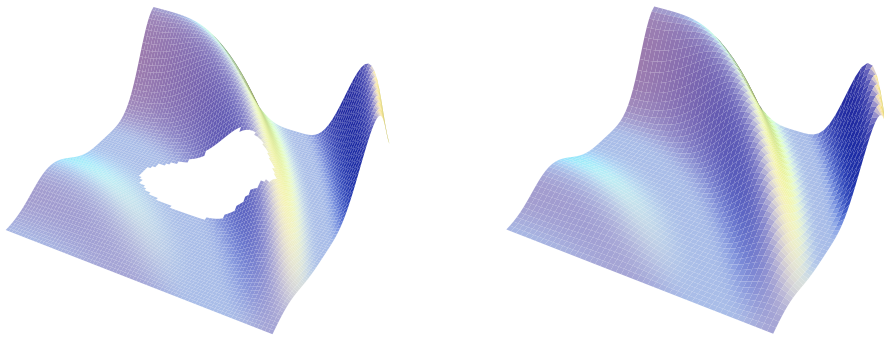


# Superficies de energía mínima sobre triangulaciones de tipo Powell-Sabin



Pedro González Rodelas

Tesis Doctoral

Granada, 2009



Universidad  
de Granada

Departamento de  
Matemática Aplicada



**Universidad de Granada**

Superficies de energía mínima  
sobre triangulaciones de tipo  
Powell-Sabin

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

Pedro González Rodelas

Granada, 2009

Editor: Editorial de la Universidad de Granada  
Autor: Pedro González Rodelas  
D.L.: GR. 3047-2009  
ISBN: 978-84-692-5092-1

Memoria presentada para optar  
al grado de Doctor en Ciencias  
Matemáticas por la Universidad  
de Granada.

La presente memoria ha sido realizada en el Departamento de  
Matemática Aplicada de la Universidad de Granada bajo la di-  
rección de los doctores D. Miguel Ángel Fortes Escalona y D.  
Miguel Pasadas Fernández, ambos profesores de dicho departa-  
mento.

El Doctorando

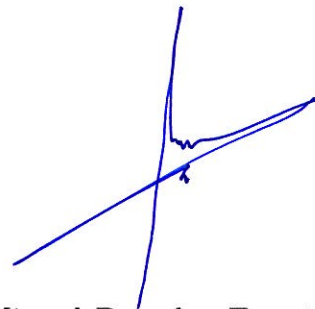


Fdo.: Pedro González Rodelas

Vº Bº de los Directores



Fdo.: Miguel Ángel Fortes Escalona



Fdo.: Miguel Pasadas Fernández

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad de Granada



A toda mi familia,  
amigos y colaboradores.

Y especialmente a mi hija Iara  
y por mis posibles futuros hijos.

Esta memoria está dedicada a mis padres, hermanos y muy especialmente a mi hija Iara, que tuvo que sufrir desde pequeña, junto con su madre, la preocupación y falta de tiempo de su padre por intentar llevar a cabo un trabajo de Docencia e Investigación lo más concienzudo y elevado posible en momentos de gran desilusión personal y confusión general por las sucesivas reformas universitarias, a cambio de no poder jugar algo más con ella. Tan sólo espero no volver a poner más en peligro en el futuro mi vida personal y familiar, y por ende mi propia integridad física y/o psicológica, por mucha presión y competencia que se tenga en el ambiente universitario.





# Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a los directores de esta tesis doctoral, Miguel Ángel Fortes Escalona y Miguel Pasadas Fernández, no sólo la confianza que han depositado en mí desde el principio y la excelente dirección de tesis que han llevado a cabo en todo momento, sino más bien su enorme dedicación, paciencia y comprensión conmigo, sobre todo ante ciertos momentos personales difíciles que me ha tocado vivir durante el transcurso de la misma y que han hecho que no siempre estuviera en las mejores condiciones anímicas para tener un rendimiento óptimo.

Quisiera expresar también mi gratitud también a todos los compañeros del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Granada (tanto en los Centros de Arquitectura Superior, Arquitectura Técnica, Ciencias y Ciencias Empresariales) por su apoyo incondicional. Este apoyo moral ha sido continuo por parte de aquellos compañeros que tengo más cerca de mi despacho del edificio Politécnico, en la E.T.S. de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos, tanto de mi Departamento como de otros Departamentos: Ingeniería Civil y Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, fundamentalmente. Pero especialmente quisiera agradecer la confianza y el apoyo que tuve siempre, aparte de los propios directores de la tesis, de parte de Victoriano Ramírez González, Domingo Barrera Rosillo, José Juan Quesada Molina, María Luisa Márquez García, Antonio Cañada Villar, José Aurelio Montero Sánchez, Mariano José Valderrama Bonet, Juan Francisco Reinoso Gordo, Antonio Palomares Bautista, Miguel Luis Rodríguez González, Javier Ordóñez García, José Rodríguez Montero, José Antonio Carrillo de la Plata, José Miguel Mantas Ruiz, María José Cáceres Granados, Purificación Guadalupe Navarro Mejías, Inmaculada Acal Díaz, Raquel Araceli Infantes Villafranca, Pablo Carnal Martín y tantos otros, compañeros y amigos, que sería prácticamente imposible mencionarlos todos aquí.

Por último también quiero agradecer a Victoriano Ramírez González, María José Ibáñez Pérez, María Cruz López de Silanes, María José Moncayo Hormigo, Allal Guessab, José Juan Quesada Molina, Daniel Cárdenas Morales, Abderrahman Bouhamidi y Ahmed Zidna el haber aceptado for-

mar parte del tribunal que ha de valorar esta tesis y/o emitir los informes preceptivos.

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por varios proyectos de investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología (fundamentalmente MTM2005-01331 y MTM2008-00671). De hecho gran parte de los gastos generados por la asistencia a diversos congresos y seminarios durante el transcurso del trabajo relacionado con esta tesis han sido sufragados por dichos proyectos. También querría agradecer la intensa labor que se ha llevado a cabo en mi Departamento para estimular la investigación, y de la cual este trabajo se ha beneficiado claramente; no sólo ahora, sino cuando realicé bastantes estancias en centros de investigación extranjeros, con temas diversos, gracias al apoyo y la cofinanciación del Departamento y del Plan Propio de la Universidad de Granada.

# Índice general

<b>I</b>	<b>Presentación y resumen en varios idiomas</b>	<b>1</b>
1.	Presentación . . . . .	3
2.	Antecedentes y consideraciones históricas . . . . .	4
3.	Notación y preliminares . . . . .	5
4.	Planteamiento general . . . . .	10
1.	Presentation . . . . .	17
2.	Background and historical considerations . . . . .	18
3.	Notation and preliminaries . . . . .	19
4.	General formulation . . . . .	22
1.	Présentation . . . . .	29
2.	Considérations historiques . . . . .	30
3.	Notation et préliminaires . . . . .	31
4.	Énoncé général des problèmes . . . . .	34
<b>II</b>	<b>Desarrollo de la tesis y conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>1.</b>	<b>Superficies de energía mínima</b>	<b>43</b>
1.1.	Introducción . . . . .	43
1.2.	Formulación del problema . . . . .	44
1.3.	Convergencia . . . . .	49
1.4.	Estimación de parámetros . . . . .	56
1.5.	Ejemplos numéricos y gráficos . . . . .	58
1.5.1.	Caso de aproximaciones de clase $\mathcal{C}^1$ . . . . .	58
1.5.2.	Caso de aproximaciones de clase $\mathcal{C}^2$ . . . . .	63
1.5.3.	Ejemplos de estimación de parámetros . . . . .	65
<b>2.</b>	<b>Consideración de datos con ruido</b>	<b>71</b>
2.1.	Introducción . . . . .	71
2.2.	Preliminares y formulación del problema . . . . .	72
2.3.	Convergencia . . . . .	75
2.4.	Técnica de validación cruzada . . . . .	78

2.5. Ejemplos numéricos y gráficos . . . . .	79
<b>3. Análisis multirresolución y aplicaciones</b>	<b>89</b>
3.1. Introducción . . . . .	89
3.2. Fundamentos básicos de multirresolución . . . . .	91
3.3. Formulación del problema . . . . .	93
3.4. Análisis multirresolución . . . . .	94
3.5. Aplicaciones . . . . .	98
3.5.1. Reducción de ruido . . . . .	99
3.5.2. Localización de la energía . . . . .	100
<b>4. Otras aplicaciones: rellenado de agujeros</b>	<b>105</b>
4.1. Introducción . . . . .	105
4.2. Preliminares y formulación del problema . . . . .	106
4.3. Rellenado de tipo discontinuo . . . . .	107
4.3.1. Formulación del problema . . . . .	107
4.3.2. Existencia y unicidad de solución . . . . .	108
4.3.3. Cálculos . . . . .	109
4.3.4. Reconstrucción de la función . . . . .	110
4.3.5. Ejemplos gráficos . . . . .	110
4.4. Rellenados continuos . . . . .	113
4.4.1. Formulación del problema . . . . .	113
4.4.2. Existencia y unicidad de solución . . . . .	113
4.4.3. Cálculos . . . . .	118
4.4.4. Reconstrucción de la función . . . . .	118
4.4.5. Ejemplos gráficos . . . . .	119
4.5. Rellenados con clase $\mathcal{C}^1$ . . . . .	120
4.5.1. Formulación del problema . . . . .	120
4.5.2. Existencia y unicidad de solución . . . . .	121
4.5.3. Cálculos . . . . .	122
4.5.4. Reconstrucción de la función . . . . .	123
4.5.5. Parámetros óptimos . . . . .	123
4.5.6. Ejemplos gráficos . . . . .	124
4.6. Convergencia local . . . . .	126
<b>. Conclusiones</b>	<b>131</b>
<b>III Apéndice y Bibliografía</b>	<b>135</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>137</b>

---

A.1. Espacios de Banach y de Hilbert . . . . .	137
A.2. Resultados generales . . . . .	139
A.3. Espacios $\mathcal{L}^p$ . . . . .	144
A.4. Espacios de Sobolev . . . . .	145
A.4.1. Otras normas equivalentes en $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ . . . . .	154
A.5. Espacios de polinomios . . . . .	162
A.6. Conjuntos $\mathbb{P}_r$ -unisolventes . . . . .	163
A.7. Triangulación de un dominio . . . . .	165
A.8. Bases de Bernstein . . . . .	168
A.9. Elemento finito de Powell-Sabin . . . . .	169
A.9.1. Funciones de base del E.F. de Powell-Sabin . . . . .	171
A.10. Formulación abstracta del M.E.F. . . . .	178
A.11. Aproximación por el M.E.F. . . . .	180
A.12. Convergencia del MEF . . . . .	182
A.13. Espacio de elementos finitos . . . . .	183



# Índice de figuras

1.	$\Delta^1$ -triangulación uniforme y su triangulación de Powell-Sabin asociada. . . . .	7
2.	$\alpha$ -triangulación no uniforme y su triangulación de Powell-Sabin asociada. . . . .	8
1.1.	Función de Franke (arriba a la izquierda) y diferentes splines de aproximación: arriba a la derecha en $\mathcal{T}_{h(5)}$ con $k = 1000$ , $\tau_1 = 10^{-2}$ , $\tau_2 = 10^{-2}$ , abajo izda. en $\mathcal{T}_{h(15)}$ con $k = 1600$ , $\tau_1 = 10^{-2}$ , $\tau_2 = 10^{-5}$ y abajo dcha. en $\mathcal{T}_{h(30)}$ con $k = 2500$ , $\tau_1 = 10^{-5}$ , $\tau_2 = 10^{-5}$ . . . . .	60
1.2.	Función de Nielson (arriba a la izquierda) y diferentes splines de aproximación: arriba a la derecha en $\mathcal{T}_{h(5)}$ con $k = 1000$ , $\tau_1 = 10^{-2}$ , $\tau_2 = 10^{-2}$ , abajo izda. en $\mathcal{T}_{h(15)}$ con $k = 1600$ , $\tau_1 = 10^{-2}$ , $\tau_2 = 10^{-5}$ y abajo dcha. en $\mathcal{T}_{h(30)}$ con $k = 2500$ , $\tau_1 = 10^{-5}$ , $\tau_2 = 10^{-5}$ . . . . .	62
1.3.	Triangulación no uniforme $\mathcal{T}_*$ de $\bar{D}$ . . . . .	63
1.4.	Triangulación de Powell-Sabin asociada a la triangulación $\mathcal{T}_*$ . . . . .	64
1.5.	Función de Franke (arriba) y dos superficies aproximantes: para $q = 4$ , $k = 1500$ , $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-2}$ , $\tau_3 = 10^{-4}$ (en el medio) y $q = 14$ , $k = 1600$ , $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-5}$ , $\tau_3 = 10^{-8}$ (abajo). . . . .	68
1.6.	Función de Nielson (arriba) y dos superficies aproximantes, con distintos valores de los parámetros $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , siendo óptimos para el ejemplo situado en el centro. . . . .	69
2.1.	Función de Nielson y dos superficies aproximantes para $\tau_1 = \bar{\tau}_1, \tau_2 = \bar{\tau}_2$ y para $\tau_1 = 10^{-3}, \tau_2 = 10^{-2}$ , respectivamente. . . . .	83
2.2.	Función de Nielson y dos superficies aproximantes para $\tau_1 = \bar{\tau}_1, \tau_2 = \bar{\tau}_2$ y para $\tau_1 = 10^{-3}, \tau_2 = 10^{-2}$ , respectivamente. . . . .	84
2.3.	Función de Franke y dos superficies aproximantes para $\tau_1 = \bar{\tau}_1, \tau_2 = \bar{\tau}_2$ y para $\tau_1 = 10^{-3}, \tau_2 = 10^{-2}$ , respectivamente. . . . .	85
2.4.	Función de Franke y dos superficies aproximantes para $\tau_1 = \bar{\tau}_1, \tau_2 = \bar{\tau}_2$ y para $\tau_1 = 10^{-3}, \tau_2 = 10^{-2}$ , respectivamente. . . . .	86

2.5. Función de Nielson y dos superficies aproximantes para $\tau_1 = \bar{\tau}_1, \tau_2 = \bar{\tau}_2$ y para $\tau_1 = 10^{-3}, \tau_2 = 10^{-2}$ , respectivamente. . . . .	87
3.1. Esquema general de levantamiento (“lifting scheme”). . . . .	92
3.2. El esquema de alzado inverso. . . . .	93
3.3. Triangulaciones $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ de $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1]$ . . . . .	99
3.4. Gráfica de la función test $f$ . . . . .	99
3.5. Splines de aproximación y splines perturbados para diferentes niveles de resolución decreciente. . . . .	101
3.6. Gráfica de la función test $g$ . . . . .	102
3.7. Gráficas de la función test $g$ , así como mapas de energía para diferentes niveles de resolución. . . . .	104
4.1. Gráficas de $f$ sobre $\bar{D}$ y sobre $\bar{D} - H$ . . . . .	111
4.2. Diferentes rellenados discontinuos para $f$ . . . . .	111
4.3. Gráficas de $g$ sobre $\bar{D}$ y sobre $\bar{D} - H$ . . . . .	112
4.4. Diferentes rellenados discontinuos para $g$ . . . . .	112
4.5. Diferentes rellenados continuos para $f$ . . . . .	119
4.6. Diferentes rellenados continuos para $g$ . . . . .	119
4.7. La triangulación, el agujero $H$ y $H^*$ . . . . .	125
4.8. Gráficas de $f$ sobre $\bar{D}$ y sobre $\bar{D} - H$ . . . . .	125
4.9. Función de reconstrucción $f^*$ de $f$ . . . . .	126
4.10. Gráficas de $g$ sobre $\bar{D}$ y sobre $\bar{D} - H$ . . . . .	127
4.11. Función reconstrucción $g^*$ de $g$ . . . . .	127
4.12. Gráficas de $h$ sobre $\bar{D}$ y sobre $\bar{D} - H$ . . . . .	128
4.13. Función reconstrucción $h^*$ de $h$ . . . . .	129
A.1. Situaciones no permitidas. . . . .	166
A.2. Subtriangulación de Powell-Sabin de $T_0$ . . . . .	171
A.3. Triangulación inicial y círculos inscritos (arriba a la izquierda y derecha, respect.) y triangulación de Powell-Sabin resultante (abajo a la derecha). . . . .	172
A.4. Representación de los $B$ -coeficientes sobre $T_d$ . . . . .	173
A.5. $B$ -coeficientes de un múltiplo de las funciones de base $\{w_i\}_{i=1}^9$ . . . . .	174
A.6. Funciones de base de Powell-Sabin $\mathcal{C}^1$ en el triángulo de referencia. . . . .	175
A.7. Derivadas parciales respecto de la variable $x$ de las funciones de base de Powell-Sabin en el triángulo de referencia. . . . .	175
A.8. Derivadas parciales respecto de la variable $y$ de las funciones de base de Powell-Sabin en el triángulo de referencia. . . . .	176
A.9. Función de base del espacio de E.F. de Powell-Sabin. . . . .	185
A.10. Función de base del espacio de E.F. de Powell-Sabin. . . . .	186



---

A.11. Función de base del espacio de E.F. de Powell-Sabin. . . . . 186



# Índice de tablas

1.1. Caso $k = 5000$ , diferentes valores de los parámetros y varias triangulaciones $\mathcal{T}_h$ . . . . .	61
1.2. Valores del error con $k = 100$ puntos. . . . .	64
1.3. Valores del error con $k = 2000$ puntos. . . . .	64
1.4. Tabla de errores para diferentes valores de $\tau$ , $q$ y $k$ . . . . .	65
1.5. $q = 5$ y $k = 300$ . . . . .	66
1.6. $q = 5$ y $k = 1000$ . . . . .	66
1.7. $q = 8$ y $k = 300$ . . . . .	66
1.8. $q = 8$ y $k = 1000$ . . . . .	67
2.1. $k = 1500$ , $\mathcal{N} = 98$ , y $\mu = 10^{-3}$ para Nielson. . . . .	80
2.2. $k = 3000$ , $\mathcal{N} = 162$ y $\mu = 5 \times 10^{-3}$ para Nielson. . . . .	81
2.3. $k = 1500$ , $\mathcal{N} = 98$ , y $\mu = 10^{-3}$ para Franke. . . . .	81
2.4. $k = 2500$ , $\mathcal{N} = 162$ , y $\mu = 10^{-3}$ para Franke. . . . .	81
2.5. $k = 1000$ , $\mathcal{N} = 72$ y $\mu = 5 \times 10^{-4}$ para Nielson. . . . .	82
4.1. Estimaciones de error para $f_\tau$ . . . . .	126
4.2. Estimaciones de error para $g_\tau$ . . . . .	128
4.3. Estimaciones de error para $h_\tau$ . . . . .	129



# Parte I

## Presentación y resumen en varios idiomas



# Resumen en castellano

## 1. Presentación

Esta memoria es una recopilación de varias contribuciones y aplicaciones en el campo de la aproximación de superficies mediante splines bivariados de energía mínima sobre triangulaciones de tipo Powell-Sabin.

Se presentan aproximaciones de clase  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) sobre triangulaciones uniformes adecuadas (las denominadas  $\Delta^1$ -triangulaciones), tanto en el caso de datos sin ruido como para datos con ruido, obteniéndose resultados rigurosos de convergencia en ambos casos. Estos resultados han sido publicados en [5, 6, 8].

En el caso  $r = 1$  es posible extender dichos resultados al caso de triangulaciones no uniformes más genéricas (las llamadas  $\alpha$ -triangulaciones).

Dichas aproximaciones se obtienen minimizando un determinado funcional que depende de algunos parámetros de suavizado, por lo que las superficies resultantes varían con los valores asignados a tales parámetros. Para la estimación de los “valores óptimos” de los parámetros hemos usado la técnica conocida como de *validación cruzada*, introducida previamente en varios trabajos de Wahba y Craven ([20] y [59]), Cox [19] y de Utreras [56]. Los resultados obtenidos en este tema también han sido publicados en el artículo [7].

Todo este material ha sido compendiado a lo largo de los Capítulos 1 y 2. Como funciones test, a las que se les ha aplicado las técnicas y algoritmos desarrollados, se han tomado principalmente las conocidas funciones de Franke y de Nielson.

Posteriormente, en el Capítulo 3, hemos usado la conocida técnica de multirresolución para desarrollar algoritmos de reducción de ruido en este contexto de las superficies de energía mínima. También se ha usado dicha técnica para localizar la “energía” en el caso de funciones con una marcada concentración de la misma en una zona determinada de su dominio de definición.

Para la posterior comprobación práctica de la eficacia de estas técnicas

hemos elegido convenientemente una función de tipo conoidal que claramente posee esta característica. Este material también se encuentra en proceso de publicación, ya que ha sido aceptado en [27].

Finalmente, en el Capítulo 4, tratamos el problema del rellenado de agujeros en una superficie explícita, definida mediante una función regular de dos variables sobre un dominio poligonal, de la que no se conocen sus valores en determinada región de su dominio de definición. Dicho rellenado se podrá hacer de tres formas diferentes: de manera continua, discontinua o bien con clase  $\mathcal{C}^1$ . La idea en todo caso será la de definir una nueva función de reconstrucción, que respete la original lo más fielmente posible, aunque no tenga que coincidir con ella exactamente donde estaba definida, y que recubra el agujero de una manera homogénea y coherente.

Esta última parte también ha sido objeto de la publicación [9], a la vez que continúa siendo un tema de trabajo actual, ya que en este momento también se está desarrollando el caso de rellenado de agujeros en superficies paramétricas.

## 2. Antecedentes y consideraciones históricas

Partiendo de los desarrollos previos sobre splines univariados que tuvieron lugar durante los años 60, fundamentalmente motivados por las aplicaciones en la industria automovilística y aeronáutica europea y americana, no es de extrañar que gran parte de los desarrollos en este campo, tanto teóricos, como numéricos y desde un punto de vista computacional, tuvieran lugar en los laboratorios de conocidas empresas del sector (son los casos de P. de Casteljau y P. Bézier en Citroën y Renault, respectivamente). La correspondiente teoría comenzó a desarrollarse rápidamente, dando lugar hasta bien entrados los años 80, a miles de artículos de investigación y a numerosos libros monográficos sobre el tema; de manera que los splines univariados se han convertido en tema obligado de cualquier libro o curso de Análisis Numérico genérico.

Pero a partir de los años 80, y hasta nuestros días, el desarrollo en este tema ha venido de la mano de los splines multivariados. De hecho, en la actualidad, todo tipo de splines bivariados y trivariados están siendo empleados extensamente en el diseño de superficies de automóviles, aviones, barcos y numerosos productos y piezas industriales. Pero no sólo son ampliamente utilizados en plantas de fabricación y diseño; por ejemplo, en el campo de la exploración petrolífera, numerosos datos acerca de las distintas zonas con pizarra, arcilla y demás sedimentos, son obtenidos mediante métodos de prospección geofísica y posteriormente utilizados para reconstruir los



contornos de las correspondientes capas de material, tan útiles para predecir la localización de los pozos de petróleo. Pero las aplicaciones no son menos numerosas en el campo de la medicina, en el estudio de movimientos tectónicos y en las predicciones meteorológicas, entre otras. En todos estos casos la localización de las correspondientes isocurvas e isosuperficies a partir de mediciones de temperatura, potenciales electro-magnéticos, concentraciones químicas, etc. resulta de vital importancia para la correcta visualización y descripción de los fenómenos estudiados.

Por otro lado, numerosos matemáticos, físicos e ingenieros emplean diversos splines multivariados (particularmente de tipo Elementos Finitos), sobre triangulaciones de dominios poligonales, para la resolución numérica aproximada de diversas Ecuaciones en Derivadas Parciales (E.D.P.'s) que surgen en casi todos los campos de la Ciencia y la Tecnología.

No es de extrañar que, en estos años pasados, bastantes métodos variacionales aplicados al diseño geométrico computacional (Computer Aided Geometric Design and Advanced Manufacturing o simplemente C.A.G.D.-C.A.M.) y a diversas Ciencias de la Tierra (Geología, Geodinámica, etc.) hayan recibido una atención considerable. Esto ha sido debido fundamentalmente a su eficiencia en la construcción y diseño de curvas y superficies que se ajusten a determinados datos y que cumplan ciertas condiciones de diseño. La idea básica en la que se basan dichos métodos es la de minimizar cierto funcional, que normalmente contiene al menos dos términos: uno que mide cómo de bien la curva o superficie que se desea construir se ajusta o aproxima a cierto conjunto de datos, mientras que los términos restantes controlan el grado de regularidad o "buena forma" de la misma. Así pues, basándose principalmente en consideraciones físicas (como por ejemplo energía de estiramiento, de flexión, etc.) o entidades de tipo geométrico (como por ejemplo la longitud o curvatura de una curva, el área de una superficie, etc.) un amplio abanico de funcionales ha sido propuesto (consúltese por ejemplo [23, 31, 37, 38] y las referencias allí incluidas).

### 3. Notación y preliminares

En lo que sigue,  $\mathbb{P}_n[x, y]$  denotará el espacio de polinomios bivariados de grado total no superior a  $n$  y  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$  denotará un espacio normado genérico (consultar A.1 y A.5 en el Apéndice para ver las correspondientes definiciones).

A continuación introducimos también algunas definiciones y resultados específicos que serán usados a lo largo de la memoria. Otras definiciones y resultados más básicos o conocidos o muy técnicos y específicos se pueden

consultar en el Apéndice de esta memoria, como por ejemplo el concepto genérico de triangulación (ver la Definición A.7.1 en dicho Apéndice).

A lo largo de esta memoria, y salvo que se indique lo contrario,  $D \subset \mathbb{R}^2$  denotará un dominio (abierto no vacío y conexo) acotado del plano, de tipo poligonal (su frontera viene dada por segmentos sucesivos).

**Definición 3.1** *Una triangulación uniforme de tipo  $\Delta^1$  de  $\overline{D}$  es una triangulación inducida por traslaciones, fijas y de igual magnitud en cada una de las dos direcciones, de dos rectas perpendiculares del plano, junto con diagonales, todas en un mismo sentido, de cada uno de los rectángulos que se forman para generar triángulos que siguen un mismo patrón en toda su extensión.*

**Observación 3.2** *Más concretamente, si nos restringimos a un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados  $D \equiv [x_0, x_{l+1}] \times [y_0, y_{m+1}]$ , según [41] (en la Definición 4.37), una triangulación uniforme de tipo  $\Delta^1$  es una triangulación inducida por particiones uniformes de ambos intervalos*

$$x_i = x_0 + i \frac{x_{l+1} - x_0}{l+1}, \quad i = 0, 1, \dots, l+1$$

e

$$y_j = y_0 + j \frac{y_{m+1} - y_0}{m+1}, \quad j = 0, 1, \dots, m+1$$

que darán lugar a los subrectángulos

$$R_{i,j} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

que posteriormente se dividen por la mitad, a partir de diagonales en el mismo sentido (en [41] se consideran diagonales con pendiente positiva, aunque nosotros estamos considerando las de pendiente negativa, tal y cómo se muestra en la Figura 1).

**Definición 3.3** *Dado  $\alpha \geq 1$ , una  $\alpha$ -triangulación de  $\overline{D}$ , que notaremos  $\mathcal{T}$ , es una triangulación que satisface la condición*

$$1 \leq \frac{R_T}{2r_T} \leq \alpha$$

para cada triángulo  $T \in \mathcal{T}$ , siendo  $R_T$  y  $r_T$  los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita en  $T$ , respectivamente (ver [51]).

**Definición 3.4** *La subtriangulación de Powell-Sabin,  $\mathcal{T}^{PS}$ , asociada a la  $\alpha$ -triangulación  $\mathcal{T}$ , se obtiene uniendo el centro  $O_T$  de la circunferencia inscrita en cada triángulo interior  $T \in \mathcal{T}$  a los vértices de  $T$  y a los centros  $O_{T'}$  de*

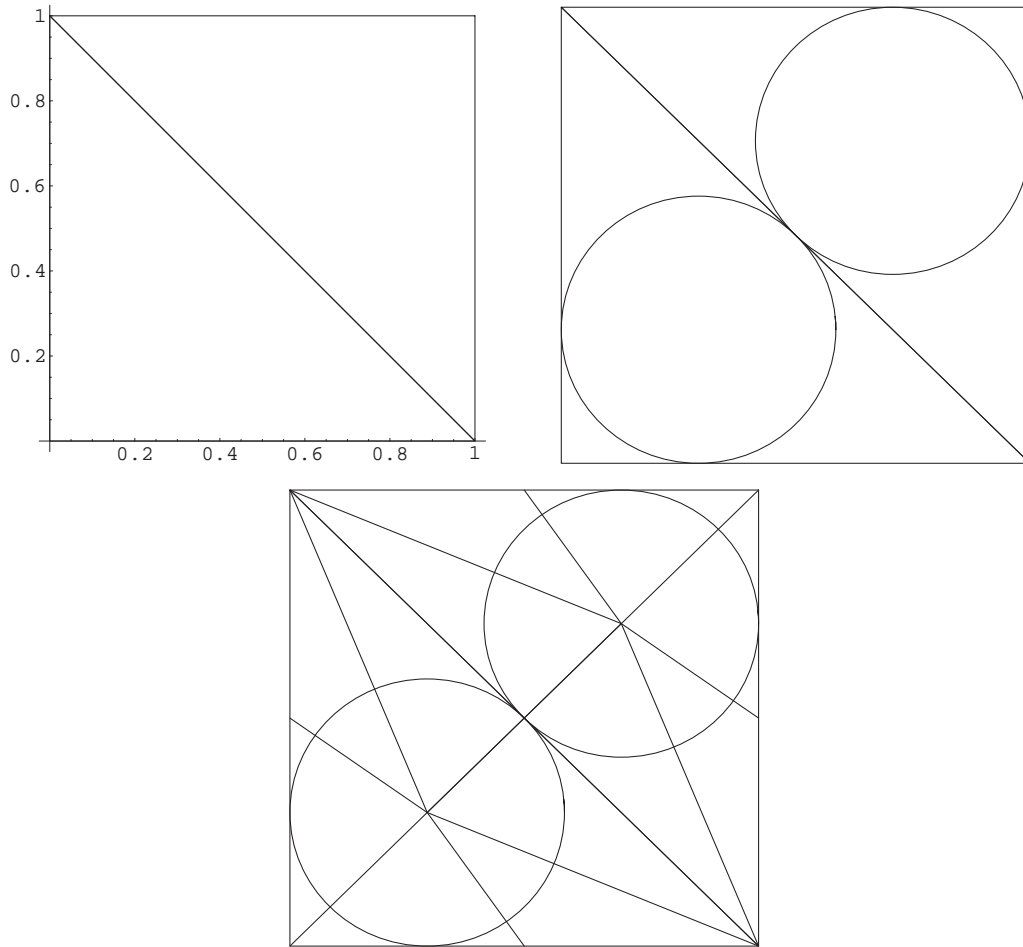


Figura 1:  $\Delta^1$ -triangulación uniforme y su triangulación de Powell-Sabin asociada.

las circunferencias inscritas en los triángulos adyacentes  $T' \in \mathcal{T}$ . En caso de que  $T$  tenga un lado sobre la frontera de  $D$ , entonces el punto  $O_T$  se unirá al punto medio de este lado, a los vértices de  $T$  y a los centros  $O_{T'}$  de las demás circunferencias inscritas dentro de los demás triángulos adyacentes  $T' \in \mathcal{T}$ ; ver figuras adjuntas 1 y 2 en el caso de una  $\Delta^1$ -triangulación trivial y de una  $\alpha$ -triangulación genérica, respectivamente.

De hecho, estas triangulaciones de tipo Powell-Sabin serán el marco necesario para la definición del correspondiente elemento finito de Powell-Sabin (consúltese la Sección A.9 en el Apéndice), perteneciente al grupo de E.F. denominados macroelementos, ya que se construye a partir de un esquema de interpolación a partir de otros triángulos más pequeños. En este caso se

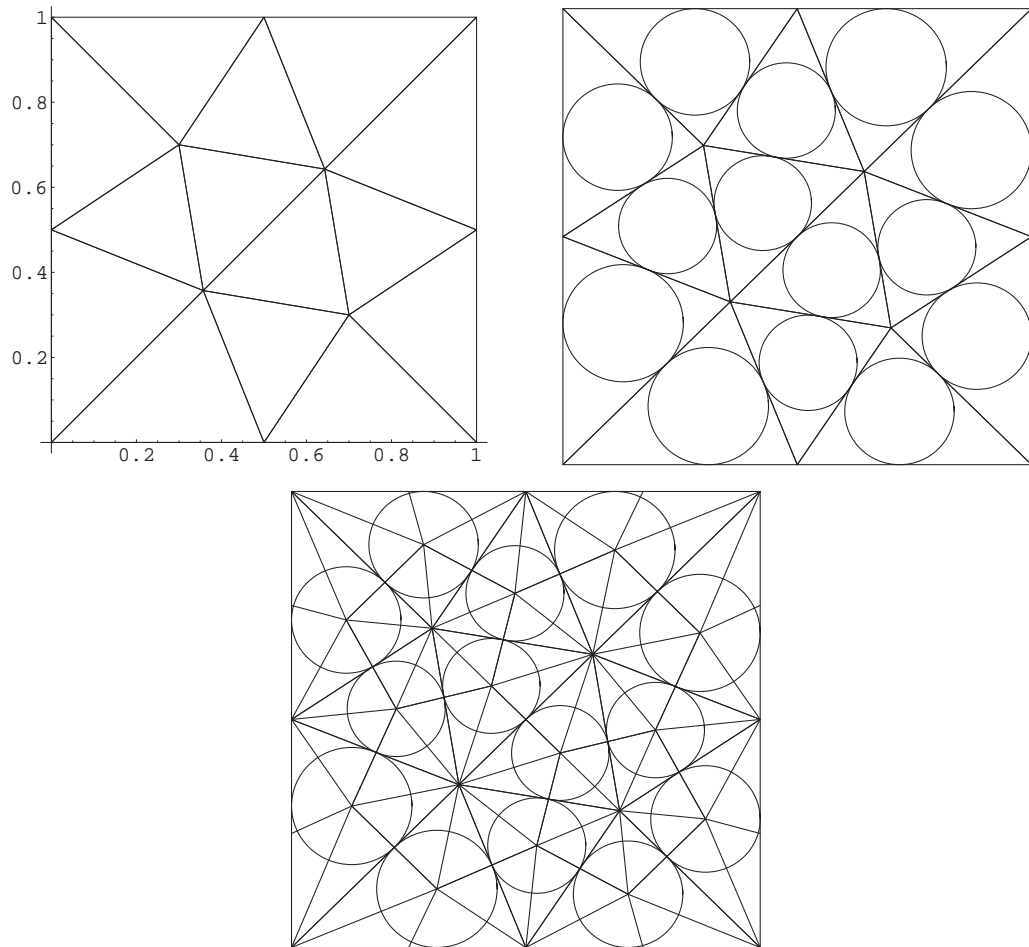


Figura 2:  $\alpha$ -triangulación no uniforme y su triangulación de Powell-Sabin asociada.

elige un punto interior, normalmente el incentro (o centro de la circunferencia inscrita), de cada uno de los triángulos de la triangulación dada, para posteriormente subdividirlos en seis nuevos subtriángulos y poder obtener así la correspondiente subtriangulación de Powell-Sabin, tal y cómo se ha indicado en la Definición 3.4.

Sea un dominio poligonal  $D \subset \mathbb{R}^2$ , y consideremos el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ , cuyos elementos son (clases de) funciones  $u$  definidas en  $D$  tales que ellas mismas y sus derivadas parciales (en el sentido de las distribuciones)  $\partial^\beta u$  pertenecen al espacio de funciones de cuadrado integrable  $\mathcal{L}^2(D)$  (ver Definición A.3.1 en el Apéndice), con  $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$  y  $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leq r+1$ .

Para cada subconjunto  $X \subseteq D$ , consideraremos el espacio  $\mathcal{H}^{r+1}(X)$  y la norma usual correspondiente

$$\|u\| = \left( \sum_{|\beta| \leq r+1} \int_X \partial^\beta u(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

las semi-normas (aunque el caso  $m = 0$  también se trata de una norma en el espacio  $\mathcal{L}^2(X)$ )

$$|u|_m = \left( \sum_{|\beta|=m} \int_X \partial^\beta u(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m = 0, 1, \dots, r+1, \quad (2)$$

y sus semi-productos escalares asociados

$$(u, v)_m = \sum_{|\beta|=m} \int_X \partial^\beta u(\mathbf{x}) \partial^\beta v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad m = 0, 1, \dots, r+1. \quad (3)$$

Consideremos también una  $\alpha$ -triangulación  $\mathcal{T}$ , (usualmente uniforme de tipo  $\Delta^1$ , pero también veremos algunos ejemplos con triangulaciones no uniformes) de  $\bar{D}$ , y su subtriangulación de Powell-Sabin asociada  $\mathcal{T}^{PS}$  (consultar la Definición 3.4 en esta misma sección).

Sea

$$n \equiv n(r) := \begin{cases} 2r+1 & \text{para } r \text{ par} \\ 2r & \text{para } r \text{ impar} \end{cases} \quad (4)$$

y denotemos  $[x]$  a la parte entera de  $x$ .

Sea también el conjunto

$$\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}) = \{ \sigma \in \mathcal{C}^r(D) / \sigma|_T \in \mathcal{S}_n^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1, r + \lceil \frac{r}{2} \rceil}(T, \mathcal{T}^{PS}), \forall T \in \mathcal{T} \}, \quad (5)$$

donde

$$\mathcal{S}_n^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1, r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (T, \mathcal{T}^{PS}) = \left\{ \begin{array}{l} \sigma \in \mathcal{C}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} (T) / \\ \sigma|_{T'} \in \mathbb{P}_n(T') \quad \forall T' \subset T \text{ con } T' \in \mathcal{T}^{PS} \\ \text{y } \sigma \text{ es de clase } \mathcal{C}^{r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \text{ en todos los v\u00e9rtices de } T \end{array} \right\}$$

y  $\mathbb{P}_n(T')$  denota el espacio de los polinomios bivariados de grado total como m\u00e1ximo  $n$  restringidos al tri\u00e1ngulo  $T'$ ; es decir,

$$\mathbb{P}_n(T') \equiv \{p|_{T'}, p \in \mathbb{P}_n[x, y]\}.$$

Est\u00e1 demostrado (consultar [39]) que dados los valores de una funci\u00f3n  $f \in \mathcal{C}^m(D)$  ( $m \geq r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ ) y los de sus derivadas parciales hasta el orden  $r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$  en todos los v\u00e9rtices de la triangulaci\u00f3n  $\mathcal{T}$ , existe una \u00fanica funci\u00f3n

$$\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (D, \mathcal{T}) \quad (6)$$

tal que los valores de  $\sigma$  y los de sus derivadas parciales hasta orden  $r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$  coinciden con los de  $f$  en todos los v\u00e9rtices de la triangulaci\u00f3n  $\mathcal{T}$ .

**Observaci\u00f3n 3.5** *N\u00f3tese adem\u00e1s que  $\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (D, \mathcal{T})$  si y s\u00f3lo si se verifican las siguientes condiciones*

$$\begin{array}{l} \sigma \in \mathcal{C}^r(D), \\ \sigma|_T \in \mathcal{C}^{\lfloor \frac{n(r)-1}{2} \rfloor + 1} (T) \text{ para todo } T \in \mathcal{T}, \\ \sigma|_{T'} \in \mathbb{P}_n(T') \text{ para todo } T' \in \mathcal{T}^{PS} \\ \text{y adem\u00e1s } \sigma \text{ es de clase } \mathcal{C}^{r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \text{ en todos los v\u00e9rtices de } \mathcal{T}. \end{array}$$

**Observaci\u00f3n 3.6** *En el caso  $r = 1$  se deduce de (4) que  $n(r) = 2$  y bastar\u00e1 con tener los valores de la funci\u00f3n  $f$  y los de sus derivadas parciales de primer orden en todos los v\u00e9rtices de la triangulaci\u00f3n  $\mathcal{T}$  para poder encontrar un \u00fanico  $\sigma \in \mathcal{S}_2^{1,1} (D, \mathcal{T})$  tal que los valores de  $\sigma$  y los de sus derivadas parciales de primer orden en los v\u00e9rtices de  $\mathcal{T}$  coincidan con los de  $f$ .*

## 4. Planteamiento general

El objetivo principal de esta memoria es el uso de espacios de aproximaci\u00f3n obtenidos a partir del elemento finito de Powell-Sabin para aproximar un conjunto de datos lagrangianos (con o sin ruido). Esto se llevar\u00e1 a cabo mediante superficies spline bivariadas de clase  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) sobre un dominio poligonal del plano, sobre el que se construir\u00e1n  $\Delta^1$ - triangulaciones uniformes,

y en algún caso también  $\alpha$ -triangulaciones no uniformes más genéricas. Estas superficies spline deberán minimizar un cierto “funcional energía”, en el que aparecerá una combinación lineal de las semi-normas usuales en el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ .

Así pues, para cada  $s \in \mathbb{N}^* \equiv \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , sean dados un conjunto finito de puntos  $D^s$  en  $D$ , y una función  $g \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$ , junto con el denominado *operador de evaluación* (notando  $k = k(s) = \text{card}(D^s)$ )

$$\begin{aligned} \rho^s : \mathcal{H}^{r+1}(D) &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ v &\longmapsto \rho^s(v) = \{v(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s} \end{aligned}$$

que permite considerar el vector de valores mediante dicha función  $Z^s \equiv \rho^s(g) = \{g(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s}$ . A su vez  $\langle \cdot \rangle_k$  (respect.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ ) representa la norma euclídea usual (respect. el producto euclídeo escalar usual) en  $\mathbb{R}^k$ . Supondremos también que se verifica la condición (1.2.2) para cualquier  $s \in \mathbb{N}^*$ .

Dado  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{r+1})$ , donde  $\tau_i \in [0, +\infty[$  para todo  $i = 1, \dots, r$  y  $\tau_{r+1} \in ]0, +\infty[$ , buscamos una superficie spline de clase  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) que aproxime los puntos  $\{(\mathbf{a}, g(\mathbf{a}))\}_{\mathbf{a} \in D^s} \subset \mathbb{R}^3$  y al mismo tiempo minimice el funcional energía definido sobre  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  por

$$\mathcal{J}^s(v) = \langle \rho^s(v - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |v|_m^2. \quad (7)$$

Nótese que el primer sumando mide cómo de bien  $v$  aproxima los valores  $Z^s \equiv \{g(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s}$  sobre el conjunto de puntos  $D^s$  (en el sentido de los mínimos cuadrados discreto), mientras que el resto (englobado en la sumatoria) representa cierta “condición de mínima energía”, mediante el empleo de las semi-normas  $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_{r+1}$ , ponderadas por los parámetros  $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$ , respectivamente.

De esta forma, los valores de dichos parámetros  $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$ , indicarán el peso dado a cada una de estas seminormas, con el objeto de disponer de cierto control sobre la “buena forma” (“fairness”, en inglés) de la superficie obtenida. Recuérdese además que algunas de las seminormas empleadas tienen ciertas interpretaciones geométricas, como por ejemplo  $|\cdot|_1$  y  $|\cdot|_2$ , que pueden verse respectivamente como estimaciones simplificadas del área y de la “energía de doblez” de la superficie.

El problema de minimización que queremos resolver es el siguiente:

**Problema 4.1** *Dada una  $\alpha$ -triangulación  $\mathcal{T}$  uniforme de tipo  $\Delta^1$  de  $\bar{D}$  y su subtriangulación de Powell-Sabin asociada  $\mathcal{T}^{PS}$ , buscamos un elemento  $\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  que verifique*

$$\mathcal{J}^s(\sigma) \leq \mathcal{J}^s(v), \quad \forall v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}). \quad (8)$$

Se prueba el Teorema de caracterización 1.2.2 que asegura que el problema (8) tiene una única solución, que además es también solución única del siguiente problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T}) \text{ que verifique} \\ \langle \rho^s(\sigma), \rho^s(v) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m(\sigma, v)_m = \langle Z^s, \rho^s(v) \rangle_k \quad \forall v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T}). \end{array} \right. \quad (9)$$

**Definición 4.2** *A la solución del problema (9) la denominaremos PS-spline de suavizado  $\mathcal{C}^r$  relativo a  $D^s$ ,  $Z^s$  y  $\tau$  y la notaremos  $\sigma \equiv \sigma_\tau^s$ .*

Así pues, si denotamos ahora  $N = \dim(\mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T}))$ ,  $\{v_1, \dots, v_N\}$  es una base con soporte local del espacio de elementos finitos  $\mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T})$  y expresamos la única solución de los problemas (8) o (9) como combinación lineal de dicha base  $\sigma = \sum_{i=1}^N \beta_i v_i$ , entonces la resolución del problema (9) da lugar al sistema lineal

$$C X = B, \quad (10)$$

donde

$$\begin{aligned} B &= \left( (\langle Z^s, \rho^s(v_i) \rangle_k)_{i=1}^N \right)^\top, \quad X \equiv \beta = \left( (\beta_i)_{i=1}^N \right)^\top, \\ C &= \left( \langle \rho^s(v_i), \rho^s(v_j) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m(v_i, v_j)_m \right)_{i,j=1}^N, \end{aligned} \quad (11)$$

teniéndose a su vez que la matriz del sistema  $C$  es una matriz de tipo banda, simétrica y definida positiva, como se demuestra en el Lema 1.2.5.

En la Sección 1.4 se trata la cuestión de la estimación de los valores óptimos de los parámetros de suavizado  $\tau$  que minimizan el error  $\|\sigma_\tau^s - g\|_0^2$ : para ello se busca el vector  $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_i)_{i=1}^N$  que minimice la expresión (siendo  $\|\cdot\|_0 \equiv |\cdot|_0$  la seminorma que es una norma en  $\mathcal{L}^2$ , ver (2))

$$R(\beta_1, \dots, \beta_N) = \left\| \sum_{i=1}^N \beta_i v_i - g \right\|_0^2.$$

Por otra parte, en el caso de datos con ruido, consideramos el vector de datos  $Z^s = \rho^s(g) + \vartheta^s$ , siendo  $\vartheta^s$  un ruido blanco para todo  $s \in \mathbb{N}^*$  (es decir,  $\vartheta^s$  es un vector Gaussiano de variables aleatorias independientes con media cero y desviación típica  $\mu$ ) y denotaremos  $\tilde{\sigma}_\tau^s$  al PS-spline de suavizado  $\mathcal{C}^r$  relativo a  $D^s$ ,  $Z^s$  y  $\tau$ ;  $\sigma_\tau^s$  al PS-spline de suavizado  $\mathcal{C}^r$  relativo a  $D^s$ ,  $\rho^s(g)$  y  $\tau$ , y  $e_\tau^s$  al PS-spline de suavizado  $\mathcal{C}^r$  relativo a  $D^s$ ,  $\vartheta^s$  y  $\tau$ , con  $\vartheta^s = (\vartheta_i^s)_{i=1}^k$ .



Para establecer el Teorema de convergencia 2.3.3, correspondiente a este caso de datos con ruido, haremos uso del resultado probabilístico enunciado en la Proposición 2.3.1, cuya demostración puede ser encontrada en [3], y para determinar los “valores óptimos” de los parámetros  $\tau$  involucrados en el funcional  $\mathcal{J}^s(v)$  en este caso, consideramos la técnica conocida como de *validación cruzada*, estudiada en varios trabajos de Wahba y Craven ([20] y [59]), Cox ([19]) y Utreras ([56]).

A grandes rasgos, fijado el valor  $k \equiv k(s)$  y dado el conjunto  $D^s = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^k$ , así como el vector  $Z^s = \rho^s(g) + \vartheta^s$ , un criterio para determinar los valores óptimos de los parámetros  $\tau$  puede ser elegir aquellos que minimicen la *función del error cuadrático medio*, definida como el error promedio cometido al aproximar los datos exactos  $\rho^s(g)$  por los valores tomados del correspondiente *PS-spline* sobre el conjunto  $D^s$ ; es decir,

$$\mathcal{R}(\tau) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\tilde{\sigma}_\tau^s(\mathbf{a}_i) - g(\mathbf{a}_i))^2.$$

Sin embargo, la función  $\mathcal{R}$  involucra a su vez a la función  $g$ , que puede ser desconocida y, por lo tanto,  $\mathcal{R}$  podría no resultar práctica a la hora de obtener los parámetros  $\tau$  óptimos. La idea de la validación cruzada consiste en reemplazar dicha función  $\mathcal{R}(\tau)$  por otra función  $\mathcal{V}(\tau)$  de manera que su mínimo esté próximo al de  $\mathcal{R}(\tau)$  a medida que el número  $k$  de datos aumente.

Más precisamente, es deseable que si  $\{\tilde{\tau}_k\}_{k=1}^\infty$  es la sucesión de minimizadores de  $E\mathcal{V}$ , donde  $E$  denota la esperanza matemática aplicada a la correspondiente variable, entonces

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{E\mathcal{R}(\tilde{\tau}_k)}{\min_\tau E\mathcal{R}(\tau)} = 1.$$

Siguiendo el mismo patrón que el desarrollado en [20] o [59], obtenemos la función generalizada de validación cruzada

$$\mathcal{V}(\tau) = \frac{\frac{1}{k} \langle (Id - \mathcal{I}^s(\tau)) Z^s \rangle_k^2}{\left( \frac{1}{k} Tr(Id - \mathcal{I}^s(\tau)) \right)^2}.$$

donde aparece  $\mathcal{I}^s(\tau)$ , la denominada *matriz de influencia* del problema (ver Definición 2.2.4 en el Capítulo 2).

En las Secciones 1.5 y 2.5 se presentan numerosos ejemplos numéricos y gráficos, tanto con datos sin ruido como con ruido, en el caso de triangulaciones uniformes de tipo  $\Delta^1$  y también con  $\alpha$ -triangulaciones no uniformes. En estos ejemplos se han aproximado las conocidas funciones test de Franke y

de Nielson, y las estimaciones de error han sido calculadas usando la siguiente fórmula de error relativo

$$E_{rel} = \left( \frac{\sum_{j=1}^{2500} (g(\mathbf{b}_j) - \sigma_\tau^s(\mathbf{b}_j))^2}{\sum_{j=1}^{2500} g(\mathbf{b}_j)^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde  $\{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^{2500}$  son puntos arbitrarios en  $D$ ,  $g$  es la función test empleada en cada caso y  $\sigma_\tau^s$  es el  $PS$ -spline de clase  $\mathcal{C}^r$  obtenido, relativo a  $D^s = \{\mathbf{a}_i^s\}_{i=1}^k$ ,  $Z^s = \{g(\mathbf{a}_i^s) + \vartheta_i^s\}_{i=1}^k$  y  $\tau$ , y  $\vartheta^s$  es un vector de ruido con media 0 y desviación típica  $\mu$  (que no estará presente en el caso de datos sin ruido).

En el Capítulo 3 introducimos un análisis multirresolución para obtener una superficie spline de clase  $\mathcal{C}^r$  que aproxime un conjunto de datos lagrangiano en cierto tipo de dominio del plano  $D \subset \mathbb{R}^2$  que admita triangulaciones provenientes de una  $\Delta^1$ -triangulación (aunque en las aplicaciones nos restringiremos a dominios cuadrados), al mismo tiempo que minimiza un “funcional energía” del tipo (7).

El espacio de minimización será el de los splines construidos a partir de las subtriangulaciones de Powell-Sabin asociadas a diferentes triangulaciones uniformes de  $\bar{D}$  de tipo  $\Delta^1$ , de tal manera que los espacios de aproximación spline asociados a niveles de resolución consecutivos estén anidados (ver Sección 3.2).

Con objeto de mostrar la eficacia de los algoritmos desarrollados, en la Sección 3.5 consideramos dos aplicaciones concretas de esta técnica: en la primera, se plantea la reducción del ruido que contiene una superficie dada, mientras que en la segunda aplicación se pretende localizar el subdominio en el que la energía de una superficie se concentra espacialmente.

Finalmente, en el Capítulo 4, presentamos varios métodos para rellenar un agujero de una superficie 3D explícita, dada mediante una función diferenciable definida sobre  $\bar{D} - H$ , siendo  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio poligonal y  $H$  un subconjunto no vacío de  $D$ . La idea es definir otra función  $f^*$  (*función reconstrucción*) que “respetando” la forma de  $f$  (aunque no necesariamente coincidiendo con ella) allá donde  $f$  está definida, recubra el agujero de  $f$  sobre  $H$  de forma “coherente” con la gráfica de  $f$ .

Realizamos dicho rellenado de tres formas diferentes: de manera *discontinua*, con *continuidad* o con *clase*  $\mathcal{C}^1$ . En todos los casos consideramos una  $\alpha$ -triangulación  $\mathcal{T}$  de  $\bar{D}$ , a partir de la cual definimos otra región poligonal  $H^*$  que incluya a  $H$  y sobre la que aplicaremos los métodos de rellenado.

Según el caso de que se trate, dicho recubrimiento tendrá ciertas particularidades específicas:

- En el caso discontinuo, la función  $f^*$  considerada para rellenar el agujero se define yuxtaponiendo la función original  $f$  fuera de  $H^*$  con un

spline polinomial bivariado de tipo Powell-Sabin construido sobre  $H^*$ . Dicho spline se obtiene como solución de un problema de minimización de un funcional de energía definido de forma similar a los de los capítulos anteriores: una combinación lineal de las seminormas usuales en el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^2(H^*)$ , junto a un término que controla la aproximación (en el sentido de los mínimos cuadrados discreto) de los valores de  $f$  y los de sus derivadas normales en los puntos medios de las aristas de la triangulación  $\mathcal{T}$  que se encuentren sobre la frontera de  $H^*$  (consultar la Sección 4.3 para ver los detalles).

- En el caso continuo, la reconstrucción no se hará por simple yuxtaposición de la gráfica de  $f$  junto con la de cierto spline bivariado de tipo Powell-Sabin, sino que, en este caso, tenemos previamente que modificar ligeramente  $f$  fuera de  $H^*$ , de manera que la sustituiremos por un spline bivariado aproximante  $s_f$  que minimice asimismo un funcional similar a los considerados en los capítulos anteriores. A continuación, reconstruimos  $f$  dentro de  $H^*$  mediante un spline  $\sigma_{s_f}$  tipo Powell-Sabin, pero para poder asegurar la continuidad de la reconstrucción  $f^*$  tendremos que forzar que los valores de  $\sigma_{s_f}$  y  $s_f$ , así como los de sus derivadas tangenciales, coincidan en ciertos puntos sobre los lados de la frontera poligonal de  $H^*$  (consultar la Sección 4.4 para ver los detalles).
- Finalmente, para obtener una reconstrucción que globalmente sea de clase  $\mathcal{C}^1$ , operaremos como en el caso anterior, imponiendo asimismo ciertas condiciones de interpolación entre  $s_f$  y  $\sigma_{s_f}$  para que la unión de ambas gráficas sea suave (consultar la Sección 4.5 para ver los detalles).

Las conclusiones fundamentales obtenidas en este trabajo de investigación pueden ser consultadas en la Sección *Conclusiones-En castellano*, justo antes del Apéndice.



# English's summary

## 1. Presentation

In this work we present several contributions and applications in the field of Surface Approximations by using bivariate splines of minimal energy over triangulations of Powell-Sabin type.

We study approximations of class  $C^r$  ( $r \geq 1$ ), over adequate uniform triangulations (the so called  $\Delta^1$ -triangulations), using data with or without noise, obtaining rigorous results of convergence in both cases; these results have been published in [5, 6, 8].

When  $r = 1$  it is possible to extend these results to the case of more generic non-uniform triangulations (called  $\alpha$ -triangulations).

For the estimation of the smoothing parameters involved in the functional, in order to determine the “optimum values”, we use the so called *cross-validation technique* introduced by Wahba and Craven in some previous works ([20] and [59]), Cox [19] and Utreras [56]. The related results obtained have also been published in [7].

All this material has been included here between Chapters 1 and 2. As test functions, to check the techniques and algorithms developed, we have mainly taken the well known Franke's and Nielson's functions.

Afterwards, in Chapter 3, we use a multiresolution procedure to develop appropriate algorithms for noise reduction in this context of minimal energy surfaces, and to locate this “energy” in the case of functions with zones of important concentration inside the domain of definition.

For the ulterior practical application of these techniques, and to see their effectiveness, we have also appropriately chosen some conoidal functions with this characteristic property. This material is also in process of publication, because it has been accepted in [27].

Finally, in Chapter 4, we treat extensively the problem of filling holes in an explicit surface, defined by a regular function of two variables, which is unknown in some region of its polygonal domain. This filling might be done in three different ways: in a discontinuous manner, continuously, or with class

$\mathcal{C}^1$ . The idea in all these cases will be to define a new reconstructed function, which keeps the original values as much as possible and which recover the hole in an homogeneous and coherent way.

This last part has been already the object of the publication [9], but we continue developing the parametric surfaces case.

## 2. Background and historical considerations

From the previous developments for the univariate splines that took place during the sixties, mainly motivated by the applications in the automotive and aeronautic industry, it is not very surprising that a great part of them took place at the European and American laboratories of important enterprises in these areas (for instance, those made by P. de Casteljaou and P. Bézier in Citroën and Renault, respectively).

The corresponding theory and the computational advances have been rapidly developed, producing hundreds of research articles and numerous books and monographs on this subject. Now, it is clear that it is an important and obligated topic of any Numerical Analysis standard book or course.

But, from the eighties to our days, the developments in this topic have been focused on the multivariate case. In fact, a great variety of bivariate and trivariate splines have been extensively used for the design and manufacturing of surfaces of cars, planes, ships and all sorts of industrial pieces and products. But not only they are used in the design and manufacturing plants; also in the petroleum exploration for example, the geophysicists, by prospections, they obtain numerous data for the zones with distinct sediments that are used afterwards to recover the corresponding contours of the material layers. This information is essential to predict the location of the petroleum sources. But the applications are not less numerous in various medical areas, and in the study of tectonic movements and meteorological predictions, among others. In all these cases, the location of the corresponding iso-curves and iso-surfaces from the data about temperature, electro-magnetic potentials, chemical concentrations, etc., is of crucial importance for the correct visualization and description of the studied phenomena.

Also, many mathematicians, physicists and engineers, apply various multivariate splines (mainly of finite element type) over triangulations of polygonal domains, for the numerical resolution of several Partial Differential Equations (P.D.E.'s) that arise in almost each area of Science and Technology.

Therefore it is not rare that for many years several variational methods applied to the Computer Aided Geometric Design and Advanced Manufacturing (C.A.G.D.-C.A.M.) and to the Earth Sciences (Geology, Geodynamics,

etc.) have received a great attention, mainly due to their effectiveness in the construction of curves and surfaces that adjust well many data and satisfy some design constraints.

The basic idea in all these methods is to consider some functional to be minimized, that normally contains two type of terms: one measuring how well the curve or surface to be constructed adjust the set of given data, and the others that control the regularity or fairness of it.

In this way, a great number of different functionals, taking into account different physical considerations (stretching or flexion energy), or geometric features (like curve length and curvature for curves or area for surfaces), may be taken; see for example [23, 31, 37, 38] and the references therein.

### 3. Notation and preliminaries

Let  $\mathbb{P}_n[x, y]$  denote the vector space of bivariate polynomials of total degree at most  $n$  and  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$  a generic normed space (see for example A.1 and A.5 in Appendix to see these definitions).

We also introduce here some other definitions and specific results that will be used along this Ph. D. thesis. Many other basic definitions and generic results, together with some other more technical can be consulted in the Appendix, like for example the concept of triangulation (see the definition A.7.1 in this Appendix).

**Definition 3.1** *A  $\Delta^1$ -type uniform triangulation of the domain  $D$  is a triangulation obtained by fixed translations in both directions, of orthogonal directions in the plane, together with the diagonals in all the rectangles to form triangles that obey the same pattern in all the extension of the triangulation.*

**Remark 3.2** *More specifically, if we take a rectangle  $D \equiv [x_0, x_{l+1}] \times [y_0, y_{m+1}]$ , with sides parallel to the axes in the  $Oxy$  plane, [41] (in the definition 4.37) consider a  $\Delta^1$ -type uniform triangulation of it as a triangulation induced by uniform partitions of both intervals*

$$x_i = x_0 + i \frac{x_{l+1} - x_0}{l + 1}, \quad i = 0, 1, \dots, l + 1$$

and

$$y_j = y_0 + j \frac{y_{m+1} - y_0}{m + 1}, \quad j = 0, 1, \dots, m + 1$$

that generate the rectangles

$$R_{i,j} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

that will be halved, using diagonals in the same sense (in [41] the diagonals with positive slope are taken, but we are considering just the ones with opposite sign, as it is shown in Figure 1).

**Definition 3.3** Given  $\alpha \geq 1$ , an  $\alpha$ -triangulation of the polygonal domain  $D$ , that we note  $\mathcal{T}$ , will be a triangulation of this domain that satisfies the condition

$$1 \leq \frac{R_T}{2r_T} \leq \alpha$$

for every triangle  $T \in \mathcal{T}$ ; where  $R_T$  and  $r_T$  are the radii of the circumscribed and inscribed circles of  $T$ , respectively (see [51]).

**Definition 3.4** The associated Powell-Sabin triangulation  $\mathcal{T}^{PS}$  is obtained by joining the centre  $O_T$  of the inscribed circle of each interior  $T \in \mathcal{T}$  to the vertices of  $T$  and to the centres  $O_{T'}$  of the inscribed circles of the neighbouring triangles  $T' \in \mathcal{T}$ . When  $T$  has a side that is on the boundary of  $D$ , the point  $O_T$  is joined to the mid-point of this side, to the vertices of  $T$  and to the centres  $O_{T'}$  of the inscribed circles of the neighbouring triangles  $T' \in \mathcal{T}$  (see the Figures 1 in the case of a trivial  $\Delta^1$ -triangulation and the Figure 2 for a generic  $\alpha$ -triangulation).

In fact, the Powell-Sabin Finite Element belongs to a group of F.E. denominated FE-macroelements, that are constructed with an interpolation procedure that uses other little sub-triangles. In this case, we have to choose an interior point (normally the incenter or the barycenter) of each one of the triangles of the given triangulation, that are subdivided into six new sub-triangles to obtain the corresponding Powell-Sabin sub-triangulation, as it is shown in the Definition 3.4.

For a given domain  $D \subset \mathbb{R}^2$  in the plane, we consider the so called Sobolev space  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ , whose elements are functions (or even classes of functions)  $u$  defined in  $D$  such that they, and their partial derivatives (in the distribution sense)  $\partial^\beta u$ , belong to the space of square integrable functions (see Definition A.3.1 in the Appendix)  $\mathcal{L}^2(D)$ , with  $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$  and  $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leq r + 1$ .

For any subset  $X \subseteq D$  we consider the usual norm in the spaces  $\mathcal{H}^{r+1}(X)$

$$\|u\| = \left( \sum_{|\beta| \leq r+1} \int_X \partial^\beta u(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

the semi-norms (although for  $m = 0$ , in fact we have a norm in  $\mathcal{L}^2(X)$ )



$$|u|_m = \left( \sum_{|\beta|=m} \int_X \partial^\beta u(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m = 0, 1, \dots, r+1 \quad (2)$$

and their corresponding scalar semi-products

$$(u, v)_m = \sum_{|\beta|=m} \int_X \partial^\beta u(\mathbf{x}) \partial^\beta v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad m = 0, 1, \dots, r+1. \quad (3)$$

We also consider an  $\alpha$ -triangulation  $\mathcal{T}$  (usually uniform of  $\Delta^1$ -type, but we also take some non-uniform  $\alpha$ -triangulations in some of the examples) of the polygonal domain  $D$ , and  $\mathcal{T}^{PS}$  its associated Powell-Sabin sub-triangulation (see Definition 3.4).

Let

$$n \equiv n(r) := \begin{cases} 2r+1 & \text{for } r \text{ even} \\ 2r & \text{for } r \text{ odd} \end{cases} \quad (4)$$

and denote by  $[x]$  the integer part of  $x$ .

Let also be the set

$$\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}) = \{ \sigma \in \mathcal{C}^r(D) / \sigma|_T \in \mathcal{S}_n^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil+1, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(T, \mathcal{T}^{PS}), \forall T \in \mathcal{T} \}, \quad (5)$$

where

$$\mathcal{S}_n^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil+1, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(T, \mathcal{T}^{PS}) = \left\{ \sigma \in \mathcal{C}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil+1}(T) / \begin{array}{l} \sigma|_{T'} \in \mathbb{P}_n(T') \quad \forall T' \subset T \text{ with } T' \in \mathcal{T}^{PS} \\ \text{and } \sigma \text{ is of class } \mathcal{C}^{r+\lceil \frac{r}{2} \rceil} \text{ at all the vertex of } T \end{array} \right\}$$

and  $\mathbb{P}_n(T')$  stands for the space of bivariate polynomials of total degree at most  $n$  restricted to the triangle  $T'$ ; that is,

$$\mathbb{P}_n(T') \equiv \{ p|_{T'}, p \in \mathbb{P}_n[x, y] \}.$$

It can be shown (see [39]) that there exists a unique function

$$\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}) \quad (6)$$

such that their values and those of their partial derivatives up to order  $r + \lceil \frac{r}{2} \rceil$  coincide with those of  $f \in \mathcal{C}^m(D)$  ( $m \geq r + \lceil \frac{r}{2} \rceil$ ) at all the vertices of the triangulation  $\mathcal{T}$  (see for example [48]).

**Remark 3.5** Note also that  $\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T})$  if and only if the following conditions are fulfilled

$$\begin{aligned} \sigma &\in \mathcal{C}^r(D), \\ \sigma|_T &\in \mathcal{C}^{\lfloor \frac{n(r)-1}{2} \rfloor + 1}(T) \text{ for all } T \in \mathcal{T}, \\ \sigma|_{T'} &\in \mathbb{P}_n(T') \text{ for all } T' \in \mathcal{T}^{PS}, \\ \text{and } \sigma &\text{ is of class } \mathcal{C}^{r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \text{ at all the vertices of } \mathcal{T}. \end{aligned}$$

**Remark 3.6** In the case  $r = 1$  we deduce from (4) that  $n(r) = 2$  and it will suffice to have the values of the function  $f$  and those of their partial derivatives of first order at all the vertices of  $\mathcal{T}$  to find a unique  $\sigma \in \mathcal{S}_2^{1,1}(D, \mathcal{T})$  such that the values of  $\sigma$  and those of their first order partial derivatives at the vertices of  $\mathcal{T}$  will coincide with those of  $f$ .

## 4. General formulation

The main goal of this Ph. D. thesis is the use of approximation spaces obtained from the Powell-Sabin F.E. over uniform  $\Delta^1$ -triangulations, and also over non-uniform  $\alpha$ -triangulations in some cases, to approximate a Lagrangian data set (with or without noise) by using bivariate spline surfaces of class  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) over a polygonal domain in the plane, that minimize a certain “energy functional”, defined by a linear combination of the usual semi-norms in the Sobolev space  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ .

Given, for every  $s \in \mathbb{N}^* \equiv \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , a finite set of points  $D^s$  en  $D$ , and a function  $g \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$ , together with the denominated *evaluation operator*

$$\begin{aligned} \rho^s : \mathcal{H}^{r+1}(D) &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ v &\longmapsto \rho^s(v) = \{v(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s} \end{aligned}$$

that allows us to consider their function values  $Z^s \equiv \rho^s(g) = \{g(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s}$ .

Also  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$  (respect.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ ) represents the usual Euclidean norm (respect. the usual scalar product) in  $\mathbb{R}^k$ , with  $k = k(s) = \text{card}(D^s)$ .

We suppose also that condition (1.2.2) is fulfilled for every  $s \in \mathbb{N}^*$ .

Given  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{r+1})$ , where  $\tau_i \in [0, +\infty[$  for all  $i = 1, \dots, r$  and  $\tau_{r+1} \in ]0, +\infty[$ , we look for a spline surface of class  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) that approximates the points  $\{(\mathbf{a}, g(\mathbf{a}))\}_{\mathbf{a} \in D^s} \subset \mathbb{R}^3$  and, at the same time minimize the energy functional. This energy functional is defined over  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  by

$$\mathcal{J}^s(v) = \langle \rho^s(v - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |v|_m^2. \quad (7)$$

which have a term that measures how well  $v$  approximates the values  $Z^s \equiv \{g(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s}$  over the set of points  $D^s$  (in a least-squares sense), while the rest of the terms (included in the sum sign) represents certain “minimal energy condition”, using the semi-norms  $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_{r+1}$ , weighted by the parameters  $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$ , respectively.

In this way, the values of such parameters  $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$ , indicate the importance given to each one of these seminorms, with the aim of disposing of some control over the fairness (or good shape) of the obtained surface. Remember also that some of these seminorms have some geometric interpretation, like for example  $|\cdot|_1$  and  $|\cdot|_2$  that can be viewed as simplified estimations of the area and folding energy of the surface, respectively.

So, the minimization problem that we wish to solve is the following:

**Problem 4.1** *Given  $\mathcal{T}$ , an uniform  $\alpha$ -triangulation of  $\Delta^1$ -type of  $D$  and its associated Powell-Sabin sub-triangulation  $\mathcal{T}^{PS}$ , we look for an element  $\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  such that*

$$\mathcal{J}^s(\sigma) \leq \mathcal{J}^s(v), \quad \forall v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}). \quad (8)$$

We prove a characterization theorem 1.2.2 that assures that Problem (8) has a unique solution, which is also the unique solution of the following variational problem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Find } \sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}) \text{ such that} \\ \langle \rho^s(\sigma), \rho^s(v) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m (\sigma, v)_m = \langle Z^s, \rho^s(v) \rangle_k, \quad \forall v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}) \end{array} \right. \quad (9)$$

**Definition 4.2** *The corresponding solution of this problem (9) will be called PS-smoothing spline of class  $\mathcal{C}^r$  relative to  $D^s$ ,  $Z^s$  and  $\tau$ .*

Now, let denote  $N = \dim\left(\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})\right)$  and  $\{v_1, \dots, v_N\}$  a basis of functions with local support of the finite element space  $\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  from which we can express the unique solution of both problems (8) and (9) as a linear combination of the members of this base  $\sigma = \sum_{i=1}^N \beta_i v_i$ .

Then, the resolution of Problem (9) reduce to the following equivalent linear system

$$C X = B, \quad (10)$$

where

$$B = ((\langle Z^s, \rho^s(v_i) \rangle_k)_{i=1}^N)^\top, \quad X \equiv \beta = ((\beta_i)_{i=1}^N)^\top, \quad (11)$$

and  $C = (\langle \rho^s(v_i), \rho^s(v_j) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m (v_i, v_j)_m)_{i,j=1}^N$ .

It can also be shown that the matrix  $C$  is a symmetric, definite positive and banded matrix, as it can be viewed in Lemma 1.2.5.

Afterwards, in Section 1.4 we deal with the estimation of the optimum values of the smoothing parameters  $\tau$  that minimize the error  $\|\sigma_\tau^s - g\|_0^2$ . To this end, we search a vector  $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_i)_{i=1}^N$  that minimize the expression (where  $\|\cdot\|_0 \equiv |\cdot|_0$  is the usual norm in the space  $\mathcal{L}^2$ , see (2))

$$R(\beta_1, \dots, \beta_N) = \left\| \sum_{i=1}^N \beta_i v_i - g \right\|_0^2.$$

On the other side, in the case of noisy data, we consider the following vector of data  $Z^s = \rho^s(g) + \vartheta^s$  where  $\tilde{\sigma}_\tau^s$  denotes the  $PS$ -smoothing spline of class  $\mathcal{C}^r$  relative to  $D^s$ ,  $Z^s$  and  $\tau$ ;  $\sigma_\tau^s$  to the  $PS$ -smoothing  $\mathcal{C}^r$  spline relative to  $D^s$ ,  $\rho^s(g)$  and  $\tau$ , finally  $e_\tau^s$  will denote the  $PS$ -smoothing  $\mathcal{C}^r$  spline relative to  $D^s$ ,  $\vartheta^s$  and  $\tau$ , with  $\vartheta^s = (\vartheta_i^s)_{i=1}^k$  an error vector in  $\mathbb{R}^k$  such that  $\vartheta^s$  contain a white noise for all  $s \in \mathbb{N}^*$  (that is,  $\vartheta^s$  is a Gaussian vector of independent random variables with zero mean and standard deviation  $\mu \in \mathbb{R}$ ).

To establish the main convergence theorem in this case (see Theorem 2.3.3), we will use the probabilistic result Proposition 2.3.1, whose proof can be found in [3]. To determine the ‘‘optimum values’’ of the parameters  $\tau$  included in the functional  $\mathcal{J}^s(v)$ , we will consider in this case the cross-validation technique studied in several works of Wahba and Craven ([20] and [59]), Cox ([19]) and also in Utreras ([56]).

Generally speaking, once we have fixed the set  $D^s = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^k$  (with  $k \equiv k(s)$ ), and the vector  $Z^s = \rho^s(g) + \vartheta^s$ , a general criterium to determine the optimum values of the parameters  $\tau$  could be choosing those that minimize the *mean quadratic error function*, defined as the average error committed in approximating the exact data  $\rho^s(g)$  with the values taken by using the corresponding  $PS$ -spline over the set  $D^s$ ; that is,

$$\mathcal{R}(\tau) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\tilde{\sigma}_\tau^s(\mathbf{a}_i) - g(\mathbf{a}_i))^2,$$

where  $\tilde{\sigma}_\tau^s$  denotes the  $PS$ -smoothing spline of class  $\mathcal{C}^r$  relative to  $D^s$ ,  $Z^s$  and  $\tau$ .

Nevertheless, the function  $\mathcal{R}$  also involves the function  $g$ , that could be unknown. So  $\mathcal{R}$  would be useless in order to obtain the optimum parameters

$\tau$ . The idea of cross-validation consists in replacing such function  $\mathcal{R}(\tau)$  by another function  $\mathcal{V}(\tau)$  such that its minimum value will be close to that of  $\mathcal{R}(\tau)$  when the number  $k$  of point data increases.

More precisely, it is desirable that if  $\{\tilde{\tau}_k\}_{k=1}^{\infty}$  is the sequence of minimizers of  $E\mathcal{V}$ , where  $E$  denotes the expected value, or first moment of the random variable  $\mathcal{V}$ , then

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{E\mathcal{R}(\tilde{\tau}_k)}{\min_{\tau} E\mathcal{R}(\tau)} = 1.$$

So, following the same steps as in [20] or [59], we obtain the generalized cross-validation function as

$$\mathcal{V}(\tau) = \frac{\frac{1}{k} \langle (Id - \mathcal{I}^s(\tau)) Z^s \rangle_k^2}{\left( \frac{1}{k} Tr(Id - \mathcal{I}^s(\tau)) \right)^2}.$$

where it appears  $\mathcal{I}^s(\tau)$ , the so called *influence matrix* of the problem (see Definition 2.2.4 in the Chapter 2).

In Sections 1.5 and 2.5 we present some numerical and graphical examples, both in the case of noise and without it, using uniform  $\Delta^1$ -triangulations and non-uniform  $\alpha$ -triangulations, to approximate the Franke's and Nielson's test functions. The error estimations have been computed by the following formula for the relative error

$$E_{rel} = \left( \frac{\sum_{j=1}^{2500} (g(\mathbf{b}_j) - \sigma_{\tau}^s(\mathbf{b}_j))^2}{\sum_{j=1}^{2500} g(\mathbf{b}_j)^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

where  $\{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^{2500}$  are arbitrary points in  $D$ ,  $g$  is the function test in each case and  $\tilde{\sigma}_{\tau}^s$  is the  $PS$ -spline of class  $\mathcal{C}^r$  obtained, relative to  $D^s = \{\mathbf{a}_i^s\}_{i=1}^k$ ,  $Z^s = \{g(\mathbf{a}_i^s) + \vartheta_i^s\}_{i=1}^k$  and  $\tau$ ; with  $\vartheta^s$  a noise vector with mean 0 and standard deviation  $\mu$  (not present in the case of data without noise).

In Chapter 3 we introduce a multiresolution analysis (MRA) to obtain a spline surface of class  $\mathcal{C}^r$ , that approximates a Lagrangian data set in some two-dimensional domain  $D \subset \mathbb{R}^2$  that admits triangulations coming from a  $\Delta^1$ -type one (although in the examples and applications we restrict ourselves to square domains), and at the same time, minimize some "energy functional" of the same type of those considered so far in (7).

The minimization space will be that of the splines built from the sub-triangulations of Powell-Sabin associated to different uniform  $\Delta^1$ -triangulations of  $\overline{D}$ , such that the splines approximation spaces associated to different consecutive levels of resolution will be nested (see Section 3.2).

In order to show the effectiveness of the developed algorithms for this case, we consider in Section 3.5 two applications of this technique: in the first one

we treat the noise reduction of a given surface, while in the second one, we aim to locate where the most part of the energy is spatially concentrated.

Finally, in Chapter 4, we introduce various methods to fill a hole of an explicit 3D surface, given by a differentiable function defined over  $\overline{D} - H$ , being  $D \subset \mathbb{R}^2$  a polygonal domain and  $H$  a non-empty subset of  $D$ . The idea is to define another function  $f^*$  (*the reconstruction function*) that respecting the shape of  $f$  (even if it does not coincide completely with it) where  $f$  is defined, it recovers the hole of  $f$  over  $H$  in a *coherent* manner.

We do such filling in three different ways: *in a discontinuous manner, with continuity* or *with class  $\mathcal{C}^1$* . In all these cases we consider an  $\alpha$ -triangulation  $\mathcal{T}$  of  $\overline{D}$ , from which we define another polygonal region  $H^*$  which includes  $H$  and that allows us to define the different filling procedures.

Depending on the case under consideration, such recovering has some specific subtleties:

- In the discontinuous case, the function  $f^*$  considered to fill the gap is defined just by juxtaposition of the original  $f$  outside  $H^*$  with a Powell-Sabin bivariate polynomial spline constructed over  $H^*$ . Such spline is obtained as the solution of a minimization problem involving an energy functional similar to those in the above chapters: that is, a linear combination of the usual seminorms in the Sobolev space  $\mathcal{H}^2(\overset{\circ}{H}^*)$ , together with a term which controls the approximation (in a least squares sense) of the values of  $f$  and those of their normal derivatives at the midpoints of the edges of the triangulation  $\mathcal{T}$  that are of the boundary of  $H^*$  (see Section 4.3 for the details).
- In the continuous case, the reconstruction cannot be done by simple juxtaposition like in the previous case. Now we have to slightly modify previously  $f$  outside  $H^*$ , in such a way that we substitute it by a smoothing bivariate spline  $s_f$ , that also minimizes a functional similar to those considered in the first chapter. Afterwards, we recover  $f$  inside  $H^*$  by other Powell-Sabin spline  $\sigma_{s_f}$ . But in order to assure the continuity of the reconstruction  $f^*$  we will have to impose some values of  $\sigma_{s_f}$  and  $s_f$ , and some tangential derivatives, to coincide at certain points over the edges of the polygonal boundary of  $H^*$  (see Section 4.4 for the details).
- Finally, to obtain the reconstruction globally of class  $\mathcal{C}^1$ , we proceed as in the previous case, but imposing some other interpolation conditions between  $s_f$  and  $\sigma_{s_f}$  in order to have a smooth connection (see Section 4.5 for the details).

The fundamental conclusions obtained from this research work can be viewed in Section *Conclusiones-In English*, just before the Appendix.





# Résumé en français

## 1. Présentation

Ce travail de thèse est un ensemble de contributions et d'applications dans le domaine de l'Approximation de Surfaces à deux variables en utilisant les splines d'énergie minimale sur des triangulations de type Powell-Sabin.

Nous présentons des approximations de classe  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ), sur des triangulations uniformes adéquates ( $\Delta^1$ -triangulations), dans le cas de données bruitées et non bruitées. Dans les deux cas, on obtient des résultats rigoureux pour la convergence. Ces résultats ont été publiés dans les articles scientifiques [5, 6, 8].

Pour le cas  $r = 1$ , il est possible d'étendre ces résultats aux cas des triangulations non uniformes plus génériques (appelées  $\alpha$ -triangulations).

Pour l'estimation des paramètres d'ajustement (ou d'adoucissement) présents dans la fonctionnelle considérée, et pour le calcul de leurs "valeurs optimales", nous avons utilisé la technique de *validation croisée*, introduite préalablement dans quelques travaux de Wahba et Craven ([20, 59]), Cox [19] et par Utreras [56]. Les résultats obtenus sur ce sujet ont été aussi publiés dans [7].

Tout ces outils sont traités tout au long des Chapitres 1 et 2. Afin de tester les techniques et algorithmes développés, nous avons considéré les fameuses fonctions de Franke et de Nielson.

Dans le Chapitre 3, nous avons utilisé la technique de la multirésolution pour développer des algorithmes de réduction de bruit dans ce contexte des surfaces d'énergie minimale et pour pouvoir localiser cette "énergie" dans le cas des fonctions avec une importante concentration de celle-ci dans une zone déterminée de son domaine de définition. Pour la validation de cette étude, nous avons choisi convenablement, entre autres, quelques fonctions de type conoïdal qui ont clairement cette propriété caractéristique. Ce résultat est aussi en cours de publication, parce qu'il a été accepté dans [27].

Finalement, dans un dernier Chapitre 4, nous traitons de manière intense, le problème de remplissage des trous dans une surface explicite, définie par

une fonction régulière à deux variables, dont on ne connaît pas les valeurs dans certaines parties bien déterminées de son domaine polygonal. Ce remplissage de la partie manquante peut se faire de trois manières différentes: d'une manière continue, discontinue ou bien avec une continuité de classe  $\mathcal{C}^1$ . Dans ces trois cas, l'idée est de définir une nouvelle fonction de reconstruction, qui respecte l'originale dans la mesure du possible, même si elle n'a pas besoin de coïncider exactement avec elle là où elle est définie, et qu'en même temps, elle remplit le trou d'une manière homogène et cohérente.

Cette dernière partie a fait aussi l'objet de la publication [9], et continue à être un sujet de travail actuel. En effet, nous sommes actuellement en train de développer le cas de surfaces paramétriques.

## 2. Considérations historiques

Les développements préalables sur les splines d'une seule variable, fondamentalement motivés par les applications dans l'industrie de l'automobile et de l'aéronautique européenne et américaine, ont eu lieu pendant les années 60. Il n'est pas étonnant qu'une grande partie des développements dans ce domaine, que ce soit d'un point de vue théorique ou numérique ont eu lieu dans les laboratoires des entreprises connues dans ces secteurs (comme ce sont le cas de P. de Casteljau et P. Bézier chez Citroën et Renault, respectivement). D'autre part, la théorie correspondante s'est développée rapidement pendant les années 80, donnant lieu à des milliers d'articles de recherche et de publications de tout genre, ainsi comme des livres et rapports sur le sujet. Ainsi, les splines à une seule variable sont devenues un sujet d'étude nécessaire dans les cours d'analyse numérique et sont incluses dans tout livre associé.

Mais dès les années 80 jusqu'à nos jours, ce développement continue à avoir lieu surtout de la part des splines à plusieurs variables. Actuellement, les splines à deux et trois variables de tout genre sont employés couramment pour la modélisation de surfaces de l'automobile, des avions, des bateaux et de nombreux produits et pièces industriels. Ces techniques ne sont pas uniquement utilisées dans les sections de production et conception des usines, elles sont aussi présentes dans le domaine de l'exploration pétrolière: où de nombreuses données sont disponibles à partir des prospections géophysiques, pour les différentes zones avec les sédiments spécifiques qui seront utilisées par la suite, pour reconstruire les contours des différentes couches de surfaces et ainsi aider à la localisation des puits de pétrole. Les applications ne sont pas moins nombreuses dans le domaine de la Médecine, l'étude des mouvements tectoniques et des prédictions météorologiques, parmi bien d'autres. Dans tous ces cas, la localisation des iso-courbes et iso-surfaces à partir des

mesures de température, des potentiels électro-magnétiques, des concentrations chimiques, etc., est d'une importance vitale pour une bonne visualisation et description des phénomènes étudiés.

D'autre part, de nombreux mathématiciens, physiciens et ingénieurs, emploient diverses splines à plusieurs variables (particulièrement du type Éléments Finis), sur des triangulations des domaines polygonaux, pour la résolution numérique approchée des diverses Équations aux Dérivées Partielles (E.D.P.'s) qui interviennent dans tous les domaines de la Science et de la Technologie.

Il n'est pas donc surprenant que, pendant les années précédentes, de nombreuses méthodes variationnelles appliquées à la conception graphique et industrielle (Computer Aided Geometric Design and Advanced Manufacturing en anglais ou simplement C.A.G.D.-C.A.M.) et à diverses Sciences de la Terre (Géologie, Géodynamique, etc.) ont reçu une attention considérable. Ceci est dû fondamentalement à leur efficacité pour la construction et conception des courbes et surfaces qui s'ajustent à quelques données et en même temps vérifient certaines conditions de forme.

L'idée de base sur laquelle ces méthodes sont développées est celle de la minimisation de certaines fonctionnelles, qui comportent au moins deux termes: l'un qui permet de mesurer le degré d'approximation de la courbe ou de la surface à un ensemble de données, tandis que les termes restants contrôlent la régularité et la bonne forme de cette courbe ou surface. Ainsi, en tenant compte des considérations physiques (comme par exemple, l'énergie d'élongement, de flexion, etc.) ou de type géométrique (comme par exemple la longueur ou courbure d'une courbe, aire d'une surface, etc) un grand éventail des fonctionnelles a été proposé ( consulter par exemple [23, 31, 37, 38] et les références incluses).

### 3. Notation et préliminaires

Dans tout ce qui suit, on désigne par  $\mathbb{P}_n[x, y]$  l'espace des polynômes à deux variables de degré total pas supérieur à  $n$  et par  $(\mathcal{V}, \|\cdot\|_{\mathcal{V}})$  un espace normé générique (consulter A.1 et A.5 dans l'Appendice pour voir les définitions correspondantes).

Nous introduisons aussi quelques définitions et résultats spécifiques qui seront utilisés tout au long de la thèse. D'autres définitions et résultats de base connus, ou bien plus techniques, peuvent être aussi consultés dans l'Appendice de ce document, comme par exemple le concept de triangulation (voir la définition A.7.1 dans l' Appendice).

**Définition 3.1** Une triangulation uniforme de type  $\Delta^1$  du domaine  $D$  est une triangulation induite par déplacements, fixées et de la même magnitude dans chacune des directions, de deux lignes perpendiculaires du plan, avec ses diagonales, toutes dans le même sens, de chacun des rectangles que se forment pour générer des triangles qui suivent un même patron dans toute l'extension du domaine.

**Commentaire 3.2** Concrètement, si nous nous restreignons à un rectangle avec des côtés parallèles aux axes, alors  $D \equiv [x_0, x_{l+1}] \times [y_0, y_{m+1}]$ , et selon [41] (dans la Définition 4.37) une triangulation uniforme du type  $\Delta^1$  sera une triangulation obtenue à partir de partitions uniformes des intervalles

$$x_i = x_0 + i \frac{x_{l+1} - x_0}{l+1}, \quad i = 0, 1, \dots, l+1$$

et

$$y_j = y_0 + j \frac{y_{m+1} - y_0}{m+1}, \quad j = 0, 1, \dots, m+1$$

qui donnent lieu aux rectangles

$$R_{i,j} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

qui seront ensuite divisés en deux, en utilisant des diagonales toutes dans le même sens (de toute façon dans [41] on considère des diagonales avec une pente positive, tandis que nous prenons d'habitude des diagonales avec des pentes négatives, comme nous le montrons dans la Figure 1).

**Définition 3.3** Étant donné  $\alpha \geq 1$ , une  $\alpha$ -triangulation du domaine polygonal  $D$ , que nous écrivons  $\mathcal{T}$ , est une triangulation de ce domaine qui satisfait la condition suivante

$$1 \leq \frac{R_T}{2r_T} \leq \alpha$$

pour chaque triangle  $T \in \mathcal{T}$ ; où  $R_T$  et  $r_T$  désignent les rayons des cercles circonscrit et inscrit dans  $T$ , respectivement (voir [51]).

**Définition 3.4** La sous-triangulation de Powell-Sabin,  $\mathcal{T}^{PS}$ , associée à la  $\alpha$ -triangulation  $\mathcal{T}$ , est obtenue en faisant la jonction du centre  $O_T$  du cercle inscrit dans chaque triangle intérieur  $T \in \mathcal{T}$  avec les sommets de  $T$  et les centres  $O_{T'}$  des cercles inscrits dans les triangles voisins  $T' \in \mathcal{T}$ . Dans le cas où  $T$  a un côté sur la frontière de  $D$ , alors le point  $O_T$  sera attaché au point médian de ce côté, aux sommets de  $T$  et aux centres  $O_{T'}$  des autres cercles inscrits dans les triangles  $T' \in \mathcal{T}$  voisins de  $T$  (voir Figures 1 et 2 dans le cas d'une  $\Delta^1$ -triangulation triviale et dans le cas d'une  $\alpha$ -triangulation plus générique).

Cet élément fini de Powell-Sabin appartient au groupe des E.F. appelés macro-éléments, puisque il est construit à partir d'un schéma d'interpolation qui utilise d'autres triangles plus petits. Il faut donc choisir un point intérieur (l'isocentre ou le barycentre normalement) de chacun des triangles de la triangulation donnée, pour les subdiviser ultérieurement en six triangles plus petits et pouvoir ainsi obtenir la sous-triangulation de Powell-Sabin correspondante, comme il est indiqué dans la Définition 3.4.

Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domaine polygonal, et considérons l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ , dont les éléments sont fonctions (ou bien classes des fonctions)  $u$  définies dans  $D$  tel qu'elles et ses dérivées partielles (aux sens des distributions)  $\partial^\beta u$  appartiennent à l'espace des fonctions de carré intégrable (voir la Définition A.3.1 dans l'Appendice)  $\mathcal{L}^2(D)$ , avec  $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2$  et  $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leq r + 1$ .

Pour chaque subensemble  $X \subseteq D$ , nous considérons l'espace  $\mathcal{H}^{r+1}(X)$  et la norme usuelle correspondante

$$\|u\| = \left( \sum_{|\beta| \leq r+1} \int_X \partial^\beta u(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

et les semi-normes (même si le cas  $m = 0$  s'agit aussi d'une norme dans l'espace  $\mathcal{L}^2(X)$ )

$$|u|_m = \left( \sum_{|\beta|=m} \int_X \partial^\beta u(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad m = 0, 1, \dots, r + 1 \quad (2)$$

avec ses demi-produits scalaires correspondants

$$(u, v)_m = \sum_{|\beta|=m} \int_X \partial^\beta u(\mathbf{x}) \partial^\beta v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad m = 0, 1, \dots, r + 1. \quad (3)$$

Considérons aussi une  $\alpha$ -triangulation  $\mathcal{T}$ , (habituellement uniforme du type  $\Delta^1$ , mais aussi nous avons quelques exemples avec des triangulations non uniformes) du domaine polygonal  $D$ , et  $\mathcal{T}^{PS}$  sa sous-triangulation de Powell-Sabin associée (consulter la définition 3.4).

Soit

$$n \equiv n(r) := \begin{cases} 2r + 1 & \text{pour } r \text{ pair} \\ 2r & \text{pour } r \text{ impair} \end{cases} \quad (4)$$

et notons  $[x]$  la partie entière de  $x$ .

Soit aussi l'ensemble

$$\mathcal{S}_n^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T}) = \{ \sigma \in \mathcal{C}^r(D) \quad / \quad \sigma|_T \in S_n^{[\frac{n-1}{2}] + 1, r + [\frac{r}{2}]}(T, \mathcal{T}^{PS}), \quad \forall T \in \mathcal{T} \}, \quad (5)$$

où

$$\mathcal{S}_n^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1, r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (T, \mathcal{T}^{PS}) = \left\{ \sigma \in \mathcal{C}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} (T) / \begin{array}{l} \sigma|_{T'} \in \mathbb{P}_n(T') \quad \forall T' \subset T \text{ avec } T' \in \mathcal{T}^{PS} \\ \text{et } \sigma \text{ est de classe } \mathcal{C}^{r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \text{ aux sommets de } T \end{array} \right\}$$

et  $\mathbb{P}_n(T')$  indique l'espace des polynômes à deux variables de degré total non supérieur à  $n$  restreints au triangle  $T'$ ; c'est à dire,

$$\mathbb{P}_n(T') \equiv \{p|_{T'}, p \in \mathbb{P}_n[x, y]\}.$$

On peut démontrer (consulter [39]) qu'à partir des valeurs d'une fonction  $f \in \mathcal{C}^m(D)$  ( $m \geq r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ ) et de celles de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ , dans tous les sommets de la triangulation  $\mathcal{T}$ , il existe une et une seule fonction

$$\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (D, \mathcal{T}) \quad (6)$$

telle que les valeurs de  $\sigma$ , et celles de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ , coïncident avec celles de  $f$  dans tous les sommets de la triangulation  $\mathcal{T}$  (consulter par exemple [48]).

**Commentaire 3.5** *Remarquer le fait que  $\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (D, \mathcal{T})$  si et seulement si, elle vérifie les conditions suivantes*

$$\begin{array}{l} \sigma \in \mathcal{C}^r(D) \\ \sigma|_T \in \mathcal{C}^{\lfloor \frac{n(r)-1}{2} \rfloor + 1} (T) \text{ pour tout } T \in \mathcal{T} \\ \sigma|_{T'} \in \mathbb{P}_n(T') \text{ pour tout } T' \in \mathcal{T}^{PS} \\ \text{et en plus } \sigma \text{ est de classe } \mathcal{C}^{r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \text{ dans tous les sommets de } \mathcal{T} \end{array}$$

**Commentaire 3.6** *Dans le cas  $r = 1$  on déduit de (4) que  $n(r) = 2$  et il suffira d'avoir les valeurs de la fonction  $f$  et de celles de ses dérivées partielles du premier ordre dans tous les sommets de la triangulation  $\mathcal{T}$  pour pouvoir trouver un seul  $\sigma \in \mathcal{S}_2^{1,1} (D, \mathcal{T})$  tel que les valeurs de  $\sigma$  et celles de ses dérivées partielles du premier ordre dans les sommets de  $\mathcal{T}$  coïncident avec celles de  $f$ .*

## 4. Énoncé général des problèmes

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier le problème d'approcher un ensemble de données lagrangiennes (avec ou sans bruit) par des surfaces splines à deux variables de classe  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) sur une domaine polygonale du

plan, qui minimisent une ‘fonctionnelle d’énergie’, qui contient une combinaison linéaire des semi-normes usuelles dans l’espace de Sobolev  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ . Nous utilisons pour cela des espaces d’approximation obtenus à partir de l’élément fini de Powell-Sabin sur  $\Delta^1$ -triangulations uniformes, et dans quelque cas aussi sur  $\alpha$ -triangulations non uniformes plus génériques.

Étant donné, pour chaque  $s \in \mathbb{N}^* \equiv \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , un ensemble fini de points  $D^s$  dans  $D$ , et une fonction  $g \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$ , et l’opérateur d’évaluation

$$\begin{aligned} \rho^s : \mathcal{H}^{r+1}(D) &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ v &\longmapsto \rho^s(v) = \{v(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s} \end{aligned}$$

qui permet de considérer le vecteur des valeurs de cette fonction dans  $D^s$ :  $Z^s \equiv \rho^s(g) = \{g(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s}$ , où  $k = k(s) = \text{card}(D^s)$ .

D’autre part  $\langle \cdot \rangle_k$  (respect.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ ) représentent la norme euclidienne usuelle (respect. le produit scalaire habituel) dans  $\mathbb{R}^k$ . Nous supposons aussi que la condition (1.2.2) est vérifiée pour chaque  $s \in \mathbb{N}^*$ .

Pour  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{r+1})$ , où  $\tau_i \in [0, +\infty[$  pour tout  $i = 1, \dots, r$  et  $\tau_{r+1} \in ]0, +\infty[$ , nous cherchons une surface spline de classe  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) qui approche les points  $\{(\mathbf{a}, g(\mathbf{a}))\}_{\mathbf{a} \in D^s} \subset \mathbb{R}^3$  et qui minimise la fonctionnelle d’énergie, définie sur  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  par

$$\mathcal{J}^s(v) = \langle \rho^s(v - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |v|_m^2. \quad (7)$$

Cette fonctionnelle mesure d’une part, comme l’approximation des valeurs  $Z^s \equiv \{g(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s}$  se fait par  $v$  (dans le sens des moindres carrés), tandis que le reste (englobé dans le signe de la somme) représente certaine ‘condition d’énergie minimale’, en tenant compte des semi-normes  $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_{r+1}$ , pondérées respectivement par les paramètres  $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$ .

Les valeurs des paramètres  $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$ , indiquent l’importance donnée à chacune de ces semi-normes et permettent aussi un certain contrôle sur la ‘bonne forme’ (‘fairness’, en anglais) de la surface obtenue. On peut rappeler que les semi-normes employées ont d’habitude une interprétation géométrique ou physique. Par exemple  $|\cdot|_1$  et  $|\cdot|_2$  peuvent être vues respectivement comme des estimations simplifiées de l’aire et l’énergie de pli de la surface.

Par conséquent, le problème de minimisation que nous voulons résoudre est le suivant:

**Problème 4.1** *Étant donné  $\mathcal{T}$ , une  $\alpha$ -triangulation uniforme de type  $\Delta^1$  de  $D$  et sa sous-triangulation de Powell-Sabin associée  $\mathcal{T}^{PS}$ , nous cherchons un élément  $\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T})$  qui vérifie*

$$\mathcal{J}^s(\sigma) \leq \mathcal{J}^s(v), \quad \forall v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T}). \quad (8)$$

On a un Théorème de caractérisation, le 1.2.2, qui nous assure que le problème (8) a une seule solution, qui de plus est l'unique solution du problème variationnel suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } \sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}) \text{ vérifiant} \\ \langle \rho^s(\sigma), \rho^s(v) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m(\sigma, v)_m = \langle Z^s, \rho^s(v) \rangle_k, \quad \forall v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}) \end{array} \right. \quad (9)$$

**Définition 4.2** *La solution correspondante de ce problème (9) sera appelée PS-spline d'ajustement (ou d'adoucissement) de classe  $\mathcal{C}^r$  relative à  $D^s$ ,  $Z^s$  et  $\tau$ , et il sera noté  $\sigma \equiv \sigma_\tau$ .*

Soient  $N = \dim(\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}))$  et  $\{v_1, \dots, v_N\}$  une base avec support locale de l'espace d'éléments finis  $\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$ . Si l'on écrit l'unique solution de ces problèmes (8) ou (9) comme une combinaison linéaire de cette base  $\sigma = \sum_{i=1}^N \beta_i v_i$ ; alors, la résolution du problème (9) équivaut à la résolution du système linéaire suivant

$$C X = B \quad (10)$$

où

$$\begin{aligned} B &= \left( (\langle Z^s, \rho^s(v_i) \rangle_k)_{i=1}^N \right)^\top, \quad X \equiv \beta = \left( (\beta_i)_{i=1}^N \right)^\top, \\ C &= \left( (\langle \rho^s(v_i), \rho^s(v_j) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m(v_i, v_j)_m)_{i,j=1}^N \right). \end{aligned} \quad (11)$$

et on peut assurer aussi que la matrice  $C$  du système est une matrice de type bande, symétrique et définie positive, comme il est démontré dans le Lemme 1.2.5.

Dans la section 1.4 on traite la question de l'estimation des valeurs optimales des paramètres d'adoucissement  $\tau$  que minimisent l'erreur  $\|\sigma_\tau^s - g\|_0^2$ ; pour cela on cherche le vecteur  $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_i)_{i=1}^N$  qui minimise l'expression (où  $\|\cdot\|_0 \equiv |\cdot|_0$  est la norme usuelle dans l'espace  $\mathcal{L}^2$ , voir (2))

$$R(\beta_1, \dots, \beta_N) = \left\| \sum_{i=1}^N \beta_i v_i - g \right\|_0^2.$$

D'autre part, dans le cas des données avec bruit nous considérons le vecteur suivante  $Z^s = \rho^s(g) + \vartheta^s$ , avec  $\vartheta^s = (\vartheta_i^s)_{i=1}^k$  un vecteur d'erreurs en  $\mathbb{R}^k$  de tel manière que  $\vartheta^s$  soit un bruit blanc pour tout  $s \in \mathbb{N}^*$  (c'est à dire,  $\vartheta^s$  est un vecteur Gaussien de variables aléatoires indépendantes d'espérance nulle



et de variance  $\mu^2$ ) et en notant  $\tilde{\sigma}_\tau^s$  le  $PS$ -spline d'adoucissement de classe  $\mathcal{C}^r$  relative à  $D^s$ ,  $Z^s$  et  $\tau$ ;  $\sigma_\tau^s$  au  $PS$ -spline d'adoucissement de classe  $\mathcal{C}^r$  relative à  $D^s$ ,  $\rho^s(g)$  et  $\tau$  et finalement  $e_\tau^s$  à le  $PS$ -spline d'adoucissement de classe  $\mathcal{C}^r$  relative à  $D^s$ ,  $\vartheta^s$  et  $\tau$ .

Pour établir le theoreme de convergence 2.3.3 correspondant aux cas des donnés avec bruit, nous utiliserons un résultat probabilistique énoncé dans la Proposition 2.3.1, dont la démonstration se trouve dans [3] et pour déterminer les “valeurs optimales” des paramètres  $\tau$  qui apparaissent dans la fonctionnelle  $\mathcal{J}^s(v)$ , nous considérons la technique connue de *validation croisée*, apparue dans quelques travaux de Wahba et Craven ([20], [59]), Cox ([19]) et Utreras ([56]).

En résumé, si on fixe la valeur  $k \equiv k(s)$  et étant donné l'ensemble  $D^s = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^k$ , ainsi que le vecteur  $Z^s = \rho^s(g) + \vartheta^s$ , un critère pour la détermination des valeurs optimales des paramètres  $\tau$  peut être la sélection de celles-ci qui minimisent la *fonction de l'erreur quadratique moyenne*, définie comme l'erreur moyenne commise dans l'approximation des données exactes  $\rho^s(g)$  par les valeurs obtenues du  $PS$ -spline correspondante sur l'ensemble  $D^s$ ; c'est-à-dire,

$$\mathcal{R}(\tau) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\tilde{\sigma}_\tau^s(\mathbf{a}_i) - g(\mathbf{a}_i))^2,$$

où  $\tilde{\sigma}_\tau^s$  note le  $PS$ -spline d'adoucissement  $\mathcal{C}^r$  relative à  $D^s$ ,  $Z^s$  et  $\tau$ .

Par contre, la fonction  $\mathcal{R}$  implique à son tour la fonction  $g$ , qui peut être inconnue, et alors  $\mathcal{R}$  pourrait ne pas résulter pratique à l'heure d'obtenir les paramètres  $\tau$  optimaux. L'idée de la validation croisée consiste donc à remplacer cette fonction  $\mathcal{R}(\tau)$  par une autre fonction  $\mathcal{V}(\tau)$  de manière que sa valeur minimale soit proche à celle de  $\mathcal{R}(\tau)$  quand le nombre  $k$  des données ponctuelles augmente.

Plus précisément, il est souhaitable que si la suite de paramètres  $\{\tilde{\tau}_k\}_{k=1}^\infty$  qui minimisent  $E\mathcal{V}$ , où  $E$  désigne l'espérance mathématique de la variable correspondante, alors on ait

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{E\mathcal{R}(\tilde{\tau}_k)}{\min_\tau E\mathcal{R}(\tau)} = 1.$$

Si on suit le même processus que dans [20] ou [59], nous obtenons la fonction généralisée de validation croisée

$$\mathcal{V}(\tau) = \frac{\frac{1}{k} \langle (Id - \mathcal{I}^s(\tau)) Z^s \rangle_k^2}{\left(\frac{1}{k} Tr(Id - \mathcal{I}^s(\tau))\right)^2}.$$

où elle apparaît  $\mathcal{I}^s(\tau)$ , la *matrice d'influence* du problème (voir la Définition 2.2.4 dans le Chapitre 2).

Dans les sections 1.5 et 2.5 nous présentons des nombreux exemples numériques et graphiques, avec des données sans bruit et avec bruit, dans le cas des triangulations uniformes du type  $\Delta^1$  et aussi avec  $\alpha$ -triangulations non uniformes. Dans ces exemples nous avons approché les fonctions test connues de Franke et de Nielson. Les estimations de l'erreur ont été calculées en utilisant la formule de "l'erreur relative" suivante

$$E_{rel} = \left( \frac{\sum_{j=1}^{2500} (g(\mathbf{b}_j) - \sigma_\tau^s(\mathbf{b}_j))^2}{\sum_{j=1}^{2500} g(\mathbf{b}_j)^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

où  $\{\mathbf{b}_j\}_{j=1}^{2500}$  sont des points arbitraires dans  $D$ ,  $g$  est la fonction test employée et  $\tilde{\sigma}_\tau^s$  est la  $PS$ -spline de classe  $\mathcal{C}^r$  obtenue, relative à  $D^s = \{\mathbf{a}_i^s\}_{i=1}^k$ ,  $Z^s = \{g(\mathbf{a}_i^s) + \vartheta_i^s\}_{i=1}^k$  et  $\tau$ ;  $\vartheta^s$  c'est un vecteur de bruit de moyenne 0 et d'écart type  $\mu$  (que n'interviendra pas dans le cas sans bruit).

Dans le Chapitre 3 nous introduisons une analyse multirésolution pour obtenir une surface spline de classe  $\mathcal{C}^r$ , qui approche un ensemble de données lagrangiennes dans un domaine du plan  $D \subset \mathbb{R}^2$  qui admet des triangulations qui proviennent d'une  $\Delta^1$ -triangulation (mais nous nous restreindrons fondamentalement à des domaines rectangulaires ou plutôt carrés), en même temps qui minimise une "fonctionnelle d'énergie" de même type que celles considérées jusqu'à maintenant (7).

L'espace de minimisation sera celui des splines construites à partir des sous-triangulations de Powell-Sabin associées à différentes triangulations uniformes de type  $\Delta^1$ , de telle façon que les espaces des splines d'approximation associés aux niveaux de résolution consécutifs soient inclus l'un dans l'autre, tel qui sont présentés dans la section 3.2.

Afin de montrer l'efficacité des algorithmes développés dans ce cas précis, nous considérons dans la Section 3.5 deux applications concrètes de cette technique: dans la première nous traitons la réduction du bruit dans une surface donnée, alors que dans la seconde, nous traitons de localiser la concentration d'énergie d'une fonction à deux variables dans son domaine de définition.

Enfin, dans le Chapitre 4, nous présentons diverses méthodes pour compléter un trou d'une surface 3D, donnée par une fonction différentiable explicite définie sur  $\bar{D} - H$ . Soient  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domaine polygonal et  $H$  un sous-ensemble non vide de  $D$ ; l'idée c'est de définir une autre fonction  $f^*$  (*fonction de reconstruction*) que "en respectant" la forme de  $f$  (même si elle ne coïncide pas complètement avec la fonction originale) du moins où  $f$  est définie, elle recouvre le trou de  $f$  au-dessus de  $H$  d'une façon logique et cohérente avec le graphique de  $f$ .

Nous faisons un tel remplissage de trois manières différentes : d'une façon discontinue, continue ou bien de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour ces cas, nous considérons

une  $\alpha$ -triangulation  $\mathcal{T}$  de  $\overline{D}$ , à partir de laquelle nous définissons une autre région polygonale  $H^*$  qui inclut  $H$  et sur laquelle nous appliquerons les méthodes de remplissage.

Selon le cas, le recouvrement aura certaines particularités spécifiques :

- Dans le cas discontinu, la fonction  $f^*$  considérée pour remplir le trou est définie par juxtaposition de la fonction originale  $f$  en dehors  $H^*$  avec une spline polynomiale à deux variables de type Powell-Sabin construite sur  $H^*$ . Cette spline est obtenue comme solution d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle d'énergie définie de forme similaire à celles des chapitres antérieurs : une combinaison linéaire des semi-normes usuelles dans l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^2(\overset{\circ}{H}^*)$ , avec un terme qui contrôle l'approximation (au sens des moindres carrés) des valeurs de  $f$  et celles de ses dérivées normales dans les points médians des arêtes de la triangulation  $\mathcal{T}$  qui se trouvent sur la frontière de  $H^*$  (consulter la section 4.3 pour voir les détails).
- Dans le cas continu, la reconstruction ne sera plus par simple juxtaposition du graphe de  $f$  avec une spline à deux variables de type Powell-Sabin, mais dans ce cas-là, nous devons au préalable modifier légèrement  $f$  en dehors  $H^*$ , de façon à ce que nous substituerons  $f$  par une spline d'approximation à deux variables  $s_f$ , qui minimise en même temps une fonctionnelle similaire à celles considérés dans les chapitres antérieurs. Ensuite, nous reconstruisons  $f$  à l'intérieur de  $H^*$  au moyen d'une spline  $\sigma_{s_f}$  de type Powell-Sabin; mais pour pouvoir assurer la continuité de la reconstruction  $f^*$  nous devons forcer que les valeurs de  $\sigma_{s_f}$  et  $s_f$ , ainsi que celles de ses dérivées tangentielles, coïncident dans certains points sur les côtés de la frontière polygonale de  $H^*$  (consulter la section 4.4 pour voir les détails).
- Finalement, pour obtenir une reconstruction qui est globalement de classe  $\mathcal{C}^1$ , nous agissons comme dans le cas antérieur, en imposant aussi certaines conditions d'interpolation entre  $s_f$  et  $\sigma_{s_f}$  pour que l'union des deux graphiques soit douce ou régulière (consulter la section 4.5 pour voir les détails).

Les principales conclusions extraites de ce travail de thèse peuvent être consultées dans la Section "Conclusions-En français", juste avant l'Appendice.



## Parte II

# Desarrollo de la tesis y conclusiones



# Capítulo 1

## Aproximación de datos lagrangianos mediante superficies de energía mínima

### 1.1. Introducción

En este capítulo presentamos un método para obtener superficies spline bivariadas de clase  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) sobre  $D$  (un dominio poligonal del plano), que minimicen un cierto “funcional energía”, en el que aparece una combinación lineal de las semi-normas usuales en el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  y un término de mínimos cuadrados discreto que permite a su vez la aproximación de un conjunto lagrangiano de datos. El espacio de minimización consiste en el conjunto de splines bivariados de clase y grado apropiados, construidos a partir de la subtriangulación de Powell-Sabin asociada a una  $\alpha$ -triangulación uniforme de tipo  $\Delta^1$  de  $\overline{D}$  (consultar [48], [40]). Por otra parte, en el caso particular de la consideración de superficies spline cuadráticas de clase  $\mathcal{C}^1$ , la mayor parte de los resultados pueden también ser extendidos al caso de  $\alpha$ -triangulaciones más generales, no necesariamente uniformes.

El capítulo se organiza como sigue: en la Sección 1.2 formulamos el problema general a tratar y presentamos un método para resolverlo mientras que en la Sección 1.3 se demuestra un resultado de convergencia. En la Sección 1.4 describimos el método empleado para la estimación óptima de los parámetros que aparecen en el funcional energía, y finalmente en la Sección 1.5 presentamos algunos ejemplos numéricos y gráficos para las funciones test de Franke y de Nielson, tanto para el caso de aproximaciones de clase  $\mathcal{C}^1$  (usando triangulaciones uniformes y no uniformes), como en el caso de aproximaciones de clase  $\mathcal{C}^2$ .

## 1.2. Formulación del problema

Sea, para cada  $s \in \mathbb{N}^* \equiv \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , un conjunto finito de puntos  $D^s$  en  $D$  y considérese el *operador de evaluación*

$$\rho^s : \mathcal{H}^{r+1}(D) \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad (1.2.1)$$

definido mediante  $\rho^s(v) = \{v(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s}$ . Sea  $g \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$  y consideremos el vector de valores

$$Z^s \equiv \rho^s(g) = \{g(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s}.$$

Supóngase, además, que para cualquier  $s \in \mathbb{N}^*$  se tiene que

$$\text{Ker}(\rho^s) \cap \mathbb{P}_r(D) = \{0\}. \quad (1.2.2)$$

Sea  $k = k(s) = \text{card}(D^s)$  y denotemos  $\langle \cdot \rangle_k$  (respect.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ ) la norma euclídea usual (respect. el producto escalar euclídeo usual) en  $\mathbb{R}^k$ .

Dados  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{r+1})$ , donde  $\tau_i \in [0, +\infty[$  para todo  $i = 1, \dots, r$  y  $\tau_{r+1} \in ]0, +\infty[$ , consideremos también el funcional definido sobre  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  por

$$\mathcal{J}^s(v) = \langle \rho^s(v - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |v|_m^2. \quad (1.2.3)$$

Buscamos una superficie spline de clase  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) que minimice el funcional energía (1.2.3), para lo cual deberá aproximar en la medida de lo posible los puntos  $\{(\mathbf{a}, g(\mathbf{a}))\}_{\mathbf{a} \in D^s} \subset \mathbb{R}^3$  al mismo tiempo que también minimiza los términos incluidos en la sumatoria y que controlan la “buena forma” (“fairness” en inglés) o “suavidad” de la misma. Nótese que el primer término de  $\mathcal{J}^s$  mide cómo de bien  $v$  aproxima los valores  $Z^s \equiv \{g(\mathbf{a})\}_{\mathbf{a} \in D^s}$  sobre el conjunto de puntos  $D^s$  (en el sentido de los mínimos cuadrados), mientras que el resto (englobados en la sumatoria) representan cierta “condición de mínima energía”, mediante el empleo de las semi-normas  $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_{r+1}$  (ver Definición (2) en la Pág. 9), ponderadas por los parámetros  $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$ , respectivamente. De esta forma, los valores de dichos parámetros  $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$ , indicarán “el peso” dado a cada una de estas seminormas con el objeto de disponer de cierto control sobre la “buena forma” (“fairness”, en inglés) de la superficie obtenida. Recuérdese además que algunas de las seminormas empleadas tienen cierta interpretación geométrica; como por ejemplo  $|\cdot|_1$  y  $|\cdot|_2$ , que pueden verse respectivamente como estimaciones simplificadas del área y las curvaturas medias de la superficie.

Más precisamente, el problema de minimización que queremos resolver es el siguiente:



**Problema 1.2.1** Dada una  $\alpha$ -triangulación uniforme  $\mathcal{T}$ , de tipo  $\Delta^1$ , de  $\bar{D}$  y su subtriangulación de Powell-Sabin asociada  $\mathcal{T}^{PS}$ , buscamos un elemento  $\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  que verifique

$$\mathcal{J}^s(\sigma) \leq \mathcal{J}^s(v), \quad \forall v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}). \quad (1.2.4)$$

Se tiene a su vez el siguiente teorema de caracterización:

**Teorema 1.2.2** El Problema 1.2.1 tiene una única solución, que además es también solución única del siguiente problema variacional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}) \text{ que verifique} \\ \langle \rho^s(\sigma), \rho^s(v) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m(\sigma, v)_m = \langle Z^s, \rho^s(v) \rangle_k, \quad \forall v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}). \end{array} \right. \quad (1.2.5)$$

Para demostrar este resultado, necesitaremos algunos lemas previos:

**Lema 1.2.3** El funcional (1.2.3) es un funcional convexo en  $\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$ .

**Demostración.** Para esta demostración emplearemos tácitamente la convexidad estricta de la función real cuadrática  $x \mapsto x^2$ , por lo que automáticamente se tendrá que

$$((1-t)x + ty)^2 \leq (1-t)x^2 + ty^2, \quad \forall t \in [0, 1] \text{ y } x, y \in \mathbb{R} \quad (1.2.6)$$

(con desigualdad estricta siempre que  $t \in ]0, 1[$  y  $x \neq y$ ). A su vez, gracias también a la convexidad (aunque no estricta) de cualquier norma o seminorma, por la conocida desigualdad triangular (consultar (A.2) en el Apéndice) y a la monotonía creciente de la función cuadrática para los reales no negativos, aplicando la desigualdad (1.2.6) anterior (con  $x \equiv |u|_m$  e  $y \equiv |v|_m$ ) se puede escribir

$$|(1-t)u + tv|_m^2 \leq ((1-t)|u|_m + t|v|_m)^2 \leq (1-t)|u|_m^2 + t|v|_m^2, \quad (1.2.7)$$

$$\forall t \in [0, 1] \text{ y } u, v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}).$$

Por otro lado, gracias a la linealidad del operador  $\rho^s(\cdot)$  y aplicando ahora (1.2.6) con  $x \equiv \langle \rho^s(u-g) \rangle_k$  e  $y \equiv \langle \rho^s(v-g) \rangle_k$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \rho^s((1-t)u + tv - g) \rangle_k^2 &= \langle \rho^s((1-t)(u-g) + t(v-g)) \rangle_k^2 & (1.2.8) \\ &= \langle (1-t)\rho^s(u-g) + t\rho^s(v-g) \rangle_k^2 \\ &= ((1-t)\langle \rho^s(u-g) \rangle_k + t\langle \rho^s(v-g) \rangle_k)^2 \\ &\leq (1-t)\langle \rho^s(u-g) \rangle_k^2 + t\langle \rho^s(v-g) \rangle_k^2. \end{aligned}$$

Así pues, si ahora tenemos dos elementos distintos  $u, v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  y  $t \in ]0, 1[$ , de (1.2.7) y (1.2.8) se tendrá que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^s((1-t)u + tv) &= \langle \rho^s((1-t)u + tv - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |(1-t)u + tv|_m^2 \\ &\leq (1-t)\langle \rho^s(u-g) \rangle_k^2 + t\langle \rho^s(v-g) \rangle_k^2 \\ &\quad + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m ((1-t)|u|_m^2 + t|v|_m^2) \\ &= (1-t)\mathcal{J}^s(u) + t\mathcal{J}^s(v), \end{aligned}$$

aunque no se pueda asegurar en principio la desigualdad estricta. En los casos  $u = v$  ó  $t = 0, 1$  también se obtiene de forma trivial lo pedido. ■

**Lema 1.2.4** *El problema variacional (1.2.5) no es más que la correspondiente ecuación de Euler-Lagrange asociada con la búsqueda de extremales (posibles máximos o mínimos) del funcional energía (1.2.3).*

**Demostración.** Para demostrar esta equivalencia entre los problemas (1.2.4) y (1.2.5) comenzaremos demostrando la implicación (1.2.4)  $\implies$  (1.2.5):

Supongamos de antemano que tenemos  $\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  donde el funcional (1.2.3) alcanza el mínimo y fijemos, en principio, cualquier otro elemento  $v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  y vayamos variando un parámetro escalar suficientemente pequeño  $t \in \mathbb{R}$ , de manera que la función real de variable real  $h_v(t) := \mathcal{J}^s(\sigma + tv)$  esté bien definida y se pueda derivar en un entorno del valor  $t = 0$ , que es donde tendría un mínimo relativo. Así pues, de la condición necesaria de extremo para funciones reales de variable real deduciríamos que

$$0 = h'_v(0), \quad \forall v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}),$$

y, por lo tanto, para cada  $v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  se tendrá

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \langle \rho^s(\sigma + tv - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |\sigma + tv|_m^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \begin{aligned} &\langle \rho^s(\sigma) \rangle_k^2 + 2t \langle \rho^s(\sigma), \rho^s(v) \rangle_k - 2 \langle \rho^s(\sigma), \rho^s(g) \rangle_k \\ &+ t^2 \langle \rho^s(v) \rangle_k^2 - 2t \langle \rho^s(v), \rho^s(g) \rangle_k + \langle \rho^s(g) \rangle_k^2 \\ &+ \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m (|\sigma|_m^2 + 2t (\sigma, v)_m + t^2 |v|_m^2) \end{aligned} \right) \\ &= 2 \left( \langle \rho^s(\sigma), \rho^s(v) \rangle_k - \langle \rho^s(v), \rho^s(g) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m (\sigma, v)_m \right), \end{aligned}$$

de donde claramente obtenemos (1.2.5).

Recíprocamente, para ver la implicación (1.2.5)  $\implies$  (1.2.4), emplearemos que, como ya se ha visto antes, cualquier solución del problema (1.2.5) no es más que un posible extremo del funcional Gâteaux-diferenciable (1.2.3) y por lo tanto, el mínimo de éste deberá encontrarse entre las soluciones de este problema variacional. ■

De los lemas anteriores deducimos que entonces el funcional (1.2.3) alcanzará su mínimo global en cierto  $\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  si y sólo si este elemento satisface (1.2.5). Por otro lado, si se consigue comprobar que la solución del Problema (1.2.5) es única, entonces también obtendremos la unicidad de dicho mínimo global del funcional energía en el espacio  $\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$ .

**Existencia y unicidad.** La condición (1.2.2) nos permite asegurar que

$$[[v]]^s = \left( \langle \rho^s(v) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |v|_m^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma sobre  $\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  equivalente a la inducida por la usual en el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  (consultar la Proposición A.4.18 en el Apéndice).

Como consecuencia, la forma bilineal continua y simétrica

$$\mathcal{A} : \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}) \times \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$\mathcal{A}(u, v) = \langle \rho^s(u), \rho^s(v) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m (u, v)_m$$

resulta ser  $\mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T})$ -elíptica, ya que existirán  $\alpha, \beta > 0$  tales que

$$\alpha \|v\| \leq [[v]]^s \equiv \sqrt{\mathcal{A}(v, v)} \leq \beta \|v\| \quad \forall v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T}),$$

por lo que bastará con tomar  $\gamma = \alpha^2$  como constante de  $\mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T})$ -elipticidad (ver la Definición A.2.2).

Además,  $\mathcal{B} : \mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\mathcal{B}(v) = \langle Z^s, \rho^s(v) \rangle_k$ , es a su vez una forma lineal continua, por lo que bastará con aplicar el conocido lema de Lax-Milgram (ver A.2.4) para obtener la conclusión, ya que claramente el Problema (1.2.5) se podría reformular ahora como

$$\mathcal{A}(\sigma, v) = \mathcal{B}(v), \quad \forall v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T}).$$

Nótese además que

$$\mathcal{J}^s(v) = 2 \left( \frac{1}{2} \mathcal{A}(v, v) - \mathcal{B}(v) + \frac{\langle Z^s \rangle_k^2}{2} \right),$$

y entonces la única solución de (1.2.5) es también el único mínimo de  $\mathcal{J}^s$ . ■

Denotemos ahora  $N = \dim \left( \mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T}) \right)$ , sea  $\{v_1, \dots, v_N\}$  una base con soporte local del espacio de elementos finitos  $\mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T})$  y expresemos la única solución de los problemas (1.2.4) y (1.2.5) como combinación lineal de dicha base

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \beta_i v_i.$$

Entonces, el problema (1.2.5) da lugar a la resolución del siguiente sistema lineal equivalente

$$C X = B, \tag{1.2.9}$$

donde

$$\begin{aligned} B &= \left( (\langle Z^s, \rho^s(v_i) \rangle_k)_{i=1}^N \right)^\top, & X \equiv \beta &= \left( (\beta_i)_{i=1}^N \right)^\top, \\ C &:= \left( \langle \rho^s(v_i), \rho^s(v_j) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m(v_i, v_j)_m \right)_{i,j=1}^N. \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Se tiene su vez que la correspondiente matriz de coeficientes del sistema tiene ciertas características interesantes, como muestra el siguiente lema:

**Lema 1.2.5** *C es una matriz de tipo banda, simétrica y definida positiva.*

**Demostración.** La simetría de esta matriz  $C$  se obtiene fácilmente a partir de la expresión que define a sus elementos  $c_{ij}$ . En cuanto al hecho de que resulte también definida positiva, sea  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)^\top \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$  cualquier vector no nulo y calculemos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^\top C \mathbf{p} &= \sum_{i,j=1}^N p_i c_{ij} p_j = \sum_{i,j=1}^N p_i \left( \langle \rho^s(v_i), \rho^s(v_j) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m (v_i, v_j)_m \right) p_j \\ &= \left\langle \rho^s \left( \sum_{i=1}^N p_i v_i \right), \rho^s \left( \sum_{j=1}^N p_j v_j \right) \right\rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m \left( \sum_{i=1}^N p_i v_i, \sum_{j=1}^N p_j v_j \right)_m \\ &= \left\langle \rho^s \left( \sum_{i=1}^N p_i v_i \right) \right\rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m \left| \sum_{i=1}^N p_i v_i \right|_m^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si suponemos ahora que para cierto vector  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^N$  se verifica que  $\mathbf{p}^\top C \mathbf{p} = 0$  y consideramos  $w = \sum_{i=1}^N p_i v_i$ , entonces sería también nula la expresión

$$\langle \rho^s(w) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |w|_m^2 = 0,$$

que equivaldría a que la norma definida en  $\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  (ver la Proposición A.4.18) equivalente a la inducida en este espacio por la usual de  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  también sería nula; es decir  $[[w]] = 0$ .

Por lo tanto,  $w = 0 \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  y como consecuencia obtenemos que necesariamente  $\mathbf{p} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^N$ . Finalmente, el hecho de que  $C$  sea de tipo banda viene dado por la “localización” de los soportes de cada una de las funciones de base  $v_i$ , para  $i = 1, \dots, N$ . ■

### 1.3. Convergencia

Notemos  $\Lambda \equiv \dim \mathbb{P}_r[x, y] = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$  y sea  $A^0 = \{\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \dots, \mathbf{a}_\Lambda^0\}$  un subconjunto  $\mathbb{P}_r$ -unisolvante de  $D$  (consultar la Definición A.6.1 en el Apéndice). Supongamos además que también se verifica la condición

$$d(s) := \sup_{\mathbf{x} \in D} \min_{\mathbf{a} \in D^s} \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle_2 = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow +\infty. \quad (1.3.11)$$

**Observación 1.3.1** La condición (1.3.11) indica que el supremo de todas las distancias entre cada  $\mathbf{x} \in D$  y los conjuntos  $D^s$ , definida como

$$d(\mathbf{x}, D^s) := \min_{\mathbf{a} \in D^s} \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle_2,$$

y que no es más que la conocida como distancia de Hausdorff entre los conjuntos  $D^s$  y  $D$ , es un infinitésimo del mismo orden que la expresión  $\frac{1}{s}$  cuando el parámetro  $s \rightarrow +\infty$ . A su vez, también se tiene asegurado (consultar el Corolario A.6.3 en el Apéndice) el hecho de que, para  $s$  suficientemente grande  $k \equiv k(s) \rightarrow +\infty$ , ya que  $k(s) > s$  cuando  $s \rightarrow +\infty$ .

De forma trivial (consultar el Lema A.6.2 del Apéndice) también se puede comprobar que entonces existe  $C > 0$  y  $s_1 \in \mathbb{N}^*$  tales que, para todo  $s \geq s_1$ , existen puntos  $\{\mathbf{a}_1^s, \dots, \mathbf{a}_\Lambda^s\} \subset D^s$  verificando

$$\langle \mathbf{a}_i^0 - \mathbf{a}_i^s \rangle_2 \leq \frac{C}{s}, \quad \forall i = 1, \dots, \Lambda, \quad \forall s \geq s_1. \quad (1.3.12)$$

Sean ahora, para un cierto valor de  $r \in \mathbb{N}$  fijado, una función  $g \in \mathcal{C}^{n(r)+1}(D)$  y  $\mathcal{E}$  un subconjunto de  $\mathbb{R}_+^*$  que admite al punto  $0 \in \mathbb{R}$  como punto de acumulación.

Siguiendo el planteamiento general para la aproximación de la solución de cualquier problema mediante el método de los elementos finitos (ver la Sección A.11 en el Apéndice), consideremos para cada  $h \in \mathcal{E}$ , una triangulación  $\mathcal{T}_h$ , uniforme de tipo  $\Delta^1$  de  $\bar{D}$ , tal que  $h$  sea el diámetro máximo de los triángulos de  $\mathcal{T}_h$ . Sea  $\mathcal{T}_h^{PS}$  la subtriangulación de Powell-Sabin asociada a  $\mathcal{T}_h$  y denotemos por  $\Pi_h g \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T})$  la única función que interpola los valores de  $g$  y de sus derivadas parciales hasta orden  $r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$  en todos los vértices de  $\mathcal{T}_h$ .

**Lema 1.3.2** *Existen constantes  $C_0, C_1, \dots, C_{r+1} > 0$ , pudiendo depender tan sólo de  $r$  y  $g$ , tal que para todo  $h \in \mathcal{E}$  se tiene que*

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{D}} |(\Pi_h g - g)(\mathbf{x})| \leq C_0 h^{n(r)+1} \quad (1.3.13)$$

y

$$|\Pi_h g - g|_m \leq C_m h^{n(r)+1-m}, \quad \forall m = 1, \dots, r+1. \quad (1.3.14)$$

**Observación 1.3.3** *La acotación (1.3.13) se sigue del Theorem 2 en [39], y la Ecuación (1.3.14) se sigue del Remark 2.1 de [29] tomando  $n = p = 2, \Omega = D, k = n$  y  $s = r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ .*

**Demostración.** Teniendo en cuenta que existen constantes  $C_m > 0$  tales que se satisface

$$|\Pi_h g - g|_m \leq C_m \max_{\mathbf{x} \in \bar{D}, |\beta|=m} |\partial^\beta (\Pi_h g - g)(\mathbf{x})| \quad \forall m = 1, \dots, r+1,$$

del Teorema de la Section 5 en [51], usando las técnicas de fórmulas de Taylor multipunto (ver [17]), también deducimos que existen constantes  $C_0, C'_1, \dots, C'_{r+1}$ , dependiendo de  $r$  y  $g$ , pero no de  $h$  ni de  $T \in \mathcal{T}_h$ , tales que

$$\max_{\mathbf{x} \in T} |(\Pi_h g - g)(\mathbf{x})| \leq C_0 h^{n(r)+1} \quad \text{y}$$

$$\max_{\substack{\mathbf{x} \in T \\ |\beta|=m}} |\partial^\beta (\Pi_h g - g)(\mathbf{x})| \leq C'_m h^{n(r)+1-m} \quad \text{para } m = 1, \dots, r+1$$

para todo  $T \in \mathcal{T}$ , del que concluiríamos (1.3.13). Además

$$\begin{aligned} |\Pi_h g - g|_m^2 &\leq \sum_{|\beta|=m} \int_D \left( \max_{\mathbf{x} \in D} |\partial^\beta (\Pi_h g - g)(\mathbf{x})| \right)^2 dx \\ &\leq n_j \cdot \text{meas}(D) \cdot (C'_j)^2 (h^{n(r)+1-m})^2, \end{aligned}$$

siendo  $n_j$  el número de derivadas parciales de orden  $m$  para cada  $m = 1, \dots, r+1$  y, por lo tanto, también obtendríamos (1.3.14). ■

**Observación 1.3.4** *De acuerdo con el artículo [51], cuando  $r = 1$  estas acotaciones (1.3.13) y (1.3.14) también son válidas en el caso de  $\alpha$ -triangulaciones no necesariamente uniformes, por lo que todos los resultados que enunciaremos a continuación basándonos en ellas serán fácilmente extensibles en dicho caso a  $\alpha$ -triangulaciones que no sean necesariamente de tipo  $\Delta^1$ .*

**Teorema 1.3.5** *Supongamos que, además de la condición (1.3.11), también se verifican las siguientes:*

$$\text{Existen } C > 0 \text{ y } s_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tales que } k(s) \leq C s^2 \text{ para todo } s \geq s_0; \quad (1.3.15)$$

$$\tau_{r+1} = o(s^2), \quad s \rightarrow +\infty; \quad (1.3.16)$$

$$\tau_m = o(\tau_{r+1}), \quad s \rightarrow +\infty, \quad \forall m = 1, \dots, r; \quad (1.3.17)$$

$$\frac{s^2 h^{2n(r)+2}}{\tau_{r+1}} = o(1), \quad s \rightarrow +\infty. \quad (1.3.18)$$

Sea  $\sigma^s$  la única solución del Problema (1.2.4)  $\Leftrightarrow$  (1.2.5) para la triangulación  $\mathcal{T}_h^{PS}$  fijada anteriormente. Entonces,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \|g - \sigma^s\| = 0. \quad (1.3.19)$$

**Observación 1.3.6** *Antes de proceder con la demostración, indicaremos esquemáticamente las principales ideas de la misma: De (1.3.16) y (1.3.18) podemos deducir que  $h \rightarrow 0$ , que junto a (1.3.15) y (1.3.17) nos permite concluir que  $|\sigma^s|_{r+1}$  se mantiene acotada cuando  $s \rightarrow +\infty$ . Usando a continuación las acotaciones del Lema 1.3.2 concluiremos que también  $\|\sigma^s\|$  lo está cuando  $s \rightarrow +\infty$  y, por lo tanto, la sucesión  $\{\sigma^s\}_{s \in \mathbb{N}}$  tendrá una sub-sucesión convergente hacia  $g$ , de manera que finalmente se puede conseguir que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \|g - \sigma^s\| = 0$ .*

**Demostración.** Ya que  $\sigma^s$  es la solución del Problema (1.2.4), tendremos que

$$\mathcal{J}^s(\sigma^s) \leq \mathcal{J}^s(\Pi_h g),$$

es decir:

$$\langle \rho^s(\sigma^s - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |\sigma^s|_m^2 \leq \langle \rho^s(\Pi_h g - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |\Pi_h g|_m^2. \quad (1.3.20)$$

Aplicando (1.3.13) también sabemos que existe  $C_0 > 0$  tal que para todo  $\mathbf{a} \in D^s$

$$(\Pi_h g(\mathbf{a}) - g(\mathbf{a}))^2 \leq C_0 h^{2n+2}$$

y usando (1.3.14) junto con (1.3.15) también podemos escribir que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_{r+1}} \langle \rho^s(\sigma^s - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^r \frac{\tau_m}{\tau_{r+1}} |\sigma^s|_m^2 + |\sigma^s|_{r+1}^2 \quad (1.3.21) \\ & \leq \frac{1}{\tau_{r+1}} \langle \rho^s(\Pi_h g - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^r \frac{\tau_m}{\tau_{r+1}} |\Pi_h g|_m^2 + |\Pi_h g|_{r+1}^2 \\ & \leq \frac{k(s) C_0 h^{2n(r)+2}}{\tau_{r+1}} + \sum_{m=1}^r \frac{\tau_m}{\tau_{r+1}} (|\Pi_h g - g|_m^2 + |\Pi_h g - g|_{r+1}^2) \\ & \leq \frac{\tilde{C}_0 s^2 h^{2n(r)+2}}{\tau_{r+1}} + \sum_{m=1}^r \frac{\tau_m}{\tau_{r+1}} (C_m h^{n(r)+1-m} + |g|_m)^2 + (C_{r+1} h^{n(r)-r} + |g|_{r+1})^2 \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

para todo  $s \geq s_0$  y cierta constante  $\tilde{C}_0 > 0$ .

Además, de (1.3.16) y (1.3.18) obtenemos que

$$h = o(1), \quad \text{cuando } s \rightarrow +\infty, \quad (1.3.23)$$

y teniendo en cuenta (1.3.17) y (1.3.18) también podremos asegurar la existencia de  $\hat{C} > 0$  y  $s_1 \in \mathbb{N}^*$  tales que, para todo  $s \geq s_1$  se tendrá la siguiente



acotación

$$\frac{\tilde{C}_0 s^2 h^{2n+2}}{\tau_{r+1}} + \sum_{m=1}^r \frac{\tau_m}{\tau_{r+1}} (C_m h^{n+1-m} + |g|_m)^2 + (C_{r+1} h^{n-r} + |g|_{r+1})^2 \leq \widehat{C}. \quad (1.3.24)$$

Usando ahora (1.3.21) y (1.3.24) obtenemos pues que

$$\langle \rho^s (\sigma^s - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |\sigma^s|_m^2 \leq \langle \rho^s (\Pi_h g - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |\Pi_h g|_m^2 \leq \tau_{r+1} \widehat{C} \quad (1.3.25)$$

con lo que también será

$$\langle \rho^s (\sigma^s - g) \rangle_k^2 \leq \widehat{C} \tau_{r+1} \quad \text{y} \quad |\sigma^s|_{r+1}^2 \leq \widehat{C}, \quad \forall s \geq s_1. \quad (1.3.26)$$

Pero más concretamente, usando (1.3.20), (1.3.21) y (1.3.22) obtenemos que

$$\begin{aligned} |\sigma^s|_{r+1}^2 &\leq \frac{1}{\tau_{r+1}} \langle \rho^s (\sigma^s - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^r \frac{\tau_m}{\tau_{r+1}} |\sigma^s|_m^2 + |\sigma^s|_{r+1}^2 \\ &\leq \frac{1}{\tau_{r+1}} \langle \rho^s (\Pi g - g) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^r \frac{\tau_m}{\tau_{r+1}} |\Pi g|_m^2 + |\Pi g|_{r+1}^2 \\ &\leq \frac{\tilde{C}_0 s^2 h^{2n+2}}{\tau_{r+1}} + \sum_{m=1}^r \frac{\tau_m}{\tau_{r+1}} (C_m h^{n+1-m} + |g|_m)^2 + (C_{r+1} h^{n-r} + |g|_{r+1})^2, \end{aligned}$$

y utilizando (1.3.17), (1.3.18) y (1.3.23) obtenemos

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} |\sigma^s|_{r+1}^2 \leq |g|_{r+1}^2. \quad (1.3.27)$$

El resto de la demostración es análoga a la del Teorema VI-3.2 en [2] (desde el paso 2), con  $s$ ,  $D^s$ ,  $\Lambda$  y  $r$  en vez de  $d$ ,  $A^d$ ,  $\mathfrak{M}$  y  $m-1$ , respectivamente, no obstante la reproducimos a continuación con las necesarias adaptaciones:

Recordamos que  $A^0 = \{\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \dots, \mathbf{a}_\Lambda^0\}$  es un subconjunto  $\mathbb{P}_r$ -unisolvante de  $D$ ,  $s_1$  y  $C$  constantes satisfaciendo (1.3.12) y sea  $s'_1 \geq s_1$  tal que

$$\overline{B} \left( \mathbf{a}_j^0, \frac{C}{s'_1} \right) \subset \overline{D}, \quad \forall j \in \{1, \dots, \Lambda\}.$$

Además, de (1.3.11) y (1.3.12) podemos concluir que

$$\overline{B} \left( \mathbf{a}_j^0, \frac{C}{s'_1} - \frac{C}{s} \right) \subset \bigcup_{\mathbf{a} \in D^s \cap \overline{B} \left( \mathbf{a}_j^0, \frac{C}{s'_1} \right)} \overline{B} \left( \mathbf{a}, \frac{C}{s} \right) \quad \forall s \geq s'_1 \text{ y } j \in \{1, \dots, \Lambda\},$$

ya que, de suponer lo contrario, llegaríamos a la conclusión de que, para algún que otro índice  $j = 1, \dots, \Lambda$ , habría puntos

$$\mathbf{x} \in \overline{B}\left(\mathbf{a}_j^0, \frac{C}{s'_1} - \frac{C}{s}\right) \subset \overline{B}\left(\mathbf{a}_j^0, \frac{C}{s'_1}\right) \subset \overline{D}$$

que, para valores  $s \geq s'_1$ , no estarán en ninguna de las bolas  $\overline{B}\left(\mathbf{a}, \frac{C}{s}\right)$ , con  $\mathbf{a} \in D^s \cap \overline{B}\left(\mathbf{a}_j^0, \frac{C}{s'_1}\right)$ , llegándose a una contradicción con (1.3.11) y (1.3.12).

Si denotamos ahora  $N_j = \text{card}\left(D^s \cap \overline{B}\left(\mathbf{a}_j^0, \frac{C}{s'_1}\right)\right)$ , entonces tenemos que

$$\left(\frac{C}{s'_1} - \frac{C}{s}\right)^2 \leq N_j \left(\frac{C}{s}\right)^2 \quad \text{para todo } s \geq s'_1 \text{ y } j \in \{1, \dots, \Lambda\}$$

y, consecuentemente,

$$N_j \geq \left(\frac{1}{s'_1} - \frac{1}{s}\right)^2 s^2 \quad \text{para todo } s \geq s'_1 \text{ y } j \in \{1, \dots, \Lambda\}. \quad (1.3.28)$$

Por otro lado, de (1.3.16) y (1.3.26) deducimos que, para todo  $j \in \{1, \dots, \Lambda\}$

$$\sum_{\mathbf{a} \in D^s \cap \overline{B}\left(\mathbf{a}_j^0, \frac{C}{s'_1}\right)} |\sigma^s(\mathbf{a}) - g(\mathbf{a})|^2 = o(s^2), \quad \text{cuando } s \rightarrow +\infty. \quad (1.3.29)$$

Además, para todo  $s \geq s'_1$  y  $j = 1, \dots, \Lambda$ , existe al menos un punto  $\mathbf{a}_j^s \in D^s \cap \overline{B}\left(\mathbf{a}_j^0, \frac{C}{s'_1}\right)$  tal que

$$\left|\sigma^s(\mathbf{a}_j^s) - g(\mathbf{a}_j^s)\right| = \min_{\mathbf{a} \in D^s \cap \overline{B}\left(\mathbf{a}_j^0, \frac{C}{s'_1}\right)} |\sigma^s(\mathbf{a}) - g(\mathbf{a})|. \quad (1.3.30)$$

De (1.3.28), (1.3.29) y (1.3.30) tenemos que

$$|\sigma^s(\mathbf{a}_j^s) - g(\mathbf{a}_j^s)| = o(1), \quad s \rightarrow +\infty. \quad (1.3.31)$$

Sea ahora  $A^s = \{\mathbf{a}_1^s, \dots, \mathbf{a}_\Lambda^s\} \subset D^s$ . Aplicando el Lema A.4.19 obtenemos que la aplicación  $[[\cdot]]^s$  definida por

$$[[v]]^s = \left( \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2 + |v|_{r+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es también una norma uniformemente equivalente, respecto a  $s$ , a la norma habitual en el espacio  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ , para cada  $s \geq s^*$  y  $s^* \in \mathbb{N}$  apropiado; pongamos por ejemplo

$$\alpha \|v\| \leq [[v]]^s \leq \beta \|v\| \quad (1.3.32)$$

para ciertas constantes positivas  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

A su vez, de (1.3.32), (1.3.27) y (1.3.31) también deducimos la existencia de otra constante  $C > 0$  y cierto  $\widehat{s}^* \in \mathbb{N}$  de manera que

$$\|\sigma^s\| \leq \frac{1}{\alpha} [[v]]^s \leq C \quad \text{para todo } s \geq \widehat{s}^*,$$

lo cual implica a su vez que la sucesión  $\{\sigma^s\}_{s \geq \widehat{s}^*}$  está acotada en  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  y, como consecuencia, existirá una subsucesión  $\{\sigma^{s_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\{\sigma^s\}_{s \geq \widehat{s}^*}$ , con  $\lim_{k \rightarrow +\infty} s_k = +\infty$ ,  $\tau_k = \tau(s_k)$  y  $h = h(s_k)$ , así como un elemento  $g^* \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$  para el que

$$\sigma^{s_k} \text{ converge débilmente hacia } g^* \text{ en } \mathcal{H}^{r+1}(D). \quad (1.3.33)$$

Si suponemos ahora que  $g^* \neq g$  entonces, usando la inyección compacta de  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  en  $\mathcal{C}^0(\overline{D})$ , obtendríamos que existe  $\theta > 0$  y un conjunto abierto  $D_0 \subset D$  tal que  $|g(\mathbf{x}) - g^*(\mathbf{x})| > \theta$  para todo  $\mathbf{x} \in D_0$ ; y de (1.3.33) obtendríamos a su vez  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  tal que  $|g^*(\mathbf{x}) - \sigma^{s_k}(\mathbf{x})| \leq \frac{\theta}{2}$  para todo  $k \geq k_0$  y  $\mathbf{x} \in D_0$ .

Como consecuencia, tenemos que

$$|g(\mathbf{x}) - \sigma^{s_k}(\mathbf{x})| \geq |g(\mathbf{x}) - g^*(\mathbf{x})| - |g^*(\mathbf{x}) - \sigma^{s_k}(\mathbf{x})| > \frac{\theta}{2}, \quad (1.3.34)$$

para todo  $k \geq k_0$  y  $\mathbf{x} \in D_0$ .

Sin embargo, de (1.3.11) y (1.3.31) deducimos que, para  $k$  suficientemente grande, existe un punto  $\mathbf{a}^{s_k} \in D^{s_k} \cap D_0$  verificando

$$|\sigma^{s_k}(\mathbf{a}^{s_k}) - g(\mathbf{a}^{s_k})| = o(1), \text{ cuando } k \rightarrow +\infty$$

lo cual contradice la segunda desigualdad en (1.3.26), y por lo tanto

$$g^* = g. \quad (1.3.35)$$

Por otro lado, para todo  $k \in \mathbb{N}$  tenemos que

$$|\sigma^{s_k} - g|_{r+1}^2 = |\sigma^{s_k}|_{r+1}^2 + |g|_{r+1}^2 - 2(\sigma^{s_k}, g)_{r+1},$$

y, usando (1.3.33), (1.3.35) y (1.3.24) obtenemos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\sigma^{s_k} - g|_{r+1} = 0. \quad (1.3.36)$$

Además, como  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  está inyectado compactamente en  $\mathcal{H}^r(D)$ , usando (1.3.33) y (1.3.35) también tenemos que

$$g = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma^{s_k} \text{ en } \mathcal{H}^r(D),$$

que conjuntamente con (1.3.36) nos permitirá afirmar que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\sigma^{s_k} - g\| = 0.$$

Supongamos que (1.3.19) no se satisface. Entonces existirían  $\alpha > 0$  y subsucesiones  $\{s'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , con  $\lim_{k \rightarrow +\infty} s'_k = +\infty$  tales que

$$\|\sigma^{s'_k} - g\| > \alpha \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (1.3.37)$$

Como la sucesión  $\{\sigma^{s'_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  estaría igualmente acotada en  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ , un argumento similar al empleado para  $\{\sigma^{s_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  probaría la existencia de otra subsucesión de  $\{\sigma^{s'_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  que también convergería hacia  $g$  en  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ , que está en contradicción con (1.3.37). Por lo tanto (1.3.19) debe cumplirse. ■

## 1.4. Estimación de los parámetros de suavizado y obtención de los valores óptimos

Fijemos una  $\alpha$ -triangulación  $\mathcal{T}$  del dominio poligonal  $\overline{D}$ , ya sea uniforme de tipo  $\Delta^1$  o bien no uniforme, así como su triangulación de Powell-Sabin asociada  $\mathcal{T}^{PS}$ . Consideremos dados también, el conjunto de puntos  $D^s \subset D$ , la función  $g \in \mathcal{C}^{n+1}(D)$  y, para cualesquiera valores dados de los parámetros de suavizado  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{r+1})$ , la correspondiente solución  $\sigma_\tau \in \mathcal{S}_n^{r, r + \lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$  del Problema (1.2.5).

Como ya se ha visto en la sección anterior, dada una base de funciones con soporte local  $\{v_1, \dots, v_N\}$  del espacio de elementos finitos  $\mathcal{S}_n^{r, r + \lceil \frac{r}{2} \rceil}(D, \mathcal{T})$ , sea para  $m = 1, \dots, r + 1$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, N}} \equiv (v_j(\mathbf{a}_i)) \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_m = ((v_i, v_j)_m)_{i,j=1}^N.$$

Si  $\sigma_\tau = \sum_{i=1}^N \beta_i v_i$  es la expansión de  $\sigma_\tau$  como combinación lineal de la base  $\{v_1, \dots, v_N\}$ , entonces (1.2.5) da lugar al sistema lineal (1.2.10), donde la matriz del sistema se puede expresar ahora como sigue

$$C \equiv \left( A^\top A + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m \mathcal{R}_m \right).$$

A continuación, damos un método para determinar valores óptimos de los parámetros  $\tau$  que minimizan el error  $\|\sigma_\tau - g\|_0^2$ . Para ello, buscaremos

el vector  $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_i)_{i=1}^N$  que minimice la expresión (siendo  $\|\cdot\|_0 \equiv |\cdot|_0$  la seminorma, ver (2), que es una norma en  $\mathcal{L}^2$ )

$$R(\beta_1, \dots, \beta_N) = \left\| \sum_{j=1}^N \beta_j v_j - g \right\|_0^2.$$

Ya que

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_i} = 2 \left( \sum_{j=1}^N \beta_j v_j - g, v_i \right)_0, \text{ para todo } i = 1, \dots, N,$$

entonces  $\bar{\beta}$  deberá ser la solución del sistema lineal  $MX = L$ , donde

$$M = \left( \int_D v_i v_j \right)_{i,j=1}^N \quad \text{y} \quad L = \left( \left( \int_D g v_i \right)_{i=1}^N \right)^\top.$$

En general, no existirán parámetros  $\tau$  tales que la solución del sistema lineal (1.2.9) sea  $\bar{\beta}$ ; es decir, si denotamos

$$\mathcal{R}'_m = \mathcal{R}_m \bar{\beta} \quad \text{y} \quad B' = B - A^\top A \bar{\beta},$$

no encontraremos  $\{\tau_i\}_{i=1}^{r+1}$  tales que  $\sum_{m=1}^{r+1} \tau_m \mathcal{R}'_m = B'$ .

Por lo tanto, consideraremos la mejor aproximación (en el sentido de los mínimos cuadrados) de  $B'$  en el conjunto

$$\mathcal{X} = \left\{ \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m \mathcal{R}'_m \in \mathbb{R}^N : \tau_i \geq 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, r+1 \right\}. \quad (1.4.38)$$

Es decir, buscaremos la solución del siguiente problema:

**Problema 1.4.1** *Encontrar  $\bar{\tau} = (\bar{\tau}_i)_{i=1}^{r+1}$  tal que*

$$\left\langle B' - \sum_{m=1}^{r+1} \bar{\tau}_m \mathcal{R}'_m \right\rangle_N^2 = \min_{\tau_i \geq 0} \left\langle B' - \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m \mathcal{R}'_m \right\rangle_N^2. \quad (1.4.39)$$

**Observación 1.4.2** *Obviamente, si existe un vector de parámetros  $\bar{\tau} = (\bar{\tau}_i)_{i=1}^{r+1}$  tal que la solución del sistema lineal (1.2.9) sea  $\bar{\beta}$ , entonces  $\bar{\tau}$  será la solución del Problema (1.4.39).*

Ya que  $\mathcal{X}$  en (1.4.38) es un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de  $\mathbb{R}^N$ , el Problema (1.4.39) tendrá una única solución  $\sum_{m=1}^{r+1} \bar{\tau}_m \mathcal{R}'_m$ . Aplicando las condiciones de Kuhn-Tucker (ver por ejemplo [46]) encontraremos que si

$\bar{\tau} = \{\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_{r+1}\}$  es la solución del Problema (1.4.39), entonces existirán  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1}\}$  tales que

$$\begin{cases} -2\langle \mathcal{R}'_i, B' - \sum_{m=1}^{r+1} \bar{\tau}_m \mathcal{R}'_m \rangle_N - \lambda_i = 0 \\ \lambda_i \bar{\tau}_i = 0, \\ \lambda_i \geq 0, \\ \bar{\tau}_i \geq 0, \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, r+1. \quad (1.4.40)$$

Para calcular las soluciones de (1.4.40) consideramos, para cualquier subconjunto  $\kappa$  de  $\{1, \dots, r+1\}$ , las  $(r+1)$ -tuplas  $\{\tau_{\kappa,m}\}_{m=1}^{r+1}$  y  $\{\lambda_{\kappa,m}\}_{m=1}^{r+1}$  en las que  $\lambda_{\kappa,m} = 0$  si y sólo si  $m \in \kappa$ .

Para que  $\{\tau_{\kappa,m}\}_{m=1}^{r+1}$  y  $\{\lambda_{\kappa,m}\}_{m=1}^{r+1}$  sean soluciones de (1.4.40), se deberá cumplir que  $\tau_{\kappa,m} = 0$  si  $m \notin \kappa$ . Los elementos  $\tau_{\kappa,m}$  para  $m \in \kappa$  pueden ser obtenidos como soluciones del sistema lineal  $\langle \mathcal{R}'_i, B' - \sum_{m \in \kappa} \tau_{\kappa,m} \mathcal{R}'_m \rangle_N = 0$  para  $i \in \kappa$ , y los elementos  $\lambda_{\kappa,m}$  para  $m \notin \kappa$  pueden obtenerse a partir de

$$\lambda_{\kappa,m} = -2\langle \mathcal{R}'_m, B' - \sum_{i \in \kappa} \tau_{\kappa,i} \mathcal{R}'_i \rangle_N.$$

Por otro lado, las  $(r+1)$ -tuplas  $\{\tau_{\kappa,m}\}_{m=1}^{r+1}$  y  $\{\lambda_{\kappa,m}\}_{m=1}^{r+1}$  obtenidas de esta manera son soluciones del Problema (1.4.40) si satisfacen  $\lambda_{\kappa,i} \geq 0$  y  $\tau_{\kappa,i} \geq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, r+1\}$ .

## 1.5. Ejemplos numéricos y gráficos

En el caso uniforme, hemos considerado, para diferentes valores de  $k$ , conjuntos  $D^s$  de  $k \equiv k(s)$  puntos arbitrariamente distribuidos sobre  $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1]$ . También hemos tomado, para diferentes valores de  $q$ , particiones uniformes  $\{t_i = \frac{i}{q}\}_{i=0}^q$  del intervalo  $[0, 1]$  en  $q$  subintervalos, de los que obtendremos particiones uniformes de  $\bar{D}$  cuyos elementos son  $\{[t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]\}_{i,j=0}^{q-1}$  y, dividiendo cada rectángulo  $\{[t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]\}$  mediante la diagonal que une los puntos  $(t_i, t_{j+1})$  y  $(t_{i+1}, t_j)$ , obtenemos una  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})$ -triangulación  $\mathcal{T}_h$  de  $\bar{D}$  de tipo  $\Delta^1$  (con  $h = h(q)$ ), formada por  $(q+1)^2$  vértices, de la que consideraremos su triangulación de Powell-Sabin asociada  $\mathcal{T}_h^{PS}$ .

### 1.5.1. Caso de aproximaciones de clase $\mathcal{C}^1$

En las subsecciones A.9.1 y A.13 del Apéndice se detalla la construcción del espacio de elementos finitos  $S_2^{1,1}(D, \mathcal{T})$  sobre la triangulación de Powell-Sabin  $\mathcal{T}^{PS}$  asociada a la triangulación de partida  $\mathcal{T}$ , tanto en el caso uniforme como no uniforme y se trabaja con las funciones de base de dicho espacio.

### Usando $\Delta^1$ -Triangulaciones uniformes

**Ejemplo de la función de Franke.** La Figura 1.1 muestra, en la parte superior izquierda, la gráfica de la función de Franke en  $\bar{D}$ , definida mediante la expresión

$$g(x, y) = \frac{3}{4} \left( e^{-\frac{(9x-2)^2+(9y-2)^2}{4}} + e^{-\frac{(9x+1)^2-(9y+1)^2}{10} - \frac{(9y+1)^2}{49}} \right) + \frac{1}{2} e^{-\frac{(9y-7)^2+(9x-3)^2}{4}} - \frac{1}{5} e^{-(9y-4)^2-(9x-7)^2}. \quad (1.5.41)$$

En la literatura también se considera a veces como función de Franke otra similar, intercambiando los papeles de las variables  $x$  e  $y$ .

En la Figura 1.1 también se muestran las superficies de aproximación obtenidas para diferentes valores de  $k$ ,  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , así como para diferentes triangulaciones  $\mathcal{T}_h$ .

La gráfica superior izquierda en la Figura 1.1 muestra la propia función de Franke en el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Los valores de los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau_2$  en las restantes gráficas han sido elegidos de manera que se obtengan superficies de aproximación con diferentes grados de “suavidad” y “cercanía” a la gráfica de la función original.

Por ejemplo, en las superficies representadas abajo, tanto a la izquierda como a la derecha de la Figura 1.1 consideramos valores pequeños de los parámetros  $\tau \equiv (\tau_1, \tau_2)$ , (en  $\mathcal{T}_{h(15)}$  con valores  $k = 1600$ ,  $\tau_1 = 10^{-2}$ ,  $\tau_2 = 10^{-5}$  y en  $\mathcal{T}_{h(30)}$  con  $k = 2500$ ,  $\tau_1 = 10^{-5}$ ,  $\tau_2 = 10^{-5}$ , respectivamente) de tal manera que el sumando del funcional  $\mathcal{J}^s$  relacionado con la aproximación en el sentido de los mínimos cuadrados del conjunto de datos puntuales tenga más peso relativo a la hora de minimizar dicho funcional, tal y cómo puede comprobarse en las figuras. Por el contrario, la superficie de aproximación de arriba a la derecha en la Figura 1.1 ha sido obtenida para valores mayores de los parámetros  $\tau$  (concretamente para  $q = 5$ ,  $k = 1000$ ,  $\tau_1 = 10^{-2}$ ,  $\tau_2 = 10^{-2}$ ), obteniéndose como resultado una superficie más suave que las otras dos, pero que no reproduce tan bien la aproximación al conjunto de datos puntuales proporcionados.

Las estimaciones del error han sido calculadas usando la siguiente fórmula del error relativo:

$$E_{rel} = \left( \frac{\sum_{j=1}^{2500} (g(\mathbf{b}_j) - \sigma_\tau(\mathbf{b}_j))^2}{\sum_{j=1}^{2500} g(\mathbf{b}_j)^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.5.42)$$

donde  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{2500}\}$  son puntos arbitrarios en  $[0, 1]^2$ ,  $g$  es la función de Franke (o de Nielson) y  $\sigma = \sigma_\tau^s$ .

La Tabla 1.1 muestra la estimación del error obtenida para el caso  $k = 5000$ , diferentes valores de los parámetros  $\tau$  y varias triangulaciones  $\mathcal{T}_h$ , con  $h \equiv h(q) = \frac{\sqrt{2}}{q}$ .

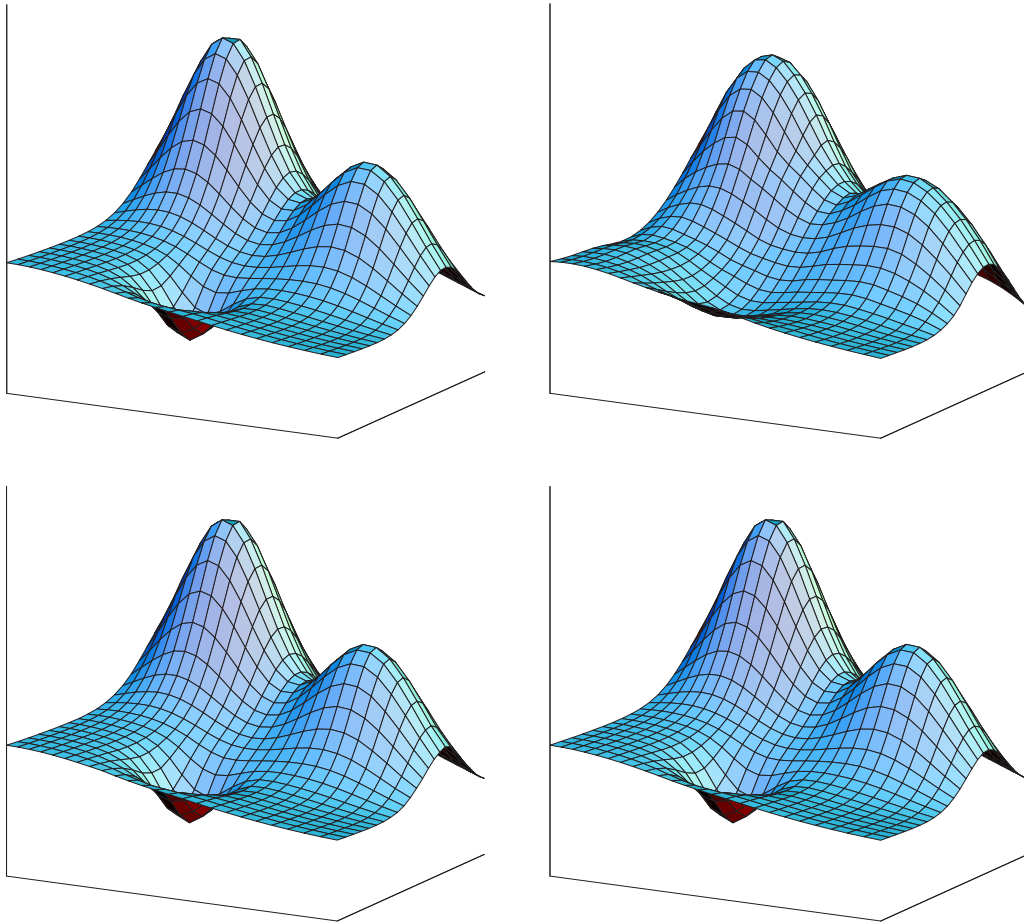


Figura 1.1: Función de Franke (arriba a la izquierda) y diferentes splines de aproximación: arriba a la derecha en  $\mathcal{T}_{h(5)}$  con  $k = 1000$ ,  $\tau_1 = 10^{-2}$ ,  $\tau_2 = 10^{-2}$ , abajo izda. en  $\mathcal{T}_{h(15)}$  con  $k = 1600$ ,  $\tau_1 = 10^{-2}$ ,  $\tau_2 = 10^{-5}$  y abajo dcha. en  $\mathcal{T}_{h(30)}$  con  $k = 2500$ ,  $\tau_1 = 10^{-5}$ ,  $\tau_2 = 10^{-5}$ .



$\tau_1$	$\tau_2$	$\mathcal{T}_{h(5)}$	$\mathcal{T}_{h(10)}$	$\mathcal{T}_{h(20)}$	$\mathcal{T}_{h(30)}$	$\mathcal{T}_{h(40)}$
$10^{-2}$	$10^{-2}$	$3,37 \cdot 10^{-2}$	$1,61 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$1,35 \cdot 10^{-2}$	$1,36 \cdot 10^{-2}$
$10^{-2}$	$10^{-5}$	$2,53 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3,85 \cdot 10^{-4}$	$3,71 \cdot 10^{-4}$
$10^{-5}$	$10^{-5}$	$2,53 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-3}$	$2,54 \cdot 10^{-4}$	$1,26 \cdot 10^{-4}$	$1,49 \cdot 10^{-4}$
0	$10^{-8}$	$2,53 \cdot 10^{-2}$	$2,49 \cdot 10^{-3}$	$2,49 \cdot 10^{-4}$	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$9,83 \cdot 10^{-5}$

Tabla 1.1: Caso  $k = 5000$ , diferentes valores de los parámetros y varias triangulaciones  $\mathcal{T}_h$ .

**Ejemplo de la función de Nielson.** En este caso, hemos considerado la función de Nielson, definida mediante la fórmula

$$g(x, y) = \frac{y}{2} \cos(4(x^2 + y - 1))^4, \quad (1.5.43)$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 1.2, junto con las superficies de aproximación obtenidas para diferentes valores de  $k$ ,  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , así como para diferentes triangulaciones  $\mathcal{T}_{h(q)}$ .

El mismo criterio que se ha seguido para obtener las diferentes superficies de aproximación para la función test de Franke y su error relativo (1.5.42) es el que se ha seguido también ahora para la función de Nielson. Los errores cometidos en las aproximaciones indicadas de la Figura 1.2 son  $E = 2,21 \cdot 10^{-2}$ ,  $E = 6,68 \cdot 10^{-3}$  y  $E = 2,28 \cdot 10^{-3}$ , respectivamente.

### Usando $\alpha$ -Triangulaciones no uniformes.

Por otro lado, con el objeto de prestar especial atención a la parte del pequeño hoyo que presenta la función de Franke, también hemos generado alguna superficie de aproximación spline construida sobre una triangulación de Powell-Sabin no uniforme  $\mathcal{T}_*$  de  $\bar{D}$ . Esta pequeña depresión aparece en la gráfica de la función de Franke localizada en el subdominio  $D' = ]\frac{6}{10}, \frac{9}{10}[ \times ]\frac{3}{10}, \frac{6}{10}[$  de  $D$ . Por lo tanto, la idea es considerar triangulaciones  $\mathcal{T}_*$  donde se realice un refinamiento de  $\mathcal{T} \equiv \mathcal{T}_h$  (para  $q = 10$ ) sustituyendo  $\mathcal{T}|_{D'}$  por otra triangulación uniforme de  $D'$  en otros triángulos más pequeños (72 en nuestro ejemplo), y reemplazando apropiadamente los triángulos que rodean  $D'$  con el objeto de asegurar que finalmente resulte una triangulación permitida (consultar por ejemplo la Figura A.1 el Apéndice), tal y como se muestra en la Figura 1.3. A su vez, en la Figura 1.5.1 mostramos la subtriangulación de Powell-Sabin asociada a  $\mathcal{T}_*$ , que sigue siendo una  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}})$ -triangulación, aunque no uniforme.

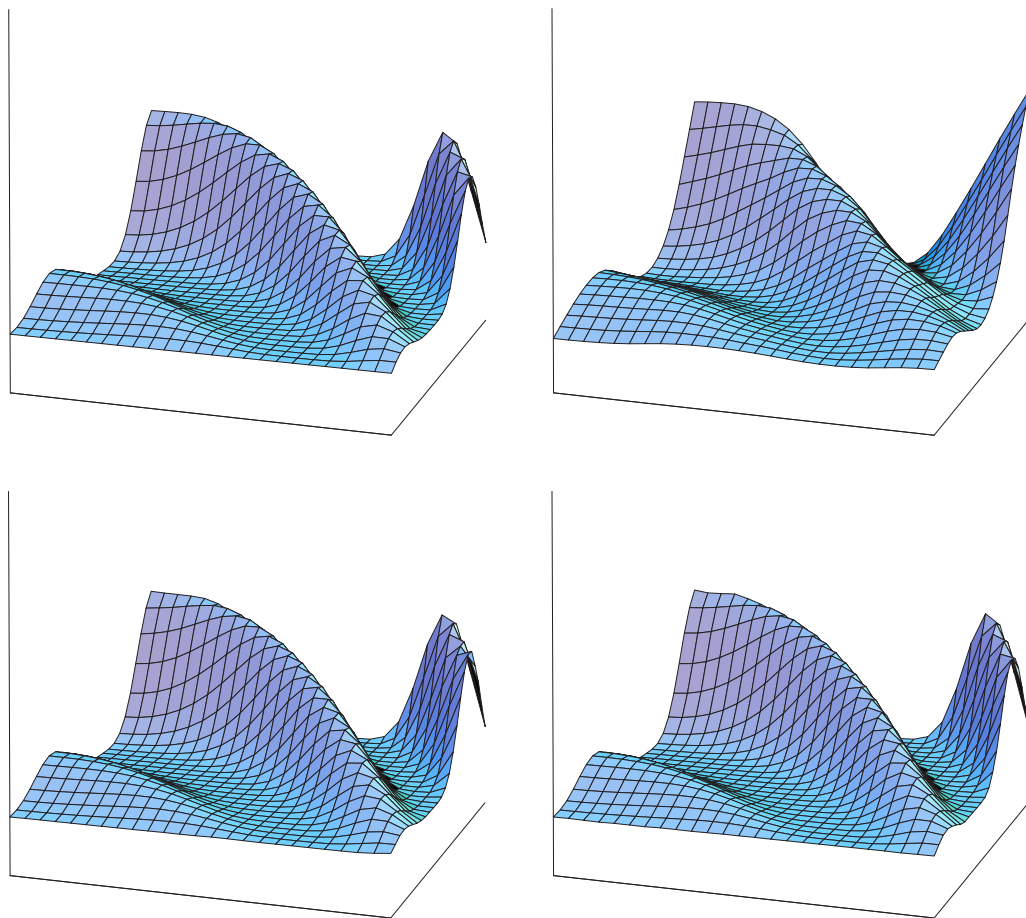


Figura 1.2: Función de Nielsen (arriba a la izquierda) y diferentes splines de aproximación: arriba a la derecha en  $\mathcal{T}_{h(5)}$  con  $k = 1000$ ,  $\tau_1 = 10^{-2}$ ,  $\tau_2 = 10^{-2}$ , abajo izda. en  $\mathcal{T}_{h(15)}$  con  $k = 1600$ ,  $\tau_1 = 10^{-2}$ ,  $\tau_2 = 10^{-5}$  y abajo dcha. en  $\mathcal{T}_{h(30)}$  con  $k = 2500$ ,  $\tau_1 = 10^{-5}$ ,  $\tau_2 = 10^{-5}$ .

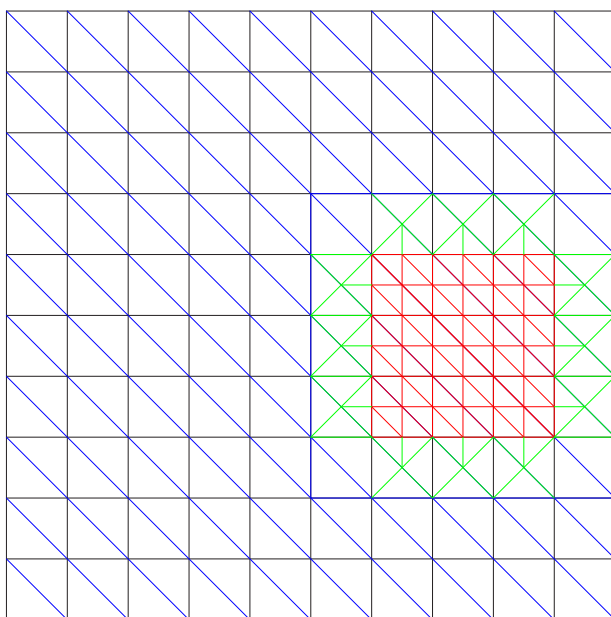


Figura 1.3: Triangulación no uniforme  $\mathcal{T}_*$  de  $\bar{D}$ .

El lema de acotación 1.3.2 así como el Teorema principal 1.3.5, demostrado en principio para el caso de  $\Delta^1$ -triangulaciones, pueden ser extendidos sin mayor problema en el caso de aproximaciones spline cuadráticas de clase  $\mathcal{C}^1$  para  $\alpha$ -triangulaciones no uniformes, tal y cómo se tiene publicado en el artículo [6]. Así pues, queda completamente justificado en este caso el empleo de  $\alpha$ -triangulaciones no uniformes, que es lo que hemos hecho para mejorar en cierta medida la aproximación de la función de Franke.

Las Tablas 1.2 y 1.3, muestran las estimaciones de error en los casos  $k = 100$  y  $k = 2000$ , respectivamente, para diferentes valores de  $\tau$  usando la triangulación no uniforme  $\mathcal{T}_*$  y las triangulaciones uniformes  $\mathcal{T}_{h(10)}$ , notándose en todo caso una mejora de dichos errores, que puede llegar a ser algo más significativa para ciertos valores concretos de los parámetros  $\tau$  en el caso de las triangulaciones no uniformes.

### 1.5.2. Caso de aproximaciones de clase $\mathcal{C}^2$

En los ejemplos presentados a continuación, buscaremos superficies de clase  $\mathcal{C}^2$ , por lo que el espacio vectorial de elementos finitos considerado es

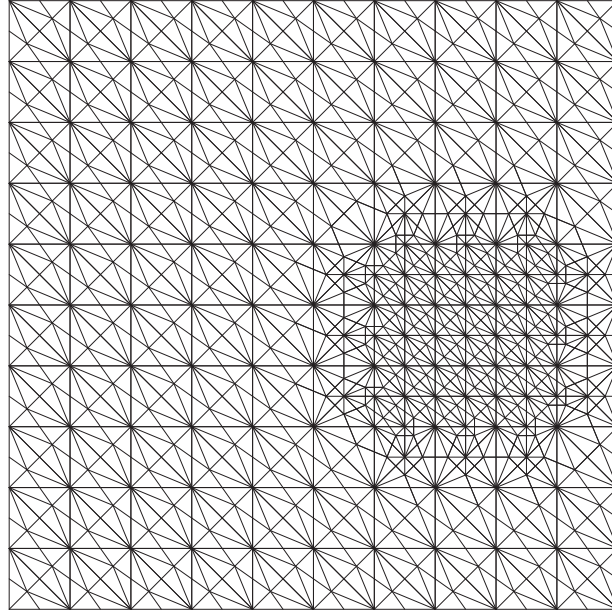


Figura 1.4: Triangulación de Powell-Sabin asociada a la triangulación  $\mathcal{T}_*$ .

$\tau_1$	$\tau_2$	$\mathcal{T}_*$	$\mathcal{T}_{h(10)}$
$10^{-2}$	$10^{-2}$	$1,25 \cdot 10^{-1}$	$1,43 \cdot 10^{-1}$
$10^{-2}$	$10^{-5}$	$5,58 \cdot 10^{-2}$	$5,91 \cdot 10^{-2}$
$10^{-5}$	$10^{-5}$	$1,26 \cdot 10^{-2}$	$1,38 \cdot 10^{-2}$
0	$10^{-8}$	$1,18 \cdot 10^{-2}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$

Tabla 1.2: Valores del error con  $k = 100$  puntos.

$\tau_1$	$\tau_2$	$\mathcal{T}_*$	$\mathcal{T}_{h(10)}$
$10^{-2}$	$10^{-2}$	$1,66 \cdot 10^{-4}$	$2,37 \cdot 10^{-2}$
$10^{-2}$	$10^{-5}$	$1,12 \cdot 10^{-3}$	$1,43 \cdot 10^{-3}$
$10^{-5}$	$10^{-5}$	$1,04 \cdot 10^{-3}$	$1,35 \cdot 10^{-3}$
0	$10^{-8}$	$1,21 \cdot 10^{-3}$	$1,34 \cdot 10^{-3}$

Tabla 1.3: Valores del error con  $k = 2000$  puntos.

$\mathcal{S}_5^{2,3}(D, \mathcal{T})$ , formado por los splines bivariados de clase global 2 (aunque resulten de clase 3 en cada triángulo de la triangulación de partida  $\mathcal{T}$ , incluidos todos sus vértices) construidos mediante polinomios quínticos (de grado total no superior a 5) en cada subtriángulo de la triangulación de Powell-Sabin asociada  $\mathcal{T}^{PS}$ .

La Figura 1.5 muestra las gráficas de la función de Franke (arriba) y las superficies aproximantes para  $q = 4$ ,  $k = 1500$ ,  $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-2}$ ,  $\tau_3 = 10^{-4}$  (en el medio) y  $q = 14$ ,  $k = 1600$ ,  $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-5}$ ,  $\tau_3 = 10^{-8}$  (abajo).

Las estimaciones del error han sido calculadas usando la misma fórmula del error relativo (1.5.42) que en el caso  $\mathcal{C}^1$ . La Tabla 1.4 muestra los errores cometidos para diferentes valores de  $\tau$ ,  $q$  y  $k$ .

Núm. de triáng.	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	Error con 1000 ptos.	Error con 2500 ptos.	Error con 5000 ptos.
162	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$4,95 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$1,54 \cdot 10^{-2}$
162	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-8}$	$4,15 \cdot 10^{-3}$	$2,51 \cdot 10^{-3}$	$2,51 \cdot 10^{-3}$
162	0	0	$10^{-5}$	$1,67 \cdot 10^{-2}$	$1,06 \cdot 10^{-2}$	$8,12 \cdot 10^{-3}$
722	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-5}$	$4,98 \cdot 10^{-2}$	$2,68 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$
722	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$9,51 \cdot 10^{-4}$
722	0	0	$10^{-5}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$1,48 \cdot 10^{-2}$	$8,04 \cdot 10^{-3}$
722	0	0	$10^{-7}$	$1,51 \cdot 10^{-3}$	$1,09 \cdot 10^{-3}$	$8,02 \cdot 10^{-4}$

Tabla 1.4: Tabla de errores para diferentes valores de  $\tau$ ,  $q$  y  $k$ .

### 1.5.3. Ejemplos de estimación de parámetros

En esta sección presentaremos algunos ejemplos numéricos y gráficos de estimación de parámetros para superficies  $\mathcal{C}^2$ . Hemos considerado en primer lugar la conocida función de Nielson (1.5.43) en  $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Hemos tomado a su vez conjuntos  $D^s$  consistentes en  $k \equiv k(s)$  puntos, arbitrariamente distribuidos sobre  $\bar{D}$  y particiones uniformes del mismo que dan lugar a triangulaciones  $\mathcal{T}$ , de tipo  $\Delta^1$ , de las que posteriormente consideramos su triangulación de Powell-Sabin asociada  $\mathcal{T}^{PS}$ .

En las Tablas 1.5, 1.6, 1.7 y 1.8 mostramos, para diferentes valores de  $k$  y  $q$ , los valores óptimos de los parámetros  $(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3)$  obtenidos mediante el método descrito en la sección anterior, así como una estimación del error obtenido para esos valores de los parámetros y una estimación del error obtenido para otros valores de los parámetros  $(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ .

En la Figura 1.6 representamos la gráfica de la función de Nielson y las correspondientes a dos de los splines aproximantes obtenidos para  $q = 5$ ,

$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	Error
$\bar{\tau}_1 = 6,8 \cdot 10^{-5}$	$\bar{\tau}_2 = 3,4 \cdot 10^{-6}$	$\bar{\tau}_3 = 1,4 \cdot 10^{-9}$	$2,82 \cdot 10^{-5}$
$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$1,05 \cdot 10^{-2}$
$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$1,77 \cdot 10^{-4}$
$10^{-7}$	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$5,7 \cdot 10^{-5}$
$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$10^{-9}$	$3,1 \cdot 10^{-5}$

Tabla 1.5:  $q = 5$  y  $k = 300$ .

$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	Error
$\bar{\tau}_1 = 0$	$\bar{\tau}_2 = 1,1 \cdot 10^{-6}$	$\bar{\tau}_3 = 4,1 \cdot 10^{-10}$	$5,19 \cdot 10^{-7}$
$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$9,32 \cdot 10^{-3}$
$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$3,64 \cdot 10^{-5}$
$10^{-7}$	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$8,51 \cdot 10^{-6}$
0	$10^{-6}$	$10^{-10}$	$5,86 \cdot 10^{-7}$

Tabla 1.6:  $q = 5$  y  $k = 1000$ .

$k = 1000$  y dos elecciones diferentes de los valores de los parámetros  $\tau$ , siendo óptimo uno de ellos (el situado en el centro)  $(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3)$ .

El error  $\|g - \sigma_\tau\|_0^2 = \int_{[0,1] \times [0,1]} (g - \sigma_\tau)^2$  ha sido estimado aplicando la fórmula de Simpson compuesta a la partición de  $[0, 1] \times [0, 1]$  en 400 cuadrados iguales.

**Observación 1.5.1** *En algunos casos hemos obtenido  $\bar{\tau}_3 = 0$ . La interpretación de este hecho es que el error  $\|g - \sigma_\tau\|_0$  disminuye a medida que*

$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	Error
$\bar{\tau}_1 = 0$	$\bar{\tau}_2 = 0$	$\bar{\tau}_3 = 9,9 \cdot 10^{-12}$	$8,39 \cdot 10^{-6}$
$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-2}$
$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$
$10^{-7}$	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$1,87 \cdot 10^{-5}$
0	0	$5 \cdot 10^{-11}$	$8,51 \cdot 10^{-6}$

Tabla 1.7:  $q = 8$  y  $k = 300$ .

$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	Error
$\bar{\tau}_1 = 2,1 \cdot 10^{-5}$	$\bar{\tau}_2 = 0$	$\bar{\tau}_3 = 2,8 \cdot 10^{-11}$	$2,25 \cdot 10^{-7}$
$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$9,26 \cdot 10^{-3}$
$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$3,13 \cdot 10^{-5}$
$10^{-7}$	$10^{-7}$	$10^{-7}$	$9,73 \cdot 10^{-6}$
$10^{-5}$	0	$10^{-11}$	$5,49 \cdot 10^{-7}$

Tabla 1.8:  $q = 8$  y  $k = 1000$ .

$\tau_3 \rightarrow 0$ . Las estimaciones de error en este caso  $\bar{\tau}_3 = 0$  no pueden ser proporcionadas, ya que la existencia del spline  $\sigma_\tau$  no está garantizada.

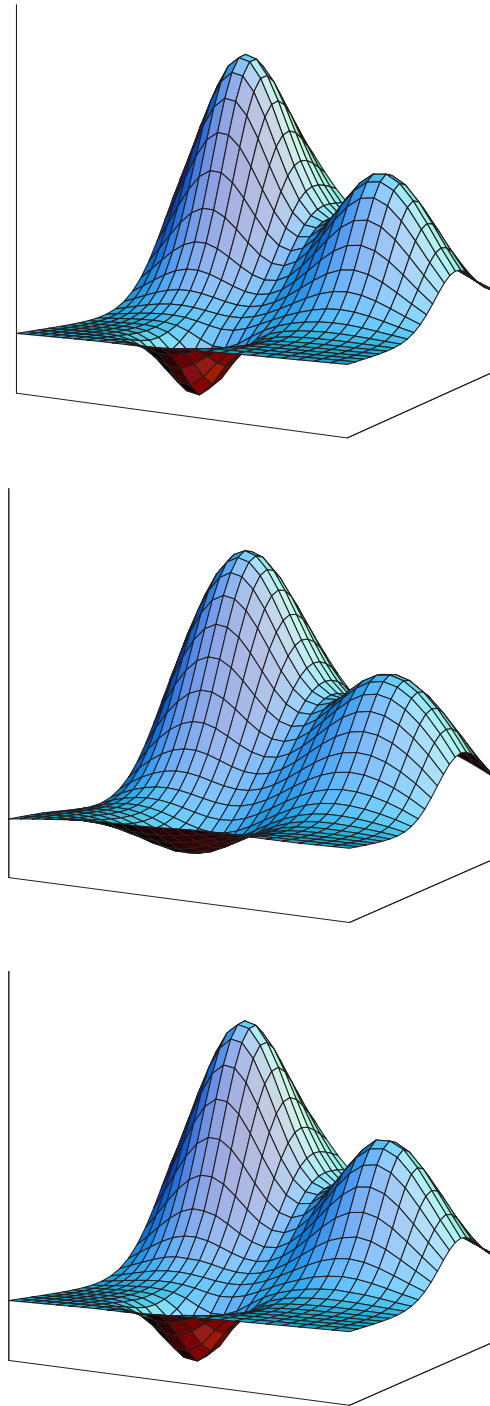


Figura 1.5: Función de Franke (arriba) y dos superficies aproximantes: para  $q = 4$ ,  $k = 1500$ ,  $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-2}$ ,  $\tau_3 = 10^{-4}$  (en el medio) y  $q = 14$ ,  $k = 1600$ ,  $\tau_1 = \tau_2 = 10^{-5}$ ,  $\tau_3 = 10^{-8}$  (abajo).



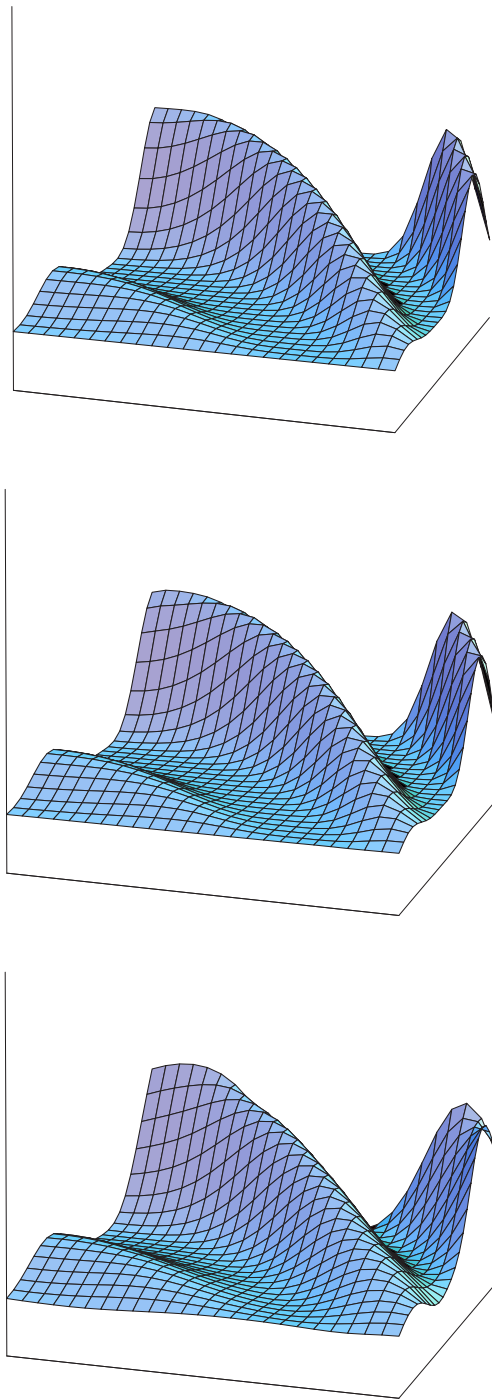


Figura 1.6: Función de Nielson (arriba) y dos superficies aproximantes, con distintos valores de los parámetros  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , siendo óptimos para el ejemplo situado en el centro.



# Capítulo 2

## Consideración de datos con ruido

### 2.1. Introducción

En este capítulo nos proponemos presentar un método para obtener, a partir de datos con ruido, una superficie de clase  $\mathcal{C}^r$  (para cualquier entero  $r \geq 1$ ) sobre un dominio poligonal  $D \subset \mathbb{R}^2$  que aproxime un conjunto de datos Lagrangiano y minimice un “funcional energía” en el que el grado de regularidad (también denominada “suavidad”, del inglés “smoothness”) viene determinada mediante una combinación lineal de las seminormas usuales  $|\cdot|_m$ , para  $m = 1, \dots, r + 1$ , sobre el espacio Sobolev  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ .

Los coeficientes de esta combinación lineal son los denominados parámetros de suavizado del problema y, en todo caso. La estimación de los valores óptimos que minimicen cierta norma o medida es un problema importante que ha sido estudiado en esta memoria, tanto en el caso de datos sin ruido (consultar la Sección 1.4 del capítulo anterior) como en el caso con ruido, que será tratado en este capítulo.

El espacio de minimización sigue siendo el de los splines bivariados contruidos a partir de una triangulación uniforme de tipo  $\Delta^1$  (ver p.ej. [22] o la Definición 3.1 en la Parte I de esta memoria) del dominio poligonal  $D \subset \mathbb{R}^2$ , y su subtriangulación de Powell-Sabin asociada (consultar 3.4 o bien [39]). Así pues, para datos con ruido, llegamos a obtener un resultado de convergencia casi segura (a partir de un resultado probabilístico dado en [3]). Al mismo tiempo, elegiremos los valores óptimos de estos parámetros de suavizado usando un método de validación cruzada (del término en inglés “cross-validation”) adaptado para este caso (consultar [20, 56, 57, 59]).

El capítulo viene organizado como sigue: en la Sección 2.2, aparte de recordar algunas notaciones y preliminares, formulamos el problema y mostramos un método numérico para resolverlo, introduciendo a su vez la denomina-

da matriz de influencia del problema; la Sección 2.3 se dedica al estudio de un resultado de convergencia para datos con ruido; mientras que la Sección 2.4 es una adaptación a este caso del método de validación cruzada para la elección de parámetros. Finalmente, en la Sección 2.5 mostramos algunos ejemplos numéricos y gráficos que muestran la validez y efectividad de dicho procedimiento.

## 2.2. Preliminares y formulación del problema

Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio acotado y poligonal y consideremos los habituales espacios de Sobolev  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ ,  $r \geq 1$  (consultar la Subsección A.4 en el Apéndice), junto con la norma (1), las seminormas usuales (2) y los semiproductos escalares (3) para  $m = 0, 1, \dots, r+1$ . Como ya hicimos también en el capítulo anterior, denotaremos  $\langle \cdot \rangle_k$  (resp.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ ) a la norma euclídea usual (resp. productos escalares) en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^k$ .

Consideraremos una triangulación uniforme  $\mathcal{T}$  de  $\bar{D}$  de tipo  $\Delta^1$  (ver p.ej. la Definición 3.1), y su subtriangulación de Powell-Sabin asociada  $\mathcal{T}^{PS}$  (ver la Definición 3.4 en la Parte I de esta memoria). Sea también  $n := n(r) = 2r+1$  para  $r$  par o  $n := n(r) = 2r$  para  $r$  impar, sea  $[x]$  la parte entera de  $x$  y consideremos, como en el capítulo anterior, los conjuntos

$$\mathcal{S}_n^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T}) = \{v \in \mathcal{C}^r(D) : v|_T \in \mathcal{S}_n^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1, r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(T, \mathcal{T}^{PS}), \forall T \in \mathcal{T}\},$$

donde

$$\mathcal{S}_n^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1, r + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(T, \mathcal{T}^{PS}) = \left\{ \sigma \in \mathcal{C}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}(T) / \begin{array}{l} \sigma|_{T'} \in \mathbb{P}_n(T') \quad \forall T' \subset T \text{ con } T' \in \mathcal{T}^{PS} \\ \text{y } \sigma \text{ es de clase } \mathcal{C}^{r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \text{ en todos los vértices de } T \end{array} \right\},$$

y  $\mathbb{P}_n(T')$  indica el espacio de polinomios bivariados de grado total máximo  $n$  sobre  $T'$ .

Consideraremos también, para cada  $s \in \mathbb{N}^*$ , un subconjunto finito  $D^s = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$  de puntos de  $D$  con cardinal  $k = k(s)$ , así como un vector de valores  $Z^s = (z_i)_{i=1}^k \in \mathbb{R}^k$ , uno en cada uno de dichos puntos. Como hicimos también en el capítulo anterior, gracias a la inyección continua del espacio  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  en el espacio de las funciones continuas  $\mathcal{C}^0(\bar{D})$ , podremos definir el denominado operador de evaluación  $\rho^s(v) := (v(a_i))_{i=1}^k \in \mathbb{R}^k$  para cualquier  $v \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$ .

Supongamos también que

$$\text{Ker}(\rho^s) \cap \mathbb{P}_r(D) = \{0\}, \quad \forall s \in \mathbb{N}^*. \quad (2.2.1)$$

Buscamos una superficie de clase  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ), que aproxime los puntos  $\{(\mathbf{a}_i, z_i)\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^3$  minimizando el funcional energía

$$\mathcal{J}^s(v) = \langle \rho^s(v) - Z^s \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |v|_m^2$$

donde  $\tau := (\tau_1, \dots, \tau_{r+1})$ ,  $\tau_i \in [0, +\infty[$  para todo  $i = 1, \dots, r$  y  $\tau_{r+1} \in ]0, +\infty[$ . Obsérvese que el primer término de  $\mathcal{J}^s$  mide (en el sentido de los mínimos cuadrados) cómo de bien  $v$  aproxima los valores en  $Z^s$ , mientras que el segundo representa la denominada “condición de mínima energía” sobre las semi-normas  $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_{r+1}$ , sopesadas mediante los parámetros  $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$  respectivamente.

Más precisamente, el problema de minimización que queremos resolver es el siguiente:

**Problema 2.2.1** *Encontrar un elemento  $\sigma^s \in \mathcal{S}_n^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T})$  tal que*

$$\mathcal{J}^s(\sigma^s) \leq \mathcal{J}^s(v) \text{ para todo } v \in \mathcal{S}_n^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T}). \quad (2.2.2)$$

**Proposición 2.2.2** *El Problema (2.2.2) tiene una única solución que a su vez es también la única solución del siguiente problema variacional:*

*Encontrar  $\sigma^s \in \mathcal{S}_n^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T})$  tal que para todo  $v \in \mathcal{S}_n^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T})$  se tenga que*

$$\langle \rho^s(\sigma^s), \rho^s(v) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m (\sigma^s, v)_m = \langle Z^s, \rho^s(v) \rangle_k. \quad (2.2.3)$$

**Demostración.** La condición (2.2.1) nos permite asegurar que

$$[[v]] := (\langle \rho^s(v) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |v|_m^2)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma sobre  $\mathcal{S}_n^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T})$ , equivalente a  $\|\cdot\|$ . Como consecuencia, la forma bilineal, simétrica y continua  $\mathcal{A} : \mathcal{S}_n^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T}) \times \mathcal{S}_n^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\mathcal{A}(u, v) := \langle \rho^s(u), \rho^s(v) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m (u, v)_m$$

es  $\mathcal{S}_n^{r,r+\lceil\frac{r}{2}\rceil}(D, \mathcal{T})$ -elíptica. Por otro lado,  $\mathcal{B} : \mathcal{S}_n^{r,r+\lceil\frac{r}{2}\rceil}(D, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\mathcal{B}(v) := \langle Z^s, \rho^s(v) \rangle_k$$

es una forma lineal continua.

Por lo tanto, obtenemos el resultado aplicando el Lema de Lax-Milgram, exactamente de la misma manera que como se hizo en el caso de datos sin ruido en la Sección 1.2 . ■

**Definición 2.2.3** *La única solución  $\sigma^s$  del Problema (2.2.2) se denominará PS-spline de suavizado  $C^r$  relativo a  $D^s, Z^s$  y  $\tau$ .*

Sea  $N := \dim(\mathcal{S}_n^{r,r+\lceil\frac{r}{2}\rceil}(D, \mathcal{T}))$  y sea  $\{v_1, \dots, v_N\}$  una base del espacio de elementos finitos  $\mathcal{S}_n^{r,r+\lceil\frac{r}{2}\rceil}(D, \mathcal{T})$  cuyos elementos tienen soporte local.

Sea

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,N}}, \text{ donde } a_{ij} = (v_j(\mathbf{a}_i)) \text{ y } \mathcal{R}_m = ((v_i, v_j)_m)_{i,j=1}^N,$$

para  $m = 1, \dots, r+1$ .

Si  $\sigma^s = \sum_{i=1}^N \beta_i v_i$  es la expansión de  $\sigma^s$  como combinación lineal de la base  $\{v_1, \dots, v_N\}$ , entonces (2.2.3) da lugar al siguiente sistema lineal

$$C \beta = B, \tag{2.2.4}$$

donde

$$\begin{aligned} C &:= \left( A^\top A + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m \mathcal{R}_m \right), \\ B &:= \left( (\langle Z^s, \rho^s(v_i) \rangle_k)_{i=1}^N \right)^\top \\ \text{y } \beta &:= \left( (\beta_i)_{i=1}^N \right)^\top. \end{aligned}$$

En el Lema 1.2.5 en el Capítulo 1 se demuestra que  $C$  es una matriz simétrica, definida positiva y tipo banda.

Equivalentemente  $B = A^\top Z^s$ , y por lo tanto, si notamos ahora  $\mathcal{I}^s(\tau) = A C^{-1} A^\top$ , entonces  $\beta = C^{-1} A^\top Z^s$  verifica que

$$\begin{pmatrix} \sigma^s(\mathbf{a}_1) \\ \vdots \\ \sigma^s(\mathbf{a}_k) \end{pmatrix} = A \beta = A C^{-1} A^\top Z^s \equiv \mathcal{I}^s(\tau) Z^s.$$

**Definición 2.2.4** *Diremos que  $\mathcal{I}^s(\tau) \equiv A C^{-1} A^\top$  es la matriz de influencia del Problema (2.2.2).*

**Proposición 2.2.5** Si  $A$  es una matriz de rango máximo  $N$ , entonces la traza  $Tr(\mathcal{I}^s(\tau))$  de la matriz de influencia  $\mathcal{I}^s(\tau)$  es menor o igual que  $N$ .

**Demostración.** Consideremos la descomposición  $QR$  de la matriz  $A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ , donde  $Q$  es una matriz  $k \times k$  ortogonal y  $R$  es una matriz  $N \times N$  triangular superior con elementos positivos en la diagonal.

Entonces  $A^\top A = R^\top R$  y los valores propios de  $\mathcal{I}^s(\tau)$  serán los mismos que los valores propios de

$$\left( \begin{array}{c|c} R \left( A^\top A + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m \mathcal{R}_m \right)^{-1} R^\top & 0_{N \times (k-N)} \\ \hline 0_{(k-N) \times N} & 0_{k-N} \end{array} \right).$$

Claramente los valores propios de esta matriz son 0 (con multiplicidad  $k - N$ ) y los  $N$  valores propios de  $R \left( A^\top A + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m \mathcal{R}_m \right)^{-1} R^\top$ .

A su vez, los valores propios de  $R \left( A^\top A + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m \mathcal{R}_m \right)^{-1} R^\top$  son  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ , donde  $\{\frac{1}{\lambda_i}\}_{i=1}^N$  son los valores propios de

$$\begin{aligned} (R^\top)^{-1} \left( A^\top A + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m \mathcal{R}_m \right) R^{-1} &= \\ (R^\top)^{-1} R^\top R R^{-1} + \sum \tau_m (R^\top)^{-1} \mathcal{R}_m R^{-1} &= Id_N + \sum \tau_m (R^\top)^{-1} \mathcal{R}_m R^{-1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, como  $\mathcal{R}_m$  es semidefinida positiva y  $R$  es definida positiva, entonces  $\frac{1}{\lambda_i} \geq 1$  para todo  $i = 1, \dots, N$ , y por lo tanto,  $Tr(\mathcal{I}^s(\tau)) \leq N$ . ■

## 2.3. Convergencia

Sea  $g \in \mathcal{C}^{n+1}(D)$  y  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}_*^+$  un subconjunto que admite 0 como punto de acumulación. Para cada  $h \in \mathcal{E}$ , sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación uniforme de tipo  $\Delta^1$  de  $\bar{D}$ , siendo  $h$  el diámetro de los triángulos de  $\mathcal{T}_h$ . Para cada  $s \in \mathbb{N}^*$ , sea  $\vartheta^s := (\vartheta_i^s)_{i=1}^k$  un vector de errores en  $\mathbb{R}^k$  de tal manera que  $\vartheta^s$  sea un ruido blanco para todo  $s \in \mathbb{N}^*$  (es decir,  $\vartheta^s$  es un vector Gaussiano de variables aleatorias independientes con media cero y desviación típica  $\mu$ ) y consideremos el vector de datos con ruido  $Z^s = \rho^s(g) + \vartheta^s$ .

Sea  $\tilde{\sigma}^s$  el  $PS$ -spline de suavizado  $\mathcal{C}^r$  relativo a  $D^s$ ,  $Z^s$  y  $\tau$ ;  $\sigma^s$  el  $PS$ -spline de suavizado  $\mathcal{C}^r$  relativo a  $D^s$ ,  $\rho^s(g)$  y  $\tau$  y  $e^s$  el  $PS$ -spline de suavizado  $\mathcal{C}^r$  relativo a  $D^s$ ,  $\vartheta^s$  y  $\tau$ .

Para establecer el teorema de convergencia en este caso de datos con ruido, haremos uso del siguiente resultado probabilístico, cuya demostración puede ser encontrada en [3].

**Proposición 2.3.1** Sea  $\mathcal{M}^s$  una matriz de orden  $k$ , simétrica y semidefinida positiva y sea  $Tr(\mathcal{M}^s)$  su traza. Si  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$  es una función de manera que existe  $\theta > 0$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(s)}{s^\theta} = +\infty,$$

entonces la sucesión  $\left\{ \frac{(\vartheta^s)^\top \mathcal{M}^s \vartheta^s}{\varphi(s) Tr(\mathcal{M}^s)} \right\}_{s \in \mathbb{N}^*}$  tiende a cero casi seguramente.

**Observación 2.3.2** La Proposición 2.3.1 se establece en [3] para una sucesión de vectores  $\{\vartheta^s\}_{s \in \mathbb{N}^*}$  tal que para todo  $s \in \mathbb{N}^*$ , las componentes  $\vartheta^s = (\vartheta_1^s, \dots, \vartheta_k^s)$  sean variables aleatorias independientes con media cero y con momentos de cualquier orden uniformemente acotados. Esta sería una condición más general que la considerada aquí de “ruido blanco”.

Sea  $d^s = \sup_{x \in D} \delta(x, D^s)$ , donde  $\delta$  denota la distancia euclidea en  $\mathbb{R}^2$  y supongamos que

$$d^s = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow +\infty, \quad (2.3.5)$$

siendo

$$d^s = o\left(\inf_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D^s, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}} \langle \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle_2\right), \quad s \rightarrow +\infty. \quad (2.3.6)$$

**Teorema 2.3.3** Si además de (2.3.5) y (2.3.6), se verifican las siguientes condiciones:

$$\exists C > 0, s_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } k \leq Cs^2, \forall s \geq s_0; \quad (2.3.7)$$

$$\exists C > 0, \exists \alpha \in (0, 2) \text{ tal que } \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\tau_{r+1}}{s^\alpha} = C; \quad (2.3.8)$$

$$\tau_m = o(\tau_{r+1}), \quad s \rightarrow +\infty, \quad \forall m = 1, \dots, r; \quad (2.3.9)$$

$$\frac{s^2 h^{2n+2}}{\tau_{r+1}} = o(1), \quad s \rightarrow +\infty; \quad (2.3.10)$$

entonces,

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \|\tilde{\sigma}^s - g\| = 0 \text{ casi seguramente.}$$

**Demostración.** Por la linealidad de (2.2.3), tendremos que  $\tilde{\sigma}^s = \sigma^s + e^s$ . Además, las hipótesis del teorema de convergencia probadas en el capítulo anterior para datos exactos son precisamente (2.3.5), (2.3.7), (2.3.9) y (2.3.10) junto con  $\tau_{r+1} = o(s^2)$  cuando  $s \rightarrow +\infty$ , que puede deducirse de (2.3.8).

Aplicando pues tal resultado para datos exactos tendremos que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \|\sigma^s - g\| = 0.$$



Por lo tanto, bastaría demostrar que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} e^s = 0$  casi seguramente en  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ .

De (2.3.5), podemos deducir la existencia de  $C_0 > 0$  y  $\tilde{s} \in \mathbb{N}^*$  tales que  $D \subset \bigcup_{\mathbf{a} \in D^s} B(\mathbf{a}, \frac{C_0}{s})$  para todo  $s \geq \tilde{s}$ , y entonces existiría a su vez  $C_1 > 0$  tal que

$$k \geq C_1 s^2 \quad \text{para todo } s \geq \tilde{s}, \quad (2.3.11)$$

y de (2.3.8) obtendríamos que

$$\tau_{r+1} = o(s^2), \quad s \rightarrow +\infty. \quad (2.3.12)$$

Por otra parte, tomando  $v = e^s$  en la ecuación (2.2.3) para  $\sigma^s = e^s$  y  $Z^s = \vartheta^s$  tendríamos que

$$\langle \rho^s(e^s) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |e^s|_m^2 = \langle \vartheta^s, \rho^s(e^s) \rangle_k.$$

Además, como  $\rho^s(e^s) = \mathcal{I}^s(\tau)\vartheta^s$ , también tendríamos que

$$\langle \vartheta^s, \rho^s(e^s) \rangle_k = (\vartheta^s)^\top \mathcal{I}^s(\tau)\vartheta^s,$$

y bastaría con usar (2.3.11) y (2.3.12) para obtener la existencia de otra constante  $C_2 > 0$  tal que, para  $k$  suficientemente grande, se verifique que

$$\frac{1}{C_2 k} \langle \rho^s(e^s) \rangle_k^2 + |e^s|_{r+1}^2 \leq \frac{1}{\tau_{r+1}} (\vartheta^s)^\top \mathcal{I}^s(\tau)\vartheta^s. \quad (2.3.13)$$

En el Teorema 3.4 de [58] también se muestra que, bajo las hipótesis (2.3.5) y (2.3.6), la parte izquierda de esta desigualdad constituye una norma sobre  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  uniformemente equivalente a la norma  $\|\cdot\|$  para  $s$  suficientemente grande.

Por lo tanto, bastaría con mostrar que la parte derecha de (2.3.13) tiende a cero casi seguramente. De (2.3.8) deducimos que  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\tau_{r+1}}{s^\theta} = +\infty$  para todo  $\theta \in ]0, \alpha[$ ; por lo tanto, tomando  $\mathcal{M}^s = \mathcal{I}^s(\tau)$  y  $\varphi(s) = \tau_{r+1}$  en la Proposición 2.3.1, obtendríamos a su vez de la Proposición 2.2.5 que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{(\vartheta^s)^\top \mathcal{I}^s(\tau)\vartheta^s}{\tau_{r+1} N} = 0$$

casi seguramente. ■

## 2.4. Técnica de validación cruzada

Fijado el valor  $k$  y dado el conjunto  $D^s = \{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^k$  así como el vector  $Z^s = \rho^s(g) + \vartheta^s$ , un criterio para determinar los valores óptimos de los parámetros  $\tau$  puede ser elegir aquellos que minimicen la *función del error cuadrático medio* definida como el error promedio cometido al aproximar los datos exactos  $\rho^s(g)$  por los valores tomados del  $PS$ -spline sobre el conjunto  $D^s$ ; es decir,

$$\mathcal{R}(\tau) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\sigma(\mathbf{a}_i) - g(\mathbf{a}_i))^2,$$

donde  $\sigma$  denota el  $PS$ -spline de suavizado  $\mathcal{C}^r$  relativo a  $D^s$ ,  $Z^s$  y  $\tau$ .

Sin embargo, la función  $\mathcal{R}$  involucra a su vez a la función  $g$ , que puede ser desconocida y, por lo tanto,  $\mathcal{R}$  podría no resultar práctica a la hora de obtener los parámetros  $\tau$  óptimos. La idea de la validación cruzada consiste en reemplazar dicha función  $\mathcal{R}(\tau)$  por otra función  $\mathcal{V}(\tau)$  de manera que su mínimo esté próximo al de  $\mathcal{R}(\tau)$  a medida que el número  $k$  de datos puntuales aumente.

Más precisamente, sería deseable que si  $\{\tilde{\tau}_k\}_{k=1}^\infty$  es la sucesión de minimizadores of  $E\mathcal{V}$ , donde  $E$  denota la esperanza matemática aplicada a la correspondiente variable, entonces

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{E\mathcal{R}(\tilde{\tau}_k)}{\min_{\tau} E\mathcal{R}(\tau)} = 1.$$

Siguiendo ahora el mismo patrón que el desarrollado en [20] o [59], obtendremos la función generalizada de validación cruzada

$$\mathcal{V}(\tau) = \frac{\frac{1}{k} \langle (Id - \mathcal{I}^s(\tau)) Z^s \rangle_k^2}{\left(\frac{1}{k} \text{Tr}(Id - \mathcal{I}^s(\tau))\right)^2}.$$

Así pues, como en el Teorema 4.2 de [59], se puede demostrar que si  $\bar{\tau}$  y  $\tilde{\tau}$  son los valores de los parámetros que minimizan  $E\mathcal{R}$  y  $E\mathcal{V}$ , respectivamente, entonces

$$1 \leq \frac{E\mathcal{R}(\tilde{\tau})}{E\mathcal{R}(\bar{\tau})} \leq \frac{1 + h(\bar{\tau})}{1 - h(\tilde{\tau})}, \quad (2.4.14)$$

donde

$$h(\tau) = \left( 2\mu_1(\tau) + \frac{\mu_1^2(\tau)}{\mu_2(\tau)} \right) \frac{1}{(1 - \mu_1(\tau))^2},$$

$$\mu_1(\tau) = \frac{\text{Tr}(\mathcal{I}^s(\tau))}{k} \quad \text{y} \quad \mu_2(\tau) = \frac{\text{Tr}(\mathcal{I}^s(\tau)^2)}{k}.$$

Por lo tanto, bastaría con comprobar que  $h(\tau)$  tiende a cero para todo  $\tau$ , cuando  $k \rightarrow +\infty$ :

En efecto, si  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  son los valores propios no nulos de  $\mathcal{I}^s(\tau)$ , entonces tendremos que

$$\frac{Tr(\mathcal{I}^s(\tau))^2}{Tr(\mathcal{I}^s(\tau)^2)} = \frac{(\sum_{i=1}^N \lambda_i)^2}{\sum_{i=1}^N \lambda_i^2} = 1 + \sum_{\substack{i,j=1,\dots,N \\ j>i}} \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\sum_{i=1}^N \lambda_i^2} < 1 + \sum_{\substack{i,j=1,\dots,N \\ j>i}} \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2},$$

pero  $\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i^2 + \lambda_j^2} \leq 1$  para  $i, j = 1, \dots, N$ ; luego

$$\frac{Tr(\mathcal{I}^s(\tau))^2}{Tr(\mathcal{I}^s(\tau)^2)} < 1 + \frac{N(N-1)}{2},$$

y, como consecuencia

$$\frac{\mu_1^2(\tau)}{\mu_2(\tau)} = \frac{Tr(\mathcal{I}^s(\tau))^2}{k Tr(\mathcal{I}^s(\tau)^2)} \rightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow +\infty.$$

Por otra parte, aplicando la Proposición 2.2.5 tendremos que  $\mu_1(\tau)$  tiende a cero y que  $\frac{1}{(1 - \mu_1(\tau))^2}$  tiende a 1, cuando  $k \rightarrow +\infty$ .

Por lo tanto, concluimos que un buen estimador del minimizador  $\bar{\tau}$  de  $ER$  sería el minimizador  $\tilde{\tau}$  de  $E\mathcal{V}$ .

**Observación 2.4.1** *Ya que las derivadas de primer orden de la función de  $r + 1$  variables  $\mathcal{V}(\tau)$  no son fáciles de obtener, el mínimo de  $\mathcal{V}$  puede aproximarse mediante ciertos métodos numéricos de minimización que no requieran el uso de derivadas. En los ejemplos presentados en la siguiente sección hemos usado el algoritmo de Powell (ver el Algoritmo A.2.8 o bien consultar la Sección 7.3 de [10]).*

## 2.5. Ejemplos numéricos y gráficos

En esta sección mostraremos algunos ejemplos numéricos y gráficos de superficies de clase  $\mathcal{C}^1$  y  $\mathcal{C}^2$  obtenidas para diferentes conjuntos de puntos y varios valores de los parámetros  $\tau$ . Los espacios vectoriales de elementos finitos en los que buscaremos los  $PS$ -splines de clase  $\mathcal{C}^1$  y  $\mathcal{C}^2$  serán, respectivamente,  $\mathcal{S}_2^{1,1}(D, \mathcal{T})$  y  $\mathcal{S}_5^{2,3}(D, \mathcal{T})$ , que se construirán de la misma forma que hicimos en el capítulo anterior para el caso de datos sin ruido.

$\tau_1$	$\tau_2$	$E$
$\bar{\tau}_1 = 1,4 \cdot 10^{-3}$	$\bar{\tau}_2 = 1,98 \cdot 10^{-6}$	$1,12 \cdot 10^{-2}$
$10^{-1}$	$10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$
$10^{-3}$	$10^{-2}$	$1,44 \cdot 10^{-1}$
$10^{-7}$	$10^{-4}$	$1,47 \cdot 10^{-2}$
0	$10^{-7}$	$1,13 \cdot 10^{-2}$

Tabla 2.1:  $k = 1500$ ,  $\mathcal{N} = 98$ , y  $\mu = 10^{-3}$  para Nielson.

Para los ejemplos numéricos y gráficos hemos considerado la función de Franke (1.5.41) así como la función de Nielson (1.5.43), ambas definidas sobre el cuadrado  $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Hemos considerado a su vez, como ya hicimos en los casos anteriores de datos exactos, conjuntos  $D^s$  consistentes en  $k$  puntos arbitrariamente distribuidos sobre el dominio  $D$ , y particiones uniformes  $\{t_i\}_{i=0}^q$ , donde  $t_i = \frac{i}{q}$  (para  $i = 1, \dots, q$ ) del intervalo  $[0, 1]$ , del que obtendremos particiones uniformes de  $\bar{D}$  cuyos elementos serán  $\{[t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]\}_{i,j=0}^{q-1}$ . Dividiendo cada cuadrado  $\{[t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]\}$  mediante la diagonal que une  $(t_i, t_{j+1})$  y  $(t_{i+1}, t_j)$ , obtendremos una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $\bar{D}$ , de tipo  $\Delta^1$ , compuesta de  $\mathcal{N} = 2q^2$  triángulos, de la que consideraremos su triangulación de Powell-Sabin asociada  $\mathcal{T}^{PS}$ .

Las estimaciones de error han sido calculadas usando la fórmula de error relativo (1.5.42) donde ahora  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^{2500}$  son puntos arbitrarios en  $D$ ,  $g$  es la función test empleada en cada caso y  $\sigma_\tau$  es el  $PS$ -spline de clase  $\mathcal{C}^r$  obtenido, relativo a  $D^s = \{\mathbf{a}_i^s\}_{i=1}^k$ ,  $Z^s = \{g(\mathbf{a}_i^s) + \vartheta_i^s\}_{i=1}^k$  y  $\tau$ , y  $\vartheta^s$  es un vector de ruido con media 0 y desviación típica  $\mu$ .

La Tabla 2.1 muestra los errores obtenidos para la función de Nielson con  $k = 1500$ ,  $\mathcal{N} = 98$  y  $\mu = 10^{-3}$  para diferentes valores de  $\tau$ .  $\bar{\tau} = (\bar{\tau}_i)_{i=1}^{r+1}$  denota el vector de valores óptimos de los parámetros  $\tau$  obtenidos mediante la técnica de validación cruzada, tal y cómo se describe en la Sección 2.4. Los resultados gráficos para este caso se muestran en la Figura 2.1.

Siguiendo el mismo esquema, en la Tabla 2.2 y en la Figura 2.2 consideramos los valores  $k = 3000$ ,  $\mathcal{N} = 162$  y  $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ .

En la Tabla 2.3 y en la Figura 2.3, consideramos la función de Franke y las aproximaciones para los valores  $k = 1500$ ,  $\mathcal{N} = 98$  y  $\mu = 10^{-3}$ , mientras que en la Tabla 2.4 y en la Figura 2.4 consideramos el caso  $k = 2500$ ,  $\mathcal{N} = 162$  y  $\mu = 10^{-3}$ .

$\tau_1$	$\tau_2$	$E$
$\bar{\tau}_1 = 10^{-2}$	$\bar{\tau}_2 = 3,3 \cdot 10^{-5}$	$1,08 \cdot 10^{-2}$
$10^{-1}$	$10^{-1}$	$2,38 \cdot 10^{-1}$
$10^{-3}$	$10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-1}$
$10^{-7}$	$10^{-2}$	$1,01 \cdot 10^{-1}$
0	$10^{-7}$	$1,14 \cdot 10^{-2}$

Tabla 2.2:  $k = 3000$ ,  $\mathcal{N} = 162$  y  $\mu = 5 \times 10^{-3}$  para Nielson.

$\tau_1$	$\tau_2$	$E_r$
$\bar{\tau}_1 = 2,4 \cdot 10^{-3}$	$\bar{\tau}_2 = 2,25 \cdot 10^{-5}$	$3,81 \cdot 10^{-3}$
$10^{-1}$	$10^{-1}$	$1,03 \cdot 10^{-1}$
$10^{-1}$	$10^{-3}$	$8,43 \cdot 10^{-3}$
$10^{-7}$	$10^{-3}$	$7,09 \cdot 10^{-3}$
$10^{-5}$	$10^{-7}$	$4,13 \cdot 10^{-3}$

Tabla 2.3:  $k = 1500$ ,  $\mathcal{N} = 98$ , y  $\mu = 10^{-3}$  para Franke.

$\tau_1$	$\tau_2$	$E_r$
$\bar{\tau}_1 = 1,26 \cdot 10^{-3}$	$\bar{\tau}_2 = 2,43 \cdot 10^{-5}$	$2,14 \cdot 10^{-3}$
$10^{-1}$	$10^{-1}$	$7,79 \cdot 10^{-2}$
$10^{-3}$	$10^{-2}$	$1,84 \cdot 10^{-2}$
$10^{-5}$	$10^{-8}$	$5,65 \cdot 10^{-2}$
0	$10^{-5}$	$2,25 \cdot 10^{-3}$

Tabla 2.4:  $k = 2500$ ,  $\mathcal{N} = 162$ , y  $\mu = 10^{-3}$  para Franke.

$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$E$
$\bar{\tau}_1 = 8,38 \cdot 10^{-10}$	$\bar{\tau}_2 = 10^{-9}$	$\bar{\tau}_3 = 1,9 \cdot 10^{-13}$	$2,24 \cdot 10^{-3}$
$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$3,39 \cdot 10^{-1}$
$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$3,51 \cdot 10^{-2}$
$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$7,96 \cdot 10^{-3}$
$10^{-11}$	$10^{-12}$	$10^{-13}$	$5,24 \cdot 10^{-3}$

Tabla 2.5:  $k = 1000$ ,  $\mathcal{N} = 72$  y  $\mu = 5 \times 10^{-4}$  para Nielson.

Finalmente, en la Tabla 2.5 y en la Figura 2.5 consideramos un  $PS$ -spline de clase  $\mathcal{C}^2$  que aproxima a la función de Nielson para  $k = 1000$ ,  $\mathcal{N} = 72$  y  $\mu = 5 \cdot 10^{-4}$ .

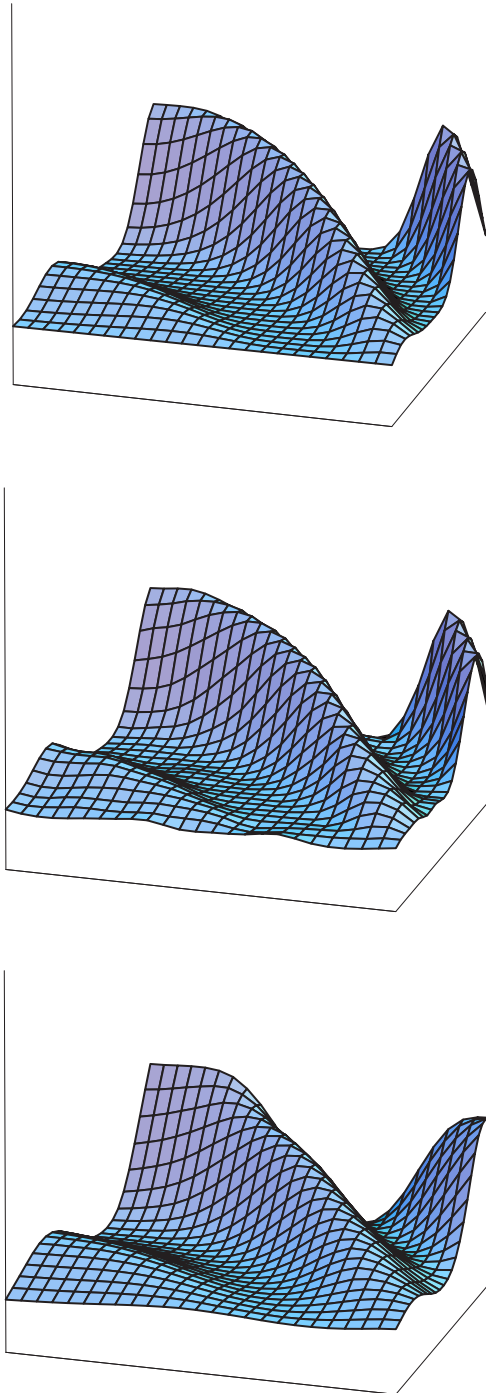


Figura 2.1: Función de Nielson y dos superficies aproximantes para  $\tau_1 = \bar{\tau}_1, \tau_2 = \bar{\tau}_2$  y para  $\tau_1 = 10^{-3}, \tau_2 = 10^{-2}$ , respectivamente.

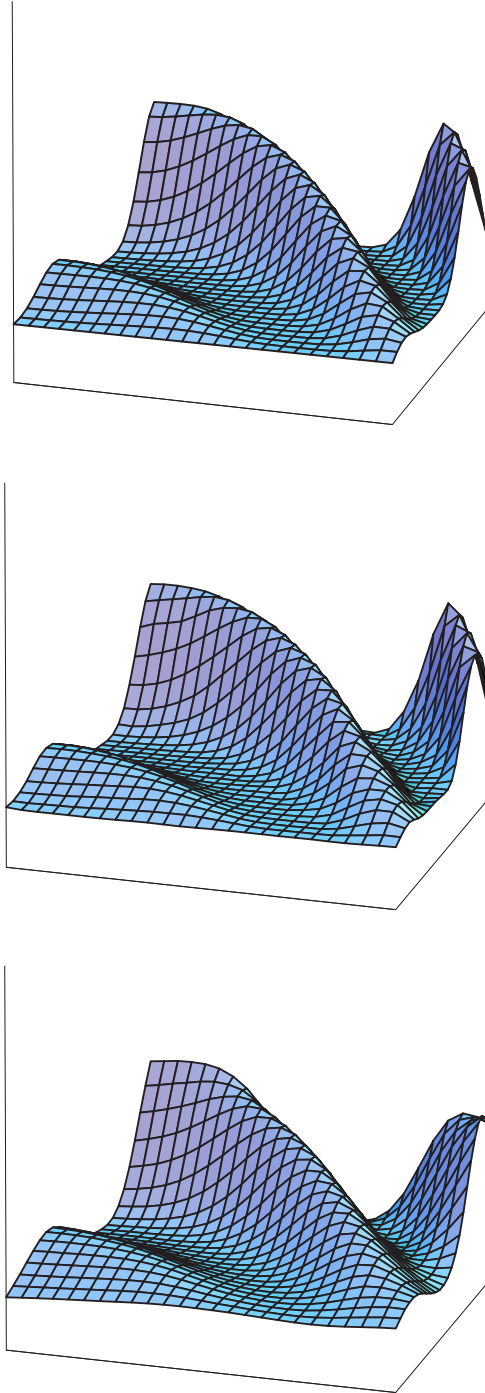


Figura 2.2: Función de Nielson y dos superficies aproximantes para  $\tau_1 = \bar{\tau}_1, \tau_2 = \bar{\tau}_2$  y para  $\tau_1 = 10^{-3}, \tau_2 = 10^{-2}$ , respectivamente.



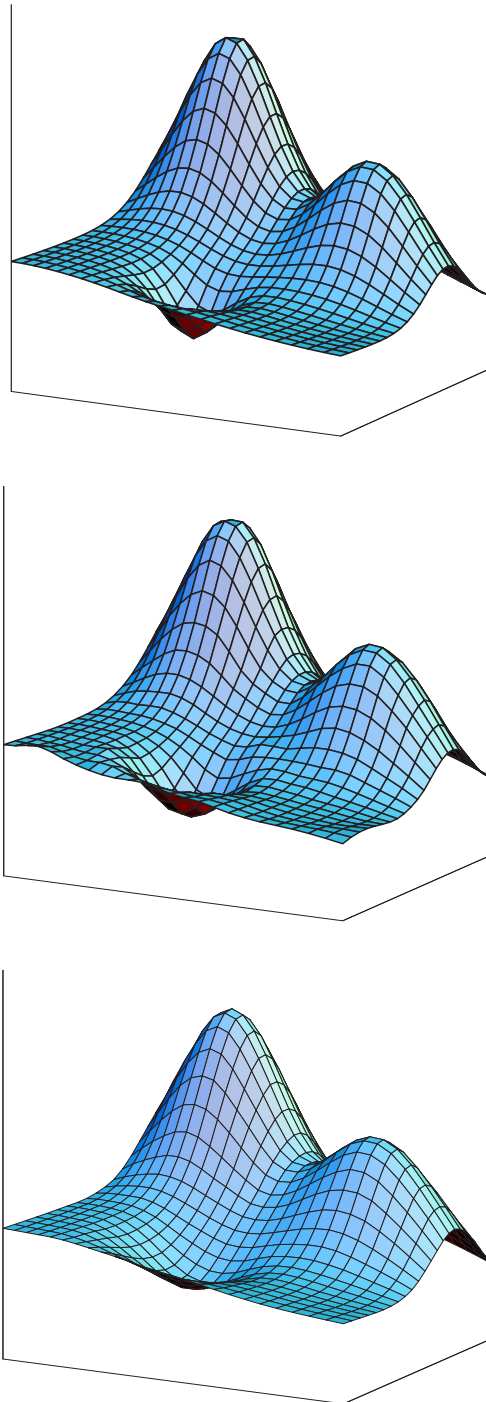


Figura 2.3: Función de Franke y dos superficies aproximantes para  $\tau_1 = \bar{\tau}_1, \tau_2 = \bar{\tau}_2$  y para  $\tau_1 = 10^{-3}, \tau_2 = 10^{-2}$ , respectivamente.

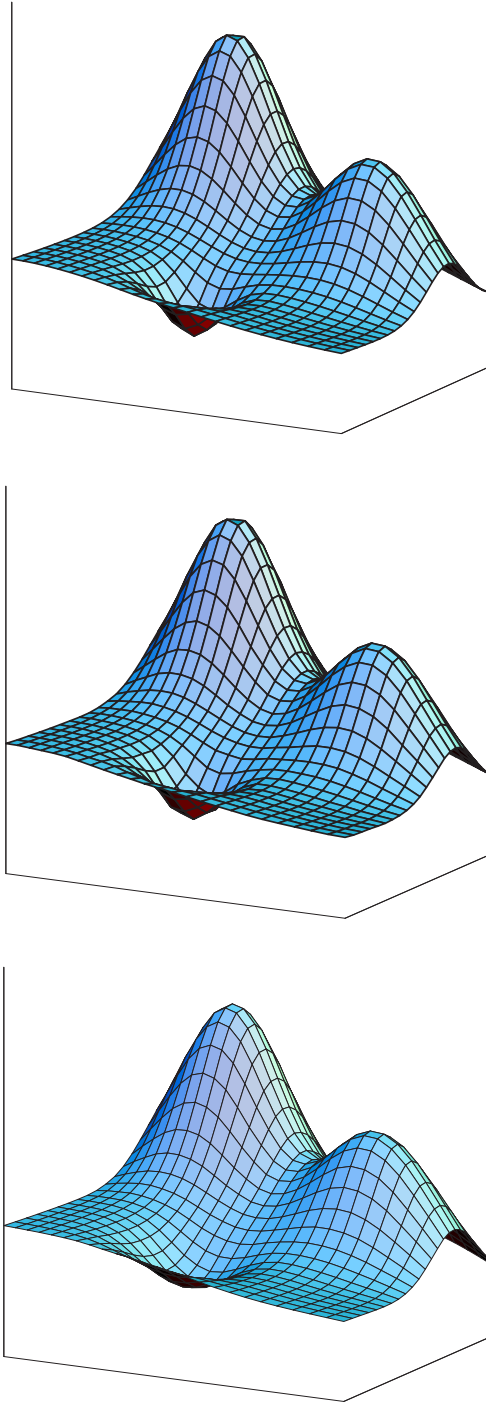


Figura 2.4: Función de Franke y dos superficies aproximantes para  $\tau_1 = \bar{\tau}_1, \tau_2 = \bar{\tau}_2$  y para  $\tau_1 = 10^{-3}, \tau_2 = 10^{-2}$ , respectivamente.

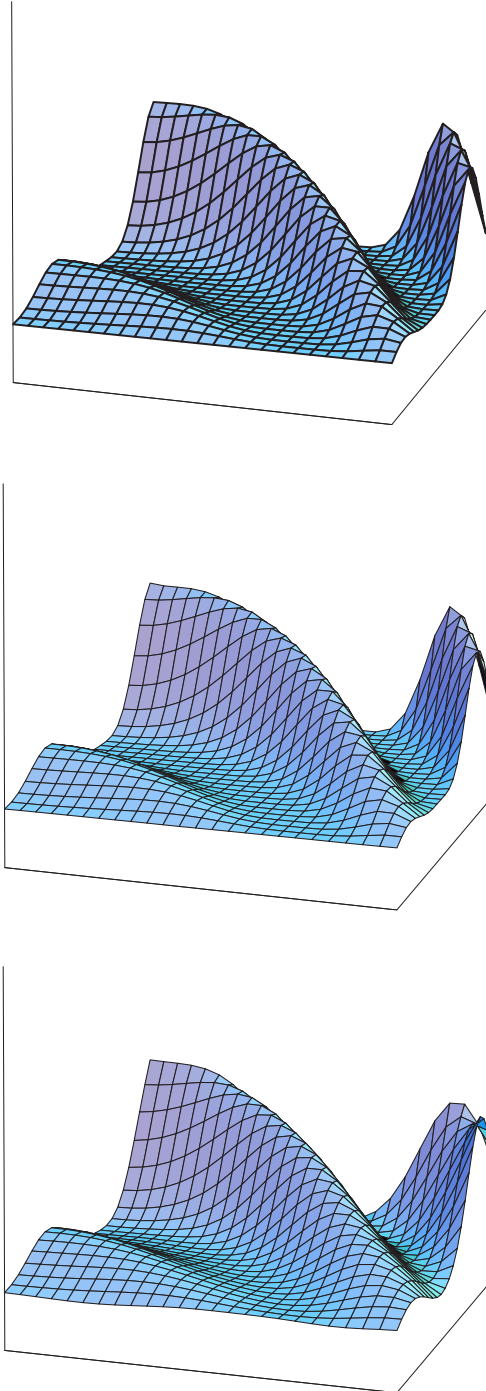


Figura 2.5: Función de Nielsen y dos superficies aproximantes para  $\tau_1 = \bar{\tau}_1, \tau_2 = \bar{\tau}_2$  y para  $\tau_1 = 10^{-3}, \tau_2 = 10^{-2}$ , respectivamente.



# Capítulo 3

## Análisis multirresolución y aplicaciones

### 3.1. Introducción

Numerosos esquemas de multirresolución y subdivisión son aplicados con éxito en gran variedad de campos de la ciencia y de la ingeniería. Los esquemas de subdivisión se basan en reglas de refinamiento que son aplicadas a partir de un conjunto inicial de datos discretos para generar un nuevo conjunto de datos más denso que el anterior. Este procedimiento se usa de manera recursiva y, bajo ciertas condiciones, converge a una función límite [12, 24, 33].

Estos esquemas de subdivisión están estrechamente relacionados con algoritmos de multirresolución. Más concretamente, un algoritmo de multirresolución conecta una sucesión finita  $a_L$ , que proporciona determinada información de una función a un cierto nivel de resolución  $L$ , con su representación multi-escala

$$\{a_k, d_k, d_{k+1}, \dots, d_{L-1}\}, \quad (3.1.1)$$

donde, para  $0 \leq k \leq L - 1$ , la sucesión  $a_k$  denota una aproximación de  $a_L$  a resolución  $k$ , y para  $k \leq j \leq L - 1$ ,  $d_j$  representa los detalles intermedios que se necesitan para recuperar  $a_{j+1}$  a partir de  $a_j$ . De esta manera, es posible obtener  $\{a_{L-1}, d_{L-1}\}$  a partir de  $a_L$  (proceso de descomposición) y, recíprocamente, también podemos obtener  $a_L$  a partir de  $\{a_{L-1}, d_{L-1}\}$ , o equivalentemente, a partir de de (3.1.1) (proceso de reconstrucción). Esta descomposición en “ondículas” (del inglés “wavelets”) constituye una destacada teoría de las denominadas representaciones lineales multi-escala [18, 21, 44]. De hecho, la construcción de esquemas multirresolución acordes con diferentes contextos prácticos es un área de investigación de interés creciente

[13, 15, 35, 45, 53]. El análisis teórico dependerá del espacio funcional que se estime adecuado utilizar en cada caso y el nivel de dificultad aumentará con la dimensión de dicho espacio.

En este capítulo introduciremos un análisis multirresolución para obtener superficies spline de clase  $\mathcal{C}^r$  que aproximen un conjunto de datos lagrangianos sobre puntos de ciertos dominios  $D \subset \mathbb{R}^2$ , al mismo tiempo que minimicen un “funcional energía”. El espacio de minimización será el de los splines construidos a partir de las subtriangulaciones de Powell-Sabin asociadas a diferentes triangulaciones uniformes de  $\overline{D}$  de tipo  $\Delta^1$  (consultar la Definición 3.1 en la Pág. 6). Más concretamente, para cada nivel de resolución consideraremos una triangulación uniforme de tipo  $\Delta^1$  de tal manera que los espacios de aproximación spline asociados a niveles de resolución consecutivos estén encadenados.

En algunos trabajos recientes se han desarrollado algoritmos de subdivisión que tienen en cuenta ciertas propiedades de energía (consultar por ejemplo [28]) y son construidos sobre triangulaciones de Powell-Sabin (ver por ejemplo [54, 60, 61]). Nosotros obtendremos algoritmos de descomposición y reconstrucción que permitirán calcular los coeficientes de detalle relativos a la representación de tipo multirresolución (3.1.1) en el marco de las superficies de energía mínima.

El esquema MRA desarrollado en este trabajo se aplica a algunos problemas prácticos, como por ejemplo, la localización de regiones donde la energía de una determinada función está mayoritariamente concentrada, o el diseño de procesos de filtrado con objeto de liberar de “ruido” una señal dada, cuestión que constituye un campo de interés creciente en numerosos problemas tecnológicos actuales.

Este capítulo se organiza de la siguiente manera: En la Sección 3.2 describiremos los conceptos básicos sobre las técnicas de multirresolución, mientras que en la Sección 3.3 plantearemos el problema que queremos resolver. En la Sección 3.4 desarrollaremos el esquema MRA, obteniendo los algoritmos de descomposición y reconstrucción en el marco de la multirresolución, y haremos uso de dos teoremas presentados en los capítulos anteriores y publicados en los trabajos [6] y [7] con objeto de mostrar cómo se puede garantizar cierto tipo de convergencia en este contexto a medida que el número de datos lagrangianos y el nivel de resolución aumentan. Finalmente, en la Sección 3.5, presentamos las dos aplicaciones previamente comentadas: una relacionada con la localización de regiones de máxima energía de una función dada, y otra relativa a la reducción de ruido en una superficie.

## 3.2. Fundamentos básicos de multirresolución

Un esquema multirresolución constituye un marco muy apropiado para la representación de un conjunto de datos  $a_L$  mediante una aproximación  $a_k$ ,  $0 \leq k \leq L - 1$ , y diferentes niveles de detalle  $\{d_k, d_{k+1}, \dots, d_{L-1}\}$ . En este contexto, se trabaja con una colección de *espacios de aproximación*  $\{\mathcal{V}_j\}_{j \geq 0}$  en un espacio funcional apropiado  $\mathcal{H}$  satisfaciendo

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \dots \subset \mathcal{V}_j \subset \dots \subset \mathcal{H}, \quad (3.2.2)$$

y de forma que  $\bigcup_{j \geq 0} \mathcal{V}_j$  sea denso en  $\mathcal{H}$  ([18, 21, 36, 44]). Los *espacios de detalle*  $\mathcal{W}_j$  (para  $j \geq 0$ ) son definidos mediante la identidad  $\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j$ . Por tanto, se tendrá que

$$\mathcal{V}_L = \mathcal{V}_{L-1} \oplus \mathcal{W}_{L-1} = \dots = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j \oplus \dots \oplus \mathcal{W}_{L-1} \quad (j \leq L - 1).$$

En la teoría clásica de ondículas (wavelets), el análisis multirresolución se desarrolla en  $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , y los espacios  $\mathcal{V}_j$  suelen ser generados mediante dilataciones y traslaciones de una función fija, denominada la función de *escala*, mientras que los espacios de detalle son generados por la aplicación de este mismo procedimiento a la denominada función de ondícula o función *wavelet*. El análisis multirresolución en  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$  se basa en el producto tensorial de estas funciones [21, 44]. La construcción clásica involucra técnicas de transformadas de Fourier para obtener tanto la función escala como la función wavelet en términos de los filtros de paso bajo y alto (“low-pass filters” y “high-pass filters” en inglés), respectivamente. Sin embargo, hay otras situaciones en las que, a pesar de que el enfoque multi-escala continúa siendo apropiado para formular ciertos problemas, las técnicas de Fourier no resultan apropiadas para desarrollar los algoritmos de multirresolución. En estos casos los algoritmos vienen dados mediante los llamados *esquemas de elevación* (“lifting schemes” en inglés). Se trata de un marco completamente espacial, desprovisto del análisis de frecuencias del caso clásico [34, 55].

Estos métodos de elevación pueden verse como una reimplementación de los procesos de descomposición y reconstrucción que usualmente vienen dados mediante ciertos algoritmos de filtrado (“*filter bank algorithms*” del término en inglés) definidos por los llamados “filtros de cuadratura en espejo” (“*quadrature mirror filters*” del término en inglés). De hecho se cuenta con cuatro filtros de este tipo que hacen uso de las operaciones de muestreo (“*downsampling*”, “*upsampling*” del término en inglés) y convoluciones. El esquema de “alzado” o “levantamiento” propone descomponer los datos de entrada en las componentes antigua (old) y nueva (new), usadas de acuerdo

con la jerarquía definida por el procedimiento de subdivisión (ver la Figura 3.1).

A su vez, los datos nuevos son predichos a partir de los antiguos mediante el uso de un operador de predicción  $P$ . Este operador de predicción no necesita ser exacto, de manera que los detalles  $d_j$  son definidos mediante la diferencia

$$d_j = a_{j+1}^{new} - P(a_{j+1}^{old}). \quad (3.2.3)$$

Por otra parte, en la práctica, los datos  $a_{j+1}^{old}$  serán iguales a los  $a_j$  salvo una versión filtrada de los detalles, por medio del operador  $U$ :

$$a_j = a_{j+1}^{old} + U(d_j). \quad (3.2.4)$$

El caso  $P = 1$  y  $U = 1/2$  corresponde a la transformada wavelet de Haar (consultar p.ej. la pág. 24 de [34]). De hecho, todas las transformadas wavelet clásicas pueden ser reformuladas mediante un levantamiento.

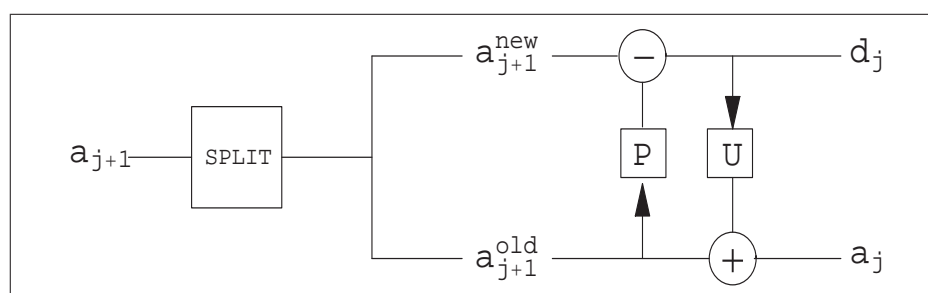


Figura 3.1: Esquema general de levantamiento (“lifting scheme”).

La transformada correspondiente a un levantamiento de este tipo es fácilmente invertible. De (3.2.3) y (3.2.4) se sigue que

$$a_{j+1}^{new} = d_j + P(a_j - U(d_j))$$

$$a_{j+1}^{old} = a_j - U(d_j)$$

Además, el signo  $+$  se reemplaza con el signo  $-$  y la operación de “descomposición” (*split*) se reemplaza con “fundir” (*merge*). La operación inversa involucra los mismos operadores,  $P$  y  $U$ . Este hecho constituye una gran ventaja de estos esquemas de levantamiento, comparados con la clásica transformada wavelet inversa. El diagrama de reconstrucción vía levantamiento se presenta gráficamente en la Figura 3.2



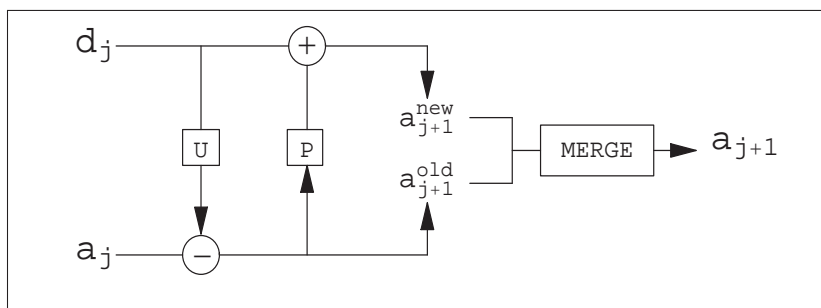


Figura 3.2: El esquema de alzado inverso.

### 3.3. Formulación del problema

Sea  $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$  una triangulación uniforme de tipo  $\Delta^1$  del plano  $\mathbb{R}^2$  inducida por traslaciones enteras de las rectas  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $x + y = 0$  (ver Definición 3.1 o bien [22]), y sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio poligonal de tal forma que  $\bar{D}$  sea la unión de algunos triángulos de  $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$ .

Consideremos un subconjunto finito  $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\}$  de puntos en  $\bar{D}$  y un vector de valores reales  $Z = (z_i)_{i=1}^k \in \mathbb{R}^k$ . De la inyección continua de  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  en  $\mathcal{C}^0(\bar{D})$  (ver resultado general A.4.12 en el Apéndice; nótese que en este caso  $d = 2$ ,  $k = r + 1$  y  $p = 2$ ), podemos definir el operador de evaluación  $\rho(v) := (v(\mathbf{p}_i))_{i=1}^k \in \mathbb{R}^k$  para todo  $v \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$ .

Consideremos asimismo el funcional

$$\mathcal{J}(v) = \langle \rho(v) - Z \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |v|_m^2,$$

donde  $\langle \cdot \rangle_k$  representa la norma euclídea usual en  $\mathbb{R}^k$ ,  $\tau := (\tau_1, \dots, \tau_{r+1})$ ,  $\tau_i \in [0, +\infty[$  para todo  $i = 1, \dots, r$  y  $\tau_{r+1} \in ]0, +\infty[$ .

Recordamos que lo que estamos buscando es una superficie de clase  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ), de manera que aproxime los puntos  $\{(\mathbf{p}_i, z_i)\}_{i=1}^k \subset \mathbb{R}^3$  mediante la minimización del funcional energía  $\mathcal{J}$ .

Tal y cómo se ha indicado en los capítulos previos, el primer término de  $\mathcal{J}$  mide (en el sentido de los mínimos cuadrados) cómo de bien  $v$  aproxima los valores en  $Z$ , mientras que el segundo representa la “condición de mínima energía” sobre las semi-normas  $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_{r+1}$ , sopesadas mediante los parámetros  $\tau_1, \dots, \tau_{r+1}$ , respectivamente.

Para cada nivel de resolución, consideramos el siguiente problema de minimización:

**Problema 3.3.1** Encontrar un elemento  $\sigma \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(\overline{D}, \mathcal{T})$  tal que

$$\mathcal{J}(\sigma) \leq \mathcal{J}(v) \quad \text{para todo} \quad v \in \mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(\overline{D}, \mathcal{T}).$$

En el Capítulo 1 se comprueba que, bajo la condición

$$\text{Ker}(\rho) \cap \mathbb{P}_r(D) = \{0\},$$

el Problema 3.3.1 posee una única solución, y se demuestra que si  $N = \dim(\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(\overline{D}, \mathcal{T}))$ , consideramos una base  $\{v_1, \dots, v_N\}$  del espacio de elementos finitos  $\mathcal{S}_n^{r, r+\lceil \frac{r}{2} \rceil}(\overline{D}, \mathcal{T})$  y denotamos la única solución del Problema 3.3.1 como

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \beta_i v_i,$$

entonces el vector de coeficientes  $X \equiv \beta = ((\beta_i)_{i=1}^N)^\top$  es la única solución del sistema lineal

$$C X = T \tag{3.3.5}$$

donde

$$C = \left( \langle \rho(v_i), \rho(v_j) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m(v_i, v_j)_m \right)_{i,j=1}^N \quad \text{y}$$

$$T = \left( (\langle Z, \rho(v_i) \rangle_k)_{i=1}^N \right)^\top.$$

### 3.4. Análisis multirresolución

En esta sección usaremos la siguiente notación: Dados dos conjuntos de funciones  $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i=1}^{d_f}$  y  $\mathcal{G} = \{g_j\}_{j=1}^{d_g}$  del espacio  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  denotaremos

$$C_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} = \left( \langle \rho(f_i), \rho(g_j) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m(f_i, g_j)_m \right)_{\substack{i=1, \dots, d_f \\ j=1, \dots, d_g}}$$

y

$$T_{\mathcal{F}} = \left( (\langle Z, \rho(f_i) \rangle_k)_{i=1}^{d_f} \right)^\top.$$

Sea  $\{\mathcal{T}_j\}_{j \geq 0}$  una sucesión de triangulaciones uniformes de tipo  $\Delta^1$  de  $\overline{D}$ , de forma que

1.  $\mathcal{T}_{j+1}$  sea un refinamiento de  $\mathcal{T}_j$  (para todo  $j \geq 0$ ) y

2. los espacios de aproximación  $\mathcal{V}_j = S_n^{r, r + [\frac{r}{2}]}(\bar{D}, \mathcal{T}_j)$  sean anidados, como en (3.2.2).

Denotemos  $n_j = \dim(\mathcal{V}_j)$ . Del resultado A.4.6 del Apéndice (o del Ejemplo 7.2.7. en [4]) podemos asegurar que  $\mathcal{V}_j \subset \mathcal{H}^{r+1}(D)$ .

Por otro lado, si  $u \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$  y  $\varepsilon > 0$ , entonces aplicando el Teorema de Stone-Weierstrass (ver la Proposición A.5.1 en el Apéndice) y la inyección continua de  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  en  $C^0(\bar{D})$ , obtenemos que existe  $p \in \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{P}_n(D)$  y  $C > 0$  tales que

$$\|u - p\| \leq C \|u - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplicando el Lemma 6 de [6] o bien el Lema 1.3.2, tendremos que, para  $h$  suficientemente pequeño existirá  $v \in \mathcal{V}_{j(h)}$ , donde  $j(h) \geq 0$  es tal que el diámetro de los triángulos de  $\mathcal{T}_{j(h)}$  sea  $h$ , y tal que

$$\|p - v\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y

$$\|u - v\| < \varepsilon.$$

Por tanto  $\bigcup_{j \geq 0} \mathcal{V}_j$  es denso en  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  respecto a la norma  $\|\cdot\|$  y, en particular, los espacios de aproximación  $\mathcal{V}_j$  constituyen un MRA en  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{r+1}(D)$ :

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_j \subset \cdots \subset \mathcal{H}^{r+1}(D).$$

Sea  $\mathcal{B}_0 = \{\varphi_0^k\}_{k=1}^{n_0}$  la base usual de Hermite de  $\mathcal{V}_0$  y, para todo  $j \geq 0$ , consideremos  $\Psi_j = \{\psi_j^l\}_{l=1}^{n_{j+1} - n_j}$  las funciones de base de Hermite de  $\mathcal{V}_{j+1}$  asociadas a los nodos pertenecientes a  $\mathcal{T}_{j+1}$  que no pertenezcan a  $\mathcal{T}_j$ .

Entonces, resulta claro que si definimos

$$\begin{cases} \varphi_{j+1}^l = \varphi_j^l & \text{para } l = 1, \dots, n_j \\ \varphi_{j+1}^l = \psi_j^{l-n_j} & \text{para } l = n_j + 1, \dots, n_{j+1}, \end{cases}$$

tendremos que  $\mathcal{B}_{j+1} = \{\varphi_{j+1}^l\}_{l=1}^{n_{j+1}} = \mathcal{B}_j \cup \Psi_j$  será una base de funciones con soporte local del espacio  $\mathcal{V}_{j+1}$ , para  $j \geq 0$ .

Sea  $\sigma_j$  la única solución del Problema 3.3.1 para  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_j$ . Entonces, existirá una sucesión  $\mathbf{a}_j = \{a_j^l\}_{l=1}^{n_j}$  tal que

$$\sigma_j = \sum_{l=1}^{n_j} a_j^l \varphi_j^l, \quad (3.4.6)$$

y, de (3.3.5) se concluye que, para todo  $j \geq 0$ ,

$$C_{\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_j} \mathbf{a}_j = T_{\mathcal{B}_j}. \quad (3.4.7)$$

Además, para todo  $j \geq 1$  tendremos que

$$C_{\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_j} = \left( \begin{array}{c|c} C_{\mathcal{B}_{j-1}, \mathcal{B}_{j-1}} & C_{\mathcal{B}_{j-1}, \Psi_{j-1}} \\ \hline C_{\Psi_{j-1}, \mathcal{B}_{j-1}} & C_{\Psi_{j-1}, \Psi_{j-1}} \end{array} \right) \quad (3.4.8)$$

y

$$T_{\mathcal{B}_j} = \left( \begin{array}{c} T_{\mathcal{B}_{j-1}} \\ T_{\Psi_{j-1}} \end{array} \right). \quad (3.4.9)$$

Por lo tanto, si denotamos al elemento  $\sigma_j = \sum_{l=1}^{n_j} a_j^l \varphi_j^l$  como

$$\sum_{l=1}^{n_{j-1}} \tilde{a}_{j-1}^l \varphi_{j-1}^l + \sum_{l=1}^{n_j - n_{j-1}} d_{j-1}^l \psi_{j-1}^l,$$

es decir,

$$\{a_j^1, a_j^2, \dots, a_j^{n_j}\} = \{\tilde{a}_{j-1}^1, \tilde{a}_{j-1}^2, \dots, \tilde{a}_{j-1}^{n_{j-1}}, d_{j-1}^1, d_{j-1}^2, \dots, d_{j-1}^{n_j - n_{j-1}}\}, \quad (3.4.10)$$

entonces, de (3.4.7), (3.4.8), (3.4.9) y (3.4.10) se deduce que

$$C_{\mathcal{B}_{j-1}, \mathcal{B}_{j-1}} \tilde{\mathbf{a}}_{j-1} + C_{\mathcal{B}_{j-1}, \Psi_{j-1}} \mathbf{d}_{j-1} = T_{\mathcal{B}_{j-1}} \quad (3.4.11)$$

$$C_{\Psi_{j-1}, \mathcal{B}_{j-1}} \tilde{\mathbf{a}}_{j-1} + C_{\Psi_{j-1}, \Psi_{j-1}} \mathbf{d}_{j-1} = T_{\Psi_{j-1}}, \quad (3.4.12)$$

donde  $\tilde{\mathbf{a}}_{j-1} = ((\tilde{a}_{j-1}^l)_{l=1}^{n_{j-1}})^\top$  y  $\mathbf{d}_{j-1} = ((d_{j-1}^l)_{l=1}^{n_j - n_{j-1}})^\top$ .

Reemplazando  $T_{\mathcal{B}_{j-1}}$  por  $C_{\mathcal{B}_{j-1}, \mathcal{B}_{j-1}} \mathbf{a}_{j-1}$  en (3.4.11) obtendremos que

$$\mathbf{a}_{j-1} - \tilde{\mathbf{a}}_{j-1} = (C_{\mathcal{B}_{j-1}, \mathcal{B}_{j-1}})^{-1} C_{\mathcal{B}_{j-1}, \Psi_{j-1}} \mathbf{d}_{j-1}.$$

De esta última ecuación, y usando la notación introducida en (3.4.6), podemos reformular el algoritmo de descomposición como sigue:

$$\begin{cases} \mathbf{d}_{j-1} = ((a_j^l)_{l=n_{j-1}+1}^{n_j})^\top \\ \mathbf{a}_{j-1} = \tilde{\mathbf{a}}_{j-1} + (C_{\mathcal{B}_{j-1}, \mathcal{B}_{j-1}})^{-1} C_{\mathcal{B}_{j-1}, \Psi_{j-1}} \mathbf{d}_{j-1}, \end{cases} \quad (3.4.13)$$

mientras que el algoritmo de reconstrucción sería:

$$\begin{cases} ((a_j^l)_{l=n_{j-1}+1}^{n_j})^\top = \mathbf{d}_{j-1} \\ ((a_j^l)_{l=1}^{n_{j-1}})^\top = \tilde{\mathbf{a}}_{j-1} = \mathbf{a}_{j-1} - (C_{\mathcal{B}_{j-1}, \mathcal{B}_{j-1}})^{-1} C_{\mathcal{B}_{j-1}, \Psi_{j-1}} \mathbf{d}_{j-1}. \end{cases} \quad (3.4.14)$$

Obsérvese además que tomando los operadores  $P$  y  $U$  de las expresiones (3.2.3) y (3.2.4) como el operador nulo y  $C_{\mathcal{B}_j, \mathcal{B}_j}^{-1} C_{\mathcal{B}_j, \Psi_j}$  respectivamente, los

algoritmos anteriores también pueden ser formulados en el marco de los esquemas de levantamiento vistos en la Sección 3.2.

Establecemos ahora un resultado de convergencia en este contexto derivado de los resultados de convergencia para datos exactos y para datos con ruido establecido en los Capítulos 1 y 2:

Para cada  $s \in \mathbb{N}^*$ , sea  $\mathcal{P}^s \subset \overline{D}$  un conjunto finito de  $k = k(s)$  puntos y  $Z^s \in \mathbb{R}^k$  un vector de valores reales. Sea  $d^s = \sup_{x \in D} \{\delta(x, \mathcal{P}^s)\}$ , donde  $\delta$  denota la distancia euclídea en  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $g \in \mathcal{C}^{n+1}(D)$  y sea  $h_j$  el diámetro de los triángulos de  $\mathcal{T}_j$  para  $j \geq 0$ . Supongamos que  $\mathcal{E} \equiv \{h_j\}_{j \geq 0} \subset \mathbb{R}_*^+$  admite 0 como punto de acumulación y sea  $\sigma_{s,j}$  la solución del Problema 3.3.1 para  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_j$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^s$  y  $Z = Z^s$ .

En el Teorema 1.3.5 (consultar también [6]) se demuestra que:

**Teorema 3.4.1** *Bajo las hipótesis*

$$d^s = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow +\infty, \quad (3.4.15)$$

$$\exists C > 0 \text{ y } \tilde{s} \in \mathbb{N}^* \text{ tales que } k(s) \leq C s^2, \quad \forall s \geq \tilde{s}, \quad (3.4.16)$$

$$\tau_{r+1} = o(s^2), \quad s \rightarrow +\infty, \quad (3.4.17)$$

$$\tau_m = o(\tau_{r+1}), \quad s \rightarrow +\infty, \quad \forall m = 1, \dots, r, \quad (3.4.18)$$

$$\frac{s^2 h_j^{2n+2}}{\tau_{r+1}} = o(1), \quad s \rightarrow +\infty, \quad (3.4.19)$$

entonces

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \|g - \sigma_{s,j}\|_{r+1} = 0.$$

Por otra parte, consideremos para cada  $s \in \mathbb{N}^*$  un conjunto  $\tilde{Z}^s = Z^s + \vartheta^s$  de datos con ruido, donde  $\vartheta^s = (\vartheta_i^s)_{i=1}^q$  es un vector de error en  $\mathbb{R}^q$  de “ruido blanco”, para cada  $s \in \mathbb{N}^*$ , y sea  $\tilde{\sigma}_{s,j}$  la solución del Problema 3.3.1 para  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_j$ ,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^s$  y  $Z = \tilde{Z}^s$ . En [8] y en el Capítulo 2 también se demuestra que:

**Teorema 3.4.2** *Si además de (3.4.15), (3.4.16) y (3.4.18), también se verifican las siguientes condiciones:*

$$d^s = O\left(\inf_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{P}^s, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}} \langle \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle_2\right), \quad s \rightarrow +\infty, \quad (3.4.20)$$

$$\exists C > 0, \text{ y } \exists \alpha \in ]1, 2[ \text{ tales que } \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\tau_{r+1}}{s^\alpha} = C, \quad (3.4.21)$$

$$s^{2-\alpha} h_j^2 \rightarrow +\infty, \quad s \rightarrow +\infty, \quad (3.4.22)$$

$$s^{2-\alpha} h_j^{2n+2} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow +\infty, \quad (3.4.23)$$

entonces

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \|g - \tilde{\sigma}_{s,j}\|_{r+1} = 0 \text{ casi seguramente.}$$

Queremos mencionar también que, si  $D = ]a, b[ \times ]c, d[$  es un dominio cuadrado, entonces (3.4.19), que es la única hipótesis que involucra a la sucesión de triangulaciones, podría ser reemplazada por una nueva condición (3.4.19') en la que aparece el nivel de resolución  $j$ . Más precisamente, en este caso es fácil comprobar que  $h_j = \frac{1}{2^j} \gamma$ , donde  $\gamma = \sqrt{2}(b-a)$  y, por lo tanto, la ecuación (3.4.19) puede ser reemplazada por

$$\frac{s^2}{\tau_{r+1}(4^{n+1})^j} = o(1), \quad s \rightarrow +\infty.$$

Análogamente, en el resultado de convergencia para datos con ruido, las condiciones (3.4.22) y (3.4.23) también pueden ser establecidas en términos del nivel de resolución  $j$ :

$$\frac{s^{2-\alpha}}{4^j} \rightarrow +\infty, \quad s \rightarrow +\infty, \quad (3.4.24)$$

$$\frac{s^{2-\alpha}}{(4^{n+1})^j} \rightarrow +\infty, \quad s \rightarrow +\infty. \quad (3.4.25)$$

### 3.5. Aplicaciones

Con objeto de mostrar la efectividad de los algoritmos desarrollados en este capítulo, vamos a considerar dos aplicaciones. En la primera, se plantea la reducción del ruido que contiene una superficie dada, mientras que en la segunda, se intenta localizar aquellas zonas del dominio en las que la energía de una superficie está mayoritariamente concentrada.

En ambos casos, para establecer el esquema de multirresolución requerido para formular los algoritmos, hemos considerado el dominio  $D = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  y las triangulaciones  $\mathcal{T}_0$ ,  $\mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  (que aparecen representadas en la Figura 3.3).

Ambas aplicaciones se desarrollan y resuelven usando splines cuadráticos de clase  $\mathcal{C}^1$ ; esto es, usando los subespacios  $\mathcal{V}_j = \mathcal{S}_2^{1,1}(D, \mathcal{T}_j)$ , y por tanto  $n_j = \dim(\mathcal{V}_j) = 3(2^j + 1)^2$ .

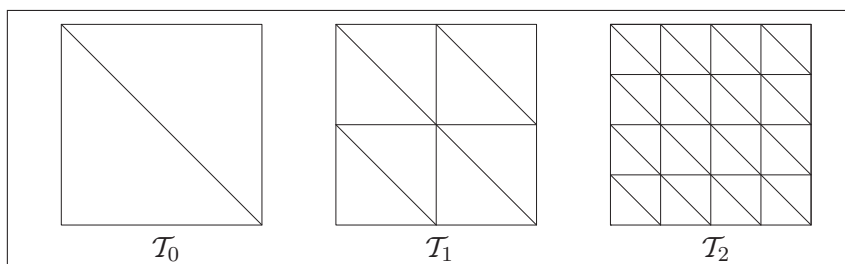


Figura 3.3: Triangulaciones  $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$  y  $\mathcal{T}_2$  de  $\bar{D} = [0, 1] \times [0, 1]$ .

### 3.5.1. Reducción de ruido

Hemos considerado un conjunto de puntos  $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^{2000}$ , arbitrariamente distribuidos sobre el dominio  $D$ , y un vector de valores  $Z = \{f(\mathbf{p}_i) + \vartheta_i\}_{i=1}^{2000}$ , donde  $f$  es la función test representada en la Figura 3.4 y definida mediante la expresión

$$f(x, y) = e^{8(-(x-0,5)^2 - (y-0,5)^2)},$$

y  $\vartheta = \{\vartheta_i\}_{i=1}^{2000}$  es un vector de ruido con media 0 y desviación  $\mu = 5 \cdot 10^{-2}$ . Los valores de los parámetros usados en este ejemplo son  $\tau_1 = 10^{-3}$  y  $\tau_2 = 10^{-5}$ .

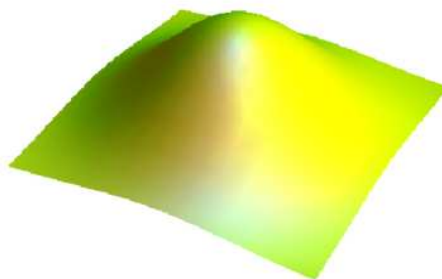


Figura 3.4: Gráfica de la función test  $f$ .

El proceso seguido para reducir el ruido es el siguiente:

**Paso 1.** Hemos considerado el nivel de resolución  $L = 3$ . Sustituyendo en la expresión (3.4.6) los coeficientes  $a_3$  obtenidos a partir de (3.4.7), obtendremos un spline de aproximación  $\sigma_3 = \sum_{k=1}^{n_3} a_3^k \varphi_3^k$  (que aparece en la Figura 3.5).

**Paso 2.** Aplicando recursivamente el algoritmo de descomposición (3.4.13) obtendremos los coeficientes de aproximación  $a_t$  y los coeficientes de detalle  $d_t$  a partir de  $a_3$  para  $t = 2, 1, 0$  (en la Figura 3.5, en la columna de la izquierda, se representan los splines de aproximación  $\sigma_t = \sum_{k=1}^{n_t} a_t^k \varphi_t^k$ , para  $t = 3, 2, 1$  respectivamente).

**Paso 3.** Para reducir el ruido, hemos considerado el siguiente método de filtrado, mediante la imposición de un umbral máximo de detalle (usado también en [61]) con el objeto de definir unos coeficientes perturbados de detalle  $\hat{d}_t = \{\hat{d}_t^k\}_{k=1}^{n_{t+1}-n_t}$ :

$$\hat{d}_t^k = \begin{cases} d_t^k & \text{si } |d_t^k| > 0,1 \max\{|d_t^k|\}_{k=1}^{n_{t+1}-n_t} \\ 0 & \text{si } |d_t^k| \leq 0,1 \max\{|d_t^k|\}_{k=1}^{n_{t+1}-n_t} \end{cases}$$

para  $t = 0, 1, 2$  y  $k = 1, \dots, n_{t+1} - n_t$ .

**Paso 4.** Mediante el algoritmo de reconstrucción (3.4.14) vamos obteniendo de manera recursiva, a partir de  $\hat{a}_t$  y  $\hat{d}_t$ , los coeficientes de aproximación perturbados  $\hat{a}_{t+1} = \{\hat{a}_{t+1}^k\}_{k=1}^{n_{t+1}}$  para  $t = 0, 1, 2$  (entendiendo que  $\hat{a}_0 = a_0$ ).

**Paso 5.** Finalmente, los splines de aproximación perturbados, en los que el ruido ha sido reducido, son

$$\hat{\sigma}_t = \sum_{k=1}^{n_t} \hat{a}_t^k \varphi_t^k \quad \text{para } t = 0, 1, 2, 3.$$

En la Figura 3.5, en la columna de la derecha, aparecen representados  $\hat{\sigma}_t$  para  $t = 3, 2, 1$ .

### 3.5.2. Localización de la energía

En esta segunda aplicación nos proponemos detectar aquellas regiones en las que la energía de una función dada está mayoritariamente concentrada. Para probar la eficiencia de los algoritmos desarrollados hemos considerado una función test con un soporte bastante localizado, definida mediante la expresión

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 - 8\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} & \text{si } (x-a)^2 + (y-a)^2 \leq \frac{1}{8^2} \\ 1 - 8\sqrt{(x-b)^2 + (y-b)^2} & \text{si } (x-b)^2 + (y-b)^2 \leq \frac{1}{8^2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde  $a = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{100}$  y  $b = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{100}$ . En la Figura 3.6 podemos ver que la energía de  $g$  está concentrada radialmente alrededor de los dos vértices de



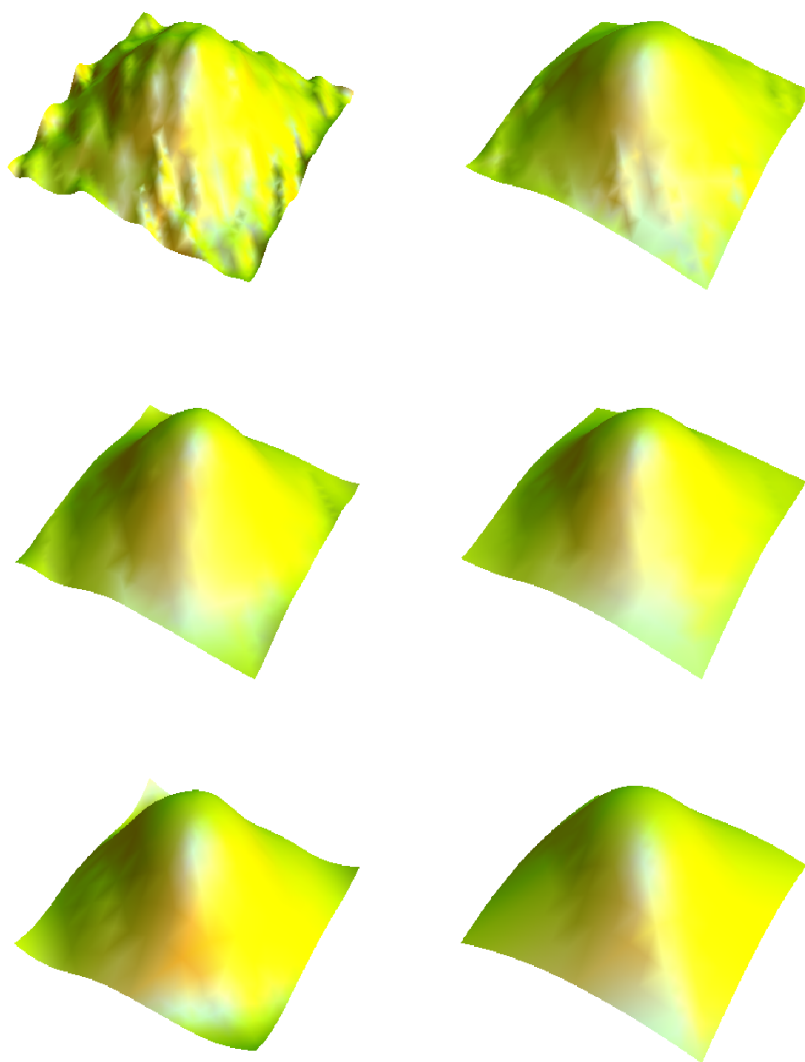


Figura 3.5: Splines de aproximación y splines perturbados para diferentes niveles de resolución decreciente.

dichos conos y el objetivo será detectar este hecho mediante la aplicación de los algoritmos desarrollados.

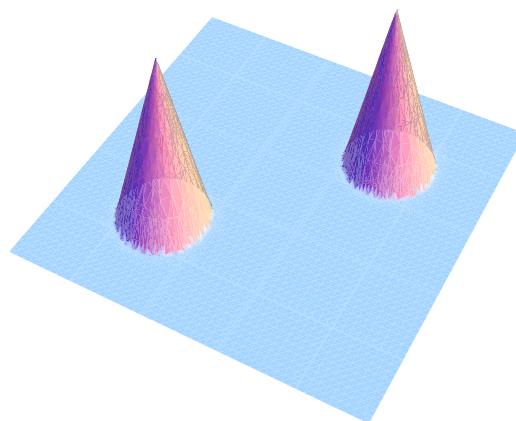


Figura 3.6: Gráfica de la función test  $g$ .

El procedimiento comienza como en la aplicación 3.5.1:

**Paso 1.** Hemos considerado el nivel de resolución  $L = 3$ . Sustituyendo en la expresión (3.4.6) los coeficientes  $a_3$  obtenidos de la ecuación (3.4.7), obtenemos la función de aproximación  $\sigma_3$ .

**Paso 2.** Aplicando recursivamente el algoritmo de descomposición (3.4.13) obtendremos, a partir de  $a_3$ , los coeficientes de aproximación  $a_t$  y los coeficientes de detalle  $d_t$  para  $t = 2, 1, 0$ .

**Paso 3.** Para cada nivel de resolución  $t = 0, 1, 2$ , hemos subdividido el conjunto formado por los coeficientes de detalle  $d_t = \{d_t^k\}_{k=1}^{n_{t+1}-n_t}$  en cinco bloques  $\mathcal{D}_t^k$ , con  $k = 0, \dots, 4$ , de la siguiente manera: Sea

$$\begin{aligned} M_t &= \max\{|d_t^k|\}_{k=1}^{n_{t+1}-n_t}, \\ m_t &= \min\{|d_t^k|\}_{k=1}^{n_{t+1}-n_t} \text{ y} \\ h_t &= M_t - m_t. \end{aligned}$$

Entonces

$$d_t^k \in \begin{cases} \mathcal{D}_t^0 & \text{si } |d_t^k| \in \left[ m_t, m_t + \frac{4}{11}h_t \right] \\ \mathcal{D}_t^1 & \text{si } |d_t^k| \in \left] m_t + \frac{4}{11}h_t, m_t + \frac{5}{11}h_t \right] \\ \mathcal{D}_t^2 & \text{si } |d_t^k| \in \left] m_t + \frac{5}{11}h_t, m_t + \frac{6}{11}h_t \right] \\ \mathcal{D}_t^3 & \text{si } |d_t^k| \in \left] m_t + \frac{6}{11}h_t, m_t + \frac{7}{11}h_t \right] \\ \mathcal{D}_t^4 & \text{si } |d_t^k| \in \left] m_t + \frac{7}{11}h_t, M_t \right] \end{cases} \quad (3.5.26)$$

**Paso 4.** A cada triángulo  $T \in \mathcal{T}_t$  ( $t = 1, 2, 3$ ) le hemos asignado un número  $n_T$  definido como sigue:

$$n_T = \max\{m \in \{0, 1, 2, 3, 4\} : d_t^k \in \mathcal{D}_t^m \text{ para todo } k \text{ tal que } T \subset \text{supp}(\psi_t^k)\}.$$

Nótese que los coeficientes de detalle mayores pertenecerán a  $\mathcal{D}_t^4$ . Esto significará que este bloque estará relacionado con las regiones alrededor de los vértices de la función.

**Paso 5.** Finalmente, con el objeto de resaltar la distribución de energía de la función  $g$ , de acuerdo con la gráfica de sus curvas de nivel (tal y cómo aparecen en la Figura 3.7), hemos considerado, para cada nivel de resolución  $t = 1, 2, 3$ , una representación gráfica de  $\mathcal{T}_t$  en la que los triángulos  $T \in \mathcal{T}_t$  han sido coloreados siguiendo el siguiente criterio: negro si  $n_T = 0$ , gris oscuro si  $n_T = 1$ , gris medio si  $n_T = 2$ , gris claro si  $n_T = 3$  y blanco si  $n_T = 4$ .

Todas estas representaciones también se muestran en la Figura 3.7, donde realizando una comparativa entre los diferentes gráficos podemos concluir que, a medida que el nivel de resolución va en aumento, las zonas en blanco se van concentrando alrededor de las regiones en las que la energía de  $g$  está mayoritariamente concentrada.

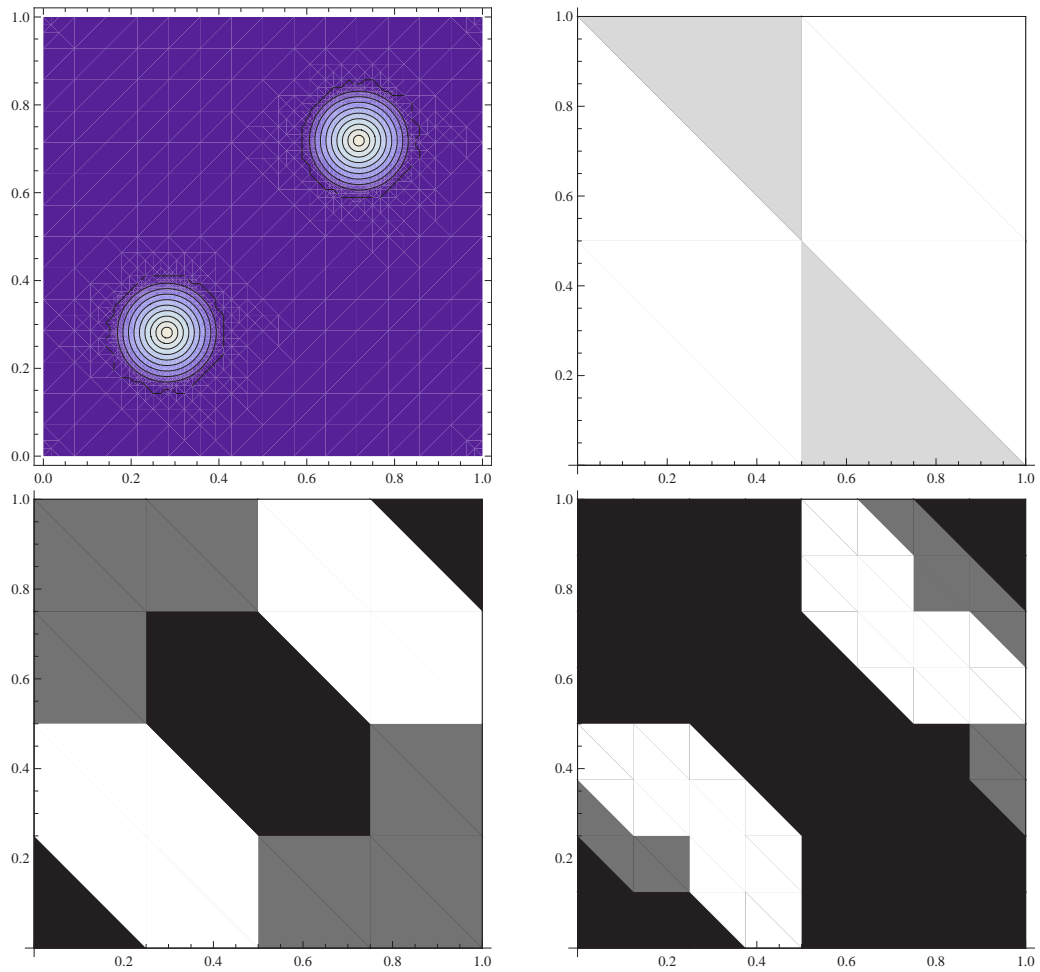


Figura 3.7: Gráficas de la función test  $g$ , así como mapas de energía para diferentes niveles de resolución.

# Capítulo 4

## Otras aplicaciones: rellenado de agujeros

### 4.1. Introducción

El problema de rellenar adecuadamente “agujeros” o completar la gráfica de una superficie 3D puede aparecer en todo tipo de áreas relacionadas de una u otra manera con gráficos computacionales, como son CAGD, CAD-CAM, Ciencias de la Tierra, visión por computadora, robótica, reconstrucción de imágenes via satélite, tratamiento de información obtenida por radar, etc.

En los últimos años se han publicado varios trabajos relacionados con este tema, como por ejemplo [14, 30, 50]. En todos ellos se considera un enfoque variacional para la resolución del problema.

En este capítulo presentaremos varios métodos para rellenar un agujero de una superficie 3D explícita dada mediante una función diferenciable definida sobre  $\bar{D} - H$ , siendo  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio poligonal, y  $H$  un subconjunto no vacío de  $D$ . La idea es definir otra función  $f^*$  (*función reconstrucción*) que, “respetando” la forma de  $f$  (aunque no necesariamente coincidiendo con ella) allá donde  $f$  está definida, recubra el agujero de  $f$  sobre  $H$  de forma homogénea y “coherente” con la gráfica de  $f$ .

Realizaremos dicho rellenado de tres formas diferentes: de manera *discontinua*, con *continuidad* o con *clase  $C^1$* . En todos los casos consideraremos una  $\alpha$ -triangulación  $\mathcal{T}$  de  $\bar{D}$ , a partir de la cual definiremos otra región poligonal  $H^*$  que incluya a  $H$  y que será sobre la que definiremos los métodos de rellenado.

En el caso discontinuo, la función  $f^*$  considerada para rellenar el agujero se definirá yuxtaponiendo la función original  $f$  fuera de  $H^*$  con un spline polinomial bivariado de tipo Powell-Sabin construido sobre  $H^*$ . Dicho spline

se obtendrá como solución de un problema de minimización de un funcional energía definido de forma similar a los de los capítulos anteriores: una combinación lineal de las seminormas usuales en el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^2(\overset{\circ}{H}^*)$ , junto a un término que controla la aproximación (en el sentido de los mínimos cuadrados discreto) de los valores de  $f$  y los de sus derivadas normales en los puntos medios de las aristas de la triangulación  $\mathcal{T}$  que se encuentren sobre la frontera de  $H^*$ .

En el caso continuo, la reconstrucción no se hará por simple yuxtaposición de la gráfica de  $f$  junto con la de cierto spline bivariado de tipo Powell-Sabin, sino que, en este caso, tendremos previamente que modificar ligeramente  $f$  fuera de  $H^*$ , de manera que la sustituiremos por un spline bivariado aproximante  $s_f$ , que minimizará asimismo un funcional similar a los considerados en los capítulos anteriores. A continuación, reconstruiremos  $f$  dentro de  $H^*$  mediante un spline  $\sigma_{s_f}$  tipo Powell-Sabin de forma similar a como lo haremos en el caso discontinuo. Para asegurar la continuidad de la reconstrucción  $f^*$  tendremos que forzar a que los valores de  $\sigma_{s_f}$  y  $s_f$ , así como los de sus derivadas tangenciales, coincidan en ciertos puntos sobre los lados de la frontera poligonal de  $H^*$ .

Finalmente, para obtener una reconstrucción que globalmente sea de clase  $\mathcal{C}^1$ , operaremos como en el caso anterior pero imponiendo ciertas condiciones de interpolación entre  $s_f$  y  $\sigma_{s_f}$  para que la unión de ambas gráficas sea suave.

Este capítulo se organiza como sigue: En la Sección 4.2, recordamos algunos conceptos básicos e introducimos la notación que emplearemos a lo largo del capítulo. Las Secciones 4.3, 4.4 y 4.5 están dedicadas al estudio del problema del relleno en los casos discontinuo, continuo y con clase  $\mathcal{C}^1$ , respectivamente. La estructura de las tres secciones es esencialmente similar: planteamiento del problema, existencia y unicidad de solución y ejemplos. En la Sección 4.5 incluimos además un método para determinar valores óptimos de ciertos parámetros que aparecen en el desarrollo del método de relleno. Acaba el capítulo con la Sección 4.6 en la que se enuncia y demuestra un resultado de convergencia local, válido para los casos continuo y clase  $\mathcal{C}^1$ .

## 4.2. Preliminares y formulación del problema

Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un dominio poligonal (conjunto abierto y conexo con frontera poligonal) y consideremos el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^2(D)$  con la norma usual (1), las seminormas (2) y los semiproductos escalares asociados (3). Denotaremos también, como hemos venido haciendo a lo largo de la memoria  $\langle \cdot \rangle_n$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ , respectivamente) la norma euclídea usual (el producto euclídeo usual, respectivamente) en  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $H$  (el agujero) un subconjunto conexo y no vacío de  $D$ . Si  $H$  fuera no conexo, la técnica desarrollada en este capítulo para rellenar un único agujero conexo se aplicaría a cada una de las componentes conexas de  $H$ . Fijemos una  $\alpha$ -triangulación  $\mathcal{T}$  de  $\bar{D}$  y su triangulación de Powell-Sabin asociada  $\mathcal{T}^{PS}$ . Sean

$$\mathcal{T}_H = \{T \in \mathcal{T} : T \cap H \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad H^* = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_H} T,$$

y, notando  $\mathcal{S}_2^1(D, \mathcal{T}) \equiv \mathcal{S}_2^{1,1}(D, \mathcal{T})$  considérese el espacio vectorial

$$W_{H^*} = \{v|_{H^*} : v \in \mathcal{S}_2^1(D, \mathcal{T})\}.$$

Finalmente, sean  $\mathcal{N}_{\mathcal{T}} = \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n\}$  el conjunto de todos los vértices de  $\mathcal{T}$  que se encuentran sobre la frontera de  $H^*$ ,  $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}^m = \{\mathbf{t}_{n+1}, \dots, \mathbf{t}_{2n}\}$  el conjunto formado por todos los puntos medios de las aristas de  $\mathcal{T}$  sobre la frontera de  $H^*$  y  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{T}} \cup \mathcal{N}_{\mathcal{T}}^m$ .

## 4.3. Rellenado de tipo discontinuo

### 4.3.1. Formulación del problema

Sea  $f \in \mathcal{C}^1(\bar{D} - \overset{\circ}{H})$  y consideremos el funcional  $\mathcal{J} : \mathcal{H}^2(\overset{\circ}{H}^*) \longrightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\mathcal{J}(v) = \langle \rho_1(v - f) \rangle_n^2 + \lambda_0 \langle \rho_2(v - f) \rangle_n^2 + \lambda_1 |v|_{1, \overset{\circ}{H}^*}^2 + \lambda_2 |v|_{2, \overset{\circ}{H}^*}^2,$$

donde  $\rho_1(v) = (v(\mathbf{a}))_{\mathbf{a} \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}^m}$ ,  $\rho_2(v) = \left(\frac{\partial v}{\partial n}(\mathbf{a})\right)_{\mathbf{a} \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}^m}$ ,  $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$  y  $\lambda_2 > 0$ .

El primer sumando de  $\mathcal{J}$  mide cómo de bien  $v$  aproxima (en el sentido de los mínimos cuadrados) los valores de  $f$  sobre el conjunto  $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}^m$ ; el segundo mide cómo de bien las derivadas normales de  $v$  aproximan los valores de las derivadas normales de  $f$  sobre el conjunto  $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}^m$  (con un peso  $\lambda_0$ ), mientras que los dos últimos sumandos representan la “condición de mínima energía” mediante las semi-normas  $|\cdot|_{1, \overset{\circ}{H}^*}$  y  $|\cdot|_{2, \overset{\circ}{H}^*}$ , sopesadas cada una de ellas mediante los parámetros  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente.

Sea

$$W_{\mathcal{D}} = \{v \in W_{H^*} : v(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) \quad \text{para todo } \mathbf{a} \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}\}.$$

El problema de minimización que queremos resolver es el siguiente:

**Problema 4.3.1** *Encontrar un elemento  $\sigma \in W_{\mathcal{D}}$  tal que  $\mathcal{J}(\sigma) \leq \mathcal{J}(v)$  para todo  $v \in W_{\mathcal{D}}$ .*

Es decir, buscamos un spline  $\sigma \in W_{H^*}$  “suave”, que coincida con  $f$  en los puntos de  $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ , y de forma que tanto los valores de  $\sigma$  como los de sus derivadas normales sean “suficientemente próximos”, a los valores de  $f$  y sus derivadas normales en los puntos de  $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}^m$ .

### 4.3.2. Existencia y unicidad de solución

**Teorema 4.3.2** *El Problema 4.3.1 tiene una única solución  $\sigma$  que a su vez es también solución del siguiente problema variacional:*

*Encontrar  $\sigma \in W_{\mathcal{D}}$  tal que*

$$\langle \rho_1(\sigma), \rho_1(v) \rangle_n + \lambda_0 \langle \rho_2(\sigma), \rho_2(v) \rangle_n + \lambda_1(\sigma, v)_{1, H^*} + \lambda_2(\sigma, v)_{2, H^*} = \langle \rho_1(f), \rho_1(v) \rangle_n + \lambda_0 \langle \rho_2(f), \rho_2(v) \rangle_n \quad (4.3.1)$$

para todo  $v \in W_{\mathcal{D}}^0 = \{v \in W_{H^*} : v(\mathbf{a}) = 0 \text{ para todo } \mathbf{a} \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}\}$ .

**Demostración.** Sea  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  un subconjunto  $\mathbb{P}_1$ -unisolvante de  $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ . Es fácil comprobar (consultar la Proposición A.4.18 del Apéndice) que la aplicación  $[[\cdot]]_{\mathcal{D}} : W_{H^*} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$[[v]]_{\mathcal{D}} = \left( \sum_{i=1}^3 v(\mathbf{a}_i)^2 + \lambda_2 |v|_{2, H^*}^2 \right)^{1/2}$$

define una seminorma sobre  $W_{H^*}$ . Además, si  $[[v]]_{\mathcal{D}} = 0$ , entonces  $v$  es un polinomio de grado total máximo 1 que se anula en tres puntos no alineados, y por tanto  $v = 0$ . Como consecuencia,  $[[v]]_{\mathcal{D}}$  define una norma sobre el espacio finito-dimensional  $W_{H^*}$  equivalente a la norma usual

$$\|v\|_{H^*} = \left( \sum_{|\beta| \leq 2} \int_{H^*} \partial^\beta v(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

y, como consecuencia, la aplicación  $\mathcal{A} : W_{H^*} \times W_{H^*} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) = 2 \left( \sum_{i=1}^3 u(\mathbf{a}_i) v(\mathbf{a}_i) + \langle \rho_1(u), \rho_1(v) \rangle_n \right. \\ \left. + \lambda_0 \langle \rho_2(u), \rho_2(v) \rangle_n + \sum_{j=1}^2 \lambda_j (u, v)_{j, H^*} \right) \end{aligned}$$



es una forma bilineal, continua, simétrica y  $W_{H^*}$ -elíptica. El hecho de que  $\mathcal{A}$  sea  $W_{H^*}$ -elíptica es fácil de comprobar:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, u) &= 2 \left( \sum_{i=1}^3 u(\mathbf{a}_i)^2 + \langle \rho_1(u) \rangle_n^2 + \lambda_0 \langle \rho_2(u) \rangle_n^2 + \sum_{j=1}^2 \lambda_j |u|_{j, H^*}^2 \right) \\ &= 2 \left( [[v]]_{\mathcal{D}}^2 + \langle \rho_1(u) \rangle_n^2 + \lambda_0 \langle \rho_2(u) \rangle_n^2 + \lambda_1 |u|_{1, H^*}^2 \right) \geq 2 [[v]]_{\mathcal{D}}^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, la aplicación  $\varphi : W_{H^*} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(v) = 2(\langle \rho_1(f), \rho_1(v) \rangle_n + \lambda_0 \langle \rho_2(f), \rho_2(v) \rangle_n)$$

es una forma lineal y continua (por tratarse de productos escalares de evaluaciones de funciones o de sus derivadas normales en los puntos del conjunto  $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}^m$ ).

Por tanto, aplicando el Teorema de Stampacchia (consultar A.2.3 en el Apéndice) tenemos que existe un único  $\sigma \in W_{\mathcal{D}}$  tal que

$$\mathcal{A}(\sigma, w - \sigma) \geq \varphi(w - \sigma) \quad \text{para todo } w \in W_{\mathcal{D}}$$

y, por tanto,  $\mathcal{A}(\sigma, v) \geq \varphi(v)$  para todo  $v \in W_{\mathcal{D}}^0$ . Pero como  $-v \in W_{\mathcal{D}}^0$ , entonces también se tiene que  $\mathcal{A}(\sigma, v) = \varphi(v)$  para todo  $v \in W_{\mathcal{D}}^0$  y se verifica (4.3.1).

Además,  $\sigma$  es asimismo el mínimo en el conjunto  $W_{\mathcal{D}}$  del funcional

$$\frac{1}{2} \mathcal{A}(v, v) - \varphi(v) = \mathcal{J}(v) + \sum_{i=1}^3 f(\mathbf{a}_i)^2 - \langle \rho_1(f), \rho_1(f) \rangle_n - \lambda_0 \langle \rho_2(f), \rho_2(f) \rangle_n,$$

y por ende también de  $\mathcal{J}$ . ■

### 4.3.3. Cálculos

Sea  $\mathcal{B}_{H^*}$  la base de Hermite del espacio  $W_{H^*}$  asociada a los nodos de  $\mathcal{T}$  que pertenecen a  $H^*$ . Entonces  $\mathcal{B}_{H^*} = \mathcal{B}_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} \cup \mathcal{B}_{W_{\mathcal{D}}^0}$ , donde  $\mathcal{B}_{\mathcal{N}_{\mathcal{T}}} = \{w_1, \dots, w_n\}$  son las funciones de Lagrange asociadas a valores de la función en los nodos de  $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ , y  $\mathcal{B}_{W_{\mathcal{D}}^0} = \{w_1^0, \dots, w_m^0\}$  es base de  $W_{\mathcal{D}}^0$ . Por tanto, la única solución  $\sigma$  del Problema 4.3.1 puede escribirse como

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(v_i) w_i + \sum_{j=1}^m \beta_j w_j^0. \quad (4.3.2)$$

Sustituyendo (4.3.2) en (4.3.1) obtenemos que  $\beta = (\beta_j)_{j=1}^m$  es la única solución del sistema lineal

$$(A_1 A_1^\top + \lambda_0 A_2 A_2^\top + \lambda_1 \mathcal{R}_1 + \lambda_2 \mathcal{R}_2) \beta = A_1 \rho_1(f)^\top + \lambda_0 A_2 \rho_2(f)^\top - (A_1 B_1^\top + \lambda_0 A_2 B_2^\top + \lambda_1 \mathcal{S}_1 + \lambda_2 \mathcal{S}_2) \Phi,$$

donde

$$A_k = (\rho_k(w_j^0)_{j=1}^m)^\top, \quad B_k = (\rho_k(w_i)_{i=1}^n)^\top \quad \text{para } k = 1, 2;$$

$$\mathcal{R}_k = ((w_i^0, w_j^0)_{k, H^*})_{1 \leq i, j \leq m}, \quad \mathcal{S}_k = ((w_i^0, w_j)_{k, H^*})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{para } k = 1, 2 \quad \text{y}$$

$$\Phi = (f(\mathbf{t}_i)_{i=1}^n)^\top.$$

#### 4.3.4. Reconstrucción de la función

La reconstrucción  $f^*$  de  $f$  considerada para rellenar el agujero de  $f$  sobre  $H$  es

$$f^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{D} - H^* \\ \sigma(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in H^* \end{cases}.$$

Por construcción,  $f^*$  es una función de clase  $\mathcal{C}^1$  dentro de  $H^*$ . Por otra parte, si  $\mathcal{T}^\epsilon$  es una sucesión de  $\alpha$ -triangulaciones de  $\overline{D}$  tales que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{diam}(\mathcal{T}^\epsilon) = 0$  y consideramos

$$H_\epsilon^* = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_H^\epsilon} T, \quad \text{donde } \mathcal{T}_H^\epsilon = \{T \in \mathcal{T}^\epsilon : T \cap H \neq \emptyset\},$$

y

$$f_\epsilon^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{D} - H_\epsilon^* \\ \sigma_\epsilon(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in H_\epsilon^* \end{cases},$$

donde  $\sigma_\epsilon$  es la solución del Problema 4.3.1 para la triangulación  $\mathcal{T}^\epsilon$ , entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon^*|_{\overline{D} - H_\epsilon^*} = f|_{\overline{D} - H}.$$

#### 4.3.5. Ejemplos gráficos

Se han considerado dos funciones test diferentes para mostrar resultados gráficos, ambas definidas en  $\overline{D} - H$ , donde  $D = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  y  $H$  es el agujero elíptico definido implícitamente mediante

$$\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{4})^2} + \frac{(y - \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{8})^2} < 1.$$

En todos los ejemplos hemos considerado una  $\Delta^1$ -triangulación uniforme de  $\bar{D}$  compuesta por 32 triángulos.

La primera función test está definida como

$$f(\mathbf{x}) \equiv f(x, y) = \text{sen}(2\pi^2(x - 0,5)(y - 0,5)).$$

En la Figura 4.1 mostramos las gráficas de  $f$  sobre  $\bar{D}$  y sobre  $\bar{D} - H$ :

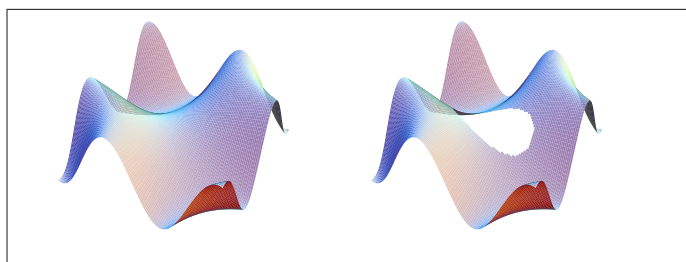


Figura 4.1: Gráficas de  $f$  sobre  $\bar{D}$  y sobre  $\bar{D} - H$ .

En la Figura 4.2 mostramos los resultados correspondientes al relleno del agujero generado en la gráfica de  $f$  para diferentes valores de los parámetros  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ :

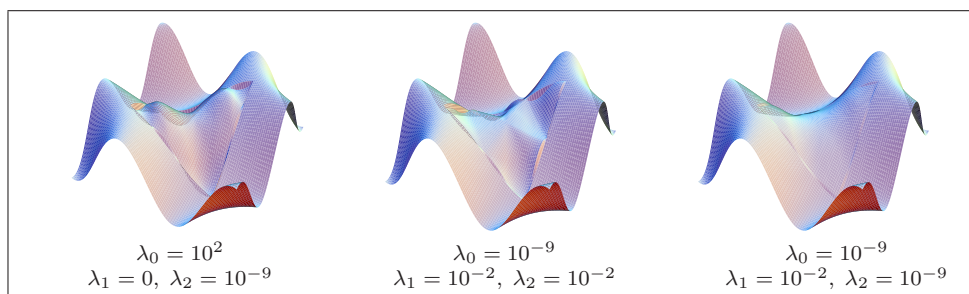


Figura 4.2: Diferentes rellenos discontinuos para  $f$ .

Se ha estimado también el error cometido para los valores de los parámetros  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  considerados en las gráficas previas usando la siguiente fórmula de error relativo:

$$E_{rel} = \frac{\sum_{i=1}^{1600} (f^*(\mathbf{a}_i) - f(\mathbf{a}_i))^2}{\sum_{i=1}^{1600} f(\mathbf{a}_i)^2},$$

donde  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{1600}\}$  son puntos arbitrarios en  $H^*$ . Los resultados han sido  $E_{rel} = 4,83 \cdot 10^{-1}$ ,  $E_{rel} = 1,41 \cdot 10^{-1}$  y  $E_{rel} = 4,83 \cdot 10^{-3}$ , respectivamente.

La segunda función test empleada es la función de Nielson, definida mediante la expresión

$$g(\mathbf{x}) \equiv g(x, y) = \cos(4(x^2 + y - 1))^4.$$

En la Figura 4.3 mostramos las gráficas de  $g$  sobre  $\bar{D}$  y sobre  $\bar{D} - H$ :

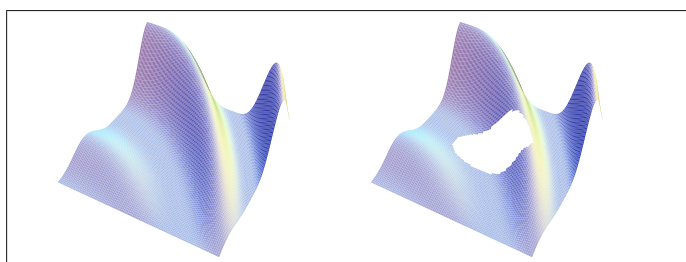


Figura 4.3: Gráficas de  $g$  sobre  $\bar{D}$  y sobre  $\bar{D} - H$ .

En la Figura 4.4 mostramos los resultados correspondientes al relleno del agujero generado en la gráfica de  $g$  para diferentes valores de los parámetros  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ :

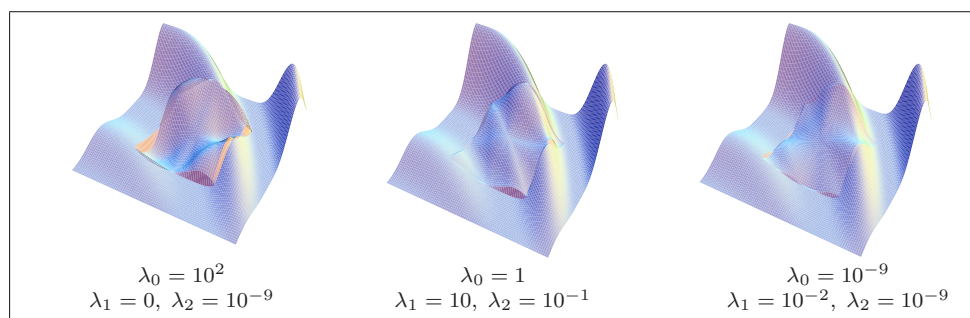


Figura 4.4: Diferentes rellenos discontinuos para  $g$ .

Los errores relativos obtenidos en estos casos han sido  $E_{rel} = 6,09 \cdot 10^{-1}$ ,  $E_{rel} = 2,22 \cdot 10^{-1}$  y  $E_{rel} = 1,46 \cdot 10^{-1}$ , respectivamente. Para triangulaciones más finas, los errores relativos decrecen. Por ejemplo, para una  $\Delta^1$ -triangulación uniforme de  $[0, 1] \times [0, 1]$  en 128 triángulos, el error relativo obtenido (para la función de Nielson) para  $\lambda_0 = 10^{-9}$ ,  $\lambda_1 = 10^{-2}$  y  $\lambda_2 = 10^{-9}$  es  $E_{rel} = 8,02 \cdot 10^{-2}$ .

## 4.4. Rellenados continuos

Para obtener un relleno continuo de una función  $f \in \mathcal{C}^1(\overline{D} - \overset{\circ}{H})$  procederemos en dos etapas: en primer lugar modificaremos ligeramente  $f$  sobre  $\overline{D} - H^*$  y, a continuación, definiremos el relleno de  $f$  sobre  $H^*$ .

### 4.4.1. Formulación del problema

Sea

$$W_{\overline{D}-H^*} = \{v|_{\overline{D}-\overset{\circ}{H}^*} : v \in \mathcal{S}_2^1(D, \mathcal{T})\},$$

y  $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^k$  un subconjunto finito de puntos de  $\overline{D} - \overset{\circ}{H}^*$ .

Consideremos el funcional  $\mathcal{J}_1 : \mathcal{H}^2(D - H^*) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\mathcal{J}_1(v) = \langle \rho(v - f) \rangle_k^2 + \tau_1 |v|_{1, D-H^*}^2 + \tau_2 |v|_{2, D-H^*}^2, \quad (4.4.3)$$

donde  $\rho(v) = (v(\mathbf{p}_i))_{i=1}^k$ ,  $\tau_1 \geq 0$  y  $\tau_2 > 0$ .

Aplicando el teorema 1.2.2 sabemos que existe un único  $s_f \in W_{\overline{D}-H^*}$  tal que  $\mathcal{J}_1(s_f) \leq \mathcal{J}_1(v)$  para todo  $v \in W_{\overline{D}-H^*}$ . Es decir,  $s_f$  aproxima (en el sentido de los mínimos cuadrados) los valores de  $f$  sobre el conjunto  $\mathcal{P}$  y satisface una condición de mínima energía.

Consideremos ahora

$$W_{\mathcal{C}} = \left\{ v \in W_{H^*} : \begin{array}{l} v(\mathbf{a}) = s_f(\mathbf{a}) \text{ para todo } \mathbf{a} \in \mathcal{N} \text{ y} \\ \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{b}) = \frac{\partial s_f}{\partial t}(\mathbf{b}) \text{ para todo } \mathbf{b} \in \mathcal{N}_T^m \end{array} \right\}, \quad (4.4.4)$$

donde  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}(\mathbf{b})$  denota la derivada tangencial a lo largo de la arista de la frontera de  $H^*$  que contiene a  $\mathbf{b}$ , y el nuevo funcional  $\mathcal{J}_2 : \mathcal{H}^2(\overset{\circ}{H}^*) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\mathcal{J}_2(v) = \tau_0 |v|_{1, \overset{\circ}{H}^*}^2 + |v|_{2, \overset{\circ}{H}^*}^2, \quad \tau_0 \geq 0.$$

El problema de minimización que queremos resolver es el siguiente:

**Problema 4.4.1** *Encontrar un elemento  $\sigma_{s_f} \in W_{\mathcal{C}}$  tal que  $\mathcal{J}_2(\sigma_{s_f}) \leq \mathcal{J}_2(v)$  para todo  $v \in W_{\mathcal{C}}$ .*

### 4.4.2. Existencia y unicidad de solución

Comenzaremos enunciando y demostrando un lema previo:

**Lema 4.4.2**  $W_C$  es no vacío. Además, si  $\sigma \in W_C$ , entonces

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} s_f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{D} - H^* \\ \sigma(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in H^* \end{cases}$$

es continua.

**Demostración.** Sean  $T_{in} = \widehat{Q_1 Q_2 Q_{in}} \in \mathcal{T}_H$  y  $T_{out} = \widehat{Q_1 Q_2 Q_{out}} \in \mathcal{T} - \mathcal{T}_H$  dos triángulos compartiendo el lado común  $L = [Q_1, Q_2]$ , donde  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{N}_T$ . Sea  $Q_m = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \in \mathcal{N}_T^m$  y  $Q^*$  la intersección de  $L$  con el segmento que une los incentros de  $T_{in}$  y  $T_{out}$ . Sea  $\Lambda : [0, 1] \rightarrow L$  la afinidad que cumple  $\Lambda(0) = Q_1$  y  $\Lambda(1) = Q_2$ , y sea  $t^* \in ]0, 1[$  tal que  $\Lambda(t^*) = Q^*$ . Como  $s_f \in W_{\overline{D} - H^*}$ , entonces se tiene que los polinomios univariados

$$p_1 = (s_f \circ \Lambda)|_{[0, t^*]} \in \mathbb{P}_2([0, t^*]) \quad \text{y} \quad p_2 = (s_f \circ \Lambda)|_{[t^*, 1]} \in \mathbb{P}_2([t^*, 1])$$

verifican

$$\begin{cases} p_1(t^*) = p_2(t^*) \\ p_1'(t^*) = p_2'(t^*) \end{cases} . \quad (4.4.5)$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $t^* \geq \frac{1}{2}$ . Entonces, los datos relativos a  $s_f$  que aparecen en la definición de  $W_C$  se traducen en las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} s_f(Q_1) &= p_1(0) \\ s_f(Q_2) &= p_2(1) \\ s_f(Q_m) &= p_1\left(\frac{1}{2}\right) \\ \frac{\partial s_f}{\partial t}(Q_m) &= K p_1'\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned} , \quad (4.4.6)$$

donde  $K$  es una constante no nula.

Consideremos ahora el espacio de splines cuadráticos univariados de clase  $\mathcal{C}^1$  construidos sobre los nodos  $\{0, t^*, 1\}$ , es decir

$$\mathcal{S}_2(0, t^*, 1) = \{s \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : s|_{[0, t^*]} \in \mathbb{P}_2([0, t^*]) \text{ y } s|_{[t^*, 1]} \in \mathbb{P}_2([t^*, 1])\}.$$

Como el problema de interpolación con datos

$$\left\{ p_1(0), p_1\left(\frac{1}{2}\right), p_1'\left(\frac{1}{2}\right) \right\} \text{ es unisolvente en } \mathbb{P}_2([0, t^*]), \quad (4.4.7)$$

entonces los valores de  $p_1(t^*) = p_2(t^*)$  y  $p_1'(t^*) = p_2'(t^*)$  vienen unívocamente determinados por los valores en (4.4.7), y por tanto, como

$$\{p_2(t^*), p_2'(t^*), p_2(1)\} \text{ es unisolvente en } \mathbb{P}_2([t^*, 1]),$$

obtenemos que el problema de interpolación con datos

$$\left\{ p_1(0), p_1\left(\frac{1}{2}\right), p_1'\left(\frac{1}{2}\right), p_2(1) \right\} \quad (4.4.8)$$

es unisolvante en  $\mathcal{S}_2(0, t^*, 1)$ . Además, se puede demostrar que el problema de interpolación con datos

$$\{p_1(0), p_1'(0), p_2(1), p_2'(1)\} \quad (4.4.9)$$

es también unisolvante en  $\mathcal{S}_2(0, t^*, 1)$ , y como consecuencia inmediata, los problemas de interpolación en  $\mathcal{S}_2(0, t^*, 1)$  con datos (4.4.8) y (4.4.9) son equivalentes.

Por tanto, las condiciones de interpolación en  $W_C$  (que por (4.4.6) corresponden a los datos en (4.4.8)) son equivalentes a fijar los valores de  $s_f$  y de las derivadas tangenciales de  $s_f$  a lo largo de  $L$  en  $Q_1$  y  $Q_2$  (lo que corresponde exactamente a los datos en (4.4.9)). Por otra parte, es claro que el problema de interpolación con datos (4.4.9) da lugar a condiciones compatibles con los datos usualmente impuestos en los vértices de los triángulos  $T_{in}$  o  $T_{out}$  por el elemento finito de Powell-Sabin. Por tanto,  $W_C$  es no vacío.

Finalmente, si  $\sigma \in W_C$ , entonces  $\sigma|_L$  también verifica las condiciones dadas en (4.4.6) para  $s_f$ , y por tanto, por la unisolvencia de los datos de interpolación (4.4.8) en  $\mathcal{S}_2(0, t^*, 1)$ , deben coincidir a lo largo del segmento  $L$ , es decir  $\sigma|_L = s_f|_L$ , y por tanto  $g$  es continua.

■

**Observación 4.4.3** *En esta última demostración hemos comprobado, por tanto, que las condiciones de interpolación sobre el punto medio del segmento  $L$  que aparecen en la definición del conjunto  $W_C$  en 4.4.4, se traducen en sendas condiciones de interpolación sobre las derivadas tangenciales en los extremos de  $L$ , lo cual se traduciría asimismo en condiciones de interpolación sobre las derivadas parciales en los extremos. Así pues, las condiciones de interpolación impuestas en la definición de  $W_C$  se acaban traduciendo en condiciones sobre los nodos de la triangulación que pertenecen a la frontera de  $H^*$  que son compatibles con los datos del elemento finito de Powell-Sabin, de manera que dichas condiciones de interpolación se pueden gestionar sin dificultad trabajando con las funciones de base del elemento finito. En el caso en que las condiciones de interpolación vinieran impuestas en un vértice de la frontera de  $H^*$  que se encontrase en una esquina de la misma, es decir, que fuera común a dos lados de un mismo triángulo de la triangulación, sobre dicho vértice se tendrían determinadas dos derivadas direccionales en direcciones distintas, lo cual es equivalente a fijar el valor de ambas derivadas parciales, que son datos del elemento finito de Powell-Sabin.*

**Teorema 4.4.4** *El Problema 4.4.1 tiene una única solución, que está caracterizada como la única solución del siguiente problema variacional:*

Encontrar  $\sigma_{sf} \in W_C$  tal que

$$\tau_0(\sigma_{sf}, v)_{1, \mathring{H}^*} + (\sigma_{sf}, v)_{2, \mathring{H}^*} = 0 \quad (4.4.10)$$

$$\text{para todo } v \in W_C^0 = \left\{ v \in W_{H^*} : \begin{array}{l} v(\mathbf{a}) = 0 \text{ para todo } \mathbf{a} \in \mathcal{N} \text{ y} \\ \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{b}) = 0 \text{ para todo } \mathbf{b} \in \mathcal{N}_T^m \end{array} \right\}.$$

**Demostración.** Sea  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  un subconjunto  $\mathbb{P}_1$ -unisolvante de  $\mathcal{N}_T$ . Se puede comprobar sin dificultad (basándose en la misma idea que la Proposición A.4.18 del Apéndice), que la aplicación

$$((\cdot, \cdot)) : W_{H^*} \times W_{H^*} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida mediante

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^3 u(\mathbf{a}_i) v(\mathbf{a}_i) + \tau_0(u, v)_{1, \mathring{H}^*} + (u, v)_{2, \mathring{H}^*}$$

es un producto escalar sobre  $W_{H^*}$ , y como consecuencia,

$$[[v]]_C = \left( \sum_{i=1}^3 v(\mathbf{a}_i)^2 + \tau_0 |v|_{1, \mathring{H}^*}^2 + |v|_{2, \mathring{H}^*}^2 \right)^{1/2}$$

define una norma sobre  $W_{H^*}$  equivalente a la norma usual heredada del espacio  $\mathcal{H}^2(\mathring{H}^*)$ . Aplicando el teorema de la proyección sobre un cerrado convexo no vacío (consultar por ejemplo el Theorem V.2 en [11] o el Teorema A.2.1 del Apéndice) obtenemos que existe un único  $\sigma \in W_C$  que es la proyección del elemento nulo del espacio  $W_{H^*}$  sobre  $W_C$ . Por lo tanto,  $\sigma$  verifica que

$$[[\sigma]]_C = \min_{v \in W_C} [[v]]_C,$$

y como consecuencia,  $\sigma$  también minimiza el funcional  $\mathcal{J}_2$  en el conjunto  $W_C$ , es decir,

$$\mathcal{J}_2(\sigma) = \min_{v \in W_C} \mathcal{J}_2(v).$$

Además,  $\sigma$  también satisface

$$((0 - \sigma, v - \sigma)) \leq 0 \quad \text{para todo } v \in W_C.$$

Pero si  $w \in W_C^0$ , entonces  $\sigma + w \in W_C$ , y por tanto,  $((\sigma, w)) \geq 0$ . Por otra parte, como  $-w \in W_C^0$  también se tiene que  $((\sigma, w)) \leq 0$ , y como consecuencia

$$0 = ((\sigma, w)) = \tau_0(\sigma, w)_{1, \mathring{H}^*} + (\sigma, w)_{2, \mathring{H}^*}$$

para todo  $w \in W_C^0$ , de donde finalmente obtenemos (4.4.10). ■



**Teorema 4.4.5** *Existe una única tripleta  $(\sigma_{s_f}, \lambda^1, \lambda^2) \in W_C \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^n$  tal que*

$$\tau_0(\sigma_{s_f}, v)_{1, H^*} + (\sigma_{s_f}, v)_{2, H^*} + \langle \lambda^1, \varphi^1(v) \rangle_{2n} + \langle \lambda^2, \varphi^2(v) \rangle_n = 0 \quad (4.4.11)$$

para todo  $v \in W_{H^*}$ , donde  $\sigma_{s_f}$  es la única solución del Problema 4.4.1 y  $\varphi^1, \varphi^2 : W_C \rightarrow \mathbb{R}$  son las formas lineales definidas mediante

$$\varphi^1(v) = (v(\mathbf{a}))_{\mathbf{a} \in \mathcal{N}} \quad y \quad \varphi^2(v) = \left( \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{b}) \right)_{\mathbf{b} \in \mathcal{N}_T^m}.$$

**Demostración.** Para todo  $\mathbf{a} \in \mathcal{N}$ , sea  $\psi_{\mathbf{a}}$  la única solución del Problema 4.4.1 para los datos

$$\begin{cases} \psi_{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{a}}) = \delta_{\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}} & \text{para todo } \bar{\mathbf{a}} \in \mathcal{N} \quad y \\ \frac{\partial \psi_{\mathbf{a}}}{\partial t}(\mathbf{b}) = 0 & \text{para todo } \mathbf{b} \in \mathcal{N}_T^m \end{cases},$$

y sea  $\chi_{\mathbf{b}}$  la única solución del Problema 4.4.1 para los datos

$$\begin{cases} \chi_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = 0 & \text{para todo } \mathbf{a} \in \mathcal{N} \quad y \\ \frac{\partial \chi_{\mathbf{b}}}{\partial t}(\bar{\mathbf{b}}) = \delta_{\mathbf{b}, \bar{\mathbf{b}}} & \text{para todo } \bar{\mathbf{b}} \in \mathcal{N}_T^m \end{cases}.$$

Sea  $v \in W_{H^*}$  y consideremos la función

$$w = v - \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{N}} v(\mathbf{a})\psi_{\mathbf{a}} - \sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{N}_T^m} \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{b})\chi_{\mathbf{b}}.$$

Claramente,  $w \in W_C^0$ , y por tanto, aplicando el Teorema 4.4.4 obtenemos

$$\tau_0(\sigma_{s_f}, w)_{1, H^*} + (\sigma_{s_f}, w)_{2, H^*} = 0,$$

de donde concluimos que

$$\begin{aligned} \tau_0(\sigma_{s_f}, v)_{1, H^*} + (\sigma_{s_f}, v)_{2, H^*} + \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{N}} (-\tau_0(\sigma_{s_f}, \psi_{\mathbf{a}})_{1, H^*} - (\sigma_{s_f}, \psi_{\mathbf{a}})_{2, H^*}) v(\mathbf{a}) \\ + \sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{N}_T^m} \left( -\tau_0(\sigma_{s_f}, \chi_{\mathbf{b}})_{1, H^*} - (\sigma_{s_f}, \chi_{\mathbf{b}})_{2, H^*} \right) \frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{b}) = 0. \end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= (-\tau_0(\sigma_{s_f}, \psi_{\mathbf{a}})_{1, H^*} - (\sigma_{s_f}, \psi_{\mathbf{a}})_{2, H^*})_{\mathbf{a} \in \mathcal{N}} \quad y \\ \lambda^2 &= (-\tau_0(\sigma_{s_f}, \chi_{\mathbf{b}})_{1, H^*} - (\sigma_{s_f}, \chi_{\mathbf{b}})_{2, H^*})_{\mathbf{b} \in \mathcal{N}_T^m} \end{aligned}$$

obtenemos el resultado. La unicidad es inmediata. ■

### 4.4.3. Cálculos

Indicamos a continuación cómo realizar los cálculos para obtener las funciones  $s_f$  y  $\sigma_{s_f}$  descritas en la sección anterior:

*Paso 1:* Sea  $\mathcal{B}_{\overline{D}-H^*} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_p\}$  la base de Hermite de  $W_{\overline{D}-H^*}$  asociada a los nodos de  $\mathcal{T}$  que pertenecen a  $\overline{D}-\overset{\circ}{H}^*$ . Entonces, en el Teorema 1.2.2 está demostrado que si  $s_f = \sum_{i=1}^p \gamma_i \vartheta_i$ , entonces  $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^p$  se obtiene como la solución del sistema lineal  $CX = B$ , donde  $C = (c_{ij})_{i,j=1}^p$  y

$$c_{ij} = \langle \rho(\vartheta_i), \rho(\vartheta_j) \rangle_k + \tau_1(\vartheta_i, \vartheta_j)_{1,D-H^*} + \tau_2(\vartheta_i, \vartheta_j)_{2,D-H^*},$$

y

$$B = (\langle \rho(\vartheta_1), \rho(f) \rangle_k, \dots, \langle \rho(\vartheta_p), \rho(f) \rangle_k)^\top.$$

*Paso 2:* Sea  $\mathcal{B}_{H^*} = \mathcal{B}_{\mathcal{N}_T} \cup \mathcal{B}_{W_D^0} = \{\omega_1, \dots, \omega_q\}$ , donde  $q = n + m$ , y supongamos que  $\sigma_{s_f} = \sum_{i=1}^q \mu_i \omega_i$ . Entonces, la condición  $\sigma_{s_f} \in W_C$  junto con las ecuaciones (4.4.11) dan lugar al sistema

$$\left( \begin{array}{c|cc} \mathcal{C} & \mathcal{H}^1 & \mathcal{H}^2 \\ \hline (\mathcal{H}^1)^\top & & \\ \hline (\mathcal{H}^2)^\top & & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mu \\ \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{((s_f(\mathbf{t}_i))_{i=1}^{2n})^\top}{\left( \left( \frac{\partial s_f}{\partial t}(\mathbf{t}_i) \right)_{i=n+1}^{2n} \right)^\top} \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathcal{C} = (\tau_0(\omega_i, \omega_j)_{1,H^*} + (\omega_i, \omega_j)_{2,H^*})_{i,j=1}^q,$$

$$\mathcal{H}^1 = (\omega_i(\mathbf{t}_j))_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq 2n}} \quad \text{y} \quad \mathcal{H}^2 = \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial t}(\mathbf{t}_j) \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ n+1 \leq j \leq 2n}}.$$

### 4.4.4. Reconstrucción de la función

La reconstrucción  $f^*$  de  $f$  considerada para rellenar el agujero de  $f$  sobre  $H$  es

$$f^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} s_f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{D} - H^* \\ \sigma_{s_f}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in H^* \end{cases}.$$

Por el Lema 4.4.2 sabemos que  $f^*$  es continua.

### 4.4.5. Ejemplos gráficos

Hemos considerado las mismas funciones test que en la sección del rellenado discontinuo. El conjunto  $\mathcal{P}$  considerado para definir el funcional  $\mathcal{J}_1$  está formado por 1200 puntos arbitrariamente distribuidos sobre  $\overline{D} - H^*$ .

Las gráficas de las superficies continuas obtenidas para rellenar los agujeros son las que muestran las siguientes figuras:

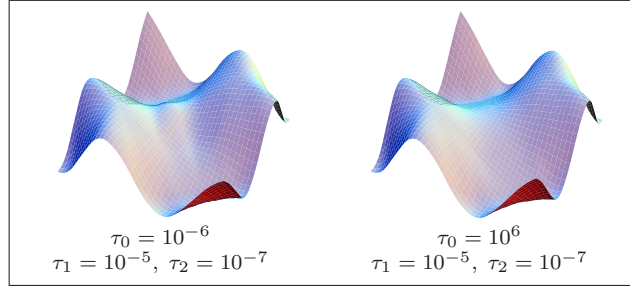


Figura 4.5: Diferentes rellenos continuos para  $f$ .

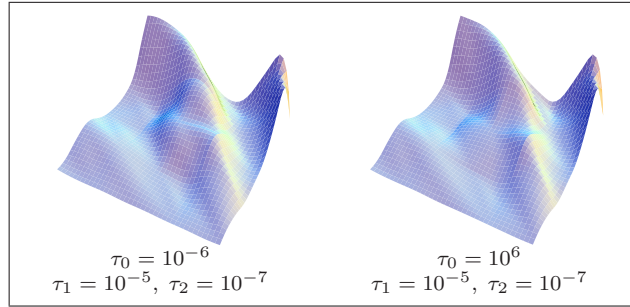


Figura 4.6: Diferentes rellenos continuos para  $g$ .

En el caso del rellenos continuos hemos estimado también el error relativo, pero como la función reconstrucción se obtiene en dos pasos mediante la aplicación de dos métodos diferentes, hemos considerado dos medidas diferentes:

▷ una sobre  $\overline{D} - H^*$  :

$$E_{rel}^{\overline{D}-H^*} = \frac{\sum_{i=1}^{1600} (s_f(\mathbf{a}_i) - f(\mathbf{a}_i))^2}{\sum_{i=1}^{1600} f(\mathbf{a}_i)^2},$$

donde  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{1600}\}$  son puntos arbitrarios en  $\overline{D} - H^*$ ,

▷ y otra sobre  $H^*$ :

$$E_{rel}^{H^*} = \frac{\sum_{i=1}^{1600} (\sigma_{s_f}(\mathbf{b}_i) - f(\mathbf{b}_i))^2}{\sum_{i=1}^{1600} f(\mathbf{b}_i)^2},$$

donde  $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{1600}\}$  son puntos arbitrarios en  $H^*$ .

Los errores relativos para los dos casos considerados para la función  $f$  son  $E_{rel}^{\bar{D}-H^*} = 9,88 \cdot 10^{-4}$ ,  $E_{rel}^{H^*} = 6,85 \cdot 10^{-2}$  y  $E_{rel}^{\bar{D}-H^*} = 1,14 \cdot 10^{-3}$ ,  $E_{rel}^{H^*} = 6,32 \cdot 10^{-3}$ , respectivamente, y los errores relativos para los dos casos considerados para la función  $g$  son  $E_{rel}^{\bar{D}-H^*} = 4,22 \cdot 10^{-3}$ ,  $E_{rel}^{H^*} = 3,03 \cdot 10^{-1}$  y  $E_{rel}^{\bar{D}-H^*} = 3 \cdot 10^{-3}$ ,  $E_{rel}^{H^*} = 1,48 \cdot 10^{-1}$ , respectivamente.

## 4.5. Rellenados con clase $\mathcal{C}^1$

En esta sección del capítulo desarrollamos un método para rellenar el agujero de forma que la superficie reconstruida sea globalmente de clase  $\mathcal{C}^1$ .

### 4.5.1. Formulación del problema

El método consta, como sucede en el caso de rellenos continuos, de dos fases: en la primera se modifica ligeramente la gráfica de la función original  $f$  fuera de  $H^*$ , y en la segunda se define la reconstrucción de la superficie dentro de  $H^*$  de manera que globalmente se obtenga una reconstrucción de clase  $\mathcal{C}^1$ .

El desarrollo de la primera fase del método es exactamente igual que en el caso continuo, es decir, se determina, en virtud del Teorema 1.2.2, la única función  $s_f$  en el espacio

$$W_{\bar{D}-H^*} = \{v|_{\bar{D}-H^*} : v \in \mathcal{S}_2^1(D, \mathcal{T})\},$$

que minimiza el funcional  $\mathcal{J}_1 : \mathcal{H}^2(D - H^*) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\mathcal{J}_1(v) = \langle \rho(v - f) \rangle_k^2 + \tau_1 |v|_{1, D-H^*}^2 + \tau_2 |v|_{2, D-H^*}^2,$$

donde  $\rho(v) = (v(\mathbf{p}_i))_{i=1}^k$ ,  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 > 0$  y  $\mathcal{P} = \{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^k$  es un subconjunto finito de puntos de  $\bar{D} - H^*$ .

A continuación, en la segunda fase, consideramos la aplicación

$$\varphi(v) = (\varphi_i(v))_{i=1}^{3n} \quad \text{para } v \in W_{H^*},$$

donde

$$\begin{cases} \varphi_i(v) = v(\mathbf{t}_i) \\ \varphi_{n+i}(v) = \frac{\partial v}{\partial x}(\mathbf{t}_i) \\ \varphi_{2n+i}(v) = \frac{\partial v}{\partial y}(\mathbf{t}_i) \end{cases} \quad \text{para } i = 1, \dots, n;$$

el subconjunto

$$W_{s_f} = \{v \in W_{H^*} : \varphi(v) = \varphi(s_f)\}$$

y el funcional

$$\mathcal{J}_2 : \mathcal{H}^2(\overset{\circ}{H}^*) \longrightarrow \mathbf{R}$$

definido por

$$\mathcal{J}_2(v) = \tau_1 |v|_{1, \overset{\circ}{H}^*}^2 + \tau_2 |v|_{2, \overset{\circ}{H}^*}^2.$$

El problema de minimización que queremos resolver es:

**Problema 4.5.1** *Encontrar un elemento  $\sigma_{s_f} \in W_{s_f}$  tal que  $\mathcal{J}_2(\sigma_{s_f}) \leq \mathcal{J}_2(v)$  para todo  $v \in W_{s_f}$ .*

**Observación 4.5.2** *Aunque los parámetros que aparecen en el funcional  $\mathcal{J}_2$  podrían tomar cualquier valor, hemos elegido  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , los mismos parámetros utilizados en el funcional  $\mathcal{J}_1$  en la Fase 1, para dar el mismo peso a las seminormas  $|\cdot|_1$  y  $|\cdot|_2$  dentro y fuera de  $H^*$  en este caso.*

## 4.5.2. Existencia y unicidad de solución

**Teorema 4.5.3** *El problema 4.5.1 tiene una única solución que es también la única solución del siguiente problema variacional:*

*Encontrar  $\sigma_{s_f} \in W_{s_f}$  tal que*

$$\sum_{m=1}^2 \tau_m (\sigma_{s_f}, w)_{m, \overset{\circ}{H}^*} = 0 \quad \text{para todo } w \in W_0 = \{v \in W_{H^*} : \varphi(v) = \mathbf{0}\}.$$

**Demostración.** Es fácil comprobar que la aplicación

$$((u, v)) = \sum_{l=0}^2 \varphi_{l_{n+1}}(u) \varphi_{l_{n+1}}(v) + \sum_{m=1}^2 \tau_m (u, v)_{m, \overset{\circ}{H}^*}$$

define un producto interno en  $W_{H^*}$ , y por tanto

$$[[u]] = \left( \sum_{l=0}^2 \varphi_{l_{n+1}}(u)^2 + \sum_{m=1}^2 \tau_m |u|_{m, \overset{\circ}{H}^*}^2 \right)^{1/2}$$

define una norma en  $W_{H^*}$  equivalente a la norma usual  $\|\cdot\|$ .

Sea  $\{B_i\}_{i=1}^{3n} \in W_{H^*}$  la base usual de Hermite asociada a los nodos en  $\mathcal{N}$ , esto es,  $\varphi(B_i) = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$  para todo  $i \in \{1, \dots, 3n\}$ .

Entonces,  $v = \sum_{i=1}^{3n} \varphi_i(s_f) B_i \in W_{s_f}$  y por tanto,  $W_{s_f}$  es un subconjunto cerrado convexo y no vacío de  $W_{H^*}$ . Aplicando el teorema de la proyección

sobre un cerrado convexo no vacío (Theorem V.2 de [11] o Teorema A.2.1 en el Apéndice), obtenemos que existe un único  $\sigma_{s_f} \in W_{s_f}$  que es la proyección del elemento nulo de  $W_{H^*}$  sobre  $W_{s_f}$ , es decir,  $\sigma_{s_f}$  satisface

$$[[\sigma_{s_f}]] = \min_{v \in W_{s_f}} [[v]],$$

y como consecuencia,

$$\mathcal{J}_2(\sigma_{s_f}) = \min_{v \in W_{s_f}} \mathcal{J}_2(v).$$

Además,  $\sigma_{s_f}$  también satisface  $((0 - \sigma_{s_f}, v - \sigma_{s_f})) \leq 0$  para todo  $v \in W_{s_f}$ . Si  $w \in W_0$ , entonces  $\sigma_{s_f} + w \in W_{s_f}$  y por tanto,  $((\sigma_{s_f}, w)) \geq 0$ . Por otra parte, como  $-w \in W_0$ , tenemos también  $((\sigma_{s_f}, w)) \leq 0$  y como consecuencia,

$$0 = ((\sigma_{s_f}, w)) = \sum_{m=1}^2 \tau_m(\sigma_{s_f}, w)_{m, H^* \circ}$$

para todo  $w \in W_0$ . ■

### 4.5.3. Cálculos

En la primera fase se procede como en el caso continuo; es decir, si  $\mathcal{B}_{\bar{D}-H^*} = \{\vartheta_1, \dots, \vartheta_p\}$  es la base de Hermite de  $W_{\bar{D}-H^*}$  asociada a los nodos de  $\mathcal{T}$  que pertenecen a  $\bar{D} - \overset{\circ}{H^*}$  y denotamos  $s_f = \sum_{i=1}^p \beta_i \vartheta_i$ , entonces  $\beta = (\beta_i)_{i=1}^p$  se obtiene como la solución del sistema lineal  $CX = B$ , donde  $C = (c_{ij})_{i,j=1}^p$  y

$$c_{ij} = \langle \rho(\vartheta_i), \rho(\vartheta_j) \rangle_k + \tau_1(\vartheta_i, \vartheta_j)_{1, D-H^*} + \tau_2(\vartheta_i, \vartheta_j)_{2, D-H^*},$$

y

$$B = (\langle \rho(\vartheta_1), \rho(f) \rangle_k, \dots, \langle \rho(\vartheta_p), \rho(f) \rangle_k)^\top.$$

Veamos ahora la segunda fase:

Sea  $N_0 = \dim(W_{H^*})$  y extendamos el conjunto de funciones de base  $\{B_i\}_{i=1}^{3n}$  introducidos en la demostración del Teorema 4.5.3 a la base usual de Hermite  $\{B_i\}_{i=1}^{N_0}$  de  $W_{H^*}$ .

Entonces,  $\{B_i\}_{i=3n+1}^{N_0}$  es base de  $W_0$  y por tanto,

$$\sigma_{s_f} = \sum_{i=1}^{3n} \varphi_i(s_f) B_i + \sum_{j=3n+1}^{N_0} \gamma_j B_j.$$

Aplicando el Teorema 4.5.3 obtenemos que el vector  $(\gamma_j)_{j=3n+1}^{N_0}$  es la solución del sistema lineal

$$\sum_{j=3n+1}^{N_0} \left( \sum_{m=1}^2 \tau_m (B_j, B_t)_{m, \mathring{H}^*} \right) \gamma_j = - \sum_{i=1}^{3n} \varphi_i(s_f) \left( \sum_{m=1}^2 \tau_m (B_i, B_t)_{m, \mathring{H}^*} \right)$$

para todo  $t = 3n + 1, \dots, N_0$ .

#### 4.5.4. Reconstrucción de la función

La reconstrucción  $f^*$  de  $f$  considerada para rellenar el agujero de  $f$  sobre  $H$  es

$$f^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} s_f(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \overline{D} - H^* \\ \sigma_{s_f}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in H^* \end{cases}.$$

Como  $\sigma_{s_f} \in W_{s_f}$ , entonces  $f^*$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  sobre  $D$ .

#### 4.5.5. Parámetros óptimos

En esta sección damos un criterio para elegir los valores de los parámetros óptimos  $\tau$ : sea

$$f_\tau \in \mathcal{S}_2^1(D, \mathcal{T})$$

la función reconstrucción obtenida por el método descrito en la subsección anterior para valores dados de los parámetros de suavizado  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  que aparecen en el funcional  $\mathcal{J}_1$ .

Consideramos como parámetros óptimos  $\bar{\tau}$  aquellos que lleven a una función  $f_{\bar{\tau}}$  que esté “tan cerca” como sea posible de la función original  $f$  sobre  $\overline{D} - \mathring{H}^*$ ; es decir, los valores óptimos  $\bar{\tau}$  son aquellos que minimizan el error

$$\|f_\tau - f\|_{0, \overline{D} - \mathring{H}^*}^2 = \int_{\overline{D} - \mathring{H}^*} (f_\tau - f)^2 \quad \text{para } \tau \in [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$$

Como  $f_\tau|_{\overline{D} - \mathring{H}^*} \in W_{\overline{D} - H^*}$ , buscaremos primero el vector  $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_i)_{i=1}^p$  que minimice la función

$$\mathcal{R}(\beta_1, \dots, \beta_p) = \left\| \sum_{j=1}^p \beta_j \vartheta_j - f \right\|_{0, \overline{D} - \mathring{H}^*}^2.$$

Como

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \beta_i} = 2 \left( \sum_{j=1}^p \beta_j \vartheta_j - f, \vartheta_i \right)_{0, \overline{D} - \mathring{H}^*} \quad \text{para todo } i = 1, \dots, p,$$

entonces  $\bar{\beta}$  es la solución del sistema lineal

$$M X = L \quad (4.5.12)$$

donde

$$M = \left( \int_{\bar{D}-H^*} \vartheta_j \vartheta_i \right)_{i,j=1}^p \quad \text{y} \quad L = \left( \left( \int_{\bar{D}-H^*} f \vartheta_i \right)_{i=1}^p \right)^\top.$$

Sin embargo, en general no existirán parámetros  $\tau$  tales que la solución del sistema lineal (4.5.12) sea  $\bar{\beta}$ .

Por tanto, buscaremos  $\bar{\tau}$  tal que si  $f_\tau|_{\bar{D}-H^*} = \sum_{i=1}^p \beta_i^\tau \vartheta_i$  y  $\beta^{(\tau)} = (\beta_i^\tau)_1$ , entonces  $\phi(\tau) = \langle \bar{\beta} - \beta^{(\tau)} \rangle_p$  alcance el mínimo en  $\tau = \bar{\tau}$ .

En los ejemplos gráficos dados en la siguiente subsección de este capítulo,  $\bar{\tau} = (\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2)$  ha sido aproximado utilizando el algoritmo de Powell para encontrar el mínimo de una función vectorial sin utilizar derivadas (ver Sección 7.3 de [10]).

#### 4.5.6. Ejemplos gráficos

Como en los casos anteriores, hemos aplicado el método de relleno sobre diferentes funciones test, definidas sobre el dominio  $D = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ , y hemos considerado el agujero  $H$  definido implícitamente como

$$\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{4})^2} + \frac{(y - \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{8})^2} < 1,$$

y la triangulación uniforme de  $\bar{D}$  obtenida subdividiendo el intervalo  $[0, 1]$  en ocho subintervalos. En la Figura 4.7 mostramos la gráfica de la triangulación y el agujero  $H$  en la izquierda, y la gráfica de  $H^*$  en la derecha. De cara a obtener la función reconstrucción en el primer paso (sobre  $\bar{D} - H^*$ ), hemos considerado un conjunto  $\mathcal{P}$  para el funcional  $\mathcal{J}_1$  consistente en 1500 puntos arbitrarios sobre  $\bar{D} - H^*$ .

La primera función test considerada ha sido la función de Franke. En la Figura 4.8 se muestra la gráfica de  $f$  sobre  $\bar{D}$  y sobre  $\bar{D} - H$ .

Los parámetros óptimos obtenidos usando el método desarrollado en la Subsección 4.5.5 han sido  $\bar{\tau}_1 = 3,75 \cdot 10^{-7}$  y  $\bar{\tau}_2 = 5,5 \cdot 10^{-6}$ .

En la Figura 4.9 mostramos la función reconstrucción  $f^*$ .

Hemos estimado también el error obtenido para diferentes valores de los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau_2$  usando la fórmula de error relativo

$$E_{rel} = \frac{\sum_{i=1}^{1400} (f^*(\mathbf{a}_i) - f(\mathbf{a}_i))^2}{\sum_{i=1}^{1400} f(\mathbf{a}_i)^2},$$



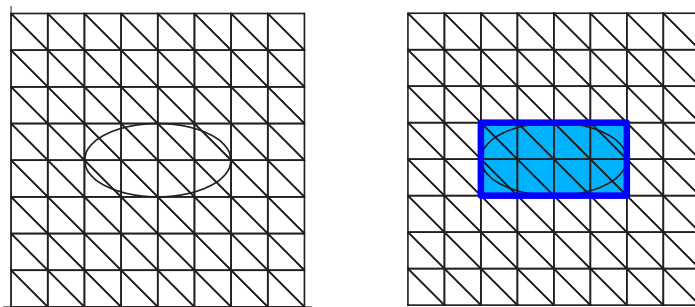


Figura 4.7: La triangulación, el agujero  $H$  y  $H^*$ .

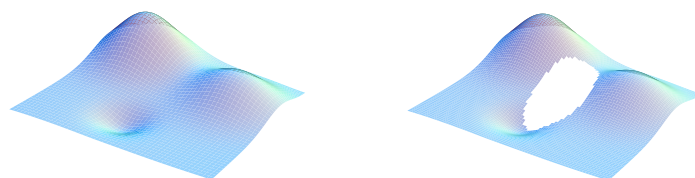


Figura 4.8: Gráficas de  $f$  sobre  $\bar{D}$  y sobre  $\bar{D} - H$ .

donde  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{1400}\}$  son puntos arbitrarios en  $\bar{D} - \mathring{H}^*$ .

En la Tabla 4.1 mostramos las estimaciones del error obtenidas para los parámetros óptimos y para otros valores de  $\tau_1$  y  $\tau_2$ .

La segunda función test es la función de Nielson. En la Figura 4.10 mostramos las gráficas de  $g$  sobre  $\bar{D}$  y sobre  $\bar{D} - H$ .

Los parámetros óptimos son  $\bar{\tau}_1 = 4 \cdot 10^{-9}$  y  $\bar{\tau}_2 = 4 \cdot 10^{-9}$ . En la Figura 4.11 mostramos la función reconstrucción  $g^*$  de  $g$ .

En la Tabla 4.2 mostramos las estimaciones de error para los parámetros óptimos y para otros valores de  $\tau_1$  and  $\tau_2$ .

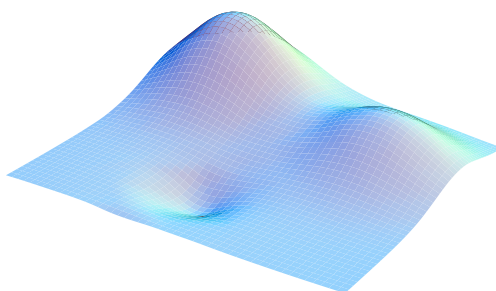
La última función test considerada es

$$h(\mathbf{x}) \equiv h(x, y) = \text{sen}(2\pi^2(x - 0,5)(y - 0,5))$$

En la Figura 4.12 mostramos las gráficas de  $h$  sobre  $\bar{D}$  y sobre  $\bar{D} - H$ .

Los parámetros óptimos son  $\bar{\tau}_1 = 1,67 \cdot 10^{-3}$  y  $\bar{\tau}_2 = 6,5 \cdot 10^{-7}$ . En la Figura 4.13 mostramos la gráfica de la función reconstrucción  $h^*$  de  $h$ .

En la Tabla 4.3 mostramos las estimaciones de error obtenidas para los parámetros óptimos y para otros valores de  $\tau_1$  y  $\tau_2$ .

Figura 4.9: Función de reconstrucción  $f^*$  de  $f$ .

$\tau_1$	$\tau_2$	$E_{rel}$
$\bar{\tau}_1$	$\bar{\tau}_2$	$5,09 \cdot 10^{-6}$
$10^{-6}$	$10^{-8}$	$5,1 \cdot 10^{-6}$
$10^{-2}$	$10^{-5}$	$5,49 \cdot 10^{-6}$
$10^{-7}$	$10^{-2}$	$5,82 \cdot 10^{-3}$
$10^{-2}$	$10^{-6}$	$5,28 \cdot 10^{-6}$
$10^{-9}$	$10^{-9}$	$5,1 \cdot 10^{-6}$
$10^{-2}$	$10^{-2}$	$5,84 \cdot 10^{-3}$

Tabla 4.1: Estimaciones de error para  $f_\tau$ .

## 4.6. Convergencia local

En esta última sección establecemos un resultado de convergencia local válido para los casos continuo y  $\mathcal{C}^1$ . Este resultado establece básicamente que a medida que la triangulación se refina, que el cardinal del conjunto  $\mathcal{P}$  utilizado en la definición del funcional  $\mathcal{J}_1$  en la primera fase del método de relleno (tanto en el caso continuo como en el caso  $\mathcal{C}^1$ ) va creciendo, y si se cumplen algunas hipótesis adicionales en las que intervienen el diámetro de la partición, el cardinal de  $\mathcal{P}$  y los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau_2$  del funcional  $\mathcal{J}_1$ , entonces la función reconstrucción  $f^*$  tiende en norma a la función original allá donde esta última está definida; es decir, sobre  $D - H$ .

Consideremos un subconjunto  $\mathcal{E} \subset ]0, +\infty[$  que admite 0 como punto de acumulación y, para cada  $\epsilon \in \mathcal{E}$ , sea  $\mathcal{T}^\epsilon$  una  $\alpha$ -triangulación de  $\bar{D}$  de forma

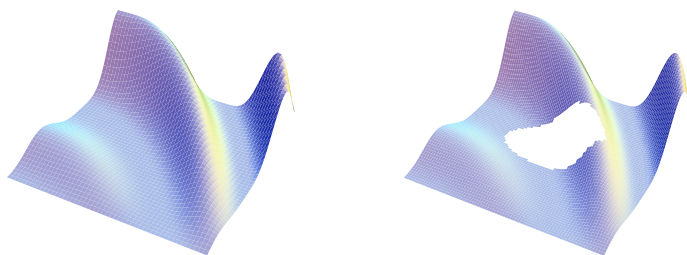


Figura 4.10: Gráficas de  $g$  sobre  $\bar{D}$  y sobre  $\bar{D} - H$ .

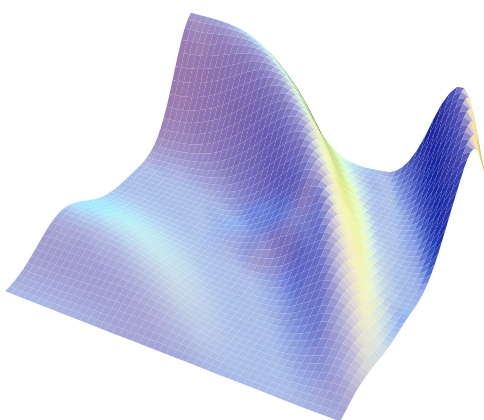


Figura 4.11: Función reconstrucción  $g^*$  de  $g$ .

que  $\max_{T \in \mathcal{T}^\epsilon} 2R_T = \epsilon$ . Sea

$$H_\epsilon^* = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_H^\epsilon} T, \quad \text{donde} \quad \mathcal{T}_H^\epsilon = \{T \in \mathcal{T}^\epsilon : T \cap H \neq \emptyset\}.$$

Entonces  $\mathcal{T}^\epsilon - \mathcal{T}_H^\epsilon$  es una triangulación de  $(H_\epsilon^*)^c = \bar{D} - \overset{\circ}{H}_\epsilon^*$ .

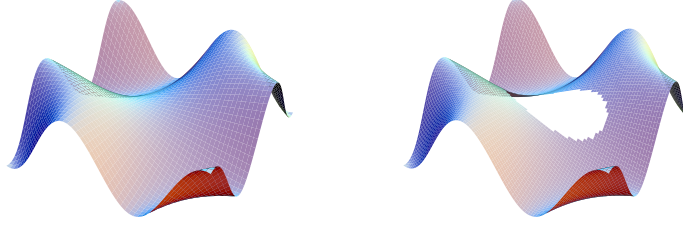
Supongamos asimismo que existe  $\epsilon' > 0$  tal que  $\mathcal{T}^\epsilon$  es una sub-triangulación de  $\mathcal{T}^{\epsilon'}$  siempre que  $\epsilon \leq \epsilon'$ . Entonces  $(H_{\epsilon'}^*)^c \subset (H_\epsilon^*)^c$  y, además, tenemos:

**Observación 4.6.1**  $\mathcal{T}^\epsilon|_{(H_{\epsilon'}^*)^c} = \{T \in \mathcal{T}^\epsilon : T \subset (H_{\epsilon'}^*)^c\}$  es una triangulación de  $(H_{\epsilon'}^*)^c$  siempre que  $\epsilon \leq \epsilon'$ .

Definamos  $\Omega_\epsilon = H_k^* - \bar{H}$  para todo  $\epsilon \in \mathcal{E}$ . Entonces se tiene:

**Lema 4.6.2**  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\Omega_\epsilon) = 0$ , donde  $\mu$  representa la medida de Lebesgue.

$\tau_1$	$\tau_2$	$E_{rel}$
$\bar{\tau}_1$	$\bar{\tau}_2$	$5 \cdot 10^{-5}$
$10^{-2}$	$10^{-5}$	$6,84 \cdot 10^{-5}$
$10^{-7}$	$10^{-2}$	$6,33 \cdot 10^{-2}$
$10^{-2}$	$10^{-6}$	$5,79 \cdot 10^{-5}$
$10^{-2}$	$10^{-2}$	$6,34 \cdot 10^{-2}$
$10^{-5}$	$10^{-5}$	$5,64 \cdot 10^{-5}$
$10^{-10}$	$10^{-5}$	$5,64 \cdot 10^{-5}$

Tabla 4.2: Estimaciones de error para  $g_\tau$ .Figura 4.12: Gráficas de  $h$  sobre  $\bar{D}$  y sobre  $\bar{D} - H$ .

**Demostración.** Si  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu(\Omega_\epsilon) \neq 0$ , entonces existiría una sucesión  $\{\epsilon_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  verificando

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \epsilon_l = 0$$

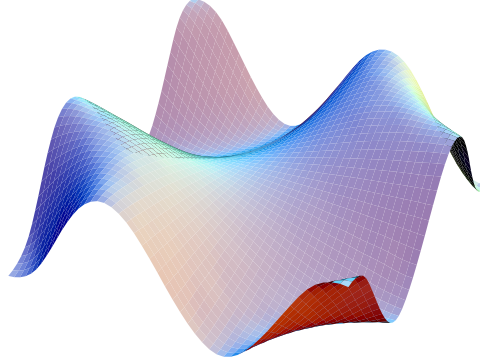
y  $\beta > 0$  tal que

$$\mu(\Omega_{\epsilon_l}) > \beta \quad \text{para todo } l \in \mathbb{N}. \quad (4.6.13)$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $\Omega_{\epsilon_l} \supset \Omega_{\epsilon_{l+1}}$  para todo  $l \in \mathbb{N}$ . Como  $\mu(\Omega_{\epsilon_l}) < +\infty$  para todo  $l \in \mathbb{N}$ , se sigue que

$$\mu \left( \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \Omega_{\epsilon_l} \right) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_{\epsilon_l}). \quad (4.6.14)$$

Finalmente demostraremos que  $\bigcap_{l \in \mathbb{N}} \Omega_{\epsilon_l} = \emptyset$ . Supongamos que  $\mathbf{x} \in \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \Omega_{\epsilon_l}$ . Entonces para todo  $l \in \mathbb{N}$  existiría  $T \in \mathcal{T}_H^\epsilon$  tal que  $\mathbf{x} \in T$  y por tanto,  $\delta(\mathbf{x}, \bar{H}) \leq \epsilon_l$ . Como consecuencia  $\delta(\mathbf{x}, \bar{H}) = 0$ , lo que implica que  $\mathbf{x} \in \bar{H}$ , que lleva a contradicción con el hecho de que  $\mathbf{x} \in \Omega_{\epsilon_l}$  para todo  $l \in \mathbb{N}$ . Por tanto,  $\bigcap_{l \in \mathbb{N}} \Omega_{\epsilon_l} = \emptyset$  y por (4.6.14) tenemos  $\lim_{l \rightarrow +\infty} \mu(\Omega_{\epsilon_l}) = 0$ , lo que contradice (4.6.13). ■

Figura 4.13: Función reconstrucción  $h^*$  de  $h$ .

$\tau_1$	$\tau_2$	$E_{rel}$
$\bar{\tau}_1$	$\bar{\tau}_2$	$3,44 \cdot 10^{-5}$
$10^{-3}$	$10^{-5}$	$4,13 \cdot 10^{-5}$
$10^{-2}$	$10^{-7}$	$4,03 \cdot 10^{-5}$
$10^{-5}$	$10^{-5}$	$4,1 \cdot 10^{-5}$
$10^{-7}$	$10^{-2}$	$5,19 \cdot 10^{-2}$
$10^{-2}$	$10^{-2}$	$5,2 \cdot 10^{-2}$

Tabla 4.3: Estimaciones de error para  $h_\tau$ .

Sea  $\theta$  un subconjunto abierto y no vacío de  $D$  tal que  $\bar{\theta} \cap \bar{H} = \emptyset$ . Entonces, por el Lema 4.6.2 sabemos que existe  $\epsilon_0 \leq \epsilon^*$  tal que  $\bar{\theta} \subset (H_{\epsilon_0}^*)^c$ , por tanto,  $\bar{\theta} \subset (H_\epsilon^*)^c$  para todo  $\epsilon \leq \epsilon_0$ , y por la Observación 4.6.1, tenemos que  $\mathcal{T}^\epsilon|_{(H_{\epsilon_0}^*)^c}$  es una triangulación de  $(H_{\epsilon_0}^*)^c$  para todo  $\epsilon \leq \epsilon_0$ .

Consideremos ahora, para cada  $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , un subconjunto finito de puntos  $\mathcal{P}^s$  en  $(H_{\epsilon_0}^*)^c$  de forma que

$$\sup_{\mathbf{x} \in (H_{\epsilon_0}^*)^c} \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{P}^s} \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle_2 = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow +\infty, \quad (4.6.15)$$

y denotemos

$$f_{s,\epsilon}^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} (s_f)_{s,\epsilon}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in (H_{\epsilon_0}^*)^c \\ (\sigma_{s_f})_{s,\epsilon}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in H_{\epsilon_0}^* \end{cases},$$

donde, para  $\epsilon \leq \epsilon_0$ ,  $(s_f)_{s,\epsilon}$  es la única función en  $\mathcal{S}_2^{1,1}(\overset{\circ}{(H_{\epsilon_0}^*)^c}, \mathcal{T}^\epsilon|_{(H_{\epsilon_0}^*)^c})$  que

minimiza el funcional (4.4.3) del primer paso del método de relleno para  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^s$  y  $H^* = H_{\epsilon_0}^*$ , y  $(\sigma_{s_f})_{s,\epsilon}$  es la única solución del Problema 4.4.1 para  $H^* = H_{\epsilon_0}^*$  y  $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\epsilon$ . Sea  $\text{card}(\mathcal{P}^s) = p(s) \equiv p$ .

Entonces, tenemos una sucesión  $\{\mathcal{T}^\epsilon|_{(H_{\epsilon_0}^*)^c}\}_{\epsilon \leq \epsilon_0}$  de triangulaciones de  $(H_{\epsilon_0}^*)^c$  en las condiciones dadas en el Teorema de convergencia 1.3.5, y por tanto, aplicando dicho teorema deducimos que si  $f \in \mathcal{C}^3((H_{\epsilon_0}^*)^c)$  y, además de (4.6.15), se verifican las siguientes hipótesis:

H1. *Existen*  $C > 0$  y  $s_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tales que  $p \equiv p(s) \leq C s^2$  para todo  $s \geq s_0$ ;

H2.  $\tau_2 = o(s^2)$ ,  $s \rightarrow +\infty$ ;

H3.  $\tau_1 = o(\tau_2)$ ,  $s \rightarrow +\infty$ ;

H4.  $\frac{s^2 \epsilon^6}{\tau_2} = o(1)$ ,  $s \rightarrow +\infty$ ,

entonces

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \|(s_f)_{s,\epsilon} - f\|_{(H_{\epsilon_0}^*)^c} = 0. \quad (4.6.16)$$

Como consecuencia, tenemos

**Teorema 4.6.3** *Bajo las hipótesis (4.6.15), H1, H2, H3 y H4, se verifica*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \|f_{s,\epsilon}^* - f\|_\theta = 0. \quad (4.6.17)$$

**Demostración.** Supongamos que (4.6.17) no se verifica. Entonces existe una sucesión  $\{s_l\}_{l \in \mathbb{N}}$  verificando  $\lim_{l \rightarrow +\infty} s_l = +\infty$  y  $\alpha > 0$  tales que  $\|f_{s_l,\epsilon}^* - f\|_\theta > \alpha$  para todo  $l \in \mathbb{N}$ . Pero como  $\theta \subset (H_{\epsilon_0}^*)^c$ , entonces

$$\alpha < \|f_{s_l,\epsilon}^* - f\|_\theta = \|(s_f)_{s_l,\epsilon} - f\|_\theta \quad \text{para todo } l \in \mathbb{N},$$

lo que contradice (4.6.16). ■

# Conclusiones

## En castellano

La presente memoria no deja de ser una prueba más de la eficiencia y versatilidad de los métodos variacionales para la aproximación de datos mediante superficies construidas a partir de splines bivariados con cierto grado de regularidad.

Para conseguir esta deseada regularidad, el empleo de funciones polinómicas a trozos construidas a partir del elemento finito de Powell-Sabin, así como su representación a partir de B-coeficientes, ha resultado bastante apropiado.

Por su parte, la gran aplicabilidad de las técnicas desarrolladas nos ha permitido considerar algunas de las numerosas aplicaciones posibles en el campo de la multiresolución, como son reducción de ruido y localización de energía, así como para el rellenado de agujeros dentro de superficies de tipo explícito.

Así pues, las principales aportaciones de esta memoria en este campo son las siguientes:

- La obtención de resultados de convergencia a la hora de aproximar datos lagrangianos mediante superficies de clase  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) sobre una triangulación uniforme de tipo  $\Delta^1$  de un dominio poligonal del plano, que pueden extenderse a triangulaciones más generales ( $\alpha$ -triangulaciones) en el caso  $r = 1$ .
- Se han desarrollado a su vez algoritmos eficientes de resolución del problema de aproximación correspondiente, tanto en el caso uniforme como no uniforme, para datos sin y con ruido.
- En ambos casos se ha procedido a realizar una estimación y optimización de los parámetros de suavizado, que en el caso de datos con ruido se basa en una adaptación de la técnica denominada de “validación cruzada”.

- Mediante la aplicación de una técnica de multirresolución adaptada a nuestro caso, se ha podido aplicar la teoría previa a la reducción de ruido en unos datos provenientes de una función test determinada, y a la localización de energía predominante dentro del dominio de definición de una función dada.
- Finalmente, una aplicación interesante de toda esta teoría ha sido el rellenado de agujeros en superficies de tipo explícito, pudiendo realizarse éste de manera discontinua, con continuidad, o bien con clase  $\mathcal{C}^1$ , aunque siendo necesaria una ligera modificación de la función original para conseguir la requerida regularidad en los dos últimos casos.

## In english

This Ph. D. thesis shows the efficiency and versatility of the variational methods to approximate 3D-data by surfaces built from bivariate splines with some regularity.

To obtain such regularity, the Powell-Sabin's finite element together with the use of the B-coefficients to represent the piecewise-polynomials that determine the resulting bivariate splines, have been very appropriate.

Also, the great applicability of the techniques developed has allowed us to consider some of the numerous possible applications using a multiresolution procedure (MRA or Multiresolution Analysis): for noise reduction and to locate energy. Finally, we use our main results to the interesting problem of filling holes in given explicit surfaces.

In summary, the principal contributions of this Ph. D. thesis are the following:

- The obtention of rigorous convergence results for the problem of approximating Lagrangian data by explicit surfaces of class  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) over uniform  $\Delta^1$ -type triangulations of a polygonal domain in the plane, that can be extended to more general triangulations ( $\alpha$ -triangulations) in the case  $r = 1$ .
- We have also developed efficient algorithms to solve the corresponding approximation problems, both in the uniform and non uniform cases, with data either with or without noise.
- In both cases (with or without noisy data) we proceed to get an estimation and optimization of the smoothing parameters, that in the case of noisy data is based on an adaptation of the so called "cross-validation" technique.



- By the application of a multiresolution technique adapted to our case, we apply the previous theory to a noise reduction problem and to the location of predominant energy inside the domain of definition of a given function.
- Finally, an interesting application of all this theory has been the problem of filling holes in explicit 3D surfaces. This can be done in a discontinuous manner, in a continuous way or with class  $\mathcal{C}^1$ . In all these cases, we have obtained satisfactory results, even though in the last two cases a slight modification of the original function is required in order to assure the desired regularity.

## En français

Ce mémoire de thèse constitue une autre preuve de l'efficacité et la polyvalence des méthodes variationnelles pour l'approche de données au moyen des surfaces construites à partir de splines à deux variables avec certain degré de régularité.

Afin d'obtenir la régularité désirée, l'élément fini de Powell-Sabin et la représentation des fonctions polynomiales par morceaux des splines à deux variables résultantes, au moyen de sa représentation à partir des B-coefficients correspondants, il a semblé être aussi assez approprié.

Et quant à la grande application des techniques développées, ceci nous a permis de considérer de nombreux exemples d'applications possibles dans le domaine de la multirésolution : pour la réduction du bruit et la localisation de l'énergie, ainsi que pour le remplissage des trous à l'intérieur des surfaces explicites.

Donc, les apports principaux de ce mémoire de thèse sur ce champ de recherche sont les suivants :

- L'obtention de résultats rigoureux de convergence pour le problème de rapprochement de données lagrangiennes de surfaces explicites de classe  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 1$ ) sur une partition uniforme de type  $\Delta^1$  d'un domaine polygonal du plan, qui peuvent être étendus au cas des partitions plus générales ( $\alpha$ -triangulations) dans le cas  $r = 1$ .
- Le développement d'algorithmes efficaces pour la résolution du problème d'approximation de données, tant dans le cas uniforme que dans le cas non uniforme ; que ce soit avec des données avec bruit ou sans bruit.

- Dans les deux cas, on procède à l'obtention d'une estimation et à l'optimisation des paramètres d'adoucissement, celui du cas de données avec bruit se fonde sur une adaptation de la technique "de validation croisée".
- L'application d'une technique de multirésolution adaptée à notre cas, nous a permis d'appliquer nos procédures au problème de réduction de bruit avec des données bruitées à partir d'une fonction spécifique d'essai et à la localisation de l'énergie prédominante à l'intérieur du domaine de définition d'une fonction donnée.
- Finalement, une application intéressante de toute cette théorie a été le remplissage de trous dans des surfaces explicites données ; ceci peut être fait d'une façon discontinue, d'une manière continue ou de classe  $\mathcal{C}^1$ . Dans tous les cas, nous avons obtenu des résultats satisfaisants, même si dans les deux cas derniers une légère modification de la fonction originale est exigée afin d'assurer la régularité voulue.

## Parte III

# Apéndice y Bibliografía



# Apéndice

## Conceptos generales y algunas demostraciones técnicas

### A.1. Espacios de Banach y de Hilbert

Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial real y  $\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

- i)  $\|v\| \geq 0$ ,
- ii)  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ ,
- iii)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ ,  $\forall v \in \mathcal{V}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,
- iv)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ ,  $\forall u, v \in \mathcal{V}$ .

A la aplicación  $\|\cdot\|$  se le llama norma sobre  $\mathcal{V}$  y se dice que éste es un *espacio vectorial normado*. Definiendo la *distancia asociada*  $d(u, v) := \|u - v\|$ , todo espacio vectorial normado se convierte en un *espacio métrico*.

**Definición A.1.1** Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial real y  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  un producto escalar, verificando:

- i) es bilineal,

$$(\lambda u + \mu v, w)_{\mathcal{V}} = \lambda (u, w)_{\mathcal{V}} + \mu (v, w)_{\mathcal{V}}, \quad \forall u, v, w \in \mathcal{V}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- ii) es simétrico,  $(u, v)_{\mathcal{V}} = (v, u)_{\mathcal{V}}$ ,  $\forall u, v \in \mathcal{V}$ .

- iii) es definido positivo,  $(u, u)_{\mathcal{V}} \geq 0$ ,  $\forall u \in \mathcal{V}$  y  $(u, u)_{\mathcal{V}} = 0$  si y sólo si  $u = 0$ .

Este producto escalar nos induce en  $\mathcal{V}$  una forma de “medir” los elementos de  $\mathcal{V}$ , definiendo la *norma* de un vector como

$$\|u\|_{\mathcal{V}} := \sqrt{(u, u)_{\mathcal{V}}}, \quad \forall u \in \mathcal{V}$$

y se dirá que este *espacio* es *prehilbertiano*.

Claramente pues, todo espacio prehilbertiano también es un espacio métrico (con una distancia), ya que se puede definir en este caso

$$d(u, v) := \|u - v\|_{\mathcal{V}} = \sqrt{(u - v, u - v)_{\mathcal{V}}}$$

**Lema A.1.2** *La conocida como desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$|(u, v)_{\mathcal{V}}|^2 \leq (u, u)_{\mathcal{V}} (v, v)_{\mathcal{V}}, \quad \forall u, v \in \mathcal{V} \quad (\text{A.1})$$

*es verificada por cualquier producto o semiproducto escalar definido en un espacio vectorial real  $\mathcal{V}$ .*

**Demostración.** Denominando  $\alpha \equiv (u, u)_{\mathcal{V}}$ ,  $\beta \equiv (v, v)_{\mathcal{V}}$  y  $\gamma \equiv (u, v)_{\mathcal{V}}$  se cumplirá que para cualquier escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (u + \lambda v, u + \lambda v)_{\mathcal{V}} = \alpha + 2\lambda\gamma + \lambda^2\beta$$

y suponiendo en primer lugar  $\beta \neq 0$  (que equivaldría a que  $v \neq 0 \in \mathcal{V}$ ), bastaría con tomar  $\lambda = -\frac{\gamma}{\beta}$ , para obtener  $0 \leq \alpha - 2\frac{\gamma^2}{\beta} + \frac{\gamma^2}{\beta} = \alpha - \frac{\gamma^2}{\beta}$  que equivale a lo que queríamos demostrar

$$\gamma^2 = |(u, v)_{\mathcal{V}}|^2 \leq \alpha\beta = (u, u)_{\mathcal{V}} (v, v)_{\mathcal{V}}$$

Análogamente, si  $\beta = 0$  mientras que  $\alpha \neq 0$  (que equivaldría a que  $u \neq 0 \in \mathcal{V}$ ), haríamos un razonamiento totalmente análogo cambiando los papeles de  $u$  y  $v$ . Pero si por el contrario, ambos fueran nulos, sería evidente que bastaría con tomar  $\lambda = -\gamma$  para deducir que  $0 \leq -2\gamma^2 \leq 0$ , con lo que necesariamente tendría que ser también  $0 = \gamma = (u, v)_{\mathcal{V}}$  y se verificaría la anunciada desigualdad de forma trivial. ■

**Corolario A.1.3** *De la desigualdad de Cauchy-Schwarz (A.1) se deduce trivialmente la conocida como desigualdad triangular para la norma asociada a dicho producto escalar.*

**Demostración.** Del hecho que se verifique la bilinealidad del citado producto escalar

$$(u + v, u + v)_{\mathcal{V}} = (u, u)_{\mathcal{V}} + 2(u, v)_{\mathcal{V}} + (v, v)_{\mathcal{V}}, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$$

vemos que la conocida desigualdad triangular para la norma asociada

$$\sqrt{(u+v, u+v)}_{\mathcal{V}} = |u+v|_{\mathcal{V}} \leq |u|_{\mathcal{V}} + |v|_{\mathcal{V}} = \sqrt{(u, u)}_{\mathcal{V}} + \sqrt{(v, v)}_{\mathcal{V}} \quad (\text{A.2})$$

sería equivalente (elevando ambos miembros al cuadrado y simplificando) a

$$(u, v)_{\mathcal{V}} \leq |(u, v)_{\mathcal{V}}| \leq \sqrt{(u, u)}_{\mathcal{V}} \sqrt{(v, v)}_{\mathcal{V}}$$

que (elevando de nuevo al cuadrado ambos miembros) no es más que la desigualdad de Cauchy-Schwarz demostrada anteriormente. ■

**Definición A.1.4** Una sucesión de Cauchy  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en un espacio métrico es aquella en la que la distancia entre los términos se va reduciendo a medida que la sucesión avanza; matemáticamente:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists n_{\epsilon} \in \mathbb{N} / d(u_m, u_n) < \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_{\epsilon}$$

**Definición A.1.5** Un espacio métrico completo es aquél donde toda sucesión de Cauchy  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$  converge dentro de dicho espacio:

$$\exists u \in \mathcal{V} \quad / \quad u_n \longrightarrow u \quad \text{en } \mathcal{V},$$

(en el sentido de que  $\|u_n - u\|_{\mathcal{V}} \longrightarrow 0$  cuando  $n \longrightarrow \infty$ )

**Definición A.1.6** Un espacio de Banach será un espacio vectorial normado y completo.

**Definición A.1.7** Un espacio se dirá que es de Hilbert si es un espacio prehilbertiano y completo (tal y cómo se indica en las Definiciones A.1.4 y A.1.5, todos los límites de sucesiones en  $\mathcal{V}$  son también elementos de  $\mathcal{V}$ ).

## A.2. Resultados generales

**Teorema A.2.1 (Teorema de proyección sobre un convexo cerrado)**

Sea  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{V}$  un espacio de Hilbert y  $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$  un convexo cerrado no vacío, entonces  $\forall f \in \mathcal{H}$  existe un único  $u \in \mathcal{K}$  tal que

$$\|f - u\| = \min_{v \in \mathcal{K}} \|f - v\|.$$

Además,  $u$  se caracteriza por la siguiente propiedad

$$\left| \begin{array}{l} u \in \mathcal{K}, \\ (f - u, v - u)_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad \forall v \in \mathcal{K}. \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

y se escribe  $u \equiv P_{\mathcal{K}}f$ , para indicar que se trata de la proyección de  $f$  sobre el conjunto  $\mathcal{K}$ .

También en la misma línea, hay otro famoso teorema de Stampacchia A.2.3, del cual se puede deducir otro resultado ampliamente usado, para demostrar existencia y unicidad de solución para problemas variacionales definidos a partir de una forma bilineal con ciertas características, que introducimos a continuación (consultar p.ej. [16]):

**Definición A.2.2** Sea  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{V}$  un espacio de Hilbert real, se dice que la forma bilineal

$$\mathcal{A}(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

es:

- continua, si existe una constante  $C > 0$  de manera que se cumple que

$$|\mathcal{A}(u, v)| \leq C |u| |v|, \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$$

- $\mathcal{V}$ -elíptica o coerciva, si se verifica que

$$\exists \gamma > 0 \quad / \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad \gamma \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \mathcal{A}(v, v)$$

**Teorema A.2.3 (Stampacchia)** Sea  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  una forma bilineal, continua y coerciva, en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{V}$ ; sea a su vez  $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$  un subconjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces, dada cualquier forma lineal continua  $\varphi \equiv \mathcal{B}(\cdot)$  (perteneciente de hecho al llamado espacio dual  $\mathcal{H}'$ ), existirá un único elemento  $u \in \mathcal{K}$  tal que

$$\mathcal{A}(u, v - u) \geq \varphi(v - u), \quad \forall v \in \mathcal{K}$$

Además, si  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  es simétrica, entonces  $u$  también se caracteriza por ser el único mínimo sobre el conjunto  $\mathcal{K}$  del siguiente funcional

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2} \mathcal{A}(v, v) - \varphi(v). \quad (\text{A.4})$$

A lo largo de esta memoria se ven numerosos ejemplos de este problema modelo abstracto en espacios funcionales, pero a continuación recordamos también un resultado global de existencia y unicidad de solución, cuando  $\mathcal{K} = \mathcal{V}$ .

**Lema A.2.4 (Lema de Lax-Milgram)** Si  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  es una forma bilineal, continua y coerciva ( $\mathcal{V}$ -elíptica), mientras que  $\mathcal{B} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma lineal y continua sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{V}$ ; entonces existe uno y sólo un elemento  $u \in \mathcal{V}$  que satisface:

$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{B}(v). \quad (\text{A.5})$$



$$\|u\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{1}{\gamma} \|\mathcal{B}\|_{\mathcal{V}'}$$

(siendo  $\gamma$  la constante de  $\mathcal{V}$ -elipticidad y  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}'}$  la norma en el espacio dual  $\mathcal{V}'$  que induce la norma de  $\mathcal{V}$ , en el sentido  $\|\mathcal{B}\|_{\mathcal{V}'} := \max \frac{|\mathcal{B}(v)|}{\|v\|_{\mathcal{V}}}$ ).

**Caso A.2.5** Si además  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  es simétrica, entonces  $u$  también se caracteriza por ser el único mínimo del funcional (A.4) en dicho espacio.

Respecto a ciertos problemas de programación no lineal que aparecen también a lo largo de esta memoria, necesitamos un resultado que nos proporciona condiciones necesarias para la existencia de extremo (mínimo en nuestro caso) para un problema de minimización sujeto a restricciones de desigualdad (consultar p.ej. [43]), como en el planteamiento siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad F(\mathbf{x}) \\ \text{con} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m \\ \text{y} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

donde  $F : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{H} : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{G} : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$ , respectivamente, son funciones suficientemente diferenciables (al menos de clase  $\mathcal{C}^1$ ).

**Definición A.2.6** Un punto  $\mathbf{x}^* \in A \subset \mathbb{R}^N$  se dirá que es un punto regular para las restricciones

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad \mathbf{G}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$$

si, además de satisfacerlas, los vectores gradientes  $\{\nabla H_i(\mathbf{x}^*)\}_{i=1}^m \cup \{\nabla G_j(\mathbf{x}^*)\}_{j \in J}$  son linealmente independientes; siendo  $J \equiv \{j \in \{1, \dots, p\} / G_j(\mathbf{x}^*) = 0\}$  el conjunto de índices  $j$  que saturan la condición de desigualdad.

**Teorema A.2.7 (Condiciones de Kuhn-Tucker)** Cualquier mínimo relativo  $\mathbf{x}^*$  del problema (A.6) que sea regular para las restricciones, de acuerdo con la definición anterior A.2.6, deberá satisfacer las siguientes condiciones necesarias de extremo condicionado

$$\nabla F(\mathbf{x}^*) + \lambda^\top \nabla H(\mathbf{x}^*) + \mu^\top \nabla G(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

$$\mu^\top G(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

para ciertos vectores  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  y  $\mu \in \mathbb{R}^p$ , con componentes no negativas  $\mu_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

Otros algoritmos interesantes que empleamos en esta memoria, dentro de un procedimiento de minimización sin usar derivadas, son el denominado método de Powell y el método de la sección áurea, que básicamente consisten en lo siguiente:

**Algoritmo A.2.8** Consideremos  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$  una aproximación inicial del mínimo de la función a minimizar  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , y denominemos  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$  a los vectores columna de la matriz identidad en dicho espacio euclídeo; entonces, una simple iteración de este procedimiento básico consistiría en los siguientes pasos:

- Para cada componente  $i = 1, \dots, d$ , calcularemos  $\bar{\beta}_i \in \mathbb{R}$  de manera que minimice la expresión  $f(\mathbf{x}_{i-1} + \beta_i \mathbf{e}_i)$ , usando cualquier método apropiado para ello (como por ejemplo el conocido como el método de la sección áurea que se describe en A.2.11), y definiremos  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \bar{\beta}_i \mathbf{e}_i$ .
- Para cada índice  $i = 1, \dots, d - 1$ , reemplazar  $\mathbf{e}_i$  por  $\mathbf{e}_{i+1}$ .
- Finalmente reemplazar  $\mathbf{e}_n$  por  $\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0$ .
- Calcular ahora  $\bar{\beta}_n \in \mathbb{R}$  de manera que minimice la expresión

$$f(\mathbf{x}_0 + \beta_n \mathbf{e}_n)$$

y reemplazar  $\mathbf{x}_0$  por  $\mathbf{x}_0 + \bar{\beta}_n \mathbf{e}_n$ .

**Observación A.2.9** Para una función general (no cuadrática) estas iteraciones se seguirían repitiendo hasta que se cumpla cierto criterio de parada, pero si la función a minimizar resulta ser cuadrática, se puede comprobar (ver p.ej. [47]) que, al cabo de  $k \leq d$  iteraciones, los vectores  $\mathbf{e}_{d-k+1}, \dots, \mathbf{e}_d$  resultarán conjugados. Así pues, al cabo de las  $d$  iteraciones, habremos minimizado usando las direcciones conjugadas  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$  (siempre que todos los vectores que se vayan obteniendo salgan no nulos).

**Observación A.2.10** En cuanto al algoritmo de búsqueda de mínimo usando la razón áurea, (que es algo que se conoce y estudia desde la época griega y tiene relación con trabajos de artistas y matemáticos a lo largo de toda la historia), consiste en realizar iteraciones, en un rango de trabajo dado, para ir acotando cada vez más el intervalo donde se encuentra el mínimo de la función (real y de variable real) objetivo. La idea principal es la comparación de las alturas de los límites superior e inferior en el eje de ordenadas, dentro

del rango de trabajo en el eje de abscisas. Así pues, siempre que la altura evaluada en el límite superior (a la derecha) sea mayor o igual a la evaluada en el límite inferior (a la izquierda) se elegirá un nuevo rango de trabajo equivalente a 0,618 veces el anterior, manteniendo el límite inferior y modificando el superior. En caso contrario, se haría justo al revés, manteniendo el límite superior y modificando el inferior hasta que se reduzca en 0,618 veces el rango original. Este proceso se repite de forma iterativa hasta que cierto grado de precisión sea alcanzado, pero es necesario que el mínimo local buscado se encuentre dentro del rango tomado originariamente al empezar el algoritmo.

**Algoritmo A.2.11** De forma más precisa, el algoritmo descrito anteriormente podría plantearse como sigue, para una función estrictamente cuasi-concava  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (es decir verificando que

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \quad \forall \lambda \in ]0, 1[$$

y siempre que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , con  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ):

- 1.- Sea  $a_0 = a$  y  $b_0 = b$ , así como  $k = 0$
- 2.- Calculamos  $\lambda_k = b_k - \alpha (b_k - a_k)$  y  $\mu_k = a_k + \alpha (b_k - a_k)$ , con  $\alpha \simeq 0,618$ , raíz de la ecuación  $r^2 + r = 1$ , tal que  $\alpha^2 = 1 - \alpha$ .
- 3.- Si  $b_k - a_k < \epsilon$  entonces se considerará que el mínimo se encuentra dentro de este intervalo  $[a_k, b_k]$  con un error inferior a cierta tolerancia prefijada,  $\epsilon$  y se terminaría la búsqueda; bastaría con que  $k > \frac{\ln \epsilon - \ln(b-a)}{\ln \alpha}$  (ver acotación A.7)
- 4.- En otro caso, si  $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$ , entonces  $a_{k+1} = a_k$  y  $b_{k+1} = \mu_k$ ; en caso contrario (si  $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ ) haremos  $a_{k+1} = \lambda_k$  y  $b_{k+1} = b_k$ . Nótese que en todo caso la longitud de cada uno de los intervalos es  $\alpha$  veces inferior al anterior:

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \alpha (b_k - a_k) = \alpha^2 (b_{k-1} - a_{k-1}) = \dots = \alpha^{k+1} (b - a) \quad (\text{A.7})$$

- 5.- Hacer  $k = k + 1$  y volver al paso 2.- Nótese que en todo caso, si

- si  $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$  entonces

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} &= a_{k+1} + \alpha (b_{k+1} - a_{k+1}) = a_k + \alpha (\mu_k - a_k) \\ &= a_k + \alpha (a_k + \alpha (b_k - a_k) - a_k) = a_k + \alpha (\alpha (b_k - a_k)) \\ &= a_k + \alpha^2 (b_k - a_k) = a_k + (1 - \alpha) (b_k - a_k) \\ &= a_k (1 - (1 - \alpha)) + (1 - \alpha) b_k = b_k - \alpha (b_k - a_k) \\ &= \lambda_k \end{aligned}$$

- y si  $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$  entonces

$$\begin{aligned}
 \lambda_{k+1} &= b_{k+1} - \alpha (b_{k+1} - a_{k+1}) = b_k - \alpha (b_k - \lambda_k) \\
 &= b_k - \alpha (b_k - (b_k - \alpha (b_k - a_k))) = b_k - \alpha^2 (b_k - a_k) \\
 &= b_k - (1 - \alpha) (b_k - a_k) = b_k (1 - (1 - \alpha)) + (1 - \alpha) a_k \\
 &= a_k + \alpha (b_k - a_k) = \mu_k
 \end{aligned}$$

### A.3. Espacios $\mathcal{L}^p$

Sea  $D$  un abierto acotado de  $\mathbb{R}^d$ . Se define el soporte de una función real sobre  $D$ ,  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ , como

$$\text{sop}(v) = \overline{\{\mathbf{x} \in D \mid v(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Diremos que una función  $v$  es de clase  $k$  en este abierto  $D$ , y lo denotaremos  $v \in \mathcal{C}^k(D)$ , si  $v$  es  $k$  veces diferenciable sobre  $D$  con derivadas continuas. La clase de Schwartz de funciones reales sobre  $D$ , que denotaremos  $\mathcal{D}(D)$ , es el conjunto de funciones  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  que son indefinidamente derivables sobre  $D$  y con soporte compacto en  $D$  (que se suele indicar  $\text{sop}(v) \subset\subset D$ ); es decir,

$$\mathcal{D}(D) \equiv \mathcal{C}_0^\infty(D) = \{v : D \rightarrow \mathbb{R} \mid v \in \mathcal{C}^\infty(D), \text{sop}(v) \subset\subset D\}.$$

Un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^d$  se llama *conjunto de medida nula* si puede ser recubierto con un sistema numerable de cubos abiertos ( $n$ -cubos) en el que la suma de volúmenes sea tan pequeña como se quiera:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |K_i| < \varepsilon.$$

Si alguna propiedad se verifica para todo  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^d$ , excepto a lo sumo en un conjunto de medida nula, se dice que se verifica en *casi todo punto* de  $D$  (c.t.p.  $D$ ).

**Definición A.3.1** Diremos que  $v \in \mathcal{L}(D)$  si  $v$  es integrable Lebesgue sobre  $D$  en cuyo caso es absolutamente integrable ( $\int_D |v| d\mathbf{x} < +\infty$ ) y que  $v \in \mathcal{L}^p(D)$  (con  $1 \leq p < +\infty$ ) si existe y es finita la integral  $\int_D |v|^p d\mathbf{x} < +\infty$ .

**Proposición A.3.2** Se verifica que  $\mathcal{D}(D)$  es denso en  $\mathcal{L}^p(D)$  para  $1 \leq p < +\infty$ , en el sentido de que cualquier función de este último espacio se puede

obtener como límite de una sucesión de funciones infinitamente derivables. Además, en  $\mathcal{L}^p(D)$  se puede definir la norma

$$\|v\|_{\mathcal{L}^p(D)} = \left( \int_D |v(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

que dota a este espacio de una estructura de espacio de Banach, para todo  $1 \leq p < \infty$ .

## A.4. Espacios de Sobolev

Dado un multiíndice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ , se denota

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i, \quad \partial^\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Se dice que una función  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  admite *derivada parcial débil* de orden  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ ,  $\partial^\alpha v$ , también llamada derivada parcial en el sentido de las distribuciones, si existe una función  $\partial^\alpha v : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\int_D \partial^\alpha v \varphi d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_D v \partial^\alpha \varphi d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(D). \quad (\text{A.8})$$

**Definición A.4.1** Sea  $k$  un entero no negativo y  $p \in [1, \infty]$ ; el denominado espacio de Sobolev  $\mathcal{W}^{k,p}(D)$  estará formado por todas aquellas funciones  $v \in \mathcal{L}^p(D)$  con derivadas débiles también en el mismo espacio  $\partial^\alpha v \in \mathcal{L}^p(D)$ , para todo multiíndice  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ , con  $|\alpha| \leq k$ .

**Observación A.4.2** Nosotros en esta memoria fundamentalmente usaremos los siguientes espacios de Sobolev concretos:  $\mathcal{H}^k(D) \equiv \mathcal{W}^{k,2}(D)$ , cuyas funciones son  $v \in \mathcal{L}^2(D)$  tales que existe toda derivada parcial débil  $\partial^\alpha v$ , con  $|\alpha| \leq k$ , y también pertenece a  $\mathcal{L}^2(D)$ ; es decir,

$$\mathcal{H}^k(D) = \{v : D \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial^\alpha v \in \mathcal{L}^2(D), \forall |\alpha| \leq k\}.$$

Se puede comprobar que dotado de la norma

$$\|v\|_{k,D} := \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \int_D (\partial^\alpha v)^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}},$$

el espacio  $\mathcal{H}^k(D)$  es un espacio de Hilbert, mientras que en el caso más general de los espacios  $\mathcal{W}^{k,p}(D)$ , junto con la norma correspondiente

$$\|v\|_{k,p,D} \equiv \|v\|_{\mathcal{W}^{k,p}(D)} := \begin{cases} (\sum_{|\alpha|\leq k} \int_D (\partial^\alpha v)^p d\mathbf{x})^{\frac{1}{p}} & , \text{ si } p \in [1, \infty[ \\ \max_{|\alpha|\leq k} \max_{\mathbf{x} \in D} |\partial^\alpha v(\mathbf{x})| & , \text{ si } p = \infty \end{cases}$$

sólo se podría asegurar el hecho de que sean espacios de Banach.

Por otra parte, se define sin problema el espacio de funciones de clase  $k$ , con soporte compacto incluido en  $D$

$$\mathcal{C}_0^k(D) := \mathcal{C}^k(D) \cap \mathcal{D}(D) = \{v : D \rightarrow \mathbb{R} \mid v \in \mathcal{C}^k(D), \text{ sop}(v) \subset\subset D\}.$$

Claramente  $\mathcal{D}(D) \subset \mathcal{C}_0^k(D) \subset \mathcal{H}^k(D)$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ ; pero el gran problema de los espacios de funciones de clase  $k$ , así como el de las funciones infinitamente derivables, es que no se trata de espacios completos, en el sentido de que podemos tener sucesiones “convergentes” (en el sentido de que al menos son de Cauchy) de funciones regulares cuyo (posible) límite no es regular.

Se podría definir entonces otros espacios de Sobolev de funciones con derivadas débiles en  $\mathcal{L}^2(D)$  y con soporte compacto en  $D$ , y que notaremos  $\mathcal{H}_0^k(D)$ , como la completación de  $\mathcal{D}(D)$  o incluso  $\mathcal{C}_0^k(D)$  dentro de  $\mathcal{H}^k(D)$ , considerando en todo caso la norma inducida por este espacio de Hilbert. Análogamente, se definirían también los espacios  $\mathcal{W}_0^{k,p}(D)$ , como la clausura de  $\mathcal{C}_0^\infty(D)$  o incluso  $\mathcal{C}_0^k(D)$  dentro del espacio  $\mathcal{W}^{k,p}(D)$  en la topología generada por la correspondiente norma.

Frecuentemente también se hará uso de la siguiente seminorma

$$|v|_{k,D} := \left( \sum_{|\alpha|=k} \int_D (\partial^\alpha v)^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

que será una norma cuando se considere precisamente en los espacios  $\mathcal{H}_0^k(D)$ . Claramente  $\|v\|_{k,D} = (\sum_{j \leq k} |v|_{j,D}^2)^{\frac{1}{2}}$  y se podrían enunciar algunos resultados adicionales que se pueden encontrar en cualquier libro de Análisis Funcional, donde se estudien estos espacios; por ejemplo, la seminorma  $|\cdot|_{k,D}$  es una norma en  $\mathcal{H}_0^k(D)$  equivalente a  $\|\cdot\|_{k,D}$  (consultar también la Proposición A.4.20).

En algunos casos, necesitaremos además imponer cierta regularidad a la frontera del dominio para poder asegurar cierta propiedad, de acuerdo con la siguiente

**Definición A.4.3** *Supongamos que  $D \subset \mathbb{R}^d$  es un conjunto abierto y acotado, diremos que su frontera  $\partial D$  es de clase  $\mathcal{X}$  (siendo  $\mathcal{X}$  cualquier espacio de funciones definido sobre  $\mathbb{R}^{d-1}$ ) si para cada punto  $\mathbf{x}_0 \in \partial D$  existe una*

bola euclídea de centro  $\mathbf{x}_0$  y radio  $r > 0$  y una función  $g \in \mathcal{X}$  de manera que, salvo una transformación de coordenadas apropiada si fuera necesario, se puede asegurar que

$$D \cap B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) / x_d > g(x_1, \dots, x_{d-1})\}$$

**Definición A.4.4** En particular, si  $\mathcal{X}$  se trata del espacio de funciones lipschitzianas (tales que  $|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})| \leq C |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ , para cierta constante positiva  $C$  y todo  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  en el dominio de definición de  $g$ ), entonces diremos simplemente que el dominio se trata de un dominio lipschitziano. Análogamente, si  $\mathcal{X}$  consiste en el espacio de funciones regulares, de clase  $\mathcal{C}^k$  o bien de tipo Hölderiano de clase  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$  (con  $0 < \alpha \leq 1$ ) diremos que el dominio  $D$  es regular de clase  $\mathcal{C}^k$  o clase  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ , respectivamente.

**Observación A.4.5** Señalemos que habitualmente la mayoría de los dominios con los que se trabaja en problemas de física e ingeniería, aunque no lleguen a ser demasiado regulares, porque tengan picos o esquinas en su frontera, al menos resultan lipschitzianos, salvo aquellos que provengan de una fractura o que posean grietas pronunciadas.

En lo que sigue, supondremos que  $D$  es acotado y que su borde, que denotaremos  $\Gamma$ , es lipschitziano (unión finita de arcos de curvas paramétricas lipschitzianas). Se puede hablar entonces (usando en todo caso el concepto de “traza” de la clase de funciones en la frontera, consultar p.ej. [11] o la subsección A.4) de los valores de funciones de  $\mathcal{H}^1(D)$  en la frontera de  $D$ , y por tanto, se puede definir el espacio  $\mathcal{H}_0^1(D)$  como las funciones de  $\mathcal{H}^1(D)$  que se anulan en  $\Gamma$  y más generalmente espacios de funciones de  $\mathcal{H}^1(D)$  que se anulan en un trozo de la frontera. Estos espacios heredan la estructura de espacio de Hilbert de  $\mathcal{H}^1(D)$ . En particular

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^1(D) &= \{v \in \mathcal{H}^1(D) / v|_{\Gamma} = 0\}, \\ \mathcal{H}_0^2(D) &= \{v \in \mathcal{H}^2(D) / v = 0 = \frac{\partial v}{\partial n} \text{ sobre } \Gamma\}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

siendo  $\vec{n} \equiv \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)^\top$  el vector normal exterior unitario, definido en casi todo punto de  $\Gamma$ . La derivada normal de cualquier función, suficientemente diferenciable, se define en aquellos puntos de la frontera del dominio donde exista dicho vector normal, multiplicándolo por el gradiente de la función en cada punto de  $\Gamma$ ; es decir,

$$\frac{\partial}{\partial n} () \equiv \nabla () \cdot \vec{n} \quad (\text{A.10})$$

Se tiene a su vez la siguiente fórmula de integración por partes en varias variables:  $\forall u, v \in \mathcal{H}^1(D)$ ,

$$\int_D u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x} = - \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} u v n_i ds \quad (\text{A.11})$$

y, si consideramos  $\mathcal{V} = \mathcal{C}(D)$  con el producto escalar definido por

$$(u, v)_{\mathcal{V}} = \int_D u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$$

este se trata de un espacio prehilbertiano, pero no es completo. No obstante, existe un procedimiento abstracto de “completar” un espacio, “añadiendo” aquellas funciones que le faltan para que el límite de cualquier sucesión convergente de funciones del espacio siga siendo otra función del mismo espacio; llegándose en el caso anterior al espacio de funciones de cuadrado integrable, que se suele denotar  $\mathcal{L}^2(D)$ .

Si consideramos ahora  $\mathcal{V} = \mathcal{C}^1(\bar{D})$ ,  $D \subset \mathbb{R}^d$  con frontera regular a trozos, con el siguiente producto escalar, definido para cualesquiera  $u, v \in \mathcal{V}$

$$(u, v)_{\mathcal{V}} = \int_D u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^d \int_D \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

de nuevo  $\mathcal{V}$  es un espacio prehilbertiano no completo y se puede demostrar que al completarlo obtenemos el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^1(D)$ , que estará formado por funciones de cuadrado integrable cuyas derivadas de primer orden existen, en sentido débil, y cuyo cuadrado es también integrable.

La manera en que las funciones de  $\mathcal{H}^1(D)$  se derivan es simplemente que se les puede aplicar el teorema de integración por partes o de la divergencia; es decir,  $u \in \mathcal{H}^1(D)$  si  $u \in \mathcal{L}^2(D)$  y existen  $d$  funciones  $\{v_1, \dots, v_d\}$  de  $\mathcal{L}^2(D)$  de forma que, para cada  $i \in \{1, \dots, d\}$

$$\int_D u(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_D v_i(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(D) \quad (\text{A.12})$$

A estas funciones  $v_i$  satisfaciendo las relaciones anteriores, se les llama derivadas parciales de  $u$  respecto de  $x_i$  en sentido débil. En general, también se puede ver el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}_0^k(D)$  como la clausura de  $\mathcal{D}(D)$  en  $\mathcal{H}^k(D)$  para la norma  $\|\cdot\|_{k,D}$ , es decir  $\mathcal{H}_0^k(D) = \overline{\mathcal{D}(D)} \subset \mathcal{H}^k(D)$ .

Otro de los resultados que suele emplearse en la teoría de los elementos finitos para analizar la regularidad global de una función a partir de la regularidad en cada subdominio (normalmente triángulos) de la partición  $\bar{D} = \bigcup_{l=1}^p \bar{D}_l$ , siendo tanto el dominio  $D$  como los subdominios disjuntos  $D_l$  ( $l = 1, \dots, p$ ), conjuntos abiertos conexos y acotados, con frontera lipschitziana, es el siguiente



**Proposición A.4.6** *En las condiciones anteriores, si  $k$  es un entero no negativo y  $p \in [1, \infty]$ , entonces bastará con que una función  $v \in \mathcal{C}^k(\bar{D})$  verifique además que  $v|_{D_l} \in \mathcal{W}^{k+1,p}(D)$ , para todo  $l = 1, \dots, p$ , para poder afirmar que de hecho  $v \in \mathcal{W}^{k+1,p}(D)$ .*

**Demostración.** La demostración bastará realizarla para el caso  $k = 0$ , ya que en cualquier otro caso bastaría con realizar el mismo razonamiento con las derivadas de orden apropiado. Por lo tanto, sea  $v \in \mathcal{C}^0(D)$  tal que  $v|_{D_l} \in \mathcal{W}^{1,p}(D_l)$ , para todo  $l = 1, \dots, p$ . Así pues, necesitaremos probar que, para cada  $i \in \{1, \dots, d\}$  existen las derivadas débiles  $\partial_{x_i} v \in \mathcal{L}^p(D)$  y no cabe duda de que un obvio candidato podría ser de la forma

$$w_i(\mathbf{x}) := \begin{cases} \partial_{x_i} v(\mathbf{x}) & , \text{ para } \mathbf{x} \in \bigcup_{l=1}^p D_l \\ \text{valor arbitrario} & , \text{ para cualquier otro caso} \end{cases}$$

ya que al suponerse  $v|_{D_l} \in \mathcal{W}^{1,p}(D)$  para cada  $l \in \{1, \dots, p\}$ , en particular  $\exists \partial_{x_i} v|_{D_l} \in \mathcal{L}^p(D_l)$  y por lo tanto  $w_i \equiv \partial_{x_i} v \in \mathcal{L}^p(D)$  y efectivamente se trata de la derivada débil que buscábamos, ya que para cualquier  $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$ , bastará aplicar la definición de  $w_i(\mathbf{x})$  en cada uno de los subdominios  $D_l$  aprovechando la aditividad de la integral y aplicar posteriormente la fórmula de integración por partes (A.12) en cada uno de los sumandos resultantes, para obtener

$$\begin{aligned} \int_D w_i \phi \, d\mathbf{x} &= \sum_{l=1}^p \int_{D_l} w_i \phi \, d\mathbf{x} = \sum_{l=1}^p \int_{D_l} \partial_{x_i} v \phi \, d\mathbf{x} \\ &= - \sum_{l=1}^p \int_{D_l} v|_{D_l} \partial_{x_i} \phi \, d\mathbf{x} + \sum_{l=1}^p \int_{\partial D_l} v|_{D_l} \phi \, n_i \, ds \\ &= - \int_D v \partial_{x_i} \phi \, d\mathbf{x} + \sum_{l=1}^p \int_{\partial D_l} v|_{D_l} \phi \, n_i \, ds \\ &= - \int_D v \partial_{x_i} \phi \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

debido a que el término  $\sum_{l=1}^p \int_{\partial D_l} v|_{D_l} \phi \, n_i \, ds = \mathbf{0}$ , ya que cada porción de la frontera del subdominio  $\partial D_l$  es parte de la frontera de  $D$  (donde  $\phi$  se sabe nula) o bien será una parte común de dos subdominios adyacentes distintos en los que los normales exteriores unitarios serían opuestos y por lo tanto acabarían cancelándose mutuamente las aportaciones correspondientes de la sumatoria. ■

**Proposición A.4.7** *Si ahora  $v \in \mathcal{W}^{k+1,p}(D)$  y  $v|_{D_l} \in \mathcal{C}^k(\bar{D}_l)$ , para todo  $l = 1, \dots, p$ , entonces  $v \in \mathcal{C}^k(D)$ .*

**Demostración.** Igual que en el caso anterior, la demostración bastará realizarla para el caso  $k = 0$ ; pero ahora procedamos por reducción al absurdo, suponiendo que  $v \in \mathcal{W}^{1,p}(D)$  y que  $v|_{D_l} \in \mathcal{C}^0(D_l)$ , para todo  $l = 1, \dots, p$ , pero que existen dos subdominios adyacentes  $D_{l_1}$  y  $D_{l_2}$  (con distintos  $l_1, l_2 \in \{1, \dots, p\}$ ) de manera que al menos en una pequeña región abierta  $D' \subset D_{l_1} \cup D_{l_2}$  y a lo largo de la parte común de la frontera  $\Gamma' \equiv (\partial D_{l_1} \cap \partial D_{l_2}) \cap D'$  se verifica que  $v|_{D_{l_1}} > v|_{D_{l_2}}$  (en el sentido de tomar límites laterales según una dirección normal a la frontera común, según nos acerquemos a la frontera por un dominio u otro).

Contrayendo dicha región  $D'$  todo lo que fuera necesario, podremos asumir que al menos para algún índice  $i \in \{1, \dots, d\}$  se podrá asegurar que la correspondiente componente del vector normal exterior a uno de los dominios sea no nula ( $n_i > 0$  o bien  $n_i < 0$ ) a lo largo de  $\Gamma'$ .

Por lo tanto, tomando  $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(D') \subset \mathcal{C}_0^\infty(D)$  de manera que sea estrictamente positiva, al menos sobre  $\Gamma'$ , tendríamos que

$$\begin{aligned} \int_D \partial_{x_i} v \phi \, d\mathbf{x} &= \sum_{l=1}^p \int_{D_l} \partial_{x_i} v \phi \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^2 \int_{D_{l_j}} \partial_{x_i} v \phi \, d\mathbf{x} \\ &= - \sum_{j=1}^2 \int_{D_{l_j}} v|_{D_{l_j}} \partial_{x_i} \phi \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^2 \int_{\partial D_{l_j}} v|_{D_{l_j}} \phi n_i \, ds \\ &= - \sum_{l=1}^p \int_{D_l} v|_{D_l} \partial_{x_i} \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\partial D_{l_1} \cap \partial D_{l_2}} (v|_{D_{l_1}} - v|_{D_{l_2}}) \phi n_i \, ds \\ &= - \int_D v \partial_{x_i} \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\partial D_{l_1} \cap \partial D_{l_2}} (v|_{D_{l_1}} - v|_{D_{l_2}}) \phi n_i \, ds \end{aligned}$$

y por hipótesis el término de la frontera sería no nulo, contradiciendo el hecho de que  $\partial_{x_i} v$  sea la derivada débil, que debe existir por ser  $v \in \mathcal{W}^{1,p}(D)$ . ■

**Corolario A.4.8** Como corolario de los dos resultados anteriores, llegamos a la conclusión de que si  $v|_{D_l} \in \mathcal{C}^k(\overline{D_l}) \cap \mathcal{W}^{k+1,p}(D_l)$ , para todo  $l = 1, \dots, p$ , entonces son equivalentes

$$v \in \mathcal{C}^k(\overline{D}) \iff v \in \mathcal{W}^{k+1,p}(D)$$

Durante la memoria también usaremos tácitamente otro resultado particular que se deduce de lo anterior y cuya versión para funciones escalares se puede encontrar por ejemplo en el libro [49] (tma. 1.4.3).

**Corolario A.4.9** Si de hecho lo que tenemos es cierta función polinómica a trozos  $S \in \mathcal{C}^r(\overline{D})$ , definida a partir de una triangulación (ver definición A.7.1) finita  $\mathcal{T}$  del dominio poligonal y acotado  $D \subset \mathbb{R}^2$ , de manera que

$\bar{D} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \bar{T}$  y de forma trivial  $S|_T \in \mathcal{H}^{r+1}(T)$ ,  $\forall T \in \mathcal{T}$ ; entonces podemos deducir de inmediato que  $S \in \mathcal{H}^{r+1}(\bar{D})$ .

Recopilamos a continuación otros muchos resultados útiles que involucran a los espacios de Sobolev más comunes y que pueden encontrarse por ejemplo en [11] o [4], entre otros muchos libros de Análisis Funcional.

- $\mathcal{C}^k(\bar{D}) \subset \mathcal{W}^{k,p}(D)$ , para cualquier  $p \in [1, \infty]$
- Para cualquier  $v \in \mathcal{W}^{k,p}(D)$  (con  $1 \leq p < \infty$ ), se puede encontrar una sucesión de funciones infinitamente diferenciables  $v_n \in \mathcal{C}^\infty(D) \cap \mathcal{W}^{k,p}(D)$  ( $v_n \in \mathcal{C}^\infty(\bar{D})$  en el caso de que el dominio  $D$  tenga frontera lipschitziana y  $v_n \in \mathcal{C}_0^\infty(D)$  en el caso de que  $v \in \mathcal{W}_0^{k,p}(D)$ ), tales que

$$\|v - v_n\|_{\mathcal{W}^{k,p}} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

- En todo caso, también el espacio  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  es denso en  $\mathcal{W}_0^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ , para cualquier  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $p \in [1, \infty]$ .

Otros muchos resultados usados muy a menudo, son los denominados teoremas de embebimiento o inmersión, que nos indican en qué casos un cierto espacio de funciones con derivadas en sentido débil pueden verse inmersos en otros espacios de funciones regulares (con cierto grado de diferenciabilidad), para ello definamos primeramente qué se considera por embebimiento continuo o inmersión continua de un espacio dentro de otro.

**Definición A.4.10** Sean en principio  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{W}$  dos espacios de Banach de manera que  $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ ; diremos que el espacio  $\mathcal{V}$  está embebido o inmerso continuamente en  $\mathcal{W}$ , y lo escribiremos  $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{W}$  si se verifica que

$$\|v\|_{\mathcal{W}} \leq C \|v\|_{\mathcal{V}}, \forall v \in \mathcal{V} \tag{A.13}$$

y diremos que el espacio  $\mathcal{V}$  está embebido o inmerso de manera compacta en  $\mathcal{W}$ , y lo escribiremos  $\mathcal{V} \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{W}$  si además de verificarse (A.13) también se puede asegurar que cualquier sucesión acotada de elementos de  $\mathcal{V}$  posee subsucesiones convergentes, al menos en  $\mathcal{W}$ .

**Observación A.4.11** Normalmente, si  $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{W}$  se puede asegurar que las funciones de  $\mathcal{V}$  son más regulares que las restantes en  $\mathcal{W}$ . Ejemplos significativos de este hecho podrían ser  $\mathcal{H}^1(D) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(D)$ , aunque también se tiene  $\mathcal{H}^1(D) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{L}^2(D)$ .

**Teorema A.4.12** Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un dominio lipschitziano, en cuyo caso se tendrán los siguientes embebimientos (donde  $p^* = \frac{pd}{d-kp}$ , de tal forma que  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$ ):

- Si  $k < \frac{d}{p}$ , entonces  $\mathcal{W}^{k,p}(D) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(D)$ , para todo  $q \leq p^*$  (con inyección compacta si  $q < p^*$ ).
- Si  $k = \frac{d}{p}$ , entonces  $\mathcal{W}^{k,p}(D) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(D)$ , para todo  $q < \infty$ .
- Si  $k > \frac{d}{p}$ , entonces  $\mathcal{W}^{k,p}(D) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k - [\frac{d}{p}] - 1, \beta}(D)$ , donde

$$\beta = \begin{cases} [\frac{d}{p}] + 1 - \frac{d}{p} & , \text{ si } \frac{d}{p} \text{ no es entero} \\ \text{cualquier número positivo } < 1 & , \text{ si } \frac{d}{p} \text{ es entero} \end{cases}$$

y con inyección compacta siempre que  $\beta \in [0, [\frac{d}{p}] + 1 - \frac{d}{p}]$ , donde  $[\frac{d}{p}]$  indica la parte entera de  $\frac{d}{p}$ .

- Si  $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , con  $k > l$  y  $p \in [1, \infty]$  y además el dominio lipschitziano acotado no vacío, entonces  $\mathcal{W}^{k,p}(D) \hookrightarrow \mathcal{W}^{l,p}(D)$ .
- En el caso unidimensional ( $d = 1$ ), cuando por ejemplo  $D = I \equiv ]a, b[ \subset \mathbb{R}$  también se puede asegurar continuidad para todo  $k \geq 1$  y  $p \geq 1$ , de manera que  $\mathcal{W}^{k,p}(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(I)$ .

**Observación A.4.13** Vemos pues de los resultados de embebimiento anteriores que cuanto mayor resulte el producto  $kp$  más regularidad acabará teniendo la función del espacio  $\mathcal{W}^{k,p}(D)$ , habiendo un valor crítico (que resulta ser precisamente la dimensión del espacio en el que se encuentra nuestro dominio,  $d$ ) de manera que para  $kp > d$  dentro de la clase de funciones pertenecientes al espacio  $\mathcal{W}^{k,p}(D)$  siempre se podrá encontrar un representante continuo (y todos los demás serán también continuos, por doquier o en casi todo punto). Sin embargo, cuando  $kp < d$  entonces las funciones (o más bien clases de funciones) en  $\mathcal{W}^{k,p}(D)$  pertenecerán a su vez a los espacios  $\mathcal{L}^q(D)$  para  $q \leq p^*$ , con  $p^* \equiv \frac{pd}{d-kp} > p$ ; pero cuando  $kp = d$  podremos tomar  $p^* \nearrow \infty$  y cuando  $kp > d$ , de hecho las funciones en  $\mathcal{W}^{k,p}(D)$  no sólo tendrán representantes continuos en todo caso, sino que en muchos otros además tendrán también cierto grado de regularidad, que se podrá obtener sin más que aplicar estos resultados de embebimiento a las derivadas de estas funciones. Por ejemplo, se comprueba fácilmente que

$$\mathcal{W}^{k,p}(D) \hookrightarrow \mathcal{C}^l(\bar{D}), \quad \text{si } k - l > \frac{d}{p}.$$

### Trazas

Como hemos visto, las funciones de los espacios de Sobolev definidos sólo tienen valores unívocos casi en todo punto del dominio  $D$ , es decir salvo en conjuntos de medida nula. Esto podría provocar graves problemas a la hora de determinar sus posibles valores en la frontera del dominio, que de hecho se trata de otro conjunto de medida nula por sí mismo. No obstante, gracias al concepto de *traza* de una función de un espacio de Sobolev podemos dar valores a dichas funciones en la frontera que coincidirán con los que tome cualquier otra función perteneciente a dicho espacio, que además resulte continua en  $\overline{D}$  (consultar p. ej. [4]).

**Teorema A.4.14** *Si asumimos que  $D$  es un dominio lipschitziano de  $\mathbb{R}^d$  y que  $1 \leq p < \infty$ , entonces existe un operador lineal y continuo  $Tr : \mathcal{W}^{1,p}(D) \longrightarrow \mathcal{L}^p(\partial D)$  con las siguientes propiedades:*

- a)  $Tr(v) = v|_{\partial D}$  si  $v \in \mathcal{W}^{1,p}(D) \cap \mathcal{C}^0(\overline{D})$
- b)  $\|Tr(v)\|_{\mathcal{L}^p(\partial D)} \leq C \|v\|_{\mathcal{W}^{1,p}(D)}$ ,  $\forall v \in \mathcal{W}^{1,p}(D)$  para cierta constante positiva  $C$ .
- c) El operador  $Tr : \mathcal{W}^{1,p}(D) \longrightarrow \mathcal{L}^p(\partial D)$  es compacto, en el sentido de que para cualquier sucesión acotada  $\{v_n\}$  en  $\mathcal{W}^{1,p}(D)$ , existirá una subsucesión  $\{v_{n'}\} \subset \{v_n\}$  de manera que la sucesión  $\{Tr(v_{n'})\}$  será convergente en  $\mathcal{L}^p(\partial D)$ .

Este interesante y necesario operador se suele denominar el *operador traza* y a  $Tr(v)$  se le suele llamar el valor generalizado en la frontera de  $v$ . Es bastante evidente que este operador no va a resultar ni inyectivo, ni sobreyectivo; de hecho se suele denotar

$$\mathcal{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\partial D) \equiv Tr(\mathcal{W}^{1,p}(D)) \subset \mathcal{L}^p(\partial D)$$

al rango de dicho operador dentro de  $\mathcal{L}^p(\partial D)$ , ya que resulta ser un espacio de Sobolev de orden positivo sobre  $\partial D$ , pero no entero sino fraccionario, aunque no entraremos a tratar este tipo de espacios en la presente memoria.

No obstante, cuando se estudien algunos problemas de contorno para ecuaciones en derivadas parciales (E.D.P.'s), necesitaremos también ser capaces de imponer adecuadamente ciertas condiciones de frontera esenciales en nuestras formulaciones, por lo que necesitaremos usar las trazas de funciones de  $\mathcal{H}^1(D)$  y/o  $\mathcal{H}^2(D)$  incluso (en el caso de problemas diferenciales de mayor orden) volviendo a aparecer de forma natural los llamados espacios de Sobolev fraccionarios sobre  $\partial D$ , como por ejemplo  $\mathcal{H}^{1/2}(\partial D) \equiv Tr(\mathcal{H}^1(D))$ .

Claramente, el teorema anterior A.4.14 resultará suficiente en el caso de problemas diferenciales de segundo orden, donde sólo se necesiten condiciones de frontera esenciales para valores de la función. Pero en el caso de tratar con problemas diferenciales de orden superior se necesitará usar las trazas de las derivadas parciales en la frontera.

El siguiente teorema, que puede consultarse en [4] y en [32], establece el hecho de que para funciones de ciertos espacios de Sobolev será posible definir su derivada normal generalizada como una verdadera extensión de la derivada normal clásica (ver definición A.10) que ya se tiene bien definida para funciones suficientemente regulares.

**Teorema A.4.15** *Supongamos que ahora  $D$  es un conjunto abierto y acotado con frontera  $\Gamma \equiv \partial D$ , de clase  $\mathcal{C}^{k,1}$  (ver definición A.4.3); asumamos también que  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $s - 1/p > 1$  y que  $k \geq s - 1$ . Entonces, se podrán definir sendas aplicaciones lineales y sobreyectivas  $\Upsilon_0 : \mathcal{W}^{s,p}(D) \longrightarrow \mathcal{W}^{s-1/p,p}(\Gamma)$  y  $\Upsilon_1 : \mathcal{W}^{s,p}(D) \longrightarrow \mathcal{W}^{s-1-1/p,p}(\Gamma)$  tales que  $\Upsilon_0(v) = v|_\Gamma$  y  $\Upsilon_1(v) = \frac{\partial v}{\partial n}|_\Gamma$  siempre que  $v \in \mathcal{W}^{s,p}(D) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D})$ .*

#### A.4.1. Otras normas equivalentes en $\mathcal{H}^{r+1}(D)$

**Definición A.4.16** *Dos normas  $\|\cdot\|$  y  $\|\cdot\|$  sobre el espacio vectorial  $\mathcal{V}$  se dicen equivalentes si existen ciertos números positivos,  $\alpha$  y  $\beta$ , tales que se verifica*

$$\alpha \|v\| \leq \|\cdot\| \leq \beta \|v\|, \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (\text{A.14})$$

**Proposición A.4.17** *Si suponemos que  $E$  es un conjunto finito de puntos de  $D \subset \mathbb{R}^2$  que contiene a su vez al menos otro subconjunto de puntos  $\mathbb{P}_r$ -unisolvante, podremos asegurar que la expresión*

$$[[v]]_{E,r} = \left( \sum_{\mathbf{a} \in E} v(\mathbf{a})^2 + |v|_{r+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.15})$$

*es una norma sobre  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  equivalente a la norma usual  $\|\cdot\|_{r+1,D}$ , definida en este espacio de Sobolev.*

**Demostración.** Para demostrar que la expresión (A.15) es una norma bastaría con comprobar previamente que proviene del siguiente producto escalar

$$[[u, v]]_{E,r} := \sum_{\mathbf{a} \in E} u(\mathbf{a}) v(\mathbf{a}) + (u, v)_{r+1}$$

de manera que se cumplen todos y cada uno de los requerimientos para ello:

- $[[u, v]]_{E,r} = [[v, u]]_{E,r}$ ,  $\forall u, v \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$  (de forma evidente).
- $[[u + w, v]]_{E,r} = [[u, v]]_{E,r} + [[w, v]]_{E,r}$ ,  $\forall u, v, w \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$ , por la propiedad distributiva del producto de números reales respecto de la suma y por ser de hecho  $(\cdot, \cdot)_{r+1}$  una seminorma,

$$\begin{aligned}
[[u + v, w]]_{E,r} &:= \sum_{\mathbf{a} \in E} (u(\mathbf{a}) + v(\mathbf{a})) w(\mathbf{a}) + (u + v, w)_{r+1} \\
&= \sum_{\mathbf{a} \in E} (u(\mathbf{a}) w(\mathbf{a}) + v(\mathbf{a}) w(\mathbf{a})) + (u, w)_{r+1} + (v, w)_{r+1} \\
&= \sum_{\mathbf{a} \in E} u(\mathbf{a}) w(\mathbf{a}) + (u, w)_{r+1} \\
&\quad + \sum_{\mathbf{a} \in E} v(\mathbf{a}) w(\mathbf{a}) + (v, w)_{r+1} \\
&= [[u, w]]_{E,r} + [[v, w]]_{E,r}
\end{aligned}$$

- $[[\lambda u, v]]_{E,r} = \lambda [[u, v]]_{E,r}$ ,  $\forall u, v \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , también de forma trivial, por las mismas razones que en el caso anterior

$$\begin{aligned}
[[\lambda u, v]]_{E,r} &= \sum_{\mathbf{a} \in E} \lambda u(\mathbf{a}) v(\mathbf{a}) + (\lambda u, v)_{r+1} \\
&= \lambda \sum_{\mathbf{a} \in E} u(\mathbf{a}) v(\mathbf{a}) + \lambda (u, v)_{r+1} \\
&= \lambda \left( \sum_{\mathbf{a} \in E} u(\mathbf{a}) v(\mathbf{a}) + (u, v)_{r+1} \right) \\
&= \lambda [[u, v]]_{E,r}
\end{aligned}$$

- $0 \leq [[u, u]]_{E,r} \equiv [[u]]_{E,r}$ ,  $\forall u \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$  (de forma evidente), con  $[[u, u]]_{E,r} = 0$  sí y sólo si, tanto  $|u|_{r+1} = 0$  como  $u(\mathbf{a}) = 0$ ,  $\forall \mathbf{a} \in E$ ; y ya que la anulación de la seminorma de orden  $r + 1$  sólo se puede dar para polinomios de grado no superior a  $r$ , al contener  $E$  un subconjunto  $\mathbb{P}_r$ -unisolvante y anularse  $u(\mathbf{a})$ ,  $\forall \mathbf{a} \in E$ , se deduce que la única posibilidad sería que  $u \equiv 0 \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$ .
- Respecto a la equivalencia entre esta norma y la usual del espacio  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ , volveremos a emplear la inyección continua de este espacio en  $\mathcal{C}^0(D)$  (ver la demostración de la proposición A.4.19).

■

**Proposición A.4.18** *Ahora las condiciones (1.2.2) y (1.3.12) también nos permiten asegurar respectivamente que, tanto*

$$[[v]] \equiv [[v]]_{D^s, \tau} = \left( \langle \rho^s(v) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |v|_m^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

como (para  $s$  suficientemente grande)

$$[[v]]_{A_s} = \left( \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2 + |v|_{r+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

son normas sobre  $\mathcal{S}_{n(r)}^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T})$  equivalentes a  $\|\cdot\|_{r+1, D}$ , la inducida por la usual en el espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ .

**Demostración.** Bastará con comprobar (como hicimos en el resultado anterior) que ambas también provienen de sendos productos escalares; o bien que, efectivamente, se verifican todas las condiciones que se le exigen a una aplicación ( $[[\cdot]] \equiv [[\cdot]]_{D^s, \tau}$  o  $[[\cdot]] \equiv [[\cdot]]_{A_s}$ )  $[[\cdot]] : \mathcal{H}^{r+1}(D) \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \equiv [0, +\infty)$  para que sea una norma en  $\mathcal{S}_{n(r)}^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T})$ ; es decir

- $[[v]] > 0$ ,  $\forall v \in \mathcal{S}_{n(r)}^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T}) / v \not\equiv 0$ , ya que de suponer  $[[v]]_{D^s, \tau} = 0$ , llegaríamos a que  $\langle \rho^s(v) \rangle_k^2 = 0$  (o bien  $v(\mathbf{a}_i^s) = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, \Lambda$ ) y que al menos  $|v|_{r+1} = 0$ , ya que por lo menos  $\tau_{r+1} \neq 0$ . Pero la anulación de todas estas seminormas (en el caso más desfavorable de que  $\tau_m = 0$ ,  $\forall m = 1, \dots, r$ , con  $\tau_{m+1} > 0$ ) implicaría que  $v$  tendría que ser un polinomio de grado no superior a  $m$ ; además, el hecho de que la norma euclídea se anulase también implicaría que

$$\langle \rho^s(v) \rangle_k = 0 \iff \rho^s(v) \equiv 0 \in \mathbb{R}^k$$

y esto a su vez, gracias a (1.2.2) conllevaría que  $v \equiv 0$ . Y en el caso de  $[[v]]_{A_s} = 0$ , al tratarse  $A_s$  de un conjunto  $\mathbb{P}_r$ -unisolvante (para  $s$  suficientemente grande) también llegaríamos a la misma conclusión.

- $[[\lambda v]] = |\lambda| [[v]]$ ,  $\forall v \in \mathcal{S}_{n(r)}^{r, r + [\frac{r}{2}]}(D, \mathcal{T})$  y  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ; que se obtiene de forma trivial, ya que el operador evaluación  $\rho^s(\cdot)$  es lineal y las seminormas



$|\cdot|_m, \forall m = 1, \dots, r+1$  también cumplen trivialmente esta propiedad

$$\begin{aligned} [[\lambda v]]_{D^s, \tau} &= \left( \langle \rho^s(\lambda v) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |\lambda v|_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \lambda^2 \langle \rho^s(v) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |\lambda|^2 |v|_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| \left( \langle \rho^s(v) \rangle_k^2 + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m |v|_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| [[v]]_{D^s, \tau} \end{aligned}$$

análogamente

$$\begin{aligned} [[\lambda v]]_{A_s} &= \left( \sum_{i=1}^{\Lambda} (\lambda v(\mathbf{a}_i^s))^2 + |\lambda v|_{r+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \lambda^2 \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2 + \lambda^2 |v|_{r+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| \left( \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2 + |v|_{r+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| [[v]]_{A_s} \end{aligned}$$

- $[[u+v]] \leq [[u]] + [[v]], \forall u, v \in \mathcal{S}_{n(r)}^{r, r+\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(D, \mathcal{T})$ , que no es más que la conocida como desigualdad triangular, que se obtiene fácilmente de la también conocida desigualdad de Cauchy-Schwarz que verifica cualquier producto o semiproducto escalar (como se ha visto anteriormente en A.1.2); con lo cual bastará con comprobar que ambas aspirantes a normas provienen de sendos productos escalares (lo cual es evidente) ya que  $[[v]]_{D^s, \tau}$  provendrá del producto escalar

$$[[u, v]]_{D^s, \tau} = \langle \rho^s(u), \rho^s(v) \rangle_k + \sum_{m=1}^{r+1} \tau_m (u, v)_m$$

mientras que  $[[v]]_{A_s}$  provendría del producto escalar siguiente

$$[[u, v]]_{A_s} = \sum_{i=1}^{\Lambda} u(\mathbf{a}_i^s) v(\mathbf{a}_i^s) + (u, v)_{r+1}$$

verificándose fácilmente en ambos casos (como ya hicimos anteriormente) todas las propiedades características de bilinealidad, no degeneración y positividad.

En cuanto a la equivalencia entre cualquiera de estas normas y la usual en el espacio  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  ver el siguiente lema, donde se demuestra para el caso  $[[v]]^s = \left(\sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2 + |v|_{r+1}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ , siendo el otro caso totalmente análogo. ■

**Lema A.4.19** *Supongamos que se verifica (2.3.5) y sea  $A^s = \{\mathbf{a}_1^s, \dots, \mathbf{a}_\Lambda^s\} \subset D^s$  cualquier subconjunto verificando (1.3.12). Entonces, existe  $s^* \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $s \geq s^*$  la aplicación  $[[\cdot]]^s$  definida por*

$$[[v]]^s = \left( \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2 + |v|_{r+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es una norma uniformemente equivalente, respecto a  $s$ , a la norma habitual en el espacio  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ .

**Demostración.** Sea  $s_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $A^s$  es un subconjunto  $\mathbb{P}_r$ -unisolvente de  $D$  para todo  $s \geq s_0$ . Además, como se comprueba en el Lema A.4.18,  $[[\cdot]]^s$  es una norma sobre  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  para todo  $s \geq s_0$ . Gracias a la inyección continua de  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  en  $\mathcal{C}^0(\overline{D})$  (consultar p. ej. el corolario IX.13 y las extensiones a pie de página en [11], con  $m = r + 1$ ,  $N = 2$ ,  $p = 2$ ) existe  $C_0 > 0$  tal que

$$\|v\|_{\mathcal{C}^0(\overline{D})} \equiv \max_{\mathbf{x} \in \overline{D}} |v(\mathbf{x})| \leq C_0 \|v\|, \quad \forall v \in \mathcal{H}^{r+1}(D) \quad (\text{A.16})$$

En particular,  $|v(\mathbf{a}_i^s)| \leq C_0 \|v\|$  para todo  $i = 1, \dots, \Lambda$ ;  $s \in \mathbb{N}$  y  $v \in \mathcal{H}^{r+1}(D)$ . Por otro lado, existirá  $C_1 > 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2 + |v|_{r+1}^2 \leq C_1^2 \|v\|^2,$$

y como consecuencia,

$$[[v]]^s \leq C_1 \|v\|, \quad \text{para todo } s \geq s_0 \text{ y } v \in \mathcal{H}^{r+1}(D) \quad (\text{A.17})$$

Por otro lado, para cada  $s \in \mathbb{N}$  se verifica de forma trivial que

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^0)^2 \leq \sum_{i=1}^{\Lambda} (v(\mathbf{a}_i^0) - v(\mathbf{a}_i^s))^2 + \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2,$$

(ya que  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  siempre se tiene  $\frac{1}{2}a^2 \leq (a - b)^2 + b^2$ ) y por el teorema de Hölder de inmersión continua del espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  en  $\mathcal{C}^0(\overline{D})$ ,

y de la continuidad de cualquier  $v \in \mathcal{H}^{r+1}(D) \subset \mathcal{C}^0(\overline{D})$ , obtenemos que (empleando a su vez (A.16))

$$|v(\mathbf{a}_i^0) - v(\mathbf{a}_i^s)| \leq \|v\|_{\mathcal{C}^0(\overline{D})} \langle \mathbf{a}_i^0 - \mathbf{a}_i^s \rangle_2 \leq C_0 \|v\| \langle \mathbf{a}_i^0 - \mathbf{a}_i^s \rangle_2$$

y, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^0)^2 + |v|_{r+1}^2 &\leq \sum_{i=1}^{\Lambda} (v(\mathbf{a}_i^0) - v(\mathbf{a}_i^s))^2 + \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2 + |v|_{r+1}^2 \\ &\leq C_0^2 \|v\|^2 \sum_{i=1}^{\Lambda} \langle \mathbf{a}_i^0 - \mathbf{a}_i^s \rangle_2^2 + \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2 + |v|_{r+1}^2, \quad \forall s \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Por otro lado, ya que  $A^0$  es un conjunto  $\mathbb{P}_r$ -unisolvante, se deduce que la aplicación  $v \mapsto \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^0)^2 + |v|_{r+1}^2\right)^{\frac{1}{2}}$  es una norma sobre  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  que además es equivalente a  $\|\cdot\|$  (ver la Proposition I-2.2 de [2]). Por tanto, existe  $C_2 > 0$  tal que  $\forall s \in \mathbb{N}^*$

$$C_2 \|v\|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^0)^2 + |v|_{r+1}^2 \leq C_0^2 \|v\|^2 \sum_{i=1}^{\Lambda} \langle \mathbf{a}_i^0 - \mathbf{a}_i^s \rangle_2^2 + \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2 + |v|_{r+1}^2.$$

Además, también tendremos

$$C_2 \|v\|^2 \leq \Lambda \frac{C^2}{s^2} C_0^2 \|v\|^2 + \sum_{i=1}^{\Lambda} v(\mathbf{a}_i^s)^2 + |v|_{r+1}^2$$

para todo  $s \geq s_1$ . Sea  $s_2 \geq s_1$  tal que  $\Lambda \frac{C^2}{s_2^2} C_0^2 < C_2$ ; entonces  $C_3 = \left(C_2 - \Lambda \frac{C^2}{s_2^2} C_0^2\right)^{\frac{1}{2}}$  satisfará

$$C_3^2 \|v\|^2 = \left(C_2 - \Lambda \frac{C^2}{s^2} C_0^2\right) \|v\|^2 \leq ([v]^s)^2, \quad \forall s \geq s_2,$$

y como consecuencia,  $C_3 \|v\| \leq [v]^s$  para todo  $s \geq s_2$ . Finalmente, bastaría con tomar  $s^* = \max\{s_0, s_2\}$ . ■

Otras equivalencias entre normas y seminormas de algunos espacios de Sobolev concretos se obtienen de desigualdades interesantes, como la conocida como desigualdad de Poincaré (consultar [4] o [11]) o bien de estimaciones concretas de la regularidad de la solución débil de un problema de contorno determinado (consultar p.ej. [4] o [25]). Citemos por ejemplo, las siguientes

**Proposición A.4.20 :**

- (desigualdad de Poincaré)  $\|u\|_{\mathcal{L}^p(D)} \leq C \|\nabla u\|_{\mathcal{L}^p(D)}$ ,  $\forall u \in \mathcal{W}_0^{1,p}(D)$ , con  $1 \leq p < \infty$  y  $D \subset \mathbb{R}^d$  un abierto acotado, da lugar a la equivalencia entre las normas  $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^{1,p}(D)}$  y  $\|\nabla(\cdot)\|_{\mathcal{L}^p(D)} \equiv |\cdot|_{1,D}$ .
- $\|\cdot\|_{2,D} \equiv \|\cdot\|_{\mathcal{H}^2(D)} \leq C \|\Delta(\cdot)\|_{\mathcal{L}^2(D)} \equiv |\Delta(\cdot)|_{0,D}$ ,  $\forall u \in \mathcal{H}^2(D) \cap \mathcal{H}_0^1(D)$ , con  $D \subset \mathbb{R}^d$  regular o bien convexo, da lugar a la equivalencia entre las normas  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2(D)}$  y  $\|\Delta(\cdot)\|_{\mathcal{L}^2(D)}$ .
- Más generalmente, también se tiene la equivalencia entre las seminormas  $|\cdot|_{k,D}$  y la norma  $\|\cdot\|_{k,D}$  en los espacios de Sobolev  $\mathcal{H}_0^k(D)$ .
- Por otro lado, si definimos ahora las seminormas sobre los espacios de Sobolev  $\mathcal{W}^{k,p}(D)$ , con  $p < \infty$ ,

$$|v|_{k,p,D} := \left( \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha v|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}$$

puede comprobarse también que si  $D$  es conexo y  $|v|_{k,p,D} = 0$ , entonces  $v$  debe tratarse de un polinomio de grado inferior o igual a  $k - 1$ .

Finalmente, reproducimos aquí un teorema que puede encontrarse, así como su demostración, en [4] (Teorema 7.3.12) y que nos proporciona otro resultado general de gran utilidad a la hora de determinar ciertas equivalencias entre normas de los espacios de Sobolev  $\mathcal{W}^{k,p}(D)$

**Teorema A.4.21** *Sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  un dominio lipschitziano conexo y supongamos que  $f_j : \mathcal{W}^{k,p}(D) \rightarrow \mathbb{R}$  para  $1 \leq j \leq J \in \mathbb{N}$  (con  $k \geq 1$  y  $1 \leq p < \infty$ ) son seminormas sobre este espacio, satisfaciendo además las siguientes hipótesis*

(H1)  $0 \leq f_j(v) \leq c \|v\|_{k,p,D}$ ,  $\forall v \in \mathcal{W}^{k,p}(D)$  y  $1 \leq j \leq J$ .

(H2) *Si  $v$  fuera un polinomio (ver sección posterior A.5) de grado inferior o igual a  $k - 1$  con  $f_j(v) = 0$  para  $1 \leq j \leq J$ , entonces la única posibilidad sería que  $v \equiv 0$ .*

(H2') *Si  $|v|_{k,p,D} = 0$  y  $f_j(v) = 0$ , para  $1 \leq j \leq J$ , entonces  $v \equiv 0$ .*

**Teorema A.4.22** *Entonces, bajo la hipótesis (H1-2) o bien si se verifican (H1-2') las cantidades*

$$\|v\| := |v|_{k,p,D} + \sum_{j=1}^J f_j(v)$$

o incluso

$$\|v\| := \left( |v|_{k,p,D}^p + \sum_{j=1}^J f_j(v)^p \right)^{1/p}$$

definirán sendas normas sobre los espacios  $\mathcal{W}^{k,p}(D)$ , equivalentes a la norma usual en dichos espacios,  $\|v\|_{k,p,D}$ .

De este teorema genérico se podrían obtener infinidad de resultados que nos proporcionarían normas equivalentes a la usual en  $\mathcal{W}^{k,p}(D)$ . Enunciemos a modo de ejemplo alguno de ellos

**Corolario A.4.23** *Supongamos  $D \subset \mathbb{R}^d$  un dominio lipschitziano y que  $\Gamma_0 \subset \partial D$  es un subconjunto no vacío (con  $\text{meas}_{d-1}(\Gamma_0) > 0$ ) de la frontera de  $D$ . Entonces, aplicando el resultado anterior con  $k = 1$ ,  $p = 2$ ,  $J = 1$  con  $f_1(v) := \int_{\Gamma_0} |v| d\gamma$ , llegaríamos a la existencia de una constante  $c > 0$  (dependiendo tan sólo del dominio  $D$ ) tal que*

$$\|v\|_{1,D} \leq c \left( |v|_{1,D} + \|v\|_{\mathcal{L}^1(\Gamma_0)} \right), \quad \forall v \in \mathcal{H}^1$$

y la conocida desigualdad de Poincaré en  $\mathcal{H}_0^1$  no sería más que otro caso particular de este resultado, cuando  $\Gamma_0 = \Gamma \equiv \partial D$ .

**Corolario A.4.24** *Otro resultado interesante en el caso del espacio  $\mathcal{H}_0^2$ , o más genéricamente*

$$\mathcal{H}_{\Gamma_0}^2 \equiv \left\{ v \in \mathcal{H}^2 / v|_{\Gamma_0} = 0 = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_0} \text{ c.t.p.} \right\} \subset \mathcal{H}^2$$

siempre que, como antes,  $D \subset \mathbb{R}^d$  sea un dominio lipschitziano, con  $\Gamma_0 \subset \partial D$  verificando  $\text{meas}_{d-1}(\Gamma_0) > 0$ , es que se verifica

$$\|v\|_{2,D} \leq c |v|_{2,D}, \quad \forall v \in \mathcal{H}_{\Gamma_0}^2$$

lo cual implica que la seminorma  $|v|_{2,D}$  sea realmente una verdadera norma en  $\mathcal{H}_{\Gamma_0}^2 \supseteq \mathcal{H}_0^2$  que resultará equivalente a la que heredan estos espacios de la usual en  $\mathcal{H}^2$ .

**Corolario A.4.25** *Otras desigualdades que darían lugar a normas equivalentes a las usuales en los espacios de Sobolev correspondientes serían las siguientes, bajo las hipótesis adecuadas sobre el dominio  $D \subset \mathbb{R}^d$  y sobre los subconjuntos  $D_0 \subset D$  con  $\text{meas}_d(D_0) > 0$  o bien sobre  $\Gamma_0 \subset \Gamma \equiv \partial D$  con  $\text{meas}_{d-1}(\Gamma_0) > 0$*

- $\|v\|_{1,p,D} \leq c \left( |v|_{1,p,D} + \left| \int_{D_0} v d\mathbf{x} \right| \right), \quad \forall v \in \mathcal{W}^{1,p}(D)$
- $\|v\|_{1,p,D} \leq c \left( |v|_{1,p,D} + \left| \int_{\Gamma_0} v d\gamma \right| \right), \quad \forall v \in \mathcal{W}^{1,p}(D)$
- $\|v\|_{1,p,D} \leq c |v|_{1,p,D}, \quad \forall v \in \mathcal{W}_0^{1,p}(D)$

## A.5. Espacios de polinomios

En lo que sigue denotaremos por  $\mathbb{P}_r[x]$ ,  $\mathbb{P}_r[x, y]$ ,  $\mathbb{P}_r[x, y, z]$  a los espacios vectoriales de los polinomios de grado menor o igual que  $r \geq 0$  en una, dos o tres variables de espacio, contando el grado en cada monomio, es decir,

- a)  $\mathbb{P}_r[x] = \text{gen}(1, x, x^2, \dots, x^r)$  en una dimensión.
- b)  $\mathbb{P}_0[x, y] = \text{gen}(1)$ ,  $\mathbb{P}_1[x, y] = \text{gen}(1, x, y)$ ,  $\mathbb{P}_2[x, y] = \text{gen}(1, x, y, x^2, xy, y^2)$ ,  
 $\mathbb{P}_3[x, y] = \text{gen}(1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3)$ , ... en dos dimensiones.
- c) Y en tres dimensiones  $\mathbb{P}_0[x, y, z] = \text{gen}(1)$ ,  $\mathbb{P}_1[x, y, z] = \text{gen}(1, x, y, z)$ ,  
 $\mathbb{P}_2[x, y, z] = \text{gen}(1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz)$ ,  
 $\mathbb{P}_3[x, y, z] = \text{gen}(1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz, x^3, y^3, z^3, x^2y, x^2z, xy^2, y^2z, xz^2, yz^2, xyz)$ , ... .

En general  $\dim \mathbb{P}_r[x_1, \dots, x_d] = \frac{(d+r)!}{d!r!} \equiv \Lambda$ , en  $d$  variables.

Es bien conocido el papel que han jugado los polinomios en una y varias variables en la teoría de aproximación y el Análisis Numérico en general. En cuanto a la interpolación se refiere, el caso unidimensional estuvo muy bien estudiado y resuelto desde el principio, pero no cabe duda de que el caso multidimensional ha resultado mucho más complejo y todavía sigue siendo objeto de estudio en algunos casos.

**Proposición A.5.1** *Un importante resultado afirma que, siempre que  $K \subset \mathbb{R}^d$  sea un subconjunto compacto del espacio euclídeo  $d$ -dimensional, el álgebra de todos los polinomios (sean del grado que sea) definidos como funciones de  $K \rightarrow \mathbb{R}$  en las variables  $x_1, \dots, x_d$ , y que denotaremos  $\mathcal{P}(K, \mathbb{R})$ , es un espacio denso en  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}) \equiv \mathcal{C}(K)$ , el espacio de funciones reales continuas definidas en dicho conjunto compacto  $K$ .*

**Observación A.5.2** *La demostración en el caso unidimensional de este resultado fué dada originariamente por Weierstrass en 1885, pero otra mucho más constructiva usando métodos elementales y los famosos polinomios que ahora llevan su nombre también fué dada por el matemático ruso Sergei Bernstein en 1911. No obstante, el caso de dimensión cualquiera se puede ver como caso particular de otro resultado mucho más abstracto que se denomina Teorema de Stone-Weierstrass, que no hace uso de las propiedades de los polinomios en sí sino más bien del concepto de sub-álgebra unitaria que separa puntos dentro de  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$  (ver p. ej. el Teorema 3.1.2 en [4]).*

## A.6. Conjuntos $\mathbb{P}_r$ -unisolventes

**Definición A.6.1** Se dirá que un conjunto de puntos  $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\Lambda\} \subset \mathbb{R}^d$  se trata de un conjunto  $\mathbb{P}_r$ -unisolvente, si cualesquiera que sean los datos  $Z = \{z_1, \dots, z_\Lambda\} \subset \mathbb{R}$ , existe un único polinomio  $p \in \mathbb{P}_r[x_1, \dots, x_d]$  verificando que

$$p(\mathbf{a}_j) = z_j, \quad \forall j = 1, \dots, \Lambda \equiv \frac{(d+r)!}{d!r!}.$$

**Lema A.6.2** Sea  $A^0 = \{\mathbf{a}_1^0, \mathbf{a}_2^0, \dots, \mathbf{a}_\Lambda^0\}$  un subconjunto  $\mathbb{P}_r$ -unisolvente de  $D \subset \mathbb{R}^2$  y supongamos también que

$$0 < d(s) := \sup_{\mathbf{x} \in D} \min_{\mathbf{a} \in D^s} \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle_2 = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow +\infty; \quad (\text{A.18})$$

entonces existe  $C > 0$  y  $s_1 \in \mathbb{N}^*$  tales que para todo  $s \geq s_1$  existen puntos  $\{\mathbf{a}_1^s, \dots, \mathbf{a}_\Lambda^s\} \subset D^s$  verificando

$$\langle \mathbf{a}_i^0 - \mathbf{a}_i^s \rangle_2 \leq \frac{C}{s}, \quad \forall i = 1, \dots, \Lambda, \quad \forall s \geq s_1. \quad (\text{A.19})$$

**Demostración.** Bastaría con tomar, para cada  $i = 1, \dots, \Lambda$  un punto  $\mathbf{a}_i^s \in D^s$  de manera que

$$\langle \mathbf{a}_i^0 - \mathbf{a}_i^s \rangle_2 = \min_{\mathbf{a} \in D^s} \langle \mathbf{a}_i^0 - \mathbf{a} \rangle_2 \equiv d(\mathbf{a}_i^0, D^s) \leq \sup_{\mathbf{x} \in D} d(\mathbf{x}, D^s) \equiv d(s).$$

A su vez, como  $d(s) = O\left(\frac{1}{s}\right)$  por (A.18), entonces existe  $C_1 > 0$  tal que  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{d(s)}{1/s} = C_1$ ; por lo que para cada  $\epsilon > 0$  dado, existirá  $s_1 \in \mathbb{N}^*$  de manera que para  $s \geq s_1$  se tendrá que  $\left|\frac{d(s)}{1/s} - C_1\right| < \epsilon$ , que equivale a  $\left|d(s) - \frac{C_1}{s}\right| < \frac{\epsilon}{s}$ ; o escrito de otra forma

$$\frac{C_1}{s} - \frac{\epsilon}{s} < d(s) < \frac{C_1}{s} + \frac{\epsilon}{s} = \frac{C_1 + \epsilon}{s}$$

con lo que bastará con tomar por ejemplo  $C \equiv C_1 + 1$  (asumiendo que  $\epsilon \leq 1$ ) para tener el resultado

$$\langle \mathbf{a}_i^0 - \mathbf{a}_i^s \rangle_2 \leq d(s) < \frac{C}{s}, \quad \text{para todo } s \geq s_1 \text{ y cualquier } i = 1, \dots, \Lambda. \quad (\text{A.20})$$

■

**Corolario A.6.3** *Nótese que este mismo resultado (A.20) también se podría haber obtenido igualmente para cualquier elemento  $\mathbf{x} \in D$  y  $\mathbf{x}^s \in D^s$  de manera que para todo  $s \geq s_1$  se tiene que*

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^s \rangle_2 = \min_{\mathbf{a} \in D^s} \langle \mathbf{x} - \mathbf{a} \rangle_2 \equiv d(\mathbf{x}, D^s) \leq \sup_{x \in D} d(\mathbf{x}, D^s) \equiv d(s) < \frac{C}{s};$$

o lo que es lo mismo  $s \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^s \rangle_2 < C$  para todo  $\mathbf{x} \in D$  y  $s$  suficientemente grande. Y esto también implica que  $k \equiv k(s) \nearrow +\infty$  para que  $\langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^s \rangle_2$  pueda ser tan pequeño como haga falta para mantener acotado el producto  $s \langle \mathbf{x} - \mathbf{x}^s \rangle_2$  a medida que  $s \rightarrow +\infty$ .

**Lema A.6.4** *Supongamos que  $A^s = \{\mathbf{a}_1^s, \dots, \mathbf{a}_\Lambda^s\} \subset D^s \subset \mathbb{R}^2$  es cualquier subconjunto verificando (A.19); entonces,  $\exists s_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $A^s$  es un subconjunto  $\mathbb{P}_r$ -unisolviente de  $D$  para todo  $s \geq s_0$ .*

**Demostración.** Para ello, definamos la siguiente función

$$F : \mathbb{R}^2 \times \Lambda \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\Lambda) \longmapsto \det \left( x^k y_{a_i}^l \right)_{\substack{1 \leq i \leq \Lambda \\ 0 \leq k+l \leq r}}$$

continua de forma obvia (ya que todas las operaciones son combinaciones lineales de productos de evaluaciones polinómicas, una vez elegida cierta ordenación de las funciones de base del espacio de polinomios

$$\mathbb{P}_r[x, y] = \text{gen} \{ x^k y^l / 0 \leq k + l \leq r \}$$

de manera que, para  $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_\Lambda) = (\mathbf{a}_1^0, \dots, \mathbf{a}_\Lambda^0)$  se tiene  $F(\mathbf{a}_1^0, \dots, \mathbf{a}_\Lambda^0) \neq 0$  (por la  $\mathbb{P}_r$ -unisolvencia de dicho conjunto de puntos  $A^0$ ).

Así pues, bastará con aplicar la anunciada continuidad de esta función, para poder asegurar que ésta no se anulará al menos en un entorno suficientemente pequeño de dicho punto, y dado que en un espacio de dimensión finita todas las normas resultan equivalentes, dicho entorno se podría considerar a partir de la norma  $\max_{1 \leq i \leq \Lambda} \langle \mathbf{a}_i \rangle_2$  y obtendríamos el resultado de forma trivial, a partir de cierto  $s_0 \in \mathbb{N}$ ; de manera que  $A^s$  será también un subconjunto  $\mathbb{P}_r$ -unisolviente de  $D$  para todo  $s \geq s_0$ , ya que también se verificaría que  $F(\mathbf{a}_1^s, \dots, \mathbf{a}_\Lambda^s) \neq 0$ , (que equivale a la unisolvencia del correspondiente problema de interpolación en  $\mathbb{P}_r[x, y]$ , independientemente de los datos de Lagrange fijados en dichos puntos de  $\mathbb{R}^2$ ). ■



## A.7. Triangulación de un dominio

Sea  $D$  un dominio (subconjunto abierto, conexo, no vacío) acotado en  $\mathbb{R}^d$ , tal que su frontera  $\Gamma$  sea regular a trozos: formada por curvas ( $d = 2$ ) o superficies ( $d = 3$ ) regulares salvo un número finito de puntos ( $d = 2$ ) o curvas ( $d = 3$ ).

Se dice que  $D$  es *poliédrico* si es intersección de un número finito de semiespacios abiertos. Un semiespacio abierto (cerrado) es el conjunto de puntos  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{R}^d$  tales que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} > R \in \mathbb{R}$  (respectivamente  $\geq$ ) donde  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$  es un vector fijo. Se dice que  $\Gamma'$  es una cara de  $D$  si existe un único hiperplano  $H$  (una recta en  $\mathbb{R}^2$ , un plano en  $\mathbb{R}^3$ ) tal que  $\Gamma' = \Gamma \cap H$ . Se dice que  $K$  es un *poliedro* si es intersección de un número finito de semiespacios cerrados. Es fácil observar que  $D$  es poliédrico si su cierre  $\bar{D} := D \cup \Gamma$  es unión finita de poliedros.

**Definición A.7.1** *Se llama triangulación de un dominio poliédrico  $D$  a una descomposición en poliedros más simples  $D = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ , de forma que*

1. cada poliedro  $K$  tiene interior no vacío.
2. los interiores de dos poliedros distintos cualesquiera son disjuntos.
3. cada cara de un poliedro es o bien cara de otro poliedro o bien es parte de la frontera  $\Gamma$ .

Destaquemos que hemos llamado triangulación a la descomposición de un dominio poliédrico en poliedros más pequeños, por extensión del concepto cuando estos poliedros más pequeños son triángulos, pero también podemos elegir rectángulos en dimensión 2; cubos, tetraedros, prismas, ... en dimensión 3, etc.

No obstante, en el caso de triangulaciones usando exclusivamente triángulos en el plano  $\mathbb{R}^2$ , que es el caso considerado a lo largo de esta memoria, los dominios poliédricos son simplemente dominios poligonales (determinados por la intersección de semiplanos abiertos) y las situaciones no permitidas en la triangulación son las expuestas en la Figura A.1.

En este caso de triangulaciones  $\mathcal{T}$  de un dominio poligonal en el plano

$D \subset \mathbb{R}^2$ , si denotamos por

$V$  = número de vértices de la triangulación

$V_I$  = número de vértices interiores

$V_B$  = número de vértices en la frontera de  $D$

$N_T$  = número de triángulos en  $\mathcal{T}$

$E$  = número total de lados en  $\mathcal{T}$

$E_B$  = número de lados de  $\mathcal{T}$  en la frontera de  $D$

entonces, si  $\mathcal{T}$  se trata de una triangulación regular (satisfaciendo los requerimientos indicados en la definición A.7.1), el número de triángulos y de lados de la misma se puede ver (consultar p.ej. [52]) que satisface las siguientes relaciones

$$N_T = 2V - V_B - 2 = 2V_I + V_B - 2$$

$$E = 3V - V_B - 3 = 3V_I + 2V_B - 3$$

Por otro lado, en principio, las mejores triangulaciones de dominios en el plano serán aquellas que además de cumplir con los requerimientos indicados en la definición A.7.1, consisten en triángulos lo más equiláteros posible (en el sentido de que tengan ángulos no muy agudos entre sus triángulos). De hecho, a lo largo de esta memoria a menudo nos restringiremos además al caso de triangulaciones uniformes de tipo  $\Delta^1$  (consultar la Definición 3.1).

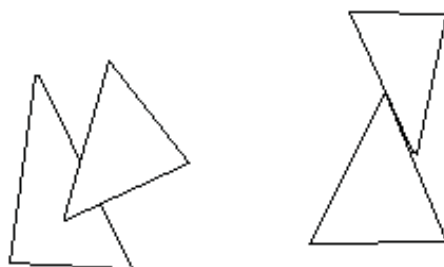


Figura A.1: Situaciones no permitidas.

Se llama  $h_K$  *diámetro* de un poliedro  $K$  a la distancia máxima entre dos puntos cualesquiera del poliedro y *diámetro de la triangulación* al máximo de los diámetros de los poliedros que la forman  $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ .

Además, en el caso concreto de triangulaciones de un dominio bidimensional usando triángulos, serán muy útiles las denominadas coordenadas baricéntricas que se definen como sigue

**Definición A.7.2** Si  $T \equiv K$  es un triángulo en  $\mathbb{R}^2$  con vértices  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ , entonces las coordenadas baricéntricas del punto  $\mathbf{v}$  respecto a  $T$  se definen como los únicos números reales  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  satisfaciendo

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3.$$

**Observación A.7.3** Si denotamos las coordenadas de cada uno de los puntos  $\mathbf{a}_i \equiv (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  y las de  $\mathbf{v} \equiv (x, y)$ , entonces de la definición anterior se tendrá que

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \end{array} \right.$$

de manera que se trataría de un simple sistema lineal de ecuaciones  $3 \times 3$ , cuya solución resulta ser

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(\mathbf{v}) = \frac{1}{2\text{area}(T)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{(x_2 y_3 - y_2 x_3) - x(y_3 - y_2) + y(x_3 - x_2)}{x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - (x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2)} \\ \lambda_2(\mathbf{v}) = \frac{1}{2\text{area}(T)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \end{vmatrix} = \frac{(x_1 y_3 - y_1 x_3) - x(y_3 - y_1) + y(x_3 - x_1)}{x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - (x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2)} \\ \lambda_3(\mathbf{v}) = \frac{1}{2\text{area}(T)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2) - x(y_2 - y_1) + y(x_2 - x_1)}{x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - (x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2)} \end{array} \right.$$

donde, a su vez

$$\text{area}(T) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

quedando claro que, en todo caso, las expresiones que adquieren las coordenadas baricéntricas  $\{\lambda_i(\mathbf{v})\}_{i=1,2,3}$  en función de las componentes de  $\mathbf{v} \equiv (x, y)$ , son de tipo lineal y por lo tanto pertenecen al espacio  $\mathbb{P}_1[x, y]$ .

**Observación A.7.4** *Nótese que, además, estas coordenadas baricéntricas toman un valor unitario en un vértice concreto del triángulo, anulándose en los otros dos vértices. De manera que cada una de las 7 regiones en las que quedaría dividido el plano mediante las rectas que determinan los lados del triángulo  $T$  (tanto la interior acotada como las otras 6 no acotadas) podría ser identificada perfectamente a partir de los signos de las coordenadas baricéntricas, ya que la correspondiente expresión polinómica de grado uno se anulará en los dos vértices opuestos a aquél en el que vale 1 y, por lo tanto, será de signo negativo al otro lado de dicha recta.*

## A.8. Bases de Bernstein

Una vez fijado un triángulo  $T$ , para cada  $\mathbf{v} \equiv (x, y) \in \mathbb{R}^2$  podemos calcular sus coordenadas baricéntricas  $\{\lambda_i(\mathbf{v})\}_{i=1,2,3}$  y definir lo que sigue

**Definición A.8.1** *Los denominados polinomios de Bernstein de grado  $r$  relativos al triángulo  $T$  son expresiones polinómicas del tipo*

$$B_{i,j,k}^r(\mathbf{v}) := \frac{r!}{i!j!k!} \lambda_1(\mathbf{v})^i \lambda_2(\mathbf{v})^j \lambda_3(\mathbf{v})^k$$

(con  $i + j + k = r$ ), definiéndose éstos por cero en el caso de que alguno de los subíndices fuese negativo.

**Observación A.8.2** *Es fácil comprobar cómo estos polinomios de Bernstein  $B_{i,j,k}^r(\mathbf{v})$  verifican la denominada expansión trinomial*

$$\begin{aligned} 1 &= (\lambda_1(\mathbf{v}) + \lambda_2(\mathbf{v}) + \lambda_3(\mathbf{v}))^r \\ &= \sum_{i+j+k=r} \frac{r!}{i!j!k!} \lambda_1(\mathbf{v})^i \lambda_2(\mathbf{v})^j \lambda_3(\mathbf{v})^k = \sum_{i+j+k=r} B_{i,j,k}^r(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

de manera que constituyen una partición de la unidad; es decir,

$$\sum_{i+j+k=r} B_{i,j,k}^r(\mathbf{v}) = 1, \quad \text{para todo } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{A.21})$$

Además, se comprueba que  $0 \leq B_{i,j,k}^r(\mathbf{v}) \leq 1$  si  $\mathbf{v} \in T$  y que el conjunto de polinomios de Bernstein  $\{B_{i,j,k}^r(\mathbf{v})\}_{i+j+k=r}$  forman una base del espacio de polinomios  $\mathbb{P}_r[x, y]$  (consultar el Th. 2.4 en [41]).

**Observación A.8.3** También se puede demostrar sin mucho esfuerzo (consultar el Th. 2.5 en [41]) que cada una de estas funciones de base de Bernstein  $B_{i,j,k}^r(\mathbf{v})$  posee un único máximo absoluto situado precisamente en un punto perteneciente a la adherencia del triángulo  $T$  determinado por los vértices  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  y que se puede explicitar como indica la fórmula siguiente

$$\xi_{i,j,k} := \frac{1}{r} (i \mathbf{a}_1 + j \mathbf{a}_2 + k \mathbf{a}_3) \quad (\text{A.22})$$

y además constituyen una configuración de puntos unisolvente en el espacio de polinomios correspondiente

**Definición A.8.4** Así pues, fijado un triángulo  $T$  concreto del plano  $\mathbb{R}^2$ , cualquier polinomio  $p \in \mathbb{P}_r[x, y]$  podrá escribirse de forma unívoca a partir de la base  $\{B_{i,j,k}^r(\mathbf{v})\}_{i+j+k=r}$  en la forma

$$p = \sum_{i+j+k=r} c_{i,j,k} B_{i,j,k}^r(\mathbf{v}) \quad (\text{A.23})$$

y esta será la denominada B-forma del polinomio  $p$  relativa al triángulo  $T$ . A su vez, llamaremos B-coeficientes a los escalares  $c_{i,j,k}$  que aparecen en dicha combinación lineal y puntos de dominio al conjunto de los puntos (A.22) asociados a todas las funciones de base, que notaremos

$$\mathcal{D}_T^{(r)} \equiv \left\{ \xi_{i,j,k} := \frac{1}{r} (i \mathbf{a}_1 + j \mathbf{a}_2 + k \mathbf{a}_3) \mid i + j + k = r \right\}.$$

De esta manera, la expresión de cualquier polinomio  $p \in \mathbb{P}_r[x, y]$  en función de la base de Bernstein determinada por el triángulo  $T \subset \mathbb{R}^2$  se podría indicar gráficamente en un diagrama donde indicásemos el coeficiente correspondiente a cada una de las funciones de base  $B_{i,j,k}^r(\mathbf{v})$  justo encima del único punto de dominio asociado a esta función,  $\xi_{i,j,k}$  y así se suele hacer en la literatura al respecto (ver las Figuras A.4, A.5 o bien la Fig. 2.3 en [41] por ejemplo).

## A.9. Elemento finito de Powell-Sabin

El elemento finito de Powell-Sabin fué introducido en 1977 por M. J. D. Powell y M. A. Sabin en el artículo [48] con el objetivo de obtener algoritmos apropiados para poder dibujar en un ordenador las líneas de nivel de funciones de dos variables de una manera satisfactoria. Para ello se plantearon la posibilidad de obtener aproximaciones sobre un mallado a base de triángulos,

mediante funciones polinómicas a trozos que resultasen regulares globalmente, con derivadas continuas al menos de primer orden.

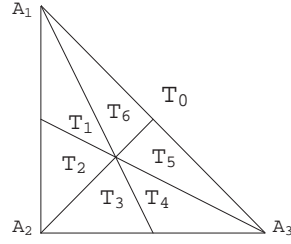
Ellos consideraron en un primer momento interpolaciones mediante splines bivariados de tipo cuadrático y estudiaron las distintas posibilidades de dividir un triángulo en cuatro, seis o doce subtriángulos, de manera que la función aproximante tuviera buenas propiedades de localización (sin que influya la forma que tenga en una pequeña región del espacio cuando nos encontremos suficientemente alejados de dicha zona); para ello optaron más bien por definir esta función de interpolación/aproximación, en cada uno de los subtriángulos, dependiendo tan sólo de los datos de los que se disponga en el perímetro de dicho subtriángulo.

Así pues, dichos autores se plantearon la cuestión de obtener, a partir de los valores de la función sin derivar y de sus derivadas parciales de primer orden en los nodos de cierta triangulación, una función cuadrática en cada uno de los subtriángulos en los que se dividiría cada triángulo de la partición, y de manera que globalmente resulte de clase  $\mathcal{C}^1$ ; llegando a la conclusión de que dicha construcción resulta posible, y que una de las opciones más favorables sería la de subdividir cada triángulo en seis subtriángulos, a partir de un punto situado en el interior del triángulo, y que podría ser el incentro o el baricentro del mismo (consultar la Definición 3.4 en la Parte I de esta memoria), que unimos con los vértices del triángulo, así como con ciertos puntos situados a lo largo de cada uno de los lados y que habrá que elegir también de manera conveniente cuando cada uno de los triángulos forme parte de una triangulación típica.

Esta construcción, completamente formulada, dió lugar al denominado elemento finito de Powell-Sabin, que consiste pues en un E.F. de tipo compuesto o macro-elemento (según [42]), ya que el triángulo en cuestión se acaba subdividiendo en otros subtriángulos más pequeños (ver Figura A.2), a partir de los cuales se construirían las funciones de base correspondientes para poder controlar cada uno de los datos con los que se trabajará en los nodos de la triangulación.

De esta forma, a partir de la triangulación inicial  $\mathcal{T}$ , habrá que construir seguidamente otra nueva triangulación  $\mathcal{T}' \equiv \mathcal{T}^{PS}$  en la que cada uno de los triángulos en  $\mathcal{T}$  aparecerán subdivididos de acuerdo con el esquema de Powell-Sabin; es decir, el incentro de cada uno de los triángulos aparecerá unido con los vértices del mismo y con los incentros de cada uno de los triángulos adyacentes, o bien con el punto medio del lado que se encuentre en la frontera del dominio poligonal  $D \subset \mathbb{R}^2$  (consultar la Definición 3.4 de la Parte I de esta memoria para más detalles y ver la Figura A.3).

El hecho de elegir como punto interior de cada triángulo  $T$ , el centro del círculo inscrito  $O_T$ , no es ni mucho menos la única posibilidad y otras

Figura A.2: Subtriangulación de Powell-Sabin de  $T_0$ .

muchas variantes han sido propuestas; pero no cabe duda que la anterior elección supone una buena opción por las siguientes razones, entre otras:

- (i) Sus coordenadas baricéntricas (consultar la definición A.7.2 en este apéndice) se pueden calcular fácilmente a partir de las coordenadas de los vértices,  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ , del triángulo  $T$  (ver el artículo [51]).
- (ii) Su proyección sobre los tres lados del triángulo  $T$  siempre resulta ser un punto interior de cada uno de los lados; es decir, cuando  $O_T$  y  $O_{T'}$  son los centros de las circunferencias correspondientes a triángulos adyacentes  $T$  y  $T'$ , con lado común  $A_1A_2$ , se tiene asegurado que el punto de intersección  $A_1A_2 \cap O_TO_{T'}$  siempre es interior a  $A_1A_2$ . Lo mismo ocurre cuando cierto triángulo  $T$  tiene algún lado en la frontera del dominio poligonal, en cuyo caso simplemente se toma el punto medio del lado correspondiente, tal y cómo se especifica en la definición 3.4 de la primera parte de esta memoria.

### A.9.1. Funciones de base del E.F. de Powell-Sabin

#### Caso de funciones de clase $\mathcal{C}^1$

Considerando el triángulo de referencia  $T_0$ , con vértices  $A_1 = (0, 1)$ ,  $A_2 = (0, 0)$  y  $A_3 = (1, 0)$ , junto a los funcionales lineales, para  $i = 1, 2, 3$

$$L_i(f) = f(A_i), \quad L_{i+3}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(A_i) \quad L_{i+6}(f) = \frac{\partial f}{\partial y}(A_i)$$

para determinar una base del espacio vectorial  $\mathcal{S}_2^{1,1}(D, \mathcal{T}^{PS})$  formada por funciones  $\{v_1, \dots, v_N\}$  con soporte local, hemos considerado una base de funciones  $\{w_1, \dots, w_9\}$  sobre  $T_0$  que verifica

$$L_i(w_j) = \delta_{ij} \text{ para } i, j = 1, \dots, 9.$$

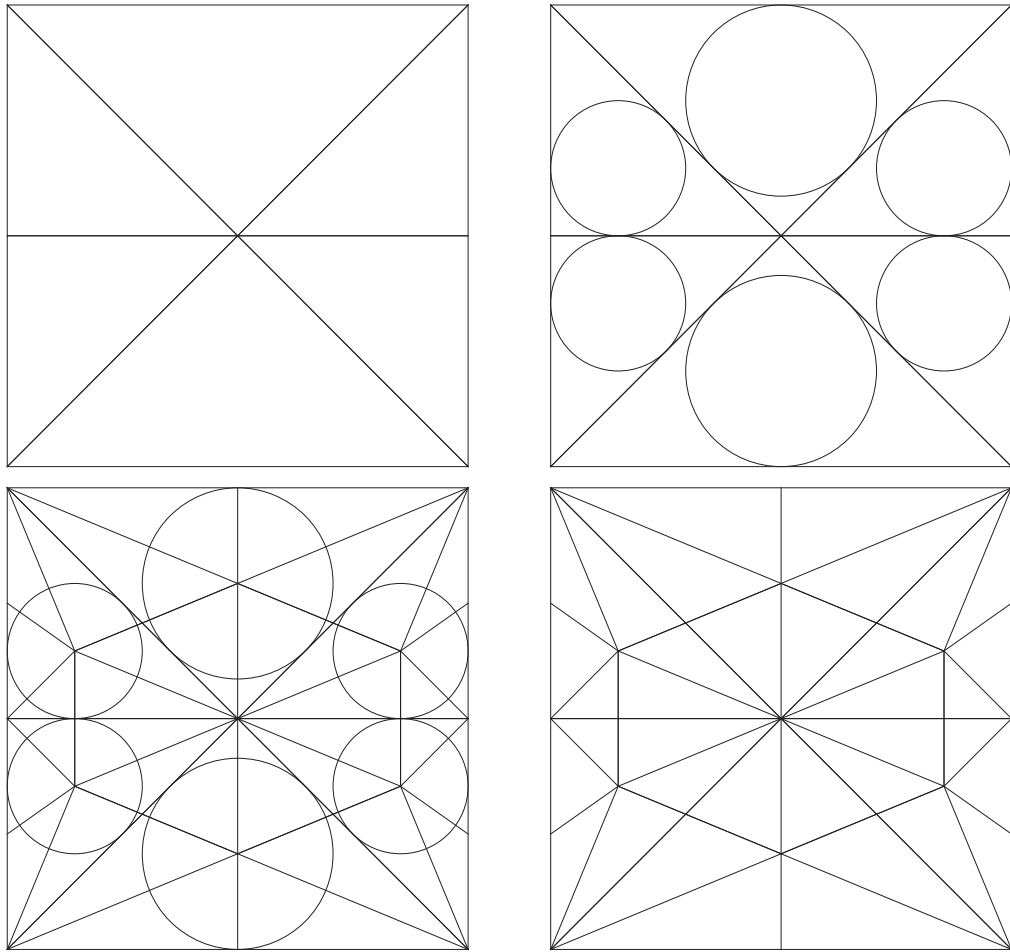


Figura A.3: Triangulación inicial y círculos inscritos (arriba a la izquierda y derecha, respect.) y triangulación de Powell-Sabin resultante (abajo a la derecha).



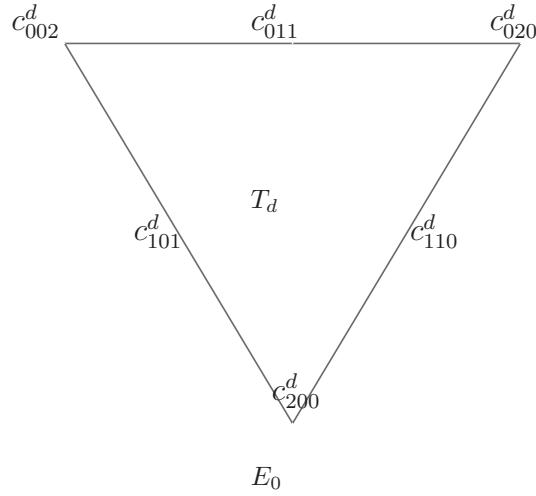


Figura A.4: Representación de los  $B$ -coeficientes sobre  $T_d$ .

Si  $\{T_1, \dots, T_6\}$  son los microtriángulos de la subtriangulación de Powell-Sabin de  $T_0$  (ver la Figura A.2) sobre cada triángulo  $T_d$ , todo polinomio  $p$  de grado total 2 puede ser expresado como

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{i,j,k=0,1,2 \\ i+j+k=2}} c_{ijk}^d \lambda_1^i \lambda_2^j \lambda_3^k$$

donde  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv (\lambda_1(\mathbf{x}), \lambda_2(\mathbf{x}), \lambda_3(\mathbf{x}))$  son las coordenadas baricéntricas del vector  $\mathbf{x}$  respecto a  $T_d$  para cualquier  $\mathbf{x} \in T_d$ .

Aplicando las relaciones que deben verificar los  $B$ -coeficientes de una función  $f$  para ser de clase  $\mathcal{C}^1$  (ver [26]), determinamos los  $B$ -coeficientes de la base de funciones  $\{w_i\}_{i=1}^9$ . Más concretamente, si denotamos  $E_0$  al vértice común de los seis microtriángulos, entonces los  $B$ -coeficientes  $\{c_{ijk}^d\}$  de las funciones  $w_i$  sobre cada triángulo  $T_d$  vendrán dadas tal y cómo se indica en la Figura A.4.

Por otro lado, en el gráfico A.5 proporcionamos los  $B$ -coeficientes (salvo un múltiplo determinado) de las funciones de base  $\{w_i\}_{i=1}^9$ , aunque también es posible determinar estas mismas funciones de base  $\{w_i\}_{i=1}^9$  usando potencias truncadas (consultar [40]).

En las gráficas siguientes A.6, A.7 y A.8 podemos ver la forma que tienen las funciones de base del Elemento Finito de Powell-Sabin definidas en el triángulo de referencia  $T_0$ , así como la de sus derivadas parciales de primer orden, que son lineales a trozos, pero continuas en todo caso.

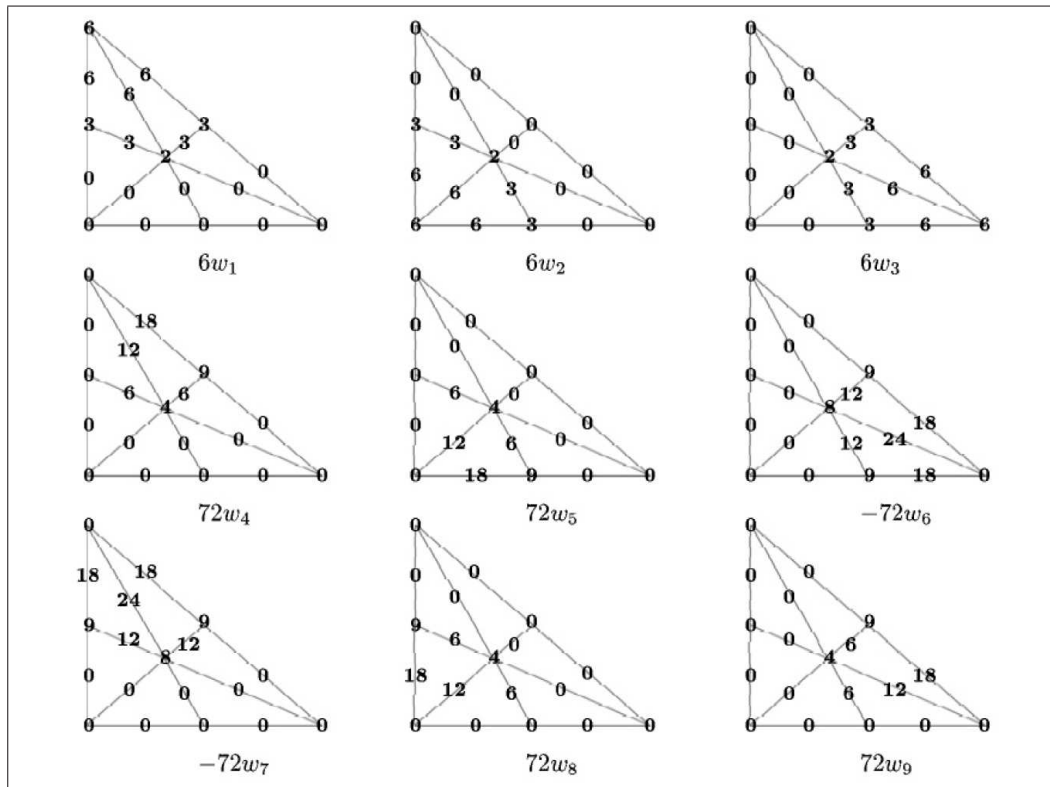


Figura A.5:  $B$ -coeficientes de un múltiplo de las funciones de base  $\{w_i\}_{i=1}^9$ .

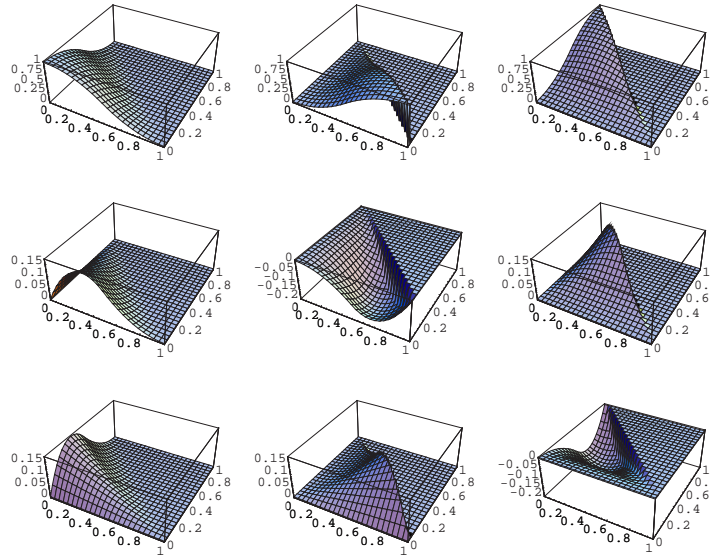


Figura A.6: Funciones de base de Powell-Sabin  $\mathcal{C}^1$  en el triángulo de referencia.

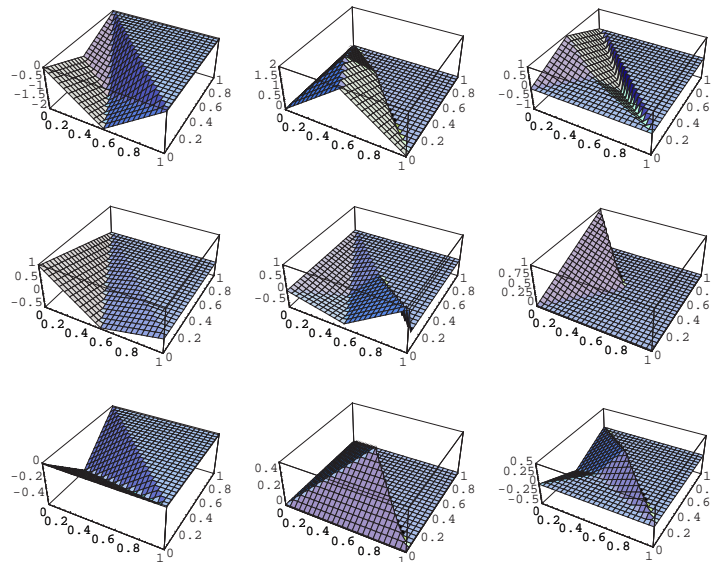


Figura A.7: Derivadas parciales respecto de la variable  $x$  de las funciones de base de Powell-Sabin en el triángulo de referencia.

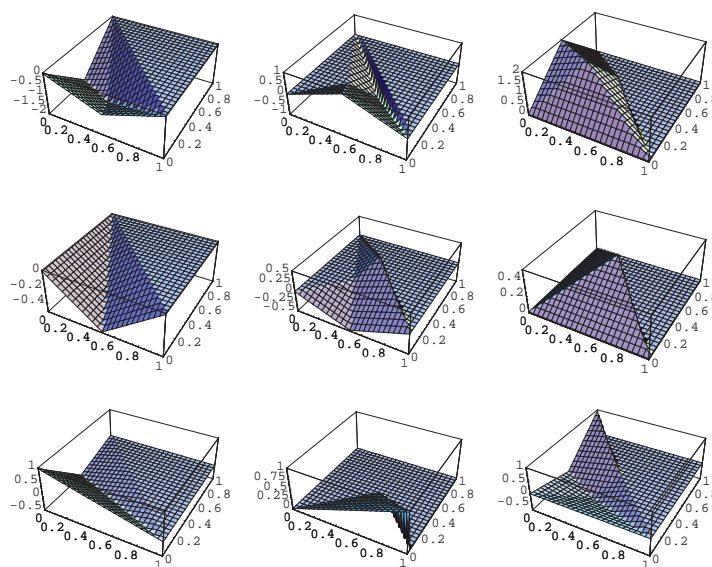


Figura A.8: Derivadas parciales respecto de la variable  $y$  de las funciones de base de Powell-Sabin en el triángulo de referencia.

### Caso de funciones de clase $C^2$

Para construir una base de funciones con soporte local de dicho espacio, emplearemos los splines obtenidos pegando las traslaciones mediante afinidades de la base considerada en el triángulo de referencia  $T_0$ , con vértices  $A_1 = (0, 1)$ ,  $A_2 = (0, 0)$ ,  $A_3 = (1, 0)$  y obtenidas a partir de los siguientes funcionales lineales, para  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
L_i(f) &= f(A_i) \\
L_{i+3}(f) &= \frac{\partial f}{\partial x}(A_i) \\
L_{i+6}(f) &= \frac{\partial f}{\partial y}(A_i) \\
L_{i+9}(f) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A_i) \\
L_{i+12}(f) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A_i) \\
L_{i+15}(f) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A_i) \\
L_{i+18}(f) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(A_i) \\
L_{i+21}(f) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(A_i) \\
L_{i+24}(f) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(A_i) \\
L_{i+27}(f) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(A_i)
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Para calcular la solución del sistema lineal (1.2.9), hemos considerado funciones de base  $\{w_1, \dots, w_{30}\}$  en  $T_0$  que verifican  $L_i(w_j) = \delta_{ij}$ . Para ello, sean  $\{T_1, \dots, T_6\}$  los microtriángulos de Powell-Sabin en  $T_0$  (ver Figura A.2).

Sobre cada triángulo  $T_d$ , cada polinomio  $p$  de grado total 5 puede expresarse

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{i, j, k=0, \dots, 5 \\ i+j+k=5}} c_{ijk}^d \lambda_1^i \lambda_2^j \lambda_3^k \tag{A.25}$$

donde  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \equiv (\lambda_1(\mathbf{x}), \lambda_2(\mathbf{x}), \lambda_3(\mathbf{x}))$  es el vector de coordenadas baricéntricas respecto a  $T_d$ , para todo  $\mathbf{x} \in T_d$ .

Aplicando ahora las relaciones que deben verificar los  $B$ -coeficientes de una cierta función para que ésta sea de clase  $\mathcal{C}^2$  (de la misma manera que se hizo en el caso  $\mathcal{C}^1$ , consultar [26] por ejemplo) podemos determinar los

$B$ -coeficientes correspondientes a cada una de las funciones de base  $\{w_i\}_{i=1}^{30}$ .

## A.10. Formulación abstracta de problemas de optimización mediante el M.E.F.

En muchos problemas de optimización, se puede comprobar que nuestra solución  $u$  verifica un problema para cuyo planteamiento se necesita menos regularidad de la considerada inicialmente en una formulación más fuerte del mismo (como suele ocurrir en muchas E.D.P.'s), por lo que a esta nueva formulación se le suele llamar formulación variacional (V)  $\equiv$  (D) o débil del problema. Dicha formulación variacional acaba siendo equivalente a la formulación proveniente de un problema de optimización (M) del funcional apropiado.

**Definición A.10.1** *La forma general de esa formulación variacional (V) o débil (D) vendrá dada por*

$$\text{Encontrar } u \text{ en } \mathcal{V} \text{ tal que } \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{B}(v) \text{ para cualquier } v \in \mathcal{V} \quad ((V))$$

donde  $\mathcal{V}$  será un conjunto de funciones que formarán un espacio vectorial,  $\mathcal{A}$  será una aplicación bilineal en  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  y  $\mathcal{B}$  una aplicación lineal en  $\mathcal{V}$ .

**Definición A.10.2** *La expresión de la formulación variacional (M) es*

$$\text{Encontrar } u \text{ en } \mathcal{V} \text{ tal que } \mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v) \text{ para cualquier } v \in \mathcal{V} \quad ((M))$$

donde  $\mathcal{F} \equiv \mathcal{J} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  viene dado por

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(v, v) - \mathcal{B}(v).$$

Este planteamiento genérico puede provenir de infinidad de problemas distintos de la técnica y de la física, por ello conviene abstraer lo fundamental del procedimiento, a partir de aquellos casos particulares, para poder utilizar argumentos análogos en distintos casos sin tener que repetir los mismos desarrollos en cada caso. Por ello se formulan dichos problemas de forma general, utilizando el espacio de funciones adecuado; habitualmente un espacio de tipo Sobolev, que se encuentran dentro del marco de los llamados espacios de Hilbert, que se han definido previamente (ver la Sección A.1).

**Corolario A.10.3** *Los problemas en su formulación variacional A.10.1 y de optimización A.10.2 son equivalentes. Además, con las hipótesis anteriores, existe un único  $u \in \mathcal{V}$  verificando ambas formulaciones, con  $\|u\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{M_2}{\alpha}$ .*

**Demostración.** La demostración de la existencia de solución para la formulación variacional (V) necesita utilizar algunos conceptos más profundos de espacios de Hilbert y la obviaremos por el momento.

Una vez demostrada la existencia, la cota sobre la norma se deduce de

$$\gamma \|u\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \mathcal{A}(u, u) = \mathcal{B}(u) \leq M_2 \|u\|_{\mathcal{V}}.$$

Además, la unicidad se deduce también de esta cota, pues de haber dos soluciones  $u_1$  y  $u_2$ , su diferencia  $u_1 - u_2$  verificará  $\mathcal{A}(u_1 - u_2, v) = 0, \forall v \in \mathcal{V}$ , y por tanto, utilizando la cota anterior para  $\mathcal{B} = 0$  deducimos que  $u_1 = u_2$ .

Por último la equivalencia entre la formulación (M) y (V) se deduce de la siguiente igualdad, para cualesquiera  $u, w \in \mathcal{V}$

$$\mathcal{J}(u + w) = \mathcal{J}(u) + (\mathcal{A}(u, w) - \mathcal{B}(w)) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(w, w).$$

Para demostrarlo, sea  $u$  solución de (V) entonces tomando  $w = v - u$  en la igualdad anterior siendo  $v \in \mathcal{V}$  cualquiera. Entonces, es fácil ver que como  $\mathcal{A}(u, w) = \mathcal{B}(w)$  se tiene que

$$\mathcal{J}(v) = \mathcal{J}(u) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(w, w) \geq \mathcal{J}(u) + \frac{1}{2}\gamma \|w\|_{\mathcal{V}}^2 \geq \mathcal{J}(u),$$

y por tanto,  $u$  es solución de (M).

Supongamos ahora que  $u$  es solución de (M); entonces dado  $\epsilon \in \mathbb{R}$  definimos la siguiente función real de variable real  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $g(\epsilon) = \mathcal{J}(u + \epsilon v)$ , con

$$g(\epsilon) = \mathcal{J}(u) + \epsilon(\mathcal{A}(u, v) - \mathcal{B}(v)) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \mathcal{A}(v, v).$$

Es fácil observar que  $g$  es derivable y que, como  $u$  es solución de (M) entonces  $g$  alcanza en 0 un mínimo relativo y por tanto  $g'(0) = 0$ . Como

$$g'(\epsilon) = (\mathcal{A}(u, v) - \mathcal{B}(v)) + \epsilon \mathcal{A}(v, v),$$

deducimos que  $u$  es solución de (V). ■

En muchos otros casos, también se puede comprobar que el funcional involucrado además tiene ciertas propiedades de *convexidad*, de acuerdo con la siguiente definición.

**Definición A.10.4** *Un funcional  $\mathcal{F}(u)$ , definido de cierto espacio vectorial en los reales  $\mathcal{F} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  se dirá convexo si se verifica que*

$$\mathcal{F}((1-t)u + tv) \leq (1-t)\mathcal{F}(u) + t\mathcal{F}(v), \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{y} \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$$

*y estrictamente convexo si dicha desigualdad es estricta para todo  $t \in ]0, 1[$  siempre que  $u \neq v$ .*

## A.11. Aproximación por el M.E.F. de un problema variacional general

Desde un punto de vista práctico, la idea es buscar una solución aproximada,  $u_h$  de  $u$ , resolviendo cualquiera de las formulaciones variacional o de optimización, pero en cierto subespacio vectorial de dimensión finita  $\mathcal{V}_h$  del espacio infinito dimensional  $\mathcal{V}$ .

Para ello, sean

- $D \subset \mathbb{R}^d$  un abierto conexo, no vacío, de frontera lipschitziana;
- $\mathcal{V}$  un espacio de Hilbert de funciones definidas sobre  $D$ , y con valores reales, de norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$  y producto escalar  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{V}}$ ,
- $\mathcal{A}$  una forma bilineal continua sobre  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ , simétrica y  $\mathcal{V}$ -elíptica;
- $\mathcal{B}$  una forma lineal continua sobre  $\mathcal{V}$ .

Y por otra parte, consideremos dados

- $\mathcal{E}$  un subconjunto de  $\mathbb{R}_+^* \equiv ]0, +\infty[$  con  $0 \in \bar{\mathcal{E}}$  como punto de acumulación (de manera que podemos acercarnos a 0 tanto como queramos con elementos de dicho conjunto)
- para cada  $h \in \mathcal{E}$ , una triangulación  $\mathcal{T}_h$  de  $\bar{D}$  en elementos de diámetro no mayor que  $h$ ;
- para cada  $h \in \mathcal{E}$ , un espacio de elementos finitos  $\mathcal{V}_h$ , construido sobre  $\mathcal{T}_h$ .

Se puede demostrar que utilizando el E.F. de Powell-Sabin, el espacio  $\mathcal{V}_h$  construido a partir de  $\mathcal{T}_h$  (una triangulación del dominio  $D$ ), es un subespacio vectorial del espacio de Hilbert correspondiente, normalmente un espacio de Sobolev  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$  (con  $r \in \mathbb{N}$ ).

Así pues, las formulaciones débiles aproximadas equivalentes que se pueden plantear y que denotamos indistintamente  $(\mathbf{V}_h)$ ,  $(\mathbf{M}_h)$  o simplemente  $(\mathbf{D}_h)$

$$\text{Encontrar } u_h \text{ en } \mathcal{V}_h \text{ tal que } \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{B}(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h \quad ((\mathbf{V}_h))$$

$$\text{Encontrar } u_h \text{ en } \mathcal{V}_h \text{ tal que } \mathcal{J}(u_h) \leq \mathcal{J}(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \quad ((\mathbf{M}_h))$$

**Teorema.-** Los problemas en su formulación débil  $(\mathbf{V}_h)$  y  $(\mathbf{M}_h)$  son equivalentes. Además, con las hipótesis anteriores, para cada  $h \in \mathcal{E}$  existe un



único  $u_h \in \mathcal{V}_h$  verificando  $(V_h)$  o  $(M_h)$ , indistintamente. De hecho se puede demostrar que el problema variacional:

$$\begin{cases} u_h \in \mathcal{V}_h, \\ \mathcal{A}(u_h, v_h) = \mathcal{B}(v_h), \forall v_h \in \mathcal{V}_h \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

admite solución única  $u_h$  por el Lema de Lax-Milgram.

*Demostración.*- La solución que buscamos  $u_h$  pertenece a  $\mathcal{V}_h$  y como éste está generado por un número finito ( $m \equiv m(h) = \dim(\mathcal{V}_h) < \infty$ ) de funciones base entonces para todo  $h \in \mathcal{E}$  veremos que el problema (A.26) es equivalente a un sistema lineal.

En efecto, si  $\{\omega_i / i = 1, 2, \dots, m\}$  es una base de  $\mathcal{V}_h$

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^m \xi_j \omega_j(x)$$

donde  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ .

Para que se verifique  $(V_h)$  para todo  $v_h \in \mathcal{V}_h$ , bastará con que se verifique eligiendo como  $v_h$  las funciones base  $\omega_i$ ; es decir si y sólo si

$$\mathcal{A}(\omega_i, u_h) = \mathcal{B}(\omega_i) \text{ para cualquier } 1 \leq i \leq m,$$

y por tanto,

$$\sum_{j=1}^m \xi_j \mathcal{A}(\omega_i, \omega_j) = \mathcal{B}(\omega_i) \text{ para cualquier } 1 \leq i \leq m.$$

Así se obtiene el sistema lineal

$$\mathbf{R} \xi = \mathbf{B}$$

donde  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{A}_h = (\mathcal{A}(\omega_i, \omega_j))_{i,j=1,2,\dots,m}$  es una matriz cuadrada simétrica de orden  $m$  y  $\mathbf{B}$  el vector cuyas componentes son  $\mathcal{B}(\omega_i)$ . Por tanto, existe una única solución de  $(V_h)$  que viene dada a partir de la única solución del sistema lineal  $\mathbf{R} \xi = \mathbf{B}$ . La matriz  $\mathbf{R}$  suele recibir el nombre de la *matriz de rigidez* y el vector  $\mathbf{B}$  se le suele denominar *vector de cargas*, por el carácter estructural de las primeras aplicaciones del método de los elementos finitos en la Ingeniería.

Comprobemos ahora que este sistema lineal tiene una única solución. Por un lado, como el problema (A.26) tiene una solución única, la matriz  $\mathbf{R}$  es regular. Además puesto que  $\mathcal{A}$  es una forma bilineal simétrica, se observa que también lo será la matriz  $\mathbf{R}$ , y como  $\mathcal{A}$  es  $\mathcal{V}$ -elíptica, es fácil comprobar

que  $\mathbf{R}$  será definida positiva; es decir, dado cualquier vector  $\eta \in \mathbb{R}^m$  no nulo, se tendrá que  $\eta^\top \mathbf{R} \eta > 0$ . Un sistema lineal cuya matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva tiene una única solución, que se puede resolver eficientemente por distintos métodos directos o iterativos: Cholesky, frontal, gradiente conjugado, etc ...

Aplicando el lema de Lax–Milgram se prueba también que, en estas condiciones, el problema variacional: hallar  $u$  tal que

$$\begin{cases} u \in \mathcal{V}, \\ \forall v \in \mathcal{V}, \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{B}(v), \end{cases}$$

tiene solución única.

La demostración del resultado anterior nos indica esquemáticamente cómo calcular  $u_h$ :

1. Calculamos la matriz  $\mathbf{R}$  y el vector  $\mathbf{B}$ .
2. Resolvemos el sistema lineal  $\mathbf{R} \xi = \mathbf{B}$ .
3. Construimos  $u_h$  como

$$u_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \xi_j \omega_j(\mathbf{x})$$

donde las  $\omega_j$  son las funciones base del espacio de elementos finitos construido a partir de la triangulación  $\mathcal{T}_h$ ; o equivalentemente la base del espacio  $\mathcal{V}_h$ .

## A.12. Convergencia del MEF

En las condiciones anteriores, se verifica además, el siguiente resultado de convergencia;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{\mathcal{V}} = 0.$$

Eligiendo los subespacios  $\mathcal{V}_h$  en la forma descrita en las secciones anteriores se puede demostrar también el siguiente resultado que sólo comentaremos.

**Teorema.-** Sean  $u$  y  $u_h$  las soluciones de los problemas (V) y (V<sub>h</sub>) respectivamente, donde  $\mathcal{V}_h$  es el espacio de elementos finitos asociado a un mismo tipo de elemento finito de  $\mathbb{R}^2$  (fijada una triangulación  $\mathcal{T}_h$ ).

Sea  $\|\cdot\|$  la norma en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  (normalmente un espacio de Sobolev apropiado  $\mathcal{H}^{r+1}(D)$ ), entonces

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq C \|u - \Pi_h u\|_{\mathcal{H}}.$$

Por tanto, el error de interpolación  $\|u - \Pi_h u\|_{\mathcal{H}}$  controla el error de la aproximación  $\|u - u_h\|_{\mathcal{H}}$  y bastará con estudiar cómo es el error de interpolación, cuando  $h$  tiende a cero, para estudiar si el error de aproximación es cada vez más pequeño.

Supongamos además que la familia de triangulaciones verifica que

1. En el caso de triángulos, que el menor de los ángulos  $\theta$  de todos los triángulos de todas las triangulaciones sea positivo; intuitivamente, que los triángulos de las distintas triangulaciones sean los más equiláteros posibles.
2. En el caso de rectángulos, que la mayor de las razones entre las longitudes de los lados de los rectángulos de todas las triangulaciones sea un número fijo  $\varkappa$ ; intuitivamente, que los rectángulos de las distintas triangulaciones sean los más cuadrados posibles.

En estas condiciones se tiene que  $\|u - \Pi_h u\|_{\mathcal{H}} \leq C h$ , y por tanto, cuando  $h \rightarrow 0$ , la solución aproximada tiende a la solución real del problema y el MEF es convergente.

En general se sabe que  $C$  es inversamente proporcional a  $\theta$  y directamente proporcional a  $\varkappa$ , por lo que en toda triangulación en dos dimensiones interesa “regularizar” la triangulación para

1. En el caso de triángulos, que cada triángulo sea lo más equilátero posible.
2. En el caso de rectángulos, que cada rectángulo sea lo más cuadrado posible.

## A.13. Espacio de elementos finitos

A cada triángulo  $T$  o poliedro  $K$  de la triangulación se tiene asociado un elemento finito  $(K, \Sigma_K, P_K)$ , donde  $\Sigma_K$  denota el conjunto de datos sobre  $K$  que definen el E.F y  $P_K$  el espacio de polinomios correspondiente. De esa forma podemos definir un subespacio de las funciones, definidas de  $D$  en  $\mathbb{R}$ , con cierto grado de regularidad (es decir, incluidas en  $\mathcal{C}^r(D)$  para cierto  $r \geq 0$ ), dado por

$$\mathcal{V}_h = \{v \in \mathcal{C}^r(D) \text{ tales que } v|_K \in P_K \text{ para cada } K \in \mathcal{T}_h\},$$

donde  $v|_K$  denota la restricción de  $v$  al poliedro  $K$ .

Asociado a la triangulación tenemos también  $\Pi_h$ , un operador de interpolación que a cada función  $v \in \mathcal{C}^r(D)$  le asocia la función  $\Pi_h v : D \rightarrow \mathbb{R}$  que, restringida a cada  $K$  coincide con  $\Pi_K v$ .

En principio el tipo de elemento finito que elijamos en cada poliedro podría ser distinto, pero si pretendemos que las funciones obtenidas por interpolación pertenezcan a  $\mathcal{V}_h$  debemos de exigir ciertas condiciones de compatibilidad entre elementos finitos adyacentes (con una cara común). Nosotros usualmente trabajaremos con el mismo tipo de E.F. en todos los triángulos que formen una triangulación, en concreto uno de tipo Powell-Sabin, con lo que las *relaciones de compatibilidad* se verificarán de forma inmediata. Como consecuencia de la compatibilidad automática de los E.F. de Powell-Sabin podemos describir  $\mathcal{V}_h$  a su vez como el conjunto de todas las interpolaciones de funciones de  $\mathcal{C}^r$  (para cierto  $r \geq 0$  concreto); es decir,  $\mathcal{V}_h = \Pi_h(\mathcal{C}^r(D))$ .

También cabe destacar que hemos notado el espacio  $\mathcal{V}_h$  con el índice  $h$ , refiriéndonos al diámetro mayor de los triángulos utilizados y podemos esperar que si elegimos triangulaciones más finas (con más elementos, de forma que  $h$  sea cada vez más pequeño) el resultado sea mejor.

Se dice que un elemento finito es de clase  $\mathcal{X}$  si el operador de interpolación  $\Pi_h$  de toda triangulación  $\mathcal{T}_h$  construida con dicho E.F. asigna a funciones del espacio  $\mathcal{X}$ , funciones de  $\mathcal{X}$  de nuevo. Así pues, un elemento finito es de clase  $\mathcal{C}^0$  si  $\Pi_h v \in \mathcal{C}(D)$  para cualquier función  $v \in \mathcal{C}(D)$ . Algunos E.F.'s sólo son de clase  $\mathcal{C}^0$ ; otros, como los vistos en esta memoria son de clase  $\mathcal{C}^1$  o  $\mathcal{C}^2$  es decir, se conserva la continuidad de las derivadas primera y/o segunda, respectivamente.

Introducimos a continuación el conjunto de los datos de la triangulación  $\Sigma_h$  como la unión de todos los datos  $\Sigma_T \equiv \Sigma_K$  de cada triángulo  $T$  o poliedro  $K$  que forma la triangulación.

Sea  $\Sigma_h = \{L_1, \dots, L_m\}$  dado a partir de las formas lineales  $L_i$ ,  $i = 1 \dots, m$ , y consideremos ahora la única función  $\omega_i \in \mathcal{V}_h$  de forma que

$$L_i(\omega_j) = \delta_{ij} \quad \text{para } 1 \leq j \leq m,$$

para cada  $1 \leq i \leq m$ . La unicidad proviene de la unisolvencia del problema de interpolación en cada triángulo.

El conjunto  $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  lo forman las funciones base del *espacio de elementos finitos* construido a partir de la triangulación y de hecho son una base de  $\mathcal{V}_h$ . Las funciones base de la triangulación restringidas a cada  $T \equiv K$  son funciones base del elemento finito  $(T, \Sigma_K, P_K)$ .

En las Figuras A.9, A.10 y A.11 se muestran las funciones de base asociadas al único nodo interior de una triangulación simple, como la mostrada

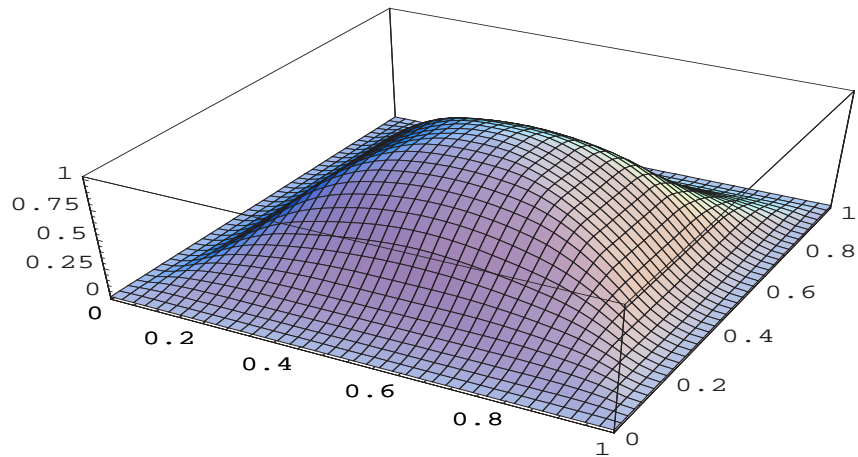


Figura A.9: Función de base del espacio de E.F. de Powell-Sabin.

en la Figura A.3 de la Sección A.9, a partir del E.F. de Powell-Sabin de clase  $\mathcal{C}^1$ .

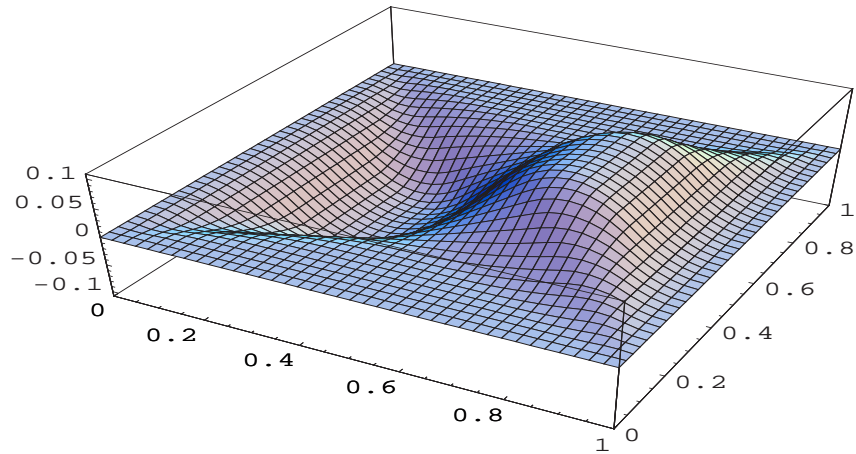


Figura A.10: Función de base del espacio de E.F. de Powell-Sabin.

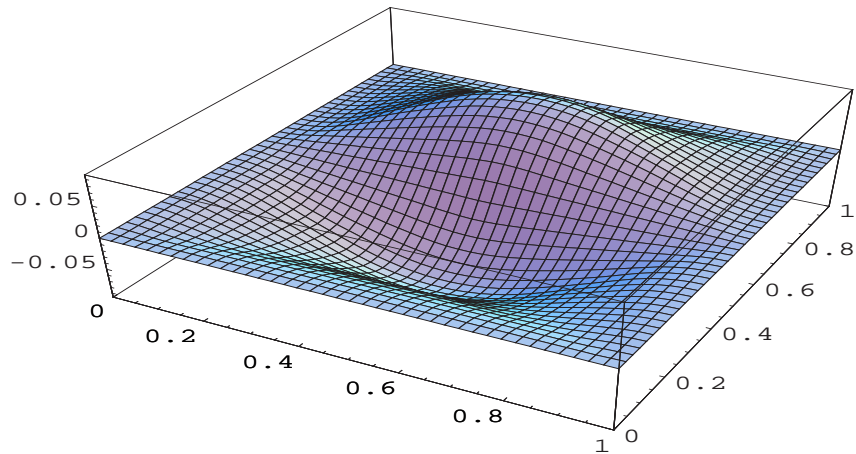


Figura A.11: Función de base del espacio de E.F. de Powell-Sabin.

# Bibliografía

- [1] R. Arcangéli, Some applications of discrete  $D^m$ -splines; in *Mathematical methods in Computer Aided Geometric Design*, T. Lyche and L. L. Schumaker, Eds. Academic Press, Boston (1989), pp. 35–44.
- [2] R. Arcangéli, M. C. López de Silanes and J. J. Torrens, Multidimensional minimizing splines. Kluwer Academic Publisher, 2004.
- [3] R. Arcangéli and B. Ycart, *Almost sure convergence of smoothing  $D^m$ -splines for noisy data*, Numer. Math. 66 (1993), 281–294.
- [4] K. Atkinson and W. Han, Theoretical Numerical Analysis, Ed. Springer, 2nd. edition, 2005.
- [5] D. Barrera, M. A. Fortes, P. González and M. Pasadas, *Minimal energy  $C^r$ -surfaces on uniform Powell-Sabin type meshes*. Monografías del Seminario Matemático García Galdeano **33**, 59-66 (2006).
- [6] D. Barrera, M. A. Fortes, P. González and M. Pasadas, *Minimal energy surfaces on Powell-Sabin triangulations*. Applied Numerical Mathematics 58 (2008), 635-645.
- [7] D. Barrera, M. A. Fortes, P. González and M. Pasadas, *Minimal energy  $C^r$ -surfaces on uniform Powell-Sabin type meshes. Estimation of the smoothing parameters*, Mathematics and Computers in Simulation 77 (2008), 161-169.
- [8] D. Barrera, M. A. Fortes, P. González and M. Pasadas, *Minimal energy  $C^r$ -surfaces on uniform Powell-Sabin type meshes for noisy data*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 218, Issue 2, (September 2008), pp. 592-602. (doi:10.1016/j.cam.2008.01.015).
- [9] D. Barrera, M. A. Fortes, P. González and M. Pasadas, *Filling polygonal holes with minimal energy surfaces on Powell-Sabin type triangulations*, Journal of Computational and Applied Mathematics (doi:10.1016/j.cam.2009.04.012).

- 
- [10] R. Brent, *Algorithms for minimization without derivatives*, Dover Publications, New York, (2002).
- [11] H. Brézis, Análisis funcional. Alianza Universidad Textos. Madrid (1984).
- [12] A. S. Cavaretta, W. Dahmen and C. A. Micchelli, *Stationary Subdivision*. Mem. Amer. Math. Soc. 93(453), 1991.
- [13] C. K. Chui and J. Z. Wang, *A general framework of compactly supported splines and wavelets.*, J. Approx. Theory, 71(3) (1992), 263-304.
- [14] C. K. Chui and M-J. Lai , *Filling polygonal holes using  $C^1$ -cubic triangular patches*, Computer Aided Geometric Design 17 (2000), 297–307.
- [15] C. K. Chui and J. Z. Wang, *Wavelet-based minimal-energy approach to image restoration*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 23 (2007), 114-130.
- [16] P. G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, SIAM-Classics in Applied Mathematics, North-Holland 40, 2002.
- [17] P. G. Ciarlet and C. Wagschal, *Multipoint Taylor formulas and applications to the finite element methods*, Numer. Math. 17 (1971) 84-100.
- [18] A. Cohen, *Numerical analysis of wavelet methods*. Studies in Mathematics and its Applications, 32. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2003.
- [19] D. D. Cox, *Approximation of method of regularization estimators*, Ann. Statist. 16 (1988), 694-713.
- [20] P. Craven and G. Wahba, *Smoothing noisy data with spline functions: estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation*, Numer. Math. 31 (1979), 377–403.
- [21] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
- [22] O. Davydov, G. Nürnberger and F. Zeilfelder, Approximation order of bivariate spline interpolation for arbitrary smoothness, J. Comput. Appl. Math. 90 (1998), 117–134.
- [23] J. Duchon, Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces, RAIRO 10, 12 (1976), 5–12.



- [24] N. Dyn, *Interpolatory Subdivision Schemes*, Tutorials on Multiresolution in Geometric Modelling, A. Iske, E. Quak, M. S. Floater (eds.), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002, pp. 25-45.
- [25] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (1998).
- [26] G. Farin, *Bézier polynomials over triangles and the construction of piecewise  $C^r$ -polynomials*, Technical Report TR/91, Brunel University, Uxbridge, England, 1980.
- [27] M. A. Fortes, P. González, M. Moncayo and M. Pasadas, *Multiresolution analysis for minimal energy  $C^r$  surfaces on Powell-Sabin type meshes*, Aceptado para publicación en la serie Lecture Notes in Computer Science. Springer (2009).
- [28] I. Ginkel and G. Umlauf, *Local energy-optimizing subdivision algorithms* Computer Aided Geometric Design 25 (2008), 137-147.
- [29] J. L. Gout, *Estimation de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans  $\mathbb{R}^n$* , Numer. Math. 28, (1977), 407-429.
- [30] J. A. Gregory and J. Zhou, *Filling polygonal holes with bicubic patches*, Computer Aided Geometric Design 11 (1994), 391-410.
- [31] G. Greiner, *Surface construction based on variational principles, in wavelets, images and surface fitting*, P. J. Laurent, A. Le Méhauté and L. L. Schumaker, Eds. Wellesley, 1994, pp. 277-286.
- [32] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston (1985).
- [33] A. Harten, *Multiresolution representation of data II*, SIAM J. Numer. Anal. 33(3) (1996), 1205-1256.
- [34] M. Jansen and P. Oonincx, *Second Generation Wavelets and Applications*, Springer Verlag, London, 2005.
- [35] A. Jouini and M. Kratou, *Wavelet bases on a manifold*, J. Funct. Anal. 248 (2007), 128-151.
- [36] F. Keinert, *Wavelets and Multiwavelets*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.

- [37] A. Kouibia and M. Pasadas, Approximation by discrete variational splines, *J. Comput. Appl. Math.* 116 (2000), 145–156.
- [38] A. Kouibia and M. Pasadas, Approximation of surfaces by fairness bicubic splines, *Adv. Comput. Math.* 20 (2004), 87–103.
- [39] M. Laghchim-Lahlou and P. Sablonnière,  $C^r$ -finite elements of Powell-Sabin type on the three direction mesh. *Adv. Comput. Math.* 6 (1996), 191–206.
- [40] P. Lancaster and K. Šalkauskas, *Curve and surface fitting*, Academic Press, London, 1986.
- [41] M. J. Lai and L. L. Schumaker, *Spline Functions on Triangulations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 110. Cambridge University Press (2007)*.
- [42] M. J. Lai and L. L. Schumaker, *Macro-Elements and Stable Local Bases for Splines on Powell-Sabin Triangulations*.
- [43] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1989.
- [44] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1999.
- [45] M. Moncayo and R. J. Yáñez, *A recursive procedure to obtain a class of orthogonal polynomial wavelets*, *Math. Comput. Simul.* 77 (2008), 266–273.
- [46] D.G. Luenberger, *Linear and nonlinear programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1989.
- [47] M. J. Powell, *An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives*. *The Computer Journal*, 7, 155–162 (1964).
- [48] M. J. D. Powell and M. A. Sabin, *Piecewise quadratic approximations on triangles*, *ACM Trans. Math. Software*, Vol. 3(4), (1977), 316–325.
- [49] P. A. Raviart, J. M. Thomas, *Introduction à l'Analyse Numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris (1983).
- [50] V. Rayevskaya and L. S. Schumaker, *Multi-sided macro-element spaces based on Clough-Tocher triangle splits with applications to hole filling*, *Computer Aided Geometric Design* 22 (2005), 57–79.

- 
- [51] P. Sablonnière, *Error Bounds for Hermite Interpolation by Quadratic Splines on an  $\alpha$ -triangulation*, IMA Journal of Numerical Analysis Vol. 7, No. 4 (1987), 495–508.
- [52] L. L. Schumaker, *Topics in Multivariate Approximation*. Academic Press, New York (1987), 219-232.
- [53] M. Skopina, *Multiresolution analysis of periodic functions*, East J. Approx. 3 (1997) 203–224.
- [54] H. Speleers, P. Dierckx and S. Vandewalle, *Local subdivision of Powell-Sabin splines*, Computer Aided Geometric Design 23(5) (2006), 446-462.
- [55] W. Sweldens, *The lifting scheme: A construction of second generation wavelets*, SIAM J. Math. Anal. 29(2) (1998), 551-546.
- [56] F. Utreras, *Quelques resultats d’optimalite pour la methode de validation croisee*, Tech. Report 301, Seminaire d’Analyse Numerique (1978).
- [57] F. Utreras, *Optimal smoothing for noisy data using spline functions*, SIAM J. Sci. Statist. Comput 2, (1981), 349–362.
- [58] F. Utreras, *Convergence rates for multivariate smoothing spline functions*, J. of Approx. Theory 52 (1988), 1–27.
- [59] G. Wahba, *Spline models for observational data*, Society for Industrial and Applied Mathematics, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 59, University at Columbus, Philadelphia-Pennsylvania, 1990.
- [60] J. Windmolders and P. Dierckx, *Subdivision of uniform Powell-Sabin splines*, Computer Aided Geometric Design 16(4) (1999), 301-315.
- [61] J. Windmolders, E. Vanraes, P. Dierckx and A. Bultheel, *Uniform Powell Sabin splines wavelets*, Journal of Computational and Applied Mathematics 154 (2003), 125-142.

