Carlos Javier García Machado

Operadores de Jacobi de Hipersuperficies Reales en las Grassmannianas de 2-planos Complejos

Universidad de Granada

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Carlos Javier García Machado
D.L.: GR 1581-2012
ISBN: 978-84-9028-182-6

OPERADORES DE JACOBI DE HIPERSUPERFICIES REALES EN LAS GRASSMANNIANAS DE 2-PLANOS COMPLEJOS

Memoria presentada por el Licenciado en Matemáticas Carlos Javier García Machado, y realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de Juan de Dios Pérez Jiménez, con el objeto de aspirar al grado de Doctor en Matemáticas.

Author:
Carlos Javier García Machado

Director:
Juan de Dios Pérez Jiménez

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Agradecimientos

A todos los que me han ayudado a realizar con éxito este proyecto, a Miguel por su gran ayuda en los miles de detalles que surgen a la hora de escribir con LaTeX y, sobre todo, a Juan de Dios, quien en su día aceptó emprender esta historia conmigo sin conocerme de nada y sin el cual nunca hubiese sido posible.

Muchas gracias.

Había una vez un salmón que había nacido en un pequeño río entre las montañas. Allí vivió alegre y contento durante su infancia. Cuando era jovencito, con muchas ilusiones de conocer nuevas tierras, se lanzó a la aventura y se dirigió hacia el mar. Allí creció y se hizo adulto, y allí pasaba sus días felices y tranquilos. Pero él sentía que había algo más que todo aquello, él quería hacer algo importante en la vida, sentía deseos de luchar contra la corriente de aquel río, que lo llevó al mar, pues quería volver a su lugar natal. Y así, siguiendo el instinto y una voz interior que le decía continuamente, “sube río arriba”, empezó su andadura.

Era difícil la subida, era una lucha constante contra la corriente, pero quería ser fiel a la llamada interior y seguía luchando y luchando sin detenerse, porque, si se detenía a descansar, podía perder todo lo ganado y la corriente lo arrastraría de nuevo hacia el mar.

Y así, día tras día. A veces, encontraba en su camino otros salmones desanimados de la lucha, que se dejaban llevar de nuevo hacia la tranquilidad del mar, porque creían que era inútil luchar. Otras veces, veía a algunos que habían muerto en el intento o que habían sido heridos. . . Pero él seguía adelante sin desmayar. Poco a poco, día a día, cientos de kilómetros. . . Quería volver a su lugar de nacimiento. Por fin, un día llegó a la meta soñada y allí se sintió feliz.

Índice general

Introducción

La Teoría de Subvariedades es una de las principales ramas de la Geometría Diferencial. Dentro de este campo podemos destacar las que son totalmente umbilicales, totalmente geodésicas, las que son Einstein o las hipersuperficies, estas últimas debido a la sencillez de sus ecuaciones de estructura.

Hasta ahora las hipersuperficies reales de los modelos de espacios reales, complejos y cuaterniónicos han sido profusamente estudiadas. Ver, por ejemplo:

1. E. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Ann. Mat. 17 (1938), 177-191.
2. T.E. Cecil, P.J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc., 269 (1982) 481-499.
3. M. Kimura, *Sectional curvatures of holomorphic planes on a real hypersurface in* $P^n\mathbb{C}$, Math. Ann. 276 (1987), 487–499.
4. S. Montiel, *Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space*, J. Math. Soc. Japan 37 (1985), 515-535.
5. H.F. Münzer, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären I, II*, Math. Ann. 251 (1980), 57-71 y 256 (1981), 215-232.
6. J. Berndt, *Real hypersurfaces in quaternionic space forms*, J. reine angew. Math. 419 (1991), 9-26.
7. A. Martínez and J.D. Pérez, *Real hypersurfaces in quaternionic projective space*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV) 145 (1986), 355-384.
8. M. Ortega and J.D. Pérez, *On the Ricci tensor of a real hypersurface of quaternionic hyperbolic space*, Manuscripta Math. 93 (1997), 49-57.
9. M. Ortega and J.D. Pérez, *On the second fundamental tensor of real hypersurfaces in quaternionic hyperbolic space*, Rocky Mountain Journal of Mathematics (III) 31 (2001), 1063-1081.
10. R. Takagi, *Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures I, II*, J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 43–53 y 507–516.

Un campo de vectores X a lo largo de una geodésica γ se llamará campo de Jacobi cuando verifique la siguiente ecuación diferencial

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\nabla_{\dot{\gamma}(t)}X + R(X, \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = 0$$

donde $\gamma(t)$ es la geodésica, ∇ la derivada covariante y R el tensor de curvatura de la variedad de Riemann.

Si nos fijamos en el segundo sumando del primer miembro de la anterior ecuación, dado un campo cualquiera Y sobre la variedad de Riemann podemos asociarle un operador R_Y definido como $R_Y(X) = R(X, Y)Y$ para cada campo tangente X a la variedad. Este operador se llama el operador de Jacobi sobre M asociado a X. Es un operador simétrico y siempre admite como valor propio al cero.

La famosa conjetura de Osserman [32] afirmaba que las variedades de Riemann para las que todos los operadores de Jacobi contaban con los mismos autoespacios eran los espacios simétricos de rango 1. Esta conjetura, tras el estudio de Chi [11] fue demostrada positivamente por Nikolayevsky en los artículos [29], [30].

Cuando consideramos hipersuperficies reales del espacio proyectivo complejo aparecen destacados dos campos asociados a la hipersuperficie: el normal unitario y el estructural. Recientemente, utilizando dichos campos se han obtenido diferentes resultados de clasificación de hipersuperficies reales ([35], [40], [43]).

En el caso de hipersuperficies reales del espacio proyectivo cuaterniónico, asociados a la estructura kaehleriana cuaterniónica aparecen 3 campos tangentes destacados, que serían los similares al campo estructural en el caso complejo. En [36] se caracterizan ciertas hipersuperficies reales atendiendo al comportamiento de los operadores de Jacobi asociados a dichos campos de vectores.

En el presente trabajo estudiaremos hipersuperficies reales M de las Grassmannianas de 2-planos complejos. Estos espacios tienen la particularidad de poseer tanto una estructura kaehleriana como una kaehleriana cuaterniónica a la que no pertenece la kaehleriana. Sobre M aparecen, pues, una estructura casi métrica de contacto (ξ, ϕ, η, g) y una 3-estructura casi métrica de contacto $(\xi_i, \phi_i, \eta_i, g), i = 1, 2, 3$ a partir, respectivamente, de la estructura kaehleriana y de la kaehleriana cuaterniónica del espacio ambiente. Por tanto, cuando consideremos una hipersuperficie real de dicho espacio ambiente, aplicando la estructura kaehleriana al campo normal unitario N que elijamos aparece un campo de vectores ξ tangente a la hipersuperficie que llamaremos el campo de vectores estructural. Asimismo, al aplicarle la estructura kaehleriana cuaterniónica al campo normal, aparecen tres campos de vectores $\xi_i, i = 1, 2, 3$ tangentes y mutuamente ortogonales que generarán una distribución sobre M que denotaremos por $\mathfrak{D}^\perp$. Consideraremos, a partir de estos campos de vectores, los correspondientes operadores de Jacobi sobre M: el operador de Jacobi estructural R_ξ y los operadores de Jacobi R_{ξ_i}. Además, considerando el operador de Jacobi $\bar{R}_N$ sobre el espacio ambiente en la dirección de N, el hecho de que $\bar{R}_N(N) = 0$ nos permite considerarlo como un operador sobre M.

En el Capítulo 1 de la memoria se establecerán las propiedades fundamentales de la geometría de las Grassmannianas de 2-planos complejos, así como de sus hipersuperficies reales, siguiendo los artículos [4], [6] y [7]. En concreto, se hará un repaso del espacio proyectivo cuaterniónico y del conjunto focal del espacio proyectivo complejo de máxima dimensión embebido en el espacio proyectivo cuaterniónico para pasar a presentar los diferentes modelos que existen de las Grassmannianas de 2-planos complejos, reflejando las diferentes estructuras que existen sobre ellos y calculando su tensor de curvatura. A partir de aquí, estudiaremos las ecuaciones de estructura de las hipersuperficies reales de estos espacios y nos detendremos en el comportamiento del endomorfismo de Weingarten asociado al campo de vectores normal a la hipersuperficie. Nos detendremos en los ejemplos de hipersuperficies reales conocidos como tipos A y B y calcularemos explícitamente sus endomorfismos de Weingarten.

A partir de aquí nos dedicaremos al estudio de los distintos operadores de Jacobi que destacan sobre las hipersuperficies reales de las Grassmannianas de 2-planos complejos. Necesitaremos que tales hipersuperficies sean Hopf, es decir, que el campo de vectores estructural ξ sea principal. Es decir, si A denota el operador de Weingarten asociado al campo normal N, debe ocurrir que $A\xi = \alpha\xi$ para cierta función α.

El Capítulo 2 se dedica al operador de Jacobi estructural. En primer lugar, es conocido a partir del trabajo de Brozos-Vázquez y Gilkey [8], que no pueden existir hipersuperficies reales en las Grassmannianas de 2-planos complejos para las que dos operadores de Jacobi arbitrarios conmuten. Así pues, nos planteamos el problema de estudiar aquellas hipersuperficies reales cuyo operador de Jacobi estructural conmute con cualquier otro, obteniendo que, con cierta condición adicional, no existen tales hipersuperficies (Teorema 2.1.1). En [15] se demuestra que no existen hipersuperficies reales de las Grassmannianas de 2-planos complejos que, bajo ciertas condiciones, tengan operador de Jacobi estructural paralelo. El significado geométrico de esta condición es que los autoespacios de dicho operador de Jacobi son invariantes respecto al traslado paralelo a lo largo de cualquier geodésica de M. Sobre nuestras hipersuperficies reales existen dos distribuciones destacadas: la $\mathfrak{D}^{\perp}$ que definimos anteriormente y su complemento ortogonal $\mathfrak{D}$. Debilitando la condición de paralelismo del operador de Jacobi estructural, consideraremos el $\mathfrak{D}^{\perp}$-paralelismo y el $\mathfrak{D}$-paralelismo de tal operador probando, en ambos casos, la no existencia de hipersuperficies reales en nuestros espacios ambientes (Teoremas 2.2.1 y 2.3.1).

A continuación consideraremos la derivada de Lie del operador de Jacobi estructural. Bajo ciertas condiciones caracterizaremos las hipersuperficies reales de tipo A como las únicas que existen en las Grassmannianas de 2-planos complejos para las que el operador de Jacobi estructural es ξ-invariante (Teorema 2.4.1). Como consecuencia obtendremos la no existencia de hipersuperficies reales cuyo operador de Jacobi estructural sea invariante a lo largo de cualquier dirección (Corolario 2.4.2). Esto significa que todos los subespacios propios del operador de Jacobi estructural son invariantes por cualquier desplazamiento paralelo ϕ_t^* generado por el flujo ϕ_t tal que $\phi_t(x) = \gamma(t), \gamma(0) = x$ siendo γ la curva integral de X en $T_xM, x \in M$ y $X \in TM$. Después probaremos la no existencia de hipersuperficies reales para las que la derivada de Lie y la derivada covariante del operador de jacobi estructural coinciden a lo largo de las direcciones en $\mathfrak{D}^{\perp}$ (Teorema 2.5.1).

Para terminar el Capítulo 2, en el Teorema 2.6.1 presentamos un resultado que, aunque no corresponde al operador de Jacobi estructural, tiene relación con él al preguntarnos cuándo el campo estructural verifica la ecuación de Jacobi a lo largo de cualquier geodésica. En ese caso diremos que dicho campo es de tipo Jacobi y se demostrará que dicha condición implica que el campo estructural es Killing. A partir de aquí deducimos el Corolario 2.6.2 en donde demostramos que las únicas hipersuperficies reales para las que esta condición se verifica serán las de tipo A.

El Capítulo 3 se dedica a los operadores de Jacobi $R_{\xi_i}, i = 1,2,3$ correspondientes a las direcciones de una base ortonormal de $\mathfrak{D}^\perp$. Así, en los Teoremas 3.1.1 y 3.2.1 se obtiene la no existencia de dichas hipersuperficies reales para las que tales operadores de Jacobi son, respectivamente, $\mathfrak{D}^\perp$-paralelos o $\mathfrak{D}$-paralelos. Como consecuencia se sigue la no existencia de hipersuperficies reales cuyos operadores de Jacobi $R_{\xi_i}, i = 1,2,3$ son paralelos (Corolario 3.1.2). Otra condición más débil que el paralelismo de tales operadores es considerarlos de tipo Codazzi, es decir, imponer que $(\nabla_X R_{\xi_i})Y = (\nabla_Y R_{\xi_i})X, i = 1,2,3$ donde ∇ denota la derivada covariante y X e Y son campos arbitrarios sobre la hipersuperficie. Generalizando el resultado anterior se demuestra la no existencia de hipersuperficies reales cuyos operadores de Jacobi $R_{\xi_i}, i = 1,2,3$ son de tipo Codazzi (Teorema 3.3.1).

En el Teorema 2.4.1 obtenemos un resultado análogo al del Teorema 3.4.1 en el caso de los operadores de Jacobi R_{ξ_i}. Además, en el Teorema 3.5.1 probamos la no existencia de hipersuperficies reales para las que la derivada de Lie y la derivada covariante del operador de jacobi estructural coinciden a lo largo del campo de vectores estructural ξ.

Para terminar, en los Teoremas 3.6.1 y 3.6.4 se obtiene la no existencia de hipersuperficies reales cuyos operadores de Jacobi R_{ξ_i} conmutan con ϕ o con los $\phi_j, j = 1,2,3$ respectivamente.

Finalmente, el estudio del operador de Jacobi normal centra el Capítulo 4. En el Teorema 4.1.1 se prueba la no existencia de hipersuperficies reales con operador de Jacobi normal $\mathfrak{D}$-paralelo, generalizando el resultado de Jeong, Kim y Suh [12] sobre la no existencia de hipersuperficies reales con operador de Jacobi normal paralelo. Otra condición más débil que ésta es suponer que el operador de Jacobi normal es de tipo Codazzi. La no existencia de tales hipersuperficies reales se obtiene en el Teorema 4.2.1. Terminaremos demostrando en el Teorema 4.3.1 la no existencia de hipersuperficies reales cuyo operador de Jacobi normal tiene derivada de Lie y derivada covariante coincidentes en las direcciones de una base de $\mathfrak{D}^\perp$.

Capítulo 1

Preliminares

Consideraremos las variedades Grassmannianas de 2-planos complejos $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que tienen rango dos y son caracterizadas entre todos los espacios simétricos compactos y no Ricci llanos por la característica de estar dotadas de una estructura kaehleriana y una kaehleriana cuaterniónica que no contiene a la anterior. Notemos que hay espacios con estas características pero $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ es especial en el siguiente sentido: Sea M una variedad kaehleriana cuaterniónica conexa de dimensión real al menos ocho. Es bien conocido que M es una variedad Einstein [2]. Además, la nulidad de la curvatura de Ricci equivale a que M sea localmente una variedad hiperkaehleriana [2]. Estas variedades son ejemplos de variedades con las dos estructuras citadas. El ejemplo más simple podría ser el espacio cuaterniónico $\mathbb{H}^m$. Pero las variedades hiperkaehlerianas tienen la estructura kaehleriana incorporada a la cuaterniónica. Si la curvatura de Ricci es no nula, esto no puede suceder, las dos estructuras son independientes [5].

Por $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ denotaremos pues, el conjunto de todos los subespacios vectoriales complejos de dimensión 2 de $\mathbb{C}^{m+2}$. El grupo unitario especial $G = SU(m+2)$ actúa transitivamente sobre $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ con estabilizador isomorfo a $K = S(U(2)\times U(m)) \subset G$. Así pues, $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ puede ser identificado con el espacio homogeneo G/K. Estas variedades tienen la característica especial de tener una estructura kaehleriana y otra kaehleriana cuaterniónica. Consideremos el espacio proyectivo complejo $(m+1)$-dimensional $\mathbb{C}P^{m+1}$ embebido de la forma usual como una subvariedad totalmente geodésica en el espacio proyectivo cuaterniónico $(m+1)$-dimensional $\mathbb{H}P^{m+1}$. El conjunto focal Q^{m+1} de $\mathbb{C}P^{m+1}$ en $\mathbb{H}P^{m+1}$ es una subvariedad de $\mathbb{H}P^{m+1}$ con codimensión 3. En cada punto de Q^{m+1} el espacio anulador del endomorfismo de Weingarten es independiente de la dirección de los vectores normales y determina una foliación riemanniana 1-dimensional $\mathcal{F}$ sobre Q^{m+1} por geodésicas cerradas. El espacio de órbitas $B^{m+1} := Q^{m+1}/\mathcal{F}$, equipado con la estructura riemanniana para la cual la proyección canónica $Q^{m+1} \longrightarrow B^{m+1}$ llega a ser una submersión riemanniana, es isométrico al espacio simétrico riemanniano $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Así, un subespacio vectorial complejo 2-dimensional de $\mathbb{C}^{m+2}$, el cual representa un punto en $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ en el modelo usual, es aquí reemplazado por una geodésica cerrada en el conjunto focal de $\mathbb{C}P^{m+1}$ en $\mathbb{H}P^{m+1}$.

Para más detalles sobre los resultados incluidos en este capítulo véanse los artículos [4] de Berndt y [6] de Berndt y Suh.

1.1. Variedades kaehlerianas y kaehlerianas cuaterniónicas

Sea (M, g) una variedad riemanniana con métrica g, conexión de Levi Civita ∇ y tensor de curvatura $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$. Por TM denotaremos el fibrado tangente de M y por T_pM el espacio tangente de M en $p \in M$.

Una estructura casi hermítica sobre (M, g) es un campo de tensores J de tipo $(1, 1)$ satisfaciendo $J^2 = -I_{TM}$ y $g(JX, JY) = g(X, Y)$ para todo $X, Y \in T_pM$, $p \in M$. Una variedad casi hermítica (M, g, J) es una variedad riemanniana (M, g) equipada con una estructura casi hermítica J. Una variedad hermítica (M, g, J) es una variedad riemanniana (M, g) tal que M es una variedad compleja para la cual su estructura compleja natural J es casi hermítica. Si la estructura compleja J de una variedad compleja (M, g, J) es paralela con respecto a ∇ entonces J es llamada una estructura kaehleriana sobre (M, g) y (M, g, J) es llamada una variedad kaehleriana. Un ejemplo común de variedad kaehleriana es el espacio proyectivo complejo m-dimensional $\mathbb{C}P^m$ equipado con la métrica de Fubini Study.

Sea $p \in M$ un punto de una variedad casi hermítica (M, g, J) y V un subespacio vectorial de T_pM. Diremos que V es un subespacio real de T_pM si $JV \perp V$, esto es, si JV es ortogonal a V y, diremos que V es un subespacio complejo de T_pM si V es invariante bajo J. Una subvariedad real (respectivamente subvariedad compleja) de M es una subvariedad en la que, para cada uno de sus puntos, el espacio tangente es un subespacio real (respectivamente complejo) del respectivo espacio tangente en M. Notemos que en la literatura, la noción de totalmente real es a menudo usada en lugar de real. Nosotros usaremos alguna vez esta última noción con el fin de evitar confusiones con la noción de totalmente real en el contexto de estructuras kaehlerianas cuaterniónicas.

Una estructura kaehleriana cuaterniónica sobre una variedad riemanniana (M, g) es un subfibrado vectorial de rango tres $\mathfrak{J}$ del fibrado End(TM) sobre M con las siguientes propiedades:

1. Para cada $p \in M$ existe un entorno abierto U de p en M y tres secciones J_1, J_2, J_3 de $\mathfrak{J}$ sobre U tal que, para cada $\nu = 1, 2, 3$:
   a) J_ν es una estructura casi hermítica sobre U
   b) $J_\nu J_{\nu+1} = J_{\nu+2} = -J_{\nu+1} J_\nu$ (índice módulo tres)
2. $\mathfrak{J}$ es un subfibrado paralelo de End(TM), es decir, si J es una sección de $\mathfrak{J}$ y X es un campo de vectores sobre M entonces $\nabla_X J$ es una sección de $\mathfrak{J}$.

Cualquier tripleta J_1, J_2, J_3 del tipo anterior es llamada una base canónica local de $\mathfrak{J}$. Una variedad kaehleriana cuaterniónica $(M, g, \mathfrak{J})$ es una variedad riemanniana (M, g) equipada con una estructura kaehleriana cuaterniónica $\mathfrak{J}$. Por otro lado, la condición 2 equivale a que existan para cada base canónica local J_1, J_2, J_3 de $\mathfrak{J}$ tres 1-formas locales q_1, q_2, q_3 tales que

$$\nabla_X J_\nu = q_{\nu+2}(X) J_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X) J_{\nu+2} \tag{1.1}$$

para todo $X \in TM$.

Sea p un punto de una variedad kaehleriana cuaterniónica $(M, g, \mathfrak{J})$ y V un subespacio vectorial de T_pM. Entonces

1. diremos que V es un subespacio cuaterniónico de T_pM si $JV \subset V$ para todo $J \in \mathfrak{J}_p$,
2. diremos que V es un subespacio totalmente complejo de T_pM si existe un subespacio 1-dimensional $\mathfrak{J}'_p$ de $\mathfrak{J}_p$ tal que $JV \subset V$ para todo $J \in \mathfrak{J}'_p$ y $JV \perp V$ para todo J en el complemento ortogonal de $\mathfrak{J}'_p$ en $\mathfrak{J}_p$ y,
3. diremos que V es un subespacio totalmente real de T_pM si $JV \perp V$ para todo $J \in \mathfrak{J}_p$.

De manera análoga a como lo hicimos anteriormente en el caso de las variedades casi herméticas podemos definir los conceptos de subvariedades cuaterniónicas, totalmente complejas y totalmente reales de una variedad kaehleriana cuaterniónica.

1.2. El espacio proyectivo cuaterniónico

Como es usual, escribiremos cualquier $z \in \mathbb{H}$ como $z = a + bi + cj + dk$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ donde $ij = k$. Consideremos el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos como la subálgebra $\{a + bi/a, b \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{H}$. Por e_ν denotaremos el $(\nu + 1)$-ésimo vector canónico en $\mathbb{C}^{m+2}$ $(\nu = 0, \ldots, m + 1)$. Finalmente, tendremos en cuenta que

$$< z, v >_{\mathbb{C}} = \sum_{\mu=0}^{m+1} \overline{z}_\mu v_\mu \quad \text{para} \quad z, v \in \mathbb{C}^{m+2}$$

y

$$< z, v >_{\mathbb{H}} = \sum_{\mu=0}^{m+1} \overline{z}_\mu v_\mu \quad \text{para} \quad z, v \in \mathbb{H}^{m+2}$$

donde $\overline{z}_\mu$ denota el conjugado de z_μ.

Denotaremos por $\mathbb{H}P^{m+1}$ al espacio proyectivo cuaterniónico $(m + 1)$-dimensional equipado con la métrica $\hat{g}$ de Fubini Study de curvatura seccional cuaterniónica constante y por $\hat{\mathfrak{J}}$ su estructura kaehleriana cuaterniónica. Sea $\tau : S^{4m+7} \to \mathbb{H}P^{m+1}$ la proyección de Hopf de la esfera unitaria riemanniana $(4m + 7)$-dimensional $S^{4m+7} \subset \mathbb{H}^{m+2}$ en $\mathbb{H}P^{m+1}$. Es bien conocido que τ es una submersión riemanniana cuyas fibras son esferas tridimensionales. Estas esferas son las órbitas de la acción de $S^3 \approx Sp(1)$ sobre S^{4m+7} definida por la multiplicación a la derecha por cuaternios unitarios. En cada punto $z \in S^{4m+7}$ el isomorfismo canónico $\mathbb{H}^{m+2} \to T_z\mathbb{H}^{m+2}$ induce una isometría lineal ι_z desde el complemento ortogonal H_z de $z\mathbb{H} = \{z\lambda/\lambda \in \mathbb{H}\}$ en $\mathbb{H}^{m+2}$ sobre el subespacio horizontal en z respecto de la submersión riemanniana τ. La aplicación $h_z = \tau_{*z} \circ \iota_z$ donde τ_{*z} denota la diferencial de τ en z, es una isometría lineal de H_z sobre $T_{\tau(z)}\mathbb{H}P^{m+1}$. Si $X \in T_{\tau(z)}\mathbb{H}P^{m+1}$, llamaremos al vector $h_z^{-1}(X)$ el levantamiento horizontal de X en z. Notemos que esta definición se corresponde, salvo el isomorfismo ι_z, con la de submersión riemanniana. Para todo $v \in H_z$ y $\lambda \in S^3$ tenemos que

$h_z(v) = h_{z\lambda}(v\lambda)$ y, para $X = h_z(v)$, resulta $h_z^{-1}(\hat{\mathfrak{J}}X) = \{v\tilde{\lambda}/\tilde{\lambda} \in Im\mathbb{H}\}$. La geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}P^{m+1}$ en $\mathbb{H}P^{m+1}$ con $\gamma(0) = \tau(z)$ y $\dot{\gamma}(0) = X$ es la curva

$$t \mapsto \tau(\cos(t)z + \sin(t)v)$$

donde $X \in T_{\tau(z)}\mathbb{H}P^{m+1}$ tiene longitud uno y $v = h_z^{-1}(X)$.

El tensor de curvatura riemanniano de $\mathbb{H}P^{m+1}$ está dado por

$$\begin{aligned}\hat{R}(X,Y)Z &= \hat{g}(Y,Z)X - \hat{g}(X,Z)Y \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{3}\left[\hat{g}(J_\nu Y,Z)J_\nu X - \hat{g}(J_\nu X,Z)J_\nu Y - 2\hat{g}(J_\nu X,Y)J_\nu Z\right]\end{aligned} \tag{1.2}$$

donde J_1, J_2, J_3 es una base de $\hat{\mathfrak{J}}$.

1.3. El conjunto focal de $\mathbb{C}P^{m+1}$ en $\mathbb{H}P^{m+1}$

La acción isométrica estándar de $SU(m+2)$ sobre $\mathbb{H}P^{m+1}$ sería de la siguiente forma. Primero, $SU(m+2)$ actúa sobre S^{4m+7} por isometrías vía

$$SU(m+2) \times S^{4m+7} \longrightarrow S^{4m+7}, (A, z + vj) \longrightarrow (Az) + (Av)j$$

donde $z, v \in \mathbb{C}^{m+2}$ con $|z|^2 + |v|^2 = 1$. Esta acción conmuta con la acción de Sp(1) sobre S^{4m+7} descrita anteriormente y, por lo tanto, desciende a una acción por isometrías sobre $\mathbb{H}P^{m+1}$.

El embebimiento totalmente geodésico de $\mathbb{C}P^{m+1}$ en $\mathbb{H}P^{m+1}$ está inducido por el de $\mathbb{C}^{m+2}$ en $\mathbb{H}^{m+2}$. A partir de ahora denotaremos por $\mathbb{C}P^{m+1}$ a la subvariedad totalmente geodésica de $\mathbb{H}P^{m+1}$ imagen del embebimiento anterior. Sea S^{2m+3} la esfera unidad de $\mathbb{C}^{m+2}$ y considerémosla como una subvariedad de S^{4m+7} por el embebimiento citado. Claramente, S^{2m+3} es la órbita de la acción de $SU(m+2)$ sobre S^{4m+7} a través de e_0, lo cual implica que $\mathbb{C}P^{m+1}$ es la órbita de la acción de $SU(m+2)$ sobre $\mathbb{H}P^{m+1}$ a través de $\tau(e_0)$. Fácilmente se puede ver que

$$h_z^{-1}(\perp_{\tau(z)} \mathbb{C}P^{m+1}) = \{vj \mid v \in \mathbb{C}^{m+2}, < z, v >_{\mathbb{C}} = 0\}$$

para cada $z \in S^{2m+3}$, donde $\perp_{\tau(z)} \mathbb{C}P^{m+1}$ denota el normal de $\mathbb{C}P^{m+1}$ en $\tau(z)$. De aquí se ve fácilmente que $SU(m+2)$ actúa transitivamente sobre el normal unitario de $\mathbb{C}P^{m+1}$ en $\mathbb{H}P^{m+1}$.

Para $r \in \mathbb{R}^+$ definimos

$$N_r = \{\tau(\cos(r)z + \sin(r)vj) \mid z, v \in S^{2m+3}, < z, v >_{\mathbb{C}} = 0\}$$

donde $\tau : S^{4m+7} \longrightarrow \mathbb{H}P^{m+1}$ es la proyección de Hopf de la esfera unitaria riemanniana $4m+7$-dimensional $S^{4m+7} \subset \mathbb{H}^{m+2}$ sobre $\mathbb{H}P^{m+1}$.

Geométricamente, N_r es el conjunto de todos los puntos de $\mathbb{H}P^{m+1}$ que pueden ser alcanzados recorriendo la distancia r a lo largo de cualquier geodésica partiendo desde $\mathbb{C}P^{m+1}$

ortogonalmente. Elijamos $z, v \in S^{2m+3}$ de forma que $< z, v >_{\mathbb{C}} = 0$ y consideremos la geodésica $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{C}P^{m+1}, t \mapsto \tau(\cos(t)z + \sin(t)vj)$ en $\mathbb{H}P^{m+1}$. Esta geodésica parte ortogonalmente desde $\mathbb{C}P^{m+1}$ en el punto $\tau(z)$ con dirección $h_z(vj)$. En $t = \pi/2$ la geodésica alcanza $\mathbb{C}P^{m+1}$ de nuevo en el punto $\tau(vj) = \tau(v)$ y, como $< z, v >_{\mathbb{C}} = 0$, interseca a $\mathbb{C}P^{m+1}$ en este punto ortogonalmente en la dirección $h_{vj}(-z) = h_v(zj)$. Esto implica que $N_{\pi/2} = \mathbb{C}P^{m+1}$ y que $N_r = N_{\pi/2-r}$ para todo $0 < r < \pi/4$. Además, para cualquier r, el subgrupo de isotropía de $SU(m+2)$ en $\tau(\cos(r)e_0 + \sin(r)e_1 j)$ es $U(1) \times SU(m)$. Es fácil ver que $SU(m+2)$ actúa transitivamente sobre el fibrado unitario normal de $\mathbb{C}P^{m+1}$. Así, N_r, el tubo de radio $0 < r < \pi/4$ sobre $\mathbb{C}P^{m+1}$ es, de hecho, una órbita principal de la acción de $SU(m+2)$ sobre $\mathbb{H}P^{m+1}$ con codimensión uno.

Como consecuencia de las consideraciones hechas hasta ahora deducimos que existe sólo otra órbita singular, a saber,

$$Q^{m+1} = N_{\pi/4} = \{\tau\big((1/\sqrt{2})(z + vj)\big) | z, v \in S^{2m+3}, < z, v >= 0\}.$$

El subgrupo de isotropía de $SU(m+2)$ en $\tau\big((1/\sqrt{2})(e_0 + e_1 j)\big) \in Q^{m+1}$ es $SU(2) \times SU(m)$, por lo que Q^{m+1} tiene codimensión tres en $\mathbb{H}P^{m+1}$. Como Q^{m+1} es la imagen bajo la aplicación exponencial normal de $\mathbb{C}P^{m+1}$ de todos los vectores de longitud $\pi/4$ ortogonales a $\mathbb{C}P^{m+1}$, además vemos que Q^{m+1} es el conjunto focal de $\mathbb{C}P^{m+1}$ en $\mathbb{H}P^{m+1}$. Es ahora obvio que $\mathbb{C}P^{m+1}$ es el conjunto focal de Q^{m+1} y que $SU(m+2)$ actúa transitivamente sobre el normal unitario de Q^{m+1}. Como $SU(m+2)$ es simplemente conexo y el subgrupo de isotropía $SU(2) \times SU(m)$ es conexo, se sigue que Q^{m+1} es simplemente conexo. Resumiendo, resulta probada la siguiente

Proposición 1.3.1. *Las órbitas singulares de la acción de $SU(m+2)$ sobre $\mathbb{H}P^{m+1}$ son $\mathbb{C}P^{m+1}$ y Q^{m+1}, las órbitas principales de esta acción son tubos sobre estas órbitas singulares. Además, $SU(m+2)$ actúa transitivamente sobre el fibrado normal unitario de $\mathbb{C}P^{m+1}$ y Q^{m+1} en $\mathbb{H}P^{m+1}$. Q^{m+1} es el conjunto focal de $\mathbb{C}P^{m+1}$ en $\mathbb{H}P^{m+1}$ y viceversa. Q^{m+1} es simplemente conexo, tiene codimensión tres en $\mathbb{H}P^{m+1}$ y es isométrico al espacio homogéneo riemanniano $SU(m+2)/(SU(2) \times SU(m))$ equipado con una adecuada métrica riemanniana invariante.*

1.4. Geometría extrínseca del conjunto focal Q^{m+1}

La geometría extrínseca del conjunto focal Q^{m+1} en $\mathbb{H}P^{m+1}$ está básicamente descrita por el endomorfismo de Weingarten de la subvariedad Q^{m+1} en $\mathbb{H}P^{m+1}$. A partir de la geometría extrínseca de $\mathbb{C}P^{m+1}$ en $\mathbb{H}P^{m+1}$ calcularemos el endomorfismo de Weingarten de su conjunto focal Q^{m+1} por medio de teoría de campos de Jacobi.

Sea $\perp^1\mathbb{C}P^{m+1}$ el fibrado normal unitario de $\mathbb{C}P^{m+1}$. Para cada $\xi \in \perp^1\mathbb{C}P^{m+1}$ denotaremos por $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{H}P^{m+1}$ la geodésica en $\mathbb{H}P^{m+1}$ con $\dot{\gamma}_\xi(0) = \xi$. La aplicación focal de $\mathbb{C}P^{m+1}$ es la aplicación diferenciable

$$\Phi : \perp^1\mathbb{C}P^{m+1} \to Q^{m+1}\,,\ \xi \mapsto \gamma_\xi(\pi/4).$$

Definamos el campo de vectores η a lo largo de Φ por

$$\eta(\xi) := \dot{\gamma}_\xi(\pi/4).$$

Sea $\sigma : \perp \mathbb{C}P^{m+1} \to \mathbb{C}P^{m+1}$ la proyección canónica y

$$K : T(\perp \mathbb{C}P^{m+1}) \to \perp \mathbb{C}P^{m+1} \ , \ u \mapsto \hat{\nabla}^{\perp}_{u}\omega$$

la conexión normal de $\mathbb{C}P^{m+1}$, donde $\hat{\nabla}^{\perp}$ es la derivada covariante inducida sobre $\perp \mathbb{C}P^{m+1}$ de la conexión de Levi Civita $\hat{\nabla}$ de $\mathbb{H}P^{m+1}$, y ω es la aplicación identidad de $\perp \mathbb{C}P^{m+1}$ considerada como una sección en $\perp \mathbb{C}P^{m+1}$ a lo largo de σ.

Fijemos ahora un vector unitario normal $\xi \in \perp^1 \mathbb{C}P^{m+1}$ y supongamos $\gamma := \gamma_\xi$, $p := \gamma(0)$ y $q := \Phi(\xi) = \gamma(\pi/4)$. Como $\mathbb{C}P^{m+1}$ es una subvariedad totalmente compleja de $\mathbb{H}P^{m+1}$ (ver Proposición 5 en [4]), existe una base canónica J_1, J_2, J_3 de $\hat{\mathfrak{J}}_p$ tal que $T_p\mathbb{C}P^{m+1}$ es invariante bajo J_1 y aplicado sobre $\perp_p \mathbb{C}P^{m+1}$ por J_2 y J_3. Entonces, $J_1\xi$ es normal a $\mathbb{C}P^{m+1}$ y $J_2\xi, J_3\xi$ son tangentes a $\mathbb{C}P^{m+1}$ en p. Así, descomponemos $T_p\mathbb{H}P^{m+1}$ ortogonalmente como sigue

$$T_p\mathbb{H}P^{m+1} = T_1 \oplus T_4 \oplus \perp_1 \oplus \perp_4 \oplus \perp_0$$

donde

$$\begin{aligned}
T_1 &:= \{X \in T_p\mathbb{C}P^{m+1} \,|\, \hat{g}(X, J_2\xi) = 0 = \hat{g}(X, J_3\xi)\},\\
T_4 &:= \{\mathbb{R}J_2\xi \oplus \mathbb{R}J_3\xi \subset \mathbb{C}P^{m+1}\},\\
\perp_1 &:= \{X \in \perp_p\mathbb{C}P^{m+1} \,|\, \hat{g}(X, \xi) = 0 = \hat{g}(X, J_1\xi)\},\\
\perp_4 &:= \mathbb{R}J_1\xi \subset \perp_p\mathbb{C}P^{m+1},\\
\perp_0 &:= \mathbb{R}\xi \subset \perp_p\mathbb{C}P^{m+1}.
\end{aligned}$$

Notemos que estos espacios son las componentes tangencial y normal de los subespacios propios del operador de Jacobi $\hat{R}_\xi := \hat{R}(.,\xi)\xi$. Los índices están referidos a los correspondientes valores propios y, además, dim $T_1 = 2m =$ dim $\perp_1$, dim $T_4 = 2$ y dim$\perp_4 = 1 =$ dim$\perp_0$. Además, T_1,T_4 y $\perp_1$ son invariantes bajo J_1. Para cada $u \in T_\xi(\perp^1 \mathbb{C}P^{m+1})$ denotaremos por Z_u al campo de Jacobi a lo largo de γ el cual está unívocamente determinado por los valores $Z_u(0) = \sigma^* u$ y $Z'(0) = Ku$ donde la prima denota la derivada covariante con respecto a $\dot{\gamma}$. Teniendo en cuenta que los subespacios propios del operador de Jacobi $\hat{R}_\xi := \hat{R}(.,\xi)\xi$ son invariantes bajo el traslado paralelo a lo largo de γ, podemos calcular explícitamente algunos campos básicos de Jacobi, a saber,

$$\begin{array}{llll}
Z_u(t) = & \cos(t)P_u(t) & ,si & \sigma^* u \in T_1 \quad y \quad Ku = 0,\\
Z_u(t) = & \cos(2t)P_u(t) & ,si & \sigma^* u \in T_4 \quad y \quad Ku = 0,\\
Z_u(t) = & \sin(t)P_u(t) & ,si & \sigma^* u = 0 \quad y \quad Ku \in \perp_1,\\
Z_u(t) = & (1/2)\sin(2t)P_u(t) & ,si & \sigma^* u = 0 \quad y \quad Ku \in \perp_4.
\end{array}$$

Aquí P_u denota el campo de vectores paralelo a lo largo de la geodésica γ con valor inicial $P_u(0) = \sigma_* u + Ku$. Cualquier otro campo de Jacobi Z_u se expresa como combinación lineal de éstos.

Proposición 1.4.1. *En la situación descrita tenemos:*

1. *El espacio tangente de Q^{m+1} en q es obtenido por transporte paralelo de $T_1 \oplus \perp_1 \oplus T_4$ a lo largo de γ desde p hasta q.*

2. *El espacio normal de Q^{m+1} en q es obtenido por transporte paralelo de $T_4 \oplus \perp_0 = \hat{\mathfrak{J}}_p \perp_4 = \{J\nu \in \hat{\mathfrak{J}}_p, \nu \in \perp_4\}$ a lo largo de γ desde p hasta q.*

3. *$\eta(\xi)$ es un vector normal unitario de Q^{m+1} en q y cada vector normal unitario de Q^{m+1} se obtiene de esta forma.*

4. *Las curvaturas principales de Q^{m+1} en q con respecto a $\eta(\xi)$ son $+1$, -1 y 0. Los subespacios propios correspondientes son obtenidos por transporte paralelo de $T_1, \perp_1$ y $\perp_4$ a lo largo de γ desde p hasta q, respectivamente.*

Una consecuencia inmediata del item 4 de la anterior Proposición 1.4.1 es el siguiente

Corolario 1.4.2. *Q^{m+1} es una subvariedad minimal de $\mathbb{H}P^{m+1}$.*

Identifiquemos $\tau^{-1}(Q^{m+1})$ con la variedad compleja de Stiefel $\mathbb{C}V_{2,m}$ por medio de $(z, v) = (1/\sqrt{2})(z + vj)$. El grupo de Lie $U(1)$ actúa sobre $S^{4m+7} \subset \mathbb{H}^{m+2} = \mathbb{C}^{m+2} \oplus \mathbb{C}^{m+2}j$ por isometrías vía multiplicación por e^{it}. Como $\mathbb{C}V_{2,m}$ es invariante por esta acción, induce una acción de $U(1)$ sobre $\mathbb{C}V_{2,m}$ por isometrías. La anterior acción conmuta con la inducida por $Sp(1)$ sobre $\mathbb{C}V_{2,m}$ y, así, desciende a una acción de $U(1)$ sobre Q^{m+1} por isometrías. Denotaremos el correspondiente campo de vectores de Killing sobre Q^{m+1} por U. Explícitamente tenemos

$$U_{\tau(z,v)} = h_{(z,v)}(i(z, v))$$

para todo $(z, v) \in \mathbb{C}V_{2,m}$, lo que muestra que U es unitario en cada punto. Además, la curva integral maximal α de U con $\alpha(0) = \tau(z, v)$ es

$$\alpha : t \mapsto \tau(e^{it}(z, v)).$$

Para el fibrado normal $\perp Q^{m+1}$ de Q^{m+1} en $\mathbb{H}P^{m+1}$ tenemos la siguiente caracterización:

Proposición 1.4.3.

$$\perp Q^{m+1} = \hat{\mathfrak{J}}U := \{JU_q \mid J \in \hat{\mathfrak{J}}_q, q \in Q^{m+1}\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{P}$ el subfibrado riemanniano de rango 3 de End(TQ^{m+1}) inducido por la restricción de $\hat{\mathfrak{J}}$. Tres secciones locales P_1, P_2, P_3 de $\mathcal{P}$ forman una base local canónica de $\mathcal{P}$ si provienen de una base local canónica J_1, J_2, J_3 de $\hat{\mathfrak{J}}$. La conexión de Levi Civita de Q^{m+1} será denotada por $\tilde{\nabla}$ y, la métrica riemanniana inducida sobre Q^{m+1} por $\tilde{g}$. Como U es un campo de vectores de Killing,

$$\varphi = -\tilde{\nabla}U$$

es un campo de tensores de tipo $(1, 1)$ antisimétrico sobre Q^{m+1}. Denotaremos por $\mathcal{H}$ al complemento ortogonal de $\mathbb{R}U$ en TQ^{m+1}.

Lema 1.4.4. *Sea J una estructura casi hermítica en $\mathfrak{J}$ y P el elemento inducido en $\mathcal{P}$. Entonces*

1. *$A_{JU}U = \varphi U = PU = 0$,*

2. $A_{JU}\mathcal{H} = \varphi\mathcal{H} = P\mathcal{H} = \mathcal{H}, P|\mathcal{H} = J|\mathcal{H}$,
3. $-A_{JU}^2 X = \varphi^2 X = P^2 X = -X + \tilde{g}(X,U)U$,
4. $A_{JU} = P\varphi = \varphi P$,
5. $\varphi = -PA_{JU} = -A_{JU}P, P = -\varphi A_{JU} = -A_{JU}\varphi$,
6. $\tilde{P}A_{JU} = -A_{JU}\tilde{P}$ *para todo* $\tilde{P}$ *en* $\mathcal{P}$.

A partir de 1, 3 y 4 del Lema 1.4.4 obtenemos otra caracterización de los subespacios propios de A_{JU}, a saber,

Corolario 1.4.5. *Para cualquier estructura casi hermítica* J *de* $\hat{\mathfrak{J}}_q$, $q \in Q^{m+1}$ *y cualquier* $X \in T_q Q^{m+1}$ *tenemos*

1. $A_{JU}X = 0$ *si, y sólo si* $X \in \mathbb{R}U$,
2. $A_{JU}X = X$ *si, y sólo si* $\varphi X = -PX$ *y* $X \perp \mathbb{R}U$,
3. $A_{JU}X = -X$ *si, y sólo si* $\varphi X = PX$ *y* $X \perp \mathbb{R}U$.

1.5. Geometría intrínseca del conjunto focal Q^{m+1}

Comenzaremos con un detallado estudio de la curvatura de Q^{m+1}. Usando la Proposición 1.4.3 y el Lema 1.4.4, obtenemos para la segunda forma fundamental h de Q^{m+1} la expresión:

$$h(Y,Z) = \sum_{\nu=1}^{3} \hat{g}(h(Y,Z), J_\nu U)J_\nu U = \sum_{\nu=1}^{3} \tilde{g}(A_{J_\nu U}Y, Z)J_\nu U = \sum_{\nu=1}^{3} \tilde{g}(P_\nu \varphi Y, Z)J_\nu U$$

donde J_1, J_2, J_3 es una base de $\mathfrak{J}$. Usando de nuevo el Lema 1.4.4, obtenemos:

$$A_{h(Y,Z)}X = \sum_{\nu=1}^{3} \tilde{g}(P_\nu \varphi Y, Z)A_{J_\nu U}X = \sum_{\nu=1}^{3} \tilde{g}(P_\nu \varphi Y, Z)P_\nu \varphi X.$$

De aquí y de la expresión explícita del tensor de curvatura de $\mathbb{H}P^{m+1}$ vista anteriormente (1.2), obtenemos, a partir de la ecuación de Gauss:

Proposición 1.5.1. *El tensor de curvatura riemanniano* $\tilde{R}$ *de* Q^{m+1} *está dado por*

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z &= \tilde{g}(Y,Z)X - \tilde{g}(X,Z)Y \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{3}(\tilde{g}(P_\nu Y, Z)P_\nu X - \tilde{g}(P_\nu X, Z)P_\nu Y - 2\tilde{g}(P_\nu X, Y)P_\nu Z) \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{3}(\tilde{g}(P_\nu \varphi Y, Z)P_\nu \varphi X - \tilde{g}(P_\nu \varphi X, Z)P_\nu \varphi Y\end{aligned}$$

donde P_1, P_2, P_3 *es una base de* $\mathcal{P}$.

Sea $\mathcal{F}$ la foliación sobre Q^{m+1} inducida por el campo de vectores de Killing unitario U.

Proposición 1.5.2. *Las curvas integrales maximales de U son geodésicas cerradas de Q^{m+1} además de en $\mathbb{H}P^{m+1}$ y $\mathcal{F}$ es una foliación riemanniana totalmente geodésica sobre Q^{m+1}.*

Demostración. De $\tilde{\nabla}_U U = -\varphi U = 0$ obtenemos que las curvas integrales de U son geodésicas en Q^{m+1}. Además, usando la Proposición 1.4.3 y el Lema 1.4.4, la ecuación de Gauss implica

$$\hat{\nabla}_U U = \sum_{\nu=1}^{3} \tilde{g}(A_{J_\nu U} U, U) J_\nu U = 0$$

lo que muestra que cada curva integral de U es además una geodésica en $\mathbb{H}P^{m+1}$. Como U es completo y unitario y todas las geodésicas maximales en $\mathbb{H}P^{m+1}$ son cerradas, la primera parte está terminada. Por otro lado, como U es un campo de vectores de Killing, sus curvas integrales maximales son las órbitas de un grupo uniparamétrico de isometrías y, por lo tanto, localmente equidistantes unas de otras. Esto significa justamente que $\mathcal{F}$ es una foliación riemanniana sobre Q^{m+1} (véase, por ejemplo, [45]). □

1.6. Nuestro modelo de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$

Como las hojas de $\mathcal{F}$ son órbitas compactas de una acción isométrica, podemos equipar al espacio $B^{m+1} := Q^{m+1}/\mathcal{F}$ con la estructura de variedad riemanniana de manera que la proyección canónica $\pi : Q^{m+1} \to B^{m+1}$ sea una submersión riemanniana. Como Q^{m+1} es completo y simplemente conexo y las fibras de π son conexas, se sigue además que B^{m+1} es completo y simplemente conexo. Denotaremos por g la métrica riemanniana y por ∇ la conexión de Levi Civita sobre B^{m+1}. Si X es un vector o un campo de vectores tangente a B^{m+1}, denotaremos su levantamiento horizontal por $\tilde{X}$.

Lema 1.6.1. $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \widetilde{\nabla_X Y} + \tilde{g}(\varphi \tilde{X}, \tilde{Y}) U$.

Demostración. De acuerdo con las ecuaciones fundamentales de una submersión riemanniana (véase, por ejemplo, [31]) tenemos:

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \widetilde{\nabla_X Y} + \frac{1}{2} \mathcal{V}[\tilde{X}, \tilde{Y}]$$

donde $\mathcal{V}$ denota la proyección sobre la componente tangente a las fibras de π.

Como

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}[\tilde{X}, \tilde{Y}] &= \tilde{g}([\tilde{X}, \tilde{Y}], U) U \\
&= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, U) U - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X}, U) U \\
&= -\tilde{g}(\tilde{Y}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} U) U + \tilde{g}(\tilde{X}, \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} U) U \\
&= \tilde{g}(\tilde{Y}, \varphi \tilde{X}) U - \tilde{g}(\tilde{X}, \varphi \tilde{Y}) U \\
&= 2 \tilde{g}(\varphi \tilde{X}, \tilde{Y}) U
\end{aligned}$$

hemos acabado la demostración. □

Sea Φ_t el grupo uniparamétrico de isometrías de Q^{m+1} que genera el campo de vectores de Killing U. Como

$$\Phi_{t*}\varphi X = -\Phi_{t*}\tilde{\nabla}_X U = -\tilde{\nabla}_X \Phi_{t*} U = -\tilde{\nabla}_X (U \circ \Phi_t) = -\tilde{\nabla}_{\Phi_{t*}X} U = \varphi \Phi_{t*} X$$

para todo $X \in TQ^{m+1}$, existe un campo de tensores J de tipo $(1,1)$ sobre B^{m+1} caracterizado por

$$J\pi_* = \pi_*\varphi.$$

Como $\varphi^2 X = -X$ para todo $X \in \mathcal{H}$, se sigue que J es una estructura casi hermítica sobre (B^{m+1}, g).

Teorema 1.6.2. *El espacio* (B^{m+1}, g, J) *es isométrico al espacio simétrico globalmente hermítico* $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$.

Veamos ahora la estructura kaehleriana cuaterniónica sobre B^{m+1}.

Para cada $(z,v) \in \mathbb{C}V_{2,m}$, $t \in \mathbb{R}$ y $P \in \mathcal{P}_{\tau(z,v)}$, existe $\lambda \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$ y $\tilde{P}$, tal que

$$\begin{aligned} \Phi_{t*\tau(z,v)} P h_{(z,v)}(\omega) &= \Phi_{t*\tau(z,v)} h_{(z,v)}(\omega\lambda) = h_{\Phi_t \tau_{(z,v)}}(e^{it}\omega\lambda) \\ &= \tilde{P} h_{\Phi_t \tau(z,v)}(e^{it}\omega) = \tilde{P} \Phi_{t*\tau(z,v)} h_{(z,v)}(\omega) \end{aligned}$$

para todo $\omega \in h^{-1}_{(z,v)}(\mathcal{H}_{\tau(z,v)})$. Así, $\Phi_{t*}\mathcal{P} = \mathcal{P}\Phi_{t*}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto implica la existencia de un subfibrado vectorial de rango tres $\mathfrak{J}$ de End(TB^{m+1}) tal que

$$\pi_*\mathcal{P} = \mathfrak{J}\pi_*.$$

Proposición 1.6.3. $\mathfrak{J}$ *es una estructura kaehleriana cuaterniónica para* (B^{m+1}, g).

Demostración. Primero probaremos que $\mathfrak{J}$ es paralelo. Sea J una sección local en $\mathfrak{J}$, $q \in Q^{m+1}$ tal que J está definida en $\pi(q)$ y $X \in T_{\pi(q)}B^{m+1}$. Tenemos que demostrar que $\nabla_X J \in \mathfrak{J}_{\pi(q)}$. Sea P la sección local en $\mathcal{P}$ con $\pi_* P = J\pi_*$. Si $\tilde{X}$ denota el levantamiento horizonzal de X en q, entonces

$$\pi_* P\tilde{X} = J\pi_*\tilde{X} = JX = \pi_*\widetilde{JX}$$

implica

$$P\tilde{X} = \widetilde{JX}.$$

Ahora, usando el Lema 1.6.1 obtenemos

$$\begin{aligned} (\widetilde{\nabla_X J})Y &= \widetilde{\nabla_X(JY)} - J\widetilde{\nabla_X Y} \\ &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\widetilde{JY} - \tilde{g}(\varphi\tilde{X}, \widetilde{JY})U - J\widetilde{\nabla_X Y} \\ &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} P\tilde{Y} + \tilde{g}(P\varphi\tilde{X}, \tilde{Y})U - P\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} \\ &= (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} P)\tilde{Y} + \tilde{g}(P\varphi\tilde{X}, \tilde{Y})U. \end{aligned}$$

Extendamos $P|_{\mathcal{H}}$ a una sección local $\hat{J}$ en la estructura kaehleriana quaterniónica $\tilde{\mathfrak{J}}$ de $\mathbb{H}P^{m+1}$. Como ésta es paralela en End$(T\mathbb{H}P^{m+1})$ existe un elemento $\tilde{J} \in \tilde{\mathfrak{J}}_q$ tal que $\hat{\nabla}_{\tilde{X}}\hat{J} = \tilde{J}$.

Denotaremos al elemento inducido desde $\tilde{J}$ en $\mathcal{P}_p$ por $\tilde{P}$. Usando la ecuación de Gauss, el Lema 1.4.4 y, teniendo en cuenta que $\tilde{P}\tilde{Y}$ es tangente a Q^{m+1} obtenemos:

$$\begin{aligned}\tilde{P}\tilde{Y} &= \tilde{J}\tilde{Y} = (\hat{\nabla}_{\tilde{X}}\hat{J})\tilde{Y} = \hat{\nabla}_{\tilde{X}}(\hat{J}\tilde{Y}) - \hat{J}\hat{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} \\ &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}(P\tilde{Y}) - P\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} + \tilde{g}(A_{\hat{J}U}\tilde{X}, \tilde{Y})U \\ &= (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}P)\tilde{Y} + \tilde{g}(P\varphi\tilde{X}, \tilde{Y})U.\end{aligned}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones tenemos que $(\widetilde{\nabla_X J})Y = \tilde{P}\tilde{Y}$ y, por lo tanto,

$$(\nabla_X J)Y = \pi_*\tilde{P}\tilde{Y} = J_0\pi_*\tilde{Y} = J_0 Y$$

con $J_0 \in \mathfrak{J}_{\pi(q)}$ ya que $\pi_*\mathcal{P} = \mathfrak{J}\pi_*$. Así pues, hemos probado que $\mathfrak{J}$ es un subfibrado paralelo de End(TB^{m+1}).

Sólo falta probar la existencia de bases canónicas locales para $\mathfrak{J}$. Sea P_1, P_2, P_3 una base canónica local de $\mathcal{P}$ en algún entorno abierto de algún punto $q \in Q^{m+1}$ y s una sección local de π en algún entorno abierto de $\pi(q)$ con $s(\pi(q)) = q$, entonces obtenemos una base local canónica J_1, J_2, J_3 de $\mathfrak{J}$ definiendo $J_\nu := \pi_* \circ P_\nu \circ s_*, \nu = 1, 2, 3$. □

1.7. Tensor de curvatura riemanniano

A partir de ahora vamos a identificar B^{m+1} con $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Como consecuencia de la construcción que hemos hecho de J y de $\mathfrak{J}$, de los apartados 1 y 4 del Lema 1.4.4 y del Corolario 1.4.5, resulta la siguiente

Proposición 1.7.1. *Sea J_1 una estructura casi hermítica de $\mathfrak{J}$ entonces, $JJ_1 = J_1J$ y JJ_1 es un endomorfismo simétrico tal que $(JJ_1)^2 = I$ y traza $JJ_1 = 0$.*

Continuemos calculando el tensor de curvatura riemanniano $\bar{R}$ de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Sean X, Y, Z campos de vectores tangentes a $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Usando el Lema 1.6.1 obtenemos

$$(\nabla_X\nabla_Y Z) \circ \pi = \pi_*(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Y}}\widetilde{Z} + \widetilde{g}(\varphi\widetilde{Y}, \widetilde{Z})\varphi\widetilde{X}).$$

Como U está π-relacionado con el campo de vectores tangentes cero sobre $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, el corchete de Lie $[U, \widetilde{Z}]$ es tangente a las fibras de π. Usando que las curvas integrales de U son geodésicas en Q^{m+1} y que U tiene longitud constante, se obtiene que $[U, \widetilde{Z}] = 0$ y, así,

$$\widetilde{\nabla}_U\widetilde{Z} = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Z}}U = -\varphi\widetilde{Z}.$$

Así pues, usando el Lema 1.6.1, obtenemos

$$\widetilde{[X, Y]} = \widetilde{\nabla_X Y} - \widetilde{\nabla_Y X} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] - 2\widetilde{g}(\varphi\widetilde{X}, \widetilde{Y})U$$

y

$$(\nabla_{[X,Y]}Z)\circ\pi = \pi_*\widetilde{\nabla}_{\widetilde{[X,Y]}}\widetilde{Z} = \pi_*(\widetilde{\nabla}_{[\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\widetilde{Z} + 2\widetilde{g}(\varphi\widetilde{X},\widetilde{Y})\varphi\widetilde{Z}).$$

Con todo esto

$$(\bar{R}(X,Y)Z)\circ\pi = \pi_*(\widetilde{R}(\widetilde{X},\widetilde{Y})\widetilde{Z} + \widetilde{g}(\varphi\widetilde{Y},\widetilde{Z})\varphi\widetilde{X} - \widetilde{g}(\varphi\widetilde{X},\widetilde{Z})\varphi\widetilde{Y} - 2\widetilde{g}(\varphi\widetilde{X},\widetilde{Y})\varphi\widetilde{Z}).$$

Insertando aquí la expresión vista anteriormente para $\widetilde{R}$ llegamos a

Teorema 1.7.2. *El tensor de curvatura riemanniano de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ viene dado por*

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)Z &= g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\\ &+g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY - 2g(JX,Y)JZ\\ &+\sum_{\nu=1}^{3}\{g(J_\nu Y,Z)J_\nu X - g(J_\nu X,Z)J_\nu Y - 2g(J_\nu X,Y)J_\nu Z)\}\\ &+\sum_{\nu=1}^{3}\{g(J_\nu JY,Z)J_\nu JX - g(J_\nu JX,Z)J_\nu JY\}\end{aligned}$$

donde J_1, J_2, J_3 es una base de $\mathfrak{J}$.

Un vector tangente X, no nulo, de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ se dirá singular si X es tangente a más de una subvariedad llana, totalmente geodésica, completa y conexa de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. En $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ existen dos tipos de vectores tangentes singulares X caracterizados por verificar $JX\perp\mathfrak{J}X$ unos y $JX\in\mathfrak{J}X$ otros. Más adelante necesitaremos calcular explícitamente campos de Jacobi a lo largo de geodésicas cuyos vectores tangentes son todos singulares. Para ello se necesitan los valores y subespacios propios del operador de Jacobi $\bar{R}_X = \bar{R}(\cdot,X)X$. Sea X un vector tangente unitario de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Si $JX\in\mathfrak{J}X$ existe una estructura casi hermítica J_1 en $\mathfrak{J}$ tal que $JX = J_1X$. En este caso, los valores y subespacios propios de $\bar{R}_X$ son

$$\begin{array}{ll} 0 & \mathbb{R}X\oplus\{Y|Y\perp\mathbb{H}X, JY=-J_1Y\}\\ 2 & \mathbb{C}^\perp X\oplus\{Y|Y\perp\mathbb{H}X, JY=J_1Y\}\\ 8 & \mathbb{R}JX,\end{array}$$

donde $\mathbb{C}X$ y $\mathbb{H}X$ denotan los subespacios complejo y cuaterniónico generados por X, respectivamente, y $\mathbb{C}^\perp X$ el complemento ortogonal de $\mathbb{C}X$ en $\mathbb{H}X$. Si $JX\perp\mathfrak{J}X$ entonces los valores y subespacios propios de $\bar{R}_X$ son

$$\begin{array}{ll} 0 & \mathbb{R}X\oplus\mathfrak{J}JX\\ 1 & (\mathbb{H}\mathbb{C}X)^\perp\\ 4 & \mathbb{R}JX\oplus\mathfrak{J}X,\end{array}$$

donde $\mathbb{H}\mathbb{C}X = \mathbb{R}X\oplus\mathbb{R}JX\oplus\mathfrak{J}X\oplus\mathfrak{J}JX$.

1.8. Fórmulas fundamentales para hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$

A lo largo de la tesis M siempre denotará una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, es decir, una subvariedad de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ con codimensión uno, conexa y orientable. Como $G_2(\mathbb{C}^3)$ es isométrica al plano proyectivo complejo $\mathbb{C}P^2$ de curvatura seccional holomorfa constante 8 y el isomorfismo $Spin(6) \simeq SU(4)$ produce un isomorfismo entre $G_2(\mathbb{C}^4)$ y la variedad Grassmanniana real de los subespacios vectoriales 2-dimensionales orientados $G_2^+(\mathbb{R}^6)$ de $\mathbb{R}^6$ asumiremos siempre $m \geq 3$. La métrica inducida sobre M la denotaremos también por g y ∇ denotará la conexión riemanniana de (M, g). Sea N un campo normal unitario de M y A el endomorfismo de Weingarten de M con respecto a N. La estructura kaehleriana J de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ induce sobre M una estructura métrica casi de contacto (ϕ, ξ, η, g). Además, sea J_1, J_2, J_3 una base canónica local de $\mathfrak{J}$. Entonces, cada J_ν induce una estructura métrica casi de contacto $(\phi_\nu, \xi_\nu, \eta_\nu, g)$ sobre M. Usando la anterior expresión de $\bar{R}$ las ecuaciones de Gauss y Codazzi vienen dadas respectivamente por:

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z = {} & g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \\
& + g(\phi Y, Z)\phi X - g(\phi X, Z)\phi Y - 2g(\phi X, Y)\phi Z \\
& + \sum_{\nu=1}^{3} \{ g(\phi_\nu Y, Z)\phi_\nu X - g(\phi_\nu X, Z)\phi_\nu Y - 2g(\phi_\nu X, Y)\phi_\nu Z \} \\
& + \sum_{\nu=1}^{3} \{ g(\phi_\nu \phi Y, Z)\phi_\nu \phi X - g(\phi_\nu \phi X, Z)\phi_\nu \phi Y \} \\
& - \sum_{\nu=1}^{3} \{ \eta(Y)\eta_\nu(Z)\phi_\nu \phi X - \eta(X)\eta_\nu(Z)\phi_\nu \phi Y \} \\
& - \sum_{\nu=1}^{3} \{ \eta(X) g(\phi_\nu \phi Y, Z) - \eta(Y) g(\phi_\nu \phi X, Z) \} \xi_\nu \\
& + g(AY, Z)AX - g(AX, Z)AY
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

y

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X = {} & \eta(X)\phi Y - \eta(Y)\phi X - 2g(\phi X, Y)\xi \\
& + \sum_{\nu=1}^{3} (\eta_\nu(X)\phi_\nu Y - \eta_\nu(Y)\phi_\nu X - 2g(\phi_\nu X, Y)\xi_\nu) \\
& + \sum_{\nu=1}^{3} (\eta_\nu(\phi X)\phi_\nu \phi(Y) - \eta_\nu(\phi Y)\phi_\nu \phi X) \\
& + \sum_{\nu=1}^{3} (\eta(X)\eta_\nu(\phi Y) - \eta(Y)\eta_\nu(\phi X))\xi_\nu .
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Probaremos ahora una serie de fórmulas que serán de gran utilidad a lo largo de todas las demostraciones. En primer lugar, de la identidad $J^2 = -I$ obtenemos, teniendo en cuenta que

$JX = \phi X + \eta(X)N$, para todo $X \in TM$

$$-X = J^2X = J(\phi X + \eta(X)N) = J\phi X - \eta(X)\xi = \phi^2 X + \eta(\phi X)N - \eta(X)\xi.$$

Las componentes tangente y normal de esta ecuación implican el siguiente

Lema 1.8.1. *Para todo $X \in TM$ tenemos*

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \quad y \quad \eta(\phi X) = 0.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $J_\nu X = \phi_\nu X + \eta_\nu(X)N$, tenemos

$$\begin{aligned} JJ_\nu X &= J(\phi_\nu X + \eta_\nu(X)N) = J\phi_\nu X - \eta_\nu(X)\xi \\ &= \phi\phi_\nu X + \eta(\phi_\nu X)N - \eta_\nu(X)\xi \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} J_\nu JX &= J_\nu(\phi X + \eta(X)N) = J_\nu\phi X - \eta(X)\xi_\nu \\ &= \phi_\nu\phi X + \eta_\nu(\phi X)N - \eta(X)\xi_\nu. \end{aligned}$$

La componente tangencial y normal de la identidad $JJ_\nu = J_\nu J$ nos da

Lema 1.8.2. *Para todo $X \in TM$*

$$\phi\phi_\nu X - \phi_\nu\phi X = \eta_\nu(X)\xi - \eta(X)\xi_\nu \quad y \quad \eta_\nu(\phi X) = \eta(\phi_\nu X).$$

De la segunda ecuación del lema anterior obtenemos

$$g(\phi_\nu\xi, X) = -g(\xi, \phi_\nu X) = -\eta(\phi_\nu X) = -\eta_\nu(\phi X) = -g(\xi_\nu, \phi X) = g(\phi\xi_\nu, X)$$

y, así,

Corolario 1.8.3.

$$\phi_\nu\xi = \phi\xi_\nu.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} J_\nu J_{\nu+1}X &= J_\nu(\phi_{\nu+1}X + \eta_{\nu+1}(X)N) \\ &= \phi_\nu\phi_{\nu+1}X + \eta_\nu(\phi_{\nu+1}X)N - \eta_{\nu+1}(X)\xi_\nu \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -J_{\nu+1}J_\nu X &= -J_{\nu+1}(\phi_\nu X + \eta_\nu(X)N) \\ &= -\phi_{\nu+1}\phi_\nu X - \eta_{\nu+1}(\phi_\nu X)N + \eta_\nu(X)\xi_{\nu+1}. \end{aligned}$$

Como

$$J_{\nu+2}X = \phi_{\nu+2}X + \eta_{\nu+2}(X)N$$

las componentes tangencial y normal de

$$J_\nu J_{\nu+1} = J_{\nu+2} = -J_{\nu+1}J_\nu$$

implican el siguiente

Lema 1.8.4. *Para todo* $X \in TM$

$$\phi_\nu \phi_{\nu+1} X - \eta_{\nu+1}(X)\xi_\nu = \phi_{\nu+2} X = -\phi_{\nu+1}\phi_\nu X + \eta_\nu(X)\xi_{\nu+1}$$

y

$$\eta_\nu(\phi_{\nu+1} X) = \eta_{\nu+2}(X) = -\eta_{\nu+1}(\phi_\nu X).$$

Poniendo $X = \xi_\mu$ y $X = \xi_{\nu+1}$ en la primera ecuación del lema anterior resulta

Corolario 1.8.5.

$$\phi_{\nu+2}\xi_\nu = \xi_{\nu+1} \quad y \quad \phi_{\nu+2}\xi_{\nu+1} = -\xi_\nu.$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\overline{\nabla} J = 0$, usando la fórmula de Gauss obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X(JY) &= J\overline{\nabla}_X Y = J\nabla_X Y + g(AX, Y)JN \\ &= \phi\nabla_X Y + \eta(\nabla_X Y)N - g(AX, Y)\xi. \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la fórmula de Weingarten

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X(JY) &= \overline{\nabla}_X(\phi Y) = \overline{\nabla}_X(\eta(Y)N) \\ &= \nabla_X(\phi Y) - g(\phi AX, Y)N + \big(X\big(\eta(Y)\big)\big)N - \eta(Y)AX. \end{aligned}$$

Comparando las componentes tangencial y normal de las dos ecuaciones previas

Lema 1.8.6. *Para todo* $X, Y \in TM$

$$(\nabla_X \phi)Y = \eta(Y)AX - g(AX, Y)\xi$$

y

$$X\big(\eta(Y)\big) = \eta(\nabla_X Y) + g(\phi AX, Y).$$

De la segunda ecuación de este lema se deduce

$$g(\nabla_X \xi, Y) = X\big(g(\xi, Y)\big) - g(\xi, \nabla_X Y) = X\big(\eta(Y)\big) - \eta(\nabla_X Y) = g(\phi AX, Y)$$

y, así,

Corolario 1.8.7. *Para todo* $X \in TM$

$$\nabla_X \xi = \phi AX.$$

Igualmente, teniendo en cuenta (1.1) y, usando la fórmula de Gauss, obtenemos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X(J_\nu Y) &= (\overline{\nabla}_X J_\nu)Y + J_\nu \overline{\nabla}_X Y \\ &= q_{\nu+2}(X)J_{\nu+1}Y - q_{\nu+1}(X)J_{\nu+2}Y + J_\nu \nabla_X Y + g(AX, Y)J_\nu N \\ &= q_{\nu+2}(X)J_{\nu+1}Y - q_{\nu+1}(X)J_{\nu+2}Y + \phi_\nu \nabla_X Y + \eta_\nu(\nabla_X Y)N - g(AX, Y)\xi_\nu \end{aligned}$$

y, con la fórmula de Weingarten

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X(J_\nu Y) &= \overline{\nabla}_X(\phi_\nu Y) + \overline{\nabla}_X\big(\eta_\nu(Y)N\big)\\ &= \nabla_X(\phi_\nu Y) + g(AX,\phi_\nu Y)N + \overline{\nabla}_X\big(\eta_\nu(Y)N\big)\\ &= \nabla_X(\phi_\nu Y) + g(AX,\phi_\nu Y)N + \big(X\big(\eta_\nu(Y)\big)\big)N - \eta_\nu(Y)AX\\ &= (\nabla_X\phi_\nu)Y + \phi_\nu(\nabla_X Y) - g(\phi_\nu AX, Y)N + \big(X\big(\eta_\nu(Y)\big)\big)N - \eta_\nu(Y)AX.\end{aligned}$$

Comparando las componentes tangencial y normal de las dos ecuaciones previas tenemos

Lema 1.8.8. *Para todo* $X, Y \in TM$

$$(\nabla_X\phi_\nu)Y = -q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}Y + q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}Y + \eta_\nu(Y)AX - g(AX,Y)\xi_\nu$$

y

$$X\big(\eta_\nu(Y)\big) = q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(Y) - q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(Y) + g(\phi_\nu AX, Y).$$

De la segunda ecuación de este lema se deduce

$$\begin{aligned}g(\nabla_X\xi_\nu, Y) &= X\big(g(\xi_\nu, Y)\big) - g(\xi_\nu, \nabla_X Y)\\ &= X\big(\eta_\nu(Y)\big) - \eta_\nu(\nabla_X Y)\\ &= q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(Y) - q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(Y) + g(\phi_\nu AX, Y)\end{aligned}$$

y, así,

Corolario 1.8.9. *Para todo* $X \in TM$

$$\nabla_X\xi_\nu = q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2} + \phi_\nu AX.$$

Por último vamos a ver dos teoremas que nos serán de gran utilidad en las demostraciones que haremos.

Sea $\mathfrak{D}$ el subfibrado maximal cuaterniónico del fibrado tangente TM de M y $\mathfrak{D}^\perp$ el complemento ortogonal de $\mathfrak{D}$ en TM. Supongamos que $A\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$, entonces $\mathfrak{D}^\perp$ es también invariante por A y, bajo una adecuada elección de J_1, J_2, J_3 los campos de vectores ξ_ν son principales, es decir, $A\xi_\nu = \beta_\nu\xi_\nu$. La ecuación de Codazzi entonces implica

$$\begin{aligned}&2\eta(X)\eta_\nu(\phi Y) - 2\eta(Y)\eta_\nu(\phi X) - 2g(\phi X, Y)\eta(\xi_\nu)\\ &+2\eta_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(Y) - 2\eta_{\nu+1}(Y)\eta_{\nu+2}(X) - 2g(\phi_\nu X, Y)\\ &+2\eta_{\nu+1}(\phi X)\eta_{\nu+2}(\phi Y) - 2\eta_{\nu+1}(\phi Y)\eta_{\nu+2}(\phi X)\\ &\quad= g((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, \xi_\nu)\\ &\quad= g((\nabla_X A)\xi_\nu, Y) - g((\nabla_Y A)\xi_\nu, X)\\ &\quad= X(\beta_\nu)\eta_\nu(Y) - Y(\beta_\nu)\eta_\nu(X)\\ &\qquad+(\beta_\nu - \beta_{\nu+1})(q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(Y) - q_{\nu+2}(Y)\eta_{\nu+1}(X))\\ &\qquad-(\beta_\nu - \beta_{\nu+2})(q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(Y) - q_{\nu+1}(Y)\eta_{\nu+2}(X))\\ &\qquad+\beta_\nu g((A\phi_\nu + \phi_\nu A)X, Y) - 2g(A\phi_\nu AX, Y).\end{aligned}$$

Poniendo $X = \xi_\nu$,

$$
\begin{aligned}
Y(\beta_\nu) = {} & \xi_\nu(\beta_\nu)\eta_\nu(Y) + (\beta_\nu - \beta_{\nu+1})q_{\nu+2}(\xi_\nu)\eta_{\nu+1}(Y) - (\beta_\nu - \beta_{\nu+2})q_{\nu+1}(\xi_\nu)\eta_{\nu+2}(Y) \\
& -4\eta(\xi_\nu)\eta_\nu(\phi Y) + 2\eta(\xi_{nu+1})\eta_{\nu+1}(\phi Y) + 2\eta(\xi_{\nu+2})\eta_{\nu+2}(\phi Y).
\end{aligned}
$$

Insertando ésta y la correspondiente ecuación para $X(\beta_\nu)$ en la ecuación anterior, resulta

$$
\begin{aligned}
& 2\eta(X)\eta_\nu(\phi Y) - 2\eta(Y)\eta_\nu(\phi X) - 2g(\phi X, Y)\eta(\xi_\nu) \\
& +2\eta_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(Y) - 2\eta_{\nu+1}(Y)\eta_{\nu+2}(X) - 2g(\phi_\nu X, Y) \\
& +2\eta_{\nu+1}(\phi X)\eta_{\nu+2}(\phi Y) - 2\eta_{\nu+1}(\phi Y)\eta_{\nu+2}(\phi X) \\
& \quad = 2\eta(\xi_{\nu+1})(\eta_{\nu+1}(\phi X)\eta_\nu(Y) - \eta_{\nu+1}(\phi Y)\eta_\nu(X)) \\
& \qquad +2\eta(\xi_{\nu+2})(\eta_{\nu+2}(\phi X)\eta_\nu(Y) - \eta_{\nu+2}(\phi Y)\eta_\nu(X)) \\
& \qquad +4\eta(\xi_\nu)(\eta_\nu(\phi Y)\eta_\nu(X) - \eta_\nu(\phi X)\eta_\nu(Y)) \\
& \qquad +(\beta_\nu - \beta_{\nu+1})(q_{\nu+2}(\xi_\nu)(\eta_{\nu+1}(X)\eta_\nu(Y) - \eta_{\nu+1}(Y)\eta_\nu(X)) \\
& \qquad\qquad +q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(Y) - q_{\nu+2}(Y)\eta_{\nu+1}(X)) \\
& \qquad -(\beta_\nu - \beta_{\nu+2})(q_{\nu+1}(\xi_\nu)(\eta_{\nu+2}(X)\eta_\nu(Y) - \eta_{\nu+2}(Y)\eta_\nu(X)) \\
& \qquad\qquad +q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(Y) - q_{\nu+1}(Y)\eta_{\nu+2}(X)) \\
& \qquad \beta_\nu g((A\phi_\nu + \phi_\nu A)X, Y) - 2g(A\phi_\nu AX, Y).
\end{aligned}
$$

Esto implica

Lema 1.8.10. *Si* $A\xi_\nu = \beta_\nu\xi_\nu$ *y* $X \in \mathfrak{D}$ *con* $AX = \lambda X$, *entonces*

$$
\begin{aligned}
0 = {} & (2\lambda - \beta_\nu)A\phi_\nu X - (2 + \lambda\beta_\nu)\phi_\nu X \\
& - (2\eta_{\nu+1}(\xi)\eta_{\nu+1}(\phi X) + 2\eta_{\nu+2}(\xi)\eta_{\nu+2}(\phi X) - 4\eta_\nu(\xi)\eta_\nu\phi(X))\xi_\nu \\
& - (\beta_\nu - \beta_{\nu+1})q_{\nu+2}(X)\xi_{nu+1} + (\beta_\nu - \beta_{\nu+2})q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2} \\
& - 2\eta_\nu(\xi)\phi X - 2\eta_\nu(\phi X)\xi - 2\eta(X)\phi\xi_\nu + 2\eta_{\nu+2}(\phi X)\phi\xi_{\nu+1} - 2\eta_{\nu+1}(\phi X)\phi\xi_{\nu+2}.
\end{aligned}
$$

Ahora supongamos $A\xi = \alpha\xi$ en lugar de $A\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$ y denotemos por $\mathfrak{H}$ el complemento ortogonal del subespacio real generado por ξ en TM. Multiplicando escalarmente la ecuación de Codazzi (1.4) por ξ resulta

$$
\begin{aligned}
& -2g(\phi X, \xi) + 2\textstyle\sum_{\nu=1}^{3}\{\eta_\nu(X)\eta_\nu(\phi Y) - \eta_\nu(Y)\eta_\nu(\phi X) - g(\phi_\nu X, Y)\eta_\nu(\xi)\} \\
& \qquad = g((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, \xi) \\
& \qquad = g((\nabla_X A)\xi, Y) - g((\nabla_X A)\xi, X) \\
& \qquad = X(\alpha)\eta(Y) - Y(\alpha)\eta(X) + \alpha g((A\phi + \phi A)X, Y) - 2g(A\phi AX, Y)
\end{aligned}
$$

donde $X, Y \in TM$. Poniendo $X = \xi$

$$
Y(\alpha) = \xi(\alpha)\eta(Y) - 4\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\xi)\eta_\nu(\phi Y)
$$

e insertando esta ecuación y la correspondiente para $X(\alpha)$ en la ecuación previa, resulta

Proposición 1.8.11. *Para* $X, Y \in TM$

$$\begin{aligned}&\alpha g((A\phi+\phi A)X,Y)-2g(A\phi AX,Y)+2g(\phi X,Y)\\&\quad=2\textstyle\sum_{\nu=1}^{3}\{\eta_\nu(X)\eta_\nu(\phi Y)-\eta_\nu(Y)\eta_\nu(\phi X)-g(\phi_\nu X,Y)\eta_\nu(\xi)\\&\qquad\qquad-2\eta(X)\eta_\nu(\phi Y)\eta_\nu(\xi)\}+2\eta(Y)\eta_\nu(\phi X)\eta_\nu(\xi)\}.\end{aligned}$$

De aquí, fácilmente deducimos

Lema 1.8.12. *Si* $A\xi = \alpha\xi$ *y* $X \in \mathfrak{H}$ *con* $AX = \lambda X$ *entonces*

$$\begin{aligned}&(\alpha-2\lambda)A\phi X+(2+\lambda\alpha)\phi X\\&\qquad=2\sum_{\nu=1}^{3}\{2\eta_\nu(\xi)\eta_\nu(\phi X)\xi-\eta_\nu(X)\phi_\nu\xi-\eta_\nu(\phi X)\xi_\nu-\eta_\nu(\xi)\phi_\nu X\}\,.\end{aligned}$$

Asumamos de nuevo que $A\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$. La $\xi_{\nu+1}$-componente de la ecuación del Lema 1.8.10 da

$$0=(\beta_\nu-\beta_{\nu+1})q_{\nu+2}(X)+4\eta(\xi_\nu)\eta_{\nu+1}(\phi X)+2\eta(\xi_{\nu+1})\eta_\nu(\phi X)-2\eta(\xi_{\nu+2})\eta(X)$$

mientras que la componente en $\xi_{\nu+2}$ conduce a

$$0=(\beta_\nu-\beta_{\nu+2})q_{\nu+1}(X)-4\eta(\xi_\nu)\eta_{\nu+2}(\phi X)-2\eta(\xi_{\nu+2})\eta_\nu(\phi X)-2\eta(\xi_{\nu+1})\eta(X).$$

Ambas ecuaciones son válidas para todos los índices. Aumentando en una unidad los índices de la segunda ecuación y combinando con la primera ecuación

$$2\eta(\xi_{\nu+2})\eta(X)=\eta(\xi_\nu)\eta_{\nu+1}(\phi X)-\eta(\xi_{\nu+1})\eta_\nu(\phi X).$$

Asumamos ahora además que ξ es un vector principal de $M,\ A\xi = \alpha\xi$. Podemos escribir

$$\xi=\eta(X)X+\eta(Z)Z$$

para campos de vectores unitarios adecuados $X \in \mathfrak{D}$ y $Z \in \mathfrak{D}^\perp$. Como $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D}^\perp$ son invariantes bajo A tenemos que $AX \in \mathfrak{D}$ y $AZ \in \mathfrak{D}^\perp$. Así

$$\alpha\eta(X)X+\alpha\eta(Z)Z=\alpha\xi=A\xi=\eta(X)AX+\eta(Z)AZ$$

implica $\eta(X) = 0, \eta(Z) = 0$ o $(AX = \alpha X$ y $AZ = \alpha Z)$. Supongamos la última de las posibilidades. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la base canónica local está elegida de tal forma que $Z = \xi_3$. Entonces $\eta(\xi_1) = 0 = \eta(\xi_2)$ y obtenemos

$$2\eta(Z)\eta(X)=2\eta(\xi_3)\eta(X)=\eta(\xi_1)\eta_2(\phi X)-\eta(\xi_2)\eta_1(\phi X)=0.$$

Por lo tanto, tenemos necesariamente $\eta(X) = 0$ o $\eta(Z) = 0$. Pero esto justamente significa que $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ o $\xi \in \mathfrak{D}$. Así tenemos demostrada la siguiente

Proposición 1.8.13. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Supongamos que $A\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$ y que $A\xi = \alpha\xi$. Entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$.*

De ahora en adelante, asumiremos que M es una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ con $A\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$ y $A\xi = \alpha\xi$. De acuerdo con lo visto, hemos de considerar dos casos, que $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ o que $\xi \in \mathfrak{D}$.

En el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, el normal unitario N es un vector tangente singular de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ de tipo $JN \in \mathfrak{J}N$. Así, existe una estructura casi hermítica $J_1 \in \mathfrak{J}$ tal que $JN = J_1N$. Entonces

$$\xi = \xi_1,\ \alpha = \beta_1,\ \phi\xi_2 = -\xi_3,\ \phi\xi_3 = \xi_2,\ \phi\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}.$$

En lo que sigue, los índices ν y μ serán o bien 2, o bien 3, y distintos el uno del otro.

Insertando $X = \xi_\nu$ en la ecuación del Lema 1.8.12 resulta $(2\beta_\nu - \alpha)A\phi\xi_\nu = (4 + \alpha\beta_\nu)\phi\xi_\nu$. Si $0 = 2\beta_\nu - \alpha$ entonces $0 = 4 + 2\beta_\nu^2$, lo que es imposible, luego $2\beta_\nu - \alpha \neq 0$ y $A\phi\xi_\nu = \frac{4+\alpha\beta_\nu}{2\beta_\nu-\alpha}\phi\xi_\nu$. Usando $A\xi_\mu = \beta_\mu\xi_\mu$, $\phi\xi_2 = -\xi_3$ y $\phi\xi_3 = \xi_2$ obtenemos $\beta_\mu = \frac{4+\alpha\beta_\nu}{2\beta_\nu-\alpha}$ y, así,

Lema 1.8.14. $2\beta_2\beta_3 - \alpha(\beta_2 + \beta_3) - 4 = 0.$

Sea $X \in \mathfrak{D}$ con $AX = \lambda X$. La $\mathfrak{D}$-componente de la ecuación del Lema 1.8.10 es $0 = (2\lambda - \beta_\nu)A\phi_\nu X - (2 + \lambda\beta_\nu)\phi_\nu X$. Si $2\lambda - \beta_\nu = 0$ entonces, $0 = 2 + \lambda\beta_\nu = 2 + 2\lambda^2$, lo que es imposible. Así,

Lema 1.8.15. *Si $X \in \mathfrak{D}$ con $AX = \lambda X$, entonces*

$$2\lambda - \beta_\nu \neq 0 \quad \textit{y} \quad A\phi_\nu X = \lambda_\nu\phi_\nu X \quad \textit{con} \quad \lambda_\nu = \frac{2 + \lambda\beta_\nu}{2\lambda - \beta_\nu}.$$

Ahora reemplacemos X por $\phi_2 X$. Entonces, la $\mathfrak{D}$-componente de la ecuación del Lema 1.8.10 con índice uno es $0 = (2\lambda_2\lambda_3 - \alpha(\lambda_2 + \lambda_3) - 2)\phi_3 X - 2\phi_2\phi X$. Aplicando ϕ_2 a esta ecuación, $0 = (2\lambda_2\lambda_3 - \alpha(\lambda_2 + \lambda_3) - 2)\phi_1 X + 2\phi X$. Así obtenemos

Lema 1.8.16. *Si $X \in \mathfrak{D}$ con $AX = \lambda X$, entonces*

$$\phi X = \phi_1 X \quad \textit{y} \quad 2\lambda_2\lambda_3 - \alpha(\lambda_2 + \lambda_3) = 0$$

o

$$\phi X = -\phi_1 X \quad \textit{y} \quad 2\lambda_2\lambda_3 - \alpha(\lambda_2 + \lambda_3) - 4 = 0.$$

Supongamos ahora que X satisface $\phi X = \phi_1 X$ entonces, la $\mathfrak{D}$-componente de la ecuación del Lema 1.8.10 con índice uno es $(2\lambda - \alpha)A\phi_1 X = (4 + \lambda\alpha)\phi_1 X$. Si $2\lambda - \alpha = 0$, entonces $0 = 4 + \lambda\alpha = 4 + \lambda^2$, lo cual es imposible. Así, obtenemos

Lema 1.8.17. *Si $X \in \mathfrak{D}$ con $AX = \lambda X$ y $\phi X = \phi_1 X$, entonces*

$$2\lambda - \alpha \neq 0 \quad \textit{y} \quad A\phi_1 X = \frac{4 + \lambda\alpha}{2\lambda - \alpha}\phi_1 X.$$

A partir del Lema 1.8.16 deducimos

$$A\phi_1 X = A\phi_2\phi_3 X = (\lambda_3)_2\phi_2\phi_3 X = \frac{\lambda(4+\beta_2\beta_3)+2(\beta_2-\beta_3)}{(4+\beta_2\beta_3)-2\lambda(\beta_2-\beta_3)}\phi_1 X$$

y

$$A\phi_1 X = -A\phi_3\phi_2 X = -(\lambda_2)_3\phi_3\phi_2 X = \frac{\lambda(4+\beta_2\beta_3)-2(\beta_2-\beta_3)}{(4+\beta_2\beta_3)+2\lambda(\beta_2-\beta_3)}\phi_1 X.$$

Comparando estas dos ecuaciones $4+\beta_2\beta_3 = 0$ o $\beta_2 = \beta_3$. Supongamos en primer lugar que $4+\beta_2\beta_3 = 0$. Entonces, por el Lema 1.8.14, $\alpha \neq 0$ y, β_2, β_3 son dos soluciones de la ecuación cuadrática $\alpha x^2 + 12x - 4\alpha = 0$. Si X satisface $\phi X = -\phi_1 X$ entonces, $\phi_2 X$ satisface $\phi\phi_2 X = \phi_1\phi_2 X$. Así, podemos elegir X de manera que $\phi X = \phi_1 X$. Del Lema 1.8.17 y la ecuación posterior derivamos

$$-\frac{1}{\lambda}\phi_1 X = A\phi_1 X = \frac{4+\lambda\alpha}{2\lambda-\alpha}\phi_1 X.$$

Por lo tanto, λ es una solución de la ecuación cuadrática $\alpha x^2 + 6x - \alpha = 0$. Se sigue que 2λ es una solución de $\alpha x^2 + 12x - 4\alpha = 0$ y debe coincidir por lo tanto con β_2 o con β_3, lo que contradice el Lema 1.8.15. Así, hemos probado

Lema 1.8.18. $\beta_2 = \beta_3 =: \beta$.

El Lema 1.8.14 implica que β es una solución de la ecuación cuadrática $x^2 - \alpha x - 2 = 0$. Sea $X \in \mathfrak{D}$ con $AX = \lambda X$. El Lema 1.8.16 muestra que $A\phi_1 X = \lambda\phi_1 X$. Así, los subespacios propios de $A|_{\mathfrak{D}}$ son ϕ_1-invariantes. Además, si X satisface $\phi X = \phi_1 X$ entonces, por el Lema 1.8.17, λ es también una solución de $x^2 - \alpha x - 2 = 0$. Por otro lado, del Lema 1.8.16 y 1.8.18 se sigue que $\lambda_2 = \lambda_3$. Pongamos $\mu := \lambda_2 = \lambda_3$. Por el Lema 1.8.16 μ satisface $\mu(\mu-\alpha) = 0$ y, así, $\mu \in \{0, \alpha\}$. Si $\lambda = \beta$ entonces el Lema 1.8.15 implica que λ es una solución de $x^2 - \mu x + 2 = 0$ lo cual es imposible para $\mu = 0$ y contradice $\lambda^2 - \alpha\lambda - 2 = 0$ para $\mu = \alpha$. Por lo tanto, λ y β son soluciones distintas de $x^2 - \alpha x - 2 = 0$, esto es,

$$\lambda, \beta \in \left\{\frac{1}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+8}\right)\right\}, \lambda \neq \beta.$$

Así, $\lambda\beta = -2$ y, usando de nuevo el Lema 1.8.15 se prueba que $\mu = 0$. Resumiendo

Lema 1.8.19. *$A|_{\mathfrak{D}}$ tiene exactamente dos valores propios distintos, λ y μ con idéntica multiplicidad $2m-2$ y los subespacios propios correspondientes T_λ y T_μ satisfacen*

$$T_\lambda \subset \{X | X \perp \mathbb{H}\xi, JX = J_1 X\},$$
$$T_\mu \subset \{X | X \perp \mathbb{H}\xi, JX = -J_1 X\}.$$

Tenemos que $\mu = 0$ y, además, que λ y β son las distintas soluciones de la ecuación $x^2 - \alpha x - 2 = 0$.

Las anteriores inclusiones son en realidad igualdades ya que son espacios vectoriales de la misma dimensión. Como en el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ deducimos de manera análoga que

$$\operatorname{grad} \alpha = \xi(\alpha)\xi \quad \text{y} \quad 0 = \xi(\alpha) g\big((A\phi + \phi A)X, Y\big).$$

Supongamos que $A\phi + \phi A = 0$ en algún punto $p \in M$. Entonces, en p, usaremos la ϕ_1-invarianza de T_λ para deducir $\lambda\phi X = A\phi X = -\phi A X = -\lambda\phi X$. Esto implica $\lambda = 0$, que es imposible por el Lema 1.8.19. Así, $A\phi + \phi A$ es no nulo y, por lo tanto, $\xi(\alpha) = 0$. Así, α es constante en M y, por el Lema 1.8.19, M tiene curvaturas principales constantes.

De $\lambda\beta = -2$ vemos que λ y β tienen diferente signo. Podemos elegir el normal unitario N de manera que β sea positivo, por ejemplo $\beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ con $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$. Usamos el Lema 1.8.19 para calcular $\alpha = \sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)$ y $\lambda = -2/\beta = -\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}r)$. Con esto acabamos de demostrar el siguiente

Teorema 1.8.20. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Supongamos que $A\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$, $A\xi = \alpha\xi$ y $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Sea $J_1 \in \mathfrak{J}$ la estructura casi hermítica tal que $JN = J_1 N$. Entonces, M tiene tres (si $r = \pi/2\sqrt{8}$) o cuatro (en otro caso) curvaturas principales constantes distintas*

$$\alpha = \sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r),\ \beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r),\ \lambda = -\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}r),\ \mu = 0$$

con $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$. Las correspondientes multiplicidades son

$$m(\alpha) = 1,\ m(\beta) = 2,\ m(\lambda) = 2m - 2 = m(\mu)$$

y, para los correspondientes subespacios propios tenemos

$$\begin{aligned}
T_\alpha &= \mathbb{R}\xi = \mathbb{R}JN,\\
T_\beta &= \mathbb{C}^\perp\xi = \mathbb{C}^\perp N,\\
T_\lambda &= \{X \mid X \perp \mathbb{H}\xi,\ JX = J_1X\},\\
T_\mu &= \{X \mid X \perp \mathbb{H}\xi,\ JX = -J_1X\}.
\end{aligned}$$

Para $p \in M$ denotemos por c_p la geodésica en $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ tal que $c_p(0) = p$ y $\dot{c}_p(0) = N_p$ y por F la aplicación diferenciable

$$F : M \to G_2(\mathbb{C}^{m+2}), p \mapsto c_p(r).$$

Geométricamente F es el desplazamiento de M a distancia r en la dirección del vector normal N. Para cada $p \in M$ la diferencial dF_p de F en p puede ser calculada por medio de campos de Jacobi de la siguiente forma

$$dF_p(X) = Z_X(r)$$

donde Z_X es el campo de Jacobi a lo largo de c_p tal que $Z_X(0) = X$ y $Z'_X(0) = -AX$. Usando la descripción explícita del operador de Jacobi para el caso en que $JN \subset \mathfrak{J}N$ dada al final del apartado 1.7 de este mismo capítulo y del operador de Weingarten de M dado en el Teorema 1.8.20 anterior tenemos que

$$Z_X(r) = \begin{cases} \big(\cos(\sqrt{8}r) - \frac{\alpha}{\sqrt{8}}\sin(\sqrt{8}r)\big)E_X(r), & \text{si } X \in T_\alpha \\ \big(\cos(\sqrt{2}r) - \frac{k}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}r)\big)E_X(r), & \text{si } X \in T_k \text{ y } k \in \{\alpha, \lambda\} \\ E_X(r), & \text{si } X \in T_\mu, \end{cases}$$

donde E_X denota el campo paralelo a lo largo de c_p tal que $E_X(0) = X$. Así, el núcleo de dF es $T_\alpha \oplus T_\beta = \mathbb{R}JN \oplus \mathbb{C}^\perp N = \mathfrak{J}N$. Por lo tanto, F tiene rango constante igual a $\dim(T_\lambda \oplus T_\mu) = 4m - 4$ y, localmente es una sumersión de una subvariedad B de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Como $T_\lambda \oplus T_\mu = (\mathbb{H}N)^\perp$ es cuaterniónico, B es una hipersuperficie cuaterniónica de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ y, por lo tanto, totalmente geodésica. Las únicas hipersuperficies cuaterniónicas de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ son los abiertos de una $G_2(\mathbb{C}^{m+1})$ totalmente geodésica de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Con esto tenemos que M es un abierto de un tubo de radio r sobre una $G_2(\mathbb{C}^{m+1})$ totalmente geodésica de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ con lo que hemos probado el siguiente

Teorema 1.8.21. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ tal que $A\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$, $A\xi = \alpha\xi$, y $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Entonces M es un abierto de un tubo sobre una $G_2(\mathbb{C}^{m+1})$ totalmente geodésica de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$.*

Si $\xi \in \mathfrak{D}$, el vector unitario N es un vector tangente singular de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ de tipo $JN \perp \mathfrak{J}N$ (véase [4]) y los vectores $\xi, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \phi\xi_1, \phi\xi_2, \phi\xi_3$ son ortonormales.

Poniendo $X = \xi_\nu$ en el Lema 1.8.10 resulta $0 = (2\beta_\nu - \alpha)A\phi\xi_\nu - (4 + \alpha\beta_\nu)\phi\xi_\nu$. Si $2\beta_\nu = \alpha$ entonces $0 = 4 + \alpha\beta_\nu = 4 + 2\beta_\nu^2$, lo que es imposible. Por lo tanto, $2\beta_\nu - \alpha \neq 0$. Insertando $X = \xi$ en el Lema 1.8.10

$$\begin{aligned} 0 = {} & (2\,\alpha - \beta_\nu)A\phi_\nu\xi - (4 + \alpha\beta_\nu)\phi_\nu\xi - (\beta_\nu - \beta_{\nu+1})q_{\nu+2}(\xi)\xi_{\nu+1} \\ & + (\beta_\nu - \beta_{\nu+2})q_{\nu+1}(\xi)\xi_{\nu+2}. \end{aligned}$$

Como $\phi_\nu\xi = \phi\xi_\nu$ es perpendicular a $\xi_{\nu+1}$ y $\xi_{\nu+2}$ podemos concluir

Lema 1.8.22.

$$A\phi\xi_\nu = \gamma_\nu\phi\xi_\nu \text{ con } \gamma_\nu = \frac{4 + \alpha\beta_\nu}{2\beta_\nu - \alpha} = \frac{4 + \alpha\beta_\nu}{2\alpha - \beta_\nu}.$$

En particular, $4 + \alpha\beta_\nu = 0$ o $\alpha = \beta_\nu$

De nuevo, a partir del Lema 1.8.10, para $X = \phi_\mu\xi = \phi\xi_\mu$

$$\begin{aligned} 0 = {} & (2\gamma_\mu - \beta_\nu)A\phi_\nu\phi_\mu\xi - (2 + \beta_\nu\gamma_\mu)\phi_\nu\phi_\mu\xi \\ & - (\beta_\nu - \beta_{\nu+1})q_{\nu+2}(\phi_\mu\xi)\xi_{\nu+1} + (\beta_\nu - \beta_{\nu+2})q_{\nu+1}(\phi_\mu\xi)\xi_{\nu+2} \\ & + 2\delta_{\nu,\mu}\xi - 2\delta_{\nu+2,\mu}\phi\xi_{\nu+1} + 2\delta_{\nu+1,\mu}\phi\xi_{\nu+2}. \end{aligned}$$

Poniendo $\nu = \mu$ tenemos que $0 = (2\gamma_\nu - \beta_\nu)A\xi - (4 + \beta_\nu\gamma_\nu)\xi$. Si $\beta_\nu = 2\gamma_\nu$ entonces $0 = 4 + \beta_\nu\gamma_\nu = 4 + 2\gamma_\nu^2$, lo cual es imposible. Así, comparando con $A\xi = \alpha\xi$ obtenemos

Lema 1.8.23. *Para cada ν*

$$\alpha = \frac{4+\beta_\nu\gamma_\nu}{2\gamma_\nu - \beta_\nu}.$$

Tomando como índice $\mu = \nu+1$ obtenemos $0 = (2\gamma_{\nu+1} - \beta_\nu)A\phi_{\nu+2}\xi - \beta_\nu\gamma_{\nu+1}\phi_{\nu+2}\xi$. Si $\beta_\nu = 2\gamma_{\nu+1}$ entonces $0 = \beta_\nu\gamma_{\nu+1}$ y, así, $\beta_\nu = 0$. El Lema 1.8.22 y $\beta_\nu = 0$ implican $\alpha = -\alpha/2$ y, así, $\alpha = 0$ lo que contradice $\alpha = 2/\gamma_\nu \neq 0$ en el Lema 1.8.23. Así tenemos que $2\gamma_{\nu+1} - \beta_\nu \neq 0$ y, por lo tanto,

Lema 1.8.24. *Para cada ν*

$$\gamma_{\nu+2} = \frac{\beta_\nu\gamma_{\nu+1}}{2\gamma_{\nu+1} - \beta_\nu}.$$

Usando sucesivamente el Lema 1.8.22, el Lema 1.8.24 y de nuevo el Lema 1.8.22

$$\frac{4+\alpha\beta_{\nu+2}}{2\beta_{\nu+2} - \alpha} = \gamma_{\nu+2} = \frac{\beta_\nu\gamma_{\nu+1}}{2\gamma_{\nu+1} - \beta_\nu} = \frac{4+\beta_\nu + \alpha\beta_\nu\beta_{\nu+1}}{8+\alpha\beta_\nu + 2\alpha\beta_{\nu+1} - 2\beta_\nu\beta_{\nu+1}}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - 8)\beta_\nu(\beta_{\nu+1} + \beta_{\nu+2}) &+ 2\alpha^2\beta_{\nu+1}\beta_{\nu+2} \\ &= 4\alpha\beta_\nu\beta_{\nu+1}\beta_{\nu+2} - 8\alpha(\beta_\nu + \beta_{\nu+1} + \beta_{\nu+2}) - 32.\end{aligned}$$

Restándole la ecuación que se obtiene reemplazando ν por $\nu+1$ obtenemos $0 = (\alpha^2 + 8)(\beta_{\nu+1} - \beta_\nu)\beta_{\nu+2}$. Como antes, $\beta_{\nu+2} = 0$ conduce a contradicción. Por lo tanto, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ deben de ser iguales, pongamos por ejmplo $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 =: \beta$. El Lema 1.8.22 muestra también que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ son iguales, pongamos $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 := \gamma$. Del Lema 1.8.24 obtenemos entonces $\gamma(\beta - \gamma) = 0$. Supongamos en primer lugar que $\beta = \gamma$. Por el Lema 1.8.22 tenemos que, o bien $\alpha = \beta$, o bien $4 + \alpha\beta = 0$. En el primer caso resulta $\alpha = \beta = \gamma$, lo que contradice el Lema 1.8.23. En el segundo caso $\beta = \gamma = 0$ del Lema 1.8.22, lo que contradice $4 + \alpha\beta = 0$. Por lo tanto, $\beta \neq \gamma$ y, así, $\gamma = 0$. Así pues, tenemos

Lema 1.8.25. *Para cada ν, $A\xi_\nu = \beta\xi_\nu$ y $A\phi\xi_\nu = 0$, donde β queda determinada mediante* $4 + \alpha\beta = 0$.

Ahora, sea X un vector principal de M ortogonal a $\mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{J}\xi \oplus \mathfrak{J}J\xi$, así $AX = \lambda X$. El hecho de que X sea ortogonal a $\mathbb{R}\xi \oplus \mathfrak{J}\xi \oplus \mathfrak{J}J\xi$ significa que $X \in (\mathbb{HC}\xi)^\perp$. Entonces, el Lema 1.8.10 implica $0 = (2\lambda - \beta)A\phi_\nu X - (2 + \beta\lambda)\phi_\nu X$. Si $\beta = 2\lambda$ entonces $0 = 2 + \beta\lambda = 2 + 2\lambda^2$, lo cual es imposible. Así, $2\lambda - \beta \neq 0$ y $A|_{\mathfrak{J}X} = \mu I_{\mathfrak{J}X}$ con $\mu = \frac{2+\beta\lambda}{2\lambda-\beta}$. Reemplazando X por $\phi_1 X$ resulta $A|_{\mathfrak{J}\phi_1 X} = \frac{2+\beta\mu}{2\mu-\beta} I_{\mathfrak{J}\phi_1 X}$. Como $\phi_2 X \in \mathfrak{J}X \cap \mathfrak{J}\phi_1 X$, obtenemos $\mu = \frac{2+\beta\mu}{2\mu-\beta}$ y, como $X \in \mathfrak{J}\phi_1 X$ esto implica $\mu = \lambda$ y, así, $\lambda = \frac{2+\beta\mu}{2\mu-\beta}$. Así, tenemos

Lema 1.8.26. *$A|_{(\mathbb{HC}\xi)^\perp}$ tiene, al menos, dos valores propios distintos, cada uno de los cuales es una solución de $x^2 - \beta x - 1 = 0$. Los correspondientes subespacios propios son cuaterniónicos.*

Para X como antes deducimos del Lema 1.8.12 la ecuación $0 = (2\lambda - \alpha)A\phi X - (2 + \alpha\lambda)\phi X$. Fácilmente se ve que $2\lambda - \alpha \neq 0$, por lo que $A\phi X = \mu\phi X$ con $\mu = \frac{2+\alpha\lambda}{2\lambda-\alpha}$. Por el Lema 1.8.26 sabemos que $\mu^2 - \beta\mu - 1 = 0$. Si $\mu = \lambda$ entonces la fórmula anterior implica $\lambda^2 - \alpha\lambda - 1 = 0$ y, así, $\lambda \neq 0$ y $\alpha = \beta$, lo que contradice $0 = 4 + \alpha\beta$ en Lema 1.8.25. Por lo tanto, ha de ser $\mu \neq \lambda$ y, junto con el Lema 1.8.26 concluimos

Lema 1.8.27. *$A|_{(\mathbb{H}\mathbb{C}\xi)^\perp}$ tiene dos valores propios distintos λ y μ que son las soluciones de $x^2 - \beta x - 1 = 0$. Los subespacios propios correspondientes T_λ y T_μ verifican*

$$\mathfrak{J}T_\lambda = T_\lambda,\ \mathfrak{J}T_\mu = T_\mu,\ JT_\lambda = T_\mu.$$

En particular, la dimensión cuaterniónica m de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ es par, $m = 2n$.

Como $\xi \in \mathfrak{D}$ sabemos de la demostración del Lema 1.8.12 que

$$\operatorname{grad}\alpha = \xi(\alpha)\xi.$$

Así, para el Hessiano de α obtenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{hess}^\alpha(X,Y) &= g(\nabla_X \operatorname{grad}\alpha, Y) = g\big(\nabla_X \xi(\alpha)\xi, Y\big) \\
&= X(\xi(\alpha))\eta(Y) + \xi(\alpha)g(\nabla_X\xi, Y) \\
&= X(\xi(\alpha))\eta(Y) + \xi(\alpha)g(\phi AX, Y).
\end{aligned}$$

Por simetría del Hessiano esto implica

$$0 = X(\xi(\alpha))\eta(Y) - Y(\xi(\alpha))\eta(X) + \xi(\alpha)g\big((A\phi + \phi A)X, Y\big).$$

Para $X = \xi$ tenemos $Y(\xi(\alpha)) = \xi\big(\xi(\alpha)\big)\eta(Y)$. Insertando ésta y la correspondiente ecuación para X en la ecuación previa

$$0 = \xi(\alpha)g\big((A\phi + \phi A)X, Y\big).$$

Supongamos que $A\phi + \phi A$ se anula en algún punto p de M. Entonces, en p, para $X \in (\mathbb{H}\mathbb{C}\xi)^\perp$ con $AX = \lambda X$ obtenemos $A\phi X = -\lambda\phi X$. Pero, como λ es una solución de $x^2 - \beta x - 1 = 0$ y $\beta \neq 0$, el número $-\lambda$ no puede ser una solución de esta ecuación, lo que contradice el Lema 1.8.27. Por lo tanto, ha de ser $A\phi + \phi A \neq 0$ en cada punto de M. Esto produce $\xi(\alpha) = 0$ y, así, $\operatorname{grad}\alpha = 0$, esto es, α es constante sobre M. Se sigue del Lema 1.8.25 y Lema 1.8.27 que todas las curvaturas principales de M son constantes. Como $0 = 4 + \alpha\beta$ tenemos que $\beta \neq 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\beta > 0$. Entonces, existe $r \in (0, \pi/4)$ tal que $\beta = \cot(2r)$. Entonces, $0 = 4 + \alpha\beta$ da $\alpha = -2\tan(2r)$. Las soluciones de $x^2 - \beta x - 1 = 0$ son entonces $\lambda = \cot(r)$ y $\mu = -\tan(r)$. Con todo esto, hemos demostrado el siguiente

Teorema 1.8.28. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Supongamos $A\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$, $A\xi = \alpha\xi$ y $\xi \in \mathfrak{D}$. Entonces, la dimensión cuaterniónica m de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ es par, $m = 2n$ y M tiene cinco curvaturas principales constantes distintas*

$$\alpha = -2\tan(2r), \beta = 2\cot(2r), \gamma = 0, \lambda = \cot(r), \mu = -\tan(r)$$

con $r \in (0, \pi/4)$. Las correspondientes multiplicidades son

$$m(\alpha) = 1, m(\beta) = 3 = m(\gamma), m(\lambda) = 4m - 4 = m(\mu)$$

y los correspondientes subespacios propios

$$T_\alpha = \mathbb{R}\xi,\ T_\beta = \mathfrak{J}J\xi,\ T_\gamma = \mathfrak{J}\xi,\ T_\lambda, T_\mu$$

donde

$$T_\lambda \oplus T_\mu = (\mathbb{H}\mathbb{C}\xi)^\perp,\ \mathfrak{J}T_\lambda = T_\lambda,\ \mathfrak{J}T_\mu = T_\mu,\ JT_\lambda = T_\mu.$$

Ahora definimos c_p, F, Z_X y E_X como en el caso anterior. Usando la descripción explícita del operador de Jacobi para el caso en que $JN \perp \mathfrak{J}N$ dada al final del apartado 1.7 de este mismo capítulo y del operador de Weingarten de M dado en el Teorema 1.8.28 anterior tenemos que

$$Z_X(r) = \begin{cases} \big(\cos(2r) - \frac{k}{2}\sin(2r)\big)E_X(r), & \text{si } X \in T_k \text{ y } k \in \{\alpha, \beta\} \\ \big(\cos(r) - k\sin(r)\big)E_X(r), & \text{si } X \in T_k \text{ y } k \in \{\lambda, \mu\} \\ E_X(r), & \text{si } X \in T_\gamma. \end{cases}$$

Así, el núcleo de dF es $T_\beta \oplus T_\lambda = \mathfrak{J}N \oplus T_\lambda$ y F tiene rango constante igual a $\dim(T_\alpha \oplus T_\gamma \oplus T_\mu) = 4n$. Por lo tanto, localmente, F es una sumersión sobre una subvariedad 4n-dimensional B de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Además, el espacio tangente de B en $F(p)$ se obtiene trasladando paralelamente $(T_\alpha \oplus T_\gamma \oplus T_\mu)(p) = (\mathbb{H}\xi \oplus T_\mu)(p)$ que es un subespacio cuaterniónico y real de $T_pG_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Como J y $\mathfrak{J}$ son paralelos a lo largo de c_p, también $T_{F(p)}B$ es un subespacio real y cuaterniónico de $T_{F(p)}G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Con esto tenemos que B es una subvariedad real y cuaterniónica de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Como B es cuaterniónica, es totalmente geodésica en $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ [1]. Las únicas subvariedades quaterniónicas totalmente geodésicas de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m = 2n \geq 4$, de la mitad de dimensión son $G_2(\mathbb{C}^{n+2})$ y $\mathbb{H}P^n$ [4]. Pero solamente $\mathbb{H}P^n$ está embebido en $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ como subvariedad real. Así concluimos que B es un abierto de un $\mathbb{H}P^n$ totalmente geodésico en $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. La rigidez de las subvariedades totalmente geodésicas finalmente implica que M es un abierto de un tubo de radio r sobre un $\mathbb{H}P^n$ totalmente geodésico en $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Tenemos probado entonces el siguiente

Teorema 1.8.29. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ tal que $A\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$, $A\xi = \alpha\xi$ y $\xi \in \mathfrak{D}$. Entonces, $m = 2n$ y M es un abierto de un tubo sobre un $\mathbb{H}P^n$ totalmente geodésico de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$.*

Para finalizar, tenemos que, a partir de los Teoremas 1.8.21, 1.8.29 y la Proposición 1.8.13 queda demostrado el siguiente

Teorema 1.8.30. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Entonces, $A\xi = \alpha\xi$ y $A\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$ si, y sólo si,*

(A) *M es un abierto de un tubo sobre una totalmente geodésica $G_2(\mathbb{C}^{m+1})$ de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, o*

(B) *m es par, $m = 2n$, y M es un abierto de un tubo sobre un totalmente geodésico $\mathbb{H}P^n$ en $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$.*

Capítulo 2

Respecto al operador de Jacobi estructural R_ξ

Sea $(\bar{M}, \bar{g})$ una variedad riemanniana. Un campo de vectores U a lo largo de una geodésica γ en una variedad riemanniana $\bar{M}$ se dice un *campo de Jacobi* si satisface la siguiente ecuación diferencial

$$\overline{\nabla}^2_{\dot{\gamma}} U + \bar{R}(U, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0$$

donde $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}$ y $\bar{R}$ denotan, respectivamente, la derivada covariante del campo de vectores U a lo largo de la curva γ en $\bar{M}$ y el tensor de curvatura de la variedad riemanniana $(\bar{M}, \bar{g})$. Esta ecuación se llama ecuación de Jacobi.

Para cada $X \in T\bar{M}$, definimos el operador de Jacobi asociado a dicho vector X como

$$\bar{R}_X(Y) = \bar{R}(Y, X)X$$

para $Y \in T\bar{M}$ que resulta ser un endomorfismo autoadjunto del fibrado tangente $T\bar{M}$ de $\bar{M}$, es decir, el operador de Jacobi satisface $\bar{R}_X \in \operatorname{End} T\bar{M}$ y es simétrico en el sentido de que $\bar{g}(\bar{R}_X(Y), Z) = \bar{g}(\bar{R}_X(Z), Y)$ para todo $X, Y \in T\bar{M}$.

El campo de vectores estructural ξ de una hipersuperficie real M de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ lo llamaremos campo de vectores Reeb. Si este campo de vectores es invariante por el endomorfismo de Weingarten diremos que M es una hipersuperficie Hopf. En este caso, las curvas integrales del campo de vectores ξ son geodésicas (véase [7]). Además, el flujo generado por las curvas integrales del campo de vectores estructural ξ para hipersuperficies Hopf de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ se llama flujo Reeb geodésico.

A partir de la expresión (1.3) del tensor de curvatura R de una hipersuperficie real M de

$G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ se obtiene el operador de Jacobi estructural

$$\begin{aligned} R_\xi(X) &= R(X,\xi)\xi \\ &= X - \eta(X)\xi - \sum_{\nu=1}^{3}\{\eta_\nu(X)\xi_\nu - \eta(X)\eta_\nu(\xi)\xi_\nu \\ &\quad +3g(\phi_\nu X,\xi)\phi_\nu\xi + \eta_\nu(\xi)\phi_\nu\phi X\} \\ &\quad +\alpha AX - \eta(AX)A\xi \end{aligned}$$

donde α denota $g(A\xi,\xi)$ y X un campo de vectores tangente a M.

2.1. Operador de Jacobi estructural conmutativo

Brozos-Vázquez y Gilkey [8] probaron que para una variedad riemanniana $(\bar{M},\bar{g})$ de dimensión $m \geq 3$, si $\bar{R}_X\bar{R}_Y = \bar{R}_Y\bar{R}_X$ para todo $X,Y \in T\bar{M}$ entonces, la variedad es llana y, si ocurre lo mismo para X,Y ortogonales entonces, la variedad tiene curvatura seccional constante. Lo que deducimos entonces de aquí es que no existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ tales que cualesquiera dos operadores de Jacobi conmuten. Lo que vamos a estudiar aquí es una condición más débil. Diremos que una hipersuperficie M de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ tiene operador de Jacobi estructural conmutativo si este operador conmuta con cualquier otro operador de Jacobi definido sobre M, esto es, $R_\xi R_X = R_X R_\xi$ para todo $X \in TM$. Así, obtendremos el siguiente

Teorema 2.1.1. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf y que tengan operador de Jacobi estructural conmutativo si, o bien la componente en $\mathfrak{D}$ o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ es A-invariante.*

En primer lugar, empezaremos demostrando que, bajo nuestras hipótesis, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.

Antes de empezar daremos un lema que será utilizado a menudo a lo largo de esta tesis. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario.

Lema 2.1.2. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, $\alpha = g(A\xi,\xi)$ la curvatura principal de ξ y tal que $\eta(X_0)\eta(\xi_1) \neq 0$. Entonces, $\alpha \neq 0$ y*

$$A\phi X_0 = \frac{\alpha^2 + 4\eta^2(X_0)}{\alpha}\phi X_0 \tag{2.1}$$

Demostración. Como

$$\begin{aligned} 0 &= \phi\xi \\ &= \phi(\eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1) \\ &= \eta(X_0)\phi X_0 + \eta(\xi_1)\phi_1(\eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1) \end{aligned}$$

entonces

$$\phi X_0 = -\eta(\xi_1)\phi_1 X_0. \tag{2.2}$$

Por la Proposición 1.8.11, usando que por hipótesis $AX_0 = \alpha X_0$, resulta

$$\alpha A\phi X_0 + \alpha^2\phi X_0 - 2\alpha A\phi X_0 + 2\phi X_0 = -2\eta_1(\xi)\phi_1 X_0 + 4\eta^2(X_0)\eta_1(\xi)\phi_1 X_0. \tag{2.3}$$

Poniendo $\alpha = 0$ en (2.3) llegamos a contradicción pues $\eta(X_0)\eta(\xi_1) \neq 0$, luego $\alpha \neq 0$. Teniendo en cuenta entonces (2.2) y (2.3) resulta

$$A\phi X_0 = \frac{\alpha^2 + 4\eta^2(X_0)}{\alpha}\phi X_0.$$

□

Observación 2.1.3. *A partir de este resultado, sin más que tener en cuenta (2.2), se deduce que*

$$A\phi_1 X_0 = \frac{\alpha^2 + 4\eta^2(X_0)}{\alpha}\phi_1 X_0. \tag{2.4}$$

Lema 2.1.4. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf y tal que, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^\perp$-componente de ξ sea A-invariante. Si $R_\xi R_X = R_X R_\xi$ para todo $X \in TM$ entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario. Si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ fuesen cero, ya habríamos terminado. Supongamos pues que ambos son no nulos. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 anterior tenemos que $\alpha \neq 0$.

Definamos $R_{X,Y} = \frac{1}{2}(R_{X+Y} - R_X - R_Y)$ para todo $X, Y \in TM$. Por hipótesis estos operadores conmutan con R_ξ. Además, $R_{X,Y}(Y) = -\frac{1}{2}R_Y(X)$. Así pues,

$$0 = R_{X,\xi}(R_\xi(\xi)) = -\frac{1}{2}R_\xi^2(X)$$

para todo $X \in TM$. Por otro lado, al ser R_ξ autoadjunto, $R_\xi^2 = 0$ implica que $R_\xi = 0$ y, entonces,

$$\begin{aligned}0 = R_\xi(X) = R(X,\xi)\xi = X - \eta(X)\xi - \sum_{\nu=1}^{3}\{\eta_\nu(X)\xi_\nu - \eta(X)\eta_\nu(\xi)\xi_\nu + 3g(\phi_\nu X, \xi)\phi_\nu\xi \\ + \eta_\nu(\xi)\phi_\nu\phi X\} + \alpha AX - \alpha^2\eta(X)\xi\end{aligned}$$

para todo $X \in TM$. Poniendo $X = \xi_1$

$$\begin{aligned}0 = R_\xi(\xi_1) = \xi_1 - \eta(\xi_1)\xi - \sum_{\nu=1}^{3}\{\eta_\nu(\xi_1)\xi_\nu - \eta(\xi_1)\eta_\nu(\xi)\xi_\nu + 3g(\phi_\nu\xi_1, \xi)\phi_\nu\xi \\ + \eta_\nu(\xi)\phi_\nu\phi\xi_1\} + \alpha A\xi_1 - \alpha^2\eta(\xi_1)\xi\end{aligned}$$

y, multiplicando escalarmente por $X_0 \in \mathfrak{D}$

$$0 = g(R_\xi(\xi_1), X_0) = -\eta(\xi_1)\eta(X_0) + \eta_1(\xi)\eta(X_0) - \alpha^2\eta(\xi_1)\eta(X_0) = -\alpha^2\eta(\xi_1)\eta(X_0)$$

luego, llegamos a contradicción. □

Veamos ahora que, si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces, M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante.

Lema 2.1.5. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, $R_\xi R_X = R_X R_\xi$ para todo $X \in TM$ y $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. Como $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ podemos suponer que $\xi = \xi_1$. Así,

$$\begin{aligned} 0 = R_\xi(\xi_i) &= \xi_i - \eta(\xi_i)\xi_i - \xi_i + \eta(\xi_i)\xi_i - 3\sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu\xi_i, \xi_i)\phi_\nu\xi_i \\ &\quad -\phi_1\phi\xi_i + \alpha A\xi_i - \alpha^2\eta(\xi_i)\xi_1. \end{aligned}$$

Si ahora multiplicamos escalarmente por $X \in \mathfrak{D}$

$$0 = g(R_\xi(\xi_i), X) = \alpha g(A\xi_i, X)$$

por lo que para $\alpha \neq 0$ hemos terminado. Si $\alpha = 0$, considerando

$$0 = R_\xi(\xi_i) = -3\sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu\xi_i, \xi_1)\phi_\nu\xi_1 - \phi_1\phi\xi_i = -3\eta_3(\xi_i)\xi_3 + 3\eta_2(\xi_i)\xi_2 - \phi_1\phi\xi_i$$

resulta que, multiplicando escalarmente por ξ_2, $0 = 2\eta_i(\xi_2)$ por lo que para $i = 2$ tendríamos contradicción. $\square$

Para el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ la demostración general se encuentra en [18]. Nosotros hemos conseguido una demostración más sencilla que presentamos a continuación.

Lema 2.1.6. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf y tal que $\xi \in \mathfrak{D}$. Entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{D}_0 = \{X \in \mathfrak{D} | X \perp \xi, \phi_1\xi, \phi_2\xi, \phi_3\xi\}$. El espacio tangente en $p \in M$ queda descompuesto entonces como

$$T_pM = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^\perp = <\xi> \oplus <\phi_1\xi, \phi_2\xi, \phi_3\xi> \oplus \mathfrak{D}_0 \oplus \mathfrak{D}^\perp.$$

Para $X = \xi \in \mathfrak{D}$ resulta

$$g(A\xi, \xi_\mu) = \alpha g(\xi, \xi_\mu) = 0 \text{ para todo } \mu = 1, 2, 3.$$

Para todo $X \in <\phi_1\xi, \phi_2\xi, \phi_3\xi>$, como $\eta(\xi_\nu) = 0$ para $\nu = 1, 2, 3$, resulta que $g(\nabla_{\xi_\mu}\xi, \xi_\nu) = -g(\xi, \nabla_{\xi_\mu}\xi_\nu)$ y, así

$$\begin{aligned} g(A\phi_\nu\xi, \xi_\mu) &= g(\phi\xi_\nu, A\xi_\mu) \\ &= -g(\xi_\nu, \phi A\xi_\mu) \\ &= -g(\xi_\nu, \nabla_{\xi_\mu}\xi) \\ &= g(\nabla_{\xi_\mu}\xi_\nu, \xi) \\ &= g(q_{\nu+2}(\xi_\mu)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(\xi_\mu)\xi_{\nu+2} + \phi_\nu A\xi_\mu, \xi) \\ &= g(\phi_\nu A\xi_\mu, \xi) \\ &= -g(A\phi_\nu\xi, \xi_\mu) \end{aligned}$$

con lo que
$$g(A\phi_\nu\xi,\xi_\mu)=0$$
para $\mu,\nu=1,2,3$.

Ahora sólo nos queda demostrar que $g(AX_0,\xi_i)=0$ para todo $X_0\in\mathfrak{D}_0$. En este caso, como $g(\phi_\nu\phi\xi_1,\xi_1)=0$ para $\nu=1,2,3$ y,
$$\phi_1^2(\phi X_0)=-\phi X_0+\eta_1(\phi X_0)\xi_1=-\phi X_0$$
implica
$$g(\phi_1\phi X_0,\nabla_{\xi_\mu}\xi_1)=g(\phi_1\phi X_0,\phi_1 A\xi_\mu)=g(\phi X_0,A\xi_\mu),$$
resulta que, teniendo en cuenta (3.4) da
$$\begin{aligned} g\big((\nabla_{\xi_\mu}R_{\xi_1})X_0,\xi\big) &= -g(A\xi_\mu,\phi X_0)+g(\phi_1\phi X_0,\nabla_{\xi_\mu}\xi_1)-g(\phi A\xi_\mu,X_0)\\ &\quad +g(A\xi_1,\xi_1)g\big((\nabla_{\xi_\mu}A)X_0,\xi\big)-g(AX_0,\xi_1)g(\nabla_{\xi_\mu}A\xi_1,\xi)\\ &= -g(\phi A\xi_\mu,X_0)\\ &\quad +g(A\xi_1,\xi_1)g\big((\nabla_{\xi_\mu}A)X_0,\xi\big)\\ &\quad -g(AX_0,\xi_1)g(\nabla_{\xi_\mu}A\xi_1,\xi). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por otro lado, como $\phi_1^2A\xi_\mu=-A\xi_\mu+\eta_1(A\xi_\mu)\xi_1$ implica
$$g(\phi_1\nabla_{\xi_\mu}\xi_1,X_0)=g(\phi_1^2A\xi_\mu,X_0)=-g(A\xi_\mu,X_0),$$
$g(\phi_1\phi\xi_2,X_0)=0$ y $g(\phi_1\phi\xi_3,X_0)=0$ lleva a
$$\begin{aligned} g(\phi_1\phi\nabla_{\xi_\mu}\xi_1,X_0) &= g(\phi_1\phi\phi_1A\xi_\mu,X_0)\\ &= -g(\phi\phi_1A\xi_\mu\phi_1X_0)\\ &= -g(\phi_1\phi A\xi_\mu,\phi_1X_0)\\ &= -g(\phi A\xi_\mu,X_0)\\ &= g(A\xi_\mu,X_0) \end{aligned}$$

y,
$$g(\phi_1A\xi_\mu,\xi)=g(\phi A\xi_\mu,\xi_1)=g(\nabla_{\xi_\mu}\xi,\xi_1)=-g(\xi,\nabla_{\xi_\mu}\xi_1)=-g(\xi,\phi_1A\xi_\mu)$$
implica $g(\phi_1A\xi_\mu,\xi)=0$ y, entonces, $g(\xi,\nabla_{\xi_\mu}\xi_1)=0$, tenemos que
$$\begin{aligned} g\big((\nabla_{\xi_\mu}R_{\xi_1})\xi,X_0\big) &= g(\phi_1\nabla_{\xi_\mu}\xi_1,X_0)+g(\phi_1\phi\nabla_{\xi_\mu}\xi_1,X_0)\\ &\quad +g(A\xi_1,\xi_1)g\big((\nabla_{\xi_\mu}A)\xi,X_0\big)\\ &\quad -g(A\xi_1,X_0)\Big(g\big((\nabla_{\xi_\mu}A)\xi,\xi_1\big)-\alpha g(\xi,\nabla_{\xi_\mu}\xi_1)\Big)\\ &= -g(A\xi_\mu,X_0)+g(A\xi_\mu,\phi X_0)\\ &\quad +g(A\xi_1,\xi_1)g\big((\nabla_{\xi_\mu}A)\xi,X_0\big)-g(A\xi_1,X_0)g\big((\nabla_{\xi_\mu}A)\xi,\xi_1\big). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Como $g\big((\nabla_{\xi_\mu}R_{\xi_1})X_0,\xi\big)=g\big((\nabla_{\xi_\mu}R_{\xi_1})\xi,X_0\big)$, teniendo en cuenta (2.5) y (2.6), como
$$g\big((\nabla_{\xi_\mu}A)X_0,\xi\big)=g\big((\nabla_{\xi_\mu}A)\xi,X_0\big)$$

y,

$$g\big((\nabla_{\xi_\mu}A)\xi_1,\xi\big)=g\big((\nabla_{\xi_\mu}A)\xi,\xi_1\big)$$

se obtiene que $g(A\xi_\mu,X_0)=0$. □

Ahora vamos a ver que ni las hipersuperficies de tipo A ni las de tipo B verifican $R_\xi R_X = R_X R_\xi$ para todo $X\in TM$.

En el caso de las hipersuperficies de tipo A, por el Teorema 1.8.20, la ecuación $0=R_\xi(\xi_2)$ queda

$$\begin{aligned}
0 &= -3\sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu\xi_2,\xi_1)\phi_\nu\xi_1-\phi_1\phi\xi_2+\alpha A\xi_2\\
&= -3g(\phi_3\xi_2,\xi_1)\phi_3\xi_1-\phi_1\phi\xi_2+\alpha A\xi_2\\
&= 3g(\xi_1,\xi_1)\xi_2-\phi_1\phi_2\xi_1+\alpha A\xi_2\\
&= 2\xi_2+\alpha A\xi_2\\
&= 2\xi_2+\alpha\beta\xi_2.
\end{aligned}$$

Si ahora multiplicamos escalarmente por ξ_2 tenemos que

$$0=\alpha\beta+2$$

donde $\alpha=\sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)$ y $\beta=\sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ para $r\in(0,\pi/\sqrt{8})$ pero,

$$\begin{aligned}
0 &= 2+\alpha\beta\\
&= [\sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)][\sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)]+2\\
&= 2[\cot(\sqrt{2}r)-\tan(\sqrt{2}r)]\cot(\sqrt{2}r)+2\\
&= 2\cot^2(\sqrt{2}r)-2+2
\end{aligned}$$

luego

$$0=\cot(\sqrt{2}r),$$

que nos lleva a contradicción.

En el caso de una hipersuperficie de tipo B, por el Teorema 1.8.28 la ecuación

$$0=R_\xi(\xi_1)$$

da lugar a

$$0=\alpha A\xi_1=\alpha\beta\xi_1$$

por lo que, o bien α, o bien β debería ser nulo pero, $\alpha=-2\tan(2r)$, que no se anula en $(0,\pi/4)$ y $\beta=2\cot(2r)$, que tampoco se anula en $(0,\pi/4)$.

2.2. $\mathfrak{D}^{\perp}$-paralelismo de R_ξ

Consideremos ahora la noción de operador de Jacobi estructural $\mathfrak{D}^{\perp}$-paralelo, es decir,

$$(\nabla_{\xi_i} R_\xi)X = 0,\ i = 1, 2, 3 \text{ para todo } X \in TM$$

que es más débil que la de operador de Jacobi estructural paralelo

$$(\nabla_X R_\xi)Y = 0,\ i = 1, 2, 3 \text{ para todo } X, Y \in TM$$

Demostraremos el siguiente

Teorema 2.2.1. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf con operador de Jacobi estructural $\mathfrak{D}^{\perp}$-paralelo si, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^{\perp}$-componente de ξ es A-invariante.*

A partir de la expresión de la derivada covariante de $R_\xi(Y)$

$$\nabla_X(R_\xi(Y)) = (\nabla_X R_\xi)Y + R_\xi(\nabla_X Y)$$

tenemos

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R_\xi)Y = & -g(\nabla_X\xi, Y)\xi - \eta(Y)\nabla_X\xi \\
& -\sum_{\nu=1}^{3}\Big\{\big[g(\nabla_X\xi_\nu, Y) - g(\nabla_X\xi, Y)\eta_\nu(\xi) - \eta(Y)g(\nabla_X\xi_\nu, \xi) \\
& -\eta(Y)g(\xi_\nu, \nabla_X\xi)\big]\xi_\nu + \big[\eta_\nu(Y) - \eta(Y)\eta_\nu(\xi)\big]\nabla_X\xi_\nu \\
& +3\big\{\big[g(\nabla_X\xi_\nu, \phi Y) + g(\xi_\nu, (\nabla_X\phi)Y)\big]\phi_\nu\xi + \eta_\nu(\phi Y)\big[(\nabla_X\phi_\nu)\xi + \phi_\nu\nabla_X\xi\big]\big\} \\
& +g(\nabla_X\xi_\nu, \xi)\phi_\nu\phi Y + g(\xi_\nu, \nabla_X\xi)\phi_\nu\phi Y + \eta_\nu(\xi)\big[(\nabla_X\phi_\nu)\phi Y + \phi_\nu(\nabla_X\phi)Y\big]\Big\} \\
& +g\big((\nabla_X A)\xi, \xi\big)AY + g(A\nabla_X\xi, \xi)AY + g(A\xi, \nabla_X\xi)AY + \eta(A\xi)(\nabla_X A)Y \\
& -g\big((\nabla_X A)Y, \xi\big)A\xi - g(AY, \nabla_X\xi)A\xi - \eta(AY)\big[(\nabla_X A)\xi + A\nabla_X\xi\big].
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1, se sigue que

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R_\xi)Y = & -g(\phi AX, Y)\xi - \eta(Y)\phi AX \\
& -\sum_{\nu=1}^{3}\Big\{g(q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2} + \phi_\nu AX, Y)\xi_\nu \\
& -g(\phi AX, Y)\eta_\nu(\xi)\xi_\nu - \eta(Y)g(q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2} + \phi_\nu AX, \xi)\xi_\nu \\
& -\eta(Y)g(\xi_\nu, \phi AX)\xi_\nu \\
& +\eta_\nu(Y)\big[q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2} + \phi_\nu AX\big] \\
& -\eta(Y)\eta_\nu(\xi)\big[q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2} + \phi_\nu AX\big] \\
& +3g(q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2} + \phi_\nu AX, \phi Y)\phi_\nu\xi \\
& +3g(\xi_\nu, \eta(Y)AX - g(AX, Y)\xi)\phi_\nu\xi \\
& +3\eta_\nu(\phi Y)\big[-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}\xi + q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}\xi + \eta_\nu(\xi)AX - g(AX, \xi)\xi_\nu\big] \\
& +3\eta_\nu(\phi Y)\phi_\nu\phi AX + g(q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2} + \phi_\nu AX, \xi)\phi_\nu\phi Y \\
& +g(\xi_\nu, \phi AX)\phi_\nu\phi Y \\
& +\eta_\nu(\xi)\big[-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}\xi + q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}\xi + \eta_\nu(\xi)AX \\
& -g(AX, \phi Y)\xi_\nu\big] + \eta_\nu(\xi)\big[\phi_\nu(\eta(Y)AX - g(AX, Y)\xi\big]\Big\} \\
& +g((\nabla_X A)\xi, \xi)AY + g(A\phi AX, \xi)AY + g(A\xi, \phi AX)AY \\
& +\eta(A\xi)(\nabla_X A)Y - g((\nabla_X A)Y, \xi)A\xi - g(AY, \phi AX)A\xi \\
& -\eta(AY)\big[(\nabla_X A)\xi + A\phi AX\big].
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{3}\Big[g(Y, q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2})\xi_\nu \\
&\quad +\eta_\nu(Y)(q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2})\Big] \\
&= \sum_{\nu=1}^{3}\Big[q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(Y)\xi_\nu - q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(Y)\xi_\nu \\
&\quad +\eta_\nu(Y)(q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2})\Big] \\
&= \sum_{\nu=1}^{3}\Big[q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(Y)\xi_\nu - q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(Y)\xi_\nu \\
&\quad +q_{\nu+2}(X)\eta_\nu(Y)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\eta_\nu(Y)\xi_{\nu+2}\Big] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{3}\Big[\eta(Y)g(\xi, q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2})\xi_\nu \\
&\quad +\eta(Y)\eta_\nu(\xi)(q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2})\Big] = 0,
\end{aligned}$$

$$\sum_{\nu=1}^{3}\Big[3g(-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}(Y)) + q_{\nu+2}(Y)\phi_{\nu+1}(Y),\xi)\phi_\nu\xi$$
$$+3g(\phi_\nu Y,\xi)(-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}\xi + q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}\xi)\Big] = 0$$

y

$$\sum_{\nu=1}^{3}\Big[g(\xi, q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2})\phi_\nu\phi Y$$
$$+\eta_\nu(\xi)(-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}\phi Y + q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}\phi Y)\Big] = 0.$$

Luego, la derivada del operador estructural de Jacobi queda

$$\begin{aligned}(\nabla_X R_\xi)Y = &-g(\phi AX, Y)\xi - \eta(Y)\phi AX\\
&-\sum_{\nu=1}^{3}\Big\{g(\phi_\nu AX, Y)\xi_\nu - 2\eta(Y)\eta_\nu(\phi AX)\xi_\nu + \eta_\nu(Y)\phi_\nu AX\\
&+3\Big[g(\phi_\nu AX, \phi Y)\phi_\nu\xi + \eta(Y)\eta_\nu(AX)\phi_\nu\xi\\
&\qquad -\eta_\nu(\phi Y)\eta(AX)\xi_\nu + \eta_\nu(\phi Y)\phi_\nu\phi AX\Big]\\
&+4\Big[\eta_\nu(\xi)\eta_\nu(\phi Y)AX - \eta_\nu(\xi)g(AX,Y)\phi_\nu\xi\Big] + 2\eta_\nu(\phi AX)\phi_\nu\phi Y\Big\}\\
&+\eta\big((\nabla_X A)\xi\big)AY + 2\eta(A\phi AX)AY + \eta(A\xi)(\nabla_X A)Y\\
&-\eta\big((\nabla_X A)Y\big)A\xi - g(AY,\phi AX)A\xi\\
&-\eta(AY)(\nabla_X A)\xi - \eta(AY)A\phi AX.\end{aligned}$$

Por último, si ahora suponemos que M es Hopf

$$\begin{aligned}(\nabla_X R_\xi)&Y\\
&= -g(\phi AX, Y)\xi - \eta(Y)\phi AX\\
&\quad -\sum_{\nu=1}^{3}\Big\{g(\phi_\nu AX, Y)\xi_\nu - 2\eta(Y)\eta_\nu(\phi AX)\xi_\nu + \eta_\nu(Y)\phi_\nu AX\\
&\qquad +3\Big[g(\phi_\nu AX, \phi Y)\phi_\nu\xi + \eta(Y)\eta_\nu(AX)\phi_\nu\xi\\
&\qquad +\eta_\nu(\phi Y)(\phi_\nu\phi AX - \alpha\eta(X)\xi_\nu)\Big]\\
&\qquad +4\eta_\nu(\xi)\Big[\eta_\nu(\phi Y)AX - g(AX,Y)\phi_\nu\xi\Big] + 2\eta_\nu(\phi AX)\phi_\nu\phi Y\Big\}\\
&\quad +\eta\big((\nabla_X A)\xi\big)AY + \alpha(\nabla_X A)Y - \alpha\big((\nabla_X A)Y\big)\xi - \alpha g(AY,\phi AX)\xi\\
&\quad -\alpha\eta(Y)(\nabla_X A)\xi - \alpha\eta(Y)A\phi AX.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Si ahora reemplazamos X por ξ_i, $i = 1, 2, 3$ e Y por X, suponiendo paralelismo en las direcciones de $\mathfrak{D}^\perp$ tenemos

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla_{\xi_i} R_\xi)X \\
&= -g(\phi A\xi_i, X)\xi - \eta(X)\phi A\xi_i \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{3} \Big\{ g(\phi_\nu A\xi_i, X)\xi_\nu - 2\eta(X)\eta_\nu(\phi A\xi_i)\xi_\nu + \eta_\nu(X)\phi_\nu A\xi_i \\
&\qquad +3\Big[g(\phi_\nu A\xi_i, \phi X)\phi_\nu\xi + \eta(X)\eta_\nu(A\xi_i)\phi_\nu\xi \\
&\qquad +\eta_\nu(\phi X)(\phi_\nu\phi A\xi_i - \alpha\eta(\xi_i)\xi_\nu)\Big] \\
&\qquad +4\eta_\nu(\xi)\Big[\eta_\nu(\phi X)A\xi_i - g(A\xi_i, X)\phi_\nu\xi\Big] + 2\eta_\nu(\phi A\xi_i)\phi_\nu\phi X\Big\} \\
&\quad +\eta\big((\nabla_{\xi_i} A)\xi\big)AX + \alpha(\nabla_{\xi_i} A)X - \alpha\big((\nabla_{\xi_i} A)X\big)\xi - \alpha g(AX, \phi A\xi_i)\xi \\
&\quad -\alpha\eta(X)(\nabla_{\xi_i} A)\xi - \alpha\eta(X)A\phi A\xi_i.
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

Poniendo $X = \xi$

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla_{\xi_i} R_\xi)\xi \\
&= -\phi A\xi_i - \alpha A\phi A\xi_i \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{3} \Big[-\eta_\nu(\phi A\xi_i)\xi_\nu \\
&\quad +\eta_\nu(\xi)\phi_\nu A\xi_i + 3\eta_\nu(A\xi_i)\phi_\nu\xi - 4\alpha\eta_\nu(\xi)\eta(\xi_i)\phi_\nu\xi\Big].
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Ahora vamos a demostrar que, bajo nuestras hipótesis, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$ o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$.

Lema 2.2.2. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, $(\nabla_{\xi_i} R_\xi)X = 0$, $i = 1, 2, 3$ para todo $X \in TM$ y tal que, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^\perp$-componente de ξ es A-invariante. Entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$.*

Demostración. Suponiendo $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ fuesen cero, ya habríamos terminado. Supongamos pues que ambos son no nulos. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 tenemos que $\alpha \neq 0$.

Suponiendo $i = 1$ en (2.9) resulta

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla_{\xi_1} R_\xi)\xi \\
&= -\phi A\xi_1 - \alpha A\phi A\xi_1 \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{3} \Big[-\eta_\nu(\phi A\xi_1)\xi_\nu \\
&\quad +3\eta_\nu(A\xi_1)\phi_\nu\xi - 4\alpha\eta_\nu(\xi)\eta(\xi_1)\phi_\nu\xi\Big]
\end{aligned}
$$

por lo que, al ser por hipótesis, $AX_0 = \alpha X_0$, resulta

$$0 = \alpha\eta(X_0)(\alpha A\phi_1 X_0 + 4\eta^2(X_0)\phi_1 X_0)$$

donde hemos tenido en cuenta que $\phi_1\xi = \eta(X_0)\phi_1 X_0$ y $\eta_\nu(\phi_1\xi) = 0$. Así pues, despejando

$$A\phi_1 X_0 = -\frac{4\eta^2(X_0)}{\alpha}\phi_1 X_0. \tag{2.10}$$

Por lo que, teniendo en cuenta (2.2) resulta

$$A\phi X_0 = -\frac{4\eta^2(X_0)}{\alpha}\phi X_0$$

que, junto con (2.1), da lugar a

$$\big(\alpha^2 + 8\eta^2(X_0)\big)\phi X_0 = 0$$

con lo que $\alpha^2 = -8\eta^2(X_0)$, que nos lleva a contradicción. □

Veamos ahora que si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante.

Lema 2.2.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, $(\nabla_{\xi_i}R_\xi)X = 0$, $i = 1,2,3$ para todo $X \in TM$ y $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. En primer lugar, como $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, podemos suponer $\xi = \xi_1$. Por lo tanto, sólo resta probar que $\eta_2(AX) = 0$ y $\eta_3(AX) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{D}$.

A partir de (2.7), multiplicando escalarmente por ξ

$$\begin{aligned} 0 &= g\big((\nabla_{\xi_i}R_\xi)X, \xi\big) \\ &= -g(\phi A\xi_i, X) - g(\phi_1 A\xi_i, X) \\ &\quad -\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(X)g(\phi_\nu A\xi_i, \xi) - 3\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi X)g(\phi_\nu\phi A\xi_i, \xi) \\ &\quad -2\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi A\xi_i)g(\phi_\nu\phi X, \xi) - \alpha g(AX, \phi A\xi_i). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Luego, junto con las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1 tenemos

$$0 = g(\phi A\xi_i, X) + g(\phi_1 A\xi_i, X) + \alpha g(AX, \phi A\xi_i)$$

para todo $X \in \mathfrak{D}$. Para $i = 2$, teniendo en cuenta las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1 resulta que

$$0 = 4g(\phi A\xi_2, X) - 2\alpha g(A\phi AX, \xi_2). \tag{2.12}$$

Por otro lado, poniendo $X = \xi_2$ y $X \in \mathfrak{D}$ en la Proposición 1.8.11

$$2g(A\phi AX, \xi_2) = \alpha g(A\phi X, \xi_2) + \alpha\eta_3(AX)$$

para todo $X \in \mathfrak{D}$. De aquí y de (2.12)

$$0 = (\alpha^2 + 4)g(A\phi X, \xi_2) + \alpha^2\eta_3(AX). \tag{2.13}$$

Cambiando X por ϕX

$$0 = -(\alpha^2 + 4)\eta_2(AX) + \alpha^2\eta_3(AX). \tag{2.14}$$

Poniendo $i = 3$, teniendo en cuenta las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1

$$0 = 4g(\phi A\xi_3, X) - 2\alpha g(A\phi AX, \xi_3). \tag{2.15}$$

Además, poniendo $Y = \xi_3$ en la Proposición 1.8.11 tenemos, para $X \in \mathfrak{D}$

$$2g(A\phi AX, \xi_3) = \alpha g(A\phi X, \xi_3) - \alpha\eta_2(AX).$$

Así, de (2.15)

$$0 = (\alpha^2 + 4)g(A\phi X, \xi_3) - \alpha^2\eta_2(AX). \tag{2.16}$$

Cambiando X por ϕX

$$0 = (\alpha^2 + 4)\eta_3(AX) + \alpha^2\eta_2(A\phi X).$$

De aquí y de (2.13)

$$\eta_3(AX) = \eta_2(A\phi X).$$

Usando (2.13)

$$0 = (\alpha^2 + 2)\eta_3(AX)$$

y, como $\alpha^2 + 2 \neq 0$

$$\eta_3(AX) = 0.$$

Igualmente, de (2.14) y de (2.16)

$$\eta_2(AX) = -\eta_3(A\phi X)$$

entonces, usando (2.14)

$$0 = (\alpha^2 + 2)\eta_2(AX).$$

Como $\alpha^2 + 2 \neq 0$

$$\eta_2(AX) = 0$$

con lo que finaliza la demostración. $\square$

Para el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ la demostración general se encuentra en [18]. Nosotros hemos conseguido una demostración más sencilla en el Lema 2.1.6.

Por último, para terminar, veamos que ni las hipersuperficies de tipo A ni las de tipo B verifican que el operador estructural de Jacobi es $\mathfrak{D}^\perp$-paralelo.

En el caso de las hipersuperficies de tipo A, por el Teorema 1.8.20, considerando $X \in T_\beta$ en (2.9) para $i = 2$ resulta

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{\xi_2} R_\xi)\xi \\ &= -\phi A\xi_2 - \alpha A\phi A\xi_2 \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{3} \Big[-\eta_\nu(\phi A\xi_2)\xi_\nu + \eta_\nu(\xi)\phi_\nu A\xi_2 + 3\eta_\nu(A\xi_2)\phi_\nu\xi \Big]. \end{aligned}$$

Como $\xi_2 \in T_\beta$ resulta

$$\beta(\alpha\beta + 2) = 0$$

por lo que, o bien $\beta = 0$ o bien $\alpha\beta + 2 = 0$. El caso $\beta = 0$ no puede ocurrir pues $\beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ para $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$. Si $\alpha\beta + 2 = 0$, como $\alpha = \sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)$,

$$\begin{aligned} 0 = \alpha\beta + 2 &= \big(\sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)\big)\big(\sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)\big) + 2 \\ &= 2\Big[\big(\cot(\sqrt{2}r) - \tan(\sqrt{2}r)\Big]\cot(\sqrt{2}r) + 2 \end{aligned}$$

por lo que $\cot(\sqrt{2}r) = 0$ para $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$. Lo que nos lleva a contradicción.

En el caso de las hipersuperficies de tipo B, por el Teorema 1.8.28, considerando $X \in T_\beta$ en (2.9), para $i = 2$ resulta

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{\xi_2} R_\xi)\xi \\ &= -\phi A\xi_2 - \alpha A\phi A\xi_2 \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{3} \Big[-\eta_\nu(\phi A\xi_2)\xi_\nu + 3\eta_\nu(A\xi_2)\phi_\nu\xi \Big]. \end{aligned}$$

Como $\xi_2 \in T_\beta$ y $\gamma = 0$

$$4\beta\phi\xi_2 = 0.$$

Pero, en este caso, $\beta = 2\cot(2r)$ que no se anula para $r \in (0, \pi/4)$.

2.3. $\mathfrak{D}$-paralelismo de R_ξ

En esta sección consideraremos una hipersuperficie real M de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ con $\nabla_X R_\xi = 0$ para todo $X \in \mathfrak{D}$. Esta condición es más débil que la de paralelismo. Como en el apartado anterior estuvimos viendo el paralelismo en $\mathfrak{D}^\perp$, resulta natural estudiar ahora el paralelismo en $\mathfrak{D}$. Concretamente, demostraremos el siguiente

Teorema 2.3.1. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf, cuyo operador estructural de Jacobi sea $\mathfrak{D}$-paralelo si, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^\perp$-componente de ξ es A invariante.*

Para ello, como siempre, vamos a empezar demostrando que, bajo nuestras hipótesis o bien $\xi \in \mathfrak{D}$ o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$.

Lema 2.3.2. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ con operador de Jacobi estructural $\mathfrak{D}$-paralelo. Si, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^\perp$-componente de ξ es A invariante entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$ o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ para algún $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario y tanto $\eta(X_0)$ como $\eta(\xi_1)$ no nulos pues, si alguno fuese nulo habríamos acabado. Razonando entonces como en la demostración del Lema 2.1.2 obtenemos que $\alpha \neq 0$.

Teniendo en cuenta (2.1) y poniendo $X = X_0$ e $Y = \xi$ en (2.7) resulta

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_{X_0} R_\xi)\xi \\
&= -\phi A X_0 - \alpha A\phi A X_0 - \alpha\eta_1(\xi)\phi_1 X_0 + 4\alpha\eta_1(\xi)\eta(X_0)\phi_1\xi \\
&= -\alpha\phi X_0 - \alpha^2 A\phi X_0 - \alpha\eta_1(\xi)\phi_1 X_0 + 4\alpha\eta_1(\xi)\eta^2 X_0\phi_1 X_0 \\
&= -\alpha\phi X_0 - \alpha^2 A\phi X_0 + \alpha\phi X_0 - 4\alpha\eta^2(X_0)\phi X_0 \\
&= -\alpha\big[\alpha^2 + 4\eta^2(X_0)\big]\phi X_0 - 4\alpha\eta^2(X_0)\phi X_0 \\
&= -\alpha^3\phi X_0 - 4\alpha\eta^2(X_0)\phi X_0 - 4\alpha\eta^2(X_0)\phi X_0 \\
&= \big[-\alpha^3 - 8\alpha\eta^2(X_0)\big]\phi X_0.
\end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente por ϕX_0

$$\begin{aligned}
0 &= g\big((\nabla_{X_0} R_\xi)\xi, \phi X_0\big) \\
&= \big(-\alpha^3 - 8\alpha\eta^2(X_0)\big)g(\phi X_0, \phi X_0) \\
&= \big(-\alpha^3 - 8\alpha\eta^2(X_0)\big)\eta^2(\xi_1)
\end{aligned}$$

ya que, por (2.2)

$$g(\phi X_0, \phi X_0) = -g(\phi^2 X_0, X_0) = 1 - \eta^2(X_0) = \eta^2(\xi_1).$$

Así,

$$-\alpha^3 - 8\alpha\eta^2(X_0) = 0$$

por lo que

$$\eta^2(X_0) = \frac{-\alpha^2}{8}$$

que nos lleva a contradicción. □

Veamos que si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante.

Lema 2.3.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf y tal que el operador de Jacobi estructural es $\mathfrak{D}$-paralelo. Si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. Para $X \in \mathfrak{D}$ resulta

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X R_\xi)\xi \\ &= -\phi AX - \alpha A\phi AX - 2\eta_3(AX)\xi_2 + 2\eta_2(AX)\xi_3 - \phi_1 AX. \end{aligned}$$

Para $\alpha = 0$, multiplicando escalarmente por ξ_2 y por ξ_3 obtenemos el resultado. Si $\alpha \neq 0$, multiplicando escalarmente por ξ_2 resulta

$$\alpha g(A\phi AX, \xi_2) + 2\eta_3(AX) = 0.$$

Por otro lado, por la Proposición 1.8.11

$$2g(A\phi AX, \xi_2) = \alpha g(A\phi X, \xi_2) + \alpha\eta_3(AX).$$

Por lo que $0 = \alpha^2 g(A\phi X, \xi_2) + (\alpha^2 + 4)\eta_3(AX)$. Así

$$g(A\phi X, \xi_2) = -\frac{\alpha^2 + 4}{\alpha^2}\eta_3(AX). \tag{2.17}$$

Cambiando X por ϕX

$$-\alpha^2 g(AX, \xi_2) + (\alpha^2 + 4)\eta_3(A\phi X) = 0. \tag{2.18}$$

Multiplicando escalarmente por ξ_3

$$\alpha g(A\phi AX, \xi_3) - 2\eta_2(AX) = 0,$$

mientras que por la Proposición 1.8.11

$$2g(A\phi AX, \xi_3) = \alpha g(A\phi X, \xi_3) - \alpha\eta_2(AX),$$

por tanto

$$0 = \alpha^2 g(A\phi X, \xi_3) - (\alpha^2 + 4)\eta_2(AX).$$

Así,

$$g(A\phi X, \xi_3) = \frac{\alpha^2 + 4}{\alpha^2}\eta_2(AX). \tag{2.19}$$

Si ahora cambiamos X por ϕX

$$\alpha^2 g(AX, \xi_3) + (\alpha^2 + 4)\eta_2(A\phi X) = 0. \tag{2.20}$$

Aplicando (2.19) a (2.18) obtenemos

$$0 = (-\alpha^2 + \frac{(\alpha^2+4)^2}{\alpha^2})\eta_2(AX)$$

y, aplicando (2.17) a (2.20)

$$0 = (-\alpha^2 + \frac{(\alpha^2+4)^2}{\alpha^2})\eta_3(AX).$$

Como $(-\alpha^2 + \dfrac{(\alpha^2+4)^2}{\alpha^2}) \neq 0$, pues $\alpha \neq 0$, hemos terminado. $\square$

Para el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ aplicamos el Lema 2.1.6.

Ahora vamos a ver que ni las hipersuperficies de tipo A ni las de tipo B verifican la condición de $\mathfrak{D}$-paralelismo de R_ξ.

Para el caso de las hipersuperficies de tipo A se tiene que $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. En este caso,

$$(\nabla_X R_\xi)\xi = -\phi AX - \alpha A\phi AX - 2\eta_3(AX)\xi_2 + 2\eta_2(AX)\xi_3 - \phi_1 AX$$

para $X \in \mathfrak{D}$. Si ahora tenemos en cuenta el Teorema 1.8.20, tomando $X_i \in T_\lambda$ tenemos

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_i} R_\xi)\xi &= -\phi AX_i - \alpha A\phi AX_i - 2\eta_3(AX_i)\xi_2 + 2\eta_2(AX_i)\xi_3 - \phi_1 AX_i\\ &= -\lambda\phi X_i - \alpha\lambda A\phi X_i - \lambda\phi_1 X_i\\ &= -2\lambda\phi X_i - \alpha\lambda A\phi X_i.\end{aligned}$$

Para $X_i \in T_\lambda,\ X_i \perp \mathbb{H}\xi =< \xi, N, \xi_2, \xi_3 >$, por lo que $\phi X_i \perp \mathbb{H}\xi$. Por otro lado, como tenemos $X_i \in T_\lambda,\ \phi(\phi X_i) = \phi_1(\phi X_i)$. De hecho,

$$\phi_1\phi X_i = \phi\phi_1 X_i - \eta_1(X_i)\xi + \eta(X_i)\xi_1 = \phi\phi_1 X_i = \phi(\phi X_i).$$

Por lo tanto, como $\phi X_i \in T_\lambda$

$$(\nabla_{X_i} R_\xi)\xi = -2\lambda\phi X_i - \alpha\lambda A\phi X_i = -2\lambda\phi X_i = -\alpha\lambda^2\phi X_i = (-2\lambda - \alpha\lambda^2)\phi X_i.$$

Si $(\nabla_{X_i} R_\xi)\xi = 0$ entonces, $2\lambda + \alpha\lambda^2 = 0$ por lo que, o bien $\lambda = 0$, o bien $2 + \alpha\lambda = 0$ para algún $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$ por lo que $\lambda = 0$ no puede darse. El segundo caso da lugar a

$$\begin{aligned}0 &= \left[\left(\sqrt{8}\cot(\sqrt{8})\right)\left(-\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}r)\right)\right] + 2\\ &= -4\cot(\sqrt{8}r)\tan(\sqrt{2}r) + 2\\ &= 2\tan^2(\sqrt{2}r).\end{aligned}$$

Por lo que $\tan(\sqrt{2}r) = 0$ para algún $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$, que nos lleva a contradicción.

Por último, para el caso de las hipersuperficies de tipo B tenemos que $\xi \in \mathfrak{D}$ por lo que, para $X \in \mathfrak{D}$ tendríamos

$$(\nabla_X R_\xi)\xi = -\phi AX - \alpha A\phi AX - \sum_{\nu=1}^{3} \Big[-\eta_\nu(\phi AX)\xi_\nu + 3\eta_\nu(AX)\phi_\nu\xi \Big].$$

Por el Teorema 1.8.28, para $X_i \in T_\lambda$

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_i} R_\xi)\xi &= -\phi AX_i - \alpha A\phi AX_i - \sum_{\nu=1}^{3} \Big[-\eta_\nu(\phi AX_i)\xi_\nu + 3\eta_\nu(AX_i)\phi_\nu\xi \Big] \\ &= -\lambda\phi X_i - \alpha\lambda A\phi X_i.\end{aligned}$$

Si $(\nabla_{X_i} R_\xi)\xi = 0$ entonces,

$$0 = \lambda\phi X_i + \alpha\lambda A\phi X_i = \lambda\phi X_i + \alpha\lambda\mu\phi X_i = (\lambda + \alpha\lambda\mu)\phi X_i$$

por lo que $\lambda(1+\alpha\mu) = 0$. Pero, el caso $\lambda = 0$ daría $\cot(r) = 0$ para $r \in (0, \pi/4)$ que no puede ser, por lo que $1 + \alpha\mu = 0$ pero

$$1 + \alpha\mu = 1 + \big(-2\tan(2r)\big)\big(-\tan(r)\big) = 1 + 2\tan(2r)\tan(r) = 0$$

para $r \in (0, \pi/4)$ por lo que

$$2\left[\frac{2\tan(r)}{1-\tan^2(r)}\right]\tan(r) + 1 = 0.$$

Así,

$$4\tan^2(r) = -\big(1 - \tan^2(r)\big) = -1 + \tan^2(r)$$

y, entonces,

$$3\tan^2(r) = -1$$

que nos lleva a contradicción.

2.4. Invarianza del operador de Jacobi estructural

Denotaremos por $\mathcal{L}_X R_\xi$ a la derivada de Lie de R_ξ con respecto a X para $X \in TM$. El operador de Jacobi estructural R_ξ se dice invariante en la dirección $X \in TM$ si $\mathcal{L}_X R_\xi = 0$. Estudiaremos la ξ-invarianza de R_ξ obteniendo una caracterización de las hipersuperficies de tipo A para después, a modo de corolario, obtener un teorema de no existencia para la derivada de Lie en general, concretamente demostraremos lo siguiente

Teorema 2.4.1. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, $\alpha \neq 0$ y tal que, o bien la componente en $\mathfrak{D}$ o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante. Si R_ξ es ξ-invariante, es decir, si $\mathcal{L}_\xi R_\xi = 0$ entonces, M es una hipersuperficie real de tipo A.*

Además obtendremos el siguiente corolario

Corolario 2.4.2. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf, $\alpha \neq 0$ y tales que, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante con operador de Jacobi estructural invariante en cualquier dirección.*

Empezaremos probando que, bajo nuestras hipótesis, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$ o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$.

Lema 2.4.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante y $\mathcal{L}_\xi R_\xi = 0$. Entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ para $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario. Si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ fuese alguno nulo, ya habríamos acabado. Así pues, supongamos que ambos son no nulos. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 obtenemos que $\alpha \neq 0$. Teniendo en cuenta (2.1) tenemos que

$$R_\xi(\phi X_0) = 8\eta^2(X_0)\phi X_0 + \alpha^2 \phi X_0$$

y

$$R_\xi(X_0) = \alpha^2 X_0 - \alpha^2 \eta(X_0)\xi.$$

Como por hipótesis $0 = (\mathcal{L}_\xi R_\xi)X = (\nabla_\xi R_\xi)X - \phi A R_\xi(X) + R_\xi(\phi A X)$, poniendo $X = X_0$ y multiplicando escalarmente por $\phi_1\xi$

$$g((\nabla_\xi R_\xi)X_0, \phi_1\xi) = 3\alpha\eta^3(X_0)\eta(\xi_1) - \alpha\eta^3(X_0)\eta(\xi_1) + 4\alpha\eta^3(X_0)\eta(\xi_1) + \alpha^2\eta(X_0)\eta(\xi_1)(\lambda - \alpha)$$

donde hemos puesto, al ser $\alpha \neq 0$, $\lambda = \frac{\alpha^2 + 4\eta^2(X_0)}{\alpha}$.

Por otro lado,

$$g(\phi A R_\xi(X_0), \phi_1\xi) = -\alpha^3\eta(X_0)\eta(\xi_1)$$

y

$$g(R_\xi(\phi A X_0), \phi_1\xi) = -\alpha^3\eta(X_0)\eta(\xi_1) - 8\alpha\eta^3(X_0)\eta(\xi_1).$$

Así pues, igualando

$$\begin{aligned} 0 &= -2\alpha\eta^3(X_0)\eta(\xi_1) + \alpha^2\eta(X_0)\eta(\xi_1)\big(\lambda - \alpha\big) \\ 0 &= -2\eta^2(X_0) + \alpha\lambda - \alpha^2 = -2\eta^2(X_0) + \alpha^2 + 4\eta^2(X_0) - \alpha^2 \\ 0 &= 2\eta^2(X_0) \end{aligned}$$

lo que nos lleva a contradicción con el hecho de suponer que o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ es alguno no nulo. $\square$

Vamos a ver ahora que si $\mathcal{L}_\xi R_\xi = 0$ y $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante.

Lema 2.4.4. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, $\alpha \neq 0$, $\mathcal{L}_\xi R_\xi = 0$ y $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. Como por hipótesis

$$0 = (\mathcal{L}_\xi R_\xi)X = (\nabla_\xi R_\xi)(X) - \phi A R_\xi(X) + R_\xi(\phi A X)$$

tenemos que

$$(\nabla_\xi R_\xi)X = \phi A R_\xi(X) - R_\xi(\phi A X).$$

Por otro lado,

$$g\big((\nabla_\xi R_\xi)X, Y\big) = g\big(X, (\nabla_\xi R_\xi)Y\big)$$

con lo que

$$g\big(X, (-R_\xi A\phi + A\phi R_\xi)Y\big) = g\big(X, (\phi A R_\xi - R_\xi \phi A)Y\big).$$

Así pues,

$$(\phi A - A\phi)R_\xi(Y) = R_\xi\big((\phi A - A\phi)Y\big)$$

para todo $Y \in TM$. Así, como

$$\begin{aligned}
g(\phi A R_\xi(X), \xi_2) &= g(\phi A X, \xi_2) - g(\phi A \phi_1 \phi X, \xi_2) + \alpha g(\phi A^2 X, \xi_2) \\
&= 2\eta_3(AX) + \alpha\eta_3(A^2X) \\
g(A\phi R_\xi(X), \xi_2) &= g(A\phi X, \xi_2) - g(A\phi\phi_1\phi X, \xi_2) + \alpha g(A\phi A X, \xi_2) \\
&= 2\eta_2(A\phi X) + \alpha\eta_2(A\phi A X) \\
g(R_\xi(\phi A X), \xi_2) &= 2g(\phi A X, \xi_2) + \alpha g(\phi A X, A\xi_2) \\
&= 2\eta_3(AX) + \alpha\eta_2(A\phi A X) \\
g(R_\xi(A\phi X), \xi_2) &= 2g(A\phi X, \xi_2) + \alpha g(A\phi X, A\xi_2) \\
&= 2\eta_2(A\phi X) + \alpha\eta_2(A\phi A X)
\end{aligned}$$

para $X \in \mathfrak{D}$, resulta

$$\alpha\eta_3(A^2X) = \alpha\eta_2(A\phi A X) = \frac{\alpha^2}{2}\eta_2(A\phi X) + \frac{\alpha^2}{2}\eta_3(AX). \tag{2.21}$$

Por otro lado, también para $X \in \mathfrak{D}$ tenemos

$$\begin{aligned}
g(\phi A R_\xi(X), \xi_3) &= -g(R_\xi(X), A\xi_2) = -g(AX, \xi_2) + g(\phi_1\phi X, A\xi_2) - \alpha g(A^2X, \xi_2) \\
&= -2\eta_2(AX) - \alpha\eta_2(A^2X) \\
g(A\phi R_\xi(X), \xi_3) &= g(A\phi X, \xi_3) - g(A\phi\phi_1\phi X, \xi_3) + \alpha g(A\phi A X, \xi_3) \\
&= 2\eta_3(A\phi X) + \alpha\eta_3(A\phi A X) \\
g(R_\xi(\phi A X), \xi_3) &= 2g(\phi A X, \xi_3) + \alpha g(\phi A X, A\xi_3) \\
&= -2\eta_2(AX) + \alpha\eta_3(A\phi A X) \\
g(R_\xi(A\phi X), \xi_3) &= 2g(A\phi X, \xi_3) + \alpha g(A\phi X, A\xi_3) \\
&= 2\eta_3(A\phi X) + \alpha\eta_3(A\phi A X)
\end{aligned}$$

luego,

$$\alpha\eta_2(A^2X) = \frac{\alpha^2}{2}\eta_2(AX) - \frac{\alpha^2}{2}\eta_3(A\phi X), \tag{2.22}$$

donde hemos utilizado que, para $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ y $X \in \mathfrak{D}$, $R_\xi(X) = X - \phi_1\phi X + \alpha AX$ y, para $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, $R_\xi(\xi_2) = 2\xi_2 + \alpha A\xi_2$ y $R_\xi(\xi_3) = 2\xi_3 + \alpha A\xi_3$. Además, por la Proposición 1.8.11, para $X \in \mathfrak{D}$ y $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$

$$\begin{aligned}
2\eta_2(A\phi AX) &= \alpha\eta_2(A\phi X) + \alpha\eta_3(AX) \\
2\eta_3(A\phi AX) &= \alpha\eta_3(A\phi X) - \alpha\eta_2(AX).
\end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $X \in \mathfrak{D}$

$$\begin{aligned}
g\big((\nabla_\xi R_\xi)\xi_2, X\big) &= \xi(\alpha)\eta_2(AX) - \frac{\alpha^2}{2}\eta_2(A\phi X) + \frac{\alpha^2}{2}\eta_3(AX) \\
g(\phi AR_\xi(\xi_2), X) &= 2g(\phi A\xi_2, X) + \alpha g(\phi A^2\xi_2, X) = -2\eta_2(A\phi X) - \alpha\eta_2(A^2\phi X) \\
g(R_\xi(\phi A\xi_2), X) &= g(\phi A\xi_2, X) - g(\phi A\xi_2, \phi_1\phi X) + \alpha g(\phi A\xi_2, AX) \\
&= -2\eta_2(A\phi X) - \alpha\eta_2(A\phi AX)
\end{aligned}$$

luego,

$$\xi(\alpha)\eta_2(AX) = \alpha^2\eta_2(A\phi X) - \alpha\eta_2(A^2\phi X) \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
g(\phi AR_\xi(\xi_3), X) &= -2\eta_3(A\phi X) + \alpha\eta_3(A^2\phi X) \\
g(R_\xi(\phi A\xi_3), X) &= -2\eta_3(A\phi X) - \alpha\eta_3(A\phi AX)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\xi(\alpha)\eta_3(AX) = \alpha^2\eta_3(A\phi X) - \alpha\eta_3(A^2\phi X). \tag{2.24}$$

Como $\alpha \neq 0$, si $\xi(\alpha) = 0$, a partir de (2.23) y (2.24) obtenemos $\alpha^2\eta_2(A\phi X) = \alpha\eta_2(A^2\phi X)$ para todo $X \in \mathfrak{D}$ y, entonces, cambiando X por ϕX

$$\alpha^2\eta_2(AX) = \alpha\eta_2(A^2X).$$

Análogamente, a partir de

$$\alpha^2\eta_3(A\phi X) = -\alpha\eta_3(A^2\phi X)$$

para todo $X \in \mathfrak{D}$, obtenemos

$$\alpha^2\eta_3(AX) = -\alpha\eta_3(A^2X).$$

Si ahora tenemos en cuenta esto junto con las fórmulas (2.29) y (2.27) resulta

$$-\alpha^2\eta_3(AX) = \frac{\alpha^2}{2}\eta_2(A\phi X) + \frac{\alpha^2}{2}\eta_3(AX)$$

luego,

$$0 = \frac{\alpha^2}{2}\eta_2(A\phi X) + \big(\frac{\alpha^2}{2} + 2\big)\eta_3(AX)$$

y
$$\alpha^2\eta_2(AX) = \frac{\alpha^2}{2}\eta_2(AX) - \frac{\alpha^2}{2}\eta_3(A\phi X).$$

Por tanto
$$0 = (\frac{\alpha^2}{2} - \alpha^2)\eta_2(AX) - \frac{\alpha^2}{2}\eta_3(A\phi X).$$

Así, para $\alpha \neq 0$ y $X \in \mathfrak{D}$
$$\begin{aligned} 0 &= \eta_2(A\phi X) + 3\eta_3(AX) \\ 0 &= -\eta_2(AX) + 3\eta_3(A\phi X) \\ \eta_2(AX) &= 3\eta_3(A\phi X) \end{aligned}$$

y
$$\begin{aligned} 0 &= -\eta_2(AX) - \eta_3(A\phi X) \\ \eta_2(AX) &= -\eta_3(A\phi X) \end{aligned}$$
luego, $\eta_2(AX) = 0$ y $\eta_3(AX) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{D}$.

Como $\alpha \neq 0$, si $\xi(\alpha) \neq 0$, sustituyendo (2.29) y (2.27) en (2.23) y (2.24)
$$\begin{aligned} \xi(\alpha)\eta_2(AX) &= \frac{\alpha^2}{2}\eta_2(A\phi X) - \frac{\alpha^2}{2}\eta_3(AX) \\ \xi(\alpha)\eta_3(AX) &= \frac{3}{2}\alpha^2\eta_3(A\phi X) - \frac{\alpha^2}{2}\eta_2(AX) \end{aligned}$$
para todo $X \in \mathfrak{D}$. Si ahora cambio X por ϕX
$$\begin{aligned} \xi(\alpha)\eta_2(A\phi X) &= -\frac{\alpha^2}{2}\eta_2(AX) - \frac{\alpha^2}{2}\eta_3(A\phi X) \\ \xi(\alpha)\eta_3(A\phi X) &= \frac{3}{2}\alpha^2\eta_2(A\phi X) - \frac{\alpha^2}{2}\eta_3(AX) \end{aligned}$$
para todo $X \in \mathfrak{D}$. Teniendo en cuenta el sistema formado por estas cuatro ecuaciones con incógnitas $\eta_2(AX), \eta_3(AX), \eta_2(A\phi X)$ y $\eta_3(A\phi X)$, el determinante de la matriz de coeficientes es $\frac{\alpha^8}{4} + 2\alpha^4\big(\xi(\alpha)\big)^2 + \big(\xi(\alpha)\big)^4 \neq 0$. Así, $\eta_2(AX) = 0$ y $\eta_3(AX) = 0$. □

En el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ la demostración se sigue del Lema 2.1.6.

Veamos ahora que las hipersuperficies de tipo B no cumplen $\mathcal{L}_\xi R_\xi = 0$. Si fuese cierto, ya vimos anteriormente que
$$R_\xi(\phi AX) - R_\xi(A\phi X) = \phi AR_\xi(X) - A\phi R_\xi(X).$$

Si tomamos $X = \xi_1$, la ecuación quedaría así
$$\begin{aligned} R_\xi(\phi A\xi_1) &= \phi AR_\xi(\xi_1) - A\phi R_\xi(\xi_1) \\ \beta R_\xi(\phi\xi_1) &= \phi AR_\xi(\xi_1) - A\phi R_\xi(\xi_1) \\ -2\beta\phi\xi_1 &= \alpha\beta^2\phi\xi_1 \end{aligned}$$

con lo que $-2 = \alpha\beta$ donde $\alpha = -2\tan(2r)$ y $\beta = 2\cot(2r)$ para $r \in (0, \pi/4)$, lo que nos llevaría a contradicción. Esto nos da además que las hipersuperficies de tipo B no verifican que $\mathcal{L}_X R_\xi = 0$ para todo $X \in TM$.

Tampoco las hipersuperficies de tipo A verifican $\mathcal{L}_X R_\xi = 0$ para todo $X \in TM$ ya que, de ser cierto, debería ser

$$\big(\nabla_{\xi_3} R_\xi\big)\xi_2 = \nabla_{R_\xi(\xi_2)}\xi_3 - R_\xi(\nabla_{\xi_2}\xi_3)$$

y, multiplicando escalarmente por ξ

$$\begin{aligned} g\big((\nabla_{\xi_3} R_\xi)\xi_2, \xi\big) &= g\big(\xi_2, (\nabla_{\xi_3} R_\xi)\xi\big) = -\beta(\alpha\beta + 2) \\ g(\nabla_{R_\xi(\xi_2)}\xi_3, \xi) &= \beta(\alpha\beta + 2) \end{aligned}$$

luego,

$$\beta(\alpha\beta + 2) = 0.$$

El caso $\beta = 0$ no puede ocurrir ya que $\beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ para $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$. Por otro lado, si $\alpha\beta + 2 = 0$ donde $\alpha = \sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)$, $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$ tendríamos

$$0 = \alpha\beta + 2 = 2\{\cot(\sqrt{2}r) - \tan(\sqrt{2}r)\}\cot(\sqrt{2}r) + 2$$

luego, $\cot(\sqrt{2}r) = 0$ para $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$, lo que nos llevaría a contradicción.

Sin embargo, las hipersuperficies de tipo A sí cumplen $\mathcal{L}_\xi R_\xi = 0$. Como vimos anteriormente, la ecuación $\mathcal{L}_\xi R_\xi = 0$ equivale a

$$R_\xi(\phi AX) - R_\xi(A\phi X) = \phi AR_\xi(X) - A\phi R_\xi(X)$$

para todo $X \in TM$.

Trivialmente se cumple para $X = \xi = \xi_1$.

Para $X = \xi_2$ tenemos

$$\begin{aligned} \beta R_\xi(\phi\xi_2) - R_\xi(A\phi\xi_2) &= \phi AR_\xi(\xi_2) - A\phi R_\xi(\xi_2), \\ -\beta R_\xi(\xi_3) + R_\xi(A\xi_3) &= \phi AR_\xi(\xi_2) - A\phi R_\xi(\xi_2), \\ -\beta R_\xi(\xi_3) + \beta R_\xi(\xi_3) &= \phi AR_\xi(\xi_2) - A\phi R_\xi(\xi_2), \\ \phi AR_\xi(\xi_2) &= A\phi R_\xi(\xi_2), \\ \phi A(2\xi_2 + \alpha\beta\xi_2) &= A\phi(2\xi_2 + \alpha\beta\xi_2), \\ 2\beta\phi\xi_2 + \alpha\beta^2\phi\xi_2 &= 2A\phi\xi_2 + \alpha\beta A\phi\xi_2, \\ -2\beta\xi_3 - \alpha\beta^2\xi_3 &= -2\beta\xi_3 - \alpha\beta^2\xi_3. \end{aligned}$$

De forma análoga se comprueba que para $X = \xi_3$ también es cierto.

Sea ahora $X_i \in T_\lambda$, $i = 1, \ldots, 2(m-1)$. El espacio T_λ cumple que $\phi X = \phi_1 X$ para todo $X \in T_\lambda$. Además, T_λ es invariante por ϕ, es decir, $\phi T_\lambda \subset T_\lambda$ ya que, para $X_i \in T_\lambda, \phi X_i = \phi_1 X_i$. Así, $\phi\phi X_i = \phi^2 X_i = -X_i$ y $\phi_1\phi X_i = \phi_1^2 X_i$ luego $\phi\phi X_i = \phi_1\phi X_i$.

De forma análoga se prueba que T_μ es invariante por ϕ. Así pues, para $X = X_i$ tenemos

$$\begin{aligned}\lambda R_\xi(\phi X_i) - R_\xi(A\phi X_i) &= \phi A R_\xi(X_i) - A\phi R_\xi(X_i)\\ \lambda(2\phi X_i + \alpha A\phi X_i) - A\phi X_i - \alpha A^2\phi X_i - A\phi X_i &= \phi A(2X_i + \alpha\lambda X_i) - A\phi(2X_i + \alpha\lambda X_i)\\ 2\lambda\phi X_i + \alpha\lambda^2\phi X_i - A\phi X_i - \alpha\lambda^2\phi X_i - \lambda\phi X_i &= 2\lambda\phi X_i + \alpha\lambda^2\phi X_i - 2\lambda\phi X_i - \alpha\lambda^2\phi X_i\end{aligned}$$

luego, se cumple la ecuación. De forma análoga se da la validez para $X = Y_i \in T_\mu$.

2.5. Hipersuperficies reales para las que $\mathcal{L}_{\xi_i} R_\xi = \nabla_{\xi_i} R_\xi$

Veamos ahora otro resultado de no existencia de hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ bajo una condición de igualdad de las derivadas de Lie y covariante respecto a los ξ_i, $i = 1, 2, 3$. Concretamente

Teorema 2.5.1. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf tales que, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante y $\mathcal{L}_{\xi_i} R_\xi = \nabla_{\xi_i} R_\xi$.*

Para ello, vamos a empezar viendo que bajo nuestras hipótesis, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.

Lema 2.5.2. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante y $\mathcal{L}_{\xi_i} R_\xi = \nabla_{\xi_i} R_\xi$. Entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario. Si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ fuese alguno nulo, habríamos acabado. Supongamos entonces que ambos son no nulos. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 resulta que $\alpha \neq 0$. Teniendo en cuenta (2.1) tenemos que

$$R_\xi(\phi X_0) = 8\eta^2(X_0)\phi X_0 + \alpha^2\phi X_0.$$

Como por hipótesis

$$\mathcal{L}_{\xi_i} R_\xi = \nabla_{\xi_i} R_\xi$$

entonces,

$$-\nabla_{R_\xi(X)}\xi_i + R_\xi(\nabla_X \xi_i) = 0.$$

Para $i = 1$ y $X = \xi$, multiplicando escalarmente por ϕX_0 queda

$$g(R_\xi(\nabla_\xi \xi_1), \phi X_0) = 0$$

por lo que, teniendo en cuenta (2.2) y las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1

$$\begin{gathered} g\big(\nabla_\xi \xi_1, 8\eta^2(X_0)\phi X_0 + \alpha^2\phi X_0\big) = 0,\\ 8\alpha\eta^3(X_0)g(\phi_1 X_0, \phi X_0) + \alpha^3\eta(X_0)g(\phi_1 X_0, \phi X_0) = 0,\\ -8\alpha\eta^3(X_0)\eta(\xi_1) - \alpha^3\eta(X_0)\eta(\xi_1) = 0,\\ \alpha\eta(X_0)\eta(\xi_1)\big(-8\alpha\eta^2(X_0) - \alpha^2\big) = 0.\end{gathered}$$

Como $\alpha \neq 0$ llegamos a una contradicción. $\square$

Veamos que si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante.

Lema 2.5.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, $\mathcal{L}_{\xi_i} R_\xi = \nabla_{\xi_i} R_\xi$ y $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Entonces, $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. En primer lugar, como estamos suponiendo que $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, podemos suponer que $\xi = \xi_1$. Por otro lado, teniendo en cuenta la Proposición 1.8.11

$$g(A\phi AX, \xi_2) = \frac{\alpha}{2} g(A\phi X, \xi_2) + \frac{\alpha}{2} \eta_3(AX)$$

y

$$g(A\phi AX, \xi_3) = \frac{\alpha}{2} g(A\phi X, \xi_3) - \frac{\alpha}{2} \eta_2(AX)$$

para todo $X \in \mathfrak{D}$.

Para $i = 1$ tenemos

$$\mathcal{L}_{\xi_1} R_\xi = \nabla_{\xi_1} R_\xi$$

que equivale a

$$R_\xi(\phi AX) = \phi A R_\xi(X).$$

Multiplicando escalarmente por ξ_2, resulta para $X \in \mathfrak{D}$

$$\begin{aligned} g(R_\xi(\phi AX), \xi_2) &= 2g(AX, \xi_3) + \alpha g(A\phi AX, \xi_2) \\ &= 2g(AX, \xi_3) + \frac{\alpha^2}{2} g(A\phi X, \xi_2) + \frac{\alpha^2}{2} \eta_3(AX) \\ g(\phi A R_\xi(X), \xi_2) &= 2g(AX, \xi_3) + \alpha g(A^2 X, \xi_3), \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{\alpha^2}{2} g(A\phi X, \xi_2) + \frac{\alpha^2}{2} \eta_3(AX) = \alpha g(A^2 X, \xi_3). \tag{2.25}$$

Multiplicando escalarmente por ξ_3 tenemos que

$$\begin{aligned} g(R_\xi(\phi AX), \xi_3) &= -2g(AX, \xi_2) + \alpha g(A\phi AX, \xi_3) \\ &= -2g(AX, \xi_2) + \frac{\alpha^2}{2} g(A\phi X, \xi_3) - \frac{\alpha^2}{2} \eta_2(AX) \\ g(\phi A R_\xi(X), \xi_3) &= -2g(AX, \xi_2) - \alpha g(A^2 X, \xi_2) \end{aligned}$$

por lo que resulta

$$\frac{\alpha^2}{2} g(A\phi X, \xi_3) - \frac{\alpha^2}{2} \eta_2(AX) = -\alpha g(A^2 X, \xi_2). \tag{2.26}$$

Por otro lado, para $i = 2$ tenemos que

$$\mathcal{L}_{\xi_2} R_\xi = \nabla_{\xi_2} R_\xi$$

equivale a

$$-\nabla_{R_\xi(X)}\xi_2 + R_\xi(\nabla_X \xi_2) = 0.$$

Multiplicando escalarmente por ξ, resulta para $X \in \mathfrak{D}$

$$g(\nabla_{R_\xi(X)}\xi_2, \xi) = 0,$$

por lo que

$$g(\xi_2, \phi A R_\xi(X)) = 0.$$

Así pues,

$$\begin{gathered} g(AX, \xi_3) - g(A\phi_1\phi X, \xi_3) + \alpha g(A^2 X, \xi_3) = 0 \\ 2g(AX, \xi_3) + \alpha g(A^2 X, \xi_3) = 0 \end{gathered}$$

luego,

$$\alpha g(A^2 X, \xi_3) = -2g(AX, \xi_3). \tag{2.27}$$

Teniendo en cuenta (2.25) y (2.27)

$$\frac{\alpha^2}{2} g(A\phi X, \xi_2) + \frac{\alpha^2}{2}\eta_3(AX) = -2g(AX, \xi_3)$$

y, entonces,

$$-(2 + \frac{\alpha^2}{2})\eta_3(AX) = \frac{\alpha^2}{2} g(A\phi X, \xi_2). \tag{2.28}$$

Para $i = 3$ tenemos que

$$\mathcal{L}_{\xi_3} R_\xi = \nabla_{\xi_3} R_\xi$$

equivale a

$$-\nabla_{R_\xi(X)}\xi_3 + R_\xi(\nabla_X \xi_3) = 0.$$

Multiplicando escalarmente por ξ, resulta para $X \in \mathfrak{D}$

$$g(\nabla_{R_\xi(X)}\xi_3, \xi) = 0,$$

por lo que

$$g(\xi_3, \phi A R_\xi(X)) = 0.$$

Así pues,

$$\begin{gathered} g(A\xi_2, X) - g(A\phi_1\phi X) + \alpha g(A^2 X, \xi_2) = 0, \\ 2g(A\xi_2, X) + \alpha g(A^2 X, \xi_2) = 0 \end{gathered}$$

de donde resulta

$$\alpha g(A^2 X, \xi_2) = -2g(A\xi_2, X). \tag{2.29}$$

Teniendo en cuenta (2.27) y (2.29) obtenemos

$$\frac{\alpha^2}{2}g(A\phi X,\xi_3)-\frac{\alpha^2}{2}\eta_2(AX)=2g(AX,\xi_2)$$

por lo que

$$(2+\frac{\alpha^2}{2})\eta_2(AX)=\frac{\alpha^2}{2}g(A\phi X,\xi_3). \tag{2.30}$$

Cambiando X por ϕX en (2.28) resulta

$$(2+\frac{\alpha^2}{2})\eta_3(A\phi X)=\frac{\alpha^2}{2}g(AX,\xi_2)$$

que, junto con (2.30), da lugar a

$$\frac{(2+\frac{\alpha^2}{2})^2}{\frac{\alpha^4}{4}}\eta_2(AX)=\eta_2(AX).$$

Luego, para $\alpha\neq 0$, $\eta_2(AX)=0$. Una vez visto que $\eta_2(AX)=0$ para todo $X\in\mathfrak{D}$ se sigue que también es $g(A\phi X,\xi_2)=0$ para todo $X\in\mathfrak{D}$. Si ahora tenemos en cuenta (2.28) resulta

$$(2+\frac{\alpha^2}{2})\eta_3(AX)=0$$

y, de ahí, que $\eta_3(AX)=0$ para todo $X\in\mathfrak{D}$.

En el caso de que $\alpha=0$, teniendo en cuenta (2.27) resulta $\eta_3(AX)=0$ y, teniendo en cuenta (2.29), $\eta_2(AX)=0$ para todo $X\in\mathfrak{D}$. $\square$

Para el caso en que $\xi\in\mathfrak{D}$ la demostración se sigue del Lema 2.1.6.

Veamos ahora que las hipersuperficies de tipo A no cumplen $\mathcal{L}_{\xi_i}R_\xi=\nabla_{\xi_i}R_\xi$. En primer lugar, tengamos en cuenta que esta condición equivale a $R_\xi(\nabla_X\xi_i)=\nabla_{R_\xi(X)}\xi_i$ luego, para $i=2$ y $X=\xi_3$, $R_\xi(\nabla_{\xi_3}\xi_2)=\nabla_{R_\xi(\xi_3)}\xi_2$ donde $\nabla_{\xi_3}\xi_2=q_1(\xi_3)\xi_3-q_3(\xi_3)\xi+\beta\xi$ luego, la ecuación quedaría

$$\begin{aligned}q_1(\xi_3)(2\xi_3+\alpha\beta\xi_3)&=2\nabla_{\xi_3}\xi_2+\alpha\beta\nabla_{\xi_3}\xi_2\\ q_1(\xi_3)(2\xi_3+\alpha\beta\xi_3)&=(2+\alpha\beta)(q_1(\xi_3)\xi_3-q_3(\xi_3)\xi+\beta\xi)\\ 0&=(2+\alpha\beta)(-q_3(\xi_3)+\beta)\xi\end{aligned}$$

donde $\alpha=\sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)$ y $\beta=\sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ por lo que o bien $2+\alpha\beta=0$ o bien $\beta=q_3(\xi_3)$.

Si

$$0=\alpha\beta+2=2\Big[\cot(\sqrt{2}r)-\tan(\sqrt{2}r)\Big]\cot(\sqrt{2}r)+2$$

entonces $\cot(\sqrt{2}r)=0$ para $r\in(0,\pi/\sqrt{8})$, lo que nos lleva a contradicción.

Por otro lado, si $\beta = q_3(\xi_3)$, considerando $\nabla_{\xi_3}\xi = \nabla_{\xi_3}\xi_1$ resulta

$$\beta\xi_2 = -q_2(\xi_3)\xi_3 + (q_3(\xi_3) - \beta)\xi_2$$

que, sustituyendo $\beta = q_3(\xi_3)$ da $\beta\xi_2 = -q_2(\xi_3)\xi_3$. Luego, $\beta = 0$ pero, $\beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ para $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$, lo que nos lleva a contradicción.

Para terminar, veamos que tampoco las hipersuperficies de tipo B verifican $\mathcal{L}_{\xi_i}R_\xi = \nabla_{\xi_i}R_\xi$. En primer lugar, tengamos en cuenta que esta condición equivale a $R_\xi(\nabla_X\xi_i) = \nabla_{R_\xi(X)}\xi_i$. Por tanto, para $i = 1$ y $X = \xi$, $R_\xi(\nabla_\xi\xi_1) = 0$ donde

$$\nabla_\xi\xi_1 = q_3(\xi)\xi_2 - q_2(\xi)\xi_3 + \phi_1 A\xi = q_3(\xi)\xi_2 - q_2(\xi)\xi_3 + \alpha\phi_1\xi$$

luego,

$$R_\xi(\nabla_\xi\xi_1) = \alpha\beta q_3(\xi)\xi_2 - \alpha\beta q_2(\xi)\xi_3 + 4\alpha\phi_1\xi = 0.$$

Multiplicando escalarmente por $\phi_1\xi$ queda $4\alpha = 0$ pero $\alpha = -2\tan(2r)$ para $r \in (0, \pi/4)$, lo que nos lleva a contradicción.

2.6. Campos de vectores de tipo Jacobi

Sabemos que un campo de vectores Killing sobre una variedad riemanniana (M, g) es un campo de Jacobi a lo largo de cada geodésica de M. Sin embargo, lo contrario es falso ya que, por ejemplo, el vector de posición sobre el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ es un campo de Jacobi a lo largo de cada geodésica de $\mathbb{R}^n$ y no es Killing. Motivados por la definición de campo de Jacobi a lo largo de una geodésica decimos que Y es un campo de tipo Jacobi sobre una variedad riemanniana (M, g) si satisface

$$\nabla_X\nabla_X Y + R(Y, X)X = 0$$

para todo $X \in TM$.

Naturalmente, un campo de vectores de tipo Jacobi es un campo de Jacobi a lo largo de cada geodésica de M. Un problema interesante es obtener condiciones bajo las cuales un campo de tipo Jacobi es Killing. Vamos a demostrar a continuación que si el campo de vectores estructural ξ es de tipo Jacobi entonces es Killing. Con esto caracterizaremos a las hipersuperficies reales de tipo A como aquellas en que ξ es de tipo Jacobi. Concretamente, demostraremos el

Teorema 2.6.1. *Sea M es una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Si M es o bien compacta, o bien Hopf, entonces el campo de vectores estructural ξ es Killing.*

Como consecuencia inmediata de este Teorema tenemos el

Corolario 2.6.2. *Bajo las hipótesis anteriores tenemos que ξ es de tipo Jacobi si, y sólo si M es una hipersuperficie real de tipo A.*

Antes de empezar vamos a calcular la expresión del tensor de Ricci pues la necesitaremos en la demostración. Contrayendo las variables Y y Z en la ecuación de Gauss (1.3) resulta

$$\begin{aligned}
SX &= \sum_{i=1}^{4m-1} R(X,e_i)e_i \qquad (2.31)\\
&= (4m+10)X - 3\eta(X)\xi - 3\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(X)\xi_\nu\\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{3}\{(\mathrm{Tr}\ \phi_\nu\phi)\phi_\nu\phi X - (\phi_\nu\phi)^2X\}\\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{3}\{\eta_\nu(\xi)\phi_\nu\phi X - \eta(X)\phi_\nu\phi\xi_\nu\}\\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{3}\{(\mathrm{Tr}\ \phi_\nu\phi)\eta(X) - \eta(\phi_\nu\phi X)\}\xi_\nu\\
&\quad + (\mathrm{Tr}\ A)AX - A^2X.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 1.7.1 tenemos que Tr $JJ_\nu = 0, \nu = 1,2,3$ por lo que, para cualquier base $\{e_1,\ldots,e_{4m-1},N\}$ de $TG_2(\mathbb{C}^{m+2})$

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{Tr}\ JJ_\nu \qquad (2.32)\\
&= \sum_{k=1}^{4m-1} g(JJ_\nu e_k, e_k) + g(JJ_\nu N, N)\\
&= \mathrm{Tr}\ \phi\phi_\nu - \eta_\nu(\xi) - g(J_\nu N, JN)\\
&= \mathrm{Tr}\ \phi\phi_\nu - 2\eta_\nu(\xi),
\end{aligned}$$

de donde Tr $\phi\phi_\nu = 2\eta_\nu(\xi)$. Además, por las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1

$$\begin{aligned}
(\phi_\nu\phi)^2X &= \phi_\nu\phi\big(\phi\phi_\nu X - \eta_\nu(X)\xi + \eta(X)\xi_\nu\big) \qquad (2.33)\\
&= \phi_\nu\big(-\phi_\nu X + \eta(\phi_\nu X)\xi\big) + \eta(X)\phi_\nu^2\xi\\
&= X - \eta_\nu(X)\xi_\nu + \eta(\phi_\nu X)\phi_\nu\xi + \eta(X)[-\xi + \eta_\nu(\xi)\xi].
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo (2.32) y (2.33) en (2.31)

$$\begin{aligned}
SX &= (4m+10)X - 3\eta(X)\xi - 3\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(X)\xi_\nu \\
&+\sum_{\nu=1}^{3}[\eta_\nu(\xi)\phi_\nu\phi X - X - \eta(\phi_\nu X)\phi_\nu\xi - \eta(X)\eta_\nu(\xi)\xi] \\
&+(\mathrm{Tr}\,A)AX - A^2X \\
&= (4m+7)X - 3\eta(X)\xi - 3\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(X)\xi_\nu \qquad (2.34)\\
&+\sum_{\nu=1}^{3}[\eta_\nu(\xi)\phi_\nu\phi X - \eta(\phi_\nu X)\phi_\nu\xi - \eta(X)\eta_\nu(\xi)\xi_\nu] \\
&+(\mathrm{Tr}\,A)AX - A^2X.
\end{aligned}$$

Ahora vamos a demostrar un

Lema 2.6.3. *Sea M es una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ tal que ξ es de tipo Jacobi. Entonces*

$$-\,\mathit{Tr}\,A^2 + 4(m+1) - 4\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu^2(\xi) + (\mathit{Tr}\,A)\eta(A\xi) = 0 \qquad (2.35)$$

Demostración. Por ser ξ de tipo Jacobi

$$\nabla_X\nabla_X\xi + R(\xi, X)X = 0 \qquad (2.36)$$

para todo $X \in TM$. Sea $\{e_1, \ldots, e_{4m-1}\}$ una base ortonormal de TM. Sustituyendo X por $e_i, i = 1, \ldots, 4m-1$ en (2.36) y sumando estas $4m-1$ ecuaciones tenemos, utilizando las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1

$$\sum_{i=1}^{4m-1}\nabla_{e_i}\phi Ae_i + S(\xi) = 0$$

donde S denota el tensor de Ricci de M, luego

$$\sum_{i=1}^{4m-1}(\nabla_{e_i}\phi)Ae_i + \phi\sum_{i=1}^{4m-1}\nabla_{e_i}Ae_i + S(\xi) = 0. \qquad (2.37)$$

Utilizando las fómulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1

$$(\nabla_{e_i}\phi)Ae_i = \eta(Ae_i)Ae_i - g(Ae_i, Ae_i)\xi.$$

por lo que, sustituyendo ξ en (2.34)

$$S(\xi) = 4(m+1)\xi - 4\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\xi)\xi_\nu + (\mathrm{Tr}\,A)A\xi - A^2\xi$$

luego, la ecuación (2.37) queda así

$$(-\mathrm{Tr}\ A^2)\xi + \phi \sum_{i=1}^{4m-1} \nabla_{e_i} A e_i + 4(m+1)\xi - 4\sum_{\nu=1}^{3} \eta_\nu(\xi)\xi_\nu + (\mathrm{Tr}\ A)A\xi = 0.$$

Multiplicando escalarmente la ecuación anterior por ξ obtenemos el resultado. $\square$

Por otro lado, por la ecuación de Codazzi (1.4) tenemos que, para $\{e_1, \ldots, e_{4m-1}\}$ base ortonormal de TM

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4m-1} g\big((\nabla_{e_i} A)X, \phi e_i\big) &= \\
&= -(4m-2)\eta(X) \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^{3} [g(\phi_\nu X, \phi\xi_\nu) + \eta_\nu(X)\mathrm{Tr}\ \phi\phi_\nu + 2g(\phi_\nu^2\xi, X)] \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu\phi X, \phi\phi_\nu\xi) - \sum_{\nu=1}^{3} \eta(X) g(\phi\xi_\nu, \phi\xi_\nu) \\
&= -(4m-2)\eta(X) - 3\eta(X) + \sum_{\nu=1}^{3} \eta_\nu(\xi)\eta_\nu(X) + \sum_{\nu=1}^{3} \eta_\nu(X)\mathrm{Tr}\ \phi\phi_\nu \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{3} \eta_\nu(\xi) g(\phi_\nu\phi X, \xi) - 3\eta(X) + \sum_{\nu=1}^{3} \eta^2(\xi_\nu)\eta(X) \\
&= -4(m+1)\eta(X) + 2\sum_{\nu=1}^{3} \eta_\nu(\xi)\eta_\nu(X) + \sum_{\nu=1}^{3} \eta_\nu(X)\mathrm{Tr}\ \phi\phi_\nu \\
&= -4(m+1)\eta(X) + 4\sum_{\nu=1}^{3} \eta_\nu(\xi)\eta_\nu(X)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Utilizando las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1 tenemos que si

$$U = \nabla_\xi \xi = \phi A\xi$$

entonces

$$\nabla_{e_i} U = \eta(A\xi)Ae_i - g(Ae_i, A\xi)\xi + \phi(\nabla_{e_i} A)\xi + \phi A\nabla_{e_i}\xi$$

luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\ U &= \sum_{i=1}^{4m-1} g(\nabla_{e_i} U, e_i) \\
&= (\mathrm{Tr}\ A)\eta(A\xi) - \eta(A^2\xi) - g((\nabla_{e_i} A)\xi, \phi e_i) - g(\phi A e_i, \phi A e_i).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Por otro lado, utilizando la fórmula (2.39)

$$\begin{aligned}
\|\phi A - A\phi\|^2 &= \sum_{i=1}^{4m-1} g\big((\phi A - A\phi)e_i, (\phi A - A\phi)e_i\big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{4m-1} g\big((\phi A - A\phi)e_i, e_j)g\big((\phi A - A\phi)e_i, e_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^{4m-1} \big[g(\phi Ae_j, e_i) + g(\phi Ae_i, e_j)\big]\big[g(\phi Ae_j, e_i) + g(\phi Ae_i, e_j)\big] \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{4m-1} g(\phi Ae_j, e_i)g(\phi Ae_j, e_i) + 2\sum_{i,j=1}^{4m-1} g(\phi Ae_j, e_i)g(\phi Ae_i, e_j) \\
&= -2\sum_{j=1}^{4m-1} g(\phi Ae_j, A\phi e_j) + 2\sum_{j=1}^{4m-1} g(\phi Ae_j, \phi Ae_j) \\
&= 2\mathrm{Tr}\, A^2 - 2(\mathrm{Tr}\, A)\eta(A\xi) + 2\sum_{i=1}^{4m-1} g\big((\nabla_{e_i} A)\xi, \phi e_i) + 2\mathrm{div}\, U. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.38) y (2.40)

$$\mathrm{div}\, U = \frac{1}{2}\|\phi A - A\phi\|^2 - \mathrm{Tr}\, A^2 + (\mathrm{Tr}\, A)\eta(A\xi) + 4(m+1) - 4\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu^2(\xi).$$

Teniendo en cuenta el Lema 2.6.3 queda

$$\mathrm{div}\, U = \frac{1}{2}\|\phi A - A\phi\|^2.$$

Así pues, tenemos que

1. si M es Hopf, $U = 0$ y, entonces, $\phi A - A\phi = 0$,
2. si M es compacta, $\frac{1}{2}\int_M \|\phi A - A\phi\|\mathrm{dV} = 0$, por lo que $\phi A - A\phi = 0$.

En ambos casos, como $\mathcal{L}_\xi g(X,Y) = g\big((\phi A - A\phi)X, Y\big)$ para todo $X, Y \in TM$ tenemos que $\mathcal{L}_\xi g = 0$ por lo que ξ es Killing y finalizamos la demostración del teorema. Por otro lado, como $\phi A = A\phi$, por [7] tenemos que M es una hipersuperficie real de tipo A.

Veamos ahora que si M es una hipersuperficie real de tipo A entonces ξ es de tipo Jacobi, es decir,

$$\nabla_X\nabla_X\xi + R(\xi, X)X = 0 \text{ para todo } X \in TM. \qquad (2.41)$$

Para $X = \xi$ se cumple trivialmente.

Para $X = \xi_2$ tenemos

$$\nabla_{\xi_2}\nabla_{\xi_2}\xi + R(\xi,\xi_2)\xi_2 = 0$$

por lo que

$$\nabla_{\xi_2}\phi A\xi_2 + 2\xi + 2\alpha\beta\xi = 0$$

y, entonces,

$$(\nabla_{\xi_2}\phi)A\xi_2 + \phi\nabla_{\xi_2}A\xi_2 + 2\xi + 2\alpha\beta\xi = 0. \tag{2.42}$$

De las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1 y del hecho de que M es de tipo A tenemos que

$$(\nabla_{\xi_2}\phi)A\xi_2 = -\beta^2\xi$$

por lo que, sustituyendo en (2.42) y multiplicando escalarmente por ξ resulta

$$\beta^2 = 2 + \alpha\beta.$$

Como $\alpha = \sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)$ y $\beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ para $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$, sin más que hacer los cálculos vemos que se cumple la ecuación (2.41). Para el resto de casos, $X = \xi_2, \xi_3, X_i \in T_\lambda, Y_i \in T_\mu$, el razonamiento es análogo. Con esto demostramos el corolario.

Capítulo 3

Respecto a los operadores de Jacobi R_{ξ_i}

A partir de la expresión (1.3) del tensor de curvatura R de una hipersuperficie real M de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ obtenemos la siguiente expresión para los operadores de Jacobi asociados a la base de la distribución $\mathfrak{D}^\perp = \mathrm{Span}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$,

$$\begin{aligned} R_{\xi_i}(X) &= R(X, \xi_i)\xi_i \\ &= X - \eta_i(X)\xi_i - 3g(\phi X, \xi_i)\phi\xi_i - 3\sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu X, \xi_i)\phi_\nu\xi_i \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu\phi\xi_i, \xi_i)(\phi_\nu\phi X - \eta(X)\xi_\nu) + \sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu\phi X, \xi_i)(\eta(\xi_i)\xi_\nu - \phi_\nu\phi\xi_i) \\ &\quad - \eta(\xi_i)\phi_i\phi X + \eta(X)\phi_i\phi\xi_i + g(A\xi_i, \xi_i)AX - g(AX, \xi_i)A\xi_i \end{aligned} \tag{3.1}$$

para cada vector tangente $X \in TM$.

En este capítulo, al igual que hicimos en el Capítulo 2 con el operador de Jacobi estructural R_ξ, vamos a estudiar el paralelismo de los operadores R_{ξ_i}, $i = 1, 2, 3$. Concretamente estudiaremos el $\mathfrak{D}^\perp$-paralelismo, es decir, el paralelismo a lo largo de la distribución $\mathfrak{D}^\perp$. Como obtendremos respuesta negativa a la existencia de hipersuperficies reales con tal propiedad, pasaremos a estudiar el paralelismo respecto a la distribución complementaria $\mathfrak{D}$. También en este caso se obtiene respuesta negativa. Definiremos la noción de tensor de tipo Codazzi como generalización de la de paralelismo y la aplicaremos al estudio de los operadores R_{ξ_i}, $i = 1, 2, 3$. También estudiaremos la invarianza de estos operadores, obteniendo una caracterización de las hipersuperficies de tipo A, en el caso de invarianza respecto del vector ξ, como aplicación del Teorema 2.4.1. Para finalizar el capítulo, estudiaremos una propiedad sobre la igualdad de las derivadas de Lie y covariante respecto del vector ξ, y otra sobre la conmutatividad de los R_{ξ_i}, $i = 1, 2, 3$ con los ϕ_j, $j = 1, 2, 3$.

A partir de la expresión (3.1) de los operadores de Jacobi $R_{\xi_i}, i = 1, 2, 3$ se obtiene la siguiente para la derivada covariante de dichos operadores que nos será de utilidad más adelante para el estudio del paralelismo de dichos operadores:

$$
\begin{gathered}
(\nabla_X R_{\xi_i})Y = -g(Y,\nabla_X\xi_i)\xi_i - \eta_i(Y)\nabla_X\xi_i - 3\Big[\big(\eta(Y)\eta_i(AX) \\
-\eta(\xi_i)g(AX,Y) + g(\phi Y,\nabla_X\xi_i)\big)\phi\xi_i + \eta_i(\phi Y)\big(\eta(\xi_i)AX - \eta_i(AX)\xi \\
+\phi\nabla_X\xi_i\big)\Big] - 3\textstyle\sum_{\nu=1}^{3}\Big[\big(-q_{\nu+1}(X)\eta_i(\phi_{\nu+2}Y) \\
+q_{\nu+2}(X)\eta_i(\phi_{\nu+1}Y) + \eta_\nu(Y)\eta_i(AX) - \eta_\nu(\xi_i)g(AX,Y) \\
+g(\phi_\nu Y,\nabla_X\xi_i)\big)\phi_\nu\xi_i + \eta_i(\phi_\nu Y)\big(-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}\xi_i \\
+q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}\xi_i + \eta_\nu(\xi_i)AX - \eta_i(AX)\xi_\nu + \phi_\nu\nabla_X\xi_i\big)\Big] \\
+\textstyle\sum_{\nu=1}^{3}\Big[\big(-g(AX,\phi_\nu\xi_i)\eta(\xi_i) + \eta_i(AX)\eta(\phi_\nu\xi_i) \\
+g(\nabla_X\xi_i,\phi\phi_\nu\xi_i) - q_{\nu+1}(X)\eta_i(\phi\phi_{\nu+2}\xi_i) + q_{\nu+2}(X)\eta_i(\phi\phi_{\nu+1}\xi_i) \\
-\eta_\nu(\xi_i)g(AX,\phi\xi_i) + \eta_i(AX)\eta_\nu(\phi\xi_i) + g(\phi_\nu\phi\xi_i,\nabla_X\xi_i)\big)\phi_\nu\phi Y \\
+\eta_i(\phi_\nu\phi\xi_i)\big(-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}\phi Y + q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}\phi Y + \eta_\nu(\phi Y)AX \\
-g(AX,\phi Y)\xi_\nu + \eta(Y)\phi_\nu AX - g(AX,Y)\phi_\nu\xi\big)\Big] \\
-\textstyle\sum_{\nu=1}^{3}\Big[\big(-\eta(\xi_i)g(AX,\phi_\nu\xi_i) + \eta_i(AX)\eta_\nu(\phi\xi_i) \\
+g(\nabla_X\xi_i,\phi\phi_\nu\xi_i) - q_{\nu+1}(X)\eta_i(\phi\phi_{\nu+2}\xi_i) \\
+q_{\nu+2}(X)\eta_i(\phi\phi_{\nu+1}\xi_i) - \eta_\nu(\xi_i)g(AX,\phi\xi_i) + \eta_i(AX)\eta_\nu(\phi\xi_i) \\
+g(\nabla_X\xi_i,\phi_\nu\phi\xi_i)\big)\eta(Y)\xi_\nu + \eta_i(\phi\phi_\nu\xi_i)\big(g(Y,\phi AX)\xi_\nu + \eta(Y)\nabla_X\xi_\nu\big)\Big] \\
+\textstyle\sum_{\nu=1}^{3}\Big[\big(-q_{\nu+1}(X)g(Y,\phi\phi_{\nu+2}\xi_i) + q_{\nu+2}(X)g(Y,\phi\phi_{\nu+1}\xi_i) \\
+\eta_\nu(\phi Y)\eta_i(AX) - g(AX,\phi Y)\eta_\nu(\xi_i) + \eta(Y)\eta_i(\phi_\nu AX) + g(AX,Y)\eta_\nu(\phi\xi_i) \\
+g(\phi_\nu\phi Y,\nabla_X\xi_i)\big)\eta(\xi_i)\xi_\nu + g(Y,\phi\phi_\nu\xi_i)\big((\eta(\nabla_X\xi_i) \\
+\eta_i(\phi AX)\big)\xi_\nu + \eta(\xi_i)\nabla_X\xi_\nu\big)\Big] - \textstyle\sum_{\nu=1}^{3}\Big[\big(-q_{\nu+1}(X)\eta_i(\phi_{\nu+2}\phi Y) \\
+q_{\nu+2}(X)\eta_i(\phi_{\nu+1}\phi Y) + \eta_\nu(\phi Y)\eta_i(AX) - g(AX,\phi Y)\eta_\nu(\xi_i) + \eta(Y)\eta_i(\phi_\nu AX) \\
+g(AX,Y)\eta(\phi_\nu\xi_i) + g(\phi_\nu\phi Y,\nabla_X\xi_i)\big)\phi_\nu\phi\xi_i + \eta_i(\phi_\nu\phi Y)\big(-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}\phi\xi_i \\
+q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}\phi\xi_i + \eta_\nu(\phi\xi_i)AX - g(AX,\phi\xi_i)\xi_\nu \\
+\eta(\xi_i)\phi_\nu AX - \eta_i(AX)\phi_\nu\xi + \phi_\nu\phi\nabla_X\xi_i\big)\Big] - \Big[\big(\eta(\nabla_X\xi_i) + \eta_i(\nabla_X\xi)\big)\Big]\phi_i\phi Y \\
+\eta(\xi_i)\big(-q_{i+1}(X)\phi_{i+2}\phi Y + q_{i+2}(X)\phi_{i+1}\phi Y + \eta_i(\phi Y)AX - g(AX,\phi Y)\xi_i \\
+\eta(Y)\phi_i AX - g(AX,Y)\phi_i\xi\big)\Big] + g(Y,\nabla_X\xi)\phi_i\phi\xi_i \\
+\eta(Y)\big(-q_{i+1}(X)\phi_{i+2}\phi\xi_i + q_{i+2}(X)\phi_{i+1}\phi\xi_i \\
-g(AX,\phi\xi_i)\xi_i + \phi_i\nabla_X\xi_i + \eta(\xi_i)\phi_i AX - \eta_i(AX)\phi_i\xi + \phi_i\phi\nabla_X\xi_i\big) \\
+\big(\eta_i(\nabla_X A\xi_i) + g(A\xi_i,\nabla_X\xi_i)\big)AY + \eta_i(A\xi_i)(\nabla_X A)Y \\
-\Big[\Big(\eta_i\big((\nabla_X A)Y\big) + g(AY,\nabla_X\xi_i)\Big)A\xi_i + \eta_i(AY)\nabla_X A\xi_i\Big]
\end{gathered} \tag{3.2}
$$

para todo $X, Y \in TM$.

3.1. $\mathfrak{D}^\perp$-paralelismo de R_{ξ_i}

En este apartado estudiaremos la existencia de hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ cuyos operadores $R_{\xi_i}, i = 1,2,3$ sean paralelos a lo largo de $\mathfrak{D}^\perp$. Más exactamente, probaremos el siguiente

Teorema 3.1.1. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf y tales que $(\nabla_X R_{\xi_i})Y = 0, i = 1,2,3$, para todo $X \in \mathfrak{D}^\perp$, $Y \in TM$ si, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ es A-invariante.*

Consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente

Corolario 3.1.2. *No existen hipersuperficies reales Hopf de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ tales que los operadores $R_{\xi_i}, i = 1,2,3$ sean paralelos si, o bien la componente en $\mathfrak{D}$ o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ es A-invariante.*

Para ello, comenzaremos viendo que, bajo las condiciones impuestas, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.

Lema 3.1.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf y tal que, o bien la $\mathfrak{D}$-componente de ξ, o bien la $\mathfrak{D}^\perp$-componente de ξ, sea A-invariante. Si $(\nabla_X R_{\xi_i})Y = 0$ para $i = 1,2,3$ y para todo $X \in \mathfrak{D}^\perp, Y \in TM$ entonces o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario. Si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ fuesen cero, ya habríamos terminado. Supongamos pues que ambos son no nulos. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2, resulta que $\alpha \neq 0$.

Teniendo en cuenta (2.4) y las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1 tenemos, por la ecuación de Codazzi (1.4),

$$\begin{aligned} g\big((\nabla_{\xi_1} A)X_0, \phi_1 X_0\big) &= g\big((\nabla_{X_0} A)\xi_1, \phi_1 X_0\big) \\ &= \alpha g(\nabla_{X_0}\xi_1, \phi_1 X_0) - g\big(A(\nabla_{X_0}\xi_1), \phi_1 X_0\big) \\ &= \alpha^2 - \frac{1}{\alpha}\alpha\big(\alpha^2 + 4\eta^2(X_0)\big) \\ &= -4\eta^2(X_0) \end{aligned}$$

Como estamos suponiendo $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$, resulta $g(\phi_\nu\phi\xi_1, \xi_1) = 0$, $\nu = 1,2,3$ y, entonces

$$\begin{aligned} R_{\xi_1}(X) &= R(X,\xi_1)\xi_1 \qquad (3.3)\\ &= X - \eta_1(X)\xi_1 - 3g(\phi X, \xi_1)\phi\xi_1 - 3\sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu X, \xi_1)\phi_\nu\xi_1 \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu\phi X, \xi_1)(\eta(\xi_1)\xi_\nu - \phi_\nu\phi\xi_1) \\ &\quad -\eta(\xi_1)\phi_1\phi X + \eta(X)\phi_1\phi\xi_1 + g(A\xi_1,\xi_1)AX - g(AX,\xi_1)A\xi_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X R_{\xi_1})Y &= -g(Y,\nabla_X\xi_1)\xi_1 - \eta_1(Y)\nabla_X\xi_1 - 3\Big[\big(\eta(Y)\eta_1(AX) \\
&-\eta(\xi_1)g(AX,Y) + g(\phi Y,\nabla_X\xi_1)\big)\phi\xi_1 + \eta_1(\phi Y)\big(\eta(\xi_1)AX - \eta_1(AX)\xi \\
&+\phi\nabla_X\xi_1\big)\Big] - 3\textstyle\sum_{\nu=1}^{3}\Big[\big(-q_{\nu+1}(X)\eta_1(\phi_{\nu+2}Y) \\
&+q_{\nu+2}(X)\eta_1(\phi_{\nu+1}Y) + \eta_\nu(Y)\eta_1(AX) - \eta_\nu(\xi_1)g(AX,Y) \\
&+g(\phi_\nu Y,\nabla_X\xi_1)\big)\phi_\nu\xi_1 + \eta_1(\phi_\nu Y)\big(-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}\xi_1 \\
&+q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}\xi_1 + \eta_\nu(\xi_1)AX - \eta_1(AX)\xi_\nu + \phi_\nu\nabla_X\xi_1\big)\Big] \\
&+\textstyle\sum_{\nu=1}^{3}\Big[\big(-q_{\nu+1}(X)g(Y,\phi\phi_{\nu+2}\xi_1) + q_{\nu+2}(X)g(Y,\phi\phi_{\nu+1}\xi_1) \\
&+\eta_\nu(\phi Y)\eta_1(AX) - g(AX,\phi Y)\eta_\nu(\xi_1) + \eta(Y)\eta_1(\phi_\nu AX) + g(AX,Y)\eta_\nu(\phi\xi_1) \\
&+g(\phi_\nu\phi Y,\nabla_X\xi_1)\big)\eta(\xi_1)\xi_\nu + g(Y,\phi\phi_\nu\xi_1)\big((\eta(\nabla_X\xi_1) \\
&+\eta_1(\phi AX)\big)\xi_\nu + \eta(\xi_1)\nabla_X\xi_\nu\big)\Big] - \textstyle\sum_{\nu=1}^{3}\Big[\big(-q_{\nu+1}(X)\eta_1(\phi_{\nu+2}\phi Y) \\
&+q_{\nu+2}(X)\eta_1(\phi_{\nu+1}\phi Y) + \eta_\nu(\phi Y)\eta_1(AX) - g(AX,\phi Y)\eta_\nu(\xi_1) + \eta(Y)\eta_1(\phi_\nu AX) \\
&+g(AX,Y)\eta(\phi_\nu\xi_1) + g(\phi_\nu\phi Y,\nabla_X\xi_1)\big)\phi_\nu\phi\xi_1 + \eta_1(\phi_\nu\phi Y)\big(-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}\phi\xi_1 \\
&+q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}\phi\xi_1 + \eta_\nu(\phi\xi_1)AX - g(AX,\phi\xi_1)\xi_\nu \\
&+\eta(\xi_1)\phi_\nu AX - \eta_1(AX)\phi_\nu\xi + \phi_\nu\phi\nabla_X\xi_1\big)\Big] - \Big[\big(\eta(\nabla_X\xi_1) + \eta_1(\nabla_X\xi)\big)\Big]\phi_1\phi Y \\
&+\eta(\xi_1)\big(-q_2(X)\phi_3\phi Y + q_3(X)\phi_2\phi Y + \eta_1(\phi Y)AX - g(AX,\phi Y)\xi_1 \\
&+\eta(Y)\phi_1 AX - g(AX,Y)\phi_1\xi\big)\Big] + g(Y,\nabla_X\xi)\phi_1\phi\xi_1 + \eta(Y)\big(-q_2(X)\phi_3\phi\xi_1 + q_3(X)\phi_2\phi\xi_1 \\
&-g(AX,\phi\xi_1)\xi_1 + \phi_1\nabla_X\xi_1 + \eta(\xi_1)\phi_1 AX - \eta_1(AX)\phi_1\xi + \phi_1\phi\nabla_X\xi_1\big) \\
&+\big(\eta_1(\nabla_X A\xi_1) + g(A\xi_1,\nabla_X\xi_1)\big)AY + \eta_1(A\xi_1)(\nabla_X A)Y \\
&-\Big[\Big(\eta_1\big((\nabla_X A)Y\big) + g(AY,\nabla_X\xi_1)\Big)A\xi_1 + \eta_1(AY)\nabla_X A\xi_1\Big]
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
0 &= g\big((\nabla_{\xi_1} R_{\xi_1})X_0, \phi_1 X_0\big) \\
&= -3\alpha g(\phi\xi_1,\phi_1 X_0) - \alpha\eta(X_0)g(\phi_1\xi,\phi_1 X_0) + \alpha g\big((\nabla_{\xi_1} A)X_0,\phi_1 X_0\big) \\
&= -3\alpha\eta^2(X_0) - \alpha\eta^2(X_0) - 4\alpha\eta^2(X_0) \\
&= -8\alpha\eta^2(X_0)
\end{aligned}
$$

y, como $\alpha \neq 0$, tenemos contradicción. $\square$

En el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, como $\xi = \xi_1$, la demostración de que M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante coincide con la del Lema 2.2.3.

Para el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ la demostración se sigue del Lema 2.1.6.

Veamos ahora que ni las hipersuperficies de tipo A ni las de tipo B verifican la condición $(\nabla_X R_{\xi_i})Y = 0$ para todo $i = 1,2,3$ y todo $X \in \mathfrak{D}^\perp, Y \in TM$.

En el caso de las hipersuperficies de tipo A tenemos que, al ser $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, podemos considerar $R_{\xi_1} = R_\xi$ y, entonces, (2.7) y el Teorema 1.8.20 da que

$$0 = (\nabla_{\xi_2} R_{\xi_1})\xi = (\nabla_{\xi_2} R_\xi)\xi = \beta(\alpha\beta + 2)\xi_3$$

y, entonces, o bien $\beta = 0$ o bien $\alpha\beta + 2 = 0$. El caso $\beta = 0$ no puede ocurrir ya que, como $\beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ para algún $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$ entonces no puede anularse. Sea pues $\alpha\beta + 2 = 0$ donde $\alpha = \sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)$. Tendríamos que

$$\begin{aligned}
0 = \alpha\beta + 2 &= \big(\sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)\big)\big(\sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)\big) + 2 \\
&= 2\big(\cot^2(\sqrt{2}r) - 1\big) + 2 \\
&= 2\cot^2(\sqrt{2}r)
\end{aligned}$$

y, entonces, $\cot(\sqrt{2}r) = 0$ para algún $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$, lo que nos lleva a contradicción.

En el caso de las hipersuperficies de tipo B, a partir de (3.4) y del Teorema 1.8.28 resulta

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_{\xi_2} R_{\xi_1})\xi \\
&= g(\phi_3 A\xi_2, \xi_1)\phi_3\phi\xi_1 - q_2(\xi_2)\phi_3\phi\xi_1 + q_3(\xi_2)\phi_3\phi\xi_1 \\
&\quad + \phi_1\nabla_{\xi_2}\xi_1 + \phi_1\phi\nabla_{\xi_2}\xi_1 + \beta(\nabla_{\xi_2}A)\xi \\
&= \beta\phi_3\phi\xi_1 - q_2(\xi_2)\phi_3\phi\xi_1 + q_3(\xi_2)\phi_3\phi\xi_1 \\
&\quad + \phi_1\nabla_{\xi_2}\xi_1 + \phi_1\phi\nabla_{\xi_2}\xi_1 + \alpha\beta\phi\xi_2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Como

$$g(\phi_1\nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_2) = -g(\nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_3) = -\beta + q_2(\xi_2)g(\xi_3, \xi_3) = -\beta + q_2(\xi_2)$$

y

$$g(\phi_1\phi\nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_2) = -g(\phi\nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_3) = g(\nabla_{\xi_2}\xi_1, \phi\xi_3) = 0,$$

multiplicando escalarmente por ξ_2 en (3.5) nos queda $\beta = q_2(\xi_2)$.

Por otro lado, como

$$g(\phi_1\nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_3) = g(\nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_2) = q_3(\xi_2)$$

y

$$g(\phi_1\phi\nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_3) = g(\phi\nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_2) = -g(\nabla_{\xi_2}\xi_1, \phi\xi_2) = 0,$$

multiplicando escalarmente por ξ_3 en (3.5) nos queda que $q_3(\xi_2) = 0$.

Luego, con todo esto, (3.5) quedaría como

$$0 = (\nabla_{\xi_2} R_{\xi_1})\xi = \phi_1\nabla_{\xi_2}\xi_1 + \phi_1\phi\nabla_{\xi_2}\xi_1 + \alpha\beta\phi\xi_2. \tag{3.6}$$

Si ahora multiplicamos escalarmente por $\phi\xi_2$, utilizando las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1, tenemos

$$g(\phi_1\nabla_{\xi_2}\xi_1, \phi\xi_2) = 0$$

y, como

$$\begin{aligned} g(\phi_1\phi\xi_3, \phi\xi_2) &= g(\phi\phi_1\xi_3, \phi\xi_2) = -g(\xi_2, \xi_2) = -1, \\ \phi^2\xi_2 &= -\xi_2 + \eta(\xi_2)\xi = -\xi_2 \quad \text{y} \\ g(\phi_1\phi\phi_1\xi_2, \phi\xi_2) &= g(\phi_1\phi\xi_3, \phi\xi_2) = -1 \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} g(\phi_1\phi\nabla_{\xi_2}\xi_1, \phi\xi_2) &= g\big(\phi_1\phi\big(q_3(\xi_2) - q_2(\xi_2)\xi_3 + \phi_1 A\xi_2\big), \phi\xi_2\big) \\ &= -q_2(\xi_2)g(\phi_1\phi\xi_3, \phi\xi_2) + \beta g(\phi_1\phi\phi_1\xi_2, \phi\xi_2) = \beta - \beta = 0. \end{aligned}$$

Si ahora multiplicamos escalarmente (3.6) por $\phi\xi_2$ nos queda

$$\alpha\beta = 0$$

luego, o bien $\alpha = 0$, o bien $\beta = 0$. Pero como en este caso $\alpha = \tan(2r)$ y $\beta = \cot(2r)$ para algún $r \in (0, \pi/4)$, obtenemos una contradicción.

3.2. $\mathfrak{D}$-paralelismo de R_{ξ_i}

En este apartado, al haber obtenido respuesta negativa al problema sobre la existencia de hipersuperficies reales tales que los operadores de Jacobi $R_{\xi_i}, i = 1, 2, 3$ sean paralelos a lo largo de $\mathfrak{D}^\perp$ estudiaremos la existencia de hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ cuyos operadores $R_{\xi_i}, i = 1, 2, 3$ sean paralelos a lo largo de $\mathfrak{D}$. Más exactamente, probaremos el siguiente

Teorema 3.2.1. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf y, tal que $(\nabla_X R_{\xi_i})Y = 0, i = 1, 2, 3$, para todo $X \in \mathfrak{D}$, $Y \in TM$ si, o bien la componente en $\mathfrak{D}$ o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ es A-invariante.*

Para ello, comenzaremos viendo que, bajo las condiciones impuestas, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.

Lema 3.2.2. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf y tal que, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^\perp$-componente de ξ, sea A-invariante. Si $(\nabla_X R_{\xi_i})Y = 0$, $i = 1, 2, 3$ para todo $X \in \mathfrak{D}, Y \in TM$ entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario. Si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ fuesen cero, ya habríamos terminado. Supongamos pues que ambos son no nulos. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 resulta que $\alpha \neq 0$.

Por un lado, como

$$\begin{aligned} (\nabla_{X_0} R_{\xi_1})\xi_1 &= -\nabla_{X_0}\xi_1 - 3\alpha\eta^2(X_0)\phi_1 X_0 + \eta(\xi_i)\phi_1\nabla_{X_0}\xi_1 \\ &\quad + \phi_1\phi\nabla_{X_0}\xi_1 + \alpha(\nabla_{X_0}A)\xi_1 - \alpha\nabla_{X_0}A\xi_1 \\ &= -\nabla_{X_0}\xi_1 - 3\alpha\eta^2(X_0)\phi_1 X_0 + \eta(\xi_i)\phi_1\nabla_{X_0}\xi_1 + \phi_1\phi\nabla_{X_0}\xi_1 - \alpha A\nabla_{X_0}\xi_1, \end{aligned}$$

multiplicando escalarmente por X_0

$$\begin{aligned} 0 &= g\big((\nabla_{X_0}R_{\xi_1})\xi_1, X_0\big) \\ &= -g(\nabla_{X_0}\xi_1, X_0) + \eta(\xi_1)g(\phi_1\nabla_{X_0}\xi_1, X_0) + g(\phi_1\phi\nabla_{X_0}\xi_1, X_0) - \alpha g(A\nabla_{X_0}\xi_1, X_0). \end{aligned}$$

Como por hipótesis $AX_0 = \alpha X_0$, teniendo en cuenta las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1 resulta que

$$\begin{aligned} &g(\nabla_{X_0}\xi_1, X_0) = g(\phi_1 AX_0, X_0) = \alpha g(\phi_1 X_0, X_0) = 0, \\ &g(\phi_1\nabla_{X_0}\xi_1, X_0) = -g(\nabla_{X_0}\xi_1, \phi_1 X_0) = -g(\phi_1 AX_0, \phi_1 X_0) = -\alpha g(\phi_1 X_0, \phi_1 X_0) = -\alpha, \\ &g(\phi_1\phi\nabla_{X_0}\xi_1, X_0) = g(\nabla_{X_0}\xi_1, \phi\phi_1 X_0) = g(\phi_1 AX_0, \phi\phi_1 X_0) = \alpha g(\phi_1 X_0, \phi\phi_1 X_0) = 0 \\ &\text{y} \\ &g(A\nabla_{X_0}\xi_1, X_0) = \alpha g(\nabla_{X_0}\xi_1, X_0) = \alpha g(\phi_1 AX_0, X_0) = \alpha^2 g(\phi_1 X_0, X_0) = 0. \end{aligned}$$

Así pues nos queda

$$0 = -\alpha\eta(\xi_1)$$

que nos da una contradicción. □

En el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, al ser $\xi = \xi_1$, la demostración de que M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante coincide con la del Lema 2.3.3.

Para el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ la demostración se obtiene a partir del Lema 2.1.6.

Veamos ahora que ni las hipersuperficies de tipo A ni las de tipo B verifican la condición de paralelismo a lo largo de $\mathfrak{D}$.

En el caso de las hipersuperficies de tipo A podemos considerar $R_{\xi_1} = R_\xi$ y, así, teniendo en cuenta (3.3)

$$0 = (\nabla_X R_{\xi_1})\xi = (\nabla_X R_\xi)\xi = -\phi AX - \alpha A\phi AX - 2\eta_3(AX)\xi_2 + 2\eta_2(AX)\xi_3 - \phi_1 AX$$

para todo $X \in \mathfrak{D}$.

Utilizando el Teorema 1.8.20 dado en la introducción, para $X_i \in T_\lambda$ tenemos que, por un lado, $X_i \perp \mathbb{H}\xi =< \xi, J_1\xi, J_2\xi, J_3\xi >=< \xi, N, \xi_2, \xi_3 >$ luego, también $\phi X_i \perp \mathbb{H}\xi$ y, además, para $X_i \in T_\lambda$

$$\phi_1(\phi X_i) = \phi\phi_1 X_i - \eta_1(X_i)\xi + \eta(X_i)\xi_1 = \phi\phi_1 X_1 = \phi(\phi X_i)$$

luego, resulta que $\phi X_i \in T_\lambda$ y, entonces,

$$\begin{aligned} 0 = (\nabla_{X_i}R_\xi)\xi &= -\phi AX_i - \alpha A\phi AX_i - 2\eta_3(AX_i)\xi_2 + 2\eta_2(AX_i)\xi_3 - \phi_1 AX_i \\ &= -\lambda\phi X_i - \alpha\lambda\phi X_i - \lambda\phi_1 X_i \\ &= -2\lambda\phi X_i - \alpha\lambda\phi AX_i \\ &= -2\lambda\phi X_i - \alpha\lambda^2\phi X_i \end{aligned}$$

luego,

$$2\lambda + \alpha\lambda^2 = 0$$

luego, o bien $\lambda = 0$, o bien $2 + \alpha\lambda = 0$ para algún $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$.

Pero $\lambda = 0$ no puede ocurrir pues $\lambda = -\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}r)$ para algún $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$. Si, por el contrario, $2 + \alpha\lambda = 0$ tendríamos

$$0 = \Big(\big(\sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)\big)\big(-\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}r)\big)\Big) + 2 = -4\cot(\sqrt{8}r)\tan(\sqrt{2}r) + 2 = 2\tan^2(\sqrt{2}r)$$

pero, $\tan(\sqrt{2}r)$ no es nulo para $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$.

En el caso de las hipersuperficies de tipo B, como $\xi \in \mathfrak{D}$, teniendo en cuenta (3.4)

$$\begin{aligned} 0 = (\nabla_\xi R_{\xi_1})\xi_1 &= -\nabla_\xi \xi_1 - 3\alpha\phi\xi_1 - 3g(\phi_2\xi_1, \nabla_\xi\xi_1)\phi_2\xi_1 - 3g(\phi_3\xi_1, \nabla_\xi\xi_1)\phi_3\xi_1 \\ &= +\beta g(\nabla_\xi A\xi_1, \xi_1)\xi_1 + \beta(\nabla_\xi A)\xi_1 - \beta g\big((\nabla_\xi A)\xi_1, \xi_1\big)\xi_1 - \beta\nabla_\xi A\xi_1 \end{aligned}$$

y, entonces,

$$0 = g\big((\nabla_\xi R_{\xi_1})\xi_1, \phi\xi_1\big) = -\alpha - 3\alpha = -4\alpha$$

pero, como en este caso $\alpha = -2\tan(2r)$ para algún $r \in (0, \pi/4)$, tenemos contradicción.

3.3. R_{ξ_i} de tipo Codazzi

En este apartado, ante las respuestas negativas a los problemas sobre existencia de hipersuperficies reales cuyos operadores de Jacobi $R_{\xi_i}, i = 1, 2, 3$ sean paralelos a lo largo de las distribuciones $\mathfrak{D}^\perp$ y $\mathfrak{D}$ estudiaremos una generalización del concepto de paralelismo, la existencia de hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ cuyos operadores $R_{\xi_i}, i = 1, 2, 3$ sean de tipo Codazzi. En general, diremos que un tensor T de tipo $(1, 1)$ sobre una hipersuperficie real M es de tipo Codazzi si satisface la ecuación $(\nabla_X T)Y = (\nabla_Y T)X$ para todo $X, Y \in TM$. Pérez, Santos y Suh [42] han estudiado esta condición en el espacio proyectivo complejo tomando como tensor T el operador de Jacobi estructural R_ξ llegando a la conclusión de que no existen tales hipersuperficies. Para las hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ Jeong, Lee y Suh [13] demuestran que tampoco en este caso existen hipersuperficies reales cuyo operador de Jacobi estructural R_ξ sea de tipo Codazzi considerando hipersuperficies Hopf tales que, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante. Ahora nosotros, vamos a estudiar este concepto aplicado a los operadores de Jacobi $R_{\xi_i}, i = 1, 2, 3$. Concretamente, probaremos el siguiente

Teorema 3.3.1. *No existen hipersuperficies reales Hopf de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ tales que $(\nabla_X R_{\xi_i})Y = (\nabla_Y R_{\xi_i})X, i = 1, 2, 3$, con $X, Y \in TM$ si, o bien la componente en $\mathfrak{D}$ o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ es A-invariante.*

Para ello, comenzaremos viendo que, bajo las condiciones impuestas, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.

Lema 3.3.2. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, tal que $(\nabla_X R_{\xi_i})Y = (\nabla_Y R_{\xi_i})X, i = 1,2,3$ para todo $X, Y \in TM$ y, o bien la $\mathfrak{D}$-componente de ξ, o bien la $\mathfrak{D}^\perp$-componente de ξ, sea A-invariante. Entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. Como $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario. Si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ fuesen cero, ya habríamos terminado. Supongamos entonces $\eta(X_0)\eta(\xi_1) \neq 0$. Por el Lema 2.1.2 tenemos que $\alpha \neq 0$.

Teniendo en cuenta que $\phi\xi_1 = \phi_1\xi = \eta(X_0)\phi_1 X_0$, la expresión de la derivada covariante de R_{ξ_1} (3.4) y las fórmulas dadas en el apartado (1.8) del Capítulo 1 resulta

$$\begin{aligned} g\big((\nabla_\xi R_{\xi_1})\xi_1, \phi_1 X_0\big) &= -\alpha\eta(X_0) - 3\alpha\eta^3(X_0) - \alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) + \alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) \\ &\quad +\alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) - \alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) + \alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) \\ &\quad -\alpha g(\nabla_\xi \xi_1, A\phi_1 X_0) \\ &= -\alpha\eta(X_0) - 3\alpha\eta^3(X_0) + \alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) - \alpha\frac{\alpha^2 + 4\eta^2(X_0)}{\alpha}\eta(X_0) \\ &= -\alpha\eta(X_0) - \alpha^2\eta(X_0) + \alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) - \alpha^2\eta(X_0) - 4\alpha\eta^3(X_0) \\ &= -\alpha\eta(X_0) - \alpha^2\eta(X_0) - 7\alpha\eta^3(X_0) + \alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} g\big((\nabla_{\xi_1} R_{\xi_1})\xi, \phi_1 X_0\big) &= -3\alpha\eta(X_0) + 3\alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) + \alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) - \alpha\eta(X_0) \\ &\quad +\alpha g\big((\nabla_{\xi_1} A)\xi, \phi_1 X_0\big) - \alpha\eta(\xi_1) g(\nabla_{\xi_1} A\xi_1, \phi_1 X_0) \\ &= -4\alpha\eta(X_0) + 4\alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) - 4\alpha\eta^3(X_0) \end{aligned}$$

Como R_{ξ_1} es de tipo Codazzi

$$g\big((\nabla_\xi R_{\xi_1})\xi_1, \phi_1 X_0\big) = g\big((\nabla_{\xi_1} R_{\xi_1})\xi, \phi_1 X_0\big)$$

y, entonces,

$$-\alpha\eta(X_0) - \alpha^2\eta(X_0) - 7\alpha\eta^3(X_0) + \alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) = -4\alpha\eta(X_0) + 4\alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) - 4\alpha\eta^3(X_0)$$

luego,

$$\begin{aligned} 0 &= 3\alpha\eta(X_0)\eta^2(\xi_1) + 3\alpha\eta^3(X_0) + \alpha^2\eta(X_0) - 3\alpha\eta(X_0) \\ &= \alpha\eta(X_0)\big(3\eta^2(\xi_1) + 3\eta^2(X_0) + \alpha - 3\big) \\ &= \alpha^2\eta(X_0). \end{aligned}$$

Como $\alpha \neq 0$, hemos terminado. □

Probemos ahora que si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante.

Lema 3.3.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, tal que $(\nabla_X R_{\xi_i})Y = (\nabla_Y R_{\xi_i})X$, $i = 1,2,3$ para todo $X, Y \in TM$ y $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. En este caso, como $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, podemos suponer que $\xi = \xi_1$. Así pues, para $i = 1$, $(\nabla_X R_{\xi_1})Y = (\nabla_Y R_{\xi_1})X$ y, por lo tanto, $(\nabla_X R_\xi)Y = (\nabla_Y R_\xi)X$. Si ahora tomamos $Y = \xi$ y $X \in \mathfrak{D}$ resulta que

$$(\nabla_X R_\xi)\xi = -\phi AX - \alpha A\phi AX - 2\eta_3(AX)\xi_2 + 2\eta_2(AX)\xi_3 - \phi_1 AX$$

y, por otro lado,

$$(\nabla_\xi R_\xi)X = \xi(\alpha)AX + \alpha(\nabla_\xi A)X$$

con lo que

$$-\phi AX - \alpha A\phi AX - 2\eta_3(AX)\xi_2 + 2\eta_2(AX)\xi_3 - \phi_1 AX = \xi(\alpha)AX + \alpha(\nabla_\xi A)X$$

Si ahora multiplicamos escalarmente por ξ_2

$$-\alpha\eta_2(A\phi AX) - 2\eta_3(AX) = \xi(\alpha)\eta_2(AX) + \alpha\eta_2\big((\nabla_\xi A)X\big) \tag{3.7}$$

y, multiplicando escalarmente por ξ_3

$$-\alpha\eta_3(A\phi AX) + 2\eta_2(AX) = \xi(\alpha)\eta_3(AX) + \alpha\eta_3\big((\nabla_\xi A)X\big) \tag{3.8}$$

Utilizando la ecuación de Codazzi

$$\eta_2\big((\nabla_\xi A)X\big) = \eta_2\big((\nabla_X A)\xi\big) = -\eta_2(A\phi AX) + \alpha\eta_3(AX)$$

y

$$\eta_3\big((\nabla_\xi A)X\big) = \eta_3\big((\nabla_X A)\xi\big) = -\eta_3(A\phi AX) - \alpha\eta_2(AX)$$

que, junto con (3.7) y (3.8) dan lugar a

$$(\alpha^2 + 2)\eta_3(AX) + \xi(\alpha)\eta_2(AX) = 0 \tag{3.9}$$

y

$$-(\alpha^2 + 2)\eta_2(AX) + \xi(\alpha)\eta_3(AX) = 0. \tag{3.10}$$

Si $\xi(\alpha) = 0$ hemos terminado. En caso contrario, de (3.9) y (3.10) obtenemos que

$$\eta_2(AX) = -\frac{\alpha^2+2}{\xi(\alpha)}\eta_3(AX) \quad \text{y} \quad \eta_3(AX) = \frac{\alpha^2+2}{\xi(\alpha)}\eta_2(AX)$$

y, así,

$$\eta_2(AX) = 0 \quad \text{y} \quad \eta_3(AX) = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{D}$. □

Para el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ véase el Lema 2.1.6.

Por último, veamos que ni las hipersuperficies reales de tipo A ni las de tipo B verifican que los R_{ξ_i}, $i = 1, 2, 3$ son de tipo Codazzi.

En el caso de las hipersuperficies de tipo A, como $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ podemos considerar $R_{\xi_1} = R_\xi$ y, así, $(\nabla_X R_{\xi_1})Y = (\nabla_Y R_{\xi_1})X$ equivale a $(\nabla_X R_\xi)Y = (\nabla_Y R_\xi)X$.

Poniendo $Y = \xi$ y $X = \xi_2$ tendría que ser $(\nabla_{\xi_2} R_\xi)\xi = (\nabla_\xi R_\xi)\xi_2$ que da lugar, teniendo en cuenta (2.7), a

$$\begin{aligned} 0 &= -\phi A\xi_2 - (\xi\alpha)A\xi_2 - \alpha(\nabla_\xi A)\xi_2 - \alpha A\phi A\xi_2 \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{3}[-\eta_\nu(\phi A\xi_2)\xi_\nu + 3\eta_\nu(A\xi_2)\phi_\nu\xi] - \phi_1 A\xi_2 + 4\alpha\phi_2\xi - 4\alpha\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi\xi_2)\xi_\nu \\ &= -\alpha(\nabla_\xi A)\xi_2 + \alpha\beta^2\xi_3 - 3\beta\phi_2\xi - \beta_{\xi_3} \\ &= -\alpha(\nabla_\xi A)\xi_2 + \alpha\beta^2\xi_3 + 2\beta\xi_3. \end{aligned}$$

Como $(\nabla_\xi A)\xi_2 = (\alpha - \beta)q_3(\xi)\xi_1$, obtenemos

$$-\alpha(\alpha-\beta)q_3(\xi)\xi_1 + \beta(\alpha\beta+2)\xi_3 = 0$$

con lo que

$$-\alpha(\alpha-\beta)q_3(\xi) = 0 \quad \text{y} \quad \beta(\alpha\beta+2) = 0.$$

De $-\alpha(\alpha-\beta)q_3(\xi) = 0$ distinguimos tres casos:

Caso I, $\alpha = 0$. En este caso, como $\beta(\alpha\beta+2) = 0$, tenemos que $\beta = 0$ pero, como $\beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ para algún $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$, tendríamos contradicción.

Caso II, $\alpha = \beta$. En este caso, como $\beta(\alpha\beta+2) = 0$, tenemos que $\alpha(\alpha^2+2) = 0$ y, entonces, $\alpha = 0$ que ya hemos visto que no puede ocurrir.

Caso III, $q_3(\xi) = 0$. En este caso, como $\beta(\alpha\beta+2) = 0$, tenemos que, o bien $\beta = 0$, que ya hemos visto que no puede ocurir, o bien $\alpha\beta + 2 = 0$. Como $\alpha = \sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)$ para algún $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = \alpha\beta + 2 &= \big(\sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)\big)\big(\sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)\big) + 2 \\ &= 2\big(\cot^2(\sqrt{2}r) - 1\big) + 2 \\ &= 2\cot^2(\sqrt{2}r) \end{aligned}$$

y, entonces, $\cot(\sqrt{2}r) = 0$ para algún $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$, lo que nos lleva a contradicción.

Para el caso de las hipersuperficies de tipo B tenemos que, por un lado

$$g\big((\nabla_\xi R_{\xi_1})\xi_1, \phi\xi_1\big) = -\alpha - 3\alpha = -4\alpha$$

y, por otro lado,

$$g\big((\nabla_{\xi_1} R_{\xi_1})\xi, \phi\xi_1\big) = -3\beta - \beta + \alpha\beta^2 = -4\beta + \alpha\beta^2.$$

Igualando,

$$-4\alpha = -4\beta + \alpha\beta^2 \quad \text{y, entonces,} \quad \alpha = \frac{4\beta}{4+\beta^2}$$

donde $\alpha = -2\tan(2r)$ y $\beta = 2\cot(2r)$ para algún $r \in (0, \pi/4)$. Luego,

$$-2\tan(2r) = \frac{8\cot(2r)}{4 + 4\cot^2(2r)}$$

es decir,

$$-\tan(2r) = \frac{\cot(2r)}{1 + \cot^2(2r)}.$$

Por tanto

$$-\tan(2r) - \frac{1}{\tan(2r)} = \frac{1}{\tan(2r)}$$

luego,

$$-\tan^2(2r) = 2$$

que nos lleva a contradicción.

3.4. Invarianza de los Operadores de Jacobi R_{ξ_i}

Ahora vamos a estudiar la derivada de Lie con respecto a cualquier campo $X \in TM$ de los operadores $R_{\xi_i}, i = 1, 2, 3$ que denotaremos por $\mathcal{L}_X R_{\xi_i}, i = 1, 2, 3$. En principio, estudiaremos una condición más débil, a saber, la ξ-invarianza $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = 0, i = 1, 2, 3$ de $R_{\xi_i}, i = 1, 2, 3$ obteniendo una caracterización de las hipersuperficies de tipo A para después, a modo de corolario, obtener un teorema de no existencia para la derivada de Lie en general, concretamente demostraremos lo siguiente

Teorema 3.4.1. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, o bien la componente en $\mathfrak{D}$ o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A invariante y $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = 0, i = 1, 2, 3$. Entonces M es localmente congruente a una hipersuperficie de tipo A.*

Corolario 3.4.2. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante y $\mathcal{L}_X R_{\xi_i} = 0, i = 1, 2, 3$.*

Empecemos probando que, bajo nuestras hipótesis, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.

Lema 3.4.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante y $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = 0, i = 1, 2, 3$. Entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario. Si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ fuese alguno nulo, hemos acabado. Supongamos pues que ambos son no nulos. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 resulta que $\alpha \neq 0$. Teniendo en cuenta (2.1) y tomando $i = 1$ en (3.1) resulta

$$R_{\xi_1}(\phi X_0) = 8\eta^2(X_0)\phi X_0 + \alpha^2 \phi X_0$$

y

$$R_{\xi_1}(X_0) = \alpha^2 X_0.$$

Como por hipótesis

$$0 = (\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i})X = (\nabla_\xi R_{\xi_i})X - \phi A R_{\xi_i}(X) + R_{\xi_i}(\phi AX)$$

tenemos que

$$(\nabla_\xi R_{\xi_i})X = \phi A R_{\xi_i}(X) - R_{\xi_i}(\phi AX).$$

Por otro lado,

$$g\big((\nabla_\xi R_{\xi_i})X, Y\big) = g\big(X, (\nabla_\xi R_{\xi_i})Y\big)$$

con lo que

$$g\big(X, (-R_{\xi_i}A\phi + A\phi R_{\xi_i})Y\big) = g\big(X, (\phi A R_{\xi_i} - R_{\xi_i}\phi A)Y\big).$$

Así pues,

$$(\phi A - A\phi)R_{\xi_i}(Y) = R_{\xi_i}\big((\phi A - A\phi)Y\big)$$

para todo $Y \in TM$.

Si tomamos $Y = X_0$ e $i = 1$ resulta

$$\phi A R_{\xi_1}(X_0) - A\phi R_{\xi_1}(X_0) = R_{\xi_1}(\phi A X_0) - R_{\xi_1}(A\phi X_0).$$

Si ahora multiplicamos escalarmente por ϕX_0

$$\begin{aligned}
g(\phi A R_{\xi_1}(X_0), \phi X_0) &= \alpha^3\eta^2(\xi_1)\\
g(A\phi R_{\xi_1}(X_0), \phi X_0) &= \alpha^3\eta^2(\xi_1) + 4\alpha\eta^2(X_0)\eta^2(\xi_1)\\
g(R_{\xi_1}(\phi A X_0), \phi X_0) &= 8\alpha\eta^2(X_0)\eta^2(\xi_1) + \alpha^3\eta^2(\xi_1)\\
g(R_{\xi_1}(A\phi X_0), \phi X_0) &= 12\alpha\eta^2(X_0)\eta^2(\xi_1) + \alpha^3\eta^2(\xi_1) + \frac{32}{\alpha}\eta^4(X_0)\eta^2(\xi_1)
\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}
-4\alpha^2\eta^2(X_0)\eta^2(\xi_1) &= -4\alpha^2\eta^2(X_0)\eta^2(\xi_1) - 32\eta^4(X_0)\eta^2(\xi_1),\\
0 &= -32\eta^4(X_0)\eta^2(\xi_1)
\end{aligned}$$

llegando a una contradicción. $\square$

Para ver que en el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante, como $\xi = \xi_1$, la demostración coincide con la del Lema (2.4.4).

Para el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ la demostración se encuentra en el Lema 2.1.6.

Veamos ahora que las hipersuperficies de tipo B no cumplen $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = 0, i = 1, 2, 3.$

Si fuese cierto, ya vimos anteriormente que

$$R_{\xi_i}(\phi AX) - R_{\xi_i}(A\phi X) = \phi AR_{\xi_i}(X) - A\phi R_{\xi_i}(X)$$

por lo que, tomando $X = \xi_1$ e $i = 1$, resulta $R_{\xi_1}(\phi A\xi_1) = 0$ y, así, $\beta R_{\xi_1}(\phi\xi_1) = 0$ y, entonces, $4\beta = 0$. Pero, en este caso, $\beta = 2\cot(2r)$ con $r \in (0, \pi/4)$ luego, tenemos contradicción.

Por otro lado, las hipersuperficies de tipo A no verifican $\mathcal{L}_X R_{\xi_i} = 0$ para todo $X \in TM$, $i = 1, 2, 3$ (véase el apartado 2.4 del Capítulo 2).

Sin embargo, las hipersuperficies de tipo A sí que cumplen que $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = 0$ para $i = 1, 2, 3$.

Para $i = 1$, como en el caso de las hipersuperficies de tipo A resulta que $\xi = \xi_1$, ya lo tendríamos comprobado (véase el apartado 2.4 del Capítulo 2).

Para $i = 2$, $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_2} = 0$ equivale a

$$R_{\xi_2}(\phi AX) - R_{\xi_2}(A\phi X) = \phi AR_{\xi_2}(X) - A\phi R_{\xi_2}(X).$$

Si $X = \xi$, $\phi AR_{\xi_2}(\xi) = A\phi R_{\xi_2}(\xi)$ es la ecuación que queda. Como $R_{\xi_2}(\xi) = 2\xi + \alpha\beta\xi$, la ecuación se cumple.

Si $X = \xi_2$ queda

$$\begin{aligned} R_{\xi_2}(\phi A\xi_2) &= R_{\xi_2}(A\phi\xi_2) \\ -\beta R_{\xi_2}(\xi_3) &= -R_{\xi_2}(A\xi_3) \end{aligned}$$

luego, también sale.

Si $X = \xi_3$, $\phi AR_{\xi_2}(\xi_3) = A\phi R_{\xi_2}(\xi_3)$ donde $R_{\xi_2}(\xi_3) = 8\xi_3 + \beta^2\xi_3$ luego,

$$\begin{aligned} \phi A(8\xi_3 + \beta^2\xi_3) &= A\phi(8\xi_3 + \beta^2\xi_3) \\ 8\beta\xi_2 + \beta^3\xi_2 &= 8\beta\xi_2 + \beta^3\xi_2. \end{aligned}$$

Si $X = X_i \in T_\lambda$ entonces $\phi AR_{\xi_2}(X_i) - A\phi R_{\xi_2}(X_i) = \lambda R_{\xi_2}(\phi X_i) - \lambda R_{\xi_2}(\phi X_i)$. Como resulta que $R_{\xi_2}(X_i) = \beta\lambda X_i$, sustituyendo tenemos $\beta\lambda^2\phi X_i = \beta\lambda^2\phi X_i$.

El caso $Y_i \in T_\mu$ es exactamente igual.

Para $i = 3$, $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_3} = 0$ equivale a

$$R_{\xi_3}(\phi AX) - R_{\xi_3}(A\phi X) = \phi AR_{\xi_3}(X) - A\phi R_{\xi_3}(X).$$

Si $X = \xi$, la ecuación sería $\phi AR_{\xi_3}(\xi) = A\phi R_{\xi_3}(\xi)$ donde $R_{\xi_3}(\xi) = 2\xi + \alpha\beta\xi$ luego, la ecuación es cierta.

Si $X = \xi_2$, resulta $\phi AR_{\xi_3}(\xi_2) = A\phi R_{\xi_3}(\xi_2)$ donde $R_{\xi_3}(\xi_2) = 8\xi_2 + \beta^2\xi_2$. Así,

$$\begin{aligned} \phi A(8\xi_2 + \beta^2\xi_2) &= A\phi(8\xi_2 + \beta^2\xi_2) \\ -6\beta\xi_3 - \beta^3\xi_3 &= -6\beta\xi_3 - \beta^3\xi_3. \end{aligned}$$

Si $X = \xi_3$, $R_{\xi_3}(\phi A\xi_3) = R_{\xi_3}(A\phi\xi_3)$ ya que, como $A\xi_3 = \beta\xi_3$ y $\phi\xi_3 = \phi_3\xi = \phi_3\xi_1 = \xi_2$ queda $\beta R_{\xi_3}(\xi_2) = \beta R_{\xi_3}(\xi_2)$.

Si $X = X_i \in T_\lambda$ entonces, como $R_{\xi_3}(X_i) = \beta\lambda X_i$, sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} R_{\xi_3}(\phi AX_i) - R_{\xi_3}(A\phi X_i) &= \phi AR_{\xi_3}(X_i) - A\phi R_{\xi_3}(X_i) \\ \lambda R_{\xi_3}(\phi X_i) - \lambda R_{\xi_3}(\phi X_i) &= \beta\lambda^2\phi X_i - \beta\lambda^2\phi X_i. \end{aligned}$$

Si $Y_i \in T_\mu$ lo sustituimos por X, la ecuación queda

$$\mu R_{\xi_3}(\phi Y_i) - \mu R_{\xi_3}(\phi Y_i) = \phi AR_{\xi_3}(\phi Y_i) - A\phi R_{\xi_3}(\phi Y_i).$$

Como $R_{\xi_3}(Y_i) = \beta\mu Y_i$, sustituyendo queda $0 = \beta\mu^2\phi Y_i - \beta\mu^2\phi Y_i$.

3.5. Hipersuperficies reales para las que $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = \nabla_\xi R_{\xi_i}$

Ahora vamos a demostrar el siguiente resultado de no existencia

Teorema 3.5.1. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf, $\alpha \neq 0$, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante y $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = \nabla_\xi R_{\xi_i}$ para $i = 1, 2, 3$.*

Para ello, en primer lugar, demostraremos que bajo nuestras hipótesis o bien $\xi \in \mathfrak{D}$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$.

Lema 3.5.2. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante y $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = \nabla_\xi R_{\xi_i}, i = 1, 2, 3$. Entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario. Si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ fuese alguno nulo, hemos acabado. Supongamos pues que ambos son no nulos. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 tenemos que $\alpha \neq 0$. Teniendo en cuenta (2.2) y (2.1) tenemos que

$$R_{\xi_1}(\phi X_0) = 8\eta^2(X_0)\phi X_0 + \alpha^2\phi X_0$$

y

$$R_{\xi_1}(X_0) = \alpha^2 X_0.$$

Como por hipótesis $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = \nabla_\xi R_{\xi_i}$ entonces $R_{\xi_i}(\phi AX) = \phi AR_{\xi_i}(X)$ para todo $X \in TM$.

Poniendo $X = X_0$ e $i = 1$ resulta

$$R_{\xi_1}(\phi AX_0) = \alpha R_{\xi_1}(\phi X_0) = 8\alpha\eta^2(X_0)\phi X_0 + \alpha^3\phi X_0$$

y

$$\phi AR_{\xi_1}(X_0) = \alpha^2\phi AX_0 = \alpha^3\phi X_0$$

luego, $8\alpha\eta^2(X_0)\phi X_0 = 0$ llegando a una contradicción. $\square$

Veamos ahora que en el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ tenemos que M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante.

Lema 3.5.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, $\alpha \neq 0$ y tal que $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = \nabla_\xi R_{\xi_i}$, $i = 1, 2, 3$. Si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. Como $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, consideraremos que $\xi = \xi_1$. La ecuación

$$\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = \nabla_\xi R_{\xi_i}$$

equivale a

$$\phi A R_{\xi_i}(X) = R_{\xi_i}(\phi A X)$$

para todo $X \in TM$.

Considerando $i = 2$ y $X = \xi_2$ resulta $0 = R_{\xi_2}(\phi A \xi_2)$.

Si ahora multiplicamos escalarmente por $X \in \mathfrak{D}$, como

$$R_{\xi_2}(X) = X + \phi_1 \phi X + \eta_2(A\xi_2)AX - \eta_2(AX)A\xi_2$$

para los $X \in \mathfrak{D}$, resulta

$$\begin{aligned}
0 &= g(R_{\xi_2}(\phi A \xi_2), X) \\
&= g(\phi A \xi_2, X) + g(\phi_1 \phi X, \phi A \xi_2) + \eta_2(A\xi_2) g(\phi A \xi_2, AX) - \eta_2(AX) g(\phi A \xi_2, A\xi_2) \\
&= \eta_2(A\xi_2)\eta_2(A\phi A X) = \eta_2(A\xi_2)\big(\frac{\alpha^2}{2}\eta_2(A\phi X) + \frac{\alpha^2}{2}\eta_3(AX)\big)
\end{aligned}$$

luego, como $\alpha \neq 0$, si $g(A\xi_2, \xi_2) \neq 0$, como por (2.12) tenemos que

$$2\eta_2(A\phi A X) = \alpha\eta_2(A\phi X) + \alpha\eta_3(AX)$$

para $X \in \mathfrak{D}$, resulta que

$$\eta_3(AX) = -\eta_2(A\phi X). \tag{3.11}$$

Por otro lado, como $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, resulta que

$$R_{\xi_2}(\xi_3) = 8\xi_3 + \eta_2(A\xi_2)A\xi_3 - \eta_3(A\xi_2)A\xi_2$$

y, además, como

$$R_\xi(\phi A \xi_2) = \phi A R_\xi(\xi_2)$$

y para $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, $R_\xi(\xi_2) = 2\xi_2 + \alpha A \xi_2$, entonces

$$2\phi A \xi_2 + \alpha \phi A^2 \xi_2 = R_\xi(\phi A \xi_2). \tag{3.12}$$

Si ahora tenemos en cuenta que $\phi A R_{\xi_2}(\xi_3) = R_{\xi_2}(\phi A \xi_3)$, multiplicando escalarmente por ξ_2

$$8\eta_2(\phi A \xi_3) + \eta_2(A\xi_2)\eta_2(\phi A^2 \xi_3) - \eta_3 g(A\xi_2)\eta_2(\phi A^2 \xi_2) = 0$$

pero, multiplicando escalarmente por ξ_2 en (3.12) se obtiene $\eta_2(\phi A^2\xi_2) = 0$. Por tanto,

$$8\eta_2(\phi A\xi_3) + \eta_2(A\xi_2)\eta_2(\phi A^2\xi_3) = 0.$$

Por otro lado, como $R_\xi(\xi_3) = 2\xi_3 + \alpha A\xi_3$ cuando $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ de

$$R_\xi(\phi A\xi_3) = \phi A R_\xi(\xi_3)$$

deducimos

$$2\phi A\xi_3 + \alpha\phi A^2\xi_3 = R_\xi(\phi A\xi_3).$$

Si ahora multiplicamos escalarmente por ξ_2 resulta que, para $\alpha \neq 0$

$$\eta_2(\phi A^2\xi_3) = \frac{1}{\alpha}\big(\eta_2(R_\xi(\phi A\xi_3)) - 2\eta_2(\phi A\xi_3)\big) = g(\phi A\xi_3, A\xi_2)$$

luego,

$$8\eta_2(\phi A\xi_3) + \eta_2(A\xi_2)g(\phi A\xi_3, A\xi_2) = 0.$$

Así,

$$8\eta_3(A\xi_3) - \eta_2(A\xi_2)g(\phi A\xi_2, A\xi_3) = 0.$$

Por otra parte, de $0 = R_{\xi_2}(\phi A\xi_2)$, multiplicando escalarmente por ξ_3 resulta

$$\begin{aligned} 0 &= g(\phi A\xi_2, R_{\xi_2}(\xi_3)) \\ &= 8\eta_3(\phi A\xi_2) + \eta_2(A\xi_2)g(\phi A\xi_2, A\xi_3) \\ &= -8\eta_2(A\xi_2) + \eta_2(A\xi_2)g(\phi A\xi_2, A\xi_3). \end{aligned}$$

Como estamos suponiendo que $\eta_2(A\xi_2) \neq 0$, resulta que $g(\phi A\xi_2, A\xi_3) = 8$ y, entonces, $\eta_3(A\xi_3) = \eta_2(A\xi_2)$. Utilizando ahora la Proposición 1.8.11, para $\alpha \neq 0$ tenemos

$$-\alpha\eta_3(A\xi_3) - \alpha\eta_2(A\xi_2) - 2g(\phi A\xi_2, A\xi_3) - 2 = 2$$

luego,

$$-\alpha\eta_3(A\xi_3) - \alpha\eta_2(A\xi_2) = 20$$

y, entonces, $\eta_2(A\xi_2) = \eta_3(A\xi_3) = -\frac{10}{\alpha}$. Así, la ecuación $\phi A R_{\xi_2}(\xi_3) = R_{\xi_2}(\phi A\xi_3)$ queda

$$8\phi A\xi_3 - \frac{10}{\alpha}\phi A^2\xi_3 - \eta_3(A\xi_2)\phi A^2\xi_2 = R_{\xi_2}(\phi A\xi_3).$$

Multiplicando escalarmente por ξ_3

$$8\eta_3(\phi A\xi_3) - \frac{10}{\alpha}\eta_3(\phi A^2\xi_3) - \eta_3(A\xi_2)\eta_3(\phi A^2\xi_2) = g(\phi A\xi_3, R_{\xi_2}(\xi_3))$$

pero, de $\alpha\phi A^2\xi_3 = R_\xi(\phi A\xi_3) - 2\phi A\xi_3$ resulta que $\eta_3(\phi A^2\xi_3) = 0$ luego,

$$-8\eta_2(A\xi_3) - 8\eta_2(A\xi_3) = 8\eta_3(\phi A\xi_3) - \frac{10}{\alpha}g(\phi A\xi_3, A\xi_3) - \eta_3(A\xi_2)g(\phi A\xi_3, A\xi_2)$$

y, así,

$$-16\eta_3(A\xi_2) = -8\eta_3(A\xi_2) + 8\eta_3(A\xi_2)$$

luego, $\eta_3(A\xi_2) = 0$.

Como $\eta_2(A\xi_2) = -\frac{10}{\alpha}$ y $\eta_3(A\xi_2) = 0$ entonces $R_{\xi_2}(\xi_3) = 8\xi_3 - \frac{10}{\alpha}A\xi_3$ y, así, de $\phi AR_{\xi_2}(\xi_3) = R_{\xi_2}(\phi A\xi_3)$ se deduce que

$$8\phi A\xi_3 - \frac{10}{\alpha}\phi A^2\xi_3 = R_{\xi_2}(\phi A\xi_3).$$

Multiplicando escalarmente por $X \in \mathfrak{D}$

$$\begin{aligned}
&8g(\phi A\xi_3, X) - \frac{10}{\alpha}g(\phi A^2\xi_3, X)\\
&= g(\phi A\xi_3, X) + g(\phi A\xi_3, \phi_1\phi X) - \frac{10}{\alpha}g(\phi A\xi_3, AX) - \eta_2(AX)\eta_2(\phi A\xi_3)\\
&-8g(A\xi_3, \phi X) + \frac{10}{\alpha}g(A^2\xi_3, \phi X)\\
&= \frac{10}{\alpha}\eta_3(A\phi AX) + 8\eta_2(AX).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

A partir de $\phi AR_\xi(X) = R_\xi(\phi AX)$, multiplicando escalarmente por ξ_2 obtenemos que

$$g(A^2\xi_3, X) = \frac{\alpha}{2}\eta_2(A\phi X) + \frac{\alpha}{2}\eta_3(AX)$$

por lo que, teniendo en cuenta (3.11) resulta que $g(A^2\xi_3, X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{D}$ y, por lo tanto, $g(A^2\xi_3, \phi X) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{D}$. Como por la Proposición 1.8.11

$$2\eta_3(A\phi AX) = \alpha\eta_3(A\phi X) - \alpha\eta_2(AX),$$

y por (3.13) tenemos que $\eta_3(A\phi AX) = 0$ entonces

$$-g(A\xi_3, \phi X) = \eta_2(AX)$$

para todo $X \in \mathfrak{D}$, por lo que

$$\eta_2(AX) = 0 \text{ y } \eta_3(AX) = 0.$$

Consideremos ahora el caso en que $\eta_2(A\xi_2) = 0$. En este caso, por la Proposición 1.8.11 tenemos que

$$-\alpha\eta_3(A\xi_3) - 2g(\phi A\xi_2, A\xi_3) = 4$$

y, como $R_{\xi_2}(\xi_3) = 8\xi_3 - \eta_3(A\xi_2)A\xi_2$ y $\eta_2(\phi A^2\xi_2) = 0$, multiplicando escalarmente por ξ_2 en $\phi AR_{\xi_2}(\xi_3) = R_{\xi_2}(\phi A\xi_3)$ resulta $8\eta_2(\phi A\xi_3) = 0$ y, entonces

$$\eta_3(A\xi_3) = 0$$

luego,

$$g(\phi A\xi_2, A\xi_3) = -2.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que para $\alpha \neq 0$, $\phi A^2\xi_2 = \frac{1}{\alpha}(R_\xi(\phi A\xi_2) - 2\phi A\xi_2)$ y que $\phi AR_{\xi_2}(X) = R_{\xi_2}(\phi AX)$ para todo $X \in \mathfrak{D}$ resulta

$$\phi AX + \phi A\phi_1\phi X - \eta_2(AX)\phi A^2\xi_2 = R_{\xi_2}(\phi AX)$$

luego $\eta_3(\phi AR_{\xi_2}(X)) = \eta_3(R_{\xi_2}(\phi AX))$ implica

$$2\eta_2(AX) = -8\eta_2(AX) - \eta_3(A\xi_2)\eta_2(A\phi AX)$$

así,

$$10\eta_2(AX) = -\eta_3(A\xi_2)\eta_2(A\phi AX).$$

Ahora bien, como $\phi AR_{\xi_2}(\xi_3) = R_{\xi_2}(\phi A\xi_3)$ entonces

$$8\phi A\xi_3 - \eta_3(A\xi_2)\phi A^2\xi_2 = R_{\xi_2}\phi A\xi_3.$$

Si ahora multiplicamos escalarmente por ξ_3

$$8\eta_3(\phi A\xi_3) - \eta_3(A\xi_2)\eta_3(\phi A^2\xi_2) = g(\phi A\xi_3, R_{\xi_2}(\xi_3))$$

y, entonces, $2\eta_3(A\xi_2) = -2\eta_3(A\xi_2)$, luego $\eta_3(A\xi_2) = 0$, por lo que

$$\eta_2(AX) = 0$$

pues, $\eta_3(\phi A^2\xi_2) = \eta_3(\phi A\xi_2) = -2$.

Por último, teniendo en cuenta que para $\alpha \neq 0$, $\phi A^2\xi_3 = \frac{1}{\alpha}(R_\xi(\phi A\xi_3) - 2\phi A\xi_3)$ y que $\phi AR_{\xi_3}(X) = R_{\xi_3}(\phi AX)$ para $X \in \mathfrak{D}$ resulta

$$\phi AX + \phi A\phi_1\phi AX - \eta_3(AX)\phi A^2\xi_3 = R_{\xi_3}(\phi AX)$$

y, entonces, multiplicando escalarmente por ξ_2

$$-2\eta_3(AX) = 8\eta_2(\phi AX)$$

y, así, $\eta_3(AX) = 0$. □

Para el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ ver el Lema 2.1.6.

Para terminar la demostración del teorema veamos que ni las hipersuperficies de tipo A ni las de tipo B verifican $\mathcal{L}_\xi R_{\xi_i} = \nabla_\xi R_{\xi_i}$.

En el caso de las hipersuperficies de tipo A, teniendo en cuenta que $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ y que

$$0 = \beta R_{\xi_2}(\phi\xi_2) = \beta R_{\xi_2}(\xi_3) = 8\beta\xi_3 + \beta^2\xi_3$$

resulta

$$8\beta + \beta^2 = 0$$

por lo que $\beta(8+\beta)=0$ y, entonces,

$$\beta = 0 \text{ o } \beta = -8$$

pero $\beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ para $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$.

En el caso de las hipersuperficies de tipo B, $\xi \in \mathfrak{D}$, luego

$$0 = R_{\xi_2}(\phi A\xi_2) = \beta R_{\xi_2}(\phi\xi_2) = \beta(\phi\xi_2 + 3\phi\xi_2) = 4\beta\phi\xi_2$$

que implica $\beta = 0$ pero, $\beta = 2\cot(2r)$ para $r \in (0, \pi/4)$.

3.6. Conmutatividad de R_{ξ_i} con ϕ y con ϕ_j para $i, j = 1, 2, 3$

En este apartado vamos a ver que no existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ tales que $R_{\xi_i} \cdot \phi = \phi \cdot R_{\xi_i}$ para $i = 1, 2, 3$. También veremos un teorema de no existencia de hipersuperficies reales tales que $R_{\xi_i} \cdot \phi_j = \phi_j \cdot R_{\xi_i}$ para $i, j = 1, 2, 3$. Empezaremos con el siguiente

Teorema 3.6.1. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf con $\alpha \neq 0$ tales que $R_{\xi_i} \cdot \phi = \phi \cdot R_{\xi_i}$ para todo $i = 1, 2, 3$ y, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^\perp$-componente de ξ sea A-invariante.*

Para ello, veamos en primer lugar que, bajo nuestras condiciones, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.

Lema 3.6.2. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, $R_{\xi_i} \cdot \phi = \phi \cdot R_{\xi_i}$ para todo $i = 1, 2, 3$ y tal que, o bien la $\mathfrak{D}$-componente de ξ sea A-invariante o bien lo sea la $\mathfrak{D}^\perp$-componente. Entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario. Si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ fuese alguno nulo, hemos acabado. Supongamos pues que ambos son no nulos. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 tenemos que $\alpha \neq 0$. Como $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$, resulta que $g(\phi_\nu\phi\xi_1, \xi_1) = 0$, $\nu = 1, 2, 3$ y, entonces, utilizando (3.3) y, teniendo en cuenta (2.2), tenemos que

$$0 = \phi \cdot R_{\xi_1}(\xi) = -\alpha^2\eta^2(X_0)\eta(\xi_1)$$

luego, llegamos a contradicción y, entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$. ☐

Ahora veamos que, bajo nuestras hipótesis, si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante.

Lema 3.6.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, $\alpha \neq 0$, $R_{\xi_i} \cdot \phi = \phi \cdot R_{\xi_i}$ para $i = 1, 2, 3$ y $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. Como $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ podemos suponer que $\xi = \xi_1$ y, en ese caso, tenemos que $g(\phi_\nu\phi\xi_1, \xi_1) = 0$, $\nu = 1, 2, 3$ luego, por (3.3) y por las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1 tenemos que

$$\begin{aligned} R_{\xi_1}(\phi X) &= -3\sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu\phi X, \xi_1)\phi_\nu\xi_1 - \sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu X, \xi_1)\xi_\nu + \phi_1 X + \alpha A\phi X \\ &= -3\eta_2(X)\xi_3 + 3\eta_3(X)\xi_2 - \eta_3(X)\xi_2 + \eta_2(X)\xi_3 + \phi_1 X + \alpha A\phi X \\ &= 2\eta_3(X)\xi_2 - 2\eta_2(X)\xi_3 + \phi_1 X + \alpha A\phi X \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \phi R_{\xi_1}(X) &= -3\sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu X, \xi_1)\phi\phi_\nu\xi_1 + \sum_{\nu=1}^{3} g(\phi_\nu\phi X, \xi_1)\phi\xi_\nu - \phi\phi_1\phi X + \alpha\phi AX \\ &= 3\eta_3(X)\xi_2 - 3\eta_2(X)\xi_3 + \eta_2(X)\xi_3 - \eta_3(X)\xi_2 - \phi\phi_1\phi X + \alpha\phi AX \\ &= 2\eta_3(X)\xi_2 - 2\eta_2(X)\xi_3 - \phi\phi_1\phi X + \alpha\phi AX \end{aligned}$$

para todo $X \in TM$. Así pues, nos queda

$$\phi_1 X + \alpha A\phi X = -\phi\phi_1\phi X + \alpha\phi AX$$

para todo $X \in TM$. Como $\alpha \neq 0$ y, usando el Lema 1.8.2 del Capítulo 1, $\phi_1 X = -\phi\phi_1\phi X$ para todo $X \in TM$, tenemos que

$$A\phi X = \phi AX$$

para todo $X \in TM$. Teniendo en cuenta ahora [7] tenemos que M es una hipersuperficie tipo A y, entonces, $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$. $\square$

Para el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ referimos al lector al Lema 2.1.6.

Así pues, para finalizar, sólo nos falta ver que ni las hipersuperficies de tipo A ni las de tipo B verifican que $R_{\xi_i} \cdot \phi = \phi \cdot R_{\xi_i}$ para todo $i = 1, 2, 3$.

En el caso de las hipersuperficies de tipo A, para $i = 2$, utilizando las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1 tendríamos que

$$\begin{aligned} 0 &= R_{\xi_2}(\phi\xi_2) \\ &= \phi\xi_2 + 3\phi\xi_2 - 3g(\phi_1\phi\xi_2, \xi_2)\xi_3 - g(\phi_1\phi\xi_2, \xi_2)\xi_3 + g(A\xi_2, \xi_2)A\phi\xi_2 \\ &= -\xi_3 - 3\xi_3 - 3\xi_3 - \xi_3 - \beta^2\xi_3 \\ &= (-8 - \beta^2)\xi_3 \end{aligned}$$

por lo que debería ser $\beta^2 = -8$.

En el caso de las hipersuperficies de tipo B, para $X \in T_\lambda$ resulta que $AX = \lambda X = \cot(r)X$ para algún $r \in (0, \pi/4)$ y, como para $X \in T_\lambda$, $\phi X \in T_\mu$, resulta que $A\phi X = \mu\phi X$ donde $\mu = 2\cot(2r)$ para algún $r \in (0, \pi/4)$. Por otro lado, la ecuación $R_{\xi_i} \cdot \phi = \phi \cdot R_{\xi_i}$ equivale en este caso a $\beta\lambda\phi X = \beta\mu\phi X$ con $\beta = 2\cot(2r)$ para algún $r \in (0, \pi/4)$. Así pues,

$$\beta(\lambda - \mu)\phi X = 0$$

y, entonces, $\lambda = \mu$, es decir $1 = -\tan^2(r)$ para algún $r \in (0, \pi/4)$, lo que nos lleva a contradicción.

Vamos a ver ahora el segundo teorema que mencionamos al empezar el apartado. Concretamente, vamos a demostrar

Teorema 3.6.4. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf tales que, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^\perp$-componente de ξ sea A-invariante y $R_{\xi_i} \cdot \phi_j = \phi_j \cdot R_{\xi_i}$ para todo $i, j = 1, 2, 3$.*

Para ello, empezaremos probando que, bajo nuestras hipótesis, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.

Lema 3.6.5. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^\perp$-componente de ξ sea A-invariante y $\phi_j \cdot R_{\xi_i} = R_{\xi_i} \cdot \phi_j$ para todo $i, j = 1, 2, 3$. Entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. Supongamos $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario. Si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ es alguno nulo, ya hemos acabado. Supongamos pues que ambos son no nulos. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 tenemos que $\alpha \neq 0$. Utilizando (2.4) y teniendo en cuenta que como $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ tenemos (3.3), de la ecuación

$$\phi_1 R_{\xi_1}(X_0) = R_{\xi_1}(\phi_1 X_0)$$

resulta

$$-\eta(\xi_1)\phi_1^2\phi X_0 + \eta(X_0)\phi_1^2\phi\xi_1 + \alpha^2\phi_1 X_0 = -3g(\phi\phi_1 X_0, \xi_1)\phi\xi_1 - \eta(\xi_1)\phi_1\phi\phi_1 X_0 + \alpha A\phi_1 X_0$$

de donde

$$8\eta^2(X_0)\phi_1 X_0 = 0$$

luego, tenemos contradicción. □

Veamos que, si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces, M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante.

Lema 3.6.6. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf y $\phi_j \cdot R_{\xi_i} = R_{\xi_i} \cdot \phi_j$ para todo $i, j = 1, 2, 3$. Si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. Como $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ podemos considerar $\xi = \xi_1$. Teniendo en cuenta además que, en este caso también $g(\phi_\nu\phi\xi_1, \xi_1) = 0$, $\nu = 1, 2, 3$ y que para $X \in \mathfrak{D}$ la ecuación (3.3) queda $R_{\xi_1}(X) = X - \phi_1\phi X + \alpha AX$, resulta que la ecuación $\phi_2 \cdot R_{\xi_1} = R_{\xi_1} \cdot \phi_2$ equivale a

$$-\phi_2\phi_1\phi X + \alpha\phi_2 AX = -\phi_1\phi\phi_2 X + \alpha A\phi_2 X \tag{3.14}$$

para todo $X \in \mathfrak{D}$. Además, como también $\phi_3 \cdot R_{\xi_1} = R_{\xi_1} \cdot \phi_3$ para todo $X \in \mathfrak{D}$, por la misma razón queda

$$-\phi_3\phi_1\phi X + \alpha\phi_3 AX = -\phi_1\phi\phi_3 X + \alpha A\phi_3 X. \tag{3.15}$$

Multiplicando escalarmente por ξ en (3.14) tenemos que $\eta_3(AX) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{D}$ y, haciendo lo mismo en (3.15), $\eta_2(AX) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{D}$. □

Para el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ véase el Lema 2.1.6.

Veamos entonces, para finalizar, que ni las hipersuperficies de tipo A ni las de tipo B verifican que $R_{\xi_i} \cdot \phi_j = \phi_j \cdot R_{\xi_i}$ para todo $i, j = 1, 2, 3$.

Para el caso de las hipersuperficies de tipo A, tenemos que, por el Teorema 1.8.20

$$0 = \phi_2 R_{\xi_1}(\xi_1) = R_{\xi_1}(\phi_2 \xi_1) = (2 + \alpha\beta)\xi_3$$

luego, $2 + \alpha\beta = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\beta + 2 \\ &= \big((\sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r)\big)\big(\sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)\big) + 2 \\ &= 2\big((\cot^2(\sqrt{2}r) - 1\big) + 2 \\ &= 2\cot^2(\sqrt{2}r) \end{aligned}$$

luego, $\cot(\sqrt{2}r) = 0$ para algún $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$, lo que resulta contradictorio.

Para el caso de una hipersuperficie de tipo B

$$0 = \phi_2 R_{\xi_1}(\xi_1) = R_{\xi_1}(\phi_2 \xi_1) = (4 + \beta^2)\xi_3$$

luego, $4 + \beta^2 = 0$, que resulta contradictorio.

Capítulo 4

Respecto al operador de Jacobi Normal $\bar{R}_N$

En [3] Berndt consideró para hipersuperficies reales M de los espacios cuaterniónicos de curvatura seccional cuaterniónica constante $\mathbb{H}P^n$ o $\mathbb{H}H^n$ el operador de Jacobi asociado al campo normal N sobre la hipersuperficie. Este operador $\bar{R}_N$ se anula sobre N y, por lo tanto, se puede considerar como un operador simétrico sobre la hipersuperficie. Además, define las hipersuperficies de curvatura adaptada como aquellas en las que el operador de Weingarten A y $\bar{R}_N$ son simultáneamente diagonalizables, es decir, aquellas en las que $A \cdot \bar{R}_N = \bar{R}_N \cdot A$ y las caracteriza como aquellas en las que las distribuciones $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D}^\perp$ son invariantes por A.

Ahora nosotros consideramos como variedad riemanniana el espacio de las Grassmannianas de 2-planos complejos $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Como generalización de lo anterior Pérez, Jeong y Suh [37] consideraron la noción de operador de Jacobi normal para hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ como

$$\bar{R}_N(X) = \bar{R}(X, N)N \tag{4.1}$$

donde $\bar{R}$ denota el tensor de curvatura de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ y clasificaron las que verifican las condiciones $\bar{R}_N \cdot \phi = \phi \cdot \bar{R}_N$ y $\bar{R}_N \cdot A = A \cdot \bar{R}_N$ cuyo significado geométrico es que los subespacios propios del operador de Jacobi normal son invariantes por ϕ y por A. Como $\bar{R}_N(N) = 0$ podemos considerarlo como un operador simétrico definido sobre M.

Una vez introducido el operador de Jacobi normal vamos en este último capítulo a estudiar el $\mathfrak{D}$-paralelismo y el ser de tipo Codazzi. Para finalizar demostraremos un teorema de no existencia de hipersuperficies reales tales que $\mathcal{L}_{\xi_i}\bar{R}_N = \nabla_{\xi_i}\bar{R}_N$.

4.1. $\mathfrak{D}$-paralelismo del Operador de Jacobi Normal

Jeong, Kim y Suh [12] obtuvieron un teorema de no existencia para hipersuperficies reales Hopf de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ con operador de Jacobi normal paralelo. Con esta motivación vamos entonces a considerar la noción más débil de $\mathfrak{D}$-paralelismo. Esta condición lo que nos viene a decir es que los subespacios propios de $\bar{R}_N$ son paralelos a lo largo de la distribución $\mathfrak{D}$, esto es, son invariantes con respecto a cualquier desplazamiento paralelo a lo largo de la distribución $\mathfrak{D}$. Así pues, probaremos un teorema de no existencia de hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ con operador de Jacobi normal $\mathfrak{D}$-paralelo en los términos que siguen

Teorema 4.1.1. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf con operador de Jacobi normal $\mathfrak{D}$-paralelo si, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^{\perp}$-componente de ξ es A-invariante.*

Consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente resultado de Jeong, Kim y Suh [12] citado anteriormente.

Corolario 4.1.2. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf con operador de Jacobi normal paralelo si, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^{\perp}$-componente de ξ es A-invariante.*

Por la definición de operador de Jacobi normal (4.1) resulta

$$\begin{aligned}
\bar{R}_N(X) &= \bar{R}(X,N)N \\
&= X + 3\eta(X)\xi + 3\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(X)\xi_\nu \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{3}\{\eta_\nu(\xi)J_\nu(\phi X + \eta(X)N) - \eta_\nu(\phi X)(\phi_\nu\xi + \eta_\nu(\xi)N)\} \\
&= X + 3\eta(X)\xi + 3\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(X)\xi_\nu \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{3}\{\eta_\nu(\xi)(\phi_\nu\phi X - \eta(X)\xi_\nu) - \eta_\nu(\phi X)\phi_\nu\xi\}
\end{aligned}$$

para todo vector $X \in TM$.

Así pues, la derivada covariante de $\bar{R}_N$ a lo largo de una dirección $X \in TM$ está dada por

$$\begin{aligned}(\nabla_X \bar{R}_N)Y &= \nabla_X(\bar{R}_N(Y)) - \bar{R}_N(\nabla_X Y)\\ &= 3(\nabla_X\eta)(Y)\xi + 3\eta(Y)\nabla_X\xi + 3\sum_{\nu=1}^{3}(\nabla_X\eta_\nu)(Y)\xi_\nu\\ &\quad +3\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(Y)\nabla_X\xi_\nu - \sum_{\nu=1}^{3}\Big\{X\big(\eta_\nu(\xi)\big)\big(\phi_\nu\phi Y - \eta(Y)\xi_\nu\big)\\ &\quad +\eta_\nu(\xi)\big[(\nabla_X\phi_\nu\phi)Y - (\nabla_X\eta)(Y)\xi_\nu - \eta(Y)\nabla_X\xi_\nu\big]\\ &\quad -(\nabla_X\eta_\nu)(\phi Y)\phi_\nu\xi - \eta_\nu\big((\nabla_X\phi)Y\big)\phi_\nu\xi - \eta_\nu(\phi Y)\nabla_X(\phi_\nu\xi)\Big\}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}X\big(\eta_\nu(\xi)\big) &= g(\nabla_X\xi_\nu,\xi) + g(\xi_\nu,\nabla_X\xi)\\ &= q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(\xi) - q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(\xi)\\ &\quad +2g(\phi_\nu AX,\xi).\end{aligned}$$

De aquí, junto con las fórmulas dadas en el apartado 1.8 del Capítulo 1, llegamos a que una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ verifica

$$\begin{aligned}(\nabla_X \bar{R}_N)Y &= 3g(\phi AX,Y)\xi + 3\eta(Y)\phi AX\\ &\quad +3\sum_{\nu=1}^{3}\big[q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(Y) - q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(Y)\\ &\quad +g(\phi_\nu AX,Y)\big]\xi_\nu\\ &\quad +3\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(Y)\big[q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2} + \phi_\nu(AX)\big]\\ &\quad -\sum_{\nu=1}^{3}\Big\{\big[q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(\xi) - q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(\xi)\\ &\quad +2\eta_\nu(\phi AX)\big]\big(\phi_\nu\phi Y - \eta(Y)\xi_\nu\big)\\ &\quad +\eta_\nu(\xi)\big[-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}\phi Y + q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}\phi Y\\ &\quad +\eta_\nu(\phi Y)AX - g(AX,\phi Y)\xi_\nu\\ &\quad +\eta(Y)\phi_\nu(AX) - g(AX,Y)\phi_\nu\xi - g(\phi AX,Y)\xi_\nu\\ &\quad -\eta(Y)\big(q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2} + \phi_\nu AX\big)\big]\\ &\quad -\big[q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(\phi Y) - q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(\phi Y)\\ &\quad +g(\phi_\nu AX,\phi Y)\big]\phi_\nu\xi\\ &\quad \big[\eta(Y)\eta_\nu(AX) - g(AX,Y)\eta_\nu(\xi)\big]\phi_\nu\xi\\ &\quad -\eta_\nu(\phi Y)\big[q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}\xi - q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}(\xi)\\ &\quad +\phi_\nu\phi AX - g(AX,\xi)\xi_\nu + \eta(\xi_\nu)AX\big]\Big\}.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\sum_{\nu=1}^{3}\big[q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(Y)\xi_\nu - q_{\nu+1}(X)\eta_\nu(Y)\xi_{\nu+2}\big] = 0,$$
$$\sum_{\nu=1}^{3}\big[q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu}(Y)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(Y)\xi_{\nu}\big] = 0,$$
$$\sum_{\nu=1}^{3}\big[q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(\xi)\phi_\nu\phi Y - q_{\nu+1}(X)\eta_\nu(\xi)\phi_{\nu+2}\phi Y\big] = 0,$$
$$\sum_{\nu=1}^{3}\big[q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu}(\xi)\phi_{\nu+1}\phi Y - q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(\xi)\phi_{\nu}\phi Y\big] = 0,$$
$$\sum_{\nu=1}^{3}\big[q_{\nu+1}(X)\eta(Y)\eta_\nu(\xi)\xi_{\nu+2} - q_{\nu+2}(X)\eta(Y)\eta_{\nu+1}(\xi)\xi_\nu\big] = 0,$$
$$\sum_{\nu=1}^{3}\big[q_{\nu+1}(X)\eta(Y)\eta_{\nu+2}(\xi)\xi_{\nu} - q_{\nu+2}(X)\eta(Y)\eta_{\nu}(\xi)\xi_{\nu+1}\big] = 0,$$
$$\sum_{\nu=1}^{3}\big[q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu+2}(\phi Y)\phi_\nu\xi - q_{\nu+2}(X)\eta_\nu(\phi Y)\phi_{\nu+1}\xi\big] = 0,$$

y

$$\sum_{\nu=1}^{3}\big[q_{\nu+1}(X)\eta_{\nu}(\phi Y)\phi_{\nu+2}\xi - q_{\nu+2}(X)\eta_{\nu+1}(\phi Y)\phi_{\nu}\xi\big] = 0$$

por lo que,

$$\begin{aligned}(\nabla_X\bar{R}_N)Y &= 3g(\phi AX,Y)\xi + 3\eta(Y)\phi AX\\ &\quad +3\sum_{\nu=1}^{3}\big[g(\phi_\nu AX,Y)\xi_\nu + \eta_\nu(Y)\phi_\nu(AX)\big]\\ &\quad -\sum_{\nu=1}^{3}\big[2\eta_\nu(\phi AX)\big(\phi_\nu\phi Y - \eta(Y)\xi_\nu\big) - g(\phi_\nu AX,\phi Y)\phi_\nu\xi\\ &\quad -\eta(Y)\eta_\nu(AX)\phi_\nu\xi - \eta_\nu(\phi Y)\big(\phi_\nu\phi AX - g(AX,\xi)\xi_\nu\big)\big]\end{aligned}$$

para todo $X,Y\in TM$.

Si M es Hopf

$$\begin{aligned}(\nabla_X\bar{R}_N)Y &= 3g(\phi AX,Y)\xi + 3\eta(Y)\phi AX\\ &\quad +3\sum_{\nu=1}^{3}\big[g(\phi_\nu AX,Y)\xi_\nu + \eta_\nu(Y)\phi_\nu(AX)\big]\\ &\quad -\sum_{\nu=1}^{3}\big[2\eta_\nu(\phi AX)\big(\phi_\nu\phi Y - \eta(Y)\xi_\nu\big) - g(\phi_\nu AX,\phi Y)\phi_\nu\xi\\ &\quad -\eta(Y)\eta_\nu(AX)\phi_\nu\xi - \eta_\nu(\phi Y)\big(\phi_\nu\phi AX - \alpha\eta(X)\xi_\nu\big)\big]\end{aligned} \tag{4.2}$$

para todo $X, Y \in TM$.

Ahora vamos a ver que bajo nuestras hipótesis, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^{\perp}$.

Lema 4.1.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^{\perp}$ de ξ sea A invariante y $(\nabla_X \bar{R}_N)Y = 0$ para todo $X \in \mathfrak{D}$. Entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^{\perp}$.*

Demostración. Podemos suponer $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario y $\eta(X_0)\eta(\xi_1) \neq 0$. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 tenemos que $\alpha \neq 0$. Poniendo ahora $X = X_0$ e $Y = X_0$ en (4.2) resulta

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{X_0}\bar{R}_N)X_0 \\ &= g(\phi AX_0, X_0)\xi + 3\eta(X_0)\phi AX_0 \\ &\quad +3\sum_{\nu=1}^{3}[g(\phi_\nu AX_0, X_0)\xi_\nu + \eta(X_0)\phi_\nu AX_0] \\ &\quad -\sum_{\nu=1}^{3}[2\eta_\nu(\phi AX_0)\big(\phi_\nu\phi X_0 - \eta(X_0)\xi_\nu\big) - g(\phi_\nu AX_0, \phi X_0)\phi_\nu\xi \\ &\quad -\eta(X_0)\eta_\nu(AX_0)\phi_\nu\xi - \eta_\nu(\phi X_0)\big(\phi_\nu\phi AX_0 - g(AX_0,\xi)\xi_\nu\big)]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Al ser M Hopf y, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^{\perp}$ de ξ ser A-invariante, resulta que $AX_0 = \alpha X_0$ y $A\xi_1 = \alpha\xi_1$. Así, (4.3) se reduce a

$$0 = 3\alpha\eta(X_0)\phi X_0 + \sum \alpha g(\phi_\nu X_0, \phi X_0)\phi_\nu\xi$$

luego,

$$\begin{aligned} 0 &= g\big((\nabla_{X_0}\bar{R}_N)X_0, \phi X_0\big) \\ &= 3\alpha\eta(X_0)\eta_1^2(\xi) + \alpha\sum g(\phi_\nu X_0, \phi X_0)g(\phi_\nu\xi, \phi X_0) \\ &= 3\alpha\eta(X_0)\eta_1^2(\xi) + \alpha\sum g(\phi_\nu X_0, \phi X_0)\big(-\eta_\nu(\xi)\eta(X_0)\big) \\ &= 3\alpha\eta(X_0)\eta_1^2(\xi) + \alpha\eta^2(\xi_1)\eta(X_0) \\ &= 4\alpha\eta^2(\xi_1)\eta(X_0) \end{aligned}$$

por lo que llegamos a una contradicción. Esto significa que, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ son nulos, es decir que, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^{\perp}$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$. □

Ahora vamos a demostrar que si $\xi \in \mathfrak{D}^{\perp}$, entonces M es $\mathfrak{D}^{\perp}$ invariante.

Lema 4.1.4. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, que sea Hopf, $(\nabla_X \bar{R}_N)Y = 0$ para todo $X \in \mathfrak{D}$ y todo $Y \in TM$ y tal que $\xi \in \mathfrak{D}^{\perp}$. Entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^{\perp}) = 0$.*

Demostración. Al ser $\xi \in \mathfrak{D}^{\perp}$ resulta que existe una estructura casi hermítica $J_1 \in \mathfrak{J}$ tal que $J = J_1$. Así, podemos poner $\xi = \xi_1$ y, por lo tanto, $\phi\xi_2 = -\xi_3$, $\phi\xi_3 = \xi_2$ y $\phi\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$. Teniendo en cuenta (4.2) resulta

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_X \bar{R}_N)\xi \\
&= 3\phi AX + 3\sum_{\nu=1}^{3}[g(\phi_\nu AX, \xi)\xi_\nu + \eta_\nu(\xi)\phi_\nu AX] \\
&\quad - \sum_{\nu=1}^{3}[2\eta_\nu(\phi AX)(-\xi_\nu) - \eta_\nu(AX)\phi_\nu\xi] \\
&= 3\phi AX + 3g(\phi_2 AX, \xi_1)\xi_2 + 3g(\phi_3 AX, \xi_1)\xi_3 + 3\phi_1 AX \\
&\quad +2\eta_2(\phi AX)\xi_2 + 2\eta_3(\phi AX)\xi_3 + \eta_2(AX)\phi_2\xi + \eta_3(AX)\phi_3\xi \\
&= 3\phi AX + 3\eta_3 AX)\xi_2 - 3\eta_2(AX)\xi_3 + 3\phi_1 AX \\
&\quad +2\eta_3(AX)\xi_2 - 2\eta_2(AX)\xi_3 - \eta_2(AX)\xi_3 + \eta_3(AX)\xi_2 \\
&= 3\phi AX + 6\eta_3(AX)\xi_2 - 6\eta_2(AX)\xi_3 + 3\phi_1 AX.
\end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente por ξ_2

$$\begin{aligned}
0 &= 3g(\phi AX, \xi_2) + 6\eta_3(AX) + 3g(\phi_1 AX, \xi_2) \\
&= 3g(AX, \xi_3) + 6\eta_3(AX) - 3g(AX, \xi_3) \\
&= 6\eta_3(AX)
\end{aligned}$$

y, multiplicando escalarmente por ξ_3

$$\begin{aligned}
0 &= 3g(\phi AX, \xi_3) - 6\eta_2(AX) + 3g(\phi_1 AX, \xi_3) \\
&= -3g(AX, \xi_2) - 6\eta_2(AX)33g(AX, \xi_2) \\
&= -6\eta_2(AX)
\end{aligned}$$

con lo que la demostración finaliza. □

Para el caso en que $\xi \in \mathfrak{D}$ véase el Lema 2.1.6.

Luego, bajo nuestras condiciones M es, o bien una hipersuperficie de tipo A, o bien una hipersuperficie de tipo B.

Ahora vamos a ver si las hipersuperficies de tipo A y las de tipo B verifican $(\nabla_X \bar{R}_N)Y = 0$ para todo $X \in \mathfrak{D}$ y todo $Y \in TM$.

Para el caso de las hipersuperficies de tipo A, teniendo en cuenta que $\xi \in \mathfrak{D}^{\perp}$ y considerando $X \in \mathfrak{D}$ resulta

$$(\nabla_X \bar{R}_N)\xi = 3\phi AX + 6\eta_3(AX)\xi_2 - 6\eta_2(AX)\xi_3 + 3\phi_1 AX.$$

Por el Teorema 1.8.20, si $X_i \in T_\lambda$

$$(\nabla_{X_i} \bar{R}_N)\xi = 3\phi AX_i + 3\phi_1 AX_i = 3\lambda\phi X_i + 3\lambda\phi_1 X_i = 6\lambda\phi X_i.$$

Como $\bar{R}_N$ es $\mathfrak{D}$-paralelo, $(\nabla_{X_i}\bar{R}_N)\xi = 0$ luego, $\lambda = 0$ pero, $\lambda = -\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}r)$ para algún $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$ por lo que no existen hipersuperficies de este tipo con $\bar{R}_N$ $\mathfrak{D}$-paralelo.

Por otro lado, en el caso de las hipersuperficies de tipo B, teniendo en cuenta que $\xi \in \mathfrak{D}$ y considerando $X \in \mathfrak{D}$ resulta

$$(\nabla_X\bar{R}_N)\xi = 3\phi AX + 5\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi AX)\xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(AX)\phi_\nu\xi.$$

Por el Teorema 1.8.28, si $X_i \in T_\lambda$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{X_i}\bar{R}_N)\xi &= 3\phi AX_i + 5\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi AX_i)\xi_\nu + \sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(AX_i)\phi_\nu\xi \\
&= 3\phi AX_i + 5\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi AX_i)\xi_\nu \\
&= 3\lambda\phi X_i + 5\lambda\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi X_i)\xi_\nu \\
&= 3\lambda\phi X_i.
\end{aligned}$$

Además, al ser $(\nabla_{X_i}\bar{R}_N)\xi = 0$ resulta que $\lambda = \cot(r) = 0$ para algún $r \in (0, \pi/4)$, lo que nos lleva a contradicción. Luego no existen hipersuperficies de este tipo con $\bar{R}_N$ $\mathfrak{D}$-paralelo.

4.2. $\bar{R}_N$ tipo Codazzi

Para el concepto de tensor de tipo Codazzi véase el apartado 3.3 del Capítulo 3. Al igual que hacíamos allí, estudiaremos esta condición sobre el operador de Jacobi normal al haber obtenido solución negativa al problema del paralelismo de $\bar{R}_N$ como generalización de este concepto. Ahora vamos a demostrar lo mismo para el caso del operador de Jacobi normal. En concreto, demostraremos el siguiente

Teorema 4.2.1. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf y cuyo operador de Jacobi normal sea de tipo Codazzi si, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ es A-invariante.*

Para ello demostraremos que, bajo nuestras hipótesis, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.

Lema 4.2.2. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, o bien la componente en $\mathfrak{D}$, o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante y tal que $(\nabla_X\bar{R}_N)Y = (\nabla_Y\bar{R}_N)X$ para todo $X, Y \in TM$. Entonces o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario. Si, o bien $\eta(X_0)$, o bien $\eta(\xi_1)$ fuesen cero, ya habríamos terminado. Supongamos pues que ambos son no nulos. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 resulta que $\alpha \neq 0$ y, teniendo en cuenta (2.2) y (2.1) resulta

$$g\big((\nabla_\xi \bar{R}_N)\phi X_0, \xi_1\big) = -3\alpha\eta(X_0)\eta(\xi_1) - \alpha\eta(X_0)\eta(\xi_1) = -4\alpha\eta(X_0)\eta(\xi_1).$$

Por otro lado,

$$g\big((\nabla_{\phi X_0} \bar{R}_N)\xi, \xi_1\big) = 3\lambda\eta(X_0)\eta(\xi_1) + 3\lambda\eta(X_0)\eta(\xi_1) + 2\lambda\eta(X_0)\eta(\xi_1) = 8\lambda\eta(X_0)\eta(\xi_1)$$

donde, al ser $\alpha \neq 0$ hemos puesto $\lambda = \dfrac{\alpha^2 + 4\eta^2(X_0)}{\alpha}$.

Así pues,

$$-3\alpha^2 = 8\eta^2(X_0)$$

que nos lleva a contradicción. $\square$

Ahora vamos a ver que si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ entonces M es $\mathfrak{D}^\perp$-invariante.

Lema 4.2.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, tal que $(\nabla_X \bar{R}_N)Y = (\nabla_Y \bar{R}_N)X$ para todo $X, Y \in TM$ y $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. Como $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$ podemos suponer que $\xi = \xi_1$ con lo que bastaría entonces probar que $\eta_2(AX) = 0$ y que $\eta_3(AX) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{D}$. Por otro lado, tengamos en cuenta que para $X \in \mathfrak{D}$

$$\eta_2(\phi AX) = g(\xi_2, \phi AX) = -g(\phi\xi_2, AX) = -g(\phi_2\xi_1, AX) = g(\xi_3, AX) = \eta_3(AX)$$

y

$$\eta_3(\phi AX) = g(\xi_3, \phi AX) = -g(\phi\xi_3, AX) = -g(\phi_3\xi_1, AX) = -g(\xi_2, AX) = -\eta_2(AX).$$

Además,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \bar{R}_N)\xi &= 3\phi AX + 3q_2(X)\xi_3 - 3q_3(X)\xi_2 + 3g(AX, \xi_3)\xi_2 - 3g(AX, \xi_2)\xi_3 \\
&\quad +3q_3(X)\xi_2 - 3q_2(X)\xi_3 + 3\phi_1 AX \\
&\quad +q_2(X)\xi_3 - q_3(X)\xi_2 + 2g(AX, \xi_3)\xi_2 - 2g(AX, \xi_2)\xi_3 \\
&\quad -\phi_1 AX + q_3(X)\xi_2 - q_2(X)\xi_3 + \phi_1 AX \\
&\quad -\eta_2(AX)\xi_3 + \eta_3(AX)\xi_2 \\
&= 3\phi AX + 3\phi_1 AX + 6\eta_3(AX)\xi_2 - 6\eta_2(AX)\xi_3
\end{aligned}$$

y, por otro lado, al ser

$$(\nabla_\xi \bar{R}_N)X = 0$$

se sigue

$$3\phi AX + 3\phi_1 AX + 6\eta_3(AX)\xi_2 - 6\eta_2(AX)\xi_3 = 0.$$

Si ahora multiplicamos escalarmente por ξ_2, tenemos que $\eta_3(AX) = 0$ mientras que si lo hacemos por ξ_3 tendríamos $\eta_2(AX) = 0$. $\square$

Si $\xi \in \mathfrak{D}$ la demostración puede consultarse en el Lema 2.1.6.

Por último, para finalizar, veamos que ni las hipersuperficies reales de tipo A ni las de tipo B verifican que $\bar{R}_N$ es de tipo Codazzi. Para el caso de las hipersuperficies de tipo A, teniendo en cuenta el Teorema 1.8.20 resulta

$$\begin{aligned} g\big((\nabla_{\xi_2}\bar{R}_N)\xi, \xi_3\big) &= 3g(\phi A\xi_2, \xi_3) + 3q_2(\xi_2) + 3g(\phi_3 A\xi_2, \xi) - 3q_2(\xi_2) + 3g(\phi_1 A\xi_2, \xi_3) \\ &\quad + q_2(\xi_2) + 2\eta_3(\phi A\xi_2) - g(\phi_1 A\xi_2, \xi_3) - q_2(\xi_2) + g(\phi_1 A\xi_2, \xi_3) - \eta_2(A\xi_2) \\ &= -3\beta - 3\beta + 3\beta - 2\beta - \beta + \beta - \beta = -6\beta \end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned} g\big((\nabla_{\xi}\bar{R}_N)\xi_2, \xi_3\big) &= -3q_1(\xi) + 3g(\phi_3 A\xi, \xi_2) \\ &\quad + 3q_1(\xi) + 3g(\phi_2 A\xi, \xi_3) + q_1(\xi) + g(\phi_2 A\xi, \xi_3 - q_1(\xi) + \alpha \\ &= -3q_1(\xi) + 3\alpha + 3q_1(\xi) - 3\alpha + q_1(\xi) - \alpha - q_1(\xi) + \alpha = 0. \end{aligned}$$

Como $g\big((\nabla_{\xi_2}\bar{R}_N)\xi, \xi_3\big) = g\big((\nabla_{\xi}\bar{R}_N)\xi_2, \xi_3\big)$ entonces $\beta = 0$ pero como $\beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ para $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$ resulta que no puede ser nulo.

Para el caso de las hipersuperficies de tipo B consideremos

$$g\big((\nabla_{\xi_2}\bar{R}_N)\xi, \phi\xi_2\big) = 3g(\phi A\xi_2, \phi\xi_2) + \eta_2(A\xi_2) = 3\beta + \beta = 4\beta$$

y, por otro lado,

$$g\big((\nabla_{\xi}\bar{R}_N)\xi_2, \phi\xi_2\big) = 3g(\phi_2 A\xi, \phi\xi_2) + g(\phi_2 A\xi, \phi\xi_2) = 3\alpha + \alpha = 4\alpha.$$

Si $g\big((\nabla_{\xi_2}\bar{R}_N)\xi, \phi\xi_2\big) = g\big((\nabla_{\xi}\bar{R}_N)\xi_2, \phi\xi_2\big)$ entonces $\alpha = \beta$ por lo que, $2\cot(2r) = -2\tan(r)$ y, por lo tanto, debería de ser $1 = -\tan^2(2r)$, lo que es imposible.

4.3. Hipersuperficies reales para las que $\mathcal{L}_{\xi_i}\bar{R}_N = \nabla_{\xi_i}\bar{R}_N$

Denotaremos por $\mathcal{L}_X$ la derivada de Lie en la dirección del campo de vectores $X \in TM$. Veamos ahora otro resultado sobre el operador de Jacobi normal. Más concretamente vamos a demostrar el siguiente

Teorema 4.3.1. *No existen hipersuperficies reales de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sean Hopf, o bien la $\mathfrak{D}$-componente, o bien la $\mathfrak{D}^\perp$-componente de ξ sea A-invariante y $\mathcal{L}_{\xi_i}\bar{R}_N = \nabla_{\xi_i}\bar{R}_N, i = 1, 2, 3.$*

Empezaremos primero demostrando que, bajo nuestras hipótesis, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.

Lema 4.3.2. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, o bien la componente en $\mathfrak{D}$ o bien la componente en $\mathfrak{D}^\perp$ de ξ sea A-invariante y $\mathcal{L}_{\xi_i}\bar{R}_N = \nabla_{\xi_i}\bar{R}_N, i = 1, 2, 3.$ Entonces, o bien $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, o bien $\xi \in \mathfrak{D}$.*

Demostración. Como $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ con $X_0 \in \mathfrak{D}$ unitario podemos suponer que, tanto $\eta(X_0)$ como $\eta(\xi_1)$ son distintos de cero ya que, de no ser así, habríamos terminado. Razonando como en la demostración del Lema 2.1.2 resulta que $\alpha \neq 0$. Por otro lado, teniendo en cuenta (2.1), resulta

$$\bar{R}_N(X_0) = 4\eta^2(X_0)X_0 + 4\eta(X_0)\eta(\xi_1)\xi_1$$

y

$$\bar{R}_N(\phi X_0) = 0.$$

Como $\mathcal{L}_{\xi_i}\bar{R}_N = \nabla_{\xi_i}\bar{R}_N$ equivale a $\nabla_{\bar{R}_N(X)}\xi_i = \bar{R}_N(\nabla_X\xi_i)$, tomando $i = 1$ y $X = \phi X_0$ resulta

$$0 = \bar{R}_N(\nabla_{\phi X_0}\xi_1).$$

Si ahora multiplicamos escalarmente por X_0

$$\begin{aligned} 0 &= g(\nabla_{\phi X_0}\xi_1, \bar{R}_N(X_0)) \\ &= 4\eta^2(X_0)g(\phi_1 A\phi X_0, X_0) \\ &= -4\eta^2(X_0)\eta(\xi_1)g(\phi_1 A\phi_1 X_0, X_0) \\ &= 4\frac{\alpha^2 + 4\eta^2(X_0)}{\alpha}\eta^2(X_0)\eta(\xi_1) \\ &= 4\alpha\eta^2(X_0)\eta(\xi_1) + \frac{16}{\alpha}\eta^4(X_0)\eta(\xi_1). \end{aligned}$$

Por lo que

$$0 = 4\alpha^2\eta^2(X_0)\eta(\xi_1) + 16\eta^4(X_0)\eta(\xi_1) = 4\eta^2(X_0)\eta(\xi_1)\big(\alpha^2 + 4\eta^2(X_0)\big)$$

luego,

$$\alpha^2 + 4\eta^2(X_0) = 0$$

lo que nos lleva a contradicción. □

Veamos ahora que si $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$, M es $\mathfrak{D}^\perp$ invariante.

Lema 4.3.3. *Sea M una hipersuperficie real de $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ que sea Hopf, $\mathcal{L}_{\xi_i}\bar{R}_N = \nabla_{\xi_i}\bar{R}_N, i = 1, 2, 3$ y tal que $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Entonces $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. La condición $\mathcal{L}_{\xi_i}\bar{R}_N = \nabla_{\xi_i}\bar{R}_N$ equivale a $\nabla_{\bar{R}_N(X)}\xi_i = \bar{R}_N(\nabla_X\xi_i)$. Para $i = 2$ y $X \in \mathfrak{D}$, teniendo en cuenta que $\bar{R}_N(X) = X - \phi_1\phi X$ resulta $\nabla_{\bar{R}_N(X)}\xi_2 = \bar{R}_N(\nabla_X\xi_2)$ por lo que $\nabla_X\xi_2 - \nabla_{\phi_1\phi X}\xi_2 = \bar{R}_N(\nabla_X\xi_2)$.

Multiplicando escalarmente por ξ

$$-2g(A\xi_3, X) = -8g(A\xi_3, X),$$

con lo que $g(A\xi_3, X) = 0$.

Por otro lado, para $i = 3$ y $X \in \mathfrak{D}$, como en el caso anterior, se obtiene

$$\nabla_X\xi_3 - \nabla_{\phi_1\phi X}\xi_3 = \bar{R}_N(\nabla_X\xi_3).$$

Si ahora multiplicamos escalarmente por ξ

$$2g(AX, \xi_2) = 8g(AX, \xi_2),$$

con lo que $g(AX, \xi_2) = 0$. □

Cuando $\xi \in \mathfrak{D}$ la demostración es la del Lema 2.1.6.

Por último, para terminar, veamos que ni las hipersuperficies de tipo A ni las de tipo B verifican $\mathcal{L}_{\xi_i}\bar{R}_N = \nabla_{\xi_i}\bar{R}_N$ para todo $i = 1, 2, 3$.

Para el caso de las hipersuperficies de tipo A, considerando $i = 2$ y $X = \xi_2$ resulta

$$2\nabla_{\xi_2}\xi_2 = \bar{R}_N(\nabla_{\xi_2}\xi_2)$$

donde

$$\nabla_{\xi_2}\xi_2 = q_1(\xi_2)\xi_3 - q_3(\xi_2)\xi_1$$

luego, multiplicando escalarmente por ξ,

$$-2q_3(\xi_2) = -8q_3(\xi_2)$$

luego, $q_3(\xi_2) = 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi_2}\xi &= \phi A\xi_2 = -\beta\xi_3 \\ \nabla_{\xi_2}\xi_1 &= -q_2(\xi_2)\xi_3 + \beta\xi_3 \end{aligned}$$

luego, $2\beta = q_2(\xi_2)$.

Si ahora consideramos $i = 3$ y $X = \xi_2$ resulta

$$2\nabla_{\xi_2}\xi_3 = \bar{R}_N(\nabla_{\xi_2}\xi_3)$$

donde

$$\nabla_{\xi_2}\xi_3 = \beta\xi_1 - q_1(\xi_2)\xi_2$$

luego, multiplicando escalarmente por ξ,

$$2\beta = 8\beta$$

y, entonces, $\beta = 0$. Pero, $\beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r)$ para $r \in (0, \pi/4)$.

Para el caso de las hipersuperficies de tipo B, considerando $X = \xi$ resulta

$$\nabla_{\bar{R}_N(\xi)}\xi_i = \bar{R}_N(\nabla_\xi\xi_i)$$

de donde

$$4\nabla_\xi \xi_i = \bar{R}_N(\nabla_\xi \xi_i).$$

Multiplicando escalarmente por $\phi_i \xi$ resulta

$$4g(\phi_i A\xi, \phi_i \xi) = 0$$

de donde $4\alpha = 0$ y, por lo tanto, $\alpha = 0$ pero, $\alpha = -2\tan(2r)$ para algún $r \in (0, \pi/4)$.

Bibliografía

[1] D.V. Alekseevskii, *Compact quaternion spaces*, Funct. Anal. Appl., 2 (1968), 106-114.

[2] M. Berger, *Remarques sur le groupe d'holonomie des variétés Riemannienes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 262 (1966), 1316-1318.

[3] J. Berndt, *Real hypersurfaces in quaternionic space forms*, J. reine angew. Math., 419 (1991), 9-26.

[4] J. Berndt, *Riemannian geometry of complex two-plane Grassmannians*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino Vol., 55 (1997), 19-83.

[5] J. Berndt, *On Curvature and Submanifolds of Complex Two-Plane Grassmannians*, Proceedings of the Second International Workshop on Diff. Geom., Taegu, December 19-20, 1997 (Basic Science Research Institute, Taegu, 1998) 1-15.

[6] J. Berndt y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians*, Monatsh. Math., 127 (1999), 1-14.

[7] J. Berndt y Y.J. Suh, *Isometric flows on real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians*, Monatshefte für Math., 137 (2002), 87-98.

[8] M. Brozos-Vázquez y Gilkey, *Manifolds with commuting Jacobi operators*, J. Geometry, 86 (2006), 21-30.

[9] E. Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, Ann. Mat. 17 (1938), 177-191.

[10] T.E. Cecil, P.J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc., 269 (1982) 481-499.

[11] Q.S. Chi, *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*, J. Diff. Geom., 28(1988), 187-202.

[12] I. Jeong, H.J. Kim y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with parallel normal Jacobi operator*, Publ. Math. Debrecen, 76/1-2 (2010), 203-218.

[13] I. Jeong, H. Lee y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians whose structure Jacobi operator is of Codazzi type*, Acta Math. Hungar., 125/1-2 (2009), 141-160.

[14] I. Jeong, C.J.G. Machado, J.D. Pérez y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with $\mathfrak{D}^{\perp}$-parallel structure Jacobi operator*, International Journal of Mathematics, 22 (2011), 655-673.

[15] I. Jeong, J.D. Pérez y Y.J. Suh *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with parallel structure Jacobi operator*, Acta Math. Hungar., 122/1-2 (2009), 173-186.

[16] U-H. Ki, J.D. Pérez, F.G. Santos y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex space forms with ξ-parallel Ricci tensor and structure Jacobi operator*, J. of Korean Math. Soc., 44 (2007), 307-326.

[17] M. Kimura, *Sectional curvatures of holomorphic planes on a real hypersurface in $P^n\mathbb{C}$*, Math. Ann. 276 (1987), 487–499.

[18] H. Lee y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces of type B in complex two-plane Grassmannians related to the Reeb vector*, Bull. Korean Math. Soc., 47 (2010), No. 3, pp. 551-561.

[19] C.J.G. Machado y J.D. Pérez, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians some of whose Jacobi operators are ξ-invariant*, International Journal of Mathematics, a aparecer.

[20] C.J.G. Machado y J.D. Pérez, *On the structure vector field of a real hypersurface in complex two-plane Grassmannians*, preprint.

[21] C.J.G. Machado, J.D. Pérez, I. Jeong y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians whose normal Jacobi operator is of Codazzi type*, Central European Journal of Mathematics, 9 (2011), 578-582.

[22] C.J.G. Machado, J.D. Pérez, I. Jeong y Y.J. Suh, *$\mathfrak{D}$-parallelism of normal and structure Jacobi operators for real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians*, preprint.

[23] C.J.G. Machado, J.D. Pérez y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians whose Jacobi operators corresponding to $\mathfrak{D}^{\perp}$ directions are of Codazzi type*, Advances in Pure Mathematics, 1 (2011), 67-72.

[24] C.J.G. Machado, J.D. Pérez y Y.J. Suh, *Commuting structure Jacobi operators*, preprint.

[25] C.J.G. Machado, J.D. Pérez y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians whose structure Jacobi operators corresponding to $\mathfrak{D}^{\perp}$ directions are $\mathfrak{D}$-parallel*, Theoretical Mathematics and Applications, a aparecer.

[26] A. Martínez and J.D. Pérez, *Real hypersurfaces in quaternionic projective space*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV) 145 (1986), 355-384.

[27] S. Montiel, *Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space*, J. Math. Soc. Japan 37 (1985), 515-535.

[28] H.F. Münzer, *Isoparametrische Hyperflächen in Sphären I, II*, Math. Ann. 251 (1980), 57-71 y 256 (1981), 215-232.

[29] Y. Nikolayevsky, *Osserman manifolds of dimension 8*, Manuscr. Math., 115(2004), 31-53.

[30] Y. Nikolayevsky, *Osserman Conjecture in dimension* $n \neq 8, 16$, Math. Ann., 331(2005), 505-522.

[31] B. O'Neil, *The fundamental equations of submersions*, Michigan Math. J., 13 (1966), 459-469.

[32] R. Osserman, *Curvature in the eighties*, Amer. Math. Monthly, 97(1990), 731-756.

[33] M. Ortega y J.D. Pérez, *On the Ricci tensor of a real hypersurface of quaternionic hyperbolic space*, Manuscripta Math. 93 (1997), 49-57.

[34] M. Ortega and J.D. Pérez, *On the second fundamental tensor of real hypersurfaces in quaternionic hyperbolic space*, Rocky Mountain Journal of Mathematics (III) 31 (2001), 1063-1081.

[35] M. Ortega, J.D. Pérez, F.G. Santos, *Non-existence of real hypersurfaces with parallel structure Jacobi operator in nonflat complex space forms*, Rocky Mount. J. Math., 36(2006), 1603-1613.

[36] M. Ortega, J.D. Pérez y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in quaternionic projective spaces with commuting tangent Jacobi operators*, Glasgow Math. J., 45 (2003), 79–89.

[37] J.D. Pérez, I. Jeong y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with commuting normal Jacobi operator*, Acta Math. Hungarica, 117 (2007), 201-217.

[38] J.D. Pérez, I. Jeong y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with parallel structure Jacobi operator*, Acta Math. Hungarica, 121 (2008), 181-195.

[39] J.D. Pérez, F.G. Santos, *On the Lie derivative of structure Jacobi operator of real hypersurfaces in complex projective space*, Publ. Math. Debrecen, 66 (2005), 269-282.

[40] J.D. Pérez, F.G. Santos y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is Lie* ξ*-parallel*, Diff. Geom. and Its Appl., 22 (2005), 181-188.

[41] J.D. Pérez, F.G. Santos y Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is* $\mathfrak{D}$*-parallel*, Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin, 13 (2006), 459-469.

[42] J.D. Pérez, F.G. Santos y Y.J. Suh, *Real hipersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is of Codazzi type*, Canad. Math. Bull., 50 (2007), 347-355.

[43] J.D. Pérez y Y.J. Suh, *The Ricci tensor of real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians*, J. Korean Math. Soc., 44 (2007), no. 1, 211-235.

[44] R. Takagi, *Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures I, II*, J. Math. Soc. Japan 27 (1975), 43–53 y 507–516.

[45] P. Tondeur, *Foliations on Riemannian manifolds*, Springer Verlag, New York (1988).