

# MÉTODOS COMPUTACIONALES Y ÁLGEBRAS DE DIMENSIÓN FINITA

Óscar Cortadellas Izquierdo

Universidad de Granada



Tesis dirigida por

Pascual Jara Martínez  
Javier Lobillo Borrero

Julio 2011

Editor: Editorial de la Universidad de Granada  
Autor: Óscar Cortadellas Izquierdo  
D.L.: GR 489-2012  
ISBN: 978-84-694-9338-0





*ugr*

Universidad  
de Granada

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA

---

Óscar Cortadellas Izquierdo

MÉTODOS COMPUTACIONALES Y  
ÁLGEBRAS DE DIMENSIÓN FINITA  
Clasificación y determinación

---

Tesis doctoral dirigida por

Pascual Jara Martínez

Francisco Javier Lobillo Borrero

Granada, 8 de julio de 2011



La presente Memoria ha sido desarrollada en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Dr. D. Pascual Jara Martínez y del Dr. D. Francisco Javier Lobillo Borrero, para la obtención del título de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada.

V. B. El director

V. B. El codirector

Pascual Jara Martínez

Franciso Javier Lobillo Borrero

El doctorando

Óscar Cortadellas Izquierdo





A mi Abuela,  
que le faltó tiempo

y a Yvonne,  
que espero se quede lo suficiente para entenderlo



Editado en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X,  
con PdfL<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Version 3.1415926-1.40.10 (TeX Live 2009/Debian)

Impreso en Granada  
Julio 2011



---

## Sobre esta memoria

A lo largo de estos últimos cuatro años hemos desarrollado una profunda labor en el campo de la investigación en álgebra, sobre todo en el área del *álgebra no conmutativa*. El fruto de este esfuerzo y dedicación, tanto individual como colectiva, ha sido la realización de varios trabajos, algunos de los cuales contribuyen a la formación de esta Memoria. Hemos considerado oportuno separar éstos en dos Bloques, ya que si bien ambos tratan *problemas de clasificación*, entendemos que la naturaleza de los métodos empleados son los suficientemente distantes como para realizar su estudio por separado.

### Bloque I: estructuras de factorización

En este primer bloque trataremos el problema de clasificar todas las *estructuras de factorización* de dimensión 4. El objetivo de este trabajo es obtener, salvo isomorfismo, una clasificación de todas las álgebras de dimensión 4 que se pueden factorizar como producto de dos álgebras de dimensión 2.

Comprobaremos que las estructuras de factorización están en correspondencia uno a uno con ciertos tipos de *productos tensores torcidos*, donde el producto usual se ha deformado a través de una aplicación  $\tau$  que sigue manteniendo las propiedades unitarias y de asociatividad. Estas aplicaciones reciben el nombre de *aplicaciones lineales torcidas* o *entrelazamientos*. El siguiente paso será demostrar que si uno de los factores tiene dimensión 2, entonces los posibles entrelazamientos que podemos construir están en correspondencia biyectiva con pares  $(f, \delta)$  de endomorfismos y derivaciones respectivamente sobre el otro factor que conforma

la estructura de factorización.

Para cada par de factores  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  pueden existir muchos entrelazamientos, y por lo tanto muchas estructuras de factorización. Para que el estudio sea completo, realizaremos una clasificación de las álgebras resultantes salvo isomorfismo.

Estas estructuras de factorización dependen fuertemente de la naturaleza del cuerpo base, en concreto si  $k$  es algebraicamente cerrado o no. Para cada uno de estos casos tenemos tres posibles combinaciones para los factores. Para  $k$  algebraicamente cerrado los factores presentes son  $k^2$  y  $k[\xi]$ , el álgebra de los *números duales*. Es interesante comprobar cómo en estas condiciones muchos de los entrelazamientos  $\tau$  se pueden representar mediante grafos coloreados, donde la coloración viene determinada por la derivación elegida.

El caso para  $k$  una extensión cuadrática requiere otro tipo de técnicas. Ahora los factores son  $k^2, k[\xi]$  y  $\mathfrak{l}$ , una extensión de cuerpos de grado 2. Este factor  $\mathfrak{l}$  también es una *extensión de Galois* de grado 2, por lo que sus endomorfismos y derivaciones están limitados y el estudio se simplifica. Aún así, el último de los casos  $\mathfrak{l} \otimes_{\tau} \mathfrak{l}'$  da lugar a una familia uniparamétrica de cuaterniones generalizados, para los cuales no existe un método general de clasificación. Sin embargo, como esta familia presenta uno de los parámetros en común existen resultados parciales que nos permiten completar el estudio.

## Bloque II: ideales cofinitos homogéneos

Este segundo bloque trata del problema de clasificar *ideales cofinitos* según la dimensión de sus álgebras cocientes asociadas. A lo largo del mismo desarrollamos un nuevo procedimiento para establecer clases de isomorfía entre estas álgebras cocientes que mejora métodos estudiados anteriormente por otros autores.

En este proceso resulta de vital importancia el uso de *bases de Gröbner-Shirshov*, ya que a través de una base de Gröbner-Shirshov del ideal de relaciones podemos conocer una base del álgebra cociente. En ese caso hemos impuesto la homogeneidad de este ideal, ya que de otra manera no podríamos asegurar la computabilidad de las bases de Gröbner-Shirshov.

El procedimiento consiste en la parametrización de los ideales de acuerdo a una terna  $(\alpha, \beta, c)$  de valores enteros;  $\alpha$  el número de variables,  $\beta$  la longitud de las relaciones y  $c$  el número de éstas. Construimos todos los ideales de cada familia y clasificaremos, salvo isomorfismo, las álgebras de dimensión máxima en cada una de ellas.

Tenemos pues una doble vertiente en este trabajo. Por un lado construir todos los ideales de cada familia y obtener aquellos que den lugar a álgebras finitas de dimensión máxima. Y por otro lado clasificar salvo isomorfismo estas álgebras maximales. El primer objetivo está *parcialmente* completado por ordenador y cons-

tituye uno de los pilares de este estudio. Mediante un programa desarrollado en C++ construimos todos los ideales (más de 8 millones de casos) para luego ser estudiados por el programa *Bergman*, que se encarga de calcular una serie de Hilbert de cada una de las álgebras cocientes.

Una vez terminado este proceso obtendremos una lista con el número de ideales en cada familia y la dimensión de las álgebras asociadas a cada uno de ellos. El siguiente objetivo será clasificar, salvo isomorfismo, las álgebras maximales de cada familia. Para ello hemos desarrollado un nuevo procedimiento que establece una relación entre los isomorfismos y los isomorfismos graduados entre dos de estas álgebras, de manera que cada isomorfismo puede *proyectarse* a un isomorfismo graduado y cada isomorfismo graduado puede *extenderse* a un isomorfismo general.



# Índice General

Sobre esta memoria	I
Índice General	v
<b>BLOQUE I</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
Capítulo 1 . . . . .	5
Capítulo 2 . . . . .	6
Capítulo 3 . . . . .	7
Apéndice A . . . . .	8
<b>Notación</b>	<b>9</b>
<b>1 Definiciones básicas y generalizaciones de duplicados cuánticos</b>	<b>11</b>
1.1 Construcciones de álgebras a partir de álgebras . . . . .	12
1.2 Estructuras de factorización . . . . .	14
1.3 Aplicaciones lineales torcidas (entrelazamientos) . . . . .	15
1.3.1 Algunos ejemplos . . . . .	18
1.4 Caracterización de las aplicaciones lineales torcidas a través de $(f, \delta)$	20
1.5 Mapa conceptual del Capítulo 1 . . . . .	22
<b>2 Estructuras de factorización con <math>k</math> algebraicamente cerrado</b>	<b>23</b>
2.1 Productos tensores torcidos de la forma $k^2 \otimes_{\tau} k^2$ . . . . .	24
2.2 Productos tensores torcidos de la forma $k[\xi] \otimes_{\tau} k^2$ . . . . .	28
2.3 Productos tensores torcidos de la forma $k[\xi] \otimes_{\tau} k[\eta]$ . . . . .	34

2.4	Mapa conceptual del Capítulo 2 . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Estructuras de factorización con extensiones cuadráticas</b>	<b>39</b>
3.1	Productos tensores torcidos de la forma $k^2 \otimes_{\tau} l$ . . . . .	40
3.2	Productos tensores torcidos de la forma $k[\xi] \otimes_{\tau} l$ . . . . .	42
3.3	Productos tensores torcidos de la forma $l \otimes_{\tau} l'$ . . . . .	45
3.4	Mapa conceptual del Capítulo 3 . . . . .	49
<b>A</b>	<b>Álgebras de conjunto, coloraciones y cuaterniones</b>	<b>51</b>
A.1	Álgebras de conjuntos . . . . .	51
A.2	Coloraciones . . . . .	52
A.3	Cuaterniones . . . . .	56
	<b>BLOQUE II</b>	<b>61</b>
	<b>Introducción</b>	<b>63</b>
	Capítulo 4 . . . . .	65
	Capítulo 5 . . . . .	68
	Capítulo 6 . . . . .	70
	Capítulo 7 . . . . .	72
	Apéndice B . . . . .	74
	Apéndice C . . . . .	75
	<b>Notación</b>	<b>77</b>
<b>4</b>	<b>Desarrollo de bases de Gröbner-Shirshov</b>	<b>79</b>
4.1	Conjuntos, monomios y álgebras libres . . . . .	81
4.2	Órdenes y aritmética polinomial . . . . .	81
4.3	Generalización de la reducción polinomial . . . . .	83
4.4	Bases de Gröbner-Shirshov . . . . .	86
4.5	S-polinomios no conmutativos . . . . .	88
4.6	El algoritmo de Buchberger, generalizado . . . . .	90
4.7	Bases de Gröbner-Shirshov y conjuntos computables . . . . .	91
4.8	Bases de Gröbner-Shirshov reducidas . . . . .	92
4.9	Caracterización de bases de Gröbner-Shirshov no conmutativas . . . . .	93
4.10	Aplicaciones de bases de Gröbner-Shirshov . . . . .	94

4.10.1 Eliminación . . . . .	94
4.10.2 Intersección de ideales . . . . .	94
4.10.3 Homomorfismos . . . . .	95
4.11 Mapa conceptual del Capítulo 4 . . . . .	96
<b>5 Ambiente y situación de nuestro estudio</b>	<b>97</b>
5.1 Álgebras graduadas y homogéneas . . . . .	98
5.2 Dimensiones y crecimiento. Comportamiento asintótico . . . . .	101
5.2.1 Crecimiento en base a grafos . . . . .	102
5.3 Series de Hilbert y bases de Gröbner-Shirshov . . . . .	104
5.4 Mapa conceptual Capítulo 5 . . . . .	107
<b>6 Isomorfismos entre álgebras finitamente presentadas</b>	<b>109</b>
6.1 Un caso general . . . . .	111
6.2 El método graduado . . . . .	116
6.2.1 Mejoras del Método Graduado . . . . .	120
6.3 Mapa conceptual del Capítulo 6 . . . . .	125
<b>7 Estudio y clasificación de los ideales cofinitos</b>	<b>127</b>
7.1 Familia (2,2,2) . . . . .	129
7.2 Familia (2,2,3) . . . . .	132
7.3 Familia (2,3,3) . . . . .	134
7.4 Familia (2,3,4) . . . . .	137
7.5 Familia (2,3,5) . . . . .	143
7.6 Familia (2,4,3) . . . . .	145
7.7 Familia (2,4,4) . . . . .	146
7.8 Familia (3,2,3) . . . . .	146
7.9 Familia (3,2,4) . . . . .	146
7.10 Familia (3,3,3) . . . . .	149
7.11 Algunos fenómenos resultantes de este estudio . . . . .	149
7.11.1 Familias dentro de familias. Estudio de la heredad . . . . .	149
7.11.2 No existencia de isomorfismos entre familias . . . . .	151
7.11.3 Otro test de finitud . . . . .	153
7.12 Mapa conceptual del Capítulo 7 . . . . .	155



<b>B</b>	<b>Uso de ordenadores. El programa Bergman</b>	<b>157</b>
B.1	Código del programa principal . . . . .	160
B.2	Otros programas . . . . .	168
<b>C</b>	<b>Tablas de tiempo</b>	<b>171</b>
C.1	Tabla familia (2,2,2) . . . . .	171
C.2	Tabla familia (2,2,3) . . . . .	172
C.3	Tabla familia (2,3,3) . . . . .	172
C.4	Tabla familia (2,3,4) . . . . .	173
C.5	Table familia (2,3,5) . . . . .	173
C.6	Tabla familia (2,4,3) . . . . .	174
C.7	Tabla familia (2,4,4) . . . . .	175
C.8	Tabla familia (3,2,3) . . . . .	175
C.9	Tabla familia (3,2,4) . . . . .	176
	<b>Índice de tablas</b>	<b>177</b>
	<b>Índice de algoritmos</b>	<b>179</b>
	<b>Índice alfabético</b>	<b>181</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>187</b>





# BLOQUE I

---

de tiras Estruct



ción riza facto



4 sión en



Estructuras de factorización de dimensión 4

---





---

# Introducción

El objetivo de este estudio es encontrar, salvo isomorfismo, una clasificación de las estructuras de factorización de dimensión cuatro. Los resultados principales de este Bloque se encuentran en [CNLP10].

Consideremos una variedad  $M$  que representa cierto sistema físico. Desde otro punto de vista esta variedad puede también representarse como un álgebra de funciones  $\mathcal{A}$ , por ejemplo, el álgebra de funciones derivables sobre  $M$ , sobre el cuerpo base  $k$ . Si queremos ahora representar el sistema físico que consiste en dos hojas *paralelas*  $M_1$  y  $M_2$ , ambas iguales a  $M$ , entonces el álgebra que deberíamos considerar de manera natural para considerar este punto de vista clásico debería ser el producto directo  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ , el cual es isomorfo al álgebra  $\mathcal{A} \otimes k^2$ .

Supongamos que queremos seguir estudiando el caso anterior pero de manera que las hojas se van acercando cada vez más. Una vez sobrepasemos cierta distancia crítica, podemos suponer que la estructura de  $M_1$  puede *interactuar* con la estructura de  $M_2$ , de manera que ya no conmuten. Bajo estas premisas el álgebra conmutativa  $\mathcal{A} \otimes k^2$  no puede representar el comportamiento de las hojas *paralelas pero muy cerca*  $M_1$  y  $M_2$ . Nuestro objetivo en este trabajo es definir y estudiar, dentro de un ambiente algebraico, un sustituto para el álgebra  $\mathcal{A} \otimes k^2$  en esta situación, esto es, un álgebra no conmutativa que se pueda obtener como una deformación de  $\mathcal{A} \otimes k^2$  y que tenga propiedades estructurales similares.

En particular mantendremos la dimensión del álgebra  $\mathcal{A} \otimes k^2$ , ya que los efectos cuánticos no deberían afectar el número de variables que podemos medir. Así nuestro objetivo será encontrar un álgebra  $\mathcal{X}$ , un *duplicado cuántico* de  $\mathcal{A}$ , isomorfo como espacio vectorial a  $\mathcal{A} \otimes k^2$ . En particular, si  $\mathcal{A}$  es finito dimensional, entonces la dimensión del duplicado cuántico de  $\mathcal{A}$  es el doble de la dimensión de  $\mathcal{A}$ .

El método que proponemos para construir estos duplicados cuánticos es a través del uso de *estructuras de factorización* o *productos tensores torcidos* con el álgebra  $\mathcal{A}$  y otro factor de dimensión 2. El número de formas en las cuales podemos elegir este factor 2-dimensional depende del cuerpo  $k$ . Concretamente, si  $k$  admite una extensión de cuerpos de grado 2 entonces tenemos tres tipos de álgebras no isomorfas de dimensión 2 sobre  $k$ , que son

- ) el producto directo trivial  $k^2$
- ) una extensión de cuerpos cuadrática de  $k$
- ) el anillo de *números duales*  $k[\xi] \cong k[x]/\langle x^2 \rangle$

Por otro lado, si  $k$  no admite extensiones no triviales, por ejemplo  $k = \mathbb{C}$ , entonces existen dos posibles álgebras, el producto directo  $k^2$  y los números duales.



Desde un punto de vista puramente algebraico, la noción de producto tensor torcido se deriva directamente del siguiente *problema de factorización*

*Dado algún tipo de objeto algebraico, ¿es posible encontrar dos subobjetos con intersección mínima que generen nuestro objeto original?*

El problema de factorización ha sido intensamente estudiado para el caso de grupos, coálgebras y álgebras de Hopf y álgebras (ver, por ejemplo, [ACIM09], [CIMZ00], [CMZ02] y [Tak81]). En el caso particular de álgebras, un resultado bien conocido nos establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de estructuras de factorización que admiten dos álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  como factores y el conjunto de las llamadas *aplicaciones lineales torcidas*, que son aplicaciones lineales  $\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  que satisfacen ciertas condiciones de compatibilidad con respecto a las unidades y el producto de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ .

De esta manera el problema de construir estructuras de factorización con dos factores dados se convierte en el problema de encontrar todas las posibles aplicaciones torcidas entre estos dos factores. Bajo unas buenas circunstancias (por ejemplo que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  sean álgebras afines), el conjunto  $\mathcal{T}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  de todas las aplicaciones torcidas  $\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  es una variedad algebraica y podemos establecer las siguientes cuestiones

- ) ¿Es posible describir *explícitamente* la variedad  $\mathcal{T}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ?
- ) Supongamos que podemos responder de manera afirmativa la cuestión anterior. Entonces, ¿es posible determinar qué puntos de la variedad dan lugar a álgebras isomorfas?

Estos dos problemas, incluso en los casos más sencillos, son problemas muy complejos. Las razones son, entre otras, las siguientes: (1) aunque existen diferentes métodos para calcular productos tensores torcidos de dos álgebras dadas,

ninguno de ellos produce todos los que existen; (2) aún más grave es el problema de determinar las clases de isomorfía de las álgebras obtenidas de los mismos factores a través de diferentes productos torcidos, o encontrar alguna descripción de estas clases de isomorfía en términos de la variedad  $\mathcal{T}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

Cibils ([Cib06]) ha demostrado que el conjunto  $\mathcal{T}(\mathbb{k}^2, \mathcal{A})$  de productos tensores torcidos entre cualquier álgebra  $\mathcal{A}$  y el álgebra semisimple conmutativa  $\mathbb{k}^2$  está en correspondencia uno a uno con los pares de endomorfismos lineales del álgebra  $\mathcal{A}$  que satisfacen ciertas condiciones. Si tomamos  $\mathcal{A} = \mathbb{k}^n$ , entonces estos pares de aplicaciones lineales pueden describirse en términos combinatorios usando familias de grafos *coloreados*, y esta descripción nos da un método sencillo para describir todos los productos tensores torcidos  $\mathbb{k}^n \otimes_{\tau} \mathbb{k}^2$ , salvo isomorfismo ([Cib06], [LPN08]). Otros avances parciales en el problema de clasificación de estructuras de factorización han sido desarrollados en [BW91] y en las últimas secciones de [GG99].

Más allá de la motivación física que originó el concepto de duplicado no conmutativo (definido por Cibils), el resto de opciones para el factor 2-dimensional tienen su propia cuota de interés. En particular, la construcción de duplicados cuánticos a través de números duales tiene otra interpretación física. Como el álgebra de los números duales es uno de los más simples ejemplos de superespacio no trivial, donde la  $\xi$ -dirección puede ser interpretada como la dirección fermiónica y la componente escalar como la dirección bosónica, el procedimiento de duplicar una variedad usando números duales puede entenderse como una manera sencilla de añadir una superestructura al sistema físico descrito por la variedad. Además, las cuantizaciones del producto tensor  $\mathcal{A} \otimes \mathbb{k}[\xi]$  admiten una interpretación como *deformaciones infinitesimales* (para un parámetro formal central) en el sentido de la Teoría Formal de Deformaciones ([Ger64]), y por lo tanto los productos tensores torcidos  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathbb{k}[\xi]$  pueden ser vistos como deformaciones infinitesimales con respecto a un parámetro no central, con la ventaja añadida de la existencia de una clase de deformaciones para álgebras que son rígidas desde el punto de vista formal (como álgebras separables). Finalmente, el resto de casos de duplicados cuánticos obtenidos usando una extensión de cuerpos cuadrática tienen propiedades similares a las complexificaciones de las álgebras reales, viéndolas como extensiones escalares no conmutativas.

## Capítulo 1

Empezaremos recordando algunas construcciones algebraicas básicas que podemos obtener a partir de dos álgebras dadas. Al final de la primera sección recuperaremos la noción de producto tensor de dos álgebras, que será la estructura básica a lo largo de este trabajo.

En la siguiente sección seguiremos la definición de estructura de factorización



dada por Majid en [Maj90]. La idea principal a la hora de construir una estructura de factorización para un álgebra  $\mathcal{X}$  es la de encontrar dos subálgebras,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , que juntas generen  $\mathcal{X}$  de manera no redundante. Una de las primeras consecuencias que nos encontraremos es que como espacio vectorial  $\mathcal{X}$  debe ser isomorfo al producto tensor algebraico  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .

A partir de esta idea surgen las aplicaciones lineales torcidas o entrelazamientos, que son las aplicaciones de álgebras que tienen un buen comportamiento con estas estructuras. De hecho, el resultado principal de esta sección nos dice que si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son álgebras unitarias, las estructuras de factorización que tienen como factores a  $\mathcal{A}$  y a  $\mathcal{B}$  están en correspondencia biunívoca con las aplicaciones lineales  $\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  que verifican ciertas condiciones. La estructura de factorización que determinan estas aplicaciones serán los productos tensores torcidos  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  con respecto al entrelazamiento  $\tau$ .

Terminaremos el Capítulo introduciendo la definición de *duplicados cuánticos* de un álgebra  $\mathcal{A}$  como producto tensor torcido  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{B}$ , donde  $\mathcal{B}$  es cualquier álgebra 2-dimensional, y caracterizaremos el conjunto de aplicaciones torcidas como un conjunto de parejas  $(f, \delta)$ , donde  $f$  es un endomorfismo del álgebra  $\mathcal{A}$  y  $\delta$  es una  $f$ -derivación que satisfacen ciertas propiedades de compatibilidad.

Debajo de estos productos tensores torcidos se esconde la idea de encontrar un nuevo candidato, auténticamente no conmutativo, para ser la versión algebraica de un producto cartesiano no conmutativo. Lo que perdemos a cambio de esta generalización es la unicidad, ya que comprobaremos que para un par de álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dadas existen muchos productos tensores torcidos  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{B}$  no isomorfos.

La cuestión que vamos a abordar a lo largo de los dos siguientes capítulos es, dadas dos álgebras fijas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , ¿cuántos productos tensores torcidos  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{B}$  podemos construir? O lo que es lo mismo, en virtud del Teorema 1.12, ¿cuántos entrelazamientos  $\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  existen?

## Capítulo 2

Empezamos en este Capítulo el estudio de las estructuras de factorización de dimensión 4. Como ya hemos comentado, es un proceso en el cual el cuerpo  $\mathbb{k}$  juega un papel muy importante ya que define qué posibles factores existen. De esta manera podemos dividir el estudio en dos casos según sea  $\mathbb{k}$  algebraicamente cerrado o no.

En este Capítulo estudiaremos el caso en que el cuerpo es algebraicamente cerrado. Esto significa que no admite extensiones cuadráticas de cuerpos, por lo que solo tenemos como factores al álgebra  $\mathbb{k}^2$  y a los números duales  $\mathbb{k}[\xi]$ .

En la primera Sección tomamos como factores dos copias de  $\mathbb{k}^2$ . A través de la condiciones de trenzado (1.2) y (1.3) podemos construir todos las aplicacio-

nes torcidas, pero en [Cib06] y [LPN08] se explica otro procedimiento a través de aplicaciones de conjuntos, que a su vez se asocian con ciertos grafos *coloreados*, esto es, con valores en sus vértices que los diferencian entre ellos. Mediante este proceso podemos describir todos los entrelazamientos y las álgebras que llevan asociadas. Por último clasificamos esas álgebras y concluimos con la Proposición 2.2, que nos describe todos los productos tensores torcidos.

En la segunda Sección estudiamos el problema con los factores  $k[\xi]$  y  $k^2$ . Imponiendo las condiciones de trenzado seremos capaces de encontrar todos los entrelazamientos en función de las aplicaciones  $(f, \delta)$ . Pero en este caso el estudio puede hacerse más amplio. Las buenas condiciones de los números duales nos permiten sustituir el factor  $k^2$  por  $k^n$  y, al igual que en el caso anterior, podemos identificar las aplicaciones lineales torcidas con grafos coloreados (Proposición 2.4). En el Teorema 2.5 explicamos cuáles son los productos tensores torcidos cuando la derivación es cero y cuándo dos productos tensores torcidos son isomorfos. En el Teorema 2.6 tenemos qué álgebras se corresponden con productos tensores torcidos cuando la derivación es distinta de cero. Terminamos la Sección con el Ejemplo 2.9, donde hacemos un estudio exhaustivo con el factor  $k^3$ .

En la tercera Sección afrontamos el problema para dos copias de los números duales. En este caso obtenemos todas las aplicaciones lineales torcidas a través del cálculo de los posibles coeficientes que las conforman, imponiendo las condiciones de trenzado. A partir de los entrelazamientos definimos los productos para los productos tensores torcidos, por lo que nos queda el problema de clasificar estas álgebras. Obtenemos dos grandes familias de álgebras con un elemento en común, que es el álgebra exterior  $\bigwedge k^2$  de  $k^2$ . El Teorema 2.12 nos define todos los posibles productos tensores torcidos en esta familia.

## Capítulo 3

En este Capítulo completamos el estudio de las estructuras de factorización de dimensión 4 para el caso de  $k$  un cuerpo que admite extensiones cuadráticas. En este caso uno de los factores será  $l = k[x]/\langle p(x) \rangle$ , con  $p(x)$  un polinomio de grado 2 cuyas raíces no pertenecen a  $k$ .

En la primera Sección los factores serán  $k^2$  y  $l$ . Este caso se parece mucho a la Sección 2.2, ya que nuevamente podemos extender el estudio a  $k^n$ . Nuevamente podemos usar grafos coloreados para describir los entrelazamientos y la Proposición 3.1 nos dice las coloraciones que se pueden tomar. Veremos en el Teorema 3.2 que todos los productos tensores torcidos en este caso son álgebras de matrices.

En la segunda Sección usamos como factores  $k[\xi]$  y  $l$ . Como  $l$  es una extensión de Galois solo existen dos endomorfismos  $k$ -lineales, por lo que el estudio es más

sencillo. Como  $\mathbb{1}$  también es separable sus derivaciones son interiores, así que la clasificación de los entrelazamientos puede obtenerse imponiendo estas dos condiciones. Cuando la derivación sea distinta de cero obtendremos productos tensores torcidos isomorfos a álgebras de matrices, y cuando la derivación sea cero obtendremos el anillo de invariantes del álgebra de caminos de longitud 1 del 2-ciclo (Lema 3.5).

Para terminar el estudio tenemos el caso de dos factores que son extensiones cuadráticas de cuerpos. En este caso también podemos aprovechar que  $\mathbb{1}$  y  $\mathbb{1}'$  son extensiones de Galois separables, con lo que las aplicaciones lineales torcidas se pueden derivar de estas condiciones. Los productos lineales torcidos resultan ser isomorfos a álgebras de cuaterniones generalizadas que tienen uno de los parámetros común (Lema 3.6). La clasificación de las clases de isomorfía de álgebras de cuaterniones no es tan sencilla como las estudiadas en los casos anteriores, pero en [Pie82] se presenta un resultado para el caso de un parámetro común que en parte resuelve la clasificación, dando lugar a clases de isomorfía para productos tensores torcidos que son órbitas de cierta acción, una familia uniparamétrica de cuaterniones o el álgebra conmutativa  $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}'$ . Por último, en la Proposición 3.9 identificamos esta familia uniparamétrica con el álgebra de caminos truncada del 2-ciclo.

## Apéndice A

Con el objetivo de hacer este trabajo autocontenido, hemos añadido este Apéndice donde hemos resumido una serie de conceptos como álgebras de conjuntos, derivaciones, grafos, coloraciones y cuaterniones, que se usan sobre todo en las Secciones 2.1, 2.2, 3.1, y 3.3.

La mayoría de estos conceptos se encuentran en [Cib06].



---

## Notación

A lo largo de este trabajo usaremos la letra  $k$  para denotar el cuerpo base, que tendrá característica distinta de 2.

Las álgebras con las que trabajaremos serán siempre  $k$ -álgebras asociativas y unitarias. Dada un álgebra  $\mathcal{A}$  escribiremos  $\mu_{\mathcal{A}}$  para denotar su producto. También identificaremos todo objeto con la aplicación identidad definida sobre él, esto es,  $\mathcal{A} \otimes f$  se identifica con  $\text{Id}_{\mathcal{A}} \otimes f$ .

El producto tensor sobre el cuerpo  $k$  se notará solamente por  $\otimes$ . No confundir el producto tensor torcido  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{B}$  con el producto tensor de dos álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  sobre un anillo  $\tau$ .

Cuando trabajemos con álgebras de caminos  $kQ$  de grafos  $Q$ , asumiremos que las flechas se multiplican como si fueran aplicaciones. Por ejemplo, en el grafo

$$\textcircled{1} \xrightarrow{\alpha} \textcircled{2} \xrightarrow{\beta} \textcircled{3}$$

el camino de longitud 2 de  $\textcircled{1}$  a  $\textcircled{3}$  se escribirá  $\beta\alpha$ . A lo largo del trabajo, el ideal  $Q_{\geq 2}$  de  $kQ$  generado por todos los caminos de longitud mayor que uno jugará un papel destacado. Denotaremos por  $Q^{\text{op}}$  el grafo opuesto a  $Q$ , esto es, el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices pero la dirección de las flechas ha sido invertida.



## 1

# Definiciones básicas y generalizaciones de duplicados cuánticos

Hey! ... Listen!



Navi

The Legend of Zelda, Ocarina of Time

En este primer Capítulo vamos a introducir las definiciones básicas de las construcciones con las que vamos a trabajar en los Capítulos 2 y 3. Empezaremos comentando en la Sección 1.1 diversas álgebras que se pueden construir a partir de otras álgebras hasta llegar a la definición de producto tensor, que es la estructura básica que vamos a desarrollar en nuestro estudio.

A continuación daremos la definición formal de estructuras de factorización (Definición 1.8), que esconde la idea de descomponer un álgebra  $\mathcal{C}$  como producto tensor de dos álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ .

En la Sección 1.3 introducimos la definición de aplicación lineales torcidas, que son las aplicaciones que usaremos para construir estructuras de factorización. Se trata de aplicaciones que *deforman* la estructura multiplicativa del álgebra. En el Lema 1.10 mostramos las condiciones que deben verificar estas aplicaciones para definir un nuevo producto. Lo realmente interesante es que realizaremos una correspondencia biyectiva entre los productos tensores torcidos de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  y los entrelazamientos entre estos dos factores. También incluimos una batería de ejemplos de entrelazamientos entre algunas de las álgebras más representativas que conocemos.

Terminaremos el Capítulo caracterizando las aplicaciones lineales torcidas en términos de ciertas parejas de aplicaciones  $(f, \delta)$ , cuando uno de los factores tiene dimensión 2, que se obtienen a partir de las condiciones de trenzado que se definen en la Sección 1.3. Estas condiciones son las que usaremos para realizar la clasificación de los entrelazamientos entre dos álgebras de los siguientes Capítulos.

## Construcciones de álgebras a partir de álgebras

Un tópico muy recurrido en el mundo de las Matemáticas es construir nuevos objetos a partir de otros ya existentes. En nuestro caso supongamos que partimos de dos álgebras (asociativas y unitarias)  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  sobre un cuerpo  $k$ . ¿Qué otras álgebras podemos construir a partir de ellas? Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.1** (Producto directo). *El producto directo de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , que denotaremos por  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ , puede describirse de la forma*

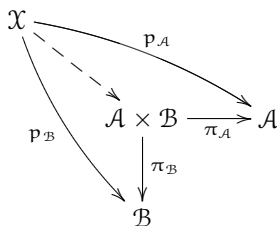
$$\{(a, b) \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$$

con la suma y el producto definidos componente a componente, esto es,

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad (a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$$

Existen proyecciones canónicas del producto directo a cada uno de sus factores, esto es, aplicaciones de álgebras  $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  y  $\pi_{\mathcal{B}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$  definidas como  $\pi_{\mathcal{A}}(a, b) = a$  y  $\pi_{\mathcal{B}}(a, b) = b$ . Estas aplicaciones nos permiten definir el producto directo en términos de su Propiedad Universal.

**Teorema 1.2.** *Si tenemos un álgebra  $\mathcal{X}$ , dotada de un par de aplicaciones de álgebras  $p_{\mathcal{A}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$  y  $p_{\mathcal{B}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ , entonces existe una única aplicación de álgebras  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  de forma que el siguiente diagrama es conmutativo*



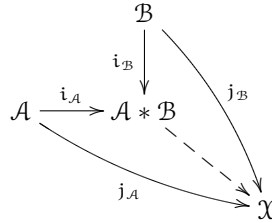
**Ejemplo 1.3** (Producto libre). *El producto directo de dos álgebras es la menor álgebra que se puede construir a partir de las álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Ahora nuestra idea es construir el mayor objeto posible. Este objeto es lo que se denomina producto libre de dos álgebras. El producto libre  $\mathcal{A} * \mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  puede definirse como el espacio vectorial generado por elementos de la forma*

$$a_1 b_1 \cdots a_n b_n$$

donde los elementos  $a_i$  pertenecen a  $\mathcal{A}$ , los  $b_i$  pertenecen a  $\mathcal{B}$  e identificamos  $a1_{\mathcal{B}} = a, 1_{\mathcal{A}}b = b$  para todo  $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ . El producto se define por yuxtaposición. De manera más informal, podría decirse que el producto libre se puede expresar como el desarrollo lineal de letras alternadas, no escalares, en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ .

Para este producto libre existen inclusiones canónicas  $i_A : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A} * \mathcal{B}$  e  $i_B : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A} * \mathcal{B}$ , las cuales podemos usar para definir el producto libre en términos de su Propiedad Universal.

**Teorema 1.4.** Si  $\mathcal{X}$  es un álgebra, y  $j_A : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$  y  $j_B : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{X}$  son dos aplicaciones de álgebras, entonces existe una única aplicación de álgebras  $\varphi : \mathcal{A} * \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{X}$  de forma que el siguiente diagrama es conmutativo



**Ejemplo 1.5** (Producto tensor). De la misma manera que hemos definido el producto libre, podemos construir el producto tensor  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  de dos álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  como el espacio generado por los elementos

$$\{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{A}, \mathbf{b} \in \mathcal{B}\}$$

donde hacemos las siguientes identificaciones que nos caracterizan esta construcción

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{a}') \otimes \mathbf{b} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a}' \otimes \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{b}') &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}' \\ \alpha \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} &= \mathbf{a} \otimes \alpha \mathbf{b} \end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathcal{A}$ ,  $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathcal{B}$  y  $\alpha \in \mathbf{k}$ . Podemos dotar a  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  de un producto asociativo mediante la fórmula

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}') = \mathbf{a}\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}\mathbf{b}'$$

Como ocurría en el producto libre, para el producto tensor tenemos morfismos de álgebras  $i_A : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  e  $i_B : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  dados por  $i_A(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \otimes 1$  e  $i_B(\mathbf{b}) = 1 \otimes \mathbf{b}$ . Además, estas aplicaciones satisfacen la condición

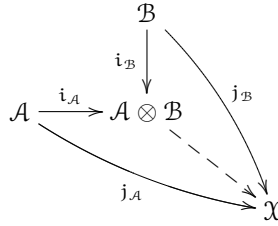
$$i_A(\mathbf{a})i_B(\mathbf{b}) = i_B(\mathbf{b})i_A(\mathbf{a})$$

y esto nos permite definir el producto tensor en términos de su Propiedad Universal.

**Teorema 1.6.** Si  $\mathcal{X}$  es un álgebra, y  $j_A : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$  y  $j_B : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{X}$  dos aplicaciones de álgebras tales que  $j_A(\mathbf{a})j_B(\mathbf{b}) = j_B(\mathbf{b})j_A(\mathbf{a})$  para todo  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}, \mathbf{b} \in \mathcal{B}$ , entonces existe una única aplicación  $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{X}$  de forma que el siguiente diagrama es



commutativo



**Observación 1.7.** Como tenemos aplicaciones  $i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  e  $i_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , podemos usar la propiedad universal del producto libre para obtener una aplicación  $\varphi : \mathcal{A} * \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Además, como  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  está generado por  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , esta aplicación es sobreyectiva, y por lo tanto podemos recuperar el producto tensor como cociente del producto libre. Concretamente tenemos

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{A} * \mathcal{B} / (\mathbf{a} * \mathbf{b} - \mathbf{b} * \mathbf{a})$$

Sección 1.2

## Estructuras de factorización

Vamos ahora a centrar nuestros estudios sobre el producto tensor. Nuestro objetivo es tomar la definición de producto tensor de dos álgebras y encontrar un modo *práctico* de deformarlo. Recordemos que un producto tensor  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  puede caracterizarse como un álgebra  $\mathcal{X}$  dotada de dos aplicaciones inyectivas  $i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{X}$  e  $i_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{X}$  tales que las imágenes de  $i_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$  e  $i_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})$  generan  $\mathcal{X}$  y satisfacen que  $i_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) \cdot i_{\mathcal{B}}(\mathbf{b}) = i_{\mathcal{B}}(\mathbf{b}) \cdot i_{\mathcal{A}}(\mathbf{a})$  para todo  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}, \mathbf{b} \in \mathcal{B}$ .

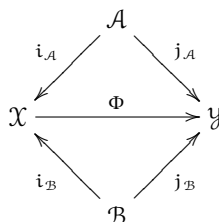
Si quitamos alguna de estas propiedades sin imponer otra equivalente, obtenemos familias mayores de álgebras, que parten del mismo producto tensor hasta el producto libre (recordemos que cualquier álgebra que contenga a  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  puede expresarse como cociente del producto libre). Queremos tener cierto control sobre cómo de grande es el producto que definimos, por lo que nos limitaremos a algunos casos particulares de esta familia. Solo nos quedaremos con aquellos candidatos que mantengan la dimensión lineal del producto tensor clásico. Esta idea puede expresarse de la siguiente manera.


**Definición 1.8.** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos  $k$ -álgebras. Una estructura de factorización de un álgebra  $\mathcal{X}$  a través de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  consiste en un par aplicaciones de álgebras inyectivas  $i_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{X}$  e  $i_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{X}$  de manera que la aplicación lineal dada por

$$\begin{aligned} \varphi(i_{\mathcal{A}}, i_{\mathcal{B}}) : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} &\rightarrow \mathcal{X} \\ \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} &\mapsto i_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) \cdot i_{\mathcal{B}}(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

sea un isomorfismo lineal. El hecho de que  $\varphi(i_{\mathcal{A}}, i_{\mathcal{B}})$  sea sobreyectiva implica que  $\mathcal{X}$  está generado por la imágenes de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , y la inyectividad nos asegura la no

redundancia de las inclusiones de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  sobre  $\mathcal{X}$ . En particular,  $\mathcal{X}$  es un cociente del producto libre  $\mathcal{A} * \mathcal{B}$  el cual es isomorfo, como espacio vectorial, al producto tensor  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Si  $\mathcal{X}$  factoriza a través de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , diremos que  $\mathcal{X}$  es un producto tensor torcido de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Dos productos tensores torcidos  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  se dirán isomorfos, como productos tensores torcidos de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , si existe un isomorfismo de álgebras  $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  que respete las inclusiones de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , esto es, que el siguiente diagrama conmute



El hecho de que  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  sean isomorfos como productos tensores torcidos es en general una condición más fuerte que el hecho de que sean solo isomorfos. 

### Sección 1.3

## Aplicaciones lineales torcidas (entrelazamientos)

En esta sección vamos a presentar una forma sencilla para construir estructuras de factorización.

La idea es la siguiente. Tenemos dos álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  y queremos construir un álgebra  $\mathcal{X}$  que factorice a través de ellas. Por definición (Sección 1.2),  $\mathcal{X}$  debe ser isomorfa, como espacio vectorial, a  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , por lo que lo más sencillo es suponer que como espacio vectorial  $\mathcal{X}$  coincide con  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ . Entonces podemos contar con las conocidas inclusiones canónicas  $i_{\mathcal{A}}$  e  $i_{\mathcal{B}}$ . La estructura de álgebra usual sobre  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  se obtiene a través de la multiplicación  $\mu : (\mu_{\mathcal{A}} \otimes \mu_{\mathcal{B}}) \circ (\mathcal{A} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathcal{B})$ , donde  $\mathbb{R} : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  se refiere al *flip usual*

$$\mathbb{R}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

La manera más sencilla de deformar esta estructura de álgebra será reemplazando el flip usual  $\mathbb{R}$  por otra aplicación  $\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , y definiendo un nuevo producto  $\mu_{\tau}$  de la forma  $\mu_{\tau} = (\mu_{\mathcal{A}} \otimes \mu_{\mathcal{B}}) \circ (\mathcal{A} \otimes \tau \otimes \mathcal{B})$ .

No podemos esperar que cualquier aplicación definida de esta forma pueda dar lugar a una estructura de factorización, siquiera un producto asociativo. Para poder caracterizar las aplicaciones para las cuales esto es cierto necesitamos cierta notación adicional, que introducimos a continuación.

Si tenemos una aplicación  $\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  definida de la forma anterior,

escribiremos, siguiendo una notación estilo *Sweedler*

$$\tau(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = \mathbf{a}_\tau \otimes \mathbf{b}_\tau$$

donde el sumatorio se entiende de manera implícita. Con esta notación, el producto  $\mu_\tau$  se escribirá de la forma

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot_\tau (\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}') = \mathbf{a}\mathbf{a}'_\tau \otimes \mathbf{b}\mathbf{b}'_\tau$$

Si queremos que  $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_\tau)$  defina una estructura de producto tensor torcido tenemos que asegurar que las aplicaciones  $i_{\mathcal{A}}$  e  $i_{\mathcal{B}}$  sean morfismos de álgebras. Para ello podemos usar el siguiente Lema.

**Lema 1.9.** *La aplicación  $i_{\mathcal{A}}$  es una aplicación de álgebras si y solo si  $\tau(1 \otimes \mathbf{a}) = \mathbf{a} \otimes 1$  para todo  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ . De igual forma, la aplicación  $i_{\mathcal{B}}$  es una aplicación de álgebra si y solo si  $\tau(\mathbf{b} \otimes 1) = 1 \otimes \mathbf{b}$ .*

Las condiciones dadas por el Lema 1.9

$$\tau(1 \otimes \mathbf{a}) = \mathbf{a} \otimes 1 \quad \tau(\mathbf{b} \otimes 1) = 1 \otimes \mathbf{b} \tag{1.1}$$

se llaman *condiciones de unidad* para la aplicación  $\tau$ . Ahora que ya sabemos que  $i_{\mathcal{A}}$  e  $i_{\mathcal{B}}$  son aplicaciones de álgebras, nos centraremos en cuándo la aplicación  $\mu_\tau$  nos da un producto asociativo sobre  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .

**Lema 1.10** (Condiciones de trenzado). *La aplicación producto construida de la forma  $\mu_\tau = (\mu_{\mathcal{A}} \otimes \mu_{\mathcal{B}}) \circ (\mathcal{A} \otimes \tau \otimes \mathcal{B})$  es asociativa si y solo si la aplicación  $\tau$  satisface las siguientes condiciones*

$$\tau \circ (\mathcal{B} \otimes \mu_{\mathcal{A}}) = (\mu_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{B}) \circ (\mathcal{A} \otimes \tau) \circ (\tau \otimes \mathcal{A}) \tag{1.2}$$

$$\tau \circ (\mu_{\mathcal{B}} \otimes \mathcal{A}) = (\mathcal{A} \otimes \mu_{\mathcal{B}}) \circ (\tau \otimes \mathcal{B}) \circ (\mathcal{B} \otimes \tau) \tag{1.3}$$

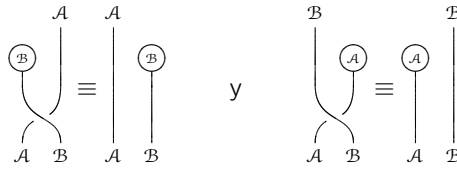
Estas condiciones expresadas en el Lema 1.10 se resumen en los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\tau \otimes \mathcal{A}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathcal{A} \otimes \tau} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \\ \downarrow \mathcal{B} \otimes \mu_{\mathcal{A}} & & & & \downarrow \mu_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{B} \\ \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \end{array}$$

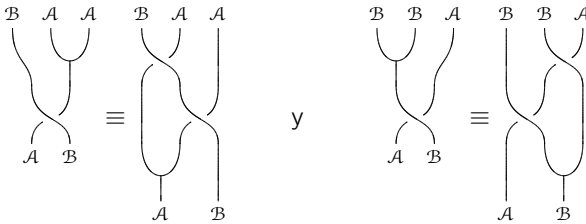
y

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\mathcal{B} \otimes \tau} & \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} & \xrightarrow{\tau \otimes \mathcal{B}} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \\ \downarrow \mu_{\mathcal{B}} \otimes \mathcal{A} & & & & \downarrow \mathcal{A} \otimes \mu_{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} & & \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \end{array}$$

Usando la notación de cuerdas ([LP07]), las condiciones de unidad (1.1) se reescriben como



y las condiciones de trenzado (1.2) y (1.3) equivalen a



Cuando una aplicación lineal  $\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  satisface las condiciones (1.1), (1.2) y (1.3), decimos que  $\tau$  es una *aplicación lineal torcida* (*entrelazamiento*) unitaria. Si  $\tau$  es un entrelazamiento, el álgebra  $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_\tau)$  es un producto tensor torcido de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , el cual llamaremos producto tensor torcido de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  con respecto al entrelazamiento  $\tau$ , y lo denotaremos por  $\mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{B}$ .



Acabamos de describir una familia particular de estructuras de factorización, las obtenidas a través de entrelazamientos. Uno puede pensar que al restringirse a este caso estamos dejando de lado otras muchas estructuras de factorización. Pero no es cierto. De hecho, todas las estructuras de factorización pueden construirse con este procedimiento, tal y como se muestra en el siguiente resultado.

**Proposición 1.11.** *Sea  $(C, i_A, i_B)$  un producto tensor torcido de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Entonces existe un único entrelazamiento  $\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  tal que  $C$  es isomorfo a  $\mathcal{A} \otimes_\tau \mathcal{B}$  como producto tensor torcido.*

*Demostración.* Sea  $\varphi = \varphi(i_A, i_B)$  el isomorfismo lineal que nos da la estructura de producto tensor torcido, y definamos

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \\ \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} &\mapsto \varphi^{-1}(i_B(\mathbf{b})i_A(\mathbf{a})) \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \varphi((\mathbf{a} \otimes \mathbf{1}) \cdot_\tau (\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1)) &= \varphi(\mathbf{a}\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1) = i_A(\mathbf{a}\mathbf{a}_1)i_B(\mathbf{b}_1) \\ &= i_A(\mathbf{a})i_A(\mathbf{a}_1)i_B(\mathbf{b}_1) \\ &= \varphi(\mathbf{a} \otimes \mathbf{1})\varphi(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1) \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, podemos probar que  $\varphi((\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1) \cdot_\tau (\mathbf{1} \otimes \mathbf{b})) = \varphi(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1)\varphi(\mathbf{1} \otimes \mathbf{b})$ . Por la definición de  $\tau$  tenemos

que  $\varphi(\tau(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})) = i_{\mathcal{B}}(\mathbf{b})i_{\mathcal{A}}(\mathbf{a})$ , y como

$$(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1) \cdot_{\tau} (\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_1 \otimes 1) \cdot_{\tau} \tau(\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{a}_2) \cdot_{\tau} (1 \otimes \mathbf{b}_2)$$

obtenemos que  $\varphi$  es un homomorfismo entre  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{B}$ .

La unicidad de  $\tau$  se obtiene de manera inmediata ya que cualquier homomorfismo de álgebras  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \otimes_{\tau'} \mathcal{B}$  que sea compatible con las inclusiones de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  debe ser la identidad.  $\square$

Como conclusión de esta parte podemos enunciar el siguiente Teorema.

**Teorema 1.12.** *Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos  $k$ -álgebras. Las estructuras de productos tensores torcidos sobre  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  están en correspondencia uno a uno con los entrelazamientos (unitarios).*

### 1.3.1. Algunos ejemplos

**Ejemplo 1.13** (Producto tensor clásico). *Para cualesquiera álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , la aplicación flip usual*

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \\ \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} &\mapsto \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \end{aligned}$$

*satisface claramente todas las condiciones necesarias para ser un entrelazamiento. El producto tensor torcido inducido por este entrelazamiento es el producto tensor clásico de álgebras  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ .*

**Ejemplo 1.14** (Producto tensor graduado). *Sean ahora  $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_n$  y  $\mathcal{B} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{B}_n$  dos álgebras graduadas positivamente y conectadas ( $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0 = k$ ), y consideremos la aplicación definida para todos los  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_m$ ,  $\mathbf{b} \in \mathcal{B}_n$  elementos homogéneos mediante*

$$\tau_{gr}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = (-1)^{mn} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

*La extensión lineal de  $\tau_{gr}$  es un entrelazamiento, y el producto tensor torcido que induce es precisamente el producto tensor graduado  $\mathcal{A} \otimes_{gr} \mathcal{B}$ .*

**Ejemplo 1.15** (Álgebras de grupo torcidas). *Si  $G$  es un grupo discreto que actúa por la izquierda mediante automorfismos sobre un álgebra  $\mathcal{A}$ , existe un entrelazamiento natural  $\tau : kG \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes kG$  dada por  $\tau(g \otimes \mathbf{a}) = (g \cdot \mathbf{a}) \otimes g$ . El producto tensor torcido  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} kG$  no es otra cosa que la clásica álgebra de grupo torcida  $\mathcal{A} * G$ . Además, si  $\mathcal{A}$  es una  $*$ -álgebra, y consideramos la convolución en  $kG$  dada por  $g \mapsto g^{-1}$ , el álgebra de grupo torcida  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} kG$  tiene estructura de  $*$ -álgebra.*

**Ejemplo 1.16** (Álgebras de grupos de productos de grupos emparejados). *Sea  $K$  un grupo que factoriza como  $K = GH$  para  $G, H$  subgrupos de  $K$  tales que*

$H \cap G = \{1_K\}$ . Se sabe que en esta situación la pareja  $(G, H)$  es un par de grupos emparejados, y que  $K \cong H \bowtie G$ , siendo  $\bowtie$  el producto asociado a esta pareja (ver [Tak81]). Consideremos

$$\begin{array}{ccc} G \times H & \rightarrow & H \\ (g, h) & \mapsto & g \cdot h \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G \times H & \rightarrow & G \\ (g, h) & \mapsto & g^h \end{array}$$

las acciones de grupo respectivas, y definamos

$$\begin{array}{ccc} \tau : kG \otimes kH & \rightarrow & kH \otimes kG \\ g \otimes h & \mapsto & g \cdot h \otimes g^h \end{array}$$

para todo  $g \in G$  y  $h \in H$ . Esta aplicación  $\tau$  es un entrelazamiento, y se cumple que  $kH \otimes_{\tau} kG \cong k[H \bowtie G]$ .

**Ejemplo 1.17** (Extensiones de Ore). Sea  $\mathcal{A}$  cualquier  $k$ -álgebra y  $\mathcal{B} = k[t]$  el anillo de polinomios en una variable. Consideremos dos aplicaciones  $k$ -lineales  $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  y  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , y consideremos la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \tau : k[t] \otimes \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A} \otimes k[t] \\ t \otimes \mathbf{a} & \mapsto & \sigma(\mathbf{a}) \otimes t + \delta(\mathbf{a}) \otimes 1 \end{array}$$

para todo  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ . Siempre que  $\sigma(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{A}}$ ,  $\delta(1_{\mathcal{A}}) = 0$ ,  $\sigma$  sea una aplicación de álgebras y  $\delta$  sea una  $\sigma$ -derivación, esta aplicación se extiende a un único entrelazamiento  $\tau$ . Si se da este caso, entonces el producto tensor torcido  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} k[t]$  es isomorfo a la extensión de Ore  $\mathcal{A}(t; \sigma, \delta)$  asociada a  $\sigma$  y  $\delta$ . En otras palabras, la aplicación  $\tau$  es un entrelazamiento si y solo si las aplicaciones  $\sigma$  y  $\delta$  definen una extensión de Ore de  $\mathcal{A}$ .

**Ejemplo 1.18** (Álgebra de cuaterniones generalizada). Tomemos  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in k$  elementos del cuerpo base, y sean  $\mathcal{A} = k[x]/(x^2 - \mathbf{a})$  y  $\mathcal{B} = k[y]/(y^2 - \mathbf{b})$  dos álgebras cocientes. Identifiquemos  $x$  e  $y$  con sus imágenes en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , respectivamente. Definamos la aplicación  $\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  por

$$\tau(y \otimes x) = -x \otimes y$$

Existe un único entrelazamiento  $\tau$  que extiende la definición anterior. Además, tenemos que el producto tensor torcido  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{B}$  es isomorfo al álgebra de cuaterniones generalizada  ${}^{\mathbf{a}}k^{\mathbf{b}}$ .

Como caso particular de este ejemplo, si tomamos  $k = \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = -1$ , obtenemos que las álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son las dos isomorfias al cuerpo de números complejos  $\mathbb{C}$ , y para el producto tensor torcido  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{B}$  tenemos que

$$\mathbb{H} = \mathbb{C}_{\tau} \mathbb{C}$$

esto es, el álgebra de cuaterniones puede recuperarse como el producto tensor torcido sobre los números reales de dos copias del cuerpo de números complejos.

**Ejemplo 1.19** (Anillos de matrices, [BM00]). Supongamos que nuestro cuerpo  $k$  contiene a  $q$ , una raíz  $n$ -ésima primitiva de la unidad. Entonces el anillo de matrices completo  $M_n(k)$  factoriza como un producto tensor torcido  $M_n(k) = k\mathbb{Z}_n \otimes_{\tau} k\mathbb{Z}_n$ , donde podemos considerar las dos copias de  $k\mathbb{Z}_n$  generadas por

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ respectivamente.}$$

Estos elementos satisfacen  $hg = qgh$ , por lo que podemos definir el entrelazamiento  $\tau$  como la única extensión de la aplicación definida sobre los generadores por

$$\tau(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1 \quad \tau(1 \otimes g) = g \otimes 1 \quad \tau(h \otimes 1) = 1 \otimes h \quad \tau(h \otimes g) = q \cdot g \otimes h$$

Sección 1.4

## Caracterización de las aplicaciones lineales torcidas a través de $(f, \delta)$

En esta sección vamos a reinterpretar las aplicaciones lineales torcidas asociándoles un par  $(f, \delta)$  de aplicaciones que tienen que ver con la estructura de  $\mathcal{A}$ . La idea que tenemos en mente es mejorar la *tratabilidad* de las aplicaciones torcidas, de manera que al tenerlas parametrizadas por estas aplicaciones podamos trabajar con ellas desde un punto de vista más algebraico.

Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos  $k$ -álgebras (unitarias) con  $\dim_k(\mathcal{B}) = 2$ , por lo que podemos presentarla como álgebra cociente de la forma  $\mathcal{B} = k[x]/\langle p(x) \rangle$ , donde  $p(x)$  es un polinomio de grado 2. A lo largo de este trabajo escribiremos  $p(x) = x^2 - \alpha x + \beta$ , donde  $\alpha, \beta \in k$ .

Uno de nuestros propósitos de este estudio es describir todas las aplicaciones torcidas o entrelazamientos con  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  como factores, esto es, todas las aplicaciones  $k$ -lineales

$$\tau : k[x]/\langle p(x) \rangle \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes k[x]/\langle p(x) \rangle \tag{1.4}$$


que verifican las condiciones de trenzado (1.1), (1.2) y (1.3). Siguiendo el método desarrollado en [Cib06] podemos comprobar que  $\mathcal{A} \otimes k[x]/\langle p(x) \rangle \cong \mathcal{A}[x]/\langle p(x) \rangle$  y entonces una aplicación torcida como en (1.4) está determinada por los valores  $\tau(x \otimes a)$  que se corresponden al producto  $x a$  en el álgebra  $\mathcal{A}[x]/\langle p(x) \rangle$ . Para cualquier  $a \in \mathcal{A}$  consideremos  $\tau(x \otimes a) = x a = \delta(a) + f(a)x$ . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} x^2 a &= (\alpha x - \beta)a = \alpha(\delta(a) + f(a)x) - \beta a = \alpha\delta(a) - \beta a + \alpha f(a)x \\ x(xa) &= x(\delta(a) + f(a)x) = \delta^2(a) - \beta f^2(a) + f\delta(a)x + \delta f(a)x + \alpha f^2(a)x \end{aligned}$$

para cualquier  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ . Por lo tanto al asociatividad  $x^2\mathbf{a} = x(x\mathbf{a})$  nos devuelve las igualdades

$$p(\delta) = \delta^2 - \alpha\delta + \beta\text{id}_{\mathcal{A}} = \beta f^2 \quad (1.5)$$

$$f\delta + \delta f = \alpha(f - f^2) \quad (1.6)$$

**Observación 1.20.** *Se puede observar la importancia del polinomio cociente  $p(x)$  durante el proceso, ya que la estructura de este polinomio aparece como condición sobre la derivada.* 

De igual manera que se hace en la demostración de la Proposición 2.10 en [Cib06], la condición  $x(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (x\mathbf{a})\mathbf{b}$  para cualesquiera  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A}$  nos devuelve que  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es un morfismo de álgebras y  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es una  $f$ -derivación por la izquierda. Es claro que si tenemos  $f$  un morfismo y  $\delta$  una  $f$ -derivación a izquierda que verifican (1.5) y (1.6), entonces la aplicación lineal definida por  $\tau(x \otimes \mathbf{a}) = \delta(\mathbf{a}) \otimes 1 + f(\mathbf{a}) \otimes x$  es una aplicación torcida entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . En otras palabras, hemos probado el siguiente resultado.

**Lema 1.21.** *El conjunto de aplicaciones torcidas*

$$\tau : k[x]/\langle p(x) \rangle \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes k[x]/\langle p(x) \rangle$$

*está en correspondencia uno a uno con el conjunto de parejas  $(f, \delta)$  donde  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es un endomorfismo de álgebras y  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es una  $f$ -derivación a izquierda, verificando las siguientes condiciones*

$$p(\delta) = \beta f^2 \quad f\delta + \delta f = \alpha(f - f^2)$$

Un producto tensor torcido de la forma  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{B}$ , donde  $\mathcal{B}$  es un álgebra de dimensión 2 se llama *duplicado cuántico* de  $\mathcal{A}$ .

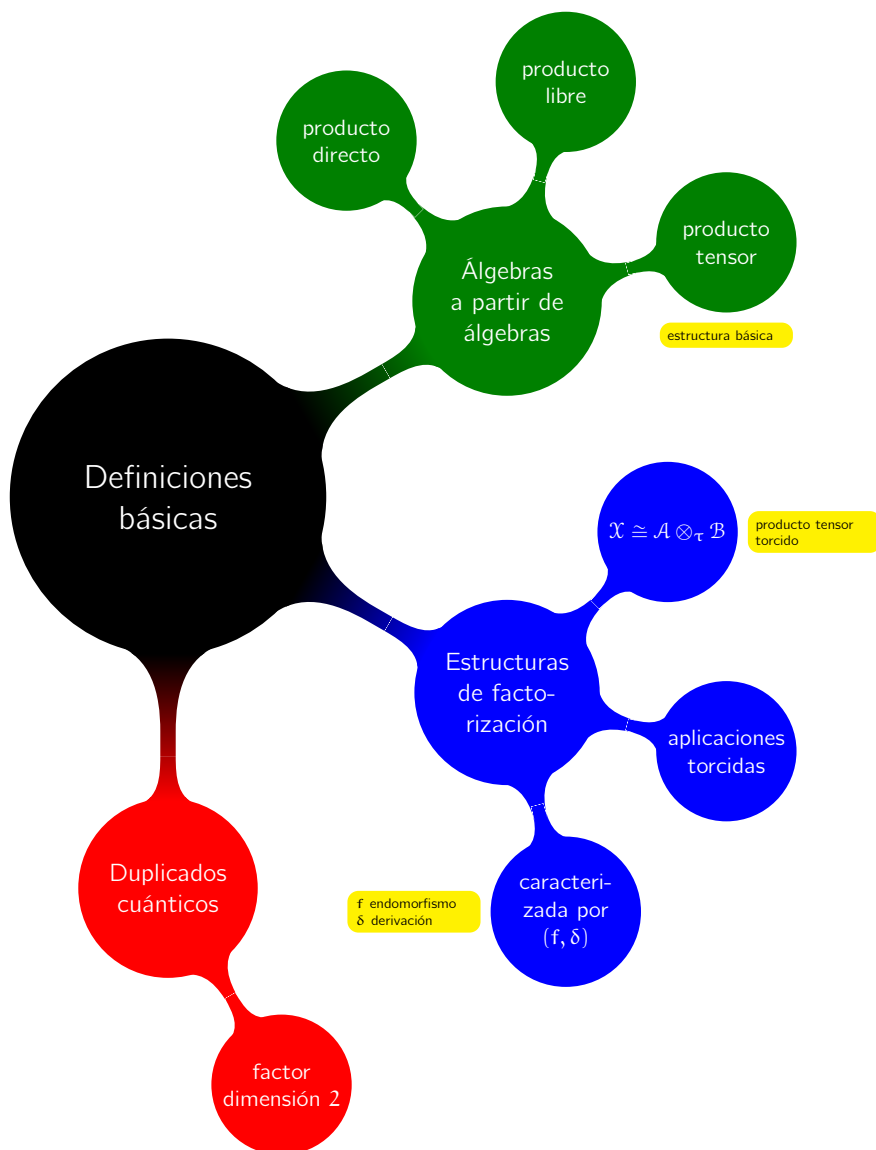
**Ejemplo 1.22.** *Si  $\alpha = 1$  y  $\beta = 0$  entonces  $\mathcal{B} \cong k^2$  y podemos recuperar la construcción dada por Cibils en [Cib06], ya que en ese caso las aplicaciones torcidas están en correspondencia uno a uno con las parejas  $(f, \delta)$  que verifican  $p(\delta) = \delta^2 - \delta = 0$  (derivada idempotente) y  $\delta f + f\delta = f - f^2$ .*

**Observación 1.23.** *El Lema 1.21 admite un refinamiento cuando la característica de  $k$  es diferente a dos. Si tomamos la transformación lineal  $\phi(x) = (\alpha/2)x + 1$  obtenemos  $p(\phi(x)) = x^2 + \gamma$  y  $k[x]/\langle p(x) \rangle \cong k[x]/\langle x^2 + \gamma \rangle$ . Entonces las ecuaciones (1.5) y (1.6) pueden ser reescritas como*

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \gamma(f^2 - \text{id}_{\mathcal{A}}) \\ f\delta + \delta f &= 0 \end{aligned}$$

*de manera que los cálculos que desarrollaremos en los siguientes capítulos se tornan más sencillos.*





# 2

## Estructuras de factorización con $k$ algebraicamente cerrado

– Y Peachy tardó un año en volver; y las montañas intentaron aplastarle. Pero no corría peligro, porque Danny marchaba delante de él. Y Danny no soltaba la mano de Peachy. Y Peachy no soltaba la cabeza de Danny.  
 – ¿Qué dice?  
 – Usted conoció a Danny.  
 – Sí.  
 – Conoció, amado hermano Kipling, a Danniel Drabot . . . Pues llegó a ser rey de Kafiristán y llevó una corona. Y ésa es toda la historia.

Peachy Taliaferro Carnehan  
 El hombre que pudo reinar

Las álgebras no triviales más simples que pueden ser factorizadas como un producto tensor torcido cuyos factores tienen dimensión al menos 2 tienen dimensión al menos 4. En los Capítulos 2 y 3 vamos a clasificar, salvo isomorfismo, todas las álgebras de dimensión 4 que pueden ser factorizadas.

Este problema presenta una fuerte dependencia con respecto al cuerpo base  $k$ . Básicamente tenemos que enfrentarnos a dos situaciones diferentes

- 1) El cuerpo  $k$  no admite una extensión de cuerpos de grado 2 (por ejemplo,  $k$  es algebraicamente cerrado). En este caso solo hay dos álgebras que pueden aparecer como factores, el álgebra semisimple  $k^2$  y el álgebra de los números duales  $k[\xi]$ . Vistas estas álgebras como cocientes  $k[x]/\langle p(x) \rangle$ , el álgebra  $k^2$  se corresponde con los casos en los cuales  $p$  tiene dos raíces distintas en  $k$  y  $k[\xi]$  con los casos en que  $p$  tenga una raíz doble.
- 2) Si  $k$  admite una extensión cuadrática, o equivalentemente si existen polinomios de grado 2 que no tienen raíces en  $k$ , debemos tener en cuenta estas

extensiones como posibles factores. El número de extensiones cuadráticas no isomorfas van desde uno, por ejemplo para  $k = \mathbb{R}$ , hasta una familia infinita de ellos, como pasa para  $k = \mathbb{Q}$ .

En este Capítulo vamos a estudiar la clasificación para el caso  $k$  algebraicamente cerrado y dejaremos el segundo caso para el Capítulo 4.

**Sección 2.1**

## Productos tensores torcidos de la forma $k^2 \otimes_{\tau} k^2$

Empecemos por el caso más sencillo de producto tensor torcido. Se trata de dos pares de copias de  $k$ . Consideremos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  álgebras ambas isomorfas a  $k[\mathbb{Z}_2]$ , el álgebra del grupo cíclico  $\mathbb{Z}_2$ , y fijemos  $\langle 1_{\mathcal{A}}, \mathbf{a} \rangle$  una base para  $\mathcal{A}$  y  $\langle 1_{\mathcal{B}}, \mathbf{b} \rangle$  una base para  $\mathcal{B}$ , que satisfacen  $\mathbf{a}^2 = 1_{\mathcal{A}}$  y  $\mathbf{b}^2 = 1_{\mathcal{B}}$ . Entonces el conjunto

$$\{1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}}, 1_{\mathcal{A}} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}}, \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}\}$$

es una base para  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  y

$$\{1_{\mathcal{B}} \otimes 1_{\mathcal{A}}, \mathbf{b} \otimes 1_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{B}} \otimes \mathbf{a}, \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}\}$$

es una base para  $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$ .

Escogemos estas bases porque nos facilitará los cálculos a la hora de encontrar todos los entrelazamientos  $\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , ya que las condiciones de unidad (1.1) nos fuerzan que

$$\tau(1 \otimes 1) = 1 \otimes 1 \quad \tau(1 \otimes \mathbf{a}) = \mathbf{a} \otimes 1 \quad \tau(\mathbf{b} \otimes 1) = 1 \otimes \mathbf{b}$$

A la hora de definir un entrelazamiento entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  nos basta dar el valor de  $\tau(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$  y comprobar que satisface las condiciones de compatibilidad con respecto a los productos en  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  descritas en (1.2) y (1.3). Despejando los coeficientes los entrelazamientos que se obtienen son los siguientes

- 1)  $\tau(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$
- 2)  $\tau(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = \alpha 1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ , donde  $\alpha \in k$
- 3)  $\tau(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = -1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}}$
- 4)  $\tau(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = 1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}} - 1_{\mathcal{A}} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}}$
- 5)  $\tau(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = 1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}} + 1_{\mathcal{A}} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}}$
- 6)  $\tau(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = -1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}} - 1_{\mathcal{A}} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}}$

La clasificación de las estructuras de factorización de estas álgebras a partir de las posibles aplicaciones torcidas es un trabajo que se desarrolló en [Cib06] y

[LPN08]. Para que el contenido de este trabajo sea completo vamos a comentar ahora el proceso que se sigue.

Aunque podemos continuar el estudio a partir de las aplicaciones  $\tau$  que hemos obtenido anteriormente, existe otra posibilidad para clasificar los productos tensores torcidos a través de aplicaciones de conjunto y grafos. Como la característica de  $k \neq 2$ , podemos identificar  $k[\mathbb{Z}_2] \cong k^2$  a través de la aplicación

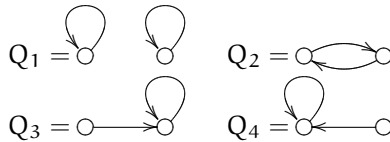
$$\frac{1 + \mathbf{a}}{2} \mapsto (1, 0) = \mathbf{u} \quad \frac{1 - \mathbf{a}}{2} \mapsto (0, 1) = \mathbf{v}$$

Por lo tanto, el espacio de entrelazamientos sobre estas álgebras puede calcularse en términos de ciertos *grafos* coloreados (que no es otra cosa que darle valores a los vértices del grafo. Ver Apéndice A).

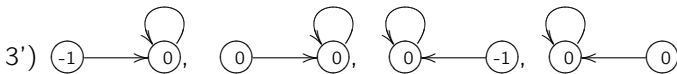
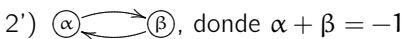
En nuestra situación, las aplicaciones de álgebras  $f : k^2 \rightarrow k^2$  pueden expresarse en función de las aplicaciones de conjunto  $\varphi : \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \rightarrow \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  (ver [Cib06] para la correspondencia), obteniendo las cuatro posibles aplicaciones de álgebras

- )  $f_1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$  y  $f_1(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$
- )  $f_2(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$  y  $f_2(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$
- )  $f_3(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  y  $f_3(\mathbf{v}) = 0$
- )  $f_4(\mathbf{u}) = 0$  y  $f_4(\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$

Asociadas a estas aplicaciones tenemos los siguientes grafos, donde el grafo  $Q_i$  es el relacionado a la aplicación  $f_i$



Las coloraciones relacionadas con estos grafos vienen dadas por

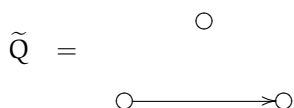


Aquí podemos observar que el entrelazamiento 1) se corresponde con el grafo coloreado 1'), la familia de un parámetro de aplicaciones 2) está asociada con los grafos 2') cuando variamos la coloración, y los entrelazamientos 3), 4), 5) y 6) se corresponden con las coloraciones 3').

**Observación 2.1.** Como consecuencia de este proceso, el conjunto de los entrelazamientos dan lugar a una variedad consistente en cinco puntos aislados, que se corresponden con los entrelazamientos 1) y del 3) al 6), junto a una línea asociada a la familia uniparamétrica descrita en 2).

Ya tenemos descritos todos los entrelazamientos entre  $k^2$  y  $k^2$  en términos de grafos. Vamos ahora a describir todas las clases de isomorfismos de las álgebras resultantes.

En [Cib06] se demuestra que las álgebras asociadas a los cuatro entrelazamientos no invertibles 3) – 6) son todas isomorfas al álgebra de caminos del grafo



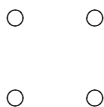
que sabemos que son isomorfas al álgebra que tiene por presentación

$$\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ba = -a - b - 1 \rangle$$

Esto nos define cuatro de los cinco puntos aislados de la variedad  $\mathcal{T}(k^2, k^2)$ . El último es el que corresponde al flip usual, y el álgebra asociada es el producto tensor usual

$$k\mathbb{Z}_2 \otimes k\mathbb{Z}_2 \cong k\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ba = ab \rangle$$

Este álgebra puede ser descrita como el álgebra de caminos del grafo



De esta manera, solo nos queda estudiar el caso de la familia uniparamétrica de entrelazamientos descritos en 2). La familia de álgebras obtenidas se puede describir en términos de generadores y relaciones, obteniendo la familia de álgebras que tienen por presentación

$$\mathcal{A}_q = k\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ab + ba = q \rangle$$

Dependiendo del valor del parámetro  $q$  podemos obtener varias familias diferentes de álgebras

- Si tomamos  $q \neq \pm 2$ , entonces la aplicación de álgebras

$$\mathcal{A}_q \rightarrow M_2(k)$$

definida por


$$a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b \mapsto \begin{pmatrix} \frac{q}{2} & \frac{2-q}{4} \\ \frac{2+q}{4} & -\frac{q}{2} \end{pmatrix}$$

nos devuelve un isomorfismo de álgebras entre el álgebra  $\mathcal{A}_q$  y  $M_2(k)$ , el anillo de matrices  $2 \times 2$ .

•) Si  $q \in \{2, -2\}$ , la aplicación de álgebras  $f : \mathcal{A}_{-2} \rightarrow \mathcal{A}_2$  definida por

$$\begin{aligned} f(1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}}) &= 1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}} \\ f(1_{\mathcal{A}} \otimes \mathbf{b}) &= \mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}} \\ f(\mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}}) &= (1_{\mathcal{A}} \otimes \mathbf{b}) - 2(\mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}}) \\ f(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) &= -(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Nos queda entonces clasificar este álgebra misteriosa cuando  $q = \pm 2$ . Consideremos ahora  $S = kQ/(Q_{\geq 2})$ , donde  $Q$  es el 2-ciclo  y  $Q_{\geq 2}$  el ideal generado por los caminos de longitud mayor o igual que 2. Podemos describir  $S$  como el álgebra que tiene por base cuatro elementos  $e, f, x, y$  (los dos vértices y las dos flechas) de manera que la multiplicación viene dada por la tabla

	e	f	x	y
e	e	0	0	y
f	0	f	x	0
x	x	0	0	0
y	0	y	0	0

Consideremos la aplicación de álgebras  $\Phi : S \rightarrow \mathcal{A}_{-2}$  definida por

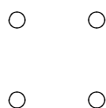
$$\begin{aligned} \Phi(e) &= 1/2((1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}}) - (\mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}})) \\ \Phi(f) &= 1/2((1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}}) + (\mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}})) \\ \Phi(x) &= 1/4((1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}}) + (1_{\mathcal{A}} \otimes \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}}) + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})) \\ \Phi(y) &= 1/4((1_{\mathcal{A}} \otimes 1_{\mathcal{B}}) - (1_{\mathcal{A}} \otimes \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \otimes 1_{\mathcal{B}}) + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})) \end{aligned}$$

Es un ejercicio rutinario comprobar que  $\Phi$  es un isomorfismo de álgebras entre  $\mathcal{A}_{-2}$  y  $S$ , por lo que tanto  $\mathcal{A}_2$  como  $\mathcal{A}_{-2}$  son isomorfas al álgebra  $S$ .

Como punto final de esta Sección podemos resumir los cálculos anteriores en el siguiente resultado.

**Proposición 2.2.** Sean  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \cong k^2$ , y sea  $\tau : \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  un entrelazamiento, entonces el producto tensor torcido  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} \mathcal{B}$  es isomorfo a una de las siguientes álgebras

•)  $k^4$ , o equivalentemente, el álgebra de caminos conmutativa del grafo

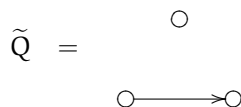


- ) El álgebra de matrices  $M_2(k)$
- ) El cociente  $kQ/(Q_{\geq 2})$  del álgebra de caminos del 2-ciclo



módulo el ideal generado por el conjunto  $Q_{\geq 2}$  de caminos de longitud mayor que uno

- ) El álgebra de caminos  $k\tilde{Q}$  del grafo



Podemos encontrar el estudio completo del caso  $k^n \otimes_{\tau} k^m$  en [JLPNS11].

Sección 2.2

Productos tensores torcidos de la forma  $k[\xi] \otimes_{\tau} k^2$

La siguiente *estación* en nuestro camino para la clasificación de las estructuras de factorización de dimensión 4 es la que tiene por factores el álgebra semisimple  $k^2$  y una copia del álgebra llamada de los números duales, que no es otra cosa que añadir un divisor de cero a  $k$ .

Consideremos  $k[\xi] = k[x]/\langle x^2 \rangle$  el anillo de los *números duales*. Podemos intentar atacar este problema mediante la fuerza bruta, buscando las aplicaciones lineales torcidas a través de sus coeficientes. Como la característica de  $k$  es distinta de 2, tenemos las presentaciones de las álgebras  $k^2 = \langle 1, a \mid a^2 = 1 \rangle$  y  $k[\xi] = \langle 1, \xi \mid \xi^2 = 0 \rangle$ . De esta manera  $\{1, a, \xi, a\xi\}$  es una base para  $k^2 \otimes k[\xi]$ , donde hemos identificado  $a \otimes \xi$  con  $a\xi$ . Cualquier entrelazamiento entre estos espacios vendrá determinado únicamente por el valor de  $\tau(\xi \otimes a) = \xi a$ , que en términos de la base se escribirá

$$\xi a = \alpha + \beta a + \gamma \xi + \delta a \xi$$

con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$ . Aplicando la condición de trenzado (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} \xi &= \xi a^2 = (\xi a)a = (\alpha + \beta a + \gamma \xi + \delta a \xi)a \\ &= \alpha a + \beta a^2 + \gamma \xi a + \delta a \xi a \\ &= \beta + \alpha a \gamma (\alpha + \beta a + \gamma \xi + \delta a \xi) + \delta a (\alpha + \beta a + \gamma \xi + \delta a \xi) \\ &= \beta + \alpha a + \gamma \alpha + \gamma \beta a + \gamma^2 \xi + \gamma \delta a \xi + \alpha \delta a + \beta \delta a^2 + \gamma \delta a \xi + \delta^2 a^2 \xi \\ &= (\beta + \gamma \alpha + \beta \delta) + (\alpha + \gamma \beta + \alpha \delta)a + (\gamma^2 + \delta^2)\xi + 2\gamma \delta a \xi \end{aligned}$$

Despejando convenientemente tenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} \beta + \gamma\alpha + \beta\delta = 0 \\ \alpha + \gamma\beta + \alpha\delta = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 = 1 \\ 2\gamma\delta = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Por el otro lado, la condición (1.3) se deriva en la identidad

$$\begin{aligned} 0 &= \xi^2 \mathbf{a} = \xi(\xi \mathbf{a}) = \xi(\alpha + \beta \mathbf{a} + \gamma \xi + \delta \mathbf{a} \xi) \\ &= \alpha \xi + \beta \xi \mathbf{a} + \gamma \xi^2 + \delta \xi \mathbf{a} \xi \\ &= \alpha \xi + \beta(\alpha + \beta \mathbf{a} + \gamma \xi + \delta \mathbf{a} \xi) + \delta(\alpha + \beta \mathbf{a} + \gamma \xi + \delta \mathbf{a} \xi) \xi \\ &= \alpha \xi + \alpha \beta + \beta^2 \mathbf{a} + \beta \gamma \xi + \beta \delta \mathbf{a} \xi + \alpha \delta \xi + \beta \delta \mathbf{a} \xi + \gamma \delta \xi^2 + \delta^2 \mathbf{a} \xi^2 \\ &= \alpha \beta + \beta^2 \mathbf{a} + (\alpha + \beta \gamma + \alpha \delta) \xi + 2\beta \delta \mathbf{a} \xi \end{aligned}$$

que nos da las ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha \beta = 0 \\ \beta^2 = 0 \\ \alpha + \beta \gamma + \alpha \delta = 0 \\ 2\beta \delta = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

La primera condición que deducimos es que  $\beta = 0$ , que sustituyendo en (2.1) y (2.2) nos define el sistema

$$\begin{cases} \gamma \alpha = 0 \\ \alpha(1 + \delta) = 0 \\ \gamma^2 + \delta^2 = 1 \\ 2\gamma \delta = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Una primera solución de (2.3) es la dada por los coeficientes  $\delta = -1, \gamma = 0$  y  $\alpha$  arbitrario, por lo que obtenemos una familia de entrelazamientos parametrizada por el propio  $\alpha$  dada por

$$\tau_\alpha(\xi \otimes \mathbf{a}) = \alpha \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{a} \otimes \xi \quad (2.4)$$

Por otro lado, si  $\alpha = 0$  el sistema (2.3) tiene tres nuevas soluciones, que se corresponden con los entrelazamientos

$$\begin{aligned} \tau(\xi \otimes \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \otimes \xi \\ \tau(\xi \otimes \mathbf{a}) &= \mathbf{1} \otimes \xi \\ \tau(\xi \otimes \mathbf{a}) &= -\mathbf{1} \otimes \xi \end{aligned} \quad (2.5)$$

De esta manera, la variedad  $\mathcal{J}(k^2, k[\xi])$  consiste en la recta dada por las aplicaciones  $\tau_\alpha$  más tres puntos aislados.



Una vez hemos definido todas las aplicaciones torcidas entre las álgebras  $k^2$  y  $k[\xi]$  pasamos al problema de clasificar álgebras los productos tensores torcidos que definen.

El álgebra de números duales presenta ciertas propiedades que nos permiten ampliar este estudio a factores más grandes. Podemos describir el conjunto de todos los entrelazamientos  $\tau : k[\xi] \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes k[\xi]$ . Nuevamente, es suficiente definir cómo actúa la aplicación  $\tau$  sobre  $\xi \otimes \mathbf{a}$ . Para cualquier  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$  podemos escribir

$$\tau(\xi \otimes \mathbf{a}) = \delta(\mathbf{a}) \otimes 1 + f(\mathbf{a}) \otimes \xi$$

para ciertas aplicaciones  $f, \delta \in \text{End}_k(\mathcal{A})$ . Identificando los elementos de  $\mathcal{A}$  y  $k[\xi]$  con sus imágenes en  $\mathcal{A} \otimes_{\tau} k[\xi]$  obtenemos la expresión de la aplicación torcida como producto

$$\xi \mathbf{a} = \delta(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \xi$$

Si usamos la compatibilidad de  $\tau$  con el producto de  $\mathcal{A}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{a}\mathbf{a}') + f(\mathbf{a}\mathbf{a}')\xi &= \xi(\mathbf{a}\mathbf{a}') = (\xi\mathbf{a})\mathbf{a}' \\ &= (\delta(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})\xi)\mathbf{a}' = \delta(\mathbf{a})\mathbf{a}' + f(\mathbf{a})\xi\mathbf{a}' \\ &= \delta(\mathbf{a})\mathbf{a}' + f(\mathbf{a})(\delta(\mathbf{a}') + f(\mathbf{a}')\xi) \\ &= \delta(\mathbf{a})\mathbf{a}' + f(\mathbf{a})\delta(\mathbf{a}') + f(\mathbf{a})f(\mathbf{a}')\xi \end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathcal{A}$ , de manera que  $f$  es un endomorfismo de  $\mathcal{A}$  y que  $\delta$  es una derivación torcida por  $f$ .

Por el otro lado, la compatibilidad de  $\tau$  con el producto de  $k[\xi]$  nos da la condición

$$\begin{aligned} 0 &= \xi^2 \mathbf{a} = \xi(\xi\mathbf{a}) = \xi(\delta(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})\xi) \\ &= \xi\delta(\mathbf{a}) + \xi f(\mathbf{a})\xi \\ &= \delta^2(\mathbf{a}) + f(\delta(\mathbf{a}))\xi + (\delta(f(\mathbf{a})) + f^2(\mathbf{a})\xi)\xi \\ &= \delta^2(\mathbf{a}) + (f\delta + \delta f)(\mathbf{a})\xi \end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ . De esta manera, las aplicaciones  $f$  y  $\delta$  deben satisfacer

$$\delta^2 = 0 \tag{2.6}$$

$$f\delta + \delta f = 0 \tag{2.7}$$

Análogamente, es sencillo comprobar que una pareja  $(f, \delta)$  dada por un endomorfismo y una derivación torcida que satisfacen las condiciones (2.6) y (2.7) nos dan lugar a un entrelazamiento. Tenemos entonces demostrado el siguiente resultado.

**Lema 2.3.** *Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de entrelazamientos  $\mathcal{T}(\mathcal{A}, k[\xi])$  y el conjunto de parejas  $(f, \delta)$  con  $f \in \text{End}(\mathcal{A})$  y  $\delta$  una  $f$ -derivación torcida, que satisfacen las condiciones (2.6) y (2.7).*

Pasemos ahora al caso  $\mathcal{A} = k^n$  para algún número natural  $n \geq 2$ . Denotemos por  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canónica para  $k^n$ . Al igual que en la sección anterior, las aplicaciones de álgebra  $f : k^n \rightarrow k^n$  están en correspondencia uno a uno con las aplicaciones de conjuntos  $\varphi : \{e_1, \dots, e_n\} \rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ , donde a cada aplicación de conjunto  $\varphi$  le asociamos la aplicación de álgebra  $f$  definida como

$$f(e_i) = \sum_{\{e_j \mid \varphi(e_j) = e_i\}} e_j, \quad \text{para cualquier } i = 1, \dots, n$$

Sabemos también que estas aplicaciones están en correspondencia uno a uno con los grafos que tienen  $n$  vértices y tales que de cada vértice sale una única flecha. Denotamos por  $Q_f$  el *grafo asociado a  $f$*  (o a  $\varphi$ ), que tiene  $\{e_1, \dots, e_n\}$  como conjunto de vértices, y que tiene una flecha  $e_i \rightarrow e_j$  si y solo si  $\varphi(e_i) = e_j$ .

Con respecto a las derivaciones torcidas, podemos considerarlas como derivaciones normales con valores en el bimódulo  ${}_f k^n$ , cuya acción por la izquierda viene dada por  $x \cdot y = f(x)y$  y acción por la derecha viene dada por el producto usual. Como  $k^n$  es separable todas las derivaciones son interiores, y de esta manera para cada  $\delta \in \text{Der}(k^n, {}_f k^n)$  existe cierto  $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1, \dots, n} \in k^n$  tal que

$$\begin{aligned} \delta(e_i) &= e_i \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a}e_i = f(e_i)\mathbf{a} - \mathbf{a}e_i \\ &= \sum_{\varphi(e_j) = e_i} e_j a_j - e_i a_i, \quad \text{para cualquier } i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.8)$$

Podemos también refinar este proceso. Observemos que si  $f(e_i) = e_i$ , esto es,  $Q_f$  tiene un lazo en  $e_i$ , el valor de  $a_i$  no aparece en la descripción de  $\delta(e_k)$  dada en (2.8) para ningún  $e_k$ . Por lo tanto, podemos normalizar el elemento  $\mathbf{a} \in k^n$  escogiendo  $a_i = 0$  para todo lazo  $a_i$ . Esto nos permite afirmar que las derivaciones vienen dadas por un único elemento normalizado  $\mathbf{a} \in k^n$ .

Entonces las derivaciones están en biyección con las coloraciones (valores en  $k$  para cada vértice) de  $Q_f$  tales que a cada lazo se le asigna el valor 0.

**Proposición 2.4.** *El conjunto de todas las aplicaciones lineales torcidas  $\tau : k[\xi] \otimes k^n \rightarrow k^n \otimes k[\xi]$  está en correspondencia biyectiva con el conjunto de los grafos coloreados  $Q_f$  tales que*

- $Q_f$  es el grafo asociado a la aplicación de conjunto  $\varphi : \{e_1, \dots, e_n\} \rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ .
- Los vértices de  $Q_f$  están etiquetados por 0, de manera que la componente conexa que aparece no es un subgrafo del 2-ciclo  $\textcircled{x} \rightleftarrows \textcircled{y}$ . Si los vértices corresponden a una componente conexa que es un 2-ciclo, los valores de la coloración en el 2-ciclo deben satisfacer  $x = -y$ .

*Demostración.* Por el Lema 2.3 tenemos que buscar las parejas  $(f, \delta)$  que verifiquen las condiciones de compatibilidad. A partir de (2.8) obtenemos

$$\delta^2(e_i) = \sum_{\varphi^2(e_k) = e_i} a_k a_{\varphi(e_k)} e_k - \sum_{\varphi(e_j) = e_i} a_j (a_j + a_i) e_j + a_i^2 e_i \quad (2.9)$$

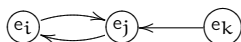
para cualquier  $e_i$ . No hay pérdida de generalidad en asumir que el grafo  $Q_f$  es conexo, ya que en caso contrario podemos razonar sobre cada componente conexa y el álgebra resultante será el producto directo de las álgebras asociadas a las distintas componentes ([Cib06]).

Si  $e_i$  no es un lazo y no está dentro de un 2-ciclo, mediante (2.9) el coeficiente de  $e_i$  en  $\delta^2(e_i)$  es  $\alpha_i^2$ , por lo que  $\alpha_i^2 = 0$  y  $\alpha_i = 0$ . En el caso de que  $e_i$  esté en un 2-ciclo  $(\overset{\circ}{a_i} \rightleftarrows \overset{\circ}{a_j})$ , la ecuación (2.9) nos dice

$$\delta^2(e_i) = \alpha_i \alpha_j e_i - \alpha_j (\alpha_j + \alpha_i) e_j + \alpha_i^2 e_i$$

Observemos que ningún otro vértice distinto de  $e_i$  y  $e_j$  puede estar en un 2-ciclo, ya que  $Q_f$  contiene a lo sumo un ciclo, y entonces estaría coloreado por cero. La condición  $\delta^2(e_i) = 0$  se reduce entonces a la igualdad  $\alpha_i + \alpha_j = 0$ . Ahora es sencillo darnos cuenta que si  $Q_f$  es exactamente un 2-ciclo, la condición  $f\delta + \delta f = 0$  se obtiene de la condición anterior.

En cualquier otro caso, esto es, si  $Q_f$  contiene un 2-ciclo pero no se reduce solo a eso, entonces tendremos un subgrafo de la forma



A efecto de facilitar las cuentas, podemos asumir que existe solo una flecha que termina en el 2-ciclo (si existen más, la demostración se hace de la misma forma). Debido al razonamiento anterior, el valor de la coloración sobre  $e_k$  debe ser cero, mientras que en  $e_i, e_j$  debe tener los valores  $t$  y  $-t$  para algún  $t \in k$ . Por la definición de  $f$ , tenemos  $f(e_k) = 0, f(e_j) = e_i + e_k$  y  $f(e_i) = e_j$ . Además,  $\delta(e_k) = 0, \delta(e_j) = t(e_i + e_j)$  y  $\delta(e_i) = -t(e_i + e_j)$ . De esta forma, tenemos

$$(f\delta + \delta f)(e_j) = t(e_i + e_j + e_k) - t(e_i + e_j) = te_k$$

y  $f\delta + \delta f = 0$  si y solo si  $t = 0$ . El recíproco es sencillo de comprobar. □

Para poder describir las clases de isomorfismos de las álgebras que obtenemos, debemos distinguir casos: cuando  $\delta = 0$  (esto es, el entrelazamiento viene dado solo en términos del endomorfismo) y  $\delta \neq 0$ .

**Teorema 2.5.** *El producto tensor torcido  $\tau_f = k^n \otimes_{(f,0)} k[\xi]$  es isomorfo al álgebra cociente  $kQ_f^{\text{op}} / (Q_f^{\text{op}})_{\geq 2}$  del álgebra de caminos del grafo  $Q_f^{\text{op}}$  por el ideal generado por los caminos de longitud mayor que 1. Como consecuencia, dos productos tensores torcidos  $\tau_f, \tau_g$  son isomorfos si y solo si  $Q_f \cong Q_g$ .*

*Demostración.* Definamos un isomorfismo  $\Phi : kQ_f^{\text{op}} \rightarrow k^n \otimes_{(f,0)} k[\xi]$  de la siguiente manera

- Para cualquier vértice  $e_i$ , hacemos  $\Phi(e_i) = e_i \otimes 1$ , con  $i = 1, \dots, n$ .
- Para cualquier flecha  $\alpha$ , hacemos  $\Phi(\alpha) = e_i \otimes \xi$ , donde  $e_i$  es el final de  $\alpha$  en  $Q_f^{\text{op}}$ .

Se calcula directamente que  $\Phi$  es una aplicación sobreyectiva y que  $(Q_f^{\text{op}})_{\geq 2} = \text{Ker}\Phi$ .  $\square$


Consideremos ahora un entrelazamiento  $(f, \delta)$ , donde  $\delta \neq 0$ . Debido a las normalizaciones que hemos hecho previamente, el hecho de que  $\delta$  no sea cero implica que  $Q_f$  tiene una componente conexa que es un 2-ciclo con coloración distinta de cero. Vamos a razonar solo sobre esta componente. Como probaremos ahora, para cualquier valor de la coloración (distinto de 0) el álgebra resultante es isomorfa al álgebra de matrices de dimensión  $2 \times 2$  sobre  $\mathbb{k}$ . En particular, no pueden ser isomorfas a ninguna de las álgebras que hemos visto en el Teorema 2.5, que se correspondían con aquellas para las cuales la derivación era trivial.

**Teorema 2.6.** *El producto tensor torcido  $\tau_{f,\delta} = \mathbb{k}^2 \otimes_{(f,\delta)} \mathbb{k}[\xi]$  (con  $\delta \neq 0$ ) es isomorfo al anillo de matrices  $M_2(\mathbb{k})$ .*

*Demostración.* Asumamos que el valor de la coloración sobre  $e_1$  (respec.  $e_2$ ) es  $t$  (respec.  $-t$ ), y consideremos la aplicación  $\Phi : \mathbb{k}^2 \otimes \mathbb{k}[\xi] \rightarrow M_2(\mathbb{k})$  dada por

$$e_1 \otimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 \otimes \xi \mapsto \begin{pmatrix} -t & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \otimes \xi \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & t \end{pmatrix}$$

Se sigue de forma directa que  $\Phi$  es un isomorfismo entre álgebras siempre que  $t \neq 0$ .  $\square$

**Observación 2.7.** *El valor exacto del escalar  $t$  es irrelevante. Para cualquier  $t \neq 0$ , una componente conexa que sea 2-ciclo siempre generará un álgebra de matrices. De esta manera, si existe una componente conexa de  $Q_f$  que consista solamente en un 2-ciclo coloreado por un escalar distinto de cero,  $M_2(\mathbb{k})$  es un factor directo de  $\mathbb{k}^n \otimes_{(f,\delta)} \mathbb{k}[\xi]$ .* 

Los resultados anteriores pueden resumirse en el siguiente Teorema.

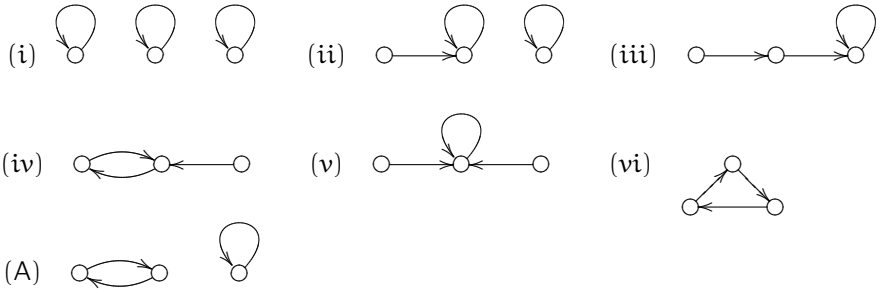
**Teorema 2.8.** *Cualquier producto tensor torcido  $\mathbb{k}^n \otimes_{\tau} \mathbb{k}[\xi]$  es isomorfo a un álgebra del tipo*

$$(M_2(\mathbb{k}))^t \times \mathbb{k}Q/Q_{\geq 2}$$

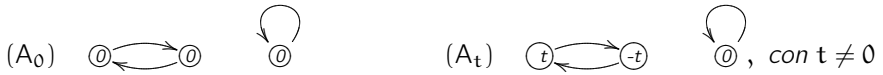
donde  $t$  es un número natural y  $Q$  un grafo apropiado definido por el endomorfismo  $f$  del entrelazamiento. Además, si el entrelazamiento viene dado por un par  $(f, \delta)$ , tenemos que la coloración  $t = 0$  si y solo si  $\delta = 0$ .

Hemos terminado entonces con un resultado que nos caracteriza todos los productos tensores torcidos de la forma  $\mathbb{k}^n \otimes_{\tau} \mathbb{k}[\xi]$ , que es mucho más de lo que andábamos buscando en un principio, gracias a las particulares condiciones de estos factores. Vamos a hacer la clasificación cuando  $n = 3$ .

**Ejemplo 2.9.** Vamos a describir todos los posible productos tensores torcidos  $k^3 \otimes_{\tau} k[\xi]$ . Si  $\tau$  viene dada por una pareja  $(f, \delta)$ , las únicas posibilidades para el grafo  $Q_f$  son:



Observemos que los grafos (i) – (vi) no tienen ninguna componente conexa que sea un 2-ciclo, por lo tanto la coloración asociada debe ser trivial y las álgebras resultantes son las álgebras de caminos truncadas de los grafos opuestos. Por otro lado, el grafo (A) tiene una componente que es el 2-ciclo y por lo tanto admite una derivación no trivial. Existen dos posibilidades



El caso  $(A_0)$  se corresponde (ya que la derivación es trivial) al álgebra de caminos del grafo opuesto a (A), mientras que, para  $t \neq 0$ , el caso  $(A_t)$  se corresponde con el producto directo  $M_2(k) \times k[\xi]$ .

Sección 2.3

Productos tensores torcidos de la forma  $k[\xi] \otimes_{\tau} k[\eta]$

Pasaremos ahora a abordar el último de los casos en que  $k$  sea algebraicamente cerrado y las álgebras sean de dimensión 2. Se trata del caso  $k[\xi] \otimes_{\tau} k[\eta]$ , cuando tengamos dos copias de los números duales. Como sabemos  $k[\xi]$  no es separable, luego sus derivaciones no tienen por qué ser interiores, y definir sus endomorfismos tampoco es sencillo. Por ello trataremos de resolver este problema usando de nuevo el ataque directo sobre los posibles entrelazamientos.

Trabajaremos nuevamente sobre unas  $k$ -bases de estas álgebras

$$\mathcal{A} = k[\xi] = \langle 1, \xi \mid \xi^2 = 0 \rangle \tag{2.10}$$

y

$$\mathcal{B} = k[\eta] = \langle 1, \eta \mid \eta^2 = 0 \rangle \tag{2.11}$$

Un entrelazamiento  $\tau = \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  quedará definida en el momento en que conozcamos el valor  $\tau(\eta \otimes \xi)$ . Una base para  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  podrá obtenerse a partir de

(2.10) y (2.11), y será  $\langle 1, \xi, \eta, \xi\eta \mid \xi^2 = \eta^2 = 0 \rangle$ , por lo que

$$\tau(\eta \otimes \xi) = \eta\xi = \mathbf{a} + \mathbf{b}\xi + \mathbf{c}\eta + \mathbf{d}\xi\eta \quad (2.12)$$

Ahora imponemos la condición de trenzado (1.2), que es la asociatividad del producto en  $\mathcal{B}$

$$\begin{aligned} (\eta\xi)\xi &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}\xi + \mathbf{c}\eta + \mathbf{d}\xi\eta)\xi \\ &= \mathbf{a}\xi + \mathbf{c}(\mathbf{a} + \mathbf{b}\xi + \mathbf{c}\eta + \mathbf{d}\xi\eta) + \mathbf{d}\xi(\mathbf{a} + \mathbf{b}\xi + \mathbf{c}\eta + \mathbf{d}\xi\eta) \\ &= \mathbf{a}\mathbf{c} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{c} + \mathbf{a}\mathbf{d})\xi + \mathbf{c}^2\eta + 2\mathbf{c}\mathbf{d}\xi\eta = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

La condición de trenzado (1.3), asociatividad del producto en  $\mathcal{A}$ , nos da las relaciones

$$\begin{aligned} \eta(\eta\xi) &= \eta(\mathbf{a} + \mathbf{b}\xi + \mathbf{c}\eta + \mathbf{d}\xi\eta) \\ &= \mathbf{a}\eta + \mathbf{b}(\mathbf{a} + \mathbf{b}\xi + \mathbf{c}\eta + \mathbf{d}\xi\eta) + \mathbf{d}(\mathbf{a} + \mathbf{b}\xi + \mathbf{c}\eta + \mathbf{d}\xi\eta)\eta \\ &= \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}^2\xi + (\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{c} + \mathbf{a}\mathbf{d})\eta + 2\mathbf{b}\mathbf{d}\xi\eta = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Uniendo (2.13) y (2.14) nos quedan las condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}\mathbf{b} = 0 \\ \mathbf{a}\mathbf{c} = 0 \\ \mathbf{b}^2 = 0 \\ \mathbf{c}^2 = 0 \\ 2\mathbf{b}\mathbf{d} = 0 \\ 2\mathbf{c}\mathbf{d} = 0 \\ \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{c} + \mathbf{a}\mathbf{d} = 0 \end{array} \right.$$

de donde obtenemos  $\mathbf{b} = \mathbf{c} = 0$  y dos familias de soluciones

- 1)  $\mathbf{a} = 0$  y  $\mathbf{d}$  libre
- 2)  $\mathbf{d} = -1$  y  $\mathbf{a}$  libre

que de acuerdo a la definición (2.12) nos dan lugar a dos familias de entrelazamientos

$$\tau_1(\eta \otimes \xi) = \mathbf{q}\xi\eta \quad \text{y} \quad \tau_2(\eta \otimes \xi) = -\xi\eta + \mathbf{q}, \quad \text{con } \mathbf{q} \in \mathbf{k}$$

Ahora que ya sabemos los posibles entrelazamientos entre estos dos factores vamos a clasificar los productos tensores torcidos salvo isomorfismo. El caso 1) genera la familia de álgebras

$$\mathcal{A}_{\mathbf{q}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \mid \mathbf{x}^2 = \mathbf{y}^2 = 0, \mathbf{y}\mathbf{x} = \mathbf{q}\mathbf{x}\mathbf{y} \rangle \quad (2.15)$$

que no es otra cosa que los diferentes planos cuánticos módulo el ideal  $\langle \mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2 \rangle$ .

Podemos afinar más la clasificación. Probaremos a continuación que  $\mathcal{A}_{\mathbf{q}} \cong \mathcal{A}_{\mathbf{h}}$  si y solo si  $\mathbf{q} = \mathbf{h}$  ó  $\mathbf{q} = \mathbf{h}^{-1}$ , por lo que tenemos infinitos productos tensores torcidos no isomorfos.

El isomorfismo se prueba de la siguiente manera. Tomemos  $\mathcal{A}_q$  una de estas álgebras con la presentación  $\langle 1, x, y, xy \mid x^2 = y^2 = 0, yx = qxy \rangle$  y  $\mathcal{A}_h$  con la presentación  $\langle 1, a, b, ab \mid a^2 = b^2 = 0, ba = hab \rangle$ . El elemento  $x$  irá a un elemento genérico de  $\mathcal{A}_h$ , digamos  $\alpha + \beta a + \gamma b + \delta ab$ . Así

$$x^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta a + 2\alpha\gamma b + (2\alpha\delta + \beta\gamma + h\beta\gamma)ab = 0$$

por lo que  $\alpha = 0$  y  $\beta\gamma(1 + h) = 0$  pudiendo hacer la identificación

$$x \mapsto \beta a + \gamma b + \delta ab$$

con  $\beta\gamma = 0$ . De igual manera, podemos hacer

$$y \mapsto \beta' a + \gamma' b + \delta' ab$$

con  $\beta'\gamma' = 0$ . Queda imponer la condición  $yx = qxy$ . Empecemos suponiendo  $\beta = 0$ . Por un lado

$$yx \mapsto (\beta' a + \gamma' b + \delta ab)(\gamma b + \delta ab) = \beta'\gamma ab$$

Por el otro,

$$qxy \mapsto q(\gamma b + \delta ab)(\beta' a + \gamma' b + \delta' ab) = qh\beta'\gamma ab$$

Igualando se obtiene la condición  $q = h^{-1}$ .

Si tomamos la condición  $\gamma = 0$  y trabajamos de igual manera, obtenemos  $q = h$ .

Resumiendo las últimas líneas podemos enunciar la siguiente Proposición.

**Proposición 2.10.**  $\mathcal{A}_q \cong \mathcal{A}_h \Leftrightarrow q = h^{-1} \text{ ó } q = h$ .

**Observación 2.11.** *Observemos también que si  $q = 1$ ,  $\mathcal{A}_1 = k[x, y]/\langle x^2, y^2 \rangle$ , el cociente del caso conmutativo.*

La otra gran familia  $\mathcal{A} \otimes_{\tau_2} \mathcal{B}$  se corresponde con las álgebras que pueden presentarse como

$$X_t = k\langle x, y \mid x^2 = y^2 = 0, yx + xy = t \rangle \tag{2.16}$$

que son isomorfas al álgebra de las matrices de dimensión  $2 \times 2$ . El isomorfismo se define de la siguiente manera. Una base de  $\mathcal{A} \otimes_{\tau_2} \mathcal{B}$  es  $\langle 1, \xi, \eta, \xi\eta \mid \xi^2 = \eta^2 = 0, \eta\xi + \xi\eta = q \rangle$ , con  $q \neq 0$ , ya que sería el caso  $\mathcal{A}_{-1}$  ya tratado anteriormente. Hacemos la correspondencia

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \xi \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \eta \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Imponiendo la condición  $\eta^2 = 0$  obtenemos las condiciones

$$\begin{cases} b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \end{cases}$$

Si ahora imponemos la condición del anticonmutador  $\eta\xi + \xi\eta = q$  obtenemos

$$\begin{cases} b = q \\ a+d = 0, \end{cases}$$

por lo que nos basta con hacer

$$\eta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \xi\eta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

que son linealmente independientes, y por tanto definen un isomorfismo entre  $\mathcal{A} \otimes_{\tau_2} \mathcal{B}$  y  $M_2(k)$ .

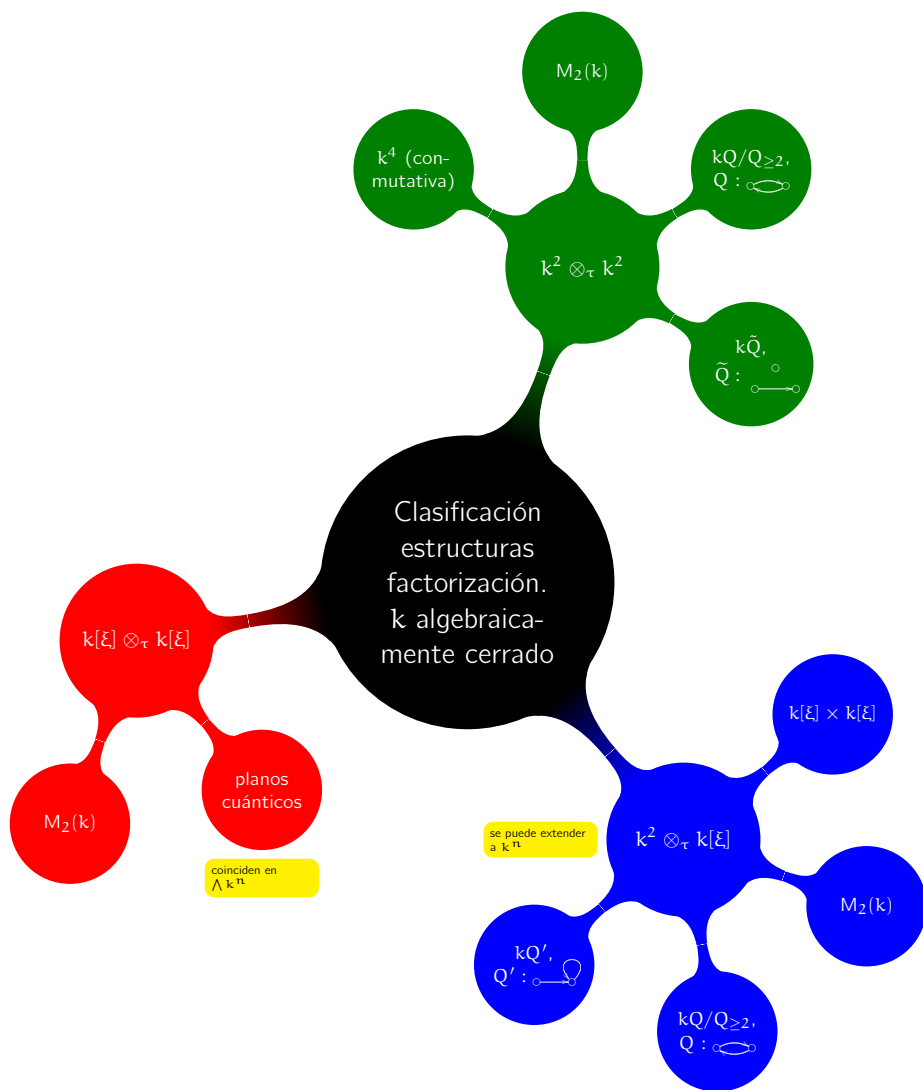
Podemos resumir todos los cálculos anteriores en el siguiente Teorema.

**Teorema 2.12.** *El producto tensor torcido  $k[\xi] \otimes_{\tau} k[\eta]$  es isomorfo a alguna de las siguientes álgebras*

- )  $k[x, y]/\langle x^2, y^2 \rangle$
- )  $\mathcal{A}_q = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 0, yx = qyx \rangle$
- ) *El álgebra de matrices  $M_2(k)$*

En este caso, la variedad  $\mathcal{J}(k[\xi], k[\eta])$  consiste en dos líneas que se cortan en un punto.





# 3

## Estructuras de factorización con extensiones cuadráticas

– Ahora estoy llamando a los espíritus -dijo-. El Espíritu del Gran Oso Cavernario, del León Cavernario, del Mamut, de todos los demás, y también a los espíritus antiguos del Viento, de la Niebla y de la Lluvia -alargó la mano hacia el pequeño cuenco-. Ahora voy a darle un nombre y a convertirlo en miembro del Clan -hundió el dedo en la pasta roja y trazó una línea vertical en el rostro del cadáver, desde la frente hasta la nariz. Luego se incorporó, diciendo con señales y a viva voz:  
– El nombre del niño es Rydag.

---

Ayla, del campamento del León de los Mamutoi  
Los cazadores de mamuts (Los Hijos de la Tierra III)

En este Capítulo vamos a terminar con el estudio de la clasificación de las estructuras de factorización de dimensión 4. En el Capítulo anterior hemos completado el estudio en el caso en que  $k$  sea algebraicamente cerrado. En este Capítulo haremos la clasificación en el caso en que podamos construir polinomios con coeficientes en  $k$  cuyas raíces no pertenezcan a  $k$ .

A lo largo de todas las secciones notaremos  $\mathfrak{l} = k[x]/\langle p(x) \rangle$ , con  $p(x)$  un polinomio de grado 2. El álgebra  $\mathfrak{l}$  se corresponde con una extensión de Galois de dimensión 2, con lo cual los endomorfismos y las derivaciones que podemos construir sobre ella están más limitadas y la caracterización de las aplicaciones torcidas en términos de  $(f, \delta)$  varía ligeramente del Capítulo 2.

Conviene también recordar que gracias a la Observación 1.23 podemos realizar una transformación sobre el polinomio  $p(x)$  que elimina el término lineal, facilitando de nuevo los cálculos.

## Productos tensores torcidos de la forma $k^2 \otimes_{\tau} l$

Esta sección discurre de manera similar a la Sección 2.2, aunque ahora el factor es una extensión cuadrática en lugar de los números duales. Y esto cambia ligeramente las demostraciones y los resultados.

Al igual que en la citada sección podemos extender los resultados a factores más grandes. Fijemos  $\mathcal{A} = k^n$  para algún número natural  $n \geq 2$ . Denotemos también  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canónica de  $k^n$ . Como ya sabemos, las aplicaciones de álgebras  $f : k^n \rightarrow k^n$  están en correspondencia uno a uno con las aplicaciones de conjuntos  $\varphi : \{e_1, \dots, e_n\} \rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ , donde a cada aplicación  $\varphi$  le asociamos la aplicación  $f$  definida como

$$f(e_i) = \sum_{\{e_j \mid \varphi(e_j) = e_i\}} e_j, \quad \text{para cualquier } i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

Como ya hemos estudiado, estas aplicaciones están en correspondencia uno a uno con los grafos de  $n$  vértices tales que de cada vértice parte exactamente una sola flecha. Denotemos por  $Q_f$  el grafo asociado a  $f$  (a través de  $\varphi$ ) que tiene  $\{e_1, \dots, e_n\}$  como conjunto de vértices y que tiene una flecha  $e_i \rightarrow e_j$  si y solo si  $\varphi(e_i) = e_j$ .

Con respecto a las derivaciones torcidas, sabemos que todas ellas son interiores ( $k^n$  es separable), por lo que para cada  $\delta \in \text{Der}(k^n, f(k^n))$  existe un cierto  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in k^n$  tal que

$$\delta(e_i) = (f(e_i) - e_i)\alpha = \sum_{\varphi(e_j) = e_i} e_j \alpha_j - e_i \alpha_i \quad (3.2)$$

para cualquier  $i = 1, \dots, n$ .

Otro resultado que ya conocemos es el que nos dice que las derivaciones están en biyección con las coloraciones de  $Q_f$ . La siguiente proposición nos explica el comportamiento en esta situación que varía ligeramente de la Proposición 2.4.

**Proposición 3.1.** *El conjunto de todas las aplicaciones lineales torcidas  $\tau : k^n \otimes k[x]/(p(x)) \rightarrow k[x]/(p(x)) \otimes k^n$  está en correspondencia uno a uno con el conjunto de grafos coloreados  $Q_f$  tales que*

- a)  $Q_f$  es el grafo asociado a la aplicación de conjunto  $\varphi : \{e_1, \dots, e_n\} \rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$
- b) Las únicas componentes conexas de  $Q_f$  son los 2-ciclos, y los valores de la coloración en dichos 2-ciclos deben satisfacer  $\alpha_i + \alpha_j = -\alpha$ .

*Demostración.* Bajo la condición (3.2) tenemos

$$\delta^2(e_i) = \sum_{\varphi^2(e_k) = e_i} \alpha_k \alpha_{\varphi(e_k)} e_k - \sum_{\varphi(e_j) = e_i} \alpha_j (\alpha_j + \alpha_i) e_j + \alpha_i^2 e_i, \quad \forall e_i \quad (3.3)$$

No caemos en pérdida de generalidad si suponemos que el grafo  $Q_f$  es conexo: si no lo es, razonaremos de igual manera sobre cada componente conexa y el álgebra resultante será el producto directo de las álgebras asociadas a cada componente.

Supongamos que  $e_i$  es un vértice lazo que no está dentro de un 2-ciclo. Usando (3.3) el coeficiente de  $e_i$  en la condición (1.5) es  $a_i^2 - \alpha a_i + \beta$ , pero fijamos al principio del capítulo que el polinomio  $p(x)$  no tenía raíces en  $k$ , por lo tanto no puede existir esta coloración y esta situación no puede darse en el grafo.

Asumamos que  $Q_f$  es un 2-ciclo  $(e_i \rightleftarrows e_j)$ . De la misma forma que el caso anterior, la condición (1.5) nos da la relación

$$(a_i a_j - \beta)e_i - (a_j(a_j + a_i) + \alpha a_j)e_j + (a_i^2 + \alpha a_i + \beta)e_i = 0$$

obteniendo la condición  $a_i + a_j = -\alpha$ . □

Pasemos ahora a describir las clases de isomorfismos de las álgebras que hemos obtenido a partir de estos entrelazamientos.

**Teorema 3.2.** *El producto tensor torcido  $\tau_{(f,\delta)} = k^2 \otimes_{(f,\delta)} k[x]/\langle p(x) \rangle$  es isomorfo al álgebra de matrices  $M_2(k)$ .*

*Demostración.* Fijemos una  $k$ -base y trabajemos sobre los elementos de ésta. En nuestro caso el producto tensor torcido es  $k^2 \otimes k[x]/\langle p(x) \rangle$  y tomaremos por base el conjunto  $\mathfrak{B} = \langle 1, e, \eta, e\eta \mid \eta^2 = \alpha\eta - \beta \rangle$ , donde hemos identificado  $k^2 \otimes k[x]/\langle p(x) \rangle \cong k^2[x]/\langle p(x) \rangle$ ,  $1 = e_1 + e_2$ ,  $e = e_1 - e_2$ . A través de esta identificación podemos escribir el entrelazamiento como

$$\eta \cdot e = \delta(e) + f(e)\eta \tag{3.4}$$

Empezaremos identificando

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \eta \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y ahora imponemos la que  $\eta$  sea una raíz de  $p(x)$ . Esto nos da las relaciones

$$\begin{cases} a^2 + bc - \alpha a + \beta = 0 \\ ab + bd - \alpha b = 0 \\ ac + cd - \alpha c = 0 \\ d^2 + bc - \alpha d + \beta = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

De la segunda y tercera ecuaciones obtenemos que  $a + d = \alpha$ . Para obtener más relaciones podemos imponer la condición del trenzado (3.4). Pero esta condición viene dada en términos de  $e$ , por lo que debemos reescribir las fórmulas (3.1) y (3.2)

$$f(e) = f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = e_2 - e_1 = -e \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} \delta(e) &= \delta(e_1) - \delta(e_2) = 2a_2e_2 - 2a_1e_1 \\ &= -(a_1 - a_2)(e_1 + e_2) - (a_1 + a_2)(e_1 - e_2) \\ &= -(a_1 - a_2) + \alpha e \end{aligned} \tag{3.7}$$

Para hacer más sencillos los cálculos, podemos fijar  $a_2 = t$ , y reescribir la condición (3.7) como

$$\delta(e) = 2t + \alpha + \alpha e$$

que solo depende del parámetro  $t$ . La condición (3.4) se convierte ahora en

$$\eta \cdot e = 2t + \alpha + \alpha e - e\eta$$

que nos devuelve las condiciones

$$\begin{cases} a &= t + \alpha \\ d &= -t \end{cases}$$

Con esta nueva información, podemos recuperar (3.5) para obtener la identidad

$$bc + t^2 + \alpha t + \beta = 0$$

No es posible que  $t^2 + \alpha t + \beta$  sea cero, ya que es una forma *conjugada* del polinomio  $p(x)$ , esto es, tiene las mismas raíces excepto el signo. Por lo tanto  $b$  y  $c$  no pueden ser cero, pudiendo construir siempre el isomorfismo entre  $\tau_{(f,\delta)}$  y  $M_2(k)$  emparejando

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \eta \mapsto \begin{pmatrix} \alpha + t & 1 \\ -t^2 - \alpha t - \beta & -t \end{pmatrix}$$

y  $e \cdot \eta$  al producto de matrices correspondiente. Como estos elementos son linealmente independientes, estas condiciones definen un isomorfismo.  $\square$

**Sección 3.2**

**Productos tensores torcidos de la forma  $k[\xi] \otimes_{\tau} l$**

Seguiremos en esta sección los procedimientos usuales. Impondremos las condiciones de entrelazamiento (1.2) y (1.3) para saber qué condiciones deben cumplir  $(f, \delta)$  para describir todos los entrelazamientos, que dependen de las álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  que escojamos. Una vez obtenidas, pasaremos a clasificar las álgebras que resultantes.

En esta sección abordaremos el caso  $k[\xi] \otimes l$ , donde  $l = k[x]/\langle p(x) \rangle$ . Gracias a la Observación 1.23 podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $p(x) = x^2 - \alpha$ , con  $\eta$  raíz de  $p$  que no está en el cuerpo. Como  $l$  es una *extensión de Galois* (ya que  $\text{char}(k) \neq 2$ ), sus endomorfismos  $k$ -lineales están en correspondencia con los elementos del grupo de Galois  $\text{Gal}(l/k) \cong \mathbb{Z}_2$ , que solo

son dos, la identidad y la aplicación  $\sigma$  que deja los elementos del cuerpo fijos e intercambia las raíces de  $p(x)$ . En caso de tomar la identidad, la derivación sería cero y el entrelazamiento sería el flip usual, que nos da lugar a la estructura de producto tensor usual. Nos centraremos entonces en el caso en que tomemos como endomorfismo  $\sigma$ .

Como  $\mathfrak{l}$  es separable todas las derivaciones son interiores, luego deben ser de la forma

$$\delta(\eta) = (\sigma(\eta) - \eta)\theta$$

con  $\theta \in \mathfrak{l}$ . Visto como espacio vectorial, todo elemento de  $\mathfrak{l}$  se escribe como  $\alpha + b\eta$ , con  $\alpha, b \in k$ . Entonces la derivación será de la forma

$$\begin{aligned}\delta(\eta) &= (\sigma(\eta) - \eta)\theta = (-\eta - \eta)(\alpha + b\eta) \\ &= -2b\eta^2 - 2a\eta = -2b\alpha - 2a\eta\end{aligned}$$

Como ya hemos hecho anteriormente, el entrelazamiento quedará determinado por su valor

$$\tau(x \otimes \eta) = x \cdot \eta = \delta(\eta) + \sigma(\eta)x \quad (3.8)$$

Vamos a imponer las condiciones (1.2) y (1.3) para que (3.8) sea una aplicación torcida. Por un lado

$$\begin{aligned}x \cdot (\eta\eta) &= \delta(\eta\eta) + \sigma(\eta\eta)x \\ (x\eta) \cdot \eta &= (\delta(\eta) + \sigma(\eta)x)\eta = \delta(\eta)\eta + \sigma(\eta)\delta(\eta) + \sigma(\eta)\sigma(\eta)x\end{aligned}$$


de donde deducimos que  $\delta$  es una  $(\text{id}, \sigma)$ -derivación y  $\sigma$  es endomorfismo de álgebras.

Por el otro lado

$$\begin{aligned}(xx) \cdot \eta &= 0\eta = 0 \\ x \cdot (x\eta) &= x(\delta(\eta) + \sigma(\eta)x) = \delta^2(\eta) + [\sigma(\delta(\eta)) + \delta(\sigma(\eta))]x\end{aligned}$$

obteniendo las condiciones

$$\begin{aligned}\delta^2(\eta) &= 0 \\ \sigma(\delta(\eta)) + \delta(\sigma(\eta)) &= 0\end{aligned} \quad (3.9)$$

**Observación 3.3.** Podríamos haber obtenido estas condiciones directamente a partir de la Observación 1.23, ya que en este caso  $\alpha = 0$  y  $\sigma^2 = \text{id}$ . 

Impongamos estas condiciones (3.9) sobre las aplicaciones  $(\sigma, \delta)$  para determinar cuándo definen un entrelazamiento en el sentido de la definición de la Sección 1.4. Por un lado

$$\delta^2(\eta) = \delta(-2b\alpha - 2a\eta) = 4ab\alpha + 4a^2\eta$$

y por el otro

$$\begin{aligned}\sigma(\delta(\eta)) + \delta(\sigma(\eta)) &= \sigma(-2b\alpha - 2a\eta) + \delta(-\eta) \\ &= -2b\alpha + 2a\eta - (-2b\alpha - 2a\eta) = 4a\eta\end{aligned}$$

Las condiciones que nos quedan son

$$\begin{cases} 4a\eta = 0 \\ 4ab\alpha + 4a^2\eta = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

que son compatibles si y solo si  $a = 0$ , con lo que la condición para que exista el entrelazamiento es que la derivación sea de la forma  $\delta(\eta) = q$ , para algún  $q \in k$ .

Estas aplicaciones lineales torcidas  $(\sigma, \delta_q)$  dan lugar a la familia de álgebras con presentación

$$B_q = k\langle x, y \mid x^2 = 0, y^2 = \alpha, xy + yx = q \rangle$$

Pasamos ahora a clasificar las clases de isomorfismos de los productos tensores torcidos  $k[\xi] \otimes_{(\sigma, \delta)} L$ . Una base de este espacio será

$$\langle 1, x, \eta, x \cdot \eta \mid x^2 = 0, \eta^2 = \alpha, x\eta + \eta x = q \rangle$$

Por la estructura de la presentación y por el trabajo desarrollado en las anteriores secciones, tenemos la intuición que existe alguna relación con las álgebras de matrices, por lo que vamos a buscar un isomorfismo haciendo

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \eta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si imponemos la condición  $x^2 = 0$  obtenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ d^2 + bc = 0 \\ (a + d)b = 0 \\ (a + d)c = 0 \end{cases}$$

Tomamos como condiciones  $a = -d$  y  $b = -a^2/c$ . Hacemos actuar ahora la condición (3.8), obteniendo la igualdad

$$\alpha c^2 - cq - a^2 = 0,$$

que podemos satisfacer haciendo  $a = 0$  y  $c = q/\alpha$ . Como  $\alpha \neq 0$ , el isomorfismo se completa de la forma

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q/\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \eta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad x\eta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

Podemos entonces afirmar

**Lema 3.4.** *Para todo  $q \neq 0$ , el álgebra  $B_q$  es isomorfa al álgebra de matrices  $M_2(k)$ .*

Nos queda todavía el estudio del caso  $q = 0$  para completar la clasificación, que concluimos con el siguiente Lema.

**Lema 3.5.** *El álgebra  $B_0$  es isomorfa al anillo de invariantes  $(\mathbb{1}Q/Q_{\geq 2})^G$ , donde  $Q = \circ \rightleftarrows \circ$  es el 2-ciclo y  $G$  denota el grupo generado por el automorfismo no trivial que cambia los vértices e invierte las flechas de  $Q$  y que conjuga los escalares de  $\mathbb{1}$  con respecto al elemento no trivial del grupo de Galois  $\text{Gal}(\mathbb{1}/k)$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $u$  y  $v$  los vértices de  $Q$  y sean  $R, S$  sus flechas. Primero comprobemos que la  $\mathbb{1}$ -álgebra  $B_0 \otimes \mathbb{1} = \mathbb{1}\langle x, y \mid x^2 = 0, y^2 = \alpha, xy + yx = q \rangle$  es isomorfa al álgebra  $\mathbb{1}Q/Q_{\geq 2}$  vía el automorfismo

$$x \mapsto R + S \quad y \mapsto \sqrt{\alpha}u - \sqrt{\alpha}v$$

El automorfismo  $\sigma$  del grupo de Galois se puede elevar de manera trivial a una aplicación sobre  $B_0 \otimes \mathbb{1}$ , y es evidentemente  $B_0 \cong (B_0 \otimes \mathbb{1})^\sigma$ . Es simple rutina comprobar que bajo la anterior aplicación la imagen de  $B_0$  es invariante bajo la acción de  $G$ , luego obtenemos nuestro isomorfismo  $B_0 \cong (\mathbb{1}Q/Q_{\geq 2})^G$ .  $\square$

Sección 3.3

Productos tensores torcidos de la forma  $\mathbb{1} \otimes_{\tau} \mathbb{1}'$

Terminaremos la clasificación de las estructuras de factorización de dimensión 4 con el caso de dos extensiones cuadráticas de cuerpos.

Gracias al cambio de variable mencionado en la Observación 1.23 podemos presentar las álgebras  $\mathbb{1}$  y  $\mathbb{1}'$  de la forma  $\mathbb{1} = k[x]/\langle p(x) \rangle$ ,  $\mathbb{1}' = k[x]/\langle p'(x) \rangle$ , con  $p(x) = x^2 - \alpha$  y  $p'(x) = x^2 - \beta$ . Unas presentaciones de estas álgebras son

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \langle \mathbb{1}, \eta \mid \eta^2 = \alpha \rangle \\ \mathbb{1}' &= \langle \mathbb{1}, \zeta \mid \zeta^2 = \beta \rangle \end{aligned}$$

Como ya hemos hecho anteriormente, tenemos que encontrar los entrelazamientos  $\tau: \mathbb{1}' \otimes \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}'$ , que estarán en correspondencia uno a uno con los pares  $(f, \delta)$  de endomorfismos e  $(\text{id}, f)$ -derivaciones que además verifiquen las condiciones de trenzado. Siguiendo el procedimiento estándar, el entrelazamiento quedará definido una vez conozcamos su valor  $\tau(\zeta \otimes \eta) = \delta(\eta) + f(\eta)\zeta$ .

Vamos a trabajar sobre los endomorfismos de  $\mathbb{1}$ . Como  $\mathbb{1}$  es una extensión de Galois de  $k$  de grado 2, solo existen dos endomorfismos lineales de  $\mathbb{1}$ , la identidad y la aplicación  $\sigma$  dada por  $\sigma(\eta) = -\eta$ , donde  $\eta$  es una raíz de  $p$ . Como sabemos que  $\mathbb{1}$  es separable, cualquier derivación  $\delta$  es interior, por lo que será de la forma

$$\delta(\eta) = (\sigma(\eta) - \eta)\theta$$



con  $\theta \in L$ , que se podrá escribir de la forma  $\theta = a + b\eta$ , con  $a, b \in k$ . Operando de esta manera obtenemos

$$\delta(\eta) = (-2\eta)(a + b\eta) = -2b\beta - 2a\eta \quad (3.11)$$

Vamos a imponer las condiciones de trenzado (1.2) y (1.3) para caracterizar estas derivaciones. Usando la primera de ellas

$$\begin{aligned} \zeta \cdot (\eta\eta) &= \delta(\eta\eta) + \sigma(\eta\eta)\zeta \\ (\zeta\eta) \cdot \eta &= (\delta(\eta) + \sigma(\eta)\zeta)\eta = \delta(\eta)\eta + \sigma(\eta)\delta(\eta) + \sigma(\eta)\sigma(\eta)\zeta \end{aligned}$$

que nos dice que efectivamente  $\sigma$  es un endomorfismo de álgebras y  $\sigma$  una  $(id, \sigma)$ -derivación.

La segunda de las condiciones nos da las relaciones

$$\begin{aligned} (\zeta\zeta) \cdot \eta &= \beta\eta \\ \zeta \cdot (\zeta\eta) &= \zeta(\delta(\eta) + \sigma(\eta)\zeta) = \delta^2(\eta) + \beta\sigma^2(\eta) + [\delta(\sigma(\eta)) + \sigma(\delta(\eta))]\zeta \end{aligned}$$

por lo que obtenemos las conocidas ecuaciones

$$\begin{aligned} \delta^2 &= 0 \\ \delta\sigma + \sigma\delta &= 0 \end{aligned}$$

Usando la definición de  $\delta$  que tenemos en (3.11) tenemos las nuevas condiciones

$$\begin{cases} 4ab\beta + 4a^2\eta = 0 \\ 4a\eta = 0 \end{cases}$$

luego  $a = 0$  y para que la aplicación dada por  $(\sigma, \delta)$  sea un entrelazamiento  $\delta$  debe ser de la forma  $\delta(\eta) = q$ , con  $q \in k$ . Esto nos lleva a una familia de álgebras uniparamétricas dadas por

$$C_q = k\langle x, y \mid x^2 = \alpha, y^2 = \beta, xy + yx = q \rangle$$

Sin embargo, la clasificación de estas álgebras no es tan sencilla como en los casos anteriormente estudiados, y depende del cuerpo base  $k$ . Como primer acercamiento podemos enunciar el siguiente Lema.

**Lema 3.6.** *El álgebra  $C_q$  es isomorfa al álgebra de cuaterniones generalizada  ${}^{\alpha}k^t$ , con  $t = (q^2 - 4\alpha\beta)/4\alpha^2$ . En particular, las álgebras  $C_q$  forman una familia de álgebras de cuaterniones con un parámetro común.*

*Demostración.* El isomorfismo viene dado por

$$x \mapsto i \quad y \mapsto \frac{q}{2\alpha}i + ij$$

donde  $i$  y  $j$  son los generadores de  ${}^{\alpha}k^t = k\langle i, j \mid i^2 = \alpha, j^2 = t, ij + ji = 0 \rangle$ . □

Podemos deducir algunas consecuencias del Lema 3.6. Sabemos que el álgebra de cuaterniones  ${}^{\alpha}k^t$  es un álgebra simple central siempre que  $\alpha, t \neq 0$ , y en nuestra situación  $\alpha \neq 0$  y  $t = 0$  si y solo si  $q^2 = 4\alpha\beta$ , cosa que ocurre a lo sumo para dos valores de  $q$ . Entonces, todas las álgebras de  $C_q$  excepto dos son simples y centrales.

La solución para el problema de isomorfía para álgebras de cuaterniones sobre un cuerpo genérico no es conocida explícitamente. Sin embargo el siguiente Lema establece condiciones necesarias y suficientes para que dos álgebras de cuaterniones con un parámetro común sea isomorfas.

**Lema 3.7** ([Pie82], Sección 1.7). *Dos álgebras de cuaterniones  ${}^{\alpha}k^b$  y  ${}^{\alpha}k^c$  son isomorfas si y solo si  $b/c \in N_{l/k}(l^{\times})$ , siendo  $l = k(\sqrt{\alpha})$ , y  $N_{l/k} : l \rightarrow k$  la aplicación norma de la extensión  $l/k$ . Así  ${}^{\alpha}k^b$  es un anillo de matrices si y solo si  $b \in N_{l/k}(l^{\times})$ .*

En nuestra situación concreta, como la extensión de cuerpos es  $l = k(\sqrt{\alpha})$  la aplicación norma viene dada por  $N_{l/k}(x + y\sqrt{\alpha}) = x^2 - \alpha y^2$ , y podemos enunciar el siguiente Teorema.

**Teorema 3.8.** *Sean  $q, h \in k$  tales que  $4\alpha\beta - q \neq 0$ ,  $4\alpha\beta - h \neq 0$ .*

- *Las álgebras  $C_q$  y  $C_h$  son isomorfas si y solo si existen  $x, y \in k$  tales que*

$$x^2 - \alpha y^2 = \frac{q^2 - 4\alpha\beta}{h^2 - 4\alpha\beta}$$

- *$C_q$  es isomorfa al anillo de matrices  $M_2(k)$  si y solo si existen  $x, y \in k$  tales que*

$$x^2 - \alpha y^2 = q^2 - 4\alpha\beta \quad (3.12)$$

El Teorema 3.8 aplicado a nuestro problema nos dice que las clases de isomorfismo para productos tensores torcidos de la forma  $l \otimes_{\tau} l'$  son de la forma

- 1) Las órbitas de la acción de  $N_{l/k}(l^{\times})$ , vistas como subgrupo multiplicativo de  $k^{\times}$ , que interseca la imagen de  $q \mapsto q^2 - 4\alpha\beta$ .
- 2) El álgebra  $C_q \cong C_{-q}$ , siempre que  $q = 2\sqrt{\alpha\beta}$  pertenezca a  $k$ .
- 3) El álgebra conmutativa  $l \otimes l'$ .

Por último, vamos a *desenmascarar* al álgebra  $C_q$  del caso 2).

**Proposición 3.9.** *Sea  $l = l' = k(\sqrt{\alpha})$ . El álgebra*

$$\overline{C}_{2\alpha} := l \otimes C_{2\alpha} = l\langle x, y \mid x^2 = y^2 = \alpha, xy + yx = 2\alpha \rangle.$$

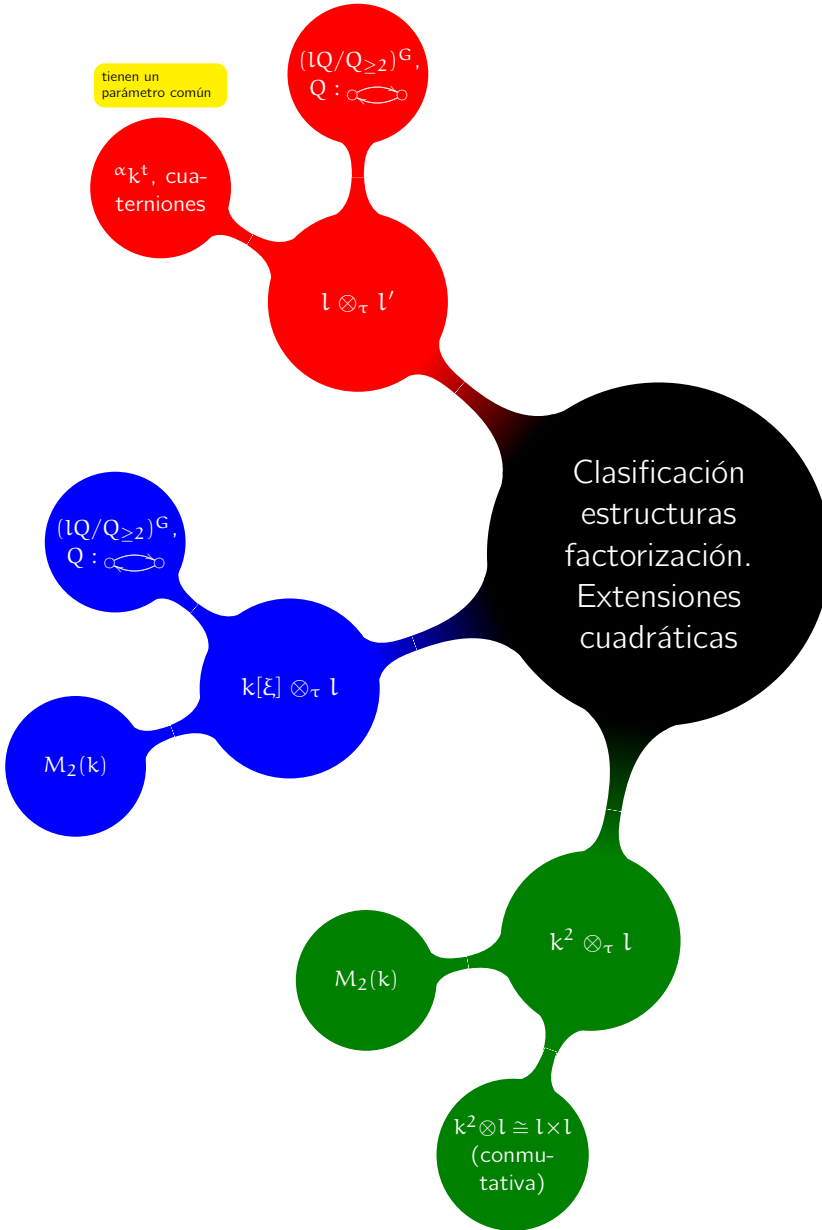
*es isomorfa al álgebra de caminos truncada  $lQ/Q_{\geq 2}$  del 2-ciclo  $Q = \begin{array}{ccc} \circ & \rightleftarrows & \circ \end{array}$ .*

*Como consecuencia, tenemos un isomorfismo entre  $C_{2\alpha}$  y el álgebra de invariantes  $(lQ/Q_{\geq 2})^G$ , siendo  $G$  el grupo generado por el automorfismo no trivial de  $kQ$  que conjuga los escalares e intercambia los vértices y las flechas de  $Q$ .*

*Demostración.* La prueba de este resultado sigue el mismo planteamiento del Lema 3.5. En este caso el isomorfismo  $C_{2\alpha} \otimes \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}\mathfrak{Q}/\mathfrak{Q}_{\geq 2}$  viene dado por

$$x \mapsto \sqrt{\alpha}u - \sqrt{\alpha}v + R + S \quad y \mapsto \sqrt{\alpha}u - \sqrt{\alpha}v$$

□







# Álgebras de conjunto, coloraciones y cuaterniones

En este apéndice vamos a recordar aquellos conceptos que hemos ido usando a lo largo de los Capítulos 2 y 3 pero que por mantener la estructura de los capítulos y evitar información superflua no hemos definido.

La mayoría de los conceptos pertenecen a [Cib06].

## Sección A.1

### Álgebras de conjuntos

El *álgebra de conjunto* de funciones con valores en  $k$  sobre un conjunto finito  $E$  es una  $k$ -álgebra finito dimensional semisimple, isomorfa a  $k \times \cdots \times k$ , donde el número de copias de  $k$  es igual a la cardinalidad de  $E$ .

Puede expresarse como  $k^E = \{a : E \rightarrow k\}$  donde el producto viene dado por  $(aa')(x) = a(x)a'(x)$ . Este álgebra  $k^E$  es isomorfa al espacio vectorial con base el conjunto  $E$  y producto componente a componente

$$\left( \sum_{x \in E} a_x x \right) \left( \sum_{x \in E} a'_x x \right) = \sum_{x \in E} (a_x a'_x) x, \quad a_x, a'_x \in k$$

En otras palabras,  $k^E$  es un producto de copias de  $k$  indexadas sobre  $E$ , y  $E$  es un conjunto completo de idempotentes ortogonales primitivos de  $k^E$ .

Sea  $\mathcal{A}$  una  $k$ -álgebra y  $M$  un  $\mathcal{A}$ -bimódulo. Una *derivación* es una aplicación  $k$ -lineal  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow M$  tal que  $\delta(aa') = a\delta(a') + \delta(a)a'$ . Una *derivación interior* está asociada a cada elemento  $m \in M$  a través de la fórmula  $\delta_m(a) = am - ma$ . Toda derivación interior es una derivación.

El siguiente resultado es bien conocido y sencillo de probar, y nos da la clasificación de los  $\mathcal{A}$ -bimódulos cuando  $\mathcal{A}$  es un álgebra de conjunto finita sobre un

cuerpo.

**Proposición A.1.** *Sea  $k$  cuerpo,  $E$  un conjunto y  $\mathcal{A} = k^E$  el álgebra de conjunto de  $E$ . Cualquier  $\mathcal{A}$ -bimódulo finitamente generado es isomorfo a la suma directa de módulos simples. La lista completa de módulos simples salvo isomorfismos es  $\{ {}_u k_v \}_{u,v \in E}$  donde  ${}_u k_v$  es un espacio vectorial unidimensional con acción identidad sobre  $v$  por la izquierda, sobre  $u$  por la derecha, y acción cero sobre el resto de elementos del conjunto.*

De acuerdo con esta proposición basta considerar los bimódulos simples de coeficientes para probar que toda derivación es interior.

**Proposición A.2.** *Sea  $\mathcal{A} = k^E$  un álgebra de conjunto,  ${}_u k_v$  un bimódulo simple y  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow {}_u k_v$  una derivación. Si  $u \neq v$  la derivación es interior. En caso de que  $u = v$  la derivación es cero.*

*Demostración.* Probaremos primero que el espacio de derivaciones es unidimensional si  $u \neq v$ , y que es cero si  $u = v$ . Sea  $e \in {}_u k_v$  un elemento fijo distinto de cero y para cada elemento  $x \in E$  sea  $\lambda_x \in k$  definido por  $\delta(x) = \lambda_x e$ . Afirmamos que  $\lambda_x = 0$  si  $x \neq u$  ó  $x \neq v$ . De hecho,

$$\lambda_x e = \delta(x) = \delta(x^2) = x\delta(x) + \delta(x)x = \lambda_x x e + \lambda_x e x = 0 + 0 = 0$$

Si  $u = v$  tenemos  $\lambda_u e = \delta(u) = 2\lambda_u e$ , lo cual implica  $\lambda_u = 0$ . Si  $u \neq v$  entonces

$$0 = \delta(vu) = v\delta(u) + \delta(v)u = \lambda_u v e + \lambda_v e u = (\lambda_u + \lambda_v) e$$

Consideremos ahora la derivación interior  $\delta_e$  dada por  $\delta_e(x) = xe - ex$ . Es claro que  $\delta_e(x) = 0$  si  $x \neq u$  ó  $x \neq v$ . Asumiendo que  $u \neq v$  obtenemos  $\delta_e(v) = e$  mientras que  $\delta_e(u) = -e$ . De esta manera, el espacio de derivaciones interiores también es uno-dimensional y toda derivación de este espacio es interior.  $\square$

Sección A.2

Coloraciones

Cada endomorfismo de álgebras de  $k^E$  está determinado por una aplicación de conjunto  $\varphi : E \rightarrow E$ . De hecho es un caso especial de la anti-equivalencia entre la categoría de conjuntos finitos y la categoría de álgebras conmutativas básicas semisimples. Si  $f$  es un endomorfismo de álgebras de  $k^E$  existe una única aplicación de conjuntos  $\varphi : E \rightarrow E$  tal que para todo  $e \in E$  tenemos

$$f(e) = \sum_{\{x | \varphi(x) = e\}} x$$



**Lema A.3.** Sea  $f$  un endomorfismo de álgebras de  $\mathcal{A} = \mathbb{k}^E$  dado por una aplicación de conjuntos  $\varphi : E \rightarrow E$ . Sea  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow {}^f\mathcal{A}$  una derivación. Existe un elemento  $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$  tal que para todo  $e \in E$  tenemos  $\delta(e) = (f(e) - e)\mathbf{a} = \sum_{\varphi(x)=e} \mathbf{a}_x x - \mathbf{a}_e e$ . Además

$$\delta^2(e) = \sum_{\varphi^2(y)=e} \mathbf{a}_y \mathbf{a}_{\varphi(y)} y - \sum_{\varphi(x)=e} \mathbf{a}_x (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_e) x + \mathbf{a}_e^2 e$$

*Demostración.* Como  $\delta$  es interior, sabemos que existe un elemento  $\mathbf{a}$  tal que  $\delta(e) = e \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a}_e e = f(e)\mathbf{a} - \mathbf{a}e = (f(e) - e)\mathbf{a}$ . El hecho de que  $\mathbf{a}$  sea único se sigue de las consideraciones anteriores.

Sustituyendo en las fórmulas tenemos

$$\begin{aligned} \delta^2(e) &= \sum_{\varphi(x)=e} \mathbf{a}_x \delta(x) - \mathbf{a}_e \delta(e) \\ &= \sum_{\varphi(x)=e} \mathbf{a}_x \left( \sum_{\varphi(y)=x} \mathbf{a}_y y - \mathbf{a}_x x \right) - \mathbf{a}_e \left( \sum_{\varphi(x)=e} \mathbf{a}_x x - \mathbf{a}_e e \right) \\ &= \sum_{\varphi^2(y)=e} \mathbf{a}_y \mathbf{a}_{\varphi(y)} y - \sum_{\varphi(x)=e} \mathbf{a}_x (\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_e) x + \mathbf{a}_e^2 e \end{aligned}$$

□

**Observación A.4.** El elemento  $\mathbf{a}$  del Lema A.3 está determinado de manera única una vez que normalicemos sobre los lazos de  $E$ , esto es,  $\mathbf{a}_e = 0$  si  $f(e) = e$ . Llamaremos a este elemento el elemento determinante de  $\delta$ .

A la hora de describir las derivaciones idempotentes  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow {}^f\mathcal{A}$  es útil introducir el grafo de un endomorfismo  $f$  dado por una aplicación de conjunto  $\varphi : E \rightarrow E$ . Recordemos que un grafo  $Q$  es un grafo finito orientado con conjunto de vértices  $Q_0$ , conjunto de flechas  $Q_1$  y dos aplicaciones  $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$  que dotan a cada flecha de un vértice inicial y un vértice final.

**Definición A.5.** Sea  $f$  un endomorfismo del álgebra de conjunto  $\mathcal{A} = \mathbb{k}^E$  dada por la aplicación  $\varphi$ . El grafo  $Q_f$  de  $f$  tiene por conjunto de vértices  $E$  y una flecha de  $x$  a  $\varphi(x)$  para cada  $x \in E$ . Dos flechas  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  están concatenadas si  $s(\mathbf{b}) = t(\mathbf{a})$ .

**Observación A.6.** Los grafos obtenidos de esta manera son precisamente grafos uni-valuados, esto es, cada vértice del grafo es el inicio de exactamente una flecha, de acuerdo con la definición de aplicación de conjunto.

**Definición A.7.** Un ciclo orientado de un grafo es una sucesión de flechas concatenadas tales que el inicio de la primera flecha coincide con el final de la última flecha. Su longitud es el número de flechas del ciclo. Un lazo es un ciclo orientado de longitud uno. Un ciclo orientado es propio si no es la iteración de un ciclo orientado de longitud estrictamente menor. Un vértice lazo es un vértice donde un lazo tiene un inicio y su final.



Cada componente conexa de un grafo uni-valuado tiene precisamente un ciclo propio orientado, que puede ser un lazo.

**Proposición A.8.** *Sea  $\mathcal{A} = k^n$ . El conjunto de entrelazamientos entre  $\mathcal{A}$  y  $k^2$  está en correspondencia uno a uno con el conjunto  $Y_{\mathcal{A}}$  de parejas  $(f, \delta)$  con  $f \in \text{End}(\mathcal{A})$  un endomorfismo de álgebras y  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  un  $f$ -derivación torcida idempotente que verifican*

$$f = f^2 + \delta f + f \delta$$

Cualquier endomorfismo  $f$  del álgebra  $\mathcal{A} = k^n$  puede describirse en términos de una aplicación de conjunto  $\varphi$ , que puede a su vez asociarse a un grafo orientado de  $n$ -vértices univaluado. A este grafo, usando la derivación  $\delta$ , le podemos asociar una *coloración* que satisface ciertas condiciones. Por el otro lado, todo grafo univaluado que admite una coloración satisfaciendo estas propiedades da lugar a un endomorfismo de álgebras y una derivación en el sentido de la proposición anterior, y por lo tanto a un entrelazamiento. Entonces tenemos que existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de entrelazamientos entre  $\mathcal{A}$  y  $k^2$  y el conjunto de grafos coloreados univaluados de  $n$  vértices.

Sea  $R$  una componente conexa de un grafo  $Q_f$ . Sea  $\delta : k^E \rightarrow {}^f(k)$  una derivación con elemento determinante  $\alpha \in k^E$ . Nuestro primer objetivo será describir aquellos  $\alpha$  tales que  $\delta^2 = \delta$ .

**Lema A.9.** *Sea  $\mathcal{A} = k^E$  un álgebra de conjunto finita,  $f$  un endomorfismo de  $\mathcal{A}$  con aplicación de conjunto  $\varphi$  y grafo  $Q_f$ , y sea  $\delta : \mathcal{A} \rightarrow {}^f\mathcal{A}$  una derivación idempotente con elemento determinante  $\alpha \in k^E$ . Sea  $u \rightarrow v$  una flecha de  $Q_f$  con  $u \neq v$  con  $v$  no vértice lazo y tal que no tiene flechas hacia atrás. Notemos que  $u$  no puede ser un vértice lazo ya que  $Q_f$  es uni-valuado. Entonces  $\alpha_u, \alpha_v \in \{-1, 0\}$  y  $\alpha_u \alpha_v = 0$ .*

*Demostración.* En el vértice  $v$  tenemos la fórmula

$$0 = (\delta^2 - \delta)(v) = \sum_{\varphi^2(y)=v} \alpha_y \alpha_{\varphi(y)} y - \sum_{\varphi(x)=v} \alpha_x (\alpha_x + \alpha_v + 1)x + \alpha_v (\alpha_v + 1)v$$

El coeficiente de  $v$  en esta suma es  $\alpha_v(\alpha_v + 1)$ , por lo que  $\alpha_v \in \{0, 1\}$ . El coeficiente en  $u$  es  $-\alpha_u(\alpha_u + \alpha_v + 1)$ . Si  $\alpha_v = -1$  entonces  $\alpha_u = 0$ . Si  $\alpha_v = 0$  entonces  $\alpha_u \in \{0, -1\}$ . □

Pasemos ahora a definir las *pre-coloraciones* de  $Q_f$ , las cuales se corresponden a las derivaciones idempotentes.

**Definición A.10.** *Sea  $Q_f$  el grafo de un endomorfismo de álgebras  $f$  que viene dado por la aplicación  $\varphi : E \rightarrow E$ . Una pre-coloración de sus vértices es un elemento  $\alpha \in k^E$  que verifica las siguientes condiciones:*

- 1) *En caso de una componente conexa de  $Q_f$  que sea un 2-ciclo  $\textcircled{u} \rightleftarrows \textcircled{v}$  los colores  $\alpha_u$  y  $\alpha_v$  verifican o  $\alpha_u + \alpha_v + 1 = 0$  o  $\alpha_u = \alpha_v = 0$ .*



2) Para una componente conexa diferente del 2-ciclo:

- a) En caso de que  $e$  no sea un vértice lazo  $\alpha_e \in \{0, -1\}$ .
- b) Para cada flecha el producto de los colores de su inicio y su final es 0.
- c) Para un vértice lazo el color es irrelevante, por lo que lo normalizamos a 0.

**Proposición A.11.** Sea  $A = \mathbb{k}^E$  álgebra de conjunto finita,  $f$  endomorfismo de  $A$  con aplicación de conjunto  $\varphi$  y grafo  $Q_f$ , y sea  $A \rightarrow {}^fA$  una derivación idempotente con elemento determinante  $\alpha \in \mathbb{k}^E$ . Entonces  $\alpha$  es una pre-coloración de  $Q_f$  sobre esta componente conexa.

*Demostración.* Consideremos una componente conexa  $R$  de  $Q_f$ . Asumamos primero que existe un vértice lazo  $e$  en  $R$  y consideremos la ecuación  $(\delta^2 - \delta)(e) = 0$ . El coeficiente de  $e$  es  $\alpha_e^2 - \alpha_e(2\alpha_e + 1) + \alpha_e^2 + \alpha_e$  el cual es cero para cualquier valor de  $\alpha_e$ . Si la componente conexa  $R$  se reduce a  $e$  tenemos que  $\alpha$  es una pre-coloración. De otra manera, sea  $x$  tal que  $\varphi(x) = e$  y  $x \neq e$ . El coeficiente de  $x$  en la ecuación  $(\delta^2 - \delta)(e) = 0$  es

$$\alpha_x \alpha_e - \alpha_x(\alpha_x + \alpha_e + 1) = \alpha_x(\alpha_x + 1)$$

Entonces  $\alpha_x \in \{0, -1\}$ . En caso de que  $R$  no contenga el 2-ciclo la conclusión se sigue del lema anterior.

Si  $R$  contiene un 2-ciclo de vértices  $u$  y  $v$  la ecuación  $(\delta^2 - \delta)(u) = 0$  nos da el coeficiente de  $v$

$$-\alpha_v(\alpha_v + \alpha_u + 1)$$

y el coeficiente de  $u$

$$\alpha_u \alpha_v + \alpha_u(\alpha_u + 1) = \alpha_u(\alpha_v + \alpha_u + 1)$$

De estas fórmulas obtenemos que  $\alpha_u + \alpha_v + 1 = 0$  o  $\alpha_u = \alpha_v = 0$ .

En caso de que  $R$  no se reduzca al 2-ciclo debe existir una flecha que termine en  $u$  o  $v$  (es indistinto para la demostración cuál se tome) que parta de un vértice  $w$  el cual no puede ser un vértice lazo ya que de cada vértice solo parte una flecha. Por la misma razón esta flecha no puede ser parte de un 2-ciclo. Aplicando el lema obtenemos que  $\alpha_w, \alpha_u \in \{0, -1\}$  y  $\alpha_u \alpha_w = 0$ . Si  $\alpha_u = 0$  las ecuaciones del 2-ciclo vistas arriba nos dan  $\alpha_v = -1$  o  $\alpha_v = 0$ . Si  $\alpha_u = -1$  entonces  $\alpha_v = 0$ . En ambos casos lo que obtenemos es una pre-coloración.  $\square$

**Observación A.12.** De la prueba de este resultado es claro que recíprocamente una pre-coloración de  $Q_f$  nos da una derivación idempotente  $\mathbb{k}^E \rightarrow {}^f\mathbb{k}^E$ .

Finalmente describamos las pre-coloraciones correspondientes a las derivaciones idempotentes que verifican  $f = f^2 + \delta f + f\delta$ .

**Definición A.13.** Una coloración de  $Q_f$  es un elemento  $\alpha = \sum_{x \in E} \alpha_x x \in k^E$  tal que

- 1) Para una componente conexa que se reduzca a un 2-ciclo  $\textcircled{u} \rightleftarrows \textcircled{v}$  los coeficientes  $\alpha_u$  y  $\alpha_v$  verifican  $\alpha_u + \alpha_v + 1 = 0$ .
- 2) Para otras componentes conexas:
  - a) En caso de que  $e$  no sea un vértice lazo,  $\alpha_e \in \{0, -1\}$
  - b) Para cualquier flecha que no tenga un vértice lazo como final, uno de los extremos vale 0 y el otro vale  $-1$ .
  - c) En los vértices lazo el valor de  $\alpha$  es irrelevante, por lo que se normaliza a 0.

**Observación A.14.** No cualquier grafo  $Q_f$  admite una coloración. Para ello es condición necesaria que la longitud de los ciclos orientados propios que no son lazos sea par. Para una componente conexa que tiene ciclos orientados propios de longitud par existen dos posibles coloraciones. Si no, una coloración de una componente conexa con un lazo está completamente determinada escogiendo los valores 0 y  $-1$  sobre los vértices relacionados con el lazo, esto es, sobre los inicios de las flechas que tienen por final un vértice lazo.

## Sección A.3

## Cuaterniones

A lo largo de esta sección vamos a recordar las definiciones básicas y algunos resultados de clasificación para las álgebras de cuaterniones generalizadas.

**Definición A.15.** Sean  $\alpha, b$  elementos de  $k$  distintos de cero. Sea  $\mathcal{A}$  el  $k$ -espacio 4-dimensional con base  $\{1, i, j, m\}$  y multiplicación bilineal definida por las condiciones que 1 sea elemento unidad y

$$i^2 = \alpha \quad j^2 = b \quad ij = -ji = m$$

$\mathcal{A}$  es un álgebra asociativa, se nota por  ${}^{\alpha}k^b$  y se llama álgebra de cuaterniones generalizada.

Para la elección de coeficientes  $\alpha = b = -1$  tenemos el conocido caso de los cuaterniones de Hamilton  $\mathbb{H} = {}^{-1}\mathbb{R}^{-1}$ .

**Lema A.16.** Para cualesquiera elementos  $\alpha, b$  distintos de cero en  $k$ ,  ${}^{\alpha}k^b$  es un álgebra simple cuyo centro es  $k$ .

**Proposición A.17.** Las álgebras de cuaterniones  ${}^{\alpha}k^b$  y  ${}^{\alpha'}k^{b'}$  son isomorfas si y solo si las formas cuadráticas  $\alpha x_1^2 + b x_2^2 - \alpha b x_3^2$  y  $\alpha' x_1^2 + b' x_2^2 - \alpha' b' x_3^2$  son equivalentes.

Dos formas cuadráticas se dicen *equivalentes* si es posible pasar de una a otra a través de un cambio de variables lineal no singular. Cuando las formas  $\Phi$  y  $\Phi'$  vienen representadas como productos de matrices

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \Phi'(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)\alpha' \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

la condición para que  $\Phi$  y  $\Phi'$  sean equivalentes se reduce a la existencia de una matriz no singular  $\delta \in M_3(k)$  tal que  $\alpha = \delta^t \alpha' \delta$ .

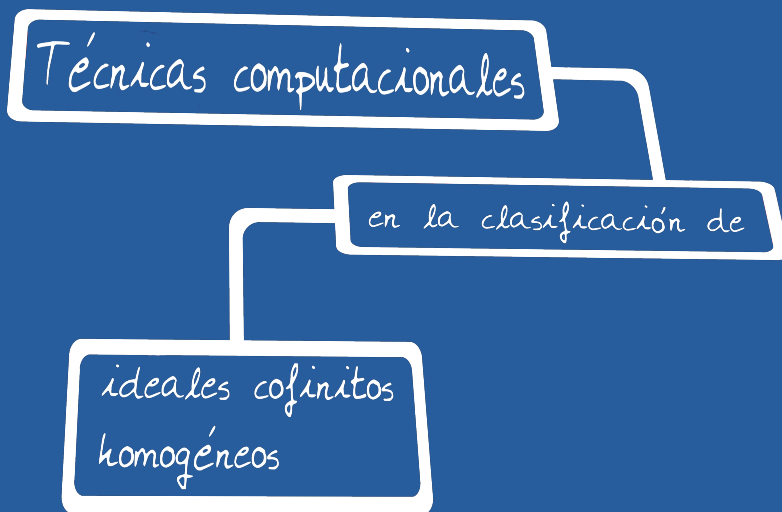






# BLOQUE II

---









---

# Introducción

En el presente trabajo vamos a abordar y resolver varias cuestiones relacionadas con la naturaleza cofinita de algunas familias de ideales homogéneos, que van desde 45 elementos hasta varios millones. También desarrollaremos un procedimiento para deducir cuándo dos álgebras relacionadas con estos ideales son isomorfas, procedimiento que mejora otros introducidos por otros autores. Los resultados de este bloque se encuentran en [CJL11].

Dado un álgebra de polinomios  $k\langle X \rangle$  y un ideal  $\mathcal{J} \trianglelefteq k\langle X \rangle$ , decimos que  $\mathcal{J}$  es un ideal *cofinito* si el álgebra cociente  $k\langle X \rangle/\mathcal{J}$  tiene dimensión finita.

Los ideales que son objeto de este estudio son ideales de polinomios no conmutativos que están parametrizados por tres variables  $(a, b, c)$ . La variable  $a$  representa el número de indeterminadas del conjunto  $X$ ,  $b$  es la longitud de los monomios o binomios que conforman las relaciones que generan el ideal y  $c$  es el número de relaciones que componen cada ideal.

A lo largo de todo este proceso ha sido fundamental el desarrollo de herramientas computacionales para sobrellevar la cantidad de cálculos que son necesarios para realizar la clasificación de estos ideales. Sin estas herramientas este estudio hubiera sido completamente irrealizable.

Todos los cálculos respectivos a reducciones, palabras normales o bases de Gröbner-Shirshov han sido realizados por el programa *Bergman* (ver [Bac]).

La clasificación de estas familias de ideales puede enmarcarse dentro de las aplicaciones de la teoría de *Bases de Gröbner-Shirshov* (4.7). Una base (como  $k$ -espacio vectorial) de cada una de las álgebras cocientes relacionadas con estos ideales puede ser obtenida a través de las palabras *normales* del álgebra, aquellas que no puedan ser reescritas de acuerdo a las reglas de reducción dadas por los

elementos que componen el ideal. Y para poder realizar correctamente la reducción de un elemento módulo un ideal necesitamos conocer su base de Gröbner-Shirshov.

Cuando empezamos nuestro estudio nos centramos en estudiar álgebras de caminos. Las álgebras de caminos se pueden expresar como cocientes de álgebras libres, donde el ideal de relaciones es el que nos dice qué caminos podemos recorrer.

Tras encontrar algunas condiciones sencillas, por ejemplo, que a partir de cierta longitud todos los caminos puedan obtenerse como caminos generados por los elementos del ideal cociente, decidimos abordar la situación de una manera más general, estudiando el problema para cocientes de álgebras libres.

Para estudiar cuándo un álgebra cociente es o no finito dimensional podemos observar varias características, como por ejemplo su grafo de Ufnarovskii, su crecimiento o dimensión de Gelfand-Kirillov (ver 5.2) o su serie de Hilbert (ver 5.3), entre otras.

En un primer momento, y quizá todavía influenciados por los primeros pasos que dimos estudiando álgebras de caminos, decidimos analizar los grafos de Ufnarovskii relacionados con las álgebras cocientes que estábamos estudiando. Y para ello necesitábamos el grado máximo de los elementos que componen la base de Gröbner-Shirshov.

El anterior razonamiento nos sirve para el caso en que tengamos un ideal con base de Gröbner-Shirshov finita, cosa que siempre es cierta en el campo *conmutativo* pero no en *no conmutativo*. Pero, ¿qué pasaría si la base de Gröbner-Shirshov es infinita o no llegamos a calcularla completa? Querriamos, en tal caso, ser capaces de obtener información por comparación, esto es, estudiando casos que se le *parezcan* a ver si así somos capaces de deducir su comportamiento.

Así que decidimos estudiar grandes familias de ejemplos de ideales, que para poder dotarlas de operatividad hemos parametrizamos con respecto a tres variables  $(a, b, c)$  (ver Introducción Capítulo 7). De esta manera todas las familias bajo estudio son finitas y podemos examinarlas de manera completa.

Supongamos que ya hemos estudiado estas familias, de manera que sabemos la dimensión finita máxima de cada una de ellas (por lo menos hasta grado 30). Este dato nos permite diferenciar si una de estas álgebras es finita o no. Como es un álgebra homogénea estamos en disposición de ir obteniendo su dimensión grado a grado, como la suma de elementos normales en cada uno de ellos. Si en algún momento esta suma supera la dimensión finita máxima de esa familia, podemos asegurar que nuestra álgebra inicial tiene dimensión infinita.

También teníamos curiosidad por saber cómo eran las álgebras que tenían dimensión máxima en cada familia. En principio tienen que existir porque solo hay un número finito de álgebras en cada familia. Pero, ¿cuántas son?, ¿hay muchas?, ¿tienen relaciones entre ellas? Supongamos que hemos sido capaces de obtener todas las álgebras de dimensión finita y hemos separado aquellas que son *maximales* en ese sentido. Y surge otra pregunta más. De éstas, ¿cuántas diferentes hay,

salvo isomorfismos? A estas preguntas, y otras más que irán apareciendo como resultado de este estudio, les intentamos buscar respuesta en los Capítulos 6 y 7, donde desarrollamos un nuevo método para clasificar isomorfismos entre álgebras homogéneas y aplicamos este método para encontrar las álgebras finitas maximales de cada una de las familias que vamos a estudiar.

Para que este estudio fuera exhaustivo teníamos que ser capaces de estudiar todos los casos de cada una de las familias. Por eso necesitamos, como hemos comentado anteriormente, la ayuda de ordenadores que realicen todos los cálculos necesarios. Para ello hemos desarrollado el programa que explicamos en el Apéndice B.

En los Capítulos 4 y 5 repasamos las Matemáticas que necesitaremos desarrollar para realizar este estudio y la posterior clasificación de estos ideales. En el primero de ellos repasamos la teoría de bases de Gröbner-Shirshov (de manera muy superficial) y en el segundo hacemos hincapié en los conceptos que más vamos a necesitar en nuestro estudio.

## Capítulo 4

En este primer capítulo sentamos unos muy precarios fundamentos sobre la teoría de Bases de Gröbner-Shirshov. Empezamos explicando su origen y el por qué de este nombre compuesto.

Esta teoría tiene sus orígenes en los años 60. Se inicia cuando *Bruno Buchberger* está realizando su tesis ([Buc65]). Fue el propio Buchberger el que puso el nombre de su tutor, el matemático austriaco *Wolfgang Gröbner*, a los conjuntos generadores que obtuvo como resultado de su estudio, ya que Gröbner fue quien propuso a Buchberger el problema de encontrar un algoritmo de reducción en anillos de polinomios. El algoritmo que las computa sí lleva su nombre.

La otra *mitad* del nombre se debe a *Alexander Shirshov*. Al mismo tiempo que Buchberger terminaba su tesis, al otro lado del telón de acero Shirshov ([Shi62]) también desarrollaba la misma idea de composición, pero debido al aislamiento de la URSS sus resultados tardaron mucho más en ser conocidos y reconocidos. Durante la última década se han ido reconociendo sus méritos y nosotros también los reconocemos, aunque Shirshov desarrolló su trabajo para álgebras de Lie (no conmutativas). Nosotros hablaremos de *Bases de Gröbner* cuando nos refiramos al caso conmutativo y de *Bases de Gröbner-Shirshov* cuando estemos en el caso no conmutativo (para profundizar sobre los trabajos *aislados* de Shirshov recomendamos [BK03]).

El resto ya es historia. Las bases de Gröbner-Shirshov son uno de los objetos matemáticos con un mayor número de aplicaciones. Por ejemplo, las bases de Gröbner-Shirshov generalizan el método de Gauss para resolver sistemas de ecua-

ciones, razón por la cual son muy recurridas. Se trata de otro de los conocidos como *rewriting problems*. Consiste en tomar un sistema de ecuaciones y convertirlo en otro sistema equivalente con las mismas soluciones y más sencillo de resolver. La idea cuando usamos bases de Gröbner es tomar el término líder y eliminarlo de las otras ecuaciones usando sumas y productos por escalares. Esto no es otra cosa que calcular la forma reducida de esa ecuación respecto a las otras. Al final se trata de calcular la forma reducida del sistema. Si en la base de Gröbner aparece un uno el sistema no tendrá solución, ya que eso significa que en algún momento el sistema contiene una ecuación equivalente a

$$1 = 0$$

con lo cual es incompatible. El buen desarrollo de este método aplicado a un sistema compatible permite que tras realizar estas transformaciones obtengamos ecuaciones que involucren una sola variable, que equivale a la obtención de la forma de Hermite del sistema, con lo cual todo es más sencillo. Resolvemos y obtenemos la solución del sistema inicial.

Se usan para todo tipo de aplicaciones en álgebra computacional, geometría algebraica, teoría de códigos, lenguajes y programación, etcétera. El algoritmo está implementado en prácticamente todos los sistemas de cálculo simbólico y las palabras *Gröbner bases* son una de las *palabras claves* para la Sociedad Matemática Americana.

Se pueden calcular en prácticamente cualquier tipo de álgebras, como álgebras simétricas ([AH08]) o para ideales de anillos de polinomios torcidos ([Wei92]).

El orden juega un papel determinante en el proceso de obtención de la base de Gröbner-Shirshov de un ideal, como se puede comprobar en [BS87], [Kety] o [Lev07]. En este capítulo solo vamos a ver los casos más básicos de órdenes, pero existen muchísimas variaciones. Por ejemplo los órdenes por bloques u órdenes mixtos como el *letterplace*, que se basa tanto en la posición de la variable como en la propia variable ([LSL09]).

En cuanto a bases de Gröbner (conmutativas) la teoría es completa y tiene un comportamiento excelente. Todo ideal finitamente generado tiene una base de Gröbner finita, resultado que se deduce del Lema de Dickson y del Teorema de la base de Hilbert. Así que todo ideal está finitamente generado. Para este tipo de álgebras, el algoritmo de Buchberger encuentra la base de Gröbner en un número finito de pasos. Y es en este número de pasos donde interviene el orden para acelerar el proceso. Una buena elección puede acelerar mucho los cálculos.

Actualmente parece que los mejores algoritmos para calcularlas son los de tipo F (ver, por ejemplo, [Fau02]). También existen otras muchas mejoras, como la de selección de S-polinomios, el propio orden en que tomemos los S-polinomios, eliminar reducciones innecesarias, realizar los cálculos en un cuerpo finito, etcétera.

Un buen sitio para observar los inicios de la teoría de Buchberger y comprobar

cómo pueden usarse para resolver los primeros problemas es [Buc76], y entre las referencias para bases de Gröbner más actuales se recomiendan [BW98] y [CLO05].

A finales de los años setenta y durante los ochenta y noventa se extendieron estos resultados al área no conmutativa, de manos de Bergman ([Ber78]), T. Mora ([Mor88]), [Mor94], F. Mora ([Mor86]) y E. Green ([Gre93]), entre otros.

Pero en la versión no conmutativa las cosas no funcionan de manera tan eficiente. El primer problema que tenemos que afrontar es la ausencia de un resultado análogo al Lema de Dickson. En el anillo de polinomios no conmutativo  $k\langle X \rangle$  existen ideales que no están finitamente generados (4.17). Este hecho nos impide asegurar finitud en los cálculos que debemos seguir para construir las bases de Gröbner-Shirshov.

Pero sí tenemos situaciones donde las cosas funcionan como se esperan. Por ejemplo, para álgebras noetherianas la base de Gröbner-Shirshov de cualquier ideal es finita, ya que si no obviamente violaría la condición de cadena ascendente. También los ideales que verifican la propiedad D ([Nor01]), que es una aproximación al Lema de Dickson en álgebra no conmutativa, tendrán una base de Gröbner-Shirshov finita.

La Proposición 4.31 se adecua mucho a nuestros intereses. De hecho, explicaremos en el Capítulo 5 que los ideales con los que vamos a trabajar verifican esta condición, por lo que siempre podremos calcular la base de Gröbner-Shirshov hasta el grado que queremos.

La teoría de bases de Gröbner-Shirshov bebe de resultados como el *Lema del Diamante*. La idea se podría reducir de la siguiente manera. Si partimos de un elemento (vértice) y seguimos dos caminos de reducción distintos (aristas) llegaremos a dos puntos intermedios diferentes (otros dos vértices). Si continuamos siguiendo otras reducciones y al final llegamos al mismo punto (otras dos aristas y vértice final común), entonces tenemos una igualdad entre el primer elemento y el último y uno podrá reescribirse por el otro. Un conjunto donde todos los puntos verifiquen esa propiedad es lo que nosotros andamos buscando.

Para profundizar en las relaciones entre Lema del Diamante y teoría de bases de Gröbner-Shirshov recomendamos [Ge06].

Precisamente cuando hablamos de solapamientos y S-polinomios (4.5), lo que estamos buscando es encontrar esos caminos y forzar a que reduzcan al mismo elemento, aunque sea a cambio de construir nuevos caminos hasta formar el diamante, que no es otra cosa que añadir relaciones. Ésta es la idea que se esconde tras el algoritmo de Buchberger.

En la sección 4.9 mostramos algunas, no todas, de las caracterizaciones más importantes de las bases de Gröbner-Shirshov. Sin duda, la más importante para nosotros es la condición f), que nos dice que a través de la base de Gröbner-Shirshov de un ideal que genera un álgebra cociente podemos obtener una  $k$ -base

del álgebra, como espacio vectorial. El resultado se basa en que si un elemento forma parte del ideal de relaciones, entonces su forma reducida módulo el ideal es cero.

Las aplicaciones de las bases de Gröbner-Shirshov se cuentan por cientos. Por citar algunos ejemplos, en teoría de códigos ([AK06]), en criptografía ([BCE<sup>+</sup>94], un artículo muy didáctico), para describir las relaciones del álgebra graduada asociada a un álgebra ([HYJ99]), para calcular las dimensiones global de las álgebras graduadas y de Rees asociadas a  $\mathcal{A}$  ([Hui09]), ... También pueden usarse las bases de Gröbner-Shirshov no conmutativas para calcular bases de Gröbner conmutativas ([EPS98]).

## Capítulo 5

En el Capítulo 5 trataremos de describir cuál es la situación en la que nos encontramos y qué conceptos son los que vamos a necesitar para llevar a cabo nuestra investigación en el resto de capítulos.

El primer concepto importante es el de álgebra graduada (más información en [NVO04]). En nuestro caso la graduación viene heredada del grado de los polinomios, y la estructura se lleva muy bien con todos los procesos que se refieren a bases de Gröbner-Shirshov ([Hui03], un libro muy completo).

Como ya hemos dicho, la estructura de álgebra graduada aparece de una manera bastante natural en nuestro problema. También hemos dicho en el Capítulo 4 que en el caso no conmutativo afrontamos el problema de no finitud en los cálculos de la base de Gröbner-Shirshov, en general, pero que había casos donde la base sí era computable. Esta es la razón por la que trabajaremos con álgebras homogéneas (5.1). Álgebras homogéneas son aquellas álgebras cocientes donde el ideal de relaciones está generado por relaciones homogéneas. Eso significa que la base de Gröbner-Shirshov de cualquiera de estos ideales también será homogénea, de manera que las reducciones son a elementos del mismo grado o a cero.

Explicamos a continuación que en el caso que nuestros ideales no sean homogéneos tenemos un proceso para *homogeneizarlos* y poder trabajar en situaciones más favorables, aunque con el gasto de computación y complejidad que esto supone.

Aunque esta situación no nos asegura encontrar finitud en los cálculos, sí nos asegura que podemos realizar el estudio de las reducciones de manera gradual. De esta manera, también podremos realizar el estudio de las dimensiones grado a grado.

El siguiente concepto que nos interesa es el de *crecimiento* (5.2). En cuanto a una primera visión más general, un álgebra tiene dimensión finita o infinita. Pero dentro de las álgebras de dimensión infinita tenemos que diferenciar varios tipos.

Y es que no es lo mismo que haya una infinitud *controlada*, hay una familia infinita parametrizada por  $xy^i x$ , que una infinitud de familias infinitas.

Muchos de los algoritmos para estudiar si un álgebra tiene o no dimensión finita se basan en la búsqueda de palabras infinitas. Si somos capaces de encontrar las reglas que definen el lenguaje de  $\mathcal{A}$  (las normas que nos dicen qué palabra es normal y qué palabra no lo es) y a partir de ellas podemos construir una palabra infinita, es claro que el álgebra  $\mathcal{A}$  será infinito dimensional (en [Kro03] se definen varios de estos algoritmos, siempre basados en esta construcción de palabras infinitas).

Para estudiar la naturaleza sobre el crecimiento de un álgebra hay muchos caminos y formas. Entre ellos el concepto de dimensión de *Gelfand-Kirillov* (ver, por ejemplo [KL00]), basado en el comportamiento asintótico de los subespacios generadores del álgebra. Pero existen también otros métodos menos cercanos al análisis. Por ejemplo, estudiar el crecimiento de grafos asociados a un álgebra.

La teoría de grafos de Ufnarovskii ([Ufn80], [Ufn82] y [Ufn89]) se desarrolla a principios de los años ochenta. A partir de un ideal de relaciones se puede construir un grafo que contiene mucha información del álgebra al que está asociado. En este proceso es importante conocer hasta donde llegan las relaciones, conocer las últimas de ellas. Además, este grafo está en correspondencia biyectiva con las palabras normales de longitud  $\geq d$ , donde  $d$  es el grado máximo de los elementos de la base de Gröbner-Shirshov.

Pero no solo tenemos los grafos de Ufnarovskii para obtener información. Hay muchos otros grafos que podemos construir para obtener información ([KS95]). Se pueden construir grafos de cadenas (a partir de los cuales también puede obtenerse la serie de Hilbert y la resolución de Anick) y grafos de palabras normales a partir de los cuales podemos obtener un fórmula para todas las palabras normales del álgebra que estemos estudiando. Para ello incluso se desarrollan operaciones sobre este tipo de grafos como eliminar flechas, pegar dos vértices, eliminar ciclos, etc.

Pero para poder extraer la mayor información posible necesitamos que la base de Gröbner-Shirshov sea finita. Por ejemplo, cuando estamos trabajando con álgebras *estándar finitamente presentadas*. Un ejemplo de ello son las álgebras monomiales, donde una base de Gröbner-Shirshov está formada por el propio ideal monomial.

Hay una estrecha relación entre álgebras con base de Gröbner-Shirshov finita y álgebras monomiales. Para cualquier álgebra cociente  $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / J$  con  $\mathcal{G}$  base de Gröbner-Shirshov finita podemos construir  $\bar{\mathcal{A}} = k\langle X \rangle / \langle \text{Im}(\mathcal{G}) \rangle$ . Ésta es el álgebra *monomial* de  $\mathcal{A}$  que comparte muchas cosas con ella, en particular tienen la misma base y crecimiento (ver [Okn88]).

El último concepto que necesitamos es el de serie de Hilbert (5.3). En nuestro caso nos va a aportar toda la información que necesitamos para saber si una de nuestras álgebras cocientes es finita o no. E incluso en algunos casos particulares podremos obtener la dimensión de Gelfand-Kirillov a través de ella (Teorema 5.24).



También puede darse la situación de conocer de antemano la serie de Hilbert del álgebra, ya que hay muchos métodos de obtenerla y más para álgebras homogéneas. Esto nos ayudaría a la hora construir la base de Gröbner-Shirshov, ya que conoceríamos cuántos elementos hay en cada grado y así podríamos ahorrarnos cálculos innecesarios. Además, como nosotros vamos a trabajar con álgebras graduadas la serie de Hilbert es un invariante algebraico, y utilizaremos esta propiedad en el Capítulo 7.

## Capítulo 6

En este capítulo vamos a estudiar el problema de cuándo dos álgebras finitamente presentadas son isomorfas. En la segunda parte del capítulo desarrollaremos nuestro método graduado que presenta muchas ventajas cuando trabajamos sobre álgebras homogéneas.

En 6.1 presentamos un método general que es bastante interesante por el hecho de usar técnicas conmutativas para resolverlo. Lo que se intenta es construir una aplicación lineal entre las dos álgebras que tenga inversa y que esté bien definida, que las bases de Gröbner-Shirshov de ambos ideales se comporten bien entre ellas.

Existen otras muchas formas de estudiar el problema de isomorfía entre dos álgebras finitamente presentadas, casi todas consistentes en encontrar invariantes que deben verificarse en ambas álgebras. Por ejemplo, para álgebras monomiales podemos construir una serie de grafos ([Shi90]) que se parecen mucho a lo que ya hemos visto en 5.2. Sobre los vértices de estos grafos podemos estudiar ciertas propiedades del tipo de cuántos caminos llegan hasta ellos o cuántos tienen por encima. Para que dos álgebras sean isomorfas necesitaremos que el número de vértices que cumplen tales propiedades sean los mismos en las dos álgebras (o lo que es lo mismo, buscar *isomorfismos* entre los grafos).

Estos procesos funcionan muy bien cuando trabajamos con álgebras de dimensiones *pequeñas*. Pero cuando coexisten 40, 50 ó 60 variables los problemas computacionales son enormes. De alguna manera teníamos que desarrollar otras técnicas para que la resolución del problema de isomorfía fuera más eficiente.

La solución vino a través de la naturaleza graduada y homogénea de nuestras álgebras. Como están generadas por los subespacios de dimensión 1 como  $k$ -álgebras, nos preguntamos si eso nos permitiría construir un isomorfismo y luego extenderlo a los grados superiores. Y la respuesta es sí (resultado principal de 6.2).

La idea es construir el isomorfismo grado a grado. En cada nuevo grado vamos comprobando si las condiciones que hemos encontrado siguen siendo compatibles con las de los grados inferiores. En cada grado hay que verificar que las imágenes de palabras normales sean compatibles con las imágenes de las relaciones de la base de Gröbner-Shirshov. Mientras estas condiciones sean compatibles, el isomorfismo

existirá. Así, si en algún grado las estructuras no son compatibles obtendremos un *no* por respuesta y podremos concluir afirmando que las dos álgebras no son isomorfas.

Es interesante observar que este isomorfismo graduado en grado 1 se puede obtener a partir de uno más general, obtenido sobre todo el álgebra, cortando la *cola* (Teorema 6.6). Por la estructura del problema, basta con verificar las condiciones sobre con el subespacio generador.

Recíprocamente, si tenemos un isomorfismo graduado entre dos álgebras podemos *extenderlo* a un isomorfismo general, siempre manteniendo el mismo bloque sobre los elementos de grado 1.

También desarrollamos algunas técnicas para acelerar este proceso. La primera de ellas (Lema 6.8) tiene que ver (otra vez) con la forma en que está presentado el problema. Como la estructura está graduada y muy bien ordenada, la forma de construir las matrices de coeficientes en cada grado sigue una estructura fija, casi *fractalizada*, esto es, repitiendo la misma forma una y otra vez. Y aunque las matrices constituyen el ejemplo más simple de álgebra no conmutativa, como aquí trabajamos con bloques independientes el producto de estas matrices sí va a conmutar. En el trabajo [Sil00] se nos explica como podemos calcular los determinantes de estas matrices y, como era de esperar, consisten en potencias del determinante asociado a los elementos de grado 1. Mientras todos los monomios de cierto grado sean normales, podremos seguir calculando los determinantes de esta manera más sencilla. Cuando empiece a haber reducciones la estructura ordenada para construir la matriz se pierde y ya no podremos seguir deduciendo el determinante a partir del caso base.

La otra observación se refiere a cuando ya no tengamos más reglas de reducción (esto es, elementos de la base de Gröbner-Shirshov. Lema 6.9). Esto también tiene bastante sentido. El isomorfismo se va construyendo grado a grado. En cada momento comprobamos que se verifiquen dos cosas. Por un lado que las palabras normales de las dos álgebras estén en correspondencia y por otro que las reglas que imponen los elementos de la base de Gröbner-Shirshov se respeten. Si llegamos a cierto grado donde ya no hay más elementos de la base de Gröbner-Shirshov y hemos comprobado que son compatibles con nuestra estructura, como las palabras normales de grados superiores siguen respetando las reglas de reducción es esperable que sigan siendo compatibles con las condiciones que ya hemos encontrado.

Así que podemos construir los isomorfismos grado a grado y además haciendo solo las operaciones imprescindibles para verificar las condiciones. Como todas las álgebras con las que vamos a trabajar son graduadas este sistema se muestra mucho más adecuado que los vistos en [Shi90] y [Shi93].

Aunque nosotros solo trabajamos en este trabajo con ideales homogéneos donde las relaciones tienen todas el mismo grado, todo este proceso funciona, como no puede ser de otra manera, también para ideales homogéneos de cualesquiera longi-

tudes. Al final del capítulo tenemos un ejemplo de dos álgebras que vamos a forzar a ser isomorfas y veremos cómo este método graduado nos da los coeficientes de la aplicación inversa. También exponemos el isomorfismo general para comprobar cómo efectivamente podemos obtener el isomorfismo graduado cortando la cola.

## Capítulo 7

En este Capítulo vamos a explicar los resultados que hemos obtenido como resultado del estudio de nuestras familias de ideales homogéneos. Cada uno de estos estudios consta de dos partes. Primero el estudio para conocer las características de cada familia. Cuando decimos características nos referimos a cuántos ideales hay en cada familia, cuántos de ellos son cofinitos y qué dimensiones tienen las álgebras cocientes asociadas. Para ello es para lo que necesitamos el programa Bergman y las órdenes que hemos desarrollado en el Apéndice B. La segunda parte del estudio consiste en aplicar el criterio de isomorfía que hemos desarrollado en el Capítulo 6, para obtener el número de álgebras con dimensión finita máxima en cada familia.

En un primer momento quisimos explorar la familia  $(2,2, \_)$ , esto es, ideales de polinomios no conmutativos en dos variables  $x$  e  $y$  generados por monomios o binomios de longitud 2. En total, tomando las relaciones desde 1 a 1 hasta tomarlas de 10 en 10 son 1024 casos, que por falta de capacidad trabajamos a mano, obteniendo los siguientes resultados

- ) 3 casos de álgebras con crecimiento exponencial
- ) 8 casos de álgebras con crecimiento polinomial mayor que 1
- ) 163 casos de álgebras con crecimiento polinomial igual a 1
- ) 4 casos de álgebras con dimensión 6
- ) 2 casos de álgebras con dimensión 5
- ) 115 casos de álgebras con dimensión 4
- ) 729 casos de álgebras con dimensión 3

Pudimos entonces comprobar que la mayor dimensión que se alcanza en este tipo de álgebras es 6. Esto nos dio ánimos para continuar trabajando por este camino. Pero una cosa es escribir 1024 archivos con 4 líneas de código y otra cosa es escribir 5000000 de archivos. Así que hubo que buscar una manera de mecanizar todo este proceso, por lo que desarrollamos los programas que mostramos en el Apéndice B.

Tras el tiempo que necesite cada familia en ser computada vamos a saber el número de ideales que la componen, el número de ideales cofinitos que hay en ellas y cuál es la dimensión finita máxima. También tenemos las listas de los ideales que generan cada álgebra y qué dimensión lleva asociada.

Durante este proceso de clasificación de álgebras finito-maximales en cada familia surgieron un par de cuestiones que es posible que sea interesante abordar. Una de ellas es el problema de relaciones redundantes. Los ideales con los que trabajamos son finitamente presentados, y en el algoritmo que construye todas las relaciones se pueden *repetir* relaciones. No es que se repitan, porque el algoritmo no permite eso, pero sí puede pasar que haya una relación que sea la diferencia de otras dos relaciones, o lo que es lo mismo, que sea redundante. Así que ese ideal, en buena lid, no pertenece a la familia que dice pertenecer. Nuestro estudio se centra en ideales que pertenezcan a esa familia y no a otra menor.

Otro problema es el que hemos llamado *de heredad*. Se trata de estudiar los ideales maximales de cada familia y comprobar si a partir de ellos podemos obtener los ideales cofinitos maximales de una familia más pequeña. Esto es, si a los ideales que generan álgebras maximales en una familia les quitamos una relación, ¿dan lugar a ideales que generan álgebras maximales en la familia anterior? Como era de esperar la respuesta es no (7.11).

Otra duda es la siguiente. Se trata de preguntarnos si dos álgebras de distintas familias pueden ser isomorfas (todo esto entendido por ideales que no tengan redundancia, esto es, que realmente pertenezcan a la familia a la que dicen pertenecer). La primera condición, que tengan la misma dimensión se verifica para muchos casos, ya que hay multitud de dimensiones finitas en cada familia. La condición determinante es la serie de Hilbert, que tiene que ser la misma para que las álgebras sean isomorfas. Pero es fácil comprobar que bajo las condiciones que definen los tres parámetros ( $a, b, c$ ), si cambias alguno de ellos las series de Hilbert no pueden coincidir (7.11).

Dentro de las familias podemos destacar varios aspectos. En  $(2,2,2)$ , por ejemplo, de los 4 ideales cofinitos que dan lugar a álgebras de dimensión maximal 2 son opuestos para el producto y los otros 2 son los que cambian  $x$  por  $y$ . De hecho solo hay uno, y los otros tres se construyen con los cambios que hemos dicho (esto pasa mucho, en todas las familias siempre se pueden obtener estas agrupaciones de cuatro en cuatro). Lo que ocurre es que sabemos que los ideales que permuten  $x$  e  $y$  dan lugar a álgebras isomorfas, y se supone que los que son opuestos para el producto no deberían serlo, porque eso *tuerce* demasiado la estructura. Pues en este caso no es así (en los siguientes sí). Como hay tan pocas combinaciones no hay posibilidad que la estructura se deforme demasiado y sí son las 4 isomorfas.

A partir de las siguientes familias ya podemos hacer esas separaciones de producto opuesto. En la familia  $(2,3,4)$  empiezan a aparecer problemas de redundancia. Hay muchos de los ideales cofinitos maximales que realmente están en otras familias. De hecho los cuatro ideales maximales de esta familia tienen relaciones redundantes. Así que estudiamos la siguiente subfamilia maximal, donde hay muchos más casos. Por primera vez aparecen dos series de Hilbert diferentes, pero es porque las álgebras que tienen series de Hilbert diferentes vuelven a contener una relación redundante. En la familia  $(2,3,5)$  el problema se agrava y todos los

ideales cofinitos maximales contienen relaciones redundantes. Así que continuamos nuestro estudio tomando las relaciones que generan el ideal un grado más grande.

En estas familias aparecen nuevos problemas. Por ejemplo, en la familia  $(2,4,3)$  no hay ningún ideal cofinito. ¿Por qué? La respuesta es que no hay forma de poner límites a las palabras infinitas, porque solo tres relaciones generando cada ideal parecen pocas para la gran cantidad de combinaciones que pueden existir. Esto no quiere decir que por tener pocas relaciones es sencillo calcular la base de Gröbner-Shirshov de estos ideales. Ni mucho menos. De hecho en esta familia es dónde hemos encontrado las mayores dificultades de cálculo. Incluyendo el caso del ideal  $(7,22)$ , del cual el ordenador no ha sido capaz de calcular su serie de Hilbert hasta grado 30. Las razones por la cual se demora este cálculo aún no están claras, pero todo apunta a una generación muy masiva de  $S$ -polinomios que colapsan el sistema.

La siguiente familia  $(2,4,4)$  es la más grande que hemos estudiado. Contiene casi 13 millones de ideales, muchos de ellos con problemas para el cálculo. Tras muchos meses de cálculos solo hemos estudiado la mitad y hay muchísimas álgebras finitas. Por ahora, la dimensión finita máxima es 324, que es muchísima comparado con la de los ideales de las otras familias que hemos estudiado. No sabemos si en un futuro encontraremos otras álgebras más grandes.

El siguiente paso es estudiar familias con tres variables. Esto supone un gran salto, porque ahora los cálculos empiezan a crecer desde un primer paso. La primera que estudiamos es  $(3,2,3)$ , que tampoco presenta ningún caso finito. Podría ser la misma causa que en  $(2,4,3)$ , pocas relaciones para tratar de reducir todas las palabras normales. La rejilla que podemos *tejer* con los elementos de la base de Gröbner-Shirshov no nos permite atrapar todas las palabras infinitas, pero en esta familia ahora no tenemos ningún caso que sea complicado de calcular, y mucho menos unos que esté días y días sin avance.

En la familia  $(3,2,4)$  las cosas vuelven al cauce general, con cantidad de álgebras finitas e ideales cofinitos, pero otra vez empiezan los problemas de redundancia.

Nuestro objetivo ambicioso es la familia  $(3,3,3)$ , pero ha resultado ser de cálculo muy complicado, incluso en los primeros cien casos. Así que tendremos que esperar a contar con herramientas más potentes (supercomputador, ordenadores cuánticos) o mejorar el propio algoritmo para calcular la serie de Hilbert.

## Apéndice B

En este apéndice describimos los programas y funciones que se encargan de realizar los cálculos correspondientes al Capítulo 7 en cada familia y que nos devuelve el número de ideales cofinitos y las dimensiones de cada álgebra.

Se trata de un programa escrito en C++ que va construyendo todos los ideales de cada familia. Luego inicia un bucle que envía estos ideales al programa `Bergman` para que los analice y devuelva un archivo con la serie de Hilbert asociada a ese álgebra cociente. A partir de la información que hay en ese archivo obtendremos si el álgebra es finita o infinita y en caso que sea finita guardaremos la dimensión en otro archivo.

El mayor problema fue encontrar la forma de enviar los datos a `Bergman` para que calculara la serie de Hilbert del álgebra asociada a cada ideal y devolviera un archivo de texto con la información correspondiente. `Bergman` corre en consola y no podemos abrir una consola e ir introduciendo órdenes en ella. Sin embargo `Bergman` sí se puede lanzar con la orden de leer un archivo. Así que lo que hicimos fue lanzar una orden que fuera “ejecuta `Bergman` con este archivo de órdenes y guarda lo que hagas en este otro archivo”. Luego nos basta con abrir ese archivo y recorrerlo para obtener la dimensión del álgebra asociada.

Hemos tenido que realizar el programa en C++ porque resultó imposible programar en Lisp, que es el lenguaje en el que está escrito `Bergman`. Nos hubiera gustado realizar todo el trabajo en Lisp para que fuera más *limpio* el proceso, pero la forma de trabajar por sentencias nos resultó demasiado complicada y no merecía la pena el gasto de tiempo en aprender un nuevo lenguaje.

A lo largo del apéndice está desglosado el programa y explicamos qué es lo que realiza cada uno de los módulos.

Por ahora las únicas limitaciones son las propias de la capacidad de cálculo del ordenador.

## Apéndice C

En este último apéndice adjuntamos unas tablas con un resumen del estudio de cada una de las familias. Cada tabla incluye el número de casos estudiados, el número de ideales cofinitos encontrados, una lista de las dimensiones finitas que se alcanzan en cada álgebra, una lista de los casos con mayor dificultad para el cálculo desde el punto de vista computacional y el tiempo que ha tardado el ordenador en estudiar cada familia.





---

## Notación

Usaremos la letra  $k$  para denotar un cuerpo.

Los ideales se van a notar por las letras capitales  $\mathcal{J}$  ó  $\mathcal{I}$  si solo trabajamos con dos, o por  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 \dots$  para referirnos a una lista finita de ideales. De la misma manera, las álgebras se notarán por las letras  $\mathcal{A}$  ó  $\mathcal{B}$ .

Cuando queramos expresar el álgebra cociente  $k\langle X \rangle / \mathcal{J}_i$  asociada al ideal  $\mathcal{J}_i$ , usaremos la notación  $\mathcal{A}_i$ .

En los Capítulos 6 y 7, con el objetivo de facilitar la claridad de los cálculos, identificaremos los elementos del álgebra cociente con su clase de equivalencia. Esto es,  $\overline{xyx} = xyx + \mathcal{J} \equiv xyx$ .

Los conjuntos se notarán por la letra  $\mathcal{G}$  y si son bases de Gröbner-Shirshov se notarán por  $\mathcal{G}$ . Cuando nos referimos a la base de Gröbner-Shirshov de un ideal  $\mathcal{J}_i$ , la notaremos como  $\mathcal{G}_i$ .





# 4

## Desarrollo de bases de Gröbner-Shirshov

*La realidad que somos capaces de percibir no es más que la sombra conmutativa de una realidad no conmutativa superior.*

Javier López  
El Mito de la Caverna, revisitado

En este primer capítulo vamos a recordar las definiciones y procedimientos básicos de la teoría de bases de Gröbner-Shirshov. Empezaremos desde un nivel muy elemental, aunque a lo largo del camino daremos por supuestas muchas definiciones y conceptos que de otra manera extenderían demasiado el contenido de este capítulo.

Para tratar de cubrir la situación más general, estudiaremos el caso de cocientes de álgebras libres. Este proceso nos permite hacer una partición del álgebra en clases de equivalencia que son compatibles con las operaciones del álgebra.

Un problema clásico que afrontamos a la hora de trabajar con clases de equivalencia es el de decidir qué elemento actúa como mejor representante de esa clase. Precisamente el uso de bases de Gröbner-Shirshov nos permite una respuesta elegante y formal, tomando de alguna manera el elemento común más pequeño en cada clase.

En todo este proceso el orden juega un papel muy importante. Determina cuándo los cálculos acaban, estructura las rutas que podemos seguir, antepone unos elementos a otros, puede llevar cálculos hasta el infinito o puede iniciar una especie de embudo donde irremediamente terminan.

Sea  $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \mathcal{J}$  un álgebra cociente donde queremos que las relaciones del ideal  $\mathcal{J}$  actúen como reglas de reducción para elementos  $f \in k\langle X \rangle$ . Esto significa que si los elementos  $\omega \in \mathcal{J}$  están escritos de la forma  $h_\omega - f_\omega$ , donde  $h_\omega$  es un monomio y  $f_\omega$  es un combinación lineal de monomios, y algún  $h_\omega$  aparece como

subpalabra en  $f$ , podemos sustituirlo por  $f_\omega$ .

Uno de los primeros resultados que aparecieron tratando de construir el anterior proceso de una manera formal fue el *Lema del Diamante* de Newman ([New42]). A grosso modo, lo que explica es que si existen dos caminos (formas) de reducción, pero ambos llegan a la misma forma final, entonces el proceso termina en una única forma canónica.

Así que la pregunta era, ¿se puede construir, partiendo de un ideal de relaciones  $\mathcal{J}$ , un conjunto de relaciones que generen  $\mathcal{J}$  de manera que cualquier elemento  $f \in k\langle X \rangle$  reduzca a una única forma canónica?

En los años sesenta A. Shirshov ([Shi62]) y B. Buchberger ([Buc65]) llegaron, de manera independiente, a una primera idea de *composición*, que se vio reflejada en el *Lema de composición de Shirshov* y en el *Teorema de Buchberger* respectivamente. Lo que quería expresar es que si  $S$  es un conjunto cerrado para composiciones y  $f \in \langle S \rangle$ , entonces el monomio líder  $\bar{f}$  de  $f$  puede reescribirse de manera única como  $usv$ , con  $s \in S$ .

Para construir estos conjuntos se toman todas las posibles reducciones distintas de un elemento (ambigüedades) y se añaden nuevas relaciones de manera que esas reducciones coincidan (resolver ambigüedades). El conjunto que se construye siguiendo este proceso es lo que llamaremos una *base de Gröbner-Shirshov* del ideal  $\mathcal{J}$ .

Más adelante, Bergman ([Ber78]), T. Mora ([Mor88]), [Mor94], F. Mora ([Mor86]) y E. Green ([Gre93]) adaptaron los resultados anteriores a ideales en álgebras libres no conmutativas, extendiendo la teoría a una inmensa variedad de campos matemáticos.

De esta manera siempre podremos encontrar la *forma normal* de un elemento  $f \in \mathcal{A}$  a través de la base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}$ , en un proceso que explicaremos en la Sección 4.3.

No es fácil desarrollar en unas pocas pocas páginas toda una teoría de bases de Gröbner-Shirshov. Sobre todo por la ingente cantidad de información que hay al respecto. Una cosa parece clara: las bases de Gröbner-Shirshov son importantes. Y desde el punto de vista computacional sigue siendo una de las herramientas más importantes que tenemos, usadas en Teoría de Códigos, (poner más aplicaciones), y con absoluta seguridad se seguirán usando en el futuro porque continuamente aparecen nuevas ramas que pueden seguir desarrollándose. El algoritmo que computa las bases de Gröbner-Shirshov de un ideal forma parte del núcleo de la mayoría de los programas de cálculo simbólico y millones de copias están instaladas en estos sistemas a lo largo y ancho del planeta.

A continuación daremos una visión general del problema, sus definiciones principales y sus resultados más importantes, así como algunas aplicaciones al final del capítulo. Como ya hemos dicho anteriormente, empezaremos desde el nivel más básico posible.

## Conjuntos, monomios y álgebras libres

Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de variables, y sea  $\langle X \rangle$  conjunto de todas las posibles combinaciones de elementos de  $X$  en cualquier orden,

$$\langle X \rangle = \{x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l} \mid \alpha_j \in \mathbb{N}, x_{i_j} \in X\}$$

Este conjunto  $\langle X \rangle$  tiene estructura de monoide con el producto definido por concatenación. Este monoide se conoce como *monoide libre* generado por el conjunto  $X$ . Los elementos de este conjunto se llaman *monomios*.

Definimos el *grado* de un monomio como el número de elementos que lo componen, esto es, si  $\mathfrak{m} = x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l}$  su grado se define como

$$\deg(\mathfrak{m}) = \sum_{j=1}^l \alpha_j$$


Dados dos monomios  $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$  decimos que  $\mathfrak{m}_2$  es *múltiplo* de  $\mathfrak{m}_1$  si existen  $l, r \in \langle X \rangle$  tal que  $\mathfrak{m}_2 = l\mathfrak{m}_1r$ . También decimos que  $\mathfrak{m}_1$  divide a  $\mathfrak{m}_2$ , denotado por  $\mathfrak{m}_1 \mid \mathfrak{m}_2$ .

Según la situación también llamaremos al conjunto  $\langle X \rangle$  *lenguaje* y a los monomios o elementos de este conjunto *palabras*, si bien esta visión está más cercana a la Teoría de Lenguajes Formales y Autómatas ([HMU79]).

Sea  $k$  un cuerpo. Notamos por  $k\langle X \rangle$  el álgebra libre asociativa generada por el conjunto  $X$ , también llamada *anillo de polinomios no conmutativo*, que consiste en todas las posibles combinaciones lineales de monomios de  $\langle X \rangle$  con coeficientes en  $k$ .

## Órdenes y aritmética polinomial

Necesitamos ejercer algún control sobre los elementos del semigrupo  $\langle X \rangle$ , sobre todo a la hora de hacer comparaciones y elaborar algoritmos que involucren listas de estos elementos. Para ello necesitamos ser capaces de ordenar los monomios de alguna forma que, además, se lleve correctamente con el producto que hemos definido por concatenación. En esta sección estableceremos los conceptos básicos que seguiremos en el resto de capítulos de este trabajo.

(Es importante resaltar que el orden tiene un papel capital a la hora de desarrollar toda la teoría de bases de Gröbner-Shirshov). 

**Definición 4.1.** *Un orden sobre un conjunto  $X$  es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un orden  $\leq$  sobre un conjunto  $X$  es un orden total si dados  $x, y \in X$ , entonces  $x < y, y < x$  ó  $x = y$ .*

**Definición 4.2.** Sea  $\langle X \rangle$  un monoide finitamente generado. Un orden total  $\preceq$  sobre  $\langle X \rangle$  se dice buen orden si para cada subconjunto no vacío de  $\langle X \rangle$  existe un mínimo con respecto a  $\preceq$ .

Decimos que un orden  $\leq$  es un *orden monomial* sobre  $\langle X \rangle$  si satisface las siguientes condiciones

- 1)  $\leq$  es un buen orden para  $\langle X \rangle$
- 2)  $1 \leq m, \quad \forall m \in \langle X \rangle$
- 3)  $m_1 \leq m_2 \Rightarrow lm_1r \leq lm_2r, \quad \forall l, r, m_1, m_2 \in \langle X \rangle$

Existen muchos tipos de órdenes. Entre ellos están

- ) Orden *lexicográfico*, Lex. Sea  $\langle X \rangle$  conjunto con  $x_1 > \dots > x_n$ . Dados dos monomios  $m_1, m_2 \in \langle X \rangle$ , denotamos por  $m$  la mayor subpalabra a la izquierda común a ambos tal que  $m_1 = m\omega_1, m_2 = m\omega_2$  o fijamos  $m = 1$  si tal subpalabra no existe. Entonces  $m_1 <_{\text{lex}} m_2 \iff \omega_1 < \omega_2 \iff$  el primer símbolo  $x_i$  de  $\omega_1$  es menor que el primer símbolo  $x_j$  de  $\omega_2$ .

Este orden *no* es monomial ya que no verifica la condición 3).

**Ejemplo 4.3.** Bajo las condiciones del párrafo anterior, sea  $1 < x_2$ . La contradicción viene si, por ejemplo, multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por  $x_1$  por la derecha. Entonces  $1 \cdot x_1 > x_2 \cdot x_1$ .

- ) Orden *de grado total lexicográfico*, DegLex. Sea  $\langle X \rangle$  un conjunto con  $x_1 > \dots > x_n$ . Dados dos monomios  $m_1 = x_{i_1}^{\alpha_1} \dots x_{i_r}^{\alpha_r}, m_2 = x_{j_1}^{\beta_1} \dots x_{j_s}^{\beta_s} \in \langle X \rangle$  decimos que  $m_1 <_{\text{dlex}} m_2$  si  $\deg(m_1) < \deg(m_2)$  ó  $\deg(m_1) = \deg(m_2)$  y  $m_1 <_{\text{lex}} m_2$ .

Este orden *sí* es monomial y será el que usemos de manera implícita en el resto de cálculos de este trabajo.

- ) Orden *de grado total lexicográfico inverso*, DegRevLex. Sea  $\langle X \rangle$  conjunto con  $x_1 > \dots > x_n$ . Dados dos monomios  $m_1, m_2 \in \langle X \rangle$ , decimos que  $m_1 <_{\text{drlex}} m_2$  si  $\deg(m_1) < \deg(m_2)$  ó  $\deg(m_1) = \deg(m_2)$  y  $m_1 >_{\text{lex}} m_2$  pero tomando la subpalabra a derecha en vez de a izquierda.

Este orden también es monomial (y presenta ciertas ventajas de computación en algunos casos frente al orden de grado total lexicográfico. Ver, por ejemplo, [BS87]).

Ahora que tenemos órdenes podemos establecer jerarquías entre los componentes de cada polinomio  $f \in k\langle X \rangle$ , lo que permite realizar la siguiente definición.

**Definición 4.4.** Sea  $f \in k\langle X \rangle \setminus \{0\}$ . Si  $\leq$  es un orden monomial  $f$  puede escribirse de manera única como

$$f = \sum_{i=1}^t c_i m_i, \text{ con } m_1 > m_2 > \dots > m_t, \quad m_i \in \langle X \rangle \quad (4.1)$$

Esta expresión se denota expresión estándar de  $f$ . A partir de una expresión estándar (4.1) de un polinomio definimos

término líder a  $c_1 m_1$ , y lo notamos  $lt(f)$   
 coeficiente líder a  $c_1$ , que se denota  $lc(f)$   
 monomio líder a  $m_1$ , denotado por  $lm(f)$

Por último, podemos asociar a cada polinomio  $f \in k\langle X \rangle$  un elemento de  $\mathbb{N}$  que nos permita establecer un orden entre ellos. Definimos el *grado* de un polinomio  $0 \neq f \in k\langle X \rangle$  como el máximo grado de los monomios que lo componen

$$\deg(f) = \max\{\deg(m_i) \mid m_i \text{ pertenece a la expresión estándar de } f\}$$

## Sección 4.3

## Generalización de la reducción polinomial

El siguiente paso que debemos explorar es la reescritura de un polinomio como combinación lineal de elementos de un conjunto  $G \subseteq k\langle X \rangle$ . Al igual que en el caso conmutativo podemos desarrollar una teoría de reducciones que nos llevará, irremediablemente, a la obtención de representantes de manera única para cada clase cuando estudiemos nuestro problema en cocientes de álgebras.

Sea  $\leq$  un orden monomial en  $\langle X \rangle$ .

**Definición 4.5.** *Dados  $f, g \in k\langle X \rangle$ , si  $lm(g)$  divide a algún término distinto de cero  $c_i m_i$  en  $f$ , entonces existen  $l, r \in \langle X \rangle$  tales que  $c_i m_i = c_i \cdot l \cdot lm(g) \cdot r$ . Definimos*

$$h = f - \frac{c_i}{lc(g)} lgr$$

de manera que el término  $c_i m_i$  en  $f$  es sustituido por una combinación lineal de monomios  $< m_i$ . Llamaremos a esta manipulación *reducción polinomial de  $f$  mediante  $g$* , denotada por  $f \xrightarrow{g} h$ , y decimos que  $f$  reduce a  $h$  módulo  $g$ .

Obviamente podemos extender esta definición a más de un elemento realizando un proceso iterativo.

**Definición 4.6.** *Si existe una sucesión de reducciones polinomiales*

$$f \xrightarrow{g_1} h_1 \xrightarrow{g_2} h_2 \xrightarrow{g_3} \dots \xrightarrow{g_t} h_t$$

donde  $g_i \in G \subseteq k\langle X \rangle$ , con  $g_i$  no necesariamente distintos, decimos que  $f$  reduce a  $h_t$  módulo  $G$ , y lo notamos  $f \xrightarrow{G} h_t$ .

Este proceso debería tener un final o debería existir alguna manera de indicar que el proceso de reducción no puede continuar. Para ello usamos la siguiente Definición.

**Definición 4.7.** Un polinomio  $d$  se dice reducido o en forma reducida con respecto a un conjunto  $G \subseteq k\langle X \rangle$  si  $d = 0$  o ningún monomio en la forma estándar (4.1) de  $d$  es divisible por algún  $\text{lm}(g)$ ,  $g \in G$ . Si  $f \xrightarrow{G} d$  y  $d$  es reducido con respecto a  $G$ , diremos que  $d$  es una forma reducida de  $f$  con respecto a  $G$ . En particular, si  $f$  es reducido respecto a  $G$ , entonces  $f \xrightarrow{G} f$ .

Este proceso de reducción también se nota como  $\text{red}(f, G)$ , de manera que si  $d$  es la forma reducida de  $f$  en  $G$ ,

$$\text{red}(f, G) = d$$

Cuando disponemos de un conjunto  $G$  y un elemento  $f \neq 0$  podemos diferenciar en él dos partes completamente independientes, una que corresponde a  $G$  y otra que no. El siguiente resultado recoge esta idea muy bien.

**Proposición 4.8.** Dados polinomios  $f$  y  $d$ , si  $d$  es la forma reducida de  $f$  con respecto a algún conjunto  $G$ , entonces tenemos que  $f = d$  o bien  $\exists s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, c_u \in k \setminus \{0\}, l_u, r_u \in \langle X \rangle, g_u \in G$  tales que

$$f = \sum_{u=1}^s c_u l_u g_u r_u + d$$

Un algoritmo para calcular la forma reducida de  $f$  respecto a un conjunto arbitrario (finito)  $G \subseteq k\langle X \rangle$  está recogido en el Algoritmo 4.1.

---

**Algoritmo 4.1:** Algoritmo para calcular forma reducida en un conjunto

---

**Entrada:**  $f_1 = f, G = \{g_1, \dots, g_l\}$

1 **inicio**

2     **mientras**  $f_i \neq 0$  **hacemos**

3         **si**  $\exists g_i \in G, l_i, r_i \in \langle X \rangle$  **tal que**  $\text{lm}(f_i) = l_i \text{lm}(g_i) r_i$  **entonces**

4              $f_{i+1} = f_i - \frac{\text{lc}(f_i)}{\text{lc}(g_i)} l_i g_i r_i$

5              $i = i + 1$

6         **en otro caso**

7              $d = d + \text{lt}(f_i)$

8              $f_{i+1} = f_i - \text{lt}(f_i)$

9              $i = i + 1$

10 **devuelve**  $d$

---

**Observación 4.9.** En el proceso anterior

1)

$$\text{lm}(f_i) > \text{lm}(f_{i+1}), \quad \forall i$$

ya que  $\leq$  es un buen orden y por lo tanto el grado va disminuyendo. El proceso termina en algún  $i = t$  y  $f_t = 0$ . Cada monomio que aparece en la forma final  $d$  no es divisible por ningún  $\text{lm}(g)$ ,  $g \in G$ . Así  $d$  es efectivamente la forma reducida de  $f$  con respecto a  $G$ .

2) Entonces  $f$  tiene la siguiente representación

$$f = \sum_{u=1}^s c_u l_u g_u r_u + d$$

donde  $s \in \mathbb{N}$ ,  $c_u \in k \setminus \{0\}$ ,  $l_u, r_u \in \langle X \rangle$ ,  $g_u \in G$ , (no necesariamente distintas),  $d$  es la forma reducida de  $f$  con respecto a  $G$  y  $\text{lm}(f) = \max\{l_1 \text{lm}(g_1) r_1, l_2 \text{lm}(g_2) r_2, \dots, l_s \text{lm}(g_s) r_s, \text{lm}(d)\}$ , de acuerdo con la Proposición 4.8.

Vamos a ver que la forma reducida de  $f$  no es única con respecto a un conjunto  $G$  en general.

**Ejemplo 4.10.** (1) Sea  $f = x_1^2 x_2 x_1 - x_1 x_2^2 x_1$ , y  $G = \{g_1, g_2\} \subseteq k\langle X \rangle$ , donde  $g_1 = x_1^2 - x_1 x_2$  y  $g_2 = x_1 x_2 x_1 - x_2 x_1 x_2$ . Sea  $\leq$  el orden DegLex con  $x_1 > x_2$ . Entonces, usando primero  $g_1$  como elemento reductor

$$f \xrightarrow{g_1} f - g_1 x_2 x_1 = 0$$

y si usamos primero  $g_2$  como elemento para la reducción

$$f \xrightarrow{g_2} f - x_1 g_2 = x_1 x_2 x_1 x_2 - x_1 x_2^2 x_1 \xrightarrow{g_2} (f - x_1 g_2) - g_2 x_2 = -x_1 x_2^2 x_1 + x_2 x_1 x_2^2$$

por lo que ambas reducciones no coinciden.

(2) Sea  $f = x_1^3$ ,  $G = \{g = x_1^2 - x_2\}$ . Si consideramos este problema desde un prisma conmutativo la forma reducida  $\text{red}(f, G) = x_1 x_2$  será única.

Consideremos ahora el problema para anillos de polinomios no conmutativos. Sea  $\leq$  el orden DegLex con  $x_1 > x_2$ , con lo que  $\text{lm}(f) = x_1^3$ ,  $\text{lm}(g) = x_1^2$ . Aplicamos el algoritmo para reducir  $f$  módulo  $G$ . Tenemos varias opciones para escoger  $l_i, r_i$ , según reduzcamos  $x_1^3$  por un lado u otro. Si reducimos por la derecha

$$f \xrightarrow{g} f - x_1 g = x_1^3 - x_1(x_1^2 - x_2) = x_1 x_2$$

y si reducimos por la izquierda

$$f \xrightarrow{g} f - g x_1 = x_1^3 - (x_1^2 - x_2)x_1 = x_2 x_1$$

o lo que es lo mismo, tenemos dos reducciones distintas para  $f$  con respecto a  $G$ .

En la siguiente sección introduciremos la definición de base de Gröbner-Shirshov para tratar de resolver situaciones como la mostrada anteriormente, de manera que todas las reducciones nos lleven a la misma forma reducida.



En esta sección vamos a ver la definición formal de bases de Gröbner-Shirshov, aunque hay muchísimas formas de caracterizarlas. Nosotros vamos a exponer la que se expresa como generador del ideal de monomios líderes de  $\mathcal{J}$ , si bien no es otra cosa que la versión no conmutativa de la noción clásica de Buchberger.

Recordemos que un *ideal* en  $k\langle X \rangle$  es un subconjunto no vacío  $\mathcal{J} \subseteq k\langle X \rangle$  tal que

- )  $g, h \in \mathcal{J} \Rightarrow g + h \in \mathcal{J}$  (cerrado para sumas)
- )  $g \in \mathcal{J} \Rightarrow rgs \in \mathcal{J}, \quad \forall r, s \in k\langle X \rangle$  (cerrado para productos por elementos del anillo)

**Definición 4.11.** Dado un conjunto  $G \subseteq k\langle X \rangle$ , definimos el ideal de monomios líderes de  $G$  con respecto a algún orden monomial  $\leq$  como

$$\begin{aligned} \text{lm}(G) &= \langle \text{lm}(g) \mid g \in G \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^t f_i \text{lm}(g_i) h_i \mid t \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, f_i, h_i \in k\langle X \rangle, g_i \in G \right\rangle \end{aligned}$$

**Definición 4.12.** Sea  $\mathcal{J}$  un ideal en el anillo de polinomios  $k\langle X \rangle$ . Un conjunto  $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$  de elementos de  $k\langle X \rangle$  tales que  $\langle \text{lm}(g_1), \dots, \text{lm}(g_s) \rangle = \text{lm}(\mathcal{J})$  se llama base de Gröbner-Shirshov del ideal  $\mathcal{J}$ .

Conviene remarcar los siguientes resultados.

**Observación 4.13.** Una base de Gröbner-Shirshov para un ideal  $\mathcal{J}$  es un conjunto generador de  $\mathcal{J}$ .

**Observación 4.14.** Para cada orden existe una base de Gröbner-Shirshov, que puede ser distinta.



La importancia de la base de Gröbner-Shirshov de un ideal viene del hecho que a cada polinomio en  $k\langle X \rangle$  se le puede calcular una única forma reducida con respecto a  $\mathcal{J}$ . Esta forma normal es la que actuará como representante de cada clase de equivalencia en el álgebra cociente  $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \mathcal{J}$ .

Esta expresión reducida de un elemento  $f$  con respecto a una base de Gröbner-Shirshov  $\mathcal{G}$  se denotará  $N(f, \mathcal{G}) \in \mathcal{J}$  y se puede obtener, por ejemplo, a partir del Algoritmo 4.1. Es fácil comprobar que  $f - N(f, \mathcal{G}) \in \mathcal{J}$  (Proposición 4.8), luego podemos identificar cada elemento  $\bar{f} \in k\langle X \rangle / \mathcal{J}$  con el polinomio que se obtiene calculando su forma reducida  $N(f, \mathcal{G})$ , que es una combinación lineal de monomios que no pertenecen a  $\text{lm}(\mathcal{J})$ . Las clases de estos monomios generan  $k\langle X \rangle / \mathcal{J}$  como espacio vectorial sobre  $k$ . Además estos monomios son linealmente independientes, por lo que forman una base para  $k\langle X \rangle / \mathcal{J}$ .

Este resto no depende de la posición de los elementos de la base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}$ . Así, fijado un orden,  $N(f, \mathcal{G})$  estará definido de manera única. Llamaremos a este elemento *forma normal* de  $f$ .

Vamos a tratar de nuevo el Ejemplo 4.10 desde el punto de vista de la definición de bases de Gröbner-Shirshov.

**Ejemplo 4.15.** (2) Recordemos que para  $f = x_1^3$ , con  $G = \{g = x_1^2 - x_2\}$  teníamos dos formas de reducir  $f$ , de manera que obtenemos dos formas reducidas distintas.

Por la derecha

$$f \xrightarrow{g} f - x_1 g = x_1^3 - x_1(x_1^2 - x_2) = x_1 x_2$$

y por la izquierda

$$f \xrightarrow{g} f - g x_1 = x_1^3 - (x_1^2 - x_2)x_1 = x_2 x_1$$

Podemos comprobar que

$$x_1 x_2 - x_2 x_1 = g x_1 - x_1 g \in \langle G \rangle$$

por lo que  $\text{lm}(x_1 x_2 - x_2 x_1) = x_1 x_2 \in \text{lm}(\langle G \rangle)$ , pero  $x_1 x_2$  no está en  $\text{lm}(G)$ . Entonces  $\text{lm}(G) \not\subseteq \text{lm}(\langle G \rangle)$ , y  $G$  no es una base de Gröbner-Shirshov para  $\langle G \rangle$ .

Una base de Gröbner-Shirshov para  $\langle G \rangle$  es

$$\mathcal{G} = \{g_1 = x_1^2 - x_2, g_2 = x_1 x_2 - x_2 x_1\}$$

Si hacemos ahora la correspondiente reducción por la derecha

$$f \xrightarrow{g_1} f - x_1 g_1 = x_1^3 - x_1(x_1^2 - x_2) = x_1 x_2 \xrightarrow{g_2} x_1 x_2 - (x_1 x_2 - x_2 x_1) = x_2 x_1$$

y por la izquierda


$$f \xrightarrow{g_1} f - g_1 x = x_1^3 - (x_1^2 - x_2)x_1 = x_2 x_1$$

y ambas formas coinciden sin importar cómo y por qué lado ha sido realizada la reducción. La forma normal de  $x_1^3$  con respecto a  $\mathcal{G}$  es pues  $x_2 x_1$ .

El siguiente teorema resume los contenidos de esta primera parte.

**Teorema 4.16.** Dado un polinomio  $f$  sobre un anillo de polinomios  $k\langle X \rangle$ , el resto de la división de  $f$  por una base  $\mathcal{G}$  de un ideal  $\mathcal{J} \trianglelefteq k\langle X \rangle$  es único si y solo si  $\mathcal{G}$  es una base de Gröbner-Shirshov para  $\mathcal{J}$ .

A partir de aquí ya podemos empezar a relatar las diferencias que aparecen respecto a la versión conmutativa de esta teoría y las diferentes propiedades que de esto se deducen.

La primera (y más importante) diferencia es que  $k\langle X \rangle$  no es noetheriano, con lo cual el Lema de Dickson (y por lo tanto el Teorema de la base de Hilbert) no es cierto. Y lo que es aún peor, no existe una versión no conmutativa de este resultado. De esta manera, tenemos la existencia de ideales no conmutativos que no son finitamente generados. 

**Ejemplo 4.17.** Sean  $X = \{x, y\}$  un conjunto de dos variables no conmutativas y  $k\langle X \rangle$  el correspondiente anillo de polinomios no conmutativos. Para todo  $i \in \mathbb{N}$  definimos  $J_i$  como el ideal generado por el conjunto  $\{xy^jx, 0 \leq j \leq i\}$ , esto es,  $J_i = \langle x^2, xyx, \dots, xy^ix \rangle$ . Obviamente,  $xy^{i+1}x \in J_{i+1}$  pero  $\notin J_i$ , y  $J_i \subseteq J_{i+1}$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Entonces podemos construir una cadena ascendente infinita  $J_1 \subsetneq J_2 \subsetneq \dots \subsetneq J_i \subsetneq J_{i+1} \subsetneq \dots$ .


Podemos notar también que el anterior ideal  $J$  está generado por un conjunto de monomios  $S = \{xy^ix, i \in \mathbb{N}\}$ , pero  $J$  no puede ser generado por un subconjunto finito de  $S$ . Esto nos prueba que en  $k\langle X \rangle$  no se puede aplicar el lema de Dickson.

E incluso podemos encontrar el caso de ideales principales que están infinitamente generados.

**Ejemplo 4.18** ([GMU97]). Sea  $\langle f \rangle$  con  $f = xx - xy$  e  $\leq$  un orden monomial con  $x > y$ . Sea  $g_i = xy^ix - xy^{i+1}$ ,  $i \geq 0$ . El conjunto  $\mathcal{G} = \{g_i : i \geq 0\}$  es una base de Gröbner-Shirshov de  $\langle f \rangle$  con respecto a  $\leq$ .

Otra grandísima diferencia (que ha hecho correr cientos y miles de páginas) en la irresolubilidad del problema de las palabras ([Boo59]).

**Problema 4.19** (Problema de las palabras para presentaciones de álgebras no conmutativas). Para una presentación de  $k$ -álgebra  $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \langle g_1, \dots, g_l \rangle$ , ¿existe un algoritmo para, dado  $f \in k\langle X \rangle$ , decidir cuándo  $\bar{f} = 0 \in \mathcal{A}$ ? (Y ya sabemos que si  $\bar{f} = 0 \in \mathcal{A} \Leftrightarrow f \in J$ , lo que conocemos como problema de pertenencia).

 **Observación 4.20.** El problema de las palabras para presentaciones de álgebras no conmutativas o el problema de pertenencia para  $k\langle X \rangle$  no tiene solución, en general (ver, por ejemplo, [Pri96]).

Sección 4.5

## S-polinomios no conmutativos

Como en el caso conmutativo, los S-polinomios desarrollan un papel muy importante en el algoritmo para el cálculo de bases de Gröbner-Shirshov. La diferencia está en la definición, ya que ahora no existe un único S-polinomio para cada pareja de polinomios. De hecho, en anillos de polinomios no conmutativos no es suficiente tomar el mínimo común múltiplo. Debemos tomar todos los múltiplos comunes.

Primero analicemos que hay tres posibles formas de que dos polinomios formen una obstrucción, según dónde se produzca el entrelazamiento.

**Definición 4.21.** Sea  $m$  un monomio de grado  $d$  en  $\langle X \rangle$ .

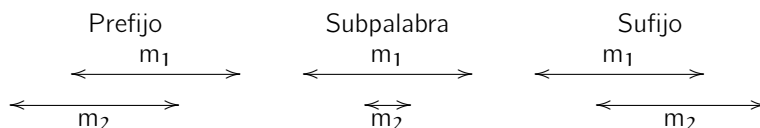
- Notamos por  $\text{Pref}(m, i)$  el prefijo de  $m$  de grado  $i$ , esto es, los primeros  $i$  elementos de  $m$ .

- ) Notamos por  $\text{Suf}(m, i)$  el sufijo de  $m$  de grado  $i$ , esto es, los últimos  $i$  elementos de  $m$ .
- ) Notamos por  $\text{Sub}(m, i, j)$  la subpalabra de  $m$  que empieza en la posición  $i$  y termina en la posición  $j$ .

**Definición 4.22.** Sean  $m_1$  y  $m_2$  dos monomios en  $\langle X \rangle$  con grados  $d_1$  y  $d_2$  respectivamente. Decimos que  $m_1$  y  $m_2$  se solapan si se cumple alguna de las siguientes condiciones

1.  $\text{Pre}(m_1, i) = \text{Suf}(m_2, i)$ ,  $(1 \leq i < d_2)$
2.  $\text{Sub}(m_1, i, i + d_2 - 1) = m_2$ ,  $(1 \leq i \leq d_1 - d_2 + 1)$
3.  $\text{Suf}(m_1, i) = \text{Pref}(m_2, i)$ ,  $(1 \leq i < d_2)$ .

Estas situaciones se describen más fácilmente en el siguiente gráfico



Los S-polinomios se definen a partir de estos solapamientos, de manera que podamos controlar los elementos que presentan problemas a la hora de realizar las reducciones. Conviene recordar que nosotros vamos a usar las bases de Gröbner-Shirshov como herramienta, no como objeto de estudio. Solo nos interesa la naturaleza de los monomios, esto es, si son normales o admiten reducciones.

**Definición 4.23.** Sean  $p_1$  y  $p_2$  dos polinomios de manera que sus términos líderes se solapan de forma  $l_1 \text{lm}(p_1)r_1 = l_2 \text{lm}(p_2)r_2$ , donde  $l_1, l_2, r_1, r_2$  son monomios con al menos uno de  $l_1, l_2$  y al menos uno de  $r_1, r_2$  igual a 1. El S-polinomio asociado a este solapamiento se define como

$$S\text{-pol}(l_1, p_1, l_2, p_2) = c_1 l_1 p_1 r_1 - c_2 l_2 p_2 r_2$$

donde  $c_1 = \text{lc}(p_2)$  y  $c_2 = \text{lc}(p_1)$ .

Evidentemente, podemos dar una definición de bases de Gröbner-Shirshov en términos de S-polinomios.

**Definición 4.24.** Sea  $G = \{g_1, \dots, g_l\}$  un sistema de generadores para el ideal  $\mathcal{J}$  sobre un anillo de polinomios no conmutativo  $\mathbb{k}\langle X \rangle$ . Si todos los S-polinomios que involucran elementos de  $G$  reducen a cero en  $G$ , entonces  $G$  es una base de Gröbner-Shirshov para  $\mathcal{J}$ .

**Ejemplo 4.25.** Sea  $\mathcal{J} = \langle x^2 - xy, xyx - yxy \rangle \trianglelefteq k\langle x, y \rangle$  un ideal no conmutativo. Las posibles obstrucciones son  $\{x^3, x^2yx, xyx^2, xyxyx\}$ , que dan lugar a 4 S-polinomios. De ellos, el único que no reduce a cero en  $\mathcal{J}$  es  $f = xy^2 - yxy$ . Este nuevo elemento nos genera dos nuevos S-polinomios pero reducen a cero, luego la base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}$  es

$$\mathcal{G} = \{x^2 - xy, xyx - yxy, xy^2 - yxy\}$$

Sección 4.6

## El algoritmo de Buchberger, generalizado

El algoritmo que nos permite calcular bases de Gröbner-Shirshov en el caso de ideales en anillos de polinomios no conmutativos lo tenemos escrito en pseudocódigo en el Algoritmo 4.2

---

**Algoritmo 4.2:** Algoritmo generalizado de Buchberger, versión de Mora

---

**Entrada:** Un sistema de generadores  $G = \{g_1, \dots, g_m\}$  para un ideal  $\mathcal{J}$

1 **inicio**

2      $\mathcal{G} = G, A = \emptyset$  ;

3     Para cada par  $(g_i, g_j)$  en  $\mathcal{G}$ , añadimos un S-polinomio  $(l_1, g_i, l_2, g_j)$  a  $A$  para cada solapamiento  $l_1 \text{lm}(g_i)r_1 = l_2 \text{lm}(g_j)r_2$  entre los monomios líderes de  $g_i$  y  $g_j$ ;

4     **mientras**  $A \neq \emptyset$  **hacemos**

5         quitamos el primer elemento  $s_1$  de  $A$  y calculamos

$s'_1 = \text{rem}(s_1, G)$ ;

6         **si**  $s'_1 \neq 0$  **entonces**

7             └─ Añadimos  $s'_1$  a  $G$  y todos los posibles S-pol  $(l_1, g_i, l_2, s'_1)$  a  $A$

8 **devuelve**  $\mathcal{G}$ , base de Gröbner-Shirshov del ideal  $\mathcal{J}$

---

Como hemos comentado en secciones anteriores, en el caso conmutativo el Lema de Dickson y el Teorema de la base de Hilbert (todo ideal está finitamente generado) nos permitían asegurar que los cálculos del algoritmo de Buchberger son finitos y, por lo tanto, siempre podemos calcular una base de Gröbner para cualquier ideal  $\mathcal{J} \trianglelefteq k[X]$ . Pero en el caso no conmutativo no tenemos un análogo para el lema de Dickson, por lo que no podemos asegurar la finitud del algoritmo.

Sí existe una propiedad deseable para ideales no conmutativos conocida como *propiedad D* (ver [Nor01]). La *D* es, efectivamente, por Dickson). De alguna manera expresa la imposibilidad de construir palabras normales infinitas, de manera que los cálculos para obtener la base de Gröbner-Shirshov son finitos. Pero es algo que se escapa del objetivo final de este trabajo.

## Bases de Gröbner-Shirshov y conjuntos computables

Ya hemos recordado que en el anillo de polinomios no conmutativo  $k\langle X \rangle$  existen ideales que pueden ser infinitamente generados. Para esos ideales  $\mathcal{J}$  no sabemos si existe un algoritmo que nos devuelva una base de Gröbner computable infinita de  $\mathcal{J}$ . Para el caso de un ideal  $\mathcal{J}$  finitamente generado, tenemos el Algoritmo 4.2.

En el anterior algoritmo, asumimos que  $G$  es un conjunto no vacío y  $\leq$  es un orden monomial sobre  $k\langle X \rangle$ .

**Observación 4.26.** 1) *El algoritmo termina en algún paso  $i + 1$  si y solo si  $\mathcal{G}_i$  es una base de Gröbner-Shirshov finita del ideal  $\mathcal{J} = \langle G \rangle$ .*

2) *Si el algoritmo nunca termina, entonces  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{G}_i$  es una base de Gröbner-Shirshov infinita para el ideal  $\mathcal{J} = \langle G \rangle$ .*

**Corolario 4.27.** *Si  $\mathcal{J} = \langle G \rangle$  tiene una base de Gröbner-Shirshov finita con respecto a un orden  $\leq$ , entonces el algoritmo termina.*

Como no siempre va a ser posible que el algoritmo nos devuelva una base de Gröbner-Shirshov del ideal que estemos estudiando, vamos a diferenciar aquellos ideales que tengan un comportamiento correcto.

**Definición 4.28.** *Dado un conjunto  $\mathcal{G} \subseteq k\langle X \rangle$ , si para cualquier  $f \in k\langle X \rangle$  podemos encontrar una forma normal de  $f$  con respecto a  $\mathcal{G}$  diremos que el conjunto  $\mathcal{G}$  es computable.*

Dado cualquier ideal  $\mathcal{J} \in k\langle X \rangle$ , si podemos encontrar una base de Gröbner computable para  $\mathcal{J}$  entonces podemos resolver el problema de pertenencia para ese ideal. Por otro lado, ya sabemos que existen ideales en  $k\langle X \rangle$  para los cuales el problema de pertenencia no tiene solución (ver [Bok72]). Para esos ideales no existe un algoritmo que devuelva una base de Gröbner-Shirshov computable.

**Observación 4.29.** *Si un conjunto  $G$  es computable, entonces el problema de pertenencia, y por lo tanto el de las palabras, es resoluble.*

No todos los pasos que damos son para encontrar problemas. Podemos encontrarnos con pequeñas alegrías. Por ejemplo, los conjuntos finitos son siempre computables. Si  $G = \{g_1, \dots, g_l\}$  es un conjunto finito, el proceso visto en el Algoritmo 4.1 puede refinarse en el Algoritmo 4.3.

También podemos encontrar situaciones donde la base de Gröbner-Shirshov sea finita. Por ejemplo, en álgebras noetherianas.

**Teorema 4.30** ([Mor94]). *Si  $k\langle X \rangle$  es noetheriano, entonces para cada ideal  $\mathcal{J}$  es posible calcular una base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}$ .*

**Algoritmo 4.3:** Algoritmo de reducción para conjuntos computables (finitos)**Entrada:**  $f_1 = f, G$  un conjunto finito

```

1 inicio
2   mientras  $f_i \neq 0$  hacemos
3     si  $\exists g_j | \text{lm}(f_i)$ , escogemos el menor j desde 1 a  $l, l_i, r_i \in \langle X \rangle$ 
4       tal que  $\text{lm}(f_i) = l_i \text{lm}(g_j) r_i$  entonces
5          $f_{i+1} = f_i - \frac{\text{lc}(f_i)}{\text{lc}(g_j)} l_i g_j r_i$ 
6          $i = i + 1$ 
7     en otro caso
8        $d = d + \text{lt}(f_i)$ 
9        $f_{i+1} = f_i - \text{lt}(f_i)$ 
10       $i = i + 1$ 
11 devuelve  $d$ , forma reducida de f

```

Otra forma de caracterizar conjuntos computables es acotando por el grado de los monomios. De hecho, esta es la propiedad de la que abusaremos en el Capítulo 7 cuando nos estudiemos el problema de clasificar ideales cofinitos.

**Proposición 4.31.** *Dado un conjunto infinito  $G \subseteq k\langle X \rangle$ , si para cualquier  $D \in \mathbb{N}$ , el subconjunto  $G(D) = \{g \in G | \deg(\text{lm}(g)) \leq D\}$  es finito y todo elemento de  $G(D)$  puede calcularse de manera explícita, entonces  $G$  es computable.*

## Sección 4.8

## Bases de Gröbner-Shirshov reducidas

Cada ideal  $J$  de  $k\langle X \rangle$  puede tener muchas bases de Gröbner-Shirshov, incluyendo al propio  $J$ . Vamos a recordar en esta sección que para cada ideal tenemos un proceso que nos permite obtener una base de Gröbner-Shirshov única de manera que sea la más simple de todas.

**Definición 4.32.** *Decimos que un conjunto  $\mathcal{H} \subseteq k\langle X \rangle$  es un conjunto reducido si todo  $h \in \mathcal{H}$  es reducido módulo  $\mathcal{H} \setminus \{h\}$ .*

Esto nos permite establecer un procedimiento para, dado un conjunto  $P$ , encontrar un conjunto reducido  $G$  tal que  $\langle G \rangle = \langle P \rangle$ . Tenemos que ir tomando cada elemento  $p$  de  $P$  y sustituirlo en  $G$  por su forma reducida en  $P \setminus \{p\}$ . Evidentemente, si el elemento reduce a cero se elimina del conjunto reducido. Como solo realizamos combinaciones lineales de los elementos de  $P$ , al generar los ideales a partir de los conjuntos claramente coinciden.

Ya podemos establecer la definición principal de esta Sección.

**Definición 4.33.** Sea  $\mathcal{G}$  una base de Gröbner-Shirshov para un ideal de  $k\langle X \rangle$ .  $\mathcal{G}$  se dirá base de Gröbner-Shirshov reducida si  $\mathcal{G}$  es un conjunto reducido y  $\text{lc}(g) = 1$ ,  $\forall g \in \mathcal{G}$ .

Es evidente que trabajar con bases de Gröbner-Shirshov reducidas supone una ventaja sobre cualquier otra base de Gröbner-Shirshov del ideal correspondiente. Los resultados obtenidos serán los mismos, pero el número de operaciones y elementos involucrados en los cálculos se reducen al mínimo cuando usamos bases de Gröbner-Shirshov reducidas.

Podemos terminar esta sección con el siguiente resultado.

**Proposición 4.34.** Cada ideal tiene, para cada orden, una única base de Gröbner-Shirshov reducida.

Como en el caso conmutativo, el Algoritmo 4.2 puede refinarse para obtener la base de Gröbner-Shirshov reducida, eliminando de la base los polinomios cuyos monomios líderes sean múltiplos de monomios líderes de otros elementos de la base de Gröbner-Shirshov.

## Sección 4.9

## Caracterización de bases de Gröbner-Shirshov no conmutativas

Podemos resumir los contenidos de las secciones anteriores en el siguiente resultado global.

**Teorema 4.35.** Dados  $\mathcal{G} \subseteq k\langle X \rangle$ ,  $0 \notin \mathcal{G}$ , sea  $\mathcal{J} = \langle \mathcal{G} \rangle$  el ideal generado por  $\mathcal{G}$ , y sea  $\leq$  un orden monomial sobre  $\langle X \rangle$ . Las siguientes condiciones son equivalentes

- $\text{lm}(\mathcal{G}) = \text{lm}(\mathcal{J})$
- $\forall f \in \mathcal{J} \setminus \{0\}, \exists g \in \mathcal{G}$  tal que  $\text{lm}(g) | \text{lm}(f)$
- $f \in \mathcal{J} \Leftrightarrow \text{red}(f, \mathcal{G}) = 0$
- $f \in \mathcal{J} \Leftrightarrow f$  tiene una representación estándar con respecto a  $\mathcal{G}$
- $\forall f \in k\langle X \rangle$ , la forma reducida de  $f$  con respecto a  $\mathcal{G}$  es única
- $k\langle X \rangle = \langle \mathbb{N} \rangle \oplus \mathcal{J}$ , como  $k$ -espacios vectoriales
- $\forall g_i, g_j \in \mathcal{G}, \forall (l_1, r_1, l_2, r_2), \text{red}(S\text{-pol}(l_1, g_i, l_2, g_j), \mathcal{G}) = 0$
- $\forall g_i, g_j \in \mathcal{G}, \forall (l_1, r_1, l_2, r_2), S\text{-pol}(l_1, g_i, l_2, g_j)$  tiene una representación estándar en  $\mathcal{G}$ .





La condición más influyente para nosotros será la  $f$ ), ya que nos permitirá obtener una  $k$ -base un álgebra cociente  $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \mathcal{J}$  cuando  $\mathcal{J}$  tenga una base de Gröbner-Shirshov computable. Simplemente tendremos que ir listando los monomios de  $k\langle X \rangle$  grado a grado (hay un número finito en cada subespacio) y calcular su forma normal en  $\mathcal{G}$  una base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}$ . Aquellos que sean reducidos, y por tanto normales, formarán la base del álgebra.

#### Sección 4.10

### Aplicaciones de bases de Gröbner-Shirshov

Para terminar comentamos algunas aplicaciones clásicas de las bases de Gröbner-Shirshov, aparte de las aplicaciones que les daremos nosotros en los Capítulos 6 y 7.

#### 4.10.1. Eliminación

Sabemos que si  $\mathcal{J}$  es un ideal de  $k\langle X, Y \rangle$ , entonces  $\mathcal{J}_Y = \mathcal{J} \cap k\langle Y \rangle$  es un ideal de  $k\langle Y \rangle$ . Sin embargo no es cierto que si  $G$  genera  $\mathcal{J}$  entonces  $G_Y$  sea un conjunto generador para  $\mathcal{J}_Y$ .

Sí podemos afirmarlo si usamos un orden admisible que *elimine*  $X$ , esto es, si  $w < w'$  en  $k\langle X, Y \rangle$  y  $w' \in k\langle Y \rangle$ , entonces  $w \in k\langle X \rangle$ .

Bajo esta condición,  $G_Y$  será una base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}_Y$ .

#### 4.10.2. Intersección de ideales

Vamos a ver cómo podemos extender la teoría de eliminación para encontrar la intersección de dos ideales (y por inducción, de un número finito de ellos).

Sea  $\mathcal{J} = \langle F \rangle$  y  $\mathcal{J}' = \langle F' \rangle$  dos ideales de  $k\langle X \rangle$ . Consideremos el ideal

$$H = \langle tf, (1-t)f', tx - xt | f \in F, f' \in F', x \in X \rangle \subset k\langle X, t \rangle$$

Los elementos que pertenecen al ideal  $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}'$  se pueden obtener a través del siguiente resultado.

**Proposición 4.36.**  $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}' = H \cap k\langle X \rangle$ .

Si ahora queremos obtener una base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}'$ . Como vimos en la sección anterior, no basta con tomar una base de Gröbner-Shirshov de  $H$  y eliminar los términos que contienen a  $t$ . Pero si tomamos  $G$  base de Gröbner-Shirshov para  $H$  con respecto a un orden que elimina  $t$ , entonces  $G \cap k\langle X \rangle$  es base de Gröbner-Shirshov para  $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}'$ .

### 4.10.3. Homomorfismos

Asumamos que  $X$  e  $Y$  son dos alfabetos finitos y que  $\varphi : k\langle Y \rangle \rightarrow k\langle X \rangle$  un homomorfismo definido por  $\varphi(y_i) = h_i(X)$ , un polinomio en  $k\langle X \rangle$ . Sea  $J = \langle y_i - h_i \mid 1 \leq i \leq m \rangle \subset k\langle X, Y \rangle$ .

El siguiente resultado nos dice cómo calcular el núcleo de  $\varphi$ .

**Proposición 4.37.**  $\ker(\varphi) = J \cap k\langle Y \rangle$ .

Y nuevamente podemos usar los resultados de la Sección 4.10.1 para afirmar que si  $G$  es una base de Gröbner-Shirshov para  $J$  con respecto a un orden en  $(X, Y)$  que elimine a  $Y$ , entonces  $G \cap k\langle Y \rangle$  es una base de Gröbner-Shirshov para  $\ker(\varphi)$  con respecto a la restricción del orden a  $Y$ .

Tenemos también resultados para decidir cuándo un elemento pertenece a la imagen de  $\varphi$ .

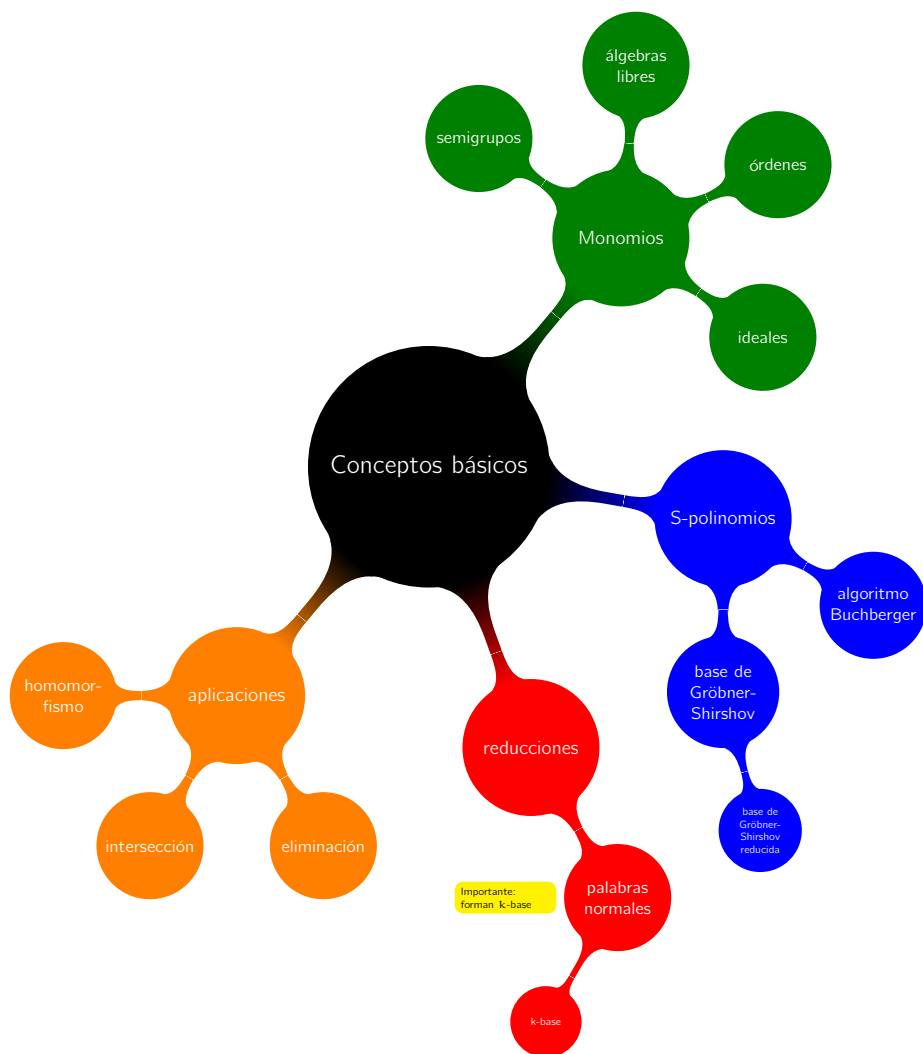
**Proposición 4.38.** *Sea  $\varphi, J$  y el orden de eliminación como en el caso anterior. Un elemento  $f$  de  $k\langle X \rangle$  pertenece a  $\text{im}(\varphi)$  si y solo si  $\text{red}(f, J) \in k\langle Y \rangle$ .*

Un homomorfismo  $\varphi$  se dice *epimorfismo* si es sobreyectivo, esto es, si  $\text{im}(\varphi) = k\langle X \rangle$ .

**Proposición 4.39.** *Con la notación y el orden usual de esta sección, asumamos que  $G$  es reducido. Entonces  $\varphi$  es un epimorfismo si y solo si para todo  $x \in X$  existe algún elemento  $x - g \in G$  con  $g \in k\langle Y \rangle$ .*

Por último, reuniendo todos estos datos podemos

**Proposición 4.40.** *Sea la notación y el orden como en la Proposición 4.39. Entonces  $\varphi$  es un isomorfismo si y solo si  $G = \{x_i - g_i \mid x_i \in X\}$ , con  $g_i \in k\langle Y \rangle$ .*



# 5

## Ambiente y situación de nuestro estudio

*¡Oh, calamar!  
Sobre el mar.  
Bajo el mar.  
En el mar ...*

Oda a un calamar

La estructura de *álgebra* es una estructura muy rica aunque inmensamente grande. No es fácil abordarla y estudiarla en su sentido general sin imponer ningún tipo de hipótesis extra que delimite un poco el campo de acción. Aunque en un principio intentamos afrontar nuestro problema desde el punto de vista más general posible, no tardamos mucho tiempo en darnos cuenta que de esta manera no podríamos extraer información relevante. Así que hubo que buscar una situación menos general pero que a cambio ofreciera mejores perspectivas en cuando a la obtención de resultados.

En este capítulo vamos a explicar y repasar una serie de conceptos que nos van a resultar de vital importancia en el desarrollo del resto de este trabajo. Nos van a perfilar la situación sobre la que vamos a trabajar y nos van a mostrar por qué podemos realizar el estudio que desarrollaremos en los Capítulos 6 y 7. El hecho más destacable es que demostraremos que en nuestra especial situación de trabajo con ideales homogéneos del tipo  $(\alpha, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$  podemos calcular su base de Gröbner-Shirshov hasta el grado que queramos. De manera que también podemos calcular la forma normal de cualquier elemento del anillo de polinomios y por lo tanto podemos ir calculando una base (como  $k$ -espacio vectorial) del álgebra con la que estamos trabajando grado a grado.

Hemos visto anteriormente (Sección 4.7) que si trabajamos con conjuntos computables podemos resolver el problema de pertenencia. El hecho relevante es que podemos construir una base de Gröbner-Shirshov grado a grado. Buscaremos entonces situaciones para las cuales el ideal  $\mathfrak{J}$  con el cual vamos a trabajar acabe

dando lugar a una base de Gröbner-Shirshov computable.

En cierto sentido, es la estructura graduada que se hereda de la graduación polinomial la que nos permitirá resolver este problema.

La idea de este capítulo es *dibujar* la situación en la que nos vamos a encontrar en los próximos capítulos. La estructura principal será la de *álgebra homogénea*, que nos permitirá trabajar con bases de Gröbner-Shirshov computables, y la noción de *serie de Hilbert*, que conlleva toda la información sobre la dimensión del álgebra al que está asociada.

### Sección 5.1

## Álgebras graduadas y homogéneas

En esta sección ofreceremos una visión de la situación en la que trabajaremos en la práctica totalidad del resto de este trabajo. La estructura de álgebra graduada aparece de manera muy natural en nuestro estudio, ya que se deriva directamente de la estructura polinomial graduada de  $k\langle X \rangle$ . Nos permitirá estudiar nuestro problema de una manera mucho más ordenada, específica y metódica. Usaremos también esta estructura a la hora de realizar los programas que van a realizar los numerosos cálculos asistidos por ordenador (Apéndice B).

**Definición 5.1.** *Un álgebra  $\mathcal{A}$  se dice graduada si se puede escribir como descomposición de  $k$ -espacios vectoriales*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \dots$$

de manera que  $\mathcal{A}_s \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}_{s+t}$ . Además,  $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ .

Como ya hemos comentado, dado un conjunto de variables  $X$ , el álgebra de polinomios no conmutativa  $k\langle X \rangle$  es un álgebra graduada, donde la graduación viene dada por el grado de los monomios. Esto es,

$$k\langle X \rangle_j = \{m \in k\langle X \rangle \mid \deg(m) = j\}$$

Ahora que ya sabemos que trabajamos en álgebras graduadas, vamos a comentar ciertas características que deseamos posean los ideales  $\mathcal{J}$  con los que vamos a trabajar.


**Definición 5.2.** *Un polinomio  $f \in k\langle X \rangle$  se dice homogéneo si es una combinación lineal de monomios del mismo grado. Si un ideal  $\mathcal{J} \trianglelefteq k\langle X \rangle$  está generado por polinomios homogéneos, se dice que es un ideal homogéneo.*

**Definición 5.3.** *Un álgebra  $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \mathcal{J}$  se dice homogénea si el ideal  $\mathcal{J}$  es un ideal homogéneo.*

**Ejemplo 5.4.** *El álgebra*

$$\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \langle xx - yx, yxy, xxx - xyy, yxx - yyy \rangle$$

es claramente un álgebra homogénea. El ideal de relaciones está compuesto por una relación homogénea de grado 2 y tres relaciones de homogéneas de grado 3.

El hecho de trabajar con álgebras homogéneas no es baladí. Los ideales homogéneos presenta una cualidad muy deseable. Sus bases de Gröbner-Shirshov también son homogéneas (por ejemplo, [Frö97], cap. 12), por lo que las reducciones preservan el grado o son cero. 

**Ejemplo 5.5.** *Vamos a calcular las posibles reducciones de los monomios del álgebra vista en el Ejemplo 5.4. Una base de Gröbner-Shirshov del ideal  $\mathcal{J}$  es*

$$\mathcal{G} = \{x^2 - yx, xyx - y^3, xy^2 - y^3, yxy, y^2x - y^3, y^4\}$$

Si empezamos a calcular la forma normal de los monomios grado a grado tenemos

$N(1, \mathcal{G}) = 1 \leftarrow \text{normal}$	$N(yx, \mathcal{G}) = yx \leftarrow \text{normal}$	$N(yxy, \mathcal{G}) = 0$
$N(x, \mathcal{G}) = x \leftarrow \text{normal}$	$N(y^2, \mathcal{G}) = y^2 \leftarrow \text{normal}$	$N(y^2x, \mathcal{G}) = y^3$
$N(y, \mathcal{G}) = y \leftarrow \text{normal}$	$N(xyx, \mathcal{G}) = y^3$	$N(y^3, \mathcal{G}) = y^3 \leftarrow \text{normal}$
$N(x^2, \mathcal{G}) = yx$	$N(xy^2, \mathcal{G}) = y^3$	$N(y^3x, \mathcal{G}) = 0$
$N(xy, \mathcal{G}) = xy \leftarrow \text{normal}$	$N(yx^2, \mathcal{G}) = y^3$	$N(y^4, \mathcal{G}) = 0$

Podemos comprobar que todas las reducciones son a elementos del mismo grado o a cero, puesto que el ideal es homogéneo. Además, como solo hay 6 monomios normales,  $\mathcal{A}$  es un álgebra finita y una  $k$ -base la componen la clase de estos 6 monomios.

Esta situación presenta la ventaja que para calcular la forma normal de un elemento no necesitamos conocer una base de Gröbner-Shirshov completa del ideal. Solo necesitamos los elementos que tienen grado menor o igual al polinomio que queremos reducir. Además, el siguiente resultado nos dice cómo podemos obtener una base de Gröbner-Shirshov de un ideal homogéneo.

**Teorema 5.6.** *Dado un ideal homogéneo  $\mathcal{J} = \langle f_1, f_2, \dots, f_l \rangle \subseteq k\langle X \rangle$  y un orden monomial  $\leq$  en  $\langle X \rangle$ , la base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}$  es computable. El Algoritmo 4.2 puede modificarse para obtener una base de Gröbner-Shirshov hasta grado  $D \in \mathbb{N}$ .*

En un principio nuestro objetivo era estudiar todo tipo de álgebras cocientes, pero pronto nos dimos cuenta que era una planteamiento demasiado ambicioso. Ya hemos visto en el Capítulo 4 que el problema de las palabras no es soluble, luego no siempre podemos calcular la base de Gröbner-Shirshov de un ideal. Como acabamos de ver, trabajando con álgebras homogéneas estamos en condiciones de afrontar el problema desde un punto de vista graduado, de manera que los cálculos en grados superiores no afectan a los anteriores.



Aunque nuestra situación ideal sea la de trabajar con ideales homogéneos, incluso en el caso general tenemos técnicas que pueden simular la situación descrita en los párrafos anteriores. Se trata del proceso de *homogeneización* (ver, por ejemplo, [Nor98]).

Todo  $f \in k\langle X \rangle$  se puede escribir de manera estándar como

$$f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_0, \quad f_j \in k\langle X \rangle_j$$

Para homogeneizar  $f$  nos basta con multiplicar cada monomio por una variable (homogeneizadora)  $t$  de la siguiente manera

$$f^* = f_d + f_{d-1}t + \cdots + f_1t^{d-1} + f_0t^d \in k\langle X, t \rangle_d$$

El polinomio  $f^*$  se llama polinomio *homogeneizado* de  $f$ .

Existe un proceso inverso, la *dehomogeneización* que consiste en aplicar a un  $g \in k\langle X, t \rangle$  el morfismo que deja  $X$  invariante y aplica  $t \mapsto 1$ . Si  $g \in k\langle X, t \rangle$ , denotamos este proceso como  $g_* = g(X, 1)$ .

**Definición 5.7.** Sea  $\mathcal{J} = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  un ideal en  $k\langle X \rangle$ . El ideal

$$\mathcal{J}^* = \langle f_1^*, \dots, f_s^*, x_i t - t x_i, 1 \leq i \leq n \rangle$$

se llama ideal homogeneizado de  $\mathcal{J}$ .

Es evidente que  $\mathcal{J}^* \trianglelefteq k\langle X, t \rangle$ . Este proceso nos permite obtener un ideal homogéneo a partir de un ideal no conmutativo en general, aunque como contrapartida tenemos que ampliar el número de variables. Sin embargo, el siguiente resultado explica por qué merece la pena *complicar* los cálculos.

**Teorema 5.8.** Sea  $G$  una base de Gröbner-Shirshov reducida para  $\mathcal{J}^*$ . Entonces  $G_* = \{g_* \mid g \in G\}$  es una base de Gröbner-Shirshov para  $\mathcal{J}$ .

Ahora podemos afrontar el problema para cocientes de álgebras en general, homogeneizando el ideal y calculando su base de Gröbner-Shirshov en  $k\langle X, t \rangle$ . Dehomogeneizando esta base obtenemos la base de Gröbner-Shirshov del ideal inicial.

Sin embargo la situación no siempre es tan idílica. Si este proceso no conllevara ninguna dificultad podríamos calcular bases de Gröbner-Shirshov para cualquier ideal no conmutativo con el único obstáculo de la capacidad de computación con la que contemos. El problema reside, claro está, en el hecho de añadir una nueva variable (también tenemos que variar ligeramente el orden por el especial comportamiento de  $t$ , pero es algo secundario). Aparte del problema computacional que supone una nueva variable (el cálculo de la base de Gröbner-Shirshov es exponencial en cada variable), podemos encontrarnos con el problema de ideales  $\mathcal{J} \trianglelefteq k\langle X \rangle$  que tienen base de Gröbner-Shirshov finita pero cuyo ideal homogeneizado  $\mathcal{J}^* \trianglelefteq k\langle X, t \rangle$  tiene base de Gröbner-Shirshov infinita.

**Ejemplo 5.9** ([Ufn08]). Sea el álgebra  $\mathcal{A} = \langle x, y | x^2 - 1, xy^2 - 1 \rangle$  que tiene base de Gröbner-Shirshov  $\mathcal{G} = \{y^2 - 1, x^2 - 1\}$  para  $x < y$ . Sin embargo, la base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}^*$  contiene la familia

$$y^2(xy)^{4k-2}t^2 - t^{8k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

En el mismo trabajo ([Ufn08]) Ufnarovskii explica una estrategia para salvar este tipo de obstáculos denominada *estrategia del conejo*, que consiste en ir simplificando cada nuevo término que aparezca en la base de Gröbner-Shirshov eliminando el mayor múltiplo de la variable homogeneizadora  $t$  que aparezca. Así, aunque estemos trabajando en un grado  $d$ , puede que la relación que obtengamos sea de grado menor y tengamos que *saltar* a un grado inferior para eliminar otras relaciones. De ahí el conejo.

Aunque en esta sección hemos comprobado que podemos afrontar el problema para ideales y álgebras en general, para preservar los cálculos durante el resto del trabajo nos centraremos exclusivamente en álgebras homogéneas, dejando una puerta abierta para recuperar este camino en investigaciones futuras.

### Sección 5.2

## Dimensiones y crecimiento. Comportamiento asintótico

Acabamos de ver que si el ideal  $\mathcal{J}$  es homogéneo, entonces el álgebra cociente  $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \mathcal{J}$  es un álgebra graduada homogénea, esto es, podemos representar  $\mathcal{A}$  como suma directa de subespacios finito dimensionales  $\mathcal{A} = \bigoplus_i \mathcal{A}_i$ . Esto nos permite también estudiar la dimensión del álgebra  $\mathcal{A}$  a partir de las dimensiones de sus subespacios homogéneos.

El concepto de infinitud para un álgebra es un concepto demasiado general. La separación de álgebras en finitas o no finitas parece una separación demasiado grosera. Un concepto un poco menos restrictivo es el de crecimiento (o dimensión de Gelfand-Kirillov) que nos permite estudiar las álgebras de dimensión infinita desde un punto de vista mucho más rico en matices.

Vamos a introducir el concepto de crecimiento para poder definir la dimensión de Gelfand-Kirillov más adelante.

Sobre el conjunto de funciones monótonas  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definimos un orden  $f \preceq g \Leftrightarrow \exists c, n > 0$  tal que  $f(m) \leq cg(mn)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Podemos ahora definir una relación de equivalencia de la siguiente manera:  $f \cong g$  si  $f \preceq g$  y  $g \preceq f$ . Denotaremos la clase de equivalencia de  $f$  por  $[f]$  y la llamaremos *crecimiento* de la función  $f$ .

Sobre esta clase de equivalencia podemos definir una suma y un orden de manera natural

$$[f] + [g] = [f + g] \quad [f] \leq [g] \Leftrightarrow f \prec g$$



Por ejemplo, para cualesquiera  $a, b > 0, d > e > 1$ , tenemos

$$[a^m] = [b^m] > [m^d] > [m^e]$$

El crecimiento  $[2^m]$  se llama *exponencial* y el crecimiento  $[m^d]$  se llama *polinomial* de grado  $d$ .

**Definición 5.10.** Sea  $V$  un subespacio finito-dimensional generador del álgebra  $\mathcal{A}$ , y sea la función  $d_V(m) = \dim(V + V^2 + \dots + V^m)$ . El crecimiento del álgebra  $\mathcal{A}$  es la clase de equivalencia  $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = [d_V(m)]$ .

**Ejemplo 5.11.** Sea  $\mathcal{A} = k\langle x, y \rangle$  el álgebra libre con dos generadores. El subespacio  $V = kx + ky$  es un subespacio generador para  $\mathcal{A}$ . Entonces

$$d_V(n) = \dim_k \left( \sum_{i=0}^n V^i \right) = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

y  $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = [2^n]$ . Por lo tanto, tiene crecimiento exponencial.

Hay muchas (muchísimas) formas de estudiar el crecimiento de un álgebra. Por ejemplo, esta última forma que incluye el estudio de subespacios generadores. Pero para álgebras cocientes  $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \mathcal{J}$  existe otra forma de calcularlo ([Ufn82], [Ufn89]) usando elementos de la base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}$  que se acerca más a nuestro campo algebraico. Para ello tenemos que establecer una bonita relación entre álgebras y grafos, pasar de letras y símbolos a vértices y flechas.

### 5.2.1. Crecimiento en base a grafos

Empecemos con un pequeño repaso y recordando lo que nosotros vamos a entender por grafo (para un estudio más profundo sobre comportamiento asintóticos de álgebras y sus relaciones con grafos, recomendamos [KS95], I).

**Definición 5.12.** Llamaremos grafo a un grafo orientado donde se permiten lazos y múltiples flechas. Un camino de longitud  $n$  en un grafo es una sucesión de vértices  $v_i$  y flechas  $e_j$  tal que cada flecha  $e_j$  empieza en  $v_{j-1}$  y termina en  $v_j$ . Un camino se dice cíclico si su último vértice  $v_n$  coincide con el primero. Un camino se dice cadena si todos los vértices  $v_i$  son diferentes.

**Definición 5.13.** El crecimiento de un grafo  $G$  es la función  $d_G(m)$ , igual al número de caminos en el grafo de longitud no mayor que  $m$ . El crecimiento del grafo  $G$  es la clase de equivalencia  $\mathcal{C}(G) = [d_G(m)]$ .

**Lema 5.14.** Respecto al crecimiento de grafos podemos afirmar lo siguiente

- 1)  $\mathcal{C}(G) = [\text{constante}]$  si y solo si el grafo no contiene ciclos

- 2) el crecimiento de cualquier subgrafo no es mayor que el crecimiento del grafo completo
- 3) Si  $G_i$  son las componentes conexas del grafo  $G$ , entonces  $\mathcal{C}(G) = \sum \mathcal{C}(G_i)$

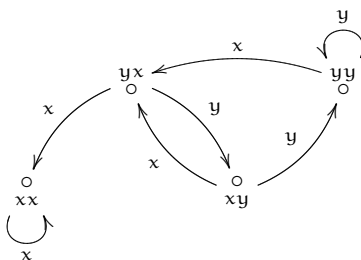
Para extraer el crecimiento de un álgebra cociente a través de la base de Gröbner-Shirshov de su ideal de relaciones necesitamos que la base de Gröbner-Shirshov sea finita, ya que el grado máximo de los elementos que conforman la base de Gröbner-Shirshov es un dato muy importante en este proceso.

Sea  $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \mathcal{J}$  un álgebra cociente y  $l$  el grado máximo de los elementos de la base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}$ . Vamos a construir un grafo finito de la siguiente manera. Los vértices van a estar constituidos por los monomios normales de longitud  $l - 1$  (los podemos calcular reduciendo los monomios de cada grado vía la base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}$ ). Situamos una flecha entre dos vértices  $v_i, v_j$  si existen  $x_r, x_s \in X$  tal que  $v_i x_r = x_s v_j$  y  $v_i x_r$  es una palabra normal. Si tal flecha existe lleva por etiqueta  $x_r$ . Este grafo se llama *grafo de Ufnarovskii* del álgebra  $\mathcal{A}$ , y tiene muchas aplicaciones. Entre ellas, por ejemplo, se puede aplicar a álgebras de autómatas para realizar un test de Noetherianidad ([MN05]).

**Teorema 5.15.** *El crecimiento del número de caminos de un grafo finito es alternado. Es exponencial si y solo si el grafo tiene dos ciclos que se intersecan. O es polinomial de grado  $d$ , donde  $d$  es el número máximo de ciclos distintos que se pueden recorrer en una cadena.*

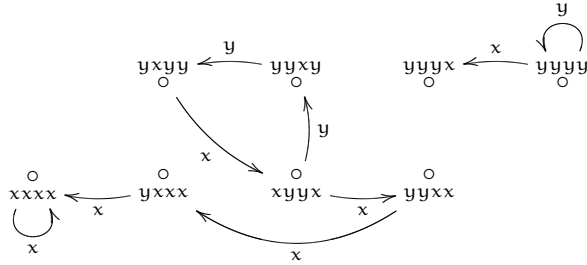
**Teorema 5.16** ([Ufn82]). *El crecimiento del grafo de Ufnarovskii asociado a un álgebra se corresponde con el crecimiento del álgebra. El Teorema 5.15 nos da un criterio para este crecimiento.*

**Ejemplo 5.17.** *Sea  $\mathcal{J} = \langle x^2y - y^3 \rangle \trianglelefteq k\langle x, y \rangle$  un ideal que tiene por base de Gröbner-Shirshov al conjunto  $\{x^2y - y^3\}$ . Su grafo de Ufnarovskii es*



*El álgebra cociente correspondiente tiene crecimiento exponencial.*

**Ejemplo 5.18.** *Sea  $\mathcal{J} = \langle x^2y - xyx, xyx - y^3 \rangle \trianglelefteq k\langle x, y \rangle$ . Su base de Gröbner-Shirshov es  $\{xyx - y^3, x^2y - y^3, xy^3 - y^3x, y^3xy - y^4x, y^3x^2 - y^5\}$ . El grafo de Ufnarovskii que le corresponde es*



Por el Teorema 5.15 su crecimiento es polinomial de grado 2.

Además existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de palabras normales de longitud  $\geq 1$  y los caminos del grafo. Por eso la condición de finitud es que no haya ciclos. Si dos (o más) ciclos tienen vértices comunes, podemos construir palabras infinitas sin ningún patrón, y por eso el crecimiento sería exponencial.

Este crecimiento de un álgebra se corresponde con la conocida dimensión de Gelfand-Kirillov.

**Definición 5.19.** Sea  $k$  un cuerpo,  $\mathcal{A}$  un álgebra finitamente generada y  $V$  un subespacio generador de  $\mathcal{A}$  como  $k$ -álgebra. Definimos la dimensión de Gelfand-Kirillov de  $\mathcal{A}$  como

$$GKdim_k(\mathcal{A}) = \overline{\lim} \frac{\log \dim_k(V^n)}{\log n}$$

Existen muchos resultados que nos relacionan grafos de Ufnarovskii y dimensión de Gelfand-Kirillov. Por ejemplo, en [KK93] se caracteriza cuando la dimensión de Gelfand-Kirillov es 1. Y en [EF94] se utilizan estos grafos para demostrar el famoso resultado que dice que no existen álgebras finitamente generadas con dimensión de Gelfand-Kirillov en el intervalo  $(1, 2)$ .

**Ejemplo 5.20.** El álgebra del Ejemplo 5.17 tiene dimensión de Gelfand-Kirillov  $\infty$  y el álgebra del Ejemplo 5.18 tiene dimensión de Gelfand-Kirillov 2.

**⚠** En cierta manera, la dimensión de Gelfand-Kirillov mide lo lejos que está un álgebra de ser finita.

**Observación 5.21.** Los ideales cofinitos son los que están asociados a álgebras cocientes con dimensión de Gelfand-Kirillov igual a cero.

Sección 5.3

Series de Hilbert y bases de Gröbner-Shirshov

Terminaremos este capítulo recordando el último gran concepto del cual vamos a hacer uso en el resto de este trabajo.

Si  $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \mathcal{J}$  es un álgebra homogénea, entonces  $\mathcal{A} = \bigoplus_i \mathcal{A}_i$  donde  $\mathcal{A}_i$  es el espacio vectorial de elementos homogéneos de grado  $i$ . La dimensión de cada  $\mathcal{A}_i$  es finita, ya que existe un número finito de elementos de grado  $i$  en cada uno de estos subespacios. Llamamos a  $h(i) = \dim_k(\mathcal{A}_i)$  la *función de Hilbert* de  $\mathcal{A}_i$ .

**Definición 5.22.** Sea  $\mathcal{A} = \bigoplus_i \mathcal{A}_i$  un álgebra homogénea. La función definida como  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(t) = \sum h(i)t^i$  se llama *serie de Hilbert de  $\mathcal{A}$* .

Esta serie nos aporta mucha información sobre el álgebra a la que está asociada. En primer lugar lleva toda la información necesaria sobre la dimensión del álgebra en cada uno de sus coeficientes, y nos dice si el álgebra es finita o no sin más que comprobar su número de términos. Y en segundo lugar, la serie de Hilbert es un invariante para álgebras graduadas. Para álgebras no graduadas la serie de Hilbert depende del conjunto generador, pero en nuestro caso podemos usarla como método de clasificación, salvo isomorfismo.

En nuestro estudio podemos calcular la serie de Hilbert grado a grado. Al poder construir la base de Gröbner-Shirshov de manera graduada, también podemos calcular  $\dim(\mathcal{A}_i)$  sin más que contar el número de monomios normales que hay de grado  $i$ .

Esto nos permite construir un primer test de finitud. Si existe un  $j$  tal que  $\dim(\mathcal{A}_j) = 0$  tenemos que todos los elementos de grado  $j$  son reducibles por elementos de  $\mathcal{G}$ . Continuando con el razonamiento, como los elementos de grado  $j+1$  son múltiplos de los elementos de grado  $j$ ,  $\dim(\mathcal{A}_k) = 0, \forall k \geq j$ . Con lo cual nuestra álgebra será finito dimensional y, en particular,

$$\dim(\mathcal{A}) = \sum_{i=0}^{j-1} \dim(\mathcal{A}_i)$$

Este hecho va a ser fundamental en el desarrollo de nuestro estudio. Lo que estudiaremos para buscar indicios de finitud en nuestras álgebras cocientes es la serie de Hilbert de cada álgebra, a través del número de monomios normales en cada grado, para lo cual haremos uso de una base de Gröbner-Shirshov del ideal cociente.

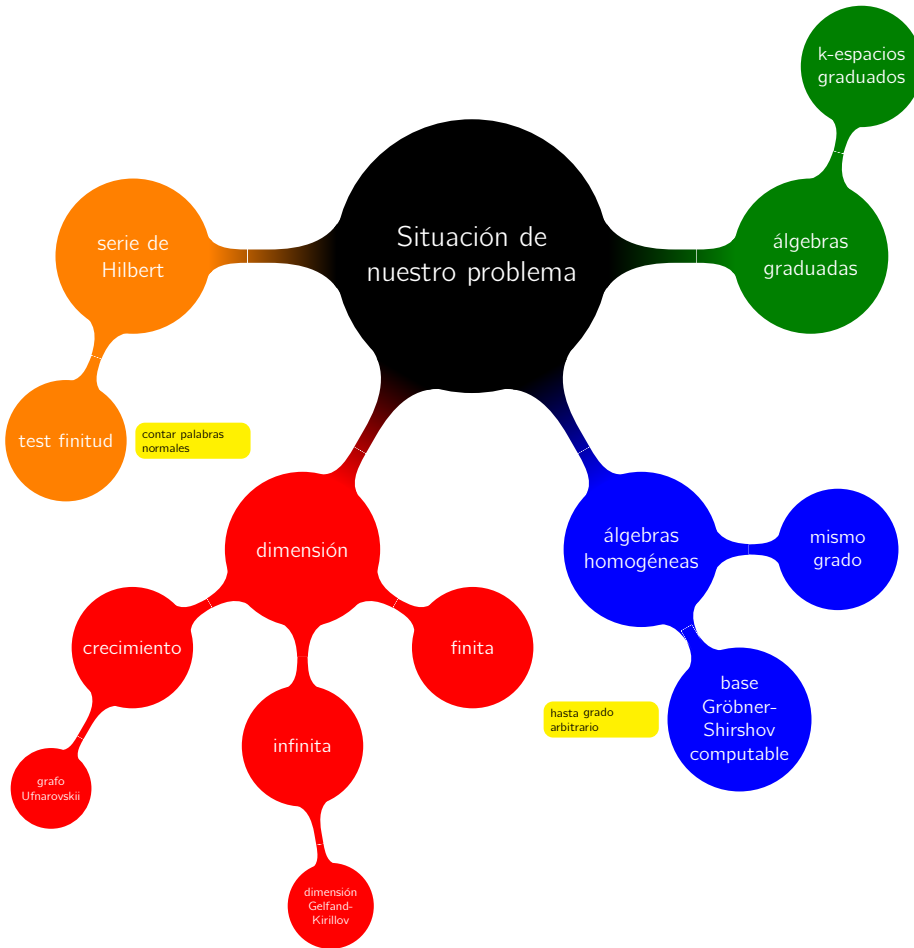
El Teorema 4.35, al relacionarnos la dimensión del álgebra  $\mathcal{A}$  con las palabras normales nos da otra forma de calcular la serie de Hilbert de un álgebra graduada.

**Teorema 5.23.** La serie de Hilbert de un álgebra  $\mathcal{A}$  puede obtenerse a través de la expresión  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(t) = \sum_0^{\infty} d_n t^n$ , donde  $d_n$  es el número de palabras normales de grado  $n$ .

Para terminar, citaremos un resultado que nos relaciona series del Hilbert con la dimensión de Gelfand-Kirillov.

**Teorema 5.24** ([EI94]). Las siguientes condiciones son equivalentes para un álgebra  $\mathcal{A}$  monomial finitamente presentada

- 1)  $\mathfrak{c}(\mathcal{A}) \leq 1$
- 2) *La sucesión de coeficientes de la serie de Hilbert de  $\mathcal{A}$  es eventualmente periódica*





# 6

## Isomorfismos entre álgebras finitamente presentadas

– Tú no sabes lo que es una clase. Marge, soy yo el que se juega el cuello todos los días. Y no estoy desvariando. ¡Eres tú la que desvaría! Desvaría este sistema monstruoso! Y... ¿sabes? Te diré la verdad. ¡Tú no sabes afrontar la verdad! Cuando alargues la mano y te la encuentres toda manchada de mocos, que antes eran la cara de tu amigo, sabrás lo que tienes que hacer. Olvidalo, Marge. Es... ¡Chinatown!  
– Homer, no vuelvas a hablar de mis asuntos personales en clase.  
– Sí señora ♪...

Homer Simpson  
Secretos de un matrimonio con éxito

En un principio nos preguntamos qué condiciones debe verificar un álgebra de caminos para tener dimensión finita. Una forma de afrontar este problema es presentar tal álgebra como cociente de un álgebra libre, donde los caminos que podemos recorrer vienen dados por las relaciones que generan el ideal cociente. La pregunta que nos hicimos y que quisimos resolver era: ¿existe alguna forma de saber, con el menor gasto (tiempo y cálculo) posible, si ese álgebra tiene dimensión finita? Y ya que estábamos trabajando en álgebras de grafos, ¿por qué no estudiar el caso general para cocientes de álgebras libres?

Es fácil comprobar que la solución pasa por los elementos que constituyen el ideal de relaciones. Y el mejor generador que tenemos de este ideal de relaciones es su base de Gröbner-Shirshov. Así que decidimos extraer toda la información posible de este conjunto y estudiar qué casos son finitos, con el objetivo que intentar encontrar pautas de comportamiento o marcadores que nos informen de cuándo el álgebra cociente va a tener dimensión finita.

Y así llegamos al siguiente planteamiento lógico. Como no podemos abordar el problema en su situación global, siempre coexistimos con la posibilidad de trabajar



con conjuntos infinitos que no se *adecuan* a nuestra realidad finita, dividiremos el problema en subproblemas más pequeños, de manera que podamos clasificar toda la información de una manera más controlada. Con este objetivo en mente estudiaremos familias finitas de ideales en anillos no conmutativos en busca de ideales cofinitos. Nuestra meta es encontrar aquellos ideales que dan lugar a álgebras cocientes de dimensión finita máxima, para así poder encontrar una *cota* que nos permita decidir cuándo otro ideal va a resultar cofinito.

Por este motivo otro punto de interés será clasificar los ideales que dan lugar a álgebras finitas de dimensión máxima. Para ello tenemos que estudiar el problema de buscar isomorfismos dentro de esta familia de álgebras, que son álgebras finitamente presentadas y, además, homogéneas. Este hecho es importante porque las álgebras homogéneas presentan muchas propiedades deseables respecto a sus condiciones de reducción que nos permiten obtener resultados más profundos.

Dadas dos álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , decidir cuándo son isomorfas como  $k$  álgebras es, como el Problema de las Palabras, un problema fundamental para álgebras finitamente presentadas. En esta Sección trataremos de dar solución al caso de álgebras finitas homogéneas.

Existen muchas formas de obtener condiciones para que dos álgebras sean isomorfas. Tantas como imaginación y talento seamos capaces de desarrollar. En [Shi91], por ejemplo, se afronta el problema para álgebras monomiales, problema que resulta un poco más sencillo porque ya sabemos que para ideales monomiales el propio ideal siempre es una base de Gröbner-Shirshov de sí mismo.

En la primera parte de este Capítulo vamos a ver un ejemplo para el caso general. Lo aplicaremos a algunos de nuestros ejemplos y comprobaremos que en cuanto las dimensiones empiecen a aumentar los cálculos se vuelven menos consistentes hasta dejar de ser operativos, principalmente por el aumento de variables que forman parte del sistema. En nuestra búsqueda de soluciones desarrollaremos, en la segunda Sección, un nuevo procedimiento graduado que también nos muestra cuándo dos álgebras son isomorfas pero que no se muestra tan débil con dimensiones superiores.

Presentaremos también una serie de mejoras que conseguirán que el proceso gane agilidad al liberarle de realizar cálculos innecesarios.



Durante el resto del trabajo, siempre que esto no lleve a confusión y para aportar claridad a los cálculos, identificaremos cada elemento  $\bar{f} \in k\langle X \rangle / \mathcal{J}$  con su clase de equivalencia. Esto es,  $\overline{xyx} = xyx + \mathcal{J} \equiv xyx$ .

Kiyoshi Shirayanagi presentó en [Shi93] un algoritmo para encontrar isomorfismos entre dos álgebras no conmutativas finitamente presentadas y finito dimensionales. Como primer acercamiento para nuestro problema parece acertado, ya que efectivamente nuestras álgebras son no conmutativas, están finitamente presentadas y serán finito dimensionales.

El proceso que sigue Shirayanagi es bastante curioso e ingenioso, y presenta como característica destacada que traslada problema al campo conmutativo y lo resuelve como un problema de tipo de pertenencia a un ideal, a través del Teorema del punto cero de Hilbert.

Sean  $\mathcal{A} = k\langle X_{\mathcal{A}} \rangle / \mathcal{J}_{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{B} = k\langle X_{\mathcal{B}} \rangle / \mathcal{J}_{\mathcal{B}}$  dos álgebras finito dimensionales y finitamente presentadas sobre un cuerpo  $k$ . Sean  $S_{\mathcal{A}} = \{t_i\}$  y  $S_{\mathcal{B}} = \{s_j\}$  las correspondientes  $k$ -bases de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Como la primera condición es que tengan la misma dimensión,  $\#S_{\mathcal{A}} = \#S_{\mathcal{B}} = n$ . Podemos ahora definir una aplicación  $k$ -lineal  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  sobre los elementos que generan  $\mathcal{A}$  como

$$\varphi(x_{\lambda}) = \sum_j^n a_{\lambda_j} s_j, \quad a_{\lambda_j} \in k \quad (6.1)$$

Podemos extender (6.1) a un homomorfismo de  $k$ -álgebras de manera que  $\varphi(t_i)$  esté determinado de manera única bajo las relaciones de  $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}$  como

$$\varphi(t_i) = \sum_j^n b_{ij} s_j, \quad b_{ij} \in k \quad (6.2)$$

Aplicando principios de álgebra lineal, podemos construir la matriz  $M_{\varphi} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , de dimensión  $n \times n$ , que será la matriz asociada a la aplicación  $\varphi$ .

Sea  $\varphi(\mathcal{J}_{\mathcal{A}})$  el conjunto de todas las relaciones que resultan de aplicar  $\varphi$  a los elementos de  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$  en el sentido (6.2). Podemos entonces enunciar el siguiente criterio de isomorfía.

**Teorema 6.1** ([Shi93], Teorema 1).  *$\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son isomorfas como  $k$ -álgebras  $\Leftrightarrow$  para la anterior aplicación  $\varphi$  existen coeficientes para que tanto  $\varphi(\mathcal{J}_{\mathcal{A}})$  bajo  $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}$  como  $\det(M_{\varphi}) \neq 0$  se satisfagan.*

Las relaciones que aparecen en  $\varphi(\mathcal{J}_{\mathcal{A}})$  se pueden expresar como igualdades en un anillo conmutativo, por lo que podemos reducir el problema a un problema de pertenencia a un ideal.

Identificamos cada  $a_{\lambda_j}$  en la expresión (6.1) con una indeterminada sobre el cuerpo  $k$

$$a_{\lambda_j} \rightarrow x_{\lambda_j}$$



Es evidente que cada  $x_{\lambda_j}$  no pertenece a  $X_{\mathcal{A}}$  ni a  $X_{\mathcal{B}}$ . Definimos un anillo conmutativo  $\mathbf{R} = k[x_{\lambda_j}]$  como la extensión de  $k$  con estas variables, y extendemos de manera natural  $\varphi$  a una aplicación lineal  $\tilde{\varphi} : \mathbf{R}\langle X_{\mathcal{A}} \rangle / \mathcal{J}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbf{R}\langle X_{\mathcal{B}} \rangle / \mathcal{J}_{\mathcal{B}}$ . Así

$$\tilde{\varphi}(x_{\lambda}) = \sum_{j=1}^n x_{\lambda_j} s_j$$

Llamamos  $M_{\tilde{\varphi}} = (y_{ij})$  a la imagen formal de  $M_{\varphi} = (b_{ij})$ . Obviamente  $\det(M_{\tilde{\varphi}}) \in \mathbf{R}$ .

De manera análoga,  $\tilde{\varphi}(\mathcal{J}_{\mathcal{A}})$  será el conjunto de relaciones que resulta de aplicar  $\tilde{\varphi}$  a las relaciones de  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ .

Sea  $f = \det(M_{\tilde{\varphi}})$  y  $\mathcal{J}$  el ideal generado por todos los coeficientes de los elementos de  $\tilde{\varphi}(\mathcal{J}_{\mathcal{A}})$ .

Decimos que las  $k$ -álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son *isomorfas para una extensión  $k'$*  si  $k'\langle X \rangle / \mathcal{J}_{\mathcal{A}} \cong k'\langle X \rangle / \mathcal{J}_{\mathcal{B}}$  para alguna extensión  $k'$  de  $k$ . Entonces tenemos el siguiente test de isomorfía.

**Teorema 6.2** ([Shi93], teorema 2).  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$  para una extensión  $\Leftrightarrow f \notin \sqrt{\mathcal{J}}$ .

*Demostración.*  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$  para una extensión  $k'$

- $\Leftrightarrow$  ambos  $\tilde{\varphi}(\mathcal{J}_{\mathcal{A}})$  bajo  $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}$  y  $f \neq 0$  pueden ser satisfechos en  $k'$
- $\Leftrightarrow$  existen soluciones de  $\mathcal{J}$  que satisfacen  $f \neq 0$
- $\Leftrightarrow$  no “toda solución de  $\mathcal{J}$  es una solución  $f = 0$ ”
- $\Leftrightarrow$  no “ $f \in \sqrt{\mathcal{J}}$ ”, por el teorema del punto cero de Hilbert
- $\Leftrightarrow$   $f \notin \sqrt{\mathcal{J}}$

□

Este proceso admite una pequeña mejora, y es que a la hora de calcular el determinante de  $M_{\tilde{\varphi}}$  podemos obviar la primera columna, ya que se pueden realizar combinaciones lineales para que la primera fila sea  $(1, 0, \dots, 0)$ .

Tenemos también un segundo test conocido como *método del adjunto*. Introducimos una nueva indeterminada  $t$ . Entonces  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$  para una extensión  $\Leftrightarrow 1 \notin \text{GB}(\mathcal{J}, tf - 1)$  en  $\mathbf{R}[t]$ .

Este segundo test se basa en una descripción alternativa del Teorema del punto cero de Hilbert que dice que “ $\mathcal{J}$  y  $f \neq 0$  tiene una solución”  $\Leftrightarrow$  “ $\mathcal{J}$  y  $tf - 1$  en  $\mathbf{R}[t]$  tiene una solución”.

Vamos a probar este método estudiando un ejemplo. En este caso sean  $\mathcal{A} = k\langle x \rangle / \langle x^3 - x^2 + 1 \rangle$  y  $\mathcal{B} = \langle x, y \rangle / \langle x^2 - 4x, xy - yx, y^2 - 3y \rangle$  dos álgebras finitamente presentadas. Las correspondientes bases son  $S_{\mathcal{A}} = \{1, x, x^2\}$  y

$S_B = \{1, x, y\}$ , y  $\tilde{\varphi}(x) = a + bx + cy$ . Tenemos entonces

$$M_{\tilde{\varphi}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 4b^2 & 3c^2 \end{pmatrix}$$

El determinante es  $f = bc(3c - 4b)$ . A partir de los coeficientes de  $\tilde{\varphi}(x^3 - x^2 + 1)$  obtenemos el ideal  $\mathcal{J} = (a^3 - a^2 + 1, 12ab^2 + 3a^2b + 16b^3 - 4b^2 - 2ab, 9ac^2 + 3a^2c + 9c^3 - 3c^2 - 2ca)$ . Entonces

$$\mathcal{G}_{(\mathcal{J}, t^f-1)} = \left\{ a + \frac{9}{25}c^2 + \frac{69}{200}ct + \frac{3}{2}c - \frac{9}{25}b - \frac{27}{100}c^2 - \frac{207}{800}ct - \frac{3}{8}c + \frac{1}{50}, c^3 - \frac{1}{9}c + \frac{23}{324}t, t^2 + \frac{144}{23} \right\}$$

Como  $1 \notin \mathcal{G}_{\mathcal{J}}$ , estas dos álgebras son isomorfas (para una extensión en los complejos, ya que en la solución los coeficientes  $a, b, c \in \mathbb{C}$ ).

El anterior ejemplo nos muestra cómo funciona este método para álgebras en general. Vamos ahora a probarlo para un par de álgebras de alguna de nuestras familias. Sean los ideales presentados como

$$\mathcal{J}_A = \langle xx, xy - yy \rangle$$

$$\mathcal{J}_B = \langle yy, xx - yx \rangle$$

y  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  las respectivas álgebras asociadas. En este caso  $S_A = \{1, x, y, yx, yy, yyyx\}$  y  $S_B = \{1, x, y, xy, yx, yxy\}$ .

El posible isomorfismo  $\varphi$  tendrá la expresión

$$\begin{cases} \varphi(x) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5yx + a_6yxy \\ \varphi(y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy + b_5yx + b_6yxy \end{cases}$$

La matriz  $M_{\tilde{\varphi}}$  asociada a la aplicación anterior tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & a_3b_2 & a_2b_2 + a_2b_3 & a_4b_2 + a_4b_3 + a_3b_5 \\ 0 & 0 & b_2b_3 & b_2^2 + b_2b_3 & b_2b_4 + b_3b_4 + b_3b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3b_2^2 + a_3b_2b_3 \end{pmatrix}$$

y su determinante es

$$f = -a_3b_2^2(b_2 + b_3)^2(a_3b_2 - a_2b_3)^2 \quad (6.3)$$

El ideal  $\mathcal{J}$  que resulta de obtener los coeficientes de las imágenes de los elementos de  $\mathcal{J}_A$  bajo  $\varphi$  e  $\mathcal{J}_B$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{J} = & (a_1^2, 2a_1a_2, 2a_1a_3, a_2a_3 + 2a_1a_4, \\ & a_2^2 + a_2a_3 + 2a_1a_5, a_2a_4 + a_3a_4 + a_3a_5 + 2a_1a_6, a_1b_1 - b_1^2, \\ & a_2b_1 + a_1b_2 - 2b_1b_2, a_3b_1 + a_1b_3 - 2b_1b_3, \\ & a_4b_1 + a_2b_3 - b_2b_3 + a_1b_4 - 2b_1b_4, \\ & a_5b_1 + a_2b_2 + a_3b_2 - b_2^2 - b_2b_3 + a_1b_5 - 2b_1b_5, \\ & a_6b_1 + a_5b_3 + a_2b_4 + a_3b_4 - b_2b_4 - b_3b_4 - b_3b_5 + a_1b_6 - 2b_1b_6) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Construimos ahora el ideal  $(\mathcal{J}, t^2 - 1)$  y calculamos una base de Gröbner. Para  $a_i > b_j > t$  ésta sería

$$\{b_3, 1 + b_2^2 t, b_1, a_4 + a_5, a_3 - b_2, a_2, a_1\}$$

Como el 1 no pertenece a esta base de Gröbner, las dos álgebras son isomorfas. De hecho, si resolvemos el sistema  $(6.3) \neq 0$  y  $(6.4) = 0$  obtenemos la solución

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_5 = -a_4, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = 0, \quad a_3 \neq 0$$

Para este caso *pequeño* el método de Shirayanagi ha demostrado ser efectivo. Sin embargo, para cálculos más pesados las cosas pueden no ser tan sencillas. Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_A &= \langle xxx, yxy, yxx - yyy \rangle \\ \mathcal{J}_B &= \langle xyx, yyy, xxx - xyx \rangle \end{aligned} \tag{6.5}$$

dos ideales que llevan relacionados álgebras de dimensión 21.

Para establecer el estudio de los posibles isomorfismos necesitamos conocer  $k$ -bases de las dos álgebras y bases de Gröbner-Shirshov de ambos ideales. Estos datos son

$$\begin{aligned} B_A &= \{1, x, y, xx, xy, yx, yy, xxy, xyx, xyy, yyx, yyy, xxyx, xxyy, \\ &\quad xyyx, xyyy, yyyx, xxyyx, xxyyy, xyyyy, xxyyyy\} \\ B_B &= \{1, x, y, xx, xy, yx, yy, xxy, xyx, yxx, yxy, yyx, xyyx, yxxy, \\ &\quad yxyy, yyxx, yxyx, yxyyx, yxyxy, yyxyy, yyxyyx\} \\ \mathcal{G}_A &= \{xxx, yxy, yxx - yyy, yyyx, yyyyy\} \\ \mathcal{G}_B &= \{xyx, yyy, xxx - xyx, xxyy - xyyx, xyyx, xyxyx\} \end{aligned}$$

El posible isomorfismo entre estas dos álgebras tendrá la forma

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xx + a_5xy + a_6yx + a_7yy + \\ &\quad a_8xxy + a_9xyy + a_{10}yxx + a_{11}yxy + a_{12}yyx + a_{13}xyyx + \\ &\quad a_{14}yxx + a_{15}yxy + a_{16}yyxx + a_{17}yyxy + a_{18}yxyyx + \\ &\quad a_{19}yyxxy + a_{20}yyxyy + a_{21}yyxyyx \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xx + b_5xy + b_6yx + b_7yy + \\ &\quad b_8xxy + b_9xyy + b_{10}yxx + b_{11}yxy + b_{12}yyx + b_{13}xyyx + \\ &\quad b_{14}yxx + b_{15}yxy + b_{16}yyxx + b_{17}yyxy + b_{18}yxyyx + \\ &\quad b_{19}yyxxy + b_{20}yyxyy + b_{21}yyxyyx \end{aligned} \tag{6.7}$$

A continuación tenemos que construir todas las imágenes de una  $k$ -base de  $\mathcal{A}$  usando (6.6) y (6.7) como homomorfismo de anillos. Una vez que tengamos esos elementos, calculamos la matriz asociada y obtenemos su determinante. En este caso la matriz tiene dimensión  $21 \times 21$  y su determinante es

$$f = -a_3^{10} b_2^{16} (a_3 b_2 - a_2 b_3)^{17} (b_2^2 + 2b_3^2)^3$$

El siguiente paso es calcular el ideal  $\mathcal{J}$ . Para ello necesitamos las imágenes de los generadores de  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$  bajo  $\varphi$  y  $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ .

Los coeficientes de  $\varphi(xxx)$  bajo  $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$  son

$\{a_1^3, 3a_1^2 a_2, 3a_1^2 a_3, 3a_1 a_2^2 + 3a_1^2 a_4, 3a_1 a_2 a_3 + 3a_1^2 a_5, 3a_1 a_2 a_3 + 3a_1^2 a_6, 3a_1^2 a_{10} + a_2^2 a_3 + 3a_1 a_3 a_4 + 3a_1 a_2 a_6, 3a_1^2 a_{11} + a_2 a_3^2 + 3a_1 a_3 a_5 + 3a_1 a_3 a_6, 3a_1 a_3^2 + 3a_1^2 a_7, 3a_1^2 a_{12} + a_2 a_3^2 + 3a_1 a_3 a_6 + 3a_1 a_2 a_7, 3a_1^2 a_{16} + 3a_1 a_{12} a_2 + 3a_1 a_{10} a_3 + a_2^2 a_4 + a_2 a_3 a_6 + a_2^2 a_7 + 3a_1 a_4 a_7, 3a_1^2 a_{17} + 3a_1 a_{11} a_3 + 3a_1 a_{12} a_3 + a_2^2 a_5 + a_2^2 a_6 + a_2 a_3 a_7 + 3a_1 a_5 a_7, a_2^2 a_3 + 3a_1 a_3 a_4 + 3a_1 a_2 a_5 + 3a_1^2 a_8, 3a_1^2 a_{14} + 3a_1 a_{10} a_3 + a_2^2 a_4 + a_2 a_3 a_5 + a_2 a_3 a_6 + 3a_1 a_5 a_6 + 3a_1 a_3 a_8, 3a_1^2 a_{19} + 3a_1 a_{14} a_3 + 3a_1 a_{16} a_3 + a_{12} a_2 a_3 + a_{10} a_2^2 + 3a_1 a_{12} a_5 + a_3 a_5 a_6 + a_3 a_4 a_7 + a_2 a_5 a_7 + a_2^2 a_8 + 3a_1 a_7 a_8, a_3^2 + a_2 a_3^2 + 6a_1 a_2 a_4 + 3a_1 a_3 a_5 + 3a_1 a_2 a_7 + 3a_1^2 a_9, 3a_1^2 a_{13} + 3a_1 a_{12} a_2 + 3a_1^2 a_4 + a_2^2 a_4 + 3a_1 a_4^2 + 2a_2 a_3 a_5 + a_2 a_3 a_6 + 3a_1 a_5 a_6 + 2a_2^2 a_7 + 3a_1 a_4 a_7 + 3a_1 a_3 a_8 + 6a_1 a_2 a_9, 3a_1^2 a_{15} + 3a_1 a_{10} a_2 + 3a_1 a_{11} a_3 + 2a_2 a_3 a_4 + a_2^2 a_5 + a_2^2 a_6 + a_2^2 a_6 + 3a_1 a_4 a_6 + a_2 a_3 a_7 + 3a_1 a_6 a_7 + 3a_1 a_3 a_9, 3a_1^2 a_{18} + 3a_1 a_{15} a_2 + a_{10} a_2^2 + 3a_1 a_{13} a_3 + 3a_1 a_{14} a_3 + a_{11} a_2 a_3 + a_{12} a_2 a_3 + a_{10} a_3^2 + 3a_1 a_{10} a_4 + a_3 a_4^2 + 3a_1 a_{11} a_6 + 3a_1 a_{12} a_6 + 2a_2 a_4 a_6 + 2a_3 a_5 a_6 + a_3 a_6^2 + 3a_1 a_{10} a_7 + a_3 a_4 a_7 + 2a_2 a_6 a_7 + a_2^2 a_8 + 2a_2 a_3 a_9 + 3a_1 a_6 a_9, 3a_1 a_{16} a_2 + a_{12} a_2^2 + 3a_1^2 a_{20} + 3a_1 a_{15} a_3 + 3a_1 a_{17} a_3 + a_{10} a_2 a_3 + a_{11} a_2^2 + a_{12} a_2^2 + 3a_1 a_{12} a_4 + a_3 a_4 a_6 + 3a_1 a_{12} a_7 + 2a_2 a_4 a_7 + a_3 a_5 a_7 + a_3 a_6 a_7 + a_2 a_2^2 + a_2^2 a_9 + 3a_1 a_7 a_9, 3a_1 a_{12}^2 + a_{16} a_{12}^2 + 3a_1 a_2 a_{20} + 3a_1^2 a_{21} + 3a_1 a_{18} a_3 + 3a_1 a_{19} a_3 + a_{15} a_2 a_3 + a_{17} a_2 a_3 + a_{13} a_3^2 + a_{14} a_3^2 + a_{16} a_3^2 + 3a_1 a_{16} a_4 + 2a_{12} a_2 a_4 + a_{10} a_3 a_4 + a_{12} a_3 a_5 + 3a_1 a_{17} a_6 + a_{11} a_3 a_6 + 2a_{12} a_3 a_6 + 3a_1 a_{13} a_7 + 3a_1 a_{16} a_7 + 3a_{12} a_2 a_7 + a_{10} a_3 a_7 + a_4^2 a_7 + a_5 a_6 a_7 + a_4 a_7^2 + a_3 a_7 a_8 + 3a_1 a_{12} a_9 + a_3 a_6 a_9 + 2a_2 a_7 a_9\}.$

Los coeficientes de  $\varphi(yxy)$  y  $\varphi(yxx - yyy)$  llenan más de tres páginas, razón por la cual no mostramos esos resultados en este trabajo. Ahora tenemos que unir estos coeficientes en un ideal junto a  $(tf - 1)$  y calcular su base de Gröbner. En este caso tendremos 43 variables. Con estos guarismos el ordenador ya es incapaz de obtener resultados, a pesar de estar en el caso conmutativo cuyo algoritmo presenta muchas menos complicaciones.

Sin embargo, por el cálculo desarrollado con el algoritmo graduado 6.2, podemos afirmar que  $1$  no pertenece a este ideal, luego  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ .

Como conclusión podemos afirmar que aunque este método para buscar isomorfismos entre álgebras es muy general y completo, se muestra un poco más débil cuando tenemos que trabajar con álgebras de dimensiones superiores. Conviene notar que el número de variables con el que se trabaja es  $\dim(\mathcal{A}_1) \cdot \dim(\mathcal{A})$ , llegando en poco tiempo a colapsar el sistema con tantas combinaciones.

Estas complicaciones surgen cuando estudiamos ideales que pertenecen a la familia  $(2,3,3)$ . Con más razón nos veremos en aprietos cuando estudiemos las familias  $(2,3,4)$  ó  $(2,4,4)$ . Obligados entonces a buscar otras formas de clasificar estas álgebras nos vimos empujados a buscar otros métodos de clasificación. La solución la vamos a encontrar en la naturaleza graduada de este problema, que

nos va a permitir desarrollar nuevas técnicas con un gasto computacional mucho menor. Vamos a sentar las bases teóricas necesarias para desarrollar estos resultados.

## Sección 6.2

## El método graduado

Sean  $\mathcal{A} = k\langle X_{\mathcal{A}} \rangle / \mathcal{I}_{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{B} = k\langle X_{\mathcal{B}} \rangle / \mathcal{I}_{\mathcal{B}}$  dos álgebras finitamente presentadas,  $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}$  dos ideales homogéneos y  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}, \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$  las correspondientes series de Hilbert.

Ya sabemos que una de las condiciones para que las álgebras graduadas sean isomorfas es que tengan la misma serie de Hilbert, por lo que podemos suponer como primera hipótesis que  $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = \mathcal{H}_{\mathcal{B}}$ . Entonces

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{A}_i \quad \mathcal{B} = \bigoplus_{i=0}^m \mathcal{B}_i$$

con  $\dim(\mathcal{A}_k) = \dim(\mathcal{B}_k)$ ,  $\forall k$ . Además,  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0 = k$ , y  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  están generadas como  $k$ -álgebras por los correspondientes subespacios de dimensión uno.

**Lema 6.3.** *Con la notación anterior, si  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un isomorfismo entonces  $\varphi(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}_1 \neq \emptyset$ .*

*Demostración.* Supongamos  $\varphi(\mathcal{A}) \subseteq \bigoplus_{i=2}^m \mathcal{B}_i$ . Recordemos que  $\mathcal{A}_1$  es un conjunto generador para el álgebra  $\mathcal{A}$ , por lo que  $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_1^i$ . Entonces

$$\varphi(\mathcal{A}_2) = \varphi(\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_1) = \varphi(\mathcal{A}_1) \cdot \varphi(\mathcal{A}_1) \subseteq \left( \bigoplus_{i=2}^m \mathcal{B}_i \right) \cdot \left( \bigoplus_{i=2}^m \mathcal{B}_i \right) \quad (6.8)$$

La anterior igualdad nos dice que el grado de la imagen de un elemento de grado  $j$  siempre es mayor que el propio  $j$ . Pero  $\varphi$  define un isomorfismo entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , luego  $x, y \in \text{Im}(\varphi)$ . Bajo (6.8) esto no es posible, por lo que nuestra hipótesis es falsa.  $\square$

**Corolario 6.4.** *Si  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es un isomorfismo, entonces*

$$\varphi(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{B}_i \oplus \mathcal{B}_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{B}_m \text{ con } \varphi(\mathcal{A}_i) \cap \mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i$$

La sección de la imagen que tiene el mismo grado que el argumento se llama *cabeza*, mientras que el resto de la imagen que tiene (posiblemente) grado mayor que el argumento se llama *cola*.

**Corolario 6.5.** *La matriz asociada al isomorfismo  $\varphi$  es triangular por bloques, donde cada bloque  $i$  tiene dimensión  $\dim(\mathcal{A}_i) = \dim(\mathcal{B}_i)$ . Además, cada bloque contiene toda la información sobre el comportamiento de los elementos de grado  $i$ .*

Sea  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un isomorfismo que verifica las condiciones anteriores. A partir de esta aplicación podemos construir un nuevo homomorfismo

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \mathcal{A}_1 &\longrightarrow \mathcal{B}_1 \\ f &\longmapsto \pi_1 \circ \varphi(f) \end{aligned}$$


donde  $\pi_1$  es la proyección sobre la componente  $\mathcal{B}_1$ . Como  $\mathcal{A}_1$  genera  $\mathcal{A}$  como  $k$ -álgebra, podemos extender la aplicación  $\tilde{\varphi}$  a un homomorfismo de álgebras  $\hat{\varphi} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ .

**Teorema 6.6.** *Sea  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un isomorfismo entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Entonces  $\hat{\varphi}$  define un isomorfismo graduado entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ .*

*Demostración.* Vamos a probar que  $\tilde{\varphi}(\mathcal{A}_1) \cong \mathcal{B}_1$ . Si esto es cierto, entonces  $\hat{\varphi}(\mathcal{A}_i) = \tilde{\varphi}(\mathcal{A}_1^i) = \tilde{\varphi}(\mathcal{A}_1)^i \cong \mathcal{B}_1^i = \mathcal{B}_i$ .

Empecemos probando que  $\text{Im} \tilde{\varphi} = \{\pi_1 \circ \varphi(f) | f \in \mathcal{A}_1\} = \mathcal{B}_1$ . Supongamos que esto no es cierto, por lo que existirá un  $g \in \mathcal{B}$  tal que  $g \notin \text{Im} \tilde{\varphi}$ . Entonces no existirá ningún elemento  $h \in \mathcal{A}_1$  tal que  $\pi_1 \circ \varphi(h) = g$ . Pero los elementos de grado 1 de  $\mathcal{B}$  solo pueden ser obtenidos a partir de elementos de grado 1 de  $\mathcal{A}$ , por el Corolario 6.4. Entonces, si tal  $g$  existe,  $\varphi(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_1$  y  $\varphi$  no sería isomorfismo.

Por el otro lado, sea  $\tilde{M}$  la matriz asociada a  $\tilde{\varphi}$ . Ésta será una matriz cuadrada de dimensión  $\dim(\mathcal{A}_1)$ . Si  $\det(\tilde{M}) = 0$ , entonces el correspondiente menor asociado a los elementos de grado uno en la matriz  $M$  asociada a  $\varphi$  será también cero. Por el Corolario 6.5 esta matriz es triangular por bloques, por lo que  $\det(M) = 0$  y  $\varphi$  no puede ser isomorfismo.  $\square$

Resumiendo los anteriores resultados, de cada isomorfismo  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre dos álgebras homogéneas podemos obtener un isomorfismo graduado proyectando la imagen sobre la componente de grado 1 de  $\mathcal{B}$ . De la misma manera, cada isomorfismo graduado  $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  puede levantarse hasta un isomorfismo general encontrando los coeficientes adecuados, manteniendo el mismo bloque en los coeficientes de grado 1. 

En vista del Teorema 6.6 y de la naturaleza graduada de nuestros ejemplos podemos definir un nuevo criterio de isomorfía más ligero y rápido que el que hemos usado anteriormente de Shirayanagi. Consiste en construir un isomorfismo entre los dos subespacios de dimensión uno e ir comprobando si sigue siendo compatible con los grados superiores. En cada nuevo grado añadimos, si es necesario, nuevas condiciones sobre los coeficientes que definen el isomorfismo. Si estas restricciones resultan no compatibles, entonces no existirá este isomorfismo graduado, luego no podrá existir isomorfismo alguno entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . El algoritmo termina dando las condiciones sobre los parámetros para que el isomorfismo exista o con la certeza de que no existe ningún isomorfismo entre las dos álgebras bajo estudio.



Vamos a repetir el ejemplo anterior bajo este nuevo criterio graduado. Sea  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  las álgebras cocientes asociadas con los ideales  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}$  de (6.5). El posible isomorfismo graduado tendrá la forma

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(x) = ax + by \\ \tilde{\varphi}(y) = cx + dy \end{cases}, \quad a, b, c, d \in k \quad (6.9)$$

Podemos entonces deducir la primera condición, que es que la matriz asociada sea distinta de cero para que tenga inversa. Esto es,

$$ad - bc \neq 0 \quad (6.10)$$

Pasamos ahora a estudiar los elementos de grado 2. Como los elementos de la base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}$  empiezan en grado 3, todos los monomios de grado dos  $\{xx, xy, yx, yy\}$  son normales. La matriz de coeficientes asociada al grado 2 es

$$\tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} aa & ab & ab & bb \\ ac & ad & bc & bd \\ ac & bc & ad & bd \\ cc & cd & cd & dd \end{pmatrix}$$

La condición para que  $\det(\tilde{M}_2) \neq 0$  manteniendo (6.10) sobre  $a, b, c, d$  es nuevamente  $ad - bc \neq 0$ , por lo que este segundo paso no aporta nueva información a nuestro problema.

En grado 3 los monomios irreducibles de  $\mathcal{A}$  son  $\{xxy, xyx, xyy, yyx, yyy\}$ . La correspondiente matriz de coeficientes asociada al subespacio de grado 3 es

$$\tilde{M}_3 = \begin{pmatrix} aad & aac + abd & abc & abd & bbc \\ abc & aac + abd & abc & bbc & abd \\ acd & acc + add & bcc & bcd & bcd \\ bcc & acc + bcd & acd & bcd & add \\ ccd & ccc + cdd & ccd & cdd & cdd \end{pmatrix}$$

Para mantener  $\det(\tilde{M}_3)$  bajo (6.10) la nueva condición es

$$bc(bc - ad) \neq 0 \quad (6.11)$$

Ahora tenemos que estudiar las imágenes de los generadores del ideal  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$ . Tenemos que calcular las imágenes del conjunto  $\hat{\varphi}(\mathcal{J}_{\mathcal{A}})$  y hacer que se anulen bajo las relaciones de  $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ . Hay tres relaciones a estudiar

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(xxx) &\mapsto \{a^2b, a^3 + ab^2, a^2b, ab^2, ab^2\} \\ \tilde{\varphi}(yxy) &\mapsto \{acd, ac^2 + bcd, acd, ad^2, bcd\} \\ \tilde{\varphi}(yxx - yyy) &\mapsto \{abc - c^2d, a^2c + b^2c - c^3 - cd^2, a^2d - c^2d, abd - cd^2, \\ &\quad abd - cd^2\} \end{aligned}$$

La solución al sistema que hace estos coeficientes igual a cero manteniendo las condiciones obtenidas en (6.11) es

$$a = 0 \quad b = \pm c \neq 0 \quad d = 0 \quad (6.12)$$

Continuamos ahora con los elementos de grado 4. Tenemos que comprobar que bajo las condiciones (6.12) el determinante de la matriz asociada es distinto de cero. Los monomios normales de grado 4 son  $\{xxyx, xxyy, xyyx, xyyy, yyyy\}$ . La matriz de coeficientes asociada es

$$\tilde{M}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b^4 \\ 0 & 0 & 0 & b^4 & 0 \\ 0 & b^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^4 & 0 & 0 \\ b^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es compatible con las condiciones (6.12).

En grado 5 hay tres monomios normales, que son  $\{xxyyx, xxyyy, xyyyy\}$ . Estas condiciones nos dan la matriz

$$\tilde{M}_5 = \begin{pmatrix} 0 & b^5 & 0 \\ 0 & 0 & b^5 \\ b^5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que sigue siendo compatible con las condiciones (6.12).

En grado 6 tenemos solo un monomio normal, que es  $\{xxyyyy\}$ , con  $\varphi(xxyyyy) = b^6 yxyyx$ .

Por lo tanto existe un isomorfismo  $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , en el sentido de (6.9) si y solo si los coeficientes  $a, b, c$  y  $d$  son de la forma

$$a = 0 \quad b = \pm c \neq 0 \quad d = 0$$

Las condiciones (6.12) nos definen un isomorfismo graduado entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Vamos ahora a buscar condiciones para construir un isomorfismo no necesariamente graduado para comprobar la compatibilidad de los coeficientes. El sistema a resolver involucra 42 variables y el tiempo que tenemos que esperar para que el ordenador compute la solución es de varios días. Finalmente obtenemos cuatro soluciones que son

$$\begin{aligned} a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad (a_3 = -b_2 \text{ ó } a_3 = b_2), \quad b_3 = 0, \quad a_4 = 0, \\ b_4 = 0, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = 0, \quad b_2 \neq 0, \quad a_7 = \frac{-a_3 b_5 - a_3 b_6}{b_2}, \quad b_7 = 0, \\ a_{10} = -a_8, \quad b_{11} = \frac{b_5 b_6}{b_2}, \quad a_{12} = -a_{11} - a_9, \quad a_{16} = -a_{13} - a_{14}, \quad b_{17} = \frac{b_{12} b_5}{b_2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad (a_3 = -b_2 \text{ ó } a_3 = b_2), \quad b_3 = 0, \quad a_4 = 0, \\
 b_4 = 0, \quad a_6 = -a_5, \quad b_2 \neq 0, \quad a_7 = \frac{-a_3b_5 - a_3b_6}{b_2}, \quad b_7 = 0, \\
 a_3 \neq 0, \quad a_{10} = \frac{a_5^2 - a_3a_8}{a_3}, \quad a_5 \neq 0, \quad b_{11} = \frac{-a_5^2a_7b_5 - a_{10}b_2b_5^2 - a_8b_2b_5^2}{a_3a_5^2}, \\
 a_{12} = -a_{11} - a_9, \quad a_{16} = -a_{13} - a_{14}, \quad b_{17} = \frac{b_{12}b_5}{b_2}
 \end{aligned}$$



Podemos comprobar varias cosas. Que efectivamente si *cortamos* por los elementos de grado 1 ( $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ ) obtenemos las condiciones de nuestro isomorfismo graduado, y que el isomorfismo se verifica indistintamente para la permutación  $x \leftrightarrow y$  y para la anti-permutación  $x \leftrightarrow -y$ . Si nos fijamos, los ideales también están permutados y son opuestos para el producto.

### 6.2.1. Mejoras del Método Graduado

El método que hemos desarrollado en la sección anterior admite ciertas mejoras que lo hacen más eficiente, en el sentido que nos permiten ahorrar ciertos cálculos que son innecesarios.

Primero vamos a mostrar cómo evitar cálculos superfluos en matrices de coeficientes de grados *normales*. Diremos que un grado es *normal* si todos los monomios de ese grado son monomios normales. El grado 2 de  $\mathcal{A}$  en el ejemplo anterior es un grado normal, ya que los elementos de la base de Gröbner-Shirshov comienzan en grado 3.

El siguiente resultado juega un papel importante en el proceso que vamos a desarrollar.

**Teorema 6.7** ([Sil00], Teorema 1). *Sea  $k$  un cuerpo y sea  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  una matriz por bloques donde  $A, B, C, D$  son matrices  $n \times n$  sobre  $k$  que conmutan entre sí. Entonces*

$$\det(M) = \det(AD - BC)$$

En nuestro último ejemplo,  $\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y  $\det(\tilde{M}_1) = ad - bc$ . Como resultado de las particulares condiciones de nuestro problema, si  $n = 2$  es un grado normal, entonces  $\tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} a\tilde{M}_1 & b\tilde{M}_1 \\ c\tilde{M}_1 & d\tilde{M}_1 \end{pmatrix}$ , y por el Teorema 6.7  $\det(\tilde{M}_2) = \det(\tilde{M}_1)^4$ .

Se puede demostrar, por inducción, el siguiente Lema.

**Lema 6.8.** Si  $1, \dots, j$  son grados normales, entonces

$$\tilde{M}_j = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{a}\tilde{M}_{j-1} & \mathbf{b}\tilde{M}_{j-1} \\ \hline \mathbf{c}\tilde{M}_{j-1} & \mathbf{d}\tilde{M}_{j-1} \end{array} \right) \text{ y } \det(\tilde{M}_j) = \det(\tilde{M}_1)^{j \cdot 2^{j-1}}$$

Así, si  $t$  es el grado mínimo de los elementos que forman la base de Gröbner-Shirshov de  $\mathcal{A}$ , la condición sobre todas las matrices de coeficientes de cualquier grado  $n < t$  es  $\det(\tilde{M}_1) \neq 0$ , ya que el determinante de la matriz correspondiente es múltiplo de  $\det(\tilde{M}_1)$ .

Estos cálculos y conclusiones pueden también extenderse para el caso de tres variables, con

$$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

$$\text{y } \tilde{M}_j = \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{a}\tilde{M}_{j-1} & \mathbf{b}\tilde{M}_{j-1} & \mathbf{c}\tilde{M}_{j-1} \\ \hline \mathbf{d}\tilde{M}_{j-1} & \mathbf{e}\tilde{M}_{j-1} & \mathbf{f}\tilde{M}_{j-1} \\ \hline \mathbf{g}\tilde{M}_{j-1} & \mathbf{h}\tilde{M}_{j-1} & \mathbf{i}\tilde{M}_{j-1} \end{array} \right), \text{ siendo } 1, \dots, j \text{ grados normales.}$$

La fórmula para el correspondiente determinante es

$$\det(\tilde{M}_j) = \det(\tilde{M}_1)^{j \cdot 3^{j-1}}$$

Con este resultado podemos empezar a calcular matrices de coeficientes en el grado donde comiencen los elementos de la base de Gröbner-Shirshov, permitiendo salvar estos cálculos mientras estemos trabajando en grados normales.

Vamos ahora a presentar un resultado para ahorrar cálculos en los pasos finales del proceso.

**Lema 6.9.** Sea  $L$  la longitud máxima de las relaciones que conforman la presentación del ideal  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$  y sea  $m$  el grado máximo de la serie de Hilbert de  $\mathcal{A}$ . Sea  $D_i$  el determinante de  $\tilde{M}_i$  y  $\varphi_i$  los coeficientes de las relaciones de grado  $i$  bajo  $\varphi$ . Si existen coeficientes tales que  $\{D_1, \dots, D_L, \varphi_1, \dots, \varphi_L\}$  son compatibles, entonces  $\{D_{L+1}, \dots, D_m\}$  también son compatibles con los mismos coeficientes.

*Demostración.* Supongamos que existen unos coeficientes tales que  $\{D_1, \dots, D_L, \varphi_1, \dots, \varphi_L\}$  son compatibles y sea  $L < k \leq m$  un grado tal que  $D_k = 0$ . Esto significa que existe una fila  $R_i$  en  $\tilde{M}_k$  tal que  $R_i = \sum_h \alpha_k R_h$ ,  $\alpha_h \in k$ . Cada fila corresponde con la imagen de un monomio irreducible de  $\mathcal{A}$ , por lo que  $\varphi(f_i) = \sum_h \alpha_h \varphi(f_h)$ , siendo  $f_j$  monomios normales en  $\mathcal{A}$ .  $\varphi$  es un morfismo lineal, luego

$$\varphi(f_i - \sum_h \alpha_h f_h) = 0 \implies f_i - \sum_h \alpha_h f_h \in \mathcal{J}_{\mathcal{A}} \quad (6.13)$$

Sea  $f_t$  el monomio líder de la combinación anterior. Esto nos dice que  $f_t$  reduce a su correspondiente cola en  $\mathcal{A}$ , reescribiendo (6.13) de una forma adecuada. Entonces  $f_t$  no es un monomio normal, lo cual es una contradicción.  $\square$

En vista de este resultado, las verificaciones que hicimos en los grado 4, 5 y 6 en el ejemplo anterior eran innecesarias.

Este criterio graduado presenta ciertas ventajas frente al método de Shirayanagi (para el caso de álgebras homogéneas). El primero de ellos es que solo trabajamos con  $\dim(\mathcal{A}_1)^2$  variables frente a las  $\dim(\mathcal{A}_1) \cdot \dim(\mathcal{A})$  variables del método de Shirayanagi. La segunda ventaja es que podemos obtener un resultado negativo en algún grado, de manera que no tenemos que seguir haciendo comprobaciones evitándonos cálculos innecesarios. En el método de Shirayanagi la salida solo se obtiene al final del proceso, debiendo completar todos los cálculos para la obtención del elemento  $f$  y del ideal de relaciones  $\mathcal{J}$ . En este método graduado vamos haciendo pruebas *intermedias* que nos permiten salir del proceso si encontramos condiciones incompatibles.

Vamos ahora a mostrar un ejemplo donde los ideales cocientes presentan elementos de distinta longitud, para probar la bondad de este método.

Tomemos el álgebra  $\mathcal{A}$  generada en dos variables a partir de las relaciones dadas por el ideal  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}} = \langle xy - yy, xxx - yxy, xxy - yyyx, xxxx \rangle$ . Para calcular el ideal  $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}$  y asegurarnos que las álgebras correspondientes sean isomorfas, sometemos las relaciones de  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$  a la transformación lineal

$$\begin{aligned} x &\longmapsto 3x + y \\ y &\longmapsto -2x - y \end{aligned} \tag{6.14}$$

El ideal de relaciones del álgebra  $\mathcal{B}$  será entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mathcal{B}} = \langle &-10xx - 5xy - 4yx - 2yy, 15xxx + 3xxy + 5xyx + xyy + 3yxx + yyx, \\ &-30xxx - 10xxy - 15xxy - 5xxy - 6yxx - 2xyx - 3xyx - xyxy - \\ &6yxx - 2yxy - 3yxy - yxy, 81xxxx + 27xxy + 27xxy + 9xxy + \\ &27xyx + 9xyx + 9xyx + 3xyy + 27yxx + 9yxy + 9yxy + 3yxy + \\ &9yxx + 3yxy + 3yxy + yyy \rangle \end{aligned}$$

Vamos a buscar si existe isomorfismo graduado entre  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{A}$ . Nuevamente, si existe será de la forma

$$\begin{cases} \hat{\phi}(x) = ax + by \\ \hat{\phi}(y) = cx + dy \end{cases}, \quad a, b, c, d \in k$$

Necesitamos como datos de entrada la base de Gröbner-Shirshov así como una  $k$ -base de  $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mathcal{A}} &= \{xy - yy, xxx - yyy, yyyx, yyyx\} \\ \mathcal{S}_{\mathcal{A}} &= \{xx, yx, yy, yxx, yxy, yyy, yyyx\} \end{aligned}$$

La primera condición es que  $ad - bc \neq 0$ . Los elementos de grado dos normales son  $\{xy, yx, yy\}$ , y la matriz de coeficientes asociada es

$$\begin{pmatrix} ac & bc & ad + bd \\ ac & ad & bc + bd \\ cc & cd & cd + dd \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

En este ejemplo ya aparecen relaciones de grado 2 en el ideal. Sus coeficientes bajo el morfismo son

$$\begin{aligned} &\{-10a^2 - 9ac - 2c^2, \\ &\quad -10ab - 5bc - 4ad - 2cd, \\ &\quad -10ab - 10b^2 - 4bc - 5ad - 9bd - 2cd - 2d^2\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Las condiciones para que se verifiquen las condiciones en grado dos (6.15 y 6.16) dan lugar a las condiciones

$$c = -2a \quad d = \frac{1}{2}(-a - 5b) \quad a^2 + ab \neq 0 \quad (6.17)$$

Los monomios de grado 3 normales en  $\mathcal{B}$  son  $\{yxy, yyx, yyy\}$ . Tenemos que calcular sus imágenes imponiendo las condiciones (6.17). La matriz que obtenemos es

$$\begin{pmatrix} a^2(a+5b) & 5ab(a+b) & \frac{1}{4}(21a^3 + 35a^2b + 55ab^2 + 25b^3) \\ a^2(a+5b) & \frac{5}{4}a(a^2 + 6ab + 5b^2) & \frac{1}{4}(16a^3 + 25a^2b + 50ab^2 + 25b^3) \\ -2a^2(a+5b) - \frac{5}{2}a(a^2 + 6ab + 5b^2) & \frac{1}{8}(-89a^3 - 175a^2b - 275ab^2 - 125b^3) \end{pmatrix}$$

En este caso tenemos también un elemento de grado 3 en el ideal de relaciones. Los coeficientes de su imagen son

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{2}a^2(-a - 5b) + 3a^2b, \right. \\ &\quad \frac{1}{2}a^2(-a - 5b) + \frac{1}{4}a(-a - 5b)^2 + 3a^2b + 3a(-a - 5b)b + 9ab^2, \\ &\quad a^3 + \frac{1}{2}a^2(-a - 5b) + \frac{1}{4}a(-a - 5b)^2 + 3a^2b + 4a(-a - 5b)b + \\ &\quad \left. \frac{1}{2}(-a - 5b)^2b + 14ab^2 + \frac{11}{2}(-a - 5b)b^2 + 15b^3 \right\} \end{aligned}$$

Si resolvemos el sistema para los elementos de grado 3, obtenemos las condiciones

$$b = a \quad c = -2a \quad d = -3a \quad a \neq 0 \quad (6.18)$$

Solo hay un elemento de grado 4, cuya imagen es  $60a^4$ , y bajo (6.18) es distinta de cero. Hay dos elementos de grado 4 en el ideal  $\mathcal{J}_B$ , y bajo las condiciones (6.18) ambos elementos tienen por imagen cero, luego en grado 4 las condiciones son

compatibles. Como no hay más elementos ni relaciones, ambas son isomorfas y el isomorfismo viene dado por la expresión

$$\begin{cases} \hat{\phi}(x) = ax + ay \\ \hat{\phi}(y) = -2ax - 3ay \end{cases}, \quad a \neq 0 \quad (6.19)$$

Podemos comprobar empíricamente que estos cálculos son correctos. Como hemos forzado un cambio lineal para obtener el ideal de relaciones  $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}$ , podíamos haber obtenido las condiciones sobre el isomorfismo invirtiendo el cambio al que hemos sometido a las variables en (6.14). Reescribiendo los términos en forma matricial, los coeficientes son

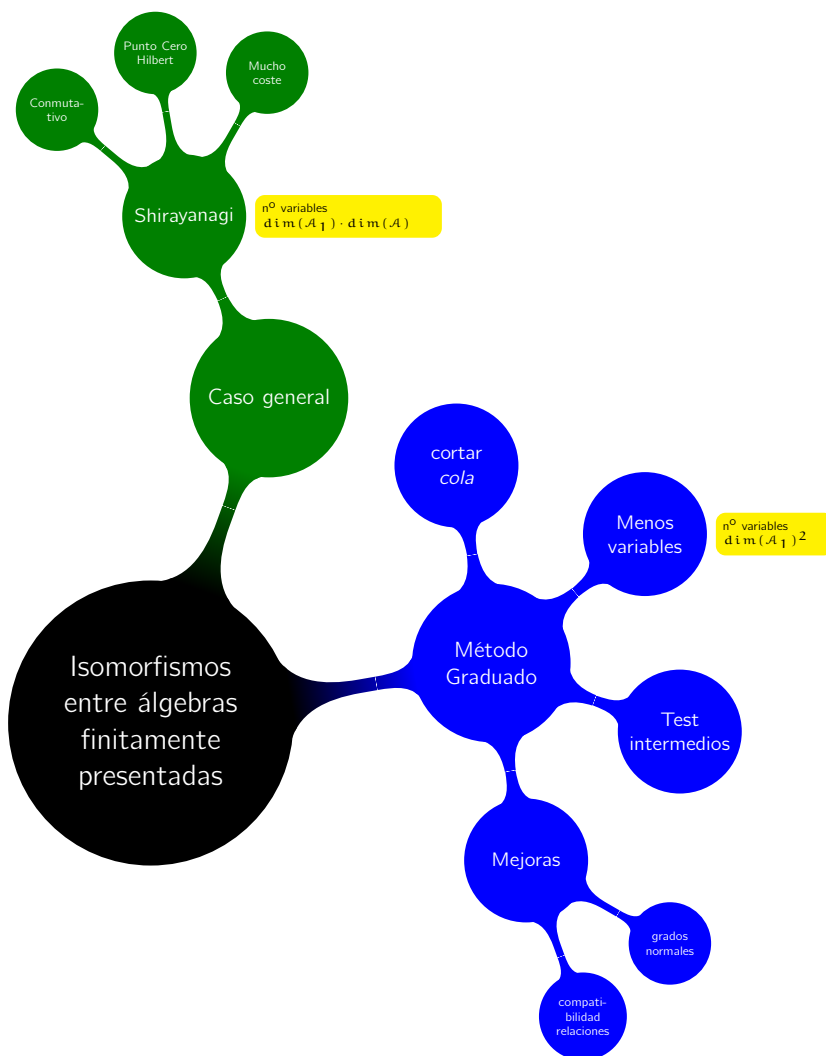
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

que coinciden efectivamente con las condiciones que hemos encontrado (6.19).

Si tratamos de resolver el sistema de coeficientes (que también consume mucho tiempo y memoria) la solución que obtenemos es

$$\begin{aligned} a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -2a_2, \quad a_3 = a_2, \quad b_3 = -3a_2, \\ b_4 = -2a_4, \quad a_6 = a_4 - a_5, \quad b_6 = -3a_4 - b_5, \quad a_2 \neq 0 \end{aligned}$$

con lo que efectivamente podemos comprobar nuestros dos supuestos: que el isomorfismo graduado se puede obtener *cortando* la cola de grado superior a 1 del isomorfismo general, y que existen coeficientes que extienden el isomorfismo graduado a un isomorfismo general.







# 7

## Estudio y clasificación de los ideales cofinitos en las familias $(a, b, c)$

*La cabra que al monte tira,  
aunque le pongan bateras,  
siempre jalará pa'l risco,  
nunca pa' la carretera.*

Herminia Naranjo Hernández  
Hija predilecta de Las Palmas de Gran Canaria

En el Capítulo 6 hemos desarrollado técnicas y herramientas, tanto teóricas como prácticas, que nos permiten estudiar el problema de isomorfía entre álgebras que son finitamente presentadas. Vamos ahora a aprovechar esas técnicas para realizar un estudio de grandes familias de ideales con el fin de extraer información de su naturaleza cofinita. En todo este proceso jugará un papel destacado el desarrollo de rutinas por ordenador (ver Apéndice B) que automaticen el cálculo, ya que no existe otra forma coherente de afrontar este problema con garantías.

Ya hemos estudiado en el Capítulo 5 la graduación natural que presentan las álgebras cocientes con las que vamos a trabajar. Esto nos permite vertebrar todo el proceso que seguiremos a continuación y mantenerlo ordenado en función del grado de los monomios presentes en los cálculos.

Aunque podemos realizar los cálculos grado a grado de manera completamente independiente, ya hemos estudiado que hay casos donde la base de Gröbner-Shirshov es infinita. Para intentar evitar este tipo de situaciones, pero tampoco pasar por alto algún ejemplo que sea de dimensión muy elevada, haremos los cálculos de la base de Gröbner-Shirshov hasta grado 30, suponiendo que si pasa ese límite la base de Gröbner-Shirshov será infinita y por lo tanto el álgebra asociada también.

Los ideales con los que vamos a trabajar están generados por monomios o binomios (diferencia de dos monomios) de la misma longitud, con el objetivo

de obtener homogeneidad en los cálculos subyacentes que se van a desarrollar (Sección 5.1). Estos ideales van a estar parametrizados por tres variables,  $(a, b, c)$  que se referirán a

- a** número de indeterminadas que generan el álgebra
- b** longitud de los monomios o binomios que generan las relaciones del ideal
- c** número de relaciones que generan el ideal

Así, el ideal presentado como

$$\langle xxx, xxy - yxy, xyy - yyy, yxy - yyx \rangle$$

pertenece a la familia  $(2, 3, 4)$ .

El proceso consistirá en obtener las series de Hilbert de cada una de las álgebras. A partir de esta serie de Hilbert será sencillo obtener aquellos ideales que son cofinitos (Sección 5.3). Para cada familia obtendremos una lista de los ideales cofinitos y calcularemos las dimensiones de las álgebras que generan. De esta manera podremos obtener la dimensión máxima de las álgebras finitas de cada una de estas familias. En buena lid, esto nos dará una cota para deducir cuándo otra álgebra de similares características será de dimensión finita o no.

Continuaremos nuestro estudio analizando las clases de isomorfía entre las álgebras de estas subfamilias finitas maximales. Para ello utilizaremos las técnicas que desarrollamos en el Capítulo 6.

El número de ideales a estudiar en cada familia es ciertamente finito. El número de monomios está determinado por los valores  $a$  y  $b$  de nuestros parámetros, de manera que el número de monomios en  $a$  variables de longitud  $b$  es  $a^b$ . Los binomios (2-nomios) se obtienen como diferencia de dos monomios. Se refieren a reglas de reducción de elementos de manera que la reducción es a otro elemento de la misma graduación (reducción *homogénea*). Así pues, podemos obtener todos los posibles binomios como diferencia de dos monomios, siempre el primero mayor que el segundo. El número total de binomios será la suma de una progresión aritmética de razón 1

$$a^b + (a^b - 1) + (a^b - 2) + \dots + 1 = \frac{(a^b + 1)a^b}{2} \quad (7.1)$$

Para terminar la primera parte de nuestro estudio debemos construir todos los posibles ideales tomando  $c$  relaciones de (7.1) como generadores. Este número es el resultado de tomar combinaciones sin repetición de los elementos obtenidos en (7.1) tomados de  $c$  en  $c$ , luego habrá

$$\binom{\frac{(a^b + 1)a^b}{2}}{c}$$

posibles ideales.

Ahora que ya conocemos el proceso para construir todos los ideales de cada familia, solo nos queda enviar esta información al programa Bergman (Apéndice B) y analizar los resultados que nos devuelva el programa.

## Sección 7.1

## Familia (2,2,2)

Ésta fue la primera familia que estudiamos. Como los parámetros son pequeños, es factible construir todos los casos y analizarlos (incluso a mano, como se hizo en un principio). Sin embargo, una vez automatizado el trabajo es mucho más liviano.

El conjunto de variables es  $X = \{x, y\}$ , con  $x > y$ . Los monomios que podemos generar en dos variables son cuatro,  $\{xx, xy, yx, yy\}$ . Las relaciones que se pueden escribir como diferencia de monomios (contando el cero) son

$$\begin{array}{ll} (1) & xx \\ (2) & xy \\ (3) & yx \\ (4) & yy \\ (5) & xx - xy \\ (6) & xx - yx \\ (7) & xx - yy \\ (8) & xy - yx \\ (9) & xy - yy \\ (10) & yx - yy \end{array}$$

Como hay 10 monomios, en total tenemos  $\binom{10}{2} = 45$  ideales que podemos construir, y entre todos estos ideales hay 6 que son cofinitos. El resto de ideales dan lugar a álgebras que tienen un crecimiento polinomial de grado uno, y por lo tanto también tienen dimensión de Gelfand-Kirillov igual a uno.

Entre los 6 casos cofinitos, la dimensión máxima es 6 y se alcanza en 4 casos, que son los dados por los ideales

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \langle xx, xy - yy \rangle \\ \mathcal{J}_2 &= \langle xx, yx - yy \rangle \\ \mathcal{J}_3 &= \langle yy, xx - xy \rangle \\ \mathcal{J}_4 &= \langle yy, xx - yx \rangle \end{aligned}$$

y las bases de Gröbner-Shirshov de las álgebras asociadas a cada uno de estos ideales son

- $\mathcal{G}_1 = \{xx, xy - yy, yy\}$
- $\mathcal{G}_2 = \{xx, yx - yy, yy\}$
- $\mathcal{G}_3 = \{yy, xx - xy, xyx\}$
- $\mathcal{G}_4 = \{yy, xx - yx, xyx\}$

Casualmente, la serie de Hilbert asociada a cada una de estas álgebras cocientes coincide en los cuatro casos. Esta serie de Hilbert es

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(t) = 1 + 2t + 2t^2 + t^3$$

lo que nos dice que estas álgebras tienen por base un elemento de grado 0 (el 1), dos elementos de grado 1, que son los generadores,  $x, y$ , dos elementos de grado 2 y un elemento de grado 3.

Este hecho también nos muestra que estas álgebras *pueden* ser isomorfas. Ya sabemos que la serie de Hilbert es un invariante para álgebras graduadas, que es la situación en la que estamos nosotros (Capítulo 5). Estamos entonces en condiciones para empezar el estudio de isomorfía entre las álgebras de dimensión máxima dentro de esta familia.

Como primer acercamiento, vamos a estudiar los isomorfismos entre las álgebras asociadas a  $\mathcal{J}_1$  e  $\mathcal{J}_4$ . Como ya hemos dicho, este ejemplo es *pequeño* y los cálculos pueden hacerse de manera explícita. Vamos a seguir los procedimientos de Shirayanagi que hemos visto en Capítulo 6.

Sean  $\mathcal{A} = k\langle x, y \rangle / \mathcal{J}_1$  y  $\mathcal{B} = k\langle x, y \rangle / \mathcal{J}_4$  las dos álgebras cocientes asociadas a estos ideales. El primer paso es construir una aplicación lineal entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  de manera que los generadores de  $\mathcal{A}$  se apliquen sobre una base de  $\mathcal{B}$  como  $k$ -espacio vectorial. Tal aplicación tendrá la forma

$$\begin{cases} \varphi(x) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5yx + a_6yxy \\ \varphi(y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy + b_5yx + b_6yxy \end{cases}$$

con  $\{a_i, b_j\} \in k$ .

El siguiente paso es extender la aplicación lineal  $\varphi$  a un homomorfismo entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . A esta aplicación le podemos construir su matriz asociada. Debemos encontrar condiciones sobre los coeficientes para que el determinante de esta matriz sea distinta de cero y que los coeficientes de las imágenes de los generadores del ideal  $\mathcal{J}_1$  sean cero, para que la aplicación esté bien definida.

En este caso, la matriz asociada a esta aplicación es

$$\begin{pmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & a_3b_2 & a_2b_2 + a_2b_3 & a_4b_2 + a_4b_3 + a_3b_5 \\ 0 & 0 & b_2b_3 & b_2^2 + b_2b_3 & b_2b_4 + b_3b_4 + b_3b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3b_2^2 + a_3b_2b_3 \end{pmatrix}$$

y su determinante tiene la forma

$$- a_3b_2^2(b_2 + b_3)^2(a_3b_2 - a_2b_3)^2 \quad (7.2)$$

Los coeficientes de las imágenes de los elementos de esta presentación del ideal  $\mathcal{J}_1$  son


$$\begin{aligned}
\varphi(xx) &\mapsto \{a_1^2, 2a_1a_2, 2a_1a_3, a_2a_3 + 2a_1a_4, a_2^2 + a_2a_3 + 2a_1a_5, \\
&\quad a_2a_4 + a_3a_4 + a_3a_5 + 2a_1a_6\} \\
\varphi(xy - yy) &\mapsto \{a_1b_1 - b_1^2, a_2b_1 + a_1b_2 - 2b_1b_2, a_3b_1 + a_1b_3 - 2b_1b_3, \\
&\quad a_4b_1 + a_2b_3 - b_2b_3 + a_1b_4 - 2b_1b_4, \\
&\quad a_5b_1 + a_2b_2 + a_3b_2 - b_2^2 - b_2b_3 + a_1b_5 - 2b_1b_5, \\
&\quad a_6b_1 + a_5b_3 + a_2b_4 + a_3b_4 - b_2b_4 - b_3b_4 - b_3b_5 + \\
&\quad a_1b_6 - 2b_1b_6\}
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Tendremos un isomorfismo entre nuestras álgebras si existen coeficientes que verifican  $(7.2) \neq 0$  y  $(7.3) = 0$ . Resolviendo este sistema obtenemos las condiciones

$$a_2 = 0 \quad a_5 = -a_4 \quad b_2 = a_3 \quad b_3 = 0 \quad a_3 \neq 0$$

El resto de parámetros son libres, con lo cual el abanico de aplicaciones que constituyen un isomorfismo entre estas dos álgebras es grande. También nos dice que los términos que tienen por coeficientes  $b_4, b_5$  y  $b_6$  no aportan información relevante, ya que sus términos se anulan al realizar cualquier producto.

Si hiciéramos nuestro isomorfismo graduado nos bastaría con olvidar la cola de las imágenes, esto es, nos quedaríamos con la permutación que cambia  $x$  por  $y$ .

**Observación 7.1** ([Shi90]). *Siempre que sometamos las variables a una permutación los ideales que obtenemos dan lugar a álgebras isomorfas.* 

Vamos ahora con dos casos que son opuestos para el producto. En un principio no tendríamos razones para suponer que las álgebras relacionadas son isomorfas. Sin embargo, veremos que esto no es así.

Sean los ideales

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= \langle xx, xy - yy \rangle \\
\mathcal{J}_2 &= \langle xx, yx - yy \rangle
\end{aligned}$$

Necesitamos  $k$ -bases de las dos álgebras relacionadas y una base de Gröbner-Shirshov del ideal  $\mathcal{J}_2$  como datos de entrada. Bien, estos datos son

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{1, x, y, yx, yy, yyx\} \\
B_2 &= \{1, x, y, xy, yy, xyy\} \\
\mathcal{S}_2 &= \{xx, yx - yy, yyy\}
\end{aligned}$$

Si definimos una aplicación  $\tilde{\varphi}$  como en el caso anterior, el determinante de la matriz asociada es

$$-(a_2 + a_3)b_2^2b_3^2(-a_3b_2 + a_2b_3)^2 \tag{7.4}$$

Los coeficientes de las imágenes de las relaciones son

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(xx) &\mapsto \{a_1^2, 2a_1a_2, 2a_1a_3, a_2a_3 + 2a_1a_4, a_2a_3 + a_3^2 + 2a_1a_5, \\ &\quad a_2a_4 + a_3a_4 + a_2a_5\} \\ \tilde{\varphi}(xy - yy) &\mapsto \{a_1b_1 - b_1^2, a_2b_1 + a_1b_2 - 2b_1b_2, a_3b_1 + a_1b_3 - 2b_1b_3, \\ &\quad a_4b_1 + a_2b_3 - b_2b_3 + a_1b_4 - 2b_1b_4, \\ &\quad a_5b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 - b_2b_3 - b_3^2 + a_1b_5 - 2b_1b_5, \\ &\quad a_4b_2 + a_4b_3 - b_2b_4 - b_3b_4 + a_2b_5 - b_2b_5\}\end{aligned}\quad (7.5)$$

Las condiciones sobre los coeficientes  $\{a_i, b_j\}$  que verifican el sistema de ecuaciones  $(7.4) \neq 0$  y  $(7.5) = 0$  son

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_5 = -a_4, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = a_2, \quad b_3 = -a_2, \quad a_2 \neq 0$$

esto es, existen coeficientes que hacen ambas álgebras isomorfas. Esto es debido a que estas álgebras tienen muy pocos elementos, por lo que no es definitorio que los ideales sean opuestos para el producto para evitar isomorfía.

Las cuatro álgebras que tienen dimensión máxima son isomorfas, luego solo hay una clase de isomorfía que contiene todos los ideales cofinitos que derivan en álgebras de dimensión finita máxima. Vamos a ampliar el número de relaciones para poder realizar cálculos más profundos y obtener resultados más potentes.

### Sección 7.2

## Familia (2,2,3)

Partimos ahora de la situación anterior en cuanto a monomios y binomios pero añadimos una nueva relación a los ideales. Ahora las relaciones que generan los ideales se toman de tres en tres. Esto hace que el número de ideales a estudiar sea 120.

Tras estudiar esta familia bajo el prisma de Bergman tenemos que 62 de estos ideales son cofinitos y los otros 58 dan lugar a álgebras con dimensión de Gelfand-Kirillov igual a 1.

Estos 62 ideales dan lugar a álgebras que tienen todas dimensión 4. Teniendo en cuenta que de estos cuatro elementos que tienen en la base tres son  $\{1, x, y\}$ , estas álgebras son bastante pequeñas.

En la Tabla 7.1 tenemos la lista de los ideales que generan álgebras maximales.

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| (1) $\langle xx, xy, yy \rangle$      | (32) $\langle xy, xx - xy, yx - yy \rangle$ |
| (2) $\langle xx, xy, xx - yy \rangle$ | (33) $\langle xy, xx - yx, xx - yy \rangle$ |
| (3) $\langle xx, xy, xy - yy \rangle$ | (34) $\langle xy, xx - yx, xy - yy \rangle$ |
| (4) $\langle xx, xy, yx - yy \rangle$ | (35) $\langle xy, xx - yx, yx - yy \rangle$ |
| (5) $\langle xx, yx, yy \rangle$      | (36) $\langle xy, xx - yy, xy - yx \rangle$ |

Continúa en la página siguiente ...

(6) $\langle xx, yx, xx - yy \rangle$	(37) $\langle xy, xx - yy, xy - yy \rangle$
(7) $\langle xx, yx, xy - yy \rangle$	(38) $\langle xy, xx - yy, yx - yy \rangle$
(8) $\langle xx, yx, yx - yy \rangle$	(39) $\langle yx, yy, xx - xy \rangle$
(9) $\langle xx, yy, xx - xy \rangle$	(40) $\langle yx, yy, xx - yx \rangle$
(10) $\langle xx, yy, xx - yx \rangle$	(41) $\langle yx, yy, xx - yy \rangle$
(11) $\langle xx, yy, xy - yx \rangle$	(42) $\langle yx, xx - xy, xx - yy \rangle$
(12) $\langle xx, yy, xy - yy \rangle$	(43) $\langle yx, xx - xy, xy - yy \rangle$
(13) $\langle xx, yy, yx - yy \rangle$	(44) $\langle yx, xx - xy, yx - yy \rangle$
(14) $\langle xx, xx - xy, xx - yy \rangle$	(45) $\langle yx, xx - yx, xx - yy \rangle$
(15) $\langle xx, xx - xy, xy - yy \rangle$	(46) $\langle yx, xx - yx, xy - yy \rangle$
(16) $\langle xx, xx - xy, yx - yy \rangle$	(47) $\langle yx, xx - yx, yx - yy \rangle$
(17) $\langle xx, xx - yx, xx - yy \rangle$	(48) $\langle yx, xx - yy, xy - yx \rangle$
(18) $\langle xx, xx - yx, xy - yy \rangle$	(49) $\langle yx, xx - yy, xy - yy \rangle$
(19) $\langle xx, xx - yx, yx - yy \rangle$	(50) $\langle yx, xx - yy, yx - yy \rangle$
(20) $\langle xx, xx - yy, xy - yx \rangle$	(51) $\langle yy, xx - xy, xx - yx \rangle$
(21) $\langle xx, xx - yy, xy - yy \rangle$	(52) $\langle yy, xx - xy, xx - yy \rangle$
(22) $\langle xx, xx - yy, yx - yy \rangle$	(53) $\langle yy, xx - xy, xy - yx \rangle$
(23) $\langle xx, xy - yx, xy - yy \rangle$	(54) $\langle yy, xx - xy, xy - yy \rangle$
(24) $\langle xx, xy - yx, yx - yy \rangle$	(55) $\langle yy, xx - xy, yx - yy \rangle$
(25) $\langle xx, xy - yy, yx - yy \rangle$	(56) $\langle yy, xx - yx, xx - yy \rangle$
(26) $\langle xy, yx, xx - yy \rangle$	(57) $\langle yy, xx - yx, xy - yx \rangle$
(27) $\langle xy, yy, xx - xy \rangle$	(58) $\langle yy, xx - yx, xy - yy \rangle$
(28) $\langle xy, yy, xx - yx \rangle$	(59) $\langle yy, xx - yx, yx - yy \rangle$
(29) $\langle xy, yy, xx - yy \rangle$	(60) $\langle yy, xx - yy, xy - yx \rangle$
(30) $\langle xy, xx - xy, xx - yy \rangle$	(61) $\langle yy, xx - yy, xy - yy \rangle$
(31) $\langle xy, xx - xy, xy - yy \rangle$	(62) $\langle yy, xx - yy, yx - yy \rangle$

Tabla 7.1: Ideales cofinitos maximales en la familia  $(2, 2, 3)$ 

El primer paso para clasificar estos ideales salvo isomorfismo es estudiar cuándo dos de estos ideales dan lugar a la misma álgebra. Ya sabemos (Teorema 4.35) que las álgebras quedan definidas por sus palabras normales, que conforman una  $k$ -base. Y las palabras normales quedan definidas por las reglas de reducción, esto es, por los elementos de la base de Gröbner-Shirshov. Así que ideales que tengan la misma base de Gröbner-Shirshov van a dar lugar a las mismas álgebras.

La clasificación de estos ideales según su base de Gröbner-Shirshov se puede observar en la Tabla 7.2.

1				2				3				4		5		6		7		8		9		10		11		12																									
1	2	3	9	4	5	6	8	10	7	11	23	26	28	33	39	42	51	12	14	15	21	16	13	17	19	22	18	20	24	36	34	35	44	43	53	27	29	30	31	32	40	41	45	47	46	60	25	48	58	38	55	49	57
37	52	54	61		50	56	59	62																																													

Tabla 7.2: Distribución ideales de  $(2, 2, 3)$  según su base de Gröbner-Shirshov



Las correspondientes bases de Gröbner-Shirshov son

- $\mathcal{G}_1 = \{xx, xy, yy\}$
- $\mathcal{G}_2 = \{xx, xy, yx - yy, yyy\}$
- $\mathcal{G}_3 = \{xx, yx, yy\}$
- $\mathcal{G}_4 = \{xx, xy - yy, yx, yyy\}$
- $\mathcal{G}_5 = \{xx, xy - yx, yy\}$
- $\mathcal{G}_6 = \{xx, xy - yy, yx - yy, yyy\}$
- $\mathcal{G}_7 = \{xx - yy, xy, yx, yyy\}$
- $\mathcal{G}_8 = \{xx - yx, xy, yy\}$
- $\mathcal{G}_9 = \{xx - yy, xy, yx - yy, yyy\}$
- $\mathcal{G}_{10} = \{xx - xy, yx, yy\}$
- $\mathcal{G}_{11} = \{xx - yy, xy - yy, yx, yyy\}$
- $\mathcal{G}_{12} = \{xx - yx, xy - yx, yy\}$

Nuestro método graduado nos dice que estos doce casos se distribuyen en cuatro clases de isomorfía según la Tabla 7.3 (el proceso no es mostrado esta vez por cuestiones de espacio).

Tipo A	Tipo B	Tipo C	Tipo D
1 3 4 8	5 6 7 12	2 10	9 11

Tabla 7.3: Clases de isomorfía en (2, 2, 3)

En la primera clase hay 32 álgebras, en la segunda clase hay 12 casos y 6 en cada una de las dos restantes.

El siguiente paso que daremos será aumentar la longitud de las relaciones. Seguir ampliando el número de relaciones que generan el ideal solo dará lugar a ideales que contienen relaciones redundantes, esto es, relaciones que son suma de otras relaciones.

### Sección 7.3

## Familia (2,3,3)

Esta familia presenta una casuística más rica que la familia anterior. En total presenta 7140 posibles ideales. El estudio que resulta del análisis mediante Bergman de esta familia dice que hay exactamente 300 ideales cofinitos. El resto de ideales presentan diversos grados en la dimensión de Gelfand-Kirillov desde 1 hasta  $\infty$ .

Estos 300 ideales cofinitos se distribuyen de la siguiente manera

- 8 ideales que generan álgebras de dimensión 16
- 94 ideales que generan álgebras de dimensión 17

- 20 ideales que generan álgebras de dimensión 18
- 56 ideales que generan álgebras de dimensión 19
- 32 ideales que generan álgebras de dimensión 20
- 62 ideales que generan álgebras de dimensión 21
- 4 ideales que generan álgebras de dimensión 23
- 12 ideales que generan álgebras de dimensión 25
- 4 ideales que generan álgebras de dimensión 27
- 4 ideales que generan álgebras de dimensión 30
- 4 ideales que generan álgebras de dimensión 36

Centremos nuestro estudio en la subfamilia que da lugar a álgebras finitas de dimensión máxima en esta familia. En este caso son 4 álgebras cocientes que tienen dimensión 36 que además tienen la misma serie de Hilbert

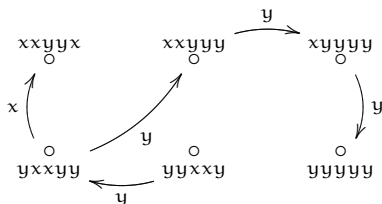
$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(t) = 1 + 2t + 4t^2 + 5t^3 + 6t^4 + 6t^5 + 5t^6 + 4t^7 + 2t^8 + t^9 \quad (7.6)$$

De esta manera es posible que existan isomorfismos entre ellas, ya que la serie de Hilbert es un invariante para álgebras graduadas (Sección 5.3).

Estos cuatro ideales cofinitos *maximales* son los siguientes

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \langle xxx, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle \\ \mathcal{J}_2 &= \langle xxx, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle \\ \mathcal{J}_3 &= \langle yyy, xxx - xyx, xxy - yxy \rangle \\ \mathcal{J}_4 &= \langle yyy, xxx - xyx, yxx - yxy \rangle \end{aligned} \quad (7.7)$$

Podemos ilustrar la situación de las álgebras asociadas a estos ideales mediante un grafo de Ufnarovskii ([Ufn82]). Por ejemplo, el grafo asociado al álgebra cociente  $\mathcal{A}_1 = k\langle x, y \rangle / \mathcal{J}_1$  es



Podemos observar claramente cómo los elementos de longitud mayor o igual que 5 están en correspondencia 1-1 con los coeficientes de la serie de Hilbert (7.6) sin más que recorrer los caminos del grafo. Así, elementos de grado 6 hay 5,  $\{xxyyyyy, xyyyyyy, yxyxyyy, yxxxyyy, yxyyyyy\}$ , elementos de grado 7 hay 4,  $\{xxyyyyyy, yxyxyyyx, yxyxyyyy, yxxxyyyy\}$ , elementos de grado 8 hay 2,  $\{yxyxyyyy, yxxxyyyy\}$ , y de grado 9 solo hay un monomio,  $\{yxyxyyyy\}$ .

Unas bases de Gröbner-Shirshov asociadas a estos ideales (7.7) son

- $\mathcal{G}_1 = \{xxx, xyx - xyy, yxy - yyy, yyyx - yyyy, xy yxx, yyyyyy\}$
- $\mathcal{G}_2 = \{xxx, xyx - yyx, yxy - yyy, xy yyy - yyyyy, xx yyx, yyyyyy\}$
- $\mathcal{G}_3 = \{xxx - xyx, xxy - yxy, yyy, xyxx - yxyx, xy yxy - yxyxy, xyxyx - yxyyx\}$
- $\mathcal{G}_4 = \{xxx - xyx, yyx - yxy, yyy, xx yx - xyxy, xyxyx - xyxyy, yxyxy - yxyyx, xyxyyx, yxyyxyy, yxyyxxy\}$

Este caso ya empieza a ser complicado de estudiar usando las técnicas de Shirayanagi ([Shi93]). Las álgebras asociadas a estos ideales tienen dimensión 36, lo que hace que en el posible isomorfismo que vamos a construir trabajemos sobre un cuerpo con 72 variables. Los cálculos, obviamente, son enormes, y el consumo de memoria para calcular bases de Gröbner (en este caso conmutativas) de ideales en 73 variables es altísimo. Evidentemente, para un ordenador esto supone un esfuerzo enorme.

Con nuestro método graduado el proceso es mucho más sencillo y ligero. Veamos un ejemplo. Sean  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_3$  las álgebras asociadas a los correspondientes ideales de (7.7). El isomorfismo graduado será de la forma

$$\begin{cases} \hat{\phi}(x) = ax + by \\ \hat{\phi}(y) = cx + dy \end{cases}, \quad a, b, c, d \in k \quad (7.8)$$

Ahora empezamos a imponer condiciones sobre los coeficientes a ver si pueden existir. La primera condición es que la aplicación tenga inversa, por lo que

$$ad - bc \neq 0 \quad (7.9)$$

Los elementos de la base de Gröbner-Shirshov del ideal  $\mathcal{J}_1$  comienzan en grado 3, por lo que el grado 2 es normal y no tenemos por qué calcular el determinante de la matriz correspondiente. Podemos ir directamente a los elementos de grado 3, en virtud del Lema 6.8.

Los monomios normales de longitud 3 en  $\mathcal{A}_1$  son  $\{xxy, xyy, yxx, yyx, yyy\}$ , y la matriz de coeficientes de sus imágenes es

$$\hat{M}_3 = \begin{pmatrix} aad \ aac + abc \ abd \ abc + abd \ bbc \\ acd \ acc + acd \ add \ bcc + bcd \ bcd \\ abc \ aac + abc \ bbc \ aad + abd \ abd \\ bcc \ acc + acd \ bcd \ acd + bcd \ add \\ ccd \ ccc + ccd \ cdd \ ccd + cdd \ cdd \end{pmatrix}$$

Si calculamos el determinante de esta matriz obtenemos

$$c^2(bc - ad)^5 (bc^2 + acd + 2bcd + 2ad^2 + bd^2) \quad (7.10)$$

La condición que resulta de unir (7.9) y (7.10) es

$$c(bc - ad)(bc^2 + acd + 2bcd + 2ad^2 + bd^2) \neq 0 \quad (7.11)$$

En grado 3 están todos los elementos de la presentación del ideal  $\mathcal{J}_1$  por lo que tenemos que calcular las imágenes y comprobar si son compatibles con  $(7.11) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(xxx) &\mapsto \{a^3 + a^2b, ab^2, a^2b, a^2b + ab^2, ab^2\} \\ \hat{\varphi}(xyx - xyx) &\mapsto \{a^2c - ac^2 + a^2d - acd, abd - ad^2, abc - bc^2, \\ &\quad abc + b^2c - acd - bcd, abd - bcd\} \\ \hat{\varphi}(yxy - yyy) &\mapsto \{ac^2 + bc^2 - c^3 - c^2d, bcd - cd^2, acd - c^2d, \\ &\quad acd - c^2d + ad^2 - cd^2, bcd - cd^2\} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Sin embargo, el sistema  $(7.11) \neq 0, (7.12) = 0$  no tiene solución para  $\{a, b, c, d\}$ , por lo que no puede existir un isomorfismo graduado entre estas dos álgebras y por lo tanto no son isomorfas.

De manera análoga, podemos demostrar que  $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_4$  y  $\mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_3$ , luego hay dos clases de isomorfía de dos elementos cada una en la subfamilia de ideales cofinitos que generan álgebras de dimensión máxima.

## Sección 7.4

## Familia (2,3,4)

Bajo los parámetros dados por esta familia el número de ideales a estudiar es 58905. Una vez enviados todos estos ideales a *Bergman*, éste nos devuelve 10142 ideales cofinitos distribuidos de la siguiente manera

- 288 ideales que generan álgebras de dimensión 11
- 2446 ideales que generan álgebras de dimensión 12
- 3578 ideales que generan álgebras de dimensión 13
- 1246 ideales que generan álgebras de dimensión 14
- 2146 ideales que generan álgebras de dimensión 15
- 92 ideales que generan álgebras de dimensión 16
- 174 ideales que generan álgebras de dimensión 17
- 88 ideales que generan álgebras de dimensión 18
- 8 ideales que generan álgebras de dimensión 19
- 72 ideales que generan álgebras de dimensión 21
- 4 ideales que generan álgebras de dimensión 25

La dimensión máxima de las álgebras asociadas a estos ideales cofinitos es 25 y se alcanza en 4 casos. Recordamos que el proceso de obtención de la dimensión de las álgebras está graduado, por lo que es esperable que cualquier álgebra que estudiemos en esta familia con dimensión mayor de 25 sea de dimensión infinita.

Los cuatro ideales que se corresponden con álgebras de dimensión finita máxima son

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyx - yyy \rangle \\ \mathcal{J}_2 &= \langle xxx, xyx, xxx - xyx, yyx - yyy \rangle \\ \mathcal{J}_3 &= \langle yxy, yyy, xxx - xxy, yxy - yyy \rangle \\ \mathcal{J}_4 &= \langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle \end{aligned} \quad (7.13)$$

Todos estos ideales generan álgebras que tienen la misma serie de Hilbert, que en este caso es

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 4x^5 + 3x^6 + x^7$$

Ya sabemos que la serie de Hilbert es un invariante para álgebras graduadas. Pero álgebras con la misma serie de Hilbert no tienen por qué ser isomorfas.

Podemos comprobar que estos ideales están íntimamente relacionados.  $\mathcal{J}_1$  e  $\mathcal{J}_4$  tienen los mismos generadores cambiando  $x \leftrightarrow y$ , igual que  $\mathcal{J}_2$  e  $\mathcal{J}_3$ . De la misma manera  $\mathcal{J}_1$  e  $\mathcal{J}_2$  tienen los mismos elementos pero bajo el producto opuesto.

Las bases de Gröbner-Shirshov y las bases como  $k$ -espacio vectorial de cada álgebra cociente son

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{xxx, xyx, xyx - yyy, yyy\} \\ \mathcal{B}_1 &= \{1, x, y, xx, xy, yx, yy, xxy, yxx, yxy, yyy, yxyx, yyyx, \\ &\quad yyyx, yyyx, yyyx, yyyx, yyyx, \\ &\quad yyyx, yyyx, yyyx, yyyx\} \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2 &= \{xxx, xyx, yyx - yyy, yyy\} \\ \mathcal{B}_2 &= \{1, x, y, xx, xy, yx, yy, xxy, xyx, yxx, yxy, yyy, xxyy, xyxy, \\ &\quad yxyx, yxyx, yxyx, xxyy, xyxy, yxyx, yxyx, xxyy, \\ &\quad yxyx, yxyx, yxyx\} \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3 &= \{xxx - xxy, yxy, yyy, xxyx - xxyy, xxyx\} \\ \mathcal{B}_3 &= \{1, x, y, xx, xy, yx, yy, xxy, xyx, xyx, yxx, yxy, xxyy, xyxx, \\ &\quad xyxx, yxyx, yxyx, xyxx, xyxx, yxyx, yxyx, xyxx, \\ &\quad xyxx, yxyx, xyxx\} \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4 &= \{xxx - yxx, yxy, yyy, xyxx - yyx, xyxx\} \\ \mathcal{B}_4 &= \{1, x, y, xx, xy, yx, yy, xxy, xyx, xyx, yxx, yxy, xxyx, xxyx, \\ &\quad xyxx, yxyx, yxyx, xxyx, xyxx, yxyx, yxyx, xyxx, \\ &\quad xyxx, yxyx, xyxx\} \end{aligned} \quad (7.17)$$



**Observación 7.2.** Podemos comprobar que los ideales que son opuestos para el producto generan álgebras que tienen bases opuestas para el producto. Pero los ideales que permutan variables no dan lugar a álgebras cuyas bases permutan las variables.

Tenemos varias formas de buscar clases de isomorfismos entre estas cuatro álgebras. Usemos el método desarrollado por Shirayanagi en [Shi93] que ya hemos comentado.

La idea es construir una aplicación  $k$ -lineal  $\varphi : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_4$  usando las imágenes de cada generador del álgebra  $\mathcal{A}_1$  sobre una base de  $\mathcal{A}_4$ . Luego inducimos que  $\varphi$  actúe como un homomorfismo de anillo y construimos la matriz de la aplicación asociada. Esta matriz tiene coeficientes en  $k$  y tiene determinante distinto de cero si y solo si  $\varphi$  admite una aplicación inversa.

Ésta es una premisa. La otra será que esté bien definida, esto es, que los elementos de la presentación del ideal  $\mathcal{J}_1$  reduzcan a cero en  $\mathcal{A}_4$  a través de  $\varphi$ .

Es importante resaltar la complicación que hay tras estos cálculos. Los coeficientes de las imágenes de los tres elementos del ideal  $\mathcal{J}_1$  pueden llenar casi cuatro páginas. Ahora tenemos que unir todos estos coeficientes y el elemento  $(t^f - 1)$  en un ideal y comprobar si  $1$  pertenece a este ideal, que es calculado sobre un cuerpo con 51 variables. Para este caso ya empieza a ser complicado obtener la expresión de la base de Gröbner porque, aunque conmutativa, el número de elementos que generan este ideal es enorme.

Vamos a aplicar nuestro método graduado para buscar posibles isomorfismos en esta subfamilia. Sean  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_4$  las álgebras cocientes asociadas con los ideales  $\mathcal{J}_1$  e  $\mathcal{J}_4$  de (7.13). El posible isomorfismo graduado tendrá la forma

$$\begin{cases} \hat{\varphi}(x) = ax + by \\ \hat{\varphi}(y) = cx + dy \end{cases}, \quad a, b, c, d \in k \quad (7.18)$$

Podemos entonces deducir la primera condición, que es que la matriz asociada sea distinta de cero para que tenga inversa. Esto es

$$ad - bc \neq 0 \quad (7.19)$$

El grado 2 en este ejemplo es normal, porque los elementos de la base de Gröbner-Shirshov empiezan en grado 3. Así que el determinante de la matriz asociada al grado 2 es múltiplo de (7.19) por el Lema 6.8.

Los monomios irreducibles de grado 3 en  $\mathcal{A}$  son  $\{xxy, yxx, yxy, yyx, yyy\}$ . La correspondiente matriz de coeficientes asociada al subespacio de grado tres es

$$\hat{M}_3 = \begin{pmatrix} aad & abc & abd & aac + abc & bbc \\ abc & abc & bbc & aac + aad & abd \\ acd & bcc & bcd & acc + acd & bcd \\ bcc & acd & bcd & acc + acd & add \\ ccd & ccd & cdd & ccc + ccd & cdd \end{pmatrix}$$

Para mantener  $\det(\hat{M}_3)$  bajo (7.19) la condición es

$$bc(c + d)(bc - ad) \neq 0 \quad (7.20)$$

En este nivel tenemos también que introducir las condiciones que se derivan de las imágenes de los elementos del ideal  $\mathcal{J}_1$ . Tenemos que calcular las imágenes del conjunto  $\hat{\varphi}(\mathcal{J}_1)$  y hacer que vayan a cero bajo  $\mathcal{G}_4$ . Hay tres relaciones a estudiar

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(xxx) &\mapsto \{a^2b, a^2b, ab^2, a^3 + a^2b, ab^2\} \\ \hat{\varphi}(xyx) &\mapsto \{abc, a^2d, abd, a^2c + abc, abd\} \\ \hat{\varphi}(xyy - yyy) &\mapsto \{acd - c^2d, acd - c^2d, \\ &\quad ad^2 - cd^2, ac^2 + bc^2 - c^3 - c^2d, bcd - cd^2\} \end{aligned}$$

La solución al sistema que hace estos coeficientes igual a cero manteniendo las condiciones (7.20) es

$$a = 0 \quad b = c \neq 0 \quad d = 0 \quad (7.21)$$

Como no hay elementos de grado superior en los generadores de  $\mathcal{J}_1$ , podemos concluir que las condiciones (7.21) expresan condiciones bajo las cuales el isomorfismo (7.18) existe (Lema 6.14).

Por lo tanto, existe un isomorfismo  $\hat{\varphi} : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_4$ , en el sentido de (7.18) si y solo si

$$a = 0 \quad b = c \neq 0 \quad d = 0$$

Este resultado ya nos permite afirmar que  $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_4$ . Como ya tenemos que existe un isomorfismo graduado, es posible que exista un isomorfismo con cola distinta de cero, pero este método no nos lo permite asegurar. De la misma manera podemos asegurar que  $\mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_3$  y  $\mathcal{A}_1 \not\cong \mathcal{A}_2$ , por lo que hay dos clases de isomorfía en esta subfamilia de ideales cofinitos que generan álgebras de dimensión máxima.

En un sentido estricto de la palabra, los ideales con los que hemos trabajado no están exactamente en esta familia. Podemos observar que todos estos ideales contienen alguna relación redundante. El algoritmo que seguimos para construir los ideales no tuvo en cuenta este detalle. De esta manera, estos ideales pertenecen realmente a la familia (2, 3, 3). La dimensión máxima que se consigue con ideales que pertenecen realmente a la familia (2, 3, 4) es 21. Esta dimensión se alcanza en 72 casos que se muestran en la Tabla 7.4.

- |   |   |
|---|---|
| (1) $\langle xxx, xyx, yyy, xxy - yxy \rangle$        | (37) $\langle xyx, yyy, xxx - xyx, xxy - yxy \rangle$       |
| (2) $\langle xxx, xyx, yyy, yxx - yxy \rangle$        | (38) $\langle xyx, yyy, xxx - xyx, yxx - yxy \rangle$       |
| (3) $\langle xxx, xyx, xxx - yyy, xxy - yxy \rangle$  | (39) $\langle xyx, yyy, xxx - xyx, xyx - yyy \rangle$       |
| (4) $\langle xxx, xyx, xxx - yyy, yxx - yxy \rangle$  | (40) $\langle xyx, yyy, xxx - yyy, xxy - yxy \rangle$       |
| (5) $\langle xxx, xyx, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$  | (41) $\langle xyx, yyy, xxx - yyy, xxy - yxy \rangle$       |
| (6) $\langle xxx, xyx, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$  | (42) $\langle xyx, yyy, xxx - yyy, yxx - yxy \rangle$       |
| (7) $\langle xxx, yxy, yyy, xyx - xyy \rangle$        | (43) $\langle xyx, xxx - xyx, xxx - yyy, xxy - yxy \rangle$ |
| (8) $\langle xxx, yxy, yyy, xyx - yyx \rangle$        | (44) $\langle xyx, xxx - xyx, xxx - yyy, yxx - yxy \rangle$ |
| (9) $\langle xxx, yxy, xxx - yxy, xxy - yyy \rangle$  | (45) $\langle xyx, xxx - xyx, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$ |
| (10) $\langle xxx, yxy, xxx - yxy, yxx - yyy \rangle$ | (46) $\langle xyx, xxx - xyx, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$ |
| (11) $\langle xxx, yxy, xxx - yyy, xyx - xyy \rangle$ | (47) $\langle xyx, xxx - yyy, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$ |

Continúa en la página siguiente ...

- (12)  $\langle xxx, yxy, xxx - yyy, xyx - yyx \rangle$  (48)  $\langle xyx, xxx - yyy, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$   
 (13)  $\langle xxx, yxy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$  (49)  $\langle yxy, yyy, xxx - yxy, xyx - xyy \rangle$   
 (14)  $\langle xxx, yxy, xyx - yyy, yxy - yyy \rangle$  (50)  $\langle yxy, yyy, xxx - yxy, xyx - yyy \rangle$   
 (15)  $\langle xxx, yyy, xxx - xyx, xxy - yxy \rangle$  (51)  $\langle yxy, yyy, xxx - yyy, xyx - xyy \rangle$   
 (16)  $\langle xxx, yyy, xxx - xyy, yxx - yxy \rangle$  (52)  $\langle yxy, yyy, xxx - yyy, xyx - yyy \rangle$   
 (17)  $\langle xxx, yyy, xxx - yxy, xyx - xyy \rangle$  (53)  $\langle yxy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - xyy \rangle$   
 (18)  $\langle xxx, yyy, xxx - yxy, xyx - yyx \rangle$  (54)  $\langle yxy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - yyy \rangle$   
 (19)  $\langle xxx, yyy, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$  (55)  $\langle yxy, xxx - yxy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$   
 (20)  $\langle xxx, yyy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$  (56)  $\langle yxy, xxx - yxy, xyx - yyy, yxy - yyy \rangle$   
 (21)  $\langle xxx, yyy, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$  (57)  $\langle yxy, xxx - yyy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$   
 (22)  $\langle xxx, yyy, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$  (58)  $\langle yxy, xxx - yyy, xyx - yyy, yxy - yyy \rangle$   
 (23)  $\langle xxx, xxx - xyx, xxx - yyy, xxy - yxy \rangle$  (59)  $\langle yyy, xxx - xyx, xxx - xyy, xyx - xyy \rangle$   
 (24)  $\langle xxx, xxx - xyx, xxx - yyy, yxx - yxy \rangle$  (60)  $\langle yyy, xxx - xyx, xxx - yyy, xyx - yyx \rangle$   
 (25)  $\langle xxx, xxx - xyx, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$  (61)  $\langle yyy, xxx - xyx, xxx - yyy, xxy - yxy \rangle$   
 (26)  $\langle xxx, xxx - xyx, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$  (62)  $\langle yyy, xxx - xyx, xxx - yyy, yxx - yxy \rangle$   
 (27)  $\langle xxx, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - xyy \rangle$  (63)  $\langle yyy, xxx - xyx, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$   
 (28)  $\langle xxx, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - yyx \rangle$  (64)  $\langle yyy, xxx - xyx, xxy - yxy, yxx - yxy \rangle$   
 (29)  $\langle xxx, xxx - yxy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$  (65)  $\langle yyy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - xyy \rangle$   
 (30)  $\langle xxx, xxx - yxy, xyx - yyy, yxy - yyy \rangle$  (66)  $\langle yyy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - yyx \rangle$   
 (31)  $\langle xxx, xxx - yyy, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$  (67)  $\langle yyy, xxx - yxy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$   
 (32)  $\langle xxx, xxx - yyy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$  (68)  $\langle yyy, xxx - yxy, xyx - yyy, yxy - yyy \rangle$   
 (33)  $\langle xxx, xxx - yyy, xyx - yyy, yxy - yyy \rangle$  (69)  $\langle yyy, xxx - yyy, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$   
 (34)  $\langle xxx, xxx - yyy, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$  (70)  $\langle yyy, xxx - yyy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$   
 (35)  $\langle xxx, xxy - yxy, xxy - yyy, yxy - yyy \rangle$  (71)  $\langle yyy, xxx - yyy, xyx - yyy, yxy - yyy \rangle$   
 (36)  $\langle xxx, yxx - yxy, yxx - yyy, yxy - yyy \rangle$  (72)  $\langle yyy, xxx - yyy, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$

Tabla 7.4: Ideales cofinitos maximales en la familia  $(2, 3, 4)$ 

En este caso tenemos una situación especial. Por primera vez nos aparecen dos series de Hilbert distintas entre todas las álgebras asociadas. Las dos series de las que hablamos son

$$\mathcal{H}_A = 1 + 2x + 4x^3 + 4x^3 + 4x^4 + 3x^5 + 2x^6 + x^7$$

$$\mathcal{H}_B = 1 + 2x + 4x^2 + 5x^3 + 5x^4 + 3x^5 + x^6$$

Las álgebras se distribuyen con respecto a estas series de Hilbert según se puede observar en la Tabla 7.5.

Tipo $\mathfrak{A}$	Tipo $\mathfrak{B}$
Todos excepto los de tipo $\mathfrak{B}$	(9),(10),(35),(36),(39),(40),(59),(60)

Tabla 7.5: Distribución álgebras maximales de  $(2, 3, 4)$  según serie de Hilbert

Aunque este hecho parece de una naturaleza extraña, debajo de él no deja de existir una situación razonable. Los ideales que presentan la serie de Hilbert  $\mathfrak{B}$  contienen relaciones redundantes, luego pertenecen realmente a la familia  $(2, 3, 3)$  estudiada en la Sección 7.3.



Vamos a clasificar los ideales de tipo  $\mathfrak{A}$ . En términos de su base de Gröbner-Shirshov hay cuatro tipos diferentes de álgebras, que se muestran en la Tabla 7.6.

1				2				3				4			
1	3	5	15	2	4	6	16	7	11	13	17	8	12	14	18
19	23	25	31	22	24	26	34	20	27	29	32	21	28	30	33
37	41	43	45	38	42	44	46	49	51	53	55	50	52	54	56
47	61	63	69	48	62	64	72	57	65	67	70	58	66	68	71

Tabla 7.6: Distribución ideales de (2,3,4) según base de Gröbner-Shirshov

Las bases de Gröbner-Shirshov correspondientes son

- $\mathcal{G}_1 = \{xxx, xxy - yxy, xyx, yyy, xy yxy\}$
- $\mathcal{G}_2 = \{xxx, xyx, yxx - yxy, yyy, yxyyx\}$
- $\mathcal{G}_3 = \{xxx, xyx - xy y, yxy, yyy, xy yxx\}$
- $\mathcal{G}_4 = \{xxx, xyx - yyx, yxy, yyy, xy yxy\}$

Nuestro criterio de isomorfismo graduado nos muestra que  $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_4$  y  $\mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_3$ . Por lo tanto hay dos clases de isomorfía con treinta elementos en cada clase.

Las álgebras de tipo  $\mathfrak{B}$  tiene todas bases de Gröbner-Shirshov diferentes, luego no tenemos una clasificación previa. Estas bases de Gröbner-Shirshov son

- $\mathcal{G}_9 = \{xxx, xxy - yyy, yxy, xy yy, yyy yy\}$
- $\mathcal{G}_{10} = \{xxx, yxx - yyy, yxy, yyyx, yyy yy\}$
- $\mathcal{G}_{35} = \{xxx, xxy - yyy, yxy - yyy, xy yy, yyy yy\}$
- $\mathcal{G}_{36} = \{xxx, yxx - yyy, yxy - yyy, yyyx, yyy yy\}$
- $\mathcal{G}_{39} = \{xxx - xy y, xyx, yyy, xxy - xy yx, xy yxy, xy yxx\}$
- $\mathcal{G}_{40} = \{xxx - yyx, xyx, yyy, xy yx - yyxx\}$
- $\mathcal{G}_{59} = \{xxx - xy y, xyx - xy y, yyy, xxy - xy yx, xy yxy, xy yxx\}$
- $\mathcal{G}_{60} = \{xxx - yyx, xyx - yyx, yyy, xy yx - yyxx\}$

El criterio de isomorfismo graduado nos da las relaciones  $\mathcal{A}_9 \cong \mathcal{A}_{40}$ ,  $\mathcal{A}_{10} \cong \mathcal{A}_{39}$ ,  $\mathcal{A}_{35} \cong \mathcal{A}_{60}$  y  $\mathcal{A}_{36} \cong \mathcal{A}_{59}$ .

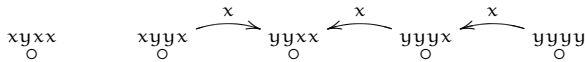
Así que dentro de esta subfamilia maximal de ideales cofinitos hay 6 clases de isomorfía diferentes.



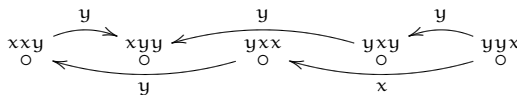
**Observación 7.3.** Aunque álgebras con la misma base de Gröbner-Shirshov dan lugar a álgebras isomorfas (la misma base de Gröbner-Shirshov da lugar a la misma  $k$ -base), dos álgebras que tengan la misma  $k$ -base no tienen por qué compartir la misma base de Gröbner-Shirshov ni, obviamente, ser isomorfas. Un ejemplo de ello

son las álgebras  $\mathcal{A}_5$  y  $\mathcal{A}_7$ , que tienen la misma  $k$ -base, la base de Gröbner-Shirshov es casi la misma pero las álgebras resultantes no son isomorfas.

**Observación 7.4.** También podemos comprobar que ni el grado máximo de la base de Gröbner-Shirshov ni el grafo de Ufnarovskii imponen restricciones para que dos álgebras sean isomorfas. Por ejemplo,  $\mathcal{G}_{35}$  tiene por grado máximo 5 y el grafo de Ufnarovskii asociado a  $\mathcal{A}_{35}$  es



Por otro lado  $\mathcal{G}_{60}$  tiene por grado máximo 4 y su grafo es



Ambas álgebras son isomorfas.

### Sección 7.5

## Familia (2,3,5)

En esta sección vamos a estudiar una ampliación de la familia anterior añadiéndole una nueva relación. Seguimos contando con 8 monomios y 36 posibles relaciones. Sin embargo, como ahora tomamos las relaciones de cinco en cinco tenemos más posibilidades para construir los ideales. De hecho ahora tenemos 376992 ideales. De estos, 123780 son ideales cofinitos, siendo la dimensión finita máxima alcanzada 21. La lista completa de ideales cofinitos y las dimensiones de sus álgebras asociadas es

- 48942 ideales que generan álgebras de dimensión 10
- 50630 ideales que generan álgebras de dimensión 11
- 11374 ideales que generan álgebras de dimensión 12
- 9596 ideales que generan álgebras de dimensión 13
- 738 ideales que generan álgebras de dimensión 14
- 2174 ideales que generan álgebras de dimensión 15
- 68 ideales que generan álgebras de dimensión 16
- 130 ideales que generan álgebras de dimensión 17
- 68 ideales que generan álgebras de dimensión 18
- 60 ideales que generan álgebras de dimensión 21

Como hemos hecho en los casos anteriores, vamos a clasificar los ideales que presentan álgebras asociadas de dimensión finita máxima. En este caso esta dimensión se alcanza en 60 ideales, que están expresados en la Tabla 7.7.

- (1)  $\langle xxx, xyx, yyy, xxx - xyx, xxy - yxy \rangle$
- (2)  $\langle xxx, xyx, yyy, xxx - xyx, yxx - yxy \rangle$
- (3)  $\langle xxx, xyx, yyy, xxx - yyy, xxy - yxy \rangle$
- (4)  $\langle xxx, xyx, yyy, xxx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (5)  $\langle xxx, xyx, yyy, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$
- (6)  $\langle xxx, xyx, yyy, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (7)  $\langle xxx, xyx, xxx - xyx, xxx - yyy, xxy - yxy \rangle$
- (8)  $\langle xxx, xyx, xxx - xyx, xxx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (9)  $\langle xxx, xyx, xxx - xyx, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$
- (10)  $\langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (11)  $\langle xxx, xyx, xxx - yyy, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$
- (12)  $\langle xxx, xyx, xxx - yyy, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (13)  $\langle xxx, yxy, yyy, xxx - yxy, xyx - xyy \rangle$
- (14)  $\langle xxx, yxy, yyy, xxx - yxy, xyx - yyx \rangle$
- (15)  $\langle xxx, yxy, yyy, xxx - yyy, xyx - xyy \rangle$
- (16)  $\langle xxx, yxy, yyy, xxx - yyy, xyx - yyx \rangle$
- (17)  $\langle xxx, yxy, yyy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$
- (18)  $\langle xxx, yxy, yyy, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$
- (19)  $\langle xxx, yxy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - xyy \rangle$
- (20)  $\langle xxx, yxy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - yyx \rangle$
- (21)  $\langle xxx, yxy, xxx - yxy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$
- (22)  $\langle xxx, yxy, xxx - yxy, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$
- (23)  $\langle xxx, yxy, xxx - yyy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$
- (24)  $\langle xxx, yxy, xxx - yyy, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$
- (25)  $\langle xxx, yyy, xxx - xyx, xxx - yyy, xxy - yxy \rangle$
- (26)  $\langle xxx, yyy, xxx - xyx, xxx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (27)  $\langle xxx, yyy, xxx - xyx, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$
- (28)  $\langle xxx, yyy, xxx - xyx, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (29)  $\langle xxx, yyy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - xyy \rangle$
- (30)  $\langle xxx, yyy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - yyx \rangle$
- (31)  $\langle xxx, yyy, xxx - yxy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$
- (32)  $\langle xxx, yyy, xxx - yxy, xyx - yyy, yxy - yyy \rangle$
- (33)  $\langle xxx, yyy, xxx - yyy, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$
- (34)  $\langle xxx, yyy, xxx - yyy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$
- (35)  $\langle xxx, yyy, xxx - yyy, xyx - yyy, yxy - yyy \rangle$
- (36)  $\langle xxx, yyy, xxx - yyy, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (37)  $\langle xxx, xxx - xyx, xxx - yyy, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$
- (38)  $\langle xxx, xxx - xyx, xxx - yyy, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (39)  $\langle xxx, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$
- (40)  $\langle xxx, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$
- (41)  $\langle yxy, yyy, xxx - xyx, xxx - yyy, xxy - yxy \rangle$
- (42)  $\langle yxy, yyy, xxx - xyx, xxx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (43)  $\langle yxy, yyy, xxx - xyx, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$
- (44)  $\langle yxy, yyy, xxx - xyx, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (45)  $\langle yxy, yyy, xxx - yyy, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$
- (46)  $\langle yxy, yyy, xxx - yyy, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (47)  $\langle yxy, xxx - xyx, xxx - yyy, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$
- (48)  $\langle yxy, xxx - xyx, xxx - yyy, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (49)  $\langle yxy, yyy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - xyy \rangle$
- (50)  $\langle yxy, yyy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - yyx \rangle$
- (51)  $\langle yxy, yyy, xxx - yxy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$
- (52)  $\langle yxy, yyy, xxx - yxy, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$
- (53)  $\langle yxy, yyy, xxx - yyy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$
- (54)  $\langle yxy, yyy, xxx - yyy, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$
- (55)  $\langle yxy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$
- (56)  $\langle yxy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$
- (57)  $\langle yyy, xxx - xyx, xxx - yyy, xxy - yxy, xyx - yyy \rangle$
- (58)  $\langle yyy, xxx - xyx, xxx - yyy, xyx - yyy, yxx - yxy \rangle$
- (59)  $\langle yyy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle$
- (60)  $\langle yyy, xxx - yxy, xxx - yyy, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle$

Tabla 7.7: Ideales cofinitos maximales en la familia (2, 3, 5)

Nuevamente todos los ideales anteriores generan álgebras con la misma serie de Hilbert. En este caso, la serie de Hilbert que lleva toda la información sobre los elementos normales de cada grado es

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} = 1 + 2t + 4t^2 + 4t^3 + 4t^4 + 3t^5 + 2t^6 + t^7$$

Con respecto a sus bases de Gröbner-Shirshov, los ideales anteriores se clasifican según la Tabla 7.8.

1					2					3					4				
1	3	5	7	9	2	4	6	8	10	13	15	17	19	21	14	16	18	20	22
11	25	27	33	37	12	26	28	36	38	23	29	31	34	39	24	30	32	35	40
41	43	45	47	57	42	44	46	48	58	49	51	53	55	59	50	52	54	56	60

Tabla 7.8: Distribución ideales cofinitos de (2, 3, 5) según base de Gröbner-Shirshov

Unas bases de Gröbner-Shirshov asociadas a cada tipo de ideal son

- $\mathcal{G}_1 = \{xxx, xxy - yxy, xyx, yyy, xyxy\}$
- $\mathcal{G}_2 = \{xxx, xyx, yxx - yxy, yyy, yxyyx\}$
- $\mathcal{G}_3 = \{xxx, xyx - xyx, yxy, yyy, xyxyx\}$
- $\mathcal{G}_4 = \{xxx, xyx - yyx, yxy, yyy, xyxyx\}$

Estas álgebras ya tienen una dimensión bastante grande como para que el ordenador pueda calcular todos los elementos que hacen falta en los cálculos siguiendo el método de Shirayanagi. Pero nuestro criterio de isomorfía graduado nos dice que las familias están relacionadas de la siguiente manera:  $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_4$  y  $\mathcal{A}_2 \cong \mathcal{A}_3$ . Por lo tanto, en esta familia tenemos dos clases de isomorfía con treinta álgebras cada una.

Sin embargo, como en el caso de la familia anterior, todos estos ideales contienen relaciones redundantes. Así que todos están en  $(2, 3, 4)$ .

Como acabamos de comentar, en esta familia nos encontramos con muchos ideales que tienen una relación redundante, e incluso dos relaciones redundantes. Por ese motivo vamos a continuar nuestro estudio con ideales generados por relaciones de longitud 4.

### Sección 7.6

## Familia (2,4,3)

El caso de esta familia es especial. En este caso tenemos 16 monomios y 136 posibles relaciones para construir los ideales. Tomados estos de tres en tres, obtenemos 410040 ideales en esta familia, y por lo tanto el mismo número de álgebras cocientes. Sin embargo, entre todas ellas no hay ninguna finita (hasta grado 30).

Pero sí hay un ejemplo que despierta interés. Es el caso del ideal

$$\langle xxxx, xxxy - yxyx, xyxy - yxxx \rangle \quad (7.22)$$

Con más de setenta horas de trabajo sobre este ideal, el ordenador no pudo calcular su serie de Hilbert (la base de Gröbner-Shirshov consume unos 10 minutos). Tal es la cantidad de operaciones que tiene que realizar. Sin embargo, tiene un *gemelo*, el ideal que obtenemos mediante el cambio  $x \leftrightarrow y$ . En este caso sí calcula la serie de Hilbert hasta grado 30 sin mayor dificultad.

## Sección 7.7

## Familia (2,4,4)

En esta familia la casuística es enorme. El aumento de la longitud en las relaciones así como el hecho de tomar las relaciones de cuatro en cuatro hace que existan 13633830 ideales. Casi 14 millones de casos.

Por ahora hemos estudiado la primera mitad, y la dimensión finita máxima encontrada es 324. Se alcanza en cuatro casos, que se corresponden con un ideal y las tres transformaciones correspondientes al producto opuesto y la permutación  $x \leftrightarrow y$ .

Estos ideales cofinitos *maximales* son

$$J_1 = \langle xxx, xxyx - xyxy, xxyy - yxyy, xyxy - yyyy \rangle$$

$$J_2 = \langle xxx, xyxx - yxyx, yyxx - yyyx, yyyx - yyyy \rangle$$

$$J_3 = \langle yyy, xxx - xxy, xxy - xxyy, xyxy - yxyy \rangle$$

$$J_4 = \langle yyy, xxx - yxx, xyxx - yyxx, yxyx - yyyx \rangle$$

Vamos ahora a realizar estudios en familias con un mayor número de variables. Añadiremos una nueva variable para poder seguir estudiando casos con más riqueza y trasfondo.

## Sección 7.8

## Familia (3,2,3)

En este caso tenemos 9 monomios principales y por lo tanto 45 relaciones. Si las agrupamos de 3 en 3 tendremos 14190 posibles ideales, ninguno de los cuales es finito. La idea es la misma que en la familia (2,4,3). Parecen pocas relaciones como para poder controlar todas las posibles palabras que se pueden construir, y más con tres variables que se permiten muchas más combinaciones. Siempre quedará alguna familia infinita que no se pueda controlar.

Sin embargo, en este caso y debido a la sencillez de las relaciones (solo grado 2) no ha habido problemas de computación que se puedan destacar.

## Sección 7.9

## Familia (3,2,4)

Existen para esta familia 148995 casos, de los cuales 2196 son ideales cofinitos. La lista de las dimensiones que se alcanzan y el número de casos se lista a continuación

- 156 ideales que generan álgebras de dimensión 12
- 372 ideales que generan álgebras de dimensión 13
- 432 ideales que generan álgebras de dimensión 14
- 480 ideales que generan álgebras de dimensión 15
- 192 ideales que generan álgebras de dimensión 16
- 18 ideales que generan álgebras de dimensión 17
- 414 ideales que generan álgebras de dimensión 18
- 60 ideales que generan álgebras de dimensión 20
- 72 ideales que generan álgebras de dimensión 24

Los 72 ideales que generan las álgebras de dimensión máxima se encuentran recogidos en la Tabla 7.9.

(1) $\langle xx, xy, xz - zz, yy - yz \rangle$	(37) $\langle yy, xx - xz, xy - zz, zy - zz \rangle$
(2) $\langle xx, xz, xy - yy, zy - zz \rangle$	(38) $\langle yy, xx - xz, yx - yy, yz - zz \rangle$
(3) $\langle xx, yx, yy - zy, zx - zz \rangle$	(38) $\langle yy, xx - yx, xx - yz, xz - zz \rangle$
(4) $\langle xx, zx, yx - yy, yz - zz \rangle$	(40) $\langle yy, xx - yx, xz - zz, yx - yz \rangle$
(5) $\langle xx, xx - xy, xz - zz, yy - yz \rangle$	(41) $\langle yy, xx - yx, yy - yz, zx - zz \rangle$
(6) $\langle xx, xx - xz, xy - yy, zy - zz \rangle$	(42) $\langle yy, xx - yz, xz - zz, yx - yz \rangle$
(7) $\langle xx, xx - yx, yy - zy, zx - zz \rangle$	(43) $\langle yy, xx - zx, xy - yy, zy - zz \rangle$
(8) $\langle xx, xx - zx, yx - yy, yz - zz \rangle$	(44) $\langle yy, xx - zx, yx - yz, yx - zz \rangle$
(9) $\langle xx, xy - xz, xy - yy, yz - zz \rangle$	(45) $\langle yy, xx - zx, yx - yz, yz - zz \rangle$
(10) $\langle xx, xy - xz, xy - zz, yy - zy \rangle$	(46) $\langle yy, xx - zx, yx - zz, yz - zz \rangle$
(11) $\langle xx, xy - xz, xz - yy, yz - zz \rangle$	(47) $\langle yy, xx - zy, xy - zy, zx - zz \rangle$
(12) $\langle xx, xy - xz, xz - zz, yy - zy \rangle$	(48) $\langle yz, zz, xx - xz, xy - yy \rangle$
(13) $\langle xx, xy - yy, xz - yy, yz - zz \rangle$	(49) $\langle yz, xx - xz, xy - yy, yz - zz \rangle$
(14) $\langle xx, xy - zz, xz - zz, yy - zy \rangle$	(50) $\langle yz, xx - yx, yy - yz, zx - zz \rangle$
(15) $\langle xx, yx - yy, yx - zx, zy - zz \rangle$	(51) $\langle zx, zz, xx - xy, yy - zy \rangle$
(16) $\langle xx, yx - yy, yy - zx, zy - zz \rangle$	(52) $\langle zx, xx - xy, yy - zy, zx - zz \rangle$
(17) $\langle xx, yx - zx, yx - zz, yy - yz \rangle$	(53) $\langle zx, xx - zx, yx - yy, yz - zz \rangle$
(18) $\langle xx, yx - zx, yy - yz, zx - zz \rangle$	(54) $\langle zy, zz, xx - zx, yx - yy \rangle$
(19) $\langle xx, yx - zx, yy - zx, zy - zz \rangle$	(55) $\langle zy, xx - xy, xz - zz, yy - zy \rangle$
(20) $\langle xx, yx - zz, yy - yz, zx - zz \rangle$	(56) $\langle zy, xx - zx, yx - yy, zy - zz \rangle$
(21) $\langle xy, yy, xx - zx, zy - zz \rangle$	(57) $\langle zz, xx - xy, xz - yy, xz - yz \rangle$
(22) $\langle xy, xx - xy, xz - zz, yy - yz \rangle$	(58) $\langle zz, xx - xy, xz - yy, yy - yz \rangle$
(23) $\langle xy, xx - zx, xy - yy, zy - zz \rangle$	(59) $\langle zz, xx - xy, xz - yz, yy - yz \rangle$
(24) $\langle xz, zz, xx - yx, yy - yz \rangle$	(60) $\langle zz, xx - xy, yy - zy, zx - zz \rangle$
(25) $\langle xz, xx - xz, xy - yy, zy - zz \rangle$	(61) $\langle zz, xx - xz, xx - yz, yx - yy \rangle$
(26) $\langle xz, xx - yx, xz - zz, yy - yz \rangle$	(62) $\langle zz, xx - xz, xy - yy, yz - zz \rangle$
(27) $\langle yx, yy, xx - xz, yz - zz \rangle$	(63) $\langle zz, xx - xz, xz - yz, yx - yy \rangle$
(28) $\langle yx, xx - xz, yx - yy, yz - zz \rangle$	(64) $\langle zz, xx - yx, xz - zz, yy - yz \rangle$
(29) $\langle yx, xx - yx, yy - zy, zx - zz \rangle$	(65) $\langle zz, xx - yx, yy - zx, yy - zy \rangle$
(30) $\langle yy, yz, xx - yx, zx - zz \rangle$	(66) $\langle zz, xx - yx, yy - zx, zx - zy \rangle$
(31) $\langle yy, zy, xx - xy, xz - zz \rangle$	(67) $\langle zz, xx - yx, yy - zy, zx - zy \rangle$
(32) $\langle yy, xx - xy, xx - yz, zx - zz \rangle$	(68) $\langle zz, xx - yz, xz - yz, yx - yy \rangle$
(33) $\langle yy, xx - xy, xy - zy, zx - zz \rangle$	(69) $\langle zz, xx - zx, xx - zy, xy - yy \rangle$
(34) $\langle yy, xx - xy, xz - zz, yy - zy \rangle$	(70) $\langle zz, xx - zx, xy - yy, zx - zy \rangle$

Continúa en la página siguiente ...

$$\begin{array}{ll}
 (35) \langle yy, xx - xz, xy - zy, xy - zz \rangle & (71) \langle zz, xx - zx, yx - yy, zy - zz \rangle \\
 (36) \langle yy, xx - xz, xy - zy, zy - zz \rangle & (72) \langle zz, xx - zy, xy - yy, zx - zy \rangle
 \end{array}$$

Tabla 7.9: Ideales cofinitos maximales en la familia (3, 2, 4)

Como en otros casos que hemos estudiado anteriormente, todas las álgebras asociadas a estos ideales comparten la misma serie de Hilbert. Ésta es

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}}(t) = 1 + 3t + 5t^2 + 6t^3 + 5t^4 + 3t^5 + t^6$$

Para clasificar estas familias salvo isomorfismo, primero haremos la clasificación según su base de Gröbner-Shirshov. Estos datos están recogidos en la Tabla 7.10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	2	3	4	9	10	15	17	21	24	27	30	31	32	35	39	44	48	51	54	57	61	65	69
5	6	7	8	11	12	16	18	23	26	28	41	34	33	36	40	45	49	52	56	58	63	66	70
22	25	29	53	13	14	19	20	43	64	38	50	55	47	37	42	46	62	60	71	59	68	67	72

Tabla 7.10: Distribución ideales de (3, 2, 4) según base de Gröbner-Shirshov

donde las bases de Gröbner-Shirshov son

- $\mathcal{G}_1 = \{xx, xy, xz - zz, yy - yz, yzy - yzz, zzz, yzzy\}$
- $\mathcal{G}_2 = \{xx, xy - yy, xz, zy - zz, yyy, zzzz\}$
- $\mathcal{G}_3 = \{xx, yx, yy - zy, zx - zz, yzy - zzy, zzz, yzzy\}$
- $\mathcal{G}_4 = \{xx, yx - yy, yz - zz, zx, yyy, zzzz\}$
- $\mathcal{G}_5 = \{xx, xy - yy, xz - yy, yz - zz, yyy, zzzz\}$
- $\mathcal{G}_6 = \{xx, xy - zz, xz - zz, yy - zy, yzy - zzy, zzz, yzzy\}$
- $\mathcal{G}_7 = \{xx, yx - zx, yy - zx, zy - zz, yzx, zxy, zzx - zzz, zxz, zzzzx\}$
- $\mathcal{G}_8 = \{xx, yx - zz, yy - yz, zx - zz, yzy - yzz, zzz, yzzy\}$
- $\mathcal{G}_9 = \{xx - zx, xy, yy, zy - zz, xzx - zzx, zzz, xzzx\}$
- $\mathcal{G}_{10} = \{xx - yx, xz, yy - yz, zz, xyx - yzx, yzy, xyzx\}$
- $\mathcal{G}_{11} = \{xx - xz, yx, yy, yz - zz, xzx - xzz, zzz, xzzx\}$
- $\mathcal{G}_{12} = \{xx - yx, yy, yz, zx - zz, xyx, zyx - zzz, zzzz\}$
- $\mathcal{G}_{13} = \{xx - xy, xz - zz, yy, zy, xyx, xyz - zzz, zzzz\}$
- $\mathcal{G}_{14} = \{xx - zy, xy - zy, yy, zx - zz, xzy, zyx, zzy - zzz, zyzzy, zzzz\}$
- $\mathcal{G}_{15} = \{xx - xz, xy - zz, yy, zy - zz, xzx - xzz, zzz, xzzx\}$
- $\mathcal{G}_{16} = \{xx - yz, xz - zz, yx - yz, yy, xyz, yzx, yzz - zzz, yzyz, zzzz\}$
- $\mathcal{G}_{17} = \{xx - zx, yx - zz, yy, yz - zz, xzx - zzx, zzz, xzzx\}$
- $\mathcal{G}_{18} = \{xx - xz, xy - yy, yz, zz, xzx, xzy - yyy, yyyy\}$
- $\mathcal{G}_{19} = \{xx - xy, yy - zy, zx, zz, xyx - xzy, yzy, xzyx\}$
- $\mathcal{G}_{20} = \{xx - zx, yx - yy, zy, zz, xzx, yyy - yzx, yyzx, yzxy\}$

- $\mathcal{S}_{21} = \{xx - xy, xz - yz, yy - yz, zz, xyx - xyz, yzy, xyzx\}$
- $\mathcal{S}_{22} = \{xx - yz, xz - yz, yx - yy, zz, xyz, yyy - yyz, yzx, yzyy, yzyz\}$
- $\mathcal{S}_{23} = \{xx - yx, yy - zy, zx - zy, zz, xyx - zyx, yzy, xzyz\}$
- $\mathcal{S}_{24} = \{xx - zy, xy - yy, zx - zy, zz, xzy, yyy - zyy, zyx, yzyy, zzyy\}$

Y al establecer nuestro criterio de isomorfismo graduado tenemos solo 2 clases de equivalencia de 36 álgebras cada una, que se encuentran recogidas en la Tabla 7.11.


Tipo 1	Tipo 2
1, 2, 5, 6, 11, 12, 16, 17, 19, 20, 23, 24	3, 4, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 18, 21, 22

Tabla 7.11: Clasificación ideales cofinitos de  $(3, 2, 4)$  según clase de equivalencia

### Sección 7.10

## Familia $(3,3,3)$

Esta familia está programada para su resolución, pero es computacionalmente muy compleja. En total hay  $3^3 = 27$  monomios y 378 relaciones. Tomadas 3 a 3 nos da un total de 8930376 casos.

Fue lanzado en marzo de 2011 pero ha resultado muy pesado, incluso para casos pequeños. Por ahora no parece viable estudiarlo, hasta que tengamos acceso a herramientas más potentes. 

### Sección 7.11

## Algunos fenómenos resultantes de este estudio

Para terminar este capítulo vamos a comentar algunas situaciones interesantes que han ido apareciendo a lo largo de todo este proceso de clasificación y búsqueda.

### 7.11.1. Familias dentro de familias. Estudio de la heredad

Acabamos de comprobar que muchas veces nos encontramos con ideales que contienen relaciones redundantes, esto es, familias dentro de familias. A este fenómeno le hemos dado el nombre de *Heredad*.

El planteamiento del problema sería el siguiente. Mediante el proceso comentado en el Apéndice B hemos sido capaces de encontrar los ideales que dan lugar a las álgebras finitas dentro de cada familia. Y lo que es más, en este Capítulo hemos estudiado los ideales que dan lugar a álgebras finitas de dimensión máxima



y las hemos clasificado salvo isomorfismo. La pregunta es ¿estos ideales que dan lugar a álgebras finitas de dimensión máxima, si les quita alguna relación, dan lugar a ideales de codimensión finita máxima en la familia *más pequeña*?

Estudiemos, por ejemplo, los ideales que pertenecen a la familia  $(2, 3, 4)$  (Sección 7.4). Ya sabemos que la dimensión máxima que alcanzan las álgebras cocientes finitas con ideales de esta familia es 25, y se alcanza en 4 casos,

$$\begin{aligned} &\langle xxx, xyx, xxx - xyx, xyx - yyy \rangle \\ &\langle xxx, xyx, xxx - xyx, yyx - yyy \rangle \\ &\langle yxy, yyy, xxx - xxy, yxy - yyy \rangle \\ &\langle yxy, yyy, xxx - yxx, yxy - yyy \rangle \end{aligned}$$

luego si quitamos una relación de cada uno obtenemos otros 16 ideales de la familia  $(2, 3, 3)$ . De estos, 12 dan lugar a ideales cofinitos y 4 son ideales no cofinitos. Estos 12 ideales vuelven a tener codimensión 25, y son todos los de dimensión 25 que aparecen en la familia  $(2, 3, 3)$ . Sin embargo la dimensión máxima de esta familia es 36, que no se alcanza.

Los ideales que generan las álgebras de dimensión finita máxima no se *heredan* a la familia  $(2, 3, 3)$ . Vamos ahora a estudiar la heredad para los ideales que dan lugar a las álgebras de la siguiente codimensión finita máxima. Este codimensión es 21 y se alcanza en 72 ideales distintos. Si quitamos una relación de cada uno de ellos tenemos 288 casos (algunos se repetirán) que se distribuyen de la siguiente manera:

- 24 de codimensión 21 (en  $(2, 3, 3)$  hay 62)
- 4 de codimensión 23 (todos los que aparecen en  $(2, 3, 3)$ , heredad completa)
- 4 de codimensión 27 (todos los que hay en  $(2, 3, 3)$ , heredad completa)
- 4 de codimensión 36 (todos los que hay en  $(2, 3, 3)$ , que además son los de codimensión máxima en esa familia)

En esta subfamilia maximal sí alcanzamos las de dimensión máxima de  $(2, 3, 3)$ . Esto es, si *profundizamos* en el estudio de las familias, al final alcanzamos las de dimensión máxima de la familia inferior.

Subimos ahora un escalón para estudiar la heredad en la familia  $(2, 3, 5)$ . La subfamilia que alcanza dimensión finita máxima tiene 60 casos y alcanza dimensión 21. En este caso, de cada ideal se obtiene cinco con una relación menos, por lo que tenemos que estudiar 300 casos. Nuevamente, o mantienen la dimensión (relaciones redundantes) o dan lugar a álgebras no finitas.

Sin embargo, de los 72 casos de codimensión 21 que hay en  $(2, 3, 4)$  toma 64

de ellos. Los ocho ideales que se escapan son


$$\begin{aligned} &\langle xxx, yxy, xxx - yxy, xxy - yyy \rangle \\ &\langle xxx, yxy, xxx - yxy, yxx - yyy \rangle \\ &\langle xxx, xxy - yxy, xxy - yyy, yxy - yyy \rangle \\ &\langle xxx, yxx - yxy, yxx - yyy, yxy - yyy \rangle \\ &\langle xyx, yyy, xxx - xyx, yxx - yxy \rangle \\ &\langle xyx, yyy, xxx - yyx, xyx - yyy \rangle \\ &\langle yyy, xxx - xyx, xxx - xyy, xyx - xyy \rangle \\ &\langle yyy, xxx - xyx, xxx - yyx, xyx - yyx \rangle \end{aligned}$$

que pertenecen a dos ideales (y sus relacionados con la permutación y el producto opuesto). Estos 8 ideales dan lugar a 32 ideales al volverle a quitar una relación y caer a  $(2, 3, 3)$ . Pues bien, estos dan lugar a 8 ideales no cofinitos y los otros 24 son los que dan lugar a los 24 ideales de codimensión 21 de  $(2, 3, 3)$ .

Por lo que podemos comprobar no hay ninguno que dé lugar a los ideales de codimensión máxima en  $(2, 3, 4)$ , que era 25. Sin embargo, si miramos la siguiente familia maximal, donde hay 68 de dimensión 21, nos encontramos, aparte de otros muchos, con los ideales

$$\begin{aligned} &\langle xxx, xyx, xxx - xyx, xxy - yxy, xyy - yyy \rangle \\ &\langle xxx, xyx, xxx - xyx, yxx - yxy, yyx - yyy \rangle \\ &\langle yxy, yyy, xxx - xxy, xyx - xyy, yxy - yyy \rangle \\ &\langle yxy, yyy, xxx - yxx, xyx - yyx, yxy - yyy \rangle \end{aligned}$$

que, eliminando la cuarta relación de cada uno, sí dan lugar a los cuatro ideales de codimensión 25 de  $(2, 3, 4)$ . Al igual que en el caso anterior, si continuamos estudiando la heredad en subfamilias más pequeñas vamos alcanzando los de dimensión finita máxima de la familia anterior. En estos dos casos ha bastado con bajar a los de segunda dimensión finita máxima para ello.

**Observación 7.5.** *Podemos concluir que los ideales cofinitos maximales de una familia no dan lugar a ideales cofinitos maximales de otra familia eliminando relaciones.* 

### 7.11.2. No existencia de isomorfismos entre familias

En esta sección vamos a estudiar si es posible que existan isomorfismos entre dos álgebras que se correspondan con ideales de distintas familias. Pronto veremos que esto no es posible, ya que la naturaleza graduada del problema impone condiciones muy estrictas que no podrán ser satisfechas.

**Lema 7.6.** *Sean  $A$  y  $B$  álgebras graduadas donde  $\deg(\mathcal{H}_A) \neq \deg(\mathcal{H}_B)$ . Entonces  $A$  y  $B$  no son isomorfas.*

*Demostración.* Si los grados de la serie de Hilbert no coinciden significa que uno de ellos es mayor que el otro. Supongamos que es el de  $\mathcal{A}$ .

Entonces en la base de  $\mathcal{A}$  como  $k$ -espacio vectorial hay elementos de grado  $n$ , grado superior al grado del mayor elemento de  $\mathcal{B}$ . El grado de la imagen de ese elemento a través del isomorfismo será mayor o igual a  $n$ , por lo que sobre  $\mathcal{B}$  tiene que reducir a cero (ya que no hay elementos de grado  $n$ ). Esto nos crea una fila de ceros en la matriz asociada al isomorfismo, con lo que el determinante será cero y la aplicación asociada no será invertible.  $\square$

Con la ayuda de este Lema no será complicado demostrar los siguientes resultados.

La presencia de relaciones redundantes es un dato de vital importancia. El siguiente resultado da buena cuenta de ello.

**Teorema 7.7.** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos álgebras que pertenecen a las familias  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  y  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}')$  respectivamente (sin redundancia). Entonces  $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$ .

*Demostración.* Sean  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}} = \langle \omega_1, \dots, \omega_c \rangle$  y  $\mathcal{J}_{\mathcal{B}} = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{c'} \rangle$  los ideales correspondientes a las álgebras  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . Sean  $S_{\mathcal{A}} = \{\omega_1, \dots, \omega_c\}$  y  $S_{\mathcal{B}} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{c'}\}$  los conjuntos formados por la relaciones que generan los ideales  $\mathcal{J}_{\mathcal{A}}$  e  $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}$ .

Decimos que un conjunto  $S_{\mathcal{A}}$  es un conjunto “sin redundancia” si  $\text{red}(\omega_i, S_{\mathcal{A}} \setminus \{\omega_i\}) = \omega_i$ , esto es,  $\omega_i$  no contiene ningún múltiplo de  $\text{Im}(\omega_j)$ , para cualquier  $j \neq i$ .

Supongamos  $c > c'$  y sea  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un isomorfismo graduado. Sabemos que  $\varphi(\mathcal{J}_{\mathcal{A}}) = 0$ , luego  $\varphi(\omega_i)$  tiene grado  $\mathbf{b}$  y pertenece a  $\langle S_{\mathcal{B}} \rangle$ . Entonces debe ser una combinación lineal de  $\{\sigma_j\}$ , ya que no hay otros elementos de grado  $\mathbf{b}$  en  $\mathcal{J}_{\mathcal{B}}$ . Entonces

$$\varphi(\omega_i) = \sum_{j=1}^{c'} \alpha_{ij} \sigma_j, \quad i: 1, \dots, c, \quad \alpha_{ij} \in k \quad (7.23)$$

Como hay  $c$  ecuaciones y tenemos  $c'$  variables, y existe una fila que es combinación lineal de las otras y

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists k \setminus \varphi(\omega_k) = \sum_h \varphi(\omega_h) \\ &\Rightarrow \varphi(\omega_k - \sum_h \omega_h) = 0 \\ &\Rightarrow \text{red}(\omega_k, S_{\mathcal{A}} \setminus \{\omega_k\}) = 0 \\ &\Rightarrow S_{\mathcal{A}} \text{ contiene relaciones redundantes,} \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.  $\square$

**Corolario 7.8.** Sean  $\mathcal{A} = k\langle X \rangle / \mathcal{J}_{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{B} = k\langle X \rangle / \mathcal{J}_{\mathcal{B}}$  dos álgebras homogéneas graduadas, y  $\varphi$  es un isomorfismo entre ellas. Entonces  $\varphi(\mathcal{J}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{J}_{\mathcal{B}}$ .

En esta parte juega un papel muy fuerte la naturaleza graduada de nuestro problema. Si tienen distinto número de variables, en general no serán isomorfas.

**Lema 7.9.** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos álgebras que pertenecen a las familias  $(\alpha, b, c)$  y  $(\alpha', b, c)$  respectivamente (sin redundancia). Entonces  $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$ .

*Demostración.* El primer elemento de la serie de Hilbert se corresponde con el número de variables que generan el álgebra. Luego si el ideal no contiene relaciones de grado 1, este elemento será diferente para cada serie y por lo tanto (Lema 7.6) no podrán ser isomorfas.  $\square$

**Lema 7.10.** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  dos álgebras que pertenecen a las familias  $(\alpha, b, c)$  y  $(\alpha, b', c)$  respectivamente (sin redundancia). Entonces  $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{B}$ .

*Demostración.* Si los ideales no son redundantes las reducciones comienzan en grado  $b$  y  $b'$  respectivamente. Por lo tanto las series de Hilbert no pueden coincidir, ya que empiezan a perder elementos en grados distintos (Lema 7.6).  $\square$

### 7.11.3. Otro test de finitud

El estudio de estas familias no solo nos permite comparar la dimensión con otros ideales cofinitos, sino que también nos permite construir otro test de finitud basado en el tercer teorema de isomorfía y en los ideales maximales de cada familia.

La idea se deriva del conocido resultado

$$k\langle X \rangle / \mathcal{J} \text{ finita} \Rightarrow \forall \mathcal{J} \supseteq \mathcal{J} \Rightarrow k\langle X \rangle / \mathcal{J} \text{ finita}$$

Podemos organizar el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{J} \subset & \longrightarrow & k\langle x, y \rangle & \longrightarrow & k\langle x, y \rangle / \mathcal{J} \\ \downarrow & & \parallel & & \\ \mathcal{J} \subset & \longrightarrow & k\langle x, y \rangle & \longrightarrow & k\langle x, y \rangle / \mathcal{J} \end{array}$$

donde  $\mathcal{J}$  es uno de los ideales de que sabemos tiene asociada un álgebra finita y  $\mathcal{J}$  es el ideal que queremos estudiar.

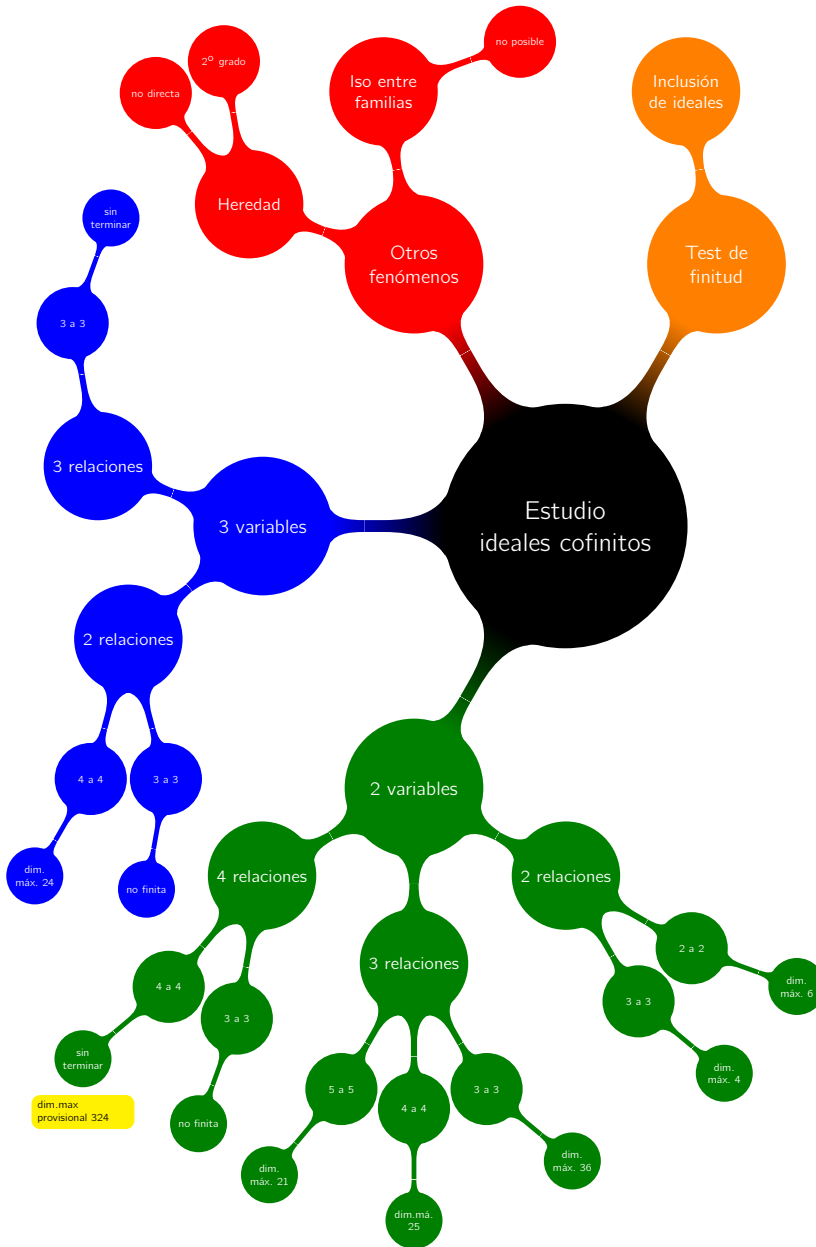
Entonces

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{J} / \mathcal{J} & \longrightarrow & k\langle x, y \rangle / \mathcal{J} & \longrightarrow & k\langle x, y \rangle / \mathcal{J} \cong \frac{k\langle x, y \rangle / \mathcal{J}}{\mathcal{J} / \mathcal{J}} \\ & & & & \uparrow \\ \text{finita} & \iff & \text{finita} & & 3^{\text{er}} \text{ TISO} \end{array}$$

y para que este cociente de ideales sea finito nos basta comprobar que los elementos de grado  $n$  del ideal  $\mathcal{J}$  reducen a cero en el ideal  $\mathcal{J}$ .

Por ejemplo, sea  $\mathcal{J} = \langle xx, xy - yx \rangle$  y  $\mathcal{J} = \langle xxx, xyx - yyx, yxy - yyx \rangle$ . El ideal  $\mathcal{J}$  es uno de los ideales cofinitos *maximales* de la familia (2,2,2) y  $\mathcal{J}$  es un ideal de la familia (2,3,3). Si realizamos los cálculos, todos los monomios de grado 8 de  $\mathcal{J}$  reducen a cero en  $\mathcal{G}_{\mathcal{J}}$ , así que  $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$  es un álgebra finita. De hecho, es una de las álgebras maximales de esta familia, que tiene dimensión 36.

# Mapa conceptual del Capítulo 7







---

## Uso de ordenadores. El programa Bergman

En este capítulo vamos a comentar los programas y algoritmos que hemos realizado en este trabajo para desarrollar los cálculos asistidos con ordenador.

La parte más importante en cuanto al cómputo de operaciones la soporta el programa *Bergman*. También usamos la programación en C++ para calcular las relaciones que componen cada familia y para mandar el envío de datos a *Bergman*. La programación en C++ interactúa mejor con el resto de programas y entornos y nos permite *lanzar* programas en consola.

Primero vamos a comentar en qué consiste el programa *Bergman*. Nosotros llegamos a él a través de comentarios en diversos trabajos, como los de Ufnarovskii en [Ufn08]. Luego de probar otros software de cálculo simbólico decidimos elegirlo, sobre todo por ser más ligero que otros, aunque a cambio no ofrece un entorno gráfico tan agradable, ya que corre en consola, y ofrece menos *comunicación* con otros programas.

En cambio es bastante potente y de software abierto, con lo cual podemos *modificarlo* y añadirle o quitarle funciones, si bien no es en absoluto sencillo.

*Bergman* es un sistema para realizar cálculos en álgebras graduadas conmutativas y no conmutativas. Está desarrollado principalmente por Jörgen Backelin (departamento de Matemáticas, Universidad de Estocolmo). Otras mejoras han sido desarrolladas por los participantes del proyecto *Non-commutative computer algebra* (Backelin, Cojocar, Colesnicov, Malahova, Podoplelov, Roos, Ufnarovski y Verlan).

*Bergman* es un software de dominio público y de libre disposición, que podemos encontrar en <http://servus.math.su.se/bergman/>. Es una herramienta para el cálculo de bases de Gröbner conmutativas y bases de Gröbner-Shirshov no conmutativas. También puede usarse para calcular algunos invariantes de álgebras y módulos, como son las series de Hilbert y, en el caso no conmutativo, la serie de Poincaré-Betti, la resolución de Anick o los números de Betti. Un ejemplo de



su uso para resoluciones de Anick lo tenemos en [CU97].

La característica más importante de *Bergman* es que permite la salida de los datos producidos grado a grado. Esto nos permite obtener resultados parciales aunque no se calcule la base de Gröbner-Shirshov entera.

*Bergman* también nos ofrece un alto nivel de flexibilidad. Podemos elegir entre anillos conmutativos y no conmutativos, varias estrategias para el cálculo (incluyendo el *salto del conejo*) de las bases de Gröbner-Shirshov, varios tipos de órdenes y también podemos variar el cuerpo donde se hacen los cálculos (rationales o cuerpos finitos).

*Bergman* está escrito en *Standard Lisp*, un dialecto de Lisp bajo Reduce.

Como ya hemos comentado anteriormente, nosotros lo hemos retocado ligeramente para obtener algunos beneficios. Por ejemplo, para que muestre un mensaje en pantalla cuando la base de Gröbner-Shirshov sea finita, o para que la orden que calcula la serie de Hilbert de un ideal no devuelva la base de Gröbner-Shirshov (pues toda la información que queremos está en la serie).

Tenemos que comentar que esto no ha sido fácil. El lenguaje Lisp es un lenguaje de programación basado en sentencias, muy diferentes de los lenguajes de programación orientados a objetos, por ejemplo. Por esa razón quizá no hayamos aprovechado al máximo las posibilidades que nos ofrece el programa, que sin embargo son muchas.

Conviene, justo al comenzar una sesión de *Bergman*, pasar al modo no conmutativo

```
lisp> (noncommify);
```

y fijar un orden máximo para hacer los cálculos, ya que de otra manera podemos caer en una base de Gröbner-Shirshov infinita y tendremos que forzar la salida del núcleo

```
lisp> (setmaxdeg 30);
```

Por ejemplo, en el Código B.1 podemos ver el código para calcular una base de Gröbner-Shirshov hasta el grado guardado en memoria y que avisa si el resultado que muestra es la base completa. La orden se llama (*simple*).

En la línea 22 está la orden que nos devuelve un aviso visual si los cálculos para la obtención de la base de Gröbner-Shirshov han terminado, esto es, si no queda ningún *S*-polinomio por resolver.

También podemos comprobar que el lenguaje difiere mucho de los lenguajes más conocidos de programación (el manual *básico* de Lisp que hemos encontrado tiene más de 1000 páginas).

Nuestro problema consistía en encontrar condiciones para que un álgebra de caminos fuera finita. Al poco tiempo pasamos al estudio de cocientes de álgebras libres. A partir de esta situación fácilmente llegamos a buscar condiciones sobre su ideal de relaciones, lo cual nos lleva directamente a estudiar la base de Gröbner-

**Código B.1:** Modificación de la orden (simple) en Bergman

```

1 (DF SIMPLE (files)
2   (PROG (outfi)
3     (COND ((AND (PAIRP files) (FILEP (CAR files)))
4             (DSKIN (CAR files))
5             (COND ((AND (PAIRP (CDR files)) (STRINGP (CADR files)))
6                   (SETQ outfi (CADR files))))
7             (GO skip)))
8   (PRIN2 "Now input in-variables and ideal generators in algebraic form, thus:")
9   (TERPRI) (PRIN2 "vars v1, ..., vn;" (TERPRI)
10  (PRIN2 r1, ..., rm;" (TERPRI)
11  (PRIN2 "where v1, ..., vn are the variables, and r1, ..., rm the generators.")
12  (TERPRI) (ALGFORMINPUT)
13  (COND ((EQ (GETRINGTYPE) 'COMMUTATIVE)
14         (PRIN2 "**** We turn on noncommutativity")
15         (TERPRI)
16         (NONCOMMIFY)))
17  (SETALGOUTMODE ALG)
18  (COND (outfi (DOP outfi)) (T (DEGREEOUTPREPARE)))
19  (GROEBNERINIT)
20  (GROEBNERKERNEL)
21  (GROEBNERFINISH)
22  (WARNINGIFFINITEGB)
23  (PRIN2 All is OK (I hope). Now you may (e. g.):" (TERPRI)
24  (PRIN2 kill bergman with (QUIT); or" (TERPRI)
25  (PRIN2 interrupt bergman with Ž; or" (TERPRI)
26  (PRIN2 clear the memory with (CLEARIDEAL), and run a new (SIMPLE).")
27  (TERPRI) ))

```

Shirshov. Si la base de Gröbner es finita el problema está resuelto porque nos basta con tomar el grafo de Ufnarovskii para estudiar su comportamiento. El problema viene cuando no tenemos una base de Gröbner finita o no hemos sido capaces de llegar hasta su final.

Teníamos entonces que afrontar el problema de qué hacer con esas álgebras. Hasta qué punto podemos decir que son infinitas. La idea entonces era realizar grandes baterías de ejemplos y comparar los resultados obtenidos, para intentar deducir información de toda esa amalgama de datos.

Para realizar este estudio tenemos que ordenar el proceso de alguna manera que sea consistente. Las álgebras tienen que ser homogéneas para que podamos realizar los cálculos de manera efectiva. Y tenemos que organizar los ideales de alguna manera tal que podamos ordenarlos y construirlos de acuerdo a alguna regla. La manera que se nos ocurrió fue parametrizar los ideales respecto a tres variables

- ) el número de indeterminadas del conjunto  $X$
- ) la longitud de los monomios de las relaciones del ideal  $\mathcal{J}$

- ) el número de relaciones que generan cada ideal  $\mathcal{J}$

A lo mejor viendo cómo se comportan estos casos somos capaces de obtener información a partir de la base de Gröbner-Shirshov. Ahora tenemos que ver cómo estudiamos estas familias.

Es un problema con mucha combinatoria por debajo. Por ejemplo, si  $n$  es el número de variables del conjunto  $X$ . ¿Cuántos monomios hay de longitud  $r$ ? Hay, evidentemente,  $n^r$  monomios. Las relaciones que componen el ideal son monomios o diferencias de monomios. Acabamos de ver que hay  $n^r$  monomios. Para construir los binomios tomamos cada monomio y le restamos todos los posibles monomios menores que él. Es la suma de una progresión aritmética de razón uno. Entonces hay

$$n^r + (n^r - 1) + (n^r - 2) + \dots + 1 = \frac{n^r(n^r + 1)}{2}$$

Con esto tenemos todas las posibles relaciones. Ahora tenemos que agruparlas de  $m$  en  $m$ . Para cada  $m$ , el número de posibles ideales será

$$\binom{\frac{n^r(n^r+1)}{2}}{m}$$

Por ejemplo, si queremos saber cuántos ideales hay en la familia  $(3, 2, 4)$ ,  $\binom{\frac{3^2(3^2+1)}{2}}{4} = 148995$  casos. Son muchos casos y, evidentemente, no se pueden estudiar todos los casos manualmente.

Para el estudio de las bases de Gröbner-Shirshov usaremos el `Bergman`. Para generar todas las posibles relaciones y estudiar los resultados que nos devuelva `Bergman` usaremos un programa escrito en C++.

### Sección B.1

## Código del programa principal

### Código B.2: Inicio del programa

```

Entrada: num_var = 2; // numero de variables
          l // longitud de los monomios

1 inicio
2   strcpy (v[0], "x"); //variables iniciales
3   strcpy (v[1], "y");
4   calcula_monomios(num_var,l)

```

Esto se hace de la siguiente manera. En el Código B.2 tenemos el comienzo del programa. Fijamos el número de variables (normalmente dos o tres, o podemos pedir el número al usuario) y la longitud de los monomios. Luego guardamos esas

variables en el vector  $v$  y hacemos la llamada al programa que nos calcula todos los monomios de longitud 1 en esas variables.

En la línea 4 del Código B.2 hacemos la llamada a la función `calcula_monomios(n,1)`. Lo que hace esta función es añadir al vector  $v$ , que por ahora solo contiene las variables iniciales, todos los monomios posibles hasta longitud 1 de mayor a menor.

Este código se explica en el Código B.3. Lo que hace es jugar con los índices de manera que cada elemento lo multiplica por las variables iniciales, construyendo todos los posibles monomios. Para terminar, escribimos todos los monomios en el vector  $r$ .

---

**Código B.3:** Código de la función `calcula_monomios(num_var,1)`

---

```
Entrada: contador = num_var
aux=0;
1 inicio
2   para (i=0;i<=contador-1;i++) hacemos
3       para (j=0;j<=num_var-1;j++) hacemos
4           strcpy (v[contador + aux], v[i]);
5           strcat (v[contador + aux], "*");
6           strcat (v[contador + aux],v[j]);
7           aux++;
8   contador = contador + aux;
9   limite_sup = aux;
10  aux=0;
11  para (i=1;i<l-1;i++) hacemos
12      para (j=0;j<=limite_sup-1;j++) hacemos
13          para (k=0;k<=num_var-1;k++) hacemos
14              strcpy (v[contador + aux], v[contador -
15                  limite_sup + j]);
16              strcat (v[contador + aux], "*");
17              strcat (v[contador + aux],v[k]);
18              aux++;
19      contador = contador + aux;
20      limite_sup = aux;
21      aux=0;
22  para (i=contador-limite_sup; i<contador;i++) hacemos
    strcpy (r[i-(contador-limite_sup)], v[i]);
```

---

El siguiente paso es construir todas las posibles relaciones, que serán diferencia de dos monomios. Esos datos se guardan a continuación en el vector  $r$  restando

a cada monomio aquellos que están a la derecha. El código está en el cuadro B.4. En la variable `long_b` guardamos la longitud del vector que contiene todos los monomios y binomios.

---

**Código B.4:** Código para construir el vector con los monomios y binomios

---

```

1 inicio
2   para (i=0;i<=limite_sup-1;i++) hacemos
3     para (j=i+1;j<=limite_sup-1;j++) hacemos
4       strcpy (r[limite_sup + aux], r[i]);
5       strcat (r[limite_sup + aux], "");
6       strcat (r[limite_sup + aux], r[j]);
7       aux++;
8   long_b = limite_sup + aux - 1;
```

---

El siguiente paso es construir un vector con las relaciones tomadas de  $m$  en  $m$ . Esto lo conseguimos recorriendo el vector fijando las coordenadas correspondientes y moviendo la última. En el Código B.5 tenemos un ejemplo para construir las relaciones de 3 en 3. En cada una de las posiciones del vector `c` estarán guardados cada una de las posibles presentaciones de los ideales. En la variable `long_r` se guarda el número total de casos que se han construido.

---

**Código B.5:** Ejemplo de código para tomar relaciones de 3 en 3

---

```

1 inicio
2   long_r=0;
3   para (i=0;i<=long_b;i++) hacemos
4     para (j=i+1;j<=long_b;j++) hacemos
5       para (k=j+1;k<=long_b;k++) hacemos
6         strcpy (c[long_r], r[i]);
7         strcat (c[long_r], "");
8         strcat (c[long_r], r[j]);
9         strcat (c[long_r], "");
10        strcat (c[long_r], r[k]);
11        long_r++;
```

---

Ahora que ya tenemos el vector de relaciones el trabajo que nos queda es estudiar cada uno de los ideales para obtener serie de Hilbert del álgebra asociada.

Esta parte del programa cuenta de varios pasos. La parte principal con los órdenes es el Código B.6. Antes de empezar abrimos dos archivos de texto `Plantilla_relaciones.txt` y `Plantilla_dimensiones.txt` donde iremos guardando los ideales que estamos estudiando y la dimensión del álgebra cociente

asociada a cada ideal respectivamente. En la línea 7 iniciamos un contador de tiempo para resaltar los casos que ocupen mucho tiempo. El proceso consis-

---

**Código B.6:** Proceso para obtener la información de los ideales

---

```

1 inicio
2     ofstream fout1 ("Plantilla_relaciones.txt");
3     ofstream fout2 ("Plantilla_dimensiones.txt");
4     para (j=0;j<=long_r-1;j++) hacemos
5         Archivo_datos(j);
6         Archivo_intrucciones(j);
7         gettimeofday(&t_ini, NULL);
8         Estudia_Archivo_Datos(j);

```

---

te en un bucle que recorre el vector *c* y estudia cada uno de los ideales que lo componen. El primer paso es construir un archivo con los datos correspondientes a el ideal que ocupa el lugar *j*. La función `Archivo_datos()` se encarga de ese proceso y su código se encuentra recogido en el Código B.7. Consiste en guardar en un archivo `tempj.a` las órdenes necesarias para que Bergman calcule la base de Gröbner-Shirshov del ideal que está en la posición *j* del vector *c*.

---

**Código B.7:** Código de la función `Archivo_datos(j)`

---

```

1 inicio
2     strcpy (temp1,"temp");
3     sprintf(t1, "%li", j); //convertir entero a caracter
4     strcat (temp1, t1);
5     strcat (temp1, ".a");
6     ofstream fout (temp1);
7     fout << "(clearring)\n"; //limpia datos
8     fout << "(noncommify)\n"; //pasa a no conmutativo
9     fout << "(setmaxdeg 30)\n"; //grado máximo
10    fout << "(algforminput)\n";
11    fout << "vars ";
12    para (k=num_var-1;k>=0;k-) hacemos
13        fout << v[k]; //introducimos variables
14        si (k!=0) entonces
15            | fout<<",";
16        en otro caso
17            | fout<<";\n";
18    fout << c[j] << ";"; //introducimos ideal de relaciones
19    fout1 << "El archivo " << temp1 << " contiene la relación "
20    << c[j];
21    fout.close();

```

---

Un ejemplo de archivo que construye el programa B.7 se puede observar en la Tabla B.1. Es el elemento 572 de la familia (2, 3, 3).

---

```
(clearring)
(noncommify)
(setmaxdeg 30)
(algforminput)
vars y,x;
x*x*x,x*y*y-y*y*x,y*x*y-y*y*y;
```

---

Tabla B.1: Archivo temp572.a generado por Archivo\_datos(572)

Pero no se puede enviar esta información directamente a Bergman, ya que solo lee archivos, no órdenes línea a línea. Sin embargo, sí se le puede enviar como entrada un archivo de manera que él lo recorra y vaya efectuando cada una de las órdenes que lo contienen. Así que el siguiente paso será construir un archivo que le diga a Bergman que lea la información que está guardada en el archivo tempj.a construido por la función B.7. Este archivo con las instrucciones se llamará tempj.b. El código que hace esto es Archivo\_instrucciones() y se puede ver en Código B.8.

---

**Código B.8:** Código de la función Archivo\_instrucciones(j)

---

```
1 inicio
2   strcpy (temp2,"temp");
3   sprintf(t1, "%li", j);
4   strcat (temp2, t1);
5   strcat (temp2, ".b");
6   ofstream fout2 (temp2);
7   fout2 << "(dskin \"n_ordenes \")\n";
8   fout2 << "(nchilbert_n \" \" < nombreArchivo < j < \".a\")\n";
9   fout2 << "30\n"; //longitud de series de Hilbert
   fout2.close();
```

---

La orden dskin de la línea 7 fuerza a que use las órdenes que hemos customizado nosotros y que están en el archivo n\_ordenes, que tiene que estar en la misma carpeta que el ejecutable. Por ejemplo, en la línea 8 le decimos que use la función nchilbert\_n que calcula la serie de Hilbert no conmutativa y que hemos modificado para que no devuelva los elementos de la base de Gröbner-Shirshov. Un archivo de salida del código B.8 está en la Tabla B.2.

Ahora ya podemos lanzar Bergman con las instrucciones anteriores. Esa parte de código está en el Código B.9.

---

```
(dskin "n_ordenes")
(nchilbert_n "temp572.a")
30
```

---

Tabla B.2: Archivo temp572.b generado por Archivo\_datos(572)

---

**Código B.9:** Código para enviar archivo a Bergman y obtener archivo de resultado

---

```
1 inicio
2   strcpy (buffer1, "./bergman -m 2000MB < ");
3   strcat (buffer1, temp2);
4   strcat (buffer1, > ");
5   strcat (buffer1, temp2);
6   strcat (buffer1, "b");
7   system (buffer1);
8   strcpy (temp3, "temp");
9   sprintf(t1, "%li", j);
10  strcat (temp3, t1);
11  strcat (temp3, ".bb");
```

---

La orden que lanza en consola es

```
./bergman -m 2000MB < tempj.b > tempj.bb
```

esto es, que se ejecute Bergman con 2000MB de capacidad máxima, usando las instrucciones que hay en el archivo tempj.b y que guarde la salida en el archivo tempj.bb. Y en tempj.b es donde le dice que lea los datos de tempj.a.

En tempj.bb hay muchas líneas de código, y las últimas se refieren a los 30 primeros coeficientes de la serie de Hilbert. Eso es lo que usaremos para estudiar si el álgebra asociada es finita o no.

Para eso usamos el código que está en Código B.10. Lo que hace esta función es ir recorriendo el archivo tempj.bb (hay un ejemplo de tal archivo en la Tabla B.3) línea a línea y guardando esa información en buffer2 (línea 5). Si aparece la condición de finitud, que uno de los coeficientes sea cero, el marcador pch cambia de valor y me indica que es finita. Entonces vuelvo a mirar cada línea y voy sumando los coeficientes (línea 15). Al final escribo en el archivo Plantilla\_dimensiones el álgebra que estamos estudiando y cuál es la dimensión final. También voy guar-



dando la dimensión máxima para al final poder imprimirla.

---

**Código B.10:** Código para buscar condiciones de finitud

---

```

1 inicio
2   ifstream fin (temp3); // abre archivo tempj.bb
3   contador = 0;
4   mientras (fin.getline(buffer2, 100)) hacemos
5       // tomamos cada linea del archivo
6       pch = strstr (buffer2,"+0*z ") // busco a ver si
7       encuentro esta condicion de finitud sobre la linea;
8       si (pch != NULL) entonces
9           |
9           |   contador ++;
9       fin.close();
10  si (contador != 0) entonces
11      cout << "\nEncontré álgebra finita en " << temp3;
12      ifstream fin (temp3);
13      contador = 0;
14      mientras (fin.getline(buffer2, 100)) hacemos
15          |
15          |   pch = strstr (buffer2,"*z ^ ") //aquí empiezan las
16          |   dimensiones;
17          |   si (pch != NULL) entonces
18              |
18              |   sscanf (buffer2,"%li",& i) //el primer numero
19              |   que veo lo guardo en i;
19              |   contador = contador + i //voy contando las
20              |   dimensiones;
21          fout2 << "La dimensión del álgebra que hay en " << temp3
22          << " es " << contador << endl;
21          si (contador >= maximo) entonces
22              |
22              |   maximo = contador;
22          fin.close();

```

---

La parte final del programa se corresponde con el código que está en el Código B.11. Elimina los tres archivos con instrucciones para ahorrar espacio (la información relevante está guardada en `Plantilla_relaciones.txt` y `Plantilla_dimensiones.txt`) y para el contador de tiempo. En el archivo `Plantilla_relaciones.txt` anota el tiempo que ha tardado en calcular la serie de Hilbert, y si ese proceso ha tardado más de cinco minutos lo anota. Por último, al final del archivo `Plantilla_dimensiones.txt` apunta la dimensión máxima que ha encontrado en esa familia.

Así que como salida de este proceso obtenemos dos archivos `Plantilla_relaciones.txt`, que contiene una lista de todos los ideales de la familia que estamos estudiando y el tiempo que ha tardado en calcular la

---

**Código B.11:** Código final del programa

---

```
1 inicio
2   remove (temp1);
3   remove (temp2);
4   remove (temp3);
5   gettimeofday(&t_fin, NULL);
6   secs = timeval_diff(&t_fin, &t_ini);
7   si (secs>300) entonces
8     |   fout1 « ". t= " « secs « "segundos. Cálculo pesado." «
9     |   endl;
10  en otro caso
11  |   fout1 « ". t= " « secs « "segundos." « endl;
12  |   fout2 « "\nLa dimensión máxima de las álgebras finitas es
13  |   " « maximo « endl;
14  |   fout2.close();
```

---

```
:
NIL algebraic form input>
T Input the Maximum Degree you want to calculate
+4*z^2
+8*z^3
+13*z^4
+22*z^5
+36*z^6
+58*z^7
+95*z^8
+154*z^9
+251*z^10
+409*z^11
+667*z^12
:
```

Tabla B.3: Salida parcial del archivo temp572.bb

serie de Hilbert, y `Plantilla_dimensiones.txt` que contiene los casos que han dado lugar a álgebras finitas y su dimensión correspondiente.

A lo largo de todo este proceso tenemos contadores de tiempo, y si los cálculos exceden el tiempo de 5 minutos, anotamos un reseña en el archivo de salida para saber que ese ideal conlleva un cálculo pesado. Al final del archivo `Plantilla_dimensiones.txt` imprimimos la dimensión máxima finita que ha alcanzado.

Todo este proceso está graduado, y nosotros los hemos llevado hasta el grado 30. Es posible, aunque no probable, que haya algún álgebra bajo estas condiciones para las cuales la condición de finitud se alcance en un grado más alto.

Este proceso nos permite tener una *cota* de las dimensiones máximas de cada familia. Por lo tanto si estamos trabajando en un álgebra y su dimensión supera a esta cota, es bastante probable que sea infinita.

Una vez obtenidos los resultados de cada familia, pasamos a estudiar los isomorfismos entre las álgebras finitas de dimensión máxima (Capítulo 7).

## Sección B.2

## Otros programas

Como algunas de las familias contienen multitud de elementos, para poder trabajar mejor con los archivos de salida hemos construido otros dos programas que nos devuelven la información relevante que necesitamos.

**Código B.12:** Código programa Busca\_pesados

**Entrada:** nombreArchivo, archivoSalida

```

1 inicio
2   ofstream fout (archivoSalida);
3   ifstream fin (nombreArchivo);
4   mientras (fin.getline(buffer, 200)) hacemos
5       // tomamos cada linea del archivo
6       pch = strstr (buffer,"pesado"); // busco a ver si
       encuentro esta condicion de pesadez
7       si (pch != NULL) entonces
8           |   fout « buffer «endl;
9   fin.close();
10  fout.close();

```

El programa que tenemos en el Código B.12 recorre uno de los archivos `Plantilla_relaciones.txt` y busca aquellos casos que presentan cálculos complejos. Así, en el archivo `archivoSalida` tendremos una lista de los casos que presentan mayor dificultad de cálculo.

---

**Código B.13:** Código programa alg\_finitas

---

**Entrada:** nombreArchivo, archivoSalida, dim\_max

```
1 inicio
2   ofstream fout (archivoSalida);
3   para (i=1; i<=dim_max; i++) hacemos
4       strcpy (temp1, " ");
5       sprintf(t1, "%li", i);
6       strcat (temp1, t1);
7       ifstream fin (nombreArchivo);
8       contador = 0;
9       mientras (fin.getline(buffer, 100)) hacemos
10          // tomamos cada linea del archivo
11          pch = strstr (buffer, temp1); // busco si hay
12          álgebras con dimensión i
13          si (pch != NULL) entonces
14              |
15              |   contador ++;
16          fin.close();
17          si (contador != 0) entonces
18              |
19              |   fout << "Las álgebras de dimensión " << i << "son " <<
20              |   contador <<endl;
21          fout.close();
```

---

En el programa B.13 es recorremos un archivo tipo Plantilla\_dimensiones.txt y guardamos en otro archivoSalida cuántos casos hay de álgebras finitas de dimensión 1 hasta dim\_max.





## Tablas de tiempo

En este Apéndice resumimos los datos de cada una de las familias que hemos estudiado en el Capítulo 7.

En cada tabla presentamos el número total de casos a estudiar, el número de ideales cofinitos y las dimensiones finitas que se alcanzan. Haremos hincapié en el tiempo y dificultades que ha encontrado el programa descrito en el Apéndice B al realizar los cálculos. De esta manera podremos conocer qué casos son los que presentan mayor dificultad.

Sección C.1

Tabla familia (2,2,2)

Familia (2,2,2)		
Nº de casos	Nº ideales cofinitos	Dimensiones finitas
45	6	4 de dimensión 6 2 de dimensión 5
Ideales pesados		
No tiene		
Tiempo final		
< 1 min		

Sección C.2

Tabla familia (2,2,3)

Familia (2,2,3)		
Nº de casos	Nº ideales cofinitos	Dimensiones finitas
120	62	62 de dimensión 4
Ideales pesados		
No tiene		
		Tiempo final
		≈ 2 min 30 segundos

Sección C.3

Tabla familia (2,3,3)

Familia (2,3,3)		
Nº de casos	Nº ideales cofinitos	Dimensiones finitas
7140	300	8 de dimensión 16 94 de dimensión 17 20 de dimensión 18 56 de dimensión 19 32 de dimensión 20 62 de dimensión 21 4 de dimensión 23 12 de dimensión 25 4 de dimensión 27 4 de dimensión 30 4 de dimensión 36
Ideales pesados		
No tiene		
		Tiempo final
		≈ 5 horas

Familia (2,3,4)		
Nº de casos	Nº ideales cofinitos	Dimensiones finitas
58905	10142	288 de dimensión 11 2446 de dimensión 12 3578 de dimensión 13 1246 de dimensión 14 2146 de dimensión 15 92 de dimensión 16 174 de dimensión 17 88 de dimensión 18 8 de dimensión 19 72 de dimensión 21 4 de dimensión 25
Ideales pesados		
No tiene		
Tiempo final		
≈ 36 horas		

Familia (2,3,5)		
Nº de casos	Nº ideales cofinitos	Dimensiones finitas
376992	123780	48942 de dimensión 10 50630 de dimensión 11 11374 de dimensión 12 9596 de dimensión 13 738 de dimensión 14 2174 de dimensión 15 68 de dimensión 16 130 de dimensión 17 68 de dimensión 18 60 de dimensión 21

Continúa en la página siguiente ...



Familia (2,3,5) (cont.)	
Ideales pesados	
No tiene	
Tiempo final	
≈ 7 días	

Sección C.6 Tabla familia (2,4,3)

Familia (2,4,3)		
Nº de casos	Nº ideales cofinitos	Dimensiones finitas
410040	0	
Ideales pesados: 555 casos		
Entre ellos, el conocido $\langle xxxx, xxxy - yxyx, xyxy - yxxx \rangle$ Dentro de los casos complicados están		
$\langle xxxx, xxxy - xyxx, xxyy - yyxx \rangle$ tiempo ≈ 8.67 horas		
$\langle xxxx, xxxy - yxyx, yxyx - yyxx \rangle$ tiempo ≈ 11.62 horas		
$\langle yyyyy, xxxy - xyxx, xxyx - yxxx \rangle$ tiempo ≈ 15.32 horas		
$\langle yyyyy, xxyy - yyxx, yxyy - yyxy \rangle$ tiempo ≈ 6.97 horas		
$\langle xxxx - xyxy, xxxx - yxyx, xxxy - yxyy \rangle$ tiempo ≈ 12.53 horas		
$\langle xxxx - xyxy, xxxx - yxyx, xyxy - yxyx \rangle$ tiempo ≈ 8.06 horas		
$\langle xxxx - xyxy, xxxy - yxyy, xyxy - yxyx \rangle$ tiempo ≈ 12.96 horas		
$\langle xxxx - yxyx, xxxy - yxyy, xyxy - yxyx \rangle$ tiempo ≈ 12.72 horas		
$\langle xxxx - yyxx, xxyy - yyxy, yxyy - yyyx \rangle$ tiempo ≈ 8.18 horas		
$\langle xxxx - yyyy, xxxy - xyxx, xxyx - yxxx \rangle$ tiempo ≈ 21.95 horas		
$\langle xxxx - yyyy, xxxy - xyxx, yxyx - yyxx \rangle$ tiempo ≈ 7.67 horas		
$\langle xxxx - yyyy, xxyy - yyxy, yxyy - yyyx \rangle$ tiempo ≈ 8.26 horas		
$\langle xxyx - xyxy, xxyx - yxyy, xyxx - yxyx \rangle$ tiempo ≈ 8.43 horas		
$\langle xxyx - xyxy, xxyx - yxyy, xyxy - yxyy \rangle$ tiempo ≈ 13.38 horas		
$\langle xxyx - yxyy, xyxx - yxyx, xyxy - yxyy \rangle$ tiempo ≈ 8.85 horas		
$\langle xyxx - yxyx, xyxy - yxyy, yxyx - yyxy \rangle$ tiempo ≈ 15.94 horas		
$\langle xyxx - yyxx, xyxy - yyxx, yxxx - yxyx \rangle$ tiempo ≈ 6.16 horas		
$\langle xyxx - yyxy, xyxy - yxyy, yxyx - yyxy \rangle$ tiempo ≈ 16.29 horas		
$\langle yxyx - yyxx, xxyy - yyxy, yxyy - yyyx \rangle$ tiempo ≈ 14.33 horas		
Tiempo final		
≈ 55 días y medio		

Familia (2,4,4)		
Nº de casos	Nº ideales cofinitos	Dimensiones finitas
13633830	Multitud de ellos (todavía en estudio)	Dimensión máxima 324
Ideales pesados: multitud de ellos		
En estudio ...		
		Tiempo final
		≈ meses ...

Familia (3,2,3)		
Nº de casos	Nº ideales cofinitos	Dimensiones finitas
14190	0	
Ideales pesados: 18 casos		
$\langle xx, xy - yx, xy - zz \rangle$ tiempo ≈ 12.15 horas $\langle xx, xy - yx, yx - zz \rangle$ tiempo ≈ 12.34 horas $\langle xx, xy - zz, yx - zz \rangle$ tiempo ≈ 11.94 horas $\langle xx, xz - yy, xz - zx \rangle$ tiempo ≈ 18.36 horas $\langle xx, xz - yy, yy - zx \rangle$ tiempo ≈ 18.31 horas $\langle xx, xz - zx, yy - zx \rangle$ tiempo ≈ 18.47 horas $\langle yy, xx - yz, xx - zy \rangle$ tiempo ≈ 18.37 horas $\langle yy, xx - yz, yz - zy \rangle$ tiempo ≈ 18.16 horas $\langle yy, xx - zy, yz - zy \rangle$ tiempo ≈ 18.18 horas $\langle yy, xy - yx, xy - zz \rangle$ tiempo ≈ 12.05 horas $\langle yy, xy - yx, yx - zz \rangle$ tiempo ≈ 12.15 horas $\langle yy, xy - zz, yx - zz \rangle$ tiempo ≈ 12.13 horas $\langle zz, xx - yz, xx - zy \rangle$ tiempo ≈ 7.28 horas $\langle zz, xx - yz, yz - zy \rangle$ tiempo ≈ 7.28 horas $\langle zz, xx - zy, yz - zy \rangle$ tiempo ≈ 7.29 horas $\langle zz, xz - yy, xz - zx \rangle$ tiempo ≈ 7.43 horas $\langle zz, xz - yy, yy - zx \rangle$ tiempo ≈ 7.47 horas		

Continúa en la página siguiente ...

<b>Familia (3,2,3) (cont.)</b>	
$\langle zz, xz - zx, yy - zx \rangle$ tiempo $\simeq 7.34$ horas	
Tiempo final	
$\simeq 10$ días	

Sección C.9	Tabla familia (3,2,4)
-------------	-----------------------

<b>Familia (3,2,4)</b>		
Nº de casos	Nº ideales cofinitos	Dimensiones finitas
148995	2196	156 de dimensión 12 372 de dimensión 13 432 de dimensión 14 480 de dimensión 15 192 de dimensión 16 18 de dimensión 17 414 de dimensión 18 60 de dimensión 20 72 de dimensión 24
Ideales pesados: 6 casos		
$\langle xx, xy - yx, xy - zz, yx - zz \rangle$ tiempo $\simeq 11.99$ horas $\langle xx, xz - yy, xz - zx, yy - zx \rangle$ tiempo $\simeq 18.54$ horas $\langle yy, xx - yz, xx - zy, yz - zy \rangle$ tiempo $\simeq 18.42$ horas $\langle yy, xy - yx, xy - zz, yx - zz \rangle$ tiempo $\simeq 12.08$ horas $\langle zz, xx - yz, xx - zy, yz - zy \rangle$ tiempo $\simeq 7.34$ horas $\langle zz, xz - yy, xz - zx, yy - zx \rangle$ tiempo $\simeq 7.41$ horas		
Tiempo final		
$\simeq 6$ días y medio		

# Índice de tablas

7.1	Ideales cofinitos maximales en la familia $(2, 2, 3)$ . . . . .	133
7.2	Distribución ideales de $(2, 2, 3)$ según su base de Gröbner-Shirshov	133
7.3	Clases de isomorfía en $(2, 2, 3)$ . . . . .	134
7.4	Ideales cofinitos maximales en la familia $(2, 3, 4)$ . . . . .	141
7.5	Distribución álgebras maximales de $(2, 3, 4)$ según serie de Hilbert	141
7.6	Distribución ideales de $(2, 3, 4)$ según base de Gröbner-Shirshov . .	142
7.7	Ideales cofinitos maximales en la familia $(2, 3, 5)$ . . . . .	144
7.8	Distribución ideales cofinitos de $(2, 3, 5)$ según base de Gröbner-Shirshov . . . . .	144
7.9	Ideales cofinitos maximales en la familia $(3, 2, 4)$ . . . . .	148
7.10	Distribución ideales de $(3, 2, 4)$ según base de Gröbner-Shirshov . .	148
7.11	Clasificación ideales cofinitos de $(3, 2, 4)$ según clase de equivalencia	149
B.1	Archivo temp572.a generado por Archivo_datos(572) . . . . .	164
B.2	Archivo temp572.b generado por Archivo_datos(572) . . . . .	165
B.3	Salida parcial del archivo temp572.bb . . . . .	167



# Índice de algoritmos

4.1	Algoritmo para calcular forma reducida en un conjunto . . . . .	84
4.2	Algoritmo generalizado de Buchberger, versión de Mora . . . . .	90
4.3	Algoritmo de reducción para conjuntos computables (finitos) . . . . .	92
B.1	Modificación de la orden (simple) en Bergman . . . . .	159
B.2	Inicio del programa . . . . .	160
B.3	Código de la función <code>calcula_monomios(num_var,1)</code> . . . . .	161
B.4	Código para construir el vector con los monomios y binomios . . . . .	162
B.5	Ejemplo de código para tomar relaciones de 3 en 3 . . . . .	162
B.6	Proceso para obtener la información de los ideales . . . . .	163
B.7	Código de la función <code>Archivo_datos(j)</code> . . . . .	163
B.8	Código de la función <code>Archivo_instrucciones(j)</code> . . . . .	164
B.9	Código para enviar archivo a Bergman y obtener archivo de resultado	165
B.10	Código para buscar condiciones de finitud . . . . .	166
B.11	Código final del programa . . . . .	167
B.12	Código programa <code>Busca_pesados</code> . . . . .	168
B.13	Código programa <code>alg_finitas</code> . . . . .	169



# Índice alfabético

## — A —

álgebra

- de conjunto, 51
- de cuaterniones generalizada, 56
- de grupo torcida, 18
- graduada, 98
- homogénea, 98

anillo polinomios

- no conmutativo, 81

aplicación norma, 47

## — B —

base de Gröbner-Shirshov, 86

base de Gröbner-Shirshov

- reducida, 93

## — C —

cabeza, 116

cadena, 102

camino, 102

camino

- cíclico, 102

ciclo orientado, 53

- propio, 53

coeficiente líder, 83

cola, 116

coloración, 56

condiciones de unidad, 16

conjunto

- computable, 91
- reducido, 92

crecimiento

- alternado, 103
- de un álgebra, 102

de una función, 101

exponencial, 102

polinomial, 102

cuaterniones de Hamilton, 56

## — D —

dehomogeneización, 100

derivación, 51

- interior, 51

dimensión

- Gelfand-Kirillov, 104

duplicado cuántico, 21

## — E —

elemento determinante, 53

entrelazamiento, 17

estrategia del conejo, 101

estructura de factorización, 14

expresión

- estándar, 83

## — F —

flip, 15

forma

- normal, 87

- reducida, 84

formas equivalentes, 57

función

- de Hilbert, 105

## — G —

grado

- de un polinomio, 83

- monomio, 81

- normal, 120



grafo, 102  
 grafo  
     asociado a  $f$ , 31  
     de Ufnarovskii, 103  
     uni-valuado, 53

## — I —

ideal, 86  
 ideal  
     cofinito, 63  
     de monomios líderes, 86  
     homogéneo, 98  
     homogeneizado, 100  
 isomorfismo  
     para una extensión, 112

## — L —

lazo, 53  
 lenguaje, 81  
 longitud, 53

## — M —

monoide libre, 81  
 monomio líder, 83  
 monomios, 81  
 múltiplo  
     monomio, 81

## — N —

números duales, 28

## — O —

orden, 81  
 orden  
     buen, 82  
     eliminador, 94  
     grado total lexicográfico, 82  
     grado total lexicográfico inverso,  
         82  
     lexicográfico, 82  
     monomial, 82  
     total, 81

## — P —

palabras, 81  
 par de grupos emparejados, 19  
 polinomio  
     homogéneo, 98  
     homogeneizado, 100  
 pre-coloraciones, 54  
 prefijo, 88  
 producto  
     directo, 12  
     libre, 12  
     tensor, 13  
     tensor clásico, 18  
     tensor graduado, 18  
     tensor torcido, 15

## — R —

reducción  
     en un conjunto, 83  
     homogénea, 128  
     polinomial, 83  
 reducido, 84

## — S —

S-polinomio, 89  
 serie  
     de Hilbert, 105  
 solapamientos, 89  
 subpalabra, 89  
 sufijo, 89

## — T —

término líder, 83

# Bibliografía

- [ACIM09] Agore A. L, Chirvasitu A, Ion B. and Militaru G, *Bicrossed products for finite groups*, *Algebr. Represent. Theory* **12** (2009), 481–488.
- [AH08] Aschenbrenner M. and Hillar C. J, *An algorithm for finding symmetric Gröbner bases in infinite dimensional rings*, *ISSAC*, 2008.
- [AK06] Ackermann P. and Kreuzer M, *Gröbner basis cryptosystems*, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing* **17** (2006), no. 3, 173–194.
- [Bac] Backelin J. et al, *Bergman*, <http://servus.math.su.se/bergman/>.
- [BCE<sup>+</sup>94] Barke B, Can D. C, Ecks J, Moriarty T. and Ree R. F, *Why you cannot even hope to use Gröbner bases in public key cryptography: An open letter to a scientist who failed and a challenge to those who have not yet failed*, *Journal of Symbolic Computation* **18** (1994), 497–501.
- [Ber78] Bergman G. M, *The Diamond Lemma for ring theory*, *Advances in Mathematics* **29** (1978), 178–218.
- [BK03] Bokut L. A. and Kolesnikov P. S, *Gröbner-Shirshov bases: from their incipency to the present*, *Journal of Mathematical Sciences* **116** (2003), no. 1, 2894–2916.
- [BM00] Borowiec A. and Marcinek W, *On crossed product of algebras*, *J. Math. Phys.* **41** (2000), 6959–6975.
- [Bok72] Bokut L. A, *Unsolvability of the equality problem and subalgebras of finitely presented Lie algebras*, *Math USSR Izvestia* **6** (1972), 1153–1199.
- [Boo59] Boone W. W, *The word problem*, *Annals of Mathematics* **70** (1959), no. 2, 207–265.
- [BS87] Bayer D. and Stillman M, *A theorem of refining division orders by the reverse lexicographic order*, *Duke Math. J.* **55** (1987), 321–328.

- [Buc65] Buchberger B, *Ein algorithmus zum auffinden der basiselemente des restklassenringes nach einem nulldimensionalen polynomideal*, Ph.D. thesis, Universität Innsbruck, 1965.
- [Buc76] ———, *Some properties of Gröbner-bases for polynomial ideals*, ACM SIGSAM Bulletin **10** (1976), no. 4, 19–24.
- [BW91] Becker T. and Weispfenning V, *Gröbner bases: a computational approach to commutative algebra*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [BW98] Buchberger B. and Winkler F (eds.), *Gröbner bases and applications*, London Mathematical Society Lecture Note Series, no. 251, Cambridge University Press, 1998.
- [Cib06] Cibils C, *Non-commutative duplicates of finite sets*, J. Algebra Appl **5** (2006), 361–377.
- [CIMZ00] Caenepeel S, Ion B, Militaru G. and Zhu S, *The factorisation problem and smash biproducts of algebras and coalgebras*, Algebr. Represent. Theory **3** (2000), 19–42.
- [CJL11] Cortadellas O, Jara P. and Lobillo F. J, *A graded criterion in the classification of cofinite homogeneous ideals*, preprint, 2011.
- [CLO05] Cox D. A, Little J. B. and O’Shea D, *Using algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 185, Springer, 2005.
- [CMZ02] Caenepeel S, Militaru G. and Zhu S, *Frobenius and separable functors for generalized module categories and nonlinear equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1787, 2002.
- [CNLP10] Cortadellas O, Navarro G. and López Peña J, *Factorization structures with a two-dimensional factor*, Journal of the London Mathematical Society **81** (2010), 1–23.
- [CU97] Cojocarú S. and Ufnarovski V. A, *Bergman under MS-DOS and Anick’s resolution*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **1** (1997), 139–147.
- [EF94] Ellingsen H. W. and Farkas D. R, *Graphs and Bergman’s GK gap theorem*, Journal of Algebra **164** (1994), 586–594.
- [Eil94] Ellingsen H. W, *Graphs and the growth of monomial algebras*, Lecture notes in Pure and Appl. Math. **151** (1994), 99–109.
- [EPS98] Eisenbud D, Peeva I. and Sturmfels B, *Non-commutative Gröbner bases for commutative algebras*, Proceedings of the american mathematical society **126** (1998), no. 3, 687–691.

- [Fau02] Faugère J. C, *A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero* ( $f_5$ ), ISSAC, 2002.
- [Frö97] Fröberg R, *Introduction to Gröbner bases*, 1997.
- [Ge06] Ge W, *Gröbner bases theory and the Diamond Lemma*, Ph.D. thesis, University of Waterloo, 2006.
- [Ger64] Gerstenhaber M, *On the deformation of rings and algebras*, Ann. Math **2** (1964), no. 79, 59–103.
- [GG99] Guccione J. A. and Guccione J. J, *Hochschild homology of twisted tensor products*, K-Theory **18** (1999), 363–400.
- [GMU97] Green E, Mora F. and Ufnarovskii V. A, *The non-commutative Gröbner freaks*, Proc. Conf. on Symbolic Rewriting Techniques (1997).
- [Gre93] Green E, *An introduction to noncommutative Gröbner bases*, Lect. Notes Pure Appl. Math. **151** (1993), 167–190.
- [HMU79] Hopcroft J. E, Motwani R. and Ullman J. D, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, 1979.
- [Hui03] Huishi L, *Noncommutative Gröbner bases and filtered-graded transfer*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2003.
- [Hui09] ———, *On the calculation of  $gl.dim^{\mathbb{N}}g(\alpha)$  and  $gl.dim\tilde{A}$  by using Gröbner bases*, Algebra Colloquium **2** (2009), no. 16, 181–194.
- [HYJ99] Huishi L, Yuchun W. and Jingliang Z, *Two applications of noncommutative Gröbner bases*, Ann. Univ. Ferrara **XLV** (1999), 1–24.
- [JLPNS11] Jara P, López Peña J, Navarro G. and Stefan D, *On the classification of twisting maps between  $k^n$  and  $k^m$* , Algebras and representation theory (2011), DOI:10.1007/s10468-010-9222-x.
- [Kelty] Keller B. J, *Algorithms and orders for finding noncommutative Gröbner bases*, Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- [KK93] Kobayashi S. and Kobayashi Y, *On algebras with Gelfand-Kirillov dimension one*, Proceedings of the american mathematical society **119** (1993), no. 4.
- [KL00] Krause G. R. and Lenagan T. H, *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*, Graduate studies in Mathematics, no. 22, American Mathematical Society, 2000.
- [Kro03] Krook C, *Dimensionality of quotient algebras*, Tech. report, <http://www.win.tue.nl/amc/pub/grobner/dqa.ps>, 2003.

- [KS95] Kostrikin A. I. and Shafarevich I. R (eds.), *Algebra VI*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 5, Springer, 1995.
- [Lev07] Levin A. B, *Gröbner bases with respect to several orderings and multi-variable dimension polynomials*, Journal of Symbolic Computation **42** (2007), 561–578.
- [LP07] López Peña J, *Factorization structures. A cartesian product for Non-commutative Geometry*, Ph.D. thesis, Universidad de Granada, 2007.
- [LPN08] López Peña J. and Navarro G, *On the classification and properties of noncommutative duplicates*, K-Theory **38** (2008), 223–234.
- [LSL09] La Scala R. and Levandovskyy V, *Letterplace ideals and non-commutative Gröbner bases*, Journal of Symbolic Computation **44** (2009), 1374–1393.
- [Maj90] Majid S, *Physics for algebraists: non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction*, J. Algebra **130** (1990), 17–64.
- [MN05] Månsson J. and Nordbeck P, *A generalized Ufnarowski graph*, AAEECC **16** (2005), no. 5, 293–306.
- [Mor86] Mora F, *Gröbner bases for non-commutative polynomial rings*, AAEECC, 1986, pp. 353–362.
- [Mor88] Mora T, *Gröbner bases in non-commutative algebras*, ISSAC, 1988, pp. 150–161.
- [Mor94] ———, *An introduction to commutative and non-commutative Gröbner bases*, Theor. Comp. Sci. **134** (1994), 131–173.
- [New42] Newman N. H, *On theories with a combinatorial definition of "equivalence"*, Ann. of Math. **43** (1942), 223,243.
- [Nor98] Nordbeck P, *On some basic applications of Gröbner bases in non-commutative polynomial rings*, LMS Lecture Notes Series **251** (1998).
- [Nor01] ———, *On the finiteness of Gröbner bases computation in quotients of the free algebra*, Comm. and Comp. **11** (2001), no. 3, 157–180.
- [NVO04] Nastasescu C. and Van Oystaeyen F, *Methods of graded rings*, Lecture Notes in Math., vol. 1836, Springer, 2004.
- [Okn88] Okniński J, *On monomial algebras*, Arch. Math. **50** (1988), 417–423.
- [Pie82] Pierce R. S, *Associative algebras*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 88, 1982.

- [Pri96] Pritchard F. L, *The ideal membership problem in non-commutative polynomial rings*, J. Symbolic Computation **22** (1996), 27–48.
- [Shi62] Shirshov A. I, *Some algorithmic problems for Lie algebras*, Sib. Mat. Zh. **3** (1962), no. 11, 292–296.
- [Shi90] Shirayanagi K, *On the isomorphism problem for finite-dimensional binomial algebras*, ISSAC, 1990, pp. 106–111.
- [Shi91] ———, *A classification of finite-dimensional monomial algebras*, Effective Methods in Algebraic Geometry, vol. 94, 1991, pp. 469–482.
- [Shi93] ———, *Decision of algebra isomorphisms using Gröbner bases*, Computational Algebraic Geometry, 1993.
- [Sil00] Silvester J. R, *Determinant of block matrices*, Maths Gazette **84** (2000), 460–467.
- [Tak81] Takeuchi M, *Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras*, Comm. Algebra (1981), no. 9, 841–882.
- [Ufn80] Ufnarovskii V. A, *Poincaré series of graded algebras*, Matematicheskie Zametki **27** (1980), no. 1, 21–32.
- [Ufn82] ———, *A growth criterion for graphs and algebras defined by words*, Matematicheskie Zametki **31** (1982), no. 3, 465–472.
- [Ufn89] ———, *On the use of graphs for computing a basis, growth and Hilbert series of associative algebras*, Matematicheskie Zametki **180** (1989), no. 11, 417–428.
- [Ufn08] ———, *On the cancellation rule in the homogenization*, Computer Science Journal of Moldova **16** (2008), no. 1(46), 133–145.
- [Wei92] Weispfenning V, *Finite Gröbner bases in non-noetherian skew polynomial rings*, ISSAC, 1992, pp. 329–334.



```
void define iUpoi(double gamma, double Dpp, double Dpq, double Dppq, int
Ninter, double h, double *x,
```

```
{
    int j;
    for(j=0; j<Ninter+1; j++)
    {
        iUpoi[j]=-(iUpoi[j]-iUpoi[j-1])/dt);
        if(j==Ninter/2) cout<<"Ya termino el laplaciano con valor";
        iUpoi[j]=iUpoi[j]+Lap(j,poi,h);
        iUpoi[j]=iUpoi[j]+V(j,poi,s,J, gamma,Dpp,Dpq,Dppq,h);
        iUpoi[j]=iUpoi[j]+Ker(j,poi,s,J, gamma,h);
        //cout<<"Ya esta S con valor total "<<RHS[j]<<endl;
        iUpoi[j]=iUpoi[j]+Log(j,poi,s,Dpq);
        //cout<<"Ya esta el logaritmo con valor total "<<RHS[j]<<endl;
        iUpoi[j]=iUpoi[j]+GL(j,poi,s,Dpq,h);
        //cout<<"Ya esta GL con valor total "<<RHS[j]<<endl;
        iUpoi[j]=iUpoi[j]+F(j,poi,s,J,Dpq,h);
        //cout<<"Ya esta F con valor total "<<RHS[j]<<endl;
        iUpoi[j]=iUpoi[j]+DG(j,poi,s,J,Dpq,h);
        //cout<<"Ya esta DG con valor total "<<RHS[j]<<endl;
    }
}
```

Código A.3. Fragmento de código para formar relaciones de 3 en 3

```
int main()
{
    long p=1;
    para (i=0; i<long_h; i++) hacemos
    {
        para (j=0; j<long_h; j++) hacemos
        {
            para (k=j+1; k<long_h; k++) hacemos
            {
                string s(long_x1, x[i]);
                string s(long_x1, x[j]);
                string s(long_x1, x[k]);
                string s(long_x1, x[i]);
                string s(long_x1, x[k]);
                long_p++;
            }
        }
    }
}
```

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{J}^C & \longrightarrow & k(x, y) & \longrightarrow & k(x, y)/\beta \\ & & \parallel & & \\ \mathcal{J} & \longrightarrow & k(x, y) & \longrightarrow & k(x, y)/\beta \end{array}$$

$$\mathcal{J}/\beta^C \longrightarrow k(x, y)/\beta \longrightarrow k(x, y)/\beta \approx \frac{k(x, y)/\beta}{\beta/\beta}$$

↑  
3<sup>er</sup> TISO

finita  $\longleftrightarrow$  finita