si los estudiantes comprenden adecuadamente el efecto de la presencia de valores atípicos sobre los valores de media y mediana.

Para resolver el apartado a), habría que ordenar los datos y tomar el elemento central, aplicando directamente la definición de mediana. Supone que los alumnos comprendan que la mediana es el centro de la distribución cuando los datos están ordenados, combinando las ideas de centro y orden. A partir de los datos dados, los alumnos tendrían que producir una ordenación de los datos y determinar el valor central que sería la mediana.

Al añadir un nuevo elemento en el apartado b), el número de elementos sería entonces par. Nos encontraríamos en el caso de indeterminación, pues al ordenar el conjunto de datos y buscar el valor central, encontramos dos valores. Por tanto, los dos elementos centrales del conjunto de datos cumplen la definición de mediana, pues están situados en el centro de la distribución. Para resolver la indeterminación se introduce un convenio que se enseña a los alumnos, que consiste en obtener la media de los dos valores centrales y tomar dicho valor medio como mediana del conjunto de datos.

En el apartado c), se espera que los alumnos indiquen que el mejor representante es la mediana, ya que la media se vería muy afectada por el alto valor 43 que es atípico. Por el contrario, la mediana (19) no se ve afectada por los valores extremos y cumple que exactamente el 50% del grupo está por encima y debajo de este valor.

Este ítem contempla las siguientes propiedades: "*el cálculo de la moda y la media intervienen todos los valores de los datos, mientras que en el de la mediana no*"; "*La media cambia siempre que cambia algún dato, mientras que la mediana puede no cambiar*"; y "*la media es menos resistente que la mediana*". Por otro lado, en cuanto a las definiciones de mediana, contiene de manera implícita, las que giran en torno a la idea de elemento central que divide a la población en dos partes iguales, y con respecto a la media, la centrada en la idea de promedio aritmético de un conjunto de valores (Cobo y Batanero, 2000). Se utilizan en este ítem representaciones verbales y simbólicas, y se espera que el alumno proporcione una argumentación.

Ítem 6

Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1: I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S

Grupo 2: S S I I A N A N I I S N A S I N N

a. ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?

b. ¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?

Este ítem, tomado de Godino (1999), se centra en la mediana y su relación con las otras medidas de tendencia central. En él se pide comparar dos grupos de datos ordinales. Puesto que los datos corresponden a una variable ordinal, que no admite el cálculo de la media, los únicos parámetros de centralización con que se pueden hallar como resumen de los datos son la mediana y la moda (Cobo y Batanero, 2000). La mediana es preferible a la moda porque tiene en cuenta el orden de los datos, mientras la moda sólo tiene en cuenta su frecuencia. Para calcularla en cada grupo, el alumno tendría que ordenar previamente los valores, como se muestra a continuación:

Grupo 1: I I I I I A A A A A A ***A*** *N N N S S S S S S S S*

Grupo 2: I I I I I A A A ***N*** *N N N N S S S S*

El primer grupo tiene 23 elementos, con lo que el alumno central, que ocupa la posición 12 tiene un *Aprobado*. En el segundo grupo el valor de la mediana es *Notable*, puesto que el elemento central es el 9 (de 17 sujetos). Finalmente se deben comparar las dos medianas calculadas, hallando el mayor de ellos. El grupo correspondiente será el que tiene "mejores" notas.

Una dificultad del problema es el diferente número de casos en cada grupo. Podríamos también admitir como solución (aunque no tan apropiada) si los alumnos calculan y comparan correctamente las modas de los dos grupos. Consideramos parcialmente correcto si el alumno calcula y compara bien las medias de los dos grupos (asignando una puntuación numérica a cada una de las calificaciones) y da como respuesta que el mejor grupo es el primero.

En consecuencia, el ítem contempla los algoritmos de cálculo de media, mediana y moda con datos aislados. En cuanto a las propiedades, este ítem contiene las siguientes: numérica, "*Para el cálculo de la mediana no se tienen en cuenta todos los valores de los datos, sólo su posición una vez ordenados*"; algebraica: "*La mediana y la moda existen para variables ordinales, mientras que la media no existe en este caso*"; y estadísticas: "*Los promedios son representantes de un colectivo*" y "*Existe moda y mediana en variables cualitativas ordinales*". Incluye representaciones de tipo verbal y simbólico, y también se espera que el alumno proporcione una argumentación.

Ítem 7

Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona.

a. *¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?*

Lucía _______________ *Juan* _________________ *Pablo* ______________

b. *¿Es la única posibilidad? Explica cómo has obtenido tus resultados.*

c. *Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.*

El ítem fue tomado por Cobo (2003) de una investigación previa de Gattuso y Mary (1996). Está orientado a evaluar la capacidad de los alumnos, de encontrar una distribución para una media dada. Incluye elementos de cálculo de la media para una variable discreta con datos aislados, y de obtener una distribución para que se cumpla la condición pedida. Pretende ver si el alumno se da cuenta de que existe más de una solución posible.

En la tercera parte del problema, se pretende valorar si los estudiantes conocen la propiedad de que para el cálculo de la media se debe considerar todos los valores de los datos, incluyendo el cero. Es decir, la media no tiene elemento neutro. La presentación del ítem contiene elementos verbales y numéricos, así como las siguientes propiedades: "*En el cálculo de la media intervienen todos los valores*", "*la media cambia cuando cambia algún dato*" y "*el cálculo de la media, como operación algebraica, es conmutativa y no tiene elemento neutro*". Se pide una argumentación.

Ítem 8

Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6.2, 6.3, 6.0, 15.2, 6.2, 6.1, 6.5, 6.2, 6.1, 6.2.

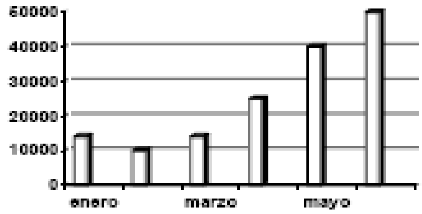
Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Qué harías para calcularlo?

El ítem está tomado de Garfield y Konold (1992) y requiere el cálculo de la media en una variable discreta con datos aislados y hacer uso de la media como estimación de una cantidad desconocida a partir de diversas mediciones en presencia de errores, En este ítem, la media la respuesta correcta, aunque se espera que los alumnos puedan optar por la mediana o la moda. De esta manera, el ítem incluye definiciones, algoritmos de cálculo y procedimientos relativos a las tres medidas para el caso de una variable discreta con datos aislados. Las representaciones son numéricas y verbales.

Contiene también algunas propiedades: "*La media y la mediana puede no coincidir con ningún valor de los datos, mientras que la moda siempre es uno de ellos*", "*la media cambia al cambiar algún dato*", "*el cálculo de la moda, desde el punto de vista algebraico, es una operación interna, mientras que el de la media y la mediana no lo es*", "*los tres promedios, media, mediana y moda, son representantes de un colectivo*" y "*la suma de las desviaciones de un conjunto respecto a su media es cero*".

Ítem 9

Observa el siguiente diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa Bocatta durante los últimos 6 meses del año pasado:



a. *Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.*
b. *Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.*

El ítem 9 fue tomado de Zawojeswki (1986), y se centra en la estimación directa de la media a partir de un gráfico y en el cálculo de la mediana a partir de un gráfico. La dificultad principal se presenta está en la lectura del gráfico, puesto que autores como Curcio (1989) indican que esta no es una actividad sencilla. La tarea requiere un nivel de "lectura literal de datos" en la categorización de este autor para poder traducir los valores numéricos expresados en el diagrama de barras. Una vez hecha la traducción, se trataría tan sólo de calcular la media y mediana de un conjunto de datos aislados.

Los alumnos pueden fallar, sin embargo por no hacer una correcta interpretación de las variables, las escalas y los ejes del gráfico. Las representaciones que los estudiantes han de utilizar son gráficas numéricas y verbales. Los elementos de significado que contiene son, principalmente algorítmicos. Presenta dos propiedades: "*La moda es siempre uno de los valores de los datos, mientras que para la media y la mediana no es cierto, en general*" y "*el cálculo de la moda es una operación interna, mientras que el de la media y el de la mediana no lo son*".

Como resumen de este apartado, presentamos en la Tabla 4.3.1 los objetos matemáticos evaluados en el cuestionario y que en su conjunto definen el significado institucional evaluado en el estudio piloto. Tendríamos que añadir que los alumnos podrían también usar lenguaje simbólico al efectuar sus cálculos.

Al comparar con el significado institucional de referencia, determinado a partir de los libros de texto en el Capítulo2, observamos que se presentan todos los campos de problemas, lenguaje y definiciones. Se añaden algunas propiedades y se restringen los algoritmos de cálculo. En su conjunto, el significado evaluado es representativo del significado institucional de referencia, y por lo tanto, proporcionamos unas primeras evidencias de validez de contenido del instrumento, que se completarán en el Capítulo 5 con el análisis del resto de los ítems del cuestionario completo.

Tabla 4.3.1. Configuración de objetos que intervienen en la solución de los ítems

	Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Definiciones	DM1. Media como algoritmo	×	×		×	×	×	×	×	
	DM2. Media como promedio	×	×			×	×			×
	DME1.Mediana, valor central					×	×		×	
	DME2.Mediana, dos partes					×	×			×
	DMO1.Moda, valor más frecuente	×					×		×	
Propiedades	N1. Media, mediana y moda pertenecen al rango de la variable	×			×					
	N2. La moda coincide con algún dato de la distribución, pero media y mediana no	×							×	
	M3. Para la media se tienen en cuenta todos los valores del conjunto, pero no en Me ni Mo					×	×	×		
	N4. El valor de la media cambia cuando se cambia cualquier dato del conjunto					×		×	×	
	A1. Operación interna	×							×	
	A2. La media, mediana y moda no tienen elemento neutro ni simétrico							×		
	A3. No tienen propiedad asociativa		×							
	A4. Son operaciones conmutativas							×		
	A6. La media de la suma de dos o más variables es la suma de la media de dichas variables		×							
	E1. La media, mediana y moda son representantes de un colectivo	×				×	×		×	
	E2. La media coincide con el centro del conjunto de datos			×	×					
	E3. Media, mediana y moda coinciden en distribuciones simétricas					×				
	E4. La mediana es sensible a la variación de los datos del conjunto					×				
	E5. La suma de las desviaciones del conjunto de datos de su media es cero			×					×	
	E8. Existe moda para variables cualitativas y cuantitativas						×			
Campos de problemas	PM1.Media mejor estimación								×	
	PM2.Media, reparto equitativo	×		×						
	PM4. Media, valor probable	×						×		
	PME1. Mediana, si media no representativa					×				
	PME2. Representante datos ordinales						×			
	PMO1. Moda como valor más frecuente						×			
	PMO2.Moda para datos cualitativos						×			
Algoritmos y procedimientos	AM1. Media datos aislados	×			×	×	×	×	×	
	AM2. Media ponderada		×							×
	AM4. Cálculo gráfico media									×
	AM6. Invertir algoritmo media	×			×			×		
	AM7. Buscar distribución dada la media	×			×			×		
	AME1.Mediana datos aislados (nº impar)					×	×			
	AME2. Mediana datos aislados (nº par)					×			×	
	AME3/AME4. Mediana, tabla frecuencias									×
	AME6. Cálculo gráfico mediana									×
	AMO1. Moda, datos aislados						×		×	
	AMO4. Cálculo gráfico moda									×
Lenguaje	Verbal	×	×	×	×	×	×	×	×	×
	Numérico	×	×							×
	Gráfico									×
	Simbólico					×				
Argumento		×		×	×	×	×			

4.4. DIFICULTAD COMPARADA DE ÍTEMS

Para realizar el análisis de dificultad de las respuestas obtenidas por los alumnos, debemos considerar que el cuestionario contiene ítems abiertos. En esta parte de la investigación, analizamos primeramente si el alumno es capaz o no de dar la respuesta correcta esperada por nosotros, descrita en el apartado anterior. Por ello, en las tablas siguientes categorizamos las respuestas únicamente como correctas o incorrectas, considerando las respuestas en blanco como incorrectas.

En el Capítulo 6 ampliaremos este análisis efectuando una categorización cualitativa, que nos permitirá evaluar mejor la comprensión que muestran los estudiantes respecto a algunos de los ítems, así como los conflictos que presentan. En concreto, nos centraremos en algunos de los ítems relacionados con la mediana, que fue el concepto más difícil en la investigación de Cobo (2003).

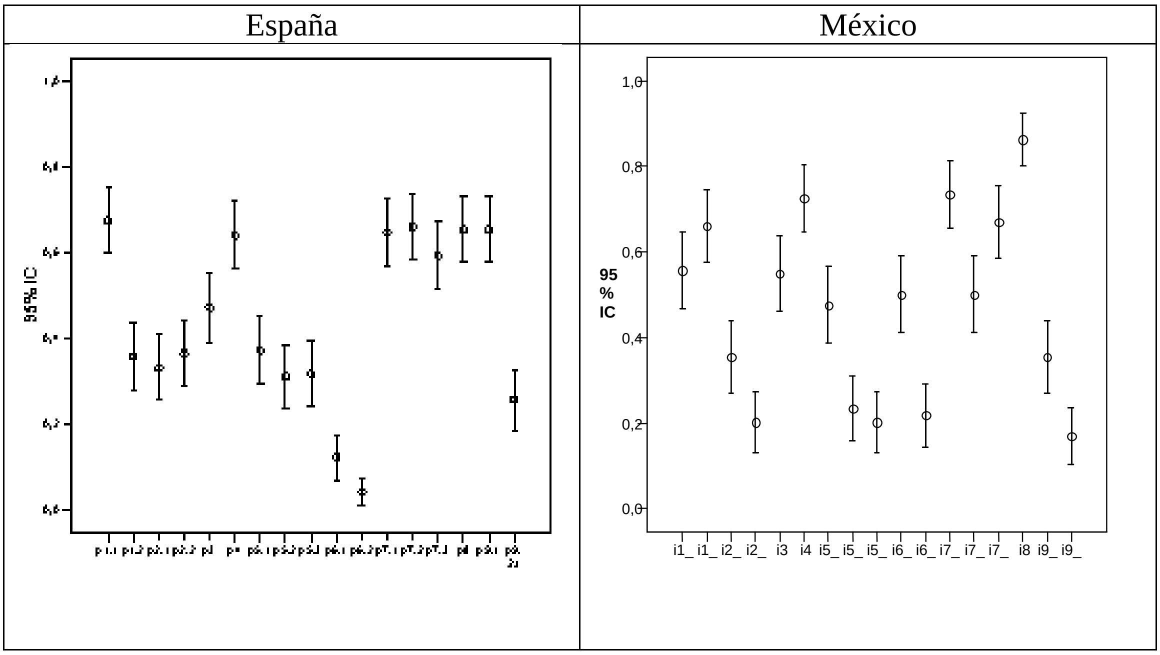
Tabla 4.4.1. Índice de dificultad y desviación típica

	Estudiantes mexicanos (N=125)		Estudiantes españoles(N=144)	
Ítem	Media	Desviación típica	Media	Desviación típica
i1_1	0.56	0.50	0.69	0.46
i1_2	0.66	0.48	0.37	0.48
i2_1	0.36	0.48	0.34	0.48
i2_2	0.21	0.41	0.38	0.49
i3	0.54	0.50	0.49	0.50
i4	0.73	0.44	0.66	0.48
i5_1	0.48	0.50	0.38	0.49
i5_2	0.23	0.42	0.32	0.47
i5_3	0.20	0.40	0.33	0.47
i6_1	0.50	0.50	0.13	0.33
i6_2	0.22	0.41	0.04	0.20
i7_1	0.74	0.44	0.67	0.47
i7_2	0.50	0.50	0.68	0.47
i7_3	0.67	0.48	0.61	0.49
i8	0.86	0.34	0.67	0.47
i9_1	0.35	0.48	0.67	0.47
i9_2	0.17	0.38	0.26	0.44

En la Tabla 4.4.1 se presentan los *índices de dificultad* (Muñiz, 1994), de cada ítem o proporción de sujetos que lo aciertan. Cuanto mayor es este valor significa que el ítem es más fácil para los alumnos y ha sido respondido por una mayor proporción de ellos. En otra columna añadimos los resultados obtenidos con los estudiantes españoles de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, que en promedio, son dos años menores que los mexicanos y habían tenido dos cursos menos de educación secundaria; por lo que sería de esperar que los resultados mexicanos fuesen al menos iguales a los españoles.

Entre los estudiantes mexicanos, este índice fluctúa entre 0.17 en el ítem 9.2 (cálculo de la mediana a partir de un gráfico) y 0.86 en el ítem 8 (estimación de una cantidad desconocida a partir de diversas mediciones en presencia de errores). Por parte de los estudiantes españoles, este índice osciló entre un 0.04 de respuestas correctas en el ítem 6.2 (elegir un promedio adecuado en un conjunto de datos ordinales) y 0.69 en el ítem 1.1 (hallar una distribución de datos, dada la media).

Figura 4.4.1. Intervalos de confianza de los índices de dificultad en cada grupo



Los resultados se observan mejor en la Figura 4.4.1, donde se presentan los intervalos de confianza del 95% para los índices de dificultad en cada muestra, usando la misma escala. Aunado a lo anterior, comentamos los resultados que tienen que interpretarse, tomando en cuenta la diferencia de edad, ya que los alumnos españoles tienen en promedio 16 años y los mexicanos 18 años.

Algunos ítems difíciles de resolver para ambos grupos fueron los siguientes, donde el primer valor se refiere a los estudiantes mexicanos y el segundo a los estudiantes españoles:

- Ítem 9.2 (0.17-0.26), donde se trata de estimar la mediana a partir de un gráfico. La dificultad proviene del hecho de que los datos están representados gráficamente. Los estudiantes tienen con frecuencia errores en la interpretación de los gráficos, pues no llegan a un nivel adecuado de lectura en la categorización de Curcio (1989). Por otro lado, otros estudiantes o bien no tienen en cuenta la frecuencia en el cálculo de la mediana calculando el punto medio de los valores de la variable, o bien no dan respuesta.
- Ítem 2.2. (0.21-0.38), con el que se espera que los estudiantes sean capaces de operar con promedios para hallar la media de la suma de dos variables aleatorias. La dificultad no está en este punto, que ha sido sencillo para la mayoría de participantes en la muestra piloto, sino en el cálculo de la media ponderada que los alumnos tendrían que hacer previamente. Esta dificultad coincide con la señalada por Mevarech (1983), Gattuso y Mary (1996; 2002) y Cobo (2003), entre otros autores.
- Ítem 5.2 (0.23-0.32), que pide calcular la mediana con un número par de valores aislados. Los errores se producen porque en algunos casos los alumnos no ordenan los datos al calcular la mediana; en otros casos, no saben resolver la indeterminación producida al haber dos datos centrales, dificultades ya señaladas por Carvalho (1998; 2001). Jacobbe (2008) encuentra estos errores incluso en profesores de educación primaria en ejercicio.
- Ítem 5.3 (0.20-0.33), que evalúa la comprensión del efecto de los valores atípicos sobre el cálculo de la media. No todos los estudiantes son conscientes que se debe eliminar este valor al calcular la media o tomar la mediana como promedio más adecuado, al ser insensible a los valores atípicos. Estos mismos resultados ya fueron encontrados por Godino (1999) en profesores en formación.
- Ítem 2.1 (0.36-0.34), cálculo de la media ponderada. Observamos que los estudiantes no tienen en cuenta la ponderación, por lo que coincidimos en este punto con las investigaciones de Pollatsek, Lima y Well (1981) y las anteriormente señaladas en el ítem 2.2.

Por otro lado, resultaron sencillos para los dos grupos los siguientes ítems:

- Ítem 8 (0.86-0.67), idea de media como mejor estimador de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida. Esta es una idea estadística muy potente, pues es base de los métodos de estimación; los resultados sugieren que es intuitiva para los alumnos.

- Ítem 7.1 (0.74-0.67) y 7.2 (0.50-0.68), encontrar una distribución de valores conocida sólo la media y reconocer si la solución es o no única. Este fue el ítem más sencillo, lo que contradice los resultados de otras investigaciones, como las de Cai (1995), quien considera esta tarea difícil, aunque sus estudiantes eran de menor edad.
- Ítem 4 (0.73-0.66), similar al anterior, requiere también del conocimiento del algoritmo de la media y que el valor de ésta debe estar comprendida en el rango de valores de datos. Nuestros resultados también contradicen las conclusiones de Cai (1995).
- Ítem 7.3 (0.67-0.61), efecto del cero sobre el valor de la media. Este efecto fue reconocido intuitivamente por nuestros estudiantes, en contradicción con los resultados de Mevarech (1983), quien considera ésta una propiedad difícil.
- Ítem 1.1 (0.56-0.69), requiere aplicar la idea de media como un reparto equitativo en una distribución de datos y conocer el valor más probable al tomar un elemento de una población. Estos dos tipos de problemas fueron especialmente sencillos para ambos grupos de estudiantes.
- Ítem 3 (0.54-0.49), solicita conocer la propiedad de que la suma de desviaciones respecto a la media ha de ser igual a cero. Esto es, las desviaciones por encima se compensan con las desviaciones por debajo de la media. Al igual que en la investigación de Tormo (1993), esta propiedad fue intuitivamente usada, tanto por los estudiantes españoles como por los mexicanos.

Observamos las principales diferencias entre estos grupos de estudiantes en los ítems 9.1 (0.35-0.67), cálculo de la media a partir de un gráfico; 1.2 (0.66-0.37), dar una justificación de por qué se construye una distribución dada la media; 5.1 (0.48-0.38), encontrar la mediana con un número impar de valores.

En el primero de ellos, los resultados fueron mejores en los alumnos españoles a pesar de ser menores en edad. La explicación que podemos dar es que en el análisis de los textos usados por los alumnos de la muestra (Capítulo 2) se observó que no se incluyen representaciones gráficas de ningún tipo en el estudio de las medidas de posición central, sino hasta el siguiente tema “medidas de dispersión”, donde ya se proponen ejemplos que enseñan al alumno a localizar y calcular media, mediana y moda a partir de gráficos, pero también de manera limitada.

En el segundo ítem, los resultados son mejores en los alumnos mexicanos, posiblemente porque tener mayor edad les da mejor competencia para proporcionar un argumento, y en el tercero, que es un ítem sobre cálculo de la mediana, no encontramos una explicación clara del bajo resultado de los mexicanos, pero se analizará con detalle el resultado en el estudio cualitativo de este ítem en el Capítulo 6.

También se produce una clara diferencia en el ítem 6.1 (0.5-0.13) y 6.2 (0.22-0.04), donde se debe usar la mediana como resumen estadístico de variables ordinales. Aproximadamente la tercera parte de los estudiantes mexicanos transforman las variables en escala de razón, asignando un valor numérico a las diferentes categorías (insuficiente, aprobado, etc.). El problema es que aunque la transformación conserva el orden, no conserva la escala y se llega a un resultado incorrecto. En este ítem, a diferencia de Cobo (2003), hemos considerado también como correctas las respuestas en que los alumnos comparan los grupos a través de la media, siempre que ésta sea correctamente calculada y se llegue a un resultado consistente con la estrategia, mientras que Cobo (2003) solo consideró correcto si los estudiantes usaron la mediana o la moda para comparar los grupos. De ahí la diferencia obtenida en los porcentajes. En todo caso son pocos los que siguen esta estrategia y la mayoría, ni siquiera usa un promedio para comparar los grupos, sino simplemente compara uno de los valores de la variable; de esta forma disminuye el número de respuestas correctas en la segunda parte del ítem. Usan así sólo una parte de los datos en la comparación, estrategia que Estepa (1993) llamó "concepción local" en su estudio sobre la asociación.

En cuanto a las desviaciones típicas, en general se agrupan alrededor de 0.50, lo que no supone una variabilidad muy elevada, es decir, que no existen diferencias demasiado notables en la dificultad encontrada por los alumnos con respecto a la media. Los ítems más homogéneos han sido los ítems de alta dificultad.

Principales dificultades observadas

Para resumir, presentamos a continuación las principales dificultades encontradas respecto a la comprensión de los objetos matemáticos considerados en nuestro marco teórico que se dedujeron del análisis cualitativo de las respuestas; así como de los porcentajes de fallos en los ítems y del significado evaluado por éstos.

- *Problemas.* Fue difícil para los estudiantes, reconocer la mediana como mejor promedio de datos ordinales, deducido de la multitud de fallos en el ítem 6, y aquellos estudiantes que lo resuelven correctamente utilizan preferentemente la media y no la mediana. Por el contrario, los estudiantes reconocen los problemas de estimar una cantidad desconocida (ítem 8) y efectuar un reparto equitativo (ítems 1 y 7) como asociados a la media aritmética.
- *Representaciones.* El único problema se presenta con las gráficas en ambos grupos, donde se producen mayor número de errores en el ítem 9. Los estudiantes no tuvieron problemas de importancia con los términos o símbolos relacionados con los promedios.
- *Algoritmos.* Los estudiantes calculan con facilidad medias simples en casi todos los problemas y entienden el algoritmo de cálculo de promedios, el cual invierten correctamente para encontrar una distribución con media dada (ítem 1). Lo más difícil en ambos grupos fue el cálculo de medias ponderadas (ítem 2), y el cálculo de la mediana a partir de un gráfico (ítem 9). También tienen dificultad en resolver la indeterminación, cuando el número de datos al calcular la mediana es par (ítem 5).
- *Definiciones.* La definición que causa más dificultad es la de la mediana (ítems 5 y 6), pero también la de media cuando se debe usar la ponderación (ítem 2).
- *Propiedades.* Los estudiantes tienen dificultad en reconocer que la media es poco resistente cuando hay valores atípicos, ya que intervienen todos los valores en su cálculo. Los alumnos reconocen que el valor de la media está comprendido en el rango de variación de la variable; el efecto del cero sobre su valor y que la suma de desviaciones por encima y debajo de la media se compensa.

En conclusión, son evidentes las coincidencias que encontramos tanto en estudiantes mexicanos como en españoles, dado que los ítems, 6.1, 6.2, 5.3 y 9.2, particularmente fueron difíciles de resolver. Esto nos lleva a proponer alternativas que incidan en la mejora en el aprendizaje de las medidas de posición central y que ayude a los estudiantes a identificar cada una de ellas y saberlas aplicar o utilizar en momentos adecuados. Estos ítems, con otros relacionados con la mediana se eligieron para el estudio semiótico que se presenta en el Capítulo 6.

Tabla 4.4.2. Índice de dificultad, intervalos de confianza y credibilidad del 95%

Ítem	Media	Intervalo de confianza		Intervalo de credibilidad	
i1_1	0.56	0.47	0.65	0.47	0.64
i1_2	0.66	0.58	0.74	0.57	0.74
i2_1	0.36	0.32	0.53	0.34	0.52
i2_2	0.21	0.14	0.28	0.15	0.28
i3	0.54	0.45	0.63	0.45	0.62
i4	0.73	0.65	0.81	0.64	0.80
i5_1	0.48	0.39	0.57	0.40	0.57
i5_2	0.23	0.16	0.30	0.17	0.31
i5_3	0.20	0.13	0.27	0.14	0.28
i6_1	0.50	0.41	0.59	0.41	0.58
i6_2	0.22	0.14	0.29	0.15	0.29
i7_1	0.74	0.66	0.82	0.65	0.80
i7_2	0.50	0.41	0.59	0.41	0.58
i7_3	0.67	0.59	0.75	0.58	0.75
i8	0.86	0.80	0.92	0.78	0.91
i9_1	0.35	0.27	0.43	0.27	0.44
i9_2	0.17	0.10	0.24	0.11	0.24

Completamos nuestro estudio mediante la estimación clásica y bayesiana de los índices de dificultad, estimación que no fue realizada por Cobo (2003). En la Tabla 4.4.2 se incluyen los intervalos de confianza (estimación clásica) e intervalos de credibilidad (estimación bayesiana) para los índices de dificultad. El motivo de incluir estas estimaciones es doble: a) por un lado la inferencia bayesiana nos permite incorporar la información previa que sobre la dificultad de los ítems se había obtenido en el trabajo de Cobo (2003), en lugar de suponer que no se tiene ninguna información sobre su dificultad; b) los intervalos de credibilidad nos indican la localización del índice de dificultad en la población, lo que no se cumple con los intervalos de confianza.

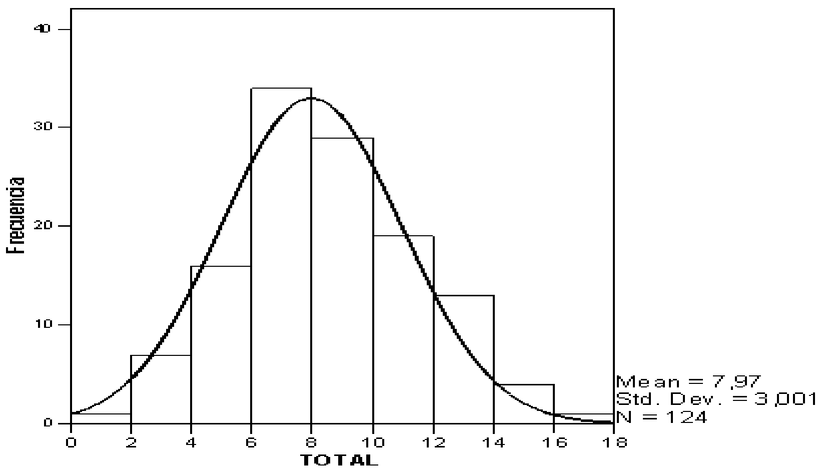
El intervalo de confianza ha sido calculado con la fórmula ordinaria de intervalos de confianza de una proporción y tiene una interpretación frecuencial, es decir, de cada 100 muestras tomadas de la misma población, 95% de ellas contendrían la proporción verdadera en el intervalo, aunque no podemos saber si se contiene o no en nuestra muestra particular.

El intervalo de credibilidad, por el contrario, indica el intervalo de valores en que esperamos que la proporción verdadera esté incluido, es decir, nos da una probabilidad epistémica, que se refiere sólo a la muestra particular. Es también una probabilidad subjetiva y no objetiva, pues se basa en la distribución inicial elegida para la proporción, que en inferencia bayesiana se supone variable y no constante. Nosotros hemos tomado una distribución uniforme, es decir, hemos supuesto equiprobables todos los valores de la proporción a priori en los diferentes ítems. Por ello, los intervalos de confianza y credibilidad son muy similares (hubiesen sido diferentes si hubiésemos tomado diferente distribución inicial). Pero para el estudio definitivo usaremos las estimaciones de este capítulo para definir una distribución inicial informativa.

4.5. ANÁLISIS DE LA PUNTUACIÓN TOTAL EN EL CUESTIONARIO

Para analizar el número de respuestas correctas que cada estudiante obtuvo, les hemos asignado el valor de 1 a cada respuesta correcta, por lo que al sumarlas, podríamos encontrar una variación entre 0 y 17 respuestas correctas, que tal como se observa en el histograma de frecuencias (Figura 4.5.1.). El número medio de respuestas correctas es de 8 sobre 17.

Figura 4.5.1. Puntuación total en la prueba



Observamos en la Tabla 4.5.1 que el número de respuestas correctas osciló entre 1 y 17 (se alcanzó el máximo teórico y hubo un alumno con solo una respuesta correcta). El número medio de respuestas correctas de los estudiantes mexicanos es de 7.97 sobre 17, lo que nos da resultados aceptables, que se acercan a lo esperado. La mediana (8) indica que más de la mitad de los estudiantes responden al menos la mitad de las preguntas. Los coeficientes de asimetría y curtosis son aceptables para asumir la normalidad de las puntuaciones.

Tabla 4.5.1. Estadísticos descriptivos de la puntuación total

		Estadístico	Error típico
Media		7.97	0.270
Intervalo de confianza al 95%	L. Inferior	7.43	
	L. Superior	8.50	
Mediana		8.00	
Varianza		9.007	
Desv. típica		3.001	
Mínimo		1	
Máximo		17	
Amplitud intercuartilica		4	
Asimetría		0.323	0.217
Curtosis		0.135	0.431

En la gráfica 4.5.2, observamos los cuartiles que se sitúan en los valores 6 y 10. Esto indica que el conjunto central de alumnos (50% central), responde entre 6 y 10 preguntas correctamente. Observamos también que el caso de 17 preguntas correctas es atípico y el máximo para el resto de los alumnos se sitúa en 15 respuestas correctas. En la gráfica 4.5.3, observamos la normalidad aproximada de la distribución.

Figura 4.5.2.Gráfico de caja de Total

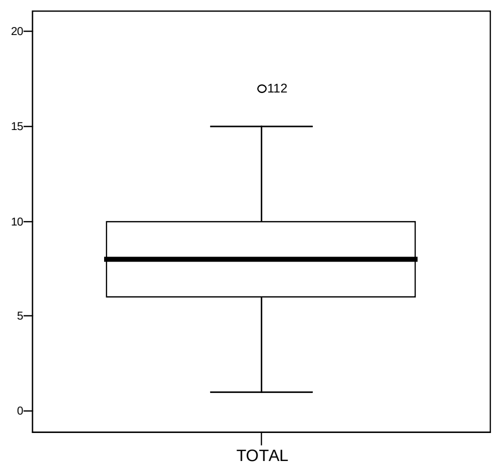
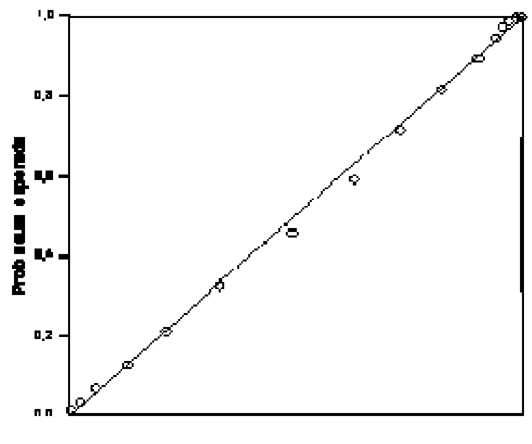


Figura 4.5.3. Gráfico P-P Normal de Total



En el estudio de Cobo (2003), la media de respuestas correctas a esta parte del cuestionario por alumnos de 4º de ESO fue 7.67 y la mediana 8. El 50% central de valores osciló entre 5 y 11 preguntas correctas, por lo cual hubo más variabilidad que en nuestro caso, pero no una diferencia notable de promedios. En resumen, los resultados son similares e incluso mejores en nuestros estudiantes, lo que sugiere que el cuestionario es útil para realizar el estudio de evaluación previsto.

4.6. EFECTO DE LAS VARIABLES

Comparamos a continuación el número total de respuestas correctas en función de las variables independientes del estudio con objeto de observar si era necesario considerarlas en el estudio definitivo de evaluación.

En primer lugar presentamos en la Tabla 4.6.1 el análisis de varianza multifactorial, tomando como variable dependiente la puntuación total en el cuestionario y como independientes el sexo, la edad y el grupo. Ninguna de las variables tuvo un efecto significativo, por lo que deducimos la estabilidad de la puntuación respecto a dichas variables. Por tanto, se decidió descartar estas variables en el análisis estadístico del estudio definitivo de evaluación que se presentará en el Capítulo 6.

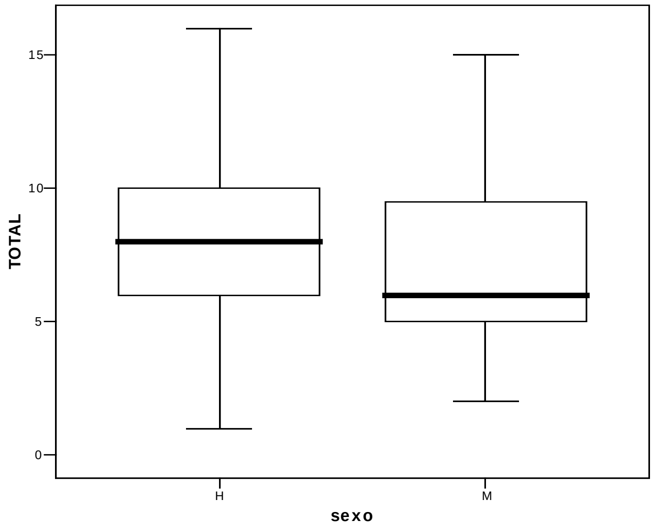
Tabla 4.6.1. Pruebas de los efectos inter-sujetos

Fuente	Suma de cuadrados tipo II	gl	Media cuadrática	F	Significación
Sexo	15.125	1	15.125	1.731	0.191
Edad	39.927	2	19.963	2.284	0.106
Grupo	30.761	4	7.690	0.880	0.478
Error	1022.567	117	8.740		
Total	8411.000	125			

a R cuadrado = .107 (R cuadrado corregida = .054)

Para analizar si aparece alguna diferencia en otros parámetros (como dispersión o cuartiles), se realizaron gráficas de caja paralelas para ambos géneros de un mismo factor, en las que se puede apreciar la existencia o no de diferencias. Como se muestra en la Figura 4.6.1, en las medianas se observan diferencias, alrededor de 8 respuestas correctas de los chicos y 6 de las chicas, aunque los cuartiles de ambos casos son semejantes, es decir, éste se ubica entre 6 y 10 para los chicos, y 5 y 9 para las chicas. Esto significa que el género, ya sea masculino o femenino, no es una variable que influya significativamente al momento de responder correcta o incorrectamente el cuestionario, aunque los hombres sobresalen un poco más que las mujeres. También es de destacar que el comportamiento en cuanto al número de respuestas correctas presenta una tendencia más uniforme en los chicos que en las chicas, ya que se concentra a los lados de la mediana, no así en el caso de las chicas, que tienen una dispersión sobre la mediana.

Figura 4.6.1. Diferencias entre chicos y chicas



El valor de la media es poco mayor en el grupo de hombres (Tabla 4.6.2). Para realizar un contraste de diferencias de medias asumimos las varianzas iguales, puesto que la prueba de Levene no es estadísticamente significativa. Presentamos también la prueba T que tampoco es estadísticamente significativa, así como los intervalos de confianza para la diferencia de medias.

Tabla 4.6.2. Estadísticos de grupo

	Sexo	N	Media	Desviación típica	Error típico de la media
TOTAL	H	82	7.98	2.935	0.324
	M	43	6.95	3.154	0.481

Tabla 4.6.3. Prueba de muestras independientes

Prueba de igualdad de varianzas			Prueba T para la igualdad de medias						
Varianzas	F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. diferencia	Intervalo de confianza 95% para la diferencia	
Iguales	0.486	0.487	1.802	123	0.074	1.022	0.567	-0.100	2.145
Diferentes			1.762	80.228	0.082	1.022	0.580	-0.132	2.176

En lo que a las diferencias por edad se refiere (Figura 4.6.2), nos encontramos que los alumnos de 18 años son quienes mejor respondieron el cuestionario, aunque no hay mucha diferencia con respecto a los estudiantes de 17 años, ya que sus medianas y sus rangos intercuartílicos se asemejan, es decir, que aproximadamente 50% de estudiantes de estas edades contestan un número de respuestas correctas próximo al valor mediano, aunque con poco más de dispersión en alumnos de 18 años.

Por lo que respecta a los estudiantes de 19 años, se observan algunas diferencias respecto a los otros estudiantes, ya que el número mediano de respuestas correctas se ubica por debajo de las medianas de los tres grupos, así como el rango intercuartílico que es más bajo, aunque por otra parte, el recorrido intercuartílico de los tres grupos de edad es semejante. Una explicación es que estos alumnos están repitiendo curso y posiblemente tengan menos conocimientos generales que sus compañeros. Por otra parte, es importante señalar que este grupo de alumnos sólo representa una pequeña proporción del total de la muestra.

Como conclusión se puede decir, que la edad es una variable que influye en los conocimientos y retención que los estudiantes tienen respecto a las medidas de posición central, aunque la diferencia no es tanta para ser estadísticamente significativa.

Figura 4.6.2. Diferencias por edad

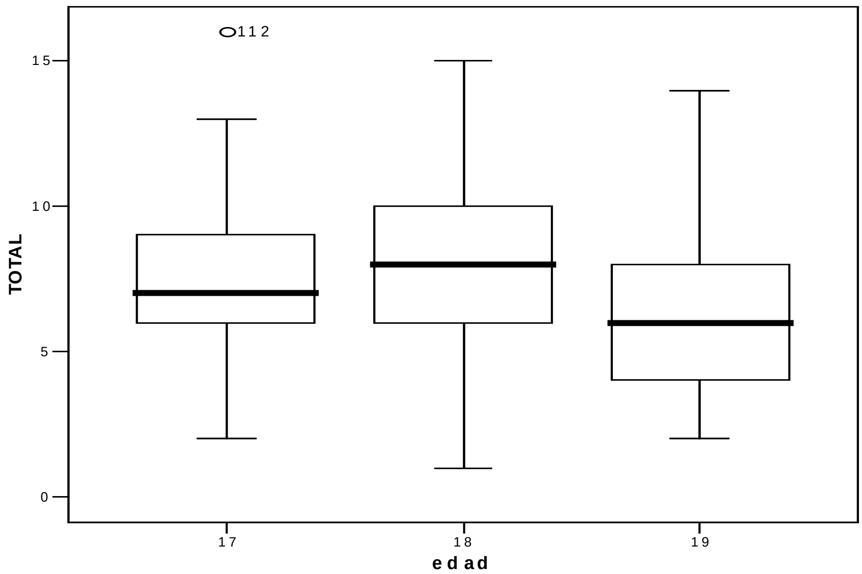


Tabla 4.6.4. Estadísticos de grupo por edad

Edad	N	Media	Desviación típica	Error típico
17	41	7.73	2.916	0.455
18	62	8.49	2.919	0.374
19	22	6.95	3.199	0.682

Tabla 4.6.5. Prueba de muestras independientes

	Suma de cuadrados	g	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	41.622	2	20.811	2.362	0.099
Intra-grupos	1066.249	121	8.812		
Total	1107.871	123			

Se observa una conclusión similar al comparar las medias, ligeramente superior en los alumnos de 18 años (Tabla 4.6.4) aunque el análisis de varianza unidimensional, tampoco llega a ser estadísticamente significativo (Tabla 4.6.5). Finalmente, en la Figura 4.6.3 presentamos la diferencia por grupos, donde se observa una variación de las medianas (mientras la variación de las medias no fue estadísticamente significativa). La mediana puede variar entre 7 y 8 preguntas correctas, según grupo de estudiantes, el cuartil inferior de 4 a 7 y el superior de 8 a 11. Es también notable la diferencia de variabilidad. Estos resultados deben interpretarse con precaución, ya que el tamaño de un grupo es bastante menor que el de el total de la muestra.

Figura 4.6.3. Diferencias por grupo

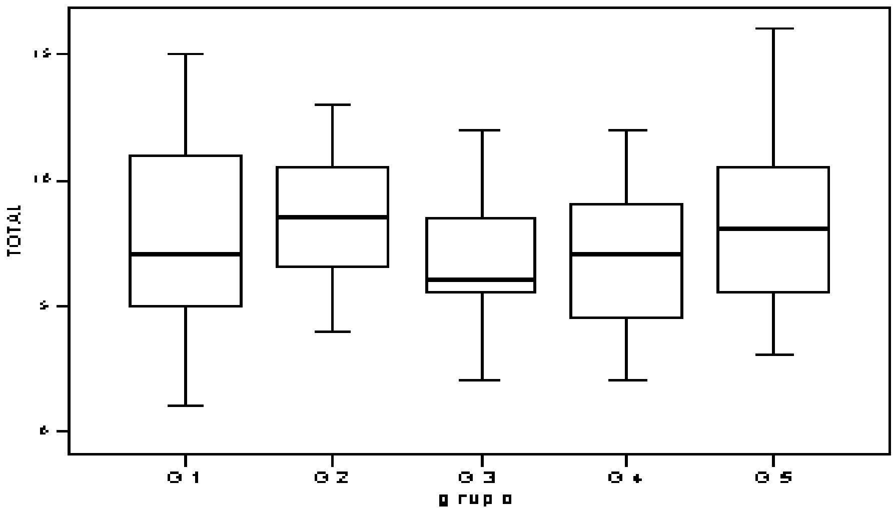


Tabla 4.6.6. Estadísticos de grupo por grupo

	N	Media	Desviación típica	Error típico
1.00	24	7.54	3.538	0.722
2.00	28	8.61	2.393	0.452
3.00	23	6.83	2.534	0.528
4.00	27	6.81	2.690	0.518
5.00	23	8.26	3.720	0.776

Tabla 4.6.7. Prueba de muestras independientes

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	68.878	4	17.219	1.920	0.112
Intra-grupos	1076.450	120	8.970		
Total	1145.328	124			

En las Tablas 4.6.6 y 4.6.7 presentamos los estadísticos descriptivos y el análisis de varianza de la puntuación total en el cuestionario respecto al grupo. Podemos ver que las puntuaciones medias oscilan entre 6.8 y 8.6, es decir, un punto y medio de diferencia. El análisis de varianza no arroja un resultado estadísticamente significativo.

Al comparar nuestros resultados con el estudio de Cobo (2003), coincidimos al no encontrar diferencias según género, aunque ella encontró diferencias significativas según centros; es posible que cuando ampliemos nuestra muestra, las diferencias entre grupos de alumnos observadas en este estudio lleguen a ser también estadísticamente significativas. Cobo (2003) no estudió la diferencias de edades entre alumnos de un mismo curso, como hemos hecho en nuestro caso, sin embargo, obtuvo una diferencia estadísticamente significativa entre los alumnos de los dos cursos participantes en su estudio, que eran de edades diferentes. En el estudio definitivo (Capítulo 6) se incluyen estudiantes de edad equivalente a las del 4º curso español de Educación Secundaria Obligatoria, con lo que podremos informar de las diferencias entre cursos y comparar los alumnos del mismo curso y edad, españoles y mexicanos.

4.7. ESTRUCTURA DE LAS RESPUESTAS

En esta sección presentamos los resultados de analizar las relaciones entre respuestas a los diferentes ítems, siguiendo a Cobo (2003), que aplicó algunas técnicas de análisis multivariante. Estas técnicas sirven para visualizar la estructura de las respuestas a una prueba; en nuestro estudio las utilizamos con enfoque exploratorio. El análisis que ahora hacemos será una primera aproximación al estudio definitivo que se hará en los Capítulos 5 y 6.

En concreto, aplicamos un análisis cluster que permite determinar, en el conjunto de ítems dado si hay clases diferenciadas. Los ítems que aparezcan en un mismo grupo son aquellos a los que los alumnos tienden a contestar de una misma manera (bien correcta, bien incorrecta). En el caso de respuesta incorrecta puede obedecer a alguna concepción subyacente. El número de grupos diferentes indica distintos componentes o factores de la prueba y se puede preparar para realizar posteriormente un análisis factorial.

En nuestro caso realizamos un análisis cluster de variables (esto es, de las respuestas a los 17 subítems), cuyos resultados se muestran en la Tabla 4.7.1 y en la Figura 4.7.1. Como medida de similaridad hemos usado el coeficiente de correlación (que varía teóricamente entre –1 y +1), puesto que las variables son numéricas y una correlación fuerte y positiva entre dos ítems indica que las respuestas son similares. Una correlación negativa e intensa, por el contrario indicaría que las respuestas son opuestas. Observamos en la tabla, que todas las correlaciones son positivas y llegan hasta una correlación de 0.683 (ítems 2.1 y 2.2).

Tabla 4.7.1. Historial de conglomeración

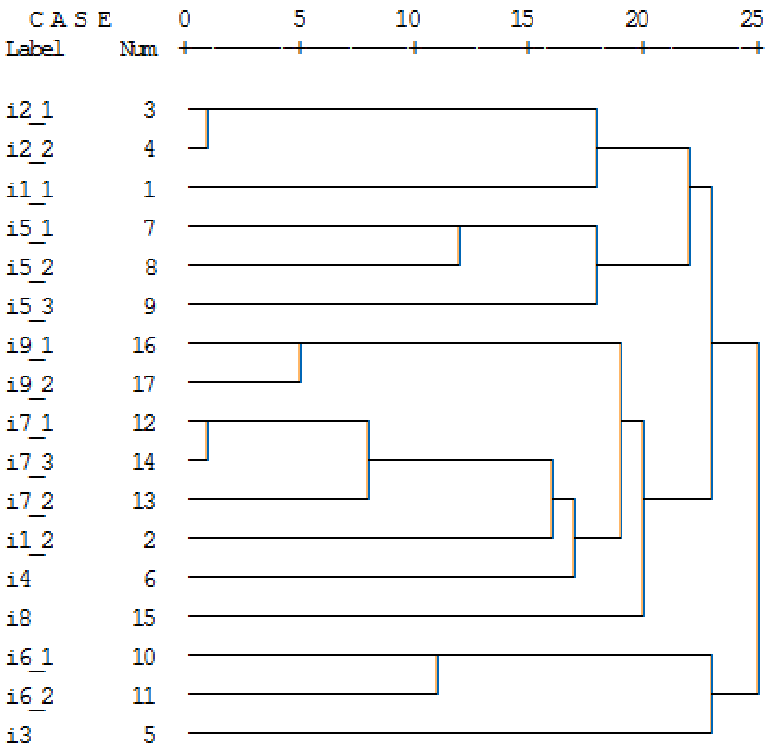
Etapa	Conglomerado que se combina		Coeficiente	Etapa en la que aparece el conglomerado		Próxima etapa
	Conglomerado 1	Conglomerado 2		Conglomerado 1	Conglomerado 2	
1	3	4	0.683	0	0	10
2	12	14	0.664	0	0	4
3	16	17	0.565	0	0	11
4	12	13	0.487	2	0	7
5	10	11	0.410	0	0	14
6	7	8	0.382	0	0	9
7	2	12	0.262	0	4	8
8	2	6	0.242	7	0	11
9	7	9	0.227	6	0	13
10	1	3	0.222	0	1	13
11	2	16	0.197	8	3	12
12	2	15	0.168	11	0	15
13	1	7	0.116	10	9	15
14	5	10	0.095	0	5	16
15	1	2	0.072	13	12	16
16	1	5	0.016	15	14	0

Un primer grupo lo constituyen los ítems 2.1 y 2.2 (cálculo de una media ponderada; es decir, comprensión de la no asociatividad de la media), 2.3 (cálculo de la media de la suma de dos variables), 1.1 ((la media no conserva el conjunto de datos); son ítems relacionados con *propiedades algebraicas de la media* y suponen un gran nivel de comprensión de los estudiantes pues son propiedades abstractas.

Este grupo se une a otro formado por los ítems 5.1 (cálculo de la mediana en un número impar de datos, 5.2 (cálculo de la mediana en un número par de datos), y 5.3 (efecto de valores típicos sobre la mediana), todos ellos centrados en el *concepto y cálculo de la mediana.*

En tercer lugar, hay un pequeño grupo formado por los ítems 9.1 y 9.2 (determinación de la media y mediana a partir de una gráfica), que se relaciona con el *lenguaje gráfico* y su comprensión.

Figura 4.7.1. Dendograma



A su vez, este grupo se une con otro formado por el 7.1, 7.2 y 7.3 (media como cantidad equitativa y determinación de una distribución a partir de la media), y a mayor distancia el 1.2 (determinar una distribución a partir de la media) y 4 (inversión del algoritmo). Es decir, son todos ítems relacionados con la *comprensión del algoritmo de la media* y cómo este proporciona un reparto equitativo.

Los ítems 6.1 (comparar dos conjuntos de datos ordinales) y 6.2 (elegir el mejor promedio para un conjunto de datos ordinales), incluso cuando se refieren a la mediana, no quedan unidos con el resto de los ítems relacionados con este concepto, por el peso tan fuerte que tiene la idea de *variable ordinal*.

Por último, el ítem 3 (suma de desviaciones a la media) y el 8 (estimación de una cantidad desconocida) aparecen separados del resto.

En resumen, el análisis cluster señala las múltiples facetas de la idea de promedio, cuya comprensión no parece ser unitaria, sino que se compone de diferentes elementos, en la línea de nuestro marco teórico que sugiere elementos en el significado y la comprensión de un concepto. Un alumno podría comprender bien uno de estos elementos (por ejemplo el cálculo de la mediana) pero no otro (por ejemplo, puede no ser capaz de entender que debe aplicar la mediana en los conjuntos de datos ordinales).

4.8. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO PILOTO

En este capítulo hemos presentado la parte cuantitativa del estudio piloto, analizando las respuestas al cuestionario de una muestra de 125 estudiantes mexicanos de bachillerato. Podemos concluir lo siguiente:

- El contenido de los ítems analizados es representativo del significado institucional de referencia analizado en el Capítulo 2, lo que indica la validez de contenido del cuestionario de Cobo (2003) para nuestro estudio de evaluación. Esta validez se ampliará con el análisis del resto de los ítems en el Capítulo 5.
- Se reproducen la mayor parte de los resultados de Cobo (2003) con estudiantes españoles de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, que eran los de edad más parecida a los de nuestra muestra piloto. Por un lado, se conserva la dificultad relativa de los diferentes ítems, lo que indica que los significados asignados por ambos tipos de estudiantes tienen semejanzas, a pesar de la diferencia de edad y contexto educativo. Por otro, nuestros alumnos proporcionan un suficiente porcentaje de aciertos y respuestas claras y completas al cuestionario, por lo que consideramos que este es adecuado para llevar a cabo el estudio de evaluación.
- A pesar de que las tareas propuestas no son convencionales, en el sentido de ser diferentes a las propuestas en los libros de texto usados por los estudiantes y requerir un nivel de interpretación, además del cálculo, muchas de ellas resultaron sencillas para los estudiantes, incluyendo tareas como encontrar una distribución dada la media o hallar un valor para obtener un promedio dado. Deducimos de este resultado el interés de introducir estas situaciones en la enseñanza de las medidas de posición central en México.
- Las principales dificultades aparecen en los ítems relacionados con la mediana, tanto en su cálculo, como en su interpretación. Se decidió por ello, analizar con más

detalle las respuestas a estos ítems. En el Capítulo 6 presentaremos un análisis cualitativo de conflictos semióticos en estos problemas.

- Resultaron también difíciles el cálculo de medias ponderadas y la elección del mejor representante para un conjunto de datos. Estos resultados no sólo coinciden con los de Cobo (2003), sino también con las investigaciones citadas en el Capítulo 2.
- El análisis cluster muestra la existencia de componentes diferenciados en la comparación de las medidas de tendencia central, lo que está de acuerdo con nuestro marco teórico y proporciona unas primeras evidencias de validez de constructo que se completarán mediante el análisis que realizaremos en el Capítulo 5.
- No se encontraron diferencias significativas según el género, edad o grupo de alumnos. Por tanto no tendremos en cuenta estas variables en los estudios de evaluación que se llevarán a cabo en los Capítulos 5 y 6.

CAPÍTULO 5
ESTUDIO CUANTITATIVO DE EVALUACIÓN

5.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos los resultados cuantitativos de un estudio de evaluación sobre la comprensión de las medidas de posición central, que ha sido llevado a cabo con una muestra de 518 estudiantes mexicanos de dos niveles educativos diferentes y un rango de edad amplio. Nos interesamos específicamente por los estudiantes que finalizan la Educación Secundaria y el Bachillerato, por ser dos niveles importantes en el sistema educativo mexicano, en cuanto que los alumnos se preparan para un cambio de nivel, es decir, para pasar de Secundaria a Bachillerato o de Bachillerato a la Universidad o Formación Profesional en cada caso.

Aunque Cobo (2003) presenta un estudio similar en una muestra de estudiantes españoles, no existen investigaciones previas sobre la comprensión de medidas de tendencia central en el contexto mexicano. Cobo se interesó por comparar el nivel de conocimientos sobre dicho tema de los estudiantes españoles al comienzo y al final de la Educación Secundaria Obligatoria, con alumnos de edades comprendidas entre 12 y

16 años. En nuestro estudio incluimos alumnos de 13 a 19 años y abarcamos también un nivel superior de enseñanza, el Bachillerato, para analizar si las dificultades citadas por la autora se resuelven, se repiten o surgen otras nuevas en los estudiantes de cursos superiores, así como evaluar sus conocimientos acerca de las medidas de tendencia central al finalizar el Bachillerato.

Se comienza el capítulo con el estudio detallado de la composición de la muestra. Se analiza también el cuestionario que aplicamos a ambos grupos de estudiantes, elaborado por Cobo (2003) y que utilizó con sus alumnos. Dicho cuestionario es una ampliación del usado con los estudiantes del estudio piloto (Capítulo 4), por lo que sólo se incluye la descripción de los ítems nuevos respecto a los que se abarcaron en el piloto.

Una vez recogidos los resultados, se revisaron las respuestas, se codificaron e introdujeron para su análisis con el software estadístico SPSS. En este capítulo se describe el desarrollo del estudio cuantitativo, que toma en cuenta las respuestas como correctas o incorrectas, considerando las respuestas en blanco como incorrectas. A partir de esta primera codificación se analiza la dificultad comparada de los ítems y el rendimiento total de los estudiantes en la prueba, así como las características psicométricas del cuestionario para completar su validación, estudio que no se finalizó en la investigación de Cobo (2003). También comparamos los resultados obtenidos con los de las investigaciones previas.

En el Capítulo 6 ampliaremos este análisis realizando el estudio cualitativo de algunos de los ítems relacionados con la mediana, elegidos en base a su excesiva dificultad o a la baja discriminación. Además, la investigación previa sobre el concepto de mediana es escasa y su comprensión ha resultado más difícil que la de la media en las investigaciones realizadas hasta la fecha en nuestro equipo (Mayén, 2006b; 2008; Cobo, 2003).

Los resultados que se presentan en este capítulo se han organizado en tres secciones principales y a su vez, cada una de ellas con diversos apartados:

- En primer lugar llevamos a cabo un estudio global de resultados, donde analizamos los datos de toda la muestra de estudiantes mexicanos. Este estudio global está orientado principalmente a completar la validación del cuestionario, que fue iniciada en la investigación de Cobo (2003); a proporcionar una estimación de la dificultad global del cuestionario, así como la dificultad y discriminación de los ítems para el rango de edad considerado.

- En segundo lugar, realizamos la comparación de resultados de cada ítem y puntuación total entre estudiantes de Secundaria y Bachillerato. La principal finalidad es analizar la evolución de la comprensión de las medidas de tendencia central de los estudiantes en función de su nivel educativo, y proporcionar esta información de manera específica con la intención de orientar el trabajo de los profesores en cada uno de dichos niveles.
- Finalmente, mediante varias técnicas estadísticas (análisis cluster, grafo implicativo, estudio de jerarquía implicativa, …) estudiamos la interrelación entre respuestas correctas a los diferentes ítems, para analizar las relaciones entre diferentes grupos de ítems y estudiar la posible secuenciación en la enseñanza de este tema, que vendrá determinada por la dificultad relativa de cada concepto.

Queremos resaltar que en nuestro estudio entendemos la validación de un cuestionario como un proceso por el cual se aportan evidencias que apoyen la interpretación propuesta de los datos recogidos mediante la prueba (Carmona, 2004) y que está basada tanto en los procesos de respuesta, como en las consecuencias de la evaluación (AERA/ APA/ NCME, 1999). En nuestro caso, la consecuencia de la evaluación es el diagnóstico de los conocimientos de los estudiantes. Además, asumimos una visión unificada del concepto de validez propuesto por Messick (1989), es decir, asumimos la validación como un proceso continuo, puesto que cualquier cuestionario puede mejorarse en el futuro.

5.2. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

La muestra (Figura 5.2.1) está compuesta por 518 estudiantes mexicanos de entre 13 y 19 años de edad: 162 estudiantes de Educación Secundaria y 356 de Bachillerato, de diferentes Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos del Instituto Politécnico Nacional (Cecyts), que representan el 31.3% y 68.7% respectivamente.

Los estudiantes de Secundaria (pertenecientes al Nivel Básico en México) tienen entre 14 y 15 años de edad y son del tercer curso de dicho nivel, por lo que podemos considerarlos equivalentes al tercer nivel de la Educación Secundaria Obligatoria en España. Estos alumnos habían estudiado por primera vez el tema de medidas de tendencia central como parte de los temas de estadística un par de meses antes de aplicarles el cuestionario y durante aproximadamente un mes. Los contenidos de la enseñanza incluían los conceptos de media, mediana y moda y se describen con mayor detalle en el análisis del currículo del Capítulo 2.

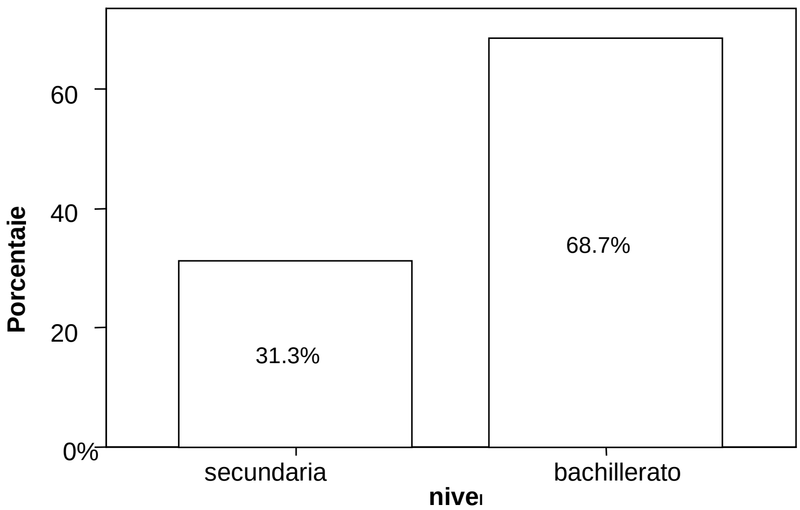
La otra parte de la muestra está compuesta por estudiantes de sexto semestre de Bachillerato (tercer año), y sus edades oscilan entre 16 y 19 años, aunque la mayoría son de 17 y 18. En el mismo curso en que se les aplicó el cuestionario habían estudiado estadística, incluyendo el tema de medidas de centralización (media, mediana, moda). En general y en cada nivel escolar citado, los alumnos llevan a cabo el mismo programa de estudios.

Tabla 5.2.1. Distribución de la muestra por nivel de estudios

Nivel	No. Alumnos	%
Secundaria	162	31.3
Bachillerato (Cecyts)	356	68.7

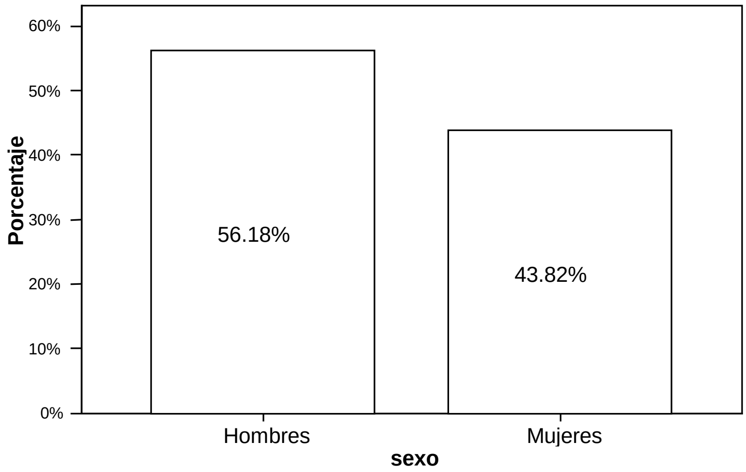
El motivo de elegir estos dos grupos es, por un lado, evaluar los conocimientos de los estudiantes al acceder a la universidad o al bachillerato en cada caso, y por otro, saber si los resultados del estudio de Cobo (2003) coinciden o se mantienen en alumnos de mayor edad y en otros contextos.

Figura 5.2.1. Distribución de la muestra por nivel educativo



En cuanto a la distribución de estudiantes por género, observamos en la Figura 5.2.2, que la cantidad de hombres representa el 56.18%, y de las mujeres, 43.82%. Esta es la composición habitual de las escuelas en México, pudiendo variar un poco de un centro escolar a otro.

Figura 5.2.2. Distribución de la muestra por género

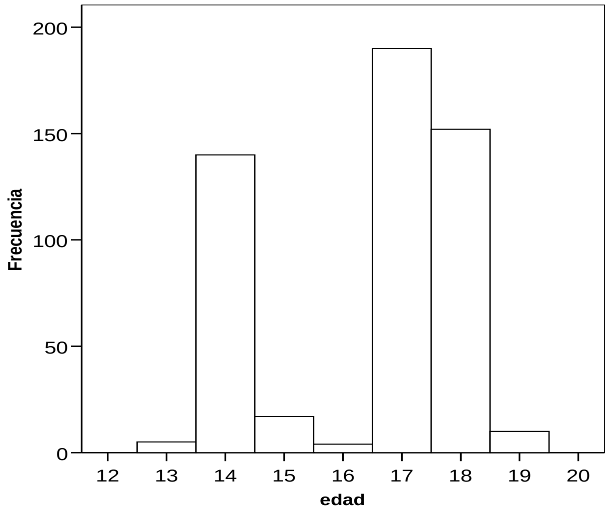


La distribución de la muestra por edades (Figura 5.2.3.) es la siguiente:

- En el nivel Secundaria, tenemos 5 estudiantes de 13 años (1%), ya que algunos chicos cumplen años al final del curso académico; 140 de 14 (27%) y 17 de 15 años (3.3%), en este caso, estudiantes que repitieron el curso. En total, estos alumnos representan el 31.3% de la muestra y en su mayoría son de 14 años, que corresponde a lo que en España sería el 2º curso de la Escuela Secundaria Obligatoria (ESO).
- Respecto a estudiantes de Bachillerato, 4 son de 16 años (0.8%); 190 de 17 (36.7%); 152 de 18 (29.3%); y 10 de 19 años (1.9%), siendo la mayor parte de este grupo, alumnos de 17 y 18 años.

Cabe mencionar que nuestro grupo de 17-18 años son estudiantes dos años mayores y han tomado dos cursos más que el grupo de mayor edad (4º de ESO) de la investigación de Cobo (2003), y lo mismo ocurre con nuestro grupo de secundaria, respecto al grupo de menor edad en la investigación ya referida. De este modo, será interesante comparar si algunos de los resultados de Cobo (2003) se mantienen al variar la edad y sistema educativo de los estudiantes.

Figura 5.2.3. Distribución de la muestra por edad



La muestra incluye estudiantes de 6 centros escolares y con diferente número de participantes tanto de Escuelas Secundarias como de Cecyts (Tabla 5.2.2). Al estar ubicados en la Ciudad de México se asegura una representatividad geográfica y de clase social.

Tabla 5.2.2. Distribución de la muestra por escuela

Escuela	No. Alumnos	%
Secundaria 36	87	16.8
Secundaria 99	75	14.5
Cecyt 5	37	7.1
Cecyt 6	139	26.8
Cecyt 9	89	17.2
Cecyt 11	91	17.6

5.3. DESCRIPCIÓN DEL CUESTIONARIO

A todos los estudiantes de la muestra les aplicamos el cuestionario de Cobo (2003) en sesiones de 90 minutos, como una actividad dentro de su clase de matemáticas y con la colaboración de sus profesores. Al comenzar la sesión les dimos instrucciones claras sobre cómo contestar el cuestionario, se les aclaró la interpretación de cada enunciado y se les pidió su participación en el estudio. También les pedimos no limitarse a dar sólo la respuesta numérica sino también a incluir una explicación a cada ítem lo más detallada posible. Por otra parte, les explicamos que el objetivo de la toma de datos es detectar las posibles dificultades en el tema para mejorar la enseñanza. Los alumnos colaboraron con interés completando las preguntas y proporcionando justificaciones detalladas.

El cuestionario aplicado en el estudio de evaluación es el cuestionario completo utilizado por Cobo (2003) para los alumnos de 4º curso de la ESO. Se eligió para esta investigación porque los ítems presentan enunciados de situaciones comprensibles y familiares para los estudiantes y recoge los contenidos de los programas de estudios mexicanos sobre medidas de centralización. Por otra parte, evalúa los diferentes elementos de significado considerados en nuestro marco teórico descrito en el Capítulo 1, para el caso particular de las medidas de posición central. Es decir, en el cuestionario final se incluyeron los nueve ítems analizados en nuestro estudio piloto (Capítulo 4), y además los ítems que describimos a continuación, algunos de los cuales contienen varios subítems que serán analizados por separado en el estudio.

5.3.1. ANÁLISIS DE ÍTEMS NO INCLUIDOS EN EL ESTUDIO PILOTO

A continuación describimos con detalle los ítems que se incluyeron en el cuestionario final, que no fueron presentados en el estudio piloto.

Ítem 10

El siguiente conjunto de datos refleja las edades en que contrajeron matrimonio una muestra de 100 mujeres.

Edad	*Frecuencia*
15-19	*4*
20-24	*38*
25-29	*28*
30-34	*20*
35-39	*8*
40-44	*1*
45-49	*1*

¿Cuál es la media, mediana y moda de la edad de estas mujeres? Realiza los cálculos necesarios.

Este ítem, tomado del cuestionario de Cobo (2003), tiene como objetivo comprobar la capacidad de cálculo de la media, mediana y moda de un conjunto de datos agrupados en intervalos y presentados en una tabla de frecuencias absolutas. Para calcular la media, los estudiantes deben determinar la marca de clase de cada uno de los intervalos, multiplicarla por la frecuencia, sumar todos los productos y dividir por 100. Es decir, deben calcular la media ponderada por la frecuencia de las marcas de clase.

Corresponde a un tipo de ejercicio que los estudiantes realizan con frecuencia en sus clases de matemáticas en México, pero en relación al cual se han descrito muchas dificultades. Por ejemplo, Pollatsek, Lima y Well (1981) describen los errores que tienen los estudiantes respecto a las medias ponderadas. Por su parte, Carvalho (1996, 1998, 2001) indica que los estudiantes no ponderan en el cálculo de la media cuando el problema se presenta en tablas de frecuencias. La estrategia que siguen los alumnos es obtener la media de las frecuencias en lugar de los valores de la variable. El cálculo de las medidas de tendencia central a partir de una tabla de datos es equivalente al de la media ponderada.

Puesto que los extremos de los intervalos no coinciden, el intervalo real alcanzará medio punto más a la derecha e izquierda de los extremos dados en el enunciado, pero admitiremos como solución correcta también el caso en que los alumnos tomen como marca de clase los valores 17.5,....47.5.

Para calcular la moda, deben determinar el intervalo modal (máxima frecuencia) y tomar el punto medio como aproximación, es decir, la solución correcta sería 22, ya que el intervalo modal es el [20-24]. Esta tarea, pensamos, es más sencilla que la anterior. Sin embargo, algunos estudiantes presentan dificultades para interpretar la tabla de frecuencias al considerar a la moda como el mayor de los valores absolutos de las frecuencias y no el intervalo o marca de clase correspondiente.

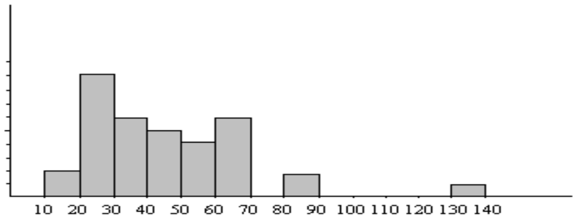
Para calcular la mediana, se debe determinar el intervalo que corresponde a una frecuencia acumulada igual a 50 (intervalo 25-29) y aplicar la proporcionalidad después para interpolar el valor exacto de la mediana. Aceptaremos también como correcto el caso en que el estudiante tome como aproximación el punto medio de dicho intervalo (27).

Los elementos de significado que contiene este ítem son principalmente los diferentes procedimientos de cálculo para las medidas de tendencia central a partir de una tabla de frecuencias, aunque implícitamente los alumnos deben emplear las definiciones de media, mediana y moda. Se evalúa la comprensión de las siguientes propiedades: "*la moda es siempre uno de los valores de los datos, mientras que para la media y la mediana no es cierto, en general*", "*el cálculo de la moda es una operación interna, mientras que el de la media y el de la mediana no lo son*". También las propiedades de la media y mediana, de no ser operaciones internas.

En cuanto al lenguaje matemático, presenta, además del lenguaje verbal, una tabla de datos agrupados en intervalos. Es posible también que los estudiantes tengan que usar el lenguaje simbólico para organizar los cálculos.

Ítem 11

Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida. Si____ No ____ ¿Por qué?



Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes: media = 45.3 euros

Este ítem lo elaboró Cobo (2003) a partir de uno tomado de Garfield y Konold (1992), transformándolo en un problema abierto que permite total libertad en las argumentaciones y justificaciones de las respuestas aportadas por los alumnos. Los datos se presentan en forma gráfica, por lo que hay una primera tarea de interpretación de la misma para estimar a partir de ella las frecuencias de valores en los diferentes intervalos de clase.

Los estudiantes deben interpretar un histograma de frecuencias, donde la frecuencia de cada intervalo corresponde, en este caso, a la altura del rectángulo por ser los intervalos de igual tamaño. Una dificultad es que el eje de ordenadas no tiene etiquetas para las frecuencias, por lo que el alumno debe interpretar cada marca como correspondiente a un estudiante. Además, la pregunta requiere no sólo la lectura literal de datos, sino también la comparación de frecuencias en diferentes intervalos y determinación gráfica de la moda, tarea que supone un nivel de lectura “entre los datos” en la terminología de Curcio (1989), nivel que no siempre es alcanzado por los estudiantes.

La afirmación que presenta el enunciado es incorrecta. Por un lado, es la moda y no la mediana el estadístico que da el valor más frecuente; por otro, en esta distribución la moda se encuentra situada entre 20 y 30. Por otra parte, para comprobar si la mediana es 47 euros, es necesario obtenerla a partir del gráfico, con lo que ya aparecen procedimientos de cálculo (en el gráfico aparece calculada la media, pero como la distribución no es simétrica su valor pudiera no coincidir con el de la mediana). Los estudiantes deben calcular el total de la frecuencia (35 casos), por lo tanto, la mediana corresponde al valor que ocupa el lugar 17, es decir se encuentra situada entre 40 y 50. Un valor aproximado de la mediana sería igual a 45; se podría aceptar que la mediana es aproximadamente igual a 47, pero no exactamente igual.

Entre los elementos de significado incluidos en el ítem la afirmación que se hace relaciona la *mediana* con la *mayoría*, por lo que de manera implícita, incluye las definiciones de mediana y moda. Además, se requieren los algoritmos de cálculo de la mediana y de la moda a partir de un gráfico, o bien, a partir de datos agrupados.

Cobo (2003) indica que en este tipo de problemas, derivados de gráficos, los estudiantes en vez de realizar algoritmos de cálculo para comprobar la mediana, tienden a argumentar la respuesta. Esto mismo lo confirmamos en nuestros resultados, y aún cuando no realizan cálculos, algunos estudiantes consiguen contestar correctamente (Mayén, 2008).

Ítem 12

Juana piensa que, en el gráfico anterior, el alto valor de 133 euros debería quitarse del conjunto de datos antes de calcular media, mediana y moda.

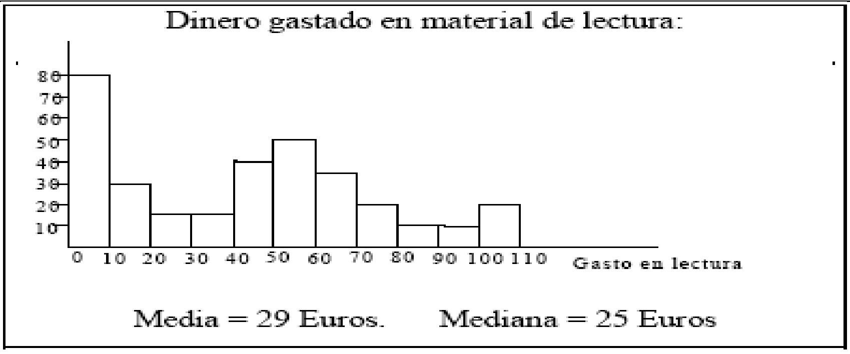
Si ____ No ____¿Por qué?

Basado en el anterior, este ítem contiene todos los elementos ya descritos, haciendo énfasis especial en la comprensión del efecto de los valores atípicos sobre la media, mediana y moda. Es decir, hace hincapié en la propiedad de la mediana y la moda, "*de ser más resistentes que la media cuando aparecen valores atípicos*" como es este caso, en que dicha propiedad que se pone claramente de manifiesto si se vuelven a hacer los cálculos suprimiendo el valor más alto, 133 euros. Cobo (2003) lo tomó de Garfield y Konold (1992), modificando su formato original para convertirlo en pregunta con respuesta abierta. Como todos los ítems de esta parte, también está basado en un gráfico, de modo que la primera tarea consiste en interpretarlo. Como la distribución es bimodal, la mediana será el mejor representante de los datos y los alumnos deben dar un argumento para razonarlo.

Cobo (2003), señala que algunos errores se deben a que los estudiantes no reconocen que la media, mediana y moda son representantes de un conjunto de datos, en el sentido de que aportan una información de conjunto y no de un elemento en particular, es decir, piensan que al eliminar algún dato, la representatividad de los datos se pierde.

En cuanto a las propiedades, aparecen las siguientes: "*los promedios son representantes de un colectivo*"; "*sólo en distribuciones simétricas coinciden media, mediana y moda*" y "*la media es menos resistente que la mediana y la moda al cambiar* *alguno de los datos o al aparecer valores atípicos*".

Ítem 13



Francisco dijo que es difícil describir el dinero típico gastado en material de lectura en el gráfico anterior, porque la mayor parte de los estudiantes no gastaron nada o muy poco, y un segundo grupo gastó entre 50 y 60 euros cada semana. Él piensa que en este caso la media es un indicador pobre del promedio y elige usar la mediana en su lugar para representar el gasto semanal "promedio" en material de lectura. Si ____ No ____ ¿Por qué?

Este ítem, de Garfield y Konold (1992), contiene definiciones implícitas de la media, mediana y moda, así como las propiedades siguientes: "*para la media y la moda se tienen en cuenta todos los valores de los datos, mientras que para la mediana no"; "sólo coinciden media, mediana y moda en distribuciones simétricas*" y "*la media es menos resistente que la mediana y la moda".*

El lenguaje utilizado es gráfico, verbal y numérico. Los alumnos deben comenzar interpretando un histograma para deducir a partir de él la frecuencia de valores en cada intervalo. El enunciado del ítem es correcto, pues la moda proporciona el valor más frecuente y además se encuentra cercana a cero. Así mismo, hay un segundo grupo de estudiantes que gasta entre 50 y 60 euros. Al ser la distribución muy asimétrica, la media es un mal representante, al igual que la moda, ya que hay dos grupos diferenciados de alta frecuencia. Por tanto, la mediana es la mejor opción para este ejemplo. Como procedimientos incluye el cálculo de la media, mediana y moda a partir de un gráfico, y por otra parte, los estudiantes deben dar un argumento para justificar su respuesta.

Straus y Bichler (1988), y León y Zawojewski (1991) señalan que la idea de "representante" supone una elección complicada para los estudiantes, pues están más acostumbrados a realizar cálculos que a interpretar gráficos, así también como utilizar las medidas de tendencia central para resolver problemas como resumir los datos de un conjunto en un solo valor. Cobo (2003) también coincide con esta afirmación, pues un bajo índice de sus estudiantes contestó este ítem y sólo la mitad de éstos lo hizo correctamente.

Ítem 14

Manuel dice que esta distribución tiene dos modas y sugiere que puedes obtener más información de estos datos si los divides en dos subgrupos y calculas el promedio en cada grupo por separado. *Si ____ No ____ ¿Por qué?*

Este ítem está basado en el anterior y contiene los mismos elementos de significado ya descritos: "*para la media y la moda se tienen en cuenta todos los valores de los datos, mientras que para la mediana no*"; "*sólo coinciden media, mediana y moda en distribuciones simétricas*" y "*la media es menos resistente que la mediana y la moda*", a los que hay que añadir ahora el efecto que tiene la existencia de dos modas (o más bien, dos grupos de alta frecuencia pero diferenciados) en una distribución, apareciendo éstas como más adecuadas para resumir los datos de la media o la mediana.

Los alumnos deben decidir si sería mejor separar los dos grupos para calcular los promedios, dando un argumento para justificar la decisión. Nuevamente se trataría de hallar un representante en una distribución bimodal. El ítem sólo tiene representaciones verbales. El problema, por tratarse de obtener la "moda" parece sencillo, sin embargo, según Garfield y Konold (1992), la dificultad consiste en identificar dos poblaciones mezcladas en un mismo gráfico y cada una con su propia moda. Por su parte, Cobo (2003) señala que los estudiantes están acostumbrados a que la media y la mediana cuando existen, son únicas, y debido a esto no asumen que la moda puede no serlo.

Ítem 15

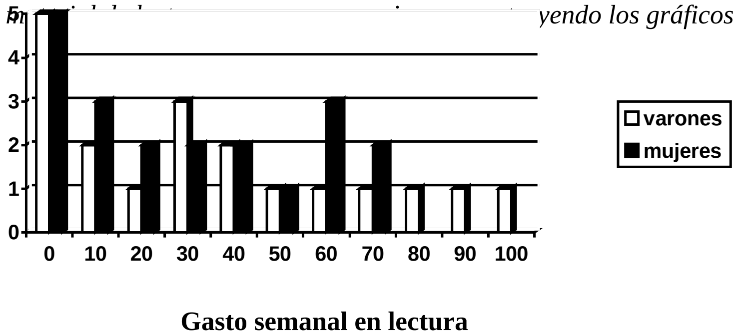
Lola sugiere hacer el estudio en pesos mexicanos (1€ = $14.5). ¿Cuál sería en ese caso el valor de la media?

De nuevo basado en los datos del ítem 13 y adaptado también al contexto mexicano, este ítem contiene todos los elementos a los que hemos hecho referencia: "*para la media y la moda se tienen en cuenta todos los valores de los datos, mientras que para la mediana no*"; "*sólo coinciden media, mediana y moda en distribuciones simétricas*" y "*la media es menos resistente que la mediana y la moda*".

La diferencia con los anteriores consiste en que la cuestión central de este ítem es la propiedad de la media de "*conservar cambios de origen y escala*". En concreto, en esta situación sólo cambia la escala. Por tanto, se espera que los estudiantes transformen el valor obtenido en el punto anterior para la media a las nuevas unidades de medida, aplicando el cambio de escala correspondiente. Se pretende analizar si los alumnos conocen y aplican esta propiedad o intentan rehacer todo el problema con las nuevas unidades. El ítem tiene representaciones verbales y numéricas. Al respecto, Cobo (2003), indica que sobre esta propiedad los estudiantes muestran mayor conocimiento, ya que en su investigación la mayoría de sus alumnos responde correctamente.

Ítem 16

Antonio quiere investigar las diferencias en los hábitos de gasto en varones y mujeres. Compara las cantidades gastadas en … *yendo los gráficos siguientes:*



Antonio cree que sus gráficos muestran que los varones y mujeres tienden a gastar diferentes cantidades de dinero en material de lectura. Si ____ No ____ ¿Por qué?

Este último ítem, tomado de la misma fuente que los anteriores y modificado no sólo en el formato, sino también en el tipo de gráfico, tiene como objetivo fundamental averiguar qué uso hacen los alumnos de las medidas de tendencia central y los gráficos para comparar dos distribuciones. La comparación de distribuciones a partir de gráficas es una tarea que se está comenzando a analizar por algunos investigadores, y en la que los estudiantes pueden cometer errores como no usar medidas de centralización en la comparación. Por ejemplo, Estepa y Batanero (1994) coinciden con Cobo (2003), en que al comparar dos conjuntos de datos, los estudiantes se basan con frecuencia en casos particulares.

Bakker y Gravemeijer (2004), observaron que al comparar distribuciones algunos estudiantes no ven el dato como un valor de una variable, sino que se centran en datos aislados y no ven los estadísticos (como media o rango) como propiedades de la distribución. Por su parte, Arteaga, Batanero y Ruiz (2008), encontraron que al comparar dos distribuciones algunos estudiantes calculan los promedios, pero luego no los usan para establecer sus conclusiones.

Para resolver el ítem 16, los alumnos deben de comenzar como en las tareas anteriores, interpretando el gráfico para ver la frecuencia de valores de la variable en cada grupo. Presenta la dificultad del tipo de gráfico, que es más complejo que los anteriores, puesto que contiene dos conjuntos de datos. En cuanto a medidas de tendencia central, se refiere exclusivamente a la mediana, y se pretende, por un lado, que encuentren su valor en el gráfico, y por otro, que la utilicen como elemento de comparación de los dos conjuntos de datos. Las representaciones del ítem son gráficas, verbales y numéricas.

5.3.2. VALIDEZ DE CONTENIDO DEL CUESTIONARIO

El análisis que hemos hecho del cuestionario, tanto en este capítulo como en el Capítulo 4, tiene como finalidad establecer con claridad su contenido. Al mismo tiempo pretendemos proporcionar algunas evidencias de validez de contenido en relación al significado institucional pretendido para la enseñanza de las medidas de tendencia central en el sistema educativo mexicano y para los niveles educativos considerados. Dicho significado de referencia fue descrito en el Capítulo 2 mediante el estudio curricular y análisis de libros de texto.

En esta sección, tratamos de justificar la validez de contenido, es decir, el grado en que el instrumento de evaluación refleja el dominio que nos interesa en forma satisfactoria (Carmines y Zeller, 1979). Se trata de ver la adecuación de los ítems de un test como muestra de un universo más amplio de ítems representativos del contenido (Martínez Arias, 1995). Siguiendo a esta autora la validación del contenido se ha hecho mediante el examen sistemático del contenido del test para probar su representatividad y relevancia. Con ello comprobamos que los ítems de nuestro test son relevantes para el uso que se dará a las puntuaciones y representativos del contenido que se quiere evaluar, representando sus características esenciales.

Para mostrar con mayor claridad el contenido cubierto en el cuestionario y la validez de contenido de éste, presentamos las Tablas 5.3.2.1 a 5.3.2.3 (reproducidas de Cobo 2003, pp. 144-145), en las que describimos los elementos de significado, que esperamos, los alumnos apliquen en la resolución de cada uno de los ítems del cuestionario. Prácticamente todos los elementos obtenidos en el análisis curricular presentado en el Capítulo 2 están cubiertos con la prueba, y se han añadido algunos nuevos.

Tabla 5.3.2.1. Definiciones y propiedades en los ítems

	Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Definiciones	DM1. Media como algoritmo	×	×		×	×		×	×		×	×	×	×	×		
	DM2. Media como promedio	×	×			×				×							×
	DME1. Mediana, valor central					×	×		×			×	×	×	×		×
	DME2. Mediana, dos partes					×	×			×	×			×	×		
	DMO1. Moda, valor más frecuente	×				×	×		×		×	×	×	×	×		×
	DMO2. Moda, diagrama diferencial											×	×	×	×		
Propiedades	N1. Valor en el rango	×			×												
	N2. Coincidencia con datos	×							×		×						
	N3. Intervienen todos los valores					×	×	×				×	×	×	×		
	N4. Cambios al cambiar un dato					×		×	×					×			
	A1. Operación interna	×							×		×						
	A2. No elemento neutro							×									
	A3. No asociativa		×														
	A4. No conmutativa							×									
	A5. Cambios origen y escala															×	
	A6. Media de la suma		×														
	A7. Moda puede no ser única													×	×		
	E1. Representantes de un colectivo	×				×	×		×			×	×	×	×		
	E2. Media, centro de gravedad			×	×												
	E3. Posición en distribuciones simétricas					×						×	×	×	×		
	E4. Media poco resistente					×						×	×	×			
	E5. Suma desviaciones a la media			×	×				×								
	E8. Definidas según tipo de variable						×										
	E9. Mejor representante (bimodal)													×	×		

Tabla 5.3.2.2. Lenguaje matemático en los ítems

Lenguaje	Ítems															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Verbal	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
Símbolos						×										
Gráficos									×		×		×	×		×
Numérico /tablas	×	×		×	×		×	×		×	×	×	×			×

Tabla 5.3.2.3. Campos de problemas y procedimientos en los ítems

	Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Campos de problemas	PM1. Media mejor estimación								×								
	PM2. Media, reparto equitativo	×		×													
	PM3. Media en distrib. Simétricas												×				
	PM4. Media, valor probable	×						×									
	PME1. Mediana, si media no representativa					×						×	×	×	×		
	PME2. Representante datos ordinales						×										
	PME3. Mediana para comparar datos																×
	PMO1. Moda como valor más frecuente						×					×	×	×	×		
	PMO2. Moda para datos cualitativos						×										
Algoritmos	AM1. Media datos aislados	×			×	×		×	×								
	AM2. Media ponderada		×							×	×						
	AM3. Media datos agrupados										×	×	×	×	×		
	AM4. Cálculo gráfico media									×							×
	AM6. Invertir algoritmo media	×	×		×			×									
	AM7. Buscar distribución dada la media	×			×			×									
	AME1. Mediana datos aislados (nº impar)					×	×										
	AME2. Mediana datos aislados (nº par)					×			×								
	AME3. Mediana, tabla frecuencias									×	×						
	AME5. Mediana datos agrupados										×	×	×	×	×		
	AME6. Cálculo gráfico mediana									×	×	×					×
	AMO1. Moda, datos aislados						×		×								
	AMO2. Moda, datos en tabla										×						
	AMO3. Moda, datos agrupados										×						
	AMO4. Cálculo gráfico moda									×		×	×	×	×		×

5.4. ESTUDIO GLOBAL DE RESULTADOS

Una vez recogidos los cuestionarios, se analizaron las respuestas de los estudiantes y se codificaron con el propósito de realizar un doble estudio de carácter cuantitativo y cualitativo. En este capítulo presentamos los resultados del primero de estos estudios, mientras que los del segundo corresponden al Capítulo 6.

5.4.1. INTRODUCCIÓN

El estudio cuantitativo tiene como finalidad presentar los resultados obtenidos de las respuestas de los estudiantes al cuestionario administrado. Se lleva a cabo para la totalidad de la muestra y comparando los grupos que la componen, es decir, entre estudiantes de Secundaria y de Bachillerato. El estudio global de resultados se organiza en los siguientes apartados:

- Análisis comparado de la dificultad de los ítems. Las principales diferencias respecto al estudio de Cobo (2003), son el mayor tamaño de la muestra y diferentes edades, contexto cultural y niveles educativos de los sujetos. Se presenta una discusión y comparación con los resultados del estudio piloto y las investigaciones previas.
- Cálculo de los intervalos de confianza y credibilidad para estos índices. Completamos el estudio anterior con el uso de métodos bayesianos para mejorar la estimación de los índices de dificultad. Para ello, seguimos el modelo implementado por Díaz (2007) en la construcción de un cuestionario de evaluación de la comprensión de la probabilidad condicional.
- Análisis de la puntuación total y discusión de los resultados sobre la misma.
- Estudio de fiabilidad y generalizabilidad del cuestionario, ya que, aunque Cobo (2003) también los obtuvo, estos coeficientes dependen de la muestra, por lo que han de revisarse para nuestro caso. Otra diferencia respecto a dicho estudio es el uso de coeficientes basados en el análisis factorial y el mayor tamaño de la muestra.

5.4.2. DIFICULTAD COMPARADA DE ÍTEMS

Para realizar el análisis de dificultad de los ítems del cuestionario, tomamos las respuestas obtenidas de los alumnos, y aunque el cuestionario contiene solamente ítems abiertos, en esta parte de la investigación analizamos primeramente si el alumno es capaz o no de dar las respuestas correctas esperadas, descritas anteriormente. Por ello, en las tablas siguientes categorizamos las respuestas únicamente como correctas o incorrectas, considerando las respuestas en blanco como incorrectas.

En la sección 5.5.2 se presentarán ejemplos de algunas de las respuestas correctas e incorrectas en los diferentes ítems. En el Capítulo 6 ampliaremos este análisis efectuando una categorización de tipo cualitativo que nos permitirá evaluar mejor la comprensión de las medidas de tendencia central que muestran los estudiantes respecto a algunos de los ítems, así como los conflictos semióticos que se presentan en su resolución. En concreto, nos centraremos en los ítems relacionados con la mediana.

En la Tabla 5.4.2.1 se presentan para el total de la muestra los *índices de dificultad* de cada ítem, entendiéndolo en la acepción de Muñiz (1994), como la proporción de sujetos que lo aciertan entre todos los que trataron de resolverlo. Cuanto mayor es este valor, significa que el ítem es más fácil para los alumnos y ha sido respondido correctamente por una mayor proporción de ellos. Este índice fluctúa entre 0.24 en el ítem 2.3 (*cálculo de la media de una suma de variables*), 0.26 en el ítem 10.1 (*cálculo de la media, mediana y moda de un conjunto de datos agrupados en intervalos y presentados en una tabla de frecuencias absolutas*), y 0.85 en el ítem 8 (*estimación de una cantidad desconocida a partir de diversas mediciones en presencia de errores*). Los resultados en este último ítem se repiten con los que obtuvimos en el estudio piloto.

Destacamos las dificultades de los ítems 2.3 y 10.1, tareas relacionadas con la media ponderada, que persisten con insistencia después de la enseñanza, y que a pesar de ello, no parece ser bien comprendidas por el global de la muestra. El bajo porcentaje de estudiantes que logra realizar un cálculo correcto en una tarea aparentemente simple es preocupante e indica la incompetencia de una enseñanza basada en la repetición de cálculo donde los estudiantes no logran un aprendizaje significativo.

Tabla 5.4.2.1. Índice de dificultad y desviación típica (n=518)

Ítem	Índice de dificultad	Desviación típica
i1_1	0.71	0.453
i1_2	0.65	0.478
i2_1	0.30	0.458
i2_2	0.37	0.484
I2_3	0.24	0.427
i3	0.65	0.476
i4	0.76	0.426
i5_1	0.68	0.466
i5_2	0.60	0.490
i5_3	0.31	0.462
i6_1	0.37	0.482
i6_2	0.36	0.480
i7_1	0.78	0.416
i7_2	0.76	0.428
i7_3	0.68	0.466
i8	0.85	0.356
i9_1	0.63	0.484
i9_2	0.32	0.466
i10_1	0.26	0.439
i10_2	0.30	0.458
i10_3	0.59	0.491
i11	0.34	0.475
i12	0.27	0.443
i13	0.37	0.483
i14	0.34	0.475
i15	0.57	0.496
i16	0.35	0.478

Hacemos notar que la mayor parte de los ítems tiene una dificultad moderada. En concreto 24 de los 27 subítems tienen un índice de dificultad comprendido entre 0.3 y 0.7. Con ello conseguiremos más discriminación entre los estudiantes, y en definitiva mejores resultados en la evaluación. Los resultados los observamos mejor en las Figuras 5.4.2.1 y 5.4.2.2, donde se presentan los intervalos de confianza del 95% para los índices de dificultad en cada ítem, utilizando la misma escala para todos, lo que permite visualizar la dificultad relativa de unos frente a otros.

El análisis de estas tablas y gráficos muestra que algunos ítems son difíciles de resolver para el global de alumnos. Señalamos, sin embargo, para hacer la comparación de resultados, que el cuestionario que se les aplicó a los alumnos del estudio piloto contenía hasta el ítem 9, por lo que a partir del ítem 10 sólo consideraremos a los estudiantes de nuestra última muestra y a los estudiantes de Cobo (2003). Seguidamente describimos los ítems con mayores dificultades (entre paréntesis, los índices de dificultad).

Figura 5.4.2.1. Intervalos de confianza de los índices de dificultad de los ítems 1.1 a 6.2

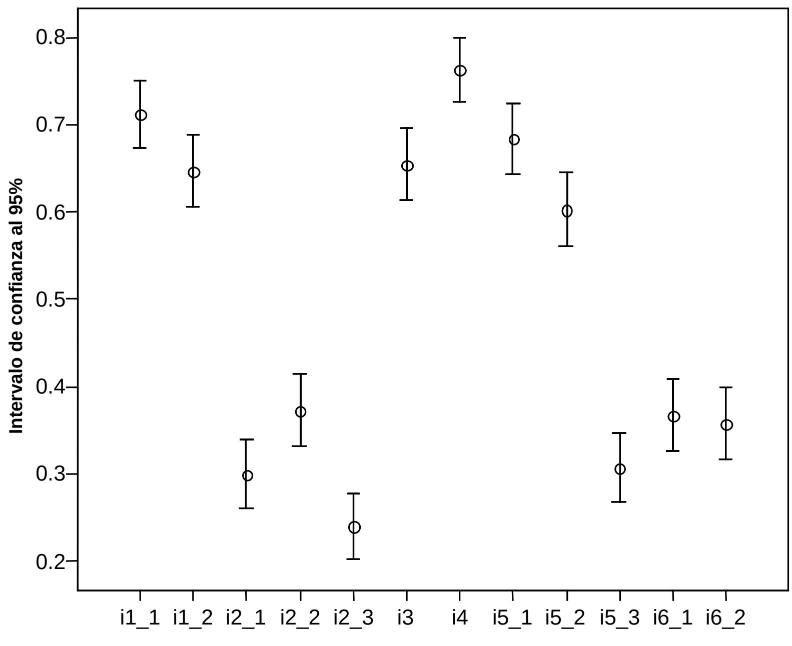
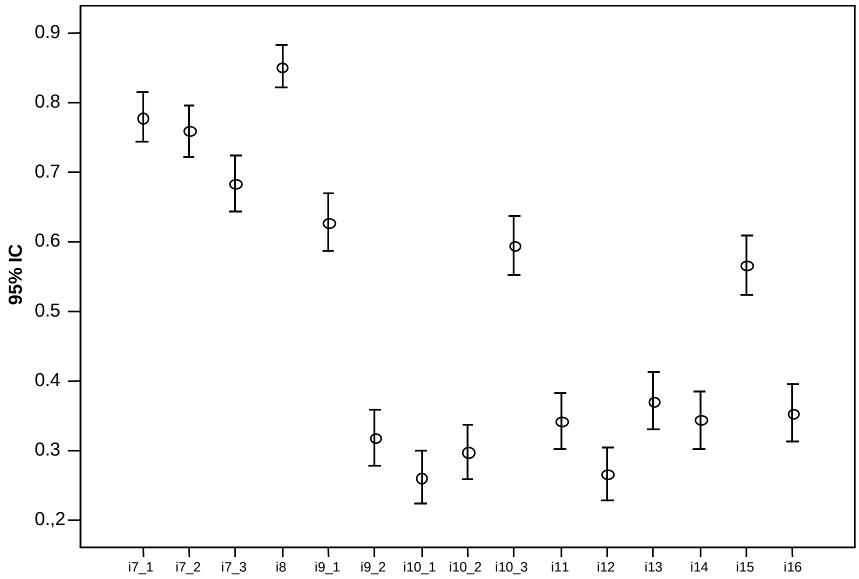


Figura 5.4.2.2. Intervalos de confianza de los índices de dificultad de los ítems 7.1 a 16



- Ítem 2.1 (0.30). En este ítem se espera que los estudiantes sean capaces de calcular la media ponderada a partir de la descripción verbal de un problema donde intervienen unos números muy sencillos. Como se esperaba, la mayoría de los alumnos han fallado en el cálculo de la media ponderada, siguiendo la pauta descrita en las investigaciones previas (Pollatsek, Lima y Well, 1981; Cobo, 2003). Dichos autores sugieren que el problema se produce porque los estudiantes tienen sólo una comprensión computacional y no conceptual de la media. Baja la proporción de respuestas correctas respecto a la muestra piloto (0.36) y a la de Cobo (2003), (0.34).
- Ítems 2.2 (0.37) y 2.3 (0.24). En estos dos ítems se requiere la aplicación de nuevo del cálculo de la media ponderada y se trata de averiguar si los alumnos reconocen la propiedad de que "*la media de la suma de dos o más variables es igual a la suma de las medias de éstas*". También incluye implícitamente definiciones de media y la propiedad de ésta de no ser asociativa vista como operación algebraica. El ítem 2.3 no se incluyó en la muestra piloto y en cuanto a los estudiantes del estudio de Cobo (2003), obtuvo resultados semejantes (con 0.38 y 0.33 respectivamente).
- Ítem 5.3 (0.31). Con este ítem se evalúa la comprensión del efecto de los valores atípicos sobre el cálculo de la media. No todos los estudiantes son conscientes de que se debe eliminar este valor al calcular la media, o bien, tomar la mediana como promedio más adecuado al ser insensible a los valores atípicos. Este ítem también

fue difícil para los estudiantes de la muestra piloto (0.20) y para los estudiantes de Cobo (0.33).

- Ítem 6.1 y 6.2 (0.37; 0.36). Problema asociado a la mediana, que debe ser utilizada para encontrar un resumen estadístico en variables ordinales. El ítem tiene varias dificultades, por una parte, el diferente número de casos que se presentan en cada grupo del problema, y por otra, su representación simbólica. Consideramos que el ítem es difícil de resolver para el general de los estudiantes, ya que los estudiantes del estudio piloto obtuvieron 0.50 y 0.22 puntos respectivamente, y son aún más bajos los resultados obtenidos en los estudiantes españoles (0.13 y 0.04) (Cobo, 2003).
- Ítem 9.2 (0.32). Se trata de estimar la mediana a partir de un gráfico. La dificultad proviene del hecho de que los datos están agrupados y los estudiantes, o bien no tienen en cuenta la frecuencia en el cálculo de la mediana calculando el punto medio de los valores de la mediana, o bien no dan respuesta. También ha sido difícil para los estudiantes de nuestro estudio piloto (0.32) y para los estudiantes españoles (0.26).
- Ítems 10.1 y 10.2 (0.26 y 0.30). Se pretende averiguar si los estudiantes saben calcular la media, mediana y moda de un conjunto de datos agrupados en intervalos y presentados en una tabla de frecuencias absolutas. Se observa en los resultados que los estudiantes presentan más errores al obtener los conceptos de media y mediana y no así con la moda. Cobo (2003) obtuvo resultados muy semejantes con sus estudiantes (0.26).
- Ítem 11 (0.34). En este ítem se trata de calcular la mediana a partir de los datos presentados en forma de gráfico e interpretarlos. La afirmación que se hace, “relaciona la mediana con la mayoría”, da lugar a una confusión entre mediana y moda, que de manera implícita integra esos conceptos. También disminuye la proporción de estudiantes de Cobo (2003) que responde bien al ítem (0.15).
- Ítem 12 (0.27). Este ítem hace hincapié en la propiedad de la mediana y la moda de ser más resistentes que la media cuando aparecen valores atípicos. Los resultados nos indican que aproximadamente una cuarta parte de los nuestros estudiantes reconocen dicha propiedad y sólo 15% de los estudiantes de Cobo (2003).
- Ítem 13 (0.37). Este ítem comprende un problema de distribución bimodal y también está basado en un gráfico que hay que interpretar; por otra parte, en este

caso se presenta la mediana como mejor representante de los datos que la media, (cuestión que tienen que argumentar los estudiantes). No hay diferencias importantes con los estudiantes españoles (0.34).

- Ítem 14 (0.34). Este ítem se deriva del gráfico anterior y contiene los mismos elementos de significado, pero se añade el efecto que tiene la existencia de dos modas en una distribución sobre las otras medidas de tendencia central, apareciendo éstas como más adecuadas para resumir los datos que la media o la mediana, que son poco representativas en estos casos. Una cuarta parte de los estudiantes de Cobo (2003) lo respondieron bien (0.27).
- Ítem 16 (0.35). Con este ítem se pretende averiguar el uso que hacen los alumnos de las medidas de centralización y los gráficos para comparar dos distribuciones. Se centra exclusivamente en la mediana y presenta un gráfico más complejo, ya que contiene dos conjuntos de datos. Es evidente que para nuestros estudiantes fue más difícil interpretar este tipo de gráficos que para los de Cobo (2003), ya que la mitad de sus alumnos resolvieron bien el ítem en el trabajo de esta autora.

Por otro lado, los siguientes ítems fueron los que resultaron más sencillos del cuestionario:

- Ítem 8 (0.85). Media como mejor estimador de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida. Esta es una idea estadística muy potente, pues es base de los métodos de estimación; los resultados sugieren que esta idea es intuitiva para los alumnos, y por lo tanto, fácil de resolver. No encontramos variaciones en los resultados obtenidos en el estudio piloto, y aunque es más baja la proporción de alumnos de Cobo (2003) que responde bien (0.67) sigue siendo un índice alto, o un alto porcentaje de estudiantes que lo aciertan.
- Ítems 7.1 y 7.2 (0.78; 0.76). Encontrar una distribución de valores conocida sólo la media y reconocer si la solución es o no única. Este resultó de los ítems más sencillos y que contradice otros resultados, como los que obtuvo Cai (1995), quien considera esta tarea difícil, aunque sus estudiantes eran de menor edad, también han mejorado los resultados (0.74 y 0.50), y en cuanto a los estudiantes de Cobo (2003) no hay diferencias significativas (0.67; 0.68).
- Ítem 7.3 (0.68). Efecto del cero sobre el valor de la media. Este efecto fue reconocido por nuestros estudiantes en contradicción con los resultados de

Mevarech (1983), quien considera ésta una propiedad difícil. Se mantienen los resultados del estudio piloto y en Cobo (2003) los resultados son semejantes (0.61).

- Ítem 5.1 (0.68). Con este ítem se pretende medir las competencias en el cálculo de la mediana con un número impar de valores; contempla la propiedad de que "en el cálculo de la moda y la media intervienen todos los valores de los datos, mientras que en el de la mediana no". Cobo (2003) obtuvo un índice menor (0.38), por lo que en nuestro contexto este ítem ha sido más sencillo que para los alumnos españoles.
- Ítem 4 (0.76). Se requiere del conocimiento del algoritmo de la media y de que el valor de ésta debe estar comprendida en el rango de valores de los datos. Respondieron correctamente al ítem 66% de los estudiantes de Cobo (2003).
- Ítem 1.1 (0.71). Idea de media como un reparto equitativo en una distribución de datos y conocer el valor más probable al tomar un elemento de una población. También ha sido sencillo resolver este ítem para los estudiantes de la muestra piloto (0.56) y con similares resultados a los que obtuvo Cobo (2003) con sus estudiantes, con un índice de dificultad de 0.69.

En cuanto a las desviaciones típicas, en general se agrupan alrededor de 0.50, lo que representa una variabilidad elevada para el caso de ítems dicotómicos, debido precisamente a que el rango de dificultad de los ítems es intermedio. Es decir, los ítems permitirán mostrar, en caso de que existan, las diferencias individuales en la dificultad encontrada por los alumnos con respecto a la media. Los más homogéneos han sido los ítems de alta dificultad.

En conclusión, podemos confirmar que los problemas de mediana, en concreto, los ítems 6.1, 6.2, 5.3 y 9.2 (y también 2.3, 10.1 y 12), han sido los más difíciles de resolver por los estudiantes mexicanos, y por otro lado, también son evidentes las coincidencias que encontramos en la resolución de estos mismos problemas con los estudiantes españoles. Ello nos ha motivado a realizar un estudio cualitativo más detallado de las soluciones a los ítems relacionados con la mediana, descrito en el Capítulo 6.

5.4.3. ESTIMACIONES BAYESIANAS

En los últimos años asistimos a un debate sobre la conveniencia de que los métodos clásicos de inferencia sean sustituidos o complementados con métodos bayesianos (Díaz, 2007). Las razones dadas para esta recomendación son muchas; entre otras, la interpretación más intuitiva de los resultados proporcionados por los métodos bayesianos y, sobre todo, la posibilidad de tener en cuenta la información previa que se posea sobre la población en estudio.

En nuestro caso no sería lógico proceder como si no se dispusiese de información anterior sobre la dificultad de los ítems del cuestionario o como si todos ellos tuviesen la misma probabilidad de ser resueltos por nuestros estudiantes. El estudio previo de Cobo (2003) ofrece un análisis detallado de la dificultad de estos ítems en dos muestras de estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria en España, siendo el segundo grupo muy semejante en edad a nuestro grupo de estudiantes de Secundaria y habiendo seguido un número similar de cursos de matemáticas previos. Además, el contenido estudiado sobre las medidas de tendencia central también es muy similar en ambos países.

Cabe por ello esperar que la dificultad de cada ítem sea próxima a la que se obtuvo en el estudio de Cobo (2003) y que la dificultad relativa de los ítems se conserve en los dos grupos de estudiantes, pues ello fue lo que ocurrió en el estudio de Cobo (2003) y también en nuestro estudio piloto descrito en el Capítulo 4.

En consecuencia, en esta sección completamos nuestro estudio mediante la estimación clásica y bayesiana de los índices de dificultad de los ítems que conforman el cuestionario, usando la información previa obtenida en el estudio de Cobo (2003). De esta forma mejoraremos nuestras estimaciones, además de ofrecer una interpretación más natural de los intervalos en torno a estas estimaciones (intervalos de credibilidad).

En la Tabla 5.4.3.1 se incluyen los intervalos de confianza (estimación clásica) e intervalos de credibilidad (estimación bayesiana) para los índices de dificultad de cada uno de los ítems. El primero de ellos ha sido calculado con la fórmula ordinaria de intervalos de confianza de una proporción y tiene una interpretación frecuencial, es decir, en cada 100 muestras tomadas de la misma población, 95% de ellas contendrían la proporción verdadera, aunque no podemos saber si se contiene o no en nuestra muestra particular.

El intervalo de credibilidad, por el contrario, indica el intervalo de valores en que esperamos que la proporción verdadera esté incluida, es decir, nos da una probabilidad epistémica, que se refiere a la muestra particular. Es también una probabilidad subjetiva y no objetiva, pues se basa en la distribución inicial elegida para la proporción, que en inferencia bayesiana se supone variable y no constante. Para analizar las diferencias que introducen las estimaciones bayesianas, hemos tomado en primer lugar como distribución inicial una distribución inicial uniforme, es decir, hemos supuesto equiprobables todos los valores de la proporción a priori en los diferentes ítems. Por ello, los intervalos de confianza y credibilidad son muy similares (hubiesen sido diferentes si hubiésemos tomado una distribución inicial diferente).

Tabla 5.4.3.1. Índice de dificultad, Intervalos de Confianza y Credibilidad del 95%.

	Estimación clásica	Intervalo de confianza		Intervalo de credibilidad No informativo	
Ítem	Índice dificultad	L. inferior	L. superior	L. inferior	L. superior
I1_1	0.71	0.671	0.749	0.670	0.748
I1_2	0.65	0.610	0.692	0.608	0.690
I2_1	0.30	0.260	0.339	0.261	0.340
I2_2	0.37	0.329	0.412	0.330	0.413
I2_3	0.24	0.203	0.276	0.204	0.278
I3	0.65	0.610	0.692	0.608	0.690
I4	0.76	0.724	0.797	0.722	0.795
I5_1	0.68	0.639	0.720	0.639	0.719
I5_2	0.60	0.558	0.643	0.558	0.642
I5_3	0.31	0.271	0.351	0.272	0.351
I6_1	0.37	0.329	0.412	0.330	0.413
I6_2	0.36	0.318	0.400	0.319	0.401
I7_1	0.78	0.744	0.816	0.743	0.814
I7_2	0.76	0.724	0.797	0.722	0.795
I7_3	0.68	0.639	0.720	0.639	0.719
I8	0.85	0.819	0.880	0.817	0.879
I9_1	0.63	0.588	0.671	0.588	0.671
I9_2	0.32	0.280	0.361	0.281	0.361
I10_1	0.26	0.223	0.298	0.224	0.299
I10_2	0.30	0.260	0.339	0.261	0.340
I10_3	0.59	0.548	0.633	0.548	0.632
I11	0.34	0.299	0.381	0.300	0.381
I12	0.27	0.671	0.749	0.670	0.748
I13	0.37	0.610	0.692	0.608	0.690
I14	0.34	0.260	0.339	0.261	0.340
I15	0.57	0.329	0.412	0.330	0.413
I16	0.35	0.203	0.276	0.204	0.278

El mayor interés de la inferencia bayesiana es la posibilidad que ofrece cuando se dispone de información previa (distribución informativa). Este es nuestro caso, donde podemos considerar que la dificultad media no será muy diferente de la que tuvieron el grupo de mayor edad (16 años) en la investigación de Cobo (2003), puesto que nuestro estudio incluye estudiantes de esa edad y también otros mayores y menores.

En la Tabla 5.4.3.2 presentamos las estimaciones bayesianas, en este caso con una distribución inicial informativa (usando la información previa del estudio de Cobo

(2003). Observamos que ahora los intervalos de credibilidad obtenidos son más precisos. El valor estimado se corrige con la información previa (estudio de Cobo, 2003), aunque, como nuestra muestra es mayor, en caso de diferencia entre las dos estimaciones, el valor final se aproxima más al de nuestro estudio. Vemos que el hecho de incluir la información previa hace que la estimación sea más precisa. Consideramos recomendable, siempre que se disponga de esta información, utilizar la estimación bayesiana para estimar los parámetros de los ítems de un cuestionario. Con estos resultados finalizamos el estudio bayesiano de los índices de dificultad del cuestionario, complementando de este modo el estudio de las características del cuestionario.

Tabla 5.4.3.2. Estimación bayesiana de índices de dificultad con distribución informativa

	Indice observado		Estimación bayesiana		
	México (n=518)	4 ºESO Cobo (2003), n=144	Valor medio	L. inferior	L. superior
I1_1	0.71	0.69	0.706	0.670	0.740
I1_2	0.65	0.37	0.589	0.551	0.626
I2_1	0.30	0.34	0.308	0.274	0.344
I2_2	0.37	0.38	0.373	0.336	0.410
I2_3	0.24	0.33	0.260	0.227	0.294
I3	0.65	0.49	0.616	0.578	0.652
I4	0.76	0.66	0.738	0.704	0.771
I5_1	0.68	0.38	0.615	0.577	0.651
I5_2	0.60	0.32	0.539	0.501	0.577
I5_3	0.31	0.33	0.315	0.280	0.351
I6_1	0.37	0.13	0.318	0.284	0.354
I6_2	0.36	0.04	0.290	0.256	0.325
I7_1	0.78	0.67	0.756	0.722	0.788
I7_2	0.76	0.68	0.743	0.709	0.775
I7_3	0.68	0.61	0.665	0.628	0.700
I8	0.85	0.67	0.811	0.780	0.840
I9_1	0.63	0.67	0.638	0.601	0.674
I9_2	0.32	0.26	0.307	0.272	0.342
I10_1	0.26	-	0.261	0.224	0.299
I10_2	0.30	-	0.300	0.261	0.340
I10_3	0.59	-	0.590	0.548	0.632
I11	0.34	0.26	0.322	0.287	0.358
I12	0.27	0.15	0.245	0.213	0.278
I13	0.37	0.34	0.364	0.328	0.401
I14	0.34	0.27	0.325	0.290	0.361
I15	0.57	0.45	0.544	0.506	0.582
I16	0.35	0.49	0.381	0.344	0.418

5.4.4. ANÁLISIS DE LA PUNTUACIÓN TOTAL DEL CUESTIONARIO

Para analizar el número de respuestas correctas que cada estudiante obtuvo, les hemos asignado el valor 1 a cada respuesta correcta, por lo que al sumarlas podríamos encontrar una repuntuación total entre 0 y 27 puntos. Presentamos el histograma de frecuencias de la puntuación total obtenida en la muestra (Figura 5.4.4.1).

Observamos en la Tabla 5.4.4.1 que el número de respuestas correctas osciló entre 5 y 23, por lo que ningún estudiante llega a dar todas las respuestas correctas, aunque todos tienen al menos cinco correctas. El número medio de respuestas correctas de los estudiantes es de 13.42 sobre 27, lo que nos da resultados aceptables, acercándose a lo esperado, pues el punto medio sería 13.5. La mediana (Mdn = 13) indica que la mitad de los estudiantes responden al menos la mitad de los ítems del cuestionario.

Figura 5.4.4.1. Puntuación total en la prueba

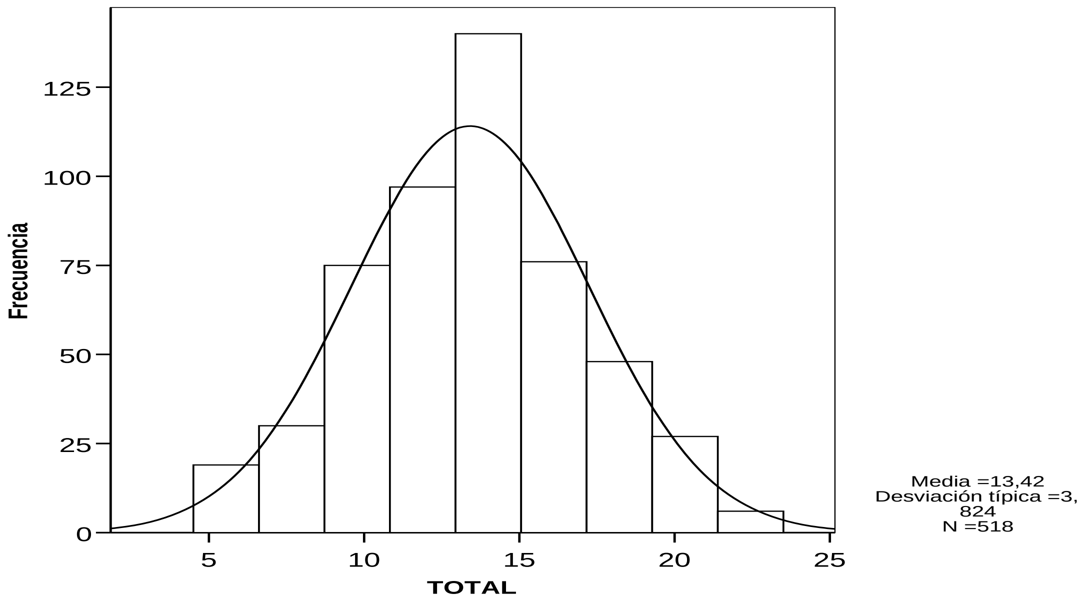


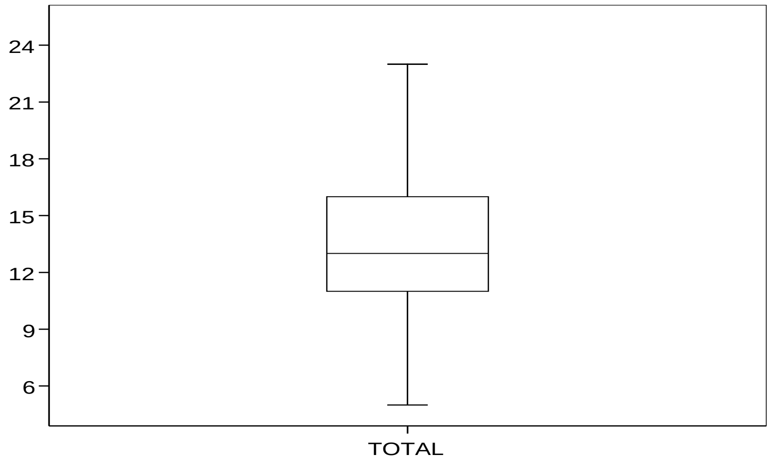
Tabla 5.5.4.1. Estadísticos descriptivos de la puntuación total

		Estadístico	Error típ.
Media		13.42	0.168
Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	13.08	
	Límite superior	13.75	
Mediana		13.00	
Varianza		14.622	
Desv. típ.		3.824	
Mínimo		5	
Máximo		23	
Amplitud intercuartil		5	
Asimetría		0.074	0.107
Curtosis		-0.583	0.214

Todo ello nos asegura unas buenas características del cuestionario, ya que nos permite discriminar una amplia gama de conocimientos, que van desde muy bajos hasta conocimientos altos, encontrándose la mayoría de los estudiantes alrededor del centro, es decir, contestando correctamente a la mitad de las preguntas. Los coeficientes de asimetría y curtosis son aceptables para asumir la normalidad de las puntuaciones.

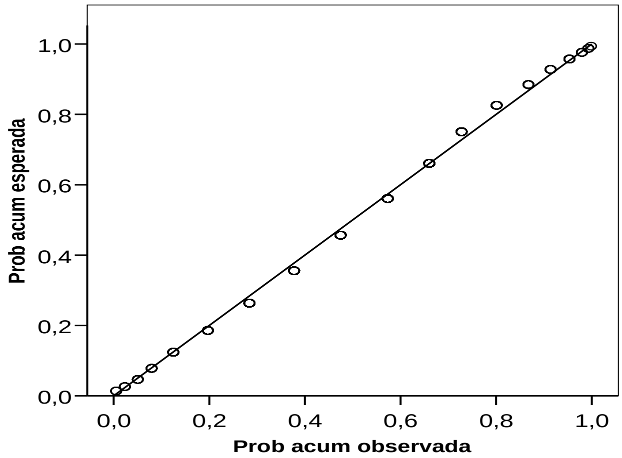
En la Figura 5.4.4.2, observamos que los cuartiles 1 y 3 se sitúan en 10 y 16 puntos. Esto indica que el conjunto central de alumnos (50% central), responde entre 10 y 16 preguntas correctamente de un total posible de 27 puntos. Observamos también que no hay sujetos atípicos, lo que es otro indicador de las buenas características del cuestionario. En todo caso hay una gran variabilidad en el número de respuestas correctas, lo que indica una comprensión desigual de las medidas de centralización por estos estudiantes. También supone un buen poder discriminador del cuestionario.

Figura 5.4.4.2. Gráfico de caja de la puntuación total



En la Figura 5.4.4.3 observamos la normalidad aproximada de la distribución, donde las puntuaciones se distribuyen de igual manera por encima y por debajo de la media; esto es una indicación de que el cuestionario es un buen instrumento de evaluación pues permite evaluar la gama de comprensión de los estudiantes participantes.

Figura 5.4.4.3. Gráfico P-P Normal de Total



5.4.5. ESTUDIO DE FIABILIDAD Y GENERALIZABILIDAD

En este apartado presentamos el análisis de la fiabilidad del cuestionario en nuestra muestra. Cobo (2003) informó sobre este punto como la extensión por la cual un experimento, test u otro procedimiento de medida produce los mismos resultados en ensayos repetidos. La medida siempre produce un cierto error aleatorio, pero dos medidas del mismo fenómeno sobre un mismo individuo suelen ser consistentes. Sin embargo, la fiabilidad varía al cambiar la población objeto de estudio. Siguiendo a Thorndike (1989), evaluamos conceptos abstractos, en nuestro caso, relacionar el significado personal que los alumnos de la muestra asignan a las medidas de posición central con sus respuestas a los ítems del cuestionario, que son indicadores empíricos. Para permitir este proceso de medida, un indicador debe ser fiable. La fiabilidad es esta tendencia a la consistencia o precisión del instrumento en la población medida (Bisquerra, 1989). Para el cálculo de fiabilidad y generalizabilidad usamos todos los datos recogidos, es decir, tanto en la muestra descrita en este capítulo como en la muestra piloto, que en total configuran un grupo de 642 estudiantes. El objeto es tener una estimación más precisa de la fiabilidad al contar con una muestra de mayor tamaño.

Entre los diversos métodos de estimar la fiabilidad de una escala, consideramos en primer lugar, el método de *consistencia interna*, que está basado sólo en la aplicación del cuestionario (Díaz, Batanero y Cobo, 2003). Su cálculo se basa en el análisis relativo de la varianza de la puntuación total del cuestionario y de las varianzas de los ítems particulares; el coeficiente que lo mide es el Alfa de Cronbach (Carmines y Zeller, 1979).

Tabla 5.4.5.1. Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	No. de elementos
0.662	27

Se ha obtenido un valor Alfa = 0.662 para el coeficiente de Cronbach (Tabla 5.4.5.1), que se considera como un valor adecuado aunque no excesivamente elevado debido a que, como se probó en el estudio de Cobo (2003), el cuestionario evalúa un constructo que no es unidimensional. Morales (1988, pag. 249) indica que no hay regla fija para cuál debe ser el valor mínimo del coeficiente y que diversos autores han dado distintas reglas, como Santisteban (1990), que indica como límite general, 0.50. En todo caso, puesto que el cuestionario incluye una gama amplia de conceptos, no es de esperar una fiabilidad excesivamente alta.

Tabla 5.4.5.2. Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el ítem	Varianza de la escala si se elimina el ítem	Correlación ítem-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el ítem
i1_1	12.30	15.094	0.121	0.661
i1_2	12.34	14.944	0.154	0.658
i2_1	12.69	14.337	0.337	0.642
i2_2	12.64	14.204	0.356	0.639
i2_3	12.75	14.476	0.324	0.644
i3	12.36	15.266	0.063	0.667
i4	12.25	15.123	0.127	0.660
i5_1	12.35	14.889	0.167	0.657
i5_2	12.44	14.836	0.170	0.657
i5_3	12.71	14.673	0.245	0.650
i6_1	12.60	15.094	0.104	0.663
i6_2	12.62	15.170	0.086	0.665
i7_1	12.22	14.299	0.402	0.637
i7_2	12.26	14.144	0.427	0.634
i7_3	12.32	14.089	0.410	0.635
i8	12.14	15.445	0.060	0.664
i9_1	12.40	14.555	0.251	0.649
i9_2	12.71	14.674	0.243	0.650
i10_1	12.77	14.983	0.175	0.656
i10_2	12.71	15.496	0.008	0.671
i10_3	12.44	14.689	0.209	0.653
i11	12.70	15.144	0.106	0.663
i12	12.77	14.774	0.241	0.651
i13	12.67	14.821	0.191	0.655
i14	12.69	14.896	0.174	0.657
i15	12.52	14.135	0.358	0.638
i16	12.69	14.761	0.211	0.653

El estudio de fiabilidad también proporciona información sobre la forma en que afecta a la fiabilidad global la supresión de cada uno de los ítems, como vemos en la Tabla 5.4.5.2. En ella vemos que eliminando algún ítem se podría aumentar la fiabilidad, aunque no mucho, por lo que optamos por conservar todos los ítems para el análisis. También se presentan las correlaciones de cada ítem con la puntuación total en la prueba exceptuando este ítem, lo que se denomina *índice de discriminación del ítem*. Vemos que todas estas correlaciones son positivas, es decir indica que todos los ítems contribuyen a la puntuación global de la prueba. También es indicativo de la existencia de un constructo unidimensional subyacente en el cuestionario, que podríamos interpretar como “comprensión de las medidas de posición central”. Sin embargo, en algunos ítems la discriminación es muy cercana a cero, éstos serán los que menos contribuyen a la puntuación total, por ejemplo los ítems 3, 6.2, 8 y el 10.2.

Tabla 5.4.5.3. KMO y prueba de Bartlett

Medida de adecuación muestral de Kaiser-Meyer-Olkin.		0.648
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado	4844.404
	Gl	351
	Sig.	0.000

Seguidamente, también se calculó un coeficiente de fiabilidad basado en el análisis factorial, siguiendo las consideraciones indicadas en Barbero (2003). Puesto que asumimos que el cuestionario evalúa un constructo multidimensional, la fiabilidad se calcula más exactamente con este coeficiente, que representa la contribución del primer factor del análisis factorial al total de la fiabilidad del cuestionario. Primeramente, en la Tabla 5.4.5.3 hacemos la prueba KMO y la prueba de Bartlett para comprobar que podemos aplicar el análisis factorial.

En la Tabla 5.4.5.3 se presentan los resultados del análisis factorial con los 11 factores de autovalor mayor que uno. Esto confirma nuestra hipótesis de multidimesionalidad del constructo. Al mismo tiempo, puesto que el primer factor tiene mayor varianza que el resto (los cuales explican casi la misma varianza cada uno) sugiere la existencia del constructo general “comprensión de las medidas de tendencia central” que se complementará después con el resto de factores. Todo ello apoya la validez de constructo del cuestionario.

A partir de los resultados del análisis factorial se calculó el coeficiente Theta de Carmines[1]:

$$\theta = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{1}{\lambda_1}\right) = 0.726$$

donde n es el número de ítems y λ el primer autovalor en el análisis factorial. Coincide con el coeficiente α calculado con las puntuaciones factoriales derivadas del primer factor común y sintetiza la información aportada por el primer factor (Morales, 1988).

Tabla 5.4.5.4. Varianza total explicada

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción			Suma de las saturaciones al cuadrado de la rotación		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	3.324	12.311	12.311	3.324	12.311	12.311	2.597	9.618	9.618
2	2.343	8.677	20.988	2.343	8.677	20.988	2.536	9.393	19.011
3	2.009	7.442	28.429	2.009	7.442	28.429	2.005	7.425	26.435
4	1.972	7.304	35.734	1.972	7.304	35.734	1.754	6.498	32.933
5	1.821	6.746	42.480	1.821	6.746	42.480	1.667	6.174	39.107
6	1.376	5.096	47.575	1.376	5.096	47.575	1.520	5.630	44.738
7	1.258	4.659	52.235	1.258	4.659	52.235	1.372	5.080	49.818
8	1.195	4.425	56.660	1.195	4.425	56.660	1.343	4.972	54.790
9	1.110	4.111	60.771	1.110	4.111	60.771	1.297	4.803	59.594
10	1.087	4.027	64.798	1.087	4.027	64.798	1.291	4.780	64.373
11	1.042	3.860	68.657	1.042	3.860	68.657	1.157	4.284	68.657
12	.935	3.465	72.122						
13	.851	3.151	75.273						
14	.834	3.088	78.360						
15	.782	2.898	81.258						
16	.755	2.796	84.054						
17	.694	2.572	86.626						
18	.688	2.547	89.173						
19	.601	2.225	91.398						
2	.567	2.101	93.499						
21	.539	1.996	95.495						
22	.325	1.203	96.699						
23	.306	1.134	97.833						
24	.275	1.020	98.852						
25	.177	.654	99.506						
26	.106	.391	99.897						
27	.028	.103	100.000						

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

[1] Carmines y Zéller (1979) definen este coeficiente para cuestionarios no unidimensionales, como es el nuestro.

En nuestro estudio el coeficiente alfa presenta un valor bastante alto, lo que junto con el hecho de que el primer factor explicó mucho mayor porcentaje de varianza que los siguientes, y que la mayoría de los ítems tenían pesos apreciables en el mismo, antes de la rotación, indica una cierta unidimensionalidad del cuestionario aunque pequeña, ya que el porcentaje de varianza explicado por el primer factor fue sólo el 13%.

Coeficientes de generalizabilidad

La teoría de la generalizabilidad extiende la teoría clásica de la medición, según Feldt y Brennan (1991), y permite por medio del análisis de varianza, analizar diferentes fuentes de error en un proceso de medida. Para Santisteban (1990), el núcleo de esta teoría es considerar diferentes fuentes de error en las puntuaciones observadas, que pueden ser los mismos sujetos, las preguntas o las condiciones que se aplican.

El coeficiente de generalizabilidad se define con el cociente (1), es decir, como el cociente entre la varianza verdadera en las puntuaciones de la prueba y la varianza observada, que es la suma de la varianza verdadera más la varianza debida al error aleatorio. Según Thorndike (1989), la varianza error depende de cómo definimos el universo de puntuaciones verdaderas, y en el análisis de generalizabilidad se consideran ciertas fuentes como parte de la varianza error en unas condiciones y otras fuentes en otras.

(1)
$$G = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v^2 + \sigma_e^2}$$

En este trabajo hemos diferenciado dos fuentes para el error aleatorio y calculado la generalizabilidad de los mismos sujetos (inter-personas) y la generalizabilidad de los ítems (inter-elementos).

Para realizar este cálculo, hemos obtenido en primer lugar, a partir del análisis de escalas del software SPSS, así como del modelo de estimación de Dunn y Clarck (1987) para el análisis de varianza de medidas repetidas, los siguientes componentes de la varianza (Tabla 5.4.5.4), tomando el ítem como factor. De esta tabla obtenemos los cuadrados medios entre sujetos, entre los diferentes ítems y residual, así como sus grados de libertad.

Tabla 5.4.5.4. Análisis de varianza de medidas repetidas

		Suma de cuadrados	Gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-personas		374.074	642	0.583		
Intra-personas	Inter-elementos	670.563	26	25.791	130.862	0.000
	Residual(a)	3289.733	16692	0.197		
	Total	3960.296	16718	0.237		
Total		4334.370	17360	0.250		

Media global =0 ,48

CM_S = 0.583 que es un estimador de $b\sigma^2_S + \sigma^2_R$, siendo b el número de ítems

CM_I = 25.791 que es un estimador de $a\sigma^2_I + \sigma^2_R$ siendo a el número de sujetos

CM_R = 0.197 que es un estimador de σ^2_R

De donde, despejando obtenemos las siguientes estimaciones:

Varianza dentro de los sujetos $\sigma^2_s = 0.0148$

Varianza dentro de los ítems $\sigma^2_i = 0.0398$

Varianza residual $\sigma^2_e = 0.197$

Sustituyendo ahora estos componentes de varianza en la fórmula (1) y teniendo en cuenta los tamaños de muestra (27 ítems y 642 alumnos), según si consideramos como fuente de variación los problemas o los alumnos, obtenemos las siguientes estimaciones:

Generalizabilidad respecto a los ítems: $G_i = \dfrac{\sigma^2_s}{\sigma^2_s + \sigma^2_e/26} = 0.6616$

Obtenemos un valor próximo al del coeficiente Alfa (0.662), debido a que el coeficiente de generalizabilidad respecto a los ítems coincide con él, ya que se considera el número de alumnos fijo y la única fuente de variación se debe a la variabilidad entre ítems. Las pequeñas diferencias se deben a redondeos en los cálculos.

Generalizabilidad respecto a los alumnos:

$$G_S = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \sigma_e^2/642} = 0.9619$$

Obtenemos un valor muy alto para la generalizabilidad a otros alumnos de la misma prueba, es decir, se indica una muy alta posibilidad de generalizar nuestros resultados a otros alumnos conservando el mismo cuestionario, por supuesto, bajo la hipótesis de que se conserven las características sociológicas y educativas.

5.5. COMPARACIÓN ENTRE ALUMNOS DE BACHILLERATO Y ALUMNOS DE SECUNDARIA

5.5.1. INTRODUCCIÓN

En esta sección analizamos las diferencias de las respuestas encontradas entre los alumnos de los dos niveles educativos considerados en el estudio. En primer lugar comparamos cada uno de los ítems y seguidamente la puntuación total en el cuestionario. También se lleva a cabo un análisis sobre la estructura de las respuestas de los estudiantes, que incluye un análisis cluster y un análisis implicativo de las mismas.

5.5.2. DIFICULTAD COMPARADA DE ÍTEMS

El estudio de la diferencia en proporción de aciertos en distintos grupos de alumnos con ejecución teóricamente distinta se considera una evidencia de la discriminación del cuestionario. Además, nos proporciona información sobre el aprendizaje logrado por los estudiantes en el Bachillerato en contraste con los conocimientos logrados por los estudiantes durante la Secundaria. Esta información es importante para el profesorado mexicano, ya que da pautas para evaluar los conocimientos de los estudiantes y tomar medidas que permitan mejorar la enseñanza de la estadística en ambos niveles educativos. Seguidamente, analizamos las diferencias entre los grupos para cada ítem.

Ítem 1

Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en México es 2.2 hijos por familia.

a) Explica qué significa para ti esta frase.

b) Se han elegido 10 familias mexicanas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo. ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta.

Este ítem se divide en dos apartados, y está relacionado con la idea de media como reparto equitativo. Incluye la propiedad de la media de no ser una operación interna, así como el procedimiento consistente en obtener una distribución que tenga la media dada.

Tabla 5.5.2.1. Porcentajes de respuestas al ítem 1

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 1.1	0.80	0.20	0.52	0.48
Ítem 1.2	0.69	0.31	0.55	0.45

Encontramos porcentajes altos de respuestas correctas en los dos apartados del ítem, especialmente en los estudiantes de Bachillerato, y más aún en la primera parte, donde los alumnos deben dar una explicación intuitiva del significado de un valor medio no entero, siendo la variable de referencia un número entero. En cuanto a los estudiantes de secundaria, hemos obtenido resultados aceptables, ya que aproximadamente la mitad de ellos ha respondido bien en ambos apartados del ítem.

Entre las respuestas correctas del primer apartado, algunos alumnos identifican el campo de problemas, que consiste en obtener un reparto equitativo en una distribución de datos (PM2). Por ejemplo: *"Que en México se realizó un censo y la mayoría tiene 2 hijos, ya que no se puede tener 2.2 porque una persona no se puede dividir (no hay 0.2 personas), y el 2.2 es el resultado de algún método estadístico empleado"*. En este caso, el alumno asume que el valor medio debe ser próximo a la moda, aunque no tendría por que ser así en todas las distribuciones y es consciente de que la media puede tomar un valor fuera del conjunto original de datos. El alumno también muestra comprensión de que la media no es una operación interna sobre el conjunto de datos (A1).

También encontramos respuestas que hacen referencia a la idea de valor más probable en una población (PM4): *"Que al hacer un conteo estadístico de la natalidad y población en México, resulta que por cada familia hay aproximadamente 2 hijos y en algunos casos el número es mayor"*.

Otro tipo de respuestas que consideramos correctas, son aquellas en que los estudiantes aunque no realizan cálculos, explican el procedimiento posible para obtener el resultado. Implica el cálculo correcto de la media de una variable discreta con datos aislados (AM1), que también supone el uso correcto de la definición (DM1): *"Que al hacer un conteo de los hijos totales y sumarlos, para posteriormente dividir esa suma entre el total de familias da 2.2"*. Todas las anteriores respuestas correctas fueron también encontradas en la investigación de Cobo (2003).

Las respuestas incorrectas, se deben, en algunos casos a que confunden la media con la moda, lo que supone un error en alguna de las definiciones de la media: *"Que la* *mayoría de las familias tienen solo un hijo o dos. Y hay poca gente que tengan más de éstos".* Este es un error que persiste a pesar de la instrucción recibida, por lo que debe considerarse en la enseñanza futura.

En otros, los alumnos argumentan que no se puede obtener un valor no entero para la media de una variable entera, es decir, cometen un error con respecto a la propiedad A1, pues suponen que la media es una operación interna, error encontrado también por Mevarech (1983): "*Yo creo que está mal ya que una familia no puede tener un hijo y dos décimas, en todo caso podría tener 2*". Los estudiantes no recibieron instrucción específica al respecto, lo que puede explicar este tipo de errores.

La segunda parte del ítem es más compleja, ya que los alumnos deben construir una distribución de datos con un valor medio dado. Supone, además del conocimiento del cálculo de la media, la comprensión de la idea de distribución como propiedad de un colectivo. Entre las respuestas correctas encontramos las siguientes, donde los estudiantes invierten el algoritmo de cálculo de la media (AM6):

1. *"Las otras 8 familias tienen en total 17 hijos, lo que indica que por cada familia de las 8 cuentan con aproximadamente 2.12 hijos cada una:*

   22/10 = 2.2 　　 22-5 = 17 　　 17/8 = 2.125"

2. *"Pueden tener 17 hijos porque así se completa la media. Sólo es despejar la variable X:*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_n}{n} \quad n = 10 \qquad \bar{x} = \frac{4+1+2}{10} = 2.2 \qquad \bar{x} = 2.2x(10) - 5 = 17 hijos"$$

Algunos errores que cometen los estudiantes en este ítem son, por ejemplo, dar distribuciones que no se ajustan a la media, por no ser capaz de invertir correctamente el algoritmo, y al resolver el problema mediante ensayo y error no llegan a la solución correcta:

1. *10 (2.2) = 22 　　 22/8 =2.7 hijos 　　 Entre 2 y 3 hijos*
2. *"El número total de hijos es 22 pero puede variar el número de hijos por familia"*

García	*Pérez*	*F1*	*F2*	*F3*	*F4*	*F5*	*F6*	*F7*	*F8*
4	*1*	*3*	*2*	*4*	*1*	*3*	*2*	*1*	*1*

En resumen, los resultados en este ítem son buenos, especialmente en los alumnos de Bachillerato, lo que indica que estos alumnos reconocen la media como el valor que se obtiene al hacer un reparto equitativo para obtener una distribución uniforme. Pensamos que este campo de problemas ha sido intuitivo para los estudiantes, incluso cuando su presencia en los textos utilizados por estos alumnos es poco frecuente. Hay también un buen dominio de la inversión del algoritmo de cálculo en los alumnos de Bachillerato (con sólo 30% de errores), mientras que resulta más difícil en los estudiantes de Secundaria, quienes al tratar de resolver el problema mediante ensayo y error no llegan a la solución correcta en un porcentaje apreciable.

Ítem 2

María y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte.

a) ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?

María y Pedro dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas.

b) ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los diez estudiantes?

c) ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

Tabla 5.5.2.2. Porcentajes de respuestas al ítem 2

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 2.1	0.33	0.66	0.23	0.77
Ítem 2.2	0.42	0.38	0.28	0.72
Ítem 2.3	0.27	0.73	0.18	0.82

Este ítem como se observa en la Tabla 5.5.2.2, no ha sido tan sencillo de resolver. Aproximadamente la tercera parte de los estudiantes de Bachillerato lo contesta bien y alrededor de la cuarta parte de los de Secundaria. El ítem está dividido en tres apartados que consisten en calcular la media ponderada, además de hallar la media de la suma de dos valores.

La ponderación correcta de los valores de la variable en el cálculo de la media ponderada, implica la aplicación de la propiedad distributiva de la suma y producto y la comprensión de que la operación promedio no tiene la propiedad asociativa. Los estudiantes que contestaron correctamente el ítem, aplican estas propiedades en el cálculo de la media ponderada, siguiendo el mismo procedimiento para resolver los tres apartados, por ejemplo:

"*a)* $\bar{x} = \dfrac{2(8)+8(4)}{10} = 4.8$ *horas a hacer deporte* *b)* $\bar{x} = \frac{2(1)+8(3)}{10} = 2.6$ *horas a escuchar música*

c) $\bar{x} = \frac{2(8)+8(4)+2(1)+8(3)}{10} = 7.4$ *horas de deporte y música"*

Otros alumnos usan el algoritmo ordinario de cálculo de la media con datos aislados de forma correcta. Siendo incapaces de aplicar la ponderación, buscan una solución alternativa, convirtiendo los datos en un conjunto de datos aislados y usando el algoritmo correspondiente, que manejan con más seguridad. Podemos observar en la Tabla 5.5.2.2, la gran cantidad de errores aparecidos en 1os alumnos, quienes en los dos grupos tienen dificultades para calcular correctamente una media ponderada, resultados que replican los de Cobo (2003).

En cuanto a los errores que se cometen con mayor frecuencia, encontramos principalmente el no considerar la ponderación y usar sólo la media simple. En el ejemplo que mostramos a continuación, el alumno no pondera en el primer apartado el caso de María y Pedro, luego confunde los datos en la segunda parte, y la tercera parte la responde correctamente.

"a) Se suman el número de horas de María y Pedro y los otros estudiantes:

M y P = 8 8 estudiantes = 4 12/10 = 1.2 media de horas entre los 10 estudiantes.

b) M y P = 1 hora 8 estudiantes = 3 horas 4/10 = 0.4 hrs ó 15 minutos, media de hora entre los 10 estudiantes.

c) 12 hrs + 4 hrs = 16 16/10 = 1.6 hrs ó 1.2 (1 actividad) + 0.4 (2 actividad) = 1.6 horas."

Otros alumnos presentan errores de cálculo, como en el siguiente ejemplo, donde el estudiante no hace ninguna ponderación:

"a) El promedio de horas de deporte que hacen los 8 estudiantes es de 4 horas:

$8+(4)(8)=8+32=40 \qquad 40/10=4$

b) El promedio de horas que dedican los alumnos para oír música es de 2.7 hrs:

$3+(8)(3)=3+24=27 \qquad 27/10=2.7$ *horas*

c) El promedio de horas que dedican los estudiantes entre las dos actividades es de 6.7 horas: $40+27=67 \qquad 67/10=6.7$ "

En el último apartado de este ítem se debe poner de manifiesto el conocimiento de la propiedad de no asociatividad del cálculo de la media, propiedad que ha sido igualmente difícil. Por un lado, los errores acumulados en el cálculo de la media ponderada repercuten en el resultado correcto en este apartado. En otras ocasiones, los estudiantes calculan incorrectamente la media de las dos medias (en lugar de la suma de las medias), o bien no dan respuesta en este punto.

Como balance global podemos afirmar que, el cálculo de la media ponderada resulta difícil para los estudiantes de estas edades, aunque mejora algo con los de mayor edad. Pollatsek, Lima y Well (1981), ya encontraron que la ponderación presenta dificultades incluso en niveles universitarios. Este mismo resultado, que se muestra también en muchas investigaciones posteriores, como las de Gattuso y Mary (1996, 2002), Garret y García (2005) y en alumnos de todas las edades, sugiere una aplicación mecánica del algoritmo de cálculo de la media.

Ítem 3

Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos.

¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?

Tabla 5.5.2.3 Porcentajes de respuestas al ítem 3

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 3	0.69	0.31	0.58	0.42

Este ítem evalúa la capacidad para obtener una cantidad equitativa al hacer un reparto para conseguir una distribución uniforme, y de hacer una estimación de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida. Estas dos competencias se apoyan en la comprensión de la propiedad de que la suma de las desviaciones de los datos a la media es nula. Es decir, cada dato que está por encima de la media, debe compensarse con otros que estén por debajo de ella.

Son aceptables nuestros resultados en este ítem, con 69% y 58% de respuestas correctas respectivamente (Tabla 5.5.2.3). Esto indica que dicha propiedad ha resultado intuitiva para nuestros estudiantes, a pesar de no aparecer explícitamente en los libros de texto utilizados en la enseñanza. Al contrario que en el caso de Cobo (2003), para nuestros estudiantes mayores mejora la comprensión de estas propiedades. Encontramos los siguientes ejemplos de respuestas correctas:

Algunos estudiantes interpretan la media como la cantidad que se obtiene al hacer un reparto equitativo para obtener una distribución uniforme: *"Igual porque les dieron una cantidad para estar todos con la misma cantidad de harina"*.

En otras respuestas, se reconoce la propiedad de que la media coincide con el centro de gravedad de la distribución, es decir reconocen explícitamente la propiedad de la suma de desviaciones nulas: *"Igual, la entregada y la recibida es la misma cantidad"*; *"Igual, no nos dice si la pesaron o algo así, por lo tanto, la cantidad de harina dada seguía una proporción aproximada. Como el objetivo es hacer 4 pizzas del mismo tamaño, la cantidad de harina dada y recibida es proporcional para cubrir este objetivo"*.

Entre las respuestas incorrectas las típicas son aquellas en que no se identifica la propiedad de que la suma de desviaciones a la media ha de ser cero: *"Fue menor, ya que los que traían mucha regalaron sólo un poco para igualar la cantidad de harina entre todos"; "Fue mayor porque llevaron mas harina de la que había que llevar"; "Mayor, porque los que trajeron mucha les dieron a los que tenían menos"*.

En nuestro caso, el porcentaje de estudiantes con respuestas incorrectas es alrededor del 40% en Secundaria y 30% en Bachillerato, mientras que en las investigaciones de Strauss y Bichler (1988), y Leon y Zawojeswski (1991), con alumnos de entre 12 y 14 años, esta propiedad fue demasiado abstracta y apenas obtuvieron respuestas correctas. Concluimos que la mayor edad de nuestros estudiantes explica los mejores resultados respecto a esta investigación y la de Cobo (2003). Nuestros resultados apoyan también la hipótesis de Tormo (1993), que afirma que los alumnos desarrollan nociones intuitivas relacionadas con las medidas de posición central que habría que aprovechar en la enseñanza, en lugar de hacer tanto énfasis en el aprendizaje de algoritmos.

Ítem 4

Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4.   *¿Te parece posible? ¿Por qué?*

En este ítem, que Cobo (2003) toma inicialmente de Tormo (1993), evalúa la comprensión de la idea de distribución y la competencia para construir una distribución de valores, conocida la media y el máximo valor. Russell y Mokros (1995) sugieren que hasta que los alumnos no conciben el conjunto de datos como un todo, no podrán comprender la idea de promedio. En la investigación de Tormo (1993) este ítem fue difícil.

Tabla 5.5.2.4. Porcentajes de respuestas al ítem 4

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 4	0.80	0.20	0.67	0.33

En nuestro caso, debido a la mayor edad y formación de los alumnos, este ítem ha sido de los más sencillos, pues como vemos en la Tabla 5.5.2.4, en ambos grupos de estudiantes se obtuvo un alto porcentaje de respuestas correctas, 80% y 67% respectivamente. Por el contrario, Cobo (2003), informa que el porcentaje de respuestas correctas en su investigación en este ítem fue bajo, lo que coincide con los resultados señalados por Leon y Zawojewski (1991), para quienes el concepto de representatividad y distribución es completo. También Russell y Mokros (1991), indican que es mucho más difícil la tarea de encontrar una distribución dado su promedio, que la contraria.

De las respuestas correctas identificamos las siguientes, donde los alumnos encuentran una distribución que cumple la propiedad pedida. Además deben aplicar de nuevo la propiedad de la suma de desviaciones a la media (E5). En algunos casos, los estudiantes invierten correctamente el algoritmo de la media para dar una solución, pero en su mayoría utilizan el ensayo y error, como en las siguientes respuestas:

1. *"Sí puede ser posible porque el problema no nos especifica si los números son consecutivos o no existe repetición, así es que si tenemos:*
   5+4+4+4+4+3 =24 24/6=4".
2. *"Yo opino que sí es posible, ya que dando valores arbitrarios a esos seis números comprobamos que sí es posible esa respuesta:*
   5+5 = 10; 4+4 = 8; 3+3 = 6; 10+8+6 = 24".

Respecto a las respuestas incorrectas, algunos ejemplos son los siguientes, donde los estudiantes no son capaces de encontrar la distribución pedida. Los fallos se producen por no saber invertir el algoritmo de la media y no aplicar adecuadamente el ensayo y error (ejemplo 1). En otros casos, los alumnos no reconocen la propiedad de la suma de desviaciones igual a cero:

1. *"No me parece posible porque si sumamos los 6 números sale 15 y si lo dividimos entre 6, sale 2.5: 0+1+2+3+4+5=15 15/6= 2.5".*
2. *"Creo que no es posible porque dicen que el número mayor es 5 y sólo hay uno, si repetimos al 5 cuatro veces, la suma nos daría 20 más 4 es igual a 24, entre 6 nos daría 4, pero si sumamos: 5+4+3+2+1, no nos da el resultado".*

Ítem 5

El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24.

a) ¿Cuál es el peso del niño mediano?

b) ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg?

c) En este caso, ¿Sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? ¿Por qué?

Como nos muestra la Tabla 5.5.2.5, en el ítem 5 también obtuvimos resultados aceptables en sus dos primeros apartados, con 69% y 67%, y 62% y 57% de respuestas correctas respectivamente, pero no en el último apartado, donde sólo respondieron bien 36% de estudiantes de Bachillerato y 19% de Secundaria. Es un problema complejo, puesto que para resolverlo se deben tener claros los conceptos de media y de mediana. Nuestros resultados son mejores que los obtenidos por Cobo (2003) y también los obtenidos en la muestra piloto, pero peores que los de preguntas anteriores en el cálculo de la media, lo que muestra que la mediana resulta más difícil de calcular para los alumnos. Coinciden también con las dificultades que para la comprensión de los diferentes algoritmos de cálculo de la mediana encuentra Estepa (1993) en estudiantes universitarios.

Tabla 5.5.2.5. Porcentajes de respuestas al ítem 5

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 5.1	0.69	0.31	0.67	0.33
Ítem 5.2	0.62	0.38	0.57	0.43
Ítem 5.3	0.36	0.64	0.19	0.81

En la primera parte del ítem se pide calcular la mediana tanto de un número par como impar de datos, y en la última, elegir un buen representante estadístico para una distribución que incluye un valor atípico y argumentar dicha elección. Los resultados correctos disminuyen algo en la segunda parte, posiblemente, porque el número par de valores añade la dificultad de que la mediana no coincide con ninguno de ellos, lo que resulta especialmente complicado para los alumnos más jóvenes. Coincidimos aquí con Schuyten (1991), quien indica que los alumnos encuentran particularmente difícil el hecho de que haya más de un algoritmo diferente para el cálculo de la mediana.

En las respuestas correctas halladas, los estudiantes realizan el cálculo de la mediana correctamente, dando un argumento razonable sobre la pregunta a responder, como vemos en el siguiente ejemplo:

"*a) 15, 16, 17, 18, **19,** 19, 24, 25, 26 niño mediano = 19*

*b) 15, 16, 17, 18, **19, 19,** 24, 25, 26, 43 mediana = 19+19/2 = 19*

c) No, porque tenemos un peso de 43kg, muy arriba de los demás".

Las respuestas incorrectas son muy variadas, por ejemplo, en el siguiente caso, el estudiante realiza correctamente ambos cálculos de la mediana, y por lo tanto, conoce la definición de la mediana como valor central de la distribución. Sin embargo, no reconoce la propiedad de que sólo en distribuciones simétricas coincide la media y la mediana (E3). Tampoco reconoce el efecto del valor atípico, lo cual es razonable pues no se hizo un estudio explícito de los valores atípicos en la enseñanza recibida:

*"15, 16, 17, 18, **19, 19,** 24, 25, 26, 43*

a) Mediana 1 = 19 El niño mediano pesa 19kg

b) Mediana 2 = 19+19/2 = 19 La nueva mediana es 19kg

c) $\frac{15+16+17+18+19(2)+24+25+26+43}{10} = 22.1$ *La media aritmética es 22.1 y yo digo que sí, porque no se aleja mucho de la mediana*".

Presentamos otro caso muy común entre las respuestas incorrectas, que se refieren a los algoritmos y procedimientos de la mediana, donde no se ordenan los datos antes de tomar el valor central, y por lo tanto no se llega al resultado correcto. Es decir, el estudiante comprende que la mediana ocupa el lugar central de la distribución, pero no que este lugar central se refiere a los datos ordenados según el orden numérico. Este error también lo encontraron Barr (1980), y Carvalho (1998, 2001). Sin embargo, algunos de estos estudiantes sí reconocen las propiedades de que la media es un estadístico menos resistente que la mediana en presencia de valores atípicos (E4) y de que en el cálculo de la media intervienen todos los valores (N3), mientras que en el de la mediana no:

*"15,25,17,19,**<u>16,26,</u>**18,19,24*

a) Peso del niño mediano = 16

b) Mediana incluyendo niño de 43kg; la mediana es 41: 16+26/2 = 21

c) $\bar{x} = 15+16+17+18+19+19+24+25+26+43 = 222/10 = 22kg$ *No es muy representativa, ya que al agregar el peso de 43kg queda muy distante de los otros pesos de los niños, por lo tanto, no hace promediar que los niños pesan poco más de lo marcado en los datos".*

Paralelamente encontramos un número no despreciable de errores de cálculo, con mayor frecuencia en estudiantes de Secundaria, por lo que podemos deducir que la instrucción reduce, al menos, el porcentaje de errores de cálculo cometidos por los alumnos. Otros casos típicos consisten en confundir los conceptos de media y mediana, ya que resuelven el problema con el cálculo de media, aunque lo hacen correctamente. Consecuentemente, no reconocen las propiedades de la mediana:

"a) $\frac{\sum n}{n} = \frac{179}{9} = 19.88\,kg.$ *es el peso del niño mediano*

b) $\frac{\sum n}{n} = \frac{222}{10} = 22.2\ kg.$ *es la mediana*

c) Sí, porque esta fórmula nos da la mejor representación para calcular la mediana en kg de una población de 10 niños".

Ítem 6

Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1: I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S

Grupo 2: S S I I A N A N I I S N A S I N N

a) ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?

b) ¿Cuál sería el promedio más apropiado para representar estos datos?

Tabla 5.5.2.6. *Porcentajes de respuestas al ítem 6*

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 6.1	0.36	0.64	0.39	0.61
Ítem 6.2	0.34	0.66	0.40	0.60

Observamos en la Tabla 5.5.2.6, un alto porcentaje de estudiantes de ambos niveles que respondieron erróneamente el ítem, aproximadamente 65%. Éste ítem consiste en hallar la mediana en la comparación de dos distribuciones impares de datos con variables ordinales. Encontramos algunas respuestas correctas basadas en el cálculo de la mediana, que se detallarán más en el Capítulo 6. Por ejemplo, la siguiente respuesta es correcta en la primera parte, aunque en la segunda confunde medida de posición central con el valor de la variable:

"Grupo 1 = IIIII AAAAAAA NNN SSSSSSSS

Grupo 2 = IIIII AAA NNNNN SSSS

a) El grupo 2　　　　b) Sobresaliente"

Por ser un problema difícil y tratarse de la mediana, hemos considerado también como parcialmente correctos (y se computan en el porcentaje de correctas) aquellos casos en que los estudiantes lo resuelven utilizando la media aritmética, asignando valores numéricos a las variables para comparar después ambas distribuciones de datos, y mediante este método obtener un resultado numérico. Aunque la correspondencia empleada no conserva la escala de medida, el estudiante muestra un conocimiento de la media, por ejemplo:

"a) El grupo 1 es mejor

b) Damos valores a las variables: I=1; A=2; N=3; S=4

Y sacando el promedio: Gpo 1=2.6; Gpo 2=2.4.　　El grupo 1 es mejor".

Entre otras respuestas típicas, que hemos considerado correctas, encontramos aquellas en que los estudiantes hacen uso de la moda y también llegan a un resultado adecuado:

	I	*A*	*N*	*S*	
Gpo. 1	*5*	*7*	*3*	*8*	*23*
Gpo. 2	*5*	*3*	*5*	*4*	*17*
					40

"a) Gpo. 1;　　　b) S"

En cuanto a las respuestas incorrectas más frecuentes, los estudiantes tienden a obtener sus resultados calculando las frecuencias relativas de cada uno de los valores en cada grupo y luego comparan los valores uno a uno, o bien, comparan valores aislados. Esto coincide con los resultados encontrados por Estepa y Batanero (1994) en alumnos universitarios, quienes al trabajar con análisis exploratorio de datos, en algunos casos no usan los promedios, sino que comparan los conjuntos de datos en base a valores aislados. En el ejemplo siguiente, el alumno calcula la media de los valores de las diferentes frecuencias relativas y compara los resultados de ambos grupos:

"a)	*Grupo 1*	*Grupo 2*
	I = 5/23 = 0.2173	*I = 5/17 = 0.2941*
	A = 7/23=0.3043	*A= 3/17 = 0.1764*
	N = 3/23 = 0.1304	*N = 5/17 = 0.2941*
	S = 8/23 = 0.3478	*S = 4/17 = 0.2352*
	0.245	*0.245*

b) Los dos grupos tienen el mismo promedio; en lo único que se diferencian es en el número de alumnos por grupo".

Ítem 7

Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona.

a) ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

Lucía _______________ *Juan* _________________ *Pablo* ______________

b) ¿Es la única posibilidad? Explica cómo has obtenido tus resultados.

c) Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

Tabla 5.5.2.7. Porcentajes de respuestas al ítem 7

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 7.1	0.86	0.14	0.60	0.40
Ítem 7.2	0.85	0.15	0.57	0.43
Ítem 7.3	0.79	0.21	0.44	0.66

Este ítem evalúa la capacidad para construir una distribución de valores conocida la media y argumentar si hay una única solución o puede tener más. En la última parte del ítem se evalúa el reconocimiento de la influencia de un valor cero para obtener una nueva media. En la Tabla 5.5.2.7, aparecen los resultados del ítem 7, que muestra que también ha sido sencillo para ambos grupos de estudiantes, con alrededor de 86% y 60% de respuestas correctas. Algunos ejemplos de respuestas correctas son las siguientes, donde claramente se observa que los estudiantes conocen el algoritmo de la media y la propiedad de que la media cambia al cambiar alguno de los datos de la distribución (N4).

Los resultados son mucho mejores que los de la investigación de Cai (1995), aunque nuestros alumnos son de mayor edad. Mejoran mucho en los alumnos de Bachillerato, lo que contradice la opinión de Gattuso y Mary (1996), quienes defienden que la comprensión conceptual no va paralela al número de años de instrucción en la materia en cuestión. Las autoras piensan que, aunque que la media es algo cotidiano y la mayoría de los adultos y los estudiantes saben calcularla en situaciones sencillas, no hay una buena comprensión del concepto y no son capaces de usarla en situaciones en las que es conveniente hacerlo. En este ítem, no obstante, hemos obtenido un gran número de respuestas similares a las siguientes, sobre todo en los alumnos de Bachillerato:

1. *"a) Lucía = 12 Juan = 11 Pablo = 10*

   b) No. Simplemente la media es 11 y son 3 personas, en total son 33 caramelos y ahora se reparten los caramelos entre ellos.

   c) $\bar{x} = 8.25 = 8$ *caramelos. Al agregarse uno más, queda: 33/4 = 8.25".*

2. *"a) Lucía = 20 Juan = 8 Pablo = 5*

   b) No. Entre los tres tienen que sumar 33 dulces, no importa la combinación, puede ser: 11+11+11 u otra manera.

   c) No se sabe el número total de niños en la fiesta, pero si el asunto es entre ellos, la media es: (33/n) = 33/4 = 8.25".

En cuanto a los errores que se producen en este ítem, la mayoría son de tipo procedimental, donde los alumnos dan una distribución que no proporciona la medida dada. Sin embargo, sí realizan correctamente el cálculo de la media y se reconoce la propiedad de que ésta cambia cuando se cambia algún valor de la distribución (N4), como en los siguientes ejemplos:

1. *"a) Lucía 3.6 Juan 3.6 Pablo 3.6*

   b) No, pero lo más razonable es dividir los once caramelos entre los tres niños

   c) 11/4 = 2.7 Al no llevar caramelos el cuarto niño, divido los caramelos entre los cuatro".

2. *"a) Juan 12 Lucía 11 Pablo 10* $\bar{x} = \frac{33}{3} = 11$

   b) Juan 15 Lucía 14 Pablo 15 $\bar{x} = \frac{44}{4} = 11$

   Tuve que aumentar cantidades porque si no, el resultado hubiera cambiado".

Ítem 8

Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestra a continuación:
6.2, 6.3, 6.0, 15.2, 6.2, 6.1, 6.5, 6.2, 6.1, 6.2.
Los estudiantes quieren determinar con la
mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Qué harías para calcularlo?

Este ítem, tomado de Garfield y Konold (1992), ha sido el más sencillo de todos, donde se obtuvo un 85% de respuestas correctas del total de los estudiantes (ver Tabla 5.5.2.8). Consiste en estimar la media de un conjunto de datos en presencia de errores y argumentar el procedimiento seguido para resolverlo.

Tabla 5.5.2.8. Porcentajes de respuestas al ítem 8

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 8	0.85	0.15	0.86	0.14

En el siguiente ejemplo, el alumno reconoce el campo de problemas correspondiente a estimar un valor desconocido en presencia de errores de medición y la propiedad de que el valor atípico influye en el valor obtenido al calcular la media (N4): "*Retirar el peso de 15.2 y sacar el promedio*".

Otro tipo de respuesta que hemos considerado correcta es argumentar el procedimiento adecuado de la media y además, dar más opciones para resolverlo, por ejemplo, mediante el uso de la moda: *"Sumaría todos los datos menos el 15.2 y a la suma la dividiría entre el número de datos para obtener el promedio para aproximarnos más al número real. También se podría sacando la moda, ya que es el número más repetido y, por lo tanto, el que tiene más posibilidades de ser real"*.

Por lo que respecta a las respuestas incorrectas, la mayoría consisten en errores de algoritmos y procedimientos en el cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados, es decir, obtener la media sin tener en cuenta el valor atípico, como vemos en el siguiente ejemplo:

"Sacaría el promedio de todos los datos registrados y así tener uno solo de todos los apreciados:

6.0=1 6.1=2 6.2=4 6.3=1 6.5=1 15.2=1

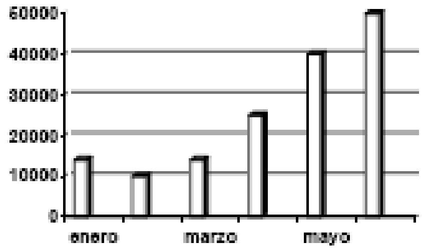
6 12.2 24.8 6.3 6.5 15.2 =69 69/10=6.9”

También nos encontramos respuestas donde en vez de resolverlo con la media, lo hacen mediante el uso correcto de la moda: *“Sacaría la moda de los datos. El peso real sería 6.2:*

6.0 6.1,6.1 6.2,6.2,6.2,6.2 6.3 6.5 15.2”
1 2 4 1 1 1

Ítem 9

Observa el siguiente diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa Bocatta durante los últimos 6 meses del año pasado:



a) Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.
b) Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

Tabla 5.5.2.9. Porcentajes de respuestas al ítem 9

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 9.1	0.66	0.34	0.56	0.44
Ítem 9.2	0.34	0.66	0.27	0.73

Este ítem trata del cálculo de media y mediana a partir de un gráfico. Es de dificultad media, pues como se observa en la Tabla 5.5.2.9, el 66% de los estudiantes de Bachillerato y 56% de Secundaria respondieron bien a la primera parte. En la segunda parte, los resultados no son muy favorables, 34% y 27% respectivamente. La dificultad consiste en interpretar el gráfico para estimar la media del conjunto de datos que se presentan, y de obtener la mediana a partir del mismo gráfico.

Los resultados resumidos en la tabla anterior confirman la dificultad de los alumnos para el manejo de gráficos. Cuando se les propone a los alumnos una tarea basada en este formato, éstos tienden a convertir los datos en un formato con el que se sienten más seguros, como es el numérico, y entonces abordan su resolución. El problema se presenta por un insuficiente nivel de lectura de gráficos en estos estudiantes, que no llega al nivel de extracción de tendencias en la categorización de Curcio (1989). Estudiaremos con más detalle estos errores en el Capítulo 6.

De las respuestas correctas halladas, extraemos algunos ejemplos donde observamos que los estudiantes interpretan bien el gráfico, ya que traducen correctamente la representación gráfica a valores numéricos y posteriormente realizan el cálculo correcto de la media y también de la mediana. Esto indica que este tipo de estudiantes tienen un nivel adecuado de lectura de gráficos (Curcio, 1989), y además distinguen entre ambas medidas de centralización:

"a) 15000+10000+15000+25000+40000+50000/6=25833.3 bocadillos

b) 10000, 15000, <u>15000, 25000,</u> 40000, 50000; 15000+25000=40000

$\bar{x} = \frac{40000}{2} = 20000$ $\qquad\qquad$ $\bar{x} = 20000$ *bocadillos".*

Respecto a las respuestas incorrectas, la tendencia es cometer errores principalmente en la segunda parte del ítem, como en los siguientes ejemplos, que se refieren tanto a la lectura incorrecta de los gráficos, como a errores de cálculo de la mediana. Se confirma también lo que anteriormente hemos señalado, de confundir los conceptos de media con mediana, y en otros casos, con la moda, error encontrado por Watson y Moritz (2000). Se analizan con más detalle los errores en el Capítulo 6:

1. *"a) 15000+10000+15000+25000+40000+60000 = 165000 bocadillos/6 meses 165000/6 = 27500 bocadillos al mes*

   b) 27500/30 = 916 bocadillos por mes".
2. *"a) 165000 en seis meses 165000/6 = 27500*

   b) 27500/2 = 13750 es el número medio en un mes".

Ítem 10

El siguiente conjunto de datos refleja las edades en que contrajeron matrimonio una muestra de 100 mujeres. ¿Cuál es la media, mediana y moda de la edad de estas mujeres? Realiza los cálculos necesarios.

edad	*frecuencia*
15-19	*4*
20-24	*38*
25-29	*28*
30-34	*20*
35-39	*8*
40-44	*1*
45-49	*1*

Tabla 5.5.2.10. Porcentajes de respuestas al ítem 10

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 10.1	0.31	0.69	0.15	0.85
Ítem 10.2	0.27	0.73	0.35	0.65
Ítem 10.3	0.61	0.39	0.57	0.43

El ítem 10 pide a los estudiantes realizar cálculos de media, mediana y moda en un conjunto de datos agrupados en intervalos de clase y presentados en una tabla. Los resultados, como vemos en la Tabla 5.5.2.10, no son muy favorables para los apartados 10.1 y 10.2, donde sólo responden bien alrededor del 30 % de los estudiantes de ambos grupos y 15% en el apartado 10.1 de los chicos de Secundaria. Cobo (2003) no usó este ítem en su cuestionario, por lo que no podemos comparar nuestros resultados con los de esta autora.

Como es evidente en la tabla, el ítem es de dificultad alta y pensamos que se debe a la forma en que se presentan los datos, ya que al trabajar con datos agrupados en el cálculo de la media se debe de obtener la media ponderada, tarea que ha resultado difícil. Por otro lado, los estudiantes tampoco logran obtener la mediana o al menos, identificar el intervalo de clase donde se encuentra, a pesar de que el cálculo de media y mediana con datos agrupados es una actividad habitual en la enseñanza del tema.

En el apartado 10.3 el resultado ha mejorado con alrededor de 60% de respuestas correctas del total de ellos, ya que se trata de obtener la moda. Estos resultados nos llevan a reflexionar sobre si el énfasis excesivo en algoritmos de cálculo merece la pena o si sería mejor dedicar el tiempo didáctico a actividades interpretativas.

Hemos observado que los estudiantes que responden correctamente el ítem generalmente lo hacen bien en sus tres apartados, mostrando su capacidad para identificar primero que el ítem solicita resolverlo mediante la media ponderada, y consecuentemente, saben obtener la mediana y la moda, aunque con distintos procedimientos, como en el siguiente ejemplo:

$$“\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{17(4) + 22(38) + 27(28) + 32(20) + 37(8) + 47 + 41}{100} = 26.85”$$

Entre los errores más persistentes hemos encontrado aquellos donde en los tres apartados del ítem los alumnos toman en cuenta sólo los valores de las frecuencias absolutas de cada intervalo. Otros estudiantes sólo identifican los intervalos de clase donde se encuentran las medidas de posición central pedidas, sin saber luego como continuar el problema. Algunos más obtienen la media simple, y para obtener la mediana sólo ordenan las frecuencias absolutas de la tabla sin realizar ningún cálculo, y lo mismo ocurre con la moda, como vemos a continuación:

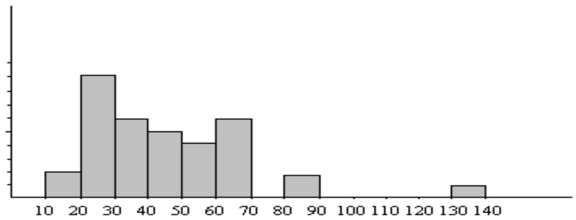
1. *"a)* $\bar{x} = \frac{100}{7} = 14.2$ *b) Mediana = 20* *c) Moda = 1".*
2. *"a)* $\bar{x} = \frac{\sum n}{n} = \frac{1120}{100} = 11.2$ *b) Md= 25-29* *c) Moda = 20-24"*
3. *"a)* $\bar{x} = \frac{17+22+27+32+37+42+47}{7} = \frac{224}{7} = 32$

   b) Mediana = 17, 22, 27, 32, 37,42, 47 = 32 es la mediana

   c) Moda = 22, ya que su frecuencia es 28 (20-24 años)".

Ítem 11

Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida.



Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes: media = 45.3 euros

Si____ No ____ ¿Por qué?

Tabla 5.5.2.11. Porcentajes de respuestas al ítem 11

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 11	0.40	0.60	0.22	0.78

Este ítem evalúa la comprensión de las diferentes definiciones y el cálculo gráfico de las medidas de posición central. Al presentar los datos en forma gráfica ya supone una primera tarea de interpretación del mismo a nivel de lectura dentro de los datos, en la terminología Curcio (1989). Por otro lado, al hablar de mediana, es necesario calcularla a partir del gráfico, y además la afirmación que se hace, relaciona la mediana con la mayoría, con lo que se quiere observar si los estudiantes diferencian entre mediana y moda.

Una proporción baja de estudiantes ha resuelto correctamente el problema, sólo el 40% de estudiantes de Bachillerato y 22% de Secundaria, lo que indica que tiene un alto grado de dificultad. Primeramente se deben interpretar los datos que aparecen en forma de gráfico y posteriormente hallar la mediana mediante algoritmos de cálculo. Además deben distinguir mediana de "la mayoría", ya que de lo contrario se daría lugar a confundir entre mediana y moda.

Entre las respuestas más repetidas, encontramos algunas definiciones de la mediana que incluyen la idea de centro, como las siguientes, donde se confunde centro de la distribución de datos ordenados con centro geométrico. Esta interpretación incorrecta se analiza con mayor detalle en el Capítulo 6:

1. *"Sí, porque 40 y 50 son los valores del centro y su promedio da 45".*
2. *"Sí, porque se aproxima a los 45, ya que tomando como base el número más alto que es 90, la media sería 45€".*

En otras respuestas no se tiene en cuenta la propiedad de las medidas de centralización, de que sus valores sólo coinciden cuando las distribuciones de datos son simétricas, es decir, se supone que la media, moda y mediana tomarán un valor aproximado, a pesar de la fuerte asimetría:

1. *"Sí es cierto esto porque la gráfica muestra que la mediana es de 47€ y el gasto semanal del grupo es de una media de 45.3€, entonces no varía mucho".*
2. *"Sí, porque la media casi siempre coincide o está cerca del valor de la mediana".*

Además de lo anterior, observamos que la mayoría de respuestas incorrectas se refieren a estudiantes que dejaron sin resolver el problema, sobre todo entre los estudiantes de Secundaria. El resto de los estudiantes comete errores en el cálculo de la mediana, o también dan argumentos incorrectos.

Ítem 12

Juana piensa que en el gráfico anterior, el alto valor de 133 euros debería quitarse del conjunto de datos antes de calcular media, mediana y moda.

Si ________ No _________ ¿Por qué?

Tabla 5.5.2.12. Porcentajes de respuestas al ítem 12

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 12	0.33	0.66	0.12	0.88

Este ítem es una continuación del anterior, aunque de hecho podría responderse independientemente, pues no se necesitan los valores de las medidas de posición central para responderlo, sino sólo apreciar el efecto de los valores atípicos sobre las mismas. Obtuvimos también en este ítem resultados desfavorables, por una parte, el 33% de estudiantes de Bachillerato, y por la otra, sólo el 12% de Secundaria lo respondieron correctamente. Se evalúa si el estudiante reconoce la propiedad de la mediana y la moda de ser más resistentes que la media cuando aparecen valores atípicos en una distribución de datos; y en consecuencia, la intervención o no de todos los datos en el cálculo de diversos parámetros y el efecto de algún valor atípico. Sólo deben argumentar su respuesta. De las respuestas se deduce que esta propiedad no es intuitiva para los estudiantes y al no ser explícita en la instrucción recibida, no llegan a deducirla por sí mismos.

Entre las respuestas correctas encontramos las siguientes, que hacen referencia a la propiedad de la mediana y la moda, de ser más resistentes que la media cuando hay valores atípicos:

1. *"Sí, porque es un valor que está muy aislado y la frecuencia con que gastan euros (133) se podría decir que está fuera de lo normal"*.
2. *"Sí, para homogenizar la muestra"*.
3. *"Sí, porque es un número muy elevado en comparación con los demás y si sólo uno es de 133€ y los 7 más se aproximan entre sí, pues debemos trabajar sólo con los 7"*.

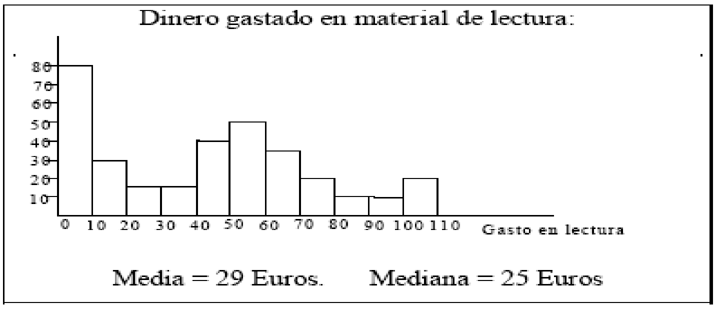
La mayoría de los estudiantes no da respuesta y otros dan una respuesta incorrecta, como considerar también a la media para obtener el resultado, es decir, la propiedad de que en el cálculo de la media se tienen en cuenta los valores de todos los datos, mientras que en la moda y la mediana no, por ejemplo:

1. *"No, porque es un valor dado y si se quita afectaría a la mediana y la media aritmética porque son medidas de tendencia central y se necesitan todos los datos para obtenerlas correctamente"*.

2. *"No, porque todos los datos cuentan para poder obtener el resultado correcto, pues el alumno que gasta esa cantidad también cuenta".*

Ítem 13

Un grupo de estudiantes hizo este otro histograma del dinero gastado cada semana en material de lectura.



Francisco dijo que es difícil describir el dinero típico gastado en material de lectura en el gráfico anterior, porque la mayor parte de los estudiantes no gastaron nada o muy poco, y un segundo grupo gastó entre 50 y 60 euros cada semana. Él piensa que en este caso la media es un indicador pobre del promedio y elige usar la mediana en su lugar para representar el gasto semanal "promedio" en material de lectura. Si ____ No ____ ¿Por qué?

Tabla 5.5.2.13. Porcentajes de respuestas al ítem 13

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 13	0.43	0.57	0.23	0.77

En este ítem también se pide interpretar el gráfico del ítem, pero a diferencia de los anteriores, en este caso los datos corresponden a una distribución bimodal, por lo que la mediana se presenta como mejor representante de los datos que la media. Además de lo anterior, se debe calcular la moda, ya que los valores de la media y mediana se incluyen calculados en el ítem. Finalmente se debe argumentar la respuesta.

La presencia de dos poblaciones mezcladas, cada una de las cuales tiene su moda, no parece detectarse bien por los alumnos, quienes están acostumbrados a que la media y la mediana, cuando existen son únicas. Esto puede dificultar el asumir que la moda puede no ser única. Las investigaciones sobre comprensión de la moda a partir de un gráfico son casi inexistentes, posiblemente debido a que se supone un concepto sencillo.

Como es evidente, la resolución de problemas a partir de la lectura de un gráfico es una tarea difícil para nuestros estudiantes. Al igual que los ítems de esta última parte del cuestionario, no obtuvimos altos índices en las respuestas correctas de éste, ya que 43% de alumnos de Bachillerato y 23% de Secundaria lo hicieron bien, y en el alto porcentaje de respuestas incorrectas, la mayor parte corresponde a estudiantes que no lo resolvieron.

Los siguientes son ejemplos correctos donde los estudiantes identifican las definiciones y propiedades de la media y la mediana. En el primero, el alumno explícitamente hace referencia a que los valores atípicos pueden afectar el cálculo de la media. El segundo hace un uso explícito de la definición correcta de la mediana:

1. *"Sí, tiene razón al decir que la media es pobre, ya que existen datos muy disparados y eso afecta el resultado".*
2. *"Sí, porque la mediana divide exactamente al 50% de las observaciones".*

Entre las respuestas incorrectas encontramos la mayoría en blanco. También encontramos otras que indican comprensión correcta de las definiciones pero una incapacidad para discriminar los casos en que cada una de las medidas de tendencia central es preferible para representar el conjunto de datos. Ello coincide con la dificultad de la idea de representante señalada por Strauss y Bichler (1988), y Leon y Zawojeswki (1991):

1. *"No, porque la media representa el valor promedio y la mediana sólo divide en dos a la muestra".*
2. *"No, porque la mediana es sólo el valor central y sin embargo, la media representa el promedio de los datos".*
3. *"No, porque la media es la encargada de dar el promedio y la mediana de buscar al número que está en medio".*
4. *"No, porque la mediana te indica el valor que queda en medio, o sea, de tendencia central, pero no representa el gasto semanal promedio".*

Ítem 14

Manuel dice que esta distribución tiene dos modas y sugiere que puedes obtener más información de estos datos si los divides en dos subgrupos y calculas el promedio en cada grupo por separado.

Si __________ *No* ____________ *¿Por qué?*

Tabla 5.5.2.14. Porcentajes de respuestas al ítem 14

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 14	0.39	0.61	0.25	0.75

En este ítem obtuvimos resultados semejantes al anterior, con 39% de respuestas correctas por parte de los estudiantes de Bachillerato y 25% de los de Secundaria. Volvemos a confirmar la dificultad en este tipo de problemas, donde hay que interpretar el gráfico y posteriormente dar su respuesta. En este caso, se trata de argumentar el efecto que tiene la existencia de dos modas respecto a la media y la mediana que se presenta en la misma distribución de datos. Garfield y Konold (1992), en este mismo ítem indican que un gran porcentaje de alumnos tienen dificultad para identificar dos poblaciones mezcladas en un mismo gráfico y suponen que sólo puede haber una moda.

Hallamos respuestas donde se identifica la propiedad de que la moda puede ser no única en una misma distribución, como las siguientes:

1. *"Sí, porque hay otro grupo que gasta entre 50 y 60 euros y de allí puede calcularse otro promedio".*
2. *"Sí, para conocer el promedio de cada grupo acercándose más a la realidad de lo que cada grupo gasta".*

Encontramos algunos errores en las respuestas, coincidiendo con los resultados de Garfield y Konold (1992), como la siguiente: *"Sí, también pueden separarse en dos grupos y sacárseles un promedio para representar la "mitad" de los datos".*

Otro tipo de respuestas nos indica por un lado que el alumno conoce la definición de moda como valor más frecuente, pero no sus propiedades, por ejemplo: "*No, porque según el histograma la única moda es del intervalo (0-10 €), porque tiene el mayor número de frecuencia que es 80".*

Ítem 15

Lola sugiere hacer el estudio en pesos mexicanos (1€ = $14.5). ¿Cuál sería en ese caso el valor de la media?

Tabla 5.5.2.15. Porcentajes de respuestas al ítem 15

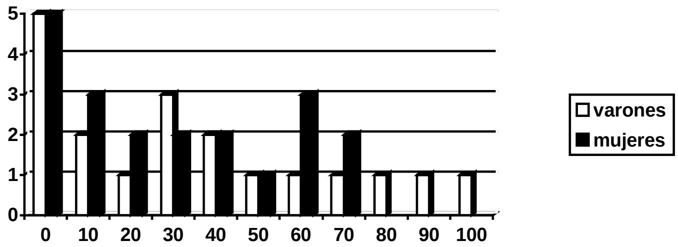
	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 15	0.68	0.32	0.32	0.68

El ítem 15 tiene como característica reconocer la propiedad de que la media conserva cambios de escala, y está basado en los datos del ítem 13, por lo que también se pretende observar si los estudiantes lo resuelven con los mismos datos o lo intentan con las nuevas unidades. Aunque es un ítem sencillo, sólo obtuvimos un alto porcentaje de respuestas correctas por parte del grupo de los estudiantes de Bachillerato con 68%, mientras que sólo 32% de los estudiantes de Secundaria lo resolvieron, donde la mayoría de este último grupo no contestó.

A diferencia de los otros ítems, en éste no encontramos respuestas variadas, es decir, la mayoría de los estudiantes coinciden al resolverlo mediante el procedimiento de cálculo adecuado, transformando los datos como en el ejemplo que a continuación presentamos. El resto de los estudiantes no contestó y pocos tuvieron errores de cálculo. Un ejemplo de respuesta encontrada sería este: "*Media = 29€ (14.5) = $420.50*".

Ítem 16

Antonio quiere investigar las diferencias en los hábitos de gasto en varones y mujeres. Compara las cantidades gastadas en material de lectura en varones y mujeres construyendo los gráficos siguientes:



Gasto semanal en lectura

Antonio cree que sus gráficos muestran que los varones y mujeres tienden a gastar diferentes cantidades de dinero en material de lectura. Si ______________ No ______________ ¿Por qué?

Tabla 5.5.2.16. Porcentajes de respuestas al ítem 16

	Bachillerato (n=356)		Secundaria (n=162)	
	Correctas	Incorrectas	Correctas	Incorrectas
Ítem 16	0.43	0.57	0.19	0.81

Este último ítem también pide interpretar la información que se presenta en el gráfico, que es más complejo que los anteriores, ya que contiene dos conjuntos de datos. Sería un gráfico de nivel de complejidad 4 (el de mayor nivel de complejidad) en la categorización de Arteaga, Batanero y Ruiz (2008), mientras que los gráficos incluidos en los ítems anteriores serían de complejidad 3. Es de esperar una mayor dificultad en este ítem que requiere un mayor nivel de lectura, en la categorización de Curcio (1989). Se trata de evaluar el uso que hacen los estudiantes de las medidas de centralización en la comparación de dos distribuciones de datos a partir de este gráfico y argumentar correctamente sus respuestas.

En este problema los resultados coinciden con los que obtuvimos en los últimos ítems, por lo que no han sido más favorables, ya que el 43% de estudiantes de Bachillerato y el 19% de Secundaria lo respondieron correctamente. El resto de los estudiantes, sobre todo en el grupo de Secundaria, lo deja sin contestar. La mayor complejidad del gráfico explica estos resultados.

No hemos encontrado respuestas en las que los estudiantes hayan realizado algún tipo de cálculo, es decir, los estudiantes no tratan de pasar a la tabla de datos a partir de la gráfica sino que hacen la lectura directa del gráfico. Las respuestas correctas sólo hacen referencia de manera acertada a la comparación de las dos muestras que contiene el ítem o indican algún procedimiento para obtener el resultado, pero sin llegar a calcularlo, posiblemente por la dificultad en la traducción del gráfico. Un ejemplo de este tipo de respuesta es la primera que reproducimos. La segunda hace la comparación correcta en base a valores aislados, pero no utiliza las medidas de posición central:

1. *"Sí, si se saca el promedio por separado se vería la diferencia entre varones y mujeres".*
2. *"Claramente se puede apreciar que, aunque en los valores mínimos y máximos de dinero, las diferencias son nulas, las mujeres gastan más dinero en material de lectura. Hay el doble de mujeres que gastan 70 € y el triple de mujeres que gastan 60 €".*
3. *"Si, las mujeres gastan más"*

Las respuestas incorrectas o bien son respuestas en blanco, o bien contienen errores en la interpretación de los gráficos, como en el caso siguiente: *"Sí, porque no coinciden las barras de los varones, ya que siempre son menores".*

Resumen de la comparación de los dos grupos

Para resumir los resultados de la comparación de las respuestas al cuestionario, en la Tabla 5.5.2.17, se presentan los índices de dificultad en los dos grupos de estudiantes, así como en el total de la muestra.

También incluimos las desviaciones típicas de los ítems y los resultados de aplicar las pruebas *F* para realizar un contraste de diferencia de medias en los dos grupos. Todos estos resultados se han obtenido mediante el programa de análisis discriminante con SPSS y la finalidad es, además de analizar las diferencias por ítem, obtener evidencias de la validez discriminante del cuestionario. Dicha validez se define como la capacidad de discriminación del cuestionario con respecto a una variable independiente que esté relacionada con la variable que se trata de evaluar (en este caso, comprensión de las medidas de posición central). En este caso la variable criterio (Martínez Arias, 1995) es el curso al que pertenecen los alumnos, pues una diferencia en curso implica una mayor edad e instrucción de los estudiantes.

Tabla 5.5.2.17. Diferencias de índices de dificultad

	Bachillerato (n= 356)		Secundaria(n= 162)		Total (n=518)			
Ítem	Media	Desv. típica	Media	Desv. típica	Media	Desv. típica	F	Sig.
i1_1	0.80	0.400	0.52	0.501	0.71	0.453	46.976	0.000
i1_2	0.69	0.463	0.55	0.499	0.65	0.478	9.924	0.002
i2_1	0.33	0.471	0.23	0.421	0.30	0.458	5.680	0.018
i2_2	0.42	0.494	0.28	0.449	0.37	0.484	9.190	0.003
i2_3	0.27	0.443	0.18	0.385	0.24	0.427	4.743	0.030
i3	0.69	0.464	0.58	0.495	0.65	0.476	5.779	0.017
i4	0.80	0.398	0.67	0.471	0.76	0.426	10.652	0.001
i5_1	0.69	0.464	0.67	0.471	0.68	0.466	0.121	0.728
i5_2	0.62	0.487	0.57	0.497	0.60	0.490	1.164	0.281
i5_3	0.36	0.481	0.19	0.395	0.31	0.462	15.182	0.000
i6_1	0.36	0.480	0.39	0.489	0.37	0.482	0.494	0.482
i6_2	0.34	0.474	0.40	0.490	0.36	0.480	1.475	0.225
i7_1	0.86	0.348	0.60	0.492	0.78	0.416	47.707	0.000
i7_2	0.85	0.362	0.57	0.497	0.76	0.428	51.327	0.000
i7_3	0.79	0.404	0.44	0.498	0.68	0.466	74.642	0.000
i8	0.85	0.362	0.86	0.344	0.85	0.356	0.306	0.580
i9_1	0.66	0.475	0.56	0.498	0.63	0.484	4.370	0.037
i9_2	0.34	0.475	0.27	0.443	0.32	0.466	3.068	0.080
i10_1	0.31	0.464	0.15	0.356	0.26	0.439	15.889	0.000
I10_2	0.27	0.446	0.35	0.479	0.30	0.458	3.367	0.067
I10_3	0.61	0.489	0.57	0.497	0.59	0.491	0.695	0.405
i11	0.40	0.490	0.22	0.413	0.34	0.475	17.024	0.000
i12	0.33	0.472	0.12	0.323	0.27	0.443	28.178	0.000
i13	0.43	0.496	0.23	0.425	0.37	0.483	19.341	0.000
i14	0.39	0.488	0.25	0.433	0.34	0.475	9.925	0.002
i15	0.68	0.468	0.32	0.468	0.57	0.496	64.334	0.000
i16	0.43	0.496	0.19	0.390	0.35	0.478	30.772	0.000

El programa de análisis discriminante proporciona las pruebas *F* mostradas en la Tabla 5.5.2.17 después de haber dado una significación global en la prueba de diferencias de medias multivariante (considerado el conjunto de respuestas a los ítems como un vector multidimensional). Vemos en esta tabla que se obtiene una diferencia estadísticamente significativa en la mayoría de los ítems, casi siempre a favor de los alumnos de Bachillerato, que muestran mayor madurez y aprendizaje sobre las medidas de tendencia central. El conjunto de ítems no sombreados constituye un subcuestionario que permite discriminar los dos grupos de estudiantes, tanto globalmente, como ítem a ítem y estos resultados proporcionan indicios de la validez discriminante del cuestionario de Cobo (2003) con respecto a la edad e instrucción. Analizamos a continuación los ítems en que los estudiantes de Bachillerato muestran una mejor ejecución:

- Ítems 1.1 y 1.2. Idea de media como reparto equitativo, donde se debe dar una distribución, conocida la media. Los resultados pasan de 52% a 80% y de 55% a 69% de respuestas correctas.
- Ítems 2.1, 2.2 y 2.3. Cálculo de una media ponderada y la media de una suma de variables estadísticas, donde se pasa de 23% a 33%; de 28% a 42% y de 18% a 27% de respuestas correctas.
- Ítem 3. Idea de media como centro de gravedad y como la cantidad que se obtiene al hacer un reparto equitativo para obtener una distribución uniforme. Obtenemos resultados donde se pasa de 58% a 69%.
- Ítem 4. Algoritmo de la media y la propiedad de que la media ha de estar comprendida en el rango de los datos, donde se pasa de 67% a 80% de respuestas correctas.
- Ítem 5.3. Con este ítem, mediante argumentos verbales se evalúa la comprensión del efecto de los valores atípicos sobre el cálculo de la media. Se pasa de 19% a 36%.
- Ítems 7.1, 7.2 y 7.3. Encontrar una distribución de datos comprendida la media; efecto del cero sobre la media y ver si la solución es única, donde se pasa de 60% a 86%, 57% a 85 % y 44% a 79% de respuestas correctas.
- Ítem 10.1. Calcular la media en un conjunto de datos agrupados en intervalos y presentados en forma de tabla de frecuencias absolutas. Se pasa de 15% a 31%.
- Ítem 11. Cálculo e interpretación de la mediana a partir de datos presentados en forma de gráfico. Hay un cambio de 22% a 40%.

- Ítem 12. Comprensión del efecto de los valores atípicos sobre la media, mediana y moda, de un conjunto de datos agrupados y en forma de gráfico. Se pasa de 12% a 33%.
- Ítem 13. Cálculo de media, mediana y moda a partir de un gráfico. Los porcentajes en los grupos son de 23% a 43%.
- Ítem 14. A partir de un gráfico, determinar el efecto de la existencia de dos modas en una distribución de datos. Se pasa de 25% a 39% de respuestas correctas.
- Ítem 15. Transformar un valor obtenido para la media a una nueva unidad de medida. Hay una varianza de respuestas correctas de 32% a 68%.
- Ítem 16. Comparación de dos distribuciones de datos a partir de un gráfico. Se pasa de 19% a 43% respuestas correctas.

Los resultados muestran, por tanto, una efectividad en la enseñanza, y consecuentemente, una mayor comprensión de medidas de tendencia central en estudiantes de Bachillerato que en los de Secundaria. También se observa, por otro lado, que la dificultad relativa de los ítems se conserva, puesto que coinciden en ambos grupos de estudiantes aquellos ítems en los cuales encontramos mayor dificultad en su resolución, así como en los que han resultado sencillos.

Los ítems difíciles de resolver para los dos grupos fueron los siguientes, donde el primer valor del porcentaje se refiere a los estudiantes de Bachillerato y el segundo a los de Secundaria:

- Ítems 2.1 (0.33 – 0.23); 2.2 (0.42 – 0.28) y 2.3 (0.27 – 0.18). Cálculo de la media ponderada y reconocer que la media de la suma de dos o más variables, es la suma de las medias de éstas. La dificultad, como hemos visto se explica, sobre todo, por los errores de los estudiantes en el cálculo de la media ponderada, dificultad ya encontrada en las investigaciones de Pollatsek, Lima y Well (1981), Gattuso y Mary (1996, 2002), Cobo (2003), y Garret y García (2005), en alumnos de diferentes edades. La media ponderada es un concepto de uso cotidiano, por ejemplo, en los Índices de Precios al Consumo o incluso en el sistema de calificaciones de los estudiantes. Será necesario entonces buscar medios didácticos adecuados que contribuyan a paliar las dificultades de los alumnos sobre el tema.

- Ítem 5.3 (0.36 – 0.19). Evalúa la comprensión del efecto de los valores atípicos sobre el cálculo de la media. En la enseñanza actual de las medidas de posición central en México no se presta una especial atención al estudio de los valores atípicos, que sin embargo tienen una importancia especial en el análisis exploratorio de datos (Batanero, 2000). Garfield y Konold (1992) ya nos alertaron de que algunos estudiantes podrían no desarrollar una comprensión intuitiva de los mismos, por lo que nuestros resultados indican la conveniencia de revisar la enseñanza para tenerlos presentes.
- Ítem 6.1 (0.36 – 0.39) y 6.2 (0.34 – 0.40). Usar la mediana como resumen estadístico en la comparación de dos distribuciones de datos con variables ordinales. Aunque en el análisis de los libros de texto encontramos algunos ejemplos aislados de cálculo de la mediana en datos puramente ordinales, es claro que los estudiantes en nuestra investigación no discriminan claramente datos cuantitativos y ordinales. Incluso en uno de los libros se encontró la sugerencia errónea de asignar valores numéricos a los datos cualitativos en un problema, para luego calcular la media y mediana, que no tienen sentido en el contexto del problema. Pensamos que este error puede ser frecuente dentro de las aulas y ser transmitido a los estudiantes, explicando la dificultad de este problema. Analizaremos con más detalle este ítem en el Capítulo 6 para tratar de encontrar las razones de su dificultad.
- Ítem 9.2 (0.34 – 0.27). Estimar la mediana a partir de un gráfico. La principal dificultad encontrada para su solución se debe a la deficiente competencia de los estudiantes en la traducción de los datos representados gráficamente a datos numéricos. Ello evidencia un insuficiente nivel de lectura, que no llega a veces al nivel de extracción de tendencias en los datos, en la categorización de Curcio (1989). Será otro punto necesario a mejorar en la enseñanza de la estadística en México. Este ítem se retoma en el estudio semiótico presentado en el Capítulo 6.
- Ítems 10.1 (0.31 – 0.15) y 10.2 (0.27 – 0.35). Cálculo de la media y la mediana de un conjunto de datos agrupados en intervalos y presentados en una tabla de frecuencias absolutas. El cálculo de medidas de posición central a partir de tablas de datos agrupados es una actividad habitual en la enseñanza en México, pero nuestros resultados muestran que el aprendizaje no es efectivo. Resulta destacable que los estudiantes de Bachillerato obtienen peores resultados en el cálculo de la mediana, seguramente debido a la diversidad de algoritmos que han aprendido y que deben

aplicar dependiendo de las circunstancias, como señala Schuyten (1991). Analizaremos en profundidad el ítem 10.2 en el siguiente capítulo.

- Ítem 11 (0.40 – 0.22). Cálculo e interpretación de la mediana a partir de datos presentados en forma de gráfico. Igualmente, en ambos grupos persiste la dificultad ya comentada de interpretación de los gráficos.
- Ítem 12 (0.33 – 0.12). Comprensión del efecto de los valores atípicos sobre la media, mediana y moda de un conjunto de datos agrupados y en forma de gráfico. Se unen ahora las dos dificultades comentadas, de interpretación de gráficos y de valores atípicos.
- Ítem 13 (0.43 – 0.23). Cálculo de media, mediana y moda a partir de un gráfico.
- Ítems 14 (0.39 – 0.25) y 16 (0.43 – 0.19). A partir de un gráfico, determinar el efecto de la existencia de dos modas en una distribución de datos.
- Ítem 16 (0.43 – 0.16). Comparación de dos distribuciones de datos a partir de un gráfico. Vemos que en todos los ítems de la última parte la principal dificultad viene dada por la interpretación de gráficos, por lo que no reiteramos los comentarios hechos anteriormente.

Como vemos, persisten en los estudiantes las dificultades en la confusión de las definiciones de media y mediana, sin embargo, les resulta aún más complicado el cálculo e interpretación de la mediana que el de la media. También les cuesta identificar cuando se presenta un problema de media ponderada, y por tanto, resolverlo. Otro error muy frecuente es que tampoco notan el efecto de los valores atípicos sobre el cálculo de la media, que ya se ha detectado en anteriores investigaciones. A los datos del estudio piloto añadimos otros conflictos encontrados en la resolución de medidas de tendencia central, como el cálculo de la media, mediana y moda de un conjunto de datos agrupados en intervalos y presentados en una tabla de frecuencias absolutas, y aún con mayor dificultad, la estimación de valores e interpretación de datos a partir de gráficos, aunque este tipo de errores se presenta en mayor proporción en los estudiantes de Secundaria.

Respecto a los ítems más sencillos para nuestros estudiantes, volvemos a encontrar los siguientes, que indican los objetos matemáticos relacionados con las medidas de posición central cuya comprensión es más intuitiva en ambos grupos de estudiantes:

- Ítem 1 (0.80 – 0.52). Idea de media como un reparto equitativo en una distribución de datos y conocer el valor más probable al tomar un elemento de una población. A pesar de que el primer tipo de problema apenas se trata en la enseñanza, es muy asequible a los estudiantes, igual que ocurrió en los estudiantes españoles de la investigación de Cobo (2003). Debido a la importancia que estos campos de problemas tienen en la vida diaria sugerimos su inclusión en la enseñanza de Secundaria y Bachillerato.
- Ítem 4 (0.80 – 0.67). Dar una distribución de valores conocida la media y el máximo valor. Nuestro trabajo contradice la sugerencia de Tormo (1993), y Russell y Mokros (1995), quienes consideran que este es un procedimiento difícil para los estudiantes. Los mejores resultados en nuestro caso pueden explicarse por la mayor madurez y preparación de nuestros estudiantes respecto a los participantes en las citadas investigaciones.
- Ítem 5.1 (0.69 – 0.67). Cálculo de la mediana de datos numéricos aislados a partir de un número impar de valores; Ítem 5.2 (0.62 – 0.57): Cálculo de la mediana de datos numéricos aislados con un número par de valores aislados. Cuando los datos se dan en forma de listado y se trata de datos cuantitativos los estudiantes son capaces de llegar al cálculo correcto de la mediana. Deducimos de ello que la dificultad mayor de la mediana no está en la comprensión de su definición sino en saber elegir el algoritmo requerido en algunas circunstancias o bien en su interpretación. Por otro lado, destacamos que los resultados en este ítem no mejoran en los alumnos mayores, lo que nos ha llevado a la decisión de hacer un estudio más detallado del mismo en el Capítulo 6.
- Ítem 7.1 (0.86 – 0.60), 7.2 (0.85 - 0.57) y 7.3 (0.79 – 0.44). Estimar una distribución de valores conocidas la media y el valor máximo; hallar la mediana con un número impar de datos o encontrar una distribución de valores conocida sólo la media; y reconocer si la solución es o no única. Se repiten aquí las consideraciones hechas sobre el ítem 4.
- Ítem 8 (0.85 – 0.86). Consiste en reconocer la media como mejor estimador de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida. De nuevo este es un ítem muy sencillo en un campo de problemas escasamente tratado en la enseñanza, que por consiguiente, debiera reconsiderarse en nuevas propuestas curriculares.

- Ítem 9.1 (0.66 – 0.56). Cálculo de la media a partir de un gráfico. De todos los ítems relacionados con los gráficos, este fue el más sencillo. Deducimos que, además de la dificultad de interpretación de gráficos, las respuestas incorrectas se deben principalmente a no ser capaz de calcular la mediana o de interpretarla en una situación gráfica.
- Ítem 10.3 (0.61 – 0.57). Cálculo de la moda de un conjunto de datos agrupados en intervalos y presentados en una tabla de frecuencias absolutas. También en el caso de datos agrupados, las principales dificultades se relacionan con la mediana y no con la moda.
- Ítem 15 (0.68). Consiste en reconocer la propiedad de la media de conservar cambios de origen y escala, y en este caso, cambio de escala. Esta propiedad fue intuitivamente comprendida por nuestros estudiantes.

5.5.3. ANÁLISIS DE LA PUNTUACIÓN TOTAL EN EL CUESTIONARIO

En la Tabla 5.5.3.1, se presentan los estadísticos descriptivos de la puntuación total, donde se analiza el número total de ítems completamente correctos por alumno en el cuestionario en cada uno de los dos grupos. Como se observa, de un total de 27 ítems, el grupo de alumnos de Bachillerato tuvo en promedio 14.56 puntos, algo más de la puntuación media teórica y, aunque no completamente simétrica, la distribución cubre prácticamente toda la posible gama de dificultad. Estos resultados junto con los 3.65 puntos más que el grupo de Secundaria y un valor de 0.325 del error típico en los dos grupos, lo que es otra evidencia de validez discriminante del cuestionario entre grupos.

Tabla 5.5.3.1. Estadísticos descriptivos de la puntuación total

Grupo		Estadístico	Error típico
Bachillerato (n=356)	Media	14.56	0.184
	Mediana	14.00	
	Desv. típica	3.478	
	Mínimo	6	
	Máximo	23	
Secundaria (n= 162)	Media	10.91	0.262
	Mediana	11.00	
	Desv. típica	3.328	
	Mínimo	5	
	Máximo	19	

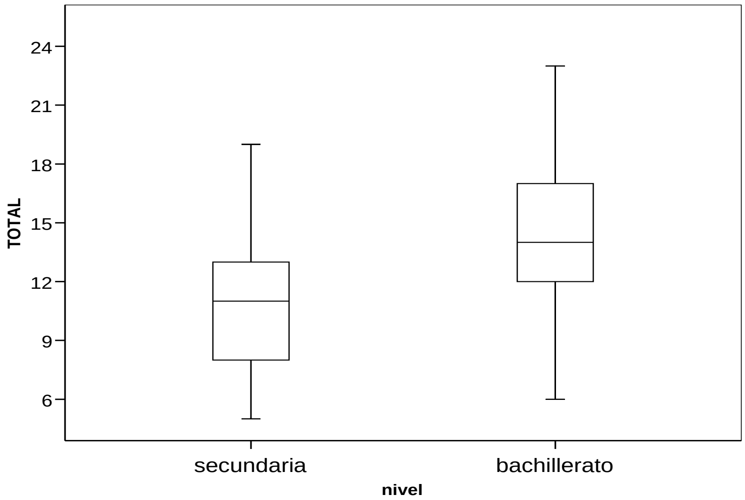
Tabla 5.5.3.2. Prueba de muestras independientes

	Prueba de igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
	F	Sig	t	gl	Sig. bilateral	Diferencia de medias	Error típ. diferencia	Interv. confianza 95% para la diferencia	
Varianzas iguales	0.776	0.379	-11.21	516	0.000	-3.649	0.325	-4.288	-3.010
Varianzas diferentes			-11.40	324.406	0.000	-3.649	0.320	-4.278	-3.019

Estos resultados se confirman en la Tabla 5.5.3.2, con los resultados de la Prueba de Levene de igualdad de varianzas, que nos permite mantener la hipótesis de igualdad de varianzas entre ambos grupos. La prueba *T* de diferencia de medias realizada para el supuesto de varianzas iguales, así como con el intervalo de confianza de la diferencia de medias en los dos grupos, permite rechazar la hipótesis de igualdad de puntuaciones medias e indica, por tanto, un poder discriminante del cuestionario.

Se completa el estudio de la puntuación total con la representación gráfica de cajas (Figura 5.5.3.1), que muestra los valores claramente superiores de mediana y cuartiles en el grupo de Bachillerato. Por lo tanto, la diferencia se produce no sólo a nivel de promedios, sino que una distribución supera a la otra en todos sus percentiles. El grupo de bachillerato obtuvo una puntuación de entre 6 y 23 respuestas correctas, concentrándose la mayoría entre 12 y 17, y el grupo de secundaria entre 5 y 19, concentrándose la mayor parte en 8 y 13 respuestas correctas.

Figura 5.5.3.1. Puntuación total



5.6. ESTRUCTURA DE LAS RESPUESTAS

Para estudiar las interrelaciones entre objetivos de aprendizaje hemos llevado a cabo varios análisis multivariantes de las respuestas a los ítems de la prueba. Los resultados de estos análisis se presentan a continuación.

5.6.1. ANÁLISIS CLUSTER

En primer lugar se llevó a cabo un análisis cluster, utilizando el software CHIC, Classification Hierarchical, Implicative et Cohesive (Couturier y Gras, 2005), que realiza un estudio de aglomeración jerárquica, tomando como medida de similaridad entre ítems el índice de Lerman y suponiendo una distribución binomial para cada variable. Siendo *a* y *b* dos variables aleatorias dicotómicas en una población, *E* y *A* y *B* los subconjuntos donde se verifican *a* y *b*, el índice de similaridad viene dado por la expresión siguiente (Lerman, 1981):

$$\partial(a,b) = \frac{card(A,B) - \dfrac{card(A)card(A,B)}{n}}{\sqrt{\dfrac{card(A)card(A,B)}{n}}}$$

Tabla 5.6.1.1. Índices de similaridad entre ítems

	1.1	1.2	2.1	2.2	2.3	3	4	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	7.1	7.2	7.3
1.1	1.00	0.96	0.62	0.77	0.75	0.62	0.46	0.37	0.44	0.87	0.44	0.42	0.69	0.74	0.71
1.2	0.96	1.00	0.72	0.87	0.78	0.63	0.82	0.42	0.49	0.91	0.69	0.58	0.93	0.95	0.96
2.1	0.62	0.72	1.00	1.00	1.00	0.80	0.84	0.77	0.64	0.98	0.91	0.85	0.90	0.93	0.99
2.2	0.77	0.87	1.00	1.00	1.00	0.65	0.78	0.75	0.74	1.00	0.91	0.85	0.83	0.88	0.96
2.3	0.75	0.78	1.00	1.00	1.00	0.68	0.84	0.79	0.67	0.97	0.92	0.83	0.89	0.91	0.97
3	0.62	0.63	0.80	0.65	0.68	1.00	0.67	0.51	0.40	0.71	0.28	0.27	0.67	0.66	0.68
4	0.46	0.82	0.84	0.78	0.84	0.67	1.00	0.69	0.73	0.73	0.19	0.16	0.79	0.89	0.91
5.1	0.37	0.42	0.77	0.75	0.79	0.51	0.69	1.00	1.00	0.99	0.32	0.31	0.49	0.50	0.50
5.2	0.44	0.49	0.64	0.74	0.67	0.40	0.73	1.00	1.00	0.97	0.43	0.45	0.60	0.71	0.58
5.3	0.87	0.91	0.98	1.00	0.97	0.71	0.73	0.99	0.97	1.00	0.79	0.74	0.83	0.85	0.86
6.1	0.44	0.69	0.91	0.91	0.92	0.28	0.19	0.32	0.43	0.79	1.00	1.00	0.61	0.45	0.58
6.2	0.42	0.58	0.85	0.85	0.83	0.27	0.16	0.31	0.45	0.74	1.00	1.00	0.57	0.39	0.50
7.1	0.69	0.93	0.90	0.83	0.89	0.67	0.79	0.49	0.60	0.83	0.61	0.57	1.00	1.00	1.00
7.2	0.74	0.95	0.93	0.88	0.91	0.66	0.89	0.50	0.71	0.85	0.45	0.39	1.00	1.00	1.00
7.3	0.71	0.96	0.99	0.96	0.97	0.68	0.91	0.50	0.58	0.86	0.58	0.50	1.00	1.00	1.00
8	0.53	0.55	0.60	0.65	0.69	0.44	0.67	0.59	0.52	0.48	0.33	0.31	0.48	0.56	0.51
9.1	0.65	0.75	0.92	0.95	0.93	0.59	0.75	0.77	0.79	0.89	0.68	0.72	0.85	0.93	0.83
9.2	0.80	0.69	0.92	0.90	0.97	0.39	0.53	0.94	0.99	0.93	0.83	0.82	0.93	0.93	0.86
10.1	0.70	0.26	0.78	0.94	0.69	0.96	0.71	0.78	0.72	0.98	0.02	0.04	0.76	0.82	0.76
10.2	0.35	0.41	0.24	0.09	0.18	0.35	0.36	0.26	0.23	0.07	0.33	0.44	0.46	0.40	0.43
10.3	0.43	0.46	0.55	0.68	0.32	0.67	0.61	0.34	0.51	0.69	0.31	0.36	0.56	0.68	0.75
11	0.46	0.21	0.16	0.15	0.09	0.19	0.36	0.86	0.76	0.60	0.27	0.21	0.65	0.56	0.68
12	0.60	0.41	0.86	0.91	0.84	0.51	0.53	0.56	0.79	1.00	0.20	0.16	0.86	0.86	0.98
13	0.53	0.36	0.12	0.48	0.09	0.53	0.18	0.45	0.36	0.80	0.43	0.47	0.67	0.64	0.77
14	0.69	0.44	0.27	0.30	0.08	0.39	0.52	0.59	0.44	0.74	0.24	0.23	0.79	0.85	0.79
15	0.87	0.55	0.71	0.88	0.66	0.80	0.58	0.81	0.83	0.92	0.24	0.22	0.80	0.86	0.91
16	0.86	0.48	0.59	0.76	0.89	0.79	0.52	0.54	0.36	0.53	0.55	0.41	0.68	0.73	0.74

Las variables *a* y *b* tendrán mayor similaridad cuando el número de elementos comunes sea mayor en relación a la frecuencia esperada en caso de independencia y tiene en cuenta el tamaño de la muestra. En nuestro caso *A* representa el conjunto de estudiantes que contesta el ítem *a* y *B* el que responde el ítem *b*, *(A,B)* el conjunto de los que responden correctamente a los dos ítems. La medida de similaridad induce un orden parcial en el conjunto de ítems. El primer paso en el programa es calcular estos índices (Tablas 5.6.1.1 y 5.6.1.2).

Una vez calculados los índices, se calcula una similaridad entre clases: *A* y *B*, el algoritmo de clasificación jerárquica se construye teniendo en cuenta la mayor proximidad entre elementos de una clase y la mayor distancia entre clases separadas (Tabla 5.6.1.3). El programa CHIC proporciona también una prueba de significación de las clases obtenidas, que se calcula teniendo en cuenta no sólo la intensidad de la similaridad, sino el número total de sujetos que da una respuesta correcta al conjunto de ítems incluidos en el grupo.

Tabla 5.6.1.2. Índices de similaridad entre ítems

	8	9.1	9.2	10.1	10.2	10.3	11	12	13	14	15	16
1.1	0.53	0.65	0.80	0.70	0.35	0.43	0.46	0.60	0.53	0.69	0.87	0.86
1.2	0.55	0.75	0.69	0.26	0.41	0.46	0.21	0.41	0.36	0.44	0.55	0.48
2.1	0.60	0.92	0.92	0.78	0.24	0.55	0.16	0.86	0.12	0.27	0.71	0.59
2.2	0.65	0.95	0.90	0.94	0.09	0.68	0.15	0.91	0.48	0.30	0.88	0.76
2.3	0.69	0.93	0.97	0.69	0.18	0.32	0.09	0.84	0.09	0.08	0.66	0.89
3	0.44	0.59	0.39	0.96	0.35	0.67	0.19	0.51	0.53	0.39	0.80	0.79
4	0.67	0.75	0.53	0.71	0.36	0.61	0.36	0.53	0.18	0.52	0.58	0.52
5.1	0.59	0.77	0.94	0.78	0.26	0.34	0.86	0.56	0.45	0.59	0.81	0.54
5.2	0.52	0.79	0.99	0.72	0.23	0.51	0.76	0.79	0.36	0.44	0.83	0.36
5.3	0.48	0.89	0.93	0.98	0.07	0.69	0.60	1.00	0.80	0.74	0.92	0.53
6.1	0.33	0.68	0.83	0.02	0.33	0.31	0.27	0.20	0.43	0.24	0.24	0.55
6.2	0.31	0.72	0.82	0.04	0.44	0.36	0.21	0.16	0.47	0.23	0.22	0.41
7.1	0.48	0.85	0.93	0.76	0.46	0.56	0.65	0.86	0.67	0.79	0.80	0.68
7.2	0.56	0.93	0.93	0.82	0.40	0.68	0.56	0.86	0.64	0.85	0.86	0.73
7.3	0.51	0.83	0.86	0.76	0.43	0.75	0.68	0.98	0.77	0.79	0.91	0.74
8	1.00	0.69	0.65	0.33	0.55	0.68	0.60	0.60	0.41	0.57	0.57	0.75
9.1	0.69	1.00	1.00	0.84	0.41	0.92	0.36	0.52	0.55	0.50	0.89	0.81
9.2	0.65	1.00	1.00	0.90	0.58	0.83	0.83	0.80	0.74	0.46	0.86	0.88
10.1	0.33	0.84	0.90	1.00	0.84	1.00	0.87	0.56	0.97	0.93	1.00	0.97
10.2	0.55	0.41	0.58	0.84	1.00	1.00	0.83	0.75	0.84	0.71	0.77	0.45
10.3	0.68	0.92	0.83	1.00	1.00	1.00	0.85	0.97	1.00	0.74	1.00	0.95
11	0.60	0.36	0.83	0.87	0.83	0.85	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.98
12	0.60	0.52	0.80	0.56	0.75	0.97	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.88
13	0.41	0.55	0.74	0.97	0.84	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
14	0.57	0.50	0.46	0.93	0.71	0.74	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
15	0.57	0.89	0.86	1.00	0.77	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
16	0.75	0.81	0.88	0.97	0.45	0.95	0.98	0.88	1.00	1.00	1.00	1.00

Describimos a continuación los grupos obtenidos (ver Tabla 5.6.1.3):

- Grupo 1: Ítems 1.1 y 1.2. (*significado de la media como reparto equitativo* y *determinar una distribución dada la media)*, que se unen a su vez con los ítems 7.1, 7.2 y 7.3, también relacionados con *hallar una distribución dada la media y el efecto del cero sobre el cálculo de la media.*
- Grupo 2, formado por varios subgrupos:
- Grupo 2.1: Ítems 2.1, 2.2 (*cálculo de la media ponderada*) y 2.3 (*media de la suma de dos variables*). Este grupo tiene una alta similaridad, pues el cálculo de la media ponderada se trata de un punto en que fallan muchos estudiantes, según ha mostrado la investigación de Pollatsek, Lima y Well (1981), y en nuestro caso dio un alto índice de errores. La tercera parte del ítem también está relacionada con las anteriores, aunque se tuvo en cuenta su solución correcta independientemente de que el estudiante hubiese calculado correctamente la media en los pasos anteriores.

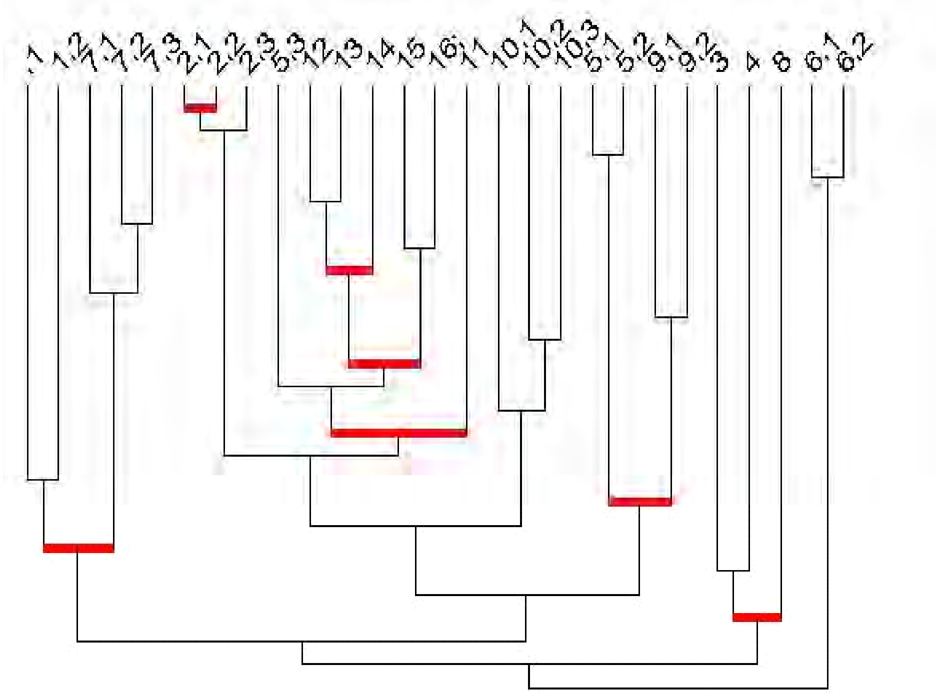
Tabla 5.6.1.3. Coeficientes de similaridad en análisis jerárquico según pasos en la clasificación

Paso	Nodos que se unen	Similaridad
1	(2.1 2.2)	1
2	((2.1 2.2) 2.3)	1
3	(5.1 5.2)	1
4	(6.1 6.2)	1
5	(12 13)	1
6	(7.2 7.3)	1
7	(15 16)	1
8	((12 13) 14)	1
9	(7.1 (7.2 7.3))	1
10	(9.1 9.2)	0.999999
11	(10.2 10.3)	0.999997
12	(((12 13) 14) (15 16))	0.999996
13	(5.3 (((12 13) 14) (15 16)))	0.99981
14	(10.1 (10.2 10.3))	0.999694
15	((5.3 (((12 13) 14) (15 16))) 11)	0.997586
16	(((2.1 2.2) 2.3) ((5.3 (((12 13) 14) (15 16))) 11))	0.977147
17	(1.1 1.2)	0.960553
18	((5.1 5.2) (9.1 9.2))	0.956171
19	((((2.1 2.2) 2.3) ((5.3 (((12 13) 14) (15 16))) 11)) (10.1 (10.2 10.3)))	0.936159
20	((1.1 1.2) (7.1 (7.2 7.3)))	0.769849
21	(3 4)	0.673794
22	(((((2.1 2.2) 2.3) ((5.3 (((12 13) 14) (15 16))) 11)) (10.1 (10.2 10.3))) ((5.1 5.2) (9.1 9.2)))	0.551825
23	((3 4) 8)	0.447176
24	(((1.1 1.2) (7.1 (7.2 7.3))) (((((2.1 2.2) 2.3) ((5.3 (((12 13) 14) (15 16))) 11)) (10.1 (10.2 10.3))) ((5.1 5.2) (9.1 9.2))))	0.342608
25	((((1 1.2) (7.1 (7.2 7.3))) (((((2.1 2.2) 2.3) ((5.3 (((12 13) 14) (15 16))) 11)) (10.1 (10.2 10.3))) ((5.1 5.2) (9.1 9.2)))) ((3 4) 8))	0.0727032
26	(((((1.1 1.2) (7.1 (7.2 7.3))) (((((2.1 2.2) 2.3) ((5.3 (((12 13) 14) (15 16))) 11)) (10.1 (10.2 10.3))) ((5.1 5.2) (9.1 9.2)))) ((3 4) 8)) (6.1 6.2))	0.0171955

- Grupo 2.2: Ítems 12 (*efecto del valor atípico sobre los promedios*) y 13 (*mejor representante en caso de distribución no simétrica*), que se unen a su vez con el 14 (*distribución bimodal*) y posteriormente con los ítems 15 (*cambio de escala*) y 16 (*interpretación de promedios en un gráfico conjunto de dos distribuciones*). La interpretación de este subconjunto de ítems depende de la comprensión gráfica a nivel intermedio (extracción de tendencias en los datos, según Curcio, 1989). Esta habilidad de interpretación de gráficos ocasiona que los mismos estudiantes respondan correcta o incorrectamente a este conjunto de ítems de gran similaridad. Los dos subgrupos anteriores se unen con el 5.3 (*elegir el promedio que mejor representa los datos*) y el 11 (*significado de la media y mediana e interpretación de mediana y moda en un gráfico*).
- Grupo 2.3: Ítems 10.1, 10.2 y 10.3 (*cálculo de media, mediana y moda a partir de una tabla*). Este es un conjunto de ítems muy específico, pues se trata de un procedimiento enseñado habitualmente en la clase, pero que algunos alumnos olvidan o no comprenden, fallando al aplicarlo. Como vemos en la Tabla 5.6.1.3, la similaridad entre estos ítems es muy alta, de modo que los alumnos o bien son capaces de aplicar correctamente todas las fórmulas de cálculo, o fallan en todas ellas.
- Grupo 2.4: Ítems 5.1 y 5.2 (*cálculo de la mediana con un número par e impar de datos*); los alumnos que resuelven uno de estos algoritmos, también lo hacen con el otro, y que se unen con los 9.1 y 9.2 (*cálculo de media y mediana a partir de un gráfico*), que así mismo, son habilidades relacionadas. En definitiva, este grupo representaría la habilidad de cálculo de la mediana, principalmente.
- Grupo 2.5: Ítems 3 (*suma de desviaciones a la media*), 4 (*media como valor dentro del recorrido*) y 8 (*media como mejor estimación*). En este caso la similaridad es mucho menor que en los anteriores, por lo que los estudiantes podrían acertar alguno de estos ítems y fallar en otros. Resaltamos el hecho que se trata en todo caso de comprensión de propiedades de la media.
- Grupo 2.6: Ítems 6.1 y 6.2 (*cálculo de mediana en datos ordinales*). Ítems muy relacionados entre sí y completamente separados del resto, por lo que la capacidad de trabajo con datos ordinales no se relaciona con el resto de competencias medidas en el cuestionario.

En la Figura 5.6.1.1 mostramos el dendograma que muestra los grupos formados de ítems donde los mismos alumnos dan contestaciones similares (bien correctas, bien incorrectas). Es decir, se trata de conocimientos relacionados entre sí y separados de los otros grupos de ítems. Observamos una estructura muy compleja con numerosos grupos, lo que indica componentes diferenciados en el significado de las medidas de posición central, lo que va de acuerdo a nuestro marco teórico.

Figura 5.6.1.1. Árbol de similaridad con todas las variables, método clásico, ley binomial



5.6.2. GRAFO IMPLICATIVO

El análisis cluster presentado considera una medida de asociación simétrica en las variables, es decir, se supone que si un estudiante responde a un ítem también responderá al asociado con él, pero no tiene en cuenta la dificultad relativa de cada ítem. Una situación más plausible es pensar que, aunque dos ítems estén relacionados, si uno es más difícil, la respuesta a este ítem facilita que también se acierte en el segundo.

Para estudiar este punto hemos llevado a cabo un análisis implicativo entre ítems, que proporciona un estudio de la implicación (no simétrica) entre el conjunto de ítems, es decir se trata de ver si la respuesta correcta al ítem a implica la respuesta correcta al *b* (donde la respuesta correcta a b puede o puede que no implique la respuesta a *a*).

Siendo *a* y *b* dos variables aleatorias dicotómicas en una población *E* y *A* y *B* los subconjuntos donde se verifican *a* y *b*, el índice de implicación de Gras (Gras, 1996), viene dado por la expresión siguiente:

$$q(a,\overline{b}) = \left[\frac{card(A \cap \overline{B}) - \dfrac{card(A)card(\overline{B})}{n}}{\sqrt{\dfrac{card(A)card(\overline{B})}{n}}} \right]$$

Tabla 5.6.2.1. Índices de implicación (teoría clásica)

	1.1	1.2	2.1	2.2	2.3	3	4	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	7.1	7.2	7.3
1.1	0	99	58	71	65	66	43	32	43	77	45	44	82	87	80
1.2	100	0	66	81	67	67	95	40	49	80	66	56	100	100	99
2.1	68	80	0	100	100	87	96	84	66	91	87	79	99	100	100
2.2	87	95	100	0	100	70	90	82	76	98	87	79	96	98	100
2.3	84	85	100	100	0	74	96	86	69	89	88	77	99	99	100
3	68	68	71	62	61	0	79	52	38	64	32	32	80	77	75
4	44	90	75	72	72	73	0	75	75	65	23	22	93	98	98
5.1	30	39	69	69	68	52	80	0	100	93	35	35	48	51	50
5.2	40	49	60	68	60	36	86	100	0	89	44	46	68	83	62
5.3	96	97	92	99	87	77	85	100	98	0	74	69	96	96	95
6.1	40	76	82	85	79	22	6	26	42	70	0	100	70	42	62
6.2	38	61	75	78	71	21	4	25	45	66	100	0	62	32	50
7.1	78	98	80	77	76	72	92	49	61	73	59	55	0	100	100
7.2	85	99	84	82	78	71	99	51	73	75	46	42	100	0	100
7.3	81	99	93	91	87	73	99	50	59	76	56	50	100	100	0
8	54	57	56	61	61	42	78	62	52	49	36	35	46	60	52
9.1	72	82	83	89	80	62	88	84	82	78	65	68	97	99	92
9.2	89	75	82	83	86	35	51	98	99	83	78	76	100	100	94
10.1	77	19	70	89	61	99	82	84	75	91	5	8	90	93	84
10.2	28	38	32	15	30	31	27	19	21	17	36	45	38	33	40
10.3	39	44	53	64	39	72	69	29	51	62	35	39	62	78	85
11	43	13	25	21	22	12	27	93	78	56	31	27	73	57	75
12	61	37	76	84	71	51	52	59	82	99	25	21	98	97	100
13	55	31	22	48	22	54	5	43	35	71	44	47	77	73	86
14	77	41	34	35	21	36	53	63	43	66	28	28	93	96	89
15	96	57	64	82	59	87	63	89	86	81	28	28	95	97	98
16	95	48	56	71	76	86	53	55	34	52	54	43	79	84	83

Como antes, *a* y *b* representan dos ítems, *A* y *B* el conjunto de alumnos que lo responden correctamente, $\overline{B}$ el conjunto de alumnos que comete algún error en el ítem *b*. El programa también calcula la significación estadística del índice, que sigue una distribución *N(0.1).* En nuestro caso, las variables aleatorias son las respuestas (correcta- incorrecta) a cada ítem, con lo que podemos calcular un total de $\binom{27}{2}$ índices de implicación entre los 27 ítems del cuestionario.

La relación de implicación entre variables establece un preorden asimétrico dentro del conjunto de ítems, que podemos representar en un grafo ordenado. El programa CHIC calcula los índices de implicación entre todos los pares de variables de un conjunto de datos y proporciona un grafo mostrando todas las implicaciones que son significativas hasta el nivel pedido por el usuario, teniendo en cuenta tanto la intensidad de implicación, como el número de sujetos en que se cumple la relación de implicación.

Para analizar la interrelación entre ítems del cuestionario, mostramos los índices de implicación entre ítems de la prueba (Tablas 5.6.2.1 y 5.6.2.2), así como el grafo implicativo (Figura 5.6.2.1), donde se presentan en rojo las relaciones significativas al 99%.

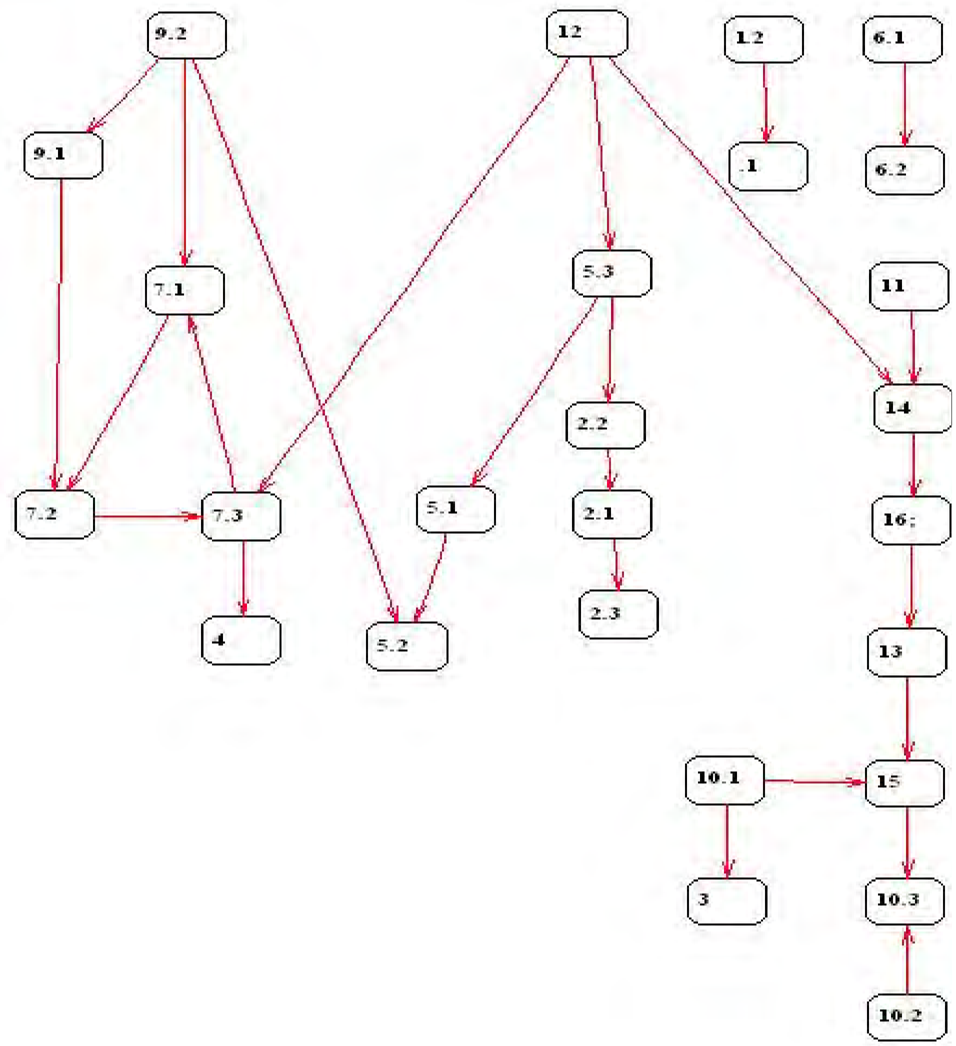
Tabla 5.6.2.2. Índices de implicación (teoría clásica)

	8	9.1	9.2	10.1	10.2	10.3	11	12	13	14	15	16
1.1	56	68	70	62	40	42	47	55	52	63	86	77
1.2	62	79	62	36	44	45	30	45	40	46	55	49
2.1	68	96	81	66	32	55	26	72	21	34	70	56
2.2	80	98	79	81	19	71	25	76	49	36	87	69
2.3	87	97	88	60	28	30	19	70	17	17	65	80
3	36	62	43	83	40	69	28	50	52	43	79	71
4	86	79	52	62	41	62	41	52	26	51	57	51
5.1	71	81	84	66	34	32	76	53	46	56	80	53
5.2	55	84	93	63	32	51	68	67	40	46	82	40
5.3	41	93	83	88	17	71	56	98	72	66	91	52
6.1	13	72	73	14	39	29	34	33	45	32	25	53
6.2	10	77	72	16	46	35	30	29	48	31	23	44
7.1	45	90	83	65	47	57	60	72	62	71	79	63
7.2	64	96	83	69	43	70	54	73	60	76	85	66
7.3	53	88	75	65	46	78	62	86	70	71	90	67
8	0	73	60	40	54	70	57	56	44	55	56	68
9.1	88	0	100	71	44	94	41	51	53	50	88	72
9.2	79	100	0	76	55	86	74	68	67	47	85	79
10.1	12	89	80	0	74	100	77	53	91	84	99	90
10.2	58	39	55	70	0	100	74	65	76	64	77	47
10.3	86	96	73	98	100	0	75	84	97	66	100	87
11	70	33	73	73	73	88	0	93	99	98	100	93
12	69	52	70	53	67	98	96	0	100	100	100	79
13	25	56	66	85	74	100	99	100	0	100	100	99
14	62	50	47	79	64	76	98	100	100	0	100	99
15	62	94	75	92	69	100	99	98	100	100	0	100
16	95	86	77	85	47	97	92	74	99	98	100	0

La implicación entre un ítem y otro se interpreta en el sentido de que si un estudiante es capaz de resolver correctamente un ítem, entonces mejora su probabilidad de resolver correctamente otro implicado por aquél. En este sentido, el árbol implicativo nos proporciona una pauta de posible orden de introducción de los conceptos y procedimientos evaluados por los diferentes ítems.

Hacemos notar que la relación de implicación es asimétrica, indicándose el sentido de la implicación por la dirección de la flecha en el grafo. Por tanto, si estudiamos las relaciones significativas al 99%, que aparecen en rojo en la Figura 5.6.2.1, la interpretación es que los alumnos realizan correctamente el ítem.

Figura 5.6.2.1. Grafo implicativo



Observamos las siguientes relaciones:

- El ítem 6.1 implica al ítem 6.2. El alumno que es capaz de resolver correctamente el cálculo de la mediana con datos ordinales en un número impar de valores también resolverá dicho cálculo para un número par de datos (caso de indeterminación).

Estos dos ítems están aislados del resto, reafirmando que la competencia con datos ordinales no se relaciona con el resto de los ítems.

- Igualmente aparecen aislados los ítems 1.2 (*hallar una distribución de datos dada una media*) con el ítem 1.1 (*comprender el significado de la media como reparto equitativo*). El estudiante que es capaz de formar la distribución es porque comprende este significado de la media.
- El estudiante que calcula correctamente la media en una tabla de frecuencias (ítem 10.1), parece comprender la propiedad de la suma de desviaciones a la media (ítem 3) y cambio de escala (ítem 15), posiblemente porque son propiedades algebraicas, así como en cierto modo el cálculo en la tabla de frecuencias requiere comprender el concepto de variable estadística y sus valores, intervalos, marca de clase y frecuencias, todos ellos bastante formalizados y relacionarlos mediante una expresión algebraica.
- El alumno que es capaz de determinar la mediana a partir de un gráfico (ítem 9.1) también será capaz de hallar la media porque en los dos casos tiene que interpretar un gráfico y el concepto de mediana es más complejo que el de media. Por otro lado, el estudiante que calcula la mediana a partir del gráfico también realiza mejor el problema de determinar una distribución (ítem 7.1) y dar un segundo ejemplo (ítem 7.2), posiblemente porque la interpretación correcta de un gráfico implica la comprensión de la idea de distribución representada en el gráfico.
- La comprensión del efecto del cero sobre la media (ítem 7.3) facilita el dar una distribución con media dada (ítem 7.1) y la comprensión de que el valor de la media se sitúa en el centro del recorrido (ítem 4); todos estos ítems se refieren a propiedades formales de la media, con lo que la comprensión de algunas facilita las otras.
- La comprensión del efecto de un valor atípico sobre el cálculo de medidas de tendencia central (ítem 12), facilita elegir el mejor representante entre media y mediana para un ejemplo particular (ítem 5.3) y éste facilita el cálculo correcto de la mediana en conjunto de datos impar (ítem 5.1) y par (ítem 5.2) respectivamente.
- La interpretación correcta de media y mediana en un gráfico (ítem 11) facilita el comprender los casos de distribución binomial (ítem 14) y éste el de dos distribuciones representadas en el mismo gráfico (ítem 16). Éste, a su vez, la interpretación de valor típico en un gráfico (ítem 13) y el cambio de escala (ítem 15). Todos estos ítems están relacionados con el razonamiento estadístico a partir de

gráficos y su interpretación a nivel de extracción de tendencias (Curcio, 1989), y a su vez, implican el cálculo correcto de moda (ítem 10.3) y mediana (ítem 10.2) a partir de un gráfico.

En definitiva, el grafo implicativo apoya nuestra hipótesis de que la comprensión de medidas de tendencia central por los estudiantes mexicanos no puede concebirse como un constructo unitario, lo que explica que el análisis factorial haya resultado con tantos factores, así como que la fiabilidad (coeficiente Alfa) tuviese un valor moderado. Por el contrario, el grafo implicativo muestra una jerarquía de conocimientos entrelazados que los alumnos han de conseguir progresivamente y el profesor ha de tener en cuenta al planificar la enseñanza del tema.

5.6.3. ANÁLISIS IMPLICATIVO JERÁRQUICO

El grafo implicativo, aunque muestra la estructura de interrelaciones, es algo complejo, por lo que sería interesante tratar de dividir el conjunto de ítems en unos pocos grupos interrelacionados entre sí mediante el índice de implicación.

Una vez estudiadas las implicaciones aisladas de unos ítems sobre otros, hemos llevado a cabo un estudio de clasificación implicativa. Se trata de un algoritmo que utiliza las intensidades de implicaciones entre conjuntos de variables como índice no simétrico para estudiar la cohesión interna de algunos subconjuntos de variables. La cohesión de una clase tiene en cuenta la cantidad de información proporcionada por un conjunto de variables, el índice se puede interpretar como cantidad de información que una variable proporciona sobre otra.

Dadas dos variables *a* y *b*, en nuestro caso respuestas a dos ítems, y siendo $p = \max(\varphi(a,\bar{b}), \varphi(b,\bar{a}))$ y $H = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$, la entropía del conjunto de variables, el grado de cohesión entre dos variables se define como $c(a,b) = \sqrt{1-H^2}$ que también varía entre 0 (mínimo) y 1 (máximo). El grado de cohesión de una clase se calcula en cada paso con la siguiente fórmula (Gras, Kuntz y Briand, 2001):

$$C(\underline{A}) = \left[\prod_{j\in\{2,\dots r\},\, j>i}^{i\in\{1,\dots r-1\}} c(a_i, a_j) \right]^{\frac{2}{r(r-1)}}$$

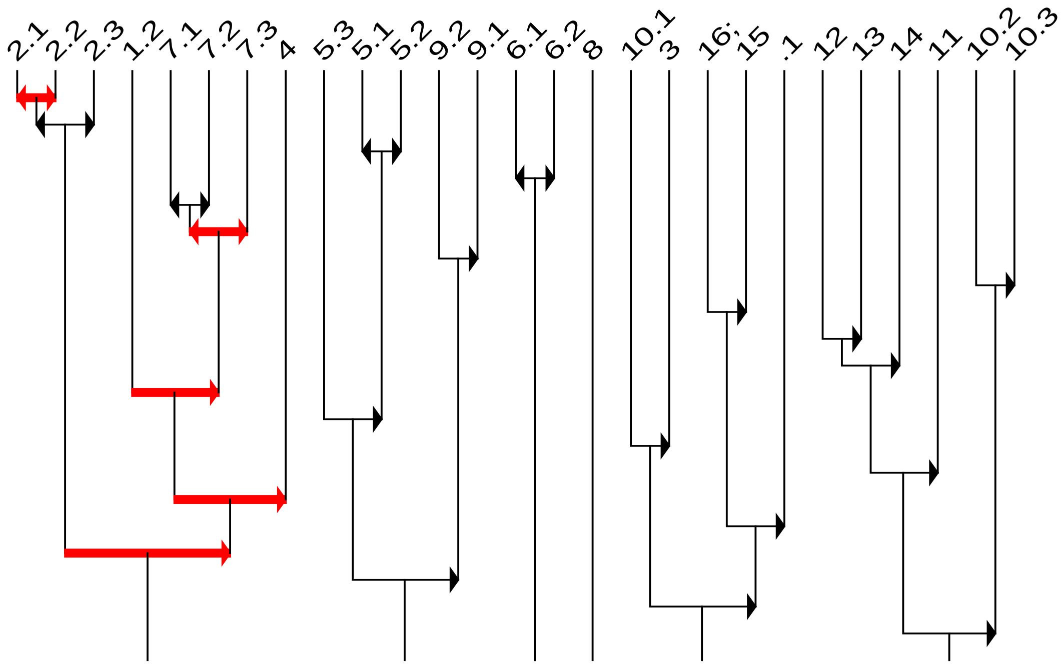
Por último, dados $\underline{A}$ y $\underline{B}$ dos conjuntos de variables, formados por variables a_i y b_j y C($\underline{A}$) y C($\underline{B}$), sus índices de cohesión, la intensidad de implicación de la clase $\underline{A}$ sobre la clase $\underline{B}$ se define (Couturier, 2001):

$$\psi(\underline{A},\underline{B}) = \left[\sup_{i\in\{1,\ldots r\}\, j\in\{1,\ldots s\}} \varphi(a_i, \overline{b}_j) \right]^{rs} \left[C(\underline{A}).C(\underline{B}) \right]^{1/2}$$

El programa CHIC calcula el nivel de significación de los diferentes nodos en una jerarquía implicativa, así como las contribuciones de los sujetos. El algoritmo forma las clases teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- la cohesión máxima dentro de cada clase
- el mayor grado de implicación entre una clase y otra que es implicada por ella

Figura 5.6.3.1. Árbol de cohesión implicativa



Arbre cohésitif : C:\Documents and Settings\Usuario\Escritorio\carmen\chic\IMPLICA.csv

Completamos el estudio con la determinación de una jerarquía implicativa en el conjunto de variables, presentando en la Tabla 5.6.3.1 los coeficientes de cohesión en los distintos pasos del procedimiento y en la Figura 5.6.3.1 el árbol de cohesión implicativa. Observamos cinco grandes grupos de ítems:

Tabla 5.6.3.1. Coeficientes de similaridad en análisis jerárquico según pasos en la clasificación

Nivel	Nodos que se unen	Cohesión
1	(2.1 2.2)	1
2	((2.1 2.2) 2.3	1
3	(5.1 5.2)	1
4	(6.1 6.2)	1
5	(7.1 7.2)	1
6	((7.1 7.2) 7.3)	1
7	(9.2 9.1)	1
8	(10.2 10.3)	1
9	(16 15)	1
10	(12 13)	1
11	((12 13) 14)	1
12	(1.2 ((7.1 7.2) 7.3))	1
13	(5.3 (5.1 5.2))	0.998
14	(10.1 3)	0.998
15	(((12 13) 14) 11)	0.992
16	((1.2 ((7.1 7.2) 7.3)) 4)	0.986
17	((16 15) .1)	0.977
18	(((2.1 2.2) 2.3) ((1.2 ((7.1 7.2) 7.3)) 4))	0.964
19	((5.3 (5.1 5.2)) (9.2 9.1))	0.88
20	((((12 13) 14) 11) (10.2 10.3))	0.771
21	((10.1 3) ((16 15) 1.1))	0.771

- Primer grupo: *Cálculo avanzado de la media y comprensión procedimental.* Ítems 2.1, 2.2 (*cálculo de la media ponderada)* y 2.3 (*media de la suma de dos variables*), que se implican todos ellos entre sí; 1.2 (*determinar una distribución dada la media*), que implica a los ítems 7.1, 7.2, 7.3 (*hallar una distribución dada la media* y el *efecto del cero sobre el cálculo de la media*), que se implican entre sí e implican al ítem 4 (*media como valor dentro del recorrido*).
- Segundo grupo: *Cálculo de la mediana.* Ítem 5.3, que implica a los ítems 5.1 y 5.2 (*cálculo de la mediana con un número par e impar de datos*), que se implican entre sí e implican al 9.2 (*cálculo de mediana a partir de un gráfico*), que a su vez, implica al 9.1 *(cálculo de media partir de un gráfico).*
- Tercer grupo: *Mediana en datos ordinales*. Ítems 6.1 y 6.2 (*cálculo de mediana en datos ordinales*), que se implican entre sí y completamente separados del resto.
- Cuarto grupo: *Comprensión conceptual de la media.* Ítem 10.1 (*cálculo de la media* en una tabla), que implica al ítem 3 (*suma de desviaciones a la media)*, que implican al grupo formado por los ítems 16 (*interpretación de promedios en gráfico conjunto de dos distribuciones*) y el 15 (cambio de escala), y que implican al 1.1 (*significado de la media como reparto equitativo).*
- Quinto grupo: *Representante de un conjunto de datos.* Ítem 12 (*efecto del valor atípico sobre los promedios*), que implica al ítem 13 (*mejor representante en caso*

de distribución no simétrica), que se unen a su vez con el 14 (*distribución bimodal*) y posteriormente con el 11 (*significado de la media y mediana e interpretación de mediana y moda en un gráfico)*, y 10.2, que implica al 10.3 (*cálculo de media, mediana y moda a partir de una tabla*).

- El ítem 8 (media como mejor estimación) aparece separado del resto.

5.7. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO CUANTITATIVO DE EVALUACIÓN

Como hemos mencionado anteriormente, el propósito en este capítulo es llevar a cabo un análisis cuantitativo de evaluación de las respuestas que los estudiantes de nuestra muestra dieron al cuestionario elaborado por Cobo (2003), que retomamos para utilizarlo en nuestra investigación doctoral.

No se trata simplemente de un estudio de replicación, pues por una parte, se aplica el cuestionario completo en las dos muestras participantes, mientras que Cobo (2003) aplicó solamente una parte del cuestionario en la muestra de alumnos de menor edad. Por otro lado, el tamaño de la muestra, que ahora es de 518 estudiantes, duplica el estudio de evaluación de Cobo (2003). Además introducimos la diferencia en el nivel educativo (Secundaria y Bachillerato), mientras que Cobo (2003) estudia sólo alumnos de Secundaria (al comienzo y final de la misma). Incluimos también algunas variantes en la metodología, pues empleamos métodos Bayesianos y análisis implicativo, no utilizados por Cobo. El resto de la metodología sigue la de la citada autora, lo que nos ha permitido a lo largo del capítulo comparar con sus resultados. Las principales conclusiones obtenidas de este estudio cuantitativo son las siguientes.

En el estudio global, los resultados son aceptables al obtener los estudiantes de Bachillerato entre de 6 y 23 respuestas correctas de un total de 27, con una media de 14 respuestas correctas y el grupo de secundaria entre 5 y 19, con una media de 10 respuestas correctas. Los resultados en este segundo grupo coinciden con los de los alumnos de mayor edad en la investigación de Cobo (2003).

Otro resultado ha sido comprobar el mejor desempeño global de los estudiantes de Bachillerato en la mayoría de los ítems, lo que indica la efectividad de la enseñanza recibida respecto a las medidas de posición central en este periodo educativo. Aparecen, sin embargo algunas excepciones, generalmente en ítems relacionados con la comprensión de la mediana en los que, o bien no se aprecian diferencias o hay ligeras ventajas a favor de los alumnos de menor edad. Para explicar esta situación se realizará un análisis más detallado de algunos de los ítems relacionados con la comprensión de la mediana en el Capítulo 6. En concreto, analizaremos los siguientes ítems, que han tenido un funcionamiento irregular en el estudio de validez discriminante del cuestionario:

- Ítems 5.1, 5.2, 6.1, 6.2 y 9.2. Ninguno de estos ítems, todos relacionados con la mediana discrimina entre los dos grupos.
- Ítem 5.3. Analizaremos también este ítem para completar el estudio del ítem 5, por estar relacionado también con la mediana que resultó especialmente difícil y porque en este apartado se pide decidir cuál es la medida de posición central que mejor discrimina el conjunto de datos.
- Ítem 10.2. Además de ser el más difícil entre los que plantean el cálculo de estadísticos con datos agrupados, da mejores resultados en los alumnos más jóvenes de secundaria.

Al comparar la dificultad relativa de los diferentes ítems, encontramos semejanzas con investigaciones anteriores (Cobo, 2003; Mayén, 2006a). Hay mayor facilidad para resolver problemas de media simple; utilizar la media como mejor estimador de una cantidad en presencia de errores de medida, y utilizar la moda. En todos estos ítems hay un gran porcentaje de estudiantes que contestan correctamente, al igual que en las investigaciones citadas.

Hay también coincidencia en los ítems más difíciles, que tienen mayoría de respuestas incorrectas y se refieren al confundir la media y la mediana; evaluar la comprensión del efecto de valores atípicos sobre el cálculo de la media; no reconocer el efecto del cero sobre su cálculo; la resolución de ítems de media y mediana con variables ordinales; y principalmente con la resolución de problemas de mediana, tanto en su cálculo como en su interpretación, obtener la mediana a partir de datos presentados en forma de gráficos y problemas de media ponderada.

Añadimos la identificación de problemas en el cálculo de la media, mediana y moda de un conjunto de datos agrupados en intervalos y presentados en una tabla de frecuencias absolutas, así como calcular, y por tanto, interpretar la mediana a partir de gráficos, que no fueron considerados por Cobo (2003).

Los resultados del estudio de análisis cluster e implicativo muestran la estructura compleja del cuestionario e indican que la comprensión de ciertos elementos de significado de las medidas de tendencia central no se relaciona con los de otros. Observamos como los grupos que se relacionan con la comprensión conceptual (de definiciones o de propiedades) aparecen separados de los relacionados con aspectos procedimentales y también aparecen como separados los grupos de ítems relacionados con la mediana (grupos dos y tres) de los relacionados con la media.

De este modo se sugiere que la comprensión de la mediana y de la media no está relacionada en estos estudiantes. Ello, junto con la mayor dificultad de los ítems relacionados con la mediana y la escasez de investigaciones al respecto nos lleva a realizar un análisis detallado de estos ítems en el Capítulo 6.

Otra aportación de este capítulo es el estudio de validación del cuestionario, pues hemos argumentado, al igual que hizo Cobo (2003) su validez de contenido, pero se ha añadido el estudio de la validez discriminante y de constructo que Cobo (2003) no llevó a cabo. Hemos repetido también los cálculos de índices de fiabilidad y generalizabilidad, pero ahora se completan con el coeficiente Theta basado en el análisis factorial, más adecuado para cuestionarios multidimensionales como es el nuestro. También se proporcionan estimaciones bayesianas de los índices de dificultad del cuestionario, muy apropiadas para situaciones con información previa, como la nuestra.

Respecto a la validez de constructo, se ha repetido el análisis cluster que realizó Cobo (2003), añadiéndose ahora el análisis implicativo para confirmar la estructura de las respuestas al cuestionario. Se observa una estructura compleja que confirma los supuestos derivados sobre la misma a partir de nuestro marco teórico.

CAPÍTULO 6
ANÁLISIS SEMIÓTICO DE ÍTEMS RELACIONADOS CON LA MEDIANA

6.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo complementamos el estudio cuantitativo realizado en el Capítulo 5 con un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes a algunos ítems, cuya elección se justifica, bien por la baja discriminación entre los dos grupos de estudiantes (5.1, 5.2, 6.1, 6.2 y 9.2), bien por su excesiva dificultad (10.2 y 11). Además todos estos ítems están relacionados con el concepto de mediana sobre el cuál la investigación previa es más escasa. Este conjunto de ítems evalúa la comprensión de diferentes campos de problemas (medida de tendencia central en presencia de valores atípicos, medida de tendencia central para datos ordinales), procedimientos (cálculo de la mediana con datos aislados, tablas y gráficos), lenguaje (verbal, numérico, simbólico y gráfico), definiciones y propiedades.

El análisis se basa en nuestro marco teórico e identifica diversos objetos y procesos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas ligadas con la resolución de los problemas propuestos. Estos objetos fueron analizados con detalle por Cobo y Batanero (2000), quienes muestran la complejidad de la mediana, incluso cuando su estudio se aborde únicamente desde el punto de vista de la estadística descriptiva. Nosotros utilizamos los objetos descritos por las autoras, así como por Cobo (2003) y en nuestro estudio curricular presentado en el Capítulo 2.

En lo que sigue se explicitan los objetivos y metodología empleados en el análisis y seguidamente se presentan los resultados en cada uno de los ítems analizados.

6.2. OBJETIVOS DEL ANÁLISIS SEMIÓTICO

La importancia del estudio de conflictos semióticos la resalta Godino (2002, 2003), quien indica que en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas), que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso mediante gestos. En el trabajo matemático los símbolos (significantes) remiten a entidades conceptuales u otros objetos (significados) y un punto crucial en la enseñanza es lograr que los alumnos dominen la semántica (además de la sintaxis) de estos símbolos.

Más recientemente Godino, Wilhelmi y Font (2008), han propuesto diferentes niveles de análisis didácticos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta investigación aplicamos el que denominan análisis semiótico, que se centra en los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas o emergen de ellos y permite describir la complejidad onto- semiótica de dichas prácticas.

La investigación en didáctica de las matemáticas ha mostrado la importancia que tienen las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje, pero una cuestión todavía no suficientemente analizada es la variedad de objetos que desempeñan el papel de representación y de objeto representado (Godino, Contreras y Font, 2006). Precisamente el interés de los autores es analizar esta cuestión, tomando de Eco[1] la noción de función semiótica como una "correspondencia entre conjuntos", que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión: objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo;
- Un plano de contenido: objeto final, considerado como el significado del signo, esto

[1] “Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un plano de la expresión colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un plano del contenido (…) una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (…)” (Eco, 1995, 83-84).

es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor;

- Un criterio o regla de correspondencia, esto es un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido.

El Enfoque onto-semiótico destaca la diversidad de objetos puestos en juego en la actividad matemática, ya que cualquier elemento de significado puede aparecer como parte de la función semiótica, tanto en el plano de la expresión como en el del contenido.

En ocasiones, el significado que el profesor o investigador quiere atribuir a una expresión no es interpretado correctamente por el alumno y se produce el *conflicto semiótico.* Godino, Batanero y Font (2007) denominan *conflicto semiótico* a las interpretaciones de expresiones matemáticas por parte de los estudiantes que no concuerdan con las pretendidas por el profesor o investigador. Estos fallos en la interpretación, consecuentemente producen errores en los estudiantes, que no son debidos a falta de conocimientos, sino a no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica.

Así, este trabajo se orienta a la determinación de conflictos semióticos de estudiantes de Secundaria y Bachillerato en relación con la mediana. La finalidad de la investigación didáctica es encontrar dispositivos “idóneos” para la enseñanza y el aprendizaje de objetos matemáticos. Por ello, un objetivo importante es describir y valorar la pertinencia de la enseñanza, y determinar criterios para mejorarlos (Wilhelmi, Lacasta, y Godino, 2007). La idoneidad semiótica de un proceso instruccional, debe atender a evitar conflictos semióticos, y la idoneidad didáctica debe procurar que estos conflictos afloren y el profesor sea capaz de resolverlos (Godino, Contreras y Font, 2006). Un primer paso para lograrlo será identificar los conflictos que cabe esperar ante determinadas tareas en una proporción importante de los estudiantes. Este será el objetivo de nuestro trabajo, en lo que se refiere al objeto matemático mediana.

6.3. METODOLOGÍA DEL ANÁLISIS SEMIÓTICO

El estudio cualitativo de los ítems comienza con un análisis de contenido de las respuestas de todos los estudiantes de la muestra a los ítems seleccionados. Puesto que dichas respuestas son datos textuales, podemos utilizar esta técnica, que se fundamenta en la idea de que las unidades del texto pueden clasificarse en un número reducido de categorías (Weber, 1985; Krippendorff, 1991).

Podremos utilizar este análisis para efectuar inferencias sobre las prácticas matemáticas y los conflictos semióticos de los estudiantes mediante la identificación sistemática y objetiva de las características específicas de sus respuestas (Ghiglione y Matalón, 1989). El objetivo final es la búsqueda del significado personal de los estudiantes sobre la mediana que queda implícito en sus respuestas, a partir del estudio sistemático de las mismas.

Al igual que en el caso de los libros de texto analizados en el Capítulo 2, hemos utilizado para el análisis de las respuestas un *análisis de contenido temático*, donde se recurre al conocimiento previo sobre el tema adquirido por el investigador, para resumir el contenido del texto y definir las categorías de análisis (Ghiglione y Matalón, 1991). En nuestro caso, para realizar el análisis, hemos recurrido a los estudios citados de Cobo y Batanero (2000) y Cobo (2003), los resultados del análisis de textos presentados en el Capítulo 2 y el análisis semiótico de la solución experta a cada uno de los problemas.

Seguidamente, para cada uno de los sub-ítems analizados, se ha comenzado un proceso de análisis de datos cualitativo inductivo y cíclico en que las respuestas de todos los estudiantes de la muestra se han comparado entre sí hasta llegar a formar un sistema de categorías. Es un análisis *directo* (en la terminología de Visauta, 1989), puesto que seguimos estrictamente el contenido de la unidad de análisis sin ir más allá de lo que ésta contiene. Identificadas respuestas similares, se analizó repetidamente su texto, mediante los siguientes pasos:

1. En primer lugar, revisamos repetidamente todas las respuestas de cada uno de los ítems objeto de análisis, hasta conseguir una categorización lo suficientemente amplia para detectar la variabilidad de los significados personales de los estudiantes respecto a la mediana. La clasificación tiene en cuenta los conceptos, procedimientos, problemas, lenguaje, propiedades y argumentos resaltados explícitamente o usados implícitamente. El proceso fue analítico e inductivo, según los patrones de análisis de datos cualitativos y fue revisado sucesivamente con ayuda de otros investigadores, hasta llegar a la categorización definitiva.
2. Asignación de códigos a las respuestas, depuración del sistema de categorías y clasificación.
3. Codificación de los datos, elaborando un fichero de datos que posteriormente se analiza, para obtener tablas de frecuencias de las diferentes respuestas, tablas resumidas de frecuencias (según la medida de tendencia central utilizada) y

clasificación de esta última tabla en función del tipo de estudiante.

4. Representación gráfica de la distribución de respuestas en función del tipo de estudiante y contraste Chi-cuadrado para estudiar la hipótesis de independencia entre respuesta y grupo de estudiantes.
5. Para cada una de las categorías obtenidas seleccionamos una respuesta representativa de la misma que muestre con claridad el argumento seguido por el estudiante.
6. Análisis semiótico de esta respuesta típica, siguiendo la pauta marcada en Godino, Wilhelmi y Font (2008), y también ejemplificada en Godino, Batanero y Roa (2005) en su estudio de respuestas abiertas a un cuestionario sobre combinatoria. Igualmente esta técnica fue utilizada por Roa (2000) y Cobo (2003). Una vez elegida la respuesta (que se transcribe literalmente), la separamos en unidades de contenido. En el análisis semiótico se identifican los objetos matemáticos a los que va haciendo referencia el estudiante en su respuesta escrita y se analiza su naturaleza (definición, lenguaje, propiedad, etc.). También tratamos de identificar los procesos matemáticos involucrados en la resolución. Los resultados se presentan en forma de tablas con tres columnas: la primera indica la unidad de análisis; la segunda incluye el fragmento de respuesta que constituye la unidad y la última muestra los elementos de significado y conflictos semióticos identificados.

Como hemos indicado, el fin de todo este proceso es describir los elementos de significado correctamente utilizados que contienen cada una de las unidades, así como los posibles conflictos semióticos que puedan aparecer cuando el significado atribuido por el estudiante a una expresión no coincide con el significado normativo que esperaríamos en una respuesta correcta. En lo que sigue se presentan y discuten los resultados, comparándolos con los de otras investigaciones.

6.4. ANÁLISIS DEL ÍTEM 5

En el ítem 5, que ha sido tomado de Godino (1999), se pide al estudiante el cálculo de la mediana para un conjunto de datos no agrupados y es muy similar a otros ejercicios de cálculo de la mediana que aparecen en los libros de texto mexicanos utilizados por los alumnos de la muestra. En los primeros dos apartados del ítem se diferencia entre el cálculo de la mediana con número par e impar de datos. En la segunda parte también se introduce un valor atípico, para estudiar si los alumnos comprenden su efecto sobre el cálculo de media y mediana. Finalmente, en el último apartado se evalúa la competencia para decidir cuál de las medidas de posición central es preferible para representar este conjunto de datos.

De manera implícita, los alumnos deben usar en este ítem la definición de mediana como elemento central que divide a la población en dos partes iguales. También han de conocer los algoritmos de cálculo y las propiedades citadas. En lo que sigue hemos subdividido este ítem para realizar el análisis en los apartados que lo componen (5.1, 5.2, 5.3). En primer lugar elaboramos una solución "experta", para proceder a su análisis semiótico.

Ítem 5

El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24
1. ¿Cuál es el peso del niño mediano?
2. ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg?
3. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.

En el apartado 1 de este ítem se proporciona un número impar de datos, de los que se pide calcular la mediana. Para resolverlo, habría que ordenar los datos y tomar el elemento central, aplicando directamente la definición de mediana. El ítem supone que los alumnos comprendan que la mediana es el centro de la distribución cuando los datos están ordenados, respecto al orden numérico habitual y que combinen las ideas de centro y orden. A partir de los datos dados, los alumnos tendrían que producir una ordenación como la siguiente y determinar el centro de la fila. El valor correspondiente sería la mediana.

15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24

*15, 16, 17, 18, **19**, 19, 24, 25, 26*

Para el apartado 2 tenemos un nuevo elemento: el 43, que es un valor atípico, pues comparado con el resto de los pesos de los niños imaginarios en el problema, es excesivo. Como ahora el número de elementos es par, nos encontramos en el caso de indeterminación, pues al ordenar el conjunto de datos y buscar el valor central, encontramos dos valores. Por tanto, los dos elementos centrales del conjunto de datos cumplen la definición de mediana, pues están situados en el centro de la distribución.

Para resolver la indeterminación se introduce un convenio que se enseña a los alumnos, que consiste en obtener la media de los dos valores centrales y tomar dicho valor medio como mediana del conjunto de datos. Pero, en nuestro caso, al ser iguales los dos valores centrales se obtiene otra vez el valor 19 como mediana. Además, hacemos notar que, puesto que la mediana es resistente a valores atípicos, el alto valor atípico no afecta a la representatividad de la mediana, y por eso el valor obtenido es igual al anterior.

15, 16, 17, 18, ***19, 19,*** *24, 25, 26, 43*

En cuanto al apartado 3 (si la media es buen representante del conjunto de datos en este caso), la respuesta es negativa. El mejor representante es la mediana, ya que la media se vería muy afectada por el alto valor 43 y no sería razonable que, al preguntar, por ejemplo, cuál es el peso representativo de este grupo de niños diéramos el valor medio 22.2 cuando el 60% de los casos está por debajo de 19 kilos. Por el contrario, la mediana (19) no se ve afectada por los valores extremos y exactamente el 50% está por encima y debajo de este peso.

Esta solución al problema planteado aparentemente sencilla tiene una gran complejidad, como mostramos en el análisis semiótico de la tarea junto con su solución. Para facilitar el análisis, dividimos el ítem en unidades y lo presentamos en la Tabla 6.4.1. En esta tabla y las que siguen la primera columna sirve para dar un código a las unidades de análisis. En la segunda presentamos una expresión matemática, que, mediante elementos de lenguaje tales como números, símbolos o palabras, evoca una serie de objetos matemáticos (que describiremos en la tercera columna, donde incluimos el contenido de la función semiótica). Generalmente esta evocación se hace a través de ciertos convenios explícitos o implícitos, muchos de ellos aprendidos. Estos convenios definirían la regla de correspondencia de la función semiótica.

Cuando un resolutor escribe un texto, para resolver un problema, cada expresión de dicho texto (segunda columna) evoca un contenido (tercera columna), es decir, se establece una función semiótica entre los mismos a través un proceso de significación. Cuando otra persona lee el texto realiza un proceso de interpretación. Es importante resaltar, que en la actividad matemática los procesos de significación e interpretación son múltiples y encadenados, como se muestra en los ejemplos que discutimos a continuación. Algunas expresiones (por ejemplo "peso") remiten a un objeto (magnitud peso) y quizás también a la idea de magnitud en sí misma (como tipo de una clase de diferentes magnitudes).

Tabla 6.4.1. Análisis de la solución correcta al ítem 5

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24 a)¿Cuál es el peso del niño mediano?*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • "Peso" (expresión verbal), se refiere a una magnitud (concepto); "kilos" (expresión verbal) a la unidad de medida (concepto, y al ejemplo particular de unidad de medida); • 9 es un numeral que representa una cantidad de una magnitud discreta (número de niños; concepto de magnitud; propiedad) y al mismo tiempo un número (concepto). Al pensar en niños particulares hay un proceso de materialización. 9 también es un ejemplo de número, remite al concepto número y a una clase particular, los números naturales. • El alumno ha de poner en correspondencia (proceso) cada numeral en la serie *15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24,* con los valores de peso en kilos de niños imaginarios (elementos fenomenológicos). Igualmente se evoca el conjunto de números, que, en este caso, podría ser números con parte decimal. • Ha de visualizar la serie de números como un todo (serie de datos), remitiendo a la idea de distribución (concepto); • Debe interpretar la pregunta (proceso de significación) como una instrucción de cálculo (algoritmo) del valor mediano (promedio, concepto) en la serie de datos.
U2	Para resolver la parte 1, habría que ordenar los datos y tomar el elemento central, puesto que hay un número impar de elementos. *15, 16, 17, 18, **19,** 19, 24, 25, 26 (19 kg)*	• El alumno ha de recordar y comprender la definición de mediana (concepto) como valor que divide en dos partes el conjunto de datos (propiedad). • Debe colocar los datos en forma ordenada, es decir, de menor a mayor. Supone la idea de orden (concepto), conocer el orden relativo de los números enteros (propiedad) y ser capaz de ordenar la serie (algoritmo). • Debe aplicar el algoritmo de cálculo de la mediana de un conjunto impar de valores aislados (procedimiento). • Uso de la representación numérica; representación simbólica de la unidad de medida (kg) (proceso representacional). • Atribución del valor 19 a la mediana particular del conjunto de datos (particularización de la idea general de mediana a este caso).
U3	*2. ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg?* Tenemos un nuevo elemento: 43 y ahora el número de elementos es par. Al ser iguales los valores centrales, se obtiene otra vez el 19. *15, 16, 17, 18, **19, 19,** 24, 25, 26, 43 (19 kg)*	• Hay que interpretar la definición de mediana como valor central en el caso de número par de valores • Aplicar el algoritmo de cálculo de la mediana a un conjunto par de valores aislados. Comprensión de que los dos valores centrales cumplen la definición (aplicación de una propiedad). • Conocimiento sobre cómo resolver el caso de indeterminación (algoritmo). • Obtener la media de los dos valores centrales, una vez ordenados (algoritmo); concepto de media o de punto medio. • Uso de la representación numérica; proceso de representación.

U4	3. *En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? Razona la respuesta.* La respuesta es negativa, el mejor representante es la mediana, ya que la media se vería muy afectada por el alto valor 43, que es atípico.	• El alumno ha de recordar la definición de media (concepto) como algoritmo (sumar los números y dividir por el total). • Ha de recordar que la media no es resistente pues cambia un valor al cambiar un dato (propiedad). • Ha de reconocer la presencia de un dato atípico (concepto); particularización de la idea general de "atípico" al caso particular; se requiere también un conocimiento del contexto. • Debe reconocer que en el cálculo de la media intervienen todos los datos, por tanto, es un estadístico robusto (propiedad). • Ha de tomar la decisión de que la mediana es preferible (argumento de análisis y síntesis).

Como se observa en el análisis, la actividad pedida requiere la comprensión de muchos conceptos y propiedades. Además, requiere la aplicación de procedimientos, uso y comprensión de representaciones, todo ello unido por una argumentación de tipo análisis - síntesis. Respecto a los procesos matemáticos definidos en Godino (2002), aparecen en diversos momentos procesos de particularización (por ejemplo al pasar de la idea general de mediana a la mediana concreta del conjunto de datos), representación y significación (al representar los datos o interpretar el problema) materialización - abstracción (al pasar de un objeto matemático a una situación real donde se aplica, por ejemplo, al visualizar el peso de un niño concreto).

Es razonable que, debido a esta complejidad, algunos estudiantes encuentren errores en los diferentes pasos del proceso y no lleguen a la solución esperada. Por ejemplo, Cobo (2003) encontró alumnos que no ordenan los datos antes de tomar el valor central en este ítem, error encontrado también por Carvalho (1998, 2001) en problemas similares. Otro error señalado por ambas autoras, y además por Mayén (2006a), es la confusión entre media y mediana. También pueden aparecer dificultades en los procesos matemáticos descritos.

Nosotros queremos interpretar algunos de estos errores y dificultades en términos de conflictos semióticos, es decir, de disparidad entre el significado que a una expresión matemática otorgamos desde el punto de vista institucional (representado en la solución experta) y la interpretación plausible que hace el estudiante. Si una misma dificultad se repite por el mismo estudiante en diferentes problemas o se repite en varios estudiantes, podemos suponer que no es debida al azar y una posible causa puede ser la disparidad de interpretación de las expresiones matemáticas. Cobrará más fuerza esta interpretación, si se observan dificultades en contextos educativos muy diferentes como son el español y el mexicano. El análisis semiótico servirá para generar hipótesis sobre la existencia de estos conflictos, que podrán ser posteriormente comprobadas en nuevas investigaciones. Dichos conflictos tendrían una naturaleza diferente a los obstáculos, pues aunque pudieran ser recurrentes, serían potencialmente más fáciles de erradicar con la instrucción (no serían tan resistentes como los obstáculos).

En lo que sigue presentamos la categorización de respuestas en este ítem y procedemos al análisis semiótico de un ejemplo típico en cada una de las categorías, para identificar los conflictos semióticos subyacentes.

6.4.1. CATEGORÍAS DE RESPUESTAS EN EL ÍTEM 5.1

Las respuestas obtenidas se clasifican en un primer nivel por el tipo de medida de posición central empleada y dentro de cada una de ellas, en relación a las variantes más relevantes.

C1. Usar la media, en vez de la mediana. El primer grupo de respuestas corresponde a los alumnos que resuelven el problema calculando directamente la media aritmética, sin hacer ningún tipo de referencia a la mediana ni llegar a calcularla. Podemos suponer que al menos hay un conflicto consistente en confundir la terminología asociada a estos dos objetos matemáticos. También puede deberse a un conflicto de tipo conceptual al confundir o bien no discriminar la definición de los dos conceptos. Dentro de esta categoría general se han diferenciado varios casos.

C1.1. Cálculo correcto de la media con datos aislados. Son los alumnos que, para resolver el problema, calculan correctamente la media. Muestran confusión entre los conceptos o bien entre la terminología de media y mediana, es decir, se trata de un fallo en un proceso de significación, pues atribuyen al término *mediana* un significado no esperado por el profesor. Sin embargo, en este tipo de respuesta observamos que los alumnos conocen y aplican correctamente el algoritmo de cálculo de la media, poniendo en relación el concepto media con el algoritmo correspondiente y son capaces de realizar las operaciones requeridas.

También realizan una serie de procesos de particularización (del concepto general media a la media concreta del conjunto de datos; del conocimiento del algoritmo general, a la aplicación del algoritmo al caso particular). Además, se realizan correctamente los correspondientes procesos de representación de datos, algoritmo y resultado. Este tipo de respuesta fue también encontrado por Cobo (2003), aunque no realiza el análisis semiótico completo de la misma.

En la Tabla 6.4.1.1 mostramos y analizamos un ejemplo, donde el alumno ha asignado un valor numérico a cada numeral, visualizando el conjunto de valores de los mismos como un conjunto de datos (proceso de reificacion, al ir de los elementos al todo). El proceso de significación de la magnitud peso, la unidad de medida y los valores individuales de los pesos, así como del número de datos han sido correctos. Comprende la idea de distribución y visualiza la media como una propiedad de la distribución (no de cada dato aislado). Por otro lado, el alumno recuerda el algoritmo de cálculo de la media para datos aislados, que aplica correctamente. Sin embargo, se produce un *conflicto semiótico* al no diferenciar media y mediana, al menos verbalmente.

$$\text{“}\frac{15+25+17+19+16+26+18+19+24}{9} = 19.8 \text{ kilos”}$$

Tabla 6.4.1.1. Análisis de ejemplo en la categoría 1.1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$\frac{15+25+17+19+16+26+18+19+24}{9} = 19.8$ *kilos*	• Asigna a cada numeral (representación numérica) el valor de una cantidad de magnitud peso (concepto); proceso de representación. • Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; construye un objeto (distribución) por composición de objetos simples (reificación). • Recuerda el algoritmo de cálculo de la media para datos aislados y lo aplica correctamente. Usa la idea de media como operación en el conjunto de datos (no interna, pues el valor no pertenece al mismo conjunto numérico); pone en correspondencia con la media, varias de sus propiedades. • Proceso de *representación*; de las operaciones suma y división y el algoritmo de cálculo de la media; así como de su resultado. • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo. • Números decimales; representación de números decimales. • Asigna un valor (media) al conjunto de datos (media como propiedad de la distribución); proceso de particularización. • *Conflicto semiótico* de significación al no distinguir entre los conceptos o las expresiones verbales de media y mediana.

C1.2. Cálculo incorrecto de la media con datos aislados. El alumno utiliza la media, en lugar de la mediana, por lo que se repite el conflicto descrito para el caso anterior. En este caso, se observa que realiza el cálculo de manera incorrecta, por algún error en la interpretación de datos (proceso de significación) o su aplicación (error en el procedimiento).

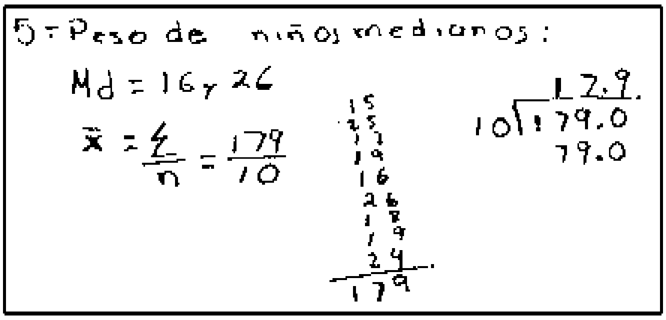


Tabla 6.4.1.2. Análisis de ejemplo en la categoría 1.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*X = 179/10 = 17.9* *15* *25* *17* *19* *16* *26* *18* *19* *24* *179*	• Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; realiza un proceso de significación y de composición (formar un objeto a partir de otros). • Recuerda el algoritmo de cálculo de la media para datos aislados. Usa la idea de media como operación en el conjunto de datos (no interna, pues el valor no pertenece al mismo conjunto numérico). • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo. • Asigna un valor (media) al conjunto de datos (media como propiedad de la distribución); proceso de particularización. • Comete un error de cálculo al dividir por 10 elementos; hay un conflicto de significación al interpretar incorrectamente los datos del problema.
U2	*Peso de niños medianos:* *Md = 16 y 26*	• No ordena los datos para obtener la mediana; *conflicto* al interpretar incorrectamente el tipo de orden a considerar en la definición. • *Conflicto semiótico* al considerar como mediana los dos valores centrales del conjunto de datos. • *Conflicto semiótico* al no distinguir entre los conceptos o las expresiones verbales de media y mediana.

En el ejemplo que presentamos en la Tabla 6.4.1.2, el alumno considera 10 elementos en lugar de nueve para el cálculo de la media, por lo que el resultado obtenido es incorrecto. En cuanto al cálculo de la mediana, observamos que desconoce su cálculo para un conjunto par de datos. Por una parte, no ordena el conjunto de datos (conflicto al no aplicar una propiedad esencial en la definición de la mediana) que puede ser debido también a interpretar que el conjunto de datos ordenado se refiere al "orden en que son dados los datos" y no al orden numérico habitual (fallo en el proceso de interpretación).

Por otra parte, el alumno da como solución al problema dos medianas, que son los dos valores que están en el centro de dicho conjunto de datos. Hay otro conflicto al suponer que puede haber más de una mediana y un olvido del modo en cómo se resuelve el caso de indeterminación. Este olvido puede ser hasta cierto punto razonable si no se explica a los estudiantes por qué se utiliza este convenio y puesto que cada uno de los dos elementos centrales del conjunto de datos cumple la definición de mediana.

C2. Usar la mediana. Las respuestas que analizamos a continuación serían las que utilizan la medida de tendencia central pedida, es decir, los alumnos calculan la mediana. En estas respuestas ya no se produce el conflicto inicial en el proceso de significación, pues los estudiantes identifican el término "mediana" con el objeto matemático correspondiente. La mayoría de las respuestas contienen algunos errores de cálculo u otros conflictos, lo que indica que los alumnos recuerdan sólo una parte o de la definición o propiedades de la mediana. Dentro de ella hemos encontrado tres variantes.

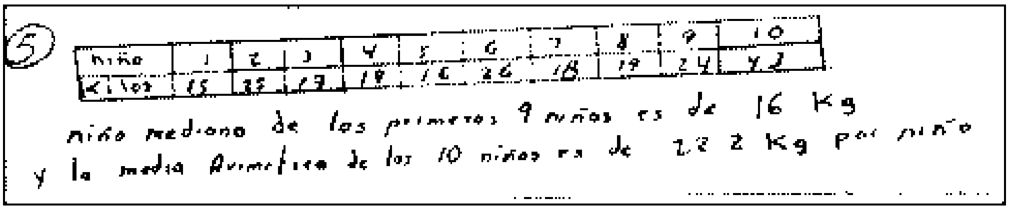
C2.1. Cálculo correcto de la mediana. Son las respuestas semejantes a la solución correcta experta que ya se ha analizado, por lo que no incluimos nuevos ejemplos o análisis de este tipo de respuesta.

C2.2. El alumno no ordena los valores y considera como mediana el valor central de todos los elementos tal como se le presentan, error que también es encontrado por Barr (1980), Carvalho (1998, 2001), Cobo (2003) y Mayén (2006a y b).

En el ejemplo que se muestra y se analiza en la Tabla 6.4.1.3, el estudiante incluso introduce una notación tabular propia para representar el conjunto de datos, indicando los niños a que se refiere el enunciado con un número de orden, y para cada uno de ellos su peso, es decir, establece una correspondencia entre niños y pesos. Calcula correctamente la media, lo que indica que el alumno conoce su definición y algoritmo. Efectúa diferentes procesos de particularización, significación y representación.

Sin embargo, al tratar de calcular la mediana, toma el valor central pero no ordena los datos y se produce el conflicto. La explicación que damos al mismo es que el estudiante entiende que el orden al que se refiere la definición de mediana es el orden de los datos, es decir, el orden numérico de los niños que ha asignado en la tabla de datos, en lugar del orden numérico natural. Esta es una confusión plausible pues a veces ordenamos a los estudiantes de una clase según diversos criterios tales como altura, apellidos o colocación en la clase.

Tabla 6.4.1.3. Análisis de ejemplo en la categoría 2.2



<table>
<tr><th>Unidad</th><th>Expresión</th><th>Contenido</th></tr>
<tr><td>U1</td><td><table><tr><td>Niño</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr><tr><td>kilos</td><td>15</td><td>25</td><td>17</td><td>19</td><td>16</td><td>26</td><td>18</td><td>19</td><td>24</td><td>43</td></tr></table></td><td>Asigna a cada representación numérica el valor de una cantidad de magnitud peso; proceso de significación.
“Niño” (elemento fenomenológico) hace referencia a un tipo (niño genérico) y a cada niño particular de la muestra, al cuál se asigna una numeración.
“Kilo”, unidad de medida (concepto) particularizada a una magnitud particular (peso); también hay referencia a los objetos “magnitud” y “peso”.
Referencia al peso particular de cada niño (cantidad de medida de la magnitud en cada caso).
Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; composición de objetos para crear un objeto complejo, distribución.
Introduce una representación de los datos en forma de tabla; proceso de representación.
Introduce una función (concepto), donde la variable independiente son los números 1 a 10 y la dependiente, el peso en kilos del niño que ocupa el lugar n en la serie; (aparecen varios objetos y propiedades); hay también un proceso de materialización y particularización.
No ordena la serie de pesos según el orden habitual en los números enteros. Conflicto al olvidar una propiedad esencial en la mediana.</td></tr>
<tr><td>U2</td><td>“El niño mediano de los primeros 9 niños es de 16 kg”</td><td>Usa la idea de mediana como valor central, que corresponde al valor de la variable del elemento central en la serie.
Se aprecia un conflicto, ya que el alumno confunde el tipo de orden al que se refiere la definición</td></tr>
</table>

C2.3. Mediana como valor central del rango de datos. El estudiante obtiene la media aritmética de los valores extremos de la distribución y a resultado lo considera como la mediana, como mostramos en el ejemplo de la Tabla 6.4.1.4.

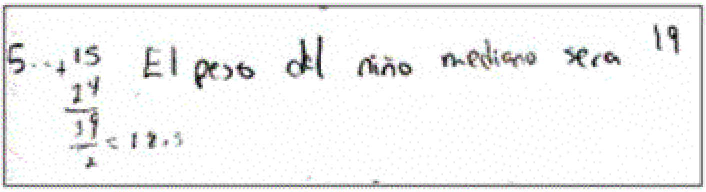


Tabla 6.4.1.4. Análisis de ejemplo en la categoría 2.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*El peso del niño mediano será 19* *15* *+ 24* *39 = 18.5* *2*	• Asigna a cada representación numérica, el valor de una cantidad de magnitud peso (proceso de significación; uso de conceptos, lenguaje y propiedades). • Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; construcción de la idea de distribución a partir de los datos aislados. • Identifica el máximo y el mínimo del conjunto de datos (conceptos); proceso de particularización de la idea general de extremos a los extremos particulares del conjunto de datos; procedimiento de obtención de dichos valores. • Interpretación de la idea de centro como punto medio o centro geométrico (conceptos); • Centro geométrico como punto medio de los extremos (definición y procedimiento de cálculo del centro geométrico). • Usa la idea de media (concepto). Obtiene la media de los valores extremos (procedimiento); nueva particularización a la media de los extremos. • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo. • Procesos de representación de los extremos, su suma y el resultado, el cociente y valor obtenido. • *Conflicto* al confundir el centro estadístico con el centro geométrico, debido a un proceso incorrecto de particularización (de la idea general de centro a un caso particular). • *Conflicto* al considerar la mediana como centro geométrico del rango de valores. • *Conflicto* en el algoritmo de cálculo de mediana. • *Conflicto al redondear su resultado*; puesto que los datos son valores enteros, toma un valor entero como mediana; supone que la mediana es una operación que conserva el conjunto de datos; este es un conflicto, ya que generaliza incorrectamente una propiedad.

En consecuencia, el alumno aplica la idea de mediana como valor central, pero aparece un conflicto en la identificación de cuál es valor del centro que se debe de calcular. Es decir, asocia la mediana a la idea de centro, pero confunde “centro estadístico de la distribución”, con “centro geométrico del rango de variación”. De la idea general de “centro” el alumno ha de particularizar a la idea de “mediana como centro”; pero hay un conflicto debido a que la particularización que hace es incorrecta.

Por otra parte, el alumno ha identificado el máximo y mínimo de la serie de datos y ha calculado el punto medio del segmento marcado por estos dos extremos. Conoce y usa la idea y procedimiento de cálculo del punto medio.

Además, el alumno redondea el resultado para obtener un valor entero de la mediana (pues los datos son enteros); atribuyendo una propiedad inexistente a la mediana (ser operación interna) debido a una generalización incorrecta. No hemos encontrado este conflicto analizado en la investigación de Cobo (2003), ni en otros antecedentes, por lo que la explicación que hacemos del mismo constituye una aportación de nuestro trabajo.

C2.4. Mediana como centro del rango, con error en operaciones. Esta respuestas es una variante del anterior, donde a la confusión entre centro de la distribución y centro geométrico el alumno añade un error en los cálculos. Al igual que en el caso anterior, aplica la idea de mediana como valor central, pero aparece un conflicto en la identificación de cuál es valor del centro que se debe de calcular. El alumno interpreta la mediana como centro geométrico del rango de variación de la variable. Muestra comprensión de la idea de punto medio y de su procedimiento de cálculo pues encuentra el centro del rango a partir de la diferencia del valor máximo y el valor mínimo. El estudiante comete un error de cálculo, como se aprecia en el siguiente ejemplo. No comentamos más esta respuesta porque se reduce a la anterior.

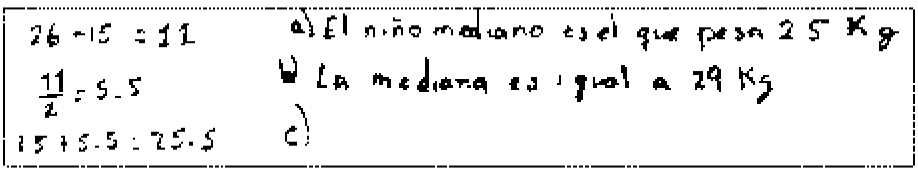


Tabla 6.4.1.5. Análisis de ejemplo en la categoría C2.4

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*26-15=11*	• Asigna a cada representación numérica el valor de una cantidad de magnitud peso (proceso de significación; uso de conceptos, lenguaje y propiedades). • Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos, construcción de la idea de distribución a partir de los datos aislados. • Centro; interpretación como punto medio o centro geométrico (conceptos). • Identifica los extremos del conjunto de datos proceso de particularización de la idea general de extremos a los extremos particulares del conjunto de datos. • Halla la diferencia de los valores extremos. • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo. • Procesos de representación de los extremos, su diferencia y el resultado. • *Conflicto* al confundir el centro estadístico con el centro geométrico, debido a un proceso incorrecto de particularización (de la idea general de centro a un caso particular).
U2	*11/2= 5.5*	• Halla la mitad de la amplitud del recorrido; proceso de representación de la amplitud, el cociente y su resultado.

	15 + 5.5 = 25.5 *a)El niño mediano es el que pesa 25kg*	• Suma la mitad de la amplitud del rango al extremo inferior para obtener el valor medio. • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo. • Error de cálculo. • *Conflicto* al considerar la mediana como centro del rango de valores (definición incorrecta). • *Conflicto* en el algoritmo de cálculo de mediana y en los cálculos del centro del rango. • *Conflicto al redondear*; puesto que los datos son valores enteros, y toma un valor entero como mediana. Supone que la mediana es una operación que conserva el conjunto de datos; este es un conflicto, ya que generaliza incorrectamente una propiedad.

C3. Dar una solución que no tiene relación con las medidas de tendencia central. En lugar de calcular una medida de tendencia central, el estudiante da uno de los valores de la variable. Dicho valor no corresponde ni al valor central del conjunto de datos ordenados según el orden numérico, ni tampoco al valor central del conjunto de datos original (sin ordenar). Pesamos que el conflicto se debe a que el alumno usa el sentido coloquial del término "mediano" dando un valor cualquiera de la variable diferente del máximo o del mínimo, pero que no corresponde al centro. Este error no lo hemos visto explicado en las investigaciones previas, aunque el número de alumnos que lo utiliza ha sido muy pequeño. Mostramos un ejemplo donde el valor 18 no está en el centro ni se relaciona con la media o moda. Ejemplo: *"El peso del niño mediano es de 18 kilos"*.

Tabla 6.4.1.6. Análisis de ejemplo en la categoría 3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*"El peso del niño mediano es de 18 kilos"*	• Hay algunos procesos de representación de las ideas de mediana, peso y unidad de peso, así como del valor particular de la mediana (proceso de particularización). • También se hace referencia a un elemento fenomenológico (niños). • *Conflicto* al dar como mediana el valor de uno de los datos que no corresponde al centro de la distribución. • No utiliza ninguna de las medidas de tendencia central.

Una vez categorizadas las respuestas, obtuvimos la frecuencia de cada una de ellas, que se presentan en la Tabla 6.4.1.7. Observamos que la mayor parte de estudiantes usa la mediana, y casi todos la calculan correctamente (68%), siendo los resultados mejores que en la investigación de Cobo (2003), quien obtuvo solamente el 38% de resultados correctos en este ítem. Explicamos esta diferencia por la mayor edad de nuestro grupo de estudiantes.

Tabla 6.4.1.7. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 5.1

Respuesta	Frecuencia	%
C1.1 Cálculo correcto de la media con datos aislados	70	13.5
C1.2 Cálculo incorrecto de la media con datos aislados	2	0.4
C2.1. Cálculo correcto de la mediana	352	68.0
C2.2 Usa la mediana pero no ordena los valores	64	12.4
C2.3 Mediana como valor central del rango de datos	3	0.6
C2.4. Mediana como valor central del rango de datos con error en operaciones	2	0.4
C3. Dar una solución que no tiene relación con las medidas de tendencia central	3	0.6
C4. No contesta	22	4.2
Total	518	100

Un 12.4% de estudiantes calcula la mediana sin ordenar los valores, respuesta que hemos explicado por la existencia de un conflicto semiótico consistente en la confusión del orden a que se refiere la definición de mediana. Este mismo error también fue encontrado en la investigación de Cobo (2003) en un 26.2% de estudiantes de 1º de ESO y 18.1% en los estudiantes de 4º. Previamente fue señalado por Barr (1980) en su estudio con alumnos de entre 17 y 21 años. El autor explica que este error surge porque los estudiantes no entienden que la mediana es un estadístico que se refiere al conjunto ordenado de datos.

Por otra parte, 13.9% de estudiantes de nuestra muestra confunde media y mediana calculando la media con alguno de los procedimientos descritos, de los cuales la mayor parte son correctos. Los porcentajes en Cobo (2003) de alumnos que calculan la media en este problema son 25% de estudiantes de 1º de ESO y 12.5% en los estudiantes de 4º. Un pequeño número de estudiantes presenta conflictos no descritos anteriormente, como el de confundir "centro estadístico" con "centro geométrico" del rango de variación de la variable.

En la Tabla 6.4.1.8 clasificamos los resultados, en función de la medida de tendencia central empleada, donde se aprecia que la mayor parte de estudiantes reconoce la idea de mediana en este ítem. Observamos que 81.3% de los alumnos de nuestra muestra conoce o recuerda la definición de mediana, y es capaz de calcularla para un conjunto impar de valores aislados, lo que nos arroja resultados aceptables. Otro porcentaje importante confunde la media con mediana, pero calcula correctamente la media (13.5%). En resumen, podemos decir que el ítem ha sido sencillo para nuestros estudiantes y que hemos obtenido mejores resultados que los de Cobo (2003).

Tabla 6.4.1.8. Resumen de frecuencia y porcentajes de respuestas en el Ítem 5.1

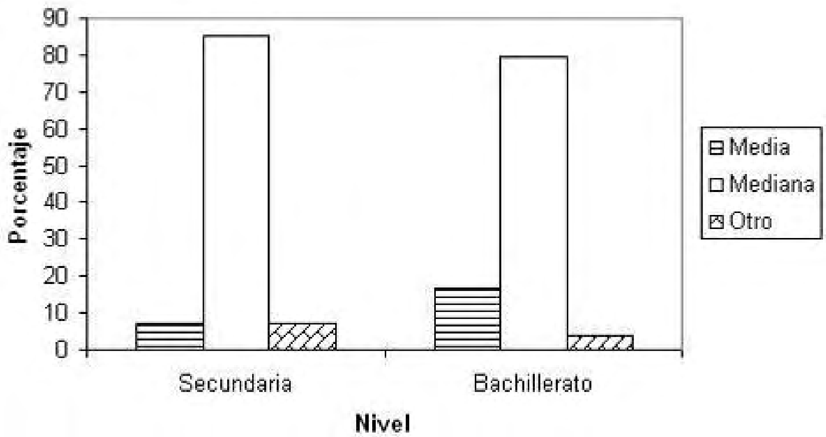
	Frecuencia	Porcentaje
Usa la idea de media	72	13.9
Usa la idea de mediana	421	81.3
Respuesta no relacionada con promedios	3	0.5
No contesta	22	4.3
Total	518	100.0

Tabla 6.4.1.9. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 5.1 por nivel escolar

		Nivel		
Respuesta		Secundaria	Bachillerato	Total
Media	Frecuencia	12	60	72
	% de nivel	7.4	16.9	13.9
Mediana	Frecuencia	138	283	421
	% de nivel	85.2	79.5	81.3
Otro	Frecuencia	12	13	25
	% de nivel	7.4	3.7	4.8
Total		162	356	518

En la Tabla 6.4.1.9 clasificamos las respuestas por nivel escolar para analizar las diferencias de respuestas, según tipo de alumno. La principal diferencia que se observa es que los alumnos de Secundaria (que son los menores en edad) dan mayor uso de la mediana, y, por lo tanto, mayor número de respuestas correctas, y de este mismo grupo de estudiantes, un bajo porcentaje utiliza la media, coincidiendo la misma proporción de alumnos que no responden al ítem, mientras que aumenta el uso de la media en los estudiantes de Bachillerato.

Figura 6.4.1.1. Porcentaje de respuestas en el ítem 5.1 por nivel escolar



Puede deducirse que poner mayor énfasis en el estudio de la media durante la enseñanza de estadística en Bachillerato hace que los alumnos traten de resolver todos los problemas usando este estadístico, ya que son pocos los que usan otros procedimientos. Se obtuvo un valor Chi cuadrado = 10.95 con 2 grados de libertad y una significación 0.0044 cumpliéndose las condiciones de aplicación, por tanto, encontramos diferencias significativas de respuestas según el nivel escolar de los estudiantes. En la Figura 6.4.1.1 se presentan los datos.

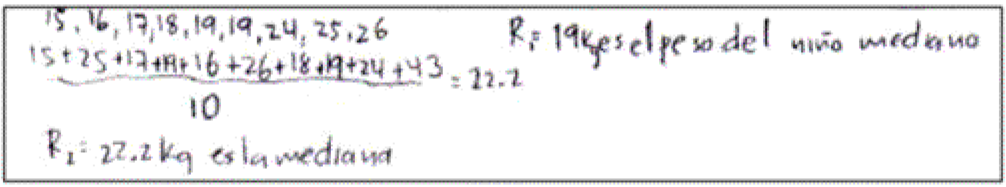
6.4.2. CATEGORÍAS DE RESPUESTAS EN EL ÍTEM 5.2

En este apartado se describen los argumentos utilizados por los alumnos para resolver el ítem 5.2. Entre ellos aparecen algunos de los conflictos anteriores, así como otros nuevos, debidos al uso de un número par de elementos en el conjunto de datos. Las respuestas se han categorizado de la siguiente forma:

C1. Usar la media, en lugar de la mediana. Como en el apartado anterior, en esta categoría se incluyen los estudiantes que presentan un conflicto, al menos terminológico entre media y mediana, debido a un proceso deficiente de significación. A su vez, se divide en varias categorías.

C1.1. Cálculo correcto de la media con datos aislados. Los estudiantes calculan correctamente la media, pero ahora incluyendo el nuevo valor 43. Observamos que persiste la confusión terminológica entre media y mediana, como se muestra en los siguientes ejemplos. Además se presenta otro conflicto al no apreciar el efecto de los valores atípicos sobre el cálculo de la media, es decir, un fallo en detectar la propiedad de que la media no es resistente a los valores extremos.

Ello puede ser debido a una generalización abusiva al suponer que la media es siempre un buen representante de los datos. En el segundo ejemplo, el alumno incluso usa la fórmula de medias ponderadas, que según Mevarech (1983), es considerada difícil, lo que muestra un buen conocimiento de la media por este estudiante. Analizamos en la Tabla 6.4.2.1 el primero de los ejemplos.



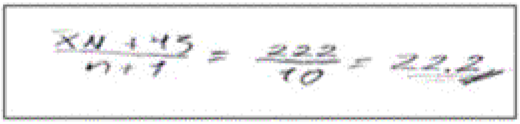
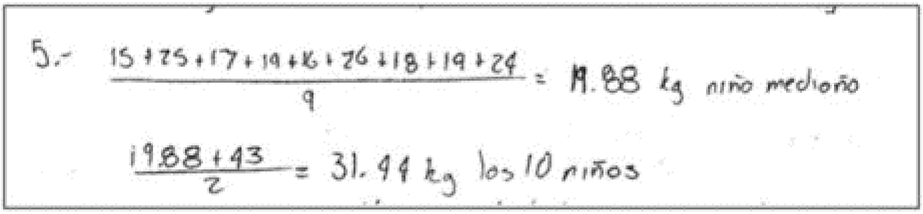


Tabla 6.4.2.1. Análisis de ejemplo en la categoría 1.1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*<u>15+25+17+19+16+26+18+19+24+43</u> = 22.2* *10*	• Asigna a cada numeral (representación numérica) el valor de una cantidad de magnitud peso (concepto); proceso de representación. • Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; construye un objeto (distribución) por composición de objetos simples. • Recuerda el algoritmo de cálculo de la media para datos aislados y lo aplica correctamente. Usa la idea de media como operación en el conjunto de datos (no interna, pues el valor no pertenece al mismo conjunto numérico); pone en correspondencia con la media, varias de sus propiedades. • Asigna un valor (media) al conjunto de datos (media como propiedad de la distribución). Hay un proceso de particularización. • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo. • *Conflicto* en el proceso de significación al no distinguir entre los conceptos o las expresiones verbales de media y mediana. • *Conflicto* al no apreciar el efecto de un valor atípico sobre el cálculo de la mediana.

C1.2. Al promedio obtenido del primer apartado, el alumno le suma el nuevo valor 43, y obtiene un nuevo promedio. El alumno da como mediana el valor obtenido. La respuesta contiene diferentes conflictos. Por un lado, hay un fallo en el proceso de significación, ya que a nivel conceptual o terminológico el estudiante confunde media y mediana. Por otro lado, se añade un conflicto procedimental a la hora de calcular la media, porque ésta no tiene la propiedad asociativa (atribuye una propiedad inexistente por generalización abusiva de esta propiedad). En consecuencia, la media calculada sería incorrecta, pues no pondera la primera media por su frecuencia. Este error ya fue descrito por Mevarech (1983), Cobo (2003) y Mayén (2006a). Finalmente, no se detecta el efecto del valor atípico sobre la media.


5.- $\frac{15+25+17+19+16+26+18+19+24}{9}$ = 19.88 kg niño medioño

$\frac{19.88+43}{2}$ = 31.44 kg los 10 niños

Tabla 6.4.2.2. Análisis de ejemplo en la categoría 1.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*$\frac{19.88 + 43}{2}$ = 31.44 kg los 10 niños*	• Asigna a cada numeral (representación numérica) el valor de una cantidad de magnitud peso (concepto); proceso de significación. • Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; construye un objeto (distribución) por composición de objetos simples. • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo. • Representa las operaciones suma y división, así como el algoritmo de la media; representa el resultado. • Se evocan los números decimales y un caso particular de los mismos. • *Conflicto* en el proceso de significación al no distinguir entre los conceptos o las expresiones verbales de media y mediana. • *Conflicto* en el cálculo de algoritmo de media al aumentar el nuevo dato; no usa ponderaciones. • *Conflicto* al suponer la propiedad asociativa para la media. • Usa la idea de media como operación en el conjunto de datos (no interna, pues el valor no pertenece al mismo conjunto numérico). • Asigna un valor (media) al conjunto de datos (media como propiedad de la distribución). Hay una particularización. • Representaciones numérica y verbal.

C1.3 Cálculo incorrecto de la media, dividiendo el total por dos. El alumno usa tanto la idea de media como la de mediana, pero comete en las dos un error de cálculo. El usar los dos promedios indica un conflicto de significación y el alumno no sabe decidir cuál de los dos promedios se requiere en el problema.

Observamos que el alumno, para calcular la media, en lugar de dividir el total por el número de datos, divide por dos. En la segunda parte, realiza el mismo procedimiento, pero ahora suma todos los valores incluyendo el atípico, por lo cual se muestra que el procedimiento no ha sido accidental, sino que se debe a un conflicto respecto al algoritmo de la media. Se producen una serie de conflictos, tanto de procedimiento como conceptuales (atribuir a la media la propiedad asociativa, no reconocer que la media ha de ser un valor situado en el rango de la variable). Hay también un fallo de interpretación al no reconocer que un peso de 111 kg. no tiene sentido en el contexto del problema.

En cuanto al cálculo de la mediana, el estudiante toma el centro del conjunto de datos sin ordenarlos para realizar el cálculo, conflicto que ya hemos descrito en el apartado anterior.

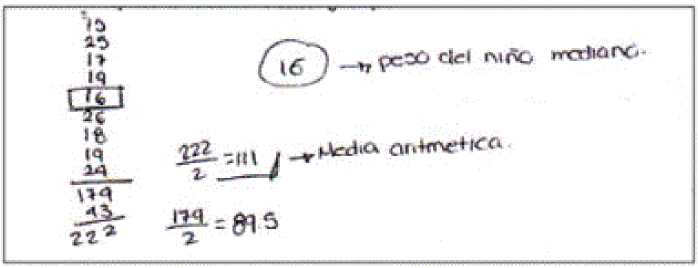


Tabla 6.4.2.3. Análisis de ejemplo en la categoría C1.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*15* *25* *17* *19* *16* *26* *18* *19* *24* *179* *43* *222*	• Asigna a cada numeral (representación numérica) el valor de una cantidad de magnitud peso (concepto); proceso de representación. • Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos. • Usa la idea de mediana como valor central, que corresponde al valor de la variable del elemento central en la serie. • *Conflicto al no ordenar los datos*, confunde el orden a que se refiere la definición. • Suma el valor del nuevo elemento al total para calcular la mediana con un nuevo dato (conflicto en la definición de mediana y también en el algoritmo para un número par de datos). • Diferentes procesos de representación de datos y operaciones.
U2	*222/2 = 111 Media aritmética*	• Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo. • Representación de la operación de división y de su resultado. • *Conflicto semiótico* al atribuir la propiedad asociativa a la media. • *Conflicto al interpretar el resultado.* El valor de peso medio 111 kg. no tiene sentido en este contexto. • *Conflicto al no apreciar que la media es un valor en el rango de la variable.* • Proceso de representación de conceptos (media), procedimientos y sus resultados.

C2. Calcula la mediana correctamente. El razonamiento sería similar al ya descrito para la solución correcta del ítem, por lo que sólo haremos un análisis resumido del ejemplo que analizamos en la Tabla 6.4.2.4, para mostrar la nueva actividad matemática inducida por el caso de indeterminación de la mediana.

Observamos que, además de la actividad ya indicada en la solución correcta analizada, el alumno ha de reconocer que en este caso hay dos elementos centrales en el conjunto de datos y cada uno de ellos verifica la definición de mediana. La indeterminación se resuelve por convenio hallando el punto medio de los dos valores centrales. Dicho punto medio se calcula como media aritmética de los extremos del segmento definido por los valores centrales. En este caso, puesto que los dos valores son idénticos, no haría falta aplicar el algoritmo. Aún así, la mayoría de los alumnos lo aplican, posiblemente debido al contrato didáctico de la clase.

"Mediana si se incluye peso = 43 kg.

15, 16, 17, 18, 19, 19, 24, 25, 26, 43

Mediana = (19+19)/2 = 19"

Tabla 6.4.2.4. Análisis de ejemplo en la categoría 2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Mediana si se incluye peso = 43 kg.*	• Hace referencia a los conceptos mediana y peso; las unidades de medida y un valor particular de la mediana (varios procesos de particularización). • Representaciones numérica y verbal de los referidos conceptos y datos (procesos de representación).
U2	*15,16,17,18,19,19,24,25,26, 43*	• Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos y como las medidas de cantidades de la magnitud peso. • Ordena correctamente los datos (procedimiento); usa correctamente la idea de orden (concepto) y particulariza al orden numérico. • Recuerda que la mediana es el centro de un conjunto ordenado (definición); Combina en la definición las ideas de orden y centro (propiedades y proceso de composición).
U3	*Mediana* $= \frac{19 + 19}{2} = 19$	• Usa la idea de mediana como centro de la distribución (definición de mediana). • Obtiene el valor de la mediana, incluyendo el nuevo valor (procedimiento de cálculo para número par de valores). • Recuerda el algoritmo de mediana al aumentar el nuevo dato; resuelve el caso de indeterminación (algoritmo). • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo.. • Particulariza de la idea general de mediana y su procedimiento de cálculo a la mediana particular del conjunto de datos.

C2.1. El alumno no ordena los datos para obtener la mediana, aunque resuelve el caso de indeterminación, conflicto que también fue hallado por Carvalho (1998, 2001), Cobo (2003) y Mayén (2006b), que ya hemos comentado en el apartado anterior. Un ejemplo es el siguiente: *"La mediana con el niño incluido es 21"*. En este ejemplo, el alumno se limita a añadir el valor 43 a la lista de datos no ordenada (es decir, ordenada según se dieron los datos) y halla el valor central de la serie 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24, 43. Hay ahora dos puntos "centrales" 16 y 26; cuya media aritmética es 21. Los alumnos que dan esta solución, tampoco han ordenado los datos en la primera parte del ítem, por lo que el error no es accidental, sino que se explica por el conflicto semiótico que hemos descrito.

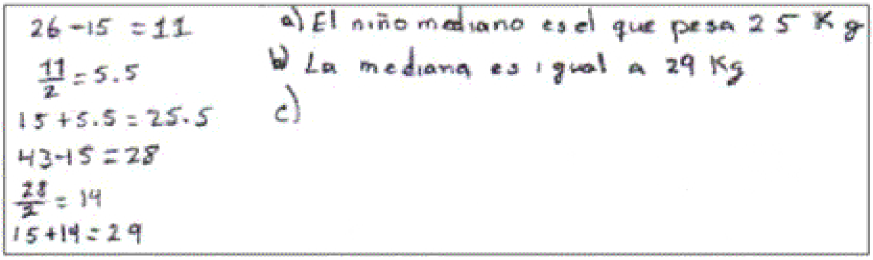
Tabla 6.4.2.5. Análisis de ejemplo en la categoría 2.1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*"La mediana con el niño incluido es 21"*	• El alumno no ha ordenado los datos, añade el 43 al final de la lista de datos sin ordenar; amplia su distribución con un nuevo dato (generalización). • La lista construida tiene dos valores centrales 16 y 26. El alumno reconoce que cada uno de ellos cumple la definición de mediana y por tanto hay un caso de indeterminación. • Aunque el alumno no explicita algoritmo de cálculo, deducimos que ha obtenido la media de los dos valores centrales (16,26) sin ordenarlos previamente, para obtener el resultado 21. • Asigna a cada representación numérica el valor de una cantidad de magnitud peso; proceso de significación; también hay referencia a los objetos "magnitud" y "peso". • Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; composición de objetos para crear un objeto complejo. • Usa la representación verbal de la mediana y el concepto de mediana como "centro". • Usa la idea de mediana como valor central, que corresponde al valor de la variable del elemento central en la serie. • Aplica el caso de indeterminación al calcular la mediana de un número par de valores. • Hay un *conflicto* al no ordenar los valores de la variable.

C2.2. Mediana como valor central del rango de datos. El alumno ha comprendido que la mediana se refiere a un valor central de los datos, pero interpreta que se refiere al centro geométrico del rango de valores. El estudiante obtiene la media aritmética de los valores extremos, considerando el nuevo valor de 43 y al resultado lo considera como la mediana, como mostramos en el ejemplo analizado la Tabla 6.4.2.6.

En consecuencia, el alumno aplica la idea de mediana como valor central, pero aparece un conflicto en la identificación de cuál es valor del centro que se debe de calcular. Es decir, asocia la mediana a la idea de centro, pero se produce un conflicto al no saber a qué se refiere este centro, confundiendo "centro estadístico de la distribución", con "centro geométrico del rango de variación". De la idea general de "centro" el alumno ha de particularizar la "mediana como centro"; pero la particularización que hace es incorrecta.

Por otra parte, el alumno ha identificado el máximo y mínimo de la serie de datos y ha calculado el punto medio del segmento marcado por estos dos extremos. Conoce y usa la idea y procedimiento de cálculo del punto medio. El alumno es consistente entre la primera y segunda parte del ítem, por lo cual el error no es accidental, sino que se explica por el conflicto señalado, no descrito en otras investigaciones.


26 − 15 = 11
$\frac{11}{2}$ = 5.5
15 + 5.5 = 25.5
43 − 15 = 28
$\frac{28}{2}$ = 14
15 + 14 = 29

a) El niño mediano es el que pesa 25 Kg
b) La mediana es igual a 29 Kg
c)

Tabla 6.4.2.6. Análisis de ejemplo en la categoría 2.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*43 – 15 = 28*	• Asigna a cada representación numérica el valor de una cantidad de magnitud peso (proceso de significación; uso de conceptos, lenguaje y propiedades). • Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos, construcción de la idea de distribución a partir de los datos aislados. • Identifica los extremos del conjunto de datos, proceso de particularización de la idea general de extremos a los extremos particulares del conjunto de datos. • Halla la diferencia. • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo.
U2	*$\frac{28}{2}$ = 14* *15 + 14 = 29* *b)La mediana es igual a 29 kg*	• Procesos de representación de los extremos, su diferencia, el cociente y valor obtenido. • Obtiene la mitad de la amplitud del rango (uso de conceptos procedimientos y proceso de particularización). • Halla el centro del rango sumando la mitad de la amplitud al extremo inferior (conceptos, propiedades procedimientos y particularización). • Procesos de representación de operaciones, mediana, igualdad, unidad de medida y cantidad de peso. • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo. • *Conflicto* al considerar la mediana como centro del rango de valores (definición incorrecta). • *Conflicto* en el algoritmo de cálculo de mediana, además de redondear el valor obtenido.

C2.3. Divide la amplitud del rango en el conjunto de datos inicial y el nuevo valor por el número de datos. Se conserva la idea de mediana como centro del rango, incluso con el nuevo valor (valor atípico). El procedimiento es similar al descrito en el caso 2.2, por lo que no repetimos el análisis. Sin embargo, el alumno también muestra un error en el algoritmo de cálculo de punto medio, pues divide por el número de datos, es decir, por 10, y el resultado es lo que considera como mediana. Este error se debe a un nuevo conflicto en la definición y algoritmo de cálculo de punto medio de un segmento. No hemos encontrado este tipo de respuesta, que incluye varios conflictos de los descritos en las investigaciones previas.

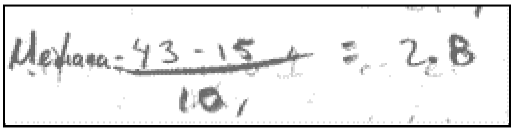
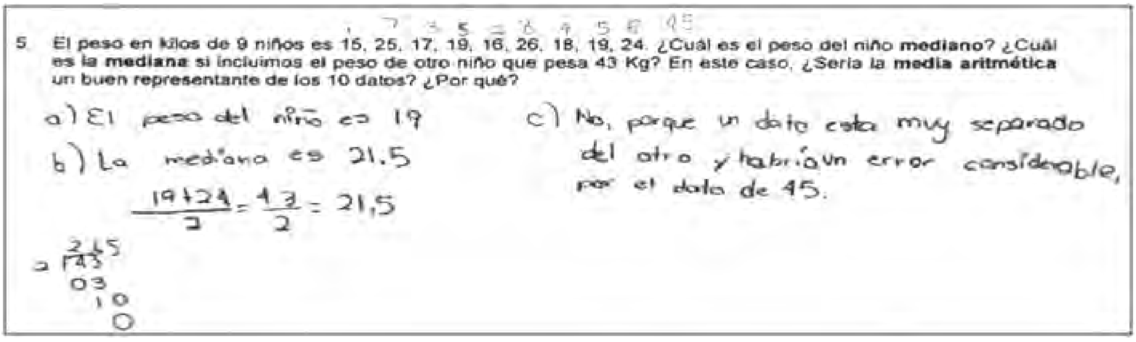


Tabla 6.4.2.7. Análisis de ejemplo en la categoría 2.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	$\frac{43-15}{10} = 2.8$	• Asigna a cada representación numérica el valor de una cantidad de magnitud peso (proceso de significación; uso de conceptos, lenguaje y propiedades). • Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos; construcción de la idea de distribución a partir de los datos aislados. • Identifica los extremos del conjunto de datos; usa las ideas de máximo mínimo y rango; proceso de particularización de la idea general de extremos a los extremos particulares del conjunto de datos. • Obtiene la media de los valores extremos para hallar el centro del recorrido de la variable (conceptos y procedimientos); nueva particularización a la media del conjunto de datos. • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo. • Procesos de representación de los extremos, su diferencia, el cociente y valor obtenido. • *Conflicto* al considerar la mediana como centro del rango de valores (definición incorrecta). • *Conflicto* al particularizar indebidamente la idea de centro (confusión de centro estadístico y centro geométrico). • *Conflicto* en el algoritmo de cálculo del centro del rango, al usar un divisor inadecuado.

C2.4. No tener en cuenta la frecuencia de valores en el cálculo de la mediana. En esta parte del problema, el alumno realiza correctamente el cálculo de la mediana, ya que ordena el conjunto de datos, considerando el nuevo valor. También aplica correctamente la definición de mediana como centro del conjunto de datos ordenado, según el orden numérico. Sin embargo, no tiene en cuenta la repetición del 19, es decir, considera sólo los valores de la variable sin tener en cuenta su frecuencia.

Este error, que no hemos encontrado referenciado en la bibliografía, y sin embargo, aparece con cierta frecuencia en nuestros estudiantes, puede ser parecido al error de los estudiantes que no tienen en cuenta las frecuencias en el cálculo de la media. Mevarech (1983) indicó que para el caso de la media este error se debe a que los alumnos asumen que la media tiene la propiedad asociativa. En nuestro caso además de la posible atribución incorrecta de la propiedad asociativa a la mediana, pensamos que se produce un conflicto, tanto respecto a la idea de frecuencia como respecto a la de orden. Al tratar de ordenar de menor a mayor el conjunto de datos asignándole un número, encuentra un valor repetido (19). Los dos valores 19 estarían en el mismo lugar de la ordenación para el estudiante, pues es indiferente poner uno antes que el otro. Es decir, puesto que 19 remite al peso de un niño imaginario, si tenemos dos niños del mismo peso, sería indiferente colocar a uno u otro en el quinto lugar en orden de peso. El estudiante resuelve el conflicto omitiendo uno de los valores. A continuación mostramos un ejemplo, que se analiza en la Tabla 6.4.2.8.



1 7 3 5 2 8 4 5 6 45

5 El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño **mediano**? ¿Cuál es la **mediana** si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg? En este caso, ¿Sería la **media aritmética** un buen representante de los 10 datos? ¿Por qué?

a) El peso del niño es 19

b) La mediana es 21.5

$\frac{19+24}{2} = \frac{43}{2} = 21,5$

c) No, porque un dato esta muy separado del otro y habría un error considerable, por el dato de 45.

Tabla 6.4.2.8. Análisis de ejemplo en la categoría 2.4

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*1 7 3 5 2 8 4 5 6 43* *15 25 17 16 26 18 26 19 24* *b) La mediana es 21.5*	• Asigna a cada representación numérica el valor de una cantidad de magnitud peso (proceso de significación; uso de conceptos, lenguaje y propiedades). • Asigna a cada valor un número consecutivo (según su orden numérico); asigna el mismo número a los dos valores 19, no teniendo en cuenta su repetición. • Visualiza el conjunto de numerales como un conjunto de datos, construcción de la idea de distribución a partir de los datos aislados. • Proceso de particularización del concepto mediana a la mediana particular del conjunto de datos. • Proceso representación del concepto mediana y su valor en el ejemplo.
	$\frac{19+24}{2} = \frac{43}{2} = 21.5$	• Ordena correctamente los datos y considera el valor atípico. • Usa la definición correcta de mediana como centro del conjunto ordenado. • Reconoce y resuelve correctamente el caso de indeterminación dividiendo por dos los dos valores centrales. • Igualdad (concepto); particularización en este ejemplo. • Representación de las operaciones suma y división y su resultado. • Conflicto al no tener en cuenta la repetición del 19, por lo que obtiene un resultado erróneo.

También en esta parte del ítem (Tabla 6.4.2.9), un alto porcentaje de estudiantes (70.4%), utiliza la mediana y algo más de la mitad del total de la muestra 60% lo hace correctamente.

Tabla 6.4.2.9. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el ítem 5.2

Respuesta	Frecuencia	%
C1.1. Cálculo correcto de la media con datos aislados	95	18.3
C1.2. Suma el nuevo valor 43 y obtiene un nuevo promedio (media)	9	1.7
C1.3 Media obteniendo la suma total de los datos divididos por dos	2	0.4
C2. Calcula la mediana correctamente	310	60.0
C2.1. Usa la mediana pero no ordena los valores	52	10.0
C2.2. Mediana como valor central del rango de datos	2	0.4
C2.3. Divide la amplitud del rango en el conjunto de datos inicial y el nuevo valor por el número de datos.	1	0.2
C2.4. Obtiene la mediana, sin tener en cuenta la frecuencia	47	9.1
Total	518	100.0

El principal error relacionado con el uso de la mediana es no ordenar los valores (10 %), aunque encontrado con menor frecuencia que en las investigaciones de Carvalho (1996) y Cobo (2003). Este error aparece en esta última investigación en el 35% de alumnos de 1º curso de ESO y 12.5% de 4º. Un error no citado en los trabajos anteriores es obtener la mediana sin considerar las repeticiones en los datos (9.1% de estudiantes) y tomar como mediana el centro del rango, que aparece en dos de los estudiantes. En lo que respecta al uso de la media, 20.3% de estudiantes la utilizan y casi todos la calculan bien. En la investigación de Cobo (2003), 21.4% de los chicos de 1º de ESO usan correctamente la media en este ítem, y 11.1% de los chicos de 4º.

Tabla 6.4.2.10. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 5.2

	Frecuencia	Porcentaje
Usa la idea de media	106	20.3
Usa la idea de mediana	365	70.4
No usa frecuencias	47	9.1
Total	518	100.0

En la Tabla 6.4.2.10 resumimos los datos anteriores sumando las respuestas que hacen referencia a un promedio dado. Los resultados de Cobo (2003), indican que el

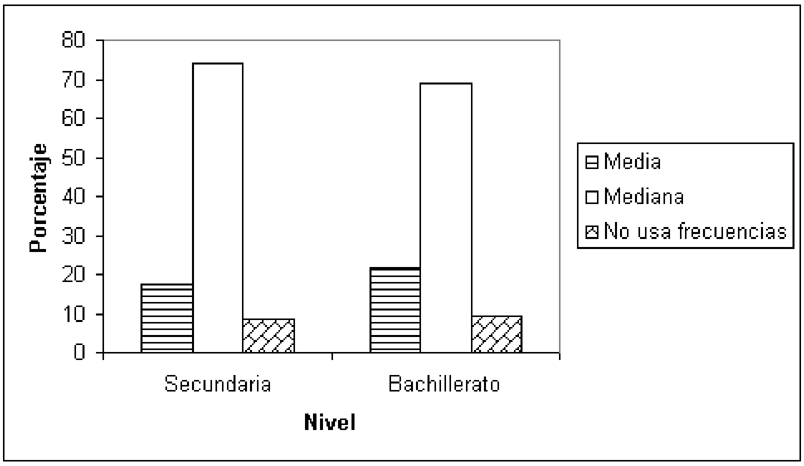
32% de sus estudiantes resuelven correctamente este ítem; y de esta muestra 20.3% de los alumnos hacen uso de la media y 70.4% de la mediana, aunque como vimos sólo 55% correctamente. Observamos que en nuestra muestra, los resultados también son mejores en este ítem.

Tabla 6.4.2.11. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el Ítem 5.2 clasificadas por nivel escolar

		Nivel		
Respuesta		Secundaria	Bachillerato	Total
Media	Frecuencia	28	78	106
	% de nivel	17.3	21.9	20.3
Mediana	Frecuencia	120	245	365
	% de nivel	74.1	68.8	70.4
No usa frecuencias	Frecuencia	14	33	47
	% de nivel	8.6	9.3	9.1
Total		162	356	518

En cuanto a nuestros resultados obtenidos por nivel escolar (Tabla 6.4.2.11), apreciamos que 75% de los estudiantes de Secundaria son quienes mayor y mejor uso hacen de la mediana en un problema con datos aislados, mientras que un 68.8% de estudiantes de Bachillerato contestan bien el ítem. Vemos poca diferencia entre ambos grupos en los altos porcentajes de respuestas correctas, y por otra parte, esto nos indica que ha sido un ítem sencillo para nuestros alumnos.

Figura 6.4.2.1. Porcentaje de respuestas en el ítem 5.2 por nivel escolar



Se obtuvo un valor Chi cuadrado = 1.65 con 2 grados de libertad, cumpliéndose las condiciones de aplicación, que no fue estadísticamente significativo. Esto indica que para este ítem las diferencias entre ambos grupos no son significativas. En la Figura 6.4.2.1 se presentan los datos.

6.4.3. CATEGORÍAS DE RESPUESTAS EN EL ÍTEM 5.3

En la última parte del ítem 5 se pretende evaluar si los estudiantes son capaces de elegir un buen representante estadístico para una distribución en la que aparece un valor atípico. También deben argumentar su elección en base a las propiedades de las medidas de tendencia central. Para responder la pregunta, el alumno debe tener en cuenta las siguientes propiedades: "*En el cálculo de la media intervienen todos los valores de los datos, mientras que en el de la mediana no*", "*la media cambia siempre que cambia algún dato, mientras que la mediana puede no cambiar*"; "*la media y mediana coinciden únicamente en distribuciones simétricas*" y "*la media es menos resistente al efecto de los valores atípicos que la mediana*". Por otro lado, conocer las definiciones y algoritmos de cálculo de media y mediana. Las respuestas que hemos encontrado se describen a continuación.

C1. Considerar que la media aritmética es adecuada como representante del conjunto de datos, sin dar una explicación de cómo llega a esa conclusión. En esta respuesta no podemos ver las razones en que el estudiante apoya su argumento. En todo caso hay un conflicto sobre la idea de representante, pues la media es muy sensible a los valores extremos, propiedad que no se considera en esta respuesta. Cobo (2003), señala que una parte de sus estudiantes indica que la media es representativa en este problema, pero no diferencia categorías de respuestas entre ellos. Un ejemplo de estas respuestas se transcribe y analiza en la Tabla 6.4.3.1, que contiene varios conflictos y un proceso de generalización abusiva: *"Si sería un buen representante"*

Tabla 6.4.3.1. Análisis de ejemplo en la categoría 1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Si sería un buen representante*	• Referencia implícita a la media (concepto) al contestar afirmativamente la pregunta; particularización de la idea general al problema dado. • Referencia a las ideas de conjunto de datos (implícita) y representante (explícita); concepto y propiedad. • Particularización al ejemplo que se está estudiando. • *Conflicto* al considerar la media un buen representante en este caso. • Aplicación indebida de propiedades haciendo una generalización abusiva

		de ellas; la media es menos resistente que la mediana a la presencia de valores atípicos, esto no es detectado. • *Conflicto al no identificar un valor atípico ni detectar su efecto sobre la media.* • Usa la representación verbal; proceso de representación.

C1.1. Suponer la media adecuada en cualquier circunstancia. Justificar que la media es un buen representante de este conjunto de datos particular por entender que cualquier medida de tendencia central lo sería.

Como en el caso anterior, esta respuesta enmascara un conflicto, al no tener en cuenta la distorsión introducida por el alto valor extremo sobre el valor de la media. Supone un fallo al reconocer que la media sólo se aproxima al centro de la distribución en distribuciones simétricas. Posiblemente esta confusión pueda ser debida a la forma en que algunas veces se definen las medidas de tendencia central, como "estadísticos alrededor de los cuáles se agrupan los datos". También implica que el alumno piensa que la media es resistente frente a valores atípicos, lo que es razonable si en la enseñanza recibida no se hizo énfasis especial en este concepto. Este tipo de respuesta fue encontrada también por Cobo (2003). Un ejemplo es el siguiente, que se analiza en la Tabla 6.4.3.2: "*Sí, porque es un promedio de los 10 pesos, lo que te da una idea general acerca de los niños*".

Tabla 6.4.3.2. Análisis de ejemplo en la categoría 1.1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*"Sí, porque es un promedio de los 10 pesos, lo que te da una idea general acerca de los niños"*	• Referencia implícita a la media (al contestar afirmativamente la pregunta). • Referencia a las ideas de conjunto de datos (implícita) y representante (explícita); concepto y propiedad; peso (concepto). • Promedio (referencia a un objeto sistémico, constituido por media, mediana y moda). • Proceso de particularización (de promedio general al promedio en el conjunto de datos; de peso en general al peso de los diez niños). • Conflicto al suponer que cualquier promedio es representativo. • *Conflicto* en la propiedad de que la media es menos resistente que la mediana en la presencia de valores atípicos. • *Conflicto* en la propiedad de los promedios de coincidir en distribuciones simétricas. • *Conflicto al no identificar un valor atípico.* • Usa la representación verbal y numérica (proceso de representación).

C1.2. Este conflicto, es una variante del anterior, en la que, además de dar un argumento, *el alumno obtiene la media aritmética considerando todos los datos,* incluyendo el 43. El alumno no compara el promedio obtenido con la serie de datos, no percibe la diferencia respecto a éstos. Sin embargo, en su respuesta podemos apreciar que conoce el algoritmo de la media y lo lleva a cabo sin errores. El resto de la actividad matemática desarrollada es similar a la del ejemplo anterior. Analizamos en la Tabla 6.4.3.3 el siguiente ejemplo: *Media aritmética = 22.2; "Sí porque nos da una idea de cuánto debe pesar un niño".*

Tabla 6.4.3.3. Análisis de ejemplo en la categoría 1.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*"Sí porque nos da una idea de cuánto debe pesar un niño"*	• Referencia implícita a la media (al contestar afirmativamente la pregunta). • Referencia a las ideas de conjunto de datos (implícita) y representante (explícita); concepto y propiedad. • *Conflicto* al suponer que cualquier promedio es representativo. • *Conflicto* en la propiedad de que la media es menos resistente que la mediana en la presencia de valores atípicos. • *Conflicto al no identificar valores atípicos.* • *Conflicto* en la propiedad de los promedios de coincidir en distribuciones simétricas. • Representación numérica y verbal, proceso de representación.
U2	*Media aritmética = 22.2*	• Referencia a la media y particularización a una media específica. • Cálculo correcto de la media en el conjunto de datos. • Representación numérica y verbal, proceso de representación.

C1.3. Se observa que el alumno *considera como media aritmética* al resultado de dividir el valor nuevo, 43 por dos. Además de todos los conflictos anteriores, se observa uno más respecto a la definición de media aritmética y al conocimiento de su algoritmo que están aplicados incorrectamente en este caso. No obstante, el valor numérico obtenido representa mejor el conjunto de datos que el que se obtendría al calcular directamente la media, lo que puede explicar el procedimiento usado por este estudiante: *"No, sería 21.5 la media aritmética representante"*

Tabla 6.4.3.4. Análisis de ejemplo en la categoría 1.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*"No, sería 21.5 la media aritmética representante"*	• Referencia implícita a la media (al contestar afirmativamente la pregunta). • Referencia a las ideas de conjunto de datos (implícita) y representante (explícita); concepto y propiedad. • *Conflicto* en la propiedad de que la media es menos resistente que la mediana en presencia de valores atípicos. • *Conflicto* en la propiedad de los promedios de coincidir en distribuciones simétricas.

		• Error del algoritmo de cálculo de la media aritmética. • Representación verbal.

C2. Considera que la media no es representativa. Algunos alumnos dan la respuesta correcta, indicando que para este ejemplo particular, la media no sería un buen representante. Estos alumnos detectan el valor atípico en los datos y su efecto sobre el cálculo de la media, convirtiéndola en un representante no adecuado para este problema.

El estudiante que da este argumento ha sido capaz de aplicar con éxito las propiedades descritas de la mediana y además sabe elegir un representante adecuado del conjunto de datos. Cobo (2003) también encontró esta respuesta. Un ejemplo de la misma es el siguiente, que analizamos en la Tabla 6.4.3.5: *"La media aritmética no sería un buen representante porque los valores iniciales son muy desviados, es decir, tienen mucha diferencia entre sí"*

Tabla 6.4.3.5. Análisis de ejemplo en la categoría 2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*"La media aritmética no sería un buen representante porque los valores iniciales son muy desviados, es decir, tienen mucha diferencia entre sí"*	• Referencia implícita a la media (al contestar afirmativamente la pregunta). • Referencia a las ideas de conjunto de datos (implícita) y representante (explícita); concepto y propiedad. • El alumno se da cuenta de que el valor de la media se aleja del centro de la distribución (posición de la media en distribuciones asimétricas). • Detecta el valor atípico (muy desviado del resto). • Nota la influencia de este valor sobre la media. • Idea de buen representante (propiedad de los promedios). • Representación verbal; proceso de representación.

En la Tabla 6.4.3.6 se presentan las frecuencias de respuesta a este apartado. Esta pregunta fue mucho más difícil que las dos anteriores, como se observa al aumentar del número de respuestas en blanco (24%). Fue también más difícil en los estudiantes de Cobo (2003), aunque la autora no informa sobre la frecuencia de estudiantes sin contestar. Pensamos que esta dificultad se debe a que la clase de matemáticas se centra mucho en el cálculo de promedios y no se suele incidir en las actividades interpretativas o en la elección del estadístico más adecuado en cada situación.

De los estudiantes que responden este ítem, la mayoría considera que la media es representativa, sin darse cuenta de que el valor atípico afecta mucho a la media aumentando su valor. En la investigación de Cobo (2003), 17% de estudiantes de 1º de ESO y 11.8% de 4º aceptan la media como representativa en este ítem, sin embargo, es más frecuente este tipo de respuesta en los alumnos de nuestra muestra. Hemos diferenciado varias categorías, señalando que el 20% de estudiantes dan esta respuesta sin justificarla y un 18.7% indican esta misma respuesta, incluso después de haber calculado la media.

Tabla 6.4.3.6. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el ítem 5.3

Respuesta	Frecuencia	%
C1. Considerar que la media aritmética es adecuada y no justifica	32	6.2
C1.1. La media es adecuada siempre, no tiene en cuenta la distorsión introducida por el alto valor extremo sobre el valor de la media	107	20.7
C.1.2. La media es adecuada; además obtiene la media aritmética considerando todos los datos, incluyendo el 43	86	16.6
C.1.3. La media es adecuada, considera como media aritmética al resultado de dividir el valor nuevo, 43 por dos	11	2.1
C.2. Considera que la media no es adecuada, porque el valor obtenido no sería representativo	159	30.7
C3. No contesta o no justifica	123	23.7
Total	518	100.0

Aproximadamente la tercera parte de estudiantes, 30.7%, responde correctamente e indica que al utilizar la media los pesos medios se distorsionan al incluir un valor tan alejado del resto de los datos. En los estudiantes de Cobo (2003), el 21.4% de 1º de ESO y el 11.1% de 4º, también contestan correctamente a este ítem. Observamos que en esta parte, nuestros resultados son mejores.

Tabla 6.4.3.7. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el Ítem 5.3

	Frecuencia	Porcentaje
Media adecuada	236	45.6
Media no adecuada	159	30.7
No contesta o no justifica	123	23.7
Total	518	100.0

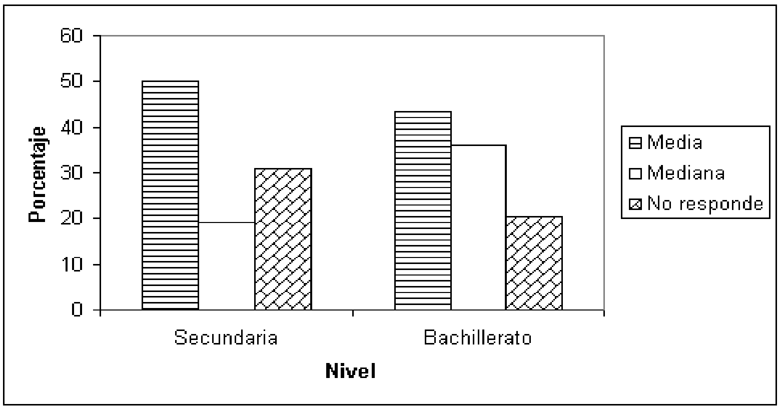
En la Tabla 6.4.3.7 resumimos los datos anteriores sumando las respuestas que hacen referencia a cada medida de tendencia central. En esta parte del ítem, donde se espera una respuesta verbal, notamos que persiste la confusión entre media y mediana, ya que casi la mitad de los estudiantes, 45.6%, contesta que es mejor utilizar la media como mejor representante de un conjunto de datos. La otra parte de las respuestas se divide en el 30% de alumnos que dan una respuesta correcta, y también es alto porcentaje de estudiantes que no responden al ítem, es decir, 23.7%.

En la Tabla 6.4.3.8 y Figura 6.4.3.1 se resumen los datos por grupo. Con estos datos podemos observar que el grupo de Bachillerato obtuvo mejores resultados, 36% de respuestas correctas, en comparación con el 19.1% de Secundaria, que utilizan la mediana. Por otra parte, la mitad de alumnos de Secundaria, así como 43.5% de los estudiantes de Bachillerato prefieren utilizar la media. Al parecer, resultó difícil para nuestros alumnos dar respuesta a este ítem, ya que el 31% de estudiantes de Secundaria y el 20% de Bachillerato no lo responde. Se obtuvo un valor Chi cuadrado = 11.234 con 2 grados de libertad y una significación menor que 0.003, cumpliéndose las condiciones de aplicación. Este valor de Chi-cuadrado indican que las diferencias entre los grupos son estadísticamente significativas.

Tabla 6.4.3.8. Frecuencia y porcentajes de respuestas al Ítem 5.3 por nivel escolar

Respuesta		Nivel		
		Secundaria	Bachillerato	Total
Media	Frecuencia	81	155	236
	% de nivel	50.0	43.5	45.6
Mediana	Frecuencia	31	128	159
	% de nivel	19.1	36.0	30.7
No responde	Frecuencia	50	73	123
	% de nivel	30.9	20.5	23.7
Total		162	356	518

Figura 6.4.3.1. Porcentaje de respuestas en el ítem 5.3 por nivel escolar



6.5. ANÁLISIS DEL ÍTEM 6

Esta sección la dedicamos al análisis de los conflictos semióticos hallados del ítem

6, relacionado también con la mediana. Este ítem registró mayor número de respuestas incorrectas en nuestra muestra, tanto en los estudiantes de Secundaria como en los estudiantes de Bachillerato, siendo también muy difícil para los estudiantes españoles en los dos grupos de ESO analizados por Cobo (2003). Ello nos indica que la dificultad no es específica de nuestro contexto, sino que puede ser más generalizada.

Con este ítem se intenta averiguar si los estudiantes son capaces de identificar qué medida de posición central deben utilizar ante un problema representado con variables ordinales y no numéricas. En consecuencia, aunque su contenido esencial se relaciona con la mediana, requiere también conocimiento de la media (como el hecho de que ésta no es una medida adecuada para datos ordinales). También señalamos los conflictos encontrados por Cobo (2003) en este ítem:

- No reconocer la comparación de dos conjuntos de datos como campo de problemas de los promedios. Se trataría de los estudiantes que resuelven el problema sin utilizar los promedios, sino comparando algún dato aislado.
- Suponer definida la media en un conjunto de datos ordinales. Estos alumnos no discriminan datos ordinales y numéricos, y por tanto, calculan la media para resolver el problema.

A continuación, tratamos de observar si estos conflictos reaparecen en nuestra muestra y si se encuentran otros no definidos por Cobo (2003) o en otras investigaciones anteriores. Analizamos en primer lugar la solución experta al ítem para luego estudiar las respuestas en cada uno de sus apartados.

Ítem 6

Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1: I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S

Grupo 2: S S I I A N A N I I S N A S I N N

1. *¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?*
2. *¿Cuál sería la medida de tendencia central más apropiada para representar estos datos?*

Para resolver el problema, y puesto que los datos son ordinales, la medida de tendencia central más adecuada sería la mediana. Para calcularla en cada grupo, el alumno tendría que ordenar previamente los valores, como se muestra a continuación:

*Grupo 1: I I I I I A A A A A A **A** N N N S S S S S S S S*

*Grupo 2: I I I I I A A A **N** N N N N S S S S*

El primer grupo tiene 23 elementos, luego el alumno central, que ocupa la posición 12 tiene un *Aprobado*. En el segundo grupo el valor de la mediana es *Notable,* puesto que el elemento central es el 9 al haber 17 elementos. Una dificultad del problema es que tiene diferente número de casos en cada grupo. A continuación analizamos esta solución.

Tabla 6.5.1. Análisis de la solución correcta al ítem 6

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:* *Grupo 1: I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S* *Grupo 2: S S I I A N A N I I S N A S I N N*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad). • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado,* etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno). • El alumno ha de poner en correspondencia (proceso) cada valor ordinal en la serie *I A A N N S S I I* ... con las calificaciones de niños imaginarios (elementos fenomenológicos). • Ha de visualizar cada serie como un todo (serie de datos), remitiendo a la idea de distribución (concepto).
U2	*a) ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?*	• Hay un convenio implícito, sobre el sentido de “mejores”, puesto que ninguno de los dos grupos tiene todas sus notas mejores que el otro. La pregunta establece una correspondencia implícita con un campo de problemas “comparar dos grupos”, cuya solución viene dada por la comparación de medidas de tendencia central. • Debe también reconocer a la mediana como solución del campo de problemas “búsqueda de un representante en datos ordinales”. • Ha de recordar que la media no se puede calcular con los datos dados.
U3	Para calcular la mediana en cada grupo, el alumno tendría que ordenar previamente los valores, como se muestra a continuación: *Grupo 1: I I I I I A A A A A A **A** N N N S S S S S S S S* *Grupo 2: I I I I I A A A **N** N N N N S S S S*	• El alumno ha de establecer la relación entre el concepto mediana y su definición (centro de un conjunto ordenado). • Se establece una relación entre cada símbolo (lenguaje) y el valor correspondiente de una variable ordinal (concepto). • La ordenación de los símbolos remite a una ordenación de los valores de la variable (acciones).
U4	El primer grupo tiene 23 elementos, luego el alumno central, que ocupa la	• El alumno debe hallar el centro en cada grupo. Puesto que el número de elementos es diferente no

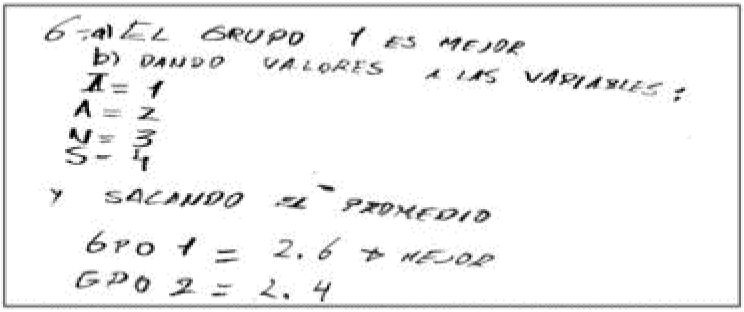
	posición 12 tiene un *Aprobado.* En el segundo grupo el valor de la mediana es *Notable,* puesto que el elemento central es el 9 al haber 17 elementos. El segundo grupo tiene mejores resultados.	ocupan el mismo lugar. Aparece la idea de “centro” y su relación con una acción “hallar el centro”. • La mediana es el valor de la variable del elemento que ocupa el lugar central. El alumno tiene también que relacionar el símbolo que ocupa lugar central con su significado (*Aprobado,* etc.). • Finalmente, se deben comparar las dos medianas (valores), hallando el mayor de ellos. El grupo correspondiente tiene “mejores” notas.
U5	*b) ¿Cuál seria la medida de tendencia central más apropiada para representar estos datos?* Para resolver el problema, y puesto que los datos son ordinales, lo más adecuado sería la mediana.	• Hay un conocimiento implícito en el alumno sobre el tipo de variable en los datos. • Se requiere que el alumno reconozca que en una variable ordinal la medida más adecuada es la mediana.

6.5.1. CATEGORÍAS DE RESPUESTAS EN EL ÍTEM 6.1

En la primera parte de este ítem se puntúa como correcta la respuesta, tanto si el alumno calcula y compara las medianas como si *calcula correctamente la media* y da como mejor grupo el de mayor valor medio o bien si da la solución correcta, aunque no explicite el algoritmo. Aunque esta solución no es la óptima desde el punto de vista matemático, debido a que los estudiantes tuvieron poca familiaridad con los datos ordinales, la hemos considerado parcialmente correcta. A continuación analizamos los conflictos encontrados.

C1.Respuestas basadas en la media aritmética. En estas respuestas el estudiante identifica correctamente que se trata de un problema resoluble por medio de una medida de tendencia central. A continuación realiza algún tipo de transformación en el conjunto de datos para convertirlos en cuantitativos. Un primer tipo de conflicto, descrito ya por Cobo (2003) se produce cuando el estudiante no discrimina bien los diferentes tipos de variables estadísticas, en particular los datos ordinales y de intervalo o razón. La respuesta hubiera sido correcta si el estudiante, una vez transformados los datos a numéricos, hubiera hallado su mediana. Pero consideramos parcialmente correcto el caso de que se calcule la media y la comparación sea adecuada, pues el estudiante *no discrimina bien los diferentes tipos de variable estadística* y no es consciente de que la media no tiene sentido en los datos ordinales (el carácter ordinal viene dado por el tipo de dato y no por el código usado para representarlo). Hemos diferenciado en este grupo las siguientes respuestas:

C1.1. Transforma los datos ordinales y calcula correctamente la media. Como vemos en el análisis del ejemplo (Tabla 6.5.1.1), en estos casos, el estudiante identifica que se trata de un problema resoluble por medio de los valores centrales. El alumno calcula el valor de un estadístico en cada grupo y luego sustituye los datos de cada grupo por su medida de tendencia central, para efectuar las comparaciones de éstos. Es decir, lleva a cabo correctamente los pasos 1 y 2 descritos en la tabla anterior, pero falla en el paso 3, ya que toma la media y no la mediana como un estadístico adecuado para resolver el problema.



6-a) EL GRUPO 1 ES MEJOR
b) DANDO VALORES A LAS VARIABLES:
I = 1
A = 2
N = 3
S = 4
Y SACANDO EL PROMEDIO
GPO 1 = 2.6 → MEJOR
GPO 2 = 2.4

Tabla 6.5.1.1. Análisis de ejemplo en la categoría 1.1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*b) Damos valores a las variables:* *I=1* *A=2* *N=3* *S=4*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad). • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado,* etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno). • El alumno utiliza la idea de variable y la relaciona con el contexto del problema; por tanto; ha completado correctamente los primeros pasos de la Tabla 6.4.1. • Establece correspondencias entre cada símbolo *I, A, N, S* y un valor numérico entero consecutivo. • La correspondencia establecida conserva el orden de los respectivos conjuntos pero no la escala. • Aparece un *conflicto* porque la correspondencia no conserva la diferencia de valores. Es decir, mientras el conjunto de partida es ordinal, el de imagen es de razón. • Aparece un *conflicto* al no diferenciar variables ordinales y de razón.
U2	*Y sacando el promedio* *Gpo 1=2.6---mejor* *Gpo 2=2.4*	• Identifica correctamente el problema como un problema que se resuelve mediante la comparación de medidas de tendencia central. • Utiliza la idea de tendencia central como representante de un conjunto de datos. • Calcula correctamente la media de ambos grupos. Conoce el algoritmo de cálculo de la media ponderada.
U3	*El grupo 1 es mejor*	• Obtiene una conclusión razonable para el promedio empleado.

Como se observa en este ejemplo, el alumno asigna valores numéricos a las categorías y posteriormente calcula las medias para comparar los datos. Por otra parte, emplea correctamente la definición de media, y así también, el algoritmo de cálculo de la media ponderada. El conflicto principal no se refiere a las medidas de tendencia central, sino al tipo de variable mostrado en el problema y la elección del estadístico apropiado para la variable. La transformación de la variable utilizada por el alumno conserva el orden, pero no la escala de medida. De este modo la solución no coincide con la esperada, debido a que la media no es resistente con los valores altos, mientras que la mediana lo es. Podemos considerarla parcialmente correcta en el sentido que el alumno, al menos, identifica el problema como relacionado con las medidas de tendencia central.

C1.2 Conflicto en el algoritmo de la media (divide por un número incorrecto). Al igual que en el caso anterior, el alumno asigna valores a las categorías, y resuelve el problema comparando las medias y tomando como mejor, el grupo con mayor media. La transformación que aplica no conserva la escala de medida y el alumno no diferencia entre datos ordinales y cuantitativos. Además, se añade al conflicto descrito en la categoría C1.1, otro *conflicto en el algoritmo*, pues confunde el divisor por el cual hay que dividir.

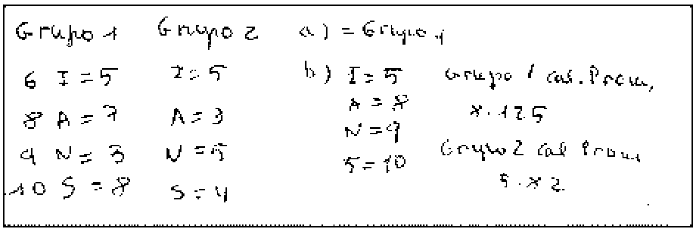


Tabla 6.5.1.2. Análisis de ejemplo en la categoría 1.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Grupo 1* *Grupo 2* *I = 5* *I = 5* *A = 7* *A = 3* *N = 3* *N = 5* *S = 8* *S = 4*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado*, etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno). • El alumno utiliza la idea de variable y la relaciona con el contexto del problema; por tanto; ha completado correctamente los primeros pasos de la Tabla 6.5.1; Hay un proceso de *particularización*. • El alumno calcula la frecuencia de casos en cada grupo; utiliza las ideas de variable y frecuencia y las relaciona con el contexto del problema. • Establece una correspondencia entre cada código (valor de la variable) y su frecuencia, aparece la idea de distribución de frecuencia (mediante un proceso de *composición).*

		• Mediante un *proceso de representación* se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad); Sin embargo hay un conflicto en su aplicación, pues el objeto que antecede al signo igual es un valor de la variable y el que sigue su frecuencia.
U2	*a) Grupo 1*	• Obtiene una conclusión razonable para el estadístico empleado.

En el ejemplo analizado en la Tabla 6.5.1.2, el alumno divide por el mismo total en los dos grupos, aunque cada uno tiene diferente número de elementos. No es capaz de darse cuenta del error, a pesar de que el valor obtenido en el segundo grupo es excesivamente bajo, teniendo en cuenta la distribución de los datos (12 valores por encima del 7). Se deduce una falta de comprensión de la propiedad de la suma de desviaciones a la media. No hace tampoco una lectura crítica de los datos.

C1.3. Transforma los datos ordinales pero establece una transformación diferente en cada grupo. Calcula la media. Es otra variante de la estrategia C1.1.

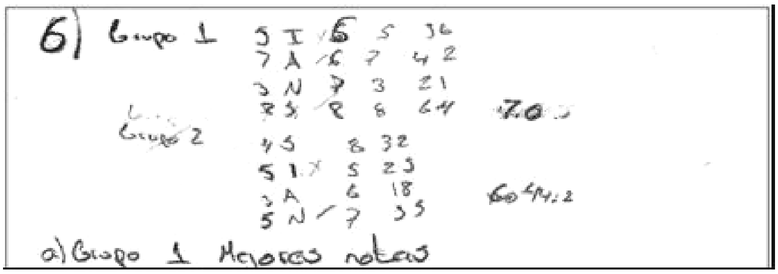


Tabla 6.5.1.3. Análisis de ejemplo de la categoría 1.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Grupo 1, 5 I x 6, 36* *7 A x 6, 42* *3 N x 7, 21* *8 S x 8, 64 -----7.0* *Grupo 2, 4 S x 8, 32* *5 I x 5, 25* *3 A x 6, 18* *5 N x 7, 35-----6.4*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado*, etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno). • El alumno utiliza la idea de variable y la relaciona con el contexto del problema; completando correctamente los primeros pasos de la Tabla 6.5.1. • Establece correspondencias entre cada símbolo *I, A, N, S* y un valor numérico entero. • En este ejemplo, la correspondencia establecida conserva el orden de los respectivos conjuntos. • Aparece un *conflicto* porque la correspondencia no conserva la diferencia de valores. Es decir, mientras el conjunto de partida es ordinal, el de imagen es de razón. • Aparece un *conflicto* en el tipo de variable. • Un nuevo *conflicto* es que la correspondencia es diferente en cada conjunto; por tanto, no se podrán comparar los conjuntos entre sí. • Calcula correctamente la media aritmética en cada grupo, conoce la definición y algoritmo de cálculo de la media.

		• Particularización del concepto "media" y su algoritmo al ejemplo particular.
U2	*Grupo 1 Mejores notas*	• Obtiene una conclusión razonable para el promedio empleado.

En el ejemplo analizado en la Tabla 6.5.1.3, el alumno identifica el campo de problemas y también la idea de media como representante de un conjunto de datos. Un primer conflicto es la confusión del tipo de variable. Al asignar valores numéricos a las diferentes categorías no se conserva la escala de medida y, por otro lado, la transformación no es la misma en los dos conjuntos de datos, lo que en realidad invalida la posterior comparación de promedios.

C1.4. Calcula la media de frecuencias relativas. A los conflictos anteriores se añade otro consistente en usar el valor de la frecuencia relativa y no el de la variable en el cálculo de la media, confundiendo por tanto estos dos conceptos.

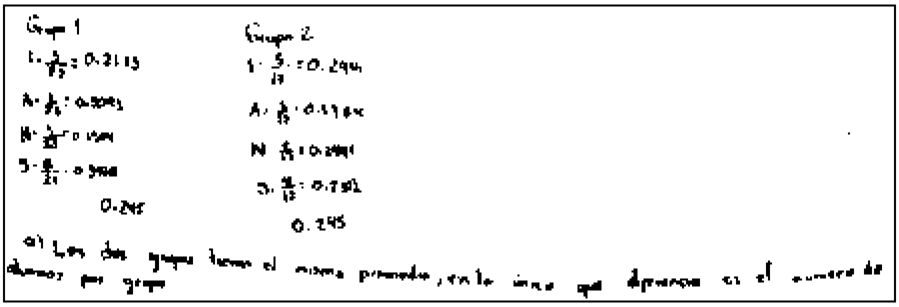

Grupo 1
Grupo 2
0.245
0.245
a) Los dos grupos tienen el mismo promedio, en lo único que difieren es el número de alumnos por grupo

Tabla 6.5.1.4. Análisis de ejemplo en la categoría 1.4

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Grupo 1* *Grupo 2* $I = \frac{5}{23} = 0.2173$ $I = \frac{5}{17} = 0.2941$ $A = \frac{7}{23} = 0.3043$ $A = \frac{3}{17} = 0.1764$ $N = \frac{3}{23} = 0.1304$ $N = \frac{5}{17} = 0.2941$ $S = \frac{8}{23} = 0.3478$ $S = \frac{4}{17} = 0.2352$ *0.245* *0.245*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad). • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado*, etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno). • El alumno calcula la frecuencia relativa de cada uno de los valores en cada uno de los grupos. Utiliza el concepto y cálculo de frecuencia relativa, ya que usa el total adecuado (que es diferente en cada grupo). • Calcula la media de los valores de las diferentes frecuencias relativas. Los valores obtenidos son prácticamente iguales, pues, salvo redondeos, como la suma de las frecuencias relativas ha de ser igual a la unidad, lo que obtiene es un valor aproximado de ¼ al dividir por el número de categorías.

		• Confunde frecuencia y valor de la variable. • Hay un primer *conflicto* al suponer idénticos todos los valores de la variable; transforma una variable ordenada en una constante. • Otro *conflicto* es que al usar frecuencias relativas en lugar de absolutas no hay que dividir en el cálculo de la media.
U2	*Los dos grupos tienen el mismo promedio; en lo único que se diferencian es en el número de alumnos por grupo.*	• Se llega a una conclusión incorrecta.

En el ejemplo mostrado y que se analiza en la Tabla 6.5.1.4 el estudiante obtiene la media de las frecuencias relativas. Los valores obtenidos en los dos grupos son prácticamente iguales, puesto que la suma de las frecuencias relativas ha de ser igual a la unidad. Por ello lo que obtiene es un valor aproximado de 1/4 al dividir por el número de categorías.

Esta estrategia equivalente a asignar un valor idéntico (1) a todas las categorías, por lo que se llega a una solución incorrecta, pues está transformando una variable en una constante. Este conflicto no fue identificado por Cobo (2003) ni lo hemos encontrado en las investigaciones previas. Carvalho (1998; 2001) en su investigación indica que los alumnos calculan a veces la media de la frecuencia absoluta en el cálculo de la media; aunque no lo señala para el caso de la mediana.

C1.5. Una estrategia parecida a la anterior, es *hallar la media del número de alumnos por categoría dentro de cada grupo*, dividiendo el total de alumnos en cada uno de los dos grupos por el número de categorías dentro del mismo. Es decir, el estudiante halla el *número esperado* de alumnos por categoría en una distribución uniforme dentro de cada uno de los grupos. La conclusión obtenida es incorrecta, pues la frecuencia esperada es siempre mayor en el primer grupo, al ser mayor el tamaño de la muestra, independientemente de los valores que para la variable se hayan obtenido. Hay también un conflicto semiótico al confundir los conceptos de valor de la variable y frecuencia. Se observa también que el alumno confunde los conceptos de frecuencia absoluta y porcentaje. Este conflicto tampoco ha sido descrito en otras investigaciones.

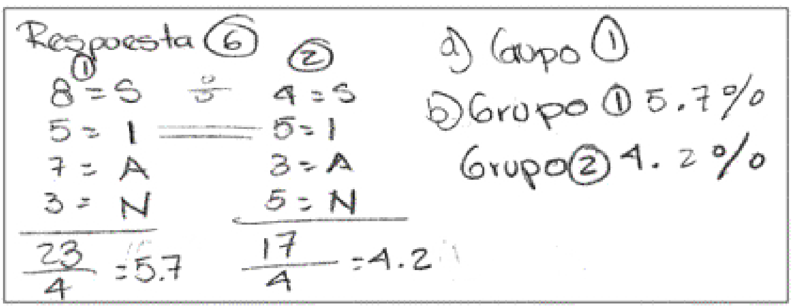


Tabla 6.5.1.5. Análisis de ejemplo en la categoría 1.5

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*1* *8 = S* *5 = I* *7 = A* $\underline{3 = N}$ $\frac{23}{4} = 5.7$ *2* *4 = S* *5 = I* *3 = A* $\underline{5 = N}$ $\frac{17}{4} = 4.2$	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad). • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado,* etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno). • Establece una correspondencia entre símbolos y valores de la variable; *proceso de representación*. • Realiza un recuento de frecuencias absolutas de los diferentes valores de la variable (halla las distribuciones de frecuencias, procedimiento); usa la idea de frecuencia y distribución (conceptos). • Divide el número total de casos de cada grupo entre el número de categorías. • Hay un conflicto en la aplicación del algoritmo de la media, debido a que opera con las frecuencias y no con el valor de la variable; este conflicto implica otro sobre la definición de la media. • Obtiene la “frecuencia absoluta media”. Hay un *conflicto* al calcular la media de las frecuencias y no la media de las variables. • Puede haber *conflicto* entre valor de variable y frecuencia.
U2	*a) Grupo 1*	• Elige el primer grupo como mejor al obtenerse mayor frecuencia media. • Ha reconocido la media como solución del campo de problemas de comparación de dos grupos; hay un conflicto pues es la mediana y no la media la medida de tendencia central que debe usarse para datos ordinales. • Hay un *conflicto* pues siempre la frecuencia media es mayor en el primer grupo al haber más alumnos.

C1.6. Indica que hay que calcular la media en cada grupo pero no llega a calcularla. Notamos que el alumno al dar esta respuesta al menos ha identificado que se puede resolver el problema mediante medidas de tendencia central, y en este caso, considera la media como el estadístico más adecuado. No aprecia que la media no está definida en un conjunto de datos ordinales. Por otro lado, posiblemente debido a que no sabe tratar estos datos, no llega a realizar ningún algoritmo. El fallo del alumno, como en casos anteriores, se debe a que este tipo de ejercicios, donde las variables son ordinales no son muy comunes en la enseñanza en México, aunque, como vimos en el análisis de los libros de texto si se introdujo algún ejemplo aislado. Analizamos en la Tabla 6.5.1.6 un ejemplo, donde el alumno justifica el uso de la media, indicando que el resultado sería “más exacto”. En este problema, tanto la mediana como la moda se pueden calcular en forma exacta, mientras que la media no puede calcularse. Hay un uso inapropiado por parte del alumno del término “exacto”.

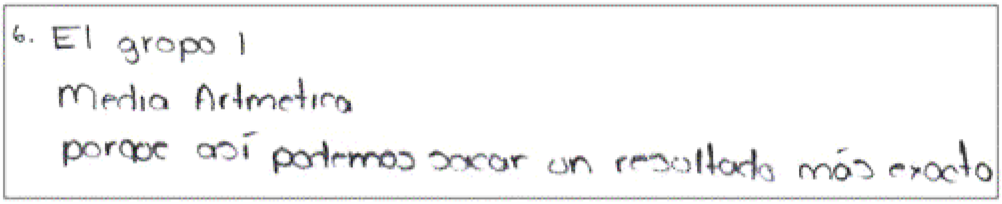

6. El grupo 1
Media Artmetica
porque así podemos sacar un resultado más exacto

Tabla 6.5.1.6. Análisis de ejemplo en la categoría 1.6

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*El grupo 1*	• No se usan los datos en la justificación. • No explica cómo llegó a esta conclusión, pero es razonable para la medida de tendencia central que posteriormente indica.
U2	*Media Aritmética* *Porque así podemos sacar un resultado más exacto*	• Identifica correctamente que se trata de un problema que se resuelve mediante la comparación de medidas de tendencia central. • Hace referencia a la media (concepto) y a su cálculo (algoritmo). • *Conflicto* al no realizar cálculos por ser los datos ordinales y no recurrir a la mediana o moda que serían adecuados para este tipo de datos. • *Conflicto* al justificar la elección de la media simplemente porque el resultado será más exacto. Confusión del significado del término “exacto”.

A continuación analizamos todas aquellas respuestas en las que el estudiante identifica correctamente el problema y la estrategia de resolución por medio de la mediana. Sin hacer transformaciones de los datos, el estudiante la calcula o trata de calcularla directamente usando los datos ordinales. Además de haber identificado la comparación de datos ordinales como un problema resoluble mediante la mediana, el estudiante discrimina los datos ordinales de los datos medidos en escala de razón. Dentro de esta categoría hemos diferenciado las siguientes respuestas:

C2.1. Cálculo correcto de las medianas. Cuando el alumno reconoce que el problema se resuelve mediante la comparación de las medianas de los dos grupos y es capaz de calcularlas correctamente. Este caso no lo comentamos porque corresponde al descrito como solución correcta o experta al ítem.

C2.2. Ordena los datos de los grupos pero no finaliza el problema. Un estudiante comienza a resolver la primera parte del problema ordenando los dos conjuntos de datos, lo que indica que ha reconocido que el problema se resuelve comparando las medianas. Pero no señala el valor central del conjunto de datos como mediana, aunque da la solución correcta. Pensamos que ha llegado a calcular la mediana, pero no lo argumenta explícitamente.

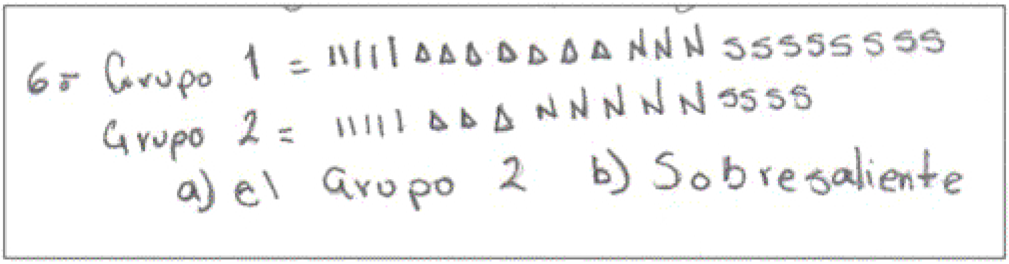

6- Grupo 1 = IIIII AAAAAAA NNN SSSSSSSS
Grupo 2 = IIIII AAA NNNNN SSSS
a) el Grupo 2 b) Sobresaliente

Tabla 6.5.1.7. Análisis de ejemplo en la categoría 2.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Grupo 1 = IIIII AAAAAAA NNN SSSSSSSS* *Grupo 2 = IIIII AAA NNNNN SSSS*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad). • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado,* etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno). • Establece una correspondencia entre símbolos y valores de la variable; proceso de representación. • Realiza una partición del conjunto entre insuficientes/sobresalientes y aprobados /notables. • Ordena los valores de la variable. • No queda clara la finalidad, pues no indica las medianas de cada grupo.
U2	*a) el grupo 2*	• No queda claro el resto del procedimiento, aunque parece calcular la mediana, pues la solución es correcta.

C2.3. Proporciona una respuesta correcta en forma verbal *sin justificarla* mediante algoritmos, por lo que no podemos obtener algún tipo de información sobre su capacidad de cálculo. En la segunda parte indica que ha de usarse la mediana y da una definición correcta de la misma, por lo cual el alumno ha reconocido el campo de problemas dado. Pero la justificación es confusa al considerar "mejor" al grupo 1.

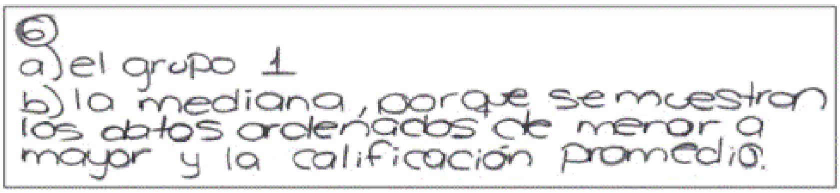

6
a) el grupo 1
b) la mediana, porque se muestran los datos ordenados de menor a mayor y la calificación promedio.

Tabla 6.5.1.8. Análisis de ejemplo en la categoría 2.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*a) el grupo 1*	• "Grupo 1" hace referencia a una parte de los datos y a una distribución (concepto), así como a la situación descrita (elemento fenomenológico). • No se usan los datos en la justificación. • Reconoce la mediana como solución al problema dado.

C3. Respuestas basadas en la moda. Tan sólo hemos encontrado una variante entre las respuestas de los estudiantes.

C3.1. Utiliza correctamente las modas para hacer la comparación. Con este sistema no se llega a la solución óptima, no obstante, podemos considerarla parcialmente correcta, puesto que la moda está definida para variables ordinales y así mismo, el alumno considera todos los datos en la comparación. Este tipo de respuesta también se encuentra en los trabajos de Carvalho (1998, 2001) y Cobo (2003).

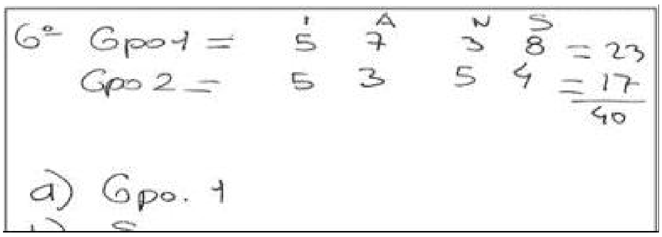
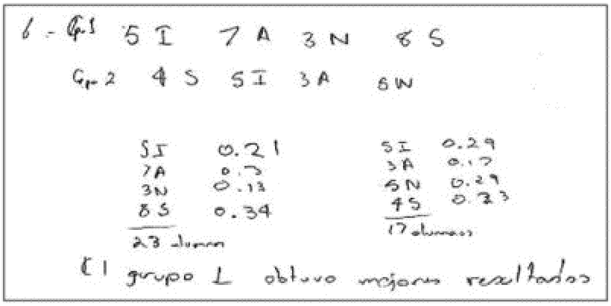


Tabla 6.5.1.9. Análisis de ejemplo en la categoría 3.1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*I A N S* *Gpo 1= 5 7 3 8 = 23* *Gpo 2=5 3 5 4 = 17* *40*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad). • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado*, etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno). • Establece una correspondencia entre símbolos y valores de la variable. • Realiza un recuento de frecuencias absolutas de los diferentes valores de la variable (halla las distribuciones de frecuencias).
U2	*a) Gpo. 1*	• No especifica la razón para elegir este grupo, aunque suponemos que es porque la moda del primer conjunto es sobresaliente mientras que la del segundo es insuficiente y notable (dos modas).

C4. No reconoce la comparación de dos conjuntos de datos como campo de problemas. En este tipo de respuestas el estudiante no usa las medidas de posición central para resolver el problema, mostrando una deficiente adquisición de la idea de distribución. Este mismo comportamiento lo encuentran Batanero, Estepa y Godino (1997) en su trabajo sobre la asociación estadística y Cobo (2003). En opinión de Konold, Pollatsek, Well y Gagnon (1997), estos estudiantes no habrían dado el paso de pensar en los valores de la variable como propiedad de los individuos aislados a comparar propiedades de conjuntos de datos (medidas de posición central). Describimos a continuación las variantes dentro de este grupo.

C4.1. Compara porcentajes o frecuencias relativas en cada categoría. El estudiante realiza un recuento de frecuencias absolutas de los diferentes valores de la variable (halla las distribuciones de frecuencias) en cada categoría y cada grupo. A continuación calcula la distribución de frecuencias relativas de la variable en cada uno de los grupos pero no relaciona el problema con las medidas de posición central. En lugar de ello compara algún valor aislado y aparentemente toma como mejor el grupo 1 porque tiene mayor frecuencia relativa en la categoría de Sobresaliente.



Este mismo comportamiento lo encontró Cobo (2003) en su investigación. Estepa (2004) denomina *concepción local de la asociación,* en el caso de estudio de asociación entre variables a la conducta consistente en comparar solo valores aislados en dos muestras. Los estudiantes que siguen esta estrategia pueden llegar a la respuesta correcta, dependiendo de qué valor comparen.

Tabla 6.5.1.10. Análisis de ejemplo en la categoría 4.1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Grupo 1, 5 I, 7 A, 3 N, 8 S* *Grupo 2, 4 S, 5 I, 3 A, 5 N*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad). • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado,* etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno).Establece una correspondencia entre símbolos y valores de la variable; proceso de representación. • Realiza un recuento de frecuencias absolutas de los diferentes valores de la variable (halla las distribuciones de frecuencias).
U2	*5 I 0.21 5 I 0.29* *7 A 0.3 3 A 0.12* *3 N 0.13 5 N 0.29* *8 S 0.34 4 S 0.23* *23 alumnos 17 alumnos*	• Calcula la distribución de frecuencias relativas de la variable en cada uno de los grupos. • *Conflicto.* No identifica el problema como relacionado con las medidas de tendencia central.
U3	*El grupo 1 tuvo mejores resultados.*	• No explica la razón, pero pensamos que ha comparado las modas.

C4.2. Una variante del anterior es *comparar frecuencias o porcentajes en cada categoría*, agrupando algunas de éstas.

En el ejemplo que mostramos el alumno realiza un recuento de frecuencias absolutas de los diferentes valores de la variable y calcula la distribución de porcentajes de la variable en cada uno de los grupos; utiliza la idea y cálculo de porcentaje. Para obtener la conclusión (correcta), compara el total de Notables y Sobresalientes, es decir, usa solo una parte de los datos para hacer la comparación, manifestando la concepción local de la asociación.

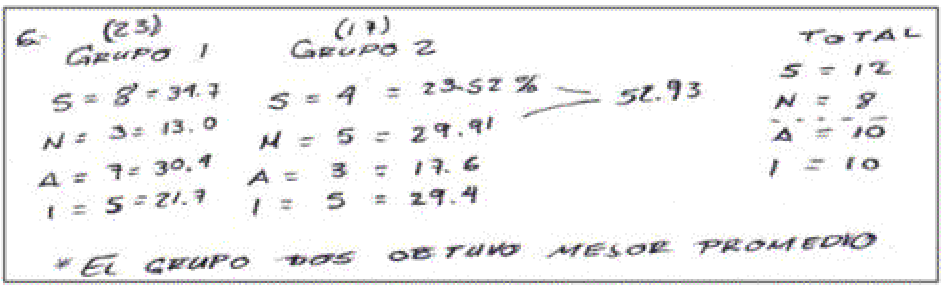


Tabla 6.5.1. 11. Análisis de ejemplo en la categoría 4.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*(23) (17)* *GRUPO 1 GRUPO 2 TOTAL* *S = 8 = 34.7 S = 4 = 23.52% S = 12* *52.93* *N = 3 = 13.0 N = 5 = 29.91 N = 8* ---------- *A = 7 = 30.4 A = 3 = 17.6 A = 10* *I = 5 = 21.7 I = 5 = 29.4 I = 10*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad). • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado,* etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno).Establece una correspondencia entre símbolos y valores de la variable; proceso de representación. • Realiza un recuento de frecuencias absolutas de los diferentes valores de la variable. • Calcula la distribución de porcentajes de la variable en cada uno de los grupos; utiliza la idea de porcentaje y sabe calcularlo. • Compara el total de *Notables y Sobresalientes,* es decir, usa solo una parte de los datos para hacer la comparación. • *Conflicto* al no identificar el problema como relacionado con las medidas de tendencia central.
U2	*El grupo dos obtuvo mejor promedio*	• Llega a una conclusión correcta.

C4.3. Algunos estudiantes *comparan sólo frecuencias absolutas* para resolver el problema, generalmente sólo en parte de los datos. Además de la concepción local de la asociación (Estepa, 2004), estos estudiantes estarían en el primer nivel de comprensión del concepto de distribución según Watson y Moritz (1999, 2000). No utilizan las frecuencias relativas para comparar los datos, por lo que su estrategia sería válida sólo para conjuntos de datos de igual número de elementos.

En el ejemplo siguiente se observa que después de establecer una correspondencia entre símbolos y valores de la variable y hallar la frecuencia absoluta en cada categoría, el estudiante compara los totales, eliminando primero los insuficientes en cada grupo. Hay un conflicto al usar sólo una parte de los datos (sólo los Aprobados). Otro conflicto es comparar las frecuencias absolutas, puesto que la comparación no tiene en cuenta el tamaño de la muestra.

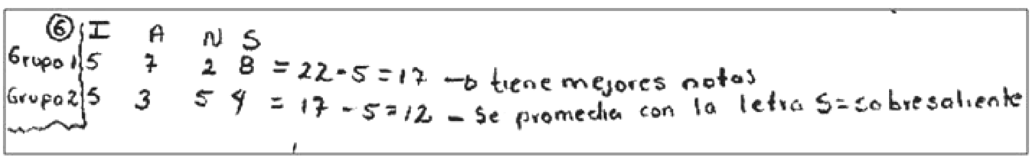


Tabla 6.5.1.12. Análisis de ejemplo en la categoría 4.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*I A N S*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad). • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado*, etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno).Establece una correspondencia entre símbolos y valores de la variable; proceso de representación.
U2	*Grupo 1, 5 7 2 8 = 22-5 = 17– tiene mejores notas* *Grupo 2, 5 3 5 4 = 17-5 =12*	• Elimina los *Insuficientes* en cada grupo; hay un *conflicto* al usar sólo una parte de los datos. • Compara las frecuencias absolutas de aprobados o más en cada grupo; es otro *conflicto*, puesto que la comparación no tiene en cuenta el tamaño de las muestra.

C4.4. Indica que no encuentra diferencias en los grupos. En el ejemplo que se analiza en la Tabla 6.5.1.13, a diferencia de los casos anteriores, el alumno no asigna códigos numéricos a los valores de la variable. Para resolver el problema, primero calcula para cada valor de la variable las frecuencias en los dos grupos, y el tamaño de la muestra. Indica que ninguno de los grupos supera claramente al otro, pero no justifica su respuesta.

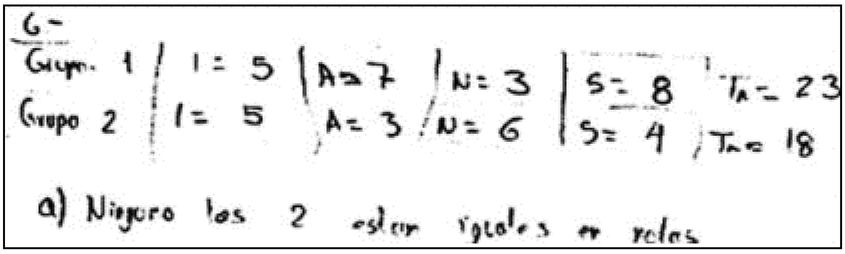

6 -
Grupo 1 / I = 5 | A = 7 | N = 3 | S = 8 T = 23
Grupo 2 | I = 5 A = 3 / N = 6 | S = 4 / T = 18
a) Ninguno los 2 estan iguales en notas

Tabla 6.5.1.13. Análisis de ejemplo en la categoría 4.4

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Grupo 1, I = 5, A = 7, N = 3, S = 8, T = 23* *Grupo 2, I = 5, A = 3, N = 6, S = 4, T = 18*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de significación, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad). • Se establece un código que se usará en el futuro, A es igual que Aprobado, etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno). • Obtiene la distribución de frecuencias absolutas de los valores de la variable en cada grupo (procedimiento y conceptos). • Halla el total de casos en cada grupo (procedimiento).
U2	*Ninguno de los 2, están iguales en notas*	• Observa que las frecuencias de valores en cada grupo son diferentes; compara las frecuencias caso a caso. • La conclusión es incorrecta

En las Tablas 6.5.1.14 y 6.5.1.15 y en la Figura 6.5.1, mostramos la distribución de frecuencias de las respuestas para cada una de las categorías descritas. Hay una gran variedad de respuestas en este ítem. La mayoría de las respuestas están relacionadas con la media, con lo cual vemos que el uso de la mediana en datos ordinales no es habitual para los estudiantes, lo que coincide con el trabajo de Cobo (2003), quien también obtuvo un resultado pobre en este ítem.

La frecuencia mayor de respuestas es utilizar la media correctamente (18.7%); Cobo (2003) no informa sobre el número de estudiantes que usa la media en este ítem. De los que suponen que hay que usar la media y la calculan, casi todos lo hacen correctamente, aunque aparecen algunos conflictos como no saber el total por el cual hay que dividir los datos (1 alumno); confundir la media con un valor de la variable (5 estudiantes); calcular la media de frecuencias relativas (2%); y hallar la media o el número esperado de alumnos por categoría (2.9%).

Tabla 6.5.1.14. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el ítem 6.1

Categorías de respuestas empleadas	Frecuencia	%
C1.1.Transforma los datos ordinales y calcula correctamente la media	97	18.73
C1.2 Conflicto en el algoritmo de la media (divide por un número incorrecto)	1	0.19
C1.3. Aplica diferente transformación a cada conjunto numérico y calcula la media	3	0.58
C1.4. Calcula la media de frecuencias relativas	10	1.93
C1.5. Halla el número esperado de alumnos por categoría en una distribución uniforme en cada grupo	15	2.90
C1.6. Indican que hay calcular la media en cada grupo, pero no la calcula	60	11.58
C2.1. Cálculo correcto de la mediana	34	6.56
C2.2. Ordena los datos en los grupos pero no finaliza el problema	1	0.19
C2.3. Respuesta correcta sin justificarla mediante algoritmos	42	8.11
C3.1.Usa correctamente las modas para hacer la comparación	55	10.62
C4.1 Compara porcentajes o frecuencias relativas en cada categoría	20	3.86
C4.2. Compara máximos o mínimos	17	3.28
C4.3. Usa solo parte de los datos, comparando frecuencias absolutas	77	14.86
C4.4. Indica que no encuentra diferencias en los grupos	12	2.32
C5. No justifica la respuesta	10	1.93
C6. No contesta	64	12.36
Total	518	100

Un 10.7% de los estudiantes de la muestra usa la moda y la calcula correctamente,

lo cual, aunque no es la mejor solución no la podemos considerar incorrecta, por tratarse de datos ordinales. En la investigación de Cobo (2003), el 7.6% de los estudiantes de 4º de ESO resuelve este problema calculando correctamente la moda.

Sólo un alumno calcula la mediana, pero no finaliza el problema, lo que muestra su inseguridad en la misma. Otro 8% da la respuesta correcta, pero no la justifica con cálculos, no siendo capaz de transferir el cálculo de la mediana en datos numéricos a datos ordinales.

Un 26% de estudiantes dan respuestas que no se relacionan con las medidas de tendencia central, problema que se describió también en Estepa (1993) cuando propone a los estudiantes un problema de comparación de dos distribuciones de datos. Según este autor la respuesta se debe a una concepción local de la asociación estadística, al creer que puede analizarse la asociación (o la diferencia) teniendo sólo en cuenta una parte de la distribución de los datos.

Tabla 6.5.1.15. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 6.1

	Frecuencia	Porcentaje
Usa la idea de media	186	35.91
Usa la idea de mediana	77	14.86
Usa la idea de moda	55	10.62
Respuesta no relacionada con las medidas de tendencia central	136	26.25
No contesta	64	12.36
Total	518	100.0

De nuestros estudiantes, el 3.9% compara porcentajes o frecuencias en cada categoría, el 2.3% compara los valores máximos y el 15% utiliza solo una parte de datos. Por tanto, todos estos estudiantes tienen dificultades con la idea de distribución, cuya comprensión implicaría el ser capaz de comparar distribuciones en base a sus medidas de tendencia central y dispersión (Konold y Pollatsek, 2002). Sólo un 6.6 % de los alumnos resuelve el problema con el cálculo correcto de la mediana, mientras que en Cobo (2003), 4.2% de los alumnos de 4º de ESO usan la mediana correctamente. Vemos que el problema es difícil para ambos grupos de estudiantes, posiblemente por falta de familiaridad con datos de naturaleza ordinal.

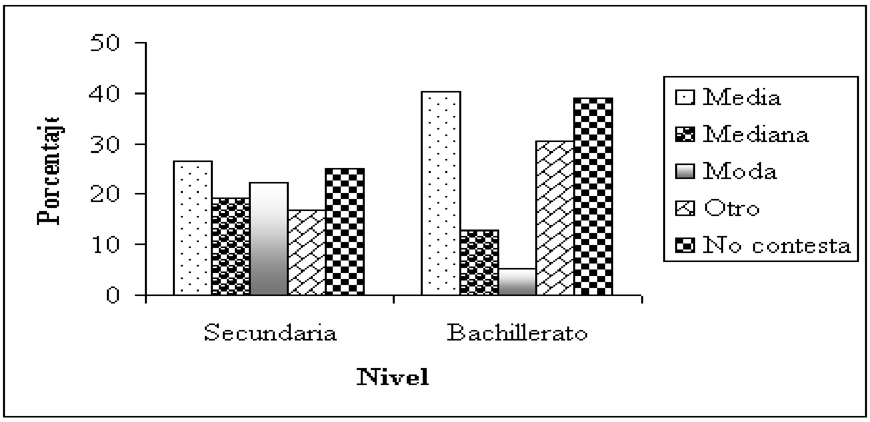
En la Tabla 6.5.1.15 aparecen los resultados resumidos. Los resultados nos indican que por su carácter de variables ordinales, éste ha sido un ítem difícil de resolver, ya que el 35% de los estudiantes, usan la media dar una respuesta, y en bajos porcentajes de los alumnos utilizan mediana y moda. Por otra parte, es relevante el alto número de estudiantes que no responden o que dan una respuesta que no tiene relación con las medidas de tendencia central.

Tabla 6.5.1.16. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 6.1 clasificadas por nivel escolar

		Nivel		
Respuesta		Secundaria	Bachillerato	Total
Media	Frecuencia	43	143	186
	% de nivel	26.5	40.1	35.9
Mediana	Frecuencia	31	46	77
	% de nivel	19.1	12.9	14.6
Moda	Frecuencia	36	19	55
	% de nivel	22.2	3.6	10.6
Otro	Frecuencia	27	109	136
	% de nivel	16.7	30.6	26.3
No contesta	Frecuencia	25	39	64
	% de nivel	15.4	11.0	12.4
Total		162	356	518

Al agrupar por nivel educativo del alumno (Figura 6.5.1), de nuevo los resultados son mejores en los alumnos de Secundaria. Son estos alumnos los que más usan la mediana aunque también son los que dejan más respuestas en blanco. El grupo de alumnos de Bachillerato es el que más usa la media y el segundo grupo la moda o da respuestas sin relación con las medidas de tendencia central. Se obtuvo un valor Chi cuadrado =48.04 con 4 grados de libertad y una significación menor que 0.0001, cumpliéndose las condiciones de aplicación.

Figura 6.5.1. Porcentaje de respuestas en el ítem 6.1 por nivel escolar



6.5.2. CATEGORÍAS DE RESPUESTAS EN EL ÍTEM 6.2

En esta segunda parte del ítem se pregunta al estudiante cuál sería la mejor medida de tendencia central para comparar los dos grupos, es decir, el alumno ha de decidir cuál de ellas sería más representativa. La elección correcta de dicha medida mostraría un conocimiento de tipo estratégico, en donde el estudiante es capaz de tomar una decisión sobre el método estadístico más conveniente en una situación dada (Batanero y Díaz, 2005). Las respuestas han sido menos variadas y muestran la dificultad de los estudiantes para decidir cuál sería la medida a utilizar. A continuación analizamos las categorías obtenidas.

C1.1. Supone que la media es el mejor representante. Son los estudiantes que afirman en su respuesta que la media aritmética sería adecuada en el problema, justificando su elección, bien por el hecho de que en cálculo de la media intervienen todos los valores o bien por pensar que cualquier medida de tendencia central es adecuada en cualquier situación. Estos estudiantes no comprenden la función de representante del conjunto de datos que tienen las medidas de tendencia central, y hay un fallo en percibir varias de las propiedades de la media, como son: "la media no está definida en datos ordinales"; "la media no siempre se sitúa en el centro de la distribución". Este es el caso del ejemplo que presentamos, donde el alumno al dar esta respuesta ha identificado que el problema se puede resolver mediante una medida de tendencia central, y considera la media como la más adecuada. Sin embargo, no ha llegado a transformar los datos en numéricos, por lo cual no puede aplicar el algoritmo de la media. El fallo en la elección de la medida de tendencia central de debe a una generalización excesiva de las propiedades de la media para datos numéricos, suponiendo que se conservan en datos ordinales. Además, el valor obtenido de la mediana, en caso de calcularla también sería exacto, por lo que el alumno muestra falta de comprensión del algoritmo de obtención de la mediana y de su resultado.

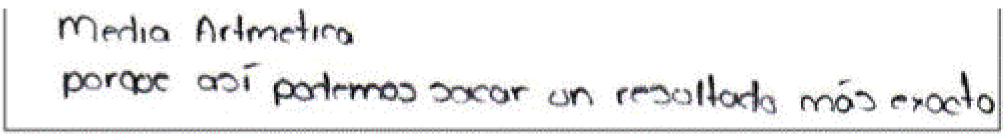

Media Artmetica
porque así podemos sacar un resultado más exacto

Tabla 6.5.2.1. Análisis de ejemplo en la categoría 1.1

Unidad	Expresión	Contenido
U2	*Media Aritmética* *Porque así podemos sacar un resultado más exacto*	• Identifica correctamente que se trata de un problema que se resuelve mediante la comparación de las medidas de tendencia central. • Falla en percibir que la media no está definida para datos ordinales. • Hace referencia a la media. • *Conflicto* procedimental; no es capaz de calcular la media ni transforma los datos. • *Conflicto* al pensar que el resultado será más exacto, pues se puede obtener un valor exacto de la mediana.

C1.2. Confunde los conceptos"medida de posición central" y "valor de la variable". Este conflicto ya fue señalado en la investigación de Carvalho (1998; 2001). El alumno contesta que la medida más adecuada es "Aprobado", que en realidad es un valor de la variable. Por otro lado, mientras que un valor de la variable se refiere a un único dato, las medidas de posición central son atributos de la distribución. Una posible explicación de esta respuesta es que el alumno no alcanza todavía a comprender en su totalidad la idea de distribución ni diferencia los conceptos "variable" y "valor de la variable" : "*b) La medida de tendencia central más apropiada es A= Aprobado".*

Tabla 6.5.2.2 Análisis de ejemplo de la categoría 1.2

Unidad	Expresión	Contenido
U3	*La medida de tendencia central más apropiado es A = Aprobado*	• "Medida de tendencia central" hace referencia a un objeto compuesto y a sus componentes (media, mediana y moda). Hay una dialéctica unitario /sistémico. • Se pone en referencia un código con su significado (valor de la variable); se utiliza el símbolo de igualdad para establecer esta correspondencia. • *Conflicto* al confundir promedio con valor de la variable.

C1.3. Halla un "grupo promedio". En el ejemplo que analizamos a continuación, el alumno, en la primera parte del ejercicio no asigna códigos numéricos a los valores de la variable. En el segundo apartado halla para cada categoría de la variable una frecuencia media, dividiendo el número total de alumnos por categoría en ambos grupos entre dos. Es decir, define un "grupo medio", que sería el número esperado de alumnos por categoría si se dividen el número de insuficientes, aprobados, etc. en dos partes iguales. Hay un conflicto respecto a la definición de media que es interpretado como una "distribución media". No hemos encontrado este tipo de respuesta en las investigaciones previas. Carvalho (1998; 2001) en su investigación indica que los alumnos calculan a veces la media de la frecuencia en el cálculo de la media; aunque no lo señala para el caso de la mediana.

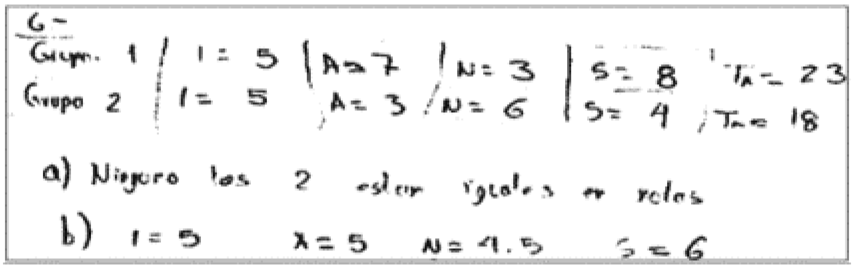


Tabla 6.5.2.3. Análisis de ejemplo en la categoría 1.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Grupo 1, I = 5, A = 7, N = 3, S = 8, T = 23* *Grupo 2, I = 5, A = 3, N = 6, S = 4, T = 18*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Se asocia el signo = (lenguaje) con una propiedad matemática (igualdad). • Se establece un código que se usará en el futuro, *A* es igual que *Aprobado,* etc. (correspondencia entre dos elementos lingüísticos); correspondencia también entre cada uno de ellos y una situación (la calificación del alumno). • Obtiene la distribución de frecuencias absolutas de los valores de la variable en cada grupo (procedimiento y conceptos). • Halla el total de casos en cada grupo (procedimiento).
U2	*Ninguno de los 2, están iguales en notas*	• Observa que las frecuencias de valores en cada grupo son diferentes; compara las frecuencias caso a caso. • La conclusión a la primera parte es incorrecta.
U3	*I=5, A=5, N=4.5, S=6*	• Para cada valor (por ejemplo I) halla la frecuencia promedio de los dos grupos. • Define un "grupo promedio" que sería el grupo esperado si las frecuencias de calificaciones fuesen iguales en los grupos.

C1.4. Confunde promedio con valor esperado. En lugar de dar el promedio o un valor de la variable, el alumno da en cada grupo el valor esperado en caso de distribución uniforme. Esta conducta aparece en un ejemplo ya comentado en la parte primera del ítem, donde el alumno, para comparar los grupos, *halla el número esperado de alumnos por categoría,* en una distribución uniforme, dividiendo el total de alumnos por el número de ellas. La confusión es razonable, pues el valor esperado sería la esperanza matemática de la variable aleatoria subyacente en la distribución, que es una generalización de la idea de media de una variable estadística. Se explica por un fallo de generalización confundiendo un ejemplar (media de la variable estadística) con otro ejemplar (esperanza de la variable aleatoria) de un mismo tipo de objeto (medida de posición central).

Hay también un conflicto entre los conceptos de valor de la variable y frecuencia. Se observa también que el alumno asocia los conceptos de frecuencia absoluta y porcentaje como lo mismo, como indica en su respuesta. No hemos encontrado este conflicto en las investigaciones previas.

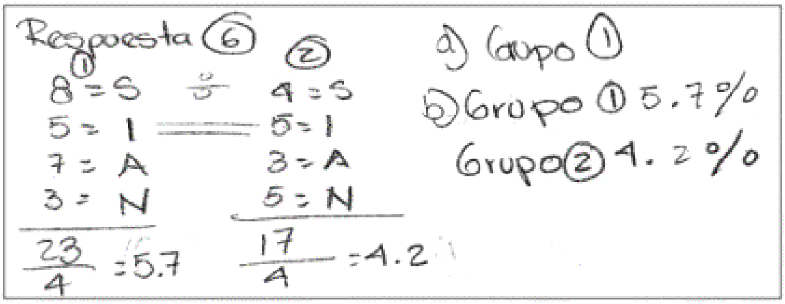


Tabla 6.5.2.4. Análisis de ejemplo en la categoría 1.4

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*2 2* *8 = S 4 = S* *5 = I 5 = I* *7 = A 3 = A* *3 = N 5 = N* *23 = 5.7 17 = 4.2* *4 4*	• Establece una correspondencia entre símbolos y valores de la variable; proceso de representación. • Realiza un recuento de las frecuencias absolutas de los diferentes valores de la variable (halla las distribuciones de frecuencias). • Divide el número total de casos de cada grupo entre el número de categorías. • Obtiene la “frecuencia absoluta media”. • *Conflicto* al calcular la media de las frecuencias y no la media de las variables. • Puede haber *conflicto* entre valor de variable y frecuencia.
U2	*a) Grupo 1*	• No explica la razón; suponemos que lo elige al obtenerse mayor frecuencia media. • Hay un conflicto pues siempre la frecuencia media es mayor en el primer grupo al haber más alumnos.
U3	*b) Grupo 1, 5.7%* *Grupo 2, 4.2%*	• *Conflicto* entre la idea de frecuencia absoluta (su promedio) y porcentaje.

Hemos encontrado también casos en que el alumno elige la mediana como medida de posición central más adecuada, es decir, reconoce que la mediana es la solución al campo de problemas “comparación de datos ordinales”. Entre ellas, distinguimos las siguientes variantes:

C2.1. Considera y justifica correctamente la mediana. Serían los alumnos que han calculado correctamente la mediana e indican que ésta es la medida más adecuada porque tiene en cuenta el orden de los datos y la media no se puede calcular para este tipo de datos. No analizamos este caso, puesto que coincide con la solución experta.

C2.2. Considera mejor la mediana, pero es inconsistente con la solución al primer *apartado*. En el siguiente ejemplo, el alumno proporciona una respuesta correcta de forma verbal pero sin justificarla mediante algoritmos, por lo que no podemos obtener información sobre la capacidad de cálculo del alumno. En general la justificación es confusa, ya que considera "mejor" al grupo 1 (solución que se obtiene al comparar las medias) pero luego recomienda utilizar la mediana. El alumno reconoce que la mediana se puede calcular en datos ordinales y que habría que ordenar los datos para encontrarla.

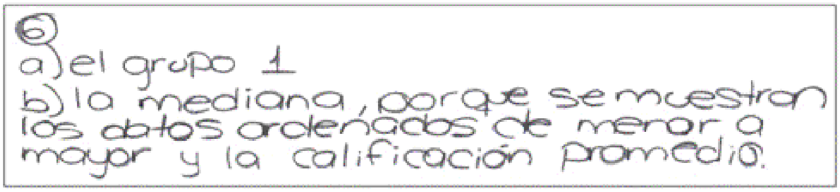

6
a) el grupo 1
b) la mediana, porque se muestran
los datos ordenados de menor a
mayor y la calificación promedio.

Tabla 6.5.2.5. Análisis de ejemplo en la categoría 2.2

Unidad	Expresión	Contenido
U2	*b) La mediana, porque se muestran los datos ordenándolos de menor a mayor y la calificación promedio.*	• Hace referencia a la mediana como medida más adecuada (concepto, propiedad). • Reconoce el campo de problemas "comparación de datos ordinales". • Hace referencia a la definición de mediana, resaltando su carácter de estadístico de orden; idea de orden, menor, mayor (conceptos). • *Conflicto* al no realizar cálculos, sino sólo mencionar cómo se obtendrían los resultados.

C3. El alumno no elige ninguna medida de tendencia central. En el siguiente ejemplo, cuya primera parte ya se analizó en la sección anterior, el estudiante no indica cuál es el promedio más adecuado. Lo que hace es dar los valores numéricos obtenidos al calcular la media, sin indicar si considera o no la media como más adecuada. Hay también una confusión entre promedio y valor del promedio, es decir, entre ejemplar y tipo.

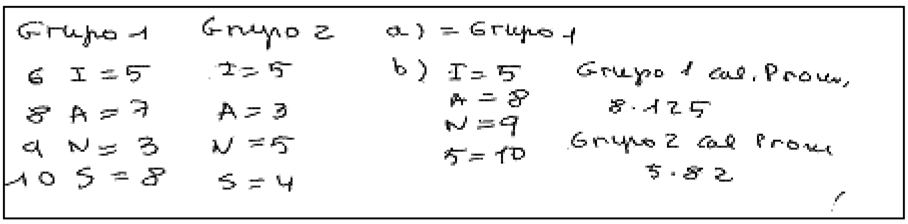


Tabla 6.5.2.6. Análisis de ejemplo en la categoría 3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*b) I = 5* *A = 8* *N = 9* *S = 10*	• Establece correspondencias entre cada símbolo *I, A, N, S* y un valor numérico entero. • La correspondencia establecida conserva el orden de los respectivos conjuntos pero no la escala.

	Grupo 1 Cal. Prom. 8.125 *Grupo 2 Cal. Prom. 5.82*	• El alumno calcula la media en cada grupo; se presenta un conflicto, ya señalado de error en la fórmula de cálculo. • No indica cuál es la mejor medida de tendencia central. • Se limita a presentar los valores calculados en cada grupo. • Conflicto entre "promedio" y "valor del promedio".

En las Tablas 6.5.2.7 y 6.5.2.8 y Figura 6.5.2.1 mostramos la distribución de frecuencias con que han aparecido en la muestra las categorías de respuestas descritas. Hay una gran variedad de respuestas en este ítem, la mayoría relacionadas con la media. Esto indica que el uso de la mediana en datos ordinales no es intuitiva para los estudiantes, lo que coincide con el trabajo de Cobo (2003), quien también obtuvo un resultado pobre en este ítem.

Tabla 6.5.2.7. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el ítem 6.2

Categorías de respuestas empleadas en el ítem 6	Frecuencia	%
C1.1 Supone que la media es el mejor promedio	131	25.3
C1.2. Confunde medida de tendencia central con valor de la variable	17	3.3
C1.3. Halla el grupo promedio	10	1.9
C1.4. Confunde promedio con valor esperado	17	3.3
C2.1. Considera y justifica correctamente la mediana	27	5.2
C2.2. Considera mejor la mediana, pero es inconsistente con la solución al primer apartado	36	6.9
C3. La respuesta no se relaciona con los promedios	169	32.3
C4. No contesta	111	21.4
Total	518	100.0

Es muy pequeña la frecuencia de estudiantes que reconoce que la mediana como el mejor promedio en esta situación y tampoco hay referencias a la moda, lo que indica que, a nivel explícito, los estudiantes no son capaces, en este problema de seleccionar el promedio más adecuado. Los resultados son bastante peores que en la elección de la medida de tendencia central más adecuada en el problema 5, aunque en aquél caso, se les preguntaba en concreto por la media y ahora la pregunta es más abierta.

De nuestros estudiantes el 3.3% confunde medida de tendencia central con valor de la variable y otro 3.3% con valor esperado. Sólo un 5.2 % de los alumnos resuelve el problema con el cálculo correcto de la mediana, mientras que en Cobo (2003), el 4.2% de los alumnos de 4º de ESO usan la mediana correctamente. Vemos una concordancia de resultados y que el problema es difícil para ambos tipos de estudiantes, posiblemente por la falta de familiaridad con datos ordinales. En nuestro caso hay un 7% adicional de estudiantes que consideran la mediana como medida de tendencia central más apropiada en este problema, aunque la respuesta es inconsistente con la dada en la primera parte, posiblemente por no saber calcularla en este tipo de datos.

Tabla 6.5.2.8. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 6.2

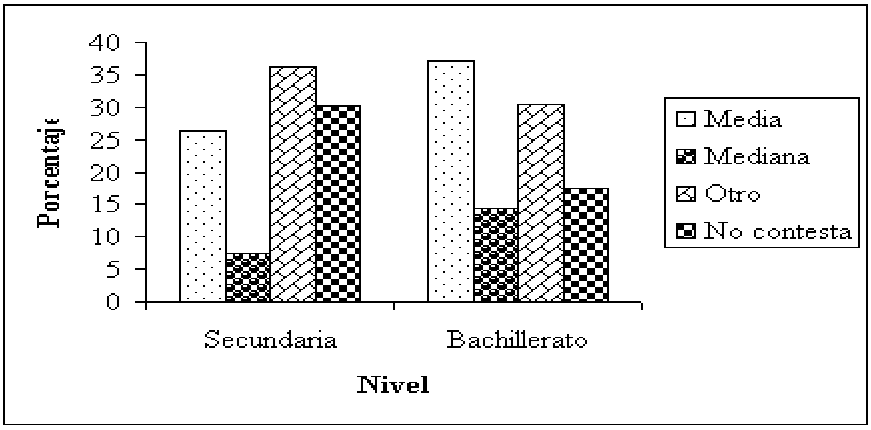
	Frecuencia	Porcentaje
Usa la idea de media	175	33.9
Usa la idea de mediana	63	12.3
Respuesta no relacionada con las medidas de tendencia central	169	32.7
No contesta	111	21.4
Total	518	100.0

En la Tabla 6.5.2.9 aparecen los datos resumidos, sumando las respuestas que hacen referencia a cada medida de tendencia central dada. Los resultados nos indican que por el carácter de las variables del problema (ordinales), éste ha sido un ítem difícil de resolver, ya que la tercera parte de los estudiantes utiliza la media para dar una respuesta, y bajos porcentajes de los alumnos utilizan mediana y moda. Por otra parte, es relevante el alto número de estudiantes que no responden o que dan una respuesta que no tiene relación con la media, mediana o moda.

Tabla 6.5.2.9. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 6.2 clasificadas por nivel escolar

		Nivel		
Respuesta		Secundaria	Bachillerato	Total
Media	Frecuencia	43	132	175
	% de nivel	26.5	37.1	33.8
Mediana	Frecuencia	12	51	63
	% de nivel	7.4	14.3	12.3
Otro	Frecuencia	58	108	169
	% de nivel	35.8	30.3	32.6
No contesta	Frecuencia	49	62	111
	% de nivel	30.1	17.4	21.4
Total		162	356	518

Figura 6.5.2. Porcentaje de respuestas en el ítem 6.2 por nivel escolar



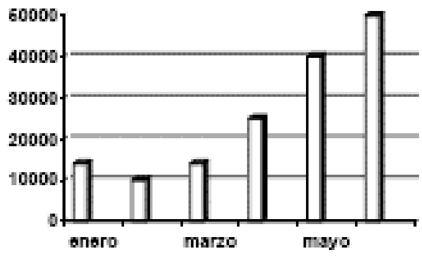
Al agrupar por tipo de alumno, los resultados son algo mejores en los alumnos de Bachillerato. Son estos alumnos los que más usan la mediana y dan menos respuestas en blanco. Pero en todo caso los resultados son muy pobres. Se obtuvo un valor Chi cuadrado =17.75 con 3 grados de libertad y una significación menor que 0.005, cumpliéndose las condiciones de aplicación. En la Figura 6.5.2 se presentan el gráfico.

6.6. ANÁLISIS DEL ÍTEM 9.2

Analizamos seguidamente los conflictos semióticos del ítem 9.2, también relacionado con la mediana. Este ítem, tomado de Zawojeswki (1986), se centra en la estimación directa de la mediana a partir de un gráfico.

Ítem 9

Observa el siguiente diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa Bocatta durante los últimos 6 meses del año pasado:



2. Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

La solución del ítem requiere utilizar dos propiedades: "la mediana y media pueden no coincidir con los datos" y "el cálculo de la media y el de la mediana no son operaciones internas". Cobo (2003), encontró los siguientes conflictos en este ítem:

- Confundir entre valor de la variable y frecuencia.
- Confundir el valor de la variable y la etiqueta, lo que implica que el estudiante no es capaz de hacer una lectura a nivel literal del gráfico, aunque este es el nivel más simple de lectura en la clasificación de Curcio (1989).

La dificultad de este ítem se debe a que, para resolverlo, primeramente los alumnos han de leer el gráfico y transformar la representación gráfica de la distribución de datos en una representación numérica. Con ello se obtendría la siguiente serie de valores aproximados: *13.000, 10.000, 13.000, 25.000. 40.000, 50.000.* Posteriormente, el alumno debe ordenar los datos:

10.000, 13.000, 13.000, 25.000, 40.000, 50.000

Puesto que se trata de un número par de valores, la mediana corresponde al valor de la media de los valores de la variable que ocupan los lugares centrales, es decir:

$$(13.000 + 25.000)/2 = 19.000$$

Dividimos a continuación la solución en unidades para realizar un análisis semiótico. Según Bertin (1967) la lectura de un gráfico comienza con una identificación externa del tema al que se refiere, a través de la interpretación del significado del título y las etiquetas. A continuación se requiere una identificación interna, de las dimensiones relevantes de variación en el gráfico, es decir, la interpretación de las variables representadas y sus escalas. Finalmente se produce una percepción de la correspondencia entre los niveles particulares de cada dimensión visual, para obtener conclusiones sobre los niveles particulares de cada variable y sus relaciones en la realidad representada.

En nuestro ejemplo, el alumno ha de diferenciar la unidad estadística (los meses de Enero a Junio) y la variable representada (número de bocadillos vendidos). Además, se requieren conocimientos de los conceptos de variable, valor de la variable, escala, frecuencia y mediana. El alumno ha de conocer el algoritmo de cálculo de la mediana con datos aislados y ser capaz de resolver el caso de indeterminación. Esta solución experta se analiza en la Tabla 6.6.1.

Tabla 6.6.1 Análisis de solución correcta al ítem 9.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	El alumno debe reconocer los datos del problema, pasando del formato gráfico al numérico, con lo que obtendría la siguiente serie de valores aproximados: 13.000, 10.000, 13.000, 25.000. 40.000, 50.000	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lectura de un gráfico (procedimiento). • Diferenciar entre unidad estadística (mes) y valor de la variable (número de bocadillos), (concepto). • Reconocer la variable que se representa en cada eje (conceptos de eje y escala). • Reconocer las unidades representadas en las escalas. • Pasar de cada barra al correspondiente valor numérico, relacionando dos tipos de representación del valor de la variable.
U2	Posteriormente, debe ordenar los datos: 10.000, 13.000, 13.000, 25.000, 40.000, 50.000	• Visualizar el conjunto de datos como un todo (concepto de distribución). • Concepto de mediana como estadístico de orden. • Operación de ordenación (procedimiento); orden de números reales (concepto).
U3	Puesto que se trata de un número par de valores, la mediana corresponde al valor de la media de las variables que ocupan los lugares centrales, es decir: $\frac{13.000 + 25.000}{2} = 19.000$	• Mediana como valor central de una serie de datos aislados (definición de la mediana). • El valor central se refiere a la variable y no a la frecuencia. • Cálculo de la mediana con un número par de elementos (procedimiento). • Resolución del caso de indeterminación y hallar la media de los dos valores centrales. • Concepto y algoritmo de la media. • Representación de la suma y división (operaciones) y su resultado. • Símbolo y concepto de igualdad.

En este ítem hemos obtenido las siguientes categorías de argumentos dados por los estudiantes de nuestra muestra.

C1. Cálculo de la media en lugar de calcular la mediana. Se repite el conflicto de terminología identificado en los ítems anteriores, esta vez con las siguientes variantes:

C1.1. Cálculo correcto de la media de una variable discreta con datos aislados. Los datos se presentan en forma de gráfico, por lo que los estudiantes que respondieron este apartado han obtenido primeramente los valores numéricos de la variable para realizar el cálculo a partir de ellos. En este ejemplo se ha llevado a cabo, por tanto, una lectura entre los datos (Curcio, 1989).

También se calcula correctamente la media de un conjunto de datos aislados, mostrando conocimiento de la definición de media y de su algoritmo, aunque hay una confusión terminológica entre media y mediana. Esta respuesta también fue encontrada por Cobo (2003), quien no informa de la frecuencia obtenida en sus estudiantes.

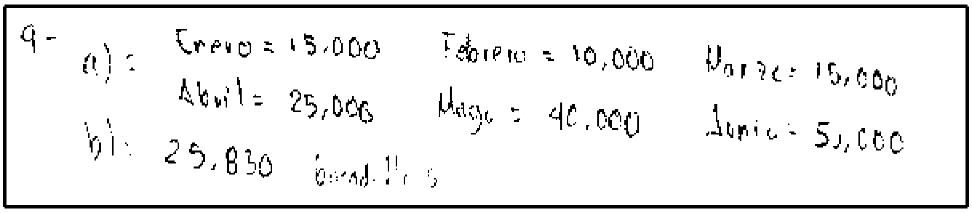


Tabla 6.6.2. Análisis de ejemplo en la categoría 1.1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Enero=15.000 Febrero=10.000 Marzo=15.000 Abril=25.000 Mayo=40.000 Junio=50.000*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lectura de un gráfico (procedimiento). • Diferenciar entre unidad estadística (mes) y valor de la variable “número de bocadillos” (concepto). • Reconocer la variable que se representa en cada eje (conceptos de eje y escala). • Pasar de cada barra al correspondiente valor numérico, relacionando dos tipos de representación del valor de la variable.
U2	*= 25.830 bocadillos*	• *Conflicto* al confundir media y mediana. • Particularización de la idea general de media y su algoritmo al caso particular. • Cálculo correcto de media con datos aislados. • Definición correcta de media. • Algoritmo correcto de cálculo de la media.

C1.2. Cálculo correcto de la media con error al interpretar la gráfica. El alumno asigna erróneamente los valores de la variable mostrando falta de capacidad de lectura de gráficos, incluso al nivel literal (Curcio, 1989). Otro conflicto aparece al confundir la media con la mediana, a menos a nivel terminológico. Por otro lado, en el ejemplo que analizamos a continuación, el alumno no asocia la media al conjunto total de datos, sino que calcula medias parciales para cada dos meses. Falla en la comprensión de la idea de distribución. El cálculo de la media aritmética es correcto en cada uno de los subgrupos.

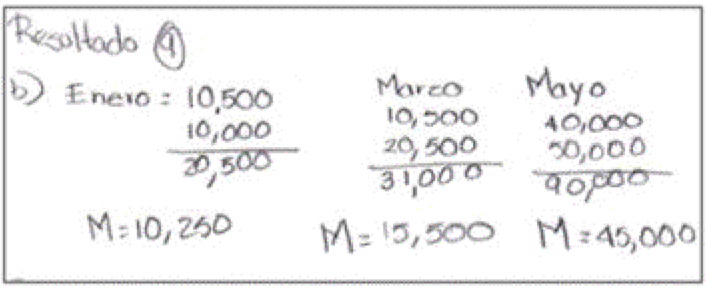


Tabla 6.6.3. Análisis de ejemplo en la categoría 1.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Enero* / *Marzo* / *Mayo* *10,500* / *10,500* / *40,000* *10,000* / *20,500* / *50,000* *20,500* / *31,000* / *90,000* *M=10,250* / *M=15,500* / *M=45,000*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Introduce una representación numérica de los datos; proceso de representación; introduce una representación verbal para los meses del año. • Lectura incorrecta de los datos del gráfico. • *Conflicto* para visualizar el conjunto de datos como un todo, es decir, usar la idea de distribución. • Divide el conjunto de datos en partes. • Confunde media con mediana. • No visualiza la media como propiedad de un conjunto de datos, sino calcula tres medias parciales. • Cálculo correcto de la media en cada subgrupo.

C2. Respuestas basadas en la mediana. Entre las respuesta de los alumnos que utilizan la mediana como estadístico de tendencia central para resolver el problema, hemos encontrado las siguientes variantes:

C2.1. Cálculo correcto de la mediana. Sería la respuesta correcta ya analizada, por lo que no la comentamos nuevamente.

C2.2. Cálculo de la mediana sin ordenar los datos. En este tipo de respuesta, el alumno considera como mediana el valor central de todos los elementos tal como se le presentan, error que también es encontrado por Barr (1980), Carvalho (1998, 2001), Cobo (2003) y Mayén (2006a). Supone un conflicto respecto a la definición de la mediana. La explicación que damos al mismo es que el estudiante entiende que el orden al que se refiere la definición de mediana es el orden de los datos, es decir, el orden numérico de los niños que ha asignado en la tabla de datos, en lugar del orden numérico natural. En el siguiente ejemplo, observamos cómo el alumno además de interpretar correctamente la gráfica, resuelve la indeterminación de tener dos casos centrales. Se produce el conflicto al no ordenar los datos.

“b) 15000 + 25000 = 40000 / 2 = 20000”

Tabla 6.6.4. Análisis de ejemplo en la categoría 2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*b) 15000 + 25000 = 40000 / 2 = 20000*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Interpreta correctamente la gráfica identificando correctamente los valores de la variable; ejes y escalas. • Traduce los datos representados de forma gráfica a datos numéricos; diferencia correctamente unidad estadística y valor de la variable. • No ordena los datos. *Conflicto* en la definición de mediana. • Busca el punto central y encuentra dos valores; usa la idea de mediana (concepto) como centro del conjunto de datos. • Particulariza este concepto al caso específico. • Algoritmo correcto de cálculo de la mediana en caso de número par de valores (procedimiento). • Resuelve el caso de indeterminación; aunque no ha ordenado los datos. • Conocimiento de la definición y algoritmo de media. • Representación de la suma, división y sus resultados.

C2.3. Interpretar como mediana el valor central del rango de la variable. Este caso ya lo comentamos en el análisis de los ítems anteriores. En consecuencia, el alumno aplica la idea de mediana como valor central, pero aparece un conflicto en la identificación de cuál es valor del centro que se debe de calcular. Es decir, asocia la mediana a la idea de centro, pero se produce un conflicto al no saber a qué se refiere este centro, confundiendo "centro estadístico de la distribución", con "centro geométrico del rango de variación". De la idea general de "centro" el alumno ha de particularizar la "mediana como centro"; pero hay un conflicto debido a que la particularización que hace es incorrecta.

Conoce y usa la idea y procedimiento de cálculo del punto medio. Además, el alumno intercambia la escala con el valor de la variable, considerando las marcas de clase como valores de la variable. No hemos encontrado este conflicto en la investigación de Cobo (2003), ni en otros antecedentes, por lo que su detección constituye una aportación de nuestro trabajo.

"Mediana ---- 25.000 aprox."

Tabla 6.6.5. Análisis de ejemplo en la categoría 2.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Mediana ---- 25.000 aprox.*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Confunde las marcas de la escala con los valores de la variable. • *Conflicto* en la definición de mediana como valor central del rango de la variable. • Centro; interpretación como punto medio o centro geométrico (conceptos); conflicto al confundir el centro estadístico con el centro geométrico, debido a un proceso incorrecto de particularización (de la idea general de centro a un caso particular). • Centro geométrico como punto medio de los extremos (definición y procedimiento de cálculo del centro geométrico). • *Conflicto* en el algoritmo de cálculo de mediana.

C2.4. Calcula la mitad de cada valor de los datos, y sobre los valores hallados calcula la mediana como centro del rango. El alumno comienza leyendo correctamente la gráfica y transformando los datos a valores numéricos. Sin embargo, en lugar de trabajar con estos valores para hallar la mediana, divide cada uno de los valores estimados por dos.

A continuación aplica correctamente el algoritmo de la mediana a estos nuevos datos, identificando correctamente el caso de indeterminación. Lo resuelve y para encontrar la mediana, toma la mitad de los dos valores centrales y obtiene su promedio. Considera que la mediana es el valor encontrado de esta manera. Este tipo de respuesta no la hemos encontrado descrita en los trabajos previos.

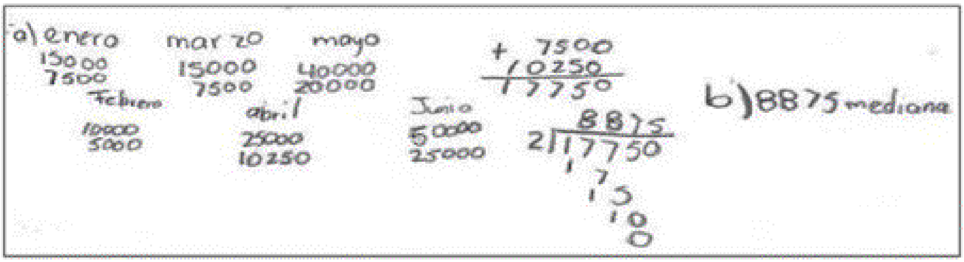


Tabla 6.6.6. Análisis de ejemplo en la categoría 2.4

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*enero marzo mayo* *15000 15000 40000* *7500 7500 20000* *febrero abril junio* *10000 25000 50000* *5000 10250 25000*	• El alumno comienza con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema. • Lectura de un gráfico (procedimiento). • Diferenciar entre unidad estadística (mes) y valor de la variable (número de bocadillos), (concepto). • Reconocer la variable que se representa en cada eje (conceptos de eje y escala). • Pasar de cada barra al correspondiente valor numérico, relacionando dos tipos de representación del valor de la variable. • *Obtiene la mitad de cada valor de los datos.* • *Conflicto* en la definición de mediana.
U2	*7500 $\frac{17750}{2}$=8875* *+10250* *17750* *b)8875 mediana*	• Aplica el algoritmo de cálculo de la mediana a la nueva serie de datos obtenidas. • Identifica correctamente el caso de indeterminación. • 7500 es la mitad del valor correspondiente a Marzo y 10250 es la mitad del valor correspondiente a Abril (valores centrales del rango de datos). • Halla el promedio de estos dos valores. • *Conflicto* al considerar este valor como la mediana.

C2.5. Cálculo correcto de la mediana a partir de la frecuencia acumulada. El alumno forma correctamente la tabla de frecuencias acumuladas, calculando las frecuencias absolutas y relativas acumuladas. Obtiene el total de datos y lo divide por dos, reconociendo que la mediana es el valor cuya frecuencia acumulada es igual a 50%. Luego encuentra el valor de la variable al que corresponde el valor mediano. La solución es muy compleja y supone la comprensión de un gran número de conceptos; sólo la hemos encontrado en dos estudiantes.

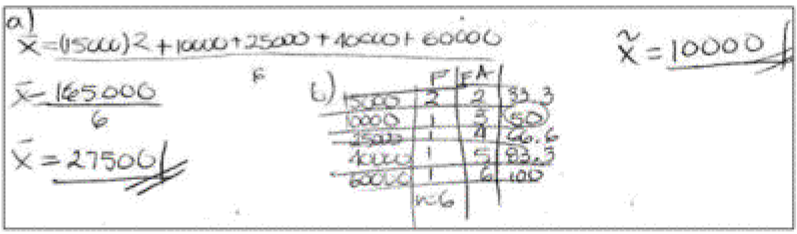


Tabla 6.6.7. Análisis de ejemplo en la categoría 2.5

Unidad	Expresión	Contenido
U1	F FA 15000 2 2 33.3 10000 1 3 <u>50</u> 25000 1 4 66.6 40000 1 5 83.3 60000 1 6 100 *n=6*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lectura de un grafico (procedimiento). • Reconoce la variable que se encuentra en cada eje (conceptos de eje y escala). • Obtiene frecuencias acumuladas absolutas y relativas correctamente (conceptos y procedimientos). • Calcula el total y mitad de las frecuencias acumuladas (procedimiento).

		• Proceso de representación de datos en una tabla de frecuencias. • Reconoce que la mediana corresponde a frecuencia acumulada n/2 (propiedad y definición de mediana).
U2	*X = 10000*	• Reconoce el valor que está en el centro del conjunto de datos a partir de una tabla de frecuencias.

C2.6. Cálculo correcto de la mediana con error en el caso de indeterminación. El alumno hace una lectura correcta del gráfico. Con respecto a la mediana, aparece otro conflicto, pues aunque ordena los datos y comienza bien el algoritmo, al tratar de resolver el caso de indeterminación no toma los valores centrales correctos, sino que suma los valores segundo y penúltimo de los datos obtenidos del gráfico y los divide por dos. Hay un conflicto en la solución del caso de indeterminación, aunque el resto del procedimiento es correcto. No hemos encontrado este error en las investigaciones previas.

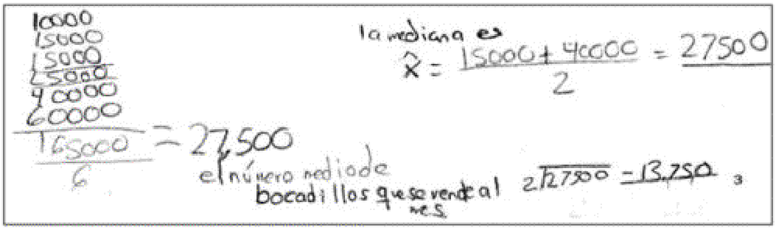


Tabla 6.6.8. Análisis de ejemplo en la categoría 2.6

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*10000* *15000* *15000* *25000* *40000* *60000* *165000 = 27,500 Número de* *6 bocadillos que* *se vende al mes*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lectura de un gráfico (procedimiento). • Diferenciar entre unidad estadística (mes) y valor de la variable (número de bocadillos), (concepto). • Reconocer la variable que se representa en cada eje (conceptos de eje y escala). • Pasar de cada barra al correspondiente valor numérico, relacionando dos tipos de representación del valor de la variable. • Ordena los datos, usa la idea de mediana como centro del conjunto de datos ordenados.
U2	*La mediana es* *X = 15000 + 40000 = 27,500* *2*	• Identifica el caso de indeterminación. • *Conflicto* en el cálculo de la mediana para un número par de valores al tomar los datos incorrectos para realizar su cálculo. Cálculo correcto de media con datos aislados. Definición correcta de media.

C2.7. Asocia la mediana a cada unidad estadística. El alumno aunque realiza una estimación correcta de datos, comete otro error al dividir cada valor estimado por 2 y *considerar a cada uno como la mediana.* Supone una interpretación incorrecta de mediana como asociada a cada dato y no al conjunto de datos como un todo. Además hay una ausencia de la idea de distribución de datos.

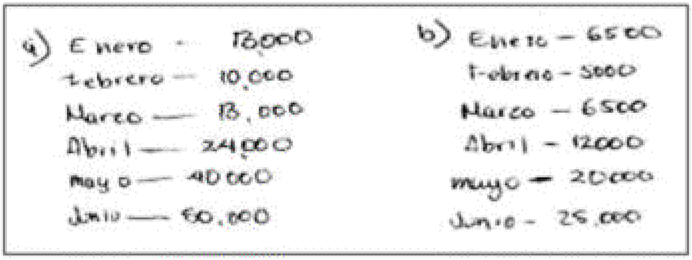


Tabla 6.6.9. Análisis de ejemplo en la categoría 2.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Enero – 6500* *Febrero – 5000* *Marzo – 6500* *Abril – 12000* *Mayo – 20000* *Junio - 25000*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lectura de un gráfico (procedimiento). • Diferenciar entre unidad estadística (mes) y valor de la variable (número de bocadillos), (concepto). • Reconocer la variable que se representa en cada eje (conceptos de eje y escala). • Pasar de cada barra al correspondiente valor numérico, relacionando dos tipos de representación del valor de la variable. • *Conflicto* en la definición de mediana. • No visualiza la mediana como propiedad del conjunto de datos.

C3. Utiliza la moda. Se presenta un conflicto en estos estudiantes que confunden los conceptos de moda y mediana al menos terminológicamente. En el siguiente ejemplo, el estudiante realiza una interpretación correcta del gráfico y un cálculo correcto de la moda. En el estudio de Cobo (2003), el 23% de sus alumnos de 4º, y 5% de alumnos de 1º de ESO calculan correctamente la moda en este ítem.

“R=15000”

Tabla 6.6.9. Análisis de ejemplo en la categoría 3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*R = 15000*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lectura de un grafico (procedimiento). • *Conflicto* en la definición de mediana; confusión con la moda. • Cálculo correcto de la moda y uso correcto de su definición. • Proceso de representación de los datos.

C4. La respuesta no tiene relación con las medidas de tendencia central. Este error consiste en dar una solución no relacionada con una de las medidas de tendencia central por lo que en este apartado sólo comentaremos sus variantes destacadas.

C4.1. Obtiene el número medio de bocadillos diarios de cada mes. El alumno interpreta correctamente el gráfico, sin embargo, desconoce el cálculo para llegar a la mediana, dado que toma los datos asignados a cada mes y divide cada uno por 30, con lo que sólo obtiene el valor diario de bocadillos vendidos, que él considera “medianas”. Consideramos que esta solución no se relaciona con las medidas de tendencia central al no dar una sola de ellas, ni siquiera incorrecta para el conjunto de datos. Es decir, el alumno no usa la idea de distribución ni visualiza las medidas de tendencia central como una propiedad de la distribución.

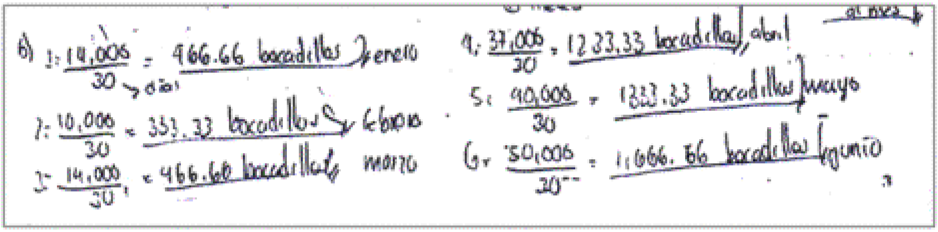
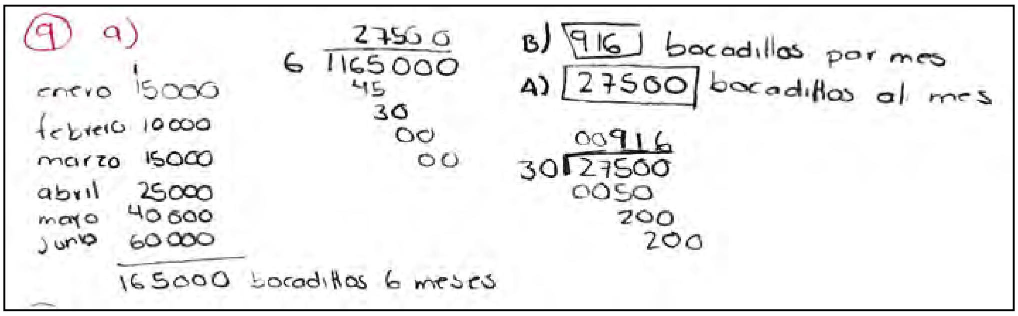


Tabla 6.6.10. Análisis de ejemplo en la categoría 4.1

Unidad	Expresión		Contenido
U1	*1.* $\frac{14000}{30}$ *=466.6 ene (días)* *2.* $\frac{10000}{30}$ *=333.33 feb* *3.* $\frac{14000}{30}$ *=466.66 mar*	*4.* $\frac{37000}{30}$ *=1233.33 abril* *5.* $\frac{40000}{30}$ *=1333.33 mayo* *6.* $\frac{50000}{30}$ *=1666.66 junio*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lectura de un gráfico (procedimiento). • Diferenciar entre unidad estadística (mes) y valor de la variable (número de bocadillos), (concepto). • Reconocer la variable que se representa en cada eje (conceptos de eje y escala). • Pasar de cada barra al correspondiente valor numérico, relacionando dos tipos de representación del valor de la variable. • No visualiza la mediana como propiedad del conjunto de datos. • Calcula la media de bocadillos diarios para cada mes.

C4.2. Suma los valores representados en la escala y divide la suma por 30. Se observa en el ejemplo que este alumno no hace una estimación de datos pues *en su lugar, toma los valores de la escala.* El total obtenido lo divide por 30, que podríamos pensar que se refiere a los días de cada mes. Con este procedimiento observamos que el estudiante no ha interpretado bien el gráfico, y además confunde media y mediana. Además comete un error en el algoritmo de cálculo de la media.


9 a)

enero 15000
febrero 10000
marzo 15000
abril 25000
mayo 40000
junio 60000

165000 bocadillos 6 meses

6 | 165000 = 27500

B) 916 bocadillos por mes

A) 27500 bocadillos al mes

30 | 27500 = 00916

Tabla 6.6.11. Análisis de ejemplo en la categoría 4.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*enero 15000* *febrero 10000* *marzo 15000* *abril 25000* *mayo 40000* *junio <u>60000</u>* *165000 bocadillos 6 meses* *165000 / 6 = 27500*	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lectura de un gráfico. • Asigna un valor numérico a cada dato, proceso de representación. • Diferenciar entre unidad estadística (mes) y valor de la variable (número de bocadillos), concepto. • Reconoce la variable que se presenta en cada eje (conceptos de eje y escala). • Pasar de cada barra al correspondiente valor numérico, relacionando dos tipos de representación del valor de la variable.
U2	*<u>27500 / 30 = 916</u>*	• Divide el total obtenido por 30 (pensamos que número de días del mes) y obtiene un resultado incorrecto. • Confunde media y mediana.

C4.3. Confunde las marcas de la escala con los valor de la variable, conflicto identificado por Cobo (2003). Se observa un error al interpretar el gráfico, ya que el alumno utiliza como valores de la variable los números que aparecen en la escala vertical y da como respuesta “30000”, elegido como el valor intermedio del eje de las ordenadas, por lo tanto, se podría asumir que confunde variable con unidad estadística. Es similar al caso anterior, pero ahora usa todos los datos para calcular la mediana ordenando los datos. El error se produce por una lectura incorrecta del gráfico:

“30000”

Tabla 6.6.12. Análisis de ejemplo en la categoría 2.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	30000	• El alumno ha de comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • *Conflicto* en la interpretación del gráfico estadístico. • Confunde valor de la variable con las marcas de las escalas en el eje Y. • Definición de mediana, al elegir el valor central de los datos. • Ordena los datos, utiliza correctamente el algoritmo de cálculo de la mediana, aunque los datos han sido incorrectamente identificados. • Representación numérica.

C5. No contesta. No proporciona respuesta.

En la Tabla 6.6.13 presentamos la frecuencia de las respuestas categorizadas de este ítem, donde hemos encontrado mejores resultados en su resolución que en los anteriores, por lo que podemos pensar que ha sido un ítem fácil de resolver y que por lo tanto, los estudiantes saben interpretar al menos este tipo de gráfico.

Tabla 6.6.13. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el Ítem 9b

Categorías de respuestas empleadas en el ítem 9b	Frecuencia	%
C1.1. Cálculo correcto de la media de una variable discreta con datos aislados	110	21.2
C1.2 Error al interpretar el gráfico con cálculo correcto de media	3	0.6
C2.1. Cálculo correcto de la mediana	170	32.8
C2.2. Cálculo de la mediana sin ordenar los datos	45	8.7
C2.3. Interpretar como mediana el valor central del rango de la variable	40	7.7
C2.4. Calcula la mitad de cada valor de los datos, y sobre los valores hallados calcula la mediana como centro del rango	1	0.2
C2.5. Cálculo correcto de la mediana a partir de la frecuencia acumulada.	2	0.4
C2.6. Cálculo de la mediana con error en la solución del caso de indeterminación	6	1.3
C2.7. Asocia la mediana a cada dato y no al conjunto	12	2.3
C3. Utiliza la moda	14	2.7
C4.1. Obtiene el número medio de bocadillos diarios cada mes	10	1.9
C4.2. Suma los valores representados en la escala y divide la suma por 30	2	0.4
C4.3. Confunde marcas de escala con valores de la variable	58	11.2
C5. No contesta	45	8.7
Total	518	100.0

Encontramos una distribución amplia de respuestas en el ítem. La mayoría de ellas se centra, por una parte, en la resolución correcta de la media con un 21.8%. Éste sigue siendo el concepto donde los estudiantes tienen mayor conocimiento. Por otra, y contrario a lo que esperábamos, las frecuencias más altas de respuestas correctas se centran en la obtención de la mediana, con un 32.8%.

Entre los errores que más destacan en este problema se incluyen los alumnos que confunden los elementos que representa cada eje del gráfico, por ejemplo, la variable (número de bocadillos) con la escala, no alcanzándose el primer nivel de lectura de datos definido por Curcio (1989). Se vuelve a repetir la interpretación de la mediana como el valor central del rango de la variable y en menor proporción se asocia la mediana con cada dato y no con la distribución. Son pocos los alumnos que obtienen la moda o que no responden.

Cobo (2003), en su investigación obtuvo bajos porcentajes de respuestas correctas en el cálculo gráfico de este ítem. Sólo el 4.2% de sus estudiantes tanto de 1º como de 4º curso de ESO utilizó la mediana. Sus estudiantes utilizaron el cálculo de la media en un 11.9% y en un 16% el cálculo de la moda. Por tanto nuestros, resultados son mejores que los de la citada autora.

En la Tabla 6.6.14 resumimos los datos sumando las respuestas que hacen referencia a un promedio dado, obteniendo que 22.9% de los estudiantes calculan la media; 52.12% la mediana y 2.7% utiliza la moda. Por otra parte, son muchos los estudiantes que no responden el ítem (8.7%) y otro alto porcentaje el que da respuestas no relacionadas con medidas de tendencia central (13.5%).

Tabla 6.6.14. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 9b

	Frecuencia	Porcentaje
Usa la idea de media	113	21.8
Usa la idea de mediana	276	53.3
Usa la moda	14	2.7
Respuesta no relacionada con promedios	70	13.5
No contesta	45	8.7
Total	518	100.0

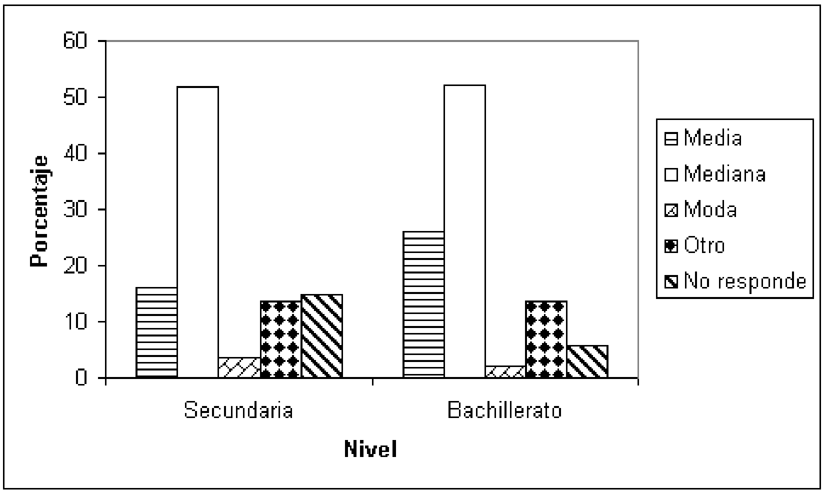
Presentamos en la Tabla 6.6.15 la frecuencia y porcentajes de respuestas de los estudiantes según su nivel escolar, que nos permite observar con más detalle la distribución de los conflictos encontrados.

Tabla 6.6.15. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 9b clasificadas por nivel escolar

		Nivel		
Respuesta		Secundaria	Bachillerato	Total
Media	Frecuencia	23	90	113
	% de nivel	14.2	25.3	21.8
Mediana	Frecuencia	87	189	276
	% de nivel	53.7	53.1	53.3
Moda	Frecuencia	6	8	14
	% de nivel	3.7	2.2	2.7
Otro	Frecuencia	22	48	70
	% de nivel	13.6	13.5	13.5
No contesta	Frecuencia	24	21	45
	% de nivel	14.8	5.9	8.7
Total		162	356	518

Entre las diferencias más notorias, tenemos a los estudiantes de Bachillerato, quienes utilizan en mayor proporción la media para resolver este ítem (25.3% con respecto a 14.2% de los estudiantes de Secundaria). En cuanto al uso de mediana, son semejantes los resultados obtenidos con 53% cada uno. Por lo que corresponde al uso de la moda en este ítem, se registran pocos casos en cada grupo y también los estudiantes que no lo contestan. Se obtuvo un valor Chi cuadrado =15.9 con 4 grados de libertad y una significación menor que 0.003, cumpliéndose las condiciones de aplicación. En la Figura 6.6.1 se presenta el gráfico de las respuestas por grupo.

Figura 6.6.1. Porcentaje de respuestas en el ítem 9b por nivel escolar (tipo de alumno)



6.7. ANÁLISIS DEL ÍTEM 10.2

Ítem 10.2

El siguiente conjunto de datos refleja las edades en que contrajeron matrimonio una muestra de 100 mujeres.

Edad	Frecuencia
15-19	4
20-24	38
25-29	28
30-34	20
35-39	8
40-44	1
45-49	1

¿Cuál es la media, mediana y moda de la edad de estas mujeres? Realiza los cálculos necesarios.

Con este ítem, tomado de Cobo (1998), se pretende comprobar la capacidad de cálculo de la mediana en un conjunto de datos agrupados en intervalos y presentados en una tabla de frecuencias. Esta es una tarea habitual en las clases de estadística, pero, sin embargo, resultó difícil para los estudiantes de nuestra muestra, por lo que se decidió incluirlo en el análisis. Cobo (2003) no incluyó este ítem en su investigación, aunque lo utilizó en otro estudio previo (Cobo, 1998), donde se detectó su alto grado de dificultad.

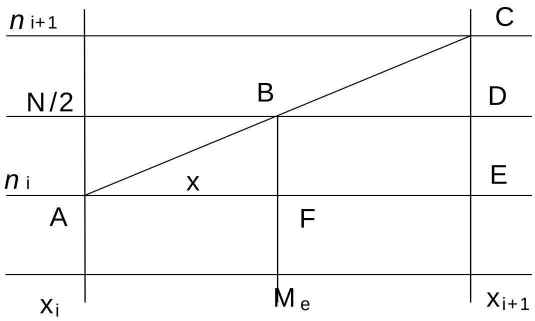
Para calcular la mediana es necesario determinar el intervalo que corresponde a una frecuencia acumulada igual a 50, puesto que se tienen 100 datos. El estudiante debe comenzar calculando las frecuencias acumuladas, como se muestra en la siguiente tabla:

Edad	Frecuencia	F. acumulada
15-19	4	4
20-24	38	42
25-29	**28**	**70**
30-34	20	90
35-39	8	98
40-44	1	99
45-49	1	100

El intervalo mediano sería (25-29), porque la frecuencia acumulada pasa de 42 al comienzo a 70 al final, luego incluye el valor 50. En Batanero y Díaz (2008) se explica la siguiente forma de determinar la mediana a partir de las frecuencias absolutas acumuladas o de las frecuencias acumuladas, y utilizando la interpolación lineal. Sea la clase *i*, la clase mediana; aplicando el Teorema de Thales, se tiene (Ver Figura 6.7.1):

$$\frac{x}{x_{i+1}-x_{i+1}}=\frac{\frac{N}{2}-n_i}{n_{i+1}-n_i}\text{, por tanto, Me}= x_i+x\text{; donde } \frac{x}{AE}=\frac{BF}{CE}$$

Figura 6.7.1. Cálculo de la mediana en datos agrupados



Utilizando estás fórmulas, el alumno tiene que aplicar la proporcionalidad para interpolar el valor exacto de la mediana: *Me = 25 + (4*8/28) = 26.14*

Admitiremos también como correcto el caso de que el estudiante tome como aproximación el punto medio de dicho intervalo (27), o bien, que calcule la mediana aplicando directamente la definición y escribiendo los datos ordenados:

*17,17,17,17,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22, 22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,22,27,27,27,27,27,27,**27**,27,27,27,27,27,27, 27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,32,32,32,32,32,32,32,32,32,32,32,32,32, 32,32,32,32,32,32,32,37,37,37,37,37,37,37,37,42,47*

Como vemos, para resolver el problema, se requieren conocimientos de los conceptos de media, mediana y moda, además de los conceptos de frecuencia y media ponderada. En el caso de que el alumno use la fórmula de cálculo, debe emplear la idea de proporcionalidad geométrica y aritmética, recordar el Teorema de Thales y aplicarlo en esta situación. Seguidamente, ha de resolver una ecuación, empleando operaciones algebraicas que, finalmente ha de particularizar a los datos del problema, completando las correspondientes operaciones aritméticas.

En consecuencia, además de conocimientos estadísticos, hay que movilizar una serie de conocimientos geométricos, numéricos y algebraicos. Al igual que en los casos anteriores, dividimos la solución en unidades para realizar el análisis semiótico respectivo.

Tabla 6.7.1 Análisis de solución correcta al ítem 10.2

<table>
<tr><th>Unidad</th><th>Expresión</th><th>Contenido</th></tr>
<tr><td>U1</td><td>
El siguiente conjunto de datos refleja las edades en que contrajeron matrimonio una muestra de 100 mujeres.
<table>
<tr><th>Edad</th><th>Frecuencia</th></tr>
<tr><td>15-19</td><td>4</td></tr>
<tr><td>20-24</td><td>38</td></tr>
<tr><td>25-29</td><td>28</td></tr>
<tr><td>30-34</td><td>20</td></tr>
<tr><td>35-39</td><td>8</td></tr>
<tr><td>40-44</td><td>1</td></tr>
<tr><td>45-49</td><td>1</td></tr>
</table>
</td><td>

El alumno debe comenzar con un proceso de significación, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos.
100: tamaño de la muestra: dato y concepto.
Lectura de la tabla de datos. lectura de etiquetas: Edad (expresión verbal) se refiere a una unidad de tiempo.
Implícitamente se hace referencia al intervalo de clase y sus extremos (conceptos). en cada línea se define un intervalo, mediante los valores numéricos de sus extremos.
Frecuencia (concepto, número de alumnos en cada intervalo).
Visualizar el conjunto de datos como un todo (idea de distribución).
Al estar los intervalos de datos ordenados de menor a mayor, supone la idea de orden (concepto).
Identificar los intervalos de clase y su amplitud.
Particularización de diferentes conceptos al ejemplo dado.

</td></tr>
<tr><td>U2</td><td>
¿Cuál es la mediana de la edad de estas mujeres? Realiza los cálculos necesarios.

Se debe determinar el intervalo que corresponde a una frecuencia acumulada igual a 50:

<table>
<tr><th>Edad</th><th>Frecuencia</th><th>F. acumulada</th></tr>
<tr><td>15-19</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>20-24</td><td>38</td><td>42</td></tr>
<tr><td>25-29</td><td>28</td><td>70</td></tr>
<tr><td>30-34</td><td>20</td><td>90</td></tr>
<tr><td>35-39</td><td>8</td><td>98</td></tr>
<tr><td>40-44</td><td>1</td><td>99</td></tr>
<tr><td>45-49</td><td>1</td><td>100</td></tr>
</table>

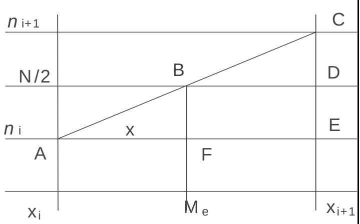
El intervalo mediano sería (25-29), porque la frecuencia acumulada pasa de 42 al comienzo a 70 al final, luego incluye el valor 50.

</td><td>

Definición de mediana (concepto) como valor que divide en dos partes el conjunto de datos (propiedad).
Interpretación del significado de frecuencia y frecuencia acumulada (conceptos).
Cálculo de frecuencias acumuladas. procedimiento.
Determinación de n/2 (propiedad y procedimiento).
Atribución del intervalo mediano (25-29) al conjunto de datos (particularización de la idea general de mediana).

</td></tr>
<tr><td>U3</td><td>

Sea clase i la clase mediana; aplicando el teorema de Thales, se tiene:



$$\frac{x}{x_{i+1}-x_{i+1}} = \frac{\frac{N}{2}-n_i}{n_{i+1}-n_i}$$
</td><td>

Construcción del polígono de frecuencias acumuladas (representación). concepto de polígono de frecuencias.
Lectura del gráfico (procedimiento).
Determinar la mediana a partir del gráfico. aplicación del teorema de Thales.
Simbolización de frecuencias, y valores de la variable en el gráfico.
Conocimiento de proporcionalidad (significación y concepto).
Resolución de una ecuación para despejar el valor de la mediana (procedimiento). uso del lenguaje algebraico y propiedades algebraicas elementales.
Dar valores a las variables en la fórmula, a partir de los datos (particularización).
Realización de operaciones aritméticas.

</td></tr>
</table>

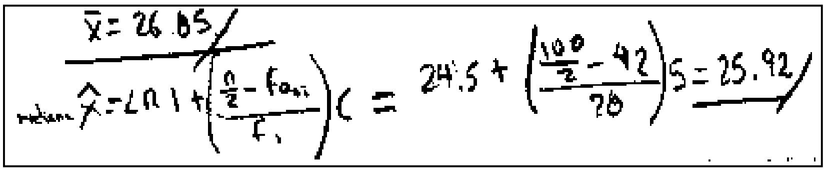
	Me=x_i+x $\frac{x}{AE} = \frac{BF}{CE}$ • Se aplica la proporcionalidad para interpolar el valor exacto de la mediana: *Me = 25 + (4*8/28) = 26.14*	

A continuación se describen las variantes de respuestas encontradas en este ítem.

C2. Respuestas de alumnos que calculan la mediana. Los alumnos conocen el significado del término mediana y tratan de calcularla, correcta o incorrectamente. Dentro de esta categoría, se encuentran las siguientes variantes:

C2.1.Cálculo correcto de la mediana. Hemos encontrado estudiantes que resuelven el problema correctamente, aplicando el proceso que acabamos de describir en el análisis semiótico de la respuesta correcta. En algunos casos, los alumnos no utilizan un gráfico para apoyarse en el cálculo, sino que simplemente aplican la fórmula de cálculo, como el ejemplo siguiente. No queda claro si el alumno ha aprendido la fórmula de memoria o bien la deduce.

No realizamos el análisis semiótico pues la respuesta es básicamente la misma que la correcta. Observamos en el ejemplo el uso de símbolos, expresiones algebraicas y proporcionalidad correctamente, aunque hay un pequeño error en las operaciones aritméticas. También emplea adecuadamente los conceptos e variable, frecuencia absoluta y acumulada, tamaño de muestra y mediana.



C2.2. Da el intervalo donde se halla la mediana. El alumno no llega a calcular la mediana, pero consigue identificar el intervalo mediano. Toma como mediana la mitad del número de datos al obtenerla a partir de la frecuencia absoluta.

En el ejemplo que sigue el alumno comienza interpretando el texto del problema y sus datos, reconociendo el valor del tamaño de la muestra (100), que divide por dos,. En consecuencia reconoce que la mediana es el valor de la variable que corresponde a una frecuencia acumulada igual a 50%. Con este procedimiento encuentra el intervalo correcto donde se halla la mediana, que es aquél en cuyos extremos la frecuencia acumulada es respectivamente menor (extremo inferior) y mayor (extremo superior) a N/2. La respuesta queda incompleta al no calcular el valor exacto. Se produce un *conflicto,* pues para el caso de datos agrupados hay un único valor que cumple la definición de mediana (por convenio). El alumno no conoce este convenio, por lo que falla al calcular la mediana.

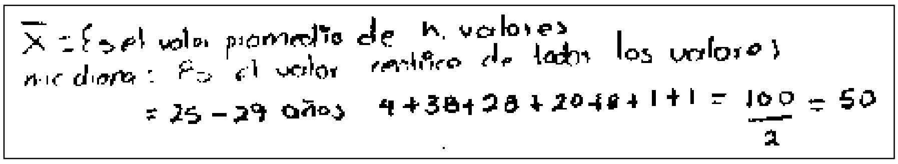

$\bar{X}$ = {es el valor promedio de n. valores
mediana : Es el valor céntrico de todos los valores}
= 25 – 29 años $4+38+28+20+8+1+1 = \frac{100}{2} = 50$

Tabla 6.7.2. Análisis de ejemplo en la categoría 2.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Mediana= Es el valor céntrico de todos los valores = 25-29 años*	• El alumno debe comenzar con un proceso de significación, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Mediana (concepto). valor “céntrico” (definición de la mediana. imprecisión en el vocabulario. • “Todos los valores”: Visualiza el conjunto de datos como un todo (idea de distribución). • Obtiene del intervalo mediano (25-29) del conjunto de datos (particularización de la idea general de mediana) aplica una propiedad. • 25-29: intervalo de valores. números que representan la cantidad en la magnitud “edad”. • Años: unidad de medida. • Uso informal (no completamente apropiado) de la igualdad.
U2	*4+38+28+20+8+1+1= 100/ 2 = 50*	• Interpreta cada número como un valor de la frecuencia (concepto). • Acumula las frecuencias (procedimiento) hasta llegar a 50 (N/2). concepto de frecuencia acumulada. • Definición de mediana (concepto) como valor que divide en dos partes el conjunto de datos (propiedad). • Reconoce que la mediana corresponde a frecuencia acumulada n/2 (propiedad). • *Conflicto* al no finalizar el cálculo. La mediana es un valor único, no un intervalo de valores. • Uso correcto de la igualdad.

C2.3. Se equivoca en el intervalo donde se encuentra la mediana, dando el anterior o posterior. Son muy frecuentes este tipo de respuestas, similares a la anterior, en cuanto a que el estudiante en vez de calcular la mediana, da un intervalo de valores. La diferencia es que los estudiantes indican un intervalo distinto de aquél en que se encuentra la mediana, ya sea el anterior o posterior.

En el ejemplo que se analiza a continuación, el estudiante comienza escribiendo ordenados los intervalos de clase y marca el intervalo central en la ordenación. Es decir, está considerando cada intervalo como si fuese un valor numérico aislado y aplicando el algoritmo de cálculo de la mediana para datos aislados. Aunque usa la idea de mediana como centro del conjunto de datos, hay un conflicto, pues no tiene en cuenta las frecuencias en los diferentes intervalos.

Un segundo conflicto sería no diferenciar entre mediana e intervalo mediano. Bruno y Espinel (2005) encontraron que algunos profesores representaban los intervalos de clase como si se tratase de un punto aislado, al construir histogramas u otros gráficos estadísticos. Es posible que, tanto este error, como las respuestas clasificadas en esta categoría en nuestro trabajo enmascaren un conflicto consistente en la falta de comprensión del significado de un intervalo de clase, concepto que es sistémico, pues un intervalo se compone de puntos. Se trataría de un fallo en el proceso de composición.

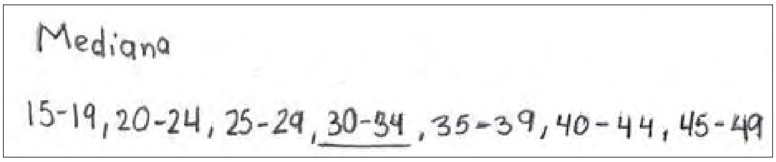


Tabla 6.7.3. Análisis de ejemplo en la categoría 2.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*15-19, 20-24, 25-29, <u>30-34</u>, 35-39, 40-44, 45-49*	• El alumno debe comenzar con un proceso de significación, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Visualiza el conjunto de datos como un todo (idea de distribución). • Identifica los intervalos de clase (representación) y su amplitud. • Ordena los intervalos de menor a mayor, lo que supone la idea de orden (concepto). • *Conflicto* en la interpretación del intervalo (concepto); los está tratando como si fuesen datos aislados. • Aplica a los intervalos el procedimiento de cálculo de la mediana con datos aislados; hay un conflicto al utilizar un procedimiento no válido en este caso. • *Conflicto* en la definición de mediana (concepto) como valor que divide en dos partes el conjunto de datos (propiedad) pues no tiene en cuenta la frecuencia en cada intervalo. • No interpreta el significado de frecuencias, ni calcula frecuencias acumuladas. • *Conflicto* en la atribución del intervalo mediano (35-39) al conjunto de datos (particularización de la idea general de mediana).

C2.4. Da como mediana el centro del recorrido. Este error, ya descrito en los ítems anteriores se repite en el caso de datos que están representados en la tabla de frecuencias. En el ejemplo que reproducimos, se observa que el alumno ha identificado el máximo y mínimo de las frecuencias absolutas y calcula el punto medio del segmento marcado por estos dos extremos, e interpreta el resultado como la mediana. Conoce y usa la idea y procedimiento de cálculo del punto medio.

Sin embargo, aparece un conflicto en la identificación de cuál es el valor del centro que se debe de calcular, y aunque asocia la mediana a la idea de centro, se produce un conflicto al no saber a qué se refiere este centro, confundiendo “centro estadístico de la distribución”, con “centro geométrico del rango de variación”. De la idea general de “centro” el alumno ha de particularizar a la “mediana como centro”, pero hay un conflicto debido a que la particularización que hace es incorrecta. Como mencionamos anteriormente, este conflicto no se ha encontrado en investigaciones previas.

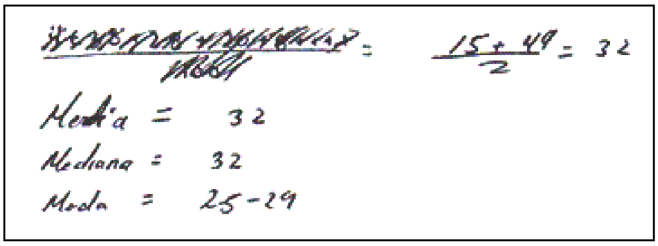


Tabla 6.7.4. Análisis de ejemplo en la categoría 2.4

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*15+49/2 =32* *Mediana = 32*	• El alumno debe comenzar con un proceso de significación, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Visualiza el conjunto de datos como un todo (idea de distribución). • No identifica los intervalos de clase (representación) y su amplitud. • *Conflicto* en la definición de mediana (concepto) como valor central del rango de la variable. • Identifica el máximo y el mínimo de las frecuencias absolutas (concepto). proceso de particularización de la idea general de extremos a los extremos particulares del conjunto de datos (frecuencias). procedimiento de obtención de dichos valores. • Centro. interpretación como punto medio o centro geométrico (conceptos). *conflicto* al confundir centro estadístico con centro geométrico, debido a un proceso incorrecto de particularización (de la idea general de centro a un caso particular). • Centro geométrico como punto medio de los extremos (definición y procedimiento). • *Conflicto* en el algoritmo de cálculo de la mediana.

C2.5. Calcula la mediana a partir de las frecuencias en lugar de usar los valores de la variable. Estos estudiantes confunden las ideas de frecuencia y valor de la variable, aplicando al conjunto de frecuencias el algoritmo de cálculo de la mediana para datos aislados. Este algoritmo se aplicaría correctamente, pues el alumno incluso ordena los valores de las frecuencias.

Hay un conflicto asociado en la definición de mediana, que no se refiere a las frecuencias sino a los valores de la variable. Por otro lado, se observan dificultades por no reconocer el algoritmo de la mediana en una distribución de datos agrupados en intervalos, puesto que los alumnos no toman en cuenta estos intervalos. Todos estos conflictos son claros en el ejemplo, que además repite en el cálculo de la moda.

Carvalho (1998; 2001) encontró este error en estudiantes de 13-14 años, en el cálculo de mediana con datos aislados (en nuestro caso con datos agrupados y representados en tablas). Sus estudiantes obtienen el dato central de las frecuencias absolutas ordenadas de forma creciente, es decir, confunden frecuencia con valor de la variable.

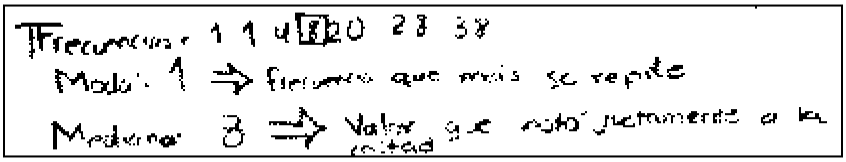


Tabla 6.7.5. Análisis de ejemplo en la categoría 2.5

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Frecuencias =1 1 4* $\boxed{8}$ *20 28 38*	• El alumno debe comenzar con un proceso de significación, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Visualiza el conjunto de datos como un todo (idea de distribución). • Confunde las frecuencias con los valores de la variable. • *Conflicto* en el algoritmo, pues no usa el adecuado para datos agrupados en intervalos de clase. • Usa la idea de mediana como centro (concepto). • Algoritmo correcto de cálculo de la mediana con datos aislados (procedimiento) pero incorrectamente aplicado al conjunto de frecuencias.
U2	*Mediana=8 valor que está justamente a la mitad*	• *Conflicto* en la definición de mediana (concepto) para datos agrupados. • *Conflicto* en la definición de mediana (concepto) como valor que divide en dos partes el conjunto de datos (propiedad). • *Conflicto* en la interpretación del significado de frecuencias (concepto).

C2.6. Calcula la mediana a partir las frecuencias y no ordena las frecuencias. Esta respuesta es una variante de la anterior, por lo que se repiten todos los conflictos analizados.

Se añade otro nuevo consistente en dar como mediana el valor que está en el centro de las frecuencias sin ordenar los datos, es decir, existe un conflicto en el algoritmo para calcular la mediana. Explicamos anteriormente este conflicto en relación a que el orden asumido por el estudiante es el orden en que se dan los datos y no el orden numérico habitual. También en este ejemplo observamos que repite el patrón de respuesta para la media y la moda, basadas solo en las frecuencias absolutas.

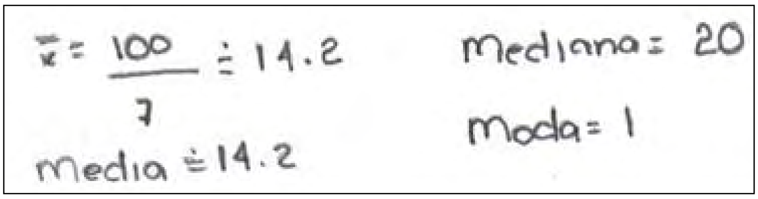


Tabla 6.7.6. Análisis de ejemplo en la categoría 2.6

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Mediana = 20*	• El alumno debe comenzar con un proceso de significación, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • No visualiza el conjunto de datos como un todo (idea de distribución). • No identifica los intervalos de clase (representación) y su amplitud. en su lugar usa las frecuencias. • *Conflicto* al interpretar incorrectamente el significado de frecuencias (concepto). no ordena los datos (procedimiento). • Centro. interpretación como punto medio o centro geométrico (conceptos). • Centro geométrico como punto medio de los extremos (definición y procedimiento). • *Conflicto* en la definición de mediana (concepto) para datos agrupados.

Presentamos en la Tabla 6.7.7 las frecuencias y porcentajes de las categorías de respuestas obtenidas en este ítem, donde se observa que aunque aproximadamente el 30% de nuestros estudiantes da respuestas correctas (o parcialmente correctas). Sólo una minoría de ellos (9%) lo ha resuelto mediante alguno de los procedimientos propuestos en nuestra solución experta, pero un 28% de estudiantes es capaz de encontrar el intervalo de la mediana correcto, y algunos a partir de allí, determinan el punto medio. Este tipo de respuestas son soluciones basadas en la observación directa de los datos con la que encuentra un valor aproximado de la mediana y sin llegar a demostrar del todo su capacidad de cálculo, la hemos considerado suficiente en este ítem.

Como consecuencia de los resultados mostramos que los estudiantes presentan dificultades en la resolución de problemas a partir de tablas de frecuencia agrupadas en intervalos de clase; confunden conceptos como clases, marcas de clase, frecuencias relativas y absolutas, acumuladas y ordinarias, lo que provoca errores en la interpretación y en el cálculo de los estadísticos.

Confirmamos la dificultad que tienen los alumnos para interpretar o leer datos agrupados en intervalos, principalmente por la alta proporción de estudiantes que deja sin contestar el ítem o que no son capaces de llegar a una solución (38.2%). El resto de estudiantes responde utilizando los intervalos como si fuesen puntos aislados (19.3%), con lo que se deduce que reconocen el algoritmo de mediana para datos no agrupados, pero no comprenden el significado del intervalo de clase. Con menor frecuencia, se confunde "centro estadístico" con "centro geométrico" (1.2%), dando como mediana el valor del centro del recorrido. De los estudiantes que toman las frecuencias en vez del valor de la variable para calcular la mediana, el 7.1% lo hace ordenando los datos y el 4.4% no los ordena.

Tabla 6.7.7. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el ítem 10.2

Código	Categorías de respuestas empleadas en el ítem 10.2	Frecuencia	%
C2.1	Cálculo correcto de la mediana	9	1.7
C2.2	Da el intervalo donde se halla la mediana	145	28.0
C2.3	Se equivoca de intervalo donde se encuentra la mediana, dando el anterior o posterior	100	19.3
C2.4	Da como mediana el centro del recorrido	6	1.2
C2.5	Calcula la mediana con las frecuencias en lugar de usar los valores de la variable	37	7.1
C2.6	Calcula la mediana con las frecuencias en lugar de usar los valores de la variable y no ordena las frecuencias	23	4.4
C3	No contesta o no finaliza la respuesta	198	38.2
	Total	518	100.0

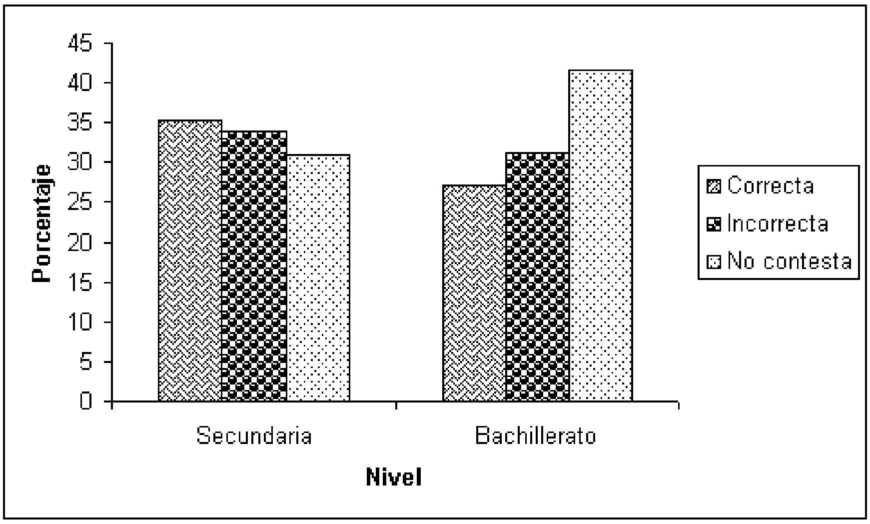
En la Tabla 6.7.8 clasificamos las respuestas por nivel escolar para analizar las diferencias de respuestas, según tipo de alumno. Las proporciones de respuestas correctas e incorrectas son muy semejantes entre los estudiantes de ambos niveles escolares, aunque en general, son mejores los resultados de Secundaria, como ya ocurrió en otros ítems. A este respecto recordamos que Schuyten (1991) indicó que incluso los alumnos universitarios tienen problemas para recordar el algoritmo de cálculo de la mediana con datos agrupados, debido a que este algoritmo no se deduce directamente de la definición de mediana.

Por su parte, Estepa (1993), sugirió que los alumnos se encuentran con obstáculos para calcular la mediana cuando se parte de una representación gráfica de las frecuencias acumuladas. En caso de variables agrupadas en intervalos, una vez calculadas las frecuencias acumuladas, el estudiante tiene que interpolar para hallar el valor de la mediana. En este caso se producen errores por fallo de razonamiento proporcional. Los alumnos no tienen tampoco suficiente dominio del manejo de las desigualdades que aparecen asociadas a la definición de mediana y a su cálculo.

Tabla 6.7.8. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 10.2 por nivel escolar

		Nivel		
Respuesta		Secundaria	Bachillerato	Total
Correcta		57	97	154
	% de nivel	35.2	27.2	29.7
Incorrecta		55	111	166
	% de nivel	34.0	31.2	32.0
No contestan		50	148	198
	% de nivel	30.9	41.6	38.2
Total		162	356	518

Figura 6.7.1. Porcentaje de respuestas en el ítem 10.2 por nivel escolar



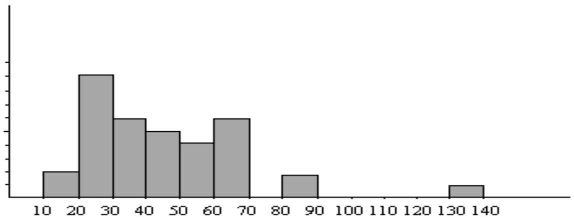
Son los estudiantes de Bachillerato quienes dejan más respuestas en blanco. Las diferencias son estadísticamente significativas, pues se obtuvo un valor Chi cuadrado = 6.08 con 2 grados de libertad y una significación menor a 0.005, cumpliéndose las condiciones de aplicación. En la Figura 6.7.1 presentamos los datos. Hacemos notar que el cálculo de la media a partir de datos agrupados también fue difícil y muchos alumnos dejaron la respuesta en blanco, mientras que para el caso del cálculo de la moda, el número de respuestas correctas casi duplica las obtenidas para media y mediana.

6.8. ANÁLISIS DEL ÍTEM 11

El ítem fue modificado por Cobo (2003) a partir de uno tomado de Garfield y Konold (1992). Entre los elementos de significado incluidos en el ítem se incluyen las definiciones de mediana y moda, debido a la afirmación que relaciona la *mediana* con la *mayoría*. Además, para su correcta solución se requiere conocer los algoritmos de cálculo de la mediana y de la moda a partir de un gráfico, o bien, a partir de datos agrupados. También se requiere recordar algunas propiedades de la mediana: "*no coincide con la media en distribuciones asimétricas*" y "*es resistente a los valores atípicos*".

Ítem 11

Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida. Si____ No ____ ¿Por qué?



Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes: media = 45.3 euros

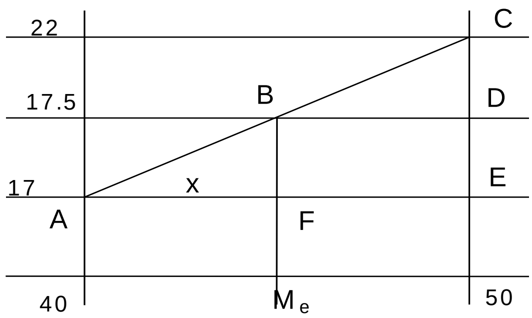
Para resolverlo, primeramente los estudiantes deben interpretar el histograma de frecuencias que se presenta, donde la frecuencia de cada intervalo corresponde, en este caso, a la altura del rectángulo por ser los intervalos de igual tamaño. Una dificultad es que el eje de ordenadas no tiene etiquetas para las frecuencias, por lo que el alumno debe entender cada marca como correspondiente a un estudiante, pero este es un convenio implícito, aunque en otro ítem anterior se había informado a los estudiantes del tamaño total de la muestra. Mediante la lectura del histograma, se obtendrán las frecuencias correspondientes a los diferentes intervalos de clase. Además, la pregunta requiere no sólo la lectura literal de datos, sino también la comparación de frecuencias en diferentes intervalos y determinación gráfica de la moda.

La afirmación que presenta el enunciado es incorrecta, ya que es la moda y no la mediana el estadístico que da el valor más frecuente. Para encontrar la moda en esta distribución hay que localizar el intervalo donde se halla el valor de mayor frecuencia, que es (20 - 30). Un valor aproximado de la moda sería 25, por tanto diferente al dado en el enunciado.

Por otra parte, para comprobar si la mediana es 47 euros, es necesario obtenerla a partir del gráfico, con lo que ya aparecen procedimientos de cálculo ya descritos anteriormente. En el gráfico aparece calculada la media, pero como la distribución no es simétrica su valor pudiera no coincidir con el de la mediana. Los estudiantes deben calcular el total de la frecuencia (35 casos), por lo tanto, la mediana corresponde al valor que ocupa el lugar 17 (17.5), es decir se encuentra situada entre 40 y 50. Un valor aproximado de la mediana sería 45, próximo pero no igual al dado en el enunciado.

Intervalos de clase	Frec.	Frec. acumulada	
10-20 = 2	2	2	
20-30 = 9	9	11	
30-40 = 6	6	17	
40-50 = 5	**5**	**22**	**Me**
50-60 = 4	4	26	
60-70 = 6	6	32	
80-90 = 2	2	34	
130-140 = 1	1	**35**	

Aplicando el cálculo de la mediana para datos agrupados en tablas de frecuencia, ya descrito en el ítem 10.2, obtenemos:



De donde, aplicando la proporcionalidad obtenemos: *Me = 40 + (0.5*10)/5= 41*. Debido a la complejidad del enunciado, consideraremos varias respuestas como correctas:

1. Si se indica que el enunciado es falso porque el valor de la mediana es 41 o bien se da un valor aproximado o incluso se indica el intervalo mediano (40, 50).

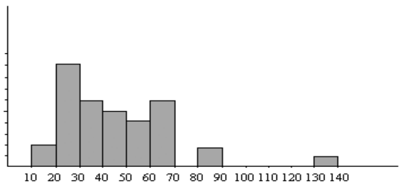
2. Si se señala que es la moda y no la mediana la que da el valor más frecuente.

Como en los casos anteriores, presentamos el análisis semiótico de la respuesta correcta al ítem y de un ejemplo para cada una de las categorías de respuestas.

Tabla 6.8.1. Análisis de solución correcta al ítem 11

<table>
<tr><th>Unidad</th><th>Expresión</th><th>Contenido</th></tr>
<tr><td>U1</td><td>

Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida.



Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes: media = 45.3 euros

Si_____ No ______ ¿Por qué?

</td><td>

- El alumno debe comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos.
- Mediana (concepto). particularización al ejemplo dado.
- Gasto semanal (expresión verbal), cantidad de una magnitud.
- Lectura del gráfico (procedimiento).
- Reconocer las variables que se presentan en cada eje (concepto de eje).
- Identificar los intervalos de clase.
- Obtener las frecuencias en el eje de ordenadas.
- Pasar de cada barra al correspondiente valor numérico, relacionando dos tipos de representación de la variable.
- Media (concepto). valor de la media en un caso particular.
- Media y mediana como estadísticos asociados a la distribución.

</td></tr>
<tr><td>U2</td><td>

- Obtendría la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>Intervalos de clase</th><th>Frec.</th><th>Frec. acumulada</th><th></th></tr>
<tr><td>10-20 = 2</td><td>2</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>**20-30 = 9**</td><td>**9**</td><td>11</td><td>Mo</td></tr>
<tr><td>30-40 = 6</td><td>6</td><td>17</td><td></td></tr>
<tr><td>**40-50 = 5**</td><td>**5**</td><td>**22**</td><td>**Me**</td></tr>
<tr><td>50-60 = 4</td><td>4</td><td>26</td><td></td></tr>
<tr><td>60-70 = 6</td><td>6</td><td>32</td><td></td></tr>
<tr><td>80-90 = 2</td><td>2</td><td>34</td><td></td></tr>
<tr><td>130-140 = 1</td><td>1</td><td>**35**</td><td></td></tr>
</table>

- La distribución no es simétrica y su valor pudiera no coincidir con el de la mediana.
- Se debe calcular el total de la frecuencia (35 casos), por lo tanto, la mediana corresponde al valor que ocupa el lugar 17 (17,5), es decir, se encuentra situada entre 40 y 50.
- Un valor aproximado de la mediana sería igual a 45.

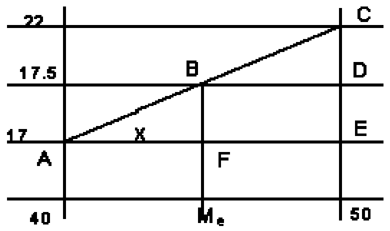
</td><td>

- Completar la tabla de frecuencias (procedimiento y representación).
- Visualizar el conjunto de datos como un todo (concepto de distribución).
- Interpretación del significado de frecuencias.
- Cálculo de frecuencias acumuladas de las clases.
- Concepto de mediana como estadístico de orden.
- Definición de mediana (concepto) como valor que divide en dos partes el conjunto de datos (propiedad).
- Cálculo de la mediana a partir de datos agrupados en intervalos de clases.
- Atribución del intervalo mediano (40-50) del conjunto de datos (particularización de la idea general de mediana).
- Conocimiento para resolver el caso de indeterminación (algoritmo).
- Obtención de la media de los valores del intervalo mediano (algoritmo), concepto de media o de punto medio.
- Determinación de la moda a partir de datos agrupados (algoritmo).
- Simetría (propiedad). aplicación al ejemplo.

</td></tr>
<tr><td>U3</td><td>Aplicando la proporcionalidad obtenemos: *Me= 40+(0.5*10)/5= 41*</td><td>

- Construcción del polígono de frecuencias acumuladas (representación);
- Simbolización de frecuencias y valores de la variable; obtención de valores a partir de los datos;
- Lectura del gráfico (procedimiento);

</td></tr>
</table>

		• Determinar a partir del gráfico la mediana; • Conocimiento de proporcionalidad (significación y concepto); • Aplicación del teorema de Thales; • Resolución de una ecuación; operaciones algebraicas. • Sustitución y resolución de operaciones aritméticas.
U4	• La respuesta correcta es NO por dos motivos: a) El valor de la mediana es 41 y no 47; b) Es la moda y no la mediana el valor más frecuente de la distribución.	• Reconocer la presencia de un valor atípico (concepto); particularización de la idea general de "atípico" al caso particular; se requiere también un conocimiento del contexto. • Reconocer que la mediana y la moda son resistentes a la presencia de valores atípicos. • Definición de moda como valor más frecuente (concepto y argumento).

Las categorías de respuestas encontradas en este ítem se describen a continuación.

C1. Respuestas que usan la idea de moda. Son los alumnos que basan su respuesta en la obtención exacta o aproximada de la moda en la distribución; o bien en el uso de la definición de moda. Hemos hallado las siguientes variantes:

C1.1. Respuesta correcta calculando el intervalo modal. Los estudiantes que dan este tipo de respuestas argumentan, en primer lugar que es la moda y no la mediana el estadístico que corresponde al valor de máxima frecuencia. Por tanto demuestran conocer la definición de moda y discriminan este concepto respecto a la mediana. Seguidamente tratan de calcular la moda o al menos el intervalo modal. Para ello examinan las frecuencias del gráfico, identificando el intervalo de mayor frecuencia e indican que es en este intervalo donde se encuentra la moda. Todo ello supone la lectura del gráfico a un nivel de extracción de tendencias en la clasificación de Curcio (1989).

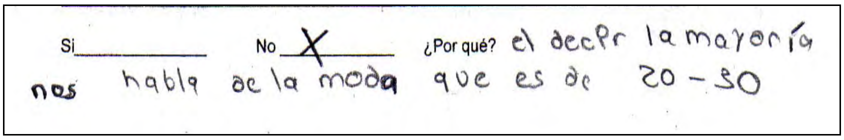


Tabla 6.8.2. Análisis de ejemplo en la categoría 2.1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*No, el decir la mayoría nos habla de la moda que es de 20-30*	• El alumno comienza con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lee correctamente el gráfico a un nivel de extracción de tendencias.

		• Definición de moda como valor de máxima frecuencia (concepto y argumento). • Discriminación entre moda y mediana. • Determinación de la moda a partir de datos agrupados (algoritmo). • Localización del intervalo de máxima frecuencia. • Reconoce que la moda ha de estar dentro de este intervalo y su valor será diferente al dado en el enunciado.

C2. Respuestas basadas en la mediana. Son los alumnos que refutan la afirmación dada, bien basándose en la definición de la mediana o bien calculando su valor. Hemos encontrado las siguientes:

C2.1. Respuesta correcta con cálculo correcto de la mediana. Se hace un argumento correcto, basado en la identificación del intervalo donde se encuentra la mediana, calculando un valor aproximado de la misma (centro del intervalo) y observando que no coincide con lo expuesto en el enunciado del ítem. El alumno ha debido leer correctamente el gráfico, identificando las frecuencias en cada intervalo. Asimismo ha debido calcular las frecuencias acumuladas y el valor N/2. Usa correctamente la definición de mediana como valor cuya frecuencia acumulada corresponde a N/2 e identifica el intervalo al que le corresponde esta frecuencia acumulada.

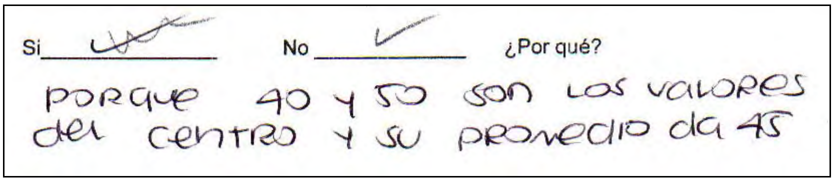

Si ~~✓~~ No ✓ ¿Por qué?
porque 40 y 50 son los valores del centro y su promedio da 45

Tabla 6.8.3. Análisis de ejemplo en la categoría 2.1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*No, porque 40 y 50 son los valores del centro y su promedio da 45.*	• El alumno comienza con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lectura correcta del gráfico (procedimiento). • Identifica los intervalos de clase y las frecuencias absolutas de cada uno (procedimiento y conceptos). • Visualiza el conjunto de datos como un todo (concepto de distribución). • Concepto de mediana como estadístico de orden. • Definición de mediana (concepto) como valor que divide en dos partes el conjunto de datos (propiedad). • Cálculo de la mediana a partir de datos agrupados en intervalos de clases. • Atribución del intervalo mediano (40-50) del conjunto de datos (particularización de la idea general de mediana).

		• Resuelve el caso de indeterminación (algoritmo) en forma aproximada. • Obtiene la media de los valores del intervalo mediano (algoritmo), concepto de media o de punto medio.

C2.2. Respuesta correcta, pero sin calcular la moda o la mediana. El estudiante da un argumento correcto indicando que el enunciado es falso. Indica que la mediana es el valor que se encuentra en el centro de los datos, y no el que corresponde a frecuencia máxima. De manera implícita observa que es la moda el valor más frecuente en la distribución, pero no realiza cálculos para obtener ni media ni mediana. En todo caso el alumno usa correctamente sus definiciones y es capaz de discriminar entre los dos conceptos.

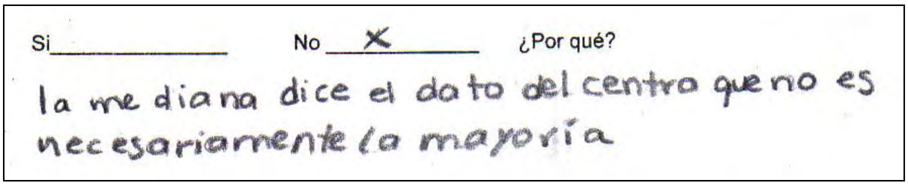

Si______ No __X__ ¿Por qué?
la mediana dice el dato del centro que no es necesariamente la mayoría

Tabla 6.8.4. Análisis de ejemplo en la categoría 2.2

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*No, la mediana dice el dato del centro que no es necesariamente la mayoría*	• El alumno debe comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Usa la definición de mediana como valor central (concepto). • Usa la definición de moda como valor más frecuente (concepto). • Discrimina a nivel conceptual mediana y moda.

C2.3. Dar un valor aproximado de la mediana sin mostrar el algoritmo de cálculo ni dar argumentos. No podemos hacer un análisis profundo sobre los posibles conflictos en estos estudiantes, ya sea en sus concepciones sobre el concepto de mediana o sobre su capacidad de lectura de gráficos. En estos casos, los estudiantes se limitan a señalar el valor aproximado de la mediana:

“*Mediana = 47*”

Al igual que en la investigación de Garret y García Cruz (2005), algunos estudiantes sólo dan como resultado algún valor (correcto o incorrecto) sin mostrar las operaciones, por lo que no podemos conocer la estrategia utilizada. No dan un argumento completo, mostrando dificultad en la argumentación. Sin embargo, en este ejemplo y puesto que el valor es correcto, deducimos que el estudiante ha leído correctamente el gráfico, identificando el intervalo mediano y que usa la definición de mediana como centro de la distribución.

Tabla 6.8.5. Análisis de ejemplo en la categoría 2.3

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*Mediana = 47*	• El alumno debe comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lectura del gráfico (procedimiento); identificación de intervalos y frecuencias de cada uno de ellos. • Cálculo de frecuencias acumuladas y determinación del valor N/2. • Idea de mediana como valor central de la distribución (propiedad y conceptos). • Determinación del intervalo mediano (procedimiento). • Valor aproximado de la mediana, como punto central del intervalo (procedimiento y conceptos).

C2.4. Cálculo de la mediana como centro del rango. Es la respuesta ya comentada en los ítems anteriores que ahora se repite. Algunos estudiantes obtienen la mediana como "centro geométrico del rango", es decir, al total del rango de la variable lo divide por dos, haciendo una particularización incorrecta de la idea de centro.

En el siguiente ejemplo, aparecen diversos conflictos, los cuales ya hemos analizado anteriormente. Por un lado, el estudiante no lleva a cabo una lectura correcta del gráfico, por lo que no calcula el total de frecuencias. Posteriormente al calcular la mediana toma en cuenta todos los valores del rango de la variable, incluyendo los intervalos donde no se registran frecuencias (confunde el valor mínimo, tomando el cero como tal). Consecuentemente, no observa la presencia de un valor atípico. Se produce un conflicto al confundir "centro estadístico de la distribución" con "centro geométrico del rango de variación". Estos resultados apoyan la hipótesis de Barr (1980) quien afirma que los estudiantes interpretan la mediana como el centro de "algo" sin comprender específicamente a qué se refiere, ya que no saben que una tabla de frecuencias es un resumen de los datos y no pasan la tabla la lista de valores.

Por su parte, Gattuso y Mary (1996; 2002), observaron en estudiantes de 14 a 17 años dificultades conceptuales de la media, que se repiten en nuestro estudio en el caso de la mediana. Las autoras identifican variables didácticas que afectan a la dificultad de las tareas, como el formato (tabla, gráfico, serie de datos), los valores de los datos, los valores de las variables y de las frecuencias. También detectaron errores como utilizar fórmulas incorrectas para el cálculo de la media y la dificultad de un elemento cero. Estas dificultades se muestran en este ejemplo.

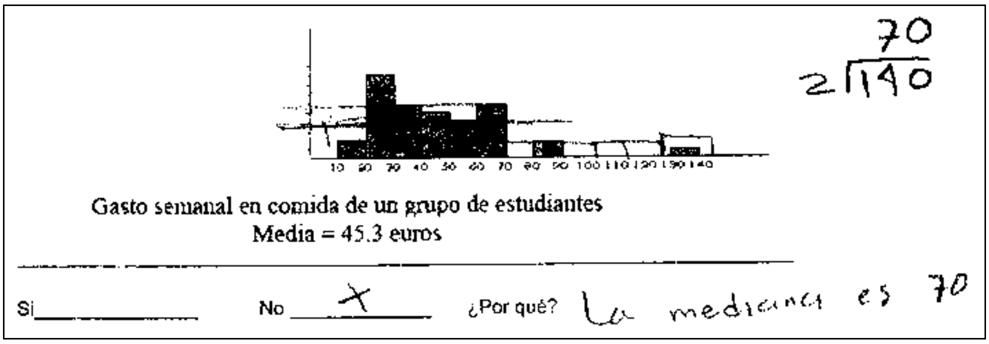
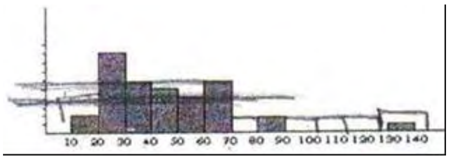


Tabla 6.8.6. Análisis de ejemplo en la categoría 2.4

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*140/ 2 = 70* 	• El alumno debe comenzar con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Lectura del gráfico incorrecta (procedimiento). • No reconoce las variables que se presentan en el rango (concepto de eje). • Identificación incorrecta de los intervalos de clase y del rango de variación de la variable. • *Conflicto* al visualizar el conjunto de datos como un todo que incluye frecuencias cero (concepto de distribución). • Concepto de mediana como estadístico de orden. • Usa la definición de mediana (concepto) como valor que divide en dos partes el conjunto de datos (propiedad). • *Conflicto* al confundir centro estadístico con centro correcto. • Cálculo correcto del punto medio del segmento (0-140). • Cálculo incorrecto de la mediana a partir de datos agrupados en intervalos de clases. • No interpreta el significado de frecuencias ni las calcula.
U2	*No, la mediana es 70*	• No reconoce la presencia de un valor atípico (concepto). particularización de la idea general de "atípico" al caso particular. se requiere también un conocimiento del contexto. • No reconoce que la mediana y la moda son resistentes a la presencia de valores atípicos. • No obtiene la moda (concepto y procedimiento).

C2.5. Da un intervalo diferente al intervalo mediano. Los estudiantes que siguen este procedimiento se equivocan de intervalo para el cálculo de la mediana, aún cuando obtienen su promedio. Como en el caso anterior, los estudiantes realizan una lectura incorrecta del gráfico, pues no obtienen las frecuencias de todos los intervalos ni calculan las frecuencias acumuladas para determinar la mediana. En lugar de ello, usan todos los datos del rango que incluye el valor atípico y toman como intervalo mediano, el intervalo situado en el centro geométrico del eje X, por lo que no encuentran el intervalo mediano correcto. Por otra parte, tampoco usan al menos intuitivamente, la idea moda para contestar a la pregunta. Por lo tanto, aparece un conflicto en la definición de mediana en una distribución de datos agrupados en intervalos y a partir de un gráfico.

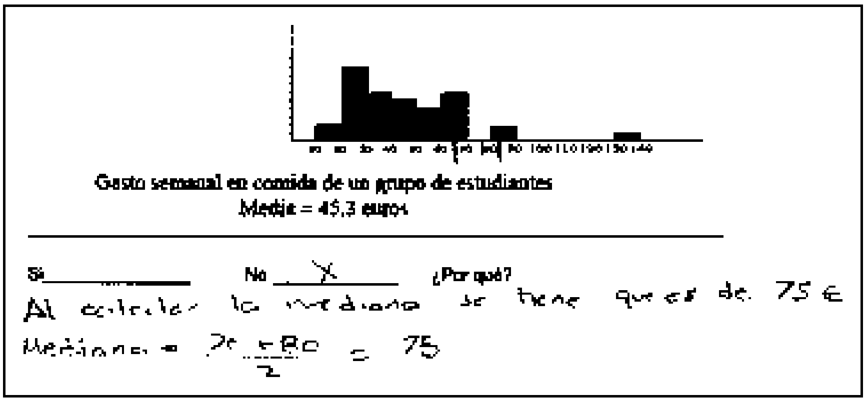
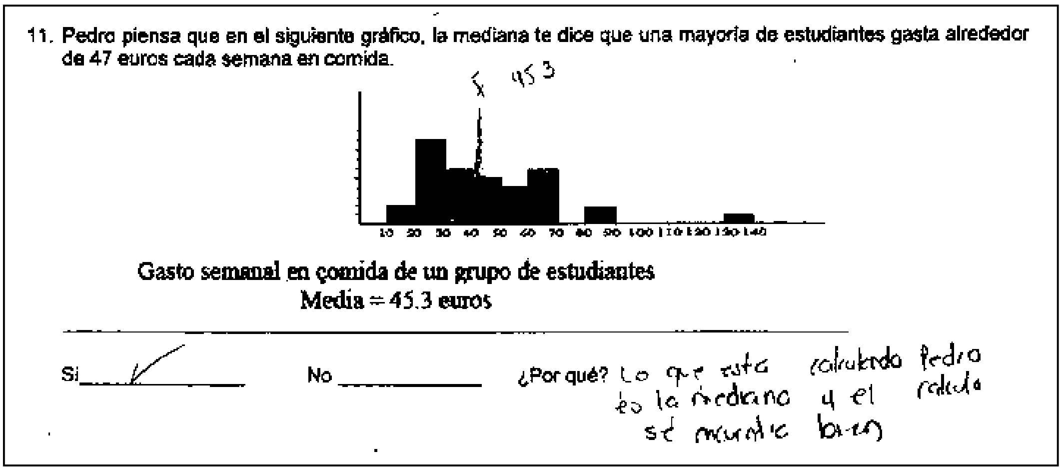


Tabla 6.8.7. Análisis de ejemplo en la categoría 2.5

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*No. Al calcular la mediana se tiene que es 75€* *Mediana=(70+80)/2 = 75*	• El alumno debe comenzar con un proceso de *significación,* para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • Reconocer los datos del problema, pasando del formato gráfico al numérico. • Lectura del gráfico incorrecta (procedimiento). • Identificación incorrecta de los intervalos de clase. • *Conflicto* al visualizar el conjunto de datos como un todo que incluye frecuencias cero (concepto de distribución). • *Conflicto* en el concepto de mediana como estadístico de orden. • Cálculo incorrecto de la mediana a partir de datos agrupados en intervalos. • No interpreta el significado de frecuencias ni las calcula. • Error al atribuir el intervalo mediano (70-80) del conjunto de datos (particularización de la idea general de mediana). • Conocimiento para resolver el caso de indeterminación (algoritmo). • Obtención de la media de los valores del intervalo (algoritmo), concepto de media.

C2.6. Confusión entre media, mediana y moda. Notamos que estos estudiantes no discriminan los conceptos de media, mediana y moda. Surge un primer conflicto al no interpretar correctamente el gráfico, y por lo tanto, no asignan valores a la variable para calcular la mediana o la moda. Por otra parte, tampoco perciben en el enunciado la asociación implícita de la mayoría con la moda.

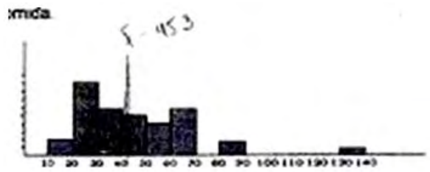
Hacen una valoración visual y sin contestar a la pregunta que se plantea, suponen que lo que se está calculando es la mediana (en vez de la mediana) "*Media=45.3*". Esto se puede explicar por una posible confusión entre los conceptos de media, mediana y moda al pensar que todas se pueden utilizar en cualquier situación. Otra explicación puede ser que no tengan en cuenta la propiedad de que la media y la mediana sólo coinciden en distribuciones simétricas. En el ejemplo que analizamos, se observa que el estudiante ha marcado un "punto medio" en el rango, incluso señalando el valor de la "media", sin embargo, descarta los valores atípicos, lo que nos hace confirmar su confusión entre los conceptos de media y mediana.


11. Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida.

Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes
Media = 45.3 euros

Si ✓ No ____ ¿Por qué? Lo que esta calculando Pedro es la mediana y el calculo se encuentra bien

Tabla 6.8.8. Análisis de ejemplo en la categoría 2.6

Unidad	Expresión	Contenido
U1	 *Lo que está calculando Pedro es la mediana y el cálculo se encuentra bien*	• El alumno no comienza con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • No reconoce los datos del problema, no pasa del formato gráfico al numérico. • *Conflicto* en la lectura del gráfico (procedimiento). • No obtiene frecuencias del eje de ordenadas. • *Conflicto* en el concepto de mediana como estadístico de orden. • *Conflicto en* la propiedad de que media y mediana coinciden en distribuciones simétricas. • Referencia a la media y particularización a una *media específica.* • *Conflicto* respecto a la definición de moda, pues confunde moda y mediana.

C3. Respuestas que no usan las medidas de tendencia central. Se han encontrado las siguientes:

C3.1. No pueden leer el gráfico. Los estudiantes que hemos ubicado en esta categoría manifiestan no poder obtener el resultado porque los datos en el problema no están completos, no llegando al primer nivel de lectura de gráficos en la clasificación de Curcio (1989). En el ejemplo que mostramos el estudiante no es capaz de deducir las frecuencias "número de personas". No es capaz de deducirlo a partir de los valores del eje de las ordenadas. Con este tipo de respuestas, detectamos un conflicto, que sugiere la incapacidad de lectura de un gráfico. Sin embargo, no se puede evaluar si este tipo de estudiantes al menos saben realizar el algoritmo de la mediana, pues no concluye la resolución del problema.

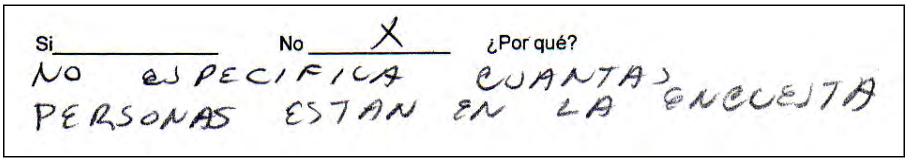

Si________ No___X___ ¿Por qué?
NO ESPECIFICA CUANTAS PERSONAS ESTAN EN LA ENCUESTA

Tabla 6.8.9. Análisis de ejemplo en la categoría 3.1

Unidad	Expresión	Contenido
U1	*No, no se especifica cuantas personas están en la encuesta*	• El alumno no comienza con un proceso de *significación*, para asignar significado al texto del problema y a cada uno de sus elementos. • No reconoce los datos del problema, pasando del formato gráfico al numérico. • *Conflicto* en la lectura del gráfico (procedimiento). • No reconoce las variables que se presentan en cada eje (concepto de eje). • No obtiene las frecuencias en el eje de ordenadas.

C3.2. Da respuestas verbales erróneas. En esta categoría hemos situado una amplia variedad de respuestas que dan los estudiantes y que no tienen relación con la mediana o con la moda. Pensamos que estas respuestas muestran, por un lado, la falta de capacidad para leer el gráfico y por otro, la falta de conocimientos y capacidad de argumentación. Reconocemos no obstante, la dificultad del problema que requiere de distintas habilidades y conocimientos para resolverlo y que los estudiantes aún no reconocen conjuntamente los diversos elementos que lo componen: los datos están agrupados en intervalos; hay elementos atípicos; el eje de ordenadas no presenta datos y todo está representado en un grafico que deben interpretar. Todas estas son tareas con las que los alumnos aún no están familiarizados.

En este ítem obtuvimos también una variada categorización de respuestas, de las que se resumen sus frecuencias y porcentajes en la Tabla 6.8.10.

Tabla 6.8.10. Frecuencias y porcentajes de respuestas en el ítem 11

Código	Categorías de respuestas en el ítem 11	Frecuencia	%
C1.1	Respuesta correcta calculando el intervalo modal	48	9.3
C2.1	Cálculo correcto de la mediana	58	11.2
C2.2	Respuesta correcta argumentada, pero sin calcular moda o mediana	44	8.5
C2.3	Cálculo aproximado de la mediana sin algoritmos ni argumento	27	5.2
C2.4	Cálculo de la mediana como centro del rango	6	1.2
C2.5	Da un intervalo diferente al intervalo mediano	17	3.3
C2.6	Confusión entre media, mediana y moda	46	8.9
C3.1	No obtener los datos del gráfico para calcular la mediana	20	3.9
C3.2	Da respuestas verbales erróneas	137	26.4
C4	No contesta	115	22.2
	Total	518	100

Entre los resultados más relevantes, encontramos que el 22.2% de todos los estudiantes no lo resuelve y que poco más de la cuarta parte (26.4%) de los que contestan dan respuestas que no se relacionan con las medidas de tendencia central. Los resultados coinciden con los de Cobo (2003) quien sólo planteó el problema a los alumnos de mayor edad y entre ellos sólo la cuarta parte dio respuestas aceptables. Nuestras respuestas son más variadas que las de la autora, pues aparecen algunas categorías no consideradas por ella, como tomar como mediana el centro del rango o como intervalo mediano el intervalo central del gráfico.

Hemos encontrado que algunos estudiantes resuelven el problema utilizando algunas estrategias no completas que se reflejan en la tabla. Por ejemplo, el 9.3% de los estudiantes obtienen el intervalo modal, y aunque no finalizan el algoritmo, saben distinguir al menos terminológicamente entre “mediana” y “moda”; también determinan ésta última mediante las frecuencias o la identifican observando directamente el gráfico. Un 11.2% de estudiantes identifica el intervalo donde se encuentra la mediana y realiza el algoritmo de indeterminación correctamente obteniendo un valor aproximado de la mediana. Otro 8.5% de estudiantes da las definiciones correctas de mediana o moda para este problema, pero sin realizar cálculos; y un 5.2% da un valor aproximado de mediana sin mostrar los cálculos realizados.

En las respuestas incorrectas encontramos distintos conflictos como calcular la mediana como “centro del rango”, en estos casos, se trata de los estudiantes que visualizan todo el rango de la variable sin detectar la presencia del valor atípico y consecuentemente incluyen en su cálculo aquellos intervalos sin frecuencia.

Tabla 6.8.11. Resumen de frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 11

Respuesta	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	177	34.2
Incorrecta	226	43.6
No contestan	115	22.2
Total	518	100

En la Tabla 6.8.11 presentamos los datos resumidos, que nos confirman principalmente la dificultad del ítem, donde se observa que sólo alrededor de la tercera parte de los estudiantes (34.2%) de toda la muestra lo resolvió correctamente y que el 65.8% lo hizo con errores o lo dejó sin contestar.

Tabla 6.8.12. Frecuencia y porcentajes de respuestas en el ítem 11 por nivel escolar

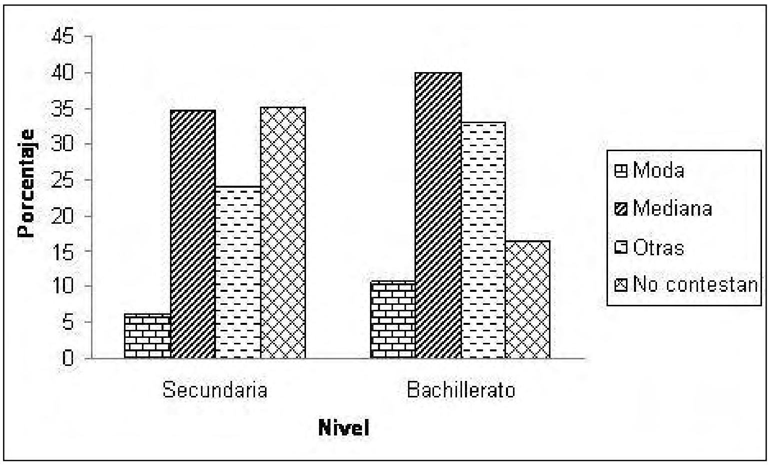
		Nivel		
Respuesta		Secundaria	Bachillerato	Total
Moda	Frecuencia	10	38	48
	% de nivel	6.2	10.7	9.3
Mediana	Frecuencia	56	142	198
	% de nivel	34.6	39.9	38.2
Otras	Frecuencia	39	118	157
	% de nivel	24.1	33.1	30.3
No contestan	Frecuencia	57	58	115
	% de nivel	35.2	16.3	22.2
Total		162	356	518

Los datos que resume la Tabla 6.8.12 corresponden a la frecuencia y porcentajes de respuestas utilizando un determinado promedio y según el nivel escolar de los estudiantes, donde se puede observar de manera más detallada la distribución de conflictos detectados en el ítem. Los resultados nos indican que de las respuestas dadas por el grupo de estudiantes de Bachillerato, en 40% de ellas se hace uso de la mediana y 11% de la moda, sin embargo, en otro 33%, sus respuestas no tienen relación con medidas de tendencia central y 16% de ellos no contesta.

En cuanto a las respuestas de los estudiantes de Secundaria la mayor proporción de alumnos (35%), utilizan la mediana; otro 35% se concentra en estudiantes que no resuelven el ítem y sólo 6% utiliza la moda. Con un Chi cuadrado = 24.8 con 3 grados de libertad y una significación 0.000 se cumplen las condiciones de aplicación.

Presentamos los datos en la Figura 6.8.1.

Figura 6.8.1.1. Porcentaje de respuestas en el ítem 11 por nivel escolar



6.9. CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS SEMIÓTICO

En este Capítulo hemos llevado a cabo el análisis semiótico de las respuestas a algunos ítems del cuestionario que se relacionan con la mediana. Nuestra decisión de centrarnos en el estudio de este concepto está basada principalmente en que ha recibido muy poca atención en las investigaciones previas y porque en los ítems de mediana obtuvimos mayores dificultades para su resolución, tanto en nuestro estudio piloto como en los resultados que obtuvo Cobo (2003) en su investigación e indistintamente del grado escolar de los estudiantes. Los ítems elegidos discriminaron mal entre los dos grupos de estudiantes seleccionados o tuvieron excesiva dificultad.

El estudio realizado muestra que la comprensión de la mediana y sus elementos de significado (definición, representaciones, algoritmos, propiedades, argumentos, problemas) no han sido sencillas para los estudiantes de nuestra muestra. Se producen numerosos conflictos semióticos al trabajar con la mediana, muchos de los cuáles confirman la lista de conflictos detectados en la investigación de Cobo (2003), o en las de otros autores que han trabajado la idea de mediana. Además, aunque nuestro centro de atención sea la mediana, los conflictos se producen también en relación a media y moda. Una primera clasificación de estos conflictos puede hacerse en función del tipo de elemento de significado a que se refieren:

1. *Conflictos terminológicos y representacionales:* Consiste en asignar un nombre o una representación inadecuada a una de las medidas de tendencia central, aunque luego el estudiante use correctamente la definición del concepto.

Hemos observado que los estudiantes confunden los términos “mediana” con “media” y en menor frecuencia con “moda”. Por ello, calculan la media (incluso correctamente) cuando se les pide calcular la mediana en las dos partes del ítem 5 en coincidencia con los resultados de Cobo (2003).

Hay también numerosos conflictos asociados al lenguaje gráfico, donde algunos alumnos no llegan a los primeros niveles de lectura en la clasificación de Curcio (1989). Por ello confunden los valores de la variable con las divisiones de la escala; confunden la variable y la unidad estadística o bien la variable y las frecuencias. Asimismo consideran los intervalos con frecuencia nula, confundiendo el rango de la variable (o bien los valores tomados por la variable) con el rango de variación representado en la escala del gráfico. Algunos de estos errores fueron encontrados en la investigación de Bruno y Espinel (2005).

2. *Conflictos conceptuales:* Cuando los estudiantes no discriminan entre media mediana y moda o entre estos y otros conceptos.

Entre los conflictos relacionados con la definición de la mediana, el más frecuente, que aparece en todos los ítems, es interpretarla como centro del conjunto de datos sin ordenar. Este conflicto fue descrito por Barr (1980), Carvalho (1998, 2001) y Cobo (2003) y suponemos es debido a que el estudiante asume que el “orden” que se cita en la definición es el orden en que se han listado los datos y no el orden numérico convencional.

También en todos los ítems encontramos la interpretación de la mediana como centro geométrico de la distribución, haciendo una particularización incorrecta de la idea de centro que se ha de aplicar en un sentido específico (centro estadístico y no geométrico). Asimismo, en los ítems que tienen un componente gráfico se confunden los datos con los valores de la escala de la representación gráfica o incluso se asigna la mediana a un solo dato o una parte de los datos y no a todo el conjunto (no se concibe como una operación sobre el conjunto de datos).

Otra confusión ya notada por otros autores es la existente entre mediana o media y valor de la variable. En el caso de la mediana el conflicto podría explicarse por un uso del sentido coloquial del término “mediano”, dando un valor cualquiera de la variable diferente del máximo o del mínimo, pero que no corresponde al centro. Hacemos notar también que en algunos casos se confunden las frecuencias y los valores de la variable, calculando media o mediana con las frecuencias, error descrito por Carvalho (1998; 2001) y encontrado por Ruiz (2006) en su estudio sobre la variable aleatoria.

En algunos casos se c*onfunde promedio con valor esperado.* En lugar de dar el promedio o un valor de la variable, el alumno da el valor esperado en cada grupo en caso de distribución uniforme. Se explica por un fallo de generalización, donde confunden un ejemplar (media de la variable estadística) con otro ejemplar (esperanza de la variable aleatoria) de un mismo tipo de objeto (medida de posición central).

Otros estudiantes han asociado en el ítem 9 la mediana a cada unidad estadística, en lugar de al conjunto de la distribución, suponiendo que la mediana de cada dato es la mitad del valor de la variable.

En el cálculo de la mediana a partir de tablas de frecuencias agrupadas, un segundo conflicto es no diferenciar entre mediana e intervalo mediano. Bruno y Espinel (2005) encontraron algunos profesores que representaban los intervalos de clase, como si se tratase de un punto aislado, al construir histogramas u otros gráficos estadísticos. Es posible que, tanto este error, como las respuestas clasificadas en esta categoría enmascaren un conflicto consistente en la falta de comprensión del significado de un intervalo de clase, concepto que es sistémico, pues un intervalo se compone de puntos. Se trataría de un fallo en el proceso de composición.

3. *Conflicto al atribuir propiedades a un concepto:* Los estudiantes generalizan de manera excesiva propiedades que conocen, a conceptos que no conservan estas propiedades.

Por ejemplo, en el ítem 5 hemos encontrado alumnos que suponen una estructura de operación interna a la mediana, conflicto que fue descrito por Mevarech (1983) para el caso de la media, pero no para la mediana.

Conflictos de este tipo incluye suponer que la media se sitúa siempre en el centro de la distribución, independientemente de la forma de la distribución, conflicto descrito por Navas, Batanero y Godino (1997); o que tiene la propiedad asociativa, descrito por Mevarech (1983). Así mismo, algunos alumnos suponen que la media está definida en una escala ordinal; o aplican una transformación que conserva el orden pero no el tipo de escala, no diferenciando los diferentes tipos de escala de medida de las variables.

Incluso algunos estudiantes asignan una transformación numérica diferente en cada grupo en el ítem 6, comparando sin embargo las medias para obtener una conclusión.

También es patente que los estudiantes no aprecian el efecto del valor atípico en el cálculo de la media, fallando al elegir el mejor representante de un conjunto de datos en el ítem 5.

4. *Conflictos procedimentales*: Cuando hay fallo en la aplicación de un procedimiento o se selecciona un procedimiento inadecuado en una situación.

Por ejemplo en el ítem 5 y en el ítem 6 algunos estudiantes equivocan el total por el cuál hay que dividir en el cálculo de la media. En otros casos no se pondera en el cálculo de la media, error descrito por numerosos autores, entre ellos, Mevarech (1983) y Cobo (2003). Los estudiantes no son capaces de resolver el caso de indeterminación de la mediana en el ítem 5, dando dos valores diferentes para la mediana, conflicto que suponemos debido a falta de conocimiento del convenio que hay que aplicar en este caso. A veces se tratan los intervalos de clase como si se tratase de valores aislados, aplicando el algoritmo de cálculo con datos aislados a datos agrupados en tablas de frecuencia.

Una respuesta que aparece en nuestros estudiantes es no tener en cuenta la frecuencia en el cálculo de la mediana. Este error puede ser parecido al que comenten los estudiantes que no tienen en cuenta las frecuencias en el cálculo de la media. Mevarech (1983) indicó que para el caso de la media este error se debe a que los alumnos asumen que la media tiene la propiedad asociativa. En nuestro caso además de la posible atribución incorrecta de la propiedad asociativa a la mediana, pensamos que se produce un conflicto, tanto respecto a la idea de frecuencia, como respecto a la de orden. Al tratar de ordenar de menor a mayor el conjunto de datos asignándole un número, encuentra un valor repetido (19). Los dos valores 19 estarían en el mismo lugar de la ordenación. Para el estudiante es indiferente poner uno antes que el otro. Es decir, puesto que 19 remite al peso de un niño imaginario, si tenemos dos niños del mismo peso, sería indiferente colocar a uno u otro en el quinto lugar en orden de peso. El estudiante resuelve el conflicto omitiendo uno de los valores.

Los alumnos a veces usan sólo una parte de los datos para comparar distribuciones en el ítem 6. Este mismo comportamiento lo encontró Cobo (2003) en su investigación. Estepa (2004) denomina *concepción local de la asociación,* en el caso de estudio de asociación entre variables a la conducta consistente en comparar solo valores aislados en dos muestras. Los estudiantes que siguen esta estrategia pueden llegar a la respuesta correcta, dependiendo de qué valor comparen. Incluso algunos de ellos trabajan con frecuencias absolutas y estarían en el primer nivel de comprensión del concepto de distribución según Watson y Moritz (1999; 2000).

En el ítem 6 se presenta un conflicto respecto a la definición de media que es interpretado como una "distribución media". No hemos encontrado este tipo de respuesta en las investigaciones previas. Carvalho (1998; 2001) en su investigación indica que los alumnos calculan a veces la media de la frecuencia en el cálculo de la media; aunque no lo señala para el caso de la mediana.

En el ítem 9 encontramos el cálculo del número medio diario (en lugar del número medio mensual). Al calcular la mediana en una tabla de frecuencias agrupadas (ítem 10) los alumnos se equivocan en la determinación del intervalo mediano.

5. *Conflictos argumentativos*: Los estudiantes no son capaces de dar un argumento o de interpretar un argumento o no ven la inconsistencia en una argumentación. Por ejemplo, en el ítem 6, donde en algún caso se considera el mejor representante la mediana, pero la primera parte del problema se resuelve comparando las medias.

Aunque muchos de los conflictos identificados han sido descritos en investigaciones anteriores, también hemos detectado algunos nuevos a los cuáles no se había prestado suficiente atención. Entre estos conflictos destacamos los siguientes:

- Interpretar la mediana como el centro geométrico del rango de la variable, conflicto que se presenta por un fallo en el proceso de particularización, desde la idea de "centro" a la idea de "centro estadístico" que es la que se espera del estudiante, quien por el contrario, particulariza a la idea de "centro geométrico", que posteriormente aplica y calcula correctamente. Este conflicto se repite en todos los ítems.
- Suponer estructura de operación interna a la mediana por un proceso indebido de generalización; ya que la propiedad de conservación del conjunto numérico la tienen otras operaciones que el alumno conoce (suma, multiplicación, etc.) pero no las medidas de posición central, exceptuando la moda.
- Transformar los datos a escalas numéricas, lo que supone un fallo en el proceso de generalización, asumiendo que diferentes escalas tienen las mismas propiedades. Al

codificar los valores de una variable ordinal con códigos numéricos, asumen que la variable adquiere las propiedades numéricas de los códigos. En este conflicto también se muestra la falta de comprensión profunda del significado de las operaciones aritméticas y de su resultado. Incluso algunos estudiantes asignan una transformación numérica diferente en cada grupo en el ítem 6, comparando sin embargo las medias para obtener una conclusión.

- No tener en cuenta las frecuencias en el cálculo de la mediana, error debido a un fallo en apreciar que la mediana no tiene propiedad asociativa y en la comprensión de la mediana como estadístico de orden.
- Interpretar la media como una “distribución media”, sin reconocer que la media es una propiedad de la distribución.
- Confusión de media y valor esperado por un fallo en el proceso abusivo de generalización.
- En el cálculo de la mediana a partir de tablas de frecuencias agrupadas. No diferenciar entre mediana e intervalo mediano y tratar los intervalos como si se tratase de datos aislados.

Todos estos conflictos (algunos con frecuencia apreciable) han aparecido al analizar los ítems de mediana seleccionados del cuestionario y llaman la atención a la necesidad de tener en cuenta la dificultad del concepto de mediana para los estudiantes y de reforzar su enseñanza. También sugiere el interés de continuar la investigación, proponiendo otras tareas relacionadas con la mediana o bien diseñando una enseñanza que permita mejorar la comprensión de los estudiantes.

El énfasis actual en el análisis exploratorio de datos, que se incluye actualmente en la Educación Secundaria y Bachillerato, tanto en México como en España, supone prestar más atención a los estadísticos de orden, entre los que se encuentra la mediana, y que consideran la posición relativa de ciertos elementos dentro del conjunto de datos. El éxito de esta propuesta educativa depende de que los profesores conozcan las dificultades y conflictos de sus estudiantes y dispongan de instrumentos que las hagan aflorar para poder corregirlas. La investigación llevada a cabo en esta Memoria y los resultados obtenidos permitirán ayudar al profesor en esta tarea.

CAPÍTULO 7
CONCLUSIONES

7.1. INTRODUCCIÓN

En esta Memoria hemos presentado un estudio de evaluación de la comprensión que los estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato asignan a las medidas de tendencia central, continuando el estudio de Cobo (2003) con estudiantes españoles. El marco teórico nos ha permitido, en primer lugar, analizar el currículo de estas etapas educativas en México y los libros de texto empleados por los estudiantes, para fijar un significado de referencia. Posteriormente se estudiaron las respuestas de los estudiantes al cuestionario de Cobo (2003) para deducir su comprensión, entendida esta como relación existente entre el significado institucional evaluado en el cuestionario y el significado personal de los estudiantes deducido de sus respuestas.

Para finalizar nuestro trabajo, es necesario presentar y analizar las principales conclusiones obtenidas, tanto respecto a los objetivos de investigación fijados en el Capítulo 1, como respecto a nuestras hipótesis iniciales. Asimismo realizamos una valoración del cuestionario, desde el punto de vista de los criterios de idoneidad definidos por Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005), que Batanero y Díaz (2005) adaptan para analizar cuestionarios de evaluación y posteriormente se desarrollan en Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006).

Es también conveniente destacar las aportaciones del trabajo y los puntos en que realizamos alguna contribución útil a la docencia e investigación, así como reconocer las inevitables limitaciones de todo estudio restringido en el tiempo y espacio. Para finalizar este capítulo sugerimos algunas líneas que podrían completar nuestra investigación en el futuro.

7.2. CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo fundamental de nuestra investigación definido en el Capítulo 1 era *analizar el significado personal que estudiantes mexicanos de Secundaria y Bachillerato asignan a las medidas de tendencia central: media, mediana y moda.*

Es claro que toda la investigación ha estado orientada a cumplir este objetivo y pensamos lo hemos logrado de forma razonable, pues se ha proporcionado información detallada sobre la comprensión de los estudiantes en la muestra de las definiciones, propiedades, lenguaje, procedimientos, problemas y argumentos relacionados con las medidas de tendencia central. Sin entrar a discutir este objetivo, pasamos a detallar los objetivos específicos que están contenidos en el anterior.

> *Objetivo específico 1: Analizar la enseñanza que sobre las medidas de tendencia central reciben los estudiantes mexicanos en el último curso de Secundaria y Bachillerato.*

Para llevar a cabo este objetivo, presentamos en el Capítulo 2 un estudio de las directrices curriculares en estos niveles educativos en México, insistiendo en las últimas reformas educativas que han tenido lugar recientemente en la Enseñanza Secundaria. Asimismo, efectuamos un análisis del contenido que, respecto a las medidas de tendencia central, se presenta en los libros de texto utilizados por los estudiantes que formaron parte de la muestra, siguiendo el mismo método empleado por Cobo (2003). De este análisis resultó una descripción detallada de los campos de problemas, lenguaje, definiciones y propiedades, argumentos y procedimientos que respecto a la media, mediana y moda se incluyen en dichos textos.

Los resultados dan indicaciones de la enseñanza que en los niveles educativos estudiados se imparte sobre las medidas de tendencia central y que no difiere apenas de la correspondiente al contexto español. Como consecuencia de este estudio, fijamos un significado de referencia sobre las medidas de tendencia central en esta investigación. La importancia de este objetivo es doble: En primer lugar, permitirá realizar un estudio de la validez de contenido del cuestionario, mediante la comparación de dicho contenido con el significado institucional de referencia. Además, nos ayudará a contrastar las respuestas de los estudiantes y a deducir algunas razones que puedan explicar las dificultades que se originan en el aprendizaje de este tema.

Objetivo específico 2: Completar el estudio de validez y fiabilidad del cuestionario de medidas de tendencia central elaborado por Cobo (2003) en el contexto de nuestro estudio, añadiendo algunas pruebas de validación no realizadas por su autora.

Aunque estamos utilizando un cuestionario construido en una investigación previa, al variar el contexto geográfico y educativo, y al incluir (grupo de Bachillerato) alumnos de mayor edad que los que participaron en la investigación de Cobo (2003), es necesario comprobar la utilidad potencial del instrumento para nuestro trabajo. Por otro lado, aunque la autora hizo algunas pruebas sobre la precisión de su instrumento, no llegó a completar todos los pasos sugeridos en los estándares de medición (APA, AERA y NCME, 1999) para validarlo.

Abordamos este objetivo en el Capítulo 5, donde, por un lado, se vuelven a calcular los coeficientes de fiabilidad y generalizabilidad en los estudiantes de nuestra muestra, dado que este valor depende de los estudiantes participantes y por tanto, podrían ser diferentes a los obtenidos por Cobo (2003). Además se completa el estudio de validación iniciado por la autora, utilizando los métodos de análisis cluster e implicativo para recoger evidencias de validez de constructo y el análisis discriminante para obtener evidencias de validez discriminante. Se llevan a cabo también la estimación bayesiana de algunos parámetros del cuestionario, para conseguir una mayor precisión y al mismo tiempo una interpretación más intuitiva de los resultados de las estimaciones.

Objetivo específico 3: Ampliar el rango de edad de los estudiantes al nivel de Bachillerato para comparar las dificultades encontradas en el tema de medidas de tendencia central entre estudiantes de Secundaria y Bachillerato.

En el estudio de Cobo (2003) se comparan los estudiantes que inician la Educación Secundaria (12-13 años) con los que finalizan esta etapa educativa (15-16). En nuestro caso tenemos un grupo de estudiantes del último año de Educación Secundaria (que en México corresponde a los 14-15 años) y otro grupo de estudiantes del final del Bachillerato (17-18 años). Introducimos de este modo un nuevo nivel educativo (Bachillerato) cuyo interés se justifica por la necesidad de evaluar los conocimientos de los estudiantes cuando van a ingresar en la universidad. Además se amplía en dos años la edad de los estudiantes para los cuáles realizamos una doble evaluación.

En el Capítulo 5 mostramos el análisis cuantitativo de las respuestas obtenidas. Se analizan los resultados ítem a ítem, determinando los que resultan fáciles o difíciles y comparando la dificultad relativa de los ítems en los dos grupos de estudiantes, y con la obtenida en la investigación de Cobo (2003). De igual modo se analiza la puntuación global.

Objetivo específico 4: Profundizar sobre el significado personal que los estudiantes mexicanos de Secundaria y Bachillerato asignan específicamente a la mediana e identificar los conflictos semióticos que presentan al resolver problemas relacionados con este promedio.

En el Capítulo 6 se contempla este objetivo, llevando a cabo un análisis semiótico de las respuestas que los estudiantes dan a los ítems del cuestionario relacionados con la mediana. El motivo de elegir este promedio para su estudio, es el peso que se da en el currículo mexicano al análisis exploratorio de datos, basado en la mediana y otros estadísticos de orden, además de las pocas investigaciones que existen al respecto. Asimismo, los ítems elegidos tienen un comportamiento atípico en el estudio cuantitativo que indica escaso efecto de la instrucción. O bien no se aprecian diferencias en los dos grupos de estudiantes, o en caso de haberlas, la dificultad al finalizar el Bachillerato, sigue siendo excesiva.

El análisis permite clasificar los tipos de respuestas e identificar conflictos semióticos relacionados con el concepto de mediana. Con ello completamos los resultados de Cobo (2003), quien no centró particularmente en la mediana su trabajo.

7.3. CONCLUSIONES RESPECTO A LAS HIPÓTESIS

En el Capítulo 1 también se plantearon unas hipótesis sobre los resultados que esperábamos alcanzar, basadas en el estudio de los antecedentes de nuestro trabajo. A continuación presentamos de nuevo las hipótesis y las conclusiones obtenidas sobre las mismas.

H_1: El significado institucional de referencia en nuestro trabajo, definido por el contenido sobre las medidas de posición central presentado en los libros de texto que utilizan los alumnos de la muestra es complejo. Además no es uniforme en los libros analizados, a pesar de estar dirigidos al mismo nivel educativo.

Esta hipótesis se justificó por las conclusiones de la investigación de Cobo (2003) y los estudios sobre libros de texto realizados en nuestro mismo marco teórico, más específicamente los Alvarado (2007) y Olivo (2008).

La hipótesis se confirma parcialmente en el estudio que hemos llevado a cabo en el Capítulo 2, en el que analizamos con detalle los objetos matemáticos relacionados con las medidas de tendencia central que se presentan en los libros utilizados por los alumnos que conformaron la muestra.

Por un lado, encontramos un total de seis campos diferentes de problemas, que además coinciden con los que Cobo (2003) también halló en los textos españoles, lo que indica unas tendencias generales enseñanza del tema, que no son específicas de nuestro contexto educativo. Lo mismo que en caso de Cobo (2003) nuestro estudio indica la omisión de campos de problemas importantes, como estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas en presencia de errores, y estimar el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar de una población para una variable aleatoria.

El lenguaje utilizado en los libros españoles es también muy similar al de los libros mexicanos. Sin embargo, es más completo, en el sentido de que algunos de ellos presentan fórmulas más complejas como en el caso de estimar la mediana o la moda. También se observa que los libros españoles contienen distintas representaciones gráficas, que han sido escasas en los libros mexicanos. Las propiedades de la media, mediana y moda son igual de relevantes que las definiciones para el estudio de estos conceptos, pero tienen un tratamiento muy inferior. A este respecto, son pocas las propiedades que hemos identificado en los libros de texto mexicanos seleccionados, siendo mayor la presencia de definiciones.

En cuanto a los procedimientos de cálculo, encontramos la obtención de la media, moda y mediana en datos aislados y el cálculo a partir de tablas de frecuencias; lo que concuerda con la información proporcionada por Cobo (2003) en cuanto a los algoritmos más frecuentes en los libros españoles. Fue baja la proporción de libros que explican procedimientos a partir de gráficos o diagramas, ya que sólo se muestran para el caso de la moda y aún en menor frecuencia para la mediana. Respecto a la media, no se encontraron procedimientos de cálculo a partir de gráficos. También observamos gran diversidad de presentación, a pesar de restringirse el análisis sólo a tres libros.

H_2. Encontraremos una amplia gama de dificultad en los ítems que configuran el

cuestionario. Además, la dificultad relativa de los ítems se conserva en los dos grupos de estudiantes participantes y reproduce la dificultad relativa encontrada en la investigación de Cobo (2003).

En el Capítulo 5 llevamos a cabo un estudio detallado de los índices de dificultad de los ítems que componen el cuestionario, tanto globalmente, como comparando los resultados en los dos grupos de estudiantes. Los resultados globales muestran gran variabilidad en la dificultad de los ítems, desde 0.26 (cálculo de la media a partir de una tabla de datos agrupados en intervalos) a 0.85 (media como mejor estimador de una cantidad desconocida en presencia de errores de medida). Este último es un campo de problemas no contemplado en los libros de texto, que por su gran facilidad, parece muy adecuado para ser tenido en cuenta. Nuestros resultados son en general mejores que los de Cobo (2003), lo que se explica por la mayor edad y preparación de los estudiantes del grupo de Bachillerato.

Por otro lado, al comparar por grupos, observamos que la dificultad relativa de los ítems se conserva, aunque aumentan el número de respuestas correctas en los alumnos de Bachillerato. También es equivalente respecto a la dificultad relativa de ítems en el estudio de Cobo (que fue la misma en sus dos grupos). En resumen hay un rango de dificultad en las diferentes tareas que se conserva a lo largo del rango de edad que va de 12-13 años a 18-19 y no depende del contexto cultural. Ello nos hace reflexionar sobre la complejidad relativa de diferentes objetos matemáticos que componen el significado de las medidas de tendencia central y sobre cuáles de ellos sería preferible introducir en cada uno de los niveles educativos.

H_3. Observaremos una mejora en los resultados en relación a los obtenidos por Cobo (2003) y asimismo, comparativamente los resultados serán mejores en los estudiantes de Bachillerato. Sin embargo la mejora no será homogénea en todos los ítems.

Estas dos hipótesis se justificaron por un lado porque esperamos que la complejidad del significado institucional de las medidas de posición central se refleje en los significados personales de los estudiantes sobre el tema. Por otro lado, en la investigación de Cobo (2003) los resultados fueron mejores en los alumnos de mayor edad, aunque algunos ítems continuaron siendo difíciles para los mayores, y conservándose la dificultad relativa de los ítems en los dos grupos. Puesto que nuestros estudiantes son de mayor edad que los de la citada autora, esperábamos se conservara la tendencia encontrada en dicha investigación.

La hipótesis se cumplió, como hemos comentado anteriormente, pero queremos destacar que no sucedió en todos los ítems. Hemos observado un comportamiento atípico en los ítems relacionados con la mediana, la mayoría de los cuáles dan resultados parecidos en los dos grupos de estudiantes, al igual que ocurrió en el estudio de Cobo (2003). Ello nos sugirió la necesidad de un estudio más profundo de estos ítems que se lleva a cabo en el Capítulo 6.

H_4. Analizada la multidimensionalidad de las respuestas de los alumnos al cuestionario, observaremos la existencia de diferentes factores que sugieren capacidades diferenciadas o tipos diferenciados de conocimiento (en contraposición a una teoría unidimensional del desarrollo según estadíos).

Esta hipótesis también la plantea Cobo (2003) y la confirma mediante el análisis factorial de las respuestas. Para comprobarla, en el Capítulo 5 se completa el estudio de la estructura de las respuestas mediante el análisis cluster e implicativo. En ambos casos utilizamos el software CHIC, Classification Hierarchical, Implicative et Cohesive (Couturier y Gras, 2005), que realiza un estudio de aglomeración jerárquica, tomando como medida de similaridad entre ítems el índice de Lerman y suponiendo una distribución binomial para cada variable.

Como resultado observamos una estructura muy compleja con numerosos grupos, lo que indica componentes diferenciados en el significado de las medidas de posición central. Este resultado concuerda con nuestro marco teórico y proporciona una evidencia de validez de constructo del instrumento. Obtenemos un primer grupo de ítems que interpretamos como comprensión de diferentes aspectos de la media y otros cinco grupos que se unen entre sí. Es decir, la estructura sugiere una comprensión de la media, separada de la comprensión de mediana y moda, y para cada uno de estos dos grupos, varios aspectos diferenciados.

La estructura se simplifica al aplicar el análisis jerárquico implicativo, que es una contribución original de este trabajo, pues no fue aplicado por Cobo (2003). Mientras que el análisis cluster clásico está basado en una distancia de tipo simétrica, el análisis implicativo utiliza una medida de similaridad asimétrica. La implicación entre un ítem y otro se interpreta en el sentido de que si un estudiante es capaz de resolver correctamente un ítem, entonces mejora su probabilidad de resolver correctamente otro implicado por aquél. En este sentido, el árbol implicativo nos proporciona una pauta de posible orden de introducción de los conceptos y procedimientos evaluados por los diferentes ítems. Obtenemos cinco grupos de ítems, quedando el ítem más fácil (ítem 8) separado de la clasificación:

- *Primer grupo: Cálculo avanzado de la media y comprensión procedimental.* Incluye el cálculo de la media ponderada, media de la suma de dos variables, determinar una distribución dada la media y efecto del valor cero sobre el cálculo de la media, así como comprender que la (media se sitúa dentro del recorrido).
- *Segundo grupo: Cálculo de la mediana.* En datos cuantitativos, tanto en forma aislada, con número par o impar de valores, como a partir de un gráfico.
- *Tercer grupo: Mediana en datos ordinales*. Percepción de que la mediana es la medida de posición central preferible para este tipo de datos, al tener en cuenta el orden y por no ser posible el cálculo de la mediana.
- *Cuarto grupo: Comprensión conceptual de la media.* Incluye la comprensión de propiedades como la suma de desviaciones a la media, interpretación de promedios en un gráfico conjunto de dos distribuciones, cambio de escala y significado de la media como reparto equitativo.
- *Quinto grupo: Representante de un conjunto de datos.* Capacidad para decidir el mejor representante en distribuciones no simétricas o bimodales, comparación de media y mediana y su interpretación en diferentes gráficos.

H_5. La dificultad de las tareas es más acusada en el caso de las relacionadas con la mediana. En estas tareas se producen una serie de conflictos semióticos en los estudiantes, que explican esta dificultad.

Esta hipótesis se apoya de nuevo en los resultados de Cobo (2003) quien encontró que los ítems relacionados con la mediana no discriminaban bien a los dos grupos de alumnos en su investigación y también se confirma, como hemos comentado. En el Capítulo 6 hemos realizado un análisis semiótico de las respuestas a un grupo de estos ítems, habiéndose encontrado las siguientes dificultades de los estudiantes, ya informadas en investigaciones previas, tras las cuáles subsisten conflictos de tipo semiótico, que hemos clasificado en varios tipos:

- *Conflictos terminológicos y de comprensión de representaciones*: Cuando se asigna una expresión o representación incorrecta a un cierto objeto matemático, aunque el objeto en si mismo es comprendido por el estudiante. Así algunos estudiantes confunden los términos "mediana" con "media" y en menor frecuencia con "moda", error descrito por Russell y Mokros (1991), Carvalho (2001) y Cobo (2003). Por ello, cuando se les pide calcular la mediana, los alumnos calculan la media, aunque el cálculo de esta sea correcto.
- *Conflictos conceptuales:* Cuando el estudiante, aunque conoce el término, utiliza una definición no adecuada desde el punto de vista institucional, debido a errores de interpretación (semióticos) en toda o parte de la definición. Este conflicto ha aparecido en relación con la mediana (pues es respecto a los ítems relacionados donde lo hemos analizado), aunque es posible que se produzca en otros objetos. Matemáticamente, la mediana se define como "el valor central de una serie de datos ordenados", pero los estudiantes pueden hacer un error de interpretación de cuál es el orden considerado o bien, de qué se entiende por "valor central".

  Ya Barr (1980) concluyó que los estudiantes interpretan la mediana como el centro de "algo" sin comprender específicamente a qué se refiere, pero no es específico respecto a la forma en que se concreta este conflicto. Cobo (2003) encontró que algunos estudiantes interpretan la mediana como centro del conjunto de datos sin ordenar. Nosotros pensamos que el estudiante podría pensar que el "orden" a que se refiere la definición es el orden en que se dan los datos y no el orden natural numérico.
- *Conflicto al atribuir propiedades a un concepto:* Consiste en asignar una propiedad inexistente a un objeto matemático o bien no reconocerla cuando la tiene. Entre estos conflictos hemos encontrado bastantes alumnos que suponen que la media se sitúa siempre en el centro de la distribución, error ya descrito por Russel y Mokros (1991) o que tiene la propiedad asociativa (señalado por Mevarech, 1983). En nuestro caso interpretamos estos errores como conflictos semióticos, pues no ocurren al azar sino que podemos explicarlos por una generalización abusiva de propiedades que tienen otros objetos relacionados con éstos. En el caso de situar la mediana en el centro de la distribución, por generalizar las propiedades que sólo se cumplen en distribuciones simétricas. En el caso de la propiedad asociativa, por

generalizar las propiedades de la suma y multiplicación. Estos conflictos suponen estructura de operación interna a la mediana, por un proceso indebido de generalización; ya que la propiedad de conservación del conjunto numérico la tienen otras operaciones que el alumno conoce (suma, multiplicación, etc.) pero no las medidas de posición central, exceptuando la moda.

- *Conflictos procedimentales:* Consiste en la confusión de un algoritmo o de alguno de sus pasos, por ejemplo, usar el algoritmo de la media simple en el cálculo de la media ponderada (Pollatsek, Lima y Well, 1981); no ser capaz de resolver el caso de indeterminación de la mediana en el caso de número par de datos (Schuytem, 1991) o no considerar todos los datos en el cálculo; calcular la mediana o media con las frecuencias en lugar de con los valores de la variable (Carvalho, 1998, 2001).

Además se han encontrado las siguientes dificultades y conflictos semióticos no descritos en trabajos anteriores de investigación:

- *Conflictos conceptuales:* Interpretar la mediana como el centro del rango de la variable, conflicto que se presenta por un fallo en el proceso de particularización, desde la idea de "centro" a la idea de "centro estadístico" que es la que se espera del estudiante, quien por el contrario, particulariza a la idea de "centro geométrico". Confundir medida de tendencia central con valor de la variable (no se concibe como una operación sobre el conjunto de datos). Este conflicto fue descrito por Garret y García (2005) para la media, pero no para la mediana,
- *Conflictos procedimentales:* No tener en cuenta la frecuencia de valores en el cálculo de la mediana. Así mismo, se aplica a una escala ordinal una transformación que conserva el orden pero no el tipo de escala. Implica la falta de discriminación entre variables cuantitativas y ordinales.
- *Comprensión de representaciones:* Hemos observado muchas dificultades asociadas al lenguaje gráfico, donde se requiere una gran actividad semiótica, al ser el gráfico un objeto semiótico complejo. Los alumnos confunden entre si los objetos representados en el gráfico, por ejemplo, los valores de la variable con las divisiones de la escala o incluso la variable y la unidad estadística.

Todos estos conflictos (algunos con frecuencia apreciable) sugieren la necesidad de tener en cuenta la dificultad del concepto de mediana para los estudiantes y reforzar su enseñanza. También sugiere el interés de continuar la investigación, proponiendo otras tareas relacionadas con la mediana o bien diseñando una enseñanza que permite mejorar la comprensión de los estudiantes.

7.4. IDONEIDAD DEL CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN

Una contribución importante de nuestro trabajo es la validación del cuestionario de Cobo (2003), que no había sido completada por su autora. A continuación utilizamos algunas ideas teóricas de Batanero y Díaz (2005) para analizar la idoneidad didáctica de este instrumento de evaluación.

En nuestro marco teórico, la evaluación del significado personal de los estudiantes se lleva a cabo a partir de las respuestas dadas en el cuestionario. Pero las tareas propuestas han de ser suficientemente representativas (para evaluar las unidades de contenido definidas), si queremos inferir lo que cada alumno de la muestra sería capaz de hacer en otras tareas relacionadas. Por tanto, la posibilidad de generalizar depende de la representatividad y la variabilidad de la muestra de tareas y también de la muestra de estudiantes participantes. Siguiendo a las autoras, a continuación aplicamos el concepto de *idoneidad* y sus tipos (Godino, 2003; Godino, Cotreras y Font, 2006) al cuestionario de Cobo (2003).

- La *dificultad* de un ítem o tarea daría una medida de su *idoneidad cognitiva*; es decir del grado de representatividad de los significados evaluados respecto a los significados personales. En nuestro trabajo, hemos obtenidos ítems con un grado de dificultad que varía de 85% hasta 26%, por lo que tenemos ítems aplicables a una amplia variedad de conocimientos de los estudiantes (desde fáciles a difíciles) siendo más frecuentes los de dificultad intermedia.
- La *discriminación* d*e un ítem valoraría su idoneidad evaluadora,* un ítem puede ser adecuado cognitivamente, pero no diferenciar (por ser demasiado fácil) a los alumnos que tienen un mayor conocimiento de los que tienen un menor conocimiento del concepto. Esta idoneidad podría ser un comp*onente de la* idoneidad *instruccional,* en cuanto que uno de los objetivos de la instrucción es la función evaluadora. En nuestro cuestionario el estudio de discriminación se llevó a cabo mediante un análisis discriminante. Los resultados obtenidos indican una adecuada capacidad de discriminación de los ítems en general y del cuestionario en su conjunto. Sin embargo no ocurre lo mismo con los ítems relacionados con la

mediana. En consecuencia una sugerencia para mejorar el instrumento sería revisar estos ítems o bien la enseñanza que sobre la mediana se lleva con los estudiantes que pasan el cuestionario.

- La *validez de contenido de un cuestionari*o *indicaría una idoneid*ad *epistémica*, o grado de representatividad del instrumento en cuanto al significado objeto de evaluación. Nosotros hemos analizado con detalle el contenido de los ítems, comparando con el significado institucional de referencia. Dicha comparación permite asegurar la validez de contenido, por lo que consideramos que el cuestionario tiene buena idoneidad epistémica.
- La *fiabilidad* o *generalizabilidad a otros ítems* daría una medida de la estabilidad de la respuesta, es decir sería otro componente de la *idoneidad evaluadora.* En nuestro caso se obtuvo una fiabilidad buena, pero no excesivamente alta, debido a la mutidimesionalidad del cuestionario. Pero también se obtuvo una alta generalizabilidad a otros estudiantes lo que da una *idoneidad externa* según las autoras.

7.5. APORTACIONES Y LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Pensamos que el trabajo realizado contribuye a proporcionar información sobre la comprensión de las medidas de tendencia central en los estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato. A lo largo de la tesis hemos detallado la dificultad de las tareas, la diferencia observada entre los dos tipos de estudiantes y con las investigaciones previas, así como sus respuestas típicas. Con particular cuidado hemos estudiado los conflictos de los alumnos en relación al objeto matemático mediana.

Estas son las principales aportaciones de nuestro trabajo que creemos serán útiles para la mejora y planificación de la enseñanza de la estadística en México en estos niveles educativos. Asimismo, debido a la coincidencia de la dificultad relativa y de algunos tipos de errores entre alumnos mexicanos y españoles, pensamos que los resultados serán generalizables para alumnos de otros países y pueden tener una validez más general. El estudio detallado del tema en el currículo mexicano y de los libros de texto permite identificar, asimismo, puntos fuertes y débiles en la actual enseñanza del tema, que pueden mejorarse, partiendo de nuestro trabajo.

Otra aportación importante es la validación del cuestionario de Cobo (2003) que fue iniciada, pero no finalizada por su autora. La información sobre las características psicométricas del instrumento serán muy valiosas a efectos de investigación y de evaluación.

Finalmente, la ampliación y clasificación de investigaciones previas nos ha permitido preparar un estado de la cuestión, partiendo del de Cobo (2003) pero ampliado y revisado. Este estado de la cuestión informa también de las principales dificultades en la comprensión de las medidas de posición central y puede ayudar a otros investigadores interesados en trabajar en este tema y a los profesores que quieran promover cambios en la enseñanza de nuestro objeto de estudio.

Limitaciones del estudio

Reconocemos también el carácter limitado de la investigación, en cuanto a la muestra de libros de texto utilizada, que, aunque recoge los que usaron los alumnos del estudio, sería necesario ampliar para acercarnos mejor al sistema educativo mexicano.

Por otro lado, el gran volumen de datos (que multiplica por tres los utilizados por Cobo, 2003) hizo que la principal parte del estudio de evaluación tuviese un carácter cuantitativo. El análisis semiótico se ha limitado a los ítems relacionados con el objeto matemático mediana, por ser éste el menos investigado y que mayor dificultad presentó. No obstante, sería necesario continuar el trabajo de análisis semiótico de las respuestas al resto de los ítems que conforman el cuestionario.

7.6. PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTOS

Los resultados presentados en nuestro tema de investigación sientan las bases para continuar con otras líneas de trabajo que conduzcan al investigador a plantear nuevas propuestas para el análisis del significado y comprensión de las medidas de tendencia central. A continuación señalamos algunos temas en que este trabajo puede ser extendido, con el propósito de orientar futuras investigaciones sobre el tópico en cuestión.

En nuestro trabajo describimos el significado de las medidas de tendencia central para estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato. El estudio podría ampliarse con los estudiantes de Educación Primaria, pues en el último tramo de este nivel se sugiere que los niños trabajen intuitivamente los conceptos de moda y media. No obstante este estudio requeriría la elaboración de un nuevo cuestionario, más asequible a los niños de esta edad.

Un tema de gran importancia sería el diseño, experimentación y evaluación de propuestas de enseñanza que tengan en cuenta algunos de los conflictos detectados y traten de mejorarlos. Son muy pocos los estudios enfocados a la enseñanza, pues como hemos visto en los antecedentes, prácticamente todos se basan en la evaluación. El estudio de la enseñanza (y el consiguiente proceso de aprendizaje) podría hacer en cualquiera de los niveles educativos (desde primaria a universidad). Pensamos que este es el punto donde deben centrarse principalmente los esfuerzos de investigación.

Por otro lado, aunque el alumno es el principal centro de nuestra atención, no debemos olvidar la necesaria formación del profesor. Algunas investigaciones (Jacobbe, 2008) indican carencias tanto en el conocimiento estadístico como el profesional requerido para la enseñanza de las medidas de tendencia central en profesores. El estudio de la formación y desarrollo profesional del profesor es el último punto que citamos en nuestra agenda de investigación.

REFERENCIAS

American Psychological Association, American Educational Research Association y National Council on Measurement in Education (1999). *Standards for educational and psychological testing*. Washington, DC: American Psychological Association.

Almaguer, G. (2000). *Matemáticas 3.* México: Limusa

Almaguer, G. (2000). *Matemáticas 3.* Cuaderno de prácticas y tareas. México: Limusa.

Alvarado, H. (2007). *Significados institucionales y personales del teorema central del límite en la enseñanza de estadística en ingeniería.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Aoyama. K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3), 298-318. On line: www.iejme.com/.

Arteaga, P., Batanero, C. y Ruiz, B. (2008). Complejidad semiótica de gráficos estadísticos en la comparación de dos distribuciones por futuros profesores. Trabajo presentado en el *Encuentro Latino Americano de Educación Estadística* Monterrey, México.

Bakker, A. (2003). The early history of average values and implications for education. *Journal of Statistics Education*, 11(1). On line: www.amstat.org/publications/jse/.

Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En J. Garfield y D. Ben Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 147-168). Dordrecht: Kluwer.

Barr, G. V. (1980). Some student's ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics,* (2), 38-41.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *UNO*, 25, 41-58.

Batanero, C. (2005). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, 1, 27-40.

Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. y Rossman, A. (2008). *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher*

Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI and IASE. On line: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Batanero, C., Cobo, B. y Díaz, C. (2003). Assessing secondary school students' understanding of averages. *Proceedings of CERME 3,* Bellaria, Italia. On line: www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.). *Aspectos didácticos de las matemáticas* (125-164). Zaragoza: ICE.

Batanero, C. y Díaz, M. C. (2005). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Reflexiones desde el marco de la TFS En A Contreras (Ed.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 13-36). Universidad de Jaén.

Batanero, C. y Díaz, C. (2008). *Análisis de datos con Statgraphics.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1992). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31.

Batanero, C. y Godino, J. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203-226). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy.* Academic Press: New York.

Barbero, M. (2003). *Psicometría II. Métodos de elaboración de escalas*. Madrid: UNED.

Bertin, J. (1967). *Semiologie graphique.* Paris: Gauthier-Villars.

Biggs, J. B. y Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa.* Barcelona: CEAC.

Briseño, L. y Verdugo, J. (2000). *Matemáticas 3.* México: Santillana.

Bruno, A. y Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas VII,* 57-85.

Burrill, G. (Ed.) (2006). *Thinking and reasoning with data and chance. NCTM 2006 yearbook:* Reston, VA: NCTM.

Burrill, G. y Camden (Eds.) (2006). *Curricular development in statistics education: International Association for Statistical Education 2004 Roundtable.* Voorburg: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira (Ed.). *Proceeding of the 19th PME Conference* (v.3, pp. 144-151). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Campbell, S. K. (1974). *Flaws and fallacies in statistical thinking.* New Jersey: Prentice Hall.

Carmines, E. G. y Zeller, R. A. (1979). *Reliability and validity assesment.* Londres: Sage University Paper.

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal*. *3(1).* On line: www.stat.auckland.ac.nz/ ~iase/serj/.

Carvalho, C. (1996). Algumas questoes em torno de tarefas estatísticas com alunos do 7º ano. *Actas do ProfMat 96* (pp. 165-171). Almada: Associaçao de Profesores de Matemática.

Carvalho, C. (1998). Tarefas estadísticas e estratégias de resposta. Trabajo presentado en el *VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación.* Castelo de Vide, Portugal.

Carvalho, C. (2001). *Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade.* Tesis Doctoral. Universidad de Lisboa.

Carvalho, C., y César, M. (2000). The game of social interactions in statistics learning and in cognitive development. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *PME 24 Proceedings* (vol. 2, pp. 153-160). Hiroshima: Hiroshima University.

Carvalho, C. y César, M. (2001). Peer interactions and statistics learning. En M. Heuvel-Panhuzen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME Conference* (vol. 2, pp. 217-224). Utrecht: Utrecht University.

Carvalho, C. y César, M. (2002). Sharing ideas and statistics leaning: The role of peer interaction in school context. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth*

International Conference on Teaching of Statistics, Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Cobo, B. (1998). *Estadísticos de orden en la enseñanza secundaria.* Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.

Cobo, B. (2001). Problemas y algoritmos relacionados con la media en los libros de texto de secundaria. En M. Beltrán (Ed.), *Jornadas Europeas de Enseñanza y Difusión de la Estadística* (pp. 241-252). Palma de Mallorca: Instituto Balear de Estadística.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cobo, B. y Batanero, C. (2000). La mediana ¿Un concepto sencillo en la enseñanza secundaria? *UNO,* 23, 85-96.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004 a). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias,* 22(1), 5-18.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004 b). Razonamientos aritméticos en problemas de promedios. *SUMA,* 45, 79-86.

Cortina, J. L. (2002). Developing instructional conjectures about how to support students' understanding of the arithmetic mean as a ratio. En B., Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Couturier, R. y Gras, R. (2005). CHIC: Traitement de données avec l'analyse implicative. En G. Ritschard y C. Djeraba (Eds.), *Journées d'extraction et gestion des connaissances (EGC'2005)* (Vol. 2, pp. 679-684). Universidad de Lille.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension.* Reston, VA: N.C.T.M.

Dane, F. C. (1990). *Research methods*. Thompson. Pacific Grow. CA.

DEMS (1997). *Programa de Estudios Probabilidad y Estadística.* Instituto Politécnico Nacional, Secretaría Académica, Dirección de Educación Media Superior, México.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C., Batanero, C. y Cobo, B. (2003). Fiabilidad y generalizabilidad. Aplicaciones en evaluación educativa. *Números, 54,* 3 – 21.

Dunn, O, J. y Clarck, V. A. (1987). *Applied statistics: Analysis of variance and regression.* Nueva York: John Wiley.

Eco, U. (1995). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.

Eisenbach, R. (1994). Whats does the mean mean? Comunicación presentada en el *Fourth International Conference on Teaching Statistics.* Marrakesh, Marruecos.

Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Estepa, A. (2004). Investigación en Educación Estadística. La asociación estadística. En R. Luengo (Ed.). *Líneas de investigación en Educación Matemática*, (pp. 227-255). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Estepa. A. y Batanero, C. (1994). Judgments of association in scattter plots: An empirical study of students' strategies and preconceptions. En J. Garfield (Ed.), *Research Papers from the Fourth International Conference on Teaching Statistics.* The International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics. Universidad de Minnesota.

Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado.* Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio de evaluación de conocimientos estadísticos en profesores en formación e implicaciones didácticas. *Educación Matemática*, 16, 89-112.

Feldt, L. S. y Brennan, R. L. (1991). Reliability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement.* (pp. 105-146). Nueva York: MacMillan.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education 32*(2), 124-158.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review*, 70 (1), 1-25.

García, C. y Garret, A. (2006). On average and open-ended questions. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Bahia), Brasil: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Garfield, J. y Burrill, G. (Eds.) (1997). *Research on the role of technology in teaching and learning statistics, Proceedings of the 1996 IASE Round Table Conference*. Voorburg: International Statistical Institute.

Garfield, J. B. y Konold, C. (1992). *Statistical reasoning assessment. Part 2: Statistics in context.* Minnesota, MN: National Science Foundation.

Garret, A. y García, J. A. (2005). Un cuestionario y estrategias sobre los promedios. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 7, 197-217.

Gattuso, L. y Mary, C. (1996). Development of concepts of the arithmetic average from high school to University. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. I, pp. 401-408). Universidad de Valencia.

Gattuso, L. y Mary, C. (2002). Development of the concept of weighted average among high-school children. En B., Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Ghiglione, R. y Matalón, B. (1991). *Les enquêtes sociologiques. Théorie et practique.* París: Armand Colin.

Girard, J. C. (1997). Modélisation, simulation et expérience aléatoire. En *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 73-76). Reims: Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, 417-424). Universidad de Valencia.

Godino, J. D. (1999) *Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática.* On line: www.ugr.es/~jgodino/.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 22 (2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. On line: www.ugr.es/local/jgodino/.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 14(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998a). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics education a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.). *IX Seminário de Investigaçao em Educaçao Matemática* (p. 25-45). Associaçao de Profesores de Matemática. Portugal.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2) 127-135

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1), 3-36.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. y Font, V. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones,. 38, 25-49.*

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria for a mathematical instruction process: A teaching experience with the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 4.2, 1-26.

Goodchild, S. (1988). School pupils'unsderstanding of average. *Teaching Statistics*, 10 (3), 77-81.

Gras, R. (1996). *L'implication statistique: nouvelle méthode exploratoire de données applications a la didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Gras, R., Kuntz P. y Briand, H. (2001). Les fondements de l'analyse statistique implicative et quelques prolongements pour la fouille de données. *Mathématiques et Sciences Humaines*, *154-155*, 9-29.

Henry, M. (1997). (Coordinador). *Enseigner les probabilités au lycée*. Reims: Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos.

Jacobbe, T. (2008). Elementary school teachers' understanding of the mean and median. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. On line: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Konold, C. y Pollatsek, A. (2002). Data analysis as a search for signals in noisy processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 33,* 259-289.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A. y Gagnon, A. (1997). Students analyzing data: Research of critical barriers. In J. B. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Krippendorff, K. (1991). *Metodología del análisis de contenido*. Buenos Aires/Barcelona: Paidós-Comunicación.

León, O. G. y Montero, I. (2002). *Métodos de investigación en psicología y educación.* Madrid: McGraw-Hill.

Leon, M. R., y Zawokeswski, F. S. (1991). Use of the arithemetic mean: An investigation of four properties. Issues and preliminary resuls. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 302-306). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Lerman, I. C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données*. París: Dunod.

Li, D. Y. y Shen, S. M. (1992). Students' weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics,* 14 (1), 2-8.

Linn, R. L. (1988). *Educational measurement.* New York: National Council on Measurement Education.

Martínez Arias, R. (1995). *Psicometría: teoría de los tests psicológicos y educativos.* Madrid: Síntesis.

Mary, C. y Gattuso, L. (2005). Trois problèmes semblables de moyenne pas si semblables que ça ! L'influence de la structure d'un problème sur les résponses des eleves. *Statistics Education Research Journal*, 4(2), 82-102.

Mayén, S. (2006a). *Comprensión de medidas de posición central en estudiantes mexicanos de Bachillerato.* Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Mayén, S. (2006b). Análisis de conflictos semióticos en un problema de promedios. *VII Trobada d'estudiants de doctorat en didáctica de les matemáticas i de les ciències experimentals*. Universitat Autónoma de Barcelona. CD ROM.

Mayén, S. (2008). Conflictos semióticos en un problema de mediana, hallados en estudiantes mexicanos de bachillerato y secundaria. Trabajo presentado en el *RELME 22,* México, Julio, 2008.

Mayén, S. y Balderas, P. (2006). Assessing mexican students' understanding of averages. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Bahia), Brasil: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Mayén, S., Batanero, C. y Díaz, C. (2009). Dificultades de estudiantes mexicanos en la comparación de datos ordinales. Trabajo presentado en el *XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Santander.

Mayén, S., Batanero, C. y Díaz, C. (En prensa). Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. *Revista Latino Americana de Investigación en Matemática Educativa..*

Mayén, S., Cobo, B., Batanero, C. y Balderas, P. (2007). Comprensión de las medidas de posición central en estudiantes mexicanos de bachillerato, *Unión,* 9, 187-201.

Mayén, S., Díaz, C. y Ortiz, J. J. (En prensa). Conflictos semióticos de estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato en relación al concepto de mediana. *Publicaciones.*

M.E.C. (2001). *Decretos de Enseñanza Secundaria Obligatoria.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

M.E.C. (2006). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

M.E.C. (2007). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

Messick, S. (1989). Validity. En R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement*. 3ª. Edición (pp. 13-103). Nueva York: Collier Macmillan.

Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.

Millman, J. y Greene, J. (1989). The specification and development of test of achivement and ability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement* (pp. 335 – 366). London: MacMillan.

Morales, P. (1988). *Medición de actitudes en psicología y educación*. San Sebastián: Universidad de Comillas.

Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los tests.* Madrid: Pirámide.

Navas, F., Batanero, C. y Godino, J. D. (1997). Evaluación de concepciones sobre la noción de promedio en maestros de primaria en formación. Implicaciones para la formación estadística de los futuros profesores. En H. Salmerón (Ed.). *Actas VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 301-304). Universidad de Granada.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA; NCTM. www.standards.nctm.org/.

Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J. J., Font, V. y Mayén, S. (2009a). Configuraciones cognitivas de profesores en formación sobre la media aritmética. Trabajo aceptado en la *23 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Santo Domingo, 2009.

Ortiz, J. J., Font, V. y Mayén, S. (2009b). Significados personales de la media aritmética de profesores en formación. Trabajo aceptado en el XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Santander, Septiembre, 2009.

Osterlind, S. J. (1989). *Constructing test items.* Boston: Kluwer.

Pereira-Mendoza, L. (Ed.) (1993). *Introducing data analysis into schools: Who should teach it and how? Proceedings of the International Statistical Institute Round Table Conference.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.

Pinho, M. (2006a). Semiotics function and learning of arithmetics mean. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Bahia), Brasil: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Pinho, M. (2006b). Interpreting the concept of arithmetic mean from a semiotic vision. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Bahia), Brasil: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 191-204.

Ponte, J. P. (2001). Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. En T. J. Cooney y F. L. Lin (Eds*.), Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht: Kluwer.

Reading, C. (2002). Profile for statistical understanding. En B. Phillips (Ed*.). Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-6).* Ciudad del Cabo: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Reading, C. y Pegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.). *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.4, pp. 187-194). Universidad de Valencia.

Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en alumnos con preparación matemática avanzada.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria.* Tesis de Maestría. CICATA. México.

Russell, S. J. y Mokros, J. R. (1991). What's typical?: children's ideas about average. En D. Vere-Jones (eds.) *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 307-313). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute.

Russell, S. J. y Mokros, J. R. (1995). Children's concepts of averages and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(1), 20-39.

Santisteban, C. (1990). *Psicometría. Teoría y práctica en la construcción de tests.* Madrid: Norma.

Sax, G. (1989). *Principles of educational and psychological measurement and* evaluation. Belmont, CA: Wadsworth.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. and NCTM.

SEBN (1994). *Libro para el Maestro. Matemáticas. Secundaria.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal, México.

SEP (2005). *Programa de Estudio, Educación Secundaria, Versión preliminar para la primera etapa de implementación, 2005-2006,* Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.

SEP (2006). *Programa de estudio, educación secundaria.* Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, México.

Sánchez Cobo, F. (1999), *Significado de la regresión y correlación para estudiantes universitarios.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Scheaffer. R. L. (2006). Statistics and mathematics: On making a happy marriage. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 309-321). Reston, VA: NCTM.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 49-92.

Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in Psychology and Education. En Vere-Jones (Eds.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, Holanda: International Statistical Institute. On line: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/-

Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children’s concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19 (1), 64-80.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal en un curso de análisis de datos.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Thorndike, R. L. (1989). *Psicometría aplicada.* México: Limusa.

Tormo, C. (1993). *Estudio sobre cuatro propiedades de la media aritmética en alumnos de 12 a 15 años.* Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Valencia.

Vallecillos Jiménez, A. (1994). *Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Vermette, S., Gattuso L. y Bourdeau, M. (2005). Data analysis or how high school students “read” statistics. *Proceedings of the IASE Satellite Conference Communication of Satistics.* Nueva Zelanda: International Association for Statistical Education. On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/.

Visauta, R. (1989). *Técnicas de investigación social I. Recogida de datos*. Barcelona: P.P.U.

Watson, J. (1997). Assessing statistical literacy through the use of media surveys. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.). *The assessment challenge in statistics education* (pp. 107-121). Amsterdam: IOS Press.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (1999). The developments of concepts of average. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* 21(4), 15-39.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning.* 2(1 y 2), 11-50.

Weber, R. P. (1985). *Basic content analysis.* Londres: Sage.

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E. y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27(1), 77-120.

Zawojewski, J. (1986). *The teaching and learning processes of junior high school students under alternative modes of instruction in the measures of central tendency*. Tesis Doctoral. University Northwestern. Evanston, Illinois.

ANEXO 1. CUESTIONARIO PILOTO

CUESTIONARIO SOBRE MEDIDAS DE POSICIÓN CENTRAL

I. INSTRUCCIONES:

1. Lee con atención cada pregunta antes de contestar.
2. No dejes sin contestar ningún problema y escribe tu razonamiento en aquellos que se te indique.
3. Escribe tu nombre completo, escuela y grupo al que perteneces en la parte superior de todas las hojas que utilices.

II. DATOS PERSONALES

Escuela:
____

Grupo: _______ Edad: ___________ Sexo: ___________ Fecha: ______________

Apellidos: ___________________________ Nombre: _________________________

III. CUESTIONARIO

Item 1. Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en México es 2.2 hijos por familia.

1. Explica qué significa para ti esta frase.
2. Se han elegido 10 familias mexicanas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta.

Item 2. María y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada fin de semana una media de 4 horas a hacer deporte.

1. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?
2. María y Pedro dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

Item 3. Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue *mayor, menor o igual* a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?

Item 4. Tenemos *seis números* y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma entre *seis*. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

Item 5. El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano? ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg? En este caso, ¿Sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? ¿Por qué?

Item 6. Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1	I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S
Grupo 2	S S I I A N A N I I S N A S I N N

1. ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
2. ¿Cuál sería el promedio (medida de centralización) más apropiado para representar estos datos? Explica tu respuesta.

Item 7. Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona.

1. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

   Lucía ________________ Juan __________________ Pablo _______________

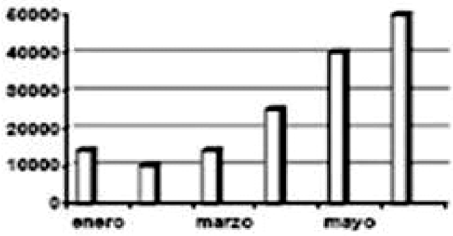
2. ¿Es la única posibilidad? Si____________No____________ Explica cómo has obtenido tus resultados.
3. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

Item 8. Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6.2, 6.3, 6.0, 15.2, 6.2, 6.1, 6.5, 6.2, 6.1, 6.2.

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Qué harías para calcularlo?

Item 9. Observa el siguiente diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa *Bocatta* durante los últimos 6 meses del año pasado:



1. Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.
2. Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

ANEXO 2. CUESTIONARIO FINAL

CUESTIONARIO SOBRE MEDIDAS DE POSICIÓN CENTRAL

I. INSTRUCCIONES:

1. Lee con atención cada pregunta antes de contestar.
2. No dejes sin contestar ningún problema y escribe tu razonamiento en aquellos que se te indique.
3. Escribe tu nombre completo, escuela y grupo al que perteneces en la parte superior de todas las hojas que utilices.

II. DATOS PERSONALES

Escuela: ____

Grupo: _________ Edad: ___________ Sexo: ___________ Fecha: ______________

Apellidos: ___________________________ Nombre: ________________________

III. CUESTIONARIO

Item 1. Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en México es 2.2 hijos por familia.

1. Explica qué significa para ti esta frase.
2. Se han elegido 10 familias mexicanas y el número medio de hijos entre las 10 familias es de 2.2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿Cuántos hijos podrán tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las 10 familias sea 2.2? Justifica tu respuesta.

Item 2. María y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada fin de semana una media de 4 horas a hacer deporte.

1. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?
2. María y Pedro dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

Item 3. Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue *mayor, menor o igual* a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?

Item 4. Tenemos *seis números* y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma entre *seis*. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?

Item 5. El peso en kilos de 9 niños es 15, 25, 17, 19, 16, 26, 18, 19, 24. ¿Cuál es el peso del niño mediano? ¿Cuál es la mediana si incluimos el peso de otro niño que pesa 43 Kg? En este caso, ¿Sería la media aritmética un buen representante de los 10 datos? ¿Por qué?

Item 6. Un profesor califica a sus alumnos del siguiente modo: I=Insuficiente, A=Aprobado, N=Notable, S=Sobresaliente. En la siguiente tabla tenemos las notas que ha puesto a dos grupos de alumnos:

Grupo 1	I A A N N S S I I I A A A N S S I A A S S S S
Grupo 2	S S I I A N A N I I S N A S I N N

1. ¿Qué grupo ha obtenido mejores notas?
2. ¿Cuál sería el promedio (medida de centralización) más apropiado para representar estos datos? Explica tu respuesta.

Item 7. Lucía, Juan y Pablo van a una fiesta. Cada uno lleva cierto número de caramelos. Entre todos llevan una media de 11 caramelos por persona.

1. ¿Cuántos caramelos ha llevado cada uno?

   Lucía ________________ Juan __________________ Pablo _______________

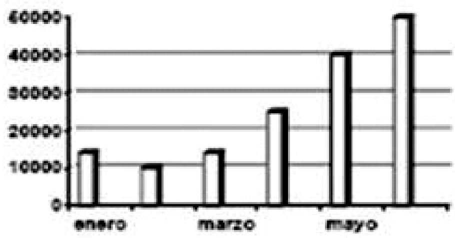
2. ¿Es la única posibilidad? Si____________No____________ Explica cómo has obtenido tus resultados.
3. Un cuarto chico llega a la fiesta y no lleva ningún caramelo. ¿Cuál es ahora la media de caramelos por chico? Explica tu resultado.

Item 8. Nueve estudiantes han pesado un objeto en la clase de ciencias, usando la misma escala. Los pesos registrados por cada estudiante (en gramos) se muestran a continuación:

6.2, 6.3, 6.0, 15.2, 6.2, 6.1, 6.5, 6.2, 6.1, 6.2.

Los estudiantes quieren determinar con la mayor precisión posible el peso real del objeto. ¿Qué harías para calcularlo?

Item 9. Observa el siguiente diagrama de barras que muestra las ventas de bocadillos de la empresa *Bocatta* durante los últimos 6 meses del año pasado:



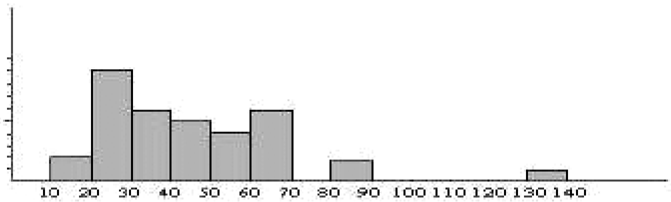
1. Da un valor aproximado del número medio de bocadillos que se vende al mes.
2. Da un valor aproximado de la mediana del número de bocadillos que se vendieron por mes.

Item 10. El siguiente conjunto de datos refleja las edades en que contrajeron matrimonio una muestra de 100 mujeres.

Edad	Frecuencia
15-19	4
20-24	38
25-29	28
30-34	20
35-39	8
40-44	1
45-49	1

¿Cuál es la media, mediana y moda de la edad de estas mujeres? Realiza los cálculos necesarios.

Item 11. Pedro piensa que en el siguiente gráfico, la mediana te dice que una mayoría de estudiantes gasta alrededor de 47 euros cada semana en comida.



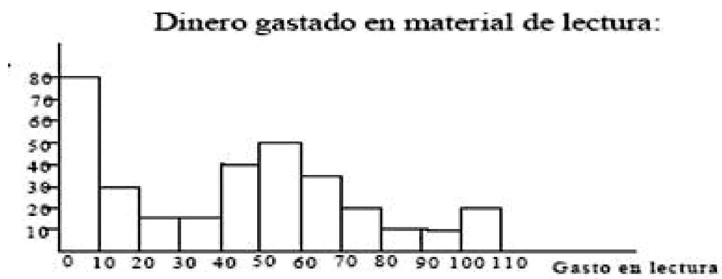
Gasto semanal en comida de un grupo de estudiantes
Media = 45.3 euros

Si ________________ No ____________________ ¿Por qué?

Item 12. Juana piensa que, en el gráfico anterior, el alto valor de 133 euros debería quitarse del conjunto de datos antes de calcular media, mediana y moda.

Si_______________ No _____________ ¿Por qué?

Item 13. Un grupo de estudiantes hizo este otro histograma del dinero gastado cada semana en material de lectura.



Media = 29 Euros. Mediana = 25 Euros

Francisco dijo que es difícil describir el dinero típico gastado en material de lectura en el gráfico anterior, porque la mayor parte de los estudiantes no gastaron nada o muy poco y un segundo grupo gastó entre 50 y 60 euros cada semana. Él piensa que en este caso la media es un indicador pobre del promedio y elige usar la mediana en su lugar para representar el gasto semanal “promedio” en material de lectura.

Si_______________ No _____________ ¿Por qué?

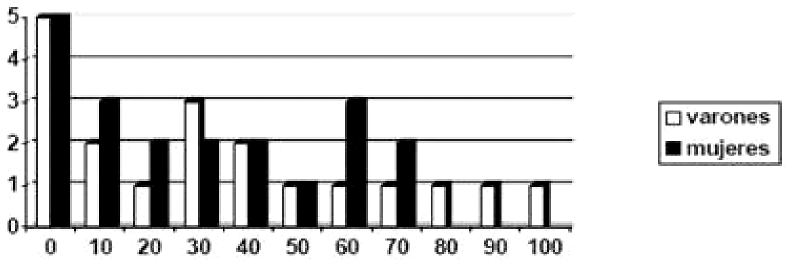
Item 14. Manuel dice que esta distribución tiene dos modas y sugiere que puedes obtener más información de estos datos si los divides en dos subgrupos y calculas el promedio en cada grupo por separado.

Si________________ No ______________ ¿Por qué?

Item 15. Lola sugiere hacer el estudio en pesos mexicanos (1€ = $14.5).

¿Cuál sería en este caso el valor de la media?

Item 16. Antonio quiere investigar las diferencias en los hábitos de gasto en varones y mujeres. Compara las cantidades gastadas en material de lectura en varones y mujeres, construyendo los gráficos siguientes:



Antonio cree que sus gráficos muestran que los varones y mujeres tienden a gastar diferentes cantidades de dinero en material de lectura.

Si________________ No ______________ ¿Por qué?