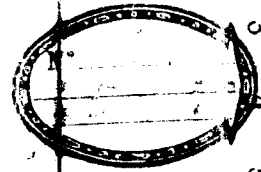


20. a. 6.

- 4 -

Author	
Opinion	
Year	A
Month	03
Page	
Number	360



0  
1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20

20. a. 6.

4-

RESEARCH	
GROUP	A
NO.	03
FIELD	
DATE	360



R. 2652

TRIGONOMETRIA

*Bj.*

# HISPANA.

## RESOLVTIO

TRIANGVLORVM PLANI,  
& Sphærici : constructio Sinuum, Tan-  
gentium, Secantium, & Logarithmo-  
rum, eorumque vsus.

*Al. Col. de la Com. de His. de Granada*  
**AVTHORE**

*A. R. P. IOSEPHO ZARAGOZA,*  
*Valentino Societatis IESV in Suprema Hispaniarum*  
*Inquisitione propositionum Fidei Censore : olim in Colle-*  
*gijs Balearico, Barcinonensi, & Valentino Theologia*  
*Scholastica, modo in Matritensi Academia Imperialis*  
*Collegij Matheleos Professore*  
*Regio.*

Ad Excellentissimum Dominum  
D. GASPAREM DE HARO ET GVZMAN,  
Marchionem del Carpio, & Eliche, Comitem  
Ducem de Olivares, ad Pontificem Maximum  
Regionomine Legatum Ordinarium,  
&c.

SECVND A EDITIO.

VALENTIÆ. Apud Hyeronimum  
de Villagrassa. Anno Dom. 1673.  
*Cum superiorem Licentia.*

EXCELLENTISSIMO DOMINO  
D. GASPARI DE HARO ET GVZMAN,  
Marchioni del Carpio, Duci de Montoro,  
Comiti Duci de Olivares, Comiti de Morente,  
Marchioni de Eliche, Dño Status de Sorbas,  
Regiarum Arciũ, & Turrium Cordubensium  
perpetuò Governatori, & Regalium Stabulorũ  
summo Præfeto, Alguacilio maiori Civitatis,  
& Inquisitionis Cordubensis, perpetuò Arcium  
Hispalensium, & Classium officinæ Præfeto,  
& etiam Castri, & Arcis de Moxacar: Magno  
Indiarum Cancellario, & Registratori eorundem  
perpetuo, Alcantarensis Ordinis Maximo  
Commendatori, Hispaniarum Regi à Cubicu-  
lis, primo à Venationibus, & Regionum  
tractuum del Pardo, Valfain,  
& Zarzuela Præfeto,  
&c.



Rigonometriæ Hispanæ iterum in no-  
vam lucem prodeunti (Excellentissi-  
me Princeps) Mæcenas alius inqui-  
rendus mihi non fuit, quàm Exc<sup>a</sup> Va-  
Matheos enim dignitas eum Patro-  
num exigit, qui splendore sanguinis, &  
ingenij magnitudine tantæ scientiæ  
nobilitatem amplificet; quæ omnia in te vno aded vigent,  
vt vix supparem nostro hoc sæculo invenire liceat. Aded  
illustres parentes tibi natura concessit, vt si eorum facta

nolles æmulari, degenerare non posses. Maiorum contraxisti virtutem filius progenitoribus maior, in hoc mirandus, quod virtus in te contracta maior in compendio appareat, splendidius luceat: ita enim expressisti omnes, ut dum vivis Maiorum neminem perisse, neminem in te desiderari credamus: & cum illi fuerint in nullo non maximi, dubitare liceret, in quo maior esse potueris, ni tantam magnitudinem maiorem esse potuisses in epitome, tua magnitudine comprobasses. Maiorum igitur gloria nobilis es, & nobilior tua, cum illam summo incremento perficeris, & effeceris tuam. Eam ex factis proprijs adeptus es claritatem, ut quam ex stirpe habuisti maximam, minima in te, ac otiosa foret, nisi quæ tecum sine meritis nata, tecum merendo adulta, amplissima effecta fuerit, & immensa.

Inter virtutes, quæ maxime Heroas decent, est fortitudo facile Princeps: fortis tamen est, non qui inter fortes nascitur, nec qui magna molitur, sed qui ardua perficit, qui fortissime vivit, triumphator non tam aliorum sapere, quam sapiens sui: tuam igitur fortitudinem commendat iugis, de te ipso triumphus. Immania confecisse prælia magnum est, sed me iudice, ingenuas fovere artes, sapientiæ cummulare gloriam, innata magnitudine modestè uti, maius est fortitudinis argumentum. Tygris fluviorum omnium velocissimus bellicam fortitudinem exprimit, quæ mirabili pernitate, tonitu, ac strepore magno, cursuque rapidissimo fertur, & obstantia, quæque proruit, & demolitur. Hæc in sui admirationem vulgares animos rapiunt, qui vnum rei corticem, & nudam superficiem corporeis oculis, intuentur. Nobilibus autem, & sapientibus viris, quibus intima, & profundiora aquilino mentis obtutu rimari licet, Tygridis rapiditati præferitur Nili profunditas, & tranquillitas summa, ut qui placido cursu immensa aquarum volumina explicans, feraces inundat campos, univèrsam provinciam alluit, irrigat, &

fecundat: tale est benignitatis, sapientiæ, ac moderationis tuæ profluvium, quod te apud hostes commorante, nobis effluxit, cum deposito armorum strepitu, pacem Regno, tibi que gloriam peperisti immortalem: duxisti Bellonam, ut Martem opprimeres, & generares pacem, quæ bellorum est finis. Bellicam ergo laudem te omnibus præripuisse credimus, ut qui non degener maiores tuos potentes bello, robustos viribus, & martiali gloria toto terrarum Orbe clarissimos in vnum expresseris omnes; sed cum *vis consilij expertis mole ruat sua*, literarum studia, Matheseos præcipuè foves, quæ militarem artem perficiunt, ut in te *præclarum faciat mixturam cum sapientia fortitudo*. Duplici tum corde, tum sensu animi Elephante esse dicitur, & altero quidem incendi ad bellum, altero mitigari, & leniri ad sapientiam traditur ab Æliano: hoc quidem magnanimos decet viros, hac te sapientia, ac generositate præditum adumbrari, ambiget nemo, qui egregia tua facinora in bello, & pace cognoverit. Dubium igitur mihi non est, quin fortitudo tua sapientiâ committe invicta sit ad labores, constans ad pericula, ad illecebras dura, rigidior ad voluptates, & in expiabili prælio adversus omnia vitiorum monstra decertet. Hinc quod de Asbesto Lychno, Poëta cecinit, de splendore tuo flammæ cœlestis æmulo, posteritas iugi memoria recinet.

*Evomit aeterna vigilans in lampade flammam.*

*Quas nulla Aëolis tempestas obruet alas.*

Hæc animi magnitudo te Magno Philippo iunxit: arctissime, Palladia hæc virtus te legatum constituit Regium pro Carolo Secundo ad Pontificem Maximum viribus licet fractis, & imbecillis ex valetudine cruribus, sed mente adeò firma, & vivida; consilio ita certo, & stabili, ut suspicari liceat te Romam expetere, ne Christiani Orbis caput sine tuo cerebro vixisse doleat posteritas. Perge igitur, Heros maxime, in Urbem

ſpectaculis aſſuetam, quæ forte ſpectaculum te ipſo nobilius non vidit unquam: perge felix, & pro tua benignitate ſine opusculū hoc eſſe itineris commitē, tecum *liber ibit in Urbem* non invitus, licet verecundia forte, ac rubore perfulus, cum Trigonometria, quæ omnium eſt meſura, immenſæ tuæ magnitudinis meſuram nullam inveniat. Vale.

**Excellentiſſime Domine.**

Excellentiæ Veſtræ  
Obſequentiſſ. in Chriſto ſervus

*Joſephus Zaragoſā.*

**DICENTIÆ SUPERIORVM.**

Imprimatur.

Imprimatur.

D. Greg. Antillon, V. G.

D. Iacobus Madroño, F. A.

FACULTAS R. P. PROVINCIALIS,  
Toletanæ Provinciæ Societatis Jeſu.

*Didacus de Valdés.*

**ERRORES PRIMO CORRIGENDI.**

Pag.	Lin.	Error.	Corrig.	Pag.	Lin.	Error.	Corrig.
2.	27.	ABC.	BAC	58.	31.	relinquo.	reliquo.
8.	22.	MP.	AP.	64.	4.	(2.1.1.)	(1.1.2.)
8.	27.	CH.	BH.	64.	12.	cbd.	cdb.
18.	23.	atur.	ator.	68.	8.	BE.	DE.
22.	25.	& 39.	& 29.	70.	25.	mibus, matibus,	
26.	11.	cōrria.	cōtraria.	85.	23.	NE.	NC.
36.	32.	16.	19.	97.	12.	bubet,	habet.
37.	3.	ictus.	itur.	99.	14.	CAD,	CDA,
45.	8.	onem.	orem.	105.	24.	EDH,	EBH,
46.	15.	789.	798.	114.	24.	A'CB,	ACb,
48.	2.	1238.	238.	115.	16.	latus, Angulum,	
53.	26.	126.	128.	120.	5.	ſita,	ſitæ,
56.	12.	45.m.	54.m.	131.	22.	vt R,	vt B,

*Corrigenda in Tabulis.*

Sub gradu 1. & 2. in fine paginæ, vbi ſunt numeri 179.  
89. 90. corrige 178. 88. 177.

Sub gr. 22. 10.m. in ordine Sinuum, prima littera eſt 8.  
corrige 9.

Ad ſimiles errores cognoſcendos pro vniverſis Tabulis, obſervandum eſt quemlibet numerum medium eſſe inter proxime ſuperiorem, & inferiorem.

LE-

## LECTORI.

**T**rigonometria per vniversum Matheſeos tractum longe diſuſa immenſum ferè habet vſum, ad omnes ſuperficies Rectilineas extenſum, licèt nomen vnâ Triangulorum menſuram præſeferat. Huius cognitione deſtitui opprobrium eſt Mathematici, & è conuerſo: *Ex Angulis latera, ex lateribus Angulos* (verba ſunt Magni Vietæ) *& mixtim in Triangulis, tam Planis, quàm Sphæricis aſſequi, ſumma gloria Mathematici eſt.* Trigonometriam illustrant Ioannes de Regiomonte, Georgius Ioachimus Reticus, Valentinus Otho, Franciſcus Vieta, P. Chriſtophorus Clavius, Mauritius Brefsius, Thomas FinKius, Lansbergius, Maginus, Pitifcus, Baſſantinus, Adrianus Romanus, Benjamin Vrſinus, Longomontanus, Snellius, Neperus, Briggius, Vlac, Stevinus, Frobenius, Oughtred, Metius, Sethus Vbardus, Gellibrant, Cavalerius, Herigonius, P. Gaſpar Schotus, & Illuſtriſſimus Caramuel: quos omnes merito literarius orbis veneratur Magiſtros, & impenſe concelebrat. Nihilominus meus iſte labor, nec inutilis, neque inanis cenſebitur, vt ſpero, illis præcipuè, qui ſedulo animadverterint difficultatem: retinendæ praxis, & demonſtrationis reſolutionum in Trigonometria Sphærica; quæ ad vnâ facillimam figuram in hoc opere redacta eſt. Animus fuit Trigonometriæ ipſius applicationem adiungere: poſteâ verò hanc ſpeciali volumini reſervandam eſſe duxi, quod innumeris ferè Problematibus ad Mathematicarum vſum apprime neceſſarijs reſertum, vt publici iuris fiat, cito in communem lucem prodibit.

RECTANGULA SPHÆRICA.

PROBLEMA I. Data Hypothen. & vno latere. Inveni.

I. <i>Latus aliud.</i>		II. <i>Ang. conterminum.</i>		III. <i>Ang. oppositum.</i>	
Sinus 2. perp.	BH.	Tangens Hypoth.	EB.	Sinus Hypoth.	EB.
Radius	AH.	Tang. perp.	BH.	Sinus perp.	BH.
Sinus 2. Hypoth.	EB.	Radius	PR.	Radius	ED.
Sinus 2. basis	EH.	Sin. 2. anguli	B.	Sinus anguli	E.

PROBLEMA II. Data Hypothenusa, & angulo. Inveni.

I. <i>Latus conterminum.</i>		II. <i>Latus opp. angulo.</i>		III. <i>Angulū reliquum.</i>	
Radius.		Radius	ED.	Radius.	
Sin. 2. ang.	B.	Sinus ang.	E.	Sin. 2. hypoth.	EB.
Tang. hypoth.	EB.	Sinus hypoth.	BE.	Tang. ang.	B.
Tang. lateris	BH.	Sinus lat. opp.	BH.	Tang. 2. ang.	E.

PROBLEMA III. Datis duobus lateribus. Inveni.

I. <i>Hypothen.</i>		II. <i>Angulum. E.</i>		III. <i>Angulum B.</i>	
Radius.		Sin. lat. conterm.	EH.	Sin. lat. conterm.	BH.
Sin. 2. lateris	BH.	Radius.		Radius.	
Sin. 2. lateris	EH.	Tang. lat. opp.	HB.	Tang. lat. opp.	HE.
Sin. 2. Hypot.	EB.	Tang. anguli	E.	Tang. anguli	B.

PROBLEMA IIII. Dato latere, & ang. contermino. Inveni.

I. <i>Hypothen.</i>		II. <i>Latus opp.</i>		III. <i>Angulū reliquum.</i>	
Radius.		Radius.	EG.	Radius	BQ.
Sin. 2. ang.	E.	Sin. lat. conterm.	EH.	Sin. 2. lat.	BH.
Tan. 2. lat.	EH.	Tang. ang.	E.	Sin. ang.	B.
Tan. 2. Hypot.	EB.	Tang. lat. opp.	BH.	Sin. 2. ang.	E.

PROBLEMA V. Dato latere, & angulo opp. Inveni.

I. <i>Hypothen.</i>		II. <i>Latus reliquum.</i>		III. <i>Angulum reliq.</i>	
Sin. ang.	E.	Tang. ang.	E.	Sin. 2. lat.	BH.
Sin. lat.	BH.	Tang. lat. opp.	BH.	Sin. 2. ang.	E.
Radius.	DE.	Radius	EG.	Radius	BQ.
Sin. hyp.	EB.	Sinus lat.	EH.	Sin. 1. ang.	B.

PROBLEMA VI. Datis duobus angulis. Inveni.

I. <i>Hypothen.</i>		II. <i>Latus BH.</i>		III. <i>Latus.</i>	
Tang. ang.	B.	Sin. 1. ang. con.	B.	Sin. ang. cont.	E.
Tan. 2. ang.	E.	Sin. 2. ang. opp.	E.	Sin. 2. ang. opp.	B.
Radius	BP.	Radius	DF.	Radius.	GF.
Sin. 2. hyp.	EB.	Sin. 2. lat.	BH.	Sin. 2. lat.	EH.

QUADRANTALE. Solutur vt rectang. convertendo lat. in ang. & contra.



SINGVLARIA SPHÆRICA:

PROBLEMA I. *Pro reſtangulis Sphæricis ex Nepero.*

Sinus cuiuslibet partis, & radius medij ſunt inter Tangentes vicina-  
rum: & etiam inter ſinus 2. remotarum.

*Tangens vicina, a motu ſinus eſto ſecundus.*

Partes ſunt latera, & complementa Hypothenuſæ, & angulorum (om-  
miſſo recto) quæ ſignantur hac nota  $\circ$ : vt in Fig. 7.

PROBLEMA II. Rectangula ſoluentur ex data baſi, &

<i>Sum. hyp. &amp; perp.</i>	<table border="0"> <tr> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Summa 1. &amp; 4.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Difer. hyp. &amp; perp.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Inde reliqua</i></td> </tr> <tr> <td><i>innotefcent.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td><i>est Hypot. Di</i></td> </tr> <tr> <td><i>f. r. est perpend.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemiſummæ.</td> <td>Tan. ſemi differ.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi differ.</td> <td>Tan. ſemiſummæ.</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	<table border="0"> <tr> <td><i>Summa 1. &amp; 4.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Difer. hyp. &amp; perp.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Inde reliqua</i></td> </tr> <tr> <td><i>innotefcent.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td><i>est Hypot. Di</i></td> </tr> <tr> <td><i>f. r. est perpend.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemiſummæ.</td> <td>Tan. ſemi differ.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi differ.</td> <td>Tan. ſemiſummæ.</td> </tr> </table>	<i>Summa 1. &amp; 4.</i>	<table border="0"> <tr> <td><i>Difer. hyp. &amp; perp.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Inde reliqua</i></td> </tr> <tr> <td><i>innotefcent.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td><i>est Hypot. Di</i></td> </tr> <tr> <td><i>f. r. est perpend.</i></td> </tr> </table>	<i>Difer. hyp. &amp; perp.</i>	<table border="0"> <tr> <td><i>Inde reliqua</i></td> </tr> <tr> <td><i>innotefcent.</i></td> </tr> </table>	<i>Inde reliqua</i>	<i>innotefcent.</i>	<i>est Hypot. Di</i>	<i>f. r. est perpend.</i>	Tan. ſemiſummæ.	Tan. ſemi differ.	Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemi differ.	Tan. ſemiſummæ.		
<table border="0"> <tr> <td><i>Summa 1. &amp; 4.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Difer. hyp. &amp; perp.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Inde reliqua</i></td> </tr> <tr> <td><i>innotefcent.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td><i>est Hypot. Di</i></td> </tr> <tr> <td><i>f. r. est perpend.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemiſummæ.</td> <td>Tan. ſemi differ.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi differ.</td> <td>Tan. ſemiſummæ.</td> </tr> </table>			<i>Summa 1. &amp; 4.</i>		<table border="0"> <tr> <td><i>Difer. hyp. &amp; perp.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Inde reliqua</i></td> </tr> <tr> <td><i>innotefcent.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td><i>est Hypot. Di</i></td> </tr> <tr> <td><i>f. r. est perpend.</i></td> </tr> </table>		<i>Difer. hyp. &amp; perp.</i>	<table border="0"> <tr> <td><i>Inde reliqua</i></td> </tr> <tr> <td><i>innotefcent.</i></td> </tr> </table>	<i>Inde reliqua</i>	<i>innotefcent.</i>	<i>est Hypot. Di</i>	<i>f. r. est perpend.</i>	Tan. ſemiſummæ.	Tan. ſemi differ.	Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemi differ.	Tan. ſemiſummæ.
			<i>Summa 1. &amp; 4.</i>				<table border="0"> <tr> <td><i>Difer. hyp. &amp; perp.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Inde reliqua</i></td> </tr> <tr> <td><i>innotefcent.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td><i>est Hypot. Di</i></td> </tr> <tr> <td><i>f. r. est perpend.</i></td> </tr> </table>		<i>Difer. hyp. &amp; perp.</i>	<table border="0"> <tr> <td><i>Inde reliqua</i></td> </tr> <tr> <td><i>innotefcent.</i></td> </tr> </table>	<i>Inde reliqua</i>	<i>innotefcent.</i>	<i>est Hypot. Di</i>	<i>f. r. est perpend.</i>						
			<i>Difer. hyp. &amp; perp.</i>						<table border="0"> <tr> <td><i>Inde reliqua</i></td> </tr> <tr> <td><i>innotefcent.</i></td> </tr> </table>		<i>Inde reliqua</i>	<i>innotefcent.</i>								
			<i>Inde reliqua</i>																	
	<i>innotefcent.</i>																			
<i>est Hypot. Di</i>																				
<i>f. r. est perpend.</i>																				
Tan. ſemiſummæ.	Tan. ſemi differ.																			
Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemi baſis.																			
Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemi baſis.																			
Tan. ſemi differ.	Tan. ſemiſummæ.																			

PROBLEMA III. *In obliq. ex 2. alternis, & media.*

<i>Segmenta baſis.</i>	<table border="0"> <tr> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Summa 3. &amp; 4. est</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Segmenta angul.</i></td> </tr> <tr> <td><i>segm. maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Difer. est minus.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ angulorū.</td> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. angulorum.</td> <td>Sin. differ. laterum.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidiffer. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidiffer. ſegm.</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	<table border="0"> <tr> <td><i>Summa 3. &amp; 4. est</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Segmenta angul.</i></td> </tr> <tr> <td><i>segm. maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Difer. est minus.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ angulorū.</td> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. angulorum.</td> <td>Sin. differ. laterum.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidiffer. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidiffer. ſegm.</td> </tr> </table>	<i>Summa 3. &amp; 4. est</i>	<table border="0"> <tr> <td><i>Segmenta angul.</i></td> </tr> <tr> <td><i>segm. maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Difer. est minus.</i></td> </tr> </table>	<i>Segmenta angul.</i>	<i>segm. maior.</i>	<i>Difer. est minus.</i>	Sin. ſummæ angulorū.	Sin. ſummæ laterum.	Sin. differ. angulorum.	Sin. differ. laterum.	Tan. ſemi baſis.	Tan. 2. ſemianguli.	Tan. ſemidiffer. ſegm.	Tan. ſemidiffer. ſegm.	
<table border="0"> <tr> <td><i>Summa 3. &amp; 4. est</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Segmenta angul.</i></td> </tr> <tr> <td><i>segm. maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Difer. est minus.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ angulorū.</td> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. angulorum.</td> <td>Sin. differ. laterum.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidiffer. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidiffer. ſegm.</td> </tr> </table>			<i>Summa 3. &amp; 4. est</i>		<table border="0"> <tr> <td><i>Segmenta angul.</i></td> </tr> <tr> <td><i>segm. maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Difer. est minus.</i></td> </tr> </table>	<i>Segmenta angul.</i>	<i>segm. maior.</i>	<i>Difer. est minus.</i>	Sin. ſummæ angulorū.	Sin. ſummæ laterum.	Sin. differ. angulorum.	Sin. differ. laterum.	Tan. ſemi baſis.	Tan. 2. ſemianguli.	Tan. ſemidiffer. ſegm.	Tan. ſemidiffer. ſegm.
			<i>Summa 3. &amp; 4. est</i>			<table border="0"> <tr> <td><i>Segmenta angul.</i></td> </tr> <tr> <td><i>segm. maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Difer. est minus.</i></td> </tr> </table>	<i>Segmenta angul.</i>	<i>segm. maior.</i>	<i>Difer. est minus.</i>							
			<i>Segmenta angul.</i>													
			<i>segm. maior.</i>													
	<i>Difer. est minus.</i>															
Sin. ſummæ angulorū.	Sin. ſummæ laterum.															
Sin. differ. angulorum.	Sin. differ. laterum.															
Tan. ſemi baſis.	Tan. 2. ſemianguli.															
Tan. ſemidiffer. ſegm.	Tan. ſemidiffer. ſegm.															

PROBLEMA IIII. *Ex data parte, ſegmentis, & ſumma includentiū*

<i>Latera includentia.</i>	<table border="0"> <tr> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Semiſumma 3. &amp; 4. est</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> <td>Sin. ſummæ angulorum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. laterum.</td> <td>Sin. differ. ang.</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	<table border="0"> <tr> <td><i>Semiſumma 3. &amp; 4. est</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> <td>Sin. ſummæ angulorum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. laterum.</td> <td>Sin. differ. ang.</td> </tr> </table>	<i>Semiſumma 3. &amp; 4. est</i>	<table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table>	<i>Anguli includentes.</i>	<i>pars maior.</i>	<i>Semidif. est minor.</i>	Tan. 2. ſemianguli.	Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. ſemidif. ſegm.	Sin. ſummæ laterum.	Sin. ſummæ angulorum.	Sin. differ. laterum.	Sin. differ. ang.	
<table border="0"> <tr> <td><i>Semiſumma 3. &amp; 4. est</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> <td>Sin. ſummæ angulorum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. laterum.</td> <td>Sin. differ. ang.</td> </tr> </table>			<i>Semiſumma 3. &amp; 4. est</i>		<table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table>	<i>Anguli includentes.</i>	<i>pars maior.</i>	<i>Semidif. est minor.</i>	Tan. 2. ſemianguli.	Tan. ſemi baſis.	Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. ſemidif. ſegm.	Sin. ſummæ laterum.	Sin. ſummæ angulorum.	Sin. differ. laterum.	Sin. differ. ang.
			<i>Semiſumma 3. &amp; 4. est</i>			<table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table>	<i>Anguli includentes.</i>	<i>pars maior.</i>	<i>Semidif. est minor.</i>							
			<i>Anguli includentes.</i>													
			<i>pars maior.</i>													
	<i>Semidif. est minor.</i>															
Tan. 2. ſemianguli.	Tan. ſemi baſis.															
Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. ſemidif. ſegm.															
Sin. ſummæ laterum.	Sin. ſummæ angulorum.															
Sin. differ. laterum.	Sin. differ. ang.															

PROBLEMA V. *Ex data media, ſegmentis, & differ. includentium.*

<i>Latera includentia.</i>	<table border="0"> <tr> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Semiſumma 3. &amp; 4.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>est pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> </tr> <tr> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. laterum.</td> <td>Sin. differ. angulorum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> <td>Sin. ſummæ angulorum.</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	<table border="0"> <tr> <td><i>Semiſumma 3. &amp; 4.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>est pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> </tr> <tr> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. laterum.</td> <td>Sin. differ. angulorum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> <td>Sin. ſummæ angulorum.</td> </tr> </table>	<i>Semiſumma 3. &amp; 4.</i>	<table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>est pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table>	<i>Anguli includentes.</i>	<i>est pars maior.</i>	<i>Semidif. est minor.</i>	Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. 2. ſemianguli.	Tan. ſemi baſis.	Sin. differ. laterum.	Sin. differ. angulorum.	Sin. ſummæ laterum.	Sin. ſummæ angulorum.	
<table border="0"> <tr> <td><i>Semiſumma 3. &amp; 4.</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>est pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> </tr> <tr> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> <td>Tan. ſemi baſis.</td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. laterum.</td> <td>Sin. differ. angulorum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> <td>Sin. ſummæ angulorum.</td> </tr> </table>			<i>Semiſumma 3. &amp; 4.</i>		<table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>est pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table>	<i>Anguli includentes.</i>	<i>est pars maior.</i>	<i>Semidif. est minor.</i>	Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. 2. ſemianguli.	Tan. ſemi baſis.	Sin. differ. laterum.	Sin. differ. angulorum.	Sin. ſummæ laterum.	Sin. ſummæ angulorum.
			<i>Semiſumma 3. &amp; 4.</i>			<table border="0"> <tr> <td><i>Anguli includentes.</i></td> </tr> <tr> <td><i>est pars maior.</i></td> </tr> <tr> <td><i>Semidif. est minor.</i></td> </tr> </table>	<i>Anguli includentes.</i>	<i>est pars maior.</i>	<i>Semidif. est minor.</i>							
			<i>Anguli includentes.</i>													
			<i>est pars maior.</i>													
	<i>Semidif. est minor.</i>															
Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. ſemidif. ſegm.															
Tan. 2. ſemianguli.	Tan. ſemi baſis.															
Sin. differ. laterum.	Sin. differ. angulorum.															
Sin. ſummæ laterum.	Sin. ſummæ angulorum.															

PROBLEMA VI. *Ex 2. alternis, & differ. ſegm. mediar.*

<i>Baſim incluſam.</i>	<table border="0"> <tr> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Duplum quarti est</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Angulum incluſum.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars quaſita.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. angulorum.</td> <td>Sin. differ. laterum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ ang.</td> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	<table border="0"> <tr> <td><i>Duplum quarti est</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Angulum incluſum.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars quaſita.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. angulorum.</td> <td>Sin. differ. laterum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ ang.</td> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> </tr> </table>	<i>Duplum quarti est</i>	<table border="0"> <tr> <td><i>Angulum incluſum.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars quaſita.</i></td> </tr> </table>	<i>Angulum incluſum.</i>	<i>pars quaſita.</i>	Sin. differ. angulorum.	Sin. differ. laterum.	Sin. ſummæ ang.	Sin. ſummæ laterum.	Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. ſemi baſis.	Tan. 2. ſemianguli.	
<table border="0"> <tr> <td><i>Duplum quarti est</i></td> <td rowspan="5"> <table border="0"> <tr> <td><i>Angulum incluſum.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars quaſita.</i></td> </tr> </table> </td> </tr> <tr> <td>Sin. differ. angulorum.</td> <td>Sin. differ. laterum.</td> </tr> <tr> <td>Sin. ſummæ ang.</td> <td>Sin. ſummæ laterum.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> <td>Tan. ſemidif. ſegm.</td> </tr> <tr> <td>Tan. ſemi baſis.</td> <td>Tan. 2. ſemianguli.</td> </tr> </table>			<i>Duplum quarti est</i>		<table border="0"> <tr> <td><i>Angulum incluſum.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars quaſita.</i></td> </tr> </table>	<i>Angulum incluſum.</i>	<i>pars quaſita.</i>	Sin. differ. angulorum.	Sin. differ. laterum.	Sin. ſummæ ang.	Sin. ſummæ laterum.	Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. ſemi baſis.	Tan. 2. ſemianguli.
			<i>Duplum quarti est</i>			<table border="0"> <tr> <td><i>Angulum incluſum.</i></td> </tr> <tr> <td><i>pars quaſita.</i></td> </tr> </table>	<i>Angulum incluſum.</i>	<i>pars quaſita.</i>							
			<i>Angulum incluſum.</i>												
			<i>pars quaſita.</i>												
	Sin. differ. angulorum.	Sin. differ. laterum.													
Sin. ſummæ ang.	Sin. ſummæ laterum.														
Tan. ſemidif. ſegm.	Tan. ſemidif. ſegm.														
Tan. ſemi baſis.	Tan. 2. ſemianguli.														

TRIGONOMETRIA PLANA.

Rectangula.

Obliquanguia.

**PROBLEMA I.** *Fig. 6.*  
 Datis latere, & angulis inven.  
 I. *Alius latus.* | II. *Hypoth.*  
 BE. radius | BE. sin. ang. A.  
 ED. tag. ang. B. | BD. radius  
 BC. latus datum | BC. lat. opp. A.  
 CA. latus quæs. | BA. Hypoth.

**PROBLEMA II.** *Fig. 7.*  
 Dat. Hypoth. & latere. inven.  
 I. *Angulus.* | II. *Latus aliud.*  
 BA. Hypoth. | Inveniatur prius  
 BE. latus | anguli deinde in  
 ED. radius | venietur latus ex  
 BE. sin. ang. A. | probl. 1.  
 vel sin. 2. ang. B.

**PROBLEMA III.** *Fig. 8.*  
 Dat. Hypoth. & angulis. inven.  
 I. *Latus CA.* | II. *Latus BC.*  
 BE. radius | BD. radius  
 DE. sin. ang. B. | BE. sin. ang. A.  
 BA. Hypoth. | BA. Hypoth.  
 CA. lat. opp. B. | BC. latus opp. A.

**PROBLEMA IIII.** *Fig. 9.*  
 Datis duobus lateribus inven.  
 I. *Angulus.* | II. *Hypoth.*  
 BC. latus major | Inveniatur prius  
 CA. latus minor | anguli deinde in  
 BE. radius | venietur Hypo-  
 ED. tag. ang. B. | th. ex probl. 1.  
 vel tan. 2. ang. A.

**PROBLEMA I.** *Fig. 10.*  
 Datis angulis, & latere inven.  
 I. *Latus AB.* | II. *Latus BC.*  
 Sinus ang. B. | Sinus ang. B.  
 Latus opp. CA. | Latus opp. CA.  
 Sinus ang. C. | Sinus ang. A.  
 Latus opp. AB. | Latus opp. CB.

**PROBLEMA II.** *Fig. 11.*  
 Dat. 2. lat. & ang. opp. inv.  
 I. *Angulus.* | II. *Latus.*  
 CA. Lat. opp. B. | Inveniatur prius  
 Sinus ang. B. | anguli : deinde  
 AB. lat. opp. C. | invenietur latus  
 Sinus ang. C. | ex probl. 1.

**PROBLEMA III.** *Fig. 12.*  
 Dat. 2. lat. & ang. medio. inven.  
 I. *Angulus.* | II. *Latus aliud.*  
 Summa laterum | Inveniatur ang.  
 differ. laterum. | deinde latus ex  
 tag. femisu. B. C. | probl. 1.  
 tag. femidi. B. C.  
*Summa 3. & 4. est B. differ. est C.*

**PROBLEMA IIII.** *Fig. 14.*  
 Dat. 3. lateribus. inven.  
*Quolibet angulum.*  
 Adde compl. logarith. laterum, lo-  
 garithmis semifummar, & sem diffe-  
 rentiz basis, & differentiz laterum:  
 dimidium aggregati est sinus semi-  
 anguli opp. basi.

MONITUM VNIVERSALE:

In omni proportione sumitur prioris termini compl. logar: ad radium si ille sit minor illo, vel ad duplum radium si fuerit maior: ex summa trium auferatur 1. ad sinistram si compl. sumptum est ad radium: vel 2. si ad duplum radium: & remanet logar. quarti termini quæsiti.

LIBER I. CAPVT I.

Totum opus in tres libros distributum volui. Primus, Canonem Trigonometricum, naturam, inventionem, vltimumque mirabilem Logarithmorum exprimit, quæ omnia Trigonometriæ Planæ, & Sphæricæ comunia sunt. Secundus, de Trigonometria plana totus est. Tertius, autem de Sphærica.

CAPVT PRIMVM.

DE SINIBVS, TANGENTIBVS, ET SECANTIBVS.

**S**inus, Tangentes, & Secantes rectæ quædam sunt, quæ ad Triangulorum solutionem considerantur in Circulo; cum autem rectarum ad id spectantiũ aliæ prorsus intra Circulum cadant, aliæ prorsus extra, aliæ verò partim extra partim intra, opus fuit diuersa ijs indere nomina distinctionis ergo. Sinus omnino intra Circulum cadunt, at Tangentes Circulum tangunt prorsusque eminent extra, Secantes illam secant, & partim extra, partim intrant.

2 Mathematici cuiuscumque circuli peripheriam in 360. partes diuisam intelligunt, quas gradus appellant, singulos autem gradus in 60. partes, quas vocant minuta, vel scrupala prima, singula verò minuta in 60. secunda, singula secunda in 60. tertia, &c.

3 Partes Circuli sunt Angulorum mensura, vt si in puncto A. fig. 1. constituantur Angulus, & ex eo Circulus describatur, contineatque Arcus CB. gradus 60. & minuta 15. continebit etiam Angulus ABC. gradus 60. minuta 15. &c. Cum autem integer Circulus 360. gradus habeat, Semicirculus DBM. erit graduum 180. qua trans verò MB. qui mensura est Anguli recti MAB. graduum 90. quare omnes Anguli recti inter se æquantur, omnes

TRIGONOMETRIÆ.

siquidem 90. gradibus constat. Angulus 90. gradibus maior, erit Obtusus; minor verò Acutus.

4 Complementum Anguli, vel Arcus est id, quod deficit ipsi, referturque ad Quadrantem, vel Semicirculum. Complementum Anguli obtusi semper est ad Semicirculum; Exem gr. sit Angulus DAC, vel Arcus DC. graduum 120. quibus demptis ex Semicirculo 180. relinquetur Angulus CAB. vel Arcus CB. graduum 60. eritque BC. complementum ad Semicirculum Arcus CD. complementum Anguli acuti esse potest ad Quadrantem, vel Semicirculum. Si Arcus CB. vel Angulus CAB. sit graduum 60. subducanturque ex Quadrante BM. 90. remanebit CM. vel CAM. graduum 30. & erit MC. complementum Arcus CB. scilicet ad Quadrantem. Si verò BC. graduum 60. auferatur ex Semicirculo BCD. 180. relinquetur CD. graduum 120. eritque CD. complementum ad Semicirculum Arcus BC. Idem dicendum est de Angulis.

5 Diameter est linea quæ transit per centrum, & Circulum dividit in duas partes æquales, vti DB. cuius semicirculus AB. est *Semidiameter*, vel *Radius*, qui ex centro in circumferentiam erit, & omnes Radij sunt æquales, atque etiam Diametri. Videant Tyrones Proæmialia saltem Geometriæ nostræ.

6 Linea omnium potissima Radius est, ad quam aliæ omnes circuli referuntur, & licet in quascumque partes diuidi posset, operationũ facilitas exigit, vt in vnitatem cum aliquot ciphris resolvatur, veluti in partes 10000. vel in 1000000. &c. quæ diuisio in seruit ad determinandam quantitatem reliquarum circuli linearum, quæ sunt chordæ, Sinus, Tangentes, & Secantes; omnes enim, vt mensurentur cum Radij. partibus conferuntur.

7 Chorda, subtensa, vel inscripta est recta, quæ tota intra Circulum cadit, & finitur duobus punctis extremis Arcus, cui subtenditur vti CG. est chorda, vel subtensa

4 Arcus CBG. quia terminatur duobus punctis CG. quæ sunt eiudem Arcus extrema.

8 Sinus rectus, vel Sinus primus est recta, quæ ab vno Arcus extremo perpendicularis incidit Diametro per extremum aliud transeunti. In exemplo sit Arcus CB. & per centrum A. & punctum B. transeat Diameter DAB. & ex puncto C. cadat perpendicularis CE. erit CE. Sinus rectus, vel Sinus primus Arcus CB. & Anguli acuti CAB. ipsamet recta CE. Sinus primus erit Arcus DC. quia etiam perpendicularis est Diametro DAB. per extremum D. Arcus CD. transeunti: quare Sinus Anguli acuti CAB. Sinus quoque est Anguli obtusi CAD. videlicet sui complementi ad Semicirculum.

9 Sinus Totus est Sinus Quadrantis, vel Anguli recti; & est ipsemet Radius. Cumenim BM. quadrans sit; perpendicularis MA. cadit in centrum A. itaque Sinus MA. est ipsemet Radius AM. & cum MA. perpendicularis maxima sit omnium, quæ in Diametrum DB. cadere possunt, erit etiam Sinus Maximus, Sinus Totus, vel Totalis, vel Radius, quæ vocés idem omninò significant.

10 Sinus secundus cuiusque Arcus est ipsemet Sinus primus suæ differentia ad Quadrantem, veluti si Arcus sit BC. graduum 60. demptis ijs ex Quadrante 90. remanebit differentia graduum 30. & perpendicularis CO. quæ est Sinus primus Arcus CM. erit Sinus secundus Arcus CB. Si verò Arcus sit DC. graduum 120. ablato ex eo Quadrante DM. 90. relinquetur differentia MC. graduû 30. cuius Sinus primus est CO. eritque Sinus secundus Arcus DC. cum autem in Rectangulo, OE. latera opposita sint æqualia OO. AE. (7.1.1.) erit AE. Sinus secundus Arcus BO. & pariter Arcus CD. ita vt Sinus secundus Anguli acuti, sit ipsemet Sinus primus sui complementi ad Quadrantem; Sinus verò secundus Anguli obtusi est Sinus primus differentia, vel excessus quo Quadrantem superat.

11 Sinus Versus, vel Sagitta est Diametri portio comprehensa inter Sinum primum, & Circuli circûferentiam. Exempli gratia CE. est Sinus rectus Arcus CB. & EB. est Sinus Versus Arcus CB. ED. verò, Sinus Versus Arcus DC. ergo Sinus Versus EB. Arcus BC. vna cum Sinu secundo AE. æquatur Radio AB. & Sinus Versus ED. minus Sinu 2. AE. Arcus DC. æquatur Radio AD. ergo cognito Sinu secundo AE. Arcus BC. si auferatur AE. ex Radio, vel Sinu toto AB. supererit EB. Sinus Versus Arcus CB. si autem AE. Sinus secundus Arcus DC. addatur Radio AD. erit ED. Sinus Versus Arcus DC. vel Anguli Obtusi DAC. in Angulo igitur acuto subducitur Sinus secundus, in Obtuso verò additur Radio, & habetur Sinus Versus; ob hanc potissimum causam calculus Tabulæ Sinuum Versorum omittitur.

12 Tangens est linea, quæ Circulum contingit in vnicò puncto, & est perpendicularis ad extremum Diametri, quæ transit per illud punctû (7.1.3.) Tangens ista infinita esse potest; Tangens verò Arcus est recta, quæ in altero Arcus extremo Circulû contingit, & determinatur recta, quæ à centro transit per extremum alterum eiudem Arcus vti BH. est Tangens Arcus BC. quia Arcum in extremo B. tangit, & finitur recta AH. quæ à centro prodit per punctum C. dicitur Tangens prima, vt distinguatur à secunda.

13 Tangens secunda vnius Arcus, Quadrante minoris, vel Anguli acuti, est ipsamet Tangens prima sui complementi ad Quadrantem, veluti si Arcus sit BC. complementum eius erit CM. & MP. est Tangens prima Arcus MC. dico MP. esse Tangentem secundam Arcus BC. Pariratione BH. quæ est Tangens prima Arcus BC. erit Tangens secunda Arcus CM. &c.

14 Secans prima cuiusque Arcus, vel Anguli acuti est recta, quæ prodit à centro, & secat Tangentem primam, Secans verò secunda est recta, quæ secat Tangentem secundam,

dam, ibique terminatur: veluti AH. est Secans prima Arcus BC. quia AH. terminatur ad Tangentem primam BH. sed AP. est Secans secunda Arcus CB. quia terminatur ad Tangentem secundam MP. rursus AP. est Secans prima Arcus MC. & AH. est Secans secunda eiusdem Arcus MC. ergo Tangentes, & Secantes primæ vnius Arcus, sunt Tangentes, & Secantes secundæ sui complementi ad Quadrantem, & e contra.

15 Arcus maiores 90. gradibus, & Anguli Obtusi, non habent Tangentes, & Secantes alias quam complementorum suorum ad Semicirculum: quare si Angulus sit graduum 120. eius Tangens prima, & secunda; item Secans prima, & secunda erit eadem, quæ graduum 60. sui complementi ad Semicirculum. Observatione dignum est, quoties dicitur *Sinus*, *Tangens*, vel *Secans*, absolute subintelligitur *Sinus primus*, *Tangens prima*, *Secans prima*, quoties non additur terminus secundus, vel secunda.

## CAPVT SECVNDVM.

### DE FVNDAMENTIS CANONIS

#### Trigonometrici.

16 **D**ifferentia quorumlibet duorum Arcuum, vel Angulorum est eadem, quæ suorum complementorum ad Quadrantem, vel Semicirculum. Fig. 1.

Sint Arcus duo DR. DL. quorum differentia est RL. complementa ad Quadrantem sunt RM. LM. & ipsorum differentia item est RL. complementa ad Semicirculum sunt RB. LB. & illorum differentia est RL. ergo semper est eadem.

17 *Sinus cuiuslibet Arcus est semis chordæ Arcus dupli, & Sinus duorum Arcuum proportionales sunt Chordis Arcuum duplorum. Fig. 1.*

(177)

Del P. I. Zarag. 1711

Sit

Sit Arcus BC. eiusque Sinus CE. productus vsque ad G. cum Radius AB. sit perpendicularis ad CG. (9. 8.) æquabuntur Arcus CB. BG. item CE. EG. (2. 1. 3.) CE. dimidium est CG. & Arcus CBG. duplus CB. ergo Sinus CE. Arcus CB. est semis chordæ CG. Arcus dupli CBG. igitur si sumatur quilibet alius Arcus CM. & eius duplus CL. erunt proportionales: vti CO. est dimidium CL. ita CE. est dimidium CG. & alternando vt Sinus CO. ad Sinum CE. ita chorda CL. ad chordam CG. (5. 1. 5.)

18 *Sinus primus, & secundus æque possunt ac Radius. Sinus primus, & Sinus Versus æque possunt ac Chordæ. Chordæ differentia duorum Arcuum, æque potest ac differentia eorundem Sinuum primorum, & secundorum. Fig. 1.*

Sit Arcus BC. (Fig. 1.) eiusque Sinus primus CE. Sinus verò secundus CO. id est AE. Radius est AC. ergo cum Angulus E. rectus existat, erit quadratum ex AC. æquale quadratis AE. EC (4. 1. 2.) igitur AE. EC. æque possunt ac Radius AC. Pari ratione Arcus CL. Sinus primus CZ. & Sinus Versus LZ. æque possunt ac Chordæ LC. quoniam quadratum LC. æquatur duobus quadratis CZ. ZL. Rursus Chordæ GN. differentia Arcuum BN. BG. æque potest ac KG. differentia Sinuum primorum GE. SN. & KN. differentia Sinuum secundorum GN. NI.

19 *Sinus primus vnius Arcus medio loco proportionalis est inter semissem Radij, & Sinum Versum Arcus dupli. Fig. 1.*

Sit Arcus DL. & DLC. duplum eius: erit DZ. Sinus primus Arcus LD. & DE. Sinus Versus Arcus DLC. cum Triangula DZA. DEC. habeant angulos ad Z. & E. rectos, & Angulum ad D. communem, æquiangula sunt (3. 1. 1.) ergo vt DE. ad DC. ita DZ. ad DA. (2. 1. 6.) & alternando vt DE. ad DZ. ita DC. ad DA. (5. 1. 5.) igitur vt DE. ad DZ. ita DZ. semis DC. ad semissem Radij DA. (4. 1. 5.) ergo DZ. Sinus primus Arcus DL. æ-

Del P. I. Zarag. 1711

ab

dio loco proportionalis est inter Sinum Versum DE. Arcus dupli DLC. & Semiradium DA. &c.

20 *Radius medius proportionalis est inter Tangentem Arcus primam, & secundam. Fig. 1.*

Sit Arcus BC. eius Tangens prima BH. & MP. Tangens secunda cum MA. BH. perpendicularæ sint ad BA erunt parallelæ (13.P.) & Anguli Alterni MAP. AHB. æquales (2.1.1.) & Anguli M. B. recti æquales: ergo Triangula AMP. HBA. sunt Equiangulara (3.1.1.) igitur proportionales sunt HB. Tangens prima ad BA. Radium, vt AM. Radius ad MP. Tangentem secundam (2.1.6.) quare Radius medius est inter Tangentem primam & secundam.

21 *Radius medius proportionalis est inter Sinum primum, & Secantem secundam vnius Arcus, vel inter Sinum secundum, & Secantem primam. Fig. 1.*

Sit Arcus BC. cuius Sinus primus est CE. & Secans secunda AP. cum sint Equiangulara. (vt antea) Triangula AMP. CE A. erunt proportionalia: vt CE. Sinus primus ad CA. Radium; ita AM. Radius ad AP. Secantem secundam (2.1.6.) ergo Radius medius est inter Sinum primum CE. & Secantem secundam MP. vel inter CE. Sinum secundum Arcus MC. & AP. Secantem primam eiusdem, &c.

22 *Radius ad Tangentem Arcus rationem habet, quam Sinus secundus ad Sinum primum, eiusdem Arcus. Fig. 1.*

Sit Arcus CB. eius Tangens CH. Sinus primus CE. Sinus secundus CO. vel AE. cum AB. perpendicularis sit ad EC. BH. (§.8. & 12.) erunt CE. BH. parallelæ (13.P.) ergo vt AE. Sinus secundus ad EC. Sinum primum; ita AB. Radius ad BH. Tangentem, (2.1.6.)

23 *Radius ad Secantem primam vnius Arcus rationem habet, quam Sinus primus ad Tangentem primam. Fig. 1.*

In iisdem Triangulis ACE. AHB. Radius AC. est ad Sinum primum CE. vt Secans AH. ad Tangentem

## TRIGONOMETRIÆ.

tem HB. (2.1.6.) ergo alternando AC. Radius ad AH. Secantem, est vt Sinus CE. ad Tangentem HB.

24 *Radius eandem rationem habet cum Secante 1. quam Tangens 2. cum Secante 2. Fig. 1.*

Sit Arcus BC. cuius Secans 1. est AH. Tangens 2. MP. & Secans 2. AP. in Triangulis similibus AMP. HBA. sunt proportionales MP. Tangens 2. ad PA. Secantem 2. vt BA. Radius ad AH. Secantem 1. (2.1.6.)

25 *Sinus 1. & 2. vnius Arcus directè proportionales sunt cum Secante 1. & 2. eiusdem Arcus. Fig. 1.*

Sit A. Sinus 1. B. Sinus 2. Sit C. Secans 1. A. B. D. Secans 2. R. Radius, cum Radius medium R. proportionale sit inter A. & D. (§.21.) erit C. D. Rectangulum ex A. in D. æquale Quadrato Radij (1.1.6.) & quoniam ipsemet Radius medium proportionale est inter C. & B. (§.21.) erit Quadratum ex Radio æquale Rectangulo sub C. & B. (1.1.6.) ergo Rectangulū ex A. in D. æquale est Rectangulo sub C. & B. (3.P.) ergo latera reciproce proportionalia sunt, vt A. Sinus 1. ad B. Sinum 2. ita C. Secans 1. ad D. Secantem 2. (1.1.6.)

26 *Tangens 1. & 2. vnius Arcus reciproce proportionalia sunt cum Sinu 1. & Secante 2. vel cum Sinu 2. & Secante 1. eiusdem Arcus.*

Sit A. Tangens 1. R. Radius. B. Tangens 2.

Sit C. Sinus 1. D. Secans 2.

Cum Radius medius sit inter A. & B. (§.20.) erit Rectangulum ex A. in B. æquale Quadrato ex Radio (1.1.6.) & quia Radius medius quoque est inter C. & D. (§.21.) erit Rectangulum sub C. & D. æquale Quadrato ex Radio (1.1.6.) ergo Rectangulum ex A. in B. æquatur Rectangulo sub C. & D. (3.P.) ergo latera reciproca proportionalia sunt (1.1.6.) vt A. Tangens 1. ad C. Sinum 1. ita D. Secans 2. ad B. Tangentem 2. Idem est de Sinu 2. & Secante 1. propter eandem rationem.

27. *Tangentes 1. & 2. cuiusque Arcus reciproce proportionales sunt cum Tangente 1. & 2. cuiuslibet alterius Arcus, vel cum Sinu 1. & Secante 2. vel cum Sinu 2. & Secante 1. Item Sinus 1. & Secans 2. onius Arcus reciproce proportionales sunt cum Sinu 1. & Secante 2. vel cum Sinu 2. & Secante 1. cuiusque alterius Arcus, & è contra.*

*Demonstratio eadem prorsus est, quia Radius medius est inter hos, & illos (9. 20. & 21.) ergo Rectangula erunt æqualia, & latera reciproca, vt antea (1. l. 6.)*

28. *Chorda differentia duorum Arcuum ad differentiam Sinuum 2. eorumdem rationem habet, quam Radius ad Sinum Arcus intermedij. Fig. 1.*

Sint duo Arcus BN. BG. ipsorum differentia NG. & recta GN: chorda differentie Arcuum. Sinus 2. Arcuum iuxta NL. GX. & eorum differentia NK. cum AT. perpendicularis sit ad chordam GN. bifariam secabit chordam, & Arcum (2. l. 3.) ergo Arcus BT. est Arcus intermedius, cuiusque Sinus TF. igitur quia GE. perpendicularis est ad BA. & AT. ad GN. & Anguli Verticales AVB. GVT. sunt æquales æquabitur EAV. Angulo VGN. (3. l. 1.) ergo quia VGN. cum GNK. vnum re-ctam efficit, & AVE. cum EAV. constituit quoq; rectum, æquales erunt etiam BVA. GNK. & cum æquales sint AVE. ATF. (2. l. 1.) æquales item erunt ATF. GNK. igitur Triangula Rectangula ATF. GNK. Equiangula sunt (3. l. 1.) & latera proportionalia (2. l. 6.) ergo chorda GN. ad NK. differentiam Sinuum secundorum est, vt Radius AT. ad Sinum TF. Arcus intermedij BT. (Alia proportionales reperiuntur apud Lansbergium, Clavius, & alios, quas omitto, quia ad nostram methodum superflue sunt,

CAPVT TERTIVM.

DE LATERIBVS FIGVRARVM regularium.

29. **L**atera figurarum regularium, atque Sinus inde exorti eò erunt exactiores, quo Radij divisio maior exister, & quia in extractione Radicum irrationalium elici nequit numerus verus, & in operationum continuatione augetur error, ab evadat iste insensibilis, expedit quatuor, vel sex cyphas addere Radio præter eas, quæ in Sinuum Tabulam electæ fuerint: veluti si Sinus investigandi sint ad Radium; 100. 000. 000. sumatur ad operationem Radius 1000. 000. 000. 000. & ex Sinibus inventis, reijciantur quatuor litteræ ad dextram, & Sinus absque errore sensibili remanebunt.

De latere Hexagoni.

30. Latus Hexagoni est ipsemet Radius circuli (5. p. 3. Geometrie Practicæ) ergo si Radius statuat 1000. 000. 000. 000. hic etiam erit valor lateris Hexagoni.

De latere Trianguli. Fig. 2.

31. Circulo in sex partes diviso, est ABC. Triangulû equilaterû (5. p. 3.) & ducta BD. erit ipsa latus Hexagoni: ergo cum Angulus ABD. in Semicirculo rectus sit (3. l. 3) Quadratum ex AD. æquabitur duobus Quadratis AB. BD. (4. l. 2.) & quia AD. Diameter dupla est Radij AB. erit AD. 2000. 000. 000. 000. eius Quadratum 4000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. & cum BD. sit latus Hexagoni æquale Radio, erit eius Quadratum 1000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. quo sublato ex Quadrato AD. remanebit Quadratû ex AB. 3. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. 000. cuius radix quadrata est latus Trianguli AB. 1732050807568.

Del P. I. Zaragoza.

B. 2.

De latere Quadrati. Fig. 3.

32 Si duæ Diametri AB., CD. secantur ad Angulos rectos, erunt CA. AD. latera Quadrati (s.p. 4.) ergo quia Angulus ad A. rectus est, duò Quadrata CA. AD. æquabuntur Quadrato ex CD. (4.1.2.) cumque DA. AC. sint æquales; vnum quòdque Quadratum dimidium erit Quadrati CD. ergo existente Quadrato 4.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000. est Quadratum ex AC. eius radix quadrata erit latus AC. 1414213562373.

De latere Pentagoni. Fig. 4.

33 Sit BC. Diamèter, DA. Radius perpendicularis, DE. dimidium DC. sit EF. æqualis ipsi EA. & ducantur AF. quæ erit latus Pentagoni. Ita practicos operari ait Garamuel in sua Geometria, pag. 333. & querit: An ne bene? Illam per Sinus probat, & ita concludit: Ergo secura est regula. Nequeo satis mirari tantum Mathematicum Sinus adhibuisse in examen propositionis à Protonoe demonstratæ, lib. 1. cap. 9. Almg. ac deinceps à Clauio, & Herigonio in Schol. prop. 10. lib. 13. & à pluribus alijs demonstratur etiam in nostra Geometria Minorum, part. 2. prop. 167. vndè Sinus per hanc examinandi sunt, non è conuerto.

34 Quadratum AE. æquatur ED. DA. & AF. ipsis FD. DA. (4.1.2.)  
Quæ AD. 10000000000000000000000000  
Quæ DE. 25000000000000000000000000  
Quæ AE. 12500000000000000000000000  
Eius Radix Qa est latus AE. vel EF. 1118033988749  
ED. est dimidium Radij. 500000000000  
Dempra ED. lex EF. est FD. 618033988749  
Quæ FD. est 381966011248999058585001  
Quæ AD. est 10000000000000000000000000  
Summa Quæ 1381966011248999058585001  
Eius Radix Qa est AF. 1175570504584  
Et est latus Pentagoni, uti iam diximus. De

De latere Quindecagoni. Fig. 5.

35 Sit ABDEG. Pentagonum, & ACF. Triangulum. Arcus AB. BD. graduum 72. eritque ABD. graduum 144. cum verò AC. circuli sit tertia pars, graduum 120. erit CD. graduum 24. Arcus Quindecagoni, quia autem ABH. AGH. Semicirculi æquales sunt; si demantur Arcus æquales ABD. AGE. reliquentur æquales DH. HE. ergo Radius ZH. bifariam secat chordâ DE. & est ipsi perpendicularis, item CF. (2.1.3.) eruntq; DE. CF. parallelæ inter se, vti etiam perpendiculares ad illas DS. RP. (13.P.) igitur cum Quadratum ex CD. æquetur Quadratis CS. & DS. (4.1.2.) inventis CS. & DS. reperta erit, & CD. quæ latus est Quindecagoni.

36 Praxis talis est.

CF. latus Trianguli.	1732050807568
DE. latus Pentagoni.	1175570504584
CP. est dimidium CF.	866025403784
DR. est dimidium DE.	587785252292
Differentia est CS.	278240151492
Quæ CP.	749999999999240241518656
Quæ DR.	345491502811970091253264
Aolatris ex Quadrato Radij ZC. & ZD. remanebunt quadrata ex ZP. & ZR. (4.1.2.)	
Quæ ex ZP.	250000000000759758481344
Quæ ex ZR.	654508497188029908746736
Radix quadrata est ZP.	500000000000
Radix quadrata est ZR.	809016994375
Diferentia est PR. vel SD.	309016994375
Differentia CP. & DR. est CS.	278240151492
Quæ ex SD.	95491502812558781640625
Quæ ex CS.	77417581902291109926064
Summa est.	172909082714849891456689
Eius Radix quadrata est CD.	415823381635
Et hæc est latus Quindecagoni.	



De latere Decagoni. Fig. 5.

37 Latus Decagoni est DH. atque eius Quadratum æquale Quadratis DR. RH.

Radius ZH. est.	1000000000000
ZR. per §. 36. est.	809016994375
Differentia est RH.	190983005625
DR. per §. 36. est.	587785252292
Quæ ex RH. est.	36474508437558781640625
Quæ ex DR. est.	345491502811970091253264
Duorum summa.	381966011249528872893889
Radix quadrata est DH.	618033988749

Atque hoc est latus Decagoni, eodem modo reperientur figuræ omnes duplorum laterum.

CAPVT QVARTVM.

METHODVS INVESTIGANDI SINVS,

Tangentes, & Secantes exponitur.

38 Invenire Sinus graduum 60. 45. 36. 30. 18. & 12. item Sinus complementorum suorum.

Quoniam semissis chordæ Sinus est dimidij Arcus (§. 17.) Triangulum verò gradus 120. subtendit, Quadratum 90. Pentagonum 72. Hexagonum 60. Decagonum 36. Quindecagonum 24. semisses chordarum, erunt Sinus dimidiorum Arcuum.

	Arc.	Chordæ.	Gr.	Sinus.
Triang.	120.	1732050807568.	60	866025403784
Quadr.	90.	1414213562373	45	707106781186
Pentag.	72.	1175570504584	36	587785252292
Hexag.	60.	1000000000000	30	500000000000
Decag.	36.	618033988749	18	309016994374
Quinde.	24	415823381635	12	207911690817

Invenire Sinus complementorum.

39 Quoniam Sinus 1. & 2. æque possunt ac Radius (§. 18.) si Quadratum ex Sinu 1. subducatur ex Quadrato Radij, & à residuo extrahatur Radix quadrata; erit hæc Radix Sinus 2. vel Sinus complementi.

Sinus 1. gr. 36. est.	587785252292
Eius Quæ est.	345491502811970091253264
Quæ ex Radio.	100000000000000000000000
Residuum est.	654508497188029908746736
Radix quadrata est Sinus 2. gr. 36.	809016994374

Atque etiam Sinus 1. complementi sui, quod est graduum 54. hac arte reperientur Sinus secundi, si cognoscantur primi, & vice versa primi, si cognoscantur secundi.

Grad.	Sinus.	Complement.	Sinus.
60	866025403784	30	500000000000
45	707106781186	45	707106781186
36	587785252292	54	809016994374
30	500000000000	60	866025403784
18	309016994374	72	951056516299
12	207911690817	78	978147600733

Invenire Sinus semissis, vel Arcus dupli.

40 Quoniam Sinus 1. vnius Arcus medio loco proportionalis est inter Semiradium, & Sinum Versum Arcus dupli (§. 19.) si Sinus Versus ducatur in Semiradium, Radix quadrata producti erit Sinus 1. dimidij Arcus. Si verò Sinus Arcus multiplicetur per Semiradium; Radix quadrata producti erit Sinus Versus Arcus dupli, eius autem differentia ad Radium erit Sinus 2. eiusdem Arcus dupli, & per §. 39. inuenietur Sinus 1.

Ex Arcu gr. 12. & quæritur Sinus gr. 6. & 24.

Radius.	1000000000000
Sinus 2.gr.12.	978147600733
Sinus Versus.gr.12.	21852399267
Semiradius.	500000000000
Productus.	1092619963350000000000
Eius Radix quadrata est Sinus gr.6.	104528463267
Eius Sinus 2. per §. 39. est.	994521895368

41. Pari artificio reperientur Sinus 1. & 2. graduū 3. Insuper 1. gr. 30. min. deinde Sinus min. 45. Tandem Sinus dimidiorum complementorum, &c.

Grad.	Sinus.	Compl.	Sinus.
2. 00	207911690817	78. 00	968147600378
6. 00	104528463267	84. 00	994521895368
13. 00	52335956242	87. 00	998629534754
21. 30	26176948307	88. 30	999657324975
0. 45	13089595571	89. 15	999914327574

42. Præterea inuenientur Sinus dimidiorū complementorū. Et quoniam Sinus 2.gr.78. est 207911690817. subducto eo ex Radio, supererit Sinus Versus 792088309183 qui multiplicatus per Semiradium, & eruta radice quadrata; Sinus 1. graduum 39. erit 629320391049. & Sinus 2. per §. 39. erit 777145961456. eodem pacto reperientur omnes subsequentes.

39. 00	629320391049	51. 00	777145961456
19. 30	333806359233	70. 30	942641491092
9. 45	169349503849	80. 15	985556059058
42. 00	669130606358	48. 00	743144825457
21. 00	358367949545	69. 00	933580426497
10. 30	182235525492	79. 30	983254907563
5. 15	91501618663	84. 45	995802927574
43. 30	688354575693	46. 30	725374371012
21. 45	370557437509	68. 15	928809552871
44. 15	697790459841	45. 45	716301943424

Insuper

43. Insuper Sinus semisis horum complementorum.

25.30	430511096808	64.30	902585284349
12.45	220697435021	77.15	975342320508
35.15	577145190073	54.45	816641555161
24.00	406736643075	66.00	913545457642
34.30	566406236924	55.30	824126188622
17.15	296541574975	72.45	955019944457
39.45	639439001980	50.15	768841832073
23.15	394743856384	66.45	918791210148

44. Deinde Sinus semisis horum complementorum.

32.15	533614515915	57.45	845727821703
33.00	544639035015	57.00	838670567945
16.30	284015344703	73.30	858819734868
8.15	143492621991	81.45	989651386819
27.45	465614520325	62.15	884987634463

Tandem Sinus semisis horum complementorum.

28.30	477158760259	61.30	878857112661
14.15	246153293028	75.45	969230909706
36.45	598324600570	53.15	801253812691
30.45	511293086077	59.15	859406411501

45. Sicut ex Sinu graduum 12. orti sunt Sinus trigintaduo, & suorū complementorum, ita eadem praxi §. 40. & 42. nascentur 16. Sinus cum suis complementis, è Sinu graduum 36. deinde 8. è Sinu graduū 30. ac deinceps 4. è Sinu gr. 45. qui omnes 60. summam efficiunt, cum complementis autem summam 120. distantes inter se minutis 45. & in Tabulam referentur hoc ordine.

Grad.	Sinus 1.	Sinus 2.	Compl.
0. 45	13089595571	999914327574	89. 15
1. 30	26176948307	999657324975	88. 30
2. 15	39259815759	999229036240	87. 45
3. 0	52335956242	998629534754	87. 0
3. 45	65403129230	997858933238	86. 15
4. 30	78459095727	996917333733	85. 30
5. 15	91501618663	995804927574	84. 45

C

Hac

Hac ratione continuabitur vsque ad gradus 45. descendendo, ascendendo verò per illorum complementa vsque ad gr. 89. 15. min.

*Invenire Sinus vnus minuti.*

46 Quoniam minimus Sinus repertus fuit minutorum 45. inquirendo Sinus semissium procedatur vsque ad Arcum vno minuto minorem, quod contingeret in sexta semisse hac arte.

Min.	Sinus 1.	Sinus 2.
45.	A. 013089595571	999914327574
45 1 2	B. 006544937697	999978581664
45 1 4	C. 003272486506	999994645402
45 1 8	D. 001636245443	999998661346
45 1 16	E. 000818122995	99999665335
45 1 32	F. 000409061532	99999916331
45 1 64	G. 000204530770	99999979082
45 1 64	H. 000290888203	99999957692

47 Ergo quia peruentum est eò vsque vbi Arcus, & Sinus insensibiliter proportionales sunt, nam vt Arcus F. duplus est Arcus G.  $\frac{45}{64}$  illius quoque Sinus duplus est huius, reperietur per regulam auream Sinus 1. min. scilicet, vt numeratur 45. ad denominatorem 64. ita Sinus Arcus G. ad Sinum Arcus H. qui Sinus est 1. minut. ergo ducto 000204530770. in 64. diuiso autem producto per 45. prodit Sias 1. min. qui est 900290888203. atque eius Sinus 2. per §. 39. est 99999957692.

*Ratio promovendi Tabulam.*

48 Cognitis Sinibus 1. & 2. vnus minuti invenietur Sinus Arcuum duplorum per §. 40. hac arte.

Sinus 1. min.	290888203
Semiradius.	50000000000
Productus.	14544410150000000000
Eius Radix quadrata est Sinus Versus 2. min.	169232
Ergo Sinus 2. per §. 11.	999999830868
Et Sinus 1. per §. 39.	581776385

Continuando hoc modo reperientur Sinus 4. 8. 16. 32. minorum: ergo Sinus gr. 1. 4. min. igitur Sinus gr. 2. 8. min. &c. ergo Sinus semissis suorum complementorum, vti in §. 40. &c.

*Modus perficendi Tabulam.*

49 Inventis Sinibus min. 2. & 4. reperientur Sinus min. 3. ita: duplato Sinu 1. min. habebimus chordam 2. min. eritque 581776406. quæ etiam est chorda differentie duorum Arcuum 2. & 4. min. differentia Sinuum secundorum in minutis 2. & 4. est 507696. ergo proportionales sunt per §. 28.

Chords 2. min.	581776406
Ad differentiam Sinuum secundorum.	507696
Vt Radius.	100000000000
Ad Sinum min. 3.	872664515

Multiplicato 2. in 3. diuiso autem producto per 1. exit quartus, qui Sinus est 3. min. Arcus, scilicet, medij inter 2. & 4. min.

Rursum chorda ad differentiam Sinuum primorum, vt Radius ad Sinum 2. 3. min.

50 Determinato Sinu 3. min. reperientur Sinus Arcuum duorum 6. 12. 24. 48. 1. gr. 36. &c. vti in §. 48. ergo etiam Sinus semissis suorum complementorum, &c. vti in §. 40. Notis Sinibus min. 4. & 6. inuenientur Sinus minut. 5. qui Arcus intermedius est 1. ergo Arcus dupli 10. 20. 40. minut. &c. Agnitis Sinibus minut. 8. & 10. reperientur Sinus minut. 9. & illorum dupli 18. 36. &c. Ita procedendum est ad inueniendos omnes Sinus minorum imparium, & suorum duplorum, &c.

donec *minut.* 45. ad impleantur, quorumduplis, & complementorum semilibus consumabuntur, & perficiuntur Tabulæ. In Sinibus minorum imparium, non levis compendij est. diuisionem perpetuò esse chordam *minut.* 2. vti in §. 49.

*Exactior ratio ad Tabulas perficiendas.*

§1 Qui perfectissimas Tabulas conficere velit, assumat pro Radio unitatem cum 20. cyphris, & reperitis Sinibus, vt antea vsque ad Sinum *minut.* 45. ad inueniendum Sinum 1. *min.* continuabit bipartitionem prout in §. 46. duabus operationibus superadditis: hoc est,  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$  qui sunt ferè secunda 11. iamque evadet insensibilior differentia inter Arcus, & Sinus: quare reperietur Sinus secundorum 10. per regulam auream, vt  $\frac{1}{256}$  ad Sinum suum, ita  $\frac{1}{2}$  ad Sinum suum. Cognito Sinu  $\frac{1}{2}$  qui sunt *sec.* 10. inueniuntur Sinus Arcuum duplorum nempe *sec.* 20. & 40. deinde Sinus Arcus intermedij per §. 49. qui sunt *sec.* 30. Deinde Sinus Arcuum duplorum, *min.* 1. 2. 4. 8. &c. & absoluetur Tabula, vt in præcedentibus. Denique reijcientur ab vniversis Sinibus inventis quinque litteræ ad dextram, & remanebunt Sinus ad Radium 1. cum 15. cyphris, vel abiectis 8. litteris, supererit Radius 1. cum 12. cyphris. Qui autem laboris in patiens non fuerit ad decades secundorum, poterit Canonem perficere.

*Methodus ad investigandas Tangentes.*

§2 Quia proportionales sunt, Sinus 2. ad Sinum 1. vt Radius ad Tangentem, si multiplicetur Sinus 1. in Radium, & productus dividatur per Sinum 2. erit quotiens Tangens: per §. 22. è contra, si Sinus 2. ducatur in Radium, & productus dividatur per Sinum 1. prodit Tangens

gens 2. eiusdem Arcus. Rursus quia Radius media proportione est ad Tangentem 1. & 2. si Quadratum Radij dividatur per Tangentem 1. exiit Tangens 2. per §. 20.

*Ratio inquirendi Secantes.*

§3 Cum Radius medius proportionalis sit inter Sinum 2. & Secantem 1. per §. 21. si dividatur Quadratum Radij per Sinum 2. fiet quotiens Secans 1. & insuper cum Radius medius proportionalis, sit inter Sinum 1. & Secantem 2. si Quadratum Radij dividatur per Sinum 1. prodibit Secans 2.

§4 Pari artificio reperientur vniversæ Tangentes, & Secantes graduum omnium, & minorum Quadrantis, & confecta erit Tabula, Sinuum, Tangentium, & Secantium. Verùm quia operationes Logarithmorum sunt longè faciliores; exponemus modo artem, quæ Sinus, Tangentes, & Secantes transferantur in Logarithmos.

## CAPVT QVINTVM.

### DE NATVRA, ET PROPRIETATIBVS Logarithmorum.

§5 **L**ogarithmi sunt quidam numeri artificiales, qui in Progressione Arithmetica veris numeris Geometricæ progressionis respondent. Prima eorum adinventio, & Trigonometrico Canoni applicatio Ioanni Nepero Scoto, Varoni de Merchiston debetur; tam etsi Logarithmorum species ab isto Authore edita commodior non fuerit, ipsius tamen speculationi debemus illam, qua hodie utimur. Arithmetici enim cognitis Logarithmorum suorum incommensurabilis, cum salus iam tenectute fracta ad alios nouos calculandos non sufficeret; præbuit formam, quam deinceps Henricus Briggs, & Adrianus Vlac, eius consilio executioni tradidit.

Del P. I. Zaragosa.

darunt, estque illam, quæ hodie seruator. Vniuersa illorum fabrica, & vsus à sequentibus progressionum proprietatibus pendet.

56 In quacumque Progressione Arithmetica (cuius nempe termini procedunt semper cum equali excessu) summa extremorum æquatur summa duorum quorumlibet terminorum ab extremis equaliter distantium, necnon duplo medijs terminis.

Sint pro exemplis Progressiones sequentes.

Termin.	a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	m.	n.
Progressio. I.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.
Progressio. II.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	23.	26.	29.
Progressio. III.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Progressio. IV.	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

57 In qualibet appositarum quatuor Progressionum termini primus, & nonus, qui & vltimus est, æquantur tertio, & septimo, siquidem in Progressione I. terminus a. est 4. vltimus verò 20. summa est 24. Tertius est 8. Septimus autem 16. at 8. & 16. efficiunt quoque 24. In Progressione II. a. & n. 5. 29. sunt 34. item c. & g. ex 11. quoque & 23. fiunt 34. &c. At in omnibus Progressionibus, si terminus medius dupletur, qui est e. eius duplum æquabitur summæ duorum extremorum, sicuti in Progressione I. 12. & 12. faciunt 24. ac etiam 4. & 20. In II. bis 17. faciunt 34. vt 5. & 29. & sic de cæteris.

58 Huius ratio est, quia cum excessus sit semper æqualis; quò terminus a. minor est e. eò vltimus maior est g. ergo a. & vltimus æquantur e. & g. Rursus quò a. est auctor medijs, eò vltimus maior est ipso medio; ergo a. & vltimus æquatur duplo medio.

59 Hinc perspicuum fit b. & g. æquari, & c. & f. cum terminis equaliter sint a. & vltimo; æquales quoque inter se erunt (3. P.) item inferitur in quacumque Progressione Arithmetica, si ex summa quorumlibet duorum termini-

orum dematur alter; residuum esse terminum alium, qui tantum distet à maiori, quantum minor à primo: veluti si ex summa tertij, & septimi auferatur a. exit n. qui tantum à g. distat, quantum c. ab a. cum enim æquidistantium summæ sint æquales, necessarium est dempto vno reliqui alium.

60 In quacumque Progressione Geometrica, Productus ex primo, & vltimo æquatur Producto duorum terminorum ab extremis equaliter distantium, vel producto, qui sit ex medio in se ipsum multiplicato.

Num. term.	a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	m.	n.
Progressio I.	3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.	384.	768.
Progressio II.	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.
Progressio III.	1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.

Veluti in Progressione I. si c. & g. qui sunt 12. & 192. multiplicentur, fit Productus 2304. ac idem producitur ex a. & n. qui sunt 3. & 768. Rursusque idem si e. qui est terminus medius, in se ipsum ducatur 48. in 48. producitur 2304. idem est si multiplicentur d. & f. &c. Horum demonstratio brevis est, quia ratio a. ad c. est duplicata rationis a. ad b. & etiam ratio g. ad n. erit quoque duplicata eiusdem rationis: ergo a. est ad c. vt g. ad n. (1. l. 5.) quare rectangulum sub a. & n. æquatur rectangulo ex c. in g. (1. l. 6.) Rursus ratio a. ad n. ex illisdem rationibus componitur quibus ratio a. ad n. ergo sunt proportionales a. ad c. vt e. ad n. quare rectangulum sub a. & n. æquatur Quadrato e. & eodem modo in omnibus æquidistantibus ab extremis, &c.

61 Vnde colligitur Productum quorumlibet duorum terminorum ab extremis equaliter distantium, æquari Producto quorumcumque aliorum duorum terminorum ab illisdem extremis equaliter distantium: vterlibet æquatur Producto extremorum (5. 59.) ergo inter se sunt æquales (3. P.) idem inferitur si Productus quorumlibet duorum terminorum dividatur per quemlibet alium terminum; Quotiens

erit novus terminus, qui à maiori tantum distabit, quantum divisor à minori. Nam cum Producti æquidistantium sint æquales, si Productus dividatur per vnum terminum, necessariò erit Quotiens alius terminus æquidistantis; quare altero Producto per terminum *l.* diviso; fit Quotiens terminus vltimus, qui à maiori multiplicato tantum distat, quantum minor à primo.

62 Si dua Progressiones vna Arithmetica, altera verò Geometrica, sibi ipsas respondeant, summa, & subtractio terminorum Arithmetiæ equipollet semper multiplicationi, & divisioni Geometricorum, termini autem Arithmetici erant Geometricorum Logarithmi.

Exemplum sit in sequentibus Progressionibus.

Termin.	Progress. Geometrica.				Progress. Arithmetica.						
	I.	II.	III.	IV.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
a.	3	2	4	1	a.	5	9	1	0	8	4
b.	6	6	8	2	b.	7	10	2	1	7	3
c.	12	18	16	4	c.	9	11	3	2	6	2
d.	24	54	32	8	d.	11	12	4	3	5	1
e.	48	162	64	16	e.	13	13	5	4	4	0
f.	96	486	128	32	f.	15	14	6	5	3	-1
g.	192	1458	256	64	g.	17	15	7	6	2	-2
m.	384	4374	512	128	m.	19	16	8	7	1	-3
n.	768	13122	1024	256	n.	21	17	9	8	0	-4

63 In Progressione Geometrica si termini *d.* & *f.* multiplicetur, scilicet, 24. per 96. & Productus 2304. dividatur per *b.* qui est 6. fiet Quotiens 384. qui octavus terminus est. Assumpta mox Progressione Arithmetica I. si *d.* & *f.* in vnam summam redigantur, videlicet 11. & 15. fiet 26. ablato *b.* qui est 7. remanebunt 19. qui est *m.* Eadem est ratio, de quacumque Progressione Geometrica, si enim Productus quorumlibet duorum terminorum dividatur per alium; Quotiens tantum à maiori distabit, quantum

tum divisor à minori per §. 60. in Arithmetica autem si ex duorum terminorum summa auferatur alius, residuum tantum à maiori distabit, quantum subtractus à minori per §. 59. ergo semper ex summa, & subtractione terminorum Arithmetiæ exhibet alius terminus, qui procedenti ex multiplicatione, & divisione Geometricorum respondeat.

De infinitis Logarithmorum speciebus.

64 Terminos Progressionis Arithmeticæ, quæ Geometricæ correspondet terminorum Geometricorum, Logarithmos appellamus, scilicet, à voce Greca, *Logos*, Latine Ratio, & *Arithmos*. Latine numerus quare Logarithmi sunt numeri rationales, & relati, qui Progressionis Geometricæ veris, & absolutis terminis respondet. Cum autem eisdem I. Progressioni Geometricæ apponi possint, non tantum sex Arithmeticæ, sed etiã aliæ infinitæ, quæ diverso excessu possunt effingi, propterea Logarithmorum species infinitæ sunt pro vna, eademque Progressione Geometrica; & vice versa, quia I. Progressioni Arithmeticæ, non solum respondet quatuor Geometricæ, sed etiam infinitæ aliæ, quæ adstrui possunt duplæ, triplæ, quadruplæ, &c. In quacumque specie rationis, ideò iidem Logarithmi diversis numeris absolutis infinitè correspondere valent.

De Logarithmis Directis, & Retrogradis.

65 Logarithmi Directi sunt, qui terminorum Geometricorum ordinem servant, crescunt autem Logarithmi, quando numeri quibus respondent, augentur: ex hac specie sunt I. II. III. & IV. Progressio Arithmetica. Retrogradi verò sunt ij, qui contra terminorum Geometricorum ordinem procedunt, & ubi augentur isti, illi decrescunt, & è contra. Ex hac specie sunt V. & VI. Progressio Arithmetica, quia autem ubi ad unitatem per-

venitur, nullus iam extat numerus minor, qui verus sit, promovetur Logarithmi cum cyphra, & numeris figuratis, vel fictis, qui nihilo minores sunt, & hac lineola denotantur  $\rightarrow$  quæ significat *minus*, veluti ista  $\rightarrow plus$ : atque aded Logarithmi cyphra inferiores sunt *diminuti, deffectivi, & negativi.*

*Incommoda Logarithmorum refluentium.*

65 Et si summa, & subtractio in Logarithmis retrogradis æquipolleat multiplicationi, & divisioni terminorum Geometricorum, quando tamen Logarithmi signa habent contraria  $\rightarrow$  &  $-$  necessarium est additionis, & subtractionis operationes contrarias esse, uti admonui in lib. 3. cap. 3. nostræ Arithmeticæ, quod quidem magnum incommodum affert, maximè ijs, qui in Algebraicis operationibus parum versati sunt. Exempli gratia, si in Progressione I. Geometrica multiplicentur *b.* & *f.* hoc est 6. per 96. procreabitur 576. quibus divisus per *a.* qui est 3. gignetur *g.* qui est 192. Assumpta igitur Progressione VI. Arithmetica, si addantur *b.* & *f.* hoc est  $\rightarrow 3$  &  $- 1$ . additionis vice subducetur *r.* ex 3. & supererit  $\rightarrow 2$ . quæ summa erit ex  $\rightarrow 3$ .  $- 1$ . Si ex hæc summa  $\rightarrow 2$ . auferatur *a.* terminus, qui est  $\rightarrow 4$ . quia 4. demi nequit ex 2. contrario modo subtrahetur 2. ex 4. & remanebunt 2. cum signo contrario ita  $- 2$ . qui est *g.* & respondet num. 192. Progressionis Geometricæ I.

Nemò inficiari potest has operationes molestas esse ijs, præsertim, qui recens ad illas accedunt; quin etiam æquivocationis notoria sunt, & dubitationi utrum addi, vel subtrahi, vel statui cum signo  $\rightarrow$  vel  $-$  debeant. In extractione radicum (quæ mirabile Logarithmorum compendium est) eadem incommoda sæpius occurrunt. Neperus post exantlatas Logarithmorum retrogradorum Tabulas hæc incommoda agnovit, & largitus est formam Logarithmorum directæ procedentium, quos deinceps

efformarunt Briggsius, & Vlac, qui retrogradis præferendi sunt.

CAPVT SEXTVM.

ELECTIO LOGARITHMORVM

*Directorum.*

67

**T**amet si Logarithmi Directi antepondi sunt retrogradis, cum illorum species innumerae esse possint propter Progressionum infinitatem; electionis novæ materia superest. Ex omnibus Progressionum speciebus, optimæ sunt Geometricæ, quæ ab unitate incipiunt, & Arithmeticæ, quæ à cyphra, vel zero: ut sunt I V. Geometrica, & IV. Arithmetica, §. 62. Nam cum in operationibus terminorum Geometricorum sæpius multiplicandum, vel dividendum sit per terminum primum, si hic sit unitas, neque multiplicando augebit, neque dividendo minuet numerum. In terminis Arithmetice cyphra non adauget summam, neque subtractionem imminuit.

*Electio Progressionum Geometricæ, & Arithmeticæ.*

68 Selectis iam speciebus, deest individuorum electio, Progressiones enim Geometricæ, quæ ab unitate incipiunt infinitæ esse possunt, *dupla, tripla, quadrupla, &c.* Arithmeticæ verò, quæ à cyphra ordiantur infinitæ, quæque esse possunt, cum varijs intervallis 0. 1. 2. 3. 4. &c. Dico ergo Progressiones Logarithmis commodiores esse simpliciores, clariore, faciliores, & intelligentiæ magis obviae, ex Geometricis decupla, cuius univærsi termini ab unitate plus vnica cyphra, constant, quæ singulis terminis additur, veluti 1. 10. 100. 1000. &c. Ex Arithmetice verò illa optima est, cuius excessus est vnitas cum cyphris quotcumque, quas tamen non expedit minus esse, quam octo, ut hic apparet.

*Del P. I. Zaragoza.*

D2

Pp2

69. <i>Progres. Geometrica.</i>	<i>Termini.</i>	<i>Progres. Arithmetica</i>
<i>Numeri.</i>	<i>ni.</i>	<i>Logarithmi.</i>
1	a.	0.00000000
10	b.	1.00000000
100	c.	2.00000000
1000	d.	3.00000000
10000	e.	4.00000000
100000	f.	5.00000000
1000000	g.	6.00000000
10000000	m.	7.00000000
100000000	n.	8.00000000
1000000000	p.	9.00000000
10000000000	q.	10.00000000

70. *Prima Logarithmorum litteræ ad sinistram, quæ punctis distinguuntur, sunt eæ, quæ naturalem Progressionem constituunt cum excessu unitatis; has litteras vocamus Characteristicas, sunt enim veluti signum, aut character, quo designantur litteræ, quibus constat numerus Progressionis Geometricæ, cui ipsa respondet. Omnes enim numeri digiti, qui cadunt inter 1. & 10. Logarithmum suum habet inter cyphram, & 1.00000000. atque adeo Characteristicam habet cyphram 0. omnes numeri, qui duab<sup>9</sup> litteris constât, ac sunt inter 10. & 100. Logarithmos suos habent inter 1.00000000. & 2.00000000. quorum prima littera, vel Characteristica est unitas 1. Vniuersi numeri ex tribus litteris compositi, & inter 100. & 1000. cadentes; Logarithmos suos habent inter 2.00000000. & 3.00000000. quorum Characteristica est 2. ita vt Characteristica semper unitate minor sit litteris numeri, cui Logarithmus correspondet: quare si Characteristica sit 4 loquet iam numerum ex 5. litteris compositum esse; & e converso si numerus quinque litteris, vel Characteribus constet, erit Characteristica 4. & sic de reliquis.*

*Summa æquivalet multiplicationi.*

71. *Vniuersis Logarithmorum speciebus competit summam, & subtractionem terminorum Arithmetico- rum æquipollere multiplicationi, & divisioni Geometricorum per §. 62. Verum sola summa multiplicationi, & subtractio divisioni non æquivaleret, nisi Progressio Geometrica inciperet ab unitate, Arithmetica vero à cyphra; si enim ex summa Logarithmorum duorum subducatur primus. Multiplicatio autem numerorum correspondentium dividatur per primum, procreabuntur termini correspondentes (§. 62.) cum enim subtrahere cyphram, & dividere per unitatem, neque summam, neque multiplicationem imminuat, sequitur solam summam in nostris Logarithmis æquipollere semper multiplicationi. Id vero licet termini sint tres, vel quatuor, &c. Veluti si b. c. & f. addatur; constabitur Logarithmus 8.00000000. qui est n. at si b. & c. Geometricorum multiplicentur 10. per 100. prodabit 1000. hoc per f. multiplicato, qui est 100000. producet 100000000. qui est n. & Logarithmo 8.00000000. respondet.*

*Subtractio sola æquivaleret divisioni.*

72. *Provenit id ex §. 71. Nam cum ex summa e. & d. oriatur f. Logarithmus; si à f. auferatur d. necesse est reddi e. Par ratione si in Progressione Geometrica multiplicentur e. & d. gignetur f. ergo vice versa si f. dividatur per d. oriatur e. & subtractio Logarithmorum divisioni collateralium numerorum correspondebit semper.*



*De quadrata Radice, & medio proportionali.*

73. Si Logarithmus dupletur, vel ducatur in 2. produ-  
ctur Logarithmus numeri quadrati; si autem Logarithmus  
dividatur per 2. erit Quotiens Logarithmus Radicis.

Quia summa æquivaleret multiplicationi (§. 71.) ergo  
si multiplicato numero  $c$ . per semetipsum 100. per 100.  
exit  $c$ . qui est 10000. quadratus ex 100. si Logarith-  
mus  $c$ . assumatur bis, quod idem est ac multiplicare illum  
per 2. prodibit Logarithmus  $c$ . qui est 4. 00000000;  
Logarithmus quadrati ex 100. è contra si Logarithmus  
4. 00000000. dividatur per 2. iterum restituetur Loga-  
rithmus 2. 00000000. qui Logarithmus est numeri 100.  
radix quadrati 10000. Ergo quia ducto  $c$ . in  $c$ . & extra-  
cta radice Producti, radix illa est medium proportiona-  
le, si Logarithmi  $c$ . &  $c$ . addantur; semipsis summæ erit  
Logarithmus medij proportionalis.

*De reliquis potestatibus ipsarumque radicibus.*

74. Ducto numero in seipsum exit Quadratus: du-  
cto autem Quadrato in ipsummet numerum prodit Cu-  
bus: multiplicato item Cubo per eundem numerum; gignitur  
Quadrato Quadratus, & sic in infinitum, vti dixi  
in Arithmetica, lib. 2. cap. 1. ergo quia summa æquipollet  
multiplicationi (§. 71.) si Logarithmus addatur bis,  
conflabitur Logarithmus Quadrati: si verò addatur ter,  
fiat Logarithmus Cubi: denique si addatur quater, ha-  
bebitur Logarithmus Quadrati Quadrati, & sic in infinitum.  
Ergo etiam vice versa si Logarithmus Quadrati di-  
vidatur per 2. erit Quotiens  $R^2$  vel radix Quadrata, si  
autem Logarithmus dividatur per 3. reddetur Logarith-  
mus  $R^3$  vel radicis Cubicæ: & si Logarithmus Quadra-

to Quadrato dividatur per 4. reddetur Logarithmus ra-  
dicis Quarrato Quadratæ, vel  $R^4$  & sic in infinitum.

## CAPVT SEPTIMVM.

### DE ARTE INVENIENDI LOGARITHMOS

*intermedios.*

75. **D**Vos tantum Logarithmos in binos num-  
meros pro libitu assignare poterit Arith-  
meticus, reliqui omnes determinati  
sunt ex natura sua, & arte sunt indagandi. In no-  
stra fabrica numeris 1. & 10. decernimus Logarithmos  
0. 00000000. & 1. 00000000. promotis deinceps nume-  
ris in eadem ratione 1. 10. 100. 1000. &c. continua-  
buntur Logarithmi cum eodem excessu, vti in §. 69. sed  
cum inter 1. & 10. numeri intermedij 8. deficiant, ac in-  
ter 10. & 100. deficiant 89. & inter 100. & 1000. 899.  
&c. Ad inventio Logarithmorum illis respondentium  
specialem ingerit difficultatem, quæ in hoc capite exan-  
tanda venit, cuius intelligentia vnicè pendet a §. 71. 72.  
73. & 74.

76. Sicuti in Sinuum fabrica monitum est ad repe-  
riendos Sinus exactos, opus esse quatuor, vel sex cyphas  
addere Radio ob facturam, quæ in Radicum irrationali-  
um extractione fit; ita proctus in Logarithmis, si ij no-  
vem litteras habere oporteat, satius erit inchoare opera-  
tiones cum 15. vel 20. & post absolutam fabricam abijce-  
re ad dextram sex vltimas litteras, vel plures iuxta eas,  
quæ additæ fuerint. Fabrica horum Logarithmorum  
consistit in mediorum proportionalium ad inventionem  
per Radicem quadratam, veluti in Arithmetica

lib. 2. §. 51. dictum  
fuit.

Del P. J. Zaragoçá.

De Logarithmo numeri 2.

77 Quoniam numerus 2, inter 1. & 10. intercidit; addeamus singulis 20. cyphras, quò operatio fiat exactior, atque inter hos duos numeros inquiremus medium proportionale, eiusque Logarithmum (s. 73.) qui est numerus tertius C. sequentis Tabulæ. Quia autem 2. cadit inter A. & C. inter hos duos reperietur aliud medium proportionale, qui est D. cum suo Logarithmo per s. 73. mox inter C. & D. inuenietur aliud medium cum suo Logarithmo, qui est E. & hac arte inter proximè maiorem quam 2. & proximè minorem, continuabitur mediorum proportionalium adinuentio donec post operationes 32. extat L. qui est 1.999999999. ita proximus ipsi 2. vt insensibiliter ab eo differat, cuius Logarithmus, qui est 0.30102999578. haberi potest sine errore pro Logarithmo numeri 2. operationem videre licet in Tabula sequenti: Columna 1. continet numerorum ordinem ABC.&c. exigui characteres numeros denotant, inter quos assumptum est medium proportionale: veluti C. ab. significat tertium numerum, C. medium esse proportionalem inter A. & B. Similiter O. / n. denotat O. medium esse inter L.

& N. & sic de reliquis.



Form.

78 Formula investigandi Logarithmum numeri 2.

Numeri.	Logarithmi.
A.	0.0000000000000000
B.	1.0000000000000000
C. ab.	0.5000000000000000
D. ac.	0.2500000000000000
E. cd.	0.3750000000000000
F. de.	0.3125000000000000
G. df.	0.2812500000000000
H. fg.	0.2968750000000000
I. fh.	0.3046875000000000
L. hi.	0.3007812500000000
M. il.	0.3027343750000000
N. m.	0.3017578125000000
O. / n.	0.3012695312500000
P. lo.	0.3010253906250000
Q. op.	0.3011474609375000
R. pq.	0.3010864257812500
S. pr.	0.3010559082031250
T. ps.	0.3010406494140625
V. pt.	0.3010330200195312
X. pu.	0.3010292053222656
Y. ux.	0.3010311126704101
Z. xy.	0.3010301589960938
A. xz.	0.3010296821690938
B. za.	0.3010299205578125
C. zb.	0.3010300397812500
D. bc.	0.3010299801820312
E. cd.	0.3010300099843750
F. de.	0.3010299959831250
G. ef.	0.3010300023843750
H. fg.	0.3010299983690625
I. fh.	0.3010299969460938
L. fi.	0.3010299960156250
M. il.	0.3010299955492188
N. im.	0.3010299957812500

79 In præmissa Tabula, numeri A. & B. columnæ secundæ sunt 1. & 10. quibus singulis additæ sunt cyphræ sexdecim, reliqui sunt medij successivè extracti multiplicatis, scilicet, duobus, inter quos quæritur medium, & eruta radice Producti. Duo numeri primi columnæ tertiæ Logarithmi sunt ex 1. & 10. reliqui sunt Logarithmi mediorem, additis nimirum duobus Logarithmis, inter quos medium quæritur, & assumpta semisse summæ per §. 73.

80 Pari artificio, reperietur Logarithmus 3. quia autem 3. cadit inter 1. & 10. Locabuntur ij primùm, in Tabula additis cyphris, &c. Reperienturque semper medij proportionales inter proximè maiorem, & proximè minorem ipso 3. donec exeat numerus 3. cum cyphris decem, vel numerus 2. cum decem litteris 9. cuius Logarithmus sumi poterit pro Logarithmo numeri 3. absque errore sensibili. Idem dices de numero 7. cum hæc omnia speciali difficultate careant novam formulam exponere super vacuum esse duxi.

*Regula alia in Logarithmum numeri 3.*

81 Ducatur 3. in se ipsum toties quoties opus sit, ut exeat numerus, qui duabus primis litteris conveniat cum aliquo ex medijs in formula §. 78. repertis, & post multiplicationes 8. inventio 19683. in Tabula autem præmissa observo G. esse proximè ipso minorem: H. verò proximè maiorem. Sumo hos duos numeros cum suis Logarithmis, eruntque A. & B. formulæ sequentis. Continuetur deinde mediorem proportionalium ad inventio, suorumque Logarithmorum inter proximè maiorem, & minorem quam 19683. donec prodeat iste numerus cum cyphris quinque, & ubi perveneris ad operationes 24. invenias D. *ac*. qui sine errore sumi potest pro 19683. Itemque eius Logarithmus 0.2940612926. & immutata Characteristica cyphra in 4. quod numerus 19683. habet quinq;

litteras (§. 70.) erit verus Logarithmus 4. 2940912924. qui divitus per 9. (sumptus enim est novies numerus 3. in multiplicationibus 8.) erit 0.4771212547. qui est Logarithmus numeri 3.

82

Formula Logarithmi numeri 3.

	Numeri.	Logarithmi.
A.	19109529749704405	0.281250000000
B.	19809567785503387	0.296875000000
C. <i>ab.</i>	19456400615886356	0.289062500000
D. <i>bc.</i>	19632190067904055	0.292968750000
E. <i>bd.</i>	19720679499652940	0.294921875000
F. <i>de.</i>	19676385041348564	0.293945312500
G. <i>ef.</i>	19698529840896686	0.294433593750
H. <i>fg.</i>	19687449330325334	0.294189453125
I. <i>gh.</i>	19681916408356205	0.294067382812
L. <i>hi.</i>	19684682674943266	0.294128417968
M. <i>il.</i>	19683299493053775	0.294097900390
N. <i>im.</i>	19682607938556427	0.294082641601
O. <i>mn.</i>	19682953712767906	0.294090270996
P. <i>mo.</i>	19683126602151535	0.294094085693
Q. <i>op.</i>	19683040157269895	0.294092178344
R. <i>oq.</i>	19682996934971445	0.294091224670
S. <i>qr.</i>	19683018546108806	0.294091701507
T. <i>rs.</i>	19683007740537159	0.294091463088
V. <i>rt.</i>	19683002337753560	0.294091343879
X. <i>ra.</i>	19682999636362317	0.294091284275
Y. <i>ux.</i>	19683000987057892	0.294091314077
Z. <i>xy.</i>	19683000311710093	0.294091299176
A. <i>xz.</i>	19682999974036202	0.294091291725
B. <i>za.</i>	19683000142873147	0.294091295450
C. <i>ab.</i>	19683000658454675	0.294091293588
D. <i>ac.</i>	19683000016245438	0.294091292656

De Logarithmo numeri 11.

83. Si inter numeros 10. & 100. s. 69. continetur inventio mediorum proportionalium inter proximè maiorem, & minorè ipso 11. donec exeat numerus etiam 11. cum novem, vel decem cyphris, repertus erit Logarithmus numeri 11. *Aliter* si numerus 11. multiplicetur in se ipsum sexies; prodibit 19487171. qui cadit inter C. & D. s. 82. Si verò sumantur illi numeri cum suis Logarithmis, erunt duo primi Tabulæ sequentis nempe A. & B.

84. *Formula Logarithmi numeri 11.*

	Numeri.	Logarithmi.
A.	19456400615886356	0.289062500000
B.	19632190067904055	0.292968750000
C. ab.	19544097700542905	0.291015625000
D. ac.	19500199858919038	0.290039062500
E. ad.	19478287926431815	0.289550781250
F. ae.	19489240813202296	0.289794921875
G. af.	19483763600165150	0.289672851562
H. ag.	19486502014243704	0.289733886718
I. ah.	19487871365609615	0.289764404296
L. bi.	19487186677898736	0.289749145507
M. bl.	19486844343064292	0.289741516113
N. bm.	19487015509727466	0.289745330810
O. bn.	19487101093622856	0.289747238159
P. bo.	19487143885713812	0.289748191833
Q. bp.	19487165281794528	0.289748668670
R. bq.	19487175979843695	0.289748907089
S. br.	19487170630818377	0.289741787879
T. bs.	19487173305330853	0.289748847484
V. bt.	19487171968074569	0.289748317082
X. bu.	19487171299446464	0.289748802781
Y. bv.	16487170965132417	0.289748795350
Z. bw.	16487171130289439	0.289748799055
A. bz.	16487171048710927	0.289748797193
B. by.	19487171006921672	0.289748796261

Pro

85. Promotà mediorum proportionalium inventioe inter proximè maiorem, & minorem, quam 19487171. post operationes 22. repertus B. 70. cuius decem prima litteræ non differunt à numero verò. Sumpto ergo eius Logarithmo, & immutata Characteristica cyphra in 7. quia numerus 8. litteras habet, erit 7.2897487962. Logarithmus numeri 19487171. Divisus autem Logarithmus per 7. (sexies enim multiplicatus in se ipsum numerus 1.) quod idem est ac elicere R<sup>7</sup> per 7. erit Logarithmus numeri 11. qui est 1.0413926852.

De Logarithmis per summas, & subtractiones.

86. Inventis Logarithmis numerorum 2. 3. & 10. per facile habentur alij plures, nam cum summa æquipolleet multiplicationi, subtractio verò divisioni. Si numerus 2. ducatur in se ipsum gignetur 4. ergo assumpto Logarithmo numeri 2. bis constabitur Logarithmus numeri 4. & quia bis 4. efficiunt 8. additis Logarithmis ex 4. & 2. fiet Logarithmus numeri 8. quia autem tria divisio per 2. fit quotiens 5. Si subducatur Logarithmus numeri 2. ex Logarithmo numeri 10. supererit Logarithmus numeri 5. &c. Quæ si duo numeri, multiplicati vel divisi alium efficiant numerum, vel subtractio Logarithmorum suorum dabit alterius Logarithmum, hæc arte nullo fere negotio plurium Logarithma reperiri possunt.

De Logarithmia numerorum primorum.

87. Numeri primi sunt ij. quos sola unitas metiri potest, nec ab aliorum integrorum multiplicatione gignuntur, veluti 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. &c. quos usque ad 10000. invenies

Del P. I. Zaragoza, 1.

stus

studiosus in sectione 5, miscellanea Francisci Schooten. Inter 1. & 1000. sunt numeri primi 168. Hi omnes investigandi sunt, vt Logarithmus numeri 2. vel vt Logarithmus numeri 3. & 11. sed quò altius ascendunt numeri, eò redduntur breviores operationes.

*De Logarithmis per proportionem.*

88 Quando numerus superat 1000. licet sit numerus primus, Logarithmus eius ita inuenietur. Quæritur *exim gr.* Logarithmus numeri 1011. Logarithmus numeri 1010. est 3. 0043213738. Logarithmus numeri 1012. est 3. 0051805126. differentia est 8591387. eius semisis 4295694. quæ differentia proxima est Logarithmorum 1010. & 1011. sed minor iusto. Sumatur deinde Logarithmus numeri 1014. qui est 3. 0060379550. huius, & primi differentia est 17165812. & instituatür regula trium. Si differentia 17165812. dat differentiam 8591387. quid dabit 8591387. ducto secundo in tertium, huius autem producto per primum: fit quotiens 4299938. quæ differentia proxima est Logarithmorum ex 1010. & 1011. sed maior iusto. Additis igitur differentia inventa minore 4295694. atquò hac reperta maiore 4299938. conflatur 8595632. eius semisis est 4297816. estque differentia propinquior Logarithmorum 1010. & 1011. Ergo si Logarithmo numeri 1010. qui est 3. 0043213738. addamus vltimam differentiam inventam, quæ est 4297816. obueniet Logarithmus numeri 1011. absque errore qui est 3. 0047511554.

89 Eadem ratione si sumamus Logarithmos 1008. 1010. & 1012. inueniemus Logarithmum numeri 1009. qui numerus primus est: similiter cum Logarithmis 1012. 1014. 1016. reperiemus Logarithmum numeri 1013. qui etiam numerus primus est, &c. In his operationibus nunquam error excedit vltimam litterarum, & quò numeri erunt

erunt maiores, eò imminuetur error. Deum abiectis ex Logarithmis omnibus vltimis litteris, vt admonitum est in 5. 76. remanebunt Logarithmi absque vilo errore.

CAPVT OCTAVVM.

EXPOSITIO CANONIS TRIGONOMETRICI.

90 **P**rima Tabula post librum tertium Canon Trigonometricus est, quæ omnes gradus, & minuta Semicirculi continet ab 1. *min.* usque ad *grad.* 180. cum Sinibus, & Tangentibus Logarithmicis, qui sunt Logarithmi, Sinuum, & Tangentium. Vna quæque pagina in duas columnas dividitur, quarum singulæ quatuor numerorum ordines habent, primus, & quartus singulorum graduum minuta dumtaxat comprehendunt: in 2. & 3. apponuntur Sinus, & Tangentes cum suis titulis.

91 Gradus 180. distracti sunt in quatuor Semiquadrantes. Prior columna cuiusque pagine, in parte superiori, & ad sinistrâ exhibet gradus à cyphra, vsque ad 44. & in descensu occurrunt illorum *minuta* 0. 1. 2. &c. In parte autem inferiori, ad dexteram habentur gradus minoribus numeris expressi à 135. vsque ad 179. & ascendendo reperiantur eorum *minuta* 0. 1. 2. 3. &c. Secunda columna cuiusque pagine in parte inferiori, & ad dexteram continet gradus à 45. vsque ad 89. & ascendendo exhibet illorum *minuta* 0. 1. 2. &c. In parte autem superiori sunt gradus à 90. vsque ad 134. minoribus etiam numeris expressi, & in descensu eorum *minuta*.

*Inuenire complementa cuiusque Anguli.*

92 Si Angulus minor sit *gr.* 45. veluti *gr.* 39. *min.* 27. & scire velimus eius complementum ad Quadrantem  
Del P. I. Zaragoz. que-

quærat<sup>r</sup> 39. supra priorem columnam, & in descensu inuenientur *min.* 27. prosequendo lineam *min.* 27. vsque ad vltimam ordinem, secundæ columnæ offendo *min.* 33. in parte verò inferiori *gr.* 50. Dico ergo *gr.* 50. *min.* 33. esse complementum ad Quadrantem *gr.* 39. *min.* 27. Si autem inquiratur complementum ad Semicirculum *gr.* 39. *m.* 27. reperitis supra priorem columnam 39. & in descensu *min.* 27. prosequendo lineam, vsque ad 4. ordinem eiusdē columnæ, offendo *min.* 33. in parte verò inferiori *gr.* 140. Dico *gr.* 140. *min.* 33. esse complementum ad Semicirculum *gr.* 39. *min.* 27.

93 Si Angulus Acutus maior sit *grad.* 45. vt *grad.* 58. *min.* 19. quærat<sup>r</sup> *grad.* 98. in parte inferiori secundæ columnæ, & ascendendo reperientur *min.* 19. prosequendo eius lineam ad sinistra, offendo in columna prima *min.* 41. & in parte superiori *gr.* 31. Aio *gr.* 31. *min.* 41. esse complementum ad Quadrantem *gr.* 58. *min.* 19. & prosequendo lineam eorundem *min.* 19. vsque ad ordinem 4. eiusdē columnæ inuenio *min.* 41. sursum autem *grad.* 121. Dico *gr.* 121. *min.* 41. esse complementum ad Semicirculum *gr.* 58. *min.* 19.

94 Si verò Angulus sit Obtusus, & minor 135. veluti *gr.* 121. *min.* 41. quærentur *gr.* 121. in parte superiori columnæ secundæ, in primo ordine, & in descensu occurrunt *min.* 41. prosequendo eius lineam ad dextram inueniuntur *min.* 19. infra autem *gr.* 58. Aio *gr.* 58. *min.* 19. esse complementum ad Semicirculum *gr.* 121. *min.* 41. Si verò Angulus maior sit *gr.* 135. veluti *gr.* 148. *min.* 19. sursum *gr.* 148. in parte inferiori columnæ primæ, & ascendendo vsque ad 19. prosequendo eius lineam ad sinistram reperiantur *min.* 41. supra verò *gr.* 31. Dico *gr.* 31. *min.* 41. esse complementum ad Semicirculum *grad.* 148. *min.* 19. &c.

95 Itaque gradus oppositi superior, scilicet, & inferior cuiusque paginæ maioribus. characteribus designati; sunt

sunt alter alterius complementum ad Quadrantem: duo, verò oppositi superior, & inferior cuiusque columnæ: diuersis characteribus expressi; sunt alter alterius complementum ad Semicirculum. Superior, & inferior duarum columnarum in medio positi, & minoribus characteribus scripti, sunt alter alterius complementum ad tres Quadrantes. Minor è duobus superioribus, vt etiam è duobus inferioribus, cuiusque paginæ semper est id, quod maior Quadrantem excedit.

Inueniuntur Sinus, & Tangentes Arcuum in duobus columnis. Sinus in columna prima, Tangentes in columna secunda.

96 Quævis columna Sinus, & Tangentes habet, quæ sunt Sinus 1. & Tangens 1. gradus, & minorum, qui in eadem columna, tam in parte superiori, quam in inferiori; verum Sinus, & Tangentes vnius columnæ sunt Sinus 2. & Tangens 2. graduum, & minorum, qui existunt in altera columna eiusdem paginæ. Ita vt in eadem pagina reperiantur Sinus 1. & 2. vnius Anguli: Sinus 1. & 2. sui complementi ad Quadrantem, vel Semicirculum. In titulo Sinuum, & Tangentium non scribitur 1. nec 2. quia ipsemet, qui primus est vnius gradus, est secundus gradus oppositi in altera columna.

97 Sit Arcus, vel Angulus *grad.* 23. *min.* 37. quæritur Sinus 1. & Tangens 1. primum inuenio *grad.* 37. in parte superiori, & in descensu *min.* 37. prosequendo eius lineam respondet illi Sinus 1. 9.6027278. sequitur Tangens: 9.6407156. & prosequendo lineam vsque ad alteram columnam illius Sinus 2. est 9.9620122. & Tangens 2. 10.3592844. Si Arcus sit *gr.* 66. *min.* 23. offendo in parte inferiori secundæ columnæ *gr.* 66. & in ascensu *min.* 23. prosequendo eius lineam ad sinistram occurrunt illi Sinus Tangens prima 10.3592844. mox Sinus primus 9.9620122 & prosequendo lineam vsque alteram columnam inuenitur Tangens 2. scilicet 9.6407156. deinde Sinus 2. nempe 9.6027278.

98 Sit Angulus *grad.* 113. *min.* 37. offendo primam *gr.* 113. in parte superiori secundæ columnæ, & in descensu *min.* 37. prosequendo eius lineam ad dexteram reperitur Sinus primus 9.9620122. deinceps Tangens prima 10.3592844. revertendo ad sinistram, & transeundo ad primam columnam in eadem linea inuenio Tangentem 2. esse 9.6407156. ad latus autem Sinuum 2. esse 9.6027278. Si Arcus, vel Angulus sit *gr.* 156. *min.* 23. inueniam *gr.* in parte inferiori columnæ primæ, & in ascensu reperiam *min.* 23. prosequendo eius lineam ad sinistram in Sinuum ordine, offendo eius Sinum 9.6027278. ad latus verò Tangentem 9.6407156. & incedendo ad secundam columnam in eadem linea inuenio Sinum 2. esse 9.9620122. item Tangentem 2. esse 10.3592844. itaque in columna ubi gradus extat in eadem datorum minorum linea reperiuntur Sinus 1. & Tangens 1. & pergendo ad alteram columnam inuenitur in eadem linea Sinus 2. & Tangens 2.

*Ad inuenire Sinus, & Tangentes secundorum.*

99 Quando Angulus, vel Arcus habet gradus, minuta, & secunda, veluti *grad.* 23. *min.* 37. *sec.* 25. & quæritur Sinus 1. Sumetur Sinus *grad.* 23. *min.* 37. vt antè estque 9.6027278. Deinde qui sequitur immediatè, & est 9.6030166. ablato minore ex maiore; relinquitur differentia 2888. Dicamque per regulam trium si 60. *sec.* quibus constant singula minuta, dant pro differentia 2888. quid dabunt 25. *sec.*? Duco differentiam 2888. in 25. *sec.* data, fit Productus 72200. quo diuiso per 60. prodit 1203. hæc differentia, vel quotiens additur primo Logarithmo, si is minor sit secundo, vel demitur si maior extiterit. Addita ergo differentia inuenta Sinus minori 9.6027278. erit summa Sinus *gr.* 23. *min.* 37. *sec.* 25. & est 9.6028481.

100 Eodem pacto inuenietur Sinus 1. Anguli *grad.*

*grad.* 156. *minut.* 22. *secund.* 35. Sinus 1. *grad.* 156. *min.* 22. est 9.6030166. subsequens est 9.6027278. atque minor differentia est 2888. Aio si 60. dant 2888. quid dabunt 35? Exit 1685. subducto quotiente isto ex Logarithmo primo 9.6030166. quia maior fuit, prodit 9.6028481. vt antè, & est Sinus 1. *grad.* 156. *min.* 22. *sec.* 35. hæc in parte cautè procedendum est illi, qui hæc operationes recens aggreditur, si enim summam cum subtractione, aut vice versa confundat, errorem vtique in operatione committet. In Tangentibus porò eadem obseruanda veniunt, quæ in Sinibus. Modus autem inueniendi Secantes, & Sinus Verlos tradetur ad §§. 120. & 122.

*Reperire Angulum dato eius Sinu, vel Tangente.*

101 In omnibus operationibus Trigonometricis inuenimus Sinum, vel Tangentem, & per illum agnosceamus Angulum, vel Arcum. Sit datus Sinus primus 9.6028481. quærat in Tabulis eius proximè minor in prima, vel secunda columna, sed in ordine Sinuum, & offendo in columna prima eius proximè minorè 9.6027278 & ad sinistram 37. supra verò *grad.* 23. Dico hunc esse Sinum 1. 23. *grad.* 37. *min.* & quia ad dexteram respondent ei *minut.* 23. infernè autem *grad.* 156. est quoque Sinus 1. *gr.* 156. *min.* 23. cum ergo compertum habeam Angulum futurum esse Acutum; dicam esse *gr.* 23. *min.* 37. Si autem futurum esse Obtusum agnoverim, dicam esse *grad.* 156. *min.* 23.

102 Dato ipsomet Logarithmo 9.6028481. tanquam Sinu 2. vnus Anguli, quæritur vt antè in ordine Sinuum, & inuento in prima columna eius proximè minori, cum sciam esse Sinus 2. prosequar eius lineam vsque ad alteram columnam, & offendam *min.* 37. supra verò *gr.* 113. & continuata linea inueniam *min.* 23. & infra *gr.* 66.

44. Dico ergo esse Sinum 2. gr. 66. m. 23. item gr. 113. m. 37. Si ergo mihi constet Angulum Acutum esse debere, cognoscam esse 66. 23. Si verò Obtusum fore compererim, erit 113. 37. sed ignota specie Anguli determinari nequit Arcus, vel Angulus, licet regulariter Acuti obveniant. Idem dicendum est de Tangentibus, ita ut sumatur perpetuò Logarithmus proximè minor, & Angulus ei correspondens tanquam verus, licet tantum proximus sit: nam in Sinu 1. & Tangente 1. Angulus Acutus minor iusto exit; Obtusus verò maior, & vice versa in Sinu 2. & Tangente 2. Acutus maior iusto prodibit: Obtusus verò minor, quantumvis differentia negligatur, cum nec ad unum quidem minutum perveniat.

*Invenire secunda Sinus, vel Tangentis.*

To 3. Quando studiosus operationem exactiorem obtinere cupit, non acquiescit invento gradu, & minuto proximo; sed etiam inquitur secunda scrupula, quo Angulus fiat exactior. Sit datus idem Logarithmus 9. 6028481. uti Sinus 1. unius Anguli, reperio eius proximè minorem 9. 6027278. eiusque Angulum Acutum 23. 37. Obtusum autem 156. 23. Sinus proximè maior est 9. 6030166. differentia proximi minoris, & maioris est 2888. dematur minor 9. 6027278. à Logarithmo dato 9. 6028481. erit differentia 1203. dicamque per regulam trium, Si differentia 2888. dat differentiam 1203. quid dabunt 60. *sec.* Prodeunt *sec.* 25. ista *secunda* addandur Angulo Acuto, fietque 23. 37. 25. subducantur verò ex Obtuso, & relinquentur 156. 22. 35. idem est in Tangente 1. sed contrarium in Sinu 2. & Tangente 2. quæ omnia caute observanda sunt, æquivocatio enim facile potest subreperere.

EA-

## CAPVT NONVM.

## EXPOSITIO TABULÆ LOGARITHMICÆ.

104. **P**ost Canonem Trigonometricum sequitur Tabula Logarithmica, quæ numerorum absolutorum Logarithmos continet ab unitate, usque ad 11100. quæ universis Trigonometriæ operationibus sufficient. Qui verò illam uberiorem exoptat, apud Vlac inveniet deductam ab unitate, usque ad centum millia numerorum.

*Invenire Logarithmum numeri Tabula, & numerum integrum Logarithmi dati.*

105. Quærat in Tabula numerus datus, sitque 4044. in cuius latere ad dextram invenitur eius Logarithmus 3. 6068111. è contra si detur Logarithmus 3. 6068111. quærat in Tabula inter Logarithmos, & in eius latere ad sinistram reperitur numerus 4044. Quando Logarithmus datus in Tabula non invenitur præcisè, sumatur propinquior, & numerus ad sinistram pro verò haberi poterit. Sit datus Logarithmus 3. 6252988. invenio Logarithmum 4219. minorem esse, maiorem verò Logarithmum 4220. hunc numerum pro verò assumam, quia propinquior est maiori, quam minori, si propinquiorem attendere nolimus; sufficiet proximè minorem assumere.

*Invenire Logarithmum cuiuslibet fractionis.*

106. Si numerator fractionis maior sit denominatore, demitur Logarithmus denominatoris à Logarithmo numeratoris; residuum est Logarithmus fractionis; veluti si dentur numerator est 29. eius Logarithmus 1. 4623980. denominator est 17. eius Logarith-

*Del P. I. Zaragoza.*

mus.



mus 1. 2304489. residuum est 0. 2319491. atque Logarithmus est fractionis  $\frac{1}{10}$ . Si verò numerator minor sit denominatore auferetur Logarithmus numeratoris à Logarithmo denominatoris, residuum cū signo — erit Logarithmus fractionis, sed negativus, vel defectivus. Sit fractio  $\frac{1}{12}$  Logarithmorū differentia est 0. 2319491. præfixo signo — erit — 0. 2319491. Logarithmus fractionis  $\frac{1}{12}$ .

*Ad inuenire Logarithmum integri cum fracto.*

107 Sit numerus 358  $\frac{7}{12}$ . sumatur prius Logarithmus integri 358. & est 2. 5538830. mox sequens, qui est 2. 5550944. differentia vtriusque est 12114. Ergo per regulam auream si denominator 12. dat 7. quid dabit differentia 12114? Hac multiplicata per 7. & Producto 84782. diuiso per 12. prodit 7066. id additur Logarithmo numeri integri 2. 5538830. & fit summa 2. 5545896. Logarithmus numeri 358  $\frac{7}{12}$ .

*Cuiusvis Logarithmi, integrum, & fractum reperire.*

108 Sit Logarithmus 2. 5545896. quæro eius proximè minorem, & iuxta 358. offendo 2. 5538830. & proximè maiorem 2. 5550944. differentia inter maiorem, & minorem est 12114. differentia inter minorem, & medium est 7066. denominator fractionis sit 12. vel quia datus, vel quia electus. Dico ergo per regulam trium: Si differentia minoris, & maioris 12114. dat minoris differentiam, & medij 7066. quid dabit denominator 12? Multiplicato 7066. per 12. diuiso autem Producto per 12114. exit quotiens 7. & est numerator. Dico ergo hunc Logarithmum 2. 5545896. esse Logarithmum numeri 358  $\frac{7}{12}$ . facilitatis gratia eligere oportet denominatorem 10. vel 100. vel 1000.

&c.

*Inuenire Logarithmum partium decimalium.*

109 De partibus decimalibus de utilitate quam afferunt Architectis militaribus, & Mathematicis egi in lib. 1. Arithmetice cap. 9. & 10. Datae sint decimæ  $\frac{79}{100}$ . Logarithmus numeratoris 79. est 1.8976271. denominatoris verò 100. est 2.0000000. differentia est 0.1023729. cum signo — erit — 0.1023729. Logarithmus defectivus numeri  $\frac{79}{100}$ .

*Reperire decimas Logarithmi negatiuæ.*

110 Sit Logarithmus defectivus — 0.1023729. subduco illum ex Logarithmo numeri 1000. qui est 3.0000000. & remanet 2.8976271. quem reperio proximè 790. estque numerator numeri 1000. Dico ergo — 0.1023729. esse Logarithmo fractionis  $\frac{79}{100}$ . hoc est  $\frac{79}{100}$ .

*Inuenire Logarithmum integrorum, & decimalium.*

111 Sit numerus 3725  $\frac{238}{1000}$ . Logarithmus numeri 3725. est 3.5711263. proximè maior est 3.5712428. vtriusque differentia est 1165. hac multiplicata per numeratorem 238. fit Productus 277270. quo diuiso per 1000. hoc est ablatis à dextera tot litteris, quot habet cyphras numerus 1000. exeunt 277. additis his Logarithmo 3.5711263. prodit Logarithmus 3.5711540. numeri 3725  $\frac{238}{1000}$ .

*Inuenire integros, & decimas cuiuslibet Logarithmi.*

112 Sit Logarithmus 3.5711540. offendo in Tabula eius proximè minorem 3.5711263. & 3725. proximè maior est 3.5712428. differentia maioris, & minoris est 1165. differentia verò minoris, & medij est 277. Aio, si 1165. dant 277. quid dabunt 1000? Adde tres cyphras numero 277. quod idem est ac multiplicare per 1000. fit Productus 277000. quo diuiso per 1165. obueniunt 238. mille si mitergo 3725  $\frac{238}{1000}$  est numerus Logarithmi dati 3.5711540.

Del. P. I. Zaragoza.

*Invenire Logarithmum numerorum maiorum 10000.*

113 Sit numerus 37251238. quatuor priores litteræ ad sinistram dividantur puncto sic 3725. 1238. & ceteris reliquis, constituatur fractio tot cyphris, quot habet litterarum hoc modo 3725.  $\frac{1238}{10000}$ . reperitur eius Logarithmus per *Arithm.* qui est 3.5711540. Si characteristica addantur 3. quia fractio tres litteras adiecit numero, erit Logarithmus 6.5711540. numeri integri 3725238.

*Invenire numerum Logarithmi maioris quam 4.000000.*

114 Sit Logarithmus 6.5711540. veluti si characteristica esset 3. & Logarithmus 3.5711540. reperio eius proximè minorem propè 3725. & est 3.5711263. proximè vero maior est 3.5712424. differentia maioris, & minoris 1165. minoris autem, & medij 277. adiectis tot cyphris, quot habet litteras differentia characteristarum fit 277000. hoc Producto diviso per 1165. exit 238. & Logarithmus 3.5711540. est Logarithmus numeri 3725.  $\frac{1238}{10000}$  ut in §. 112. sumpto ergo tanquam integro: 3725238. esse numerum Logarithmi dati 6.5711540.

*Invenire complementum Logarithmicum.*

115 Complementum Logarithmicum est differentia inter Logarithmum, & Radium 10.000000. ablato ergo Logarithmo ex Radio remanet complementum Logarithmicum.

116 *Exemplum.*  

Radius.	10.000000,
Logarithmus.	6.5711458,
Complement.	3.4288542.

 differentia cuiusque litteræ vsque ad 9. in ultima vero vsque ab 10. veluti à 6. vsque ad 9. defunt 3. à 5. vsque ad 9. defunt 4. à 7. vsque ad 9. deficiunt 2. & c. in ultima autem in 8. vsque ad 10. deficiunt 2. Si Logarithmus maior sit Radio uti in Tangentibus ultra gr. 45. sumitur complementum

ad Radium Duplum 20.000000. eodem pacto omittit unitate priori ad sinistram ac sit non esset. Sit Tangens 10.3599731. dico à cyphra vsque ad 9. defunt 9. à 3. vsque 9. defunt 6. à 5. vsque ad 9. deficiunt 4. & c. estque complementum 9.6400269.

*De Logarithmis Caramuelis.*

116 Superiori anno 1670. prodijt in lucem Mathematica nova Illustrissimi Caramuelis, ubi in tom. 2. in vobis quosdam affert Logarithmos Retrogrados, quos refluentes ipse vocat cum *Fabula Sinuum, Tangentium, & Secantium*, & Briggianis commodiores esse autumat, tamen si patientur incommoda à nobis perpensa §. 65. & 66. Ita tamen cui tanti Authoris opera videre non licuit, huiusmodi Tabulas facillimo negotio construet, si Logarithmorum nostrorum complementa assumat. Hæc una animadversione Caramuel quæstionem illam paginæ 863. solvere potuit nempe: *An Briggiana Chilias nostro Characteri coaptari possit.*

## CAPVT DECIMVM.

### APPLICATIO LOGARITHMORVM.

117 **P**remissus labor compensatur facilitate, & utilitate Logarithmorum, quæ sanè admirabilis est, maxime in regula proportionis, extractione Radicum, inventionem mediorum proportionalium, & in resolutione, & transformatione figurarum, & corporum regularium.

*De regula proportionis.*

118 Quatuor terminis proportionalibus existentibus Rectangulam ex medijs æquatur Rectangulo ab extremis (i. l. b.) ergo si tres dætur invenietur quartus, multiplicato enim secundo in tertium, habemus Rectangulam mediorum, quia autem istud Rectangulum idem est ac

Rectangulum extremorum, si dividatur per primum, qui alter extremus est, exibat quartus, qui est extremus reliquus: ergo cum in Logarithmis, summa multiplicationi, subtractio verò divisioni æqualeat (9. 71. & 72.) si addatur Logarithmi B. & C. ex summa verò dematur Logarithmus A. relinquetur Logarithmus D. vel quarti proportionalis. Dispositio huiusmodi esse potest:

20 Logarithmo D. rel- *Term. propor.* *Logarithmi.*  
 pondet in Tabula nu- *A. Si 12. 1.0791812*  
 merus 75. In regula in- *B. dant 36. 1.5563025*  
 uersa observanda sunt, *C. quid 25? 1.3979400*  
 quæ in Arithmetica *b. + c. 2.9542425*  
 nostra diximus, lib. 1. *D. dat 75. b. + c. 1.8750613*

De complemento Logarithmico in proportione.

Si pro Logarithmo A. sumatur eius complementum, veluti in 9. 115. summa trium multata Radio dabit Logarith. D.

Summa trium Logarith- *Term. propor.* *Logarithmi.*  
 morum est 14.8750613. *A. Si 12. Compl. 8.9208188*  
 dempto Radio remanet *B. dant 36. 1.5563025*  
 1.8750613 dimissa, scili- *C. quid 25? 1.3979400*  
 cèt, vnitate ad sinistram. *D. dant 75. summa 1.8750613*

Si complementum sumatur ad duplum Radium, auferetur à summa 2. quod idem est ac demere duplum Radium ad quem sumptum est complementum. Ratio totius operationis est, quia cum primus Logarithmus subtrahendus esset, addidimus eius complementum ad Radium: unde quod subtrahere omisimus, & quod addidimus æquantur Radio: ergo summa omnium superat Logarithmum questum toto integro Radio, quare ablato Radio remanet quartus Logarithmus. Dique sitis, hæc praxis faciliores reddit operationes, cuius vltimum videre licet in vniuerso libro 2. & 3. Idem diodes de complemento ad duplum Radium: tunc ergo duplus Radium auferendus erit ex summa.

Ratio inveniendi Secantes Logarithmibus.

120 Secantes in Canone Trigonometrico scienter ommissimus cum in nostra methodo minime requirantur, tum quia facile reperientur per regulam sequentem.

Complementum Sinus 1. vna cum Radio, qui est vnitas ad sinistram; fit Secans 2. Complementum Sinus 2. vna cum Radio fit Secans 1. Quæritur Secans 2. gr. 35. min. 8. Sinus 1. est 9.7600311, eius complementum 0.2399689. præfixa vna vnitate, quod idem est ac addere Radium, est 10.2399689. Secans 2. Si verò quæritur Secans 1. Sinus 2. gr. 35. min. 8. est 9.9126551, eius complementum 0.0873449, vna cum Radio fit Secans 1. 10.0873449. Sumpto complemento cuiusque litteræ vsque ad 9. Sinus etiam non scripto (9. 115.) invenitur Secans æque velt ceter, ac si in Tabula, vel Canone Trigonometrico esset.

121 Huiusce rei demonstratio pendet à 9. 21. Radius enim media proportione est inter Sinum 1. & Secantem 2. vnus Arcus. Si notus sit Sinus 1. & Radius, reperietur Secans 2. per proportionem, dispositis terminis vti in 9. 119.

*Termin. proport.* *Logarithmi.*  
 Vt Sinus 1, gr. 35. 8. min. *Compl. Log.* 012399689  
 ad Radium 10.0000000  
 ita Radius 10.0000000  
 ad Secantem 2. *summa* 10.2399689

Complementum Sinus nihil immutatur, cyphra eadem non adaugent summam, quia verò Radius bis reperitur in summa, & auferri debet semel (9. 119.) remanet in tabula Radius, & complementum Sinus: ergo complementum Sinus 1. vna cum Radio est Secans 2. pari ratione demonstrabitur complementum Sinus 2. vna cum Radio est Secantem 1.

Invenire Logarithmum Sinus vnus.

122 Sit Arcus gr. 50. eius semis 25. 1. 24. ergo quia Sinus 1. vnus Arcus medius est proportionalis  
 Del P. I. Zaragoçã. G 2 Sec

Semiradium, & Sinum Versum Arcus dupli  $\rho$ . 19. erunt termini proportionales, & ordinabuntur vti in  $\rho$ . 119.

*Termini proportionales.*

*Logarithmi.*

Vt Semiradius	500000000.	C.L.	0.3010299
ad Sinum 1.	gr. 25.		9.6259483
ita Sinus 1.	gr. 25.		9.6259483
ad Sinum Versum	gr. 50.	Summa	9.5529265

Hinc exoritur hæc regula practica. Logarithmus numeri 2. vnà cum Sinu duplici cuiuslibet Arcus, multatus Radio, dat Sinum Versum Logarithmicum Arcus dupli. Quoniam Logarithmus numeri 2. complementum est Logarithmi Semiradij absoluti: prout sequenti exemplo.

Log. num. 2.	0.3010299
Sinus gr. 25.	9.6259483
Sinus gr. 25.	9.6259483
Summa est Sinus Versus 50. gr.	9.5529265

*Invenire quamlibet Radicem cuiusque numeri.*

$\rho$ . 123 Logarithmus numeri dividatur per exponētem Radicis, & obveniet Logarithmus Radicis quæsitæ. Radix quadrata est  $R^2$  eius exponens 2. Radix Cubica est  $R^3$  sequuntur  $R^4$   $R^5$  &c. vti diximus in *lib. 2. Arithmetica*,  $\rho$ . 9. Ergo ad reperiendam  $R^2$  quæ quadrata est dividetur per 2. ad  $R^3$  dividetur per 3. & sic deinceps. Sit numerus 625. & eius Logarithmus 2.7958800. quæritur  $R^2$  diviso Logarithmo per 2. exit 1.3979400. cui in Tabula Logarithmica respondet numerus 25. qui est  $R^2$  vel Radix quadrata numeri 625. Sit Rursus numerus 1728. eius Logarithmus 3.2375437. quæritur  $R^3$  quæ Cubica est. Diviso Logarithmo per 3. prodit 1.0791812. eius numerus 12. & est Radix Cubica numeri 1728. &c. hæc practica emanat ex  $\rho$ . 73. & 74.

*Invenire quoscumque medios proportionales.*

$\rho$ . 124. Quando termini Geometrici proportionem aliquam continuant, Logarithmi cum æquali excessu pro-

cedunt  $\rho$ . 62. ergo si differentia duorum Logarithmorum dividatur per numerum mediorum vnitate adauctum, fiet quotiens excessus æqualis Logarithmorum. Sint dati numeri 2. & 128. eorum Logarithmi sunt 0.3010300. & 1.1072100. differentia est 1.8061800. Si quæraturs vnus medius proportionalis dividatur per 2. & exit 0.9030900. qui est excessus, is verò additus Logarithmo minori 0.3010300. prodit 1.2041200. cui numerus correspondens est 16. & est medium proportionale inter 2. & 128. suntque continui 2. 16. 128.

$\rho$ . 125. Si quærantur duo media proportionalia: differentia 1.8061800. dividatur per 3. & obveniet excessus 0.6020600. is minori adiectis 0.3010300. est primum medium 0.9030900. eius autem numerus 8. addito rursus excessu 0.6020600. Logarithmo prioris medio 0.9030900 prodit Logarithmus 1.5051500. eius verò numerus 32. ergo quatuor proportionalia sunt 2. 8. 32. 128. atque 8. & 32. sunt duo media. Si quærantur quinque media, dividatur differentia 1.8061800. per 6. & est excessus 0.3010300. adiectus Logarithmo minori 0.3010300. procreatur 0.6020600. cuius numerus est 4. Addito rursus excessu efficitur 0.9030900. cuius numerus est 8. Addito iterum excessu, fit 1.2041200. cuius numerus est 16. Adiecto adhuc excessu, prodit 1.5051500. cuius numerus est 32. Adiecto rursus excessu, exit 1.8061800. cuius numerus est 64. atque continui sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. & quinque media inter duo extrema inventa sunt, &c.

*Continuare rationem aliquam in infinitum.*

126. Sit ratio 3. ad 6. si Logarithmorum suorum differentia addatur continuè maiori, obvenient Logarithmi terminorum continuorum. Logarithmus numeri 3. est 0.4771212. numeri autem 6. est 0.7781512. differentia est 0.3010300. addita maiori Logarithmo, fit 1.0791812. cuius numerus est 12. adiecta rursus ultimo Logarithmo, prodit 1.3802112. cuius numerus est 24. addita iterum

ultimo, exit 1. 6812412. cuius numerus est 48. & sic in infinitum: & sunt continui 6. 12. 24 48. quia differentia Logarithmorum suorum sunt æquales propter proprietatem expressam §. 62. Si ratio maioris in æqualitate sit, vt 48. ad 24. auferetur a minori continue differentia Logarithmorum, quæ operatio contraria existit.

*Regula aurea Astronomica.*

127 In vsu Tabularum Astronomicarum occurrit sæpius pars proportionalis, in hunc finem constructa est Tabula sexagenaria, absque ea tamen facillime reperitur quartus proportionalis per compendium *nostra Arithmetice, lib. 1. §. 38.* Logarithmi in seruiunt etiam operationibus istis eadem facilitate, quæ precedentibus, quam obrem disposita est Tabula Logarithmica cum gradibus, minutis, & secundis necessarijs, atque ordine operationibus hinc congruo.

*Dispositio Tabula Logarithmica.*

128 In parte superiori cuiuslibet columnæ in sunt gradus, & minuta: gradus denotatur littera G. superne, minuta verò littera M. secunda à cephra vsque ad 59. collocata sunt ad sinistram cuiusque paginæ, & vniuersis columnis eiusdem paginæ correspondent.

*Invenire Logarithmos graduum, minutorum, & secundorum, vel è contra.*

129 Sint dati gr. 0. min. 37. sec. 15. reperiantur primo gr. 0. min. 37. in parte superiori, & in eadem pagina ad sinistram descendendo sumantur sec. 15. & prosequendo eius lineam vsque ad columnam, vbi sunt gr. 0. min. 37. comperio respondere illi Logarithmum 3. 3492775. qui est idè Logarithmus numeri 2235. dico ergo 3. 3492775. esse Logarithmum gr. 0. min. 37. sec. 15. vel secundorum 2235. si datus sit Logarithmus 3. 3492775. queratur in Tabula, & in parte superiori eiusdem columnæ reperietur gr. 0. min. 37. & prosequendo lineam Logarithmi ad sinistram offendetur sec. 15. alio igitur Logarithmum esse gr. 0. min. 35. sec. 15. &c.

Re-

*Reperire Logarithmum horarum, & minorum,*

*vel è contra.*

130 Sumantur horæ in parte superiori, perinde ac si essent graduum minuta, minuta verò horæ ad sinistram tanquam si essent graduum secunda, & inuenietur, vt antea Logarithmus; exempli gratia: Si queratur Logarithmus hor. 19. min. 48. sumuntur in parte superiori gr. 0. min. 19. & ad sinistram sec. 48. & prosequendo eius lineam, & regione 0. 19. offendo 3. 0748164. qui Logarithmus est hor. 19. min. 48. Si duo, vel tres dies ad sint, ad horas reuocandi sunt multiplicando per 24. & horas, quibus singuli dies constat. Vice versa datur Logarithmus 3. 0748164. queratur in Tabula, & in parte superiori respondent ei 0. 19. id est hor. 19. ad sinistram autem reperiantur sec. 48. horæ est min. 48. vnius horæ.

*Invenire Logarithmos plurium graduum, & minorum,*

*vel è contra.*

131 Quia Tabula 3. non excedit, si plures sint vti in motu Lunæ, vel Cometarum, reperietur Logarithmus, vt in horis; hoc est sumptis gradibus tanquam minutis, minutis verò tanquam secundis, exempli causa queratur Logarithmus grad. 19. 48. minut. & inueniatur, vt antea 3. 0748164. & dato Logarithmo offendatur gr. 19. minut. 48. vti in §. 130.

*Regula proportionis Astronomicæ.*

132 Disponuntur termini, & sumitur complementum Logarithmicum primi, vti in §. 119. summa trium multiplicata Radix dat quartum Logarithmum.

*Exemplum 1.*

*Logarithmi.*

A.	dat	1. gr. 0. min.	Co. L.	6. 4436975.
B.	dat	35. m. 22. sec.		3. 3267454.
C.	quid dabit	28. m. 44. sec.		3. 2365373.
D.	& exeunt	16. m. 56. sec.	Summa.	3. 0069802.

Del P. I. Zaragoza.

Ensm-

Exemplum 2.

A. Si	1 gr. 15 m. 39 sec.	C.L.	6.3430398
B. dant	0 gr. 57 m. 43 sec.		3.5394525
C. quid dabūt	0 gr. 24 m. 16 sec.		3.1631614
D. & exeunt	0 gr. 18 m. 31 sec.	Summa	3.0456537

Logarithmi.

Exemplum 3.

A. Si Sol uno die, vel	24 hor.	C.L.	6.8416375
B. percurrit	59 m. 50 sec.		3.5550944
C. quid	16 hor. 45 m.		3.0021668
D. & proudeunt	41 m. 46 sec.	Summa	3.3988980

Logarithmi.

Exemplum 4.

A. Si	13 gr. 45 m.	C.L.	7.0788339
B. dant	24 hor. 0 m.		3.1583625
C. quid dabūt	11 gr. 20 m.		2.8325089
D. & exeunt	19 hor. 34 m.	Summa	3.0697053

Logarithmi.

133 Ad reperiendam horam Aspectuum.

Si duo Astra sint directā, vel ambo Retro-  
grada.

Per motuum differentia	11 gr. 0 m.	C.L.	7.1804561
ad horas diei	24 hor. 0 m.		3.1583625
Ita Astrorum distantia	7 gr. 0 m.		2.6232493
ad horam aspectus	15 hor. 16 m.		2.9620679

Si unum sit Directum, alterum verò Retrogradum.

Exemplum 6.

Per summa motuum	1 gr. 54 m. 54 sec.	C.L.	6.1615287
ad horas diei	24 hor. 0 m.		3.1583625
Ita Astrorum distantia	53 m. 24 sec.		3.5445641
ad horam aspectus	12 hor. 14 m.		2.8644553

Finis Libri primi.

Logarithmi.



# LIBER SECUNDVS

D E

## TRIGONOMETRIA

P L A N A.



Rigonometria Plana est scientia, qua Triangula Plana Rectilinea mensurat, atque resoluit. Triangulum Planum Rectilineum est illud, quod in superficie plana lineis rectis formatur. Triangulum igitur tribus Arcibus circuli, vel quibuslibet tribus lineis curuis in superficie plana descriptum, licet Triangulum Planum dici possit; non tamen, Trigonometria Plana est obiectum, eo quod Rectilineum non sit, vel tribus lineis rectis minimè concludatur.

### CAPVT PRIMVM.

#### SVPPPOSITIONES GEOMETRIÆ

Triangulorum.

1 QVodvis Triangulum Planum Rectilineum Rectangulū est, vel Obliquangulum. Rectangulum est, quod vnum Angulum Rectum habet. Obliquangulum Del P. I. Zaragoçà. H ve.

verò, quod tres Angulos omnes habet Obliquos, nullumque rectum. Triangulorum species reperientur in Geometria nostra, Proemiali 12.

2 Tres Anguli cuiusque Trianguli Rectilinei æquipollent gradibus 180. hoc est duobus Angulis Rectis, (3. l. 1.) ergo summa quorumlibet duorum Angulorum minor erit perpetuò gradibus 180. Item si quivis Angulus dematur ex 180. residuum erit summa duorum reliquorum. Si verò duorum summa auferatur a 180. residuum erit Angulus tertius. Si denique dimidium Anguli subtrahatur ex gradibus 90. residuum erit semisumma duorum reliquorum, & è contra. Ratio addendi, & subtrahendi gradus, & minuta, inveniatur in Arithmetica nostra *lib. 1. cap. 2. & 3.*

3 In Triangulo Rectangulo duo Anguli Acuti vnũ Rectum constituunt, qui est graduum 90. Si latera, quæ Angulum Rectum ambiunt, sint æqualia, quivis Angulus oppositus erit semis recti: nam lateribus æqualibus, æquales Anguli opponuntur (5. l. 1.) & quia ambo vnum Rectum efficiunt, erit vnusquisque Semirectus.

4 Si Triangulum sit Isosceles, perpendicularis bifariam secat basim, & Angulum à lateribus æqualibus comprehensum. Si verò perpendicularis bifariam basim, vel Angulum secet, erit Triangulum Isosceles, & latera æqualia. Si perpendicularum semibasi æquale sit, Angulus Verticalis Rectus erit. Si autem maius fuerit semibase, erit Angulus Acutus: si verò minus, erit Obtusus.

5 Si Triangulum Æquilaterum sit, erit quoque Æquiangulum; si autem Æquiangulum, erit etiam Æquilaterum.

6 Duo latera cuiusque Trianguli maiora sunt reliquo. Latus maius maiori Angulo opponitur. Angulus verò maior, maiori lateri: quare cognito maiori latere, maior Angulus latere non potest, & è contra.

7 In quocumque Triangulo si Angulus vnus æquetur

tur duobus reliquis, Angulus Rectus erit: si verò minor sit, erit Acutus, & si maior, erit Obtusus. Et viceversa si Rectus fuerit æquabitur summæ duorum reliquorum, si Acutus, duobus reliquis minor erit: si verò Obtusus, maior. Complementa ad Quadranten, vel Semicirculum inveniuntur, *lib. 1. §. 4.*

## CAPVT SECVNDVM.

DEMONSTRATIONES TRIGONOMETRIÆ  
Planæ.

8 IN Triangulis Rectangulis, latus, quod Angulum Rectum, subtendit, Hypothenusa appellatur, & ab alijs dicitur *Basis.*

## DEMONSTRATIO I.

In Triangulo Rectangulo Hypothenusa ita se habet ad latera, vt Radius ad Sinus Angulorum oppositorum.

Fig. 6.

Sit Triangulum ABC. ex centro B. descripto quovis circulo DR. continentur BAD. & BCR. & ducta perpendicularis DE. Sinus erit Anguli B. (*lib. 1. §. 8.*) quia verò Anguli ad C. & E. Recti sunt, erunt CA. DE. parallelæ (2. l. 1.) ergo BCA. BED. Triangula Similia sunt, & latera habent proportionalia (2. l. 6.) ergo Hypothenusa BA. est ad latus AC. vt Radius BD. ad Sinum DE. qui est Sinus Anguli oppositi B. insuper si ab Angulo D. describatur circulus BG. Hypothenusa AB. erit ad latus BC. vt Radius BD. ad Sinum BE. Anguli oppositi D. qui æqualis est Angulo A. Ergo Hypothenusa ad quodlibet latus est, vt Radius ad Sinum Anguli oppositi, & alternando Hypothenusa ad Radium, vt latus ad Sinum Anguli oppositi, etiamque invertendo Radius ad Hypo-

*Del P. I. Zaragoza. H 2 the-*

thenuſam, vt Sinus Anguli ad latus oppoſitum, &c.  
(4.l.5.)

DEMONSTRATIO II.

9 In Triangulo Reſtangulo latus Angulo adiacens ita ſe habet ad latus oppoſitum ipſi Angulo, vt Radius ad Tangentem eiusdem Anguli.

Item. Latus ita ſe habet ad Hypothenuſam, vt Radius ad Secantem Anguli comprehenſi.

Fig. 9.

Sit Triangulum ABC. à centro B. deſcribatur quilibet circulus, & continuatis BAD. BCE. ſit ED. perpendicularis Radio, eritque ED. Tangens Anguli B. (1.1.9.12.) quia autem Anguli ad C. & E. ponuntur Reſti, erunt BC. ED. parallelæ (2.1.1.) Triangula verò BAC. BDE. Æquiangula, & latera habebunt proportionalia (2.1.6.) ergo latus BC. ad latus CA. eſt, vt Radius BE. ad Tangentem ED. Anguli B. oppoſiti lateri CA. Item, quia BD. eſt Secans 1. Anguli B. (1.1.9.14.) latus BC. erit ad Hypothenuſam BA. vt Radius BE. ad Secantem BD. Rurſus ſi circulus deſcribatur ab Angulo D. erit latus AC. ad latus CB. vt Radius DE. ad Tangentem EB. Anguli ad D. vel A. etiamque alternando, vel invertendo, proportionales erunt. (4.l.5.)

DEMONSTRATIO III.

10 In quouis Triangulo latera proportionalia ſunt Sinibus Angulorum oppoſitorum, & è contra.

Fig. 10. 11.

Sit quodlibet Triangulum ABC. deſcripto circulo per tres Angulos (4. prob. noſtræ Geometriæ Practicæ) diuiſisque bifariam Arcubus in E. F. G. Quoniam Anguli in peripheria ſemiſſes ſunt Arcuum oppoſitorum, (3.1.3.) erit EB. meſura Anguli C. & BF. meſura

Anguli A. & AG. Anguli B. Sinus autem Arcus EB. Sinus erit Anguli C. Sinus verò Arcus AG. Sinus B. &c. Ergo quia chorda AB. eſt ad chordam AC. vt Sinus Arcus EB. ad Sinum Arcus AG. (1.1.9.17.) erit BA. ad AC. vt Sinus Anguli C. ad Sinum Anguli B. & pariter AB. ad BC. vt Sinus Anguli C. ad Sinum Anguli A. itemque alternando, vel invertendo, &c. (4.l.5.)

DEMONSTRATIO IV.

11 In quocumque Triangulo ſumma laterum ad ipſorum differentiam, eſt vt Tangens ſemiſumme Angulorum oppoſitorum ad Tangentem ſemi-differentiæ eorundem.

Fig. 12.

Sit Triangulum ABC. continuetur BAD. itaut AD. AC. itemque DR. AB. æquales ſint, eritque DB. ſumma laterum; RA. illorum differentia, connectatur DC. & AE. ad hanc rectam perpendicularis ſecabit illam bifariam, & inſuper Angulum DAC. (5.1.1.) & quia exterius Angulus DAC. ſumma eſt Angulorum B. & C. (3.1.1.) erit EAC. ſemiſumma: ductis RL. AH. parallelis BC. cum BA. ſit æqualis RD. erit CH. æqualis LD. (2.1.6.) ergo LE. EH. remanebunt æquales (4. P.) & Anguli EAL. EAH. & inſuper LAD. HAC. (5.1.1.) at LAH. differentia eſt Angulorum DAH. HAC. qui ſunt æquales Angulis B. & C. (2.1.1.) propter parallelas AH. BC. ergo EAH. ſemi-differentia eſt Angulorum B. & C. Deſcripto igitur circulo Radio AE. erit EC. Tangens ſemiſumme EAC. & EH. Tangens ſemi-differentiæ EAH. & cum LR. HA. CB. parallelæ exiſtant, proportionales erunt BD. ad RA. vt DC. ad LH. (2.1.6.) itemque vt DC. ad LH. ita ſemiſis EC. ad ſemiſem EH. (5.1.5.) ergo per 1.1.5. proportionales ſunt.

Del P. I. Zaragoſà.

Vt



Vt	BD.	Summa laterum CA. & AB.
ad	RA.	Differentiam eorundem laterum.
ita	EC.	Tangens semisummae Angulorum B. & C.
ad	EH.	Tangentem semidifferentia eorundem.

## CONSECTARIVM

12 Ergo cognita semilumma, & semidifferentia, si semilummae DAE. addatur semidifferentia EAH. componetur Angulus maior DAH. æqualis B. Si verò ex semisumma EAC. dematur semidifferentia EAH. supererit Angulus minor HAC. æqualis C. & vice versa adiecta semidifferentia EAH. parti minori HAC. exurget semisumma CAE. atque id vniuersale, & commune est omnibus quantitatibus.

## DEMONSTRATIO V.

13 In quolibet Triangulo basis, vel latus maius ita se habet ad summam laterum, ut illorum differentia ad differentiam segmentorum, quæ sunt à perpendiculari à vertice in basim.

Fig. 13.

Sit Triangulum ABC. basis, vel latus maius CA. perpendicularis BE. Radio BC. qui est latus minus, decircinetur circulus, & producatu AB. vsque ad G. ergo quia BG. BC. æquales sunt; erit ABG. summa laterum AB. BC. & quoniam perpendicularis BE. bifariam secat chordam CD. (2. l. 3.) cum æquales sint CE. ED. erit DA. differentia segmentorum CE. EA. Tum quia æquales sunt BC. BI. erit HA. differentia laterum CB. BA. Ergo quia Secantes AG. AC. exterioribus segmentis sunt reciproca (6. l. 6.) proportionales erunt.

Vt	AC.	Basis, vel latus maius.
ad	GA.	Summam laterum.
ita	HA.	Differentia laterum.
ad	DA.	Differentiam segmentorum basis.

Præ-

14 Præcedentes demonstrationes Trigonometriæ Planæ sufficiunt; visum est tamen sequentem adnectere, quæ Triangulo solvendo infertur ex datis tribus lateribus, eadem praxi Triangulis etiam Sphericis intervienti.

## DEMONSTRATIO VI.

15 In quocumque Triangulo proportionales sunt, Vt Rectangulum est lateribus Angulum comprehendentibus, ad Rectangulum semisummae, & semidifferentia basis, & differentia laterum.

ita Quadratum Radij.

ad Quadratum Sinus Semianguli comprehens.

Sit Triangulum abc. Fig. 14. 15. 16. & am. æqualis ba. eritque mc. differentia laterum. Sint cm. cn. æquales, relinquetur bn. differentia basis bc. & differentia laterum cm. vel cn. ergo si bd. dn. æquales sint, erit bd. vel nd. semidifferentia basis, & differentia laterum. Quia autem addita semidifferentia dn. parti minori nc. efficitur semilumma (9. l. 2.) erit dc. semilumma basis, & differentia laterum; quia verò ab. am. æquales sunt, perpendicularis ap. secabit bifariam Angulum a. & rectam bm. (5. l. 1.) & considerato Arcu bm. est ab. Radius, & bp. Sinus semisis Anguli bam. (lib. 1. §. 17.)

16 Characteres significant Q. Quadratum, R. Rectangulum: + plus: - minus: ∞, esse æqualem. Primum igitur demonstrabitur demissa perpendiculari ba. in singulis tribus casibus. Q. bc. esse æqualem 2. R. ac. om. + Q. cm. moxque R. bac. ad R. bdc. esse vt Q. ab. ad Q. bp.

17 In singulis tribus casibus Q totius vna cum Q alterius segmenti æquatur 2. R. totius in idem segmentum, & Q. segmenti reliqui (1. l. 2.) ergo Q. ac. + Q. am. æquatur 2. R. cam. + Q. mc.

In priori casu Q. bc. ∞, Q. ba. + Q. oc. hoc est Q. ac. + Q. om. ergo Q. bc. ∞, 2. R. ca. om. + Q. mc.

Del P. I. Zaragoza.

An

In secundo casu  $Q. bc. \infty, Q. ba.$  quod est  $am. + Q. ac.$   
 $2. R. cao. (4. l. 2.)$

Item  $Q. am. + Q. ac. \infty, 2. R. cam. + Q. mc.$  Tum  $2. R. cam. + 2. R. cao. \infty, 2. R. ca. om. (2. l. 1.)$  ergo  $Q. am. + Q. ac. + 2. R. cao. \infty, 2. R. ca. om. + Q. cm.$  ergo  $Q. bc. \infty$  æquale est  $2. R. ca. om. + Q. mc.$

In tertio casu  $Q. bc. + 2. R. cao. \infty, Q. ba.$  quod est  $am. + Q. ac. (4. l. 2.)$  &  $Q. am. + Q. ac. \infty, 2. R. cao. + R. om. ac. + Q. cm. (1. l. 2.)$  ergo  $Q. bc. \infty, 2. R. om. ac. + Q. cm.$

18 In omnibus igitur casibus  $Q. bc. = Q. cm. \infty, 2. R. om. ac.$  & quia  $Q.$  ex tota  $bc. = Q. cm.$  quod est  $cm.$  differentia partium, æquale est  $4. R. cbd.$  partium inæqualium  $(2. l. 2.)$  erunt  $2. R. om. ac. \infty, 4. R. cbd.$  ergo  $\frac{1}{2} R. om. ac. \infty, R. cbd.$

19 Ratio igitur  $Q. ab.$  ad  $R. ab. om.$  est vt  $ab.$  ad  $om.$  ratio verò  $R. ab. ac.$  ad  $R. ac. om.$  est etiam vt  $ab.$  ad  $om.$   $(1. l. 6.)$  ergo  $Q. ab.$  ad  $R. ab. om.$  est vt  $R. ab. ac.$  ad  $R. ac. om.$  igitur  $Q. ab.$  ad  $\frac{1}{2} R. ab. om.$  est vt  $R. ab. ac.$  ad  $\frac{1}{2} R. ac. om.$  quod est  $cbd.$  & quoniam Triangula  $bom. apm.$  Equiangula sunt, cum Angulos ad  $o.$  &  $p.$  rectos habeant, & Angulum ad  $m.$  communem; proportionales sunt  $am.$  ad  $mp.$  quæ est  $bp.$  vt  $bm.$  ad  $mo.$   $(2. l. 6.)$  ergo  $am.$  ad  $bp.$  vt  $\frac{1}{2} bm.$  quæ est  $bp.$  ad  $\frac{1}{2} om.$  ergo  $R. am. \frac{1}{2} om.$  quod est  $R. ab. \frac{1}{2} om.$  quod est  $R. \frac{1}{2} ab. om.$  quod est  $cbd.$  æquatur  $Q. bp.$   $(1. l. 6.)$  cum verò offensum sit  $Q. ab.$  ad  $\frac{1}{2} R. ab. om.$  quod est  $Q. bp.$  esse vt  $R. ab. ac.$  ad  $R. cbd.$  proportionales erunt  $R. ab. ac.$  laterum Angulum  $a.$  includentium ad  $R. cbd.$  semisummæ, & semidifferentiæ prædictæ vt  $Q.$  ex Radio  $ab.$

ad  $Q. bp.$  Sinus Anguli  $bad.$  quod est  $\frac{1}{2} bac.$

muta

quæ

2019,

-600

## CAPVT TERTIVM.

RESOLVTIO TRIANGVLI PLANI

Rectanguli.

20

Vnumquodque Triangulum tria habet

latera, &amp; Angulos tres, ex tribus Angu-

lis Trianguli Plani latera inveniri ne-

queunt: nam si in Triangulo  $ABC.$  *Fig. 7.* continuenturlatera, & ducatur  $DE.$  parallela  $CA.$  Triangulum  $ABC.$ eisdem habebit Angulos, ac  $BDE.$   $(2. l. 6.)$  cum verò in-

finitæ parallelæ duci possint, infinita Triangula Equian-

gula constituentur, quare sola laterum proportio deter-

minari potest, non tamen quantitas Verùm, tribus alijs

quibuslibet datis inveniuntur reliqua.

21

Maioris perspicuitatis gratia res datæ, vel cog-

nitæ (quæ à Græcis *Didomena* nuncupantur) à quæsitis*Zitomena* dictis distinguendæ sunt, cognitæ lineola qua-

dam denotantur, quæ sita verò punctis, &amp; ab alijs cyphra:

vt in Triangulo  $ABC.$  *Fig. 11.* Angulus  $B.$  & latera  $AB.$  $AE.$  dantur cognita, latus autem  $CB.$  & Angulus  $A.$  &  $C.$ 

supponuntur inquiri.

22

In Triangulo Rectangulo una tantum res po-

stulantur, Angulus enim Rectus pro cognito haberi de-

bet, &amp; propterea à multis lineola nulla insignitur.

Latus Angulo Recto subtensum *Hypotenusam* vocantur.Rectas verò Angulum Rectum includentes *Latera* Cog-

nito Angulo Acuto alterutro, manifestatur reliquus, qui

eius complementum est ad Quadrantem, &amp; generaliter

observandum est, si *Hypotenusa* in proportione ad se

per demonstrationem primam Triangulum solvi, si au-

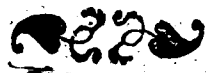
tem duo latera reperiantur, in proportione resolvitur

Triangulum per demonstrationem secundam præmissi

capitis.

Del P. I. Zaragoza.

I In



23 In omni proportione apponitur complementum Logarithmicum prioris termini, vti diximus *lib. 1. §. 119.* atque adeo quando Radius primum occupat locum, eius complementum est cyphra, quam scribere opus nequaquam est, summam enim, neque auget, neque minuit, licet illam in omni praxi conscriperim perspicuitati studens. Complementum autem Logarithmi ita indicatur C. L. ad cuius inventionem sumendum est complementum cuiusque litteræ vsque ad 9, vti diximus *lib. 1. §. 115.* In proportionibus vniuersis summa trium Logarithmorum, multata Radio, Logarithmum quartum exhibet. Demittit Radius, vnitate sublata, quæ ad sinistram scribenda erit, vel subductis ex Characteristica 10. Si autem prior terminus sit Tangens ultra *grad. 45.* sumetur complementum ad duplum Radium, & à Characteristica, quæ in summa prodit auferentur. 10. quod idem est ac demere duplum Radium, quæ in futuros huiusmodi casus hic admonuisse sufficiat.

**PROBLEMA I.** Dato vno latere, & Angulo, Invenire reliquum latus. 2. Invenire Hypothenusam.

**I. INVENIRE RELIQVVM LATVS.**  
 In Triangulo ABC. Fig. 6. est BC. pedum 345. Angulus ad B. 40.00. min. ergo A. erit 50.00. min. quæritur latus CA. per §. 19. Proportio §. 8. Logarithmi. Radius. 10.0000000  
 Sinus Ang. B. 64.2787610  
 Sinus Ang. A. 76.6044443  
 BC. 345.0000000  
 CA. 461.6926286

Del P. I. Zaragoçâ. I 2 PRO

25 II. INVENIRE HYPOTHENVSAM.

Proportio §. 8. Logarithmi.  
 B. Sin. Ang. A. gr. 50. & 2. Ang. B. 40. gr. C. L. 0.11574599  
 B. D. Radius. 10.0000000  
 B. C. Latus opp. A. & cont. B. pedum 345. 2.5378191  
 B. A. Hypothenusa, pedum 450. 2.6532592

26 PROBLEMA II. Data Hypothenusa, & vno latere.

1. Invenire Angulos. 2. Invenire reliquum latus.  
**I. INVENIRE ANGVLOS.**

In Triangulo ABC. Fig. 7. datis BC & BA. quæritur Anguli A. & B.

Proportio §. 8. Logarithmi.  
 B. A. Hypothenusa, pedum 450. C. L. 7.3464349  
 B. C. Latus. pedum 345. 2.5378191  
 B. D. Radius. 10.0000000  
 B. E. Sinus Ang. opp. D. vel A. gr. 50.00. m. 64.2787610  
 qui est Sinus 2. Ang. ad B. gr. 40.00. m. 64.2787610

27 INVENIRE RELIQVVM LATVS.

Primò reperiuntur Anguli A. & B. per §. 26. mox per §. 24. invenietur latus.  
 H. Sinus. 64.2787610  
 B. E. Radius. Fig. 6. C. L. 10.0000000  
 E. D. Tang. Ang. B. gr. 40.00. m. 84.19238135  
 B. C. Latus cont. B. pedum 345. 2.5378191  
 C. A. Latus oppositum B. ped. 289. 2.4616926

Del P. I. Zaragoçâ. I 2 PRO

PROBLEMA III.

Data Hypothenusa, & vno Angulo.  
I. INVENIRE LATERA.

In Triangulo ABC. Fig. 8. datis B.A. & Angulo B. queruntur latera BC. CA.

Ad latus CA. inveniendum §. 8.		Logarithmi.
BD. Radius.		C.L. 0.0000000
BE. Sinus Ang. B.	gr. 40.00. m.	9.8080675
BA. Hypothenusa data ped.	450 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> .	2.6535651
CA. Latus oppositum B. ped.	289 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> .	2.4616326
Ad latus CB. inveniendum.		
BD. Radius.		C.L. 0.0000000
BE. Sinus 2. Ang. B. gr.	40.00. m.	9.8842540
BA. Hypothenusa data ped.	450 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> .	2.6535651
BC. Latus conterm. B. ped.	345.	2.5378191

PROBLEMA IV.

Datis duobus lateribus.

1. Invenire Angulos. 2. Invenire Hypothenusam.

I. INVENIRE ANGVLOS.

In Triangulo ABC. Fig. 9. datis BC. CA. queruntur Anguli B. & A.

Proportio §. 9.		Logarithmi.
BC. Latus maior.	pedum 345.	C.L. 7.4621808
CA. Latus minor.	pedum 289 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> .	2.4616326
BE. Radius.		10.0000000
ED. Tang. minoris Ang. B.	40.00. m.	9.9238134

que est Tangens 2. Ang. mai. A. 50.00. oppositi maiori lateri.

II. INVENIRE HYPOTHENVSAM.

Primò, reperiantur Anguli B. A. per §. 29. deinde Hypothenusa.

Pro Hypoth. ex §. 25.		Logarithmi.
DE. Sinus 1. Ang. B.	gr. 40.00. m.	C.L. 0.1919324
DB. Radius.		10.0000000
AC. Latus oppositum B. pedum	289 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> .	2.4616326
AB. Hypothenusa, pedum	450 <sup>1</sup> / <sub>2</sub> .	2.6535650

CAPVT QVARTVM.

RESOLVTIO TRIANGVLI PLANI

Obliquanguli.

31 PROBLEMA I.

Datis duobus Angulis, & vno latere.

I. INVENIRE RELIQA DVO LATERA.

Cognitis duobus Angulis. datus etiam est tertius per §. 2. in Triangulo ABC. Fig. 10. cogniti sunt Anguli Aq & C. & latus CA. inquiruntur latera BA. BC.

Proportio §. 10.		Partes.	Logarithmi.
Sinus Anguli B.	gr. 50. m. 15.	C.L. 0.1141629	
ad Latus oppositum CA.	ped. 448.		2.6512780
vt Sinus Ang. C.	gr. 35. m. 20.		9.7621775
ad Latus oppositum AB.	ped. 337.		2.5276184
& Sinus Ang. B. ad latus CA. vt Sinus Ang. A. ad latus CB.			

32 PROBLEMA II.

Datis duobus lateribus, & alterutro Angulo opposito.

1. Invenire Angulos duos. 2. Invenire reliquum latus.

I. INVENIRE ANGVLOS DVOS.

In Triangulo ABC. Fig. 11. cognitis Angulo B. & lateribus BA. & AC. queruntur Anguli A. & C. & latus BC.

Proportio §. 10.		Partes.	Logarithmi.
Latus CA. oppositum B.	ped. 400.	C.L. 7.3979400	
ad Sinum Ang. B. gr. 54. 30. m.			9.9106868
vt Latus AB. oppositum C.	ped. 300.		2.4771212
ad Sinum Anguli C. 37. 38. m.			9.7857472
Complementum ad 180. Angulorum C. & B. erit Angulus A. per §. 2.			

33 II. INVENIRE RELIQUA LATVS.

Primò, reperientur Anguli per §. 31. deinceps latus CB. per §. 31. Sinus Anguli B. ad latus AC. vt Sinus Anguli A. ad latus CB.

34 PROBLEMA III.  
 Datis duobus lateribus, & Angulo intermedio.  
 1. Invenire duos Angulos. 2. Invenire reliquum latus.

I. INVENIRE DVOS ANGVLOS.

In Triangulo ABC. Fig. 11. Angulus BAC. est 61. 16.  
 CA. 400. AB. 300. investigantur Anguli B. & C. Com-  
 plementum 61. 16. est 118. 44. Summa Angulorum B. &  
 C. eius semissis 59. 22.  
 CA. + AB. 700. CA. - AB. 100.

Proportio §. 11.	Partes.	Logarithmi.
1. Summa laterum.	ped. 700.	C.L. 7.1549019
2. Differentia laterum.	ped. 100.	2.0000000
3. Tang. semissum B. & C. gr. 59. 22. m.		10.2275434
4. Tang. semidifferentia B. & C. gr. 13. 34. m.		9.3824453

Summa 3. & 4. est B. gr. 72. 56. oppof. maiori lateri.  
 Differentia 3. & 4. est C. gr. 45. 48. oppof. minori lateri.

35 II. INVENIRE RELIQVVM LATVS.

Primò, reperiantur Anguli B. 72. 56. & C. 45. 48. per §. 34. deinde invenietur latus CB. per Problem. 1.

Proportio §. 31.	Partes.	Logarithmi.
Sinus Anguli C.	gr. 45. 48. m.	C.L. 0.1445349
Latus oppofitum AB.	ped. 300.	2.4771212
Sinus Anguli A.	gr. 61. 16. m.	9.9429335
Latus oppofitum CB.	ped. 367. 1. m.	2.5645896

36 Premiffis tribus Problemibus univerfa Rectan-  
 gula folvi poffunt, breviores tamen, & facilliores funt  
 operationes capit is superioris.

37 PROBLEMA IV.  
 Datis tribus lateribus, invenire Angulos.

INVENIRE ANGVLM QVEMLIBET.

1. Latus minus BC.	300.	in Triangulo ABC. Fig. 13.
2. Latus medium AB.	400.	Logarithmi.
3. Latus maius AC.	600.	C.L. 7.2218487
4. Summa 1. & 2.	700.	2.8450980
5. Differentia 1. & 2.	100.	2.0000000
6. Differentia segm. AD.	116.	2.0669467
7. Differ. 3. & 6. DG.	483.	2.6845892
8. Semiffis 7. est EC.	241.	Summa Logarith. 3. 4. & 5.
9. Summa 6. & 8. AE.	358.	est Logarith. 6.

38 Ergo in Rectangulis AEB. BEC. invenientur  
 Anguli A. & C. cognitis AB. BC. & AE. & CE. per §. 26.

Pro Angulo ABE. & A. per §. 26.	Logarithmi.
Hypothenufa AB. pedum 400.	C.L. 7.3999400
ad Latus, vel seg. AE. pedum 358.	2.5542869
vt Radius.	10.0000000
ad Sinum Ang. ABE. gr. 63. 37.	9.9522269
qui est Sinus 2. Ang. A. gr. 26. 23.	

Pro Angulo EBC. & C. §. 26.	Logarithmi.
Hypothenufa BC. 300.	C.L. 7.5228788
ad Latus, vel segm. EC. 241.	2.3832159
vt Radius.	10.0000000
ad Sinum Ang. CBE. gr. 53. 40. m.	9.9060947
qui est Sinus 2. Ang. C. gr. 36. 20.	
Summa ABE. EBC. gr. 117. 17. m. est Ang. ABC.	

39

ALITER.

In eodem Triangulo ABC: Fig. 13. investigatur Angulus ABC.

Dispositio per 5. 15. Logarithmi.

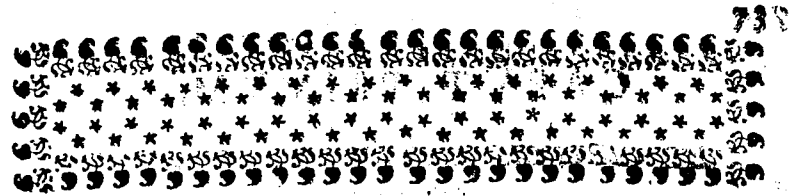
- 1. Latus maius includens AB. 400. C.L. 7.3979400
- 2. Latus minus includens BC. 300. C.L. 7.5228788
- 3. Differentia laterum AB. BC. 100.
- 4. Latus oppositum Ang. ABC. 600.
- 5. Summa 3. & 4. 700.
- 6. Differentia 3. & 4. 500.
- 7. Semisumma semissis 5. 350. Log. 2.5440680
- 8. Semidifferentia semissis 6. 250. Log. 2.3979400
- 9. Summa 4. Logarithmorum 19.8628268
- 10. Eius semissis est Sinus Arcus gr. 58. 38. 1/2. m. 9.9314134
- 11. Arcus duplus est Ang. ABC. 117. 17. m.

REGVLA PRACTICA

Addantur complementa Logarithmica laterum Logarithmis semisumma, & semidifferentia inter basim, & differentiam laterum; semissis summa erit Sinus 1. dimidij Anguli.

Tametsi demonstratio 6. 15. prolixa sit, & difficilis, hæc tamen praxis inde exorta facilis est, & per commoda, cum sit eadem ac illa, quæ lib. 3. §. 81. vtimur ad Trianguli Spherici resolutionem.

Finis Libri secundi.



LIBER TERTIVS DE TRIGONOMETRIA SPHERICA.



Rigonometria Sphærica est scientia Triangulorum, quæ in superficie Sphæræ tribus Arcibus circuli maximi describuntur. Triangula igitur in superficie plana tribus Arcibus circularum equalium, vel inæqualium comprehensa huiusce Trigonometria obiectum minimè sunt, non enim formantur in superficie Sphærica, neque etiam facta minoribus circulis in superficie Sphærica, quia sub circuli maximi tribus Arcibus non comprehenduntur. Est ergo Trigonometria Sphærica Mathematica pars utilissima, cuius usus latissimè diffunditur per omnia, quæ ad Sphæram, Geographiam, Navigationem, Horologigraphiam, & Astronomiam pertinet, ut in eius applicatione videre licet, ad hanc tamen intelligentiam non vlla elementa Sphærica requiruntur, quæ in prioribus capitibus demonstrantur, nè lector obstruatur demonstrationis gratia ad Theodosij, vel Menelæi Sphæricæ ablegandus sit.

Del P.I. Zaragoza.

K

CA.

## CAPVT PRIMVM.

DE CIRCVLIS MAXIMIS, ET ANGVLLIS  
Sphæricis.

**C**irculus Maximus in Sphæra est, qui commune cum illa centrum habet. Hinc fit quamlibet circuli Diametrum per eius centrum transeunt, et quoque per centrum Sphære, atque huius etiam Diametrum esse, quia autem Diameter Sphære maior Recta est omnium, quæ in ea consistere possunt, circulus eadem habens Diametrum, maior quoque est, & Maximus appellatur; nullus enim maior dari potest, licet infinitis admittat æquales. Reliqui omnes circuli, qui Maximi non sunt, neque commune cum Sphæra centrum habent, vocantur circuli minores, inter quos, qui longius à centro distat minor est propinquiore, cuius demonstratio eadem est, quam chordarum circuli, (2. 1. 3.)

2. Duo Circuli Maximi bifariam se intersecant.

Fig. 1.

Circuli EGF. EDF. secantur in punctis E. F. eritque communis Sectio planorum suorum recta EAF. (1. 1. 1.) ergo quia centrum Sphære omnibus circulis Maximus est commune, erit in vtroque plano (9. 1.) & in communi Sectione EAF. igitur cum EAF. transeant per centrum vtriusque Diametrum communis erit, & Semicirculi EGF. EDF. idem dices de quibuslibet alijs duobus circulis Maximis.

3. Polus Circuli Maximi est punctum in superficie Sphære, à quo omnes Rectæ, vel Arcus ad Circumferentiã Circuli profecti æquales sunt, & gr. 90. constât, vel Quadrante Circuli.

Concipiat circulus EDF. si omnes Arcus à puncto R. exeuntes NR. RD. RP. æquales sint; erit punctum R. Polus circuli EDF. pari ratione, quia omnes Arcus à pū-

cto E. ducti EV. EA. ED. EG. æquales existunt; erit E. Polus circuli, quem refert recta VAG. A. verò Polus circuli EGF. &c. Ergo cum EAF. Semicirculus sit (9. 1.) & EA. AF. æquales, erunt Quadrantes gr. 90. &c.

4. Angulus Sphæricus est duorum Circulorum Maximorum ad invicem inclinatio, eius autem mensura Planorum suorum inclinatio, vel Arcus Circuli Maximi interceptus, qui Polum suum habet in concursu, vel puncto Angulari.

Circuli EDF. EGF. secantur in puncto E. & E. Polus est circuli GDAV. dico Arcum GD. mensuram esse Anguli GED. circuli HK. GV. secantur in A. puncto, quod Polus est circuli EGFV. Arcus verò HG. mensura est Anguli HAG. circuli ECF. TGI. secantur in G. puncto, quod Polus est circuli MSZ. & Arcus NS. mensura est Anguli Sphærici ECS. &c.

5. Angulus quem duo Circuli Maximi efficiunt, æquatur distantia Polorum suorum, & e contra.

Sint circuli EDF. EGF. quorum Poli A. R. Angulus verò GED. atque eius mensura GD. quia RD. & AG. Quadrantes æquales sunt (9. 3.) ablato Arcu communi AD. relinquetur AR. Polorum distantia æqualis DG. mensura Anguli DEG. denominatio Anguli Sphærici eadem est, quæ Rectilinei; si gr. 90. sit, erit Rectus; si verò gr. 90. minor, Acutus; si maior, Obtusus; idem dicendum est de complementis eorum ad Quadrantem, vel Semicirculum, &c.

6. Si quilibet Circulus per Polum alterius transeat, Polus suorum altero habebit, & cum illo Angulos Rectos constituet, & e contra.

Sit circulus EGFV. cuius Polus A. per quem transeat circulus GAV. aio Polum circuli GAV. esse in circulo GEV. Angulos verò ad V. & G. Rectos esse 90. gr. dividatur Semicirculus GEV. bifariam in E. & ducto circulo EAF. quia Arcus AE. ex Polo A. Quadrans est (9. 3.) & EV. EG. Quadrantes quoque æquales existunt; erit E. Polus

circuli GAV. (S. 3.) & inest in circulo GEV. ergo cum EA. distantia Polorum æqualis sit Angulo EVA. (S. 5.) erit hic grad. 90. æqualis Quadranti EA. ergo Rectus; & rursum EGA. AGF. FVA. similiter, quoniam circuli XRO. MRZ. GRV. transeunt per punctum R. Polum circuli EDF. Recti erunt Anguli ad N. D. P. &c. Vice-versa si Anguli a I V. & G. Recti existant, distantia Polorum E. A. erit gr. 90. ergo VAG. transibit per Polum A. & VEG. per Polum E. (S. 5.)

7. Angulus quos duo Circuli Maximi efficiunt, in duabus sectionibus, æquales sunt; item illorum complementa, & unusquisque cum complemento suo æquivalens duobus Rectis, Verticalibus autem æquales sunt inter se.

Sint circuli EGF. EDF. puncta verò, sectionum E. F. & A. Polus circuli EGF. assumptis EG. GF. Quadrantibus æqualibus; circulus GAV. habebit Polos suos in E. & F. (S. 6.) ergo Arcus GD. erit mensura Angulorum GED. DFG. (S. 4.) atque æquales erunt isti, cum vnam, & eandem mensuram habeant. Item illorum complementa DEV. VFD. cum eorum mensura sit DV. igitur quia Arcus GD. DV. Semicirculum constituunt, sunt GFD. DFV. rursus GED. DEV. æquales duobus Rectis. Eadem est ratio in circulis GAV. HAX. quoniam circulus EGF. Polum suum habet in concursu A. & IG. HV. Semicirculum efficiunt; GAH. HAV. duobus Rectis æquivalent, & quia GHV. HVX. Semicirculi æquales sunt, dempto Arcu communi HEV. remanebunt æquales GHX. VX. qui mensura sunt Angulorum

Verticalium oppositorum GAH. VAX.

ergo isti æquales erunt. Verticalium oppositorum mensura sit VA. (S. 4.)

CAPVT SECVNDVM.

DE TRIANGVLIS SPHERICIS

In communi.

8. **T**riangulum Sphæricum est, quod Circuli Maximi tribus Arcibus illud includentibus, in superficie Sphærae comprehenditur.

Eius denominatio eadem est, quam Trianguli Plani Rectilinei. Si Rectum Angulum habeat, Rectangulum erit. Si Obtusum, erit Obtusangulum. Si verò omnes tres Angulos Acutos habeat, erit Acutangulum. Dicitur Equilaterum, cum tria latera æqualia sint. Isosceles verò cum duo latera habeat æqualia; Scalenum, si tria latera inæqualia sint.

9. Demonstrationes prop. 4. 5. & 6. nostra Geometriae communes sunt etiam Triangulis Sphæricis.

De Triangulis omnimodis æqualibus.

1. Si tria latera vnus æqualia sint tribus alterius. 2. Si duo latera duobus alterius æqualia, æqualem Angulum comprehendant. 3. Si duo Anguli, & vnus latus, alterius æqualibus correspondant. 4. Si duo latera æquentur duobus alterius, vbi verò Angulum oppositum æqualem habeant, & alterum eiusdem speciei; omnia erunt æqualia.

De Trianguli partibus.

1. Latera æqualia, æquales Angulos subtendunt. 2. Equales Anguli opponuntur lateribus æqualibus. 3. Maius latus, maiorem Angulum subtendit; maior verò Angulus latus maius. 4. Quilibet duo latera maiora sunt reliquo. Collectaria. 5. Triangulum Equilaterum, Equiangulum est. Equiangulum verò, Equilaterum etiam est. 6. In Triangulo Isoscele Arcus qui bifariam secat basim, bifariam secat, & Angulum. Si verò bifariam secet Angulum, basim quoque bifariam secabit, & perpendicularis est, & contra. 7. Si perpendicularum bifariam secet basim vntus Trianguli, Angulum quoque bifariam



secabit; si verò Angulum, etiam basim, si tamen Arcus basim, & Angulum bifariam secet, perpendicularis erit, & Triangulum perpetuò Isosceles. 8. Si duo Arcus aequales à puncto in alium cadant, à Perpendicularo, quod Quadrans non est, æqualiter recedent, & cum illo æquales Angulos constituent, & è contra: maior verò Arcus minorem efficit Angulum; & magis à Perpendicularo recedit si Anguli sint Acuti, minus si Obtusi. 9. Minor Arcus à puncto in alium cadens est Perpendicularum, in quod unicum est, nisi Quadrans fuerit.

## De Triangulorum inæqualitate.

1. Si duo Triangula duo latera habeant æqualia, quod maiorem continet Angulum, basim habebit maiorem. 2. Quod autem maiorem habet basim, Angulum continebit maiorem. 3. Si duo Triangula in eadem, vel æquali basi constituta sint, quod super illam unum Angulum maiorem habuerit, alterum verò minorem, vel æqualem, & latera habebit minora. 4. Continebunt tamen Angulum maiorem. 5. Idem erit si à basi terminis duo Arcus ad punctum intra Triangulum concurrant.

Hæ omnes propositiones eodem modo demonstrantur, quo 4. 5. & 6. lib. 1. nostræ Geometriæ, atque adeò illarum demonstrationes hæc inculcare superfluum videretur.

12. In quolibet Triangulo Spherico tria latera minora sunt integro Circulo. Fig. 1.

Sit quodvis Triangulum YPF. productis circulis, usque ad inter Sectionem O. aliud Triangulum exurgit PFO. cuius latera PO. OF. maiora sunt PF. §. 10. ergo Semicirculi duo YPO. YFO. maiores sunt tribus lateribus PF. PY. YP. quare tria latera minora sunt integro circulo.

13. Dato quocumque Triangulo, aliud secundum efficitur in Polis Arcuum suorum, cuius duo latera æqualia sunt duobus Angulis primi, tertium autem latus complementum est Anguli reliqui, idem dices de Angulis secundi, cum lateribus primi.

Sit

Sit Triangulum ABC. Polus Arcus AC. est Z. Polus BA. est Y. & BC. est R. dico in Triangulo YRZ. latera YR. RZ. æqualia esse Angulis ABC. BCA. & latus YZ. esse complementum ad Semicirculum Anguli BAC. quoniam Quadrantes YQ. RP. æquales sunt, subducto RQ. erit YR. æqualis QP. mensuræ Anguli ABC. & dempto SR. ex Quadrantibus ZS. RN. supererit ZR. æqualis SN. mensuræ Anguli ACB. & adiecto XZ. Quadrantibus YX. ZI. fiet YZ. æqualis IX. mensuræ Anguli XAI. complementi Anguli CAB. ergo patet veritas, &c.

14. Eadem ratione si assumamus Polum O. Arcus BA. in Triangulo RZO. erit RZ. æqualis SN. mensuræ Anguli BCA. & dempto OI. ex Quadrantibus HO. IZ. remanebit OZ. æqualis IH. mensuræ Anguli BAC. & RQ. complementum erit RY. hoc est QP. mensuræ Anguli ABC. Rursum si summamus Polum M. Arcus AC. in Triangulo MYR. erit MY. æqualis HI. mensuræ Anguli HAI. & YR. æqualis QP. mensuræ Anguli ABC. & MR. complementum Arcus RZ. hoc est NS. mensuræ Anguli BCA. &c. Ergo universaliter semper reperitur Triangulum secundum, cuius duo latera æquantur quibuslibet duobus Angulis primi, tertium verò latus complementum est Anguli tertij.

15. Dato quolibet Triangulo in Polis suorum Arcuum aliud constituitur, cuius tria latera complementa sunt ad Semicirculitrium Angulorum primi, tres verò Anguli secundi complementa trium laterum primi. Fig. 1.

In eodem Triangulo ABC. si assumamus Polos R. Arcus BC. M. Arcus AC. & O. Arcus BA. exurgit Triangulum MRO. latus MR. complementum est RZ. hoc est NS. mensuræ Anguli BCA. & RQ. complementum est YR. hoc est QP. vel ABC. & MO. complementum OZ. hoc est HI. vel BAC. ergo tria latera Trianguli MRO.

Del. P. I. Zaragocæ.

CCM

complementa sunt Triangulorum ad A. B. C. in super I S. mensura Anguli ad M. complementum est ST. vel AC. & QH. mensura Anguli ad O. complementum est QX. vel AB. & NP. mensura Anguli MRO. complementum est Arcuum EN. PF. hoc est CDB. ablato enim ND. ex Quadrantibus ED. NC. remanent æquales EN. DC. & rursus dempto DP. ex Quadrantibus FD. PB. super sunt FP. DB. æquales: ergo tres quoque Anguli Trianguli RMO. complementa sunt trium laterum A B C. & constat propositum, &c.

16 In quocumque Triangulo Spharico Angulus Externus minor est duobus Internis oppositis. Fig. 1.

Sit Triangulum ABC. & Angulus externus ACP. quia in tribus Polis M. Y. R. Triangulum YRM. constituitur, & latus YR. æqualis est Angulo ABC. & YM. Angulo CAB. & MR. complementum est Anguli ACB. (§. 13.) erit MR. æqualis Angulo ACP. & cum MR. minor sit MY. YR. (§. 12.) erit Angulus Externus ACP. minor duobus Internis oppositis ABC. CAB. &c.

17 In quolibet Triangulo Spharico tres Anguli maiores sunt duobus Rectis; minores verò sex. Fig. 1.

Sit Triangulum ABC. Anguli duo ABC. CAB. maiores sunt externo ACP. (§. 16.) ergo tres ABC. CAB. BCA. maiores existent duobus BCA. ACP. quia verò duo BCA. ACP. duobus Rectis æquivalent (§. 7.) erunt tres ABC. CAB. BCA. duobus Rectis maiores: pari ratione in Triangulo MRO. quilibet Internus cum suo Externo duos conficit Rectos MRO. cum ORZ. (§. 7.) ergo tres Interni cum tribus Externis componunt sex Rectos, quare ablatis Externis remanebunt Interni sex Rectis minores.

18 Triangulum Spharicum habere potest tres Angulos Rectos, duos Rectos, & unum Obtusum; item duos Obtusos, & unum Rectum, & tres Obtusos.

In Triangulo AFG. tres Anguli AFG. GAF. FGA. Re-

Recti sunt, in quo casu omnia tria latera sunt Quadrantes. In Triangulo HAF. Anguli ad F. & H. Recti sunt, & HAF. Obtusus: duo latera sunt Quadrantes HA. AF. & HF. Quadrante maius. In Triangulo NZF. Anguli ad Z. & F. Obtusi sunt, & Angulus ad N. Rectus. In Triangulo MRO. tres Anguli Obtusi sunt.

## CAPVT TERTIVM.

### DE TRIANGVLIS SPHERICIS.

*singillatim.*

19 In Triangulo Rectangulo latera Angulum Rectum ambientia eiusdem speciei sunt cum lateribus oppositis.

In Triangulo EDG. DG. minus est Quadrante, quia Angulus ad E. Acutus est, & EG. Quadrans est, quod Angulus ad D. Rectus sit. In Triangulo EBH. latera BH. HE. minora sunt Quadrante, sicut Anguli oppositi ad E. & B. In Triangulo NZF. Angulus Rectus est ad N. & latera NZ. NF. Quadrantem excedunt, vti Anguli Obtusi ad F. Z.

20 In Triangulo Rectangulo, si Anguli Obliqui, vel latera Anguli Recti sint eiusdem speciei; Hypothenusa minor erit Quadrante; si verò diversa, Hypothenusa maior erit Quadrante.

In Triangulo EBH. Anguli ad B. E. Acuti sunt, & Hypothenusa EB. minor Quadrante ED. In Triangulo GRZ. Anguli ZRG. GZR. sunt eiusdem speciei Obtusi, & Hypothenusa ZR. minor Quadrante ZS. In Triangulo YRG. latera RG. GY. eiusdem speciei sunt Quadrante maiora, Hypothenusa verò YR. minor. In Triangulo HBF. latera BH. HF. diversæ speciei sunt, & Hypothenusa BF. Quadrante maior. In Triangulo ECI. Anguli ad C. E. diversæ sunt speciei, & Hypothenusa EC. maior Quadrante ED.

21 In Triangulo Rectangulo Anguli duo superant Quadrantem, & qui vis Angulus Obliquus maior est differentia alterius, & Quadrantis.

In Triangulo EBH. tres Anguli EBH. HEB. BEH. duos Rectos excedunt (§. 17.) ergo ablato Recto H. erunt B & H. HBE. plus quam Rectus: ergo quia verò quia B. cum complemento suo ad Quadrantem Rectum constituit, erit Angulus ad E. maior complemento Anguli ad B. & in Triangulo FBH. cōtinuatis circulis. exurgit Triangulum BHE. Angulus ad E. ostensus est maior differentia Anguli EBH. & Quadrantis: differentia verò à Quadrante Anguli EBH. & FBH. vna, & eadem est (l. 1. §. 16.) ergo quia Anguli ad E. & F. æquales sunt (§. 7.) erit F. maior differentia inter Quadrantem, & Angulos HBE. doctrina tradita in §§. 17. 18. 19. 20. & 21. magni momenti est ad cognoscendum num. Triangulum recte propositum, vel solutum sit.

b. 22. In Triangulo Isosceli Anguli ad basim eiusdem sunt speciei cum lateribus, & e contra.

In Triangulis YRZ. RMO. suppositis YR. RZ. æqualibus, item RM. RO. transeat per Angulum ad R. & Polum A. basim YZ. MO. circulus VRAG. eruntque Anguli ad V. & G. Recti, §. 6. Ergo in Rectangulis VRY. VRZ. GRM. GRO. Anguli ad Y. Z. eiusdem speciei cum latere opposito VR. Quadrante minores existunt, uti latera RR. RZ. & Anguli ad M. O. eiusdem speciei cum RG. maiores Quadrante GA. (§. 19.) veluti latera RM. RO.

In quovis Triangulo Obliquangulo, si Anguli ad basim eiusdem speciei sint, Perpendicularis ab Angulo in basim intra Triangulum cadet, ac erit eiusdem speciei cum Angulis; si verò si illa extra sit, speciei, extra cadet, & Anguli Externi speciei oppositi.

In Triangulo ABC. cadat Perpendicularis AD. alteri Angulo cum Acutorum opposita, sitque B. ergo quia AD. latus est Anguli Recti, eiusdem speciei erit cum Angulo ABC. qui minor est Quadrante, §. 19. Ergo in Rectangulo ADC. Angulus C. oppositus lateri DA. erit

cl

I

Del P. I. Zaragoçà.

Acutus (§. 19.) Ergo AD. opponitur Angulo Interno Acuto BCA. & non Externo Obtuso ACP. & cadit intra Triangulum, & est AD. minor Quadrante, ut B. & C. In Triangulo RMO. si Anguli M. O. sint Obtusi, erit RG. opposita M. maior Quadrante: ergo etiam opponitur Angulo Obtuso O. itaque cadit inter O. & M. §. 19. In Triangulo ROZ. Perpendicularis RV. opponitur Angulo Acuto ROZ. & ita minor est Quadrante, §. 19. Ergo opponitur Angulo Externo Acuto RZV. & non Interno Obtuso RZO. §. 19. ergo extra cadit. E contra Perpendicularis RV. quæ opponitur Angulo Externo Obtuso ROG. erit Quadrante maior.

24 In Obliquangulo inæquales Angulos ad basim habenti, si Acuti extiterint, maius segmentum basim, & Anguli Perpendicularis, contrarium erit maiori lateri, & e contra si Anguli fuerint Obtusi.

In Triangulo YRZ. perpendicularis RV. incidit in basim YVZ. ergo quia latus RZ. maius supponitur, longius à Perpendiculo distabit (§. 10.) ergo Segmentum ZV. maius est Segmento YV. & Angulus ZRV. maior quam VRY. (§. 10.) Viceversa in Triangulo MRO. in quo Anguli ad M. O. Obtusi sunt, si à Semicirculis æqualibus ZRM. YRO. auferantur Segmenta inæqualia ZR. YR. inæqualia manebunt RO. RM. eritque RM. minus quam RO. igitur Angulus MRG. æqualis VRZ. maior est quam Angulus GRO. æqualis VRY. Segmentum verò MG. æquale VZ. maius est quam GO. æquale YV.

25 In Obliquangulo duos Angulos Acutos habenti, latus minori oppositum minus est Quadrante; si verò duos Angulos Obtusos habuerit, latus maiori subtensum maius est Quadrante.

In Obliquangulo RYZ. duo Anguli ad Y. Z. Acuti sunt, & Y. maior Z. ergo RZ. maius est RY. (§. 10.) igitur perpendicularis RV. facit Angulum YRV. minorem ZRV. (§. 24.) cum autem YRZ. minor sit duobus Rectis, existet YRV. Acutus recto minor: ergo quia in Rectan-

Del P. I. Zaragoçà.

L 2

gu-

gulo  $RVY$ . Anguli  $YRV$ .  $VYR$ . eiusdem speciei sunt Acuti, erit Hypothenusa  $RY$ . Quadrante minor (§. 20.) igitur latus  $YR$ . minori Angulo  $RZV$ . oppositum Quadrante minus est. Viceversa in Triangulo  $MRO$ . quod Angulos ad  $M$ .  $O$ . habet Obtusos, latus maius  $RO$ . maius Quadrante existet, est enim complementum lateris  $YR$ . Quadrante minoris.

26 In Triangulo Acutangulo vnumquodque latus singulatum Quadrante minus est.

In Triangulo  $ABC$ , perpendicularis  $AD$ . intra cadit, cum Anguli ad  $B$ . &  $C$ . Acuti sint (§. 23.) ergo quia  $BAC$  etiam est Acutus, erit  $DAE$ . Acutus: igitur in Rectangulo  $ADC$ . cum Anguli  $CAD$ .  $DCA$ . eiusdem speciei sint; Hypothenusa  $AC$ . Quadrante minor erit. Idem demonstrabitur de  $AB$ . si vero Perpendicularis a puncto  $C$ . ad  $BA$ . procedat, offendentur quoque  $CA$ .  $CB$ . Quadrante minora: igitur vnumquodque latus Quadrante minus est.

27 In Obtusangulo, si tria latera Quadrante maiora existant, tres Anguli Obtusi erunt, non verò e contra.

In Triangulo  $ROM$ . tria latera  $MR$ .  $RO$ .  $OM$ . Quadrante maiora sunt: ergo in tribus Polis  $A$ .  $B$ .  $C$ . Triangulum  $ABC$ . constituitur, cuius Anguli, complementa sunt laterum primi (§. 15.) ergo Triangulum  $ABC$ . Acutangulum est: igitur eius latera  $AB$ .  $BC$ .  $CD$ . Quadrante minora existunt (§. 26.) ergo illorum complementa, quæ sunt Anguli ad  $R$ .  $M$ .  $O$ . (§. 15.) Quadrante maiora sunt, atque adeò Anguli Obtusi existunt. Non è contra, tria enim latera Quadrante minora, vnum Angulum Obtusum habere possunt: ergo Polorum Triangulum tres Angulos Obtusos habebit, latus verò Quadrante minus, quia ex complementis conflatur.

(§. 15.)

## CAPVT QVARTVM.

DEMONSTRATIONES AD TRIANGVLA  
Sphærica Rectangula.

28 **P**eculiaris laterum, & Angulorum vnius Trianguli solutio in partium proportionenitur, qua demonstrata ad has cognitionem faciliè ad modum pervenitur. Claritati contentens Rectanguli proportionem hoc 4. capite ostendam, in 5. verò Obliquanguli, & in 6. privatam trium laterum, vel Angulorum rationem demonstrabo. In Triangulis Rectangulis latus Angulo Recto subtensum Hypothenusa est, ex lateribus Angulum Rectum includentibus alterum basis est, alterum Perpendicularum. Basis est latus, quod cum Hypothenusa Angulum vnum complectitur, latus verò oppositum illi Angulo Perpendicularum erit: vnde quodlibet est basis respectu Anguli contæmini, & Perpendicularum respectu oppositi.

## 29 PROPOSITIO II.

In Triangulis Rectangulis eundem Angulum Acutum ad hastam habentibus, Hypothenusarum Sinus, Perpendicularorum Sinibus proportionales sunt. Fig. 2.

Sit  $NCOA$ . Sphæra octava pars, eius centrum  $A$ . &  $NE$ .  $CO$ .  $QN$ . Quadrantes ad Angulos Rectos, eritque  $N$ . Polus  $OC$ . &  $C$ . Polus  $NO$ . &  $O$ . Polus  $NC$ . concipiantur ex Polis  $N$ . &  $O$ . quilibet alij Quadrantes  $NG$ .  $OR$ . se ad invicem Secantes in  $I$ . & cum Anguli  $OCN$ .  $NGO$ . Recti sint (§. 6.) erunt duo Triangula  $RCO$ .  $IGO$ . Rectangula eundem Angulum Acutum  $IOG$ .  $ROC$ . ad bases habentia. Ex puncto  $R$ . cadat Recta  $RB$ . Perpendicularis ad communem Sectionem  $AC$ . eritque Sinus Arcus  $RC$ . & Perpendicularis ad planum  $AOC$ . (23. P.) Perpendicularis  $IH$ . ad communem

Del P. I. Zaragoza.

See

Sectionem AG. Sinus erit Arcus IG. & in plano ORA. est RA. Radius, & Sinus Quadrantis OR. tunc IP. Perpendicularis ad communem Sectionem OA. Sinus est Arcus OI. Dico Sinus Hypothenusarum OR. OI. proportionales esse Sinibus Perpendicularum RC. IG. hoc est Rectam AR. esse ad PI. vt Recta RB. ad IH.

30 *Demonstratio.* RB. IH. quia Perpendiculares sunt ad planum AOC. parallelæ erunt (2.l.11.) tunc RA. IP. cum eodem plano AOR. sint, & Perpendiculares ad OA. parallelæ quoque erunt inter se (2.l.1.) ergo Anguli ARB. PIH. ex Rectis parallelis compositi, paralleli erunt, & æquales (3.l.11.) & quia Anguli RBA. IHP. Recti æquales sunt, erunt RAB. IPH. etiam æquales, (3.l.1.) & Triangula ARB. PIH. Æquiangula: ergo latera proportionalia sunt. (2.l.6.)

*Proportio.*

Vt	AR.	Sinus Hypothenuse.	OR.
ad	RB.	Sinum Perpendiculari.	RC.
ita	PI.	Sinus Hypothenuse.	OI.
ad	IH.	Sinum Perpendiculari.	IG.

Ergo etiam alternando, & invertendo, &c.

## 31 PROPOSITIO II.

In ysdem Triangulis Sinus basium proportionales sunt Tangentibus Perpendicularum. Fig. 2.

In planis ANC. ANG. sint CE. GL. Perpendicularis in Radios AC. AG. & erit CE. Tangens Perpendiculari RC. & GL. Tangens Perpendiculari IG. (1.l.9.12.) quia autem IH. LG. in eodẽ in sunt plano, & Perpendiculares sunt ad GA. erunt ad invicem parallelæ (2.l.1.) vti etiam RB. EC. ergo CE. GL. parallelæ sunt (2.l.11.) ducta verò GF. Perpendiculari ad OA. erunt CA. GF. parallelæ (2.l.1.) & CA. Sinus Quadrantis OC. & GF.

Si

Sinus Arcus OG. (1.l.9.11.) & cum Anguli ACE. FGL. Recti æquales sint, & paralleli, erunt quoque plana FGL. ACE. parallelæ; quia autem secantur plano ORA. communes Sectiones AE. FL. parallelæ sunt, & insuper Anguli ad A. F. & E. L. paralleli æquales, quæ omnia constat ex (3.l.11.) ergo Triangula ACE. FGL. Æquiangula sunt, vt antea, & illorum Homologa latera proportionalia. (2.l.6.)

32 *Proportio.*

Vt	AC.	Sinus Basis.	OC.
ad	CE.	Tangentem Perpendiculari.	RC.
ita	FG.	Sinus Basis.	OG.
ad	GL.	Tangentem Perpendiculari.	IG.

Ergo alternando quoque, & invertendo, &c. (4.l.5.)

## CAPVT QVINTVM.

## DEMONSTRATIONES AD TRIANGVLA Spherica Obliquangula.

33 **D**emonstrationes sequentes Obliquangulorum solutioni intersunt, quando duo latera, & vnum Angulum nota dantur, vel e contra. Præcedentibus nituntur, & illarum sunt Consecariorum.

## 34 PROPOSITIO I.

In quolibet Triangulo Sinus laterum proportionales sunt Sinibus Angulorum oppositorum. Fig. 1.

Sic Triangulum ABC. productis lateribus BA. AC. CAS. BCP. CBN. vsque ad Quadrantem, erit QP. mensura Anguli B. & NS. Anguli C. Dico Sinum BA. ad Sinum Anguli oppositi C. qui est NS. ita se habere, vt Sinus AC. ad Sinum B. qui est QP. Ex Angulo A. cadat Perpendicularum AD. Triangula Rectangula CSN. CAD. Angulum ACB. communem habent, & Triangulo

Del P. I. Zaragoza.

ppu la

la B Q P. BAD. communem quoque habent Angulum  
ABC. ergo Sinus Hypothenularum proportionales sunt  
Sinibus Perpendicularorum, §. 29.

35	Proportio 1.	Proportio 2.
vt CS. Sinus totus, qui est BQ.	B Q. Sinus totus, qui est CS.	
ad SN. Sinum ACB.	QP. Sinum ABC.	
ita CA. Sinus lateris.	BA. Sinus lateris.	
ad AD. Sinum Perpendiculari.	AD. Sinum Perpendiculari.	

Rectangulum sub medijs æquatur Rectangulo sub extre-  
mism (1.1.6.) extrema verò sunt eadem in duabus pro-  
portionibus: ergo Rectangulum S N. CA. æquale est  
Rectangulo sub Sinu toto, & Perpendicularo AD. Rursus  
Rectangulum QP. BA. æquale est Rectangulo sub Sinu  
toto, & Perpendicularo AD. igitur Rectangulum sub me-  
dijs S N. CA. æquatur Rectangulo sub alijs medijs QP.  
BA. ergo latera reciprocè proportionalia sunt (1.1.6.) vt  
Sinus S N. ad Sinum QP. ita Sinus BA. ad Sinum CA.  
& alternando, vt Sinus S N. Anguli C. ad Sinum lateris  
eius oppositi BA. ita Sinus QP. Anguli B. ad Sinum sui  
lateris oppositi AC.

## 36 PROPOSITIO II.

In quocumque Triangulo si ab uno Angulo Perpendicularum  
cadat, efficiet cum lateribus duos Angulos Verticales, & eorum  
Sinus 1. Sinibus 2. Angulorum ad basim proportionales erunt.

Fig. 1.

In Triangulo ABC. Perpendicularum est AD. Anguli  
verò Verticales BAD. DAC. quorum mensuræ HG.  
GI. & ablato GO. à Quadrantibus æqualibus HO. GF.  
remanet FO. æqualis GH. & insuper. EM. æqualis GI.  
item OP. complementum est PQ. mensuræ ABC. & MN.  
complementum NS. mensuræ ACB. ergo in Rectangulis  
ENM. PPO. quibus Anguli ad N. P. Recti sunt, &  
æquales. Acuti E. E. (§. 7.) Sinus Hypothenularum,  
Perpendicularorum Sinibus proportionales existent. §. 29.

Pro-

Proportio.

Vt Sinus EM. quod est GI. vel CAD. Verticalis.  
ad Sinum MN. qui est 2. NS. vel ACB. ad Basim.  
ita Sinus FO. qui est GH. vel BAD. Verticalis.  
ad Sinum OP. qui est 2. PQ. vel ABC. ad Basim.

## PROPOSITIO III.

Item sunt proportionales Sinus 2. Angularum Verticalium  
Tangentibus secundis laterum. Fig. 1.

In eodem Triangulo ABC. est FI. complementum  
IG. mensuræ CAD. & IC. complementum CA. & EH.  
Arcus HG. mensuræ Anguli BAD. & HB. Arcus BA.  
ergo ex §. 31. Sinus basium proportionales sunt Tangen-  
tibus Perpendicularorum, cum Anguli ad E. F. iidem sint  
§. 7.

Proportio ex §. 31.

Vt Sinus FI. qui 2. est IG. vel CAD. Anguli Verticalis.  
ad Tangentem IC. quæ 2. est lateris CA.  
ita Sinus EH. qui 2. est HG. vel BAD. Ang. Verticalis  
ad Tangentem HB. quæ 2. est lateris BA.  
& proportionales sunt etiam alternando, invertendo, &c.

## 38 PROPOSITIO IV.

Sinus 2. laterum proportionales sunt Sinibus 2. Segmento-  
rum, quæ à Perpendicularo in basi fiunt. Fig. 1.

In eodem Triangulo ABC. basis Segmenta sunt BD.  
CD. siquidem perpetuò sumuntur ab Angulo basis, vsque  
ad Perpendicularum, licet hoc cadat extra. Deinde EB.  
complementum est BD. & HB. ipsius BA. rursus FG. com-  
plementum est CD. & IC. ipsius CA. Anguli verò ad I. H.  
Recti, & ad F. E. iidem, vel æquales (§. 7.) ergo ex §. 29.  
proportionales sunt Sinus Hypothenularum Sinibus Per-  
pendicularorum in Rectangulis EBH. FCI.

Del P. I. Zaragoza. M. Pro-

Proportio §. 29.

Vt Sinus EB. qui est 2. Segmenta. BD. IV  
 ad Sinum EH. qui est 2. lateris. BA. 8a  
 ita Sinus FC. qui est 2. Segmenti. CD. 4a  
 ad Sinum CI. qui est 2. lateris. CA. 2a  
 Itemq; proportionales sunt alternando, invertendo, &c.

## 39 PROPOSITIO V.

Sinus 1. Segmentorum proportionales existunt Tangentibus 2. Angulorum ipsi conterminorum ad basim. Fig. 1.

In iplomet Triangulo ABC. subducto DP. ex Quadrantibus BP. DF. relinquitur FP. æqualis Segmento BD. & EN. Segmento DC. atque OP. complementum est PQ. mensuræ ABC. & MN. complementum NS. mensuræ ACB. Anguli ad N. P. Recti sunt (§. 6.) & E. F. æquales, vel iidem (§. 7.) ergo in Rectangulis ENM. FPO. proportionales sunt Sinus basium Tangentibus Perpendicularorum, ex §. 31.

Proportio §. 31.

Vt Sinus FP. qui est Segmentum BD.  
 ad Tangentem PO. quæ est 2. QP. vel Ang. ABD.  
 ita Sinus EN. qui est Segmentum DC.  
 ad Tangentem NM. quæ est 2. NS. vel Ang. ACB.  
 Atque etiam proportionales sunt alternando, invertendo, &c.

## 40 PROPOSITIO VI.

Tangentes Angulorum Verticalium proportionales sunt Tangentibus Segmentorum basim. Fig. 1.

Per §. 31. Sinus AG. ad Sinum AD. est vt Tangens GH. ad Tangentem DB. & vt Sinus AG. ad Sinum AD. ita etiam Tangens GI. ad Tangentem DC. ergo proportionales quæquæ erunt ex. (1.1.5.)

GH. Tangens BAD.

BD. Tangens Segmenti.

GI. Tangens CAD.

DC. Tangens Segmenti.

Ergo etiam alternando, &amp; invertendo, &amp;c. CA;

## CAPVT SEXTVM.

DEMONSTRATIO AD TRIA LATERA,  
 vel tres Angulos.

## 41 PROPOSITIO I.

Sinus Semisumma, & Semidifferentia quorumlibet duorum Arcuum, medij proportionales sunt inter Radium, & Semidifferentiam Sinuum Versorum eorundem. Fig. 3.

In circulo ZHF. sint Arcus EP. PC. & BC. duorum summa: & sumpta PY. æquali EP. erit CY. differentia EP. PC. Radius XP. Perpendicularis est EY. (2.1.3.) & BP. Sinus Versus Arcus EP. cumque CR. Perpendicularis sit XP. erit PR. Sinus Versus PC. & BR. vel CT. ipsi parallela erit differentia Sinuum Versorum BP. PR. quia autem XO. Perpendicularis est EC. eam bifariam secabit in O. ac pariter Arcum EC. (2.1.3.) Angulus vero EXO. erit Semisumma Arcuum EP. PC. & EO. Sinus Semisumma (1.1.9.8.) atque XK. Perpendicularis CY. Semisummam bifariam secabit, eritq; CK. Sinus Semidifferentiæ CY. dico EO. & CK. medios esse inter EX. CL.

42 Demonstr. Anguli EXO. EYC. æquales sunt, vt pote semisses Arcus EPC. (3.1.3.) quia vero OO. semisissus est CE. vt CK. semisissus CY. erunt EY. OK. parallelae, (2.1.6.) atque CL. semisissus CT. & Angulus OKC. æqualis EYC. & EXO. (2.1.1.) porro Anguli EOX. CLK. Recti sunt: ergo Triangula XEO. KCL. Equiangula sunt (3.1.1.) & latera Homologa proportionalia. (2.1.6.)

Proportio.

Vt EX. Radius.

ad EO. Sinum Semisumma EP. PC.

ita CK. Sinus Semidifferentia inter EP. PC.

vt CL. Semidifferentiam Sinuum Versorum BP. PR.

Del P. I. Zaragoza.

M 2

Con-

*Consect.* Cuiusvis Trianguli ECY. circulo inscripti laterum dimidia OG. CK. media sunt inter EX. Radium, & CL. dimidium perpendiculi CT.

43

## PROPOSITIO II.

In quouis Triangulo Sphærico proportionales sunt

*Rectangulum Sinuum laterum.*

ad *Quadratum Radij.*

vt *Differentia Sinuum Versorum Basis, & differentia laterum.*

ad *Sinum Versum Anguli Verticalis.*

Sit in Fig. 3. Triangulum SZP. in superficie Sphærae ZHD. Assumantur PE. PY. æquales Basis PS. sitque ZC. æqualis lateri ZS. & erit PC. differentia laterum ZS. ZP. eius verò Sinus Rectus CR. Sinus autem Versus RP. cõnexa EY. secabitur bifariam in B. (2. l. 3.) atque est BP. Sinus Versus Basis PS. vel PE. & BR. differentia Sinuum Versorum BP. RP. cuius semisis CL. vt antea: at PV. CI. Sinus sunt laterum ZP. ZC. & continuato Arcu ZSG. est HG. Sinus Versus Anguli Verticalis SZC. existente Radio XH. & CS. Sinus Versus eiusdem Anguli existente Radio CI.

*Demonstratio.* VPX. XAI. similia sunt, item SAB. SCT. (2. l. 6.) & insuper IAX. SAB. quia Angulus SAB. communis est; Anguli verò ad B. I. Recti: ergo ASB. AXI. Equiangula sunt (3. l. 1.) ergo vniuersa quatuor Triangula SAB. SCT. VPX. IAX. similia sunt inter se, (4. l. 6.) & latera proportionalia. (2. l. 6.)

Vt CT. | Chorda quoque, & Sinus | Sinus Versus CS.  
ad CS. | eiusdem Anguli in diver- | Sinus Versus HG.  
ita PV. | siscirculis, proportionales | Radius CI.  
ad PX. | sunt Radia (5. l. 6.) ergo. | Radius XII.

Quia

Quia verò Rectangula rationem habent compositam ex lateribus (1. l. 6.) quæ ex lateribus proportionalibus constant, erunt etiam proportionalia, atque ad eò proportionalia sunt sequentia.

Rum	CT. CS.	Et quia CT. CS. & CS.   Rum	CT. CS.	
Rum	CS. HG.		Rum	CS. HG.
Rum	PV. CI.		Basis	CT.
Rum	PX. XH.		Basis	HG.

Ergo per 1. l. 5. erunt etiam proportionales.

Rum Sinuum PV. CI. laterum ZP. ZC.

Rum vel Quadratum Radiorum æqualium PX. XH.

CT. Differentia Sinuum Vers. Basis, & differentia laterum.

HG. Sinus Versus Anguli Verticalis SZP.

44

## PROPOSITIO III.

In quouis Triangulo Sphærico Sinus vnius lateris ad Sinum alterius est, vt differentia Sinuum Versorum Basis, & differentia laterum ad Sinum Versum Anguli Verticalis.

Sit Y. Secus 2. lateris ZC. quia Rum PV. CI. ad Qum XH. est in ratione composita PV. ad XH. & CI. ad XH. (1. l. 6.) vel XH. ad Y. (6. 21. l. 1.) Ergo Rum PV. CI. ad Qum XH. est vt PV. ad Y. sed Rum PV. CI. ad Qum XH. est vt CT. ad HG. (6. 43.) Ergo vt PV. ad Y. ita CT. ad HG. quod &c.

45

## PROPOSITIO IV.

In quolibet Triangulo Sphærico proportionalia sunt

1. Rectangulum ex Sinibus laterum in aludentium Angulum.
2. Ad Quadratum Radij.
3. Vt Rectangulum sub Sinibus semisumme, & Semidifferentia Basis, & differentia laterum.
4. Ad Quadratum Sinus Semianguli Verticalis.

10



In eadem Fig. 3. & Triangulo SZP. concipiantur omnia, quæ antea, & quia PC. est differentia laterum, & PE. PY. æquales existunt Basi PS. erit EC. summa Basi s, & differentia laterum, & EO. Sinus Semisummæ: CY. verò differentia Basi PY. & differentia laterum PC. tum CK. Sinus Semidifferentiæ 2. Consideretur modò Semicirculus FDH. perpendicularis ad planum FZH. & sumpta HD. mensura Anguli PZS. perpendicularis DG. quæ determinat Sinum Versum GH. cadet in G. quare signum G duo refert puncta, alterum in plano, alterum verò in superficie Sphæræ, quod est ipsum D. idem dico de puncto S. iuncta DH. chorda Arcus DH. vel Anguli SZP. bifariam secabitur à perpendiculari XM. (2.1.3.) & MH. Sinus erit Semianguli SZP. ex lib. 1. §. 17. insinat verò MN. ad Angulos Rectos Radio XH. erit HN. semisis HG. veluti HM. rectæ HD. (2.1.6.) quibus suppositis.

46 *Demonstratio.* Vt CT. ad HG. ita illarum semisses CL. ad HN. (5.1.5.) ergo quia Rectangulum sub PV. CL. ad Rectangulum sub PX. HX. est, vt CT. ad HG. ex §. 43. & Rectangulum sub CL. HX. est ad Rectangulum sub HN. HX. cum sint sub eadem altitudine, vt Basi CL. ad HN. (1.1.6.) hoc est vt CT. ad HG. erunt quoque Rectangula inter se proportionalia. (1.1.5.)

Rum PV. CL. Quia verò Sinus OC. CK. laterum, ad Quam PX. HX. mensurant inter Radium HX. & CL. vt Rum CL. HX. Semidifferentiam Sinuum Versorum ad Rum HN. HX. (§. 4.) Rectangulum OC. CK. æquabitur Rectangulo sub CL. HX. (1.1.6.) Rursus in Triangulo Rectangulo XMII. est HM. media inter HN. HX. (3.1.6.) & Quæratum HM. æquale Rectangulo HN. HX. (1.1.6.) ergo in proportione antecedenti si in locum Rectangulorum sub CL. HX. & sub HN. HX. substituiamus ipsa æqualia videlicet Rectangulum sub OC. CK. & Quadratum HM. erunt quoque proportionalia. (1.1.5.)

*Proportio vltima.*

Rum PV. CL. Sinuum laterum ZP. ZC.

ad Quam PX. HX. Radij, vel Radiorum æqualium.

Rum OC. CK. Sinuum Semisummæ, & Semidifferentiæ 2.

ad Quam HM. HM. Sinus Semianguli Verticalis SZP.

## CAPVT SEPTIMVM.

### DEMONSTRATIONES SINGVLARES AD

*Triangula Sphærica.*

47 **T**heoremata sequentia Triangulis Sphæricis resolvendis necessaria non sunt, cū sufficiant Theoremata, capitum 4. 5. & 6. Illa tamen prætermittere nolui, studiosus enim varietate oblectatur. Habent nonnulla specialem convenientiam in privatos casus, alia verò operationes faciliores reddunt, vel saltè Mathematicarum fecunditatem confirmant, quæ per tot media diversa metam destinatam attingunt.

48

### PROPOSITIO I.

*Summa Tangentium primarum, vel secundarum duorum Arcuum Quadrante minarum, ita se habet ad differentiam eorundem, vt Sinus summa Arcuum ad Sinum differentia eorundem. Summa verò primarum ad summam secundarum, vt differentia.* Fig. 4.

Sint Arcus GC. GB. illorum differentia CB. sit FGH. perpendicularis ad Radium AG. & GR. æqualis GB. erit RC. summa Arcuum BG. GC. & GD. Tangens GC. & GH. GF. Tangentes Arcuum æqualium GB. GR. ergo HD. est summa Tangentium Arcuum RG. GC. & DF. differentia Tangentiū GC. GB. & Anguli ad F. H. æquales (5.1.1.) in Triangulo ADH. latera Sinibus Angulorū oppositorum proportionalia sunt. (ex lib. 2. §. 10.)

*Del P. I. Zaragoza.*

*Pro.*

49 *Propertio 1.* *Propertio 2.*  
*Latus AD.* | *Etiain in Triangulo* | *Latus AD.*  
*Sinus H.* | *ADF. proportio-* | *Sinus F. vel H.*  
*Latus DH.* | *nales sunt.* | *Latus DF.*  
*Sinus HAD.* | | *Sinus DAF.*  
 Ergo (1.1.5.) adinvicem quoque proportionales sunt.

*Propertio ultima.*  
*Latus DH. summa Tangentium* G.D. GH.  
*Sinus HAD. summa Arcuum* GC. GR.  
*Latus DF. differentia Tangentium* GF. GD.  
*Sinus DAF. differentia Arcuum.* GC. GB.

Proportionalès etiam sunt alternando, & invertèdo, &c.  
 Idem demonstratur de Tangentibus 2. collatis cum summa, & differentia complementorum: ergo quia summa complementorum eundem Sinum habet, quem summa Arcuum, cum illorum complementa sint ad Semicirculum, & differentia eadem. (1.1. §. 16.) Idem concludetur de Tangentibus 2. quoad summam, & differentiam Arcuum, itemque quoad 1.

50 PROPOSITIO II.

*Si Tangentes secunda, vel prima laterum Trianguli Sphaerici aequalem Angulum comprehendant; Recta Perpendicularis Angulos Verticales efficiet aequales Angulis Perpendiculari Sphaerici.* Fig. 5.

*Sit Triangulum Sphaericum BAC. & EF. Tangens 2. AC. & EG. Tangens 2. AB. Angulus verò FEG. aequalès BAC. sit EO. perpendicularis, & AD. perpendiculum Sphaericum: Dico Angulos FEO. OEG. aequales esse BAD. DAC. Anguli enim ad O. Recti sunt; Angulus verò ad F. complementum FEO. & ad G. complementum OEG. (3.1.1.) & per 3. prop. §. 37. proportionales sunt.*

Pro-

*Propertio 1.* *Propertio 2.*  
*Tangens 2. BA.* | & per l. | *Latus EG. Tangens 2. BA.*  
*Tangens 2. AC.* | 2. §. 10. | *Latus EF. Tangens 2. AC.*  
*Sinus 2. BAD.* | | *Sinus F. qui est 2. FEO.*  
*Sinus 2. DAC.* | | *Sinus G. qui est 2. OEG.*

Ergo existentibus æqualibus Angulis FEG. BAC. æquales quoque sunt FEO. BAD. & OEG. DAC. idem demonstrabitur de Tangentibus 1. cum reciproca sunt aq per lib. 1. §. 27.

51 PROPOSITIO III.

*In quocumque Triangulo Sphaerico, cuius latera sunt eiusdem speciei, Sinus summa laterum, ita se habet ad Sinum differentia eorundem, ut Tangens 2. Semitanguli Verticalis ad Tangentem 1. Semidifferentia Angulorum Verticalium, qui a perpendicularo sunt.* Fig. 5.

In iisdem Triangulis BAC. FEG. proportionales sunt.

*Propertio 1. per lib. 2. §. 11.* *Propertio 2. §. 48.*  
*Summa EF. EG. Tang. 2. AC. AB.* *Summa Tang. 2. AC. AB.*  
*Differentia eorundem.* *Differentia eorundem.*  
*Tangens semisis summa F. & G.* *Sinus summa AC. AB.*  
*Tangens semisis differentia F. & G.* *Sinus eorum differentia.*  
 Ergo proportionales quoque sunt. (1.1.5.)

*Sinus summa Arcuum* AC. AB.  
*Sinus differentia* AC. AB.  
*Tangens 2. summa F. & G. qua est 2. FEG. vel 2. BAC.*  
*Tangens 2. differentia F. & G. qua eadem est quam FEO. & OEG. (1.1. §. 16.) vel BAD. DAC. per 2. prop. §. 50.*

72 PROPOSITIO IV.

In quolibet Triangulo Spharico, cuius Anguli supra Basim sunt eiusdem speciei, Sinus summa Angulorum, ad Sinum differentie eorundem, est vt Tangens Semibasis ad Tangentem Semidifferentie Segmentorum. Fig. 1.

Quia in Pollo Trianguli ABC. fit RMO. in quo omnia sunt alterius complementa (9. 14.) sed ex 9. 51. proportionales sunt, vt Sinus summæ laterum MR. RP. vel summæ Angulorum C. & B. ad differentiam eorundem, ita Tangens 2. Semianguli NRP. vel NDP. hoc est Tangens 1. Semibasis BC. ad Tangentem Semidifferentiæ Angulorum NRD. DRP. vel Arcum ND. DP. hoc est BD. DC. Ergo constat propositum, quod, &c.

73 PROPOSITIO V.

Datis tribus lateribus Trianguli Spharici, unum latus, & Basim habentis Quadrante minore, datur aliud Triangulum Planum cum aequali Angulo Basi opposito. Fig. 6.

Sic Triangulo ABC. Angulus A. latus AB. & Basis opposita BC. & sint Arcus AB. BC. Quadrante minores, productis AB. AC. eò vltque secantur Semicirculi in D. erit AD. communis Sectio, & cõcepto plano AHZ. perpendiculari communi Sectioni AD. erit AHZ. perpendiculari planis eorundem DCA. ABD. (3. 1. 11.) & AH. AZ. illorum communes Sectiones perpendiculares DA. & Angulus ZAH. planorum inclinatio est (23. P.) ergo æqualis BAC. (9. 4.) ex puncto B. tanquam Polo, Arcus BC. decirciderit Semicirculus FCE. & quia DBA. transire per eius Polum, erit ipsi perpendiculari (9. 6.) Arcus AE. est summa lateris AB. & Basis BC. & AG. illorum differentia; ductis DEH. DFG.

in plano DEHA. & DCZ. in plano DCZA. conne ctantur AE. FE. &c.

Demonstratio. Cum AE. perpendicularis sit DH. (3. 1. 3.) Anguli DAE. DHA. æquales erunt (3. 11. 6.) DAE. DFE. æquales sunt, insitit enim eidem Arcui DE. (3. 1. 3.) ergo DFE. DHG. æquantur, cum vero GDH. communis sit, æquales quoque erunt DGH. DEF. (3. 1. 1.) diuisa GH. bifariam in X. & descripto Semicirculo GZH. qui plana GZH. FGE. perpendicularis existunt DHG. & Sectiones FE. GH. subcontrariis Recta DZ. secabit circulum ECF. in C. vbi secatur in plano DCA. (5. p. l. 1. Appollonis) Angulus ADE. telmissis est AE. summæ lateris AB. & Basis BC. (3. 1. 3.) & FDA semilatis AG. eorundem differentia, CAD. verò telmissis lateris AC. & quia HA. ZA. perpendiculares sunt Diametro communi AD. erit AH. Tangens Semisummæ, & AG. Tangens Semidifferentiæ, & AZ. Tangens Semilateris AC. & GH. differentia Tangentium, at GX. XZ. XI. Semidifferentia Tangentium; Semidifferentia autem cum parte minori AG. Semisummam AX. conficit (1. 2. 9. 12.) ergo in Triangulo Plano cognita sunt tria latera, AZ. Tangens Semilateris maioris; AC. & AX. Semisumma Tangentium Semisummæ, & Semidifferentiæ Basis, & lateris minoris; & demum XZ. Semidifferentia eorundem Tangentium; Angulus verò XAZ. æqualis est Spharico CAB. ergo constat propositum;

&c.

## 54 PROPOSITIO VI.

In quocumque Triangulo Sphærico habente duo latera Quadrante minora, Tangens Semibasis, ita se habet ad Tangentem Semisummam laterum, ut Tangens, Semidifferentia laterum ad Tangentem Semidifferentiæ Segmentorum Basis. Fig. 6.

Sit Triangulum ABC. latera AB. BC. Quadrante minora, & AC. Basis; reliqua omnia vt in 5. prop. acta Recta DOR. secabit Semicirculum GZH. in R. vbi secatur à communi Sectione AZ. eritque AR. Tangens ADR. semissis differentiæ Segmentorum A O. nam cum BOC. Isocèles sit, perpendicularum BI. secabit æquales IC. OI. (S. 10.) Segmenta Basis sunt AI. IC. quare AO. differentia est Segmentorum, quibus suppositis, Rectæ AH. AZ. circulum GZH. secant; ergo proportionales sunt (6.1.6.)

Proportio  
 AZ. Tangens Semibasis AC.  
 AH. Tangens Semisumma AE.  
 AG. Tangens Semidifferentia laterum AF.  
 AR. Tangens Semidifferentiæ Segmentorum AO.

Et etiam alterando, & invertendo, &c.  
 Neperus hac proportione Trigonometriam ditavit.

## 55 PROPOSITIO VII.

In Triangulo Rectangulo si Hypobenusæ, & perpendicularum minores Quadrante existant; Tangens Semibasis mediæ erit inter Tangentes Semisummæ, & Semidifferentiæ Hypobenusæ, & perpendiculari. Fig. 6.

Confectarium est antecedentis: perpendicularum enim cadit in extremum Basis, & Basis tota differentia est Segmentorum: ergo vt Tangens Semibasis ad Tangentem Semisummæ Hypobenusæ, & perpendiculari, ita Tangens Semidifferentiæ ad Tangentem Semidifferentiæ Segmentorum, quæ eadem est Semibasis.

## CAPVT OCTAVVM.

## RESOLVTIO TRIANGVLI SPHERICI

Rectanguli.

56 **A**ngulus Rectus supponitur perpetuo notus, reliqua verò data, vel quæsitæ lineola, vel punctis denotantur, vt in Trigonometria Plana. Maioris perspicuitatis gratia, termini Trianguli hunc ordinem servabunt. 1. Hypobenusæ. 2. Latus conterminum. 3. Latus oppositum. 4. Angulus conterminus. 5. Angulus oppositus. Datis iuxta ordinem, 1. & 2. tum 1. & 3. &c. exquiruntur quoque secundum ordinem reliqui.

57 In omni proportione disponuntur termini, vt in Trigonometria Plana, & pro primo Logarithmo eius complementum assumitur, trium autem summa multata Radio quartum exhibet. Radius demitur vnitæ ad sinistram in additione omissa, vt monuimus lib. 1. S. 119. Ita vt si omnes tres termini addantur, semper ad sinistram ante punctum, characteristicam diuidens; provenient duæ litteræ, quarum prima, si futura sit vnitæ, non oportet scribi: si verò futura sit 2. apponitur 1. plus enim ascendere nequit, auferre tamen hanc vnitæ, idem est ac demere Radius. Quando Logarithmus sit Tangentis Radio maioris, sumetur complementum vsque ad duplum Radius, & detrahentur 2. ex summa, quod dupli Radij subtractioni æquualet. Hoc monitum in posterum retinere operæ pretium erit.

58 Omnes resolutiones à Fig. 1. promanare debent, & in qualibet duo Triangula constituuntur cum Angulo communi BEH. DEG. latera HB. GD. Angulo communi opposita perpendicula sunt, latera verò inter Angulum communem, & Rectum Bases existant EH. EG. Arcus oppositi Angulo Recto sunt Hypothe-

nusæ EB. ED. idem est in Triangulis DEG. CEI. ita vt Triangulum alterum, veluti DEG. Hypothenusam, & Basim habeat semper Quadrantes, vti DE. GE. quod principale voco, alterum verò proportionale, siue minus sit veluti EBH. siue maius vt CEI.

59 Quoties in Triangulo proportionali nota est, vel quæ sita Hypothenusa, ratio erit Sinus ad Sinum per §. 29. Si verò Hypothenusa in proportione non sit, Basis autem Trianguli proportionalis nota sit, ratio erit Sinus ad Tangentem, at si Basis ignota existat, ratio erit Tangentis ad Sinum per §. 31. & tandem ratio incipere semper debet à Triangulo in quo binæ res cognitæ dantur, Hypothenusa, & Perpendicularum, vel Basis, & Perpendicularum, atque etiam prima sit oportet eiusdem speciei cum tertio cognito alterius Trianguli.

60 Quatuor sunt Triangula principalia cum suis proportionalibus, primum DEG. BEH. secundum HAG. BAD. tertium QBP. ABD. quartum DRP. ARQ. Si in primo terminos haud reperiam sufficientes resolutioni, transibo ad secundum, vel tertium, vel quartum, in quorum vno offendentur, consideratis lateribus, & mensuris Angulorum cum suis complementis, vt in Triangulo BEH. est BD. complementum EB. & HG. complementum EH. & BA. complementum BH. DG. verò mensura Anguli BEH. & DA. ipsius complementum, &c.

Ista rectius percipientur in ipsa praxi ad solutionem sequentium Problematum adhibita.



PRO.

## 61 PROBLEMA I.

Data Hypothenusa, & altero latere.

1. Inuenire reliquum latus.
2. Angulum conterminum.
3. Angulum oppositum.

I. INVENIRE RELIQUVM LATVS. Fig. 1. **I**N Triangulo BEH. datur Hypothenusa EB. 50. grad. 20. m. & latus HB. 30. gr. 25. min. inquiritur reliquum latus EH. vel eius complementum HG. quia BD. complementum est Hypothenusæ EB. & BA. complementum perpendiculari BH. in Triangulis ABD. AHG. sufficientes terminos habeo per §. 29. vt Sinus novæ Hypothenusæ AB. ad Sinum Quadrantis AH. ita Sinus perpendiculari BD. ad Sinum perpendiculari HG. ergo respectu habito ad Triangulum EBH. ordinabitur sequens proportio.

Proportia.	Gradas.	Logarithmi.
AB. Sinus 2. perp. BH.	30.25. m.	CL. 0.0643082
AH. Sinus totus, vel Radius.	90.00. m.	10.0000000
BH. Sin. 2. Hypothenusa EB.	50.20. m.	9.8050385
HG. Sinus 2. Basis EH.	42.15. m.	9.8693467

## 62 DE INVENIRE ANGVLVVM CONTERMINVM.

In eodem Triangulo BEH. datis Hypothenusa EB. & latere BH. quæritur Angulus EBH. conterminus lateri BH. eius mensura est PQ. complementum verò QR. & quoniam HA. BQ. ED. BP. Quadrantes existunt; est AQ. æqualis BH. & DP. EB. ergo in Triangulis RPD. RQA. proportionales sunt per §. 31. Sinus Basis RQ. ad Tangentem perpendiculari QA.

DE P. I. Zaragoçà.

11. VI

104 LIBER III. CAPVT VIII.  
 vt Sinus totus R P. ad Tangentem P D. & respectu Trianguli EBH. inuertendo.

Proportio §. 31.	Gradus.	Logarithmi.
DP. Tangens Hypoth. EB.	50.20.m. CL.	9.9184198
AQ. Tangens Perpend. BH.	30.25.m.	9.7687029
PR. Sinus totus, vel Radius.	90.00.m.	10.0000000
QR. Sinus 2. QP. vel Ang. EBH.	60.53.m.	9.6871227

Ablatus est numerus binarius 2. ex summa, quia complementum Logarithmicum assumptum est ad duplum Radium, §. 57.

III. REPERIRE ANGVLVVM OPPOSITVM.

63 In eodem Triangulo EBH. datis EB. BH. quaeritur Angulus BEH. lateri BH. oppositus: mensura Anguli est DG. itaque in Triangulis EBH. EDG. proportionem habemus.

Proportio §. 29.	Gradus.	Logarithmi.
Sinus Hypoth. EB.	50.20.m. CL.	0.1136384
Sinus Perpend. BH.	30.25.m.	9.7043947
Sin. totus, vel Rad. ED.	90. 0.m.	10.0000000
Sinus DG. Anguli BEH.	41. 7.m.	9.8180331

64 Eadem operatio fit quando partes datae Quadrante maiores existunt, habet enim eosdem Sinus, & Tangentes, quam minores, veluti si Triangulum sit BFX. Angulus ad X. Rectus, Hypothenusa BF. 129. 40. latus BX. 149. 35. disponentur termini.

Proportio §. 29.	Gradus.	Logarithmi.
Sinus Hypoth. BF.	129.40.m. CL.	0.1136384
Sinus Perpendiculari. BX.	149.35.m.	9.7043947
Sin. totus, vel Rad. FD.	90. 0.m.	10.0000000
Sinus DV. Anguli BFX.	138.53.m.	9.8180331

Sumitur Angulus Obtusus, vt latus oppositum, §. 19.

PRO-

65 PROBLEMA II.

Data Hypothenusa, & Angulo vno.

1. Reperire latus conterminum.
2. Latus Angulo oppositum.
3. Reliquum Angulum.

I. INVENIRE LATVS CONTERMINVM.

In Triangulo EBH. datur Hypothenusa EB. 65. m. 45. & Angulus EBH. 61. m. 35. investigatur latus BH. Angulo dato conterminum. In Triangulis RDP. RAQ. cum ED. BP. HA. BQ. Quadrantes existant, erit DP. æqualis Hypothenusæ EB. & AQ. perpendiculo BH. & RQ. complemento QP. mensuræ EBH. ergo per cap. 4. §. 31. proportionales sunt. Sinus totus R P. ad Sinum RQ. vt Tengens DP. ad Tangentem AQ. & quoad Triangulum EBH. est.

Proportio §. 31.	Gradus.	Logarithmi.
Sinus totus, vel Rad. RP.	90.00. CL.	0.0000000
Sinus 2. EBH. qui est RQ.	61.35.	9.6774975
Tang. Hypoth. DP. vel EB.	63.45.	10.3070250
Tang. lateris AQ. vel BH.	43.59.	9.9845225

66. II. INVENIRE LATVS OPPOSITVM.

In Triangulo BEH. datur Hypothenusa EB. 52. 33. Angulus BEH. 40 58. quaeritur latus oppositum BH. in Triangulis EDG. EDH. invenitur proportio cap. 4. §. 29.

Proportio §. 29.	Gradus.	Logarithmi.
Sinus totus, vel Rad. ED.	90. 0. CL.	0.0000000
Sinus DG. Anguli BEH.	40.58.	9.8166521
Sinus Hypoth. EB.	52.33.	9.8997572
Sinus lateris oppos. BH.	31.22.	9.7164093

Del P. I. Zaragoçà.

O

IN-

## 67 III. INVENIRE RELIQVVM ANGVLVVM.

In Triangulo EBH. datis Hypothenusa EB. 63. 45.  
Angulo EBH. 61. 35. exquiritur reliquus Angulus  
BEH. proportio inuenietur in Triangulis BPQ. BDA.

Proportio §. 31.		Logarithmi.
BP. Sinus totus.	90. 0.	CL. 0.0000000
BD. Sinus 2. Hypoth.	EB. 63. 45.	9.6457058
PQ. Tangens Anguli EBH.	61. 35.	10.2667433
DA. Tang. 2. GD. vel Ang. BEH.	50. 44.	9.9124491

## 68 PROBLEMA III.

Datis duobus lateribus.

1. Inuenire Hypothenusam.
2. Quemlibet Angulum.

## I. REPERIRE HYPOTHENVSAM.

In Triangulo BEH. dantur latus EH. 59. 22. latus  
verò HB. 33. 44. quæritur Hypothenusa EB. in Trian-  
gulis AHG. ABD. inuenietur proportio.

Proportio.	Gradus.	Logarithmi.
AH Sinus totus	90.00.	CL. 0.0000000
AB. Sinus 2. lateris BH.	33. 44.	9.9199307
HG. Sinus 2. lateris EH.	59. 22.	9.7071801
BD. Sinus 2. Hypoth. EB.	64. 56.	9.6271108

## 69 II. INVENIRE QVEMLIBET ANGVLVVM.

Datis iisdem investigatur Angulus BEH. oppositus  
BH. ratio reperitur in Triangulis EDG. EBH.

Proportio §. 31.	Gradus.	Logarithmi.
Sinus EH. lateris conterm.	59. 22.	CL. 0.0652765
Sinus totus EG.	90.00.	10.0000000
Tangens HB. lateris oppositi	33. 44.	9.8246190
Tangens GD. Ang. HEB.	37. 49.	9.8898955

Pro Angulo EBH. vt Sinus BH. ad Sinum totum, sic  
Tangens lateris oppositi HE. ad Tangenté Anguli EBH.

PRO.

## 70 PROBLEMA IV.

Dato vno latere, & Angulo contermino.

1. Inuenire Hypothenusam.
2. Latus oppositum.
3. Reliquum Angulum.

## I. INVENIRE HYPOTHENVSAM.

Latus EH. sit 67. 51. Angulus conterminus BEH. 28.  
22. quæritur Hypothenusa EB. reperietur in Triangulis  
AHG. ABD.

Proportio §. 31.	Gradus.	Logarithmi.
AG. Sinus totus, vel Radius.	90.00.	CL. 0.0000000
AD. Sin. 2. GD. vel Ang. BEH.	28. 22.	9.9444457
GH. Tangens 2. lateris EH.	67. 51.	9.6096742
DB. Tangens 2. Hypoth. EB.	70. 18.	9.5541192

## 71 II. INVENIRE LATVS OPPOSITVM.

Datis iisdem indagatur HB. in Triangulis EGD. EHB.

Proportio §. 31.	Gradus.	Logarithmi.
EG. Sinus totus	90.00.	CL. 0.0000000
EH. Sinus lateris conterm.	67. 51.	9.9667047
DG. Tangens Anguli BEH.	28. 22.	9.7323506
HB. Tangens lateris oppositi	26. 34.	9.6990553

## 72 III. INVENIRE RELIQVVM ANGVLVVM.

Datis latere HB. 37. 21. Angulo contermino HBE.  
72. 25. indagatur reliquus Angulus BEH. in Triangu-  
lis BQP. BAD. reperietur proportio, cap. 4. p. 1. §. 29.

Proportio §. 29.	Gradus.	Logarithmi.
BQ. Sinus totus	90.00.	CL. 0.0000000
BA. Sinus 2. lateris BH.	37. 21.	9.9003367
QP. Sinus Anguli EBH.	72. 25.	9.9792198
AD. Sin. 2. DG. vel BEH.	40. 44.	9.8795565

Del P. I. Zaragoçá.

O 2 PRO.

## 73 PROBLEMA V.

Dato vno latere, &amp; Angulo opposito.

1. Invenire Hypothenusam.
2. Reliquum latus.
3. Reliquum Angulum.

## I. INVENIRE HYPOTHENVSAM.

In Triangulo EBH. datur Angulus B E H. 32. 54. latus oppositum H B. 23. 17. quæritur Hypothenusa E E. ratio inuenietur in Triangulis E D G, EBH. §. 29.

Proportio §. 29.	Gradus.	Logarithmi.
DG. Sinus Anguli BEH.	32. 54.	CL. 0.2650607
EB. Sinus lateris dati	23. 17.	9.5969029
DB. Sinus totus	90. 00.	10.0000000
BE. Sinus Hypothenusa	46. 42.	9.8619636

## 74 II. INVENIRE RELIQVVM LATVS.

Datis iisdem investigatur HE. in Triangulis E D G, EBH.

Proportio §. 31.	Gradus.	Logarithmi.
DG. Tangens Anguli BEH.	32. 54.	CL. 0.1891433
EB. Tangens lateris oppos.	23. 17.	9.6337948
EG. Sinus totus, vel Radius	90. 00.	10.0000000
EH. Sinus alterius lateris	41. 42.	9.8229381

## 75 III. INVENIRE RELIQVVM ANGVLVVM.

Datis iisdem indagatur Angulus EBH. in BQP. BAD.

Proportio §. 29.	Gradus.	Logarithmi.
BA. Sinus 2. lateris BH.	23. 17.	CL. 0.0368918
BQ. Sinus totus, vel Radius	90. 00.	10.0000000
EA. Sinus 2. DG. vel BEH.	32. 54.	9.9240827
QP. Sinus 1. QP. vel EBH.	66. 4.	9.9609745

PRO-

76 PROBLEMA VI.  
Datis duobus Angulis.

1. Invenire Hypothenusam.
2. Invenire quodlibet latus.

## I. INVENIRE HYPOTHENVSAM.

Datis BEH. & EBH. quæritur EB. in BQP. BAD.

Proportio §. 31.	Gradus.	Logarithmi.
QP. Tangens Anguli EBH.	60. 18.	CL. 9.7561718
AD. Tangens 2. Anguli BEH.	45. 30.	9.9924197
BP. Sinus totus, vel Radius	90. 00.	10.0000000
BD. Sinus 2. Hypothenus. EB.	55. 54.	9.7485913

Ex quolibet Angulo sumi potest Tangens 1. & ex reliquo 2. uti videre est in Triangulis FDG. FPO.

Proportio §. 31.	Gradus.	Logarithmi.
DG. Tangens 1. Anguli BEH.	45. 30.	CL. 9.9924197
PQ. Tang. 2. PQ. vel Ang. EBH.	60. 18.	9.7561718
DF. Sinus totus, vel Radius	90. 00.	10.0000000
PF. Sin. 2. DP. vel Hypoth. EB.	55. 54.	9.7485913

## 77 II. INVENIRE QVODLIBET LATVS.

Datis iisdem, quæritur BH. in Triangulis BQP. BAD.

Proportio §. 29.	Gradus.	Logarithmi.
QP. Sinus Anguli conterm. EBH.	60. 18.	CL. 0.0611645
AD. Sinus 2. Anguli oppositi BEH.	45. 30.	9.8456618
BQ. Sinus totus, vel Radius	90. 00.	10.0000000
BA. Sinus 2. lateris BH.	36. 12.	9.9068263

Et EH. in Triangulis FGD. FOP.

Proportio §. 29.	Gradus.	Logarithmi.
GD. Sinus Anguli conterm. BEH.	45. 30.	CL. 0.1467579
OP. Sin. 2. Ang. opp. PQ. vel EBH.	60. 18.	9.6950074
GF. Sinus totus, vel Radius	90. 00.	10.0000000
OF. Sinus 2. OG. qui est EH.	46. 00.	9.8417653

Del P. I. Zaragoçã.

PRO-



78

PROBLEMA VII.

De Triangulis Quadrantalibus.

Triangulum Quadrantale est, quod vnum latus Quadrantem habet gr. 90. neque Rectangulum est, resolvitur tamen, vt Rectangula commutatis lateribus in Angulos, & Angulis in latera, cum enim in Polis efficiatur aliud, cuius Anguli complementa sunt laterum, latera verò Angulorum, s. i s. prodit Triangulum vnum Rectangulum, & quia complementa ad Semicirculum eisdem Sinus, & Tangentes habent; sufficit latera in Angulos convertere, & Angulos in latera. Sit pro exemplo Triangulum EBA. sitque EB. 55. 54. BA. verò 53. 48. & EA. Quadrans 90. 0. indagatur Angulus EAB. maiori lateri oppositus: permutatis lateribus in Angulos; suppono maius latus exquiri, vti in operatione præcedenti.

Proportia.	Gradus.	Logarithmi.
Sinus BA. lateris conterm.	53.48.	CL. 0.0931478
Sinus 2. BE. lateris oppos.	55.54.	9.7486833
Radius	90.00.	10.0000000
Sinus 2. Anguli EAB.	46.00.	9.8418311

79

Observationes generales.

In efformatione Rectangulorum observetur, in Angulis Acutis duo simul maiores semper esse gr. 90. Obtusos verò 180. minores. Vnumquodque latus Angulo Acuto, sibi opposito minus; Obtuso verò opposito maius. Latera sequi speciem Angulorum oppositorum, Hypothensam minorem Quadrante existere, si Anguli Obliqui eiusdem speciei sint, maiorem tamen si diversæ. Observentur partes, quæ Obtusæ, vel Acutæ prodire debent; maximè in Quadrantalibus, facta commutatione laterum in Angulos, & Angulorum in latera solvantur Quadrantalia per Problema ad quod pertinet, veluti Rectangula.

CA.

CAPVT NONVM.

RESOLVTIO OBLIQUANGVLORVM

Sphæricorum.

80 Problemata Obliquangula sunt sex, ad tres species revocata.

- Species 1. Datis tribus partibus alternis invenire reliquas.
- Species 2. Datis duabus partibus alternis cum intermedia.
- Species 3. Datis duabus partibus alternis cum vna opposita.

Prima species vnicum habet Problema, secunda duo, tertia verò tria, quæ omnia sex conficiunt. Partes alternas voco, quæ vnam intermediam habent, veluti latera, quæ vnum Angulum habent intermedium; & Anguli, quibus intermedium est vnum latus: quare datæ partes alternæ latera, vel Anguli esse possunt.

SPECIES PRIMA.

PROBLEMA I.

Datis tribus partibus alternis.

Invenire quamlibet partem oppositam.

I. Datis tribus lateribus. Reperire quemlibet Angulum.

81 In Triangulo ABC. notis tribus lateribus, indagatur Angulus BAC. praxis oritur ex §. 45, dispositio eadem quàm lib. 1. §. 37. atque optimum præceptum est.

Dispositio practica.	Gradus.	Logarithmi.
1. AB. Latus maius includens.	55.30.	CL. 0.0840062
2. AC. Latus minus includens.	54.19.	CL. 0.0903085
3. Differentia laterum.	1.11.	
4. BC. Latus oppositum Angulo 40.10.		0
5. Summa 3. & 4.	41.21.	
6. Differentia 3. & 4.	38.59.	
7. Semisumma semipsis 5.	20.40½.	9.5479125
8. Semidifferentia semipsis 6.	19.29½.	9.5233168
9. Summa 4. Logarithmorum.		19.2455440
10. Eius semipsis Sinus est.	24.48½.	9.6227720
11. Arcus duplex est Ang. BAC.	49.37.	

DA.

Invenire quodlibet latus.

In Triangulo ABC. notis tribus Angulis ad A. B. C. investigatur latus BC. summatur complementum ad Semicirculum quorumlibet duorum Angulorum includentium, in coeteris eodem modo operandum est in §. 81.

Dispositio.	Gradus.	Logarithmi.
1. Complementum Ang. ACB.	103.20.	CL. 0.0118671
2. Angulus conterminus ABC.	73.33.	CL. 0.0181509
3. Differentia 1. & 2.	29.47.	
4. Angul. CAB. lateri oppositus	49.40.	
5. Summa 3. & 4.	79.27	
6. Differentia 3. & 4.	19.53.	
7. Semisumma semissis 5.	39.43½.	9.8055712
8. Semidifferentia semissis 6.	9.56½.	9.2371551
9. Summa 4. Logarithb.		19.0727443
10. Eius semissis est Sinus	20. 6½.	9.5363721
11. Eius duplum est latus BC.	40.13.	

83 Ratio praxis est, quia sunt proportionalia, §. 45.

Recl. Sinuum later.	AB. 55. 30.	(9.9159938
	AC. 54. 19.	(9.9096915
Quadratum Radij		2.0000000
Reclang. Sinuum	Semisum. 20. 40½.	(9.5479125
	Semidiff. 19. 29½.	(9.5233168
Quadratum Sinus Semianguli		19.2455440

Si ergo Logarithmi 3. 4. 5. in vnam summam colligantur, & ab ipsis auferatur Logarithmorum 1. & 2. summa: remanebit Logarithmus Quadrati Sinus Semianguli, ex lib. 1. §. 118. ergo ex §. 119. Si summantur complementa

Lo-

Logarithmica 1. & 2. summa 1. 2. 3. 4. 5. minus duplo Radio, quia duo complementa ad Radium sumpta sunt, dabit Logarithmum sextum: cum ergo in praxi precedenti duplus Radius, qui auferendus erat, omissus sit, summa quatuor priorum dat Logarithmum Quadrati quaesitum: & illius dimidium erit Logarithmus Radicis quadratae, ex §. 123. lib. 1.

ALITER EX NEPERO, §. 54.

1. Basis BC. opp. Ang. A.	40. 10.	Datis 3. lateribus
2. Latus AB.	55. 30.	AB. AC. CB. quaeritur Angulus B.
3. Latus AC.	54. 19.	
4. Summa 2. & 3.	109. 49.	
5. Differentia 2. & 3.	1. 11.	Logarithmi
6. Semissis 1. Tangens.	20. 25.	CL. 8.4369721
7. Semissis 4. Tangens.	54. 54½.	16.1532960
8. Semissis 5. Tangens.	0. 35½.	8.0139699
9. Semidiff. 2. & 3. Tang.	2. 18.	8.6042380
10. Summa 6. & 9. est B.D.	22. 23.	Segm. Sinus

Tandem in Triangulo ABD. inuenietur Ang. ABD. 73. 33. ex §. 62. Hæc praxis exigit vt Semisumma sit Quadrante minor ex demonstratis, §. 54.

SPECIES SECUNDA.

PROBLEMA II.

Datis duabus partibus alternis cum intermedia.

Invenire reliquam alteram.

85 Problema istud, & insuper tria sequentia duas operationes deponunt; prima pertinet ad Segmentum Basis, vel Anguli Verticalis.

In Triangulo BAC: perpendicularis semper procidere debet ab vno latere noto AC. in alterum CB. ita vt ambobus notum Angulū includant ACB. quo in Rectangulo ACD

Del P. I. Zaragoçã.

B

præ;

preter Angulum Rectum ad D. binæ res innotescant, Hypothenusa AC. & Angulus ACD.

Pro Segmento DC. §. 65.

Sinus totus.	90.00.	CL.	0.0000000
Sinus 2. Anguli ACD.	76.40.		9.3628892
Tangens lateris AC.	54.19.		10.1437958
Tangens Segment. CD.	17.48.		9.59066850

Pro Angulo CAD. §. 67.

Sinus totus.	90.02.	CL.	0.0000000
Sinus 2. lateris AC.	54.19.		9.7638956
Tangens Anguli ACB.	76.40.		10.6252436
Tangens 2. Ang. CAD.	22. 7.		10.3911392

Si AC. gr. 90. maior extiterit erunt CD. & CAD. 90. maiores modo Angulus ACD. Acutus sit, minores verò fuerit Obtusus.

II. DATIS 2. LATERIBVS, ET ANGLIO MEDIO.

In Triangulo ABC. notis CA. CB. & Angulo ACB. queritur latus AB. Reperitur CD. per §. 85.

Si Perpendiculari intra In Triang. ABC. est BC. 40. 12. adat auferatur sem-Differentia CD. BC. est BD. 22. 24. per; si verò extra ad-

Segment. inventam CD. est 17. 48. tus sit Obtusus ACB. In Triangulo AbC. est bC. 4. 56. demetur verò si sit Acu Summa Cb. CD. est Db. 22. 24. tus.

Ergo invenitur latus AB.

II. Operatio §. 38. Logarithmi.

Sinus 2. Segment DC.	17.48.	CL.	0.0213040
Sinus 2. Segm. DB. vel Db.	22.24.		9.9659285
Sinus 2. lateris AC.	54.19.		9.7658956
Sinus 2. lateris AB.	55.30.		9.7539281

Latus AB. sequitur speciem Segmenti Db. vel BD.

87 Regula ad Perpendicularum spectantes.

Si Anguli ad B. C. eiusdem speciei sint, cadet intra, si verò diversa extra, quia autem de specie Angulorū haud temper constat, has regulas servare oportet.

Regula 1. Si Angulus notus ad C. Acutus sit, latera verò gr. 90. minora, vel alterum plus, alterum minus, & de mittatur perpendicularum in latus maius cadet intra, si tamen latera singula gr. 90. maiora existant, cadet in minus extra.

Regula 2. Si Angulus notus ad C. Obtusus sit, latera verò gr. 90. minora, vel alterum plus, alterum minus, cadet in maius extra: si autem maiora cadet intra. In Fig. 1. reperientur Triangula omnium specierum, cuius meditatio omnibus præceptis erit præstantior.

II. DATIS DVOBVS ANGLVLIS, ET LATERE MEDIO.

88 Invenire reliquum latus.

In Triangulo ABC. cognitis Angulis CAB. BCA. & latere AC. investigatur AB. C. Reperitur Angulus CAD. §. 85.

Angulus CAD. inventus est 22. 7. Si Perpendicularum intra In Triang. BAC. est Ang. BAC 49. 40. dat intra, demetur sem-Diff. BAC. CAD. est DAB. 27. 33. per; si verò extra ad-

Angulus inventus CAD. est 22. 7. In datis ACb. Obtus In Triang. Cab. est Ang. Cab. 5. 26. sur existat: auferatur Summa Cab. CAD. est DAb. 27. 33. verò, si Acutus est.

Ergo invenietur Angulus ABC.

II. Operatio §. 36. Gradus. Logarithmi.

Sinus Seguenti CAD.	22.07.	CL.	0.3724222
Sinus Segm b AD. vel B. A. D.	27.33.		9.6659328
Sinus 2. Ang. ACB. vel ACB.	76.40.		9.9628892
Sinus 2. Ang. ABC. vel AbC.	73.33.		9.4525448

Angulus ABC. sequitur speciem BAD.

PROBLEMA III.

Datis duabus partibus alternis cum intermedia

Invenire quamlibet oppositam

I. DATIS 2. LATERIBVS, ET ANGVLO MEDIO.

Invenire quemlibet Angulorum.

Perpendicularis cadit ab Angulo ignoto, qui non quaeritur, CA. CB. & BCA. datae sunt, investigatur Angulus ABC, i. Reperietur Segmentum CD. per §. 85. & est

Segmentum CD. inventum est 17. 48. Additio, vel

in Triang. ABC. est latus BC. 40. 12. subtractio fit

Different. CD. BC. est BD. 22. 24. uti in §. 86.

In Triangulo AbC. latus Cb. 4. 16.

Summa CD. Cb. est Db. 22. 24.

Ergo reperietur Angulus ABC. vel AbC.

II. Operatio §. 38. Gradus. Logarithmi.

Sinus Segmenti CD. 17. 48. CL. 0.5147113

Sinus Segmenti Db. vel BD. 22. 24. 9.5810052

Tangens 2. Ang. ACB. vel ACb. 76. 40. 9.3747563

Tangens 2. Ang. ABC. vel AbC. 73. 33. 9.4704728

II. DATIS 2. ANGVLLIS, ET LATERE MEDIO.

Invenire quodlibet latus oppositum

Perpendicularis cadit in latus ignotum, quod non quaeritur, CAB. BCA. AC. datae sunt investigatur latus AB. i. Reperietur Angulus CAD. §. 85. & D Ab. vel BAD. §. 88.

II. Operatio §. 36. Gradus. Logarithmi.

Sinus 2. Anguli CAD. 22. 7. CL. 0.0331924

Sinus 2. Anguli D Ab. vel BAD. 27. 33. 9.9477314

Tangens 2. lateris AC. 54. 19. 9.8562042

Tangens 2. lateris AB. 55. 30. 9.8371280

PRO

SPECIES TERTIA.

PROBLEMA IV.

Datis duabus partibus alternis, & vna opposita.

Invenire reliquam partem alternam.

I. DATIS DVOBVS LATERIBVS, ET ALTERO

Angulo opposito.

Invenire reliquam latus.

91 Cognitis CA. BA. BCA. quaeritur BC. perpendicularis cadit in latus quaesitum. i. Reperietur CD. §. 85. quae est 17. 48. m. mox Db. vel BD.

II. Operatio §. 38.	Gradus.	Logarithmi.
Sinus 2. lateris AC.	54. 19.	CL. 0.2341043
Sinus 2. lateris AB.	55. 30.	9.7531280
Sinus 2. Segm. CD.	17. 48.	9.9786959
Sinus 2. Segm. Db. vel BD.	22. 24.	9.9659282
Summa CD. BD. est BC.	40. 12. in ABC.	
Different. CD. Db. est Cb.	4. 36. in ACb.	

Additio, vel subtractio, fit vt in §. 86. Segmentum B.D. sequitur speciem lateris contermini AB.

II. DATIS DVOBVS ANGVLLIS, ET VNO

latere opposito.

Invenire reliquam Angulum

92 Notis AC. CB A. ACB. quaeritur BAC. perpendicularis cadit ab Angulo quaesito. i. Reperietur Angulus CAD. §. 85. qui est 22. 7. m. moxque D Ab. vel BAD.

II. Operatio §. 36.	Gradus.	Logarithmi.
Sinus 2. Anguli ACB.	76. 40.	CL. 0.6371108
Sinus 2. Ang. ABC. vel AbC.	73. 33.	9.4520602
Sinus Anguli CAD.	22. 7.	9.5757577
Sinus Ang. D Ab. vel BAD.	27. 33.	9.6649287
Sum. CAD. & D AB. est BAC.	49. 40. in ABC.	
Differ. CAD. & D Ab. est C Ab.	5. 26. in ACb.	

Additio, vel subtractio fit vt in §. 88. Angulus DAB. sequitur speciem Segmenti BD.

PRO

PROBLEMA V.

Datis duabus partibus alternis, & vna opposita.

*Invenire intermediam.*

I. DATIS DVOBVS LATERIBVS, ET

Angulo opposito.

*Invenire Angulum intermedium.*

93 Cognitis CA. AB. BCA. quæritur BAC. perpendicularis cadit ab Angulo quæsito. 1. Reperietur CAD. §. 85.

II. Operatio §. 37.

Tangens 2. lateris AC.	54.19.	CL. 0.1437957
Tangens 2. lateris AB.	55.30.	9.8371343
Sinus 2. Anguli CAD.	22. 7.	9.9668075
Sinus 2. Anguli D Ab. vel BAD.	27.33.	9.9477375

Logarithmi.

Summa DAC. BAD. est BAC. 49.40. in ABC.  
Differ. CAD. D Ab. est CAB. 5.26. in ACB.  
Additio, vel subtractio, fit vt in §. antecedenti, vel §. 88.

II. DATIS DVOBVS ANGLVLIS, ET VNO

latere opposito.

*Invenire latus intermedium.*

94 Cognitis CB A. ACB. AC. quæritur BC. perpendicularis cadit in latus quæsitum. 1. Reperietur Segmentum DC. §. 85.

II. Operatio §. 39.

Tang. 2. Ang. ACB. vel ACb.	76.40.	CL. 0.6252437
Tang. 2. Ang. ABC. vel AbC.	73.33.	9.4702112
Sinus Segmenti CD.	17.48.	9.4852887
Sinus Segm. Db. vel BD.	22.23.	9.5807436

Gradus. Logarithmi.

Summa CD. BD. est BC. 40.11. in ABC.  
Differentiæ CD. Db. est Cb. 4.35. in AbC.  
& subtrahit fit vt in §. 86. & §. 88.

AT. PROBLEMA VI.

Datis duabus partibus alternis, & vna opposita.

*Invenire alteram oppositam.*

I. DATIS DVOBVS LATERIBVS, ET ALTERO

Angulo opposito.

*Invenire reliquum Angulum oppositum.*

95 Cognitis AB. 55. 30. CB. 40. 10. & ACB. 76. 40. quæritur Angulus BAC.

Proportio §. 34.	Gradus.	Logarithmi.
Sinus lateris AB.	55.30.	CL. 0.0840063
Sinus Anguli BCA.	76.40.	9.9881329
Sinus lateris CB.	40.10.	9.8095686
Sinus Anguli BAC.	49.36.	9.8817078

II. DATIS DVOBVS ANGLVLIS, ET VNO

latere opposito.

*Invenire reliquum latus oppositum.*

Cognitis BCA. 40. 10. BAC. 49. 36. & BA. 55. 30. quæritur latus BC.

Proportio §. 34.	Gradus.	Logarithmi.
Sinus Anguli BCA.	40.10.	CL. 0.1904314
Sinus lateris AB.	55.30.	9.9159936
Sinus Anguli BAC.	49.36.	9.8816917
Sinus lateris BC.	76.40.	9.9881167

In his duabus resolutionibus animadverti debet numerus latus, vel Angulus, qui egreditur maior, vel minor Quadrante existat.

RATIO ALIA SOLVENDI PROBLEMATA

2. 3. 4. 5.

96 Quando partes alternæ Anguli sunt, redigi possunt ad latera, & e contra, sumendo semper complementum vnus, quæ neque quæsita, neque notæ alteri opponatur: veluti in Fig. 1. in Triangulo ROZ. Cognitis Angulis R Z O. 125. 41. ROZ. 55. 30. RZ. 22. 7. quæritur ZO.

Fiat reductio sequenti modo.

Ang. RZO. 125. 41. Comp. in latus AC. 54. 19.

Ang. ROZ. 55. 30. in latus BA. 55. 30.

Latus BZ. 22. 7. in Ang. ACB. 22. 7.

Et in Triangulo ABC. inuenietur Angulus BAC. 49. 40. per §. 93. qui æqualis est lateri ZO. per §. 13. Viceversa in Triangulo YRM. cognitis YR. R. M. RMY. quæritur YRM. fiat reductio vt antea.

Latus RM. 103. 20. Comp. in Ang. ACB. 76. 40.

Latus YR. 73. 33. in Ang. ABC. 73. 33.

Ang. RMY. 54. 19. in latus AC. 54. 19.

Et in Triangulo ABC. reperietur latus BC. 40. 11. per §. 94. estque Angulus YRM. per §. 13. Idem dices de Problematibus 2. 3. 4. & 5. itaque binas solutiones singula habent.



CAPVT DECIMVM.

SINGVLARES ALIQVÆ SPHÆRICORVM resolutiones explicantur.

PROBLEMA I.

Pro Rectangulis ex Nepero.

97 CElebris est Neperi regula pro Rectangulis Sphæricis, quæ in hoc opere ommittenda non fuit.

Sit Triangulum Sphæricum Rectangulum EBH. in Fig. 7. respondens nostro Triangulo EBH. Fig. 1. describatur quodlibet Pentagonum; & in parte superiori collocetur Hypothenusa e b. deinde Anguli e. b. tandem latera eb. bb. sed partium superiorum, nempe Hypothenusa, & Angulorum sumuntur complementa, quæ signantur hæc nota 3. vt in Figura apparet. Pro Angulo Recto sumitur semper in proportione Sinus totus, & ideo nulla ipsius fit mentio in Fig. 7.

98 Quælibet pars duas alias habet vicinas, & duas remotas. Si enim sumatur Angulus e. partes vicinæ erunt Hypothenusa e b. & latus e b. remotæ vero b. & bb. Si autem assumatur eb. vicinæ sunt e. b. remotæ eb. bb. & sic de reliquis. Quibus positis.

99

Regula Neperi.

Pro vicinis.

Pro remotis.

Vt Tangens vicina.

Vt Sinus 2. remotæ.

ad Sinum mediæ.

ad Sinum mediæ.

ita Sinus totus.

ita Sinus totus.

ad Tang. vicinæ reliquæ.

ad Sinum 2. reliq. remotæ.

VNDE NOSTRA REGVLA.

Radius, & Sinus cuiuslibet partis medij sunt inter Tangentes vicinarum, & inter Sinus 2. remotarum. Et ne inter Sinum 2. & Tangentem æquivocatio lubrepat: hoc carmine continentur.

Tangens vicina, amota Sinus esto secundus.

100

Praxis regula.

In Triangulo EBH. data sit Hypothenusa EB. 50.20. latus BH. 30. 25. queritur latus EH. Quoniam eb. media est inter remotas bb. eb. erunt Radius, & Sinus eb. nempe complementi Hypothenusæ medij inter Sinum 2. bb. be. (i. 99.) ergo erunt reciproca. (i. l. 6.)

<i>Proportio.</i>		<i>Logarithm.</i>	
Vt Sin. 2. bh. vel BH.	30.25.	CL.	0.0643082
ad Radium.			10.0000000
ita Sin. eb. vel 2. EB.			9.8050385
ad Sinum 2. eh. vel EH.			9.8693467

101

Isdem datis queritur Ang. b.

Quia b. media est inter vicinas eb. bb. erunt Radius, & Sinus b. vel 2. B. medij inter Tangentem eb. bb. ergo erunt reciproca. (i. l. 6.)

<i>Proportio.</i>		<i>Logarithm.</i>	
Vt Radius.		CL.	0.0000000
ad Tang. eb. vel 2. EB.	50.20.		9.9184198
ita Tang. bh. vel BH.	30.25.		9.7687029
ad Sin. b. vel 2. B.	60.53.		9.6871227

102

Isdem datis queritur Ang. e.

Quia bb. media est inter remotas e. eb. erit Rectangul. Radij, & Sinus bb. a quale Rectangulo Sinuum 2. e. & eb. (i. 99.) ergo, & reciproca. (i. l. 6.)

AN

Q

Pro-

Proportio.

Logarithm.

Vt Sin. EB. vel 2. eb.	50.20.	CL.	0.1136384
ad Radium.	90. 0.		10.0000000
ita Sin. BH. vel bh.	30.25.		9.7043947
ad Sin. E. vel 2. e.	41. 7.		9.8180531

Eadem omnino est praxis in omnibus, vnde patet primum terminum proportionis esse Radium; quoties queritur media, vel esse extremam, si queratur alia extrema.

103

Demonstratio regula.

Neperus regulam suam adduxit absque demonstratione, quæ tamen ex nostra Fig. 1. facile demonstrari poterit. Quoties enim queritur extrema, vel media inter remotas, eadem est proportio Neperi, & nostra, vt patet in exemplis 1. & 3. Vnde nulla alia indiget demonstratione præter adductam in superioribus.

104 Quando verò queritur media inter extremas vicinas, vt in exemplo 2. talis est demonstratio.

<i>Proport. 1.</i>	<i>Exhib. 1.</i>	<i>Proport. 2.</i>	<i>Proport. 3.</i>
Tang. EB.	Tang. EB.	Tang. EB.	Radius.
Radius.	Radius.	Radius.	Tang. 2. EB.
Tang. BH.	Radius.	Tang. 2. EB.	Tang. BH.
Sin. 2. B.	Tang. 2. EB.	Sin. 2. B.	Sin. 2. B.

Constat ergo Neperi proportio, eademque est in alijâ demonstratio.

105

QUADRANTALIA.

Solventur etiam ex regula Neperi, si prius convertantur latera in Angulos, & Anguli in latera, prout dictum fuit §. 78. Quod specialem difficultatem non habet, idcirco que exemplum omittitur.

Del P. I. Zaragoza,

Q3

PRO-

PROBLEMA II.

Pro Rectangulis ex data Basi, & summa, vel differentia, Hypothenus. & Perpend.

106 I. DATA SVMMA. Fig. 1.

In Triangulo EBH, data sit Basis EH. 59. 22. & summa EB. BH. 98. 40. quæruntur determinatæ EB. & BH. oportet autem partes esse singillatim Quadrante minores, ex §. 55.

Proportio ex §. 55. Logarithm.

Vt Tang. Semisumma.	49. 20.	CL.	9. 9340559
ad Tang. Semibasis.	29. 41.		9. 7558783
ita Tang. Semibasis.	29. 41.		9. 7558783
ad Tang. Semidiffer.	15. 36.		9. 4458125
Hypoth. summa. 1. & 4.	64. 56.		
Perpend. differ. 1. & 4.	33. 44.		

Quibus cognitis reliqua innotescunt, ex cap. 8.

107 II. DATA DIFFERENTIA. Fig. 1.

In eodem Triangulo EBH, data sit Basis EH. 59. 22. & differentia Hypothenus, & perpendiculi 11. 12. quæruntur determinatæ EB. BH. quia ex eodem §. 55. Tangens Semibasis media est inter Tangentes Semisummae, & Semidifferentie, erit invertendo rationem precedentem.

Proportio ex §. 55. Logarithm.

Vt Tang. Semidiffer.	15. 36.	CL.	0. 5540767
ad Tang. Semibasis.	29. 41.		9. 7558783
ita Tang. Semibasis.	29. 41.		9. 7558783
ad Tang. Semisumma.	49. 20.		10. 0658333
Hypoth. summa. 1. & 4.	64. 56.		
Perpend. differ. 1. & 4.	33. 44.		

Reliqua ergo innotescunt pariter, ex cap. 8.

PROBLEMA III.

In Obliquangulis Sphæricis uno actu. Ex duabus alternis, & media.

Invenire Segmenta media.

108 I. SEGMENTA BASIS. Fig. 1.

In Triangulo ABC, datae sint partes alternæ Angulus B. C. & media BC, sit Angulus B. 40. 30. & Ang. C. 48. 508 Basis verò BC. 64. 8. in quam cadat perpend. AD. quæruntur Segm. BD. DC. proportio sumenda est, ex §. 52.

Proportio §. 52. Logarithm.

Vt Sin. summa Ang.	89. 20.	CL.	0. 0000293
ad Sin. differ. Ang.	8. 20.		9. 1611638
ita Tang. Semibasis.	32. 4.		9. 7969130
ad Tang. Semidiffer. Segm.	5. 11. 20.		8. 9581062
Summa 3. & 4. est BD.	37. 15. 20.		
Differ. 3. & 4. est DC.	26. 52. 40.		

109 II. SEGMENTA ANGVLII. Fig. 1.

In eodem Triangulo ABC, sint datae alternæ AB. 48. 80. AC. 40. 30. & Angulus comprehensus BAC. 105. 15. 20. ex quo cadat perpendiculum AD. & quæruntur Segmenta BAD. DAC.

Proportio §. 51. Logarithm.

Vt Sin. summa later.	89. 20.	CL.	0. 0000293
ad Sin. differ. later.	8. 20.		9. 1611638
ita Tang. 2. Semiang.	57. 56.		9. 7969130
ad Tang. Semidiffer. Segm.	5. 11. 20.		8. 9581062
Summa 3. & 4. est BAD.	63. 7. 20.		
Differ. 3. & 4. est DAC.	52. 44. 40.		

Huius praxis insignem vsu prædicationibus videre licebit in Trigonometria ingeniosissimi Cavalieri, pag. 66 quem in Trigonometria applicata breviter exponam.



## PROBLEMA IV.

Data media Segmentis, & summa alternarum.  
Invenire alternas.

## I. LATERA INCLVDENTIA.

110 In Triangulo ABC. datur Ang. ABC. 115. 52.  
& illius Segmenta, nempe DAB. 62. 20. & CAD. 53. 32.  
& summa laterum includentium 89. 20. quæruntur deter-  
minata latera AB. AC. sumitur ratio ex eodem §. 51.

Proportio §. 51.		Logarithm.	
Vt Tang. 2. Semiang.	57. 56.	CL.	0.2030869
ad Tang. Semidiff. Segm.	4. 24.		8.8861849
ita Sin. summ. later.	89. 20.		9.9999706
ad Sin. differ. later.	7. 3. 10.		9.0892424
Semifumma 3. & 4.	96. 23. 10.		
Eius dimidium est AB.	48. 11. 35.	Oportet latera esse	
Differ. 3. & 4.	82. 16. 50.	eiusdem speciei.	
Eius dimidium est AC.	41. 8. 25.		

## II. ANGVLI INCLVDENTES.

111 In Triangulo ABC. data sit Basis BC. 64. 8. ip-  
sius Segmenta BD. 36. 28. DC. 27. 40. & summa Angu-  
lorum includentium 89. 20. quæruntur determinati An-  
guli B. & C. ratio sumitur ex §. 52.

Proportio §. 52.		Logarithm.	
Vt Tang. Semibasis.	32. 4.	CL.	0.2030869
ad Tang. Semidiff. Segm.	4. 24.		8.8861849
ita Sin. summ. Ang.	89. 20.		9.9999706
ad Sin. differ. Ang.	7. 3. 10.		9.0892424
Semifumma 3. & 4. est C.	48. 11. 35.		
Semidiffer. 3. & 4. est B.	41. 8. 25.		

Debent etiam Anguli comprehendentes esse eiusdem  
speciei, ex §. 51. & 52.

PRO-

## PROBLEMA V.

Data media, Segmentis, & differentia alternarum,  
Invenire alternas.

## I. LATERA INCLVDENTIA.

112 In Triangulo ABC. datur Ang. BAC. 115. 52.  
& illius Segmenta BAD. 62. 20. & DAC. 53. 32. diffe-  
rentia verò laterum includentium AB. AC. 7. 3. 10. quæ-  
runtur determinata latera AB. AC.

Proportio ex §. 51.		Logarithm.	
Vt Tang. Semidiffer. Segm.	4. 24.	CL.	1.1138151
ad Tang. 2. Semiang. BAC.	57. 56.		9.7969130
ita Sin. differ. later.	7. 3. 10.		9.0892424
ad Sin. summ. later.	89. 20.		9.9999706
Semifumma 3. & 4. est AB.	48. 11. 35.		
Semidiffer. 3. & 4. est AC.	41. 8. 25.		

## II. ANGVLI INCLVDENTES.

113 In eodem Triangulo ABC. datur Basis BC.  
64. 8. ipsius Segmenta BD. 36. 28. & DC. 27. 40. &  
differentia Angulorum includentium B. C. 7. 3. 10. quæ-  
runtur determinati Anguli B. C.

Proportio §. 52.		Logarithm.	
Vt Tang. Semidiffer. Segm.	4. 24.	CL.	1.1138151
ad Tang. Semibasis.	32. 4.		9.7969130
ita Sin. differ. Ang.	7. 3. 10.		9.0892424
ad Sin. summ. Ang.	89. 20.		9.9999706
Semifumma 3. & 4. est C.	48. 11. 35.		
Semidiffer. 3. & 4. est B.	41. 8. 25.		

Utraque ratio istius Problematis inuenta est præce-  
dentis, & in utraque resolutione partes quæ sitæ eiusdem  
speciei debent esse.

Del P. I. Zaragoçá.

PRO-

PROBLEMA VI.

Datis alternis; & differentia Segmentorum medietatis. Invenire mediam.

I. BASIM INCLVSAM.

114. In Triangulo ABC. dati sunt Ang. B. 41. 8. 25. & C. 48. 11. 35. differentia verò Segmentorum BD:DC fit 8. 48. quæritur Basis BC. ex §. 52. Logarithm.

Proportio.

Vt Sinus differ. Angul.	7. 3. 10.	CL.	0.9107575
ad Sin. summæ Ang.	89. 20.		9.9999706
ita Tang. Semidiff. Segm.	4. 24.		8.8861849
ad Tang. Semi-basis.	32. 4.		9.7969130
istius duplum est BC.	64. 8.		

II. ANGVLV M INCLVSAM.

115. In Triangulo ABC. data sint latera AB. AC. & fit AC. 41. 8. 25. & AB. 48. 11. 35. cadat ex Angulo BAC. perpendiculum AD. & differentia Segmentorum BAD. DAC. fit 8. 48. quæritur Angulus comprehensus BAC.

Proportio ex §. 51. Logarithm.

Vt Sin. differ. later.	7. 3. 10.	CL.	0.9107575
ad Sin. Summæ later.	89. 20.		9.9999706
ita Tang. Semidiff. Segm.	4. 24.		8.8861849
ad Tang. 2. Semianguli.	57. 56.		9.7969130
istius duplum est BAC.	115. 52.		

Ultima hæc quatuor Problemata, nempe 3. 4. 5. & 6. orta sunt ex Theorematis adductis, §. 51. & 52. huius libri, quæ contemnenda non sunt, licet ad communes resolutiones non conducant.

CAPVT VNDECIMVM.

TRIANGVLORVM SOLVTIONES SINE

Logarithmice explicantur.

116. Licet in hac Trigonometria nullus sit abscissorum Sinum, Tangentium, & Secantium vsus, libet hic modum exponere, quo sine Logarithmis per abscissorum Canonem perficiantur, & addere compendia, quæ ad facilitandas operationes conducunt.

REGVLA VNIVERSALIS.

117. In omni proportione superius adducta, multiplicandi sunt termini secundus, & tertius: & productus ex multiplicatione dividendus per primum, quotiens dabit quartum terminum quaesitum.

Exemplum proportionis §. 61.

Proportio ex §. 29.		Num. absolutus
Sin. 2. perp. BH.	30. 25. m.	86236
Radius.		100000
Sin. 2. Hypotb. EB.	50. 20. m.	63832
Sin. 2. Basis EH.	42. 15. m.	74019

Ducatur 63832. in radium 100000. & productus erit 6383200000. quo diviso per primum terminum 86236. erit quotiens 74019. & est quartus terminus iuxta qualitatem proportionis, nempe sin. 2. gr. 42. 15. m. vt in §. 61. Eadem est omnino praxis in omnibus.

Reductio Radij in primum locum.

118. Quando Radius in proportione secundum, vel tertium locum occupat, vt evitetur divisio, reducetur ad primum, & primus fiet secundus, vel tertius hæc arte.

Pro Sinu 1. substituatür Secans 2. pro Sinu 2. Secans 1. pro Tangente 1. Tangens 2. & pro Tangente 2. Tangens 1.

119

*Exemplum reductionis.**Proportio ex §. 117.**Reductio.**Numeri.*

Sinus 2. perpend. 30.25. Radius. 100000

Radius. Secans 2. perpend. 115959

Sinus 2. Hypoth. Sinus 2. Hypoth. 63832

Sinus 2. Basis. Sinus 2. Basis. 74018

Ducendo igitur 115959. per 63832. erit productum 7401894888. quò diviso per Radium 100000. delendo scilicet ad dexteram tot litteras; quod cyphas habet Radius: quæ hic sunt 5. remanet Quotiens 74018. nempe *sinus* 2. gr. 42. 15. vt antea hac reductione evitabitur in calculo molestia divisionis.

*Demonstratio huius reductionis.*

*Quis precor §. 20. & 21. lib. 1.* Etenim quia Radius medius est inter Sinum 1. & Secantem 2. tum inter Sinum 2. & Secantem 1. & etiam inter Tangentem 1. & 2. servatur eadem ratio, ut Sinus 2. perpendiculi ad Radium, ita Radius ad Secantem 1. sed ut Sinus 2. perpend. ad Radium ita Sinus 2. Hypoth. ad Sinus 2. Basis, ex §. 61. Ergo vt Radius ad Sec. 1. perpend. ita Sinus 2. Hypoth. ad Sinum 2. Basis (1. l. 5.) Eadem est demonstratio de Sinu 1. & Secante 2. similiter de Tangente 1. & 2. vel de 2. & 1. quod, &c.

*Quando Radius non est in proportione.*

Pro termino primo sumitur Secans, vel Tangens opposita, vt in §. 118. multiplicatur deinde hæc in secundum, & ex producto delentur ad dexteram tot litteræ, quot cyphas habet Radius: reliquæ verò multiplicantur in tertium, & delentur iterum litteræ, & remanet quartus terminus iuxta qualitatem proportionis, hac arte divisio, quæ prolixior, & molestior esse solet ad facilitatem multiplicationem reducitur. Exemplum sit in proportione §. 95.

*Pro**Proportio. Reductio. Numeri.*

Sin. lateris AB. 55.30. Sec. 2. AB. 121340.

Sin. lateris BC. 40.10. Sin. BC. 64501.

Sin. Ang. ACB. 76.40. Sin. ACB. 97304.

Sin. Ang. BAC. 49.36. Sin. BAC. 76154.

Multipl. 121340. in 97304. erit productum 11806867360.

&amp; ablatis 5. litteris remanet 118068. hoc residuo ducto

in tertium terminum 64501. oritur 7615504068. &amp; abla-

tis 5. litteris remanet 76154. quartus terminus, hoc est

Sinus quæsitus Anguli BAC. 49. 36.

*Demonstratio praxis præcedentis.*

122. Sint proportionales A. ad B. A. R. Et

vt C. ad D. Si A. fuerit Sin. 1. cuiuslibet

Arcus sumatur E. Secans 2. vel è contra

Tang. 2. vel è contra terminis B. C. D.

quicumque sint immutatis: cum ergo R. radius medius

sit inter A. &amp; E. (§. 20. &amp; 21. lib. 1.) si fiat vt R. ad E. ita

B. ad I. erit vt A. ad R. ita B. ad I. (1. l. 5.) &amp; alternando

vt A. ad B. ita R. ad I. (4. l. 5.) sed vt A. ad B. ita C. ad D.

ex Hypothesi. Ergo vt R. ad I. ita C. ad D. quod, &amp;c.

123. Hinc praxis. Quia R. ad E. Secantem est, vt R.

ad I. inventum primum si ducatur E. in B. &amp; ex producto

auferantur 5. litteræ, provenit I. ex §. 119. Quia verò est

etiam vt R. ad I. ita C. ad D. si ducatur I. inventum pri-

mum in C. tertium terminum, &amp; auferantur ex producto

5. litteræ, provenit D. ex §. 119. constat ergo praxis, &amp;c.

*Pro Triangulis Planis.*

124. In Triangulis Planis si Radius sit in proportio-

ne, &amp; primus terminus fuerit Sinus, vel Tangens, vt in §. 95.

27. 30. lib. 2. observatur omnino regula, §. 118. ut

Secantem, vel Tangentem oppositam.

125. Si autem primus terminus fuerit linea, vt in §. 96.

29. lib. 2. addantur ipsi cyphræ, vt quæcumque tot

*Del P. I. Zaragoza.*

R 2

lit-



Ex modo communi apparet dimidiam operationem, quæ ad dexteram est, inutilem esse cum delenda sint. vltimæ litteræ: si ergo multiplicator 98269. inverte scribatur 96289. & quæ vis littera multiplicet tantum superiore correspondentem, & reliquas ad sinistram, & omnes multiplicationes perpendiculariter sub vltima littera scribantur: summa dabit quartum quæsitum, vt apparet; vltima ergo littera multiplicatoris 9. ducitur in totam quantitatem 57038. penultima 8. ducitur in 5703. ante penultima 2. in 579. & 6. in 57. at verò 9. tantum in 57038.

Inversio fieri potest quilibet numeri ex multiplicandis, vt in eodem exemplo numeri sunt 98269. & 57038. facta huius inuersione 83075. Exemplo. fiet multiplicatio, vt in exemplo apparet. Quando autem plures litteræ sunt in vno, quam in alio fiat inuersione minoris; aliquando vltimæ etiam litteræ ad dexteram colligendæ sunt in summam, quod ipsa praxis ostendit.

**Pro Tabularum constructione.** Occurrit sæpius in Tabularum constructione eundem numerum; in alios ducere, vt in Tabula declinationum solis construenda sit, quia proportio est, vt Radius ad Sinum maximæ declinationis 23. 30. ita Sinus distantie ab Æquinoctio ad Sinum declinationis in qua proportione multiplicandus semper est Sinus 23. 30. per Sinum distantie: sumatur ergo Sinus grad. 23. 30. nempe 39875. & illius duplum, triplum, quadruplum, &c. Et ad sinistram apponantur numeri 1. 2. 3. &c. vt apparet, & monitum fuit in Arithmetica, lib. 1. §. 14. Et vt omnes lineæ habeant æqualem litterarum numerum addatur cyphra prioribus ad sinistram, vt in exemplo.

Ex

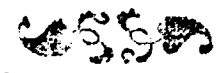
132. Sit ergo inquirenda declinatio gr. 15. Arietis; distantia ab Æquinoctio est gr. 15. huius Sinus 25881. scribatur perpendiculariter, vt vides. Quia ergo prima littera est 2. assumo ex tabella superiore lineam secundam; & scribo illam e regione ipsius 2. Deinde secundus numerus est 5. assumo lineam quintam, quæ scribitur relinquendo vnum spatium vacuum, & in tertia duo, &c. Similiter in secunda linea omittitur vna littera ad dexteram, in tertia duo, &c. Prodit ergo 10319. ferè 10320. Sinus gr. 5. 55. declinatio quæsita, & sic de ceteris quis.

133. RESOLVTIO TRIANGVLI.

Ex datis 3. lateribus, vel 3. Angulis.

Praxis per numeros absolutos sumitur, ex §. 44. sit in Fig. 1. Triangulum ABC. latus AC. 100. 15. latus AB. 85. 30. Differentia laterum 14. 45. Basis BC. 40. 25. quæritur Ang. BAC. sumatur Sinus Versus, Basis, & differentia laterum, & eorum differentia; ergo ex Sinus Versus, Basis BC. 23865. Sinus Versus, differ. laterum 103295. 9. 44. differ. Sinuum Versuum 20570.

Proportio	Reductio §. 127.	Numeri.
Sin. lat. AB.	Sec. 2. lat. AB.	100309
Sec. 2. lat. AC.	Sec. 2. lat. AC.	101622
Differ. Sin. Vers.	Differ. Sin. Vers.	20570
Sin. Vers. Ang. A.	Sin. Vers. Ang. A.	20267



Del P. I. Zaragosa

Si

134 Si ergo multiplicetur 100309. per 101622. inuerse fit 101934. Si hoc productum iterum multiplicetur per 20570. inuerse fit 20967. & est Sinus Versus Anguli BAC. grad. 37. 47. Si dati fuerint tres Anguli, & quæratæ quodlibet latus, sumitur complementum ad 180. vnus Anguli ex includentibus latus quæsitum, in reliquo fit eadem operatio iuxta dicta, §. 82.

100309	226101
100309	1003
1003	600
600	20
20	2
2	101934
101934	97502
97502	203868
203868	5095
5095	707
707	20967

*Sin. Vers.* 20967

ALITER PER RECTILINEA, ex §. 53.

135 Quia in Fig. 6 Angulus Planus XAZ. æqualis est Sphærico BAC. & in Triangulo Plano Rectilineo innotescunt AZ. Tangens Semilateris AC. & AXH. vel AXZ. Tangens Semisummæ AB. BC. & AG. Tangens Semidifferentiæ AB. BC. inuenietur Angulus XAZ. qui est ABC. ex lib. 2. §. 37. sed quia operatio, licet non inuincunda, compendium nullum affert, libens illam ommitto.

FINIS.

